JOVAN PETRIĆ

ODREDJIVANJE NULA ALGEBARSKIH I TRIGONOMETRISKIH POLINOMA POMOĆU REPETITIVNOG DIFERENCIJALNOG ANALIZATORA I PRIMENA NA ISPITIVANJE DINAMIČKE STABILNOSTI

BEOGRAD 1960

ODREDJIVANJE NULA ALGEBARSKIH I TRIGONOMETRISKIH POLINOMA POMOĆU REPETITIVNOG DIFERENCIJALNOG ANALIZATORA I PRIMENA NA ISPITIVANJE DINAMIČKE STABILNOSTI

UVOD

Predmet ovog rada je odredjivanje nula algebarskih i trigonometriskih polinoma pomoću linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora i primena na ispitivanje dinamičke stabilnosti, rešavanje nekih trigonometriskih jednačina i odredjivanje analitičkog rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina.

Neposredni povod za ovaj rad pružile su poznate osobine analizatora:

a/ brzo nalaženje rešenja i

b/ vizuelno praćenje uticaja promene pojedinih koeficijenata i parametara na rezultat. Ovome treba dodati i tu osobinu da upotrebljene metode ne zahtevaju nikakve specijalne uredjaje već se u radu koriste samo standardne komponente repetitivnog diferencijalnog analizatora: operativni pojačavači, potenciometri za postavljanje početnih uslova, potenciometri množači, linearni spregnuti potenciometri i merni sistem.

Problemi odredjivanja nula algebarskih i trigonometriskih polinoma i ispitivanje stabilnosti imaju veliki praktični značaj u primenjenoj mehanici i mnogim granama tehničkih nauka pa se zato njima poklanja velika pažnja. Do sada su ovi problemi obradjivani u mnogim teoriskim radovima. Pored toga, dat je niz praktičnih metoda za odredjivanje nula polinoma, kao i niz specijalnih kriterijuma pomoću kojih se kvalitativno ispituje dinamička stabilnost. O tome da li je sistem stabilan, ili ne, može se doneti zaključak na osnovu poznavanja vrednosti nula odgovarajućih polinoma ili kvalitativnim ispitivanjem položaja nula preko konformnog preslikavanja odredjenih kontura z-ravni na W-ra-

U novije vreme, brzi razvoj analognih računskih mašina proistekao je iz potrebe za brzim i kvalitativnim rešavanjem velikog broja praktičnih problema. Prvi ozbiljniji radovi iz primene ovih mašina za odredjivanje nula algebarskih polinoma pojavili su se pre dve decenije. Sve do danas se mislilo na konstrukciju i upotrebu specijalnih analognih mašina za rešavanje ovih problema.

Pored ostalog, cilj ovog rada je da ukaže i na to da danas nema nikakve potrebe težiti za konstrukcijom specijalnih analognih mašina za rešavanje ovih problema, jer se za iste svrhe mogu uspešno koristiti diferencijalni analizatori koji postepeno stiču sve šire polje primene i izbacuju iz upotrebe specijalne analogne mašine.

Ovim radom je zaokrugljena mogućnost upotrebe repetitivnog diferencijalnog analizatora za odredjivanje nula algebarskih polinoma, a time i za ispitivanje dinamičke stabilnosti i rešavanje nekih veoma važnih praktičnih problema kao što je ispitivanje flutter-a. Rešavanje ovih problema svodi se na konformna preslikavanja polinomima. Rad je posebno istakao problem flutter-a kao tipični problem koji zahteva odredjivanje nula algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima.

Na početku rada dat je prikaz izvesnog broja radova koji obradjuju primenu analognih mašina za rešavanje problema koji su predmet ovog rada.

U glavi II data je metoda za odredjivanje nula algebarskih polinoma pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora, koja koristi Dekartove koordinate, dok je u glavi III data metoda koja koristi polarne koordinate.

U glavi IV dati su postupci za ispitivanje dinamičke stabilnosti pomoću konformnog preslikavanja.

U glavi V data je metoda za odredjivanje nula trigonometriskih polinoma i rešavanje nekih trigonometriskih jednačina pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora.

U glavi VI data je izvesna primena izloženih metoda a u glavi VII rešeni primeri.

U ovom radu korišćen je, za eksperimentalne provere izloženih metoda, repetitivni diferencijalni analizator Instituta za nuklearne nauke "Boris Kidrič" koji je do detalja opisan u [24] i [25], dok je upotrebljeni merni sistem opisan u [26].

Na ovom mestu želim da izrazim zahvalnost Institutu za nuklearne nauke "Boris Kidrič" u Vinči gde mi je omogućen rad na ovoj tezi, a posebno Dr.ing. R.Tomoviću na pomoći u toku rada i sugestijama pri pregledu rukopisa.

Posebnu zahvalnost dugujem Prof. T.Andjeliću dekanu Prirodnomatematičkog fakulteta u Beogradu na predusretljivosti i korisnim sugestijama pri pregledu rukopisa i na spremnosti da kao rukovodilac ove teze u svakoj prilici izadje u susret.

Srdačno se zahvaljujem Ing. F.Modiću na stalnom interesovanju za ovaj rad i korisnim sugestijama.

I. PRIKAZ ANALOGNIH METODA KOJE SE ODNOSE NA ODREDJIVANJE NULA POLINOMA

I.1 Analogne metode za odredjivanje nula algebarskih polinoma

Do sada, najiscrpniji prikaz postojeće literature koja obradjuje i analizira primenu specijalnih analognih mašina za odredjivanje nula algebarskih polinoma dao je 1957 godine Михайлов [1]. Zato će se ovde ukazati samo na one radove koji nisu obuhvaćeni u pregledu [1] i na radove koji su publikovani od 1957 godine do danas.

U najopštijem slučaju nule algebarskog polinoma kompleksne promenljive

$$W(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \qquad /I,1/$$

mogu biti izražene u polarnim

$$z=\rho e^{i\theta} \qquad /I,2/$$

ili Dekartovim koordinatama

$$z=x+iy \quad . \qquad /I,3/$$

Pri realizovanju odgovarajućih analognih električnih modela za polinome /I,1/, korišćena su dva oblika ovih polinoma:

$$W=U(\rho,\theta)+i\,V(\rho,\theta)=0 \qquad /I,4/$$

i

$$W=U(x,y)+i\,V(x,y)=0 \quad . \qquad /I,5/$$

Kod nekih specijalnih slučajeva primene analognih računskih mašina, direktno je korišćen izraz za polinome /I,1/ u obliku

$$W=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu e^{i\nu\theta} \quad . \qquad /I,6/$$

Opšti princip konstrukcije specijalnih analognih mašina za odredjivanje nula polinoma /I,1/ je isti kao i kod svih drugih analognih mašina i sastoji se u tome da se koordinate ρ i θ ili x i y vežu u analogne fizičke veličine /vreme, napon, mehanička pomeranja i dr./

koje u konkretnom slučaju pružaju najpovoljnije rešenje. Eksploatacija ovih mašina sastoji se u uspostavljanju veza, koje odgovaraju konkretnom polinomu, izmedju osnovnih elemenata mašine, a variranjem fizičkih veličina, koje imaju uspostavljenu analogiju sa koordinatama ρ i θ /x,y/, traže se one vrednosti ρ i θ /x,y/ koje ispunjavaju uslove /I,4/, odnosno /I,5/. Ovaj postupak odredjivanja nula može da bude ručni i automatski. Kod ručnog pretraživanja sam operator vrši promenu koordinata i traži one vrednosti koje svode na nulu $|W(z)|$.

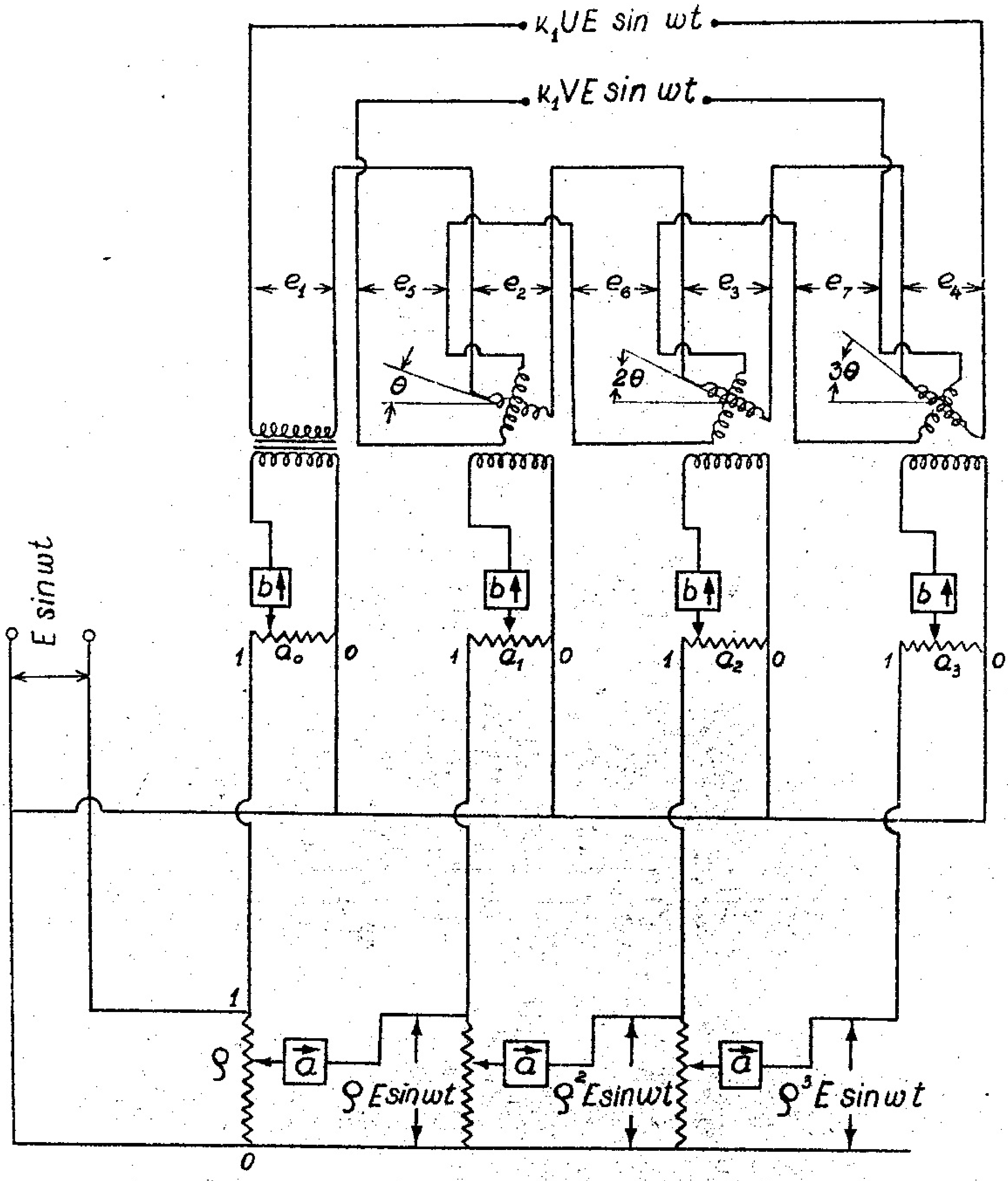
Za odredjivanje svih nula algebarskih polinoma, pošto one mogu imati različite module od kojih su neki veći a neki manji od 1, koriste se smene za promenljivu z i to:

$$z = kz^{*}, \quad z = \frac{k}{z^{*}} \qquad /I,7/$$

gde je k-pogodna konstanta, a z^{*}-nova promenljiva. Ove smene omogućuju da se analognim putem mogu odrediti sve nule polinoma, bez obzira na veličinu njihovog modula. Vrednost konstante k odredjuje se u zavisnosti od konkretnog polinoma čije se nule odredjuju.

Neke od specijalnih analognih mašina koje se koriste samo za odredjivanje nula algebarskih polinoma konstruisane su tako da je polinom /I,1/ potrebno prethodno pomnožiti sa z u cilju primene identičnih elemenata u odgovarajućem analognom električnom modelu. Ovim postupkom se uključuje u dati polinom još jedna nula, $z=0$, pri čemu prave nule polinoma ostaju nepromenjene. Težnja ka unifikaciji elemenata potrebnih za odredjivanje nula polinoma /I,1/, koja je omogućena množenjem polinoma sa z , išla je na štetu ekonomičnosti njihove upotrebe, a prema tome, i na štetu tačnosti dobijenih rezultata. Od prednosti može se navesti olakšanje u izvodjenju identičnih elemenata.

Metode za odredjivanje nula polinoma analognim putem mogu se u suštini podeliti u dve osnovne grupe, prema tome da li se u datoj metodi koriste polarne /I,2/ ili Dekartove /I,3/ koordinate. Ova podela je logična i neka druga podela, naprimer prema upotrebljenim elementima za realizaciju odgovarajućih analognih električnih modela, praktično bi bila nemoguća zato što skoro svaka nova metoda koristi nove elemente koji su veoma raznovrsni a najčešće se sreću: operativni pojačavači, rizolveri /resolvers/, RLC kola, selsini /selsyns/, linearni i nelinearni potenciometri.



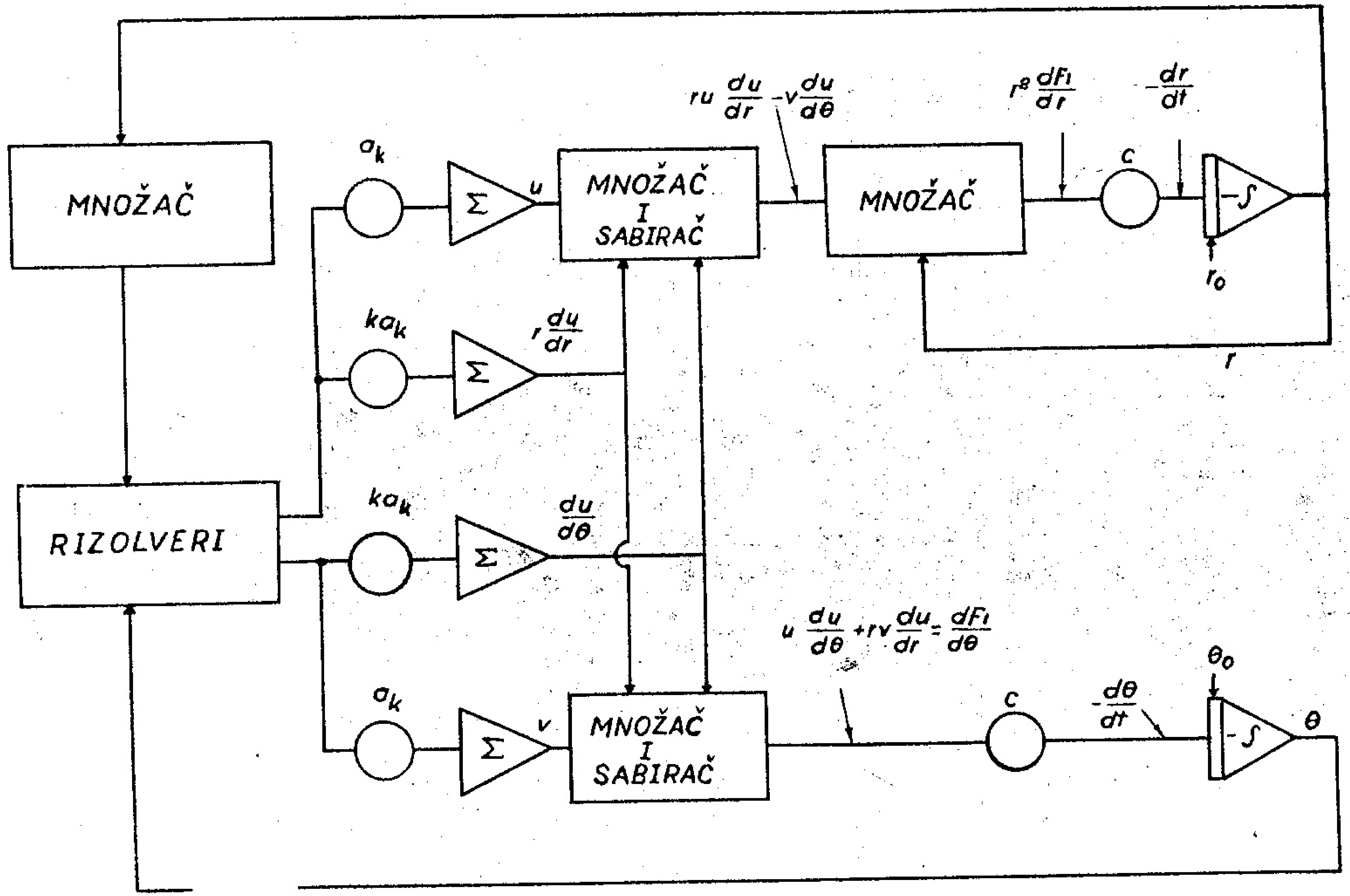
Sl. 1 Analogni električni model za odredjivanje nula polinoma 3-eg stepena upotrebom rizolvera

I.1.1. Metode koje koriste polarne koordinate

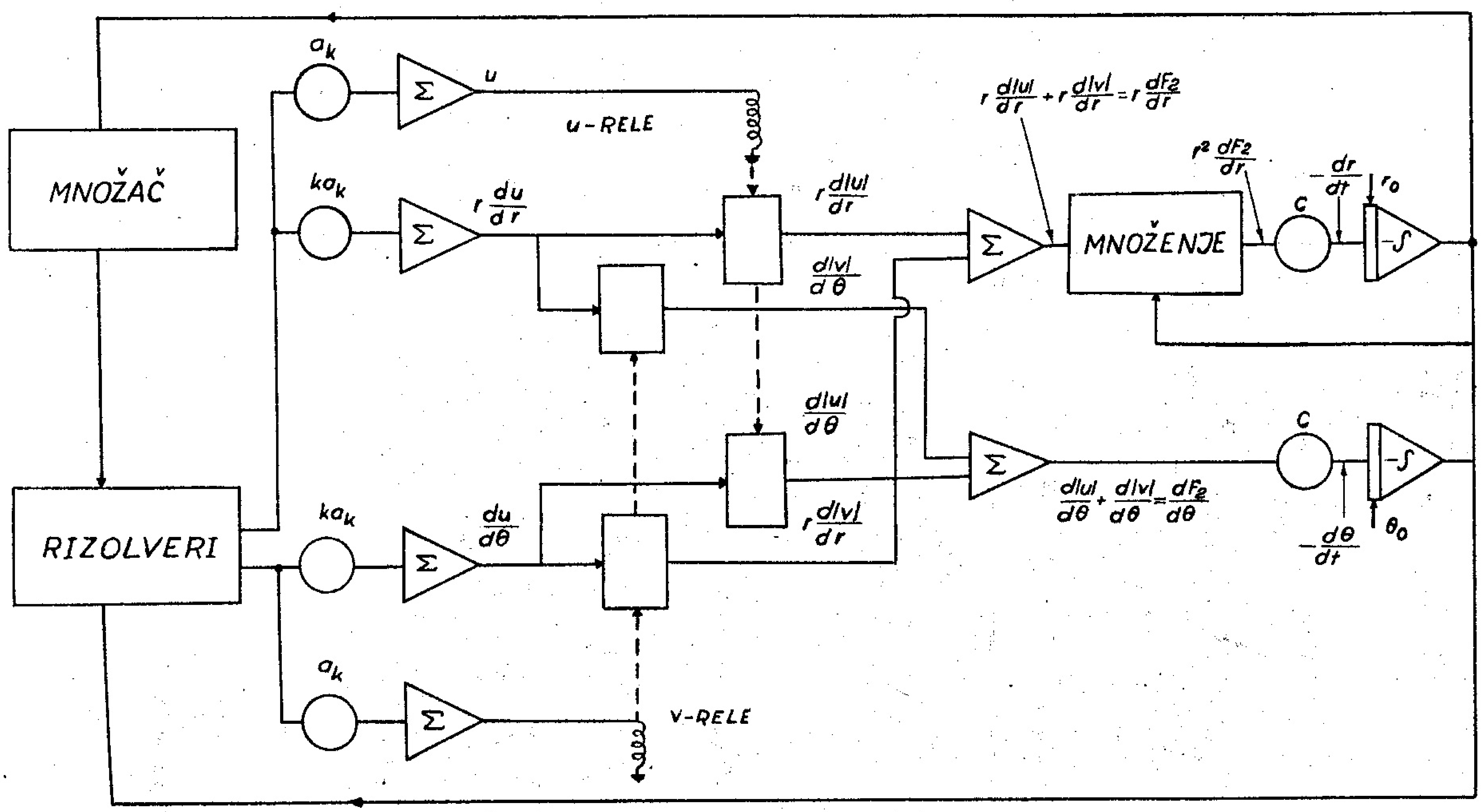
Može se reći da u literaturi pretežno preovladjuju metode za odredjivanje nula algebarskih polinoma u kojima se koriste polarne koordinate, tim pre ako su za tu svrhu korišćene specijalne analogne mašine. Pored radova čiji je prikaz dat u [1] , potrebno je ukazati na radove [2-7] u kojima se takodje koriste polarne koordinate a koji imaju svojih specifičnosti. Tako naprimer Warshawsky [2] za odredjivanje nula algebarskih polinoma /I,1/ koristi pored ostalih elemenata i rizolvere. On je skoro svu pažnju posvetio analizi mogućnosti odredjivanja nula polinoma trećeg stepena. Medjutim, isti principi se mogu primeniti i za odredjivanje nula polinoma višeg stepena. Analogni električni model, kojeg je Warshawsky koristio za odredjivanje nula polinoma trećeg stepena, dat je na sl. 1 gde su $\overrightarrow{a}$ i $b\uparrow$, prema autoru, oznake za pojačavače a $e_1, e_2, \ldots, e_7$ imaju vrednosti

$$
\begin{aligned}
e_1 &= a_0 K_1 E \sin \omega t \\
e_2 &= a_1 \rho \cos\theta \, K_1 E \sin \omega t \\
e_3 &= a_2 \rho^2 \cos 2\theta \, K_1 E \sin \omega t \\
e_4 &= a_3 \rho^3 \cos 3\theta \, K_1 E \sin \omega t \\
e_5 &= a_1 \rho \sin\theta \, K_1 E \sin \omega t \\
e_6 &= a_2 \rho^2 \sin 2\theta \, K_1 E \sin \omega t \\
e_7 &= a_3 \rho^3 \sin 3\theta \, K_1 E \sin \omega t \\
e_1 + e_2 + e_3 + e_4 &= K_1 U(\rho,\theta) E \sin \omega t \\
e_5 + e_6 + e_7 &= K_1 V(\rho,\theta) E \sin \omega t
\end{aligned}
$$

Vidi se da je za odredjivanje nula algebarskih polinoma trećeg stepena ovim postupkom bilo potrebno 3 rizolvera, 3 linearna spregnuta potenciometra, 4 potenciometra za postavljanje koeficijenata, 7 izolirajućih pojačavača i 1 fiksni transformator. Analogni električni model sa sl. 1 ima dosta sličnosti sa analognim električnim modelom kojeg je koristio Елизаренков [7] , sa razlikom što je Елизаренков koristio selsine, mesto rizolvera, i nelinearne spregnute potenciometre za predstavljanje ρ^k /k = 1,2,... , n/. Za odredjivanje nula polinoma n-tog stepena metodom koja je opisana u radu [2] bilo bi potrebno /2n + 1/ pojačavača, n rizolvera, n linearnih spregnutih potenciometara, /n + 1/ potenciometara za postavljanje koeficijenata i jedan fiksni



Sl. 2b Analogni električni model za metodu I



Sl. 2b Analogni električni model za metodu II

transformator. Ako se uzme u obzir i to da ovaj uredjaj predstavlja samo jednu specijalnu mašinu namenjenu rešavanju samo jedne uske klase problema, da se konstatovati da je neekonomičan, jer zahteva veliki broj elemenata koji,ni najmanje, nisu jednostavni i jeftini. Prikaz metode Елизаренкова i njoj sličnih metoda,koje su razradili Hart 1938, Schooley 1938 i Гинзбург 1955 godine, dat je u [1].

