КОТРЉАЊЕ БЕЗ КЛИЗАЊА ГИРОСКОПСКЕ ЛОПТЕ ПО СФЕРИ

ТЕЗА

ВАСИЛИЈА ДЕМЧЕНКА

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ 15. НОВЕМБРА 1923 ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА ГГ.
АН. БИЛИМОВИЋА, МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА и М. МИЛАНКОВИЋА
РЕДОВНИХ ПРОФЕСОРА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ.

БЕОГРАД
ГРАФИЧКИ ЗАВОД „МАКАРИЈЕ“ А. Д., БЕОГРАД—ЗЕМУН.
1924.

САДРЖАЈ:

У глави III котрљање се расматра, као специјалан случај кретања нехолономног система. У § 3,1 излаже се принцип, који је дао професор Воронец* и који је сличан Хамилтонову принципу, али се може применити и у случају нехолономних система. У § 3,2 овај принцип се примењује за изналажење диференцијалних једначина кретања тела, које се котрља. Једначине су у наведеном облику дате у већ поменутом делу проф. Воронца: Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt. Најзад, крај главе III посвећен је уопштењу добивених извода за случај, када се у унутрашњости тела, које се котрља, налази гироскоп.

У глави IV наведена је у појединостима историја проблема о котрљању без клизања гироскопске лопте по сфери, те је дато његово свођење на квадратуре. Иако је овај проблем непосредна примена теорије наведене у почетку, ипак његово решење има потпуно самосталан карактер, не ослањајући се на изводе првих глава.

Глава V садржи решење проблема о котрљању гироскопске лопте у елиптичким функцијама. При томе користили смо се Weierstrass=овим функцијама, које у примени имају предност пред Jacobi=јевим функцијама. У првој половини ове главе изведене су једначине кретања гироскопске лопте у коначном облику (§§ 5,1—5,32). Друга је половина посвећена дискусији кретања у општем случају (§§ 5,4—5,8).

У глави VI расмотрени су специјални случајеви кретања гироскопске лопте, наиме: регуларна прецесија, псевдорегуларна прецесија, котрљање обичне лопте и стационарно кретање. У свим овим случајевима претресана су пертурбациона кретања у вези са питањем о стабилности кретања. При томе су искоришћене приближне формуле, које су изведене у § 6,2, а такође неке опште трансформације, које су дате у § 6,1. На крају главе је наведено решење питања о одличитим (remarquable) трајекторијама,** које одговарају нашему проблему. Већи део

* Воронецъ. Объ уравненіяхъ движенія неголономныхъ системъ 1902 Математическій Сборникъ.

Сусловъ. Видоизмѣненіе начала Даламбера. 1902. Математическій Сборникъ.

** Painlevé. Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes. Bulletin de la société mathématique de France. 1894. Paris.

Bilimovitch. Sur les trajectoires d'un système nonholonome. Comptes rendus. Séance du 1er mai 1916.

дискусије ове главе изведен је према методама, које примењују Klein и Sommerfeld у делу: Über die Theorie des Kreisels. 1897.

Из оног не великог броја проблема о котрљању једне површине по другој, који су били до сад претресани, већина се односи на три специјална случаја, наиме: на котрљање лопте по произвољној површини, на котрљање произвољне површине по равни и на котрљање произвољне површине по сфери. На задњи се случај односи и наш проблем. На њега, као на интересантан пример, који се своди на елиптичке квадратуре, први пут је обратио пажњу проф. Воронец*. Овај проблем се налази у тесној вези са два друга проблема, које су решили руски научници проф. Бобилев** и проф. Жуковски*** и који се тичу неких специјалних случајева котрљања гироскопске лопте по равни. Ова обадва проблема су решена на основи расуђивања сасвим различних од оних, којима смо се користили у овом делу, које служи уопштењу ових проблема за случај, кад се раван претвара у сферу.†

Најдубље захваљујемо нашим поштованим учитељима проф. П. Воронцу и проф. Ан. Билимовићу за помоћ и савет при извођењу овог рада.

---

* Woronetz. Über die Bewegung eines starren Körpers... Band 70 §15 Math. An.

** Бобылевъ. О шарѣ съ гироскопомъ внутри, катящемся по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Математическій Сборникъ XVI 1892.

*** Жуковскій. О гироскопическомъ шарѣ Бобылева. Труды отдѣла физическихъ наукъ. О. Л. Е. и Э. VI 1898.

† Види § 4,1.

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА ЧВРСТОГ ТЕЛА КОЈЕ СЕ КОТРЉА ПО СТАЛНОЈ ПОВРШИНИ.

§ 1,1. Кретање по површини Darboux-овог триједра.

Нека је задата површина S_1, чије једначине према сталноме координатноме систему $O_1 x_1 y_1 z_1$ имају облик:

$$(1) \qquad x_1 = x_1(u_1, v_1) \qquad y_1 = y_1(u_1, v_1) \qquad z_1 = z_1(u_1, v_1)$$

У тачци M ове површине конструишимо координатни систем $M u_1 v_1 n_1$, чије се осовине поклапају са позитивним правцима линија u_1 ($v_1 = \text{const}$) и v_1 ($u_1 = \text{const}$) и са нормалом n_1 на површину S_1 у тачци M. Позитивни правац на осовини n_1 одредимо тако, да осовина n_1 има исти положај према осовинама u_1 и v_1, као осовина z_1 према осовинама x_1 и y_1.* Главне величине првог и другог реда површине S_1 обележимо са $E_1, F_1, G_1, D_1, D_1', D_1''$. За линије кривине површине S_1 узмимо линије $u_1 = \text{const}$ и $v_1 = \text{const}$. Онда је $F_1 = 0$ $D_1' = 0$. Косинусе углова међу осовинама $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $M u_1 v_1 n_1$ означимо редом са $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ према шеми: (2)

(2)

	u	v	n
x	α	β	γ
y	α'	β'	γ'
z	α''	β''	γ''

Како је познато:

$$(3) \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdots \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \cdots$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \frac{\partial z_1}{\partial v_1} - \frac{\partial z_1}{\partial u_1} \frac{\partial y_1}{\partial v_1} \right) \cdots \text{**}$$

---

* Правац осовине $O_1 z_1$ одредимо тако, да посматрач, који лежи у правцу осовине $O_1 z_1$ са ногама у O_1 и гледа у правцу осовине $O_1 x_1$, има осовину $O_1 y_1$ с десне стране.

** Види Stahl und Kommerell. Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. 1893.

За координате непромењивог система $M u_1 v_1 n_1$ узмимо Гаусове координате u_1 и v_1 тачке додира M. Израчунајмо сада кинематичке елементе, којима се карактерише кретање система $M u_1 v_1 n_1$ у овим координата.

Обележимо брзину тачке M са w, а тренутну угаону брзину система $M u_1 v_1 n_1$ са ω. Пројекције ових величина на покретне осовине означимо са

$$
(4) \qquad \begin{array}{lll} w\cos(w,u_1)=w_{u1} & w\cos(w,v_1)=w_{v1} & w\cos(w,n_1)=w_{n1} \\ \omega\cos(\omega,u_1)=s_1 & \omega\cos(\omega,v_1)=\tau_1 & \omega\cos(\omega,n_1)=n_1 \end{array}
$$

Према формулама (3) лако ћемо наћи

$$
(5) \qquad w_{u1}=\dot{x}_1\alpha+\dot{y}_1\alpha'+\dot{z}_1\alpha''=\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \qquad w_{v1}=\sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 \quad w_{n1}=0
$$

Овде је $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ и т. д. Према кинематичким формулама* добијемо за s_1 израз

$$
s_1=\sum\gamma\dot{\beta}=\dot{u}_1\sum\gamma\frac{\partial\beta}{\partial u_1}+\dot{v}_1\sum\gamma\frac{\partial\beta}{\partial v_1} \quad \text{где је} \quad \sum\gamma\dot{\beta}=\gamma\dot{\beta}+\gamma'\dot{\beta}'+\gamma''\dot{\beta}''
$$

и т. д. Супституирамо ли (3), налазимо, узевши у обзир да је $F_1=0$ $D_1'=0$

$$
(6) \qquad s_1=\frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \qquad \text{и слично за } \tau
$$

$$
(7) \qquad \tau_1=-\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1
$$

Израчунајмо још n_1:

$$
n_1=\sum\beta\dot{\alpha}=\frac{\dot{u}_1}{\sqrt{G_1}}\sum\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2}+\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{1}{\sqrt{E_1}}\right)+\frac{\dot{v}_1}{\sqrt{G_1}}\sum\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial v_1}+\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial v_1}\frac{1}{\sqrt{E_1}}\right)
$$

Одавде узевши у обзир да је

$$
\sum\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1^2}=-\sum\frac{\partial^2 x_1}{\partial v_1\,\partial u_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial v_1} \qquad \text{и}
$$

$$
\sum\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1\,\partial v_1}=\frac{1}{2}\frac{\partial G_1}{\partial u_1} \qquad \text{добићемо:}
$$

$$
(8) \qquad n_1=\frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\left(\frac{\partial G_1}{\partial u_1}\dot{v}_1-\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\dot{u}_1\right)
$$

Формуле (5), (6), (7) и (8) дају нам решење нашег проблема.

---

* Види Appell. Traité de mecanique rationnelle. t. I.

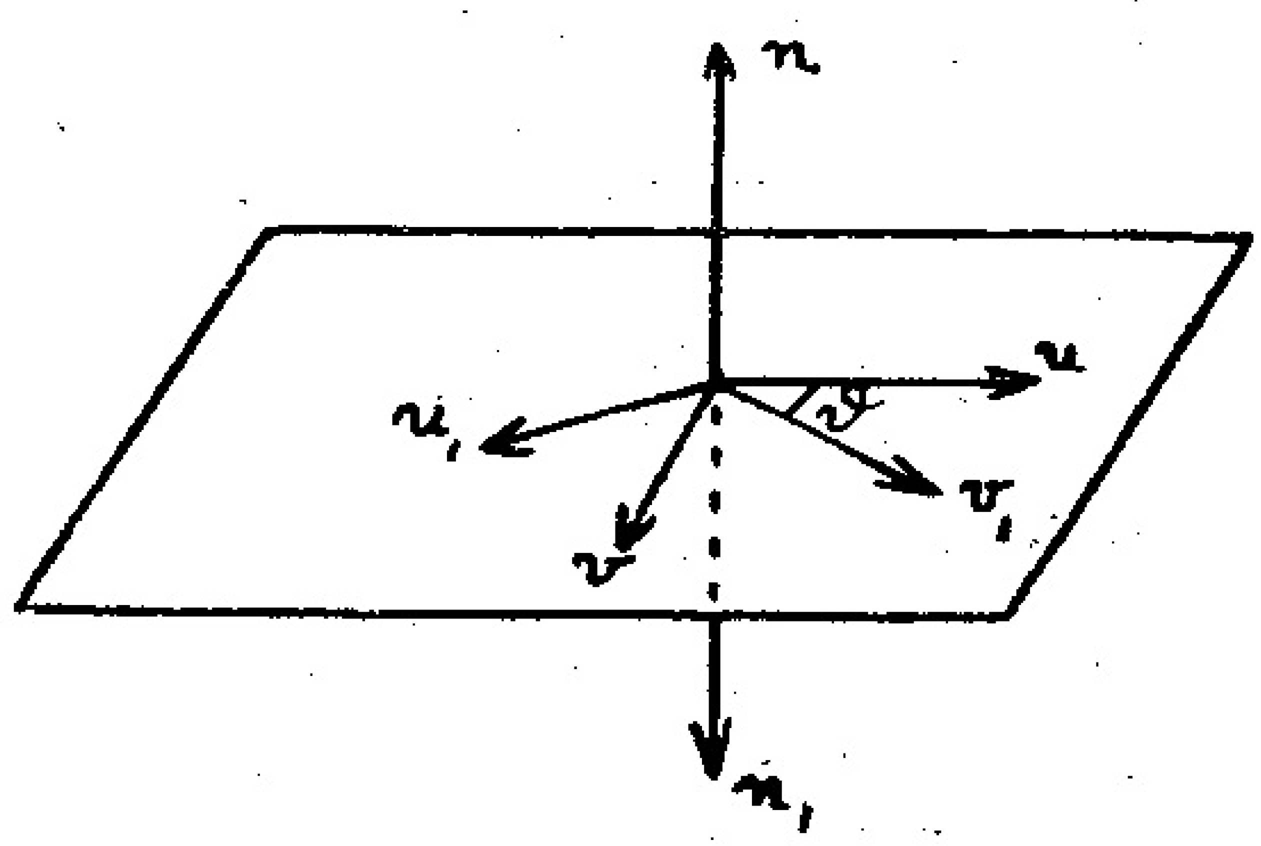
§ 1, 2. Кинематички елементи чврстог тела, које се котрља, у Neumann-овим координатама.

По сталној површини S_1, чије једначине према сталноме координатноме систему $O_1 x_1 y_1 z_1$ имају облик (1) § 1, 1, котрља се чврсто тело T, ограничено површином S. Нека су

$$x = x\ (u, v) \qquad y = y\ (u, v) \qquad z = z\ (u, v)$$

једначине ове површине S према покретноме координатноме систему $Oxyz$, који је у вези са телом T.

Конструишимо у тачци додира M према правилу наведеном у § 1, 1 координатне системе $Muvn$ и $Mu_1 v_1 n_1$ (гл. слику). За координате тела T узмимо Neumann-ове координате:* Гаусове криволинијске координате u и v тачке M на површини S, Гаусове криволинијске координате u_1 и v_1 тачке M на површини S_1 и угао ϑ међу осовинама v_1 и u (гл. слику).



Слика 1.

Обележимо главне величине првог и другог реда површина S и S_1 са E, F, G, D, D', D'' и $E_1, F_1, G_1, D_1, D_1', D_1''$. За линије u, v, u_1 и v_1 узмимо линије кривине површина S и S_1, то јест претпоставимо да је $F = o$, $D' = o$, $F_1 = o$, $D_1' = o$.

Изразимо у Neumann-овим координатама кинематичке елементе, којима се карактерише котрљање чрвстог тела T. Нека су: w — брзина пола O, ω и ω_1 — тренутне угаоне брзине система $Oxyz$ према $O_1 x_1 y_1 z_1$ и према $Muvn$, ω_2 — тренутна угаона брзина $Muvn$ према $Mu_1 v_1 n_1$, ω_3 — тренутна угаона брзина $Mu_1 v_1 n_1$ према $O_1 x_1 y_1 z_1$; $\mathfrak{v}^1$, $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{w}$ нека су апсолутна, релативна (према систему Oxyz) и антренирајућа брзина тачке M. Пројекције ових величина на осовине $Muvn$ обележимо:

$$(1)\quad \begin{array}{llll} \omega \ldots s, \tau, n & \omega_1 \ldots s_1, \tau_1, n_1 & \omega_2 \ldots s_2, \tau_2, n_2 & \omega_3 \ldots s_3, \tau_3, n_3 \\ w \ldots w_u, w_v, w_n & \mathfrak{w} \ldots \mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, \mathfrak{w}_n & \mathfrak{v}^1 \ldots \mathfrak{v}^1_u, \mathfrak{v}^1_v, \mathfrak{v}^1_n & \mathfrak{v} \ldots \mathfrak{v}_u, \mathfrak{v}_v, \mathfrak{v}_n \end{array}$$

* Види C. Neumann. Grundzüge der analytischen Mechanik. Leipziger Berichte. 1899.

Имамо две основне једначине:

(2) $(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_3)$ (3) $(\mathfrak{v}^1) = (\mathfrak{v}) + (\mathfrak{w})$

Из формуле (5) § 1,1 добијемо за $\mathfrak{v}^1$ и $\mathfrak{v}$ изразе:

(4) $\mathfrak{v}_u = \sqrt{E}\,\dot{u} \quad \mathfrak{v}_v = \sqrt{G}\,\dot{v} \quad \mathfrak{v}_n = 0$

(5) $\mathfrak{v}^1_u = -\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \sin\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}_1 \cos\vartheta \qquad \mathfrak{v}^1_v = \sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \cos\vartheta + {}$
$+ \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 \sin\vartheta \qquad \mathfrak{v}^1_n = 0$

Супституирамо у фор. (3)

(6) $\mathfrak{w}_u = -\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \sin\vartheta + \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 \cos\vartheta - \sqrt{E}\,.\,\dot{u}$
$\mathfrak{w}_v = \sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \cos\vartheta + \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 \sin\vartheta - \sqrt{G}\,\dot{v} \qquad \mathfrak{w}_n = 0$

Користећи се фор. (6), (7) и (8) § 1,1 добијамо за $s_1\, \tau_1\, n_1$ изразе:

(7) $s_1 = -\frac{D''}{\sqrt{G}}\dot{v} \quad \tau_1 = \frac{D}{\sqrt{E}}\dot{u} \quad n_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right)$

И слично за ω_3. Угаона брзина ω_2 је истог смисла као и осовина n_1 и има апсолутну величину $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$. Према томе, из формуле (2) добијемо следеће изразе за s, τ, n

(8)
$$s = -\frac{D''}{\sqrt{G}}\dot{v} - \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \sin\vartheta - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1 \cos\vartheta$$
$$\tau = \frac{D}{\sqrt{E}}\dot{u} - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1 \sin\vartheta + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \cos\vartheta$$

(9)
$$n = -\dot{\vartheta} + \frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\dot{v}_1\right) + {}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right)^{**}$$

Нашли смо $s, \tau, n, \mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v$ као хомогене линеарне функције извода $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$ (фор. 6, 8, 9). Решавајући добивене једначине, обратно можемо наћи $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$ као хомогене линеарне функције брзина $s, \tau, n, \mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v$.

Тако из система (6) налазимо:

(10)
$$\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 = -(\mathfrak{w}_u + \sqrt{E}\,\dot{u}) \sin\vartheta + (\mathfrak{w}_v + \sqrt{G}\,\dot{v}) \cos\vartheta$$
$$\sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 = (\mathfrak{w}_u + \sqrt{E}\,\dot{u}) \cos\vartheta + (\mathfrak{w}_v + \sqrt{G}\,\dot{v}) \sin\vartheta$$

** Види Woronetz. Über die Bewegung eines starren Körpers, .. Math. An. 70, B, 1911.

Супституирамо ли у (8) ове изразе, налазимо да је:

$$
(11)\quad \begin{aligned} s &= -\sqrt{E}\,\dot{u}\,\triangle' - \sqrt{G}\,\dot{v}\,\triangle'' - \mathfrak{w}' \\ \tau &= \triangle\,\sqrt{E}\,\dot{u} + \triangle'\,\sqrt{G}\,\dot{v} + \mathfrak{w}'' \end{aligned} \qquad \text{где је}
$$

$$
(12)\quad \begin{aligned} &\triangle = \frac{D}{E} + \frac{D_1}{E_1}\sin^2\vartheta + \frac{D_1''}{G_1}\cos^2\vartheta \qquad \triangle' = \left(\frac{D_1''}{G_1} - \frac{D_1}{E_1}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &\triangle'' = \frac{D''}{G} + \frac{D_1''}{G_1}\sin^2\vartheta + \frac{D_1}{E_1}\cos^2\vartheta \end{aligned}
$$

$$
(13)\quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w}_u\,\triangle' + \mathfrak{w}_v\left(\triangle'' - \frac{D''}{G}\right) \qquad \mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}_u\left(\triangle - \frac{D}{E}\right) + \triangle'.\,\mathfrak{w}_v
$$

Из једначина (11) добијамо:

$$
(14)\quad \begin{aligned} \sqrt{E}\,\dot{u} &= \frac{1}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle' + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle''\Big] \\ \sqrt{G}\,\dot{v} &= -\frac{1}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle'\Big] \end{aligned} \qquad \text{где је}
$$

$$
(15)\quad \mathbf{D} = \triangle\,\triangle'' - \triangle'^2 = \frac{DD''}{GE} + \frac{D_1 D_1''}{G_1 E_1} + \left(\frac{D_1 D''}{E_1 G} + \frac{D D_1''}{E G_1}\right)\sin^2\vartheta + \left(\frac{D_1'' D''}{G_1 G} + \frac{D D_1}{E E_1}\right)\cos^2\vartheta
$$

Супституирајмо ове изразе у (10)

$$
(16)\quad \begin{aligned} \sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 &= \mathfrak{w}_{u_1} - \frac{\sin\vartheta}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle' + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle''\Big] - \\ &\qquad - \frac{\cos\vartheta}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle'\Big] \\ \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 &= \mathfrak{w}_{v_1} + \frac{\cos\vartheta}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle' + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle''\Big] - \\ &\qquad - \frac{\sin\vartheta}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle'\Big] \end{aligned}
$$

где је $\qquad \mathfrak{w}_{u_1} = -\mathfrak{w}_u \sin\vartheta + \mathfrak{w}_v \cos\vartheta \qquad \mathfrak{w}_{v_1} = \mathfrak{w}_u \cos\vartheta + \mathfrak{w}_v \sin\vartheta$

Кад се у (9) замени из (16) и (14) $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{u}_1$ и $\dot{v}_1$ имаћемо израз за $\dot{\vartheta}$:

$$
(17)\quad \dot{\vartheta} = -n + \frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\,\mathfrak{w}_{u_1} - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\,\mathfrak{w}_{v_1}\right) + \frac{\triangle_1}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle' + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle''\Big] + \frac{\triangle_2}{\mathbf{D}}\Big[(s + \mathfrak{w}')\,\triangle + (\tau - \mathfrak{w}'')\,\triangle'\Big]
$$

$$
(18)\quad \begin{aligned} 2\triangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \lg E}{\partial v} - \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial \lg E_1}{\partial v_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial \lg G_1}{\partial u_1} \\ 2\triangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \lg G}{\partial u} + \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial \lg G_1}{\partial u_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial \lg E_1}{\partial v_1} \end{aligned}
$$

Супституирамо ли (14) у (4), добиһемо:

$$(19)\quad \mathfrak{v}_u=\frac{1}{\mathbf{D}}\Big[(s+\mathfrak{w}')\,\triangle'+(\tau-\mathfrak{w}'')\,\triangle''\Big]$$

$$\mathfrak{v}_v=-\frac{1}{\mathbf{D}}\Big[(s+\mathfrak{w}')\,\triangle+(\tau-\mathfrak{w}'')\,\triangle'\Big]$$

Најзад из формуле (7) имамо:

$$(20)\quad s_1=\frac{D''}{G\,\mathbf{D}}\Big[(s+\mathfrak{w}')\,\triangle+(\tau-\mathfrak{w}'')\,\triangle'\Big]\qquad \tau_1=\frac{D}{E\,\mathbf{D}}\Big[(s+\mathfrak{w}')\,\triangle'+$$

$$+(\tau-\mathfrak{w}'')\,\triangle''\Big]\qquad n_1=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\Big[\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}(\overline{s+\mathfrak{w}'}\cdot\triangle'+\overline{\tau-\mathfrak{w}''}\cdot\triangle'')+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}(\overline{s+\mathfrak{w}'}\cdot\overline{\triangle}+\overline{\tau-\mathfrak{w}''}\cdot\triangle')\Big]\cdot\frac{1}{\mathbf{D}}$$

Формуле (14) — (20) одређују величине $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1, \mathfrak{v}_u, \mathfrak{v}_v$ s_1, τ_1, n_1 као линеарне хомогене функције величина $s, \tau, n, \mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v$.