Isto tako, Levine i Meissinger [3] za odredjivanje nula algebarskih polinoma analognim putem, koriste od elemenata i rizolvere, pored operativnih pojačavača i množača funkcija. Njihov postupak je zasnovan na primeni poznate metode postepenog približavanja koja se sastoji u traženju takvih vrednosti za ρ i θ da izraz $F_1=U^2+V^2=|W|^2$ ili $F_2=|U|+|V|$, gde je U realni a V imaginarni deo polinoma /I,1/, postane jednak nuli. U tom cilju koriste simultane diferencijalne jednačine

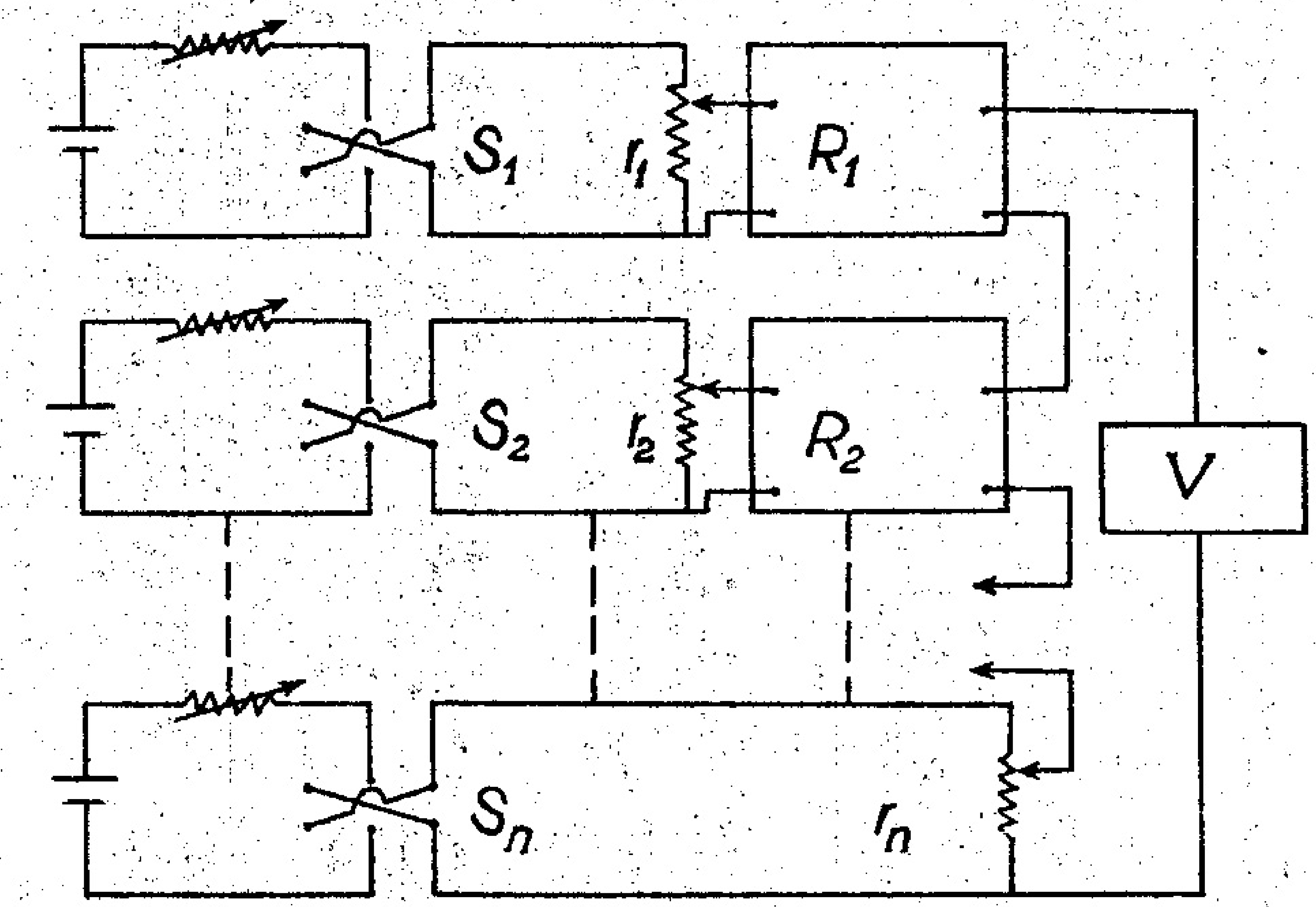
$$\frac{d\rho}{dt}=-c\frac{\partial F}{\partial\rho} \qquad /I,8/$$

$$\rho\frac{d\theta}{dt}=-c\frac{\partial F}{\rho\partial\theta} \qquad /I,9/$$

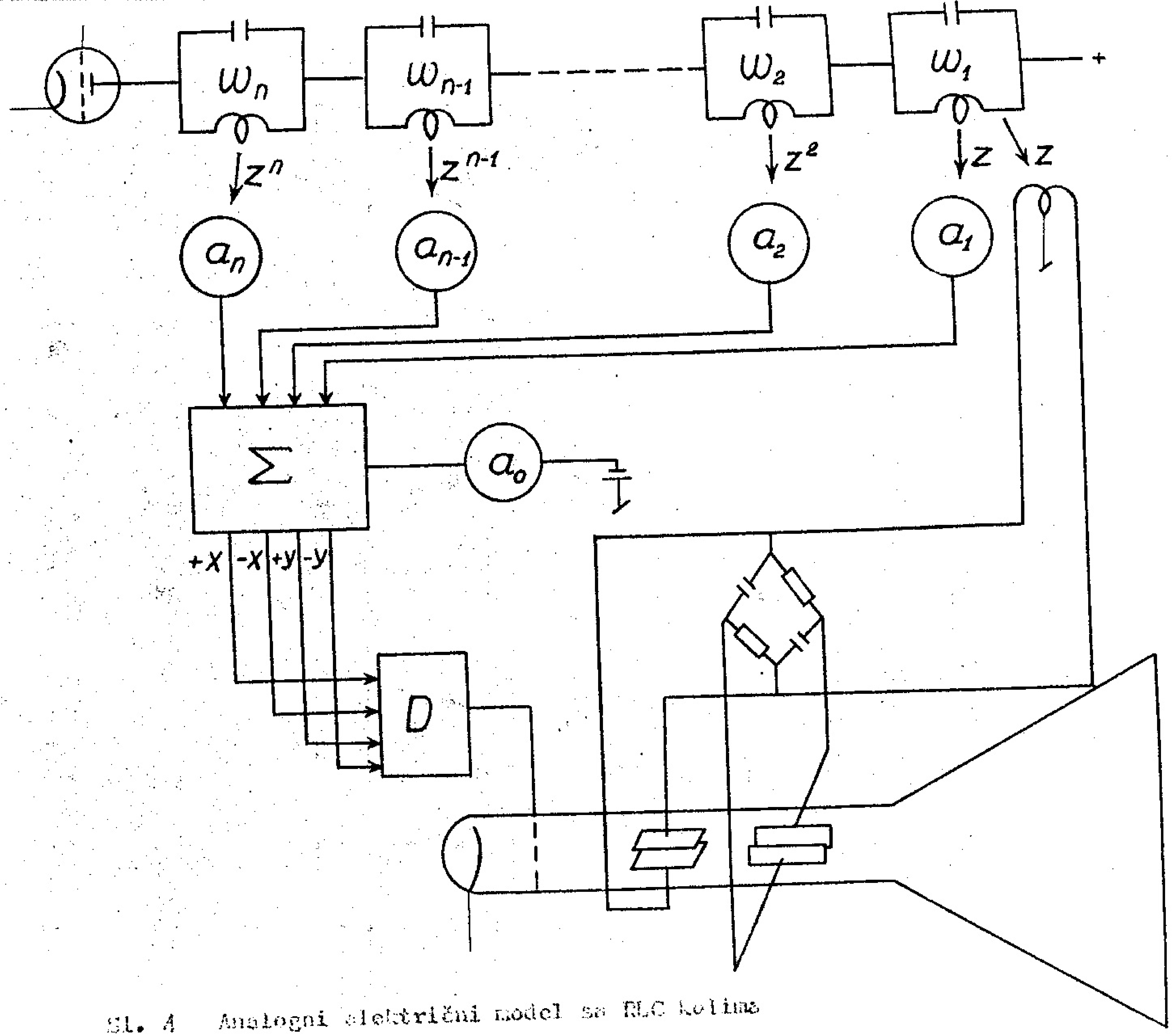
gde je C proizvoljna konstanta koja odredjuje strminu duž krive, i prema njima sastavljaju odgovarajuće analogne električne modele, bilo da koriste $F=F_1$ /metoda I/ ili $F=F_2$ /metoda II/.

Obe ove metode su zasnovane na iterativnom postupku i kao takve imaju veliki nedostatak. Ako se tome doda i činjenica da za obe metode koriste nelinearne elemente, tim pre se mogu uočiti njihovi nedostaci i specijalizovana namena uredjaja. Odgovarajući analogni električni modeli za metodu I i II dati su na sl. 2a i sl. 2b.

U radu Брика i Гинзбурга [4] opet se pominju od elemenata selsini i nelinearni potenciometri tako da je uredjaj kojeg su koristili za odredjivanje nula algebarskih polinoma skoro istovetan sa onim kojeg je upotrebljavao Елизаренков [7]. Za razliku, u radu [4] je ukazano na mogućnosti vizuelnog praćenja na ekranu katodnog oscilografa postupka rešavanja i uticaja promene pojedinih parametara na rezultate kao i na praktičnu korist ovih mogućnosti. Oni su svaki polinom predhodno podvrgavali transformaciji, pomoću smene $z=\rho e^{i\theta}=\rho_{max}\beta e^{i\theta}$, gde je ρ_{max} - pogodno izabrani pozitivni broj, a $0\leq\beta\leq1$, zatim dobijeni polinom dele sa najvećom vrednosti $a_k\rho_{max}^k$ da bi koeficijenti polinoma bili manji od 1. Ovakve zahteve im je nametnula upotreba specijalizovanog i fiksnog uredjaja čiji se prikaz izostavlja jer je u [1] dat opis analognog električnog modela za metodu [7] koji



Sl. 3 Analogni električni model za odredjivanje nula algebarskih polinoma kada se koriste sinusni i kosinusni potenciometri

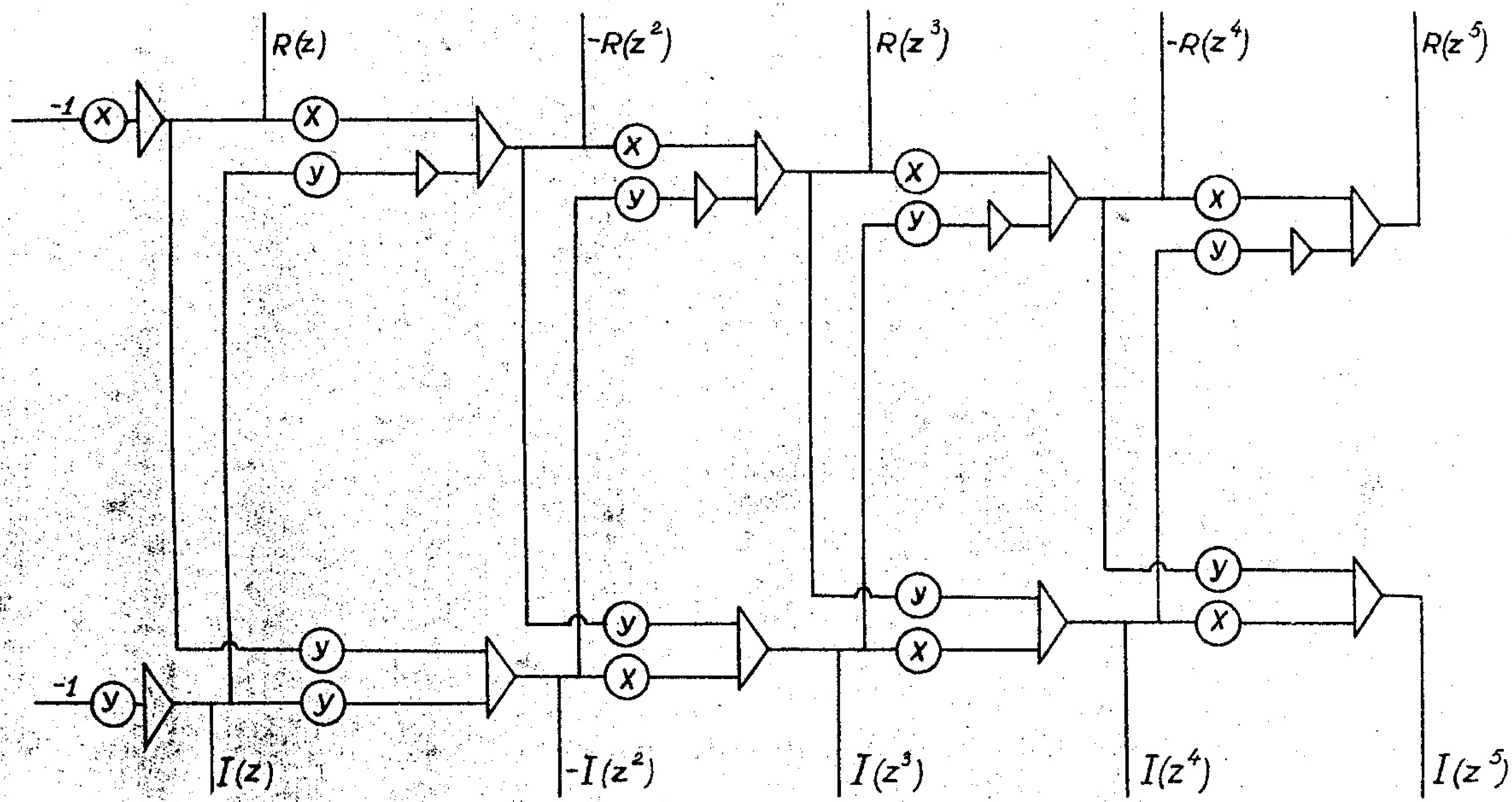


Sl. 4 Analogni električni model sa RLC kolima

nema bitnih razlika od analognog električnog modela koji se koristi u metodi [4].

Jedan specijalni uredjaj za odredjivanje nula algebarskih polinoma, koga su upotrebili Schwetman i Burmeister [5] je elektromehaničkog tipa i njegovi osnovni elementi su, pored linearnih potenciometra za postavljanje koeficijenata, sinusni i kosinusni potenciometri koji proizvode na svojim izlazima sinusoidalne i kosinusoidalne potencijale učestanosti f,2f,...,nf. Svaki od ovih upotrebljenih potenciometara ima sopstvenu bateriju kao izvor za napajanje. Sumiranje potencijala, za uspostavljenu analogiju sa datim polinomom, vrši se pomoću voltmetra visoke impedance i na taj način se traže one vrednosti ρ i θ za koje će biti ispunjeni potrebni uslovi za nule polinoma pri čemu će voltmetar pokazati nulu. Postupak koji je izložen u radu [5] veoma je nepogodan za odredjivanje kompleksnih nula polinoma /I,1/, jer zahteva predhodnu numeričku pripremu datog polinoma koja je veoma komplikovana. Ona se sastoji u svodjenju polinoma sa kompleksnim nulama na takav transformisani polinom, za koji je potrebno naći samo realne nule. Ovaj postupak može se iskoristiti samo za nalaženje kompleksnih nula polinoma čiji je stepen najviše 4-tog reda na koje ograničenje autori nisu ukazali. Imajući u vidu i to da se za rad koristi jedan specijalizovani uredjaj, nije teško uočiti njegove nedostatke. Analogni električni model ovog uredjaja dat je na sl. 3 gde S pretstavlja preklopnike za promenu znaka, r linearne a R sinusne i kosinusne potenciometre.

Interesantno je ukazati na rad Крыже [6] zato što on predstavlja prvi pokušaj da se problem odredjivanja nula polinoma /I,1/ zasnuje na primeni RLC kola. Za odredjivanje nula polinoma n-tog stepena potrebno je n RLC kola koja su postavljena na učestanostima $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, n\omega$. Za stabilnost parametara RLC kola potrebna je dobra mehanička konstrukcija jer je za nju, najvećim delom, vezana osetljivost ovog uredjaja a prema tome i metode za koju je konstruisan. Prvi eksperimenti izvršeni na primeru polinoma 3-eg stepena dali su veoma loše rezultate, tako da je greška iznosila i do 10% , što je daleko ispod mogućnosti analognih mašina, iz čega se uočava velika osetljivost ovog uredjaja. Poboljšanje konstrukcije njegovih elemenata omogućilo bi rešavanje polinoma višeg stepena i postizanje veće tačnosti. Analogni električni model ovog uredjaja dat je na sl. 4, gde su kružićima sa indeksima a_i označeni induktivni kalemovi, sa D diskriminator, dok blok $\sum$ ima značenje faznog uskladjivača i sabirača.



Sl. 5 Analogni električni model za odredjivanje nula polinoma 5-og stepena

1.1.3. Metode koje koriste Dekartove koordinate

U literaturi postoji veoma mali broj metoda koje koriste Dekartove koordinate za odredjivanje nula algebarskih polinoma analognim putem. One su potpuno zanemarene čak i u prikazu [1]. Sav dosadašnji rad bio je orijentisan na konstrukciju specijalnih analognih mašina, tako da se za odredjivanje nula polinoma pomoću njih nisu mogle povoljno iskoristiti Dekartove koordinate koje najčešće zahtevaju primenu operativnih pojačavača, a time i primenu analizatora.

Prvi pokušaj da se odrede nule algebarskih polinoma pomoću analizatora učinili su 1953 godine Scherberg i Riordan [8]. Oni su od elemenata analizatora koristili samo operativne sabirače. Za predstavljanje x i y služili su im linearni spregnuti potenciometri tako da su osnovne teškoće primene ove metode u izboru smera pomeranja osovina linearnih spregnutih potenciometara da bi postupak kod odredjivanja vrednosti x i y, koje ispunjavaju potrebne uslove da $z = x + iy$ bude nula polinoma /I,1/, bio konvergentan. Pored toga, ove metode zahtevaju upotrebu velikog broja elemenata i to, pored ostalog, $3n+1 \div 4n$ operativnih sabirača i $4n$ linearnih spregnutih potenciometara, što se u velikoj meri odražava na tačnost dobijenih rezultata. Sam postupak kod odredjivanja nula polinoma pomoću predložene metode je takav da je nepogodan za vizuelno praćenje rešenja na ekranu katodnog oscilografa tako da se ne može uspešno pratiti ni uticaj promene pojedinih koeficijenata i parametara na rezultat. Principi za sastavljanje analognog električnog modela za ovu metodu, najbolje se mogu videti sa sl. 5 gde $R(z^k)$ i $I(z^k)$, $k=1,2,\ldots$ predstavljaju realni i imaginarni deo kompleksne promenljive $z=x+iy$ podignute na odgovarajuće stepene, a kružići sa oznakama x predstavljaju jedan par linearnih spregnutih potenciometara, dok sa oznakama y predstavljaju drugi par. Vrednosti $R(z^k)$ i $I(z^k)$ množe se odgovarajućim koeficijentima a_k i sabiraju, vodeći računa o znaku i na taj način dobija se realni i imaginarni deo polinoma /I,1/. Postoji potpuna sličnost ove metode sa jednom potenciometarskom metodom koju je opisao Soroka [9] u kojoj se, za razliku, sabiranje vrši pomoću otpora.

Još 1935 godine, Kempner [10] je pri odredjivanju kompleksnih nula algebarskih polinoma koristio jedan interesantan oblik za $U(x,y)$ i $V(x,y)$:

$$U(x,y) = W(x) - \frac{y^2}{2!} W''(x) + \frac{y^4}{4!} W^{(4)} - \cdots \qquad /I,10/$$

$$V(x,y) = \frac{y}{2!} W'(x) - \frac{y^3}{3!} W'''(x) + \frac{y^5}{5!} W^{(5)}(x) - \cdots \qquad /I,11/$$

Ovaj oblik je Atkinson [11] iskoristio kod primene sporog analizatora a Ward [12] kod primene digitalnih mašina za odredjivanje nula algebarskih polinoma. Postupak u radu [11] zahteva, pored upotrebe operativnih pojačavača, upotrebu nelinearnih potenciometara zavisnosti y^k /k=1,2,...,n/ što se može smatrati jednim od osnovnih njegovih nedostataka. Sem toga, za ove svrhe spori analizator je nepogodan, zato što se rešenje dobija veoma sporim postupnim približavanjem usled čega je otežano praćenje uticaja promene pojedinih koeficijenata i parametara na rešenje. Nedostaci rada [11] dali su povod za rad [13] koji predstavlja početak rada na problemu primene repetitivnog diferencijalnog analizatora na odredjivanje nula algebarskih polinoma.

U radu Эльсберга [14] , koji je objavljen istovremeno sa radom [13] , prikazana je metoda za odredjivanje realnih nula polinoma /I,1/ pomoću sporog analizatora, koja se zasniva na odredjivanju preseka rešenja diferencijalne jednačine $\frac{d^n W(x)}{dx^n} = n!$ sa osom nezavisno promenljive x. Ovi preseci odredjuju samo relane nule polinoma /I,1/.

Predloženi postupak za odredjivanje kompleksnih nula zasnovan je na grubim uprošćenima, zbog čega se dobijeni rezultati nemogu ni izbliza porediti sa rezultatima koje omogućuje postupak [13] . Osim toga, u radu [14] nisu rasmotreni ni najopštiji slučajevi algebarskih polinoma, već samo specijalni, tako da se on može smatrati nekompletnim.

Этерман i Обувалин [15] Predložili su jedan postupak za odredjivanje nula polinoma analognim putem koji se, za razliku od drugih poznatih postupaka, zasniva na primeni sistema homogenih linearnih diferencijalnih jednačina koji se može svesti na homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu višeg reda čiji je karakteristični polinom algebarski polinom čije se nule odredjuju. Uvodeći parametar λ uz dijagonalne koeficijente ovoga sistema, može se odrediti ona vrednost λ za koju se javlja prelaženje od nestabilnog režima na stabilni. Tako odredjena vrednost predstavlja realnu nulu datog polinoma. Predloženi postupak je primenljiv za odredjivanje svih realnih nula polinoma /I,1/, dok je za odredjivanje kompleksnih nula nepogodan.

Najnoviji rad iz ove oblasti, kojeg je objavio Harbert [16] , sadrži dve metode koje se odnose samo na odredjivanje realnih nula polinoma /I,1/. Obe ove metode bile su još ranije poznate, od kojih, prva u radovima [13] i [30] a druga u radovima [13] i [14] , tako da ne predstavljaju nikakvu novinu.

I. 2. Analogne metode za odredjivanje nula trigonometriskih polinoma

U literaturi se skoro ne sreću posebne metode za odredjivanje nula trigonometriskih polinoma $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta}$ analognim putem. Ovom problemu nije ni bila data neka veća pažnja, zato što se do sada odredjivanje nula trigonometriskih polinoma na analognim mašinama svodilo na odredjivanje nula algebarskih polinoma. Kako je za odredjivanje nula algebarskih polinoma poznato više različitih metoda za primenu uredjaja analogne tehnike, to se nije ni mislilo na razradu nekih posebnih metoda za odredjivanje nula trigonometriskih polinoma. Odredjivanje nula trigonometriskih polinoma, svodjenjem na odredjivanje nula algebarskih polinoma, sreće se u radu [3] i na njega se uzgredno ukazuje u većini radova koji tretiraju nove postupke za odredjivanje nula algebarskih polinoma. Osnovni nedostatak ovog postupka za odredjivanje nula trigonometriskih polinoma sastoji se u tome što je indirektan tako da se rezultati ne mogu vizuelno pratiti na ekranu katodnog oscilografa. Osim toga, indirektni postupak zahteva preračunavanja koja su glomazna i nepraktična. Kod indirektnog postupka nisu iskorišćene osnovne osobine analognih mašina, neprekidno registrovanje i vizuelno praćenje rezultata kao i uticaja promene pojedinih parametara na rezultat.

Prednosti direktnog postupka nad indirektnim su značajne, jer pored mogućnosti vizuelnog praćenja rezultata, direktni postupak ne zahteva nikakva posebna preračunavanja.

Česta primena trigonometriskih polinoma i jednačina u raznim problemima tehnike, a posebno kod ispitivanja stabilnosti sistema impulsne tehnike, opravdava važnost koju im treba pridati.

I. 3. Analogne metode za konformna preslikavanja

Analogne mašine, posebno kada se radi o kvalitativnim ispitivanjima, nalaze sve veću primenu u raznovrsnim problemima. U novije vreme se počelo raditi na metodama koje pružaju mogućnosti za konformna preslikavanja. Ovom problemu je do nedavno bila poklonjena samo uzgredna pažnja. Prvi pokušaj da se ovom problemu, kod primene analognih mašina, da jači smisao i značaj učinjen je u radu [4]. Ovde je korišćena jedna specijalna analogna mašina koja omogućuje konformna preslikavanja samo algebarskim polinomima. U ovom radu je, pored ostalog, data metoda za ispitivanje stabilnosti pomoću kriterija Михайлова [22], zasnovana na konformnim preslikavanjima koja se izvode pomoću uredjaja, opisanog u radu [4].

Heinhold u svojim radovima [19] i [20], ukazuje na konformna preslikavanja nekim specijalnim funkcijama i postojeću literaturu koja je tome posvećena. Za rad je koristio Telefunkenovu analognu računsku mašinu i upotrebljavao, pored linearnih, i nelinearne elemente. On je specijalnu pažnju posvetio preslikavanju funkcijom

$$W(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right),\ a^2<1, \tag{I,12}$$

koje je u tehničkoj literaturi poznato kao preslikavanje Žukovskog, i preslikavanju pomoću analitičkog rešenja obične diferencijalne jednačine

$$\frac{d^nW}{dz^n}=F\left(z,W,\frac{dW}{dz},\dots,\frac{d^{n-1}W}{dz^{n-1}}\right), \tag{I,13}$$

čiji su početni uslovi

$$W^{(k)}(z_k)=U_k+iV_k,\quad k=0,1,2,\dots,n-1. \tag{I,14}$$

Za konformno preslikvanje pomoću analitičkog rešenja jedne diferencijalne jednačine n-tog reda, Heinhold je koristio, pored specijalnih podprograma za $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$, 4n množača i 2n+1 integratora što čini ograničenje upotrebljene metode.

Ja sam u radu [21] ukazao na izvesne mogućnosti primene repetitivnog diferencijalnog analizatora za konformna preslikavanja algebarskim polinomima.

II. METODA ZA ODREDJIVANJE NULA ALGEBARSKIH [illegible] POMOĆU REPE- TITIVNOG DIFERENCIJALNOG ANALIZATORA KOJA [illegible] KOORDINATE

II.1. Osnova metode

Za razliku od primenjenih metoda u glavi I, koje za odredjivanje nula algebarskih polinoma koriste specijalne analogne mašine, u ovoj glavi izložena je metoda koja koristi samo linearni deo repetitivnog diferencijalnog analizatora. Da bi se omogućilo odredjivanje nula algebarskih polinoma upotrebom samo linearnih elemenata, prilagodjeni su izrazi za realni i imaginarni deo polinoma.

Upotreba linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora za rešavanje ovih problema ima veliku prednost nad upotrebom specijalnih analognih mašina koje većinom koriste nelinearne elemente. Prednosti su sledeće:

1/ linearni elementi omogućuju veću tačnost rezultata i konstruktivno su lakše izvodljivi;

2/ repetitivni diferencijalni analizator ponavlja rezultat učestalošću 50 Hz i stoga omogućuje brzo praćenje uticaja promene pojedinih koeficijenata i parametara na rezultat.

Metoda izložena u ovoj glavi omogućuje da se odrede realne i kompleksne nule, i to kako jednostruke, tako i višestruke, algebarskih polinoma čiji su koeficijenti bilo realni bilo kompleksni. Prema tome, ova metoda omogućuje odredjivanje svih nula algebarskih polinoma koji se, imajući u vidu kapacitet repetitivnog diferencijalnog analizatora, mogu na njemu rešavati.

Najopštiji slučaj odredjivanja nula polinoma javlja se kada polinom ima kompleksne koeficijente. Ovi slučajevi spadaju u teže probleme i u praksi se redje nailazi na njih. Najčešće se ima posla sa polinomima koji imaju realne koeficijente a realne i kompleksne nule.