Изразимо још пројекције w_x, w_y, w_z брзине w пола O и пројекције p, q, r тренутне угаоне брзине ω на осовине $Oxyz$ као функције величина $\mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, s, \tau, n$. Косинуси $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ углова међу осовинама $Oxyz$ и $Muvn$ одређени су шемом (2) и формулама (3) § 1, 1.

Обележимо вектор $\overline{OM}$ са ρ. Нека су ρ_u, ρ_v, и ϵ његове пројекције на осовине $Muvn$. Онда је

$$(21)\quad \rho_u=\frac{\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u}\qquad \rho_v=\frac{\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\rho}{\partial v}\qquad \epsilon=x\gamma+y\gamma'+z\gamma''$$

где су x, y, z координате тачке M.

За прелаз од p, q, r, w_x, w_y, w_z, ка $s, \tau, n, \mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v$ имамо

$$(22)\quad p=s\alpha+\tau\beta+n\gamma\qquad q=s\alpha'+\tau\beta'+n\gamma'\qquad r=s\alpha''+\tau\beta''+n\gamma''$$

$$(23)\quad w_x=w_u\alpha+w_v\beta+w_n\gamma\qquad w_y=w_u\alpha'+w_v\beta'+w_n\gamma'$$

$$w_z=w_u\alpha''+w_v\beta''+w_n\gamma''$$ где је

$$(24)\quad w_u=\mathfrak{w}_u-\tau\epsilon+n\rho_v\qquad w_v=\mathfrak{w}_v-n\rho_u+s\epsilon$$

$$(25)\quad w_n=-s\rho_v+\tau\rho_u$$

§ 1, 3. Случај котрљања без клизања.

У случају котрљања без клизања антренирајућа брзина тачке M је нула, или $\mathfrak{w}_u=\mathfrak{w}_v=0$. Према томе, из фор. (10) § 1, 2 добијамо услове кретања чврстог тела, које се котрља без клизања по сталној површини, у Neumann-овим координатама:

$$(1)\qquad \sqrt{E_1}\,\dot u_1 = -\sqrt{E}\,\dot u \sin\vartheta + \sqrt{G}\,\dot v \cos\vartheta$$

$$\sqrt{G_1}\,\dot v_1 = \sqrt{E}\,\dot u \cos\vartheta + \sqrt{G}\,\dot v \sin\vartheta$$

Ако у формулама (1)—(20) и (24) § 1,2 сменимо $\mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, \mathfrak{w}', \mathfrak{w}''$ са $\mathfrak{w}_u = \mathfrak{w}_v = \mathfrak{w}' = \mathfrak{w}'' = o$, добићемо низ образаца

$$(2)\qquad s = -\sqrt{E}\,\dot u\,\triangle' - \sqrt{G}\,\dot v\,\triangle'' \qquad \tau = \triangle\sqrt{E}\,\dot u + \triangle'\sqrt{G}\,\dot v$$

$$(3)\qquad \sqrt{E}\,\dot u = \frac{1}{\mathfrak{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'') \qquad \sqrt{G}\,\dot v = -\frac{1}{\mathfrak{D}}(s\triangle + \tau\triangle')$$

$$(4)\qquad \sqrt{E_1}\,\dot u_1 = -\frac{\sin\vartheta}{\mathfrak{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'') - \frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{D}}(s\triangle + \tau\triangle')$$

$$\sqrt{G_1}\,\dot v_1 = \frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'') - \frac{\sin\vartheta}{\mathfrak{D}}(s\triangle + \tau\triangle')$$

$$(5)\qquad \dot\vartheta = -n + \frac{\triangle_1}{\mathfrak{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'') + \frac{\triangle_2}{\mathfrak{D}}(s\triangle + \tau\triangle')$$

$$(6)\qquad \mathfrak{v}_u = \frac{1}{\mathfrak{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'') \qquad \mathfrak{v}_v = -\frac{1}{\mathfrak{D}}(s\triangle + \tau\triangle')$$

$$(7)\qquad s_1 = \frac{D''}{G\mathfrak{D}}(s\triangle + \tau\triangle') \qquad \tau_1 = \frac{D}{E\mathfrak{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'')$$

$$n_1 = \frac{1}{2\mathfrak{D}\sqrt{EG}}\left[\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}(s\triangle' + \tau\triangle'') + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}(s\triangle + \tau\triangle')\right]$$

$$(8)\qquad w_u = n\rho_v - \tau\epsilon \qquad w_v = s\epsilon - n\rho_u \qquad w_n = \tau\rho_u - s\rho_v$$

Формулама (3)—(8) одређују се величине $\dot u, \dot v, \dot u_1\ \dot v_1\ \dot\vartheta, s_1, \tau_1, n_1, \mathfrak{v}_u, \mathfrak{v}_v, w_u, w_v, w_n$ као линеарне хомогене функције величина s, τ, n. Најзад, формулом (2) и једначином

$$(9)\qquad n = -\dot\vartheta + \triangle_1\sqrt{E}\,\dot u - \triangle_2\sqrt{G}\,\dot v$$

коју ћемо лако извести из фор. (5) и (3), изражавају се брзине s, τ, n као линеарне хомогене функције извода $\dot u, \dot v, \dot\vartheta$.

ГЛАВА II.

ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА ЧВРСТОГ ТЕЛА, СВЕДЕНЕ НА ПОКРЕТНИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ, КОЈИ ИМА ПРОИЗВОЉНО ЗАДАТО КРЕТАЊЕ ПРЕМА ЧВРСТОМ ТЕЛУ.

§ 2,1. Једначине кретања слободног чврстог тела у покретном координатном систему.

Нека су $O_1 x_1 y_1 z_1$ сталне осовине у простору, $Oxyz$ су сталне осе у вези са чврстим телом T. Траже се једначине кретања овог чврстог тела, сведене на покретни координатни систем $Muvn$, који има произвољно задато кретање према систему $Oxyz$. Обележимо: са $\mathfrak{v}^1$ — апсолутну брзину почетка M, са $\mathfrak{v}$ — брзину тачке M према систему $Oxyz$, са $\mathfrak{w}$ — антренирајућу брзину тачке M према систему $Oxyz$, са ω^r — угаону брзину система $Oxyz$ према систему $Muvn$ и са ω — угаону брзину истог система према систему $O_1 x_1 y_1 z_1$; најзад, нека су: ρ — вектор $\overline{OM}$ и w — апсолутна брзина пола O. Пројекције ових величина на осовине $Muvn$ обележимо као и у § 1,2.

Косинусе углова међу осовинама $Muvn$ и $Oxyz$ означимо према шеми (2) § 1,1. Пројекције вектора w и ω на осовине $Oxyz$ обележимо са w_x, w_y, w_z и p, q, r. Величине $\mathfrak{v}_u$, $\mathfrak{v}_v$, $\mathfrak{v}_n$, s_1, τ_1, n_1 $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ замишљамо као задате.

Величине $w_u, w_v, w_n, s, \tau, n$ можемо изразити пројекцијама w_x, w_y, w_z, p, q, r и обратно, користећи се формулама (22), (23) и (24) § 1,2 и формулом

$$(1) \qquad w_n = \mathfrak{w}_n - s\rho_v + \tau\rho_u$$

Нека су: $\mathfrak{M}$ — количина кретања чврстог тела; $G^{(O)}$ и $G^{(M)}$ — моменти количина кретања чврстог тела односно полова O и M; F — резултанта сила, које делују на чврсто тело; $L^{(O)}$ и $L^{(M)}$ — моменти ових сила односно полова O и M.

Ако је T жива сила чврстог тела, која је изражена као функција w_x, w_y, w_z, p, q, r, онда је

$$(2) \qquad \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, x) = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_x}, \quad \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, y) = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_y}, \quad \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, z) = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_z}$$

$$(2)' \qquad G^{(O)}\cos(G^{(O)}, x) = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p}, G^{(O)}\cos(G^{(O)}, y) = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q}, G^{(O)}\cos(G^{(O)}, z) = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial r}$$

Изразимо T у функцији $\mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, \mathfrak{w}_n, s, \tau, n$ помоћу формула (22), (23), (24) § 1, 2 и формуле (1) овог параграфа, па обележимо резултат супституције са $\overline{\mathsf{T}}$. Докажимо сада, да је

$$(3) \qquad \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, u) = \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial \mathfrak{w}_u}, \quad \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, v) = \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial \mathfrak{w}_v}, \quad \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, n) = \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial \mathfrak{w}_n}$$

$$(3)' \qquad G^{(M)}\cos(G^{(M)}, u) = \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial s}, G^{(M)}\cos(G^{(M)}, v) = \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial \tau}, G^{(M)}\cos(G^{(M)}, n) = \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial n}$$

Формуле (3) непосредно излазе из једначина:

$$\frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial \mathfrak{w}_u} = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_x} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial w_u} + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_y} \cdot \frac{\partial w_y}{\partial w_u} + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_z} \cdot \frac{\partial w_z}{\partial w_u} = \mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, u) \text{ и т. д.}$$

За изводе $\frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial s}$ и т. д. добијемо следеће изразе

$$\frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial s} = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_u} \cdot \frac{\partial w_u}{\partial s} + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_v} \cdot \frac{\partial w_v}{\partial s} + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_n} \cdot \frac{\partial w_n}{\partial s} + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial s} +$$

$$+ \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial s} = G^{(O)}\cos(G^{(O)}, u) + \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_v}\epsilon - \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial w_n}\rho_v \text{ и слично за } \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial \tau} \text{ и } \frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial n}$$

Одавде излазе формуле (3)'.

Претпоставимо да постоји функција сила U. Узмимо потпуни извод од U по времену $\frac{d}{dt}U$, па га изразимо као функцију од w_x, w_y, w_z, p, q, r. Резултат супституције обележимо са $\dot{U}$. Као што је познато, тада је:

$$(4) \qquad \frac{\partial \dot{U}}{\partial w_x} = F\cos(F, x), \frac{\partial \dot{U}}{\partial w_y} = F\cos(F, y), \frac{\partial \dot{U}}{\partial w_z} = F\cos(F, z)$$

$$(4)' \qquad \frac{\partial \dot{U}}{\partial p} = L^{(O)}\cos(L^O, x), \frac{\partial \dot{U}}{\partial q} = L^{(O)}\cos(L^O, y), \frac{\partial \dot{U}}{\partial n} = L^{(O)}\cos(L^O, z)$$

Ако се у $\dot{U}$ смене величине p, q, r, w_x, w_y, w_z својим вредностима (22), (23), (24) § 1, 2, а резултат замене означи са $\overline{\dot{U}}$, добићемо изразе, сличне изразима (3) и (3)' за изводе $\frac{\partial \overline{\mathsf{T}}}{\partial s} \dots$

$$(5)\quad \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \mathfrak{w}_u} = F \cos(F, u), \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \mathfrak{w}_v} = F \cos(F, v), \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \mathfrak{w}_n} = F \cos(F, n)$$

$$(5)'\quad \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial s} = L^{M)} \cos(L^{(M)}, u), \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \tau} = L^{(M)} \cos(L^{(M)}, v), \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial n} = L^{(M)} \cos(L^{(M)}, n)$$

За изналажење једначина кретања користићемо се законом количине кретања и законом момената количина кретања. Према овим законима добићемо, ако узмемо за пол покретну тачку M*:

$$(6)\quad (\dot{\mathfrak{M}}) = (F) \qquad (7)\quad \dot{G}^{(M)} + [\mathfrak{v}' \mathfrak{M}] = L^{(M)}$$

где су $\dot{\mathfrak{M}}$ и $\dot{G}^{(M)}$ геометријски изводи од вектора количине кретања и вектора момената количина кретања, а $[\mathfrak{v}^1 \mathfrak{M}]$ је векторски продукт вектора $\mathfrak{v}^1$ — апсолутне брзине тачке M и вектора $\mathfrak{M}$ — количине кретања система.

Користећи се формулама (3), (3)', (5), (5)' и узевши у обзир, да је тренутна угаона брзина ω_2 триједра Muvn односно $O_1x_1y_1z_1$ износи: $(\omega_2) = (\omega) - (\omega_1)$ то јест једнака је с геометријском разликом тренутне угаоне брзине Oxyz односно $O_1x_1y_1z_1$ и тренутне угаоне брзине Oxyz односно Muvn, добићемо из (6) једначине кретања, ако ову геометријску једначину пројецирамо на осовине Muvn

$$(8)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} + (\tau - \tau_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} - (n - n_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} &= \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \mathfrak{w}_u} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} + (n - n_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} - (s - s_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} &= \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \mathfrak{w}_v} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} + (s - s_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} - (\tau - \tau_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} &= \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \mathfrak{w}_n} \end{aligned}$$

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial s} + (\tau-\tau_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} - (n-n_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + (\mathfrak{w}_v + \mathfrak{v}_v)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} - (\mathfrak{w}_n + \mathfrak{v}_n)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} &= \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial s} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} + (n-n_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial s} - (s-s_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} + (\mathfrak{w}_n + \mathfrak{v}_n)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} - (\mathfrak{w}_u + \mathfrak{v}_u)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} &= \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial \tau} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} + (s-s_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} - (\tau-\tau_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial s} + (\mathfrak{w}_u + \mathfrak{v}_u)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} - (\mathfrak{w}_v + \mathfrak{v}_v)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} &= \frac{\partial \dot{\bar{U}}}{\partial n}\,^{**} \end{aligned}$$

* Види на пример Ант. Билимовић. Природне једначине кретања чврстог тела. XCIX књига »Гласа« Српске Кр. Академије 1922 г. стр. 7.

** Види проф. Воронецъ. Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла по отношенію къ средѣ, имѣющей произвольно заданное движеніе Кіевъ. 1911. или P. Woronetz. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers. 1911. Math. An. 71. Band.

Ако се систем $Muvn$ поклапа са системом $Oxyz$, из ових формула излазе, као посебни случај, познате једначине кретања чврстог тела односно осовина, које су са њим стално везане.

Ако се систем $Muvn$ поклапа са системом $O_1x_1y_1z_1$, из ових формула излазе, као други посебни случај, познате једначине кретања чврстог тела односно непокретних осовина.

Напомињемо, да нам за решење проблема није потребно да знамо непосредно кретање система $Muvn$ према систему $Oxyz$; доста је, да знамо ово кретање само као функцију параметара чврстог тела, њихових извода и времена.

§ 2, 2. Једначине кретања неслободног чврстог тела.

Обележимо са $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ координате чврстог тела. Ако је ово тело подложно везама коначним $f_i = o$ $(i = 1, 2..k)$ и диференцијалним $\varphi_j = o$ $(j = 1, 2,. k_1)$, појавиће се у десним странама једначина (8) и (9) § 2,1 још и реакције ових веза. Израчунајмо њих. Сменимо у једначинама $\dot{f}_i = o$* и $\varphi_i = o$ изводе $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2..6)$ величинама p, q, r, w_x, w_y, w_z. Обележимо резултанту сила реакција веза са R, а моменте сила реакција веза односно O и M са $\Lambda^{(O)}$ и $\Lambda^{(M)}$. Као што је познато, тада је

$$(1) \qquad R \cos(R, x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial \dot{f}_i}{\partial w_x} \lambda_i + \sum_{j=1}^{j=k_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial w_x} \mu_j \quad \text{и т. д.}$$

$$(1)' \qquad \Lambda^{(O)} \cos(\Lambda^{(O)}, x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial \dot{f}_i}{\partial p} \lambda_i + \sum_{j=1}^{j=k_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial p} \mu_j \quad \text{и т. д.}$$

где су λ_i мултипликатори коначних веза, а μ_j — мултипликатори диференцијалних веза.

Сменимо у $\dot{f}_i$ и φ_j пројекције p, q, r, w_x, w_y, w_z пројекцијама $s, \tau, n, \mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, \mathfrak{w}_n$ и обележимо резултат замене са $\bar{\dot{f}}_i$ у $\bar{\varphi}_j$. Лако је доказати, да је

* Овде је са $\dot{f}_i$ означен потпуни извод од f_i по времену.

$$(2)\qquad R_{\cos}(R,u)=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial \bar{\dot{f}}_i}{\partial \mathfrak{w}_u}\lambda_i+\sum_{j=1}^{j=k_1}\frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial \mathfrak{w}_u}\mu_j \quad \text{и т. д.}$$

$$(2)'\qquad \Lambda^{(M)}{}_{\cos}(\Lambda^{(M)},u)=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial \bar{\dot{f}}_i}{\partial s}\lambda_i+\sum_{j=1}^{j=k_1}\frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial s}\mu_j \quad \text{и т. д.}$$

Једначине (8) и (9) § 2,1 добијају у овом случају облик

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u}+(\tau-\tau_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_n}-(n-n_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v}=\frac{\partial \bar{U}}{\partial \mathfrak{w}_u}+ \\ +\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial \bar{\dot{f}}_i}{\partial \mathfrak{w}_u}+\sum_{j=1}^{k_1}\mu_j\frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial \mathfrak{w}_u} \quad \text{и т. д.}$$

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial s}+(\tau-\tau_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial n}-(n-n_1)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau}+(\mathfrak{w}_v+\mathfrak{v}_v)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_u}- \\ -(\mathfrak{w}_u+\mathfrak{v}_u)\frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathfrak{w}_v}=\frac{\partial \bar{U}}{\partial s}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial \bar{\dot{f}}_i}{\partial s}+\sum_{j=1}^{k_1}\mu_j\frac{\partial \bar{\varphi}_j}{\partial s} \quad \text{и т. д.}$$

§ 2,3. Примена на котрљање без клизања чврстог тела по сталној површини.

Применимо добивене једначине на изналажење једначина кретања чврстог тела, које се котрља без клизања по сталној површини. Узмимо за помоћни координатни систем триједар Muvn главе I. За почетак O координатног система у вези са чврстим телом узмимо тежиште тела; ако су: $Oxyz$ главне осовине лењивости, A, B, C — моменти лењивости тела у односу на те осовине, M — маса тела, онда се жива сила тела $\mathbf{T}$ изражава формулом

$$(1)\qquad 2\mathbf{T}=M(w_x^2+w_y^2+w_z^2)+Ap^2+Bq^2+Cr^2$$

Сменимо w_x, w_y, w_z, p, q, r брзинама $\mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, \mathfrak{w}_n, s, \tau, n$. Онда је

$$(2)\qquad 2\mathbf{T}=2\bar{\mathbf{T}}(\mathfrak{w}_u, \mathfrak{w}_v, \mathfrak{w}_n, s, \tau, n)=M(w_u^2+w_v^2+w_n^2)+ \\ +A(s\alpha+\tau\beta+n\gamma)^2+B(s\alpha'+\tau\beta'+n\gamma')^2+C(s\alpha''+\tau\beta''+n\gamma'')^2$$

Овдеваља заменити w_u, w_v, w_n њиховим вредностима из формуле (1) § 2,1.

У случају котрљања без клизања тело је подложно једној коначној вези, која изражава, да тело додирује у тачци M сталну површину, и двема диференцијалним везама, које изражавају, да котрљање произлази без клизања. Према § 1,3 једначине ових услова примају облик

$$\overline{\varphi}_1 = \mathfrak{w}_u = 0 \qquad \overline{\varphi}_2 = \mathfrak{w}_v = 0 \qquad \overline{f}_1 = \mathfrak{w}_n = 0$$

Узевши у обзир ове формуле, имаћемо према (8) § 1,3

$$(3) \quad 2\overline{\mathbf{T}} = 2\Theta(s, \tau, n) = M\left[(n\rho_v - \tau\epsilon)^2 + (s\epsilon - n\rho_u)^2 + (\tau\rho_u - s\rho_v)^2\right] + \\ + A(s\alpha + \tau\beta + n\gamma)^2 + B(s\alpha' + \tau\beta' + n\gamma')^2 + C(s\alpha'' + \tau\beta'' + n\gamma'')^2$$

где се ρ_u, ρ_v, ϵ одређују формулама (21) § 1,2. Или друкчије

$$(4) \quad 2\Theta = M\rho^2(s^2 + \tau^2 + n^2) + A(s\alpha + \tau\beta + n\gamma)^2 + B(s\alpha' + \tau\beta' + n\gamma')^2 \\ + C(s\alpha'' + \tau\beta'' + n\gamma'')^2 - M(s\rho_u + \tau\rho_v + n\epsilon)^2$$

За парцијалне изводе $\dfrac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathfrak{w}_u} \ldots$ лако ћемо добити из формуле (1) § 2,1

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathfrak{w}_u} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial w_u} \quad \frac{\partial w_u}{\partial\mathfrak{w}_u} = M(\mathfrak{w}_u - \tau\epsilon + n\rho_v)$$

$$(5) \quad \frac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathfrak{w}_v} = M(\mathfrak{w}_v - n\rho_u + s\epsilon)$$

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathfrak{w}_n} = M(\mathfrak{w}_n - s\rho_v + \tau\rho_u)$$

Сменимо сада у једначинама (3) и (4) § 2,2 вредности величина s_1, τ_1, n_1, $\mathfrak{v}_u$, $\mathfrak{v}_v$, $\mathfrak{v}_n$ из формула (6) и (7) § 1,3, а вредности живе силе $\mathbf{T}$ и њених парцијалних извода из фор. (1)—(5) овог параграфа. Узевши у обзир, да су парцијални изводи $\dfrac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial s}$ и т. д. једнаки нули, добићемо једначине кретања чврстог тела, које се котрља без клизања по сталној површини, у следећем облику:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial s} + \left[\tau - \frac{D}{E\mathbf{D}}(s\triangle' + \tau\triangle'')\right]\frac{\partial\Theta}{\partial n} - \Bigg[n -$$

$$(6) \quad -\frac{1}{2\mathbf{D}\sqrt{EG}}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\overline{s\triangle' + \tau\triangle''} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\overline{s\triangle + \tau\triangle'}\right)\Bigg]\frac{\partial\Theta}{\partial p} -$$

$$-\frac{1}{\mathbf{D}}(s\triangle + \tau\triangle')(\tau\rho_u - s\rho_v) = \frac{\partial\overline{U}}{\partial s}$$

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\left[n-\frac{1}{2\mathbf{D}\sqrt{EG}}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\overline{s\triangle'+\tau\triangle''}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\overline{s\triangle+\tau\triangle'}\right)\right]\frac{\partial\Theta}{\partial s}-
$$

$$
(7)\qquad -\left[s-\frac{D''}{G\mathbf{D}}(s\triangle+\tau\triangle')\right]\frac{\partial\Theta}{\partial n}-\frac{1}{\mathbf{D}}(s\triangle'+\tau\triangle'')(\tau\rho_u-s\rho_v)=\frac{\partial\bar{U}}{\partial\tau}
$$

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial n}+\left[s-\frac{D''}{G\mathbf{D}}(s\triangle+\tau\triangle')\right]\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}-\left[\tau-\frac{D}{E\mathbf{D}}(s\triangle'+\tau\triangle'')\right]\frac{\partial\Theta}{\partial s}+
$$

$$
(8)\qquad +\frac{1}{\mathbf{D}}(s\triangle'+\tau\triangle'')(s\epsilon-n\rho_u)+\frac{1}{\mathbf{D}}(s\triangle+\tau\triangle')(n\rho_v-\tau\epsilon)=\frac{\partial\bar{U}}{\partial n}
$$

Овде се жива сила Θ одређује формулом (4), а величине $\triangle, \triangle', \triangle'', \mathbf{D}$ — формулама (12) и (15) § 1,2. Кад нема функције сила, ваља десне стране једначина (6), (7) и (8) сменити изразима за моменте сила односно осовина $Muvn$.