Iako algebarski polinomi sa kompleksnim koeficijentima sadrže u sebi kao specijalne slučajeve polinome sa realnim koeficijentima, korisno je sve ove slučajeve posebno razmotriti zato što je za najopštiji slučaj algebarskih polinoma odgovarajući analogni električni model na komplikovaniji. Za specijalne slučajeve algebarskih polinoma mogu se ostvariti mnogo jednostavniji analogni električni modeli.

U ovoj glavi su, zbog toga, razradjene metode za svaki slučaj posebno.

II.1.1. Da [illegible] se realne nule polinoma [illegible] na odredjivanje pomoću [illegible] diferencijalnih analizatora [11], [illegible]si sledeću metodu: diferencira se n puta po x polinom sa realnim koeficijentima

$$W(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu , \qquad /II,1/$$

i dobija se diferencijalna jednačina

$$W^{(n)}_{(x)}=n!\, a_n , \qquad /II,2/$$

sa početnim uslovima za x=0

$$W^{(k)}_{(0)}=k!\, a_k , \quad k=0,1,2,\ldots, n-1 . \qquad /II,3/$$

Ova metoda [illegible] da se iskoristi za odredjivanje realnih nula polinoma sa realnim koeficijentom pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora.

Postavljanje diferencijalne jednačine /II,2/ na repetitivnom diferencijalnom analizatoru predstavlja vrlo jednostavan problem. Kao rešenje dobija se parabola kojoj odgovara analitički izraz /II,1/. Nule polinoma /II,1/ direktno se čitaju na presecima parabole sa x osom.

II.1.2. Kao što je ranije napomenuto, [illegible] je razraditi [illegible] nu metodu za odredjivanje realnih i kompleksnih nula polinoma sa realnim koeficijentima.

Opšti oblik ovih polinoma je

$$W(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad , \qquad /II,4/$$

gde su $a_\nu (\nu=0,1,2,\ldots,n)$ realni brojevi a $z=x+iy$. Poznato je [10] da se /II,4/ može razviti u Taylor-ov red

$$W(z)=\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(iy)^\nu}{\nu!} W^{(\nu)}_{(x)} . \qquad /II,5/$$

Grupisanjem realnih i imaginarnih članova iz /II,5/ dobija se

$$W(z)=U(x,y)+i\,V(x,y) \ , \qquad /II,6/$$

gde su

$$U(x,y)=\sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^\nu \frac{y^{2\nu}}{(2\nu)!} W^{(2\nu)}_{(x)} \qquad /II,7/$$

$$i \qquad V(x,y)=\sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^\nu \frac{y^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} W^{(2\nu+1)}_{(x)} . \qquad /II,8/$$

vrednosti x i y koje istovremeno zadovoljavaju uslove

$$U(x,y)=0 \qquad /II,9/$$

$$V(x,y)=0 \qquad /II,10/$$

predstavljaju realni i imaginarni deo kompleksne nule polinoma /II,4/. Izrazi /II,7/ i /II,8/ mogu se transformisati u oblik koji je veoma pogodan za odredjivanje nula polinoma /II,4/ pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora:

$$U(x,y) = W(x) - y^2\left\{\frac{W''(x)}{2!} - y^2\left[\frac{W^{(4)}(x)}{4!} - y^2\left(\frac{W^{(6)}(x)}{6!} - \dots\right)\right]\right\} \qquad /II,11/$$

$$\frac{V(x,y)}{y} = \frac{W'(x)}{1!} - y^2\left\{\frac{W'''(x)}{3!} - y^2\left[\frac{W^{(5)}(x)}{5!} - y^2\left(\frac{W^{(7)}(x)}{7!} - \dots\right)\right]\right\} . \qquad /II,12/$$

Sem toga, izrazi /II,11/ i /II,12/ daleko su pogodniji od izraza /II,7/ i /II,8/ za odredjivanje nula polinoma /II,4/ na sporom diferencijalnom analizatoru.

Korišćenje izraza /II,11/ i /II,12/ izbacuje iz upotrebe nelinearne elemente koji su se do sada morali koristiti kod odredjivanja nula algebarskih polinoma na sporom diferencijalnom analizatoru.

II.1.3. Za odredjivanje nula polinoma sa kompleksnim koeficijentima pomoću analizatora, do sada nisu bile poznate neke posebne metode. U radu [13] P.Madić, N. Parezanović i ja dali smo jednu metodu za odredjivanje nula polinoma sa kompleksnim koeficijentima pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora kada se koriste Dekartove koordinate. Ja sam produžio rad na usavršavanju ove metode i dobio specijalne metode za odredjivanje kompleksnih nula polinoma 3-eg i 4-og stepena sa realnim koeficijentima i nula polinoma 2-og stepena sa kompleksnim koeficijentima. Sem toga, dao sam posebnu metodu za odredjivanje svih nula algebarskih polinoma pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora, koja koristi polarne koordinate. Ova metoda će biti izložena u glavi III.

Opšti oblik polinoma sa kompleksnim koeficijentima je

$$W(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu , \qquad /II,13/$$

gde su $c_\nu = a_\nu + i b_\nu$ i $z = x + iy$. Grupisanjem realnih i imaginarnih članova dobija se

$$W(z) = W_1(z) + i\, W_2(z) , \qquad /II,14/$$

gde su

$$W_1(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \qquad /II,15/$$

$$i \quad W_2(z) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu z^\nu . \qquad /II,16/$$

Svaki od polinoma /II,15/ i /II,16/ može se predstaviti na isti način kao što je polinom /II,4/ predstavljen sa /II,7/ i /II,8/.

[illegible]

$$W_1(z) = U_1(x,y) + i\,V_1(x,y)\,, \qquad /II,17/$$

gde su

$$U_1(x,y) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^{\nu} \frac{y^{2\nu}}{(2\nu)!}\, W_1^{(2\nu)}(x) \qquad /II,18/$$

$$V_1(x,y) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^{\nu} \frac{y^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\, W_1^{(2\nu+1)}(x) \qquad /II,19/$$

i

$$W_2(z) = U_2(x,y) + i\,V_2(x,y)\,, \qquad /II,20/$$

gde su

$$U_2(x,y) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^{\nu} \frac{y^{2\nu}}{(2\nu)!}\, W_2^{(2\nu)}(x) \qquad /II,21/$$

$$V_2(x,y) = \sum_{\nu=0}^{[n/2]} (-1)^{\nu} \frac{y^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\, W_2^{(2\nu+1)}(x)\,. \qquad /II,22/$$

Zamenom /II,17/ i /II,20/ u /II,14/, dobija se

$$W(z) = \left[U_1(x,y) - V_2(x,y)\right] + i\left[V_1(x,y) + U_2(x,y)\right]. \qquad /II,23/$$

Iz /II,23/, uzimajući u obzir /II,18/, /II,19/, /II,21/ i /II,22/ ima se

$$U(x,y) = W_1(x) - \frac{y}{1!}W_2'(x) - \frac{y^2}{2!}W_1''(x) + \frac{y^3}{3!}W_2'''(x) + \frac{y^4}{4!}W_1^{(4)}(x) - \cdots \qquad /II,24/$$

$$V(x,y) = W_2(x) + \frac{y}{1!}W_1'(x) - \frac{y^2}{2!}W_2''(x) - \frac{y^3}{3!}W_1'''(x) + \frac{y^4}{4!}W_2^{(4)}(x) + \cdots \qquad /II,25/$$

gde je $U(x,y)$ realni i $V(x,y)$ imaginarni deo polinoma /II,13/.

Za prostavljanje na diferencijalnom analizatoru pogodni su sledeći oblici za $U(x,y)$ i $V(x,y)$ koji imaju sličnosti sa /II,11/ i /II,12/

$$U(x,y) = W_1(x) - y\left\{\frac{W_2'(x)}{1!} + y\left[\frac{W_1''(x)}{2!} - y\left(\frac{W_2'''(x)}{3!} + \cdots\right)\right]\right\} \qquad /II,26/$$

$$V(x,y) = W_2(x) + y\left\{\frac{W_2'(x)}{1!} - y\left[\frac{W_2''(x)}{2!} + y\left(\frac{W_1'''(x)}{3!} - \cdots\right)\right]\right\}. \qquad /II,27/$$

Realni i imaginarni deo kompleksnih nula polinoma /II,13/ dobija se iz uslova /II,[illegible]/ i /II,[illegible]/.

Izrazi /II,26/ i /II,27/ mogu se takodje koristiti za odredjivanje nula algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima pomoću sporog diferencijalnog analizatora. Pri tome se koriste samo linearni elementi, što je veoma značajno;

II.[illegible] Postupak za određivanje kompleksnih nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima 3-eg i 4-og stepena

Određivanje kompleksnih nula polinoma /II,1/ 3-eg i 4-og stepena, može se svesti na postupak koji je primenjen na polinome /II,1/. Ako se u tu svrhu iskoristi izraz /II,13/ i uslov /II,14/ koji treba da zadovolji realni i imaginarni deo kompleksne nule, onda se za polinome 3-eg i 4-og stepena dobija

$$y^2 = \frac{6W'(x)}{W'''(x)} \quad . \qquad /II,28/$$

Medjutim, iz uslova /II,9/ i izraza /II,11/ i /II,28/, eliminisanjem y^2, dobija se za određivanje realnog dela kompleksne nule polinoma 3-eg stepena izraz

$$W(x)\,W'''(x) - 3\,W'(x)\,W''(x) = 0 \qquad /II,29/$$

koji, takodje predstavlja polinom 3-eg stepena, dok za određivanje realnog dela kompleksnih nula polinoma 4-og stepena služi polinom 6-og stepena

$$2W(x)\,W'''^{2}(x) + 3\,W'^{2}(x)\,W^{(4)}(x) - 6\,W'(x)\,W''(x)\,W'''(x) = 0 \qquad /II,30/$$

koji se dobija na sličan način kao polinom /II,29/. Za nas su interesantne samo realne nule polinoma /II,29/ i /II,30/ koje se mogu odrediti postupkom koji je primenjen na polinome /II,1/. Pod pretpostavkom da polinom 3-eg stepena ima jedan par kompleksnih nula $z_{1,2} = a \pm ib$ i realnu nulu $z_3 = r$, može se lako pokazati da polinom /II,29/ ima uvek samo jednu realnu nulu $x_1 = a$, dok druge dve nule predstavljaju par kompleksnih nula čija je vrednost $x_{1,2} = \frac{1}{2}(a + r \pm ib)$.

Kada se pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora, postupkom koji je već opisan, odrede realne nule polinoma /II,29/ i /II,30/ koje predstavljaju realni deo kompleksnih nula algebarskog polinoma 3-eg, odnosno 4-og stepena, onda se imaginarni deo kompleksnih nula ovih polinoma lako izračuna pomoću izraza /II,28/. Primena ovog postupka na polinome višeg stepena je otežana i nepraktična tako da uopšte ne dolazi u obzir za razmatranje.

II.[illegible] [illegible] za odredjivanje nula [illegible] polinoma drugog stepena sa kompleksnim koeficijentima

Algebarski polinomi drugog stepena sa kompleksnim koeficijentima mogu se napisati u obliku:

$$W(z) = z^2 + (a + ib)z + (c + id) \quad , \qquad /II,31/$$

gde su $z = x + iy$, a a, b, c, d – realni brojevi.

Ako se polinom /II,31/ napiše u obliku /II,14/, gde su:

$$W_1(z) = z^2 + az + c$$

$$W_2(z) = bz + d \quad ,$$

mogu se izrazi /II,24/ i /II,25/ pod uslovima /II,9/ i /II,10/ napisati u obliku

$$U(x,y) \equiv W_1(x) - \frac{y}{1!} W_2'(x) - \frac{y^2}{2!} W_1''(x) = 0 \qquad /II,32/$$

$$V(x,y) \equiv W_2(x) + \frac{y}{1!} W_1'(x) = 0 \qquad /II,33/$$

Iz jednačine /II,33/ sledi

$$y = -\frac{W_2(x)}{W_1'(x)} \qquad /II,34/$$

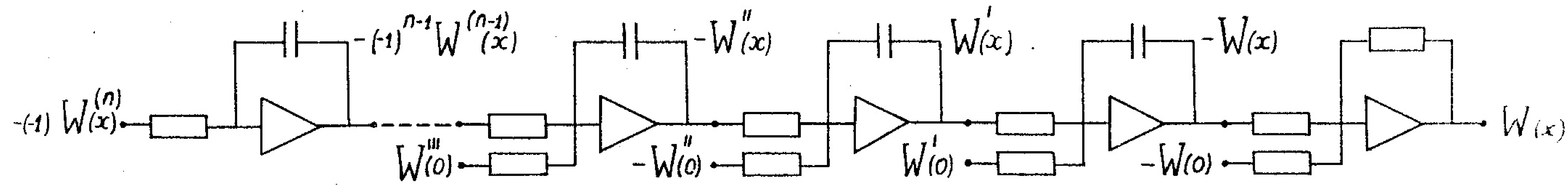
Na osnovu /II,34/ i /II,32/ dobija se polinom 4-og stepena po x :

$$2W_1(x)W_1'^2(x) + 2W_1'(x)W_2(x)W_2'(x) - W_1''(x)W_2^2(x) = 0 \qquad /II,35/$$

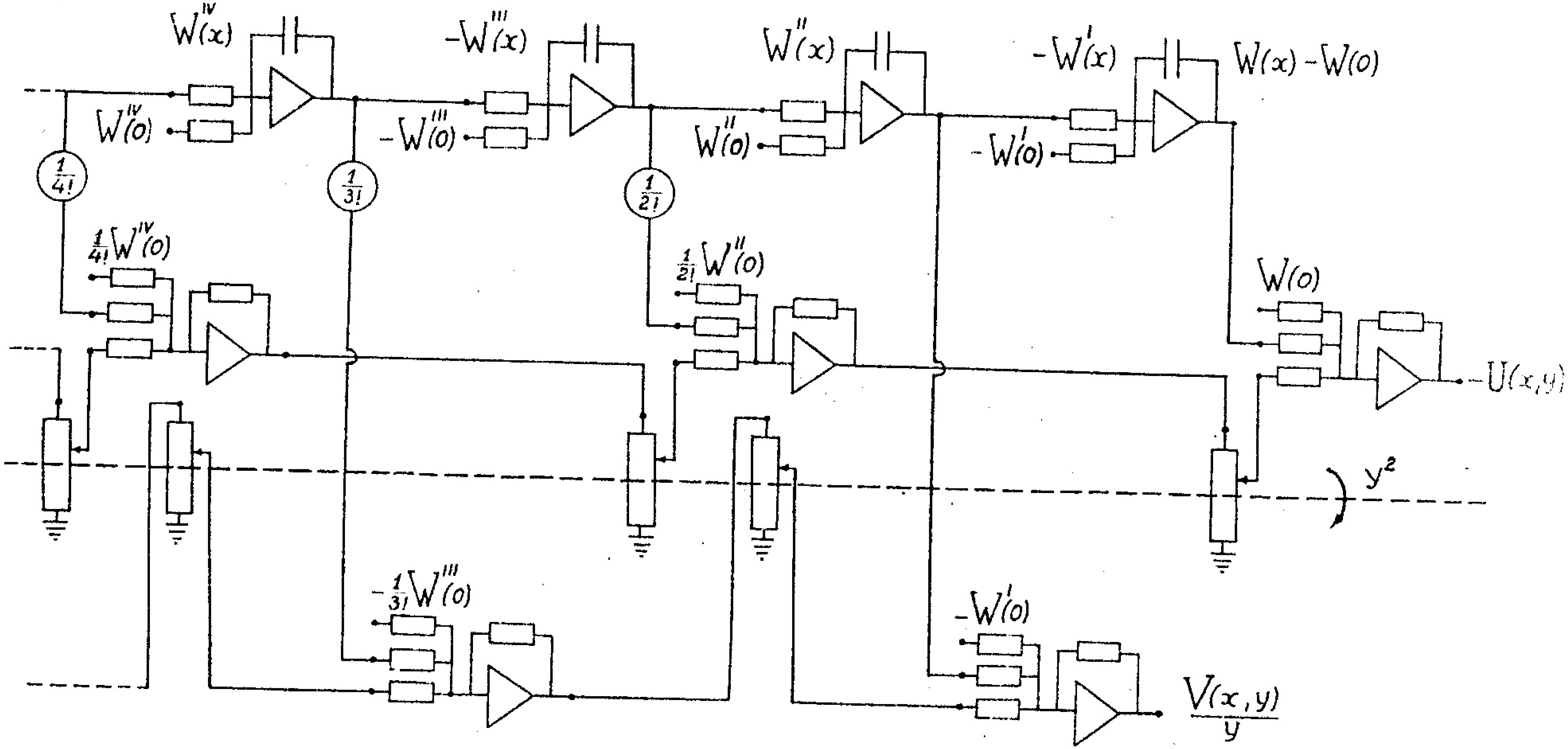
čije realne nule odredjuju realne delove nula polinoma /II,31/. Imaginarni deo nula polinoma /II,31/ odredjuje se iz izraza /II,34/ za realne nule polinoma /II,35/.

Ovim postupkom svedeno je odredjivanje nula polinoma drugog stepena sa kompleksnim koeficijentima na odredjivanje realnih nula polinoma 4-og stepena sa realnim koeficijentima, što je znatno jednostavnije za primenu repetitivnog diferencijalnog analizatora.

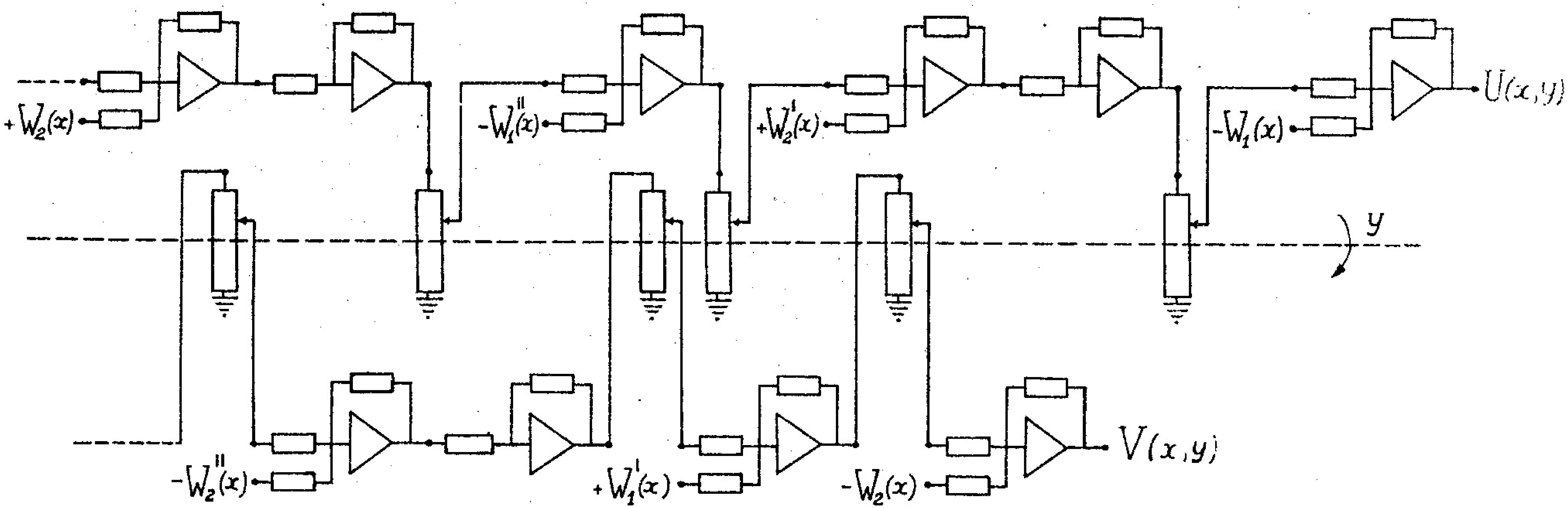
Ovaj postupak je veoma koristan za ispitivanje dvodimenzionalnog flutter-a.



Sl. 6 Analogni električni model za odredjivanje realnih nula algebarskih polinoma /II,1/


$W^{IV}(x)$
$W^{IV}(0)$
$-W'''(x)$
$-W'''(0)$
$W''(x)$
$W''(0)$
$-W'(x)$
$-W'(0)$
$W(x)-W(0)$
$\frac{1}{4!}$
$\frac{1}{3!}$
$\frac{1}{2!}$
$\frac{1}{4!}W^{IV}(0)$
$\frac{1}{2!}W''(0)$
$W(0)$
$-U(x,y)$
y^2
$-\frac{1}{3!}W'''(0)$
$-W'(0)$
$\frac{V(x,y)}{y}$

Sl. 7 [illegible]



Sl. 8 Analogni električni model za odredjivanje nula polinoma /II,13/

II.4. Upotreba repetitivnog diferencijalnog analizatora za odredjivanje nula algebarskih polinoma kada se koriste Dekartove koordinate

II.4.1. Realne nule polinoma sa realnim koeficijentima čitaju se direktno na presecima x ose sa parabolom koja predstavlja rešenje diferencijalne jednačine /II,2/ za početne uslove /II,3/. Analogni električni model za rešavanje jednačine /II,2/ pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora dat je na sl. 6. Pored parabole koja predstavlja polinom $W(x)$, pomoću ovog analognog električnog modela dobijaju se, istovremeno, i izvodi polinoma koji nam služe za odredjivanje višestrukih nula.

II.4.2. Za odredjivanje realnih i kompleksnih nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, koriste se izrazi /II,11/ i /II,12/. Polinom $W(x)$ i njegovi izvodi dobijaju se iz analognog električnog modela sa sl. 6. Veličina y^2 tretira se kao promenljivi parametar i predstavlja se linearnim potenciometrom. Za odredjivanje nula polinoma /II,4/ na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, potrebno je n integratora za generiranje polinoma $W(x)$ i njegovih izvoda, a sabirača i n-1 linearnih spregnutih potenciometara. Medjusobna povezanost ovih elemenata data je na sl. 7. Na ekranu katodnog oscilografa sa dva mlaza istovremeno se posmatra $U(x,y)$ i $\frac{V(x,y)}{y}$, a variranjem parametra y^2, pomoću linearnih spregnutih potenciometara, odredjuju se njegove vrednosti y_k^2 za koje će $U(x,y_k)$ i $\frac{V(x,y_k)}{y_k}$, imati zajednički presek sa x osom, odnosno, ispunjavati uslove /II,9/ i /II,10/. Ovo odredjivanje parametra y^2 vrši se direktno i ne zahteva se nikakav iterativni postupak.

II.4.3. Za odredjivanje nula algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora koriste se izrazi /II,26/ i /II,27/. Za generiranje polinoma $W_1(x)$ i $W_2(x)$ i njihovih izvoda, prema sl. 6, potrebno je ukupno 2n integratora, dok je za ostvarivanje analognog električnog modela koji odgovara izrazima /II,26/ i /II,27/, sl. 8, potrebno 2n sabirača i 2n linearnih spregnutih potenciometara. I ovde se izbor parametra y vrši direktno i postupak za odredjivanje nula polinoma /II,13/ je isti kao postupak koji je primenjen za polinome /II,4/.

II.5. Smene koje se koriste za odredjivanje nula algebarskih polinoma

Kao što je poznato, za rešavanje problema na diferencijalnom analizatoru neophodno je u izvesnim slučajevima koristiti pogodne transformacije da bi ispitivani problem bio obuhvaćen radnim intervalom analizatora. Obilici ovih transformacija navode se u [1] i u nizu drugih radova koji se odnose na primenu analognih mašina.

Za odredjivanje nula algebarskih polinoma pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora kada se koriste Dekartove koordinate, u najopštijem slučaju koriste se smene /I,7/. Kada se koristi smena $Z=kZ^*$ ne postoji teškoća kod preračunavanja rezultata jedne promenljive na rezultate druge promenljive. Medjutim, kako je neophodno, za odredjivanje svih nula algebarskih polinoma, koristiti i smenu $Z=\frac{k}{Z^*}$, potrebno je izvršiti preračunavanja svih vrednosti nove promenljive $Z^*=u\pm iv$ na vrednosti stare promenljive $Z=x+iy$ pri čemu se za x i y dobijaju izrazi

$$x=\frac{ku}{u^2+v^2}\,,\qquad y=\pm\frac{kv}{u^2+v^2}\qquad /II,36/$$

Uvedena konstanta k, koja može biti pozitivna i negativna, omogućuje razredjivanje nula polinoma. Na taj način se ublažuju teškoće koje se javljaju kod odredjivanja nula algebarskih polinoma koje su veoma bliske jedna drugoj.

Ako je u pitanju samo odredjivanje nula algebarskih polinoma čiji se realni i imaginarni deo mora, posle odredjivanja u i v na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, izračunati pomoću izraza /II,36/, onda se na tome ne gubi mnogo vremena. Prema tome, ova metoda za odredjivanje nula algebarskih polinoma pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora nema nekih posebnih ograničenja, osim što je nepraktična za izvodjenje jedne šire klase konformnih preslikavanja zbog preračunavanja koja nameću izrazi /II,36/. Kapacitet postojećeg repetitivnog diferencijalnog analizatora u Institutu za nuklearne nauke "B.Kidrič" omogućuje odredjivanje nula algebarskih polinoma do 10-og stepena, a njegovim povećanjem proširila bi se mogućnost za odredjivanje nula algebarskih polinoma višeg stepena.

III. [illegible] ALGEBARSKIH POLINOMA POMOĆU REPETITIVNOG DIFERENCIJALNOG ANALIZATORA KADA SE KORISTE POLARNE KOORDINATE

III.1. Osnova metode

Neposredni povod za razradu ove metode bila je potreba za izvodjenjem šire klase konformnih preslikavanja. Za razliku od poznatih metoda, koje koriste polarne koordinate i specijalne analogne mašine sa nelinearnim elementima, ova metoda je prilagodjena za upotrebu samo linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora.

U slučaju odredjivanja svih nula nekog algebarskog polinoma pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora, metodom koja koristi Dekartova koordinate, odredjuju se sve tačke z-ravni koje se preslikavaju tim polinomom u tačku Wo, W-ravni. Metoda koja je izložena u glavi II, veoma je pogodna za ovaj specijalan slučaj preslikavanja i u tom pogledu ima velikih prednosti nad drugim analognim metodama, jer se pomoću nje mogu odrediti nule polinoma visokog stepena. Medjutim, ova metoda nije pogodna za izvodjenje jedne šire klase konformnih preslikavanja, zato što je u tom slučaju, kao što je rečeno u glavi II, zbog uvedenih transformacija /II,16/, potrebno stalno vršiti preračunavanja dobijenih rezultata.