На тај начин проблем о котрљању без клизања чврстог тела по сталној површини решава се интегрисањем система од 8 диференцијалним једначина првог реда, на име: једначина (6), (7) и (8) овог параграфа, једначина (3) и (5) § 1,3, које дају $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}$ у функцији s, τ, n, и једначина веза (1) истог параграфа. Овај систем одређује осам непознатих функција времена t: u, v, ϑ, u_1, v_1, s, τ, n. Ако при томе постоји интеграл живе силе

$$T = U + h$$

можемо избацивањем времена смањити ред система за два.

§ 2, 4. Посебни случајеви.

Кад је стална површина S лопта, онда величине $\mathbf{D}, \triangle, \triangle', \triangle'$, нису зависне од координата u_1, v_1, ϑ, које постају »цикличне«, ако не улазе у изразе за примењене силе. Проблем се дели на два дела 1) интеграцију система од 5 једначина првог реда [јед. (6), (7), (8) § 2,3 и јед. (3) § 1,3] и 2) налажење u_1, v_1, ϑ по фор. (4) и (5) § 1,3. Интеграција трију задњих једначина своди се на интеграцију Riccati-јеве једначине. Овај проблем је расмотрио проф. Воронец*, који је показао, да се већина резултата о котрљању тела по равни може проширити и за котрљање по лопти.

* Види Woronetz: Über die Bewegung eines starren Körpers... Math. An. 1911. 70. Band.

Кад је стална површина S раван, величине $\mathfrak{v}, \Delta, \Delta', \Delta''$,
опет нису зависне од координата u_1, v_1, ϑ, које постају и у овом
случају »цикличне«, ако не улазе у изразе за примењене силе.
Величине s, τ, n, u, v налазе се интегрисањем система од 5 јед=
начина првог реда. Онда се u_1, v_1, ϑ одређују квадратурама из
јед. (4) и (5) § 1,3, пошто у овом случају величине Δ_1 и Δ_2,
које улазе у горње једначине, не зависе од u_1, v_1, ϑ.

Питање о котрљању тела по равни највише је обрађен
проблем заједно са проблемом о котрљању лопте по произ=
вољној површини.*

---

* Види на пример Routh. A treatise on fhe dynamics of a system of rigid bodies. Chap. V Part. II.

ГЛАВА III.

ВОРОНЦЕВ ПРИНЦИП.

§ 3, 1. Принцип сличан Hamilton-ову интегралу, који се може применити на нехолономне системе.

Интегрални принципи су најподеснији, пошто њихова примена захтева само налажење диференцијалних израза првог реда, док кад се користимо диференцијалнима принципима (D'Alembert-овим, Gauss-овим), увек имамо посла са диференцијалним изразима другог реда — проблем, који је чак и у најједноставнијим случајевима доста компликован.

Као што је познато, Hamilton-ов, Langrange-ов и Helmholtz-ев интегрални принципи не могу се применити на нехолономне системе, то јест на системе, који су подложни диференцијалним везама.* Међутим је проф. Воронец** дао један интегрални принцип врло општег карактера, који се може једнако применити на системе и холономне и нехолономне. Изведимо овај принцип из D'Alembert-ова принципа.

Нека имамо материјални систем, чије координате обележимо са $q_1, q_2 \ldots q_n \ldots . q_{n+k}$ и који је подложан k диференцијалним везама

$$(1) \qquad \dot{q}_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} \dot{q}_i + a_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots k)$$

где су $\dot{q}_i$ изводи од q_i по времену t.

---

* Игнорисање ове чињенице довело је до познатих погрешних резултата. на пример: Neumann. Über die rollende Bewegung . . . (Math. An. XXVII 1886) или Lindelöf. Sur le mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal. (Societ. scient. XX. 1895)

** Воронецъ. Объ уравненіяхъ движенія неголономныхъ системъ, или Сусловъ. Видоизмѣненіе начала Даламбера. 1902. Математическій Сборникъ. или Воронецъ. Уравненія движенія твердаго тѣла, катящагося безъ скольженія по неподвижной плоскости. Кіевъ. 1903.

Обележимо са Q_s уопштене силе, које одговарају координатама q_s. Виртуелне варијације координата q_i: $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n \ldots \delta q_{n+k}$ морају задовољавати услове:

$$(2) \qquad \delta q_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q_i \qquad (\nu = 1, 2 \ldots k)$$

Према D'Alambert-овом принципу

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=n+k} \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0$$

где је $\quad T = T\,(q_i, \dot{q}_i, t)$ жива сила система. Или:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n+k} \left[\left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] = 0$$

С леве стране једначине (4) додајмо и одузмимо збир $\sum_{i=1}^{n+k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$. Тада ће бити:

$$(5) \qquad \delta T + \sum_{i=1}^{n+k} \left[Q_i \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i - \delta \dot{q}_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] = 0$$

Узмимо само оне варијације, које су једнаке нули за граничне тренутке времена t_1 и t_2. Ова претпоставка се слаже са условима (2) за виртуелне варијације.

Помножимо леву страну једнакости (5) са dt и интегралимо је између граница t_1 и t_2. Добићемо:

$$(6) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \sum_{i=1}^{n+k} Q_i \delta q_i + \sum_{i=1}^{n+k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i - \delta \dot{q}_i \right) \right] dt = 0$$

Пошто су варијације $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$ потпуно произвољне, можемо претпоставити, да је

$$(7) \qquad \frac{d}{dt} \delta q_i - \delta \dot{q}_i = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n-1, n.$$

Разлике $\frac{d}{dt} \delta q_{n-\nu} \delta \dot{q}_{n+\nu} \quad \nu = 1, 2 \ldots k$ налазимо према фор. (1) и (2), ако прве од горњих једначина варирамо, а друге диференцијалимо и затим постепено одузмемо друге од првих.

Избацимо из израза за T и $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}}$ $(\nu = 1, 2 \ldots k)$ зависне брзине $\dot{q}_{n+\nu}$ помоћу јед. (1) и обележимо

$$(8)\qquad T = \Theta(t, q_1, q_2 \ldots q_{n+k}, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_n)$$

$$(9)\qquad \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} = K_\nu\,(t, q_1 \ldots q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_n) \qquad \nu = 1, 2 \ldots k.$$

Сада једначину (6) можемо написати у следећем облику:

$$(10)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\Theta + \sum_{i=1}^{n+k} Q_i\,\delta q_i + \sum_{\nu=1}^{\nu=k} K_\nu\left(\frac{d}{dt}\delta q_{n+\nu} - \delta\dot{q}_{n+\nu}\right)\right] = 0$$

Формула (10) изражава Воронцев принцип.

Делимичном интеграцијом се израз (10) увек може помоћу јед. (2) тако трансформисати, да ће испод интегралног знака остати само линеарна функција варијација $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$. Ако коефицијенте ових варијација уједначимо с нулом, добићемо познате једначине кретања нехолономног система, из којих су елиминисани мултипликатори веза.

Заиста трансформишимо пре свега прва два члана фор. (10). Користећи се јед. (1) и (2), добићемо:

$$(11)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\Theta + \sum_{i=1}^{n+k} Q_i\,\delta q_i\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{n+k}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial q_i} + Q_i\right)\delta q_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right]dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{i=n}\left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} + Q_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\nu=k} a_{\nu i}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+\nu}} + Q_{n+\nu}\right)\right]dt\,\delta q_i$$

Израчунајмо сада последњи члан фор. (10). Обележимо

$$(12)\qquad \begin{aligned} A_{ij}^{(\nu)} &= \left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu j}\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_{n+\mu}}\right) - \left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu i}\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_{n+\mu}}\right)\\ A_i^{(\nu)} &= \left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_{n+\mu}}\right) - \left(\frac{\partial a_\nu}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu i}\frac{\partial a_\nu}{\partial q_{n+\mu}}\right) \end{aligned}$$

Како видимо, $A_{ij}^{(\nu)}$ и $A_i^{(\nu)}$ су познате функције од $q_1, q_2 \ldots q_n \ldots q_{n+k}$. Имаћемо:

$$(13)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu=1}^{k} K_\nu\left(\frac{d}{dt}\delta q_{n+\nu} - \delta\dot{q}_{n+\nu}\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{\nu=1}^{k} K_\nu\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{da_{\nu i}}{dt}\delta q_i - \right.$$

$$\left. - \delta a_{\nu i}\,\dot{q}_i - \delta a_\nu\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\delta q_i\sum_{\nu=1}^{k} K_\nu\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(\nu)}\dot{q}_j + A_i^{(\nu)}\right)dt$$

Из (10), (11) и (13) лако ћемо добити следеће једначине кретања нехолономног система

$$
(14)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{q}_i} &= \frac{\partial\Theta}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+\nu}} + Q_{n+\nu}\right) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{k} K_\nu\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(\nu)}\,\dot{q}_j + A_i^{(\nu)}\right) \qquad i=1,2\ldots n. \end{aligned}
$$

Једначина (10) може се трансформисати у још подеснији облик, узевши у обзир, да је

$$
\frac{d}{dt}\,\delta q_{n+\nu} - \delta\dot{q}_{n+\nu} = \delta\left(\dot{q}_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\,\dot{q}_i - a_\nu\right),
$$

ако претпоставимо $\delta\dot{q}_{n+\nu} = \frac{d}{dt}\delta q_{n+\nu}$ за $\nu = 1, 2 .. k$.

На тај начин Воронцев принцип можемо изразити овако:

»Нека су $q_1, q_2 \ldots q_n \ldots q_{n+\nu}$ координате материјалног система, T — његова жива сила и Q_s — уопштене силе, које одговарају координатама q_s. Систем је подложан k диференцијалним везама

$$
\dot{q}_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\,\dot{q}_i + a_\nu
$$

Изразимо помоћу ових једначина живу силу система и уопштене импулсе, који одговарају брзинама $\dot{q}_{n+1}, \ldots \dot{q}_{n+k}$ као функције времена t, координата $q_1, \ldots q_n \ldots q_{n+k}$ и независних брзина $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_n$.

$$
T = \Theta(t, q_1, \ldots q_n \ldots q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n)
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+\nu}} = K_\nu(t, q_1 \ldots q_n \ldots q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_n)
$$

Тада вреди образац

$$
(15)\quad \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\Theta + \sum_{s=1}^{s=n+k} Q_s\,\delta q_s + \sum_{\nu=1}^{\nu=k} K_\nu\,\delta\left(\dot{q}_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{i=n} a_{\nu i}\,\dot{q}_i - a_\nu\right)\right].dt = 0
$$

за све варијације δq_i, које нестају за тренутке времена t_1 и t_2.

При томе су варијације $\delta q_{n+1} \ldots \delta q_{n+k}$ одређене једначинама

$$
\delta q_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\,\delta q_i \qquad \nu = 1, 2 .. k
$$

а све се разлике $\delta\dot{q}_s - \frac{d}{dt}\delta q_s$ $(s = 1, 2 .. n, \ldots n+k)$ морају уједначити с нулом.«

Често је у проблемима Механике корисно узети у место брзина $\dot{q}_s$ њихове линеарне функције. Горњи принцип се може лако преобразити на одговарајући начин тако, да прими облик врло подесан за примене.*

§ 3, 2. Примена на котрљање без клизања чврстог тела по сталној површини.

Применимо горњи интегрални принцип за изналажење једначина кретања чврстог тела, које се котрља без клизања по сталној површини.

Узмимо за зависне брзине изводе $\dot{u}_1$ и $\dot{v}_1$. Израчунајмо пре свега одговарајуће њима уопштене импулсе K_1 и K_2. Изразимо живу силу тела $2\mathrm{T}$ [фор. (2) § 2, 3] у функцији $\dot{u}$, $\dot{v}$, ϑ, $\dot{u}_1$, $\dot{v}_1$ помоћу фор. (6), (8) и (9) § 1, 2.

$$(1) \qquad 2\overline{\mathrm{T}} = 2\,\bar{\mathrm{T}}\,(\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1)$$

Онда налазимо:

$$K_1 = \left[\frac{\partial \bar{\mathrm{T}}}{\partial \dot{u}_1}\right]_{\substack{\mathfrak{w}_u = 0 \\ \mathfrak{w}_v = 0}} = \left[\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \mathfrak{w}_u} \cdot \frac{\partial \mathfrak{w}_u}{\partial \dot{u}_1} + \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \mathfrak{w}_v} \cdot \frac{\partial \mathfrak{w}_v}{\partial \dot{u}_1} + \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial \dot{u}_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \dot{u}_1} + \frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \dot{u}_1}\right]_{\substack{\mathfrak{w}_u = 0 \\ \mathfrak{w}_v = 0}}$$

ил

$$(2) \qquad K_1 = M\sqrt{E_1}\Big[(\epsilon s - \rho_u n)\cos\vartheta + (\epsilon\tau - \rho_v n)\sin\vartheta\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\frac{\partial \Theta}{\partial n} - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial s}\cos\vartheta + \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}\sin\vartheta\right)$$

Овде је жива сила тела у облику (4) § 2, 3. На сличан начин добићемо за K_2 образац:

$$(3) \qquad K_2 = M\sqrt{G_1}\Big[(\epsilon s - \rho_u n)\sin\vartheta - (\epsilon\tau - \rho_v n)\cos\vartheta\Big] -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\frac{\partial G_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial n} + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}\cos\vartheta - \frac{\partial \Theta}{\partial s}\sin\vartheta\right)$$

У место s, τ, n морамо у овим формулама сменити изразе 2) и (9) § 1, 3.

* Воронецъ. Уравненія движенія твердаго тѣла ... 1903 г. ст. 18. Кіевъ.

Коефицијенти код K_1 и K_2 у фор. (15) задњег параграфа имају према фор. (1) § 1, 3 облик:

$$\delta\left(\dot u_1 - \frac{-\sqrt{E}\dot u \sin\vartheta + \sqrt{G}\dot v\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}}\right),\quad \delta\left(\dot v_1 - \frac{\sqrt{E}\dot u\cos\vartheta + \sqrt{G}\dot v \sin\vartheta}{\sqrt{G_1}}\right)$$

Узевши у обзир, да је

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sqrt{E_1}\,\delta u_1 &= -\sqrt{E}\,\delta u \sin\vartheta + \sqrt{G}\,\delta v\cos\vartheta \\ \sqrt{G_1}\,\delta v_1 &= \sqrt{E}\,\delta u\cos\vartheta + \sqrt{G}\,\delta v \sin\vartheta \end{aligned}$$

преобразимо ове коефицијенте овако

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{E_1}}\left[\sqrt{E}\,(n\,\delta u - \dot u n')\cos\vartheta + \sqrt{G}\,(n\,\delta v - \dot v n')\sin\vartheta\right] \\ &\frac{1}{\sqrt{G_1}}\left[\sqrt{E}\,(n\,\delta u - \dot u n')\sin\vartheta - \sqrt{G}\,(n\,\delta v - \dot v n')\cos\vartheta\right] \end{aligned}$$

где је

$$(6)\qquad n' = -\delta\vartheta + \frac{1}{2\sqrt{GE}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\delta u - \frac{\partial G}{\partial u}\delta v\right) + \frac{1}{2\sqrt{G_1E_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\delta u_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\delta v_1\right).$$

Формулу (15) задњег параграфа препишимо на следећи начин

$$(7)\qquad \int_{t_1}^{t}\left[\delta\bar\Theta + \delta U + K_1'\sqrt{E}\,(n\,\delta u - \dot u n') + K_2'\sqrt{G}\,(n\,\delta u - \dot v n')\right]dt = o$$

Овде смо обележили:

$U(u, v, \vartheta, u_1, v_1)$ је функција сила

$$(8)\qquad \begin{aligned} K_1' &= \frac{K_1}{\sqrt{E_1}}\cos\vartheta + \frac{K_2}{\sqrt{G_1}}\sin\vartheta \\ K_2' &= \frac{K_1}{\sqrt{E_1}}\sin\vartheta - \frac{K_2}{\sqrt{G_1}}\cos\vartheta \end{aligned}$$

$\bar\Theta$ је израз живе силе, који добијемо, ако у фор. (4) § 2, 3 у место s, τ, n сменимо њихове вредности (2) и (9) § 1, 3 у функцији $\dot u$, $\dot v$, $\dot\vartheta$

$$(9)\qquad \bar\Theta(\dot u, \dot v, \dot\vartheta) = \Theta$$

Елиминишимо сада из фор. (7) n' помоћу фор. (6), δu_1 и δv_1 — помоћу фор. (4) и, најзад, $\delta\dot u, \delta\dot v, \delta\dot\vartheta$ — помоћу делимичне интеграције. Ставимо ли да су равни нули коефицијенти независних варијација $\delta u, \delta v, \delta\vartheta$, добићемо једначине кретања чврстог тела, које се котрља без клизања по сталној површини, у следећем облику:*

* Ове су једначине дате у делу проф. Воронца: Über die Bewegung... Math. An. 70. Band. § 16.

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\dot{u}}-\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial u}=\sqrt{E}\Bigg[-\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial u_1}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{E_1}}+\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial v_1}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{G_1}}-$$

$$-K_1'\,\dot{\vartheta}\Bigg]-(\triangle_2K_1'+\triangle_1K_2')\sqrt{EG}\;\dot{v}$$

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\dot{v}}-\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial v}=\sqrt{G}\Bigg[\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial u_1}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}}+\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial v_1}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{G_1}}-$$

$$-K_2'\,\dot{\vartheta}\Bigg]+(\triangle_2K_1'+\triangle_1K_2')\sqrt{EG}\,\dot{u}$$

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\dot{\vartheta}}-\frac{\partial(\overline{\Theta}+U)}{\partial\vartheta}=K_1'\sqrt{E}\,\dot{u}+K_2'\sqrt{G}\,\dot{v}$$

Овде се $\triangle_1$ и $\triangle_2$ одређују фор. (18) § 1, 2, K_1' и K_2' — фор. (8) овог § и жива сила $\overline{\Theta}$ — фор. (9). Проблем се решава интеграцијом система од пет једначина [трију јед. (10), (11), (12) и двеју јед. услова веза (1) § 1, 3]. Од ових су једначина три (10), (11) и (12) другог реда по u, v, ϑ, а две — првог. Овај систем одређује 5 непознатих u, v, ϑ, u_1, v_1 у функцији времена t. Јасно је, да су системи § 2, 3 и овог § еквивалентни.

§ 3, 3. Котрљање гироскопских тела.

Добивене једначине кретања чврстог тела, које се котрља без клизања по сталној површини, могу се лако уопштити за случај, кад се у унутрашњости тела налази симетрични гироскоп.

Претпоставимо, да се осовина симетрије гироскопа поклапа са осом OZ, а тежиште гироскопа са тежиштем тела, које се котрља. Осим тога нека примењене силе не дају момента односно осовине гироскопа. Онда ће се гироскоп обртати са сталном угаоном брзином око осовине OZ (ако се занемари трење). Обележимо ову брзину са $\tilde{\omega}$.

Нека је T жива сила система од гироскопа и тела, које се котрља. Ова жива сила има облик:

$$(1)\qquad 2T=2\mathbf{T}+\tilde{C}\,\tilde{\omega}^2$$

где је $\tilde{C}$ моменат лењивости гироскопа односно осовине симетрије OZ, а $2\mathbf{T}$ се одређује формулом (2) § 2, 3, у којој су сада M, A и B маса и главни моменти лењивости односно осовина Ox и Oy читавог система од гироскопа и гироскопског тела. За пројекције количине кретања $\mathfrak{M}$ система на осовине $Muvn$ имаћемо, као и раније, изразе (3) § 2, 1. Пројекције момената количина кретања $G^{(M)}$ система односно пола M одредиће се помоћу формула

$$(2) \qquad G^{(M)} \cos (G^{(M)}, u) = \frac{\partial \overline{T}}{\partial s} + \kappa \alpha'' \qquad G^{(M)} \cos (G^{(M)}, v) = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \tau} + \kappa \beta''$$

$$G^{(M)} \cos (G^{(M)}, n) = \frac{\partial \overline{T}}{\partial n} + \kappa \gamma''$$

где је $\kappa = \check{C} \tilde{\omega}$, а $\alpha'', \beta'', \gamma''$ према § 1, 1 косинуси углова, које оса OZ склапа са осовинама $Muvn$. Користећи се законом момената количина кретања (6) § 2, 1, добићемо, као и у § 2, 1.

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial s} + \alpha'' \kappa\right) + (\tau - \tau_1)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \gamma'' \kappa\right) - (n - n_1)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \beta'' \kappa\right) +$$

$$+ \mathfrak{v}_v \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} - \mathfrak{v}_n \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial s}$$

и слично за $\frac{d}{dt}\frac{\Theta}{\partial \tau}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial n}$. Овде слова имају исти смисао, као и у § 2, 3. Узевши у обзир формуле познате из кинематике $\frac{d\alpha''}{dt} = \tau_1 \gamma'' - n_1 \beta''$ и т. д., свешћемо једначине кретања на следећи облик:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial s} + (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial n} - (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \mathfrak{v}_v \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} -$$

$$- \mathfrak{v}_n \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial s} + \kappa (n \beta'' - \tau \gamma'')$$

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial s} - (s - s_1)\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \mathfrak{v}_n \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} -$$

$$- \mathfrak{v}_u \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_n} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \tau} + \kappa (s \gamma'' - n \alpha'')$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial n} + (s - s_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial s} + \mathfrak{v}_u \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_v} -$$

$$- \mathfrak{v}_v \frac{\partial \overline{T}}{\partial \mathfrak{w}_u} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial n} + \kappa (\tau \alpha'' - s \beta'')$$

Ове једначине можемо добити и непосредно из јед. (9) § 2, 1, узевши у обзир, да је ротација гироскопа према Klein'у и Sommerfeld'у* извор спрега сила, који делује на гироскопско тело. Моменат је овог спрега по величини и смислу одређен векторским продуктом $[\bar{C}\bar{\omega}.\omega]$, где је ω угаона брзина тела, које се котрља.

Питање о котрљању гироскопских тела третирано је више пута у књижевности.** Проф. Воронец дао је нови случај котрљања гироскопског тела, који се своди на елиптичке квадратуре.*** Овај случај ћемо расмотрити у идућим главама.

---

* „Über die Theorie des Kreisels" Heft I, Kap. III, 1897.

** На пример: Чаплыгинъ. О движенiи тяжелаго тѣла вращенiя по горизонтальной плоскости. Труды Отд. физ. наукь. О. Л. Е. А. и Э IX 1897 (§ 5. гл. III — каченiе гироскопическаго диска) или

Бобылевъ. О шарѣ съ гироскопомъ внутри, катящемся по горизонтальной плоскости безъ скольженiя. Матем. Сборникъ XVI 1892. или

Жуковскiй. О гироскопическомъ шарѣ Бобылева. Тр. Отд. физ. наукъ. О. Л. Е. А. и Э VI. 1893.

Сусловъ. Примѣры движенiя гироскопическихъ тѣлъ. Университ. Извѣстiя. Кiевъ. 1893 г.

*** Woronetz. Über die Bewegung.., Math, An. 70 Band. 1911. § 15.

ГЛАВА IV.

СВОЂЕЊЕ НА КВАДРАТУРЕ.

§ 4, 1. Проблем Бобилева и његово уопштење.

Године 1891. је проф. Бобилев* решио проблем о котрљању без клизања по хоризонталној равни лопте, у којој се налази гироскоп, који се обрће око своје симетријске осовине, учвршћене према лопти. Бобилев је замишљао да примењене силе имају вертикалну резултанту, чија се нападна тачка налази у заједничкоме тежишту. Тежиште лопте поклапа се са геометријским средиштем и са тежиштем гироскопа. Централни је елипсоид инерције лопте — сфера, гироскопа — револуциони елипсоид, чија се осовина поклапа са осовином гироскопа. Бобилевљев проблем решава се у елиптичким квадратурама.

Године 1893. је проф. Жуковски** показао, да Бобилевљев случај није најпростији. Проблем, који је поставио Бобилев, решава се много простије, када је централни елипсоид инерције специјалан револициони елипсоид, чија се осовина поклапа са осовином гироскопа. При томе је моменат лењивости лопте односно ротационе осовине гироскопа једнак збиру момената лењивости лопте и гироскопа односно осе, која је нормална на ротациону осовину гироскопа.

Даље су расправе о котрљању једне површине по другој показале на могућност уопштења Бобилевљева проблема и на њихову тешкоћу. Узмимо за површину гироскопског тела обртну површину, чија се осовина поклапа са осовином гироскопа, а

* Д. К. Бобылевъ. О шарѣ съ гироскопомъ внутри... Мат. Сбор, XVI. 1891.

** Н. Е. Жуковскій. О гироскопическомъ шарѣ Бобылева. Тр. отд. физ. наукъ. VI. 1893.

за сталну површину — лопту. Нека је централни елипсоид инерције гироскопског тела револуциони елипсоид, чија се осовина подудара са осом симетрије тела, које се котрља. Тежиште гироскопског тела подудара се са тежиштем гироскопа. Претпоставимо још, да примењене силе имају резултанту, чија се нападна тачка налази у заједничкоме тежишту, и која је зависна само од одстојања тежишта система од средишта непокретне лопте и има смер према овоме средишту. Овај општи проблем своди се на интеграцију једне нехомогене линеарне диференцијалне једначине другога реда, једне Рикатијеве једначине и на квадратуре.* Кад је гироскопско тело лопта, чије се тежиште подудара са геометријским средиштем, онда се проблем решава помоћу квадратура. Најзад, кад положај маса лопте и гироскопа задовољава услове Жуковског, онда се проблем своди на елиптичке квадратуре. О задњем проблему расправљаћемо у овом чланку.

Дакле решаваћемо следећи проблем. По површини непокретне лопте радиуса R_1 котрља се друга лопта радиуса R_2, у којој се налази гироскоп, чија је осовина чврсто везана са покретном лоптом. Тежиште покретне лопте, њено геометријско средиште и тежиште гироскопа поклапају се. Оса гироскопа подудара се са осом централног елипсоида инерције лопте (обртног елипсоида). Означимо са C_1, C_2 и $C = C_1 + C_2$ главне централне моменте лењивости лопте, гироскопа и система лопта-гироскоп односно осовине гироскопа, а са A_1, A_2 и $A = A_1 + A_2$ главне централне моменте лењивости лопте, гироскопа и система лопта-гироскоп односно осовине нормалне на осовину гироскопа. Тражићемо кретање ове гироскопске лопте у случају, кад примењене силе не дају момента односно тачке додира покретне и непокретне лопте и кад је задовољен услов Жуковског, то јест, кад је

$$C_1 = A. \tag{1}$$

* P. Woronetz. Über die Bewegung eines starren Körpers... Math. An 70. Band. 1911. § 14. или П. Воронецъ. Къ задачѣ о каченіи безъ скольженія твердаго тѣла по данной поверхности подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ Кіевъ. 1909.

§ 4, 2. Кинематички елементи и израз за живу силу.

За координате гироскопске лопте узмимо према Neumann'y*: Гаусове криволинијске координате u и v на покретној лопти оне тачке M, у којој покретна лопта додирује непокретну, Гаусове криволинијске координате u_1 и v_1 исте тачке M на непокретној лопти и угао ϑ између линија u ($v = \text{const}$) и v_1 ($u_1 = \text{const}$) (гл. слику 1 § 1, 2). Шести параметар, који одређује положај гироскопа, нас не занима, па га према томе нећемо ни уводити у наше рачуне.

За координате u, v, u_1, v_1 узмимо комплеменат ширине и дужину тачке M на покретној и непокретној лопти. Конструишимо координатни систем Oxyz чврсто везан са покретном лоптом тако, да се осовина Oz овог система поклапа са осовином гироскопа. У средишту O_1 непокретне лопте сместимо непокретни координатни систем $O_1 x_1 y_1 z_1$. Обележимо координате тачке M према осовинама Oxyz са x, y, z, а према осовинама $O_1 x_1 y_1 z_1$ са x_1, y_1, z_1. Тада ћемо имати:

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= R_2 \sin u \cos v & y &= R_2 \sin u \sin v & z &= R_2 \cos u \\ x_1 &= R_1 \sin u_1 \cos v_1 & y_1 &= R_1 \sin u_1 \sin v_1 & z_1 &= R_1 \cos u_1 \end{aligned}$$

Једначине нехолономних веза, којима је подложан наш систем, имају следећи облик

$$(2)\quad \dot{u}_1 = -\mu' \dot{u} \sin \vartheta + \mu' \dot{v} \cos \vartheta \sin u$$

$$(3)\quad \dot{v}_1 \sin u_1 = \mu' \dot{u} \cos \vartheta + \mu' \dot{v} \sin u \sin \vartheta \qquad \text{где је} \quad \mu' = \frac{R_2}{R_1}$$

Услови (2) и (3) изражавају, да је апсолутна брзина тачке M једнака релативној брзини.

Осим координатних система Oxyz и $O_1 x_1 y_1 z_1$ замислимо још трећи координатни систем Muvn, који има почетак у тачци M. Осовина u овог система нека се поклапа са тангентом к линији u ($v = \text{const}$) у тачци M, осовина v — са тангентом к линији v ($u = \text{const}$), а осовина n са нормалом на покретну лопту. Смисао осовине n одредимо тако, да осовине Muvn имају исти узајамни положај, као и осовине Oxyz. Косинусе углова између осовине Oz и осовина Muvn обележимо са α'', β'', γ'' (гл. § 1, 1). Имаћемо

$$(4)\quad \alpha'' = -\sin u \qquad \beta'' = 0 \qquad \gamma'' = \cos u$$

* Neumann. Grundzüge der analytischen Mechanik. Leipziger Berichte. 1899.

Обележимо пројекције тренутне угаоне брзине лопте на осовине $M u v n$ са s, τ, n. Према § 1, 2 величине се s, τ, n изражавају на следећи начин помоћу Neumann-ових координата $u, v, \vartheta, u_1, v_1$

(5) $s = \sin u \,.\, \dot{v} + \sin u_1 \cos \vartheta \,.\, \dot{v}_1 + \cos \vartheta \,.\, \dot{u}_1$

(6) $\tau = -\dot{u} + \sin \vartheta \,.\, \dot{u}_1 - \sin u_1 \cos \vartheta \,.\, \dot{v}_1$

(7) $n = -\dot{\vartheta} - \cos u \,.\, \dot{v} - \cos u_1 \,.\, \dot{v}_1$

Супституирамо ли једначине веза (2) и (3) у ове изразе, имаћемо

(8) $s = \mu \sin u\, \dot{v}$

(9) $\tau = -\mu\, \dot{u}$

Овде је $\mu = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1} = 1 + \mu'$. Запамтимо однос

(10) $\mu - \mu' = 1$.

Обележимо пројекције тренутне угаоне брзине лопте на осовине $O x y z$ са p_1, q_1, r_1. Замислимо још координатни систем $O\xi\eta\zeta$, који је чврсто везан са гироскопом. Нека се оса $O\zeta$ овог система поклапа са осовином гироскопа, то јест са осовином Oz. Пројекције тренутне угаоне брзине гироскопа на осовинама $O\xi\eta\zeta$ обележимо са p_2, q_2, r_2.

Реакције веза и силе, које делују на гироскоп, не дају момента односно осовине Oz. Према томе имамо:

(11) $C_2 r_2 = \kappa = \text{const.}$

Геометријска разлика тренутних угаоних брзина лопте и гироскопа има исти правац, као и осовина Oz. Пројецирамо ли ову разлику на раван $O x y$, добићемо

(12) $p_1^2 + q_1^2 = p_2^2 + q_2^2$

Жива сила система има облик

(13) $2T = Mw^2 + A_1 (p_1^2 + q_1^2) + C_1 r_1^2 + A_2 (p_2^2 + q_2^2) + C_2 r_2^2$.

где је M маса лопте и гироскопа, а w брзина средишта лопте O. Користећи се фор. (11) и (12) добићемо за живу силу израз

$$(14) \quad 2T = Mw^2 + A (p_1^2 + q_1^2) + C_1 r_1^2 + \kappa r_2 =$$
$$= Mw^2 + A (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) + (C_1 - A) r_1^2 + \kappa r_2$$

Према фор. (8) § 1, 3

$$(15) \quad w^2 = R_2^2 (s^2 + \tau^2)$$

јер је у овом случају $\rho_u = \rho_v = 0$ $\epsilon = R_2$. Онда, узевши у обзир услов (1) § 4, 1, добићемо израз живе силе у следећем једноставном облику:

(16) $2T = 2\Theta + C_2 r_2^2$ где је

(11) $2\Theta = P(s^2 + \tau^2) + An^2$

Овде смо обележили

(18) $P = I + A$

(19) $I = MR_2^2$

За моменте количина кретања система односно осовина Muvn према фор. (2) § 3, 3 имамо изразе

(20) $G^{(M)} \cos(G^{(M)}, u) = Ps + \kappa\alpha''$ $G^{(M)} \cos(G^{(M)}, v) = P\tau + \kappa\beta''$

$$G^{(M)} \cos(G^{(M)}, n) = An + \kappa\gamma''$$

§ 4, 3. Диференцијалне једначине кретања и први интеграли.

Закон момента количина кретања за случај покретног пола M изражава се геометријском једначином

$$(1) \qquad \dot{G}^{(M)} + [\mathfrak{v}\mathfrak{M}] = L^{(M)}$$

где је $\dot{G}^{(M)}$ геометријски извод по времену од момента количина кретања односно пола M, $L^{(M)}$ — моменат примењених сила односно истог пола M и $[\mathfrak{v}\mathfrak{M}]$ — векторски продукт вектора $\mathfrak{v}$ релативне брзине тачке M и вектора $\mathfrak{M}$ количине кретања система лопта-гироскоп. Лако је показати, да је $[\mathfrak{v}\mathfrak{M}] = o$. Заиста, према фор. (5) § 2, 3 за пројекције количине кретања система на осовине Muvn добијемо изразе

(2) $\mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, u) = -MR_2\tau$, $\mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, v) = MR_2 s$, $\mathfrak{M}\cos(\mathfrak{M}, n) = o$

Кад узмемо у обзир, да је тачка M у стању тренутног мировања, налазимо за пројекције вектора $[\mathfrak{v}\mathfrak{M}]$ на осовине Muvn

(3) $[\mathfrak{v}\mathfrak{M}]_u = o$ $[\mathfrak{v}\mathfrak{M}]_v = o$ $[\mathfrak{v}\mathfrak{M}]_n = MR_2(s\dot{u} + \tau\dot{v}\sin u) = o$

према фор. (7) § 2, 1 и фор. (8) и (9) § 4, 2.

Пошто према услову примењене силе не дају момента односно пола M, то јест, пошто је $L^{(M)} = o$, из фор. (1) излази, да је $\dot{G}^{(M)} = o$, или да је моменат количина кретања $G^{(M)}$ сталан по величини и по правцу

$$G^{(M)} = \Gamma = \text{const.}$$

Нека се оса $O_1 z_1$ поклапа са правцем овог сталног вектора. На тај начин искористили смо три произвољне константе површина. Означимо углове, које склапају осовине $Muvn$ са осом $O_1 z_1'$ са α_1'', β_1', γ_1''. Онда је

(4) $\alpha_1'' = \sin u_1 \sin \vartheta \quad \beta_1'' = -\sin u_1 \cos \vartheta \quad \gamma_1' = -\cos u_1$

Искористимо фор. (20) § 4, 2, које дају

(5) $Ps + \kappa\alpha'' = \Gamma\alpha_1'' \quad P\tau + \kappa\beta'' = \Gamma\beta_1'' \quad An + \kappa\gamma'' = \Gamma\gamma_1''$

или, кад супституирамо фор. (4) § 4, 2 и фор. (4) овог §, добијемо

(6) $\Gamma \sin u_1 \sin \vartheta = Ps - \kappa \sin u$

(7) $-\Gamma \sin u_1 \cos \vartheta = P\tau$

(8) $-\Gamma \cos u_1 = An + \kappa \cos u$

Једначине су (6), (7) и (8) три прва интеграла кретања. Ако их подигнемо на квадрат и саберемо, добићемо интеграл површина у облику:

(9) $P^2(s^2 + \tau^2) + A^2 n^2 = \Gamma^2 - \kappa^2 + 2\kappa(Ps \sin u - An \cos u)$

Задња једначина изражава, да је вектор $G^{(M)}$ сталан по величини.

Осим три интеграла површина ми располажемо још четвртим интегралом, наиме интегралом живе силе, који се изражава на следећи начин

(10) $P(s^2 + \tau^2) + An^2 = 2h$

где је h константа живе силе.

И ако се интегралима (6), (7), (8) и (10) потпуно решава проблем о котрљању гироскопске лопте по сфери, ипак изведимо још и диференцијалне једначине кретања, пошто ће нам оне бити од користи у идућим главама. Диференцијалне једначине добићемо елиминацијом произвољне константе Γ из интеграла површина помоћу диференцирања.

Диференцирањем јед. (6) налазимо:

(11) $P\dfrac{ds}{dt} - \kappa \cos u \cdot \dot{u} - \Gamma \cos u_1 \sin \vartheta \cdot \dot{u}_1 - \Gamma \sin u_1 \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = 0$

или, ако супституирамо фор. (2) и (7) § 4, 2:

(12) $$P\frac{ds}{dt} - \Gamma\mu' \cos u_1 \sin \vartheta(-\sin \vartheta \cdot \dot{u} + \cos \vartheta \sin u \cdot \dot{v}) +$$
$$+ \Gamma \sin u_1 \cos \vartheta (n + \cos u \cdot \dot{v} + \cos u_1 \cdot \dot{v}_1) = \kappa \cos u \cdot \dot{u}$$

Избацивањем Γ помоћу (7) и (8) добијамо

$$(13)\quad P\frac{ds}{dt}+(An+\kappa\cos u)\mu'\sin\vartheta(-\sin\vartheta\cdot\dot u+\cos\vartheta\sin u\cdot\dot v)-$$
$$-P\tau(n+\cos u\cdot\dot v)-(An+\kappa\cos u)\mu'\cos\vartheta(\cos\vartheta\cdot\dot u+$$
$$+\sin\vartheta\sin u\cdot\dot v)=\kappa\cos u\cdot\dot u$$

Кад се ослободимо заграда и користимо односом (10) § 4, 2, долазимо до једначине:

$$(14)\quad P\frac{ds}{dt}-\mu' An\dot u-P\tau(n+\cos u\cdot\dot v)=\kappa\mu\dot u\cos u$$

На сличан начин добићемо из интеграла (7) и (8) друге две једначине:

$$(15)\quad P\frac{d\tau}{dt}+Ps(n+\dot v\cos u)-\mu' An\sin u\cdot\dot v=$$
$$=\kappa(n\sin u+\mu\sin u\cos u\cdot\dot v)$$

$$(16)\quad A\frac{dn}{dt}=\kappa\mu\sin u\cdot\dot u$$

Диференцијалне једначине кретања (14), (15) и (16) могли бисмо извести непосредно из фор. (4) § 3, 3.

Проблем се своди на интегрисање осам једначина првог реда — трију једначина (14), (15) и (16), двеју једначина веза (2) и (3) § 4, 2 и једначина (7), (8) и (9) § 4, 2. Овај систем одређује осам непознатих функција времена u, v, ϑ, u_1, v_1, s, τ, n. Проблем се дели на два дела: интеграцију система од пет једначина (14), (16) и (15) овог § и (8) и (9) § 4, 2, које дају изразе за u, v, s, n, τ, и интеграцију трију једначина (2), (3) и (7) § 4, 2, које одређују цикличне координате u_1, v_1, ϑ. Решење мора садржати осам произвољних констаната.

§ 4, 4. Израчунавање координата u и v.

Узевши за независну промењиву величину u, напишимо једначину (16) § 4, 3 у облику

$$(1)\quad A\,dn=\kappa\mu\sin u\,du$$

Интегришимо ову једначину. Обележимо

$$(2)\quad \cos u=x$$

Добијамо:

$$(3)\quad An=-\kappa\mu\cdot x+C_5$$

где је C_5 произвољна константа интеграције. Ово је пета произвољна константа после три константе површина и константе живе силе. Једначину (3) можемо написати још и у облику:

$$(4) \quad An = -\kappa\mu\,(x - x_0)$$

где је x_0 друга произвољна константа, која је везана са константом C_5 односом

$$(5) \quad C_5 = \kappa\mu x_0$$

Да бисмо нашли s, елиминишемо τ из интеграла (9) и (10) § 4, 3. Добијамо

$$(6) \quad -APn^2 + 2hP + A^2n^2 = \Gamma^2 - \kappa^2 + 2\kappa(Ps\sin u - An\cos u)$$

или супституирамо ли фор. (3), имаћемо

$$(7) \quad b_2 s \cdot \sin u = \kappa\mu(-b_0x^2 + 2b_1x_0x - \overline{\Gamma}) \qquad \text{где је}$$

$$(8) \quad b_0 = I\mu + 2A \qquad b_1 = I\mu + A \qquad b_2 = 2PA$$

$$(9) \quad \overline{\Gamma} = \frac{IC_5^2 + A(\Gamma^2 - \kappa^2) - 2hPA}{\mu\kappa^2}$$

Запамтимо следеће неједнакости

$$(10) \quad b_0 > b_1 > P = A + I \qquad \text{јер је } \mu > 1.$$

За израчунавање τ користимо се интегралом живе силе (10) § 4, 3. Можемо написати овај интеграл у облику

$$(11) \quad b_2^2\tau^2 = -2b_2A^2n^2 + 2b_2Ah - b_2^2s^2$$

Помножимо ли леву и десну страну ове једнакости са $\sin^2 u$ и супституирамо формуле (4) и (7), добићемо

$$(12) \quad b_2^2\tau^2\sin^2 u = \mu^2\kappa^2X, \qquad \text{где је}$$

$$(13) \quad X = 2b_2(h' - x + x_0)(h' + x - x_0)(1 - x^2) - (-b_0x^2 + 2b_1x_0x - \overline{\Gamma})^2$$

Овде је

$$(14) \quad h' = \frac{\sqrt{2hA}}{\mu\kappa}$$

Други израз за X добијамо, кад се у (13) ослободимо заграда и сведемо сличне чланове

$$(15) \quad X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \qquad \text{где је}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} a_0 &= 2b_2 - b_0^2 \\ a_1 &= x_0(b_0b_1 - b_2) \\ 3a_2 &= -b_2 - 2H - 2x_0^2b_1^2 - \overline{\Gamma}b_0 \\ a_3 &= x_0(b_2 + \overline{\Gamma}b_1) \\ a_4 &= 4H - \overline{\Gamma}^2 \end{aligned}$$

Овде смо обележили

$$(17)\quad \mathbf{H}=\frac{2hPA^2-C_5PA}{\mu^2\kappa^2}=\frac{b_2}{2}(h'^2-x_0^2)$$

Запамтимо неједнакости

$$(18)\qquad 2b_2-b_0^2<o \qquad b_0b_1-b_2>o$$

Према првој неједнакости увек можемо претпоставити да је

$$(19)\quad a_0=-\nu^2$$

где је ν реална величина.

Супституирамо ли у фор. (12) τ из фор. (9) § 4, 2, добићемо једначину

$$(20)\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{\kappa}{b_2}\sqrt{X} \qquad \text{или}$$

$$(21)\qquad \frac{\kappa\, dt}{b_2}=\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

или, узевши квадратуру,

$$(22)\qquad \frac{\kappa}{b_2}t=\int\frac{dx}{\sqrt{X}}+C_6$$

где је C_6 шеста произвољна константа.

Пошто је полином X четвртог степена по x, квадратура се (22) своди на елиптичке функције.

За налажење v узмимо фор. (8) § 4, 2 и фор. (7) овог § Обележимо ли

$$(23)\qquad \varphi(x)=\frac{-b_0x^2+2b_1x_0x-\Gamma}{1-x^2}$$

добићемо

$$(24)\quad v=\frac{\kappa}{b_2}\varphi(x)$$

или, ако елиминишемо време помоћу (21),

$$(25)\quad dv=\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

Узмимо квадратуру

$$(26)\quad v=\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}+C_7$$

где је C_7 седма произвољна константа.

§ 4, 5. Израчунавање цикличних координата u_1, v_1 и ϑ.

Супституцијом формуле (4) § 4, 4 у интегралу (8) § 4, 3 добијамо следећи израз за $\cos u_1$

$$(1) \quad \Gamma \cos u_1 = \kappa \mu' (x - x_0')$$

где се x_0' одређује формулом

$$(2) \quad x_0' \mu' = x_0 \mu$$

За налажење ϑ делимо фор. (6) § 4, 3 формулом (7) истог §.

$$(3) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\kappa \sin u - Ps}{P\tau}$$

За налажење v_1 морамо узети још једну квадратуру, која даје осму и последњу произвољну константу. Заменимо $\dot{u}$ и $\dot{v}$ у једначини (3) § 4, 2 из (8) и (9) § 4, 2. Онда нађемо

$$(4) \quad \sin u_1 \cdot \dot{v}_1 = -\frac{\mu'}{\mu} \tau \cos \vartheta + \frac{\mu'}{\mu} s \sin \vartheta$$

Помножимо леву и десну страну ове једначине са $\Gamma \sin u_1$ и супституирајмо интеграле (6) и (7) § 4, 3

$$(5) \quad \Gamma \sin^2 u_1 \cdot \dot{v}_1 = \frac{\mu'}{\mu} P \tau^2 + \frac{\mu'}{\mu} s (Ps - \kappa \sin u)$$

Користећи се интегралом живе силе (10) § 4, 3, добијамо

$$(6) \quad \Gamma \sin^2 u_1 \cdot \dot{v}_1 = \frac{\mu'}{\mu} (2h - An^2) - \frac{\mu'}{\mu} \kappa \sin u \cdot s$$

Супституирајмо формуле (4) и (7) § 4, 4

$$(7) \quad \Gamma \sin^2 u_1 \cdot \dot{v}_1 = \frac{\mu' \mu \kappa^2}{A} (h'^2 - \overline{x - x_0}^2) - \frac{\mu' \kappa^2}{b_2} (-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \overline{\Gamma})$$

Обележимо

$$(8) \quad F_1(x) = 2 b_2 \mu (h'^2 - \overline{x - x_0}^2) - 2A(-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \overline{\Gamma})$$

$$(9) \quad \theta(x) = \Gamma^2 \sin^2 u_1 = \Gamma^2 - \kappa^2 \mu'^2 (x - x_0')^2$$

Образац (7) можемо написати у облику

$$(10) \quad \dot{v}_1 = \frac{\Gamma \mu' \kappa^2 F_1(x)}{2 A b_2 \theta(x)}$$

Елиминацијом времена помоћу фор. (21) § 4, 4 налазимо

$$(11) \quad dv_1 = \frac{\Gamma \mu' \varkappa F_1(x)\, dx}{2A\theta(x)\sqrt{X}}$$

Узмимо квадратуру

$$(12) \quad v_1 = \int \frac{\Gamma \mu' \varkappa F_1(x)\, dx}{2A\theta(x)\sqrt{X}} + C_8$$

где је C_8 осма и последња произвољна константа.