Da bi se izbegla preračunavanja kod izvodjenja složenijih konformnih preslikavanja algebarskim polinomima, razradjena je ova metoda koja koristi polarne koordinate, a prema tome i drugu logičku povezanost elemenata repetitivnog diferencijalnog analizatora. Ova metoda se može koristiti takodje za odredjivanje nula algebarskih polinoma. Od konformnih preslikavanja algebarskim polinomima, posebno su interesantna ona preslikavanja koja omogućuju ispitivanje dinamičke stabilnosti linearnih i linearizovanih sistema sa povratnom spregom i odredjivanje multipliciteta nula algebarskih polinoma, o čemu će biti reči u glavi IV.

Ovde će se ukratko izneti principi na kojima se zasniva metoda koja koristi polarne koordinate i posebno ukazati na mogućnosti koje ona pruža u odredjivanju nula algebarskih polinoma.

III.1.1. Opšti oblik algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima dat je izrazom /II,13/ koji se može napisati u obliku /II,14/ gde su $W_1(z)$ i $W_2(z)$ polinomi /II,15/ i /II,16/. Ako se u polinome /II,15/ i /II,16/ uvede smena

$$z = \rho e^{i\theta} \qquad /III,1/$$

... se ovi mogu [illegible] u obliku:

$$W_1(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu \cos\nu\theta + i \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu \sin\nu\theta \qquad /III,2/$$

$$W_2(z) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \rho^\nu \cos\nu\theta + i \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \rho^\nu \sin\nu\theta. \qquad /III,3/$$

Kada se /III,2/ i /III,3/ zamene u /II,14/, ima se

$$W(z) = U(\rho,\theta) + i\,V(\rho,\theta), \qquad /III,4/$$

gde su:

$$U(\rho,\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} \rho^\nu (a_\nu \cos\nu\theta - b_\nu \sin\nu\theta) \qquad /III,5/$$

$$V(\rho,\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} \rho^\nu (b_\nu \cos\nu\theta + a_\nu \sin\nu\theta) \qquad /III,6/$$

Izrazi /III,5/ i /III,6/ nemogu se direktno koristiti za primenu repetitivnog diferencijalnog analizatora, ali ako se napišu u obliku:

$$U(\rho,\theta) = a_0 + \rho\Big\{a_1\cos\theta - b_1\sin\theta + \rho\big[a_2\cos 2\theta - b_2\sin 2\theta + \rho\,(a_3\cos 3\theta - b_3\sin 3\theta + \dots)\big]\Big\} \qquad /III,7/$$

$$V(\rho,\theta) = b_0 + \rho\Big\{b_1\cos\theta + a_1\sin\theta + \rho\big[b_2\cos 2\theta + a_2\sin 2\theta + \rho\,(b_3\cos 3\theta + a_3\sin 3\theta + \dots)\big]\Big\} \qquad /III,8/$$

veoma su pogodni za povezivanje elemenata repetitivnog diferencijalnog analizatora u odgovarajući analogni električni model.

Pomoću izraza /III,7/ i /III,8/ mogu se repetitivnim diferencijalnim analizatorom odrediti samo one nule polinoma /II,13/ koje leže u jediničnom krugu. Za odredjivanje nula koje leže van jediničnog kruga, pogodno je koristiti smenu:

$$z = \frac{1}{\rho} e^{i\theta} \qquad /III,9/$$

a prema tome i nove izraze za $U(\rho,\theta)$ i $V(\rho,\theta)$, koji se mogu napisati u obliku:

$$U(\rho,\theta) = a_n\cos n\theta - b_n\sin n\theta + \rho\Big\{a_{n-1}\cos(n-1)\theta - b_{n-1}\sin(n-1)\theta + \rho\big[a_{n-2}\cos(n-2)\theta - b_{n-2}\sin(n-2)\theta + \dots\big]\Big\} \qquad /III,10/$$

$$V(\rho,\theta) = b_n\cos n\theta + a_n\sin n\theta + \rho\Big\{b_{n-1}\cos(n-1)\theta + a_{n-1}\sin(n-1)\theta + \rho\big[b_{n-2}\cos(n-2)\theta + a_{n-2}\sin(n-2)\theta + \dots\big]\Big\} \qquad /III,11/$$

U ovom slučaju, problem odredjivanja nula polinoma /II,13/ svodi se na traženje takvih vrednosti ρ i θ za koje će biti ispunjeni uslovi

$$U(\rho,\theta) = 0 \qquad /III,12/$$

$$V(\rho,\theta) = 0 \qquad /III,13/$$

III.1.2. Polinomi sa realnim koeficijentima /II,4/ najčešće se sreću u primeni pa se zato njima posvećuje izuzetna pažnja. Upotreba repetitivnog diferencijalnog analizatora za ove svrhe, kada se koriste polarne koordinate, zahteva izvesno prilagodjavanje izraza /II,4/.

Korišćenjem smene /III,1/, polinom /II,4/ može se napisati u obliku /III,4/, gde su:

$$U(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu \cos\nu\theta \qquad /III,14/$$

$$V(\rho,\theta)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu \sin\nu\theta. \qquad /III,15/$$

Ako se izrazi /III,14/ i /III,15/ napišu u obliku

$$U(\rho,\theta)=a_0+\rho\left\{a_1\cos\theta+\rho\left[a_2\cos 2\theta+\rho(a_3\cos 3\theta+\ldots)\right]\right\} \qquad /III,16/$$

$$\frac{V(\rho,\theta)}{\rho}=a_1\sin\theta+\rho\left\{a_2\sin 2\theta+\rho\left[a_3\sin 3\theta+\rho(a_4\sin 4\theta+\ldots)\right]\right\} \qquad /III,17/$$

pogodni su za primenu repetitivnog diferencijalnog analizatora. Oblici /III,16/ i /III,17/ mogu se iskoristiti samo za odredjivanje nula polinoma /II,4/ koje leže unutar jediničnog kruga, dok se za odredjivanje nula koje leže van jediničnog kruga koristi smena /III,9/ kojom se izrazi za $U(\rho,\theta)$ i $V(\rho,\theta)$ transformišu u nove oblike

$$U(\rho,\theta)=a_n\cos\theta+\rho\left\{a_{n-1}\cos(n-1)\theta+\rho\left[a_{n-2}\cos(n-2)\theta+\ldots\right]\right\} \qquad /III,18/$$

$$V(\rho,\theta)=a_n\sin n\theta+\rho\left\{a_{n-1}\sin(n-1)\theta+\rho\left[a_{n-2}\sin(n-2)\theta+\ldots\right]\right\} \qquad /III,19/$$

za koje takodje nije teško realizovati odgovarajući analogni električni model. Bilo da se radi o izrazima /III,16/ i /III,17/ ili /III,18/ i /III,19/, potrebno je naći takve vrednosti za ρ i θ koje će zadovoljiti istovremeno uslove /III,12/ i /III,13/. Ovim postupkom se mogu odrediti sve realne i kompleksne nule polinoma /II,4/.

III.1.3. Opšti oblik algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima realne promenljive dat je izrazom /II,1/, odnosno

$$W(\rho)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu \qquad /III,20/$$

gde su a_ν realni brojevi a ρ realna promenljiva. Može se zapaziti da je /III,20/ samo specijalan slučaj izraza /III,16/ i /III,17/, jer se za $\theta=0$ dobiva

$$U(\rho,0)=W(\rho)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \rho^\nu \qquad /III,21/$$

Medjutim, za $\theta=\pi$ izrazi /III,16/ i /III,17/ svode se na

$$U(\rho,\pi)=W_1(\rho)=\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \rho^\nu \qquad /III,22/$$

a izrazi /III,18/ i /III,19/ na

$$U(\rho,\pi) = W_2(\rho) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} a_{\nu} \rho^{n-\nu} \qquad /III,23/$$

dok za $\theta=0$, /III,18/ i /III,19/ svode se na oblik

$$U(\rho,0) = W_3(\rho) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu} \rho^{n-\nu} \qquad /III,24/$$

Izrazi /III,22/, /III,23/ i /III,24/ ne predstavljaju ništa drugo nego transformisane oblike izraza /III,21/ koji omogućuju odredjivanje svih realnih nula polinoma /III,2o/ u celom području $-\infty<\rho<\infty$. Otuda proizilazi da se realne nule polinoma /III,2o/ mogu odrediti pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora po istom postupku kao i realne i kompleksne nule polinoma sa realnim koeficijentima. Pored ovog opšteg postupka, nule polinoma /III,2o/ mogu se odrediti još jednim jednostavnijim postupkom koji zahteva upotrebu samo operativnih sabirača i linearnih spregnutih potenciometara. U tom cilju potrebno je koristiti izraz /III,2o/ u obliku

$$W(\rho) = a_0 + \rho\{a_1 + \rho[a_2 + \rho(a_3 + \ldots)]\} \qquad /III,25/$$

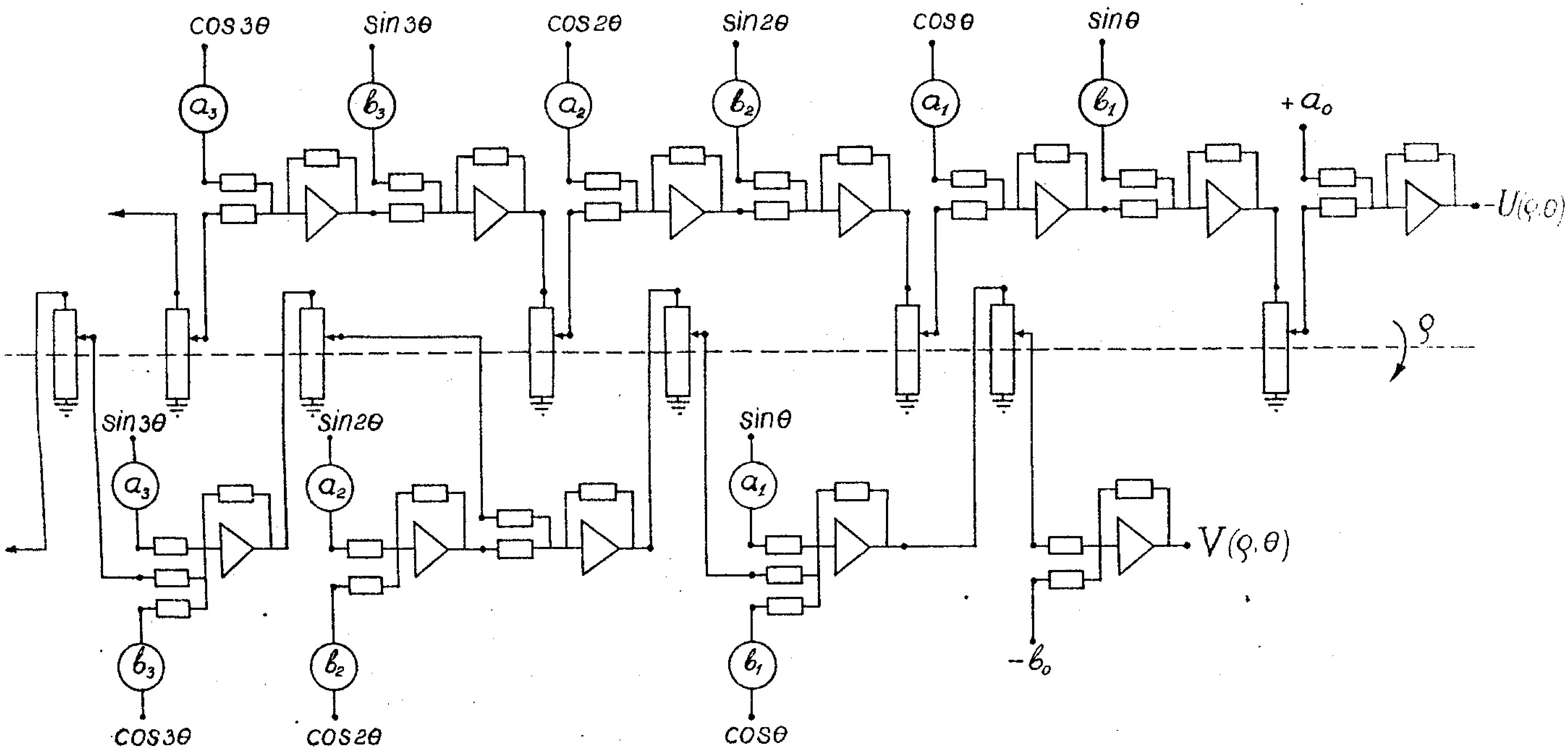
kao i poznate šeme za odredjivanje nula algebarskih polinoma pomoću analognih mašina.

III.2. Upotreba repetitivnog diferencijalnog analizatora za odredjivanje nula algebarskih polinoma kada se koriste polarne koordinate

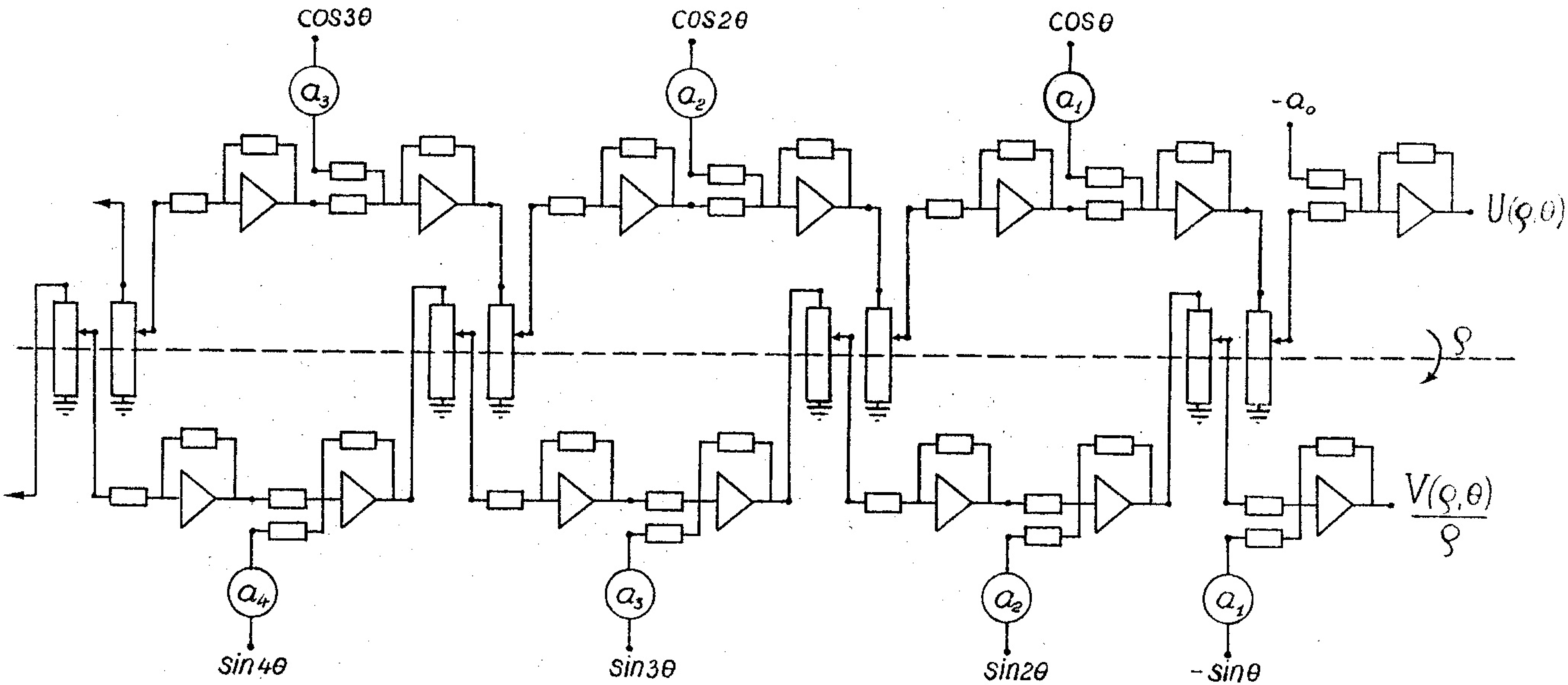
Metoda koja je izložena u ovoj glavi omogućuje, upotrebom samo standardnih elemenata linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora i linearnih spregnutih potenciometara, odredjivanje nula algebarskih polinoma. Za predstavljanje izraza $\cos\nu\theta$ i $\sin\nu\theta$ $(\nu=1,2,3,\ldots,n)$ koriste se rešenja diferencijalne jednačine

$$y'' + \nu^2 y = 0 \ , \quad \nu = 1,2,3,\ldots,n \qquad /III,26/$$

čiji su početni uslovi $y(0)=0$ i $y'(0)=\nu$. Analogni električni model za rešavanje diferencijalne jednačine /III,26/ je jednostavan i poznat, ali do sada nije korišćen za odredjivanje nula algebarskih polinoma pomoću analizatora. U principu, on ostaje nepromenjen za svako $\cos\nu\theta$ i $\sin\nu\theta$ $(1,2,3,\ldots,n)$. Uklapanje ovog modela u opšti analogni električni model za odredjivanje nula različitih slučajeva algebarskih polinoma ne predstavlja nikakve teškoće.



Sl. 9 Analogni električni model za odredjivanje nula algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima kada se koriste polarne koordinate

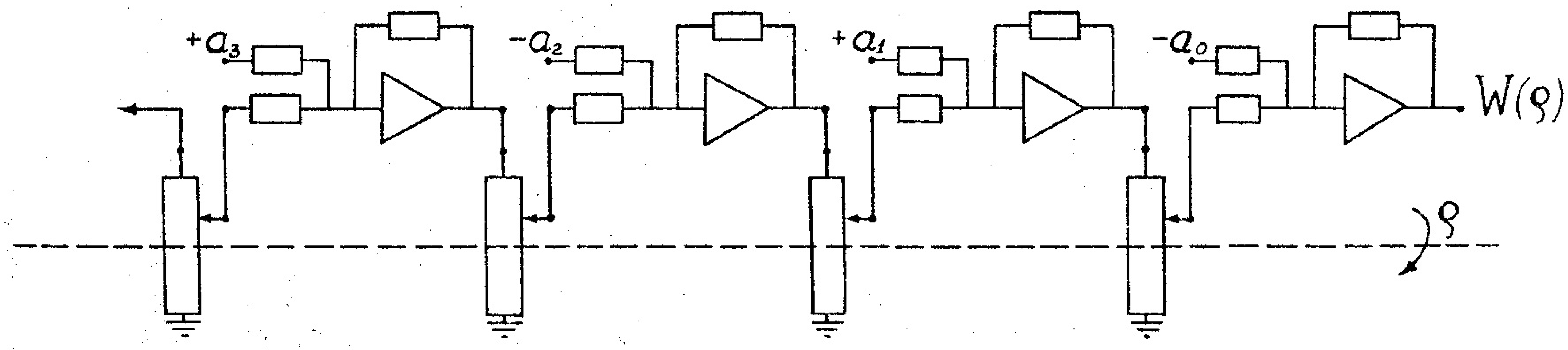


Sl. 1o Analogni električni model za određivanje nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima kada se koriste polarne koordinate

III.2.1. Za odredjivanje realnih i kompleksnih nula algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima pomoću metode koja koristi polarne koordinate, upotrebljavaju se izrazi /III,7/ i /III,8/, odnosno /III,10/ i /III,11/, jer su oni pogodni za primenu repetitivnog diferencijalnog analizatora. Kod realizovanja ovih izraza, za predstavljanje $\cos\nu\theta$ i $\sin\nu\theta$ $(1,2,3,\ldots,n)$ korišćeni su elementi linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora koji se upotrebljavaju za rešavanje diferencijalne jednačine /III,26/, dok su za predstavljanje ρ korišćeni linearni spregnuti potenciometri. Analogni električni model za odredjivanje nula polinoma /II,13/ pomoću izraza /III,7/ i /III,8/ dat je na sl. 9. On može poslužiti i kao osnova za povezivanje elemenata u analogni električni model koji služi za odredjivanje nula polinoma /II,13/, koje leže van jediničnog kruga, pomoću izraza /III,10/ i /III,11/. Pri sastavljanju modela za rešavanje konkretnog zadatka potrebno je, pored ostalog voditi računa o racionalnom korišćenju elemenata analizatora što povlači za sobom izvesne izmene u datom analognom električnom modelu koji se odnosi na najnepovoljniji slučaj u pogledu broja upotrebljenih operativnih sabirača.

Kod ove vrste polinoma nule se ne javljaju u parovima. Znači da postojanje kompleksne nule ne povlači za sobom postojanje odgovarajuće konjugovano kompleksne nule. Zato je, za ovaj slučaj upotrebe repetitivnog diferencijalnog analizatora, potrebno koristiti interval $\theta = 0 \div 2\pi$.

III.2.2. Za odredjivanje nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima koriste se izrazi /III,16/ i /III,17/, odnosno /III,18/ i /III,19/. Za ovaj način odredjivanja nula koristi se takodje samo linearni deo repetitivnog diferencijalnog analizatora. Realizovanje odgovarajućeg analognog električnog modela za ove izraze ne predstavlja nikakve teškoće, jer se $\cos\nu\theta$ i $\sin\nu\theta$ $(\nu = 1,2,\ldots,n)$ takodje predstavljaju kao rešenja diferencijalne jednačine /III,26/ a ρ pomoću linearnih spregnutih potenciometara. Analogni električni model za odredjivanje nula polinoma /II,4/, koje leže u jediničnom krugu, pomoću izraza /III,16/ i /III,17/ dat je na sl. 10 i on može poslužiti kao osnova pri sastavljanju odgovarajućeg modela za izraze /III,18/ i /III,19/ pomoću kojih se odredjuju nule ovog polinoma koje leže van jediničnog kruga. Analogni električni model na sl. 10 odnosi se samo na slučaj kada su koeficijenti a_ν pozitivni. Različiti znaci koeficijenata a_ν povoljno utiću, jer pružaju mogućnost da se izbaci iz datog modela znatan broj operativnih sabirača. U primeru, odgovarajući model za izraze /III,1[illegible]/ i /III,1[illegible]/, [illegible]



Sl. 11 Analogni električni model za odredjivanje realnih nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima

realnih nula algebarskih polinoma /II,1/ i /II,4/ pri čemu se posmatra samo slučaj kada je $\theta=0$ i $\theta=\pi$.

Potrebno je istaći da se za odredjivanje nula polinoma /II,4/ mogu koristiti sledeća dva intervala za θ : $\theta=0\div\pi$ i $\theta=0\div2\pi$.

Pomoću intervala $\theta=0\div\pi$ mogu se odrediti sve realne i kompleksne nule polinoma /II,4/. Iz poznate osobine da se kompleksne nule algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima, ako ih ima, javljaju u parovima, proizilazi da ovaj interval argumenta θ pruža mogućnost za odredjivanje svih kompleksnih nula u celoj z-ravni. Za $\theta=0$ i one vrednosti ρ_ν za koje su ispunjeni uslovi /III,12/ i /III,13/ dobijaju se realne pozitivne nule. Realne negativne nule dobijaju se za $\theta=\pi$ i one vrednosti ρ_ν za koje su ispunjeni uslovi /III,12/ i /III,13/.

Nekada je korisno upotrebiti i interval $\theta=0\div2\pi$ jer je tada omogućena dvostruka kontrola kod odredjivanja nula polinoma /II,4/ pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora. U tom slučaju, kada se odrede takve vrednosti ρ_1 i θ_1 za koje su ispunjeni uslovi /III,12/ i /III,13/ sigurno će postojati i $\theta_2=2\pi-\theta_1$ za koje su pri istom ρ_1 ispunjeni ovi uslovi. Vrednosti θ_1 i θ_2 su uvek simetrične prema vrednosti $\theta=\pi$. Kada su u pitanju realne pozitivne nule onda je $\theta_1=0$ a $\theta_2=2\pi$.

III.2.3. Pored toga što se realne nule polinoma sa realnim koeficijentima mogu odrediti opštim postupkom koji se može primeniti za sve algebarske polinome sa realnim koeficijentima, postoje i posebne mogućnosti na koje se može računati. Ako se u tom cilju iskoristi izraz /III,25/, odgovarajući analogni električni model za odredjivanje nula polinoma /II,1/ postaje sasvim jednostavan, što se može videti sa sl.11. Vrednosti ρ za koje će biti ispunjen uslov $W(\rho)=0$ odredjuju se pomoću linearnih spregnutih potenciometara, pomeranjem njihove osovine, za koju su vezani klizači. Pošto se u odgovarajućem modelu ne upotrebljavaju integrirajući elementi, na ekranu katodnog osciilografa može se videti kao rezultat samo jedan naponski nivo koji treba svesti na nulu. Ovo se postiže za onu vrednost ρ koja predstavlja nulu datog polinoma.

III.3. Analiza greške i popravka rezultata

Uglavnom, postoje tri izvora grešaka rezultata koji se dobijaju pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora:

1/ nestabilnost napona kojim se vrši napajanje

2/ konstruktivna greška upotrebljenih elemenata i [illegible] koji se re[illegible].

Izvor prve greške nalazi se na [illegible] stabilizacijom napona, a izvor druge greške [illegible] konstrukcijom elemenata koji se upotrebljavaju u odgovarajućem analognom električnom modelu. Poznato je da konstruktivno izvodjenje linearnih elemenata pričinjava [illegible] manje teškoće od konstruktivnog izvodjenja nelinearnih elemenata i, sem toga, konstruktivna greška linearnih elemenata je mnogo manja. U tome se i ogledaju prednosti metode ovog rada koje su zasnovane na primeni linearnog dela repetitivnog diferencijalnog analizatora. Naponska promena utiče na tačnost uspostavljene analogije sa brojnim veličinama, dok konstruktivna tačnost pojedinih elemenata utiče na ukupnu tačnost odgovarajućeg analognog električnog modela u koji se uključuju.

Greške treće vrste su subjektivne prirode. One se javljaju usled grešaka kod postavljanja pojedinih koeficijenata, na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, problema koji se rešava.