§ 4, 6. Посебно решење.

Осим општег решења, које смо нашли, постоји још посебно решење нашег проблема. Ми можемо задовољити једначине (14), (15) и (16) § 4, 3, претпоставивши, да је

$$(1) \quad u = u_0 = \text{const}$$

Онда фор. (9) § 4, 2 даје

$$(2) \quad \tau = o$$

Из (14) и (16) § 4, 3 излази

$$(3) \quad s = s_0 = \text{const} \qquad n = n_0 = \text{const}$$

Фор. (8) § 4, 2 даје

$$(4) \quad \dot{v} = \dot{v}_0 = \text{const}$$

$$(5) \quad v = \dot{v}_0 t + v_0$$

Произвољне константе u_0, s_0, n_0 и $\dot{v}_0$ морају задовољавати једначину (15) § 4, 3

$$(6) \quad Ps_0(n_0 + \cos u_0 \cdot \dot{v}_0) - \mu' \sin u_0 \cdot \dot{v}_0 A n_0 = \varkappa(s_0 \cos u_0 + n_0 \sin u_0)$$

Даље имамо из фор. (8) § 4, 3

$$(7) \quad \begin{cases} u_1 = u_1^0 = \text{const} & \\ \vartheta = \vartheta_0 = 90^0 = \text{const} & \text{из фор. (7) § 4, 3} \\ \dot{v}_1 = \dot{v}_1^0 = \text{const} & \text{из фор. (3) § 4, 2} \\ v_1 = \dot{v}_1^0 t + v_1^0 & \end{cases}$$

Тачка M описује на површини непокретне лопте или споредни ($u_1^0 \neq 90^0$) или главни круг ($u_1^0 = 90^0$) са сталном угаоном брзином. У току кретања осовина гироскопа налази се у једној равни са осом $O_1 z_1$ и склапа са њом стални угао $u_0 - u_1^0$.

ГЛАВА V.

РЕШЕЊЕ У КОНАЧНОМ ОБЛИКУ.

§ 5, 1. Инверзија елиптичког интеграла. Дискриминанта.

Инверзију елиптичког интеграла (22) § 4, 4 извршимо по оптшем правилу.* Обележимо са S_1 и T_1 инваријанте полинома

$$(1) \qquad X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

За инваријанте елиптичке функције узмимо

$$(2) \qquad g_2 = \frac{S_1}{a_0^2} \qquad g_3 = \frac{T_1}{a_0^3}$$

Константан аргуменат u_0 одредимо из следећих сагласних једнакости

$$(3) \qquad p u_0 = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2} \qquad p' u_0 = \frac{a_3 a_0^2 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3}$$

Означимо ли

$$(4) \qquad x = -a + y \qquad y = \frac{1}{2} \frac{p' u - p' u_0}{p u - p u_0} \qquad a = \frac{a_1}{a_0}$$

добићемо

$$(5) \qquad \sqrt{X} = i\nu \left[p u - p(u + u_0)\right]$$

Формула (21) § 4, 4 тада даје:

$$(6) \qquad du = i\nu \frac{\kappa}{b_2} dt \qquad u = i\nu \frac{\kappa}{b_2} t + C_6$$

Пре него почнемо даље трансформације, покажимо, да дискриминанта

$$(7) \qquad \triangle = \frac{1}{a_0^6} (S_1^3 - 27 T_1^2)$$

---

* Види: Halphen. Traité des fonctions elliptiques. Paris 1886. t. 1 p. 120.

у задатом случају може примати и позитивне и негативне вредности. Нека је $x_0 = o$. Онда је $a_1 = a_3 = o$ и

$$(8) \quad \triangle \cdot a_0^6 = a_0\, a_4\, (81\, a_2^4 - 18\, a_0\, a_2^2\, a_4 + a_0^2\, a_4^2)$$

Ми располажемо још двема произвољним константама $2h$ и Γ или $2\mathbf{H}$ и $\bar{\Gamma}$, у место којих узмимо величине a_2 и a_4 по фор. (16) § 4, 4. Када је a_2 доста велико, количина, која стоји у заградама с десне стране једнакости (8), је позитивна. Онда предзнак дискриминанте $\triangle$ зависи само од предзнака a_4 те му је супротан, јер је $a_0 < o$. Покажимо, да a_2 може имати веома велике вредности, док a_4 у исто време може бити и позитивно и негативно. Услови, да су $\mathbf{H}$ и $\bar{\Gamma}$ реални, дају неједнакост, коју морају задовољавати a_2 и a_4

$$(9) \quad b_0^2 - 2b_2 - 4x_0^2\, b_1^2 > a_4 + 6a_2$$

Осим тога, пошто је $2h$ позитивна величина, добићемо из фор. (17) § 4, 4

$$(10) \quad \mathbf{H} > -PAx_0^2$$

За $\bar{\Gamma}$ нађимо неједнакост, користећи се фор. (9) § 4, 4

$$(11) \quad \mu(A\bar{\Gamma} + \mathbf{H}\mu) > -A^2(1 + \mu^2 x_0^2)$$

Из (10) и (11) видимо, да a_4 може варирати од $+\infty$ до $-\infty$.

Трансформишимо израз за a_2 (16) § 4, 4.

$$2\mathbf{H} + \bar{\Gamma} b_0 = \mathbf{A} \qquad \mathbf{A} = -b_2 - 2x_0^2\, b_1^2 - 3a_2$$

$$(12) \quad b_0(A\bar{\Gamma} + \mathbf{H}\mu) - \mathbf{H}(b_0\mu - 2A) = A \cdot \mathbf{A}$$

Пошто је $b_0\mu - 2A > o$, из фор. (12) излази, да и a_2 може варирати између $+\infty$ и $-\infty$.

На тај начин дискриминанта $\triangle$ (8) може примати и позитивне и негативне вредности према вредностима величина $2h$, x_0 и $\bar{\Gamma}$.

§ 5, 2. Аргументи $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

Свакој вредности x и y одговарају две вредности аргумента u, чији збир износи $-u_0$. Означимо са x_{u_1} и y_{u_1} вредности x и y, које одговарају аргументу u_1. Према формули (4) § 5, 1 имамо

$$(1) \quad y = \zeta(u + u_0) - \zeta u - \zeta u_0 \qquad y_{u_1} = \zeta(u_1 + u_0) - \zeta u_1 - \zeta u_0$$

Лако је показати, да је

$$(2)\quad y - y_{u_1} = \frac{\sigma u_0\, \sigma(u-u_1)\, \sigma(u+u_0+u_1)}{\sigma u\, \sigma(u+u_0)\, \sigma u_1\, \sigma(u_1+u_0)}$$

Расмотримо аргументе $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, које одређујемо формулама

$$(3)\quad x-1 = y - y_{\mathfrak{a}} \qquad x+1 = y - y_{\mathfrak{b}}$$

Одавде по фор. (2) излази

$$(4)\quad \begin{aligned} 1-\cos u &= -\frac{\sigma u_0\, \sigma(u-\mathfrak{a})\, \sigma(u+u_0+\mathfrak{a})}{\sigma u\, \sigma(u+u_0)\, \sigma\mathfrak{a}\, \sigma(u_0+\mathfrak{a})} \\ 1+\cos u &= \frac{\sigma u_0\, \sigma(u-\mathfrak{b})\, \sigma(u+u_0+\mathfrak{b})}{\sigma u\, \sigma(u+u_0)\, \sigma\mathfrak{b}\, \sigma(u_0+\mathfrak{b})} \end{aligned}$$

На сличан начин одредимо аргументе $\mathfrak{a}_0$ и $\mathfrak{b}_0$ по формулама

$$(5)\quad x - x_0 - h' = y - y_{\mathfrak{a}_0} \qquad x - x_0 + h' = y - y_{\mathfrak{b}_0}$$

Из фор. (3) и (5) добијамо

$$(6)\quad y_{\mathfrak{a}} = a+1 \qquad y_{\mathfrak{b}} = a-1$$

$$(7)\quad y_{\mathfrak{a}_0} = x_0 + h' + a \qquad y_{\mathfrak{b}_0} = x_0 - h' + a$$

Помоћу ових формула изражавају се аргументи $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ у функцији механичких констаната. Обратно из фор. (6) и (7) изразимо механичке константе a, h', x_0 у функцији аргумената $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$.

$$(8)\quad a = y_{\mathfrak{a}} - 1 = y_{\mathfrak{b}} + 1 = \tfrac{1}{2}(y_{\mathfrak{a}} + y_{\mathfrak{b}})$$

$$x_0 + a = \tfrac{1}{2}(y_{\mathfrak{a}_0} + y_{\mathfrak{b}_0}) \qquad h' = \tfrac{1}{2}(y_{\mathfrak{a}_0} - y_{\mathfrak{b}_0})$$

Приметимо, да између аргумената $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ постоји веза

$$(9)\quad y_{\mathfrak{a}} - y_{\mathfrak{b}} = 2 \quad \text{или} \quad \zeta(\mathfrak{a}+u_0) + \zeta\mathfrak{b} = 2 + \zeta(\mathfrak{b}+u_0) + \zeta\mathfrak{a}$$

Формулом (9) $\mathfrak{a}$ се изражава помоћу $\mathfrak{b}$ и обратно.

Сад се вратимо формули (13) § 4, 4

$$(10)\quad \begin{aligned} X = {} & 2b_2(h' - x + x_0)(h' + x - x_0)(1-x)\,1+x) - \\ & - (-b_0 x^2 + 2b_1 x_0 x - \Gamma)^2 \end{aligned}$$

Користећи се фор. (5) § 5, 1 и фор. (3) и (5) овог §, добићемо

$$(11)\quad \begin{aligned} & 2b_2(y-y_{\mathfrak{a}})(y-y_{\mathfrak{b}})(y-y_{\mathfrak{a}_0})(y-y_{\mathfrak{b}_0}) = \\ & = a_0\,[\wp u - \wp(u+u_0)]^2 + (-b_0x^2 + 2b_1x_0x - \Gamma)^2 = \end{aligned}$$

$$=[-\nu(p u - p \overline{u+u_0}) + (-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x -$$

$$-\Gamma)] \cdot [\nu(p u - p \overline{u+u_0}) + (-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \Gamma)]$$

Расмотримо функције

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \phi &= -\nu[p u - p(u+u_0)] + (-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \Gamma) \\ \phi_1 &= \nu[p u - p(u+u_0)] + (-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \Gamma) \end{aligned}$$

Свака је од њих елиптичка функција са двоструким половима $u = o$ и $u = -u_0$; четири корена функције ϕ и четири корена функције ϕ_1 изводе у одређеном реду аргументе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ и њине комплементе $-(u_0+\mathfrak{a})$, $-(u_0+\mathfrak{b})$, $-(u_0+\mathfrak{a}_0)$, $-(u_0+\mathfrak{b}_0)$. Израз $\zeta(u+u_0) - \zeta u$ се не мења кад u замењимо са $-(u+u_0)$, док израз $p(u+u_0) - p u$ при томе мења знак. На тај начин овом заменом ϕ се претвара у ϕ_1 и обратно. Свака од функција ϕ и ϕ_1 може бити предочена у облику

$$C \cdot \frac{\sigma(u-\alpha)\ \sigma(u-\beta)\ \sigma(u-\gamma)\ \sigma(u-\delta)}{\sigma^2 u\ \sigma^2(u+u_0)}$$

Ако функција ϕ садржи фактор $\sigma(u-\mathfrak{a})$, онда функција ϕ_1 садржи комплементни фактор $\sigma(u+u_0+\mathfrak{a})$. Према томе бројитељ ϕ садржи један од фактора бројитеља сваке од четири разлике $y - y_{\mathfrak{a}}$, $y - y_{\mathfrak{b}}$, $y - y_{\mathfrak{a}_0}$, $y - y_{\mathfrak{b}_0}$. Бројитељ ϕ_1 садржи комплементне факторе. До сад нисмо правили никакве разлике између комплементних фактора. Стога можемо произвољно изабрати факторе бројитеља ϕ, не нарушавајући општи облик. На тај начин добијамо

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} \phi &= C \cdot \frac{\sigma(u-\mathfrak{a})\ \sigma(u-\mathfrak{a}_0)\ \sigma(u+u_0+\mathfrak{b})\ \sigma(u+u_0+\mathfrak{b}_0)}{\sigma^2 u\ \ \sigma^2(u+u_0)} \\ \phi_1 &= C_1 \cdot \frac{\sigma(u+u_0+\mathfrak{a})\ \sigma(u+u_0+\mathfrak{a}_0)\ \sigma(u-\mathfrak{b})\ \sigma(u-\mathfrak{b}_0)}{\sigma^2 u\ \ \sigma^2(u+u_0)} \ * \end{aligned}$$

Овде су C и C_1 константе. Узевши у обзир, да је

$$\lim(\phi \cdot u^2)_{u=o} = -(\nu + b_0) \quad \text{и} \quad \lim(\phi_1 \cdot u^2)_{u=o} = \nu - b_0$$

имаћемо

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} C &= -\frac{(\nu+b_0)\ \sigma^2 u_0}{\sigma\mathfrak{a}\ \sigma\mathfrak{a}_0\,\sigma(u_0+\mathfrak{b})\ \sigma(u_0+\mathfrak{b}_0)} \\ C_1 &= \frac{(\nu-b_0)\ \sigma^2 u_0}{\sigma\mathfrak{b}\ \sigma\mathfrak{b}_0\ \sigma(u_0+\mathfrak{a})\ \sigma(u_0+\mathfrak{a}_0)} \end{aligned}$$

---

* Види: Halphen, Traité des fonctions elliptiques. t. II. p. 152. Mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. Paris, 1888.

С друге стране користећи се формулама

$$\lim\,[\wp\cdot(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0)]_{\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0=0}=\nu-b_0 \quad \text{и}$$
$$\lim\,[\wp_1\cdot(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0)]_{\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0=0}=-(\nu+b_0)$$

добићемо следећу везу између аргумената $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0$

$$(15) \qquad C=C_1$$

У функцијама $\wp$ и $\wp_1$ збир корена мора бити једнак збиру полова. Одавде излази једначина

$$(16) \qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{a}_0=\mathfrak{b}+\mathfrak{b}_0$$

Раставивши на елементарне делове функције $\wp$ и $\wp_1$ у облику (13), добијемо за коефицијенте K и K_1 код $\zeta\mathfrak{a}$ изразе

$$(17) \qquad \begin{aligned} K&=-(\nu+b_0)[-\zeta\mathfrak{a}-\zeta\mathfrak{a}_0+\zeta(\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0)+\zeta(\mathfrak{b}_0+\mathfrak{u}_0)-2\zeta\mathfrak{u}_0] \\ K_1&=(\nu-b_0)[-\zeta\mathfrak{b}_0-\zeta\mathfrak{b}+\zeta(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{u}_0)+\zeta(\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0)-2\zeta\mathfrak{u}_0] \end{aligned}$$

Али према фор. (12) је $K=K_1$; одавде налазимо нови облик везе између аргумената $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0$.

Супституирамо ли у фор. (12) $\mathfrak{u}=\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{u}=\mathfrak{b}$ и узмемо ли у обзир, да је $x_{\mathfrak{a}}=+1$ и $x_{\mathfrak{b}}=-1$, добићемо

$$(18) \qquad \begin{aligned} \nu(\wp\mathfrak{a}-\wp\overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0})&=-b_0+2b_1x_0-\Gamma \\ \nu(\wp\mathfrak{b}-\wp\overline{\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0})&=\ \ b_0+2b_1x_0+\Gamma \end{aligned}$$

Одавде је

$$(19) \qquad \begin{aligned} 2b_1x_0&=\frac{\nu}{2}\Big[\wp\mathfrak{a}+\wp\mathfrak{b}-\wp(\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0)-\wp(\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0)\Big] \\ b_0+\Gamma&=\frac{\nu}{2}\Big[\wp\mathfrak{b}-\wp\mathfrak{a}-\wp(\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0)+\wp(\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0)\Big] \end{aligned}$$

§ 5, 21. Израчунавање вредности ν.

Раставимо функцију

$$(1) \qquad \varphi(x)=\frac{-b_0x^2+2b_1x_0x-\Gamma}{1-x^2}$$

на елементарне делове. Ова функција има полове $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, -(\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0), -(\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0)$. Вредности функције

$$\frac{-b_0x^2+2b_1x_0x-\overline{\Gamma}}{\frac{d}{du}(1-x^2)}=-\frac{-b_0x^2+2b_1x_0x-\overline{\Gamma}}{2x\,[\wp u-\wp \overline{u+u_0}]}$$

за $u=a$, $u=b$, $u=-(a+u_0)$, $u=-(b+u_0)$ дају остатке ових полова. За њихово налажење користићемо се фор. (18) § 5, 2. На тај начин налазимо, да полу a одговара остатак... $-\frac{\nu}{2}$, полу b.... остатак $-\frac{\nu}{2}$, полу $-(a+u_0)$... остатак $+\frac{\nu}{2}$ и полу $-(b+u_0)$.... остатак $+\frac{\nu}{2}$. Према томе, овако ћемо раставити функцију $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{\nu}{2}\left[\zeta(u+u_0+a)+\zeta(u+u_0+b)-\zeta(u-a)-\zeta(u-b)\right]+\nu D \tag{2}$$

Константу D одређујемо из једнакости $\lim\left[\varphi(x)\right]_{u=0}=b_0$

$$D=-\tfrac{1}{2}\left[\zeta(a+u_0)+\zeta(b+u_0)+\zeta a+\zeta b\right]+\frac{b_0}{\nu} \tag{3}$$

За израчунавање v узмимо фор. (25) § 4, 4, која даје

$$i\nu\,dv=\varphi(x)\,du \tag{4}$$

Одавде интеграцијом налазимо

$$iv=\tfrac{1}{2}\lg\frac{\sigma(u+u_0+a)\ \sigma(u+b+u_0)}{\sigma(u-a)\ (u-b)}+D\,.\,u+\lg C_7 \tag{5}$$

Изаберемо ли на подесан начин константу C_7 и заменимо ли је константом E, добићемо

$$e^{iv}=E\,.\,e^{Du}\left[f(u)\right]^{\frac{1}{2}}\quad \text{где је}\quad f(u)=\frac{\sigma a\,\sigma b\,\sigma(u+u_0+a)\,\sigma(u+u_0+b)}{\sigma(u-a)\,\sigma(u-b)\,\sigma(u_0+a)\,\sigma(u_0+b)} \tag{6}$$

или друкчије

$$\begin{aligned}\cos v+i\sin v&=E\,e^{Du}\left[f(u)\right]^{\frac{1}{2}}\\ \cos v-i\sin v&=E^{-1}e^{-Du}\left[f(u)\right]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{7}$$

Овим једначинама се одређују $\cos v$ и $\sin v$.

§. 5, 22. Изналажење вредности s и τ.

Препишимо фор. (12) § 5, 2 на следећи начин

$$(1)\qquad \phi=\frac{2PA}{\mu\kappa}(s+i\tau)\ \sin u \qquad \phi_1=\frac{2PA}{\mu\kappa}(s-i\tau)\ \sin u$$

Интеграл живе силе (10) § 4, 3 даје

$$(2)\qquad (s+i\tau)(s-i\tau)=\frac{\mu^2\kappa^2}{PA}(h'-x+x_0)(h'+x-x_0)=\psi(\mathfrak{u}) \quad \text{где је}$$

$$(3)\qquad \psi(\mathfrak{u})=-\frac{\mu^2\kappa^2}{PA}\cdot\frac{\sigma^2\mathfrak{u}_0\,\sigma(\mathfrak{u}-\mathfrak{a}_0)\,\sigma(\mathfrak{u}-\mathfrak{b}_0)\,\sigma(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_0)\,\sigma(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_0)}{\sigma^2\mathfrak{u}\,\sigma^2(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0)\,\sigma\mathfrak{a}\,\sigma\mathfrak{b}\,\sigma(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_0)\,\sigma(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_0)}$$

Дељењем једнакости (1) добићемо

$$(4)\qquad \frac{s+i\tau}{s-i\tau}=\frac{\phi}{\phi_1}$$

Из (2) и (4) излази

$$(5)\qquad (s+i\tau)^2=\psi\cdot\frac{\phi}{\phi_1} \qquad (s-i\tau)^2=\psi\cdot\frac{\phi_1}{\phi} \qquad \text{или}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} s^2&=\frac{\psi}{4}\left(\frac{\phi}{\phi_1}+\frac{\phi_1}{\phi}+2\right)\\ \tau^2&=-\frac{\psi}{4}\left(\frac{\phi}{\phi_1}+\frac{\phi_1}{\phi}-2\right)\end{aligned}$$

§ 5, 3. Аргументи $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$.