U slučaju odredjivanja nula polinoma potrebno je tačno nameštiti, naprimer, koeficijente polinoma

$$W(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad . \qquad /III,27/$$

Medjutim, praktično je isključena mogućnost da se svi koeficijenti polinoma /III,27/ mogu postaviti potpuno tačno na analizator. Uvek će se u njihovom postavljanju učiniti greška δa_ν koja može da bude pozitivna i negativna. Znači da se umesto odredjivanja nula polinoma /III,27/ praktično odredjuju nule polinoma

$$W_1(z)=\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu+\delta a_\nu)z^\nu \qquad /III,28/$$

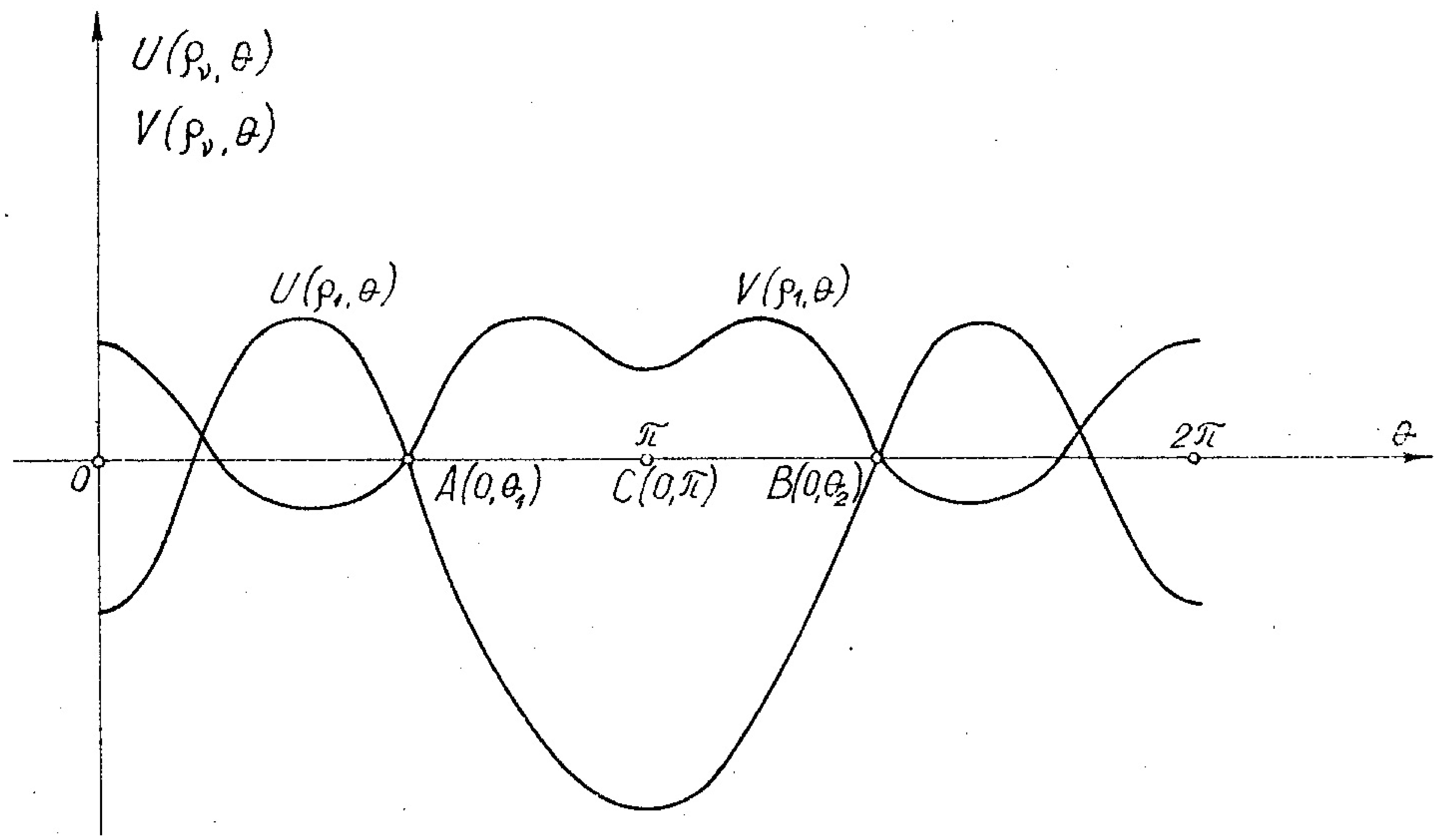
Otuda proizilazi da je ukupna greška, usled subjektivne greške kod postavljanja koeficijenata a_ν ,

$$\varepsilon=W_1(z)-W(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\delta a_\nu z^\nu$$

koja se ravnopravno rasporedjuje na realni i imaginarni deo polinoma čije se nule odredjuju.

Metoda koja se koristi u ovoj glavi veoma je pogodna za analizu ukupne greške koja se javlja pri rešavanju navedenih problema i, pored toga, pruža mogućnost da se poboljša tačnost nekih rezultata.

Za odredjivanje nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima rečeno je da se mogu koristiti dva intervala za θ : $\theta=0\div\pi$ i $\theta=0\div2\pi$. Ako se koristi interval $\theta=0\div2\pi$ onda bi se $U(\rho\theta)$ realni i $V(\rho\theta)$ imaginarni deo ovih polinoma, za vrednosti ρ_ν koje predstavljaju [illegible], [illegible] na θ osi /θ -osa predstavlja vremensku


$U(\rho_\nu,\theta)$
$V(\rho_\nu,\theta)$
$U(\rho_1,\theta)$
$V(\rho_1,\theta)$
0
$A(0,\theta_1)$
π
$C(0,\pi)$
$B(0,\theta_2)$
2π
θ

Sl.12

ne/ u tačkama $A(0,\theta_{1\gamma})$ i $B(0,\theta_{2\gamma})$. Za idealnu tačnost, tačke A i B su simetrične u odnosu na tačku $C(0,\pi)$, sl. 12.

Medjutim, usled grešaka koje unose elementi repetitivnog diferencijalnog analizatora, izvori za napajanje i grešaka subjektivne prirode, često je pojava da $\theta_{1\gamma}$ i $\theta_{2\gamma}$ mogu biti vrednosti koje su nesimetrične u odnosu na $\theta=\pi$. Preko ove nesimetričnosti bila izražena greška argumenta θ, a greška modula ρ zavisi samo od tačnosti linearnih preciznih potenciometara i tačnosti sa kojom se mogu pročitati vrednosti sa njih. Može se reći, iz praktičnog iskustva, da je tačnost rešenja više osetljiva u odnosu na argumenat θ. Zato je potrebno, u cilju postizanja veće tačnosti, kod rešavanja ovih problema pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora najpre ostvariti tako $\rho=\rho_1$ da $U(\rho_1,\theta)$ i $V(\rho_1,\theta)$ za isto $\theta=\theta_1 (0\leqq\theta_1\leqq\pi)$ budu jednaki nuli. Normalno je očekivati da će postojati i $\theta=\theta_2=2\pi-\theta_1$ tako da za isto $\rho=\rho_1$, $U(\rho,\theta)$ i $V(\rho,\theta)$ budu jednaki nuli, ali u praktičnom rešavanju ponekad se kod potrebe da se ρ_1 poveća ili smanji za neku malu vrednost $\Delta\rho_1$, da bi se moglo odrediti vrednost $\theta=\theta_2$ koja ispunjava ove uslove. Česta je pojava da je $\Delta\rho_1$ toliko malo da se ne može registrovati, ali kada je to moguće, potrebno je uzeti, u cilju smanjenja greške,

$$\rho = \rho_1 \pm \frac{\Delta\rho_1}{2} \qquad /III,29/$$

i

$$\theta = \pi + \frac{\theta_1-\theta_2}{2} \qquad /III,30/$$

Pomoću izraza /III,29/ i /III,3o/, ovaj postupak popravke rezultata može se primeniti na svaki par konjugovano kompleksnih nula algebarskih polinoma sa realnim koeficijentima.

Kada su u pitanju realne nule, efikasnost ove metode nije umanjena. Za slučaj realnih i pozitivnih nula imamo, za idealnu tačnost, argumente $\theta_1=0$ i $\theta_2=2\pi$, dok za slučaj realnih negativnih nula $\theta_1=\pi$ i $\theta_2=3\pi$. Popravka rezultata može se izvršiti pomoću izraza /III,29/ i /III,[illegible]/.

IV. [illegible] STABILNOSTI POMOĆU KONFORMNOG PRESLIKAVANJA ALGEBARSKIH POLINOMA NA REPETITIVNOM DIFERENCIJALNOM ANALIZATORU

IV.1. Konformna preslikavanja algebarskim polinomima

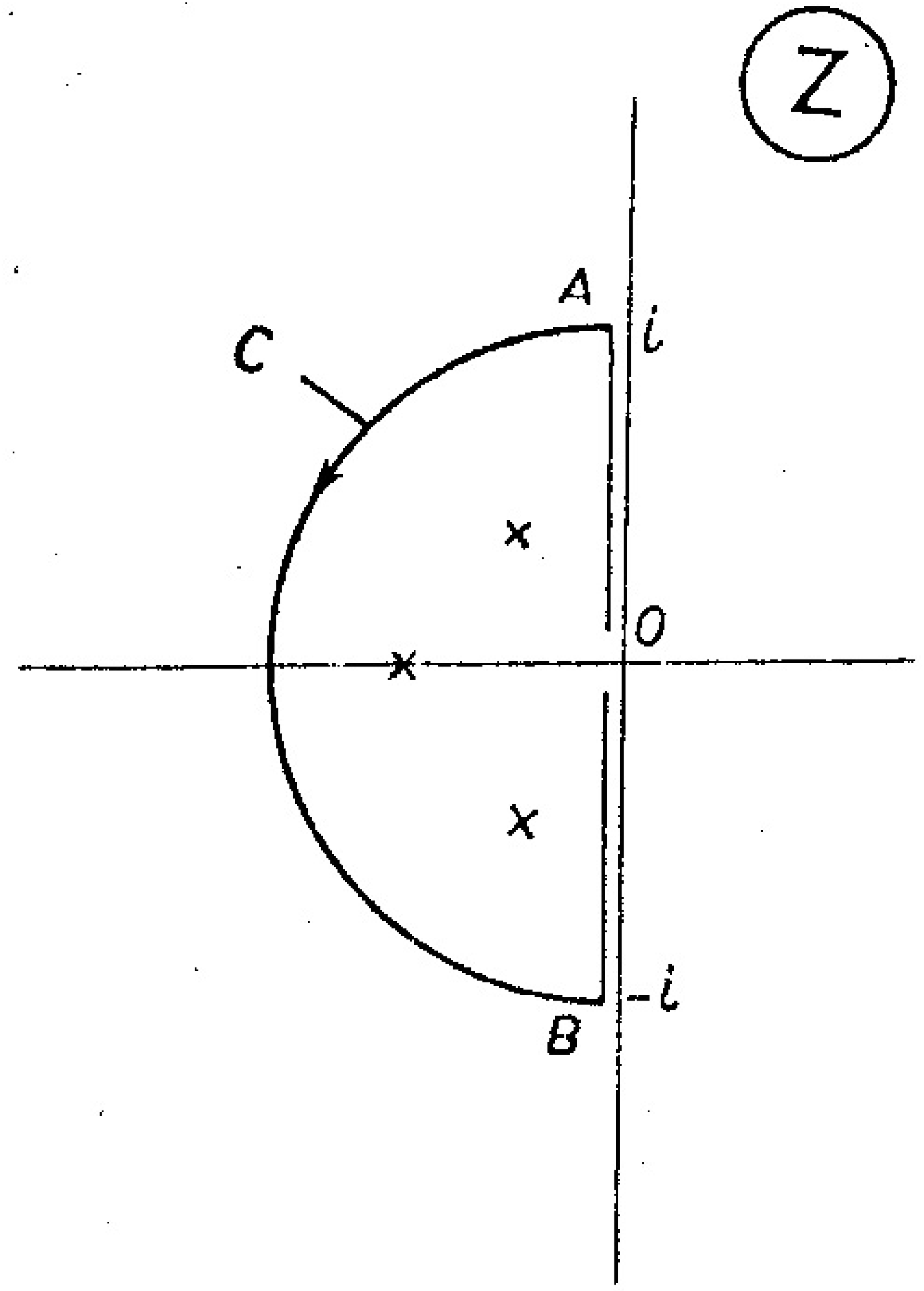
Poznato je da je preslikavanje algebarskim polinomima z-ravni na W-raven konformno i da ovo preslikavanje bilo koje zatvorene konture C koja leži u z-ravni na W-raven daje u W-ravni neku konturu C'. Kontura C' će biti, prema poznatom principu promene argumenta / 31 , str.3[illegible]/, zatvorena oko tačke W=o sa onoliko petlji koliko nula algebarskog polinoma, kojim se vrši preslikavanje leži u konturi C.

Ova preslikavanja generališu, pored ostalog, neke veoma interesantne probleme kao što su: odredjivanje nula algebarskih polinoma, ispitivanje dinamičke stabilnosti linearnih i linearizovanih sistema sa povratnom spregom i ispitivanje stabilnosti rešenja linearnih diferencijalnih jednačina preko karakterističnog polinoma, odredjivanje multipliciteta nula i prstena u kome leže sve nule algebarskog polinoma koji se ispituje.

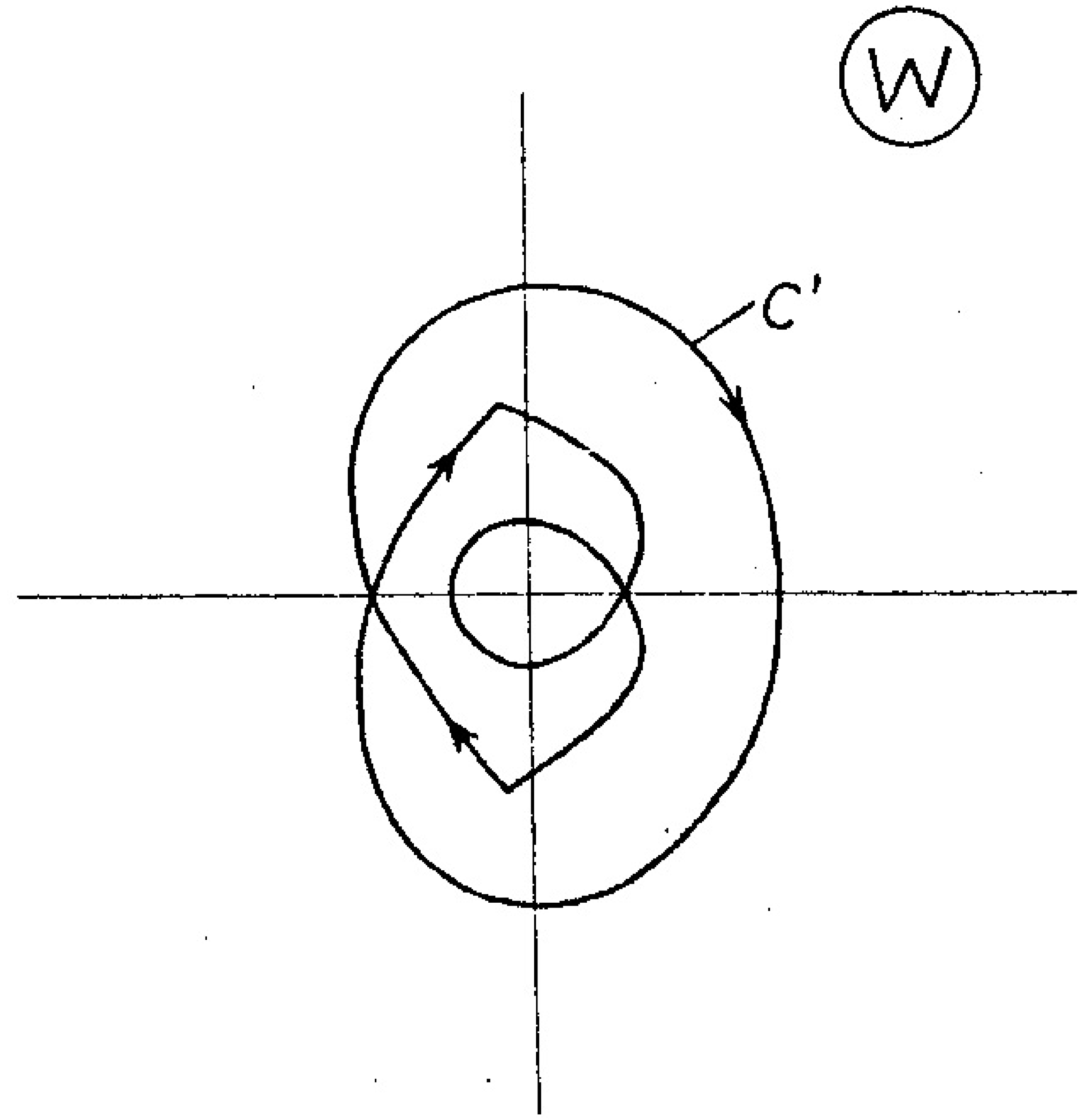
U glavama II i III već su naglašene prednosti metoda koje koriste Dekartove i polarne koordinate, jedne nad drugom i nad ostalim poznatim analognim metodama, kada se koriste za konformna preslikavanja.

IV.2. Ispitivanje dinamičke stabilnosti linearnih i linearizovanih sistema sa povratnom spregom i stabilnosti rešenja linearnih diferencijalnih jednačina pomoću konformnog preslikavanja

Kao što je poznato, ispitivanje dinamičke stabilnosti linearnih i linearizovanih sistema sa povratnom spregom i ispitivanje stabilnosti rešenja linearnih diferencijalnih jednačina svode se na ispitivanje znaka realnog dela svih nula odgovarajućih algebarskih polinoma. Za jedan sistem, okarakterisan algebarskim polinomom sa realnim koeficijentima, kaže se da je stabilan ako sve nule toga polinoma leže u levoj poluravni z-ravni ili drugim rečima, ako su realni delovi svih nula negativnog znaka. Ispitivanje stabilnosti može se izvršiti bilo kojom metodom kojom se može ustanoviti znak realnog dela svih nula odgovarajućih polinoma. Jedan od tih postupaka za ispitivanje stabilnosti sastoji se u odredjivanju vrednosti nula polinoma. Medjutim, kako postupci [illegible] odredjivanja nula pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora [illegible] [illegible] cele z-ravni da bi se [illegible] izvršile sve tačke



Sl. 13 a



Sl. 13 b

koje se preslikavaju u celu levu W-ravan, smatramo da je jednostavnije primeniti kvalitativno ispitivanje stabilnosti pomoću konformnog preslikavanja jedne određene konture iz z-ravni na W-ravan. Ovaj postupak je brži i jednostavniji i pruža mogućnost da se odredi broj nula algebarskog polinoma koje leže u levoj poluravni z-ravni ne upuštajući se u probleme oko određivanja njihove vrednosti. U tom cilju za konturu C najbolje je izabrati jedinični polukrug kao na sl. 13a.

Najpre je potrebno ustanoviti broj nula polinoma unutar ovog jediničnog polukruga, a zatim se smenom /III,3/ može ispitati broj ostalih nula koje leže u levoj poluravni z-ravni van konture C, koja u našem slučaju predstavlja polukrug sa sl. 13a. Ako bi, na primer, samo tri nule polinoma kojim se vrši preslikavanje konture C ležale u ovoj konturi, onda bi kontura C' imala izgled kao na sl. 13b.

Primena repetitivnog diferencijalnog analizatora u ove svrhe zasnovana je na korišćenju izraza za realni i imaginarni deo polinoma /II,4/ koji su napisani u obliku /III,16/ i /III,17/, odnosno /III,18/ i /III,19/. Ovi oblici za $U(\rho,\theta)$ i $V(\rho,\theta)$ već su se koristili za određivanje nula polinoma /II,4/ pomoću metode izložene u poglavlju III.1.2, ali je njihova primena šira. Ranije je već rečeno da se ti izrazi mogu odlično iskoristiti za konformna preslikavanja a time i za ispitivanje stabilnosti.

Preslikavanje konture C, sl. 13a, pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora postiže se na sledeći način: najpre se za $\theta=\frac{\pi}{2}$, promenom $\rho=0\div 1$ pomeranjem osovine linearnih spregnutih potenciometara, odredi koliko se želi vrednosti $U(\rho,\frac{\pi}{2})$ i $V(\rho,\frac{\pi}{2})$ pri čemu će se izvršiti preslikavanje duži $\overline{OA}$ iz z-ravni na W-ravan. Istovremeno se pri istom postupku dobijaju za $\theta=\frac{3\pi}{2}$ vrednosti $U(\rho,\frac{3\pi}{2})$ i $V(\rho,\frac{3\pi}{2})$ koje predstavljaju lik originala $\overline{OB}$ što znači da je na ovaj način ostvareno preslikavanje cele duži $\overline{AB}$. U slučaju kada se na linearnim potenciometrima, koji služe za variranje parametra ρ *), postigne $\rho=1$, može se u razmaku $\theta=\frac{\pi}{2}\div\frac{3\pi}{2}$ izmeriti koliko se želi odgovarajućih vrednosti $U(1,\theta)$ i $V(1,\theta)$ koje će predstavljati tačke W-ravni dobivene preslikavanjem tačaka polukruga $\widehat{AB}$, sl. 13a, iz z-ravni. Tako je u potpunosti izvršeno

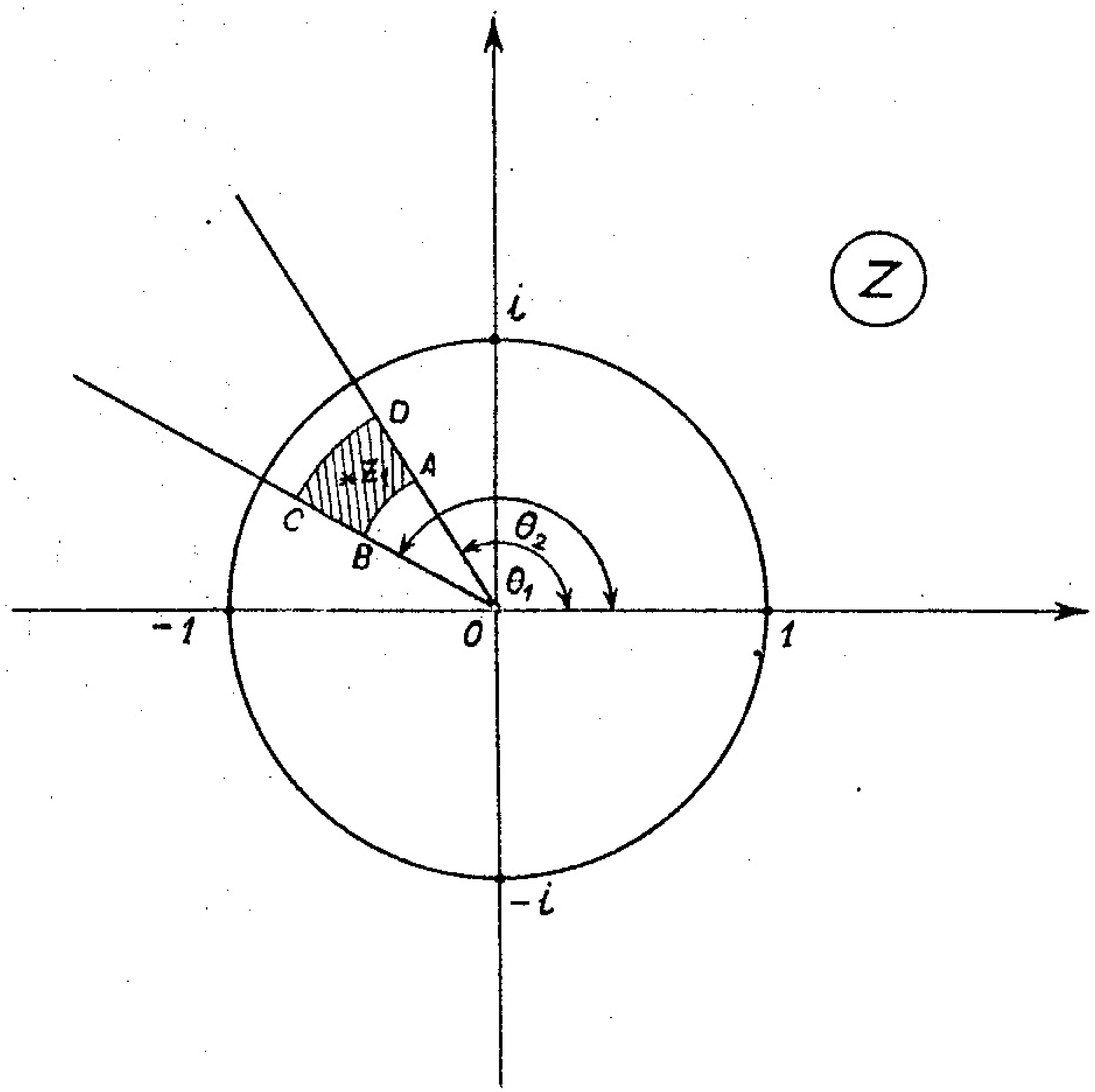
*) U metodi koja koristi polarne koordinate modul ρ se tretira kao promenljivi parametar, slično kao što se u metodi koja koristi Dekartove koordinate tretira y^2.

preslikavanje konture C iz z-ravni na W-ravan /sl. 13 i sl. 13'/ i na osnovu toga moguće je utvrditi broj nula polinoma /II,1/ koje leže u ovoj konturi. Za ispitivanje broja nula polinoma /II,1/ koje leže u levoj poluravni z-ravni, ili van propisane konture C, potrebno je izvršiti preslikavanje konture C, pomoću smene /III,7/, transformisanim polinomom. Dalji postupak za ispitivanje broja ovih nula je identičan napred opisanom postupku.

IV.3. Odredjivanje multipliciteta nula algebarskih polinoma pomoću konformnog preslikavanja

Svaka tačka z-ravni definisana je sa jednom vrednosti ρ iz intervala $0 \div \infty$ i sa jednom vrednosti θ iz intervala $0 \div 2\pi$. Ove vrednosti za ρ i θ mogu se bez teškoća ostvariti na repetitivnom diferencijalnom analizatoru pomoću izložene metode u glavi III i otuda je moguće izvršiti preslikavanje bilo koje tačke iz z-ravni na W-ravan. Znači, svaka zatvorena ili otvorena kontura iz z-ravni može se ovim postupkom preslikati, algebarskim polinomom, na W-ravan. Ceo postupak preslikavanja se može vizuelno pratiti na ekranu katodnog oscilografa. U pogledu prirode nula i koeficijenata algebarskih polinoma kojim se vrše preslikavanja ne postavljaju se nikakva ograničenja.