Расмотримо функцију $\theta(x)$ § 4, 5 фор. (9)

$$(1)\qquad \theta(x)=\Gamma^2-\mu'^2\kappa^2(x-x_0')^2$$

Одредимо аргументе $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$ по формулама

$$(2)\qquad x-x_0'-\frac{\Gamma}{\mu'\kappa}=y-y_{\mathfrak{a}_1} \qquad x-x_0'+\frac{\Gamma}{\mu'\kappa}=y-y_{\mathfrak{b}_1}$$

Одавде је

$$(3)\qquad y_{\mathfrak{a}_1}=x_0'+a+\frac{\Gamma}{\mu'\kappa} \qquad y_{\mathfrak{b}_1}=x_0'+a-\frac{\Gamma}{\mu'\kappa}$$

$$(4)\qquad \frac{\Gamma}{\mu'\kappa}=\tfrac{1}{2}\left(y_{\mathfrak{a}_1}-y_{\mathfrak{b}_1}\right) \qquad x_0'+a=\tfrac{1}{2}\left(y_{\mathfrak{a}_1}+y_{\mathfrak{b}_1}\right)$$

Формуле (2) дају

$$(5)\qquad \Gamma-\cos u_1=-\frac{\mu'\kappa\,\sigma u_0\;\sigma(u-\mathfrak{a}_1)\;\sigma(u+u_0+\mathfrak{a}_1)}{\sigma u\;\sigma(u+u_0)\;\sigma\mathfrak{a}_1\;\sigma(u_0+\mathfrak{a}_1)}$$

$$(6)\qquad \Gamma+\cos u_1=\frac{\mu'\kappa\,\sigma u_0\;\sigma(u-\mathfrak{b}_1)\;\sigma(u+u_0+\mathfrak{b}_1)}{\sigma u\;\sigma(u+u_0)\;\sigma\mathfrak{b}_1\;\sigma(u_0+\mathfrak{b}_1)}$$

Вратимо се сада једнакостима (6) и (7) § 4, 3. Кад их дигнемо на квадрат и саберемо, добијамо:

$$(7)\qquad \theta(x)=P^2(s^2+\tau^2)+\kappa^2\sin^2 u-2P\kappa s\sin u=$$
$$=\Big[P(s+i\tau)-\kappa\sin u\Big]\cdot\Big[P(s-i\tau)-\kappa\sin u\Big]$$

Помножимо обе стране ове једначине са $\sin^2 u$. Користећи се фор. (1) 5, 22, налазимо:

$$(8)\qquad \sin^2 u\,\theta(x)=\left[\phi\frac{\mu\kappa}{2A}-\kappa\sin^2 u\right]\cdot\left[\phi_1\frac{\mu\kappa}{2A}-\kappa\sin^2 u\right]\quad\text{или}$$

$$(9)\qquad 4A^2\theta(x)\sin^2 u=\kappa^2\phi'\cdot\phi_1'\qquad\text{где је}$$

$$(10)\qquad \phi'=\phi\mu-2A\sin^2 u\qquad\qquad \phi_1=\phi_1\mu-2A\sin^2 u$$

Функције ϕ' и ϕ_1' сличне су функцијама ϕ и ϕ_1. При замени аргумента u аргументом $-(u+u_0)$ оне прелазе једна у другу. Четири корена ϕ' и четири корена ϕ_1' изводе у одређеном реду аргументе: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, -(\mathfrak{a}+u_0), -(\mathfrak{b}+u_0), -(\mathfrak{a}_1+u_0), -(\mathfrak{b}_1+u_0)$. Третирајући, као и у § 5, 2, добићемо

$$(11)\qquad \begin{aligned}\phi'&=C'.\frac{\sigma(u-\mathfrak{a}_1)\;\sigma(u-\mathfrak{a})\;\sigma(u+u_0+\mathfrak{b}_1)\;\sigma(u+u_0+\mathfrak{b})}{\sigma^2 u\;\sigma^2(u+u_0)}\\ \phi_1'&=C_1'.\frac{\sigma(u-\mathfrak{b}_1)\;\sigma(u-\mathfrak{b})\;\sigma(u+u_0+\mathfrak{a}_1)\;\sigma(u+u_0+\mathfrak{a})}{\sigma^2 u\;\sigma^2(u+u_0)}\end{aligned}$$

Узевши у обзир, да је

$\lim(\phi'.u^2)_{u=o}=2A-\mu(\nu+b_0)$ и $\lim(\phi'_1.u^2)_{u=o}=$
$=2A+\mu(\nu-b_0)$ добићемо

$$(12)\qquad C'=\frac{[2A-\mu(\nu+b_0)]\;\sigma^2 u_0}{\sigma\mathfrak{a}_1\,\sigma\mathfrak{a}\;\sigma(u_0+\mathfrak{b}_1)\,\sigma(u_0+\mathfrak{b})}\qquad C'_1=\frac{[2A+\mu(\nu-b_0)]\;\sigma^2 u_0}{\sigma\mathfrak{b}\;\sigma\mathfrak{b}_1\;\sigma(u_0+\mathfrak{a})\;\sigma(u_0+\mathfrak{a}_1)}$$

Али с друге стране

$$\lim\,[\phi'.(u+u_0)^2]_{u+u_0=o}=2A+\mu(\nu-b_0)\quad\text{и}$$

$$\lim\,[\phi'_1(u+u_0)^2]_{u+u_0=o}=2A-\mu(\nu+b_0)$$

Одавде излази веза између аргумената $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$.

$$(13) \qquad C' = C'_1$$

Другу везу напишимо, узевши у обзир, да су функције ϕ' и ϕ'_1 елиптичке

$$(14) \qquad \mathfrak{a}+\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}+\mathfrak{b}_1$$

Раставимо ли функције ϕ' и ϕ'_1 у облику (11) на елементарне делове, добићемо за коефицијенте K' и K'_1 код $\zeta\mathfrak{u}$ изразе:

$$(15) \qquad \begin{aligned} K' &= [2A-\mu(\nu+b_0)]\cdot[-\zeta\mathfrak{a}-\zeta\mathfrak{a}_1+\zeta(\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0)+\zeta(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{u}_0)-2\zeta\mathfrak{u}_0] \\ K'_1 &= [2A+\mu(\nu-b_0)]\cdot[-\zeta\mathfrak{b}-\zeta\mathfrak{b}_1+\zeta(\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0)+\zeta(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{u}_0)-2\zeta\mathfrak{u}_0] \end{aligned}$$

Али с друге стране по фор. (10)

$$(16) \qquad K' = K'_1 = \mu K + 2A[-\zeta\mathfrak{a}-\zeta\mathfrak{b}+\zeta(\mathfrak{a}+\mathfrak{u}_0)+\zeta(\mathfrak{b}+\mathfrak{u}_0)-2\zeta\mathfrak{u}_0]$$

Ове једнакости дају нови облик везе између аргумената $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$, а такође вежу аргументе $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ са аргументима $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0$.

Расмотримо још функцију

$$(17) \qquad F(x) = [(a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4)+(-b_0x^2+ \\ +2b_1x_0x-\overline{\Gamma})^2]\mu-2A(1-x^2)(-b_0x^2+2b_1x_0x-\overline{\Gamma})$$

Користећи се формулама (12) § 5, 2 трансформишимо десну страну ове једнакости

$$(18) \qquad \begin{aligned} F(x) &= \phi\cdot\phi_1\mu-2A(1-x^2)[\phi+\nu(\wp\mathfrak{u}-\wp\overline{\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0})] = \\ &= \phi\cdot\phi_1\mu-2A(1-x^2)[\phi_1-\nu(\wp\mu-\wp\overline{\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0})] \end{aligned}$$

Споменимо следеће две идентичности, којима ћемо се више позабавити:

$$(19) \qquad F(x) + 2A\nu(1-x^2)[\wp\mathfrak{u}-\wp\overline{\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0}] = \phi\cdot\phi'_1$$

$$(20) \qquad F(x) - 2A\nu(1-x^2)[\wp\mathfrak{u}-\wp\overline{\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0}] = \phi_1\cdot\phi'$$

Скренимо пажњу још на једнакост

$$(21) \qquad F(x) = (1-x^2)\,F_1(x)$$

где је као и у § 4, 5 фор. (8)

$$(22) \qquad F_1(x) = 2b_2[h'^2-(x-x_0)^2]\mu-2A(-b_0x^2+2b_1x_0x-\overline{\Gamma})$$

§ 5, 31. Израчунавање вредности ν_1.

Раставимо функцију

$$\frac{F(x)}{\theta(x)\sin^2 u}$$

на елементарне делове. Ова функција има полове $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, -(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1), -(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)$. Вредности функције

$$\frac{F(x)}{\frac{\partial\theta(x)}{\partial x}(1-x^2)\left[p\mathfrak{u}-p(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0)\right]}$$

за $\mathfrak{u}=\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{u}=\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{u}=-(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)$, $\mathfrak{u}=-(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)$ дају остатке ових полова. За њихово налажење користићемо се идентичношћу (19) (20) § 5, 3. Узевши у обзир, да је за $\mathfrak{u}=\mathfrak{a}_1$ или за $\mathfrak{u}=-(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{u}_0)\ldots x-x'_0=\frac{\Gamma}{\mu'\kappa}$, а за $\mathfrak{u}=\mathfrak{b}_1$ или за $\mathfrak{u}=-(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)\ldots$ $x-x'_0=-\frac{\Gamma}{\mu'\kappa}$, лако ћемо наћи, да половима $\mathfrak{u}=\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{u}=\mathfrak{b}_1$ одговарају остатци $-\frac{A\nu}{\Gamma\mu'\kappa}$, а половима $\mathfrak{u}=-(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)$ и $\mathfrak{u}=-(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)\ldots$ остатци $+\frac{A\nu}{\Gamma\mu'\kappa}$.

На тај начин смо раставили нашу функцију у овоме облику:

$$(1)\quad \frac{F(x)}{\theta(x)(1-x^2)}=\frac{A\nu}{\Gamma\mu'\kappa}\Big[-\zeta(\mathfrak{u}-\mathfrak{b}_1)-\zeta(\mathfrak{u}-\mathfrak{a}_1)+\zeta(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)+ +\zeta(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)\Big]+\frac{A\nu}{\Gamma\mu'\kappa}D_1$$

Константу D_1 одредимо из једначине

$$\lim\left[\frac{F(x)}{\theta(x)(1-x^2)}\right]_{\mathfrak{u}=0}=\frac{(a_0+b_0^2)\mu-2Ab_0}{\mu'^2\kappa^2}=\frac{2A(I\mu+2A\mu')}{\mu'^2\kappa^2}$$

$$(2)\quad D_1=-\left[\zeta\mathfrak{b}_1+\zeta\mathfrak{a}_1+\zeta(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)+\zeta(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)\right]+d_1 \quad \text{где је}$$

$$d_1=\Gamma.\frac{2(I\mu+2A\mu')}{\mu'\nu\kappa}$$

За израчунавање v_1 узмимо фор. (11) § 4,5, која даје

$$(3)\quad \frac{2A}{\Gamma\mu'\kappa}\cdot i\nu\, dv_1=\frac{F(x)}{\theta(x)\sin^2\mathfrak{u}}d\mathfrak{u}$$

Супституирајмо фор. (1) и интегришимо

$$(4)\quad iv_1=\tfrac{1}{2}\lg\frac{\sigma(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)\ \sigma(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)}{\sigma(\mathfrak{u}-\mathfrak{a}_1)\ \sigma(\mathfrak{u}-\mathfrak{b}_1)}+\frac{D_1\mathfrak{u}}{2}+\lg C_8$$

Изаберемо ли на подесан начин константу C_8 и заменимо ли је константом E_1, добићемо

$$(5)\quad e^{iv_1}=E_1 e^{\frac{D_1\mathfrak{u}}{2}}\left[f_1(\mathfrak{u})\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{где је}$$

$$f_1(\mathfrak{u})=\frac{\sigma\mathfrak{a}_1\ \sigma\mathfrak{b}_1\ \sigma(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)\ \sigma(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)}{\sigma(\mathfrak{u}-\mathfrak{a}_1)\ \sigma(\mathfrak{u}-\mathfrak{b}_1)\ \sigma(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1)\ \sigma(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{b}_1)}$$

или

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
\cos v_1 + i \sin v_1 &= E_1\, e^{\frac{D_1 u}{2}} \left[f_1(u) \right]^{\frac{1}{2}} \\
\cos v_1 - i \sin v_1 &= E_1^{-1}\, e^{-\frac{D_1 u}{2}} \left[f_1(u) \right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

§ 5, 32. Израчунавање вредности ϑ.

Помножимо једнакост (7) § 4, 3 са i и саберимо је са једнакошћу (6) истог §:

$$(1)\quad \Gamma \sin u_1 (\sin \vartheta - i \cos \vartheta) = P(s + i\tau) - \kappa \sin u$$

Одузмемо ли на сличан начин једнакости (6) и (7) § 4, 3, добићемо

$$(2)\quad \Gamma \sin u_1 (\sin \vartheta + i \cos \vartheta) = P(s - i\tau) - \kappa \sin u$$

У место угла ϑ међу осовинама u и v_1 узмимо угао $\vartheta' = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ међу осовинама u и u_1 (гл. слику 1 § 1, 2). Користећи се фор. (1) § 5, 22 и (10) § 5, 3, добићемо тада:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
-\Gamma \sin u_1 \sin u \,(\cos \vartheta' - i \sin \vartheta') &= \phi'_1 \\
-\Gamma \sin u_1 \sin u \,(\cos \vartheta' + i \sin \vartheta') &= \phi'
\end{aligned}
$$

Дељењем ових једнакости налазимо

$$(4)\quad e^{2i\vartheta'} = \frac{\phi'}{\phi'_1}$$

Формулом (4) одређује се угао ϑ', односно ϑ.

§ 5, 4. Елиптичке и механичке константе.

У пређашним параграфима имали смо посла са седам констаната: са три количине A, I, μ, које улазе у услове проблема, и са четири константе интеграције: κ, x_0, 2h и Γ. Овај систем констаната узмимо за основни. Осим основног система користили смо се још помоћним константама. Тако осим A, I, μ увели смо још константе μ', b_0, b_1, b_2, P, ν. Поред 2h користили смо се још символима 2H и h', а поред Γ — сомволом $\bar{\Gamma}$. Осим механичких констаната у добивеним формулама појавиле су се и шест помоћних елиптичких констаната, наиме: аргументи $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$ $_0$ и инваријанте g_2 и g_3. Аргументе $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_1$, који се изражавају словима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$ помоћу фор. (9), (16) § 5, 2 и (14) § 5, 3, не узимамо у обзир. Важно је, да не изгубимо из вида основни систем механичких констаната, помоћу којих изражавамо све остале помоћне константе.

Наведимо овде формуле, које изражавају помоћне механичке константе у функцији основних

$$
\begin{aligned}
&P = I + A \qquad \mu' = 1 - \mu \qquad b_0 = I\mu + 2A \qquad b_1 = I\mu + A \\
(1)\quad &b_2 = 2A(I+A) \qquad \nu^2 = b_0^2 - 2b_2 \qquad \mathbf{H} = \frac{2hPA^2 - \kappa^2\mu^2PAx_0^2}{\mu^2\kappa^2} \\
&\mathbf{\Gamma} = \frac{I\mu^2\kappa^2x_0^2 + A(\mathbf{\Gamma}^2 - \kappa^2) - 2hPA}{\mu\kappa^2} \qquad h' = \frac{\sqrt{2hA}}{\mu\kappa}
\end{aligned}
$$

Инваријанте и аргуменат $\mathfrak{u}_0$ одређени су, као функције механичких констаната, формулама (2) и (3) § 5, 1.

Теорема сабирања даје:

$$
\wp\,\mathfrak{a} + \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) + \wp\,\mathfrak{u}_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'\mathfrak{a} - \wp'\mathfrak{u}_0}{\wp\,\mathfrak{a} - \wp\,\mathfrak{u}_0}\right)^2 = y_{\mathfrak{a}}^2
$$

Одавде, по фор. (6) § 5, 2 излази

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
\wp\,\mathfrak{a} + \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) &= \frac{2a_1 + a_0 + a_2}{a_0} \qquad \text{и слично} \\
\wp\,\mathfrak{b} + \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{b}) &= \frac{-2a_1 + a_0 + a_2}{a_0}
\end{aligned}
$$

Помоћу једначина (18) § 5, 2, које дају разлике $\wp\,\mathfrak{a} - \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})$ и $\wp\,\mathfrak{b} - \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{b})$, и једначина (2) лако израчунамо $\wp\,\mathfrak{a}$ и $\wp\,\mathfrak{b}$.

На сасвим сличан начин добијамо одговарајуће изразе за $\wp\,\mathfrak{a}_1$, $\wp\,\mathfrak{b}_1$, $\wp\,\mathfrak{a}_0$, $\wp\,\mathfrak{b}_0$, користећи се фор. (7), (12) § 5, 2 и фор. (3), (19), (20) § 5, 3.

За налажење сума облика $\wp'\mathfrak{a} + \wp'(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})$ и разлика облика $\wp'\mathfrak{a} - \wp'(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})$ користимо се теоремом сабирања, која даје

$$
\begin{aligned}
2y_{\mathfrak{a}} &= \frac{\wp'\mathfrak{a} - \wp'\mathfrak{u}_0}{\wp\,\mathfrak{a} - \wp\,\mathfrak{u}_0} = \frac{-\wp'(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) - \wp'\mathfrak{u}_0}{\wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) - \wp\,\mathfrak{u}_0} = \frac{\wp'\mathfrak{a} + \wp'(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})}{\wp\,\mathfrak{a} - \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a})} = \\
&= \frac{\wp'\mathfrak{a} - \wp'(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) - 2\wp'\mathfrak{u}_0}{\wp\,\mathfrak{u} + \wp(\mathfrak{u}_0 + \mathfrak{a}) - 2\wp\,\mathfrak{u}_0}
\end{aligned}
$$

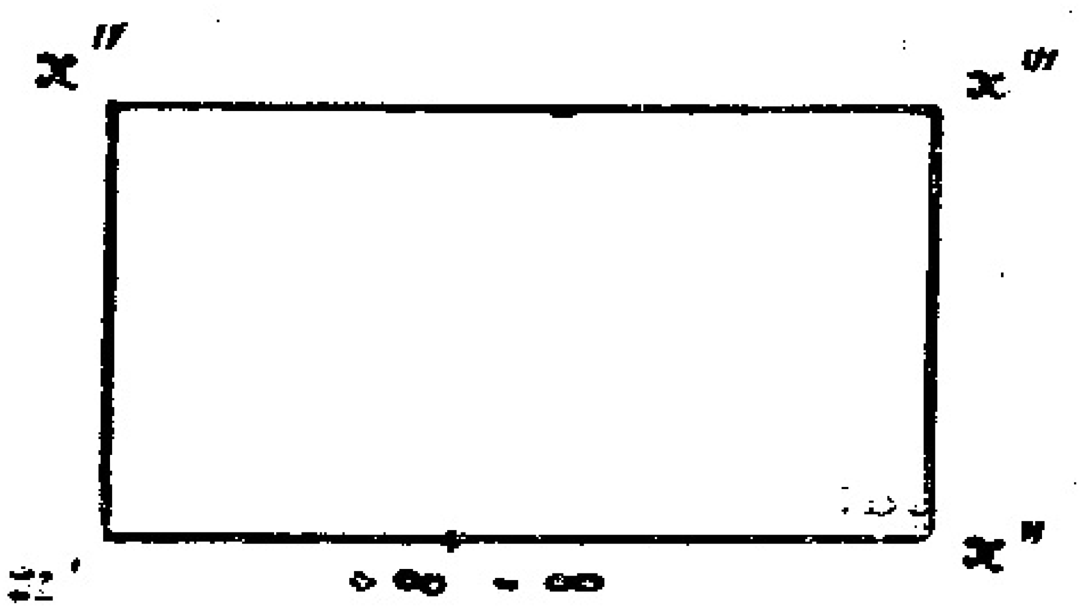
Одавде израчунавамо све одговарајуће суме и разлике за аргументе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_1$. Приметимо, да су сви добивени изрази реални.

§ 5, 5. Дискусија елиптичких аргумената.

Променљива величина x мора се налазити у току кретања између $+1$ и -1. С друге стране иста величина мора саопштавати полиному X (1) § 5, 1 позитивне вредности. Међутим вредности $x = \pm 1$ дају овоме полиному X по фор. (13) § 4, 4 негативне вредности. Према томе између $+1$ и -1 морају увек постојати бар два корена једначине $X = o$, између којих варира променљива величина x у току кретања. Расмотримо посебице случај позитивне дискриминанте и случај негативне дискриминанте.

Случај позитивне дискриминанте.

Једначина $X = o$ има четири реална корена. Обележимо их са x', x^{II}, x^{III}, x^{IV}, и претпоставимо, да је $x' > x^{IV} > x^{III} > x^{II}$. Аргуменат u_0 је реалан. Изаберемо га између 0 и 2ω, где је 2ω реална периода елиптичке функције. Представимо следећу шему:



Слика 2.

гл. слику 2. Свакој вредности x одговарају две вредности аргумента u, чији збир износи $-u_0$. Када x варира између x' и $+\infty$ или између x^{II} и $-\infty$, одговарајуће су вредности аргумента реалне. Када се x налази између x' и x^{IV}, u прима облик $-\frac{u_0}{2} + i\alpha$, где је α реалан број; кад се x налази између x^{IV} и x^{III}, онда је $u = \omega' + \alpha$, где је ω' имагинарна полупериода; најзад у интервалу $x^{III} \ldots x^{II}$ u има облик $\omega + i\alpha - \frac{u_0}{2}$.

Пошто је полином X за $x = \pm\infty$ негативан, он прима позитивне вредности тек онда, кад се променљива x налази између x' и x^{IV}, или између x^{II} и x^{IV}. Претпостављаћемо, да у току кретања x варира у интервалу $x' \ldots x^{IV}$. Наша расуђивања неће се променити, ако x варира у интервалу $x^{II} \ldots x^{III}$. Рачунајући време од тренутка, кад је $x = x'$, једначина (6) § 5, 1 добија облик

$$(1) \qquad u = -\frac{u_0}{2} + i\nu \frac{\kappa}{b_2} t$$

Ако x варира у интервалу $x^{II} \ldots x^{III}$, онда добијамо, рачунајући време од тренутка кад је $x = x^{II}$,

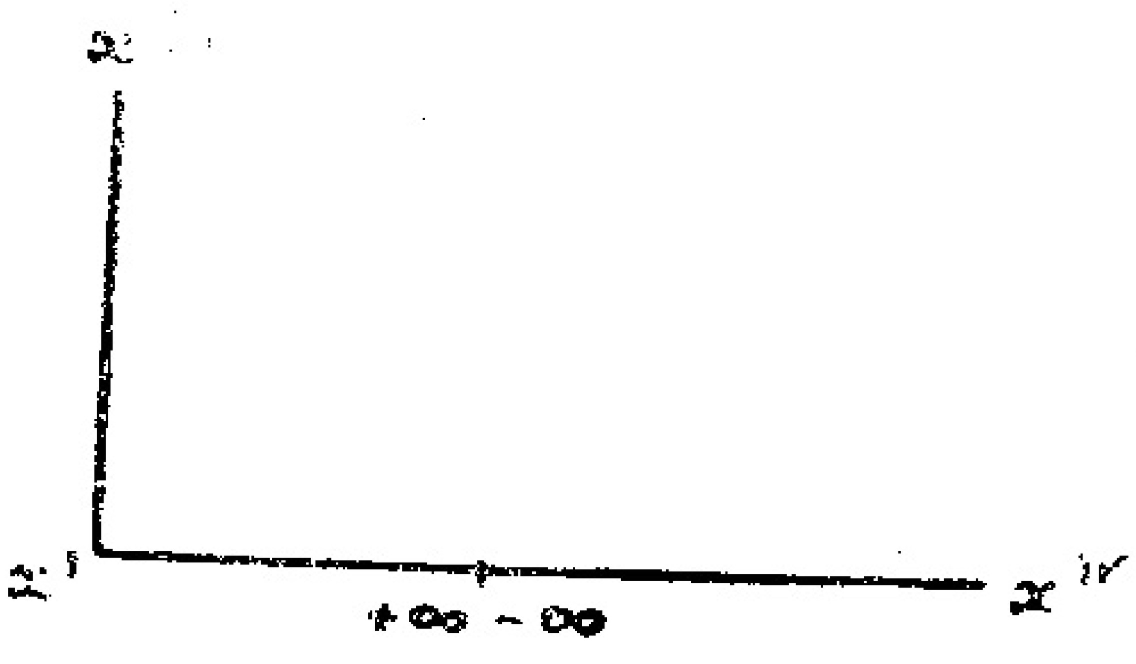
$$(2) \qquad \mathfrak{u} = -\frac{\mathfrak{u}_0}{2} \pm \omega + i\nu \frac{\kappa}{\mathfrak{b}_2} t$$

Бином $1 - x^2$ има за $x = + \infty$ негативне вредности; у интервалу $x' \ldots x^{IV}$ он мора бити позитиван; према томе већи његов корен $+1$ налази се између $+\infty$ и x'. Мањи његов корен -1 не може се налазити између x^{III} и x^{II}, јер би онда полином X према фор. (13) § 4,4 имао у овом интервалу негативне вредности. Исто тако не може се налазити корен -1 ни у интервалу $x^{IV} \ldots x^{III}$, као што ћемо то показати у § 6, 1. Стога долазимо до закључка, да се мањи корен бинома $1 - x^2$ налази између x^{II} и $-\infty$.

На исти начин биноми $h'^2 - (x - x_0)^2$ и $\Gamma^2 - \kappa^2 \mu'^2 (x - x'_0)^2$, који по формулама (2) § 5,22 и (9) § 4,5 у интервалу $x' \ldots x^{IV}$ морају бити позитивни, морају имати веће корене између $+\infty$ и x'. Покажимо, да се мањи корени ових бинома налазе у интервалу $-\infty \ldots x^{II}$. Збиља, пошто се корен -1 налази између $-\infty$ и x^{II}, обадва су аргумента $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ реални. Користећи се формулама (16) § 5,2 и (14) § 5,3 налазимо, да су сви аргументи $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_1$ реални. А то је могуће тек онда, кад се мањи корени бинома $h'^2 - (x - x_0)^2$ и $\Gamma^2 - \kappa^2 \mu'^2 (x - x'_0)^2$ налазе између $-\infty$ и x^{II}.

Случај негативне дискриминанте.

Једначина $X = 0$ има два реална корена. Обележимо их са x' и x^{IV}, и претпоставимо, да је $x' > x^{IV}$. Аргуменат $\mathfrak{u}_0$ је реалан. Изаберимо га између 0 и 2ω.



Слика 3.

Представимо следећу шему:

Свакој вредности x одговарају две вредности аргумента $\mathfrak{u}$, чији збир износи $-\mathfrak{u}_0$. Кад x варира између x' и $+\infty$ или између x^{IV} и $-\infty$, аргуменат је $\mathfrak{u}$ реалан. Кад се x налази између x^{IV} и x', $\mathfrak{u}$ има облик $-\frac{\mathfrak{u}_0}{2} + i\alpha$, где је α реалан број. Пошто је полином X за $x = +\infty$ негативан, он добија позитивне вредности тек онда, кад x варира у интервалу $x' \ldots x^{IV}$. Рачунајући време од тренутка, кад је $x = x'$, добићемо поново једначину (1).

Размишљајући као и у пређашњем случају, када је дискриминанта позитивна, долазимо до закључка, да сви аргументи $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, морају бити реални. А то је могуће тек онда, кад се већи корени бинома $1-x^2$, $h'^2-(x-x_0)^2$ и $\Gamma^2-\mu'^2\kappa^2(x-x'_0)^2$ налазе између $+\infty$ и x', а мањи — између x^{IV} и $-\infty$.

Претпостављаћемо у идућим §§, да већим коренима бинома $1-x^2$, $h'^2-(x-x_0)^2$, $\Gamma^2-\mu'^2\kappa^2(x-x_0')^2$ одговарају аргументи $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, а мањим — аргументи $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_1$. Ова претпоставка не нарушава општи случај наших истраживања, јер су функције ϕ и ϕ_1 потпуно симетричне, и замена $\mathfrak{a}$ са $\mathfrak{b}$ своди се само на преименовање функција ϕ и ϕ_1.

Обележимо још

$$(3) \qquad x' = \cos u' \quad x^{IV} = \cos u^{IV}$$

где су $\frac{\pi}{2}-u'$ и $\frac{\pi}{2}-u^{IV}$ углови ширине упоредника, између којих варира тачка M.

§ 5, 51. Дискусија функција ϕ, ϕ_1, ϕ', ϕ_1'.

Случај позитивне дискриминанте.

Расмотримо, како се мењају функције ϕ и ϕ_1, кад се аргуменат креће по странама правоугаоника шеме (2). По фор. (12) § 5, 2 видимо, да је на теменима правоугаоника $\phi=\phi_1$. У интервалима $x' \dots x^{IV}$ и $x^{III} \dots x^{II}$ ϕ и ϕ_1 примају комплексне спрегнуте вредности. У интервалима су $x^{IV} \dots x^{III}$ и $x^{II} \dots x'$ ϕ и ϕ_1 реалне. У тачци је $u=o$ по фор. (13) § 5, 2 $\phi=\phi_1=-\infty$, јер је $-(\nu+b_0)<(\nu-b_0)<o$.

Варијације функција ϕ' и ϕ_1' су по фор. (10) § 5, 3 на странама правоугаоника (2) сасвим сличне варијацијама функција ϕ и ϕ_1. За $u=o$ је $\phi'=\phi_1'=-\infty$, јер је по формули (12) § 5, 3 $2A-\mu(\nu+b_0)<2A+\mu(\nu-b\ )<o$.

Расмотримо сада функцију $\phi+\phi_1$. По фор. (12) § 5,2 ова функција је стварна за аргументе који одговарају странама правоугаоника (2). За $u=o$ је $\phi+\phi_1=-\infty$. На теменима правоугаоника ова функција износи $2\phi=2\phi_1$. Према овој особини ми можемо судити о коренима функције $\phi+\phi_1$ по промени знака функције ϕ.

Функција $\phi'+\phi_1'$ има исте особине, као и функција $\phi+\phi_1$.

Нама ће бити још потребне функције $\phi\phi_1'$, $\phi_1\phi'$ и $\phi\phi_1'+\phi'\phi_1$.

Функције су $\phi\phi_1'$ и $\phi_1\phi'$ стварне у интервалима $x'\ldots x^{II}$ и $x^{IV}\ldots x^{III}$ и имагинарне спојене у интервалима $x'\ldots x^{IV}$ и $x^{III}\ldots x^{II}$. За $\mathfrak{u}=o$ је $\phi\phi_1'=\phi_1\phi'=+\infty$. На теменима правоугаоника је $\phi\phi_1'=\phi_1\phi'$.

Функција је $\phi\phi_1+\phi_1\phi'$ по фор. (19) и (20) § 5,3 стварна на свим странама правоугаоника. За $\mathfrak{u}=o$ она је једнака $+\infty$. На теменима правоугаоника је $\phi\phi_1'+\phi'\phi_1=2\phi\phi_1'$. О коренима ове функције у интервалима $x'\ldots x^{IV}$ и $x^{III}\ldots x^{II}$ судићемо по промени знака функције $\phi\phi_1'$ на теменима правоугаоника.

Случај негативне дискриминанте.

Када је дискриминанта негативна, наше се истраживање упрошћава, јер онда нестају интервали $x^{IV}\ldots x^{III}$ и $x^{III}\ldots x^{I}$. У осталом размишљања и резултати остају исти.

§ 5, 6. Дискусија добивених формула.

Расмотримо сада добивене формуле с обзиром на стварност или имагинарност механичких елемената, који су њима одређени.

Узмимо пре свега фор. (6) § 5, 21, која одређује v. С десне стране ове једначине налази се „двогубопериодна функција друге врсте“. Одавде излази, да за једну периоду $2\omega'$ угао v увек расте за константну величину $2\Delta_v$. Покажимо, да је ова периода $2\Delta_v$ реална. По фор. (6) § 5,21 имамо:

$$(1)\quad 2i\Delta_v=2[\eta'(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+D\omega']\ \text{где је}\ \eta'=\zeta\omega'.$$

Пошто су $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ стварне, D је по фор. (3) § 5, 21 исто тако стварно; десна страна фор. (1) је чисто имагинарна. Према томе Δ_v је стварно.

На сличан начин докажимо стварност величине v_1, која је одређена фор. (5) § 5, 31. Овде се с десне стране исто тако налази „двогубопериодна функција друге врсте“. Стога за периоду $2\Delta_{v_1}$ добијемо израз:

$$(2)\quad 2i\Delta_{v_1}=2\eta'(\mathfrak{u}_0+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{b}_1)+D_1\,\omega'.$$

Пошто су $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$ стварне, D_1 по фор. (2) § 5,31 је исто стварно; а према томе и Δ_{v_1} је стварно.

Формуле (6) § 5,22 дају за s и τ увек реалне вредности. И збиља, према интегралу живе силе (2) § 5,22 је ψ ($\mathfrak{u}$) позитивно. Величине су ϕ и ϕ_1 комплексне спрегнуте. Одавде је

(3) $\frac{\phi}{\phi_1} = e^{i\beta}$, где је β реалан број, или

(4) $\frac{\phi}{\phi_1} + \frac{\phi_1}{\phi} + 2 = 2\cos\beta + 2$

Десна страна израза за s^2 стварна је и позитивна. Према томе s је стварно. На сличан начин лако је показати, да је τ реално. Из ових је формула јасно, да су s и τ периодичне величине.

Функције су ϕ' и ϕ_1' комплексне спрегнуте. Одавде је по фор. (4) § 5,32 угао ϑ' реалан. У граничним тачкама $x = x'$ и $x = x^{IV}$ ϕ' је једнако са ϕ_1'. Према томе, у овим је положајима $\vartheta' = o, \pi, 2\pi \ldots\ldots$ На тај начин ϑ' или се никако не мења и враћа се кроз полупериоду ка почетној вредности, или има периоду ω', у току које расте за $\pm\pi$.

§ 5, 7. Општа интерпретација кретања.

Из добивених формула видимо, да кретање има периодични карактер. Периоди времена $2\Delta_t$ одговара имагинарна периода елиптичке функције. По фор. (6) § 5, 1 добијамо следећу реалну вредност за Δ_t

(1) $\Delta = \frac{b_2\,\omega'}{\sqrt{k\,i}}$

Тачка додира M описује на покретној и на непокретној сфери курбе, не излазећи из граница зоне, која је ограничена упоредницима u' и u^{IV} на покретној лопти, и упоредницима u_1' и u_1^{IV} на непокретној лопти, који одговарају граничним вредностима x (x' и x^{IV}).

Курбе на покретној сфери.

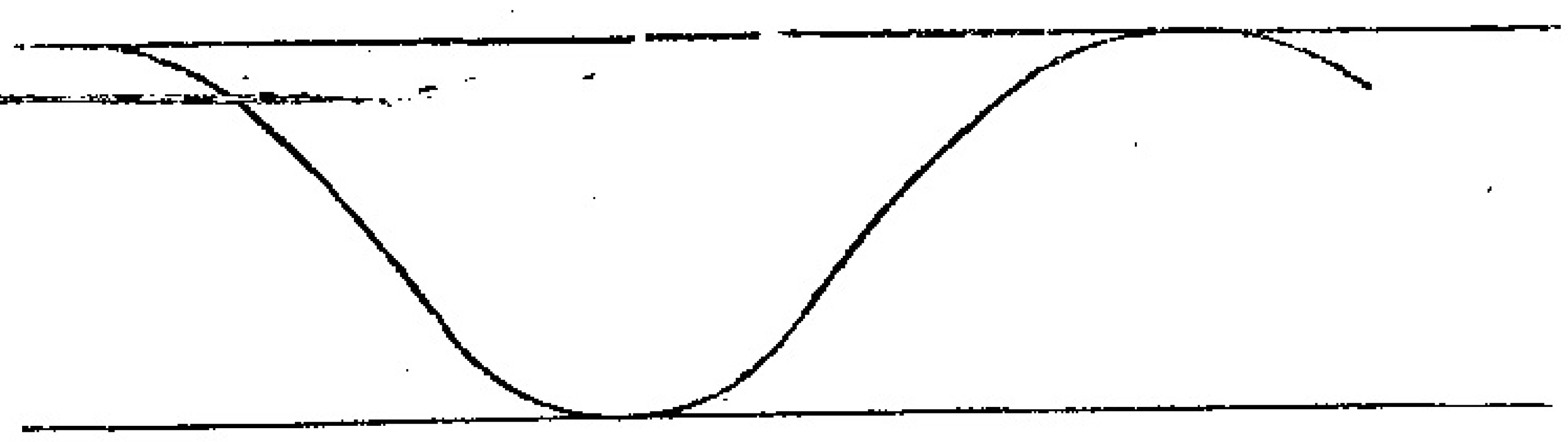
Курба, коју описује тачка M на покретној сфери, одређује се фор. (4) § 5, 1 и (6) § 5, 21. Овде морамо разликовати три случаја према карактеру мењања угла v. Формулу (24) § 4, 4 по (6) § 5,1 и по (12) § 5,2 препишимо на следећи начин:

(2) $2iv\frac{dv}{du} = \frac{\phi + \phi_1}{1 - x^2}$

A) Први случај: функција $\phi + \phi_1$ нема корена у интервалу $x' \ldots x^{IV}$ (гл. § 5,51). Извод $\frac{dv}{du}$ не мења знак, v или стално расте, или стално опада.

Курба има облик (A). (гл. слику 4 — на страни 53).

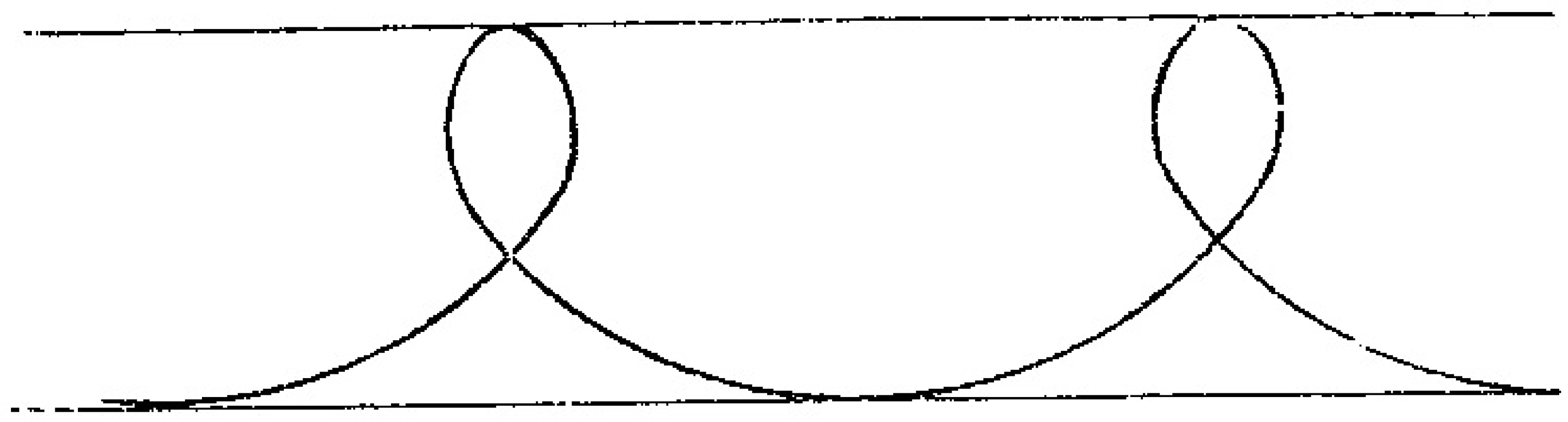
(A)



Слика 4.

B) Други случај: функција $\phi + \phi_1$ има један корен у интервалу $x' .. x^{IV}$. Извод $\frac{dv}{du}$ мења знак. Курба има облик (B) (гл. слику 5).

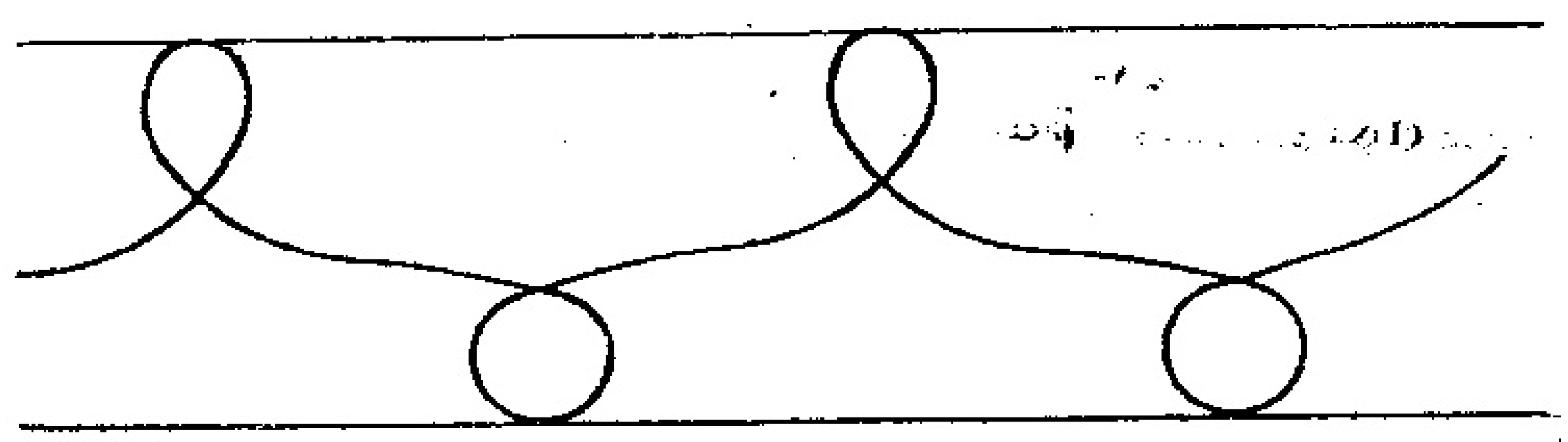
(B)



Слика 5.

C) Трећи случај: функција $\phi + \phi_1$ има два корена у интервалу $x' ... x^{IV}$. Извод $\frac{dv}{du}$ два пута мења знак. Курба има облик (C) (гл. слике 6 и 7).

(C_1)

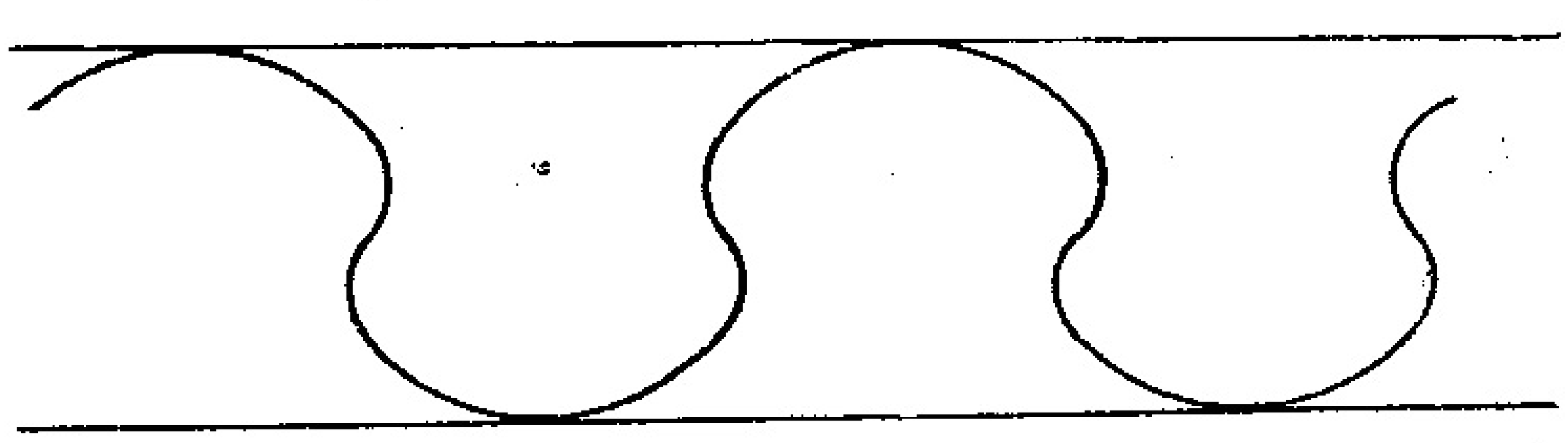


Слика 6.

Обртање око нормале n.

Ваља разликовати апсолутно обртање око нормале n и релативно обртање. Апсолутно обртање одређује се пројекцијом n

(C_2)



Слика 7.

тренутне угаоне брзине на ову нормалу. Релативно обртање одређује се мењањем угла ϑ'.

Апсолутно обртање може бити наизменично и стално у истом смислу. Узмимо фор. (4) § 4, 4. Кад се x_0 налази између x' и x^{IV}, онда n два пута мења свој предзнак у току периоде. Кретање има наизменични карактер. Кад се x_0 налази ван интервала $x' \ldots x^{IV}$, онда n не мења знак, и кретање има једносмислен карактер.

Релативно обртање може бити периодично и стално у истом смислу. Узмимо фор. (6) § 4, 3.

$$(3) \quad \Gamma \sin u_1 \sin u \sin \vartheta = P s \sin u - \kappa \sin^2 u =$$
$$= \frac{\kappa}{2A} [\mu (-b_0 x^2 + 2b_1 x_0 x - \overline{\Gamma}) - 2A \sin^2 u]$$

Одавде по фор. (10) § 5, 3

$$(4) \quad -\Gamma \sin u_1 \sin u \sin \vartheta = \frac{\kappa}{4A} (\phi' + \phi_1')$$

Већ смо казали у § 5, 6, да за граничне положаје x' и x^{IV} угао ϑ' износи о или $\pm\pi$. Карактер кретања одређује се тиме, колико пута $\cos \vartheta'$ мења знак у току полупериоде. Ако $\cos \vartheta'$ мења знак један пут, кретање има једносмислен карактер, ако мења знак два пута или ни једанпут — онда има периодичан карактер. Стога по фор. (4) и по § 5, 51 добијамо следећи једноставни услов: кретање је периодично, кад функција ϕ' има за граничне вредности $u = -\frac{u_0}{2}$ и $u = -\frac{u_0}{2} + \omega'$ један исти знак, и једносмислено у супротном случају.

Курбе на непокретној сфери.

Курба, коју описује тачка M на непокретној сфери, одређена је фор. (5) § 5, 31. Овде морамо разликовати иста три случаја, као и за курбе на покретној сфери. Користећи се фор. (19) и (20) § 5, 3, можемо написати фор. (10) § 4, 5 на следећи начин:

$$(5) \quad 2iv\,dv_1 = \frac{\Gamma \mu' \kappa (\phi_1' \phi + \phi_1 \phi')\,du}{2\,\theta(x) \sin^2 u}$$

Кад функција $\phi \phi_1' + \phi' \phi_1$ нема корена у интервалу $x' \ldots x^{IV}$ (гл. § 5, 51), онда курба прима облик (A) (гл. слику 4), кад има један корен — облик (B) (гл. слику 5), најзад, кад има два корена, — облик (C) (гл. слике 6 и 7).

Облик курбе на покретној сфери и карактер релативног обртања око нормале n више или мање одређују облик курбе на непокретној сфери.

Сматрајући истовремено корене двеју једначина:

(6) $\quad \phi + \phi_1 = o \qquad \phi\,\phi_1\,\mu - 2A\sin^2 u\,(\phi + \phi_1) = \phi\,\phi_1{}' + \phi_1\,\phi' = o$

и користећи се условом периодичности и непериодичности мењања угла ϑ', лако ћемо према § 5, 51 доћи до следећег закључка :

I) Кретање периодично:

Курби (A) на покретној сфери одговарају курбе (A) и (C) на непокретној.

Курби (B) на покретној сфери одговара курба (B) на непокретној.

Курби (C) на покретној сфери одговарају курбе (A) и (C) на непокретној.

II) Кретање стално у истом смислу:

Курби (A) на покретној сфери одговара курба (B) на непокретној.

Курби (B) на покретној сфери одговарају курбе (A) и (C) на непокретној.

Курба (C) није могућа, то јест у случају курбе (C) на покретној сфери је могуће само периодично кретање.

Курбе на покретној и непокретној сфери су симетричне према подневцима, постављеним кроз тачке додира ових курба са граничним упоредницима.