Ove osobine mogu se veoma povoljno iskoristiti za odredjivanje multipliciteta nula algebarskih polinoma. U tom cilju nameće se potreba da se prethodno izabere jedna pogodna zatvorena kontura oko nule polinoma čiji se multiplicitet želi ispitati. Za praktično odredjivanje multipliciteta nula pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora metodom koja koristi polarne koordinate, pokazalo se da je, zbog jednostavnog postupka za preslikavanje, najbolje izabrati za konturu oko ispitivane nule polinoma zatvorenu konturu ABCD, sl. 14, gde su $\widehat{AB}$ i $\widehat{CD}$ lukovi krugova poluprečnika $\overline{OA}=\rho_1$ i $\overline{OC}=\rho_2$ respektivno, a θ_1 i θ_2 odgovarajući argumenti za tačke A i B, odnosno D i C. Osim toga, kontura ABCD treba da bude tako izabrana da unutar nje leži samo jedna nula polinoma čiji se multiplicitet ispituje, koja se unapred odredi pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora. Preslikavanjem konture ABCD na W-ravan, slično postupku za ispitivanje dinamičke stabilnosti, dobiće se u W-ravni zatvorena kontura oko tačke W=0 sa onoliko petlji koliki je red ispitivane nule. Ovaj postupak se može primeniti na sve slučajeve algebarskih polinoma pri čemu se koriste isti oblici za $U(\rho,\theta)$ i $V(\rho,\theta)$ kao i njihovi odgovarajući analogni električni modeli koji su korišćeni kod odredjivanja nula polinoma.



Sl. 14

[illegible] , sl. 14, [illegible] ravan, najpre se na linearnim [illegible] potenciometrima izabere vrednost $\rho=\rho_1$ i izvrši preslikavanje tačaka luka $\widehat{AB}$ za željeni broj vrednosti θ iz intervala $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, a zatim se za $\theta=\theta_1$ i $\theta=\theta_2$ izvrši preslikavanje tačaka duži $\overline{AD}$, odnosno $\overline{BC}$, variranjem ρ u intervalu $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, što se postiže pomeranjem osovine linearnih spregnutih potenciometara. Kada se postigne položaj klizača na potenciometrima za koji je $\rho=\rho_2$, onda se izvrši preslikavanje tačaka luka $\widehat{CD}$ za željeni broj vrednosti θ iz intervala $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Na taj način je izvršeno preslikavanje cele konture ABCD iz z-ravni na W-ravan na osnovu koga se mogu, prema broju dobijenih zatvorenih petlji, doneti potrebni zaključci o multiplicitetu ispitivane nule polinoma. Postupak za ispitivanje multipliciteta bilo koje nule polinoma je isti.

IV.4. Odredjivanje prstena u kome leže sve nule algebarskog polinoma

Slično postupcima koji su korišćeni za odredjivanje multipliciteta nule polinoma i za ispitivanje dinamičke stabilnosti, mogu se izvršiti preslikavanja koncentričnih krugova oko koordinatnog početka z-ravni na W-ravan. Rezultati ovih preslikavanja dobijaju se direktno na ekranu katodnog osciloskopa i oni mogu poslužiti za odredjivanje prstena u z-ravni u kome leže sve nule polinoma sa kojim je vršeno preslikavanje. Na taj način, kada se promenom $\rho=0 \div \infty$ dobije prva zatvorena petlja oko tačke W=o, odredjuje se ρ_{min} , dok prva vrednost ρ za koju se dobije onoliko zatvorenih petlji oko W=o koliki je stepen polinoma kojim se vrši preslikavanje predstavlja ρ_{max}. Ako se promenom ρ prebriše neka nula datog polinoma koja je višestruka ili kompleksna a koja leži u prstenu koji je ograničen sa ρ_{min} i ρ_{max} , onda se istovremeno javlja na ekranu katodnog osciloskopa onoliko zatvorenih petlji oko tačke W=o koliki je red nule, ako je realna, i dva puta više ako se radi o višestrukim parovima kompleksnih nula. Za izvodjenje direktnih preslikavanja ove vrste, umesto postojećeg mernog sistema korišćen je obični katodni osciloskop na čiji se horizontalni par ploča dovodi $U(\rho,\theta)$ a na vertikalni $V(\rho,\theta)$, čime se postiže direktno dobijanje rezultata preslikavanja na njegovom ekranu.

V. [illegible] TRIGONOMETRISKIH POLINOMA [illegible] DIFERENCIJALNOG ANALIZATORA

V.1. [illegible]

U poglavlju I.?. ukazano je na nedostatke odredjivanja nula trigonometriskih polinoma svodjenjem na odredjivanje nula algebarskih polinoma.

U ovoj se glavi daje direktna metoda za odredjivanje nula trigonometriskih polinoma. Prednosti ove metode nad dosadašnjom indirektnom metodom su velike:

1/ omogućeno je vizuelno praćenje uticaja promene pojedinih koeficijenata i parametara na rezultat

2/ izbegnuta su preračunavanja koja se nameću upotrebom indirektne metode.

Najopštiji slučaj odredjivanja nula trigonometriskih polinoma oblika

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta} , \qquad /V,1/$$

javlja se kada ovi polinomi imaju kompleksne koeficijente i promenljivu. Specijalni slučajevi su odredjivanje realnih kompleksnih nula polinoma sa realnim koeficijentima i odredjivanje realnih nula polinoma sa kompleksnim koeficijentima. Ovi problemi imaju praktičnu primenu u mnogim granama tehnike a naročito u sistemima impulsne tehnike. Primena digitalnog diferencijalnog analizatora za rešavanje ovih problema pruža široke mogućnosti, uz jednostavan postupak, koje su podjednake za sve slučajeve polinoma /V,1/.

V.1.1. Opšti izraz za trigonometriske polinome sa kompleksnim koeficijentima može se napisati u obliku

$$W(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{i\nu z} , \qquad /V,2/$$

gde su c_ν kompleksni koeficijenti a z kompleksna promenljiva. Ako se u /V,2/ uvedu smene $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$ i $z = x + iy$, dobiva se

$$W(z) = U(x,y) + i\,V(x,y) , \qquad /V,3/$$

gde su:

$$U(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} e^{-\nu y}(a_\nu \cos\nu x - b_\nu \sin\nu x) \qquad /V,4/$$

$$V(x,y) = \sum^{n} e^{-\nu y}(b_\nu \cos\nu x + a_\nu \sin\nu x) . \qquad /V,5/$$

Za odredjivanje nula polinoma /V,4/ pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora pogodni su sledeći oblici za $U(x,y)$ i $V(x,y)$:

$$U(x,y)=a_0+e^{-y}\left\{a_1\cos x-b_1\sin x+e^{-y}\left[a_2\cos 2x-b_2\sin 2x+e^{-y}\left(a_3\cos 3x-b_3\sin 3x+\ldots\right)\right]\right\} \qquad /V,6/$$

$$V(x,y)=b_0+e^{-y}\left\{b_1\cos x+a_1\sin x+e^{-y}\left[b_2\cos 2x+a_2\sin 2x+e^{-y}\left(b_3\cos 3x+a_3\sin 3x+\ldots\right)\right]\right\} \qquad /V,7/$$

Za izraze /V,6/ i /V,7/ može se bez teškoća realizovati odgovarajući analogni električni model.

Problem odredjivanja nula polinoma /V,2/ svodi se na traženje takvih vrednosti za x i y, korišćenjem /V,6/ i /V,7/, za koje će biti ispunjeni uslovi /II,9/ i /II,1o/.

V.1.2. Polazeći od opšteg izraza za trigonometriske polinome sa realnim koeficijentima

$$W(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{i\nu z} \quad , \qquad /V,8/$$

posle uvodjenja smene $z=x+iy$, polinom /V,8/ može se napisati u obliku /V,3/ gde su:

$$U(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{-\nu y}\cos\nu x \qquad /V,9/$$

$$V(x,y)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{-\nu y}\sin\nu x \quad . \qquad /V,1o/$$

Medjutim, izrazi /V,9/ i /V,1o/ nisu pogodni za primenu repetitivnog diferencijalnog analizatora, ali ako se napišu u obliku

$$U(x,y)=a_0+e^{-y}\left\{a_1\cos x+e^{-y}\left[a_2\cos 2x+e^{-y}\left(a_3\cos 3x+\cdots\right)\right]\right\} \qquad /V,11/$$

$$e^{y}\cdot V(x,y)=a_1\sin x+e^{-y}\left\{a_2\sin 2x+e^{-y}\left[a_3\sin 3x+e^{-y}\left(a_4\sin 4x+\cdots\right)\right]\right\} \qquad /V,12/$$

za njih se, bez teškoća, može sastaviti odgovarajući analogni električni model koji služi za odredjivanje kompleksnih nula polinoma /V,8/. Prema tome, slično izrazima /V,6/ i /V,7/, traže se one vrednosti x i y koje će ispunjavati uslove /II,9/ i /II,1o/.

V.1.3. Realne nule trigonometriskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima mogu se odrediti polazeći od polinoma oblike

$$W(x)=\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{i\nu x} \qquad /V,13/$$

gde su koeficijenti $c_\nu=a_\nu+ib_\nu$ a x realna promenljiva. Posle razdvajanja polinoma /V,13/ na realni i imaginarni deo, ima se

$$U(x)=\sum_{\nu=0}^{n} \left(a_\nu\cos\nu x-b_\nu\sin\nu x\right) \qquad /V,14/$$

[illegible] /V,1?/ [illegible] /V,1?/ [illegible]
[illegible] trigo-
nom /V,13/.

V.1.1. Primena repetitivnog diferencijalnog analizatora za određivanje nula trigonometriskih polinoma sa realnim koeficijentima [illegible] je [illegible] u primeni najčešće. Polazeći od [illegible] polinoma

$$W(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{i\nu x} \,, \qquad /V,16/$$

gde su a_ν realni koeficijenti a x realna promenljiva, dobiće se posle razvrstavanja na realni i imaginarni deo

$$U(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos\nu x \qquad /V,17/$$

$$V(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \sin\nu x \,. \qquad /V,18/$$

Za ove izraze je takodje lako realizovati odgovarajući analogni [illegible] model.

Postupak kod određivanja nula polinoma /V,13/ pomoću izraza /V,14/ i /V,15/ i polinoma /V,16/ pomoću izraza /V,17/ i /V,18/ sastoji se u tome što je potrebno odrediti sve vrednosti x-sa koje su istovremeno [illegible] i [illegible]

$$U(x)=0 \qquad /V,19/$$

$$V(x)=0 \,. \qquad /V,20/$$

Postoji više teoriskih radova o trigonometriskim polinomima i [illegible] stavovi, dokazani teoriskim putem, mogu se eksperimentalno proveriti primenom repetitivnog diferencijalnog analizatora, kao naprimer stav iz rada M.Tomića [13], što je pokazano u primeru 8.

V.1.2. Istim postupkom, koji je primenjen kod određivanja nula trigonometriskih polinoma, mogu se pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora rešavati trigonometriske jednačine

$$f(\sin x, \cos x)=0 \qquad /V,21/$$

kao i sistemi trigonometriskih jednačina

$$f_\nu(\sin x, \cos x)=0 \,, \quad \nu=0,1,2,\ldots \qquad /V,22/$$

Kod ovih jednačina, u pogledu prirode koeficijenata i promenljive, ne postavljaju se nikakva ograničenja tako da i koeficijenti i promenljiva mogu biti [illegible] realni i kompleksni.

[illegible] /V,[illegible]/ i /V,[illegible]/ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{xi} - e^{-xi}\right) \qquad /V,[illegible]/$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{xi} + e^{-xi}\right) \quad , \qquad /V,[illegible]/$$

[illegible], i mogu [illegible] [illegible]. [illegible] jednačina /V,21/ i /V,22/ [illegible] koristiti [illegible] određivanju [illegible] trigonometrijskih polinoma.

Od interesa je [illegible] da se mogu [illegible] jednačine

$$f(\sin ax, \cos ax) = 0$$

i sistemi jednačina

$$f_\nu(\sin ax, \cos ax) = 0 \quad , \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

gde je a bilo koji [illegible] promenljive.

Sličnim postupkom, mogu se [illegible] [illegible] realna rešenja [illegible]

$$W(x) + f(\sin x, \cos x) = 0 \qquad /V,23/$$

i sistema jednačina

$$W_\nu(x) + f_\nu(\sin x, \cos x) = 0 \quad , \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \qquad . \qquad /V,24/$$

Jednačine /V,23/ i /V,24/ su složenije [illegible] od jednačina /V,21/ i /V,22/ i mogu se [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] u intervalu [illegible] promenljive x, koji se inače [illegible] pri [illegible] standardnih problema [illegible]. Suština određivanja rešenja jednačina /V,23/ i /V,24/ sastoji se u tome što se, slično [illegible] /V,[illegible]/ i /V,[illegible]/, [illegible] odgovarajući [illegible] koji daju [illegible] levoj strani ovih jednačina. [illegible] realna rešenja, [illegible] /V,25/ [illegible] jednačine /V,26/, [illegible] realnih rešenja x_k u intervalu [illegible] promenljive x [illegible] vrednosti x_k [illegible] uslov /V,26/ za svako $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, pri [illegible] ν [illegible].

[illegible]

[illegible] jednačine

Ulire [illegible] izlo[illegible] u [illegible] upotrebom samo trigonometrijskih [illegible] elemenata linearn[illegible] [illegible] [illegible] nula trigonometrijskih [illegible] i re[illegible] [illegible]. Za [illegible] $\cos\nu x$ i $\sin\nu x$, $(\nu=1,2,\cdots,n)$ [illegible] se koristi [illegible] linearna diferencijalna jednačina /III, [illegible]/ [illegible]. [illegible] diferencija[illegible] [illegible] diferencijal[illegible], [illegible] i [illegible] u [illegible] jednog analognog elektronskog [illegible] u glavi III. Linearn[illegible] [illegible] e^{-y} i e^{y} [illegible] variraju [illegible] $+1$, [illegible] [illegible] do ∞ i od $-\infty$ do 0. [illegible] ostvariti samo [illegible] od 0 do 2π, [illegible] periodično.

V. [illegible]. Nule polinoma /V,[illegible]/ koje se [illegible] diferencijalnog analiz[illegible] [illegible] /[illegible]/ i /[illegible]/. Smatrajući x kao nezavisno promenljivu [illegible] e^{-y}, kao promenljiv parametar, može se prići realizovanju odgovarajućeg analognog električnog modela koji je sličan modelu na sl. [illegible]. I u ovom slučaju, pri sastavlj[illegible] odgovarajućeg [illegible] za rešavanje konkretnog [illegible], treba voditi računa o racionalnom korišćenju elemenata [illegible] diferencijal[illegible] [illegible], u cilju njihove uštede. Za [illegible] e^{-y} koristi [illegible] trni spregnuti potenciometri, dok se za [illegible] $\cos\nu x$ i $\sin\nu x, (\nu=1,2,\ldots,n)$ koristi diferencijalna [illegible] /III,[illegible]/. [illegible] spregnutih potenciometara parametar e^{-y} [illegible], [illegible] znači da se time [illegible] variranje y u granicama od 0 do ∞. [illegible] $Z=-Z^*$ može se [illegible], na sličan način, v[illegible] [illegible] od $-\infty$ do 0.

V. [illegible]. Za određivanje nula trigonometrijskih [illegible] koeficijentima [illegible] diferencijal[illegible] se izrazi /V,11/ i /V,12/. Izrazi $\cos\nu x$, $\sin\nu x$ i e^{-y} [illegible] u prethodnom slučaju.

[illegible] /V,[illegible]/ i /V,[illegible]/ [illegible] [illegible] e^{-y}, [illegible]

[illegible] analogona. Odgovarajući analogni [illegible] linearni [illegible] model za određivanje nula polinoma /V,1/ [illegible] je [illegible] na sl. [illegible]

V.3. Za određivanje nula polinoma /V,13/ pomoću [illegible] koriste se formule /V,14/ i /V,15/. U [illegible] analognom električnom modelu ne koriste se linearni operatori [illegible] trigonometrijske u prethodnim slučajevima, već [illegible] operativni [illegible]. Za formule /V,14/ i /V,15/ može se lako realizovati odgovarajući model ako se iskoriste rešenja linearne diferencijalne jednačine /III,26/ za razne vrednosti ν. Prilikom određivanja nula polinoma /V,13/ [illegible] da se [illegible] postoji li takvih vrednosti x u intervalu od 0 do 2π za koje su istovremeno ispunjeni uslovi /V,14/ i /V,15/. Ako postoji takvih vrednosti x onda su one nule polinoma /V,13/.

Potpuno isti problem tako imamo kod određivanja realnih nula trigonometrijskih polinoma sa realnim koeficijentima.

VII. [illegible]

[illegible]

VII.1. Analitičko re[illegible]nja jedne klase diferencijalnih jednačina pomoću repetitivnog di[illegible]rencijalnog analizatora

[illegible] diferencijalnih analizatora u [illegible] diferencijalnih [illegible] bilo usmereno uglavnom na dobijanje grafičkih rešenja. U izvesnim slučajevima ovakav oblik rešenja je koristan i potreban. Medjutim, repetitivni diferencijalni analizator može služiti i za analitičko rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina, pri čemu se njegova uloga sastoji u odredjivanju nula karakterističnog polinoma. Analitičko rešenje nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina može se, [illegible] odredjivanja nula karakterističnog polinoma pomoću izloženih metoda, [illegible] se koristi repetitivni diferencijalni analizator, dobiti [illegible] a u najopštijem slučaju Lagrange-ovom metodom varijacije konstanata. Repetitivni diferencijalni analizator može se koristiti za analitičko rešavanje i nekih drugih vrsta diferencijalnih jednačina koje se [illegible] transformacijama mogu svesti na linearne diferencijalne jednačine. Medju ove spadaju, naprimer Jacobi-eva diferencijalna jednačina, [illegible]-eva diferencijalna jednačina i one koje se svode na njih.

Pri analitičkom rešavanju ovih jednačina, repetitivni diferencijalni analizator treba koristiti u onim slučajevima kada je njegov udeo [illegible]. Naprotiv, kada pomoć analizatora predstavlja vrlo mali deo [illegible] sa ostalim numeričkim operacijama koje treba obaviti [illegible] se došlo do konačnog analitičkog rešenja, upotreba analizatora je [illegible].

Sa praktičnog [illegible] gledišta interesantno je uporediti grafičko i analitičko rešenje jedne diferencijalne jednačine, kada su i jedno i drugo [illegible] pomoću istog repetitivnog diferencijalnog analizatora. Iz [illegible] primera može se videti da su greške istog reda veličine, iako se analitičko rešenje odnosi na ceo interval nezavisno promenljive, a grafičko pokriva samo jedan njen deo.

Nule karakterističnog polinoma mogu se odrediti pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora bilo da se koristi metoda iz glave II bilo [illegible] III.

VI.[illegible]. Ispitivanje flutter-a

Veliki [illegible] je potrebno [illegible]ziranja. [illegible] vrste vibracije krila i repnih površina, koji se u literaturi obradjuju kao problem flutter-a. Do toga se dolazi [illegible] krila i repne površine ne [illegible] intenzivno da osciluju. Vibracije ove vrste nastaju pri nekoj potpuno odredjenoj brzini leta i imaju tako intenzivan karakter da brzo dovode do razaranja aviona i projektila. To su vibracije tipa flutter i one predstavljaju najopasniji oblik vibracija zato što od njihovog nastanka do razaranja objekta koji leti ne prodje ni nekoliko sekundi. Otuda je opravdano što se na ispitivanje ove pojave moraju preduzeti mere još u fazi projektovanja. Pošto postoje unutrašnje sile trenja konstrukcije, oscilacije bi trebalo da budu prigušene. Medjutim, pri savijanju i uvijanju krila kao i zbog otklona kormila, javljaju se aerodinamičke sile pri čemu neke od njih mogu da budu prigušujuće a neke pobudjujuće. Rezultujuće oscilovanje zavisiće od toga koje će sile biti intenzivnije. U slučaju da su intenzivnije pobudjujuće sile, imamo pojavu flutter-a. Brzina objekta, koji leti, za koju nastaje flutter predstavlja kritičnu brzinu flutter-a. To je brzina za koju prigušujuće sile postaju jednake pobudjujućim i ona je merilo za odredjivanje dozvoljenih brzina objekta koji leti. Prema tome, u izvodjenju konstrukcije treba težiti maksimalnom povećanju kritične brzine flutter-a da bi ona u stvarnim uslovima leta bila nedostižna.

Pojava flutter-a je prvi put zapažena 1935 godine. Ovom problemu se postepeno pridaje sve veći značaj, tim pre što danas skoro svi objekti koji lete postižu nadzvučne brzine za čiju je sigurnost potrebno obezbedjenje od pojave flutter-a.

Jednu od najozbiljnijih studija problema flutter-a dali su Scanlan i Rosenbaum [27]. Oni su svu problematiku oko ispitivanja flutter-a sveli na problematiku odredjivanja nula algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima. Pored opšteg pregleda postojeće literature, u njihovom radu je posebna pažnja posvećena dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom flutter-u. Dvodimenzionalni flutter se ispituje pomoću algebarskih polinoma sa kompleksnim koeficijentima drugog stepena a trodimenzionalni pomoću algebarskih polinoma trećeg stepena. U slučaju obezbedjenja od pojave flutter-a kaže se da je flutter stabilan.

Uopšte, ako se jednačina stabilnosti flutter-a može napisati u obliku $F(z)=0$, gde je $F(z)$ polinom od z stepena n i $z=\left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2(1+ig)$, g-koeficijent [illegible] flutter-a u [illegible] ω i prirodna [illegible]

[illegible] $F(z)$ [illegible]

[illegible] vrijednosti [illegible]

[illegible] preslikavanja [illegible] na F-ravnini.

[illegible] $F(z)$, koji se odnose [illegible] bilo iz poglavlja XII.[illegible], bilo iz poglavlja XII.[illegible]

[illegible] XII.[illegible] [illegible] $F(z)$, [illegible] slično ispitivanju [illegible] $F(z)$ konture jediničnog [illegible] preslikavanja [illegible] kolik je stupanj [illegible] $F(z)$, [illegible]

III. [illegible]

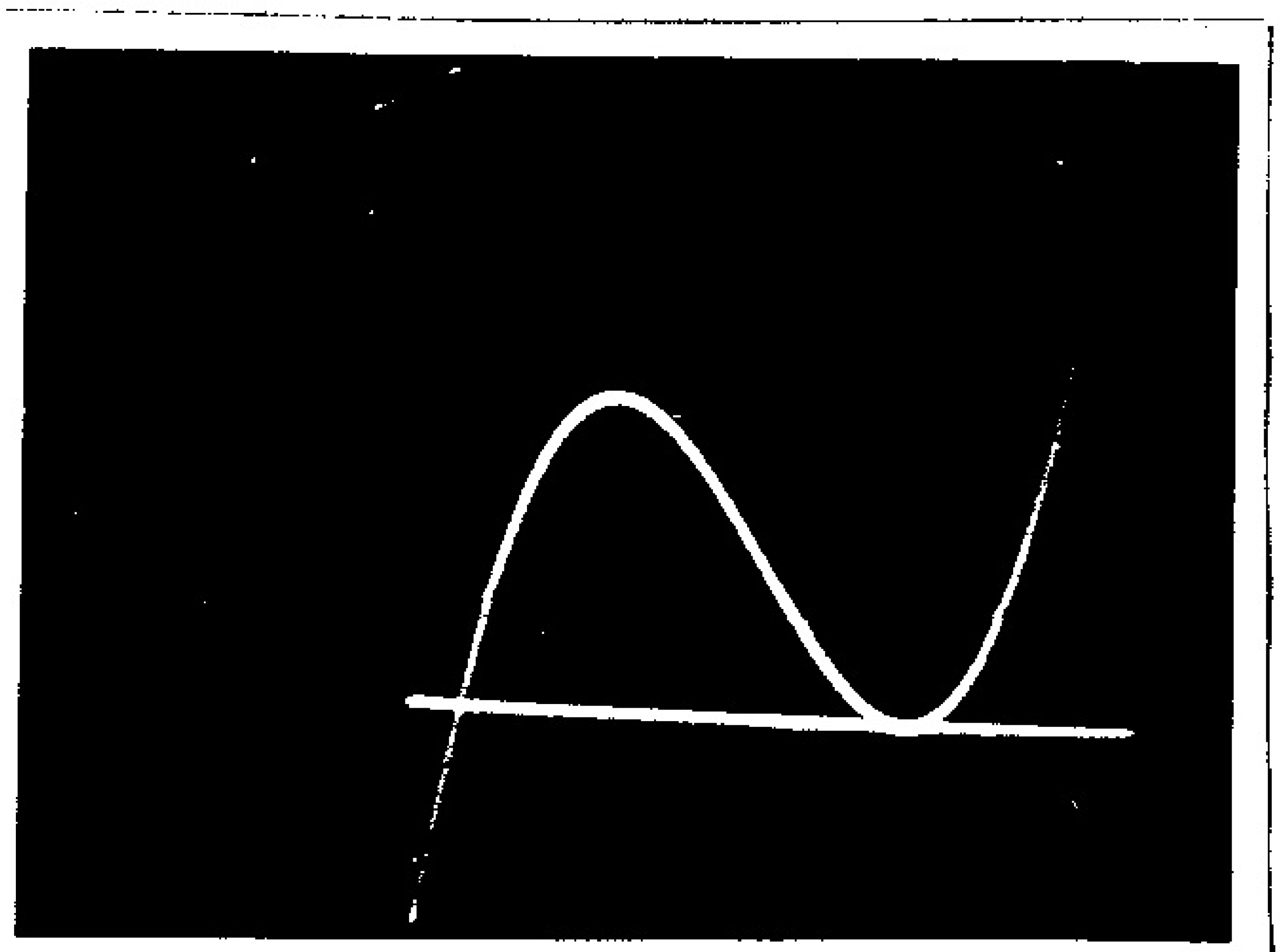
U ovoj glavi dati su karakteristični primeri na kojima se i[illegible] suprot[illegible] [illegible] i [illegible] pri[illegible] [illegible] pojedinom problemu. Z[illegible] je korišćen repetitivni diferencijalni analizator koji [illegible] rešenje [illegible] i pojedini [illegible] rezultati [illegible] na ekranu katodnog osciloskopa [illegible] priloženi za [illegible] primere.

Primer 1. Približno određivanje nula polinoma

$$W(x) = x^3 - 1,9x^2 + 0,99x - 0,081$$

na repetitivnom diferencijalnom analizatoru, prema metodi II.[illegible], dobivene su sledeće vrednosti za nule: $x_1 = +0,[illegible]$, $x_2 = x_3 = [illegible]$, dok su $x_1 = +0,1$ i $x_2 = x_3 = +0,9$ tačne vrednosti.

[illegible] dobijen na ekranu katodnog osciloskopa [illegible] na sl. 15, gde se za dvostruku nulu jasno uočava kako dodiruje [illegible] /x/ sa x-osom.



Sl. 15 Nule polinoma $W(x)=x^3-1,9x^2+0,99x-0,081$

Primer 2. Za polinom

$$W(z) = z^5 - 0,4z^4 + 3,83z^3 - 6,326z^2 + 7,1642z - 3,80752 \quad ,$$

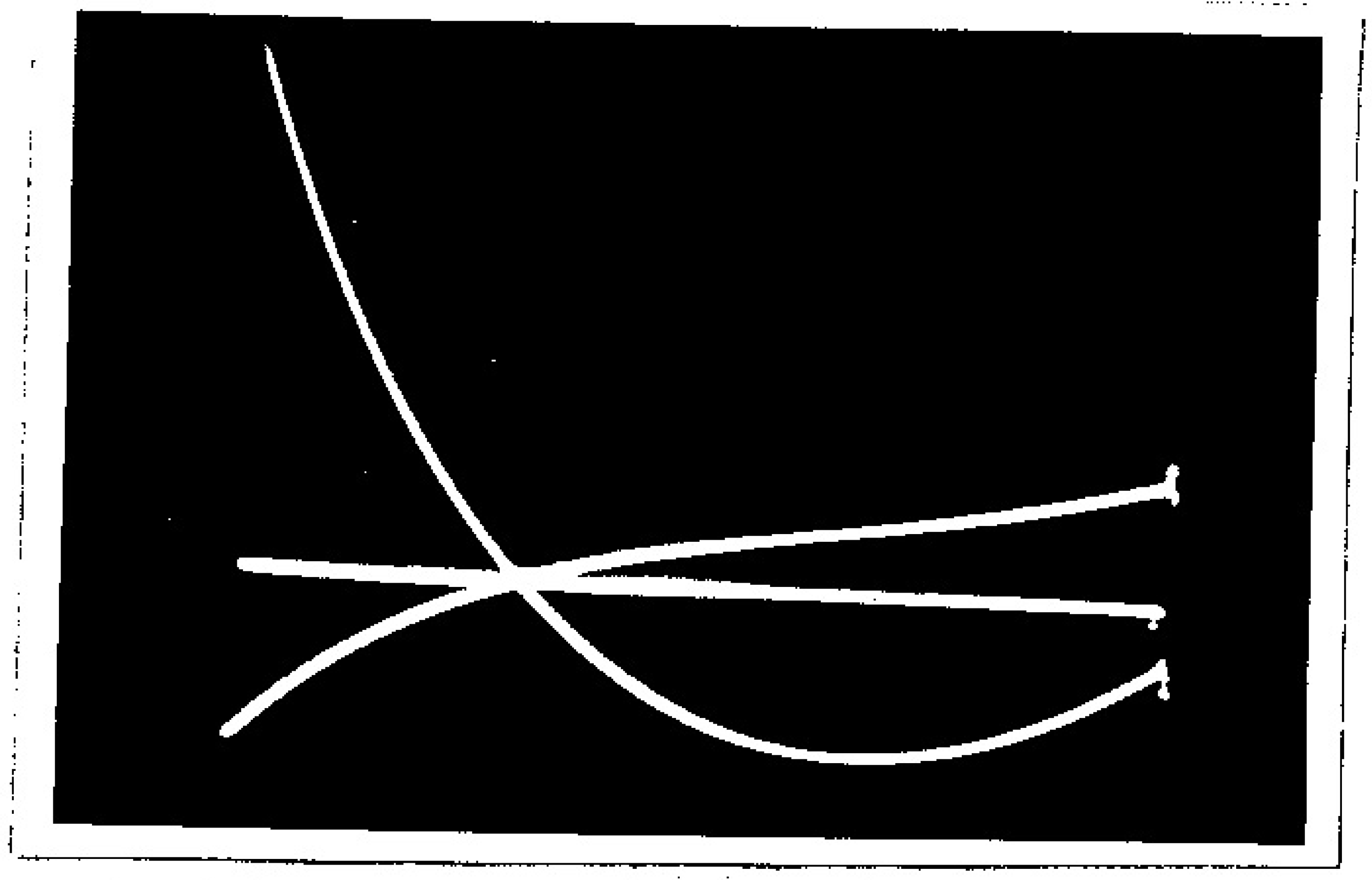
pri [illegible] repetitivnog diferencijalnog analizatora, [illegible] II.[illegible], dobivene su sledeće vrednosti njegovih nula

$$z_1 = 0,79 \;, \quad z_{2,3} = 0,52 \pm 0,89i \;, \quad z_{4,5} = -0,71 \pm 2,03i \;,$$

[illegible]

$$z_1 = 0,8 \;, \quad z_{2,3} = 0,5 \pm 0,9i \quad i \quad z_{4,5} = -0,[illegible]$$

[illegible] dato je na sl. 16.



Sl. 16 Par konjugovano kompleksnih nula $z_{2,3}$

Primer 3. U [27], str. 296, za algebarski polinom sa kompleksnim koeficijentima, koji se odnosi na dvodimenzionalni flutter

$$F(z) = z^2 + (-3{,}823 + i\,0{,}53936)z + (3{,}0689 - 0{,}6598\,i)$$

nisu date vrednosti njegovih nula već je naglašeno samo da leže u donjoj poluravni z-ravni.

Upotrebom repetitivnog diferencijalnog analizatora, metoda II.1.3, dobivene su sledeće vrednosti njegovih nula

$$z_1 = 2{,}65 - i\,0{,}51 \qquad i \qquad z_2 = 1{,}159 - i\,0{,}025 \; .$$

Sa istom tačnosti, ovi rezultati su potvrdjeni i pomoću metode III.[illegible] Medjutim, približno tačne vrednosti nula date [illegible] su:

$$z_1 = 2{,}668117 - i\,0{,}5149736$$

$$z_2 = 1{,}154903 - i\,0{,}02438 \; .$$

Primer 4. Odredjivanjem nula polinoma

$$W(z) = z^3 + 0{,}7z^2 + 0{,}44z - 0{,}222$$

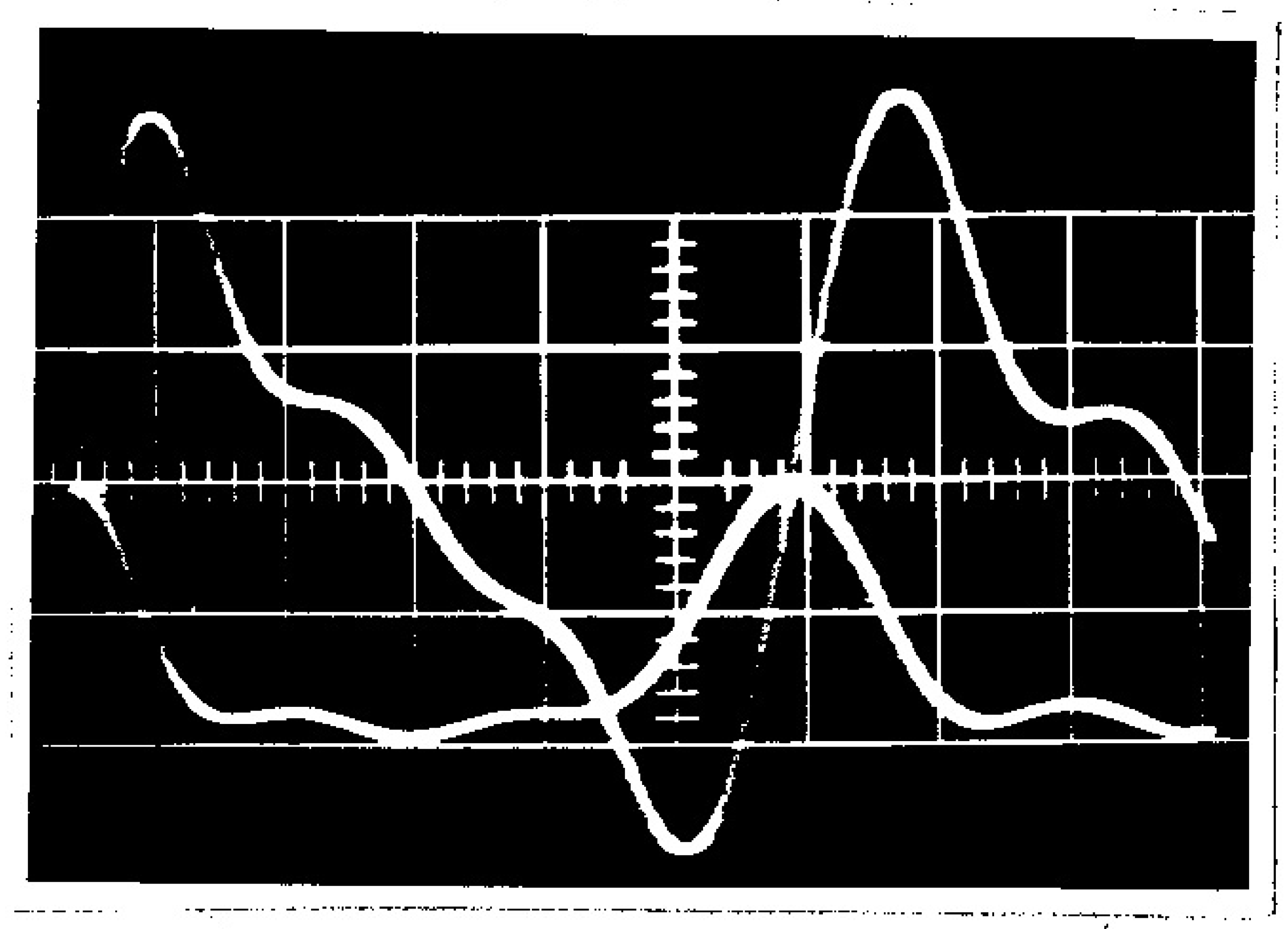
pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora metodom III.[illegible] dobivene su sledeće vrednosti nula

$$z_1 = 0{,}305 \qquad i \qquad z_{2,3} = 0{,}87\,e^{\pm 2{,}17 i} \simeq -0{,}49 \pm 0{,}71\,i \quad ,$$

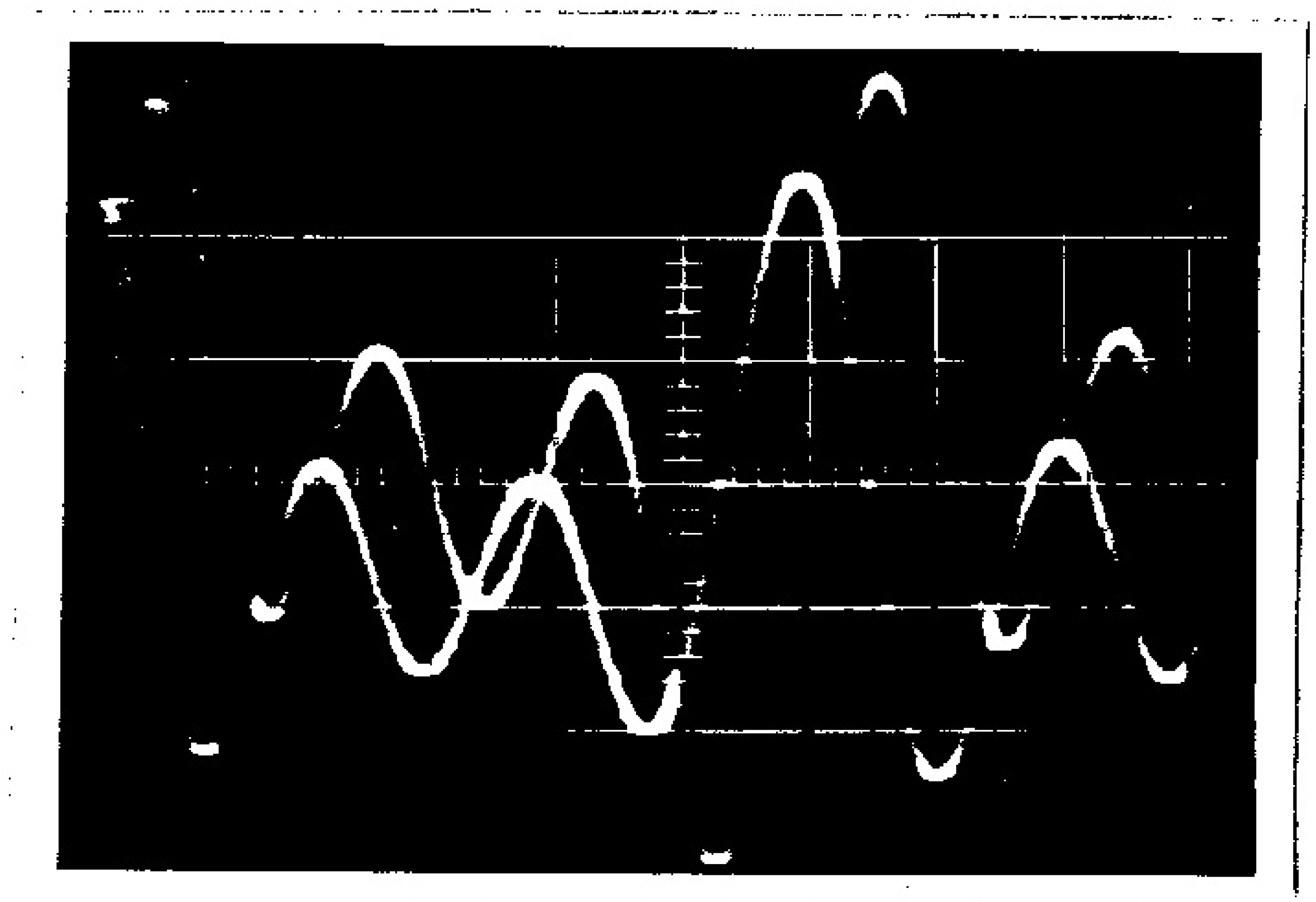
dok su

$$z_1 = 0{,}3 \qquad i \qquad z_{2,3} = -0{,}5 \pm 0{,}7i$$

[illegible] kompleksnih [illegible]

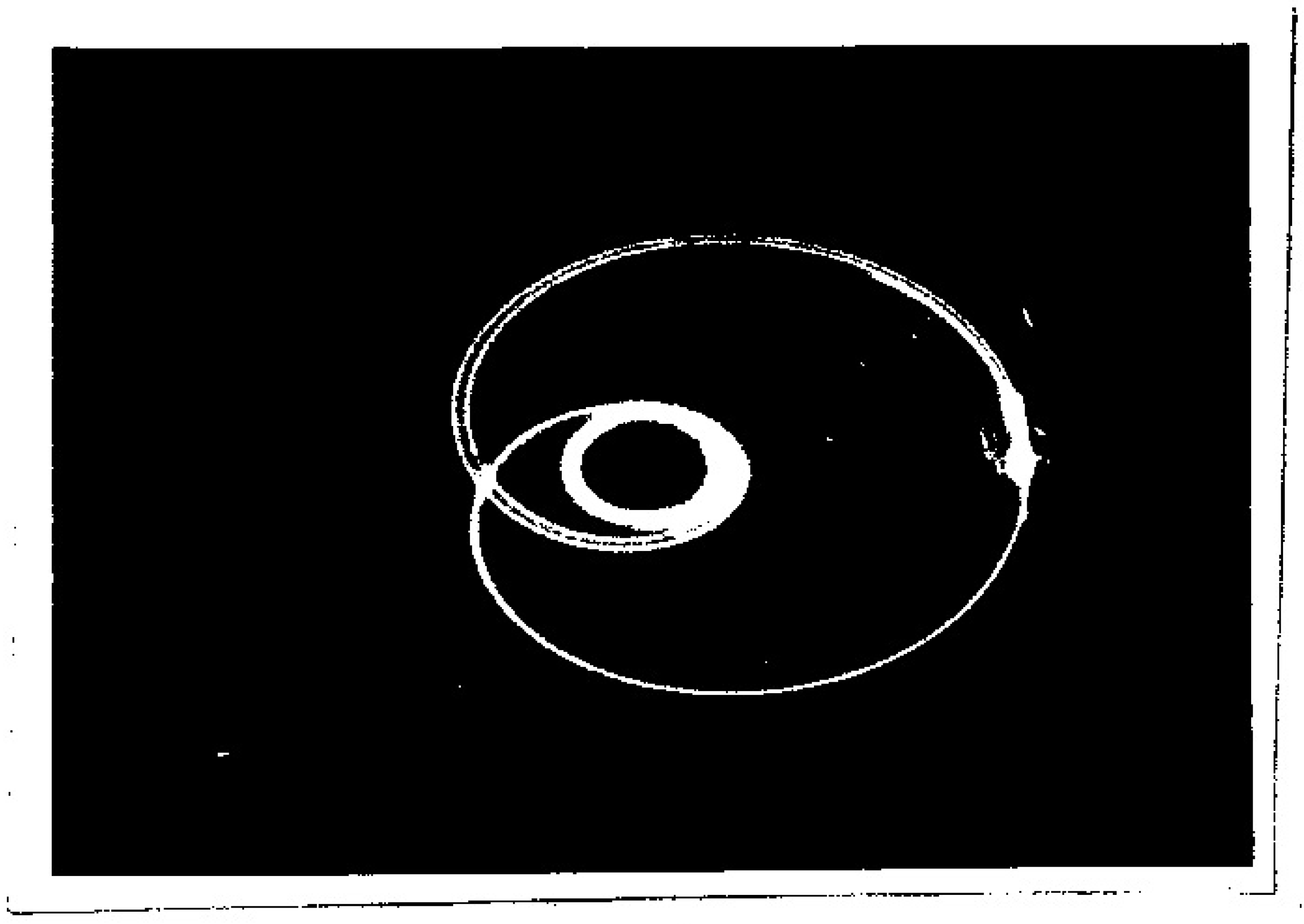


Sl. 17 Realna nula polinoma $W(z) = z^3 + 0{,}7z^2 + 0{,}44z - 0{,}222$



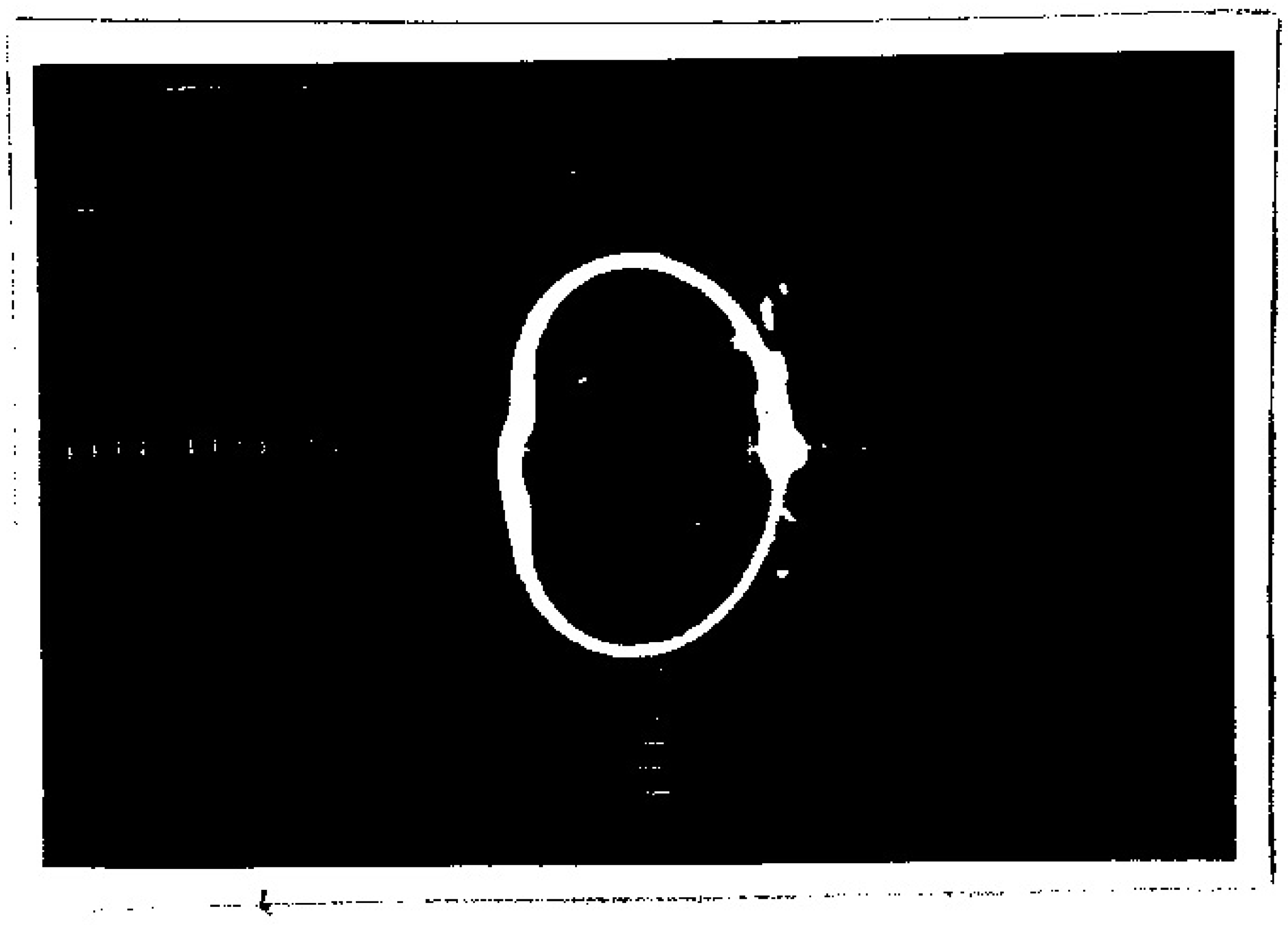
Sl. 18 Par konjugovano kompleksnih nula polinoma iz primera 4

Konformnim preslikavanjem datim polinomom jediničnog kruga iz z-ravni na W-ravan pomoću metode IV.1, dobiven je direktno prvi lik na ekranu katodnog osciloskopa koji je prikazan na sl. 19. Na ovoj slici jasno se uočavaju tri zatvorene petlje oko tačke W=0, jer sva tri nula polinoma kojim je vršeno preslikavanje leže u jediničnom krugu.



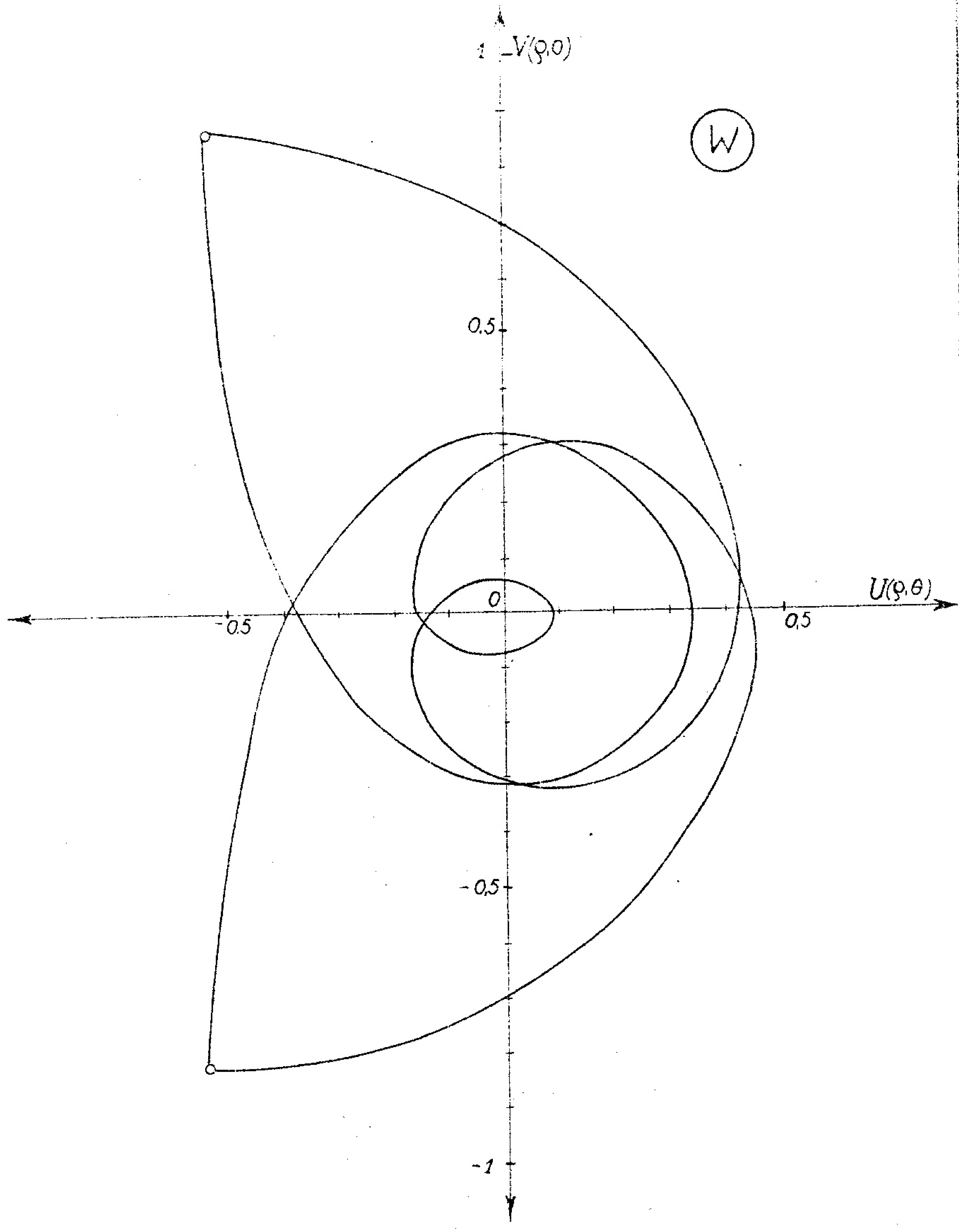
Sl. 19 Lik jediničnog kruga $|Z|=1$, dobiven na ekranu [illegible] konformnim preslikavanjem polinomom iz primera 4

Međutim, ako se izvrši preslikavanje kruga $|Z|=0,4$, dobiva se samo jedna zatvorena petlja oko tačke $W=0$, sl. 20, zato što unutar ovog kruga leži samo jedna nula datog polinoma.

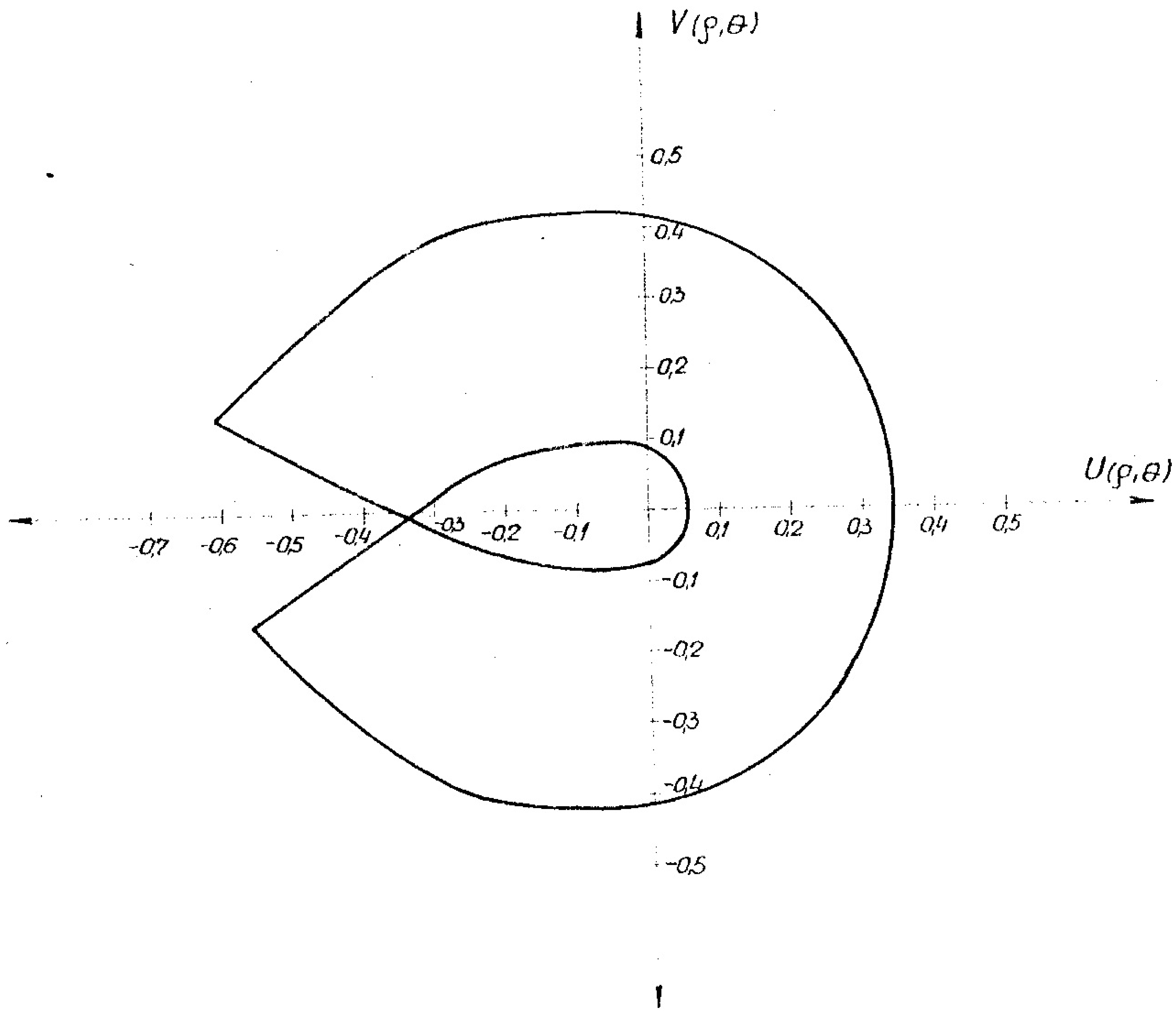


Sl. 20 Lik kruga $|Z|=0,4$, dobiven na ekranu katodnog osciloskopa preslikavanjem polinomom iz primera 4

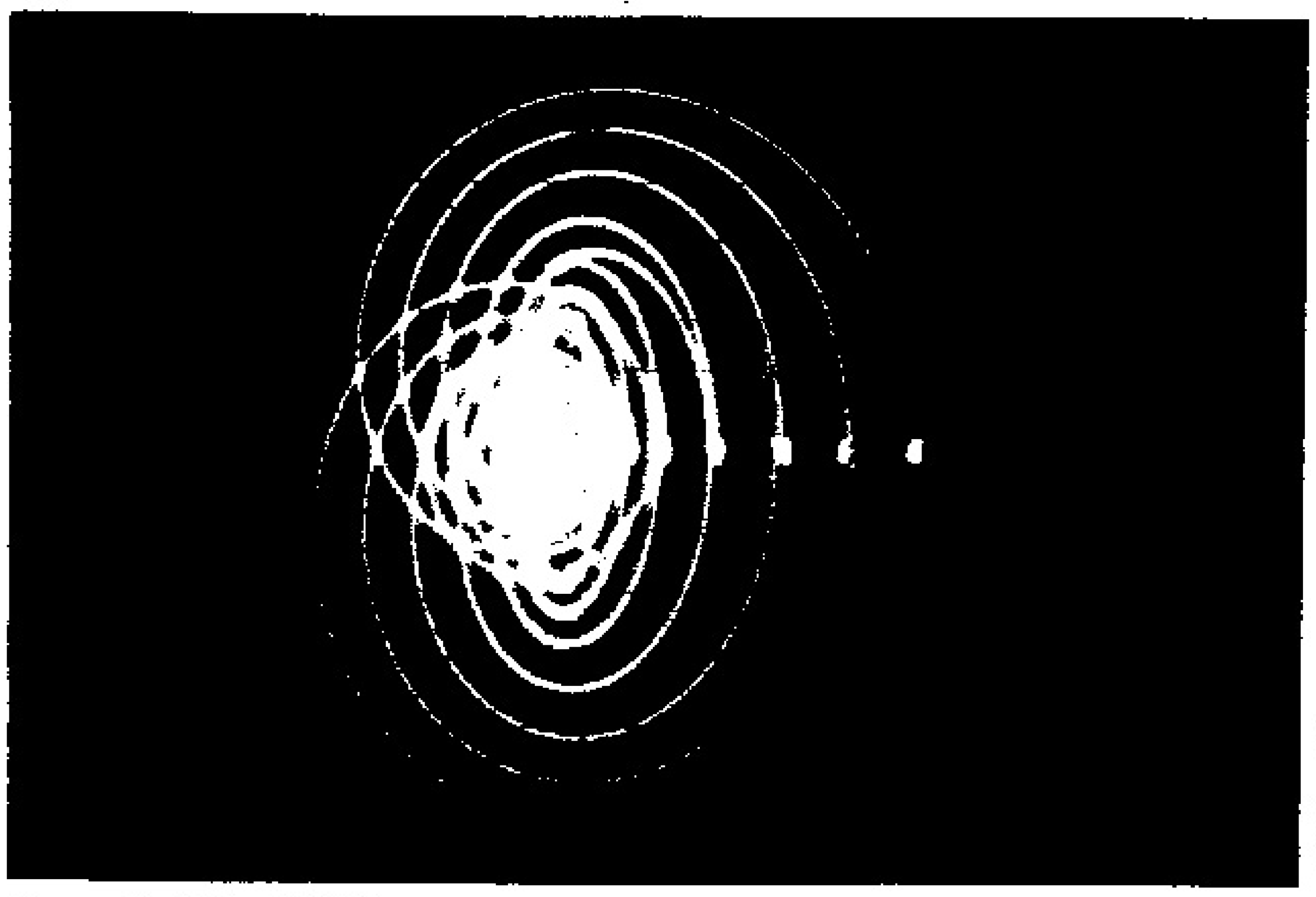
U cilju određivanja prstena u kome leže sve nule datog polinoma vršena su preslikavanja koncentričnih krugova $|Z|=\rho$, $\rho=0,9; 0,8; 0,6; 0,25$ i rezultati ovih preslikavanja, dobiveni na ekranu katodnog oscilografa, dati su na sl. 21.



Sl. 22


V(ρ,θ)
U(ρ,θ)
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,7
-0,6
-0,5
-0,4
-0,3
-0,2
-0,1
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5

Sl. 23



Sl. 21 Likovi koncentričnih krugova $|z|=\rho$, $\rho=0.9;\ 0.8;\ 0.6,\ 0.25$
dobiveni konformnim preslikavanjem polinomom iz pr. 4

[illegible]

$$W(z)=z^4+2z^3+1{,}9z^2+1{,}14z+0{,}3869$$

[illegible]

[illegible]

$$W(z)=z^6+0{,}2z^5-0{,}15z^4+0{,}46z^3+0{,}054z^2-0{,}03808z+0{,}056644$$

[illegible] $z_1=-0.71$ i $z_2=0{,}29\pm i\,0{,}51$ [illegible] $\rho=0{,}3\div 1$ i $\theta=2{,}8\div 3{,}5$ rad, [illegible] $\rho=0{,}2\div 0{,}9$ i $\theta=0{,}7\div 1{,}4$ radijana. [illegible]

[illegible] $= \ldots ,7^{1} - \ldots ,11$ / [illegible]

[illegible] 7. [illegible] odredjivanja nula trigonometriskog polinoma sa kompleksnim koeficijentima

$$W(z) = (-15{,}05 - 4{,}83i) + (17{,}23 - 5{,}37i)e^{iz} + (-7{,}7 + 1{,}8i)e^{2iz} + e^{3iz}$$

[illegible] je $U(x,y)$ i $V(x,y)$ u obliku /V,11/ i /V,12/.

[illegible] diferencijalnog anali[illegible], za $0 \leq x \leq 2\pi$ [illegible]

$$z_1 = 5{,}67 - i\,1{,}29, \quad z_2 = 1{,}04 - i\,0{,}02, \qquad z_3 = 6{,}10 - i\,1{,}44$$

[illegible]

$$z_1 = \left(2\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}\right) - i\ln\sqrt{13}, \quad z_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{9}{5} - i\ln\sqrt{1{,}06}$$

$$z_3 = \left(2\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{7}{42}\right) - i\ln\sqrt{18{,}13}.$$

[illegible] 8. [illegible] polinom sa monotono rastućim koeficijentima

$$W(x) = 0{,}5 + \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x$$

[illegible]

$$C_0 + C_1\cos x + C_2\cos 2x + \ldots + C_n\cos nx,$$

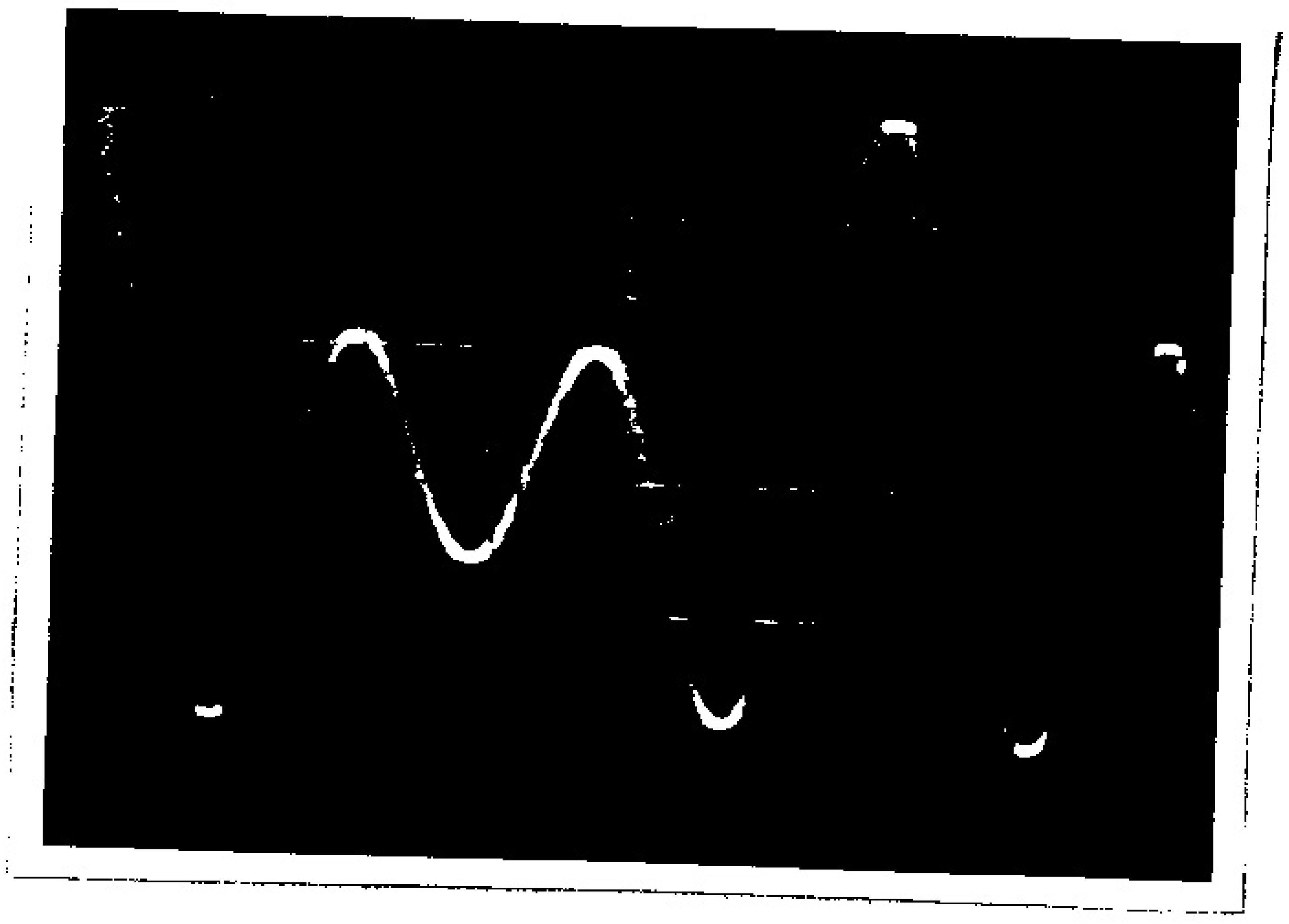
[illegible] $0 < C_0 < C_1 < \ldots < C_n$, ima, prema [illegible] [1?], u [illegible] $(0, 2\pi)$, [illegible] nula t_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, 2n$ [illegible]

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n + \frac{1}{2}} < t_k < \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots 2n$$

[illegible] diferencijalnog anali[illegible] dobivene su [illegible] nula [illegible] koje leže u intervalu $(0, 2\pi)$:

[illegible] $= 2{,}72$; $x_4 = 3{,}56$; [illegible] $; x_6 = 5{,}57$ [illegible]

[illegible] stav.. [illegible] rezultatu, [illegible] oscilo[illegible] dat je na sl. 24.



Sl. 24 Nule polinoma iz primera 8

Primer 9. Data je homogena linearna diferencijalna jednačina

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 1{,}25\, y^{(3)} + 1{,}25\, y'' + 0{,}25\, y' + 0{,}25\, y = 0;$$

sa početnim uslovima $y(0) = 2$; $y'_{(0)} = -0{,}5$; $y''_{(0)} = 0$; $y'''_{(0)} = -1{,}125$; $y^{(4)}_{(0)} = 2$.

Odredjivanjem nula karakterističnog polinoma date diferencijalne jednačine pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora dobivene su sledeće vrednosti: $r_1 = -1{,}02$; $r_{2,3} = \pm i$ i $r_{4,5} = \pm 0{,}49\, i$, dok su tačne vrednosti nula $r_1 = -1$, $r_{2,3} = \pm i$, $r_{4,5} = \pm 0{,}5\, i$.

Za date početne uslove analitičko rešenje, dobivene pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora, glasi:

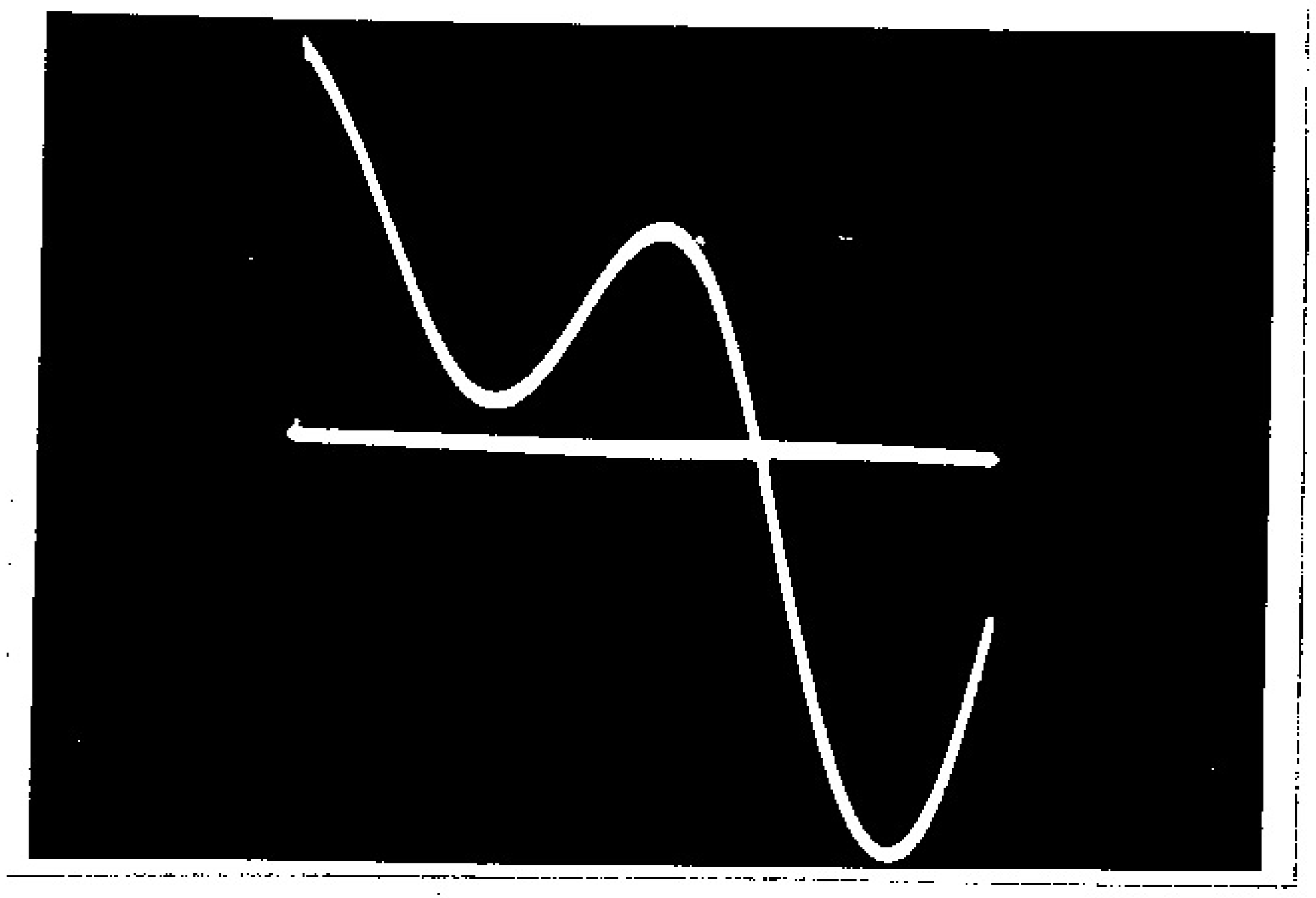
$$y_a = 0{,}9493\, e^{-1{,}02t} + 0{,}0068 \sin t + 0{,}9677 \cos t + 0{,}9417 \sin 0{,}49t + 0{,}0830 \cos 0{,}49t,$$

dok je egzaktno rešenje

$$y_e = e^{-t} + \cos t + \sin 0{,}5t$$

Medjutim, grafičko rešenje date diferencijalne jednačine za interval nezavisno promenljive $0 \leq t \leq 12$, takodje dobiveno pomoću repetitivnog diferencijalnog analizatora, dato je na sl. 25.

Lako se može videti, poredjenjem sa egzaktnim rešenjem y_e, da su greške analitičkog rešenja y_a i grafičkog rešenja y_g veličine istog reda.



[illegible]

$$y^{(5)}+y^{(4)}+1{,}25\,y^{(3)}+1{,}25\,y''+0{,}25\,y'+0{,}25\,y=0$$

$0\leq t\leq 12$ [illegible]

[illegible]

$$t^3y'''+t^2y''+3ty'-8y=0$$

[illegible] $y(1)=2\,,\quad y'(1)=0\,,\quad y''(1)=0$

[illegible] $t=e^{\tau}$ [illegible]

$$\frac{d^3y}{d\tau^3}-2\,\frac{d^2y}{d\tau^2}+4\,\frac{dy}{d\tau}-8y=0$$

[illegible]

$$y_a=0{,}98\,t^{2{,}01}+1{,}02\,t^{-0{,}01}\cos(1{,}98\ln t)-0{,}9897\,t^{-0{,}01}\sin(0{,}98\ln t)\,,$$

[illegible]

$$y_e=t^2+\cos(2\ln t)-\sin(2\ln t)\,,$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] mogućnosti [illegible] diferencijalnog [illegible] za određivanje [illegible] ne preciznog [illegible] Ovi [illegible] veoma povoljno [illegible] mikroskopskoj [illegible].

[illegible] ovih problema [illegible] najčešće upotrebljavani [illegible].

[illegible], ovi [illegible] diferencijalni [illegible] vizuelni [illegible] uticaj [illegible].

[illegible]

[illegible]

[illegible] rezultata [illegible].

IX. BIBLIOGRAFIJA

[1] [illegible]

[2] L.M.Warshawsky, An Electrical Analogue Polynomial Evaluator, Thesis, Ohio State University, Columbus, Ohio, 1949

[3] L.Levin, H.F.Meissinger, An Automatic Analog Computer Method for Solving Polynomials and Finding Root Loci, IRE National Convention, March 1957, pp. 164-172

[4] [illegible]

[5] H.D.Schwetman, C. Burmeister, Solution of Polynomials by of an Electromechanical Synthesizer, Review of Scientific Instruments, vol. 30, N° 2, February 1959, pp. 94-97

[6] [illegible]

[7] [illegible]

[8] M.C.Scherberg, J.F.Riordan, Analogue Calculation of Polynomial and Trigonometric Expansions, Math. Tabl. and other Aids to Computation, vol. VII, January 1953, pp. [illegible]-65

[9] W.W. Soroka, Analog Methods in Computation and Simulation, Chapter 4, McGraw Hill Book Company, INC New York, Toronto, London, [illegible]

[ ] [illegible] ic [illegible]
[illegible], vol. [illegible], [illegible], pp. [illegible]-243

[ ] [illegible], Polynomial Root Solving on the Electronic Differential Analyzer, Math. Tables and other Aids to Computation, vol. [illegible], 195[illegible], pp. 139-242

[ ] [illegible], The Donn-Hall Method of Solving f/Z/=0, Eleventh Annual Meeting of the [illegible], August 27-29, 195[illegible], Los Angeles, pp. 14[illegible]-17[illegible]

[ ] [illegible], J.Petrich, N.Parezanovich, The Use of a Repetitive Differential Analyzer for Finding Roots of Polynomial Equations, IRE Transactions on Electronic Computers, vol EC-8, June 195[illegible], pp. 1[illegible]2-1[illegible]5

[ ] [illegible]

[ ] [illegible]

[ ] [illegible].Herbert, The Solution of Simultaneous Equations, Eigenvalue Problems and Polynomial Equations, Part 1, Electronic Engineering, vol. [illegible], № 324, February 195[illegible], pp. 74-77

[ ] J.Petrich, Solution of Trigonometric Polynomials on a Repetitive Differential Analyzer, Bull. Inst. Nuclear Sci "B.Kidrich" vol. 11, [illegible]

[ ] [illegible], O [illegible] trigonometriskim [illegible], Tehn, Zbornik [illegible] inst. [illegible], Beograd, 1958, str.13-52

[ ] J.Heinhold, Konforme Abbildung mittels elektronischer Analogie-rechenanlagen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band [illegible], [illegible]

[illegible] [illegible] Problem, [illegible] [illegible], [illegible]

[illegible] T.[illegible], [illegible] Method for [illegible] by the Use of [illegible] Repetitive Differential Analyser, Proceedings of the International Association for Analog Computation, Bruxelles, /in press/

[illegible]

[illegible] Z.Petrich, [illegible], Analytical Solution of Differential Equations with the use of Differential Analyser, Proceedings of the International Association for Analog Computation, Bruxelles, vol. [illegible], No 3, [illegible], pp. [illegible]-127

[illegible] R.Tomovich, Calculateurs analogiques répétitifs, [illegible] et Cie, Paris, [illegible]

[illegible] R.Tomovich, D. Mitrovich, Some Experiences with a Repetitive Differential Analyser, Bull. Inst. Nuclear Sci., "B.Kidrich", vol. [illegible], [illegible], pp. [illegible]-11[illegible].

[illegible] [illegible], [illegible] of instantaneous values of periodic [illegible] forms. Bull. Inst. Nuclear Sci., "B.Kidrich" vol. 3, [illegible]. pp. 127-13[illegible]

[illegible] R.H.Scanlan, R.Rosenbaum, Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter, The Macmillan Company, New York 1951

[illegible] R.A.Dennis, [illegible], Application of Simultaneous Equation [illegible] to Aircraft Structure and Flutter Problems, Journal of the Aeronautical Sciences, February [illegible], pp. [illegible]-113

[illegible] J.[illegible], The Solution of Aero[illegible] Problems by Electronic Analogue Computation, Journal of the Aeronautical Sciences, vol. [illegible], No 7, [illegible], pp. [illegible].

[illegible] [illegible] Method for determining the [illegible] Eigenvectors of a Real Symmetric Matrix, [illegible] Instrument, vol. [illegible], N° 11, 1947

[illegible]