Узмимо за почетак времена тренутак кад је $x = x'$. Онда је

$$u = -\frac{u_0}{2} + \frac{i\,v\,\kappa}{b_2}\,t$$

Заменимо u из овог израза у формули за v § 5, 21. Узевши у обзир да је $v = o$ за $t = o$, добићемо

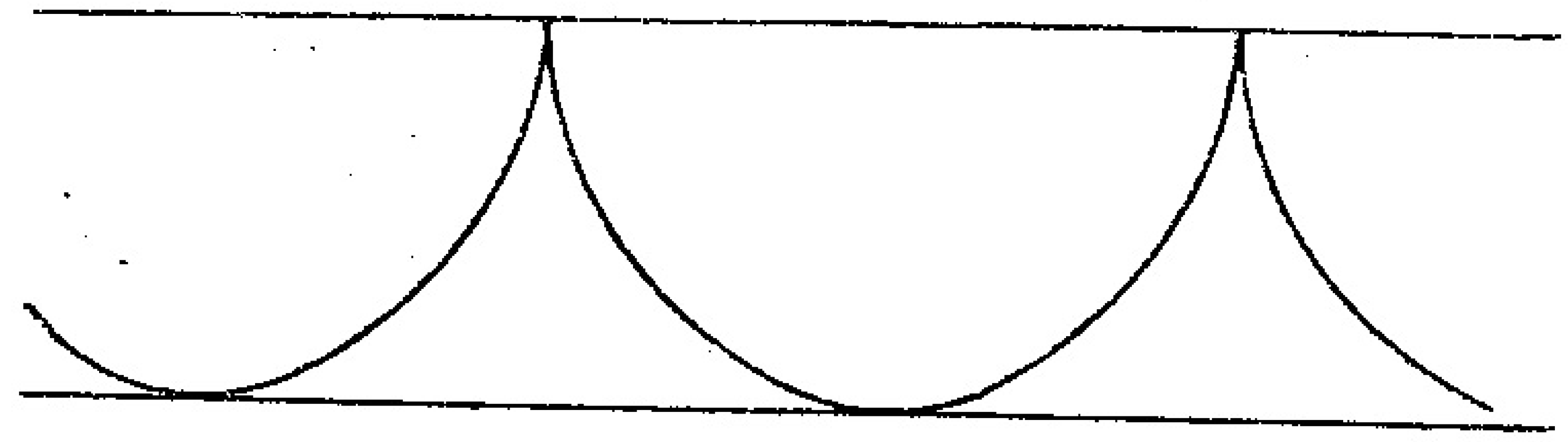
$$(7) \qquad e^{iv} = e^{ivD\frac{\kappa}{b_2}t} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{u_0}{2} + a + iv\frac{\kappa}{b_2}t\right)\,\sigma\left(\frac{u_0}{2} + b + iv\frac{\kappa}{b_2}t\right)}{\sigma\left(\frac{u_0}{2} + a - iv\frac{\kappa}{b_2}t\right)\,\sigma\left(\frac{u_0}{2} + b - iv\frac{\kappa}{b_2}t\right)}$$

Расмотримо два тренутка $+t$ и $-t$. Према горњој формули одговарајуће вредности дужине су $+v$ и $-v$. Пошто су за оба тренутка ширине исте, курба мора бити симетрична према подневку $v = o$. На исти начин користећи се фор. § 5, 31 за дужину v_1 доказујемо да је и курба на непокретној сфери симетрична.

У случају кад се курба на покретној сфери налази између упоредника x^{III} и x^{II} наведени доказ остаће готово исти.

У појединим случајевима може се десити да је $\Delta_v = o$ или $\Delta_{v_1} = o$ т. ј. курбе на покретној и непокретној сфери могу се затворити. Услови за то могу се наћи применом Hadamard-ове методе, наведене у чланку Bulletin des Sciences mathematiques. p. 228 I partie 1895.

(D$_1$)



Слика 8.

Примедба. Слике 4 — 12.

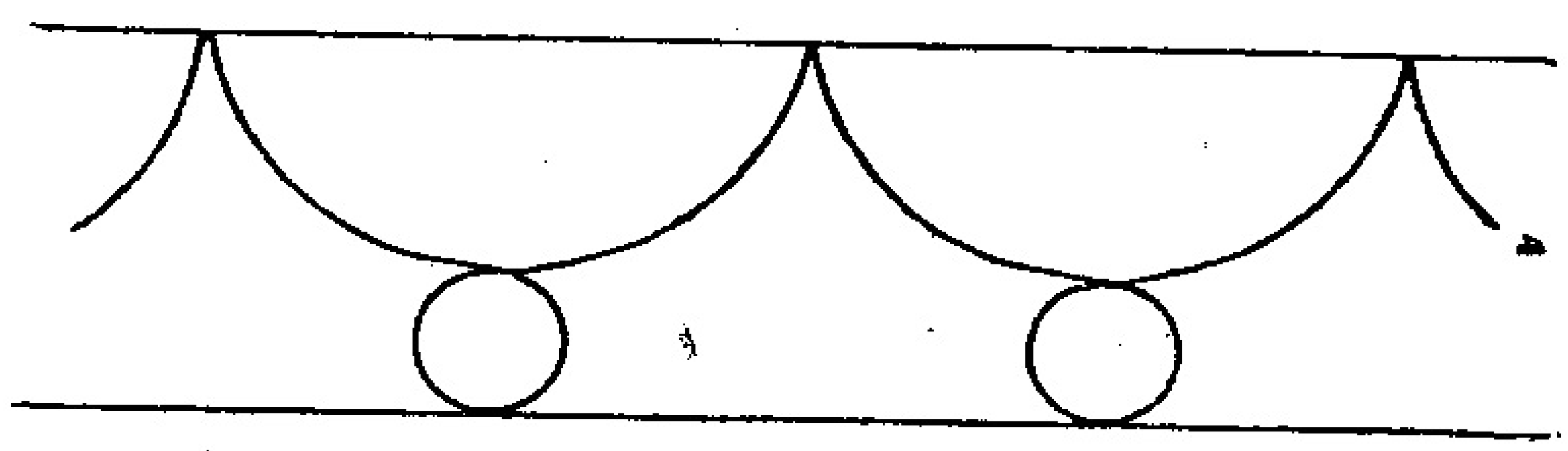
Слике 4—10 дају Меркаторову пројекцију путање тачке М. За слике (11) и (12) искоришћена је стереографска пројекција.

§ 5, 8. Специјални случајеви кретања.

Расмотримо сада специјалне случајеве кретања, кад се једни од корена бинома $h'^2 - (x - x_0)^2$ и $1 - x^2$ поклапају са граничним тачкама x' и x^{IV}.

I) Први случај: један од корена бинома $h'^2 - (x - x_0)^2$ поклапа се са граничном тачком. Може се десити: 1) да се већи корен поклапа са x' 2) да се мањи корен поклапа са x^{IV} 3) да

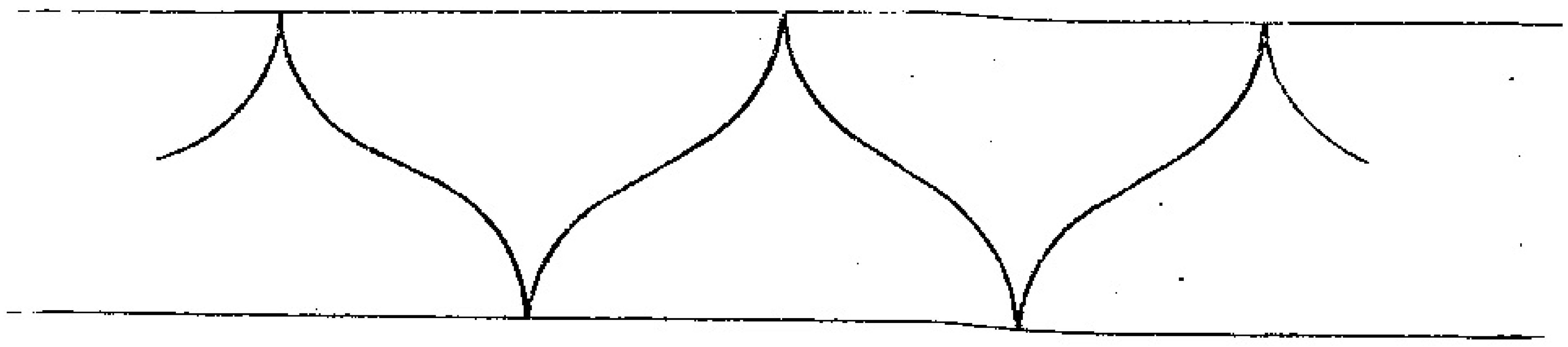
(D$_2$)



Слика 9.

се већи корен поклапа са x', а мањи са x^{IV}. Нека се већи корен поклапа са x'. Из фор. (13) § 4, 4 излази, да је x' корен функције $-b_0 x^2 + 2b_1 x_0 x - \overline{\Gamma}$. Одавде за граничну тачку x' добијамо $\phi + \phi_1 = 2\phi = 2\phi_1 = o$ или по фор. (2) § 5,7 $\frac{dv}{du} = o$. Осим тога је по фор. (2) § 5, 22 $\psi = o$ или по фор. (6) § 5, 22 $s = o$ $\tau = o$. Курба на покретној сфери има облик D 1) или 2) према томе, да ли се други корен $\phi + \phi_1$ налази у интервалу $x' .. x^{IV}$ (§ 5, 51) или се не налази. (гл. слике 8 и 9). Курба има повратну тачку у граничној тачци x'. У случајевима (2) и (3) размишљање ће остати исто. На слици 10 имамо курбу на покретној сфери за случај (3). Она има две повратне тачке у граничним тачкама (гл. слику 10).

(D₃)

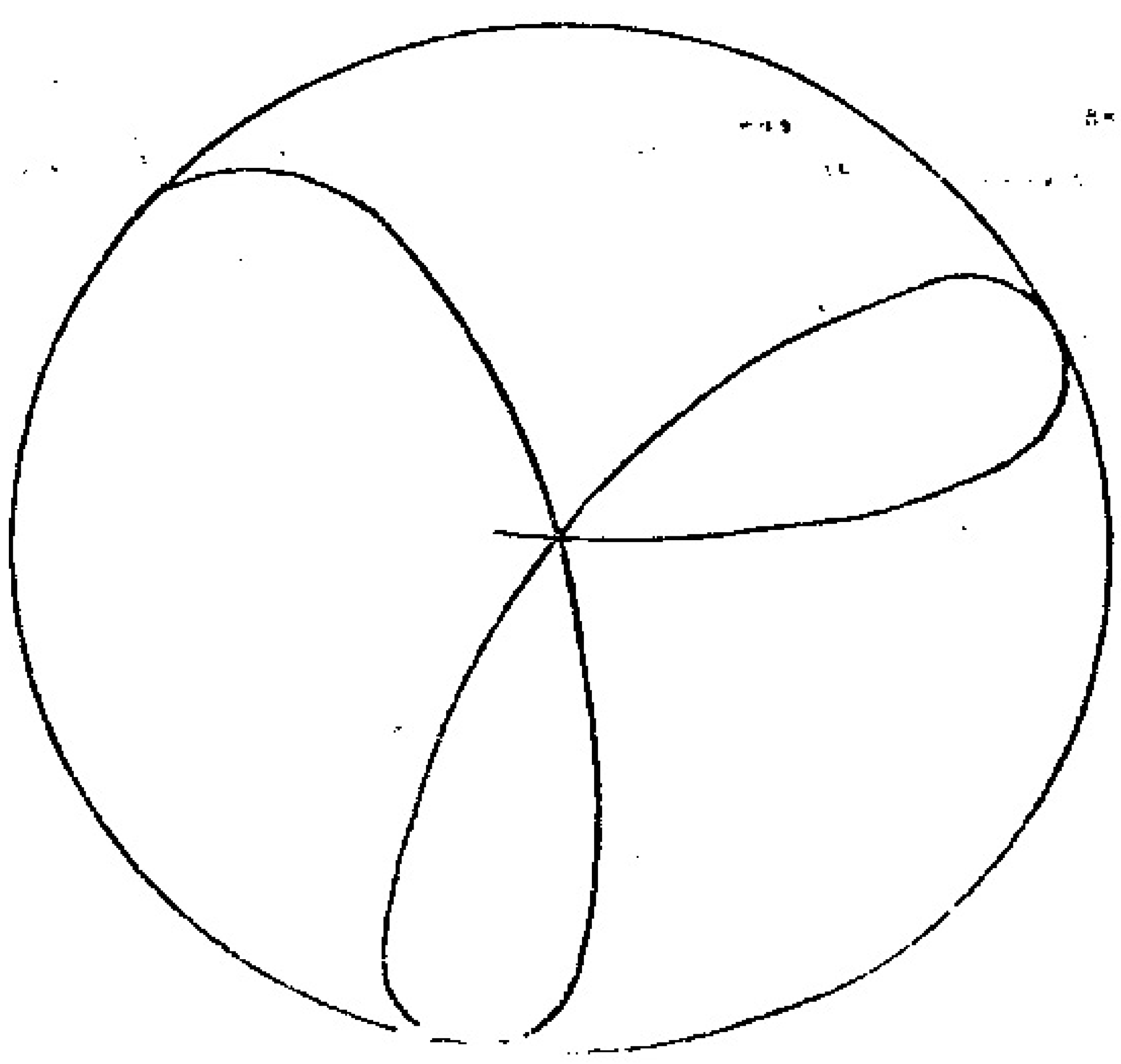


Слика 10.

Повратним тачкама на покретној сфери одговарају повратне тачке на непокретној сфери. Заиста, повратним тачкама на покретној сфери одговарају једначине: $\phi + \phi_1 = o$ $\phi = \phi_1 = o$ $s = \tau = o$ или друкчије $\phi\phi_1' + \phi_1\phi' = o$. Одавде по фор. (5) § 5, 7 $\frac{dv_1}{du} = o$, то јест ово је повратна тачка.

II) Други случај: један се од корена бинома $1 - x^2$ поклапа са граничном тачком. Претпоставимо, да је $x' = +1$. Онда по

(E₁)



Слика 11.

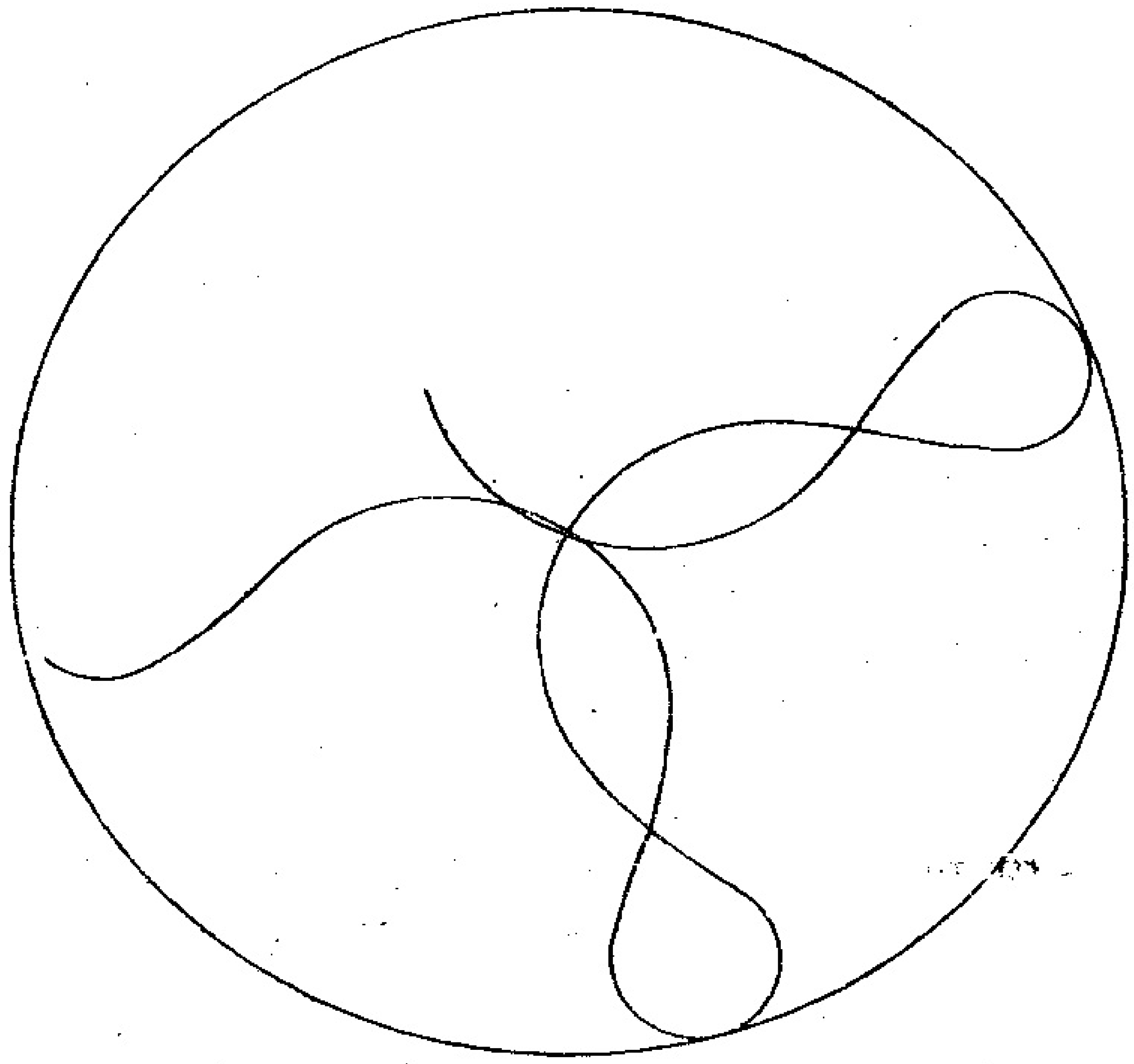
фор. (10) § 5, 2 за ову тачку имаћемо $\phi + \phi_1 = 2\phi = 2\phi_1 = o$. Размера $\frac{\phi}{\phi_1}$ прима неодређени облик $\frac{0}{0}$. Уништавајући неодређеност налазимо:

$$(1) \quad \left(\frac{\phi}{\phi_1}\right)_{u = -\frac{u_0}{2} = a} = \left(\frac{d}{du}\phi : \frac{d}{du}\phi_1\right)_{u = -\frac{u_0}{2} = a} = -1$$

Одавде је по фор. (6) § 5, 22 $s=o$ $\tau \neq o$. Код пола $x'=+1$ курба има на покретној сфери облик E 1) или 2) према томе, да ли се други корен функције $\phi+\phi_1$ налази у интервалу $x' \ldots x^{IV}$ (§ 5, 51) или се не налази (гл. слике 11 и 12).

Курба на непокретној сфери, која одговара овоме случају, нема никаквих особина. Збиља, по фор. (5) § 5, 7 користећи се

(E₂)



Слика 12.

(9) § 5, 3 и уништавајући неодређеност, налазимо да је за $u=-\frac{u_0}{2}$ $\frac{dv_1}{du} \neq o$. С друге стране по фор. (1) § 4, 5

$$(2) \quad \Gamma \sin u_1 \frac{du_1}{du} = \kappa \mu' \sin u \frac{du}{du}$$

Одавде за граничну тачку, где је $\sin u = o$, добијемо $\frac{du_1}{du} = o$.

Слика ће остати иста, ако се гранична тачка поклапа са полом -1. Најзад, ако је $x'=+1$ и $x^{IV}=-1$, резултати поново остају исти.

ГЛАВА VI

СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ КРЕТАЊА.

§ 6, 1. Константе s_0, n_0 и x'. Карактеристична курба трећег степена.

Три произвољне константе x_0, $2h$ и Γ или x_0, h', $\overline{\Gamma}$, које одређују карактер кретања, и којима смо се до сада користили, немају никаквог непосредног геометријског смисла (§ 5, 4). Ако хоћемо да расправљамо о геометријској страни кретања, морамо увести нове произвољне константе, које задовољавају овај захтев. За ове нове константе узмимо x', косинус ширине једног од граничних упоредника, и угаоне брзине s_0 и n_0 за тренутак времена $t = o$, то јест кад је $x = x'$ према § 5, 5. Из формула (4), (7) и (12) § 4, 4 излазе следеће једначине, које вежу старе константе x_0, $\overline{\Gamma}$ и h' и нове:

$$(1) \quad An_0 = -\mu\kappa(x' - x_0)$$

$$(2) \quad b_2 s_0 \sqrt{1 - x'^2} = \mu\kappa(-b_0 x'^2 + 2b_1 x_0 x' - \overline{\Gamma})$$

$$(3) \quad 2b_2(h'^2 - \overline{x' - x_0}^2)(1 - x'^2) - (-b_0 x'^2 + 2b_1 x_0 x' - \overline{\Gamma})^2 = o$$

Нека константи x_0 одговара константа n_0, константи $\overline{\Gamma}$... константа s_0, а константи h'... константа x'.

Помоћу једначине (3) можемо из израза

$$(4) \quad X = 2b_2(h'^2 - \overline{x - x_0}^2)(1 - x^2) - (-b_0 x^2 + 2b_1 x_0 x - \overline{\Gamma})^2$$

избацити константу h'^2 и заменити је константом x'. Формулу (4) напишимо у следећем облику:

$$\frac{X}{1 - x^2} = 2b_2[h'^2 - (x - x_0)^2] - \frac{-b_0 x^2 + 2b_1 x_0 x - \overline{\Gamma}}{1 - x^2}$$

Поделимо фор. (3) са $1 - x'^2$ и одузмимо од овог израза. После низа упрошћења налазимо:

(5) $X(1-x'^2)=(x'-x)Y$ где је

(6) $Y=2b_2(x+x'-2x_0)(1-x^2)(1-x'^2)+[-b_0(x+x')+$
$+2b_1x_0]\cdot[-b_0(x^2+x'^2)+2b_1x_0(x+x')-2\bar{\Gamma}]+$
$+(b_0xx'-\bar{\Gamma})[4b_1xx'x_0-(x+x')(b_0xx'+\bar{\Gamma})]$

Претпоставивши, да је један од корена x' једначине четвртог степена $X=o$ познат, свели смо налажење трију других корена x^{IV}, x^{III} и x^{II} на решење кубичне једначине $Y=o$. На тај начин увођење константе x' доноси нам двоструку корист. Положај другог граничног упоредника, чији је косинус ширине x^{IV} корен једначине $Y=o$, зависи од две произвољне константе s_0 и n_0 или $\bar{\Gamma}$ и x_0. Нађимо, како се мења положај овог упоредника због мењања s_0 и n_0.

Узмимо Декартов координатни систем и на апсцисну осовину преносимо вредности x, а на ординатну — вредности $\bar{\Gamma}$. Онда ће нам једначина $Y=o$, у којој ћемо претпостављати да је x_0, то јест n_0, стална количина, дати неку курбу трећег степена.

Израз (6) можемо представити у облику

(7) $Y=\bar{\Gamma}^2(x+x')-2\bar{\Gamma}[2x_0b_1(1+xx')-b_0(x+x')]+Y_1$ где је

(8) $Y_1=2b_2(x+x'-2x_0)(1-x^2)(1-x'^2)+$
$+(-b_0\overline{x+x'}+2b_1x_0)\cdot[-b_0(x^2+x'^2)+2b_1x_0(x+x')]+$
$+b_0xx'[4b_1xx'x_0-b_0xx'(x+x')]$

Решимо једначину $Y=o$ те нађемо

(9) $\bar{\Gamma}=\dfrac{2x_0b_1(1+xx')-b_0(x+x')\pm\sqrt{U}}{x+x'}$ где је

(10) $U=[2x_0b_1(1+xx')-b_0(x+x')]^2-Y_1(x+x')$

Лако је показати, да је

(11) $U=(1-x'^2)(1-x^2)[(x+x')^2(b_0^2-2b_2)-$
$-4(x+x')(b_1b_0-b_2)x_0+4x_0^2b_1^2]$

Дискриминанта $\triangle$ квадратне форме, која се налази у средњим заградама, негативна је. И збиља је:

(12) $\triangle=(b_1b_0-b_2)^2-b_1^2(b_0^2-2b_2)=b_2(b_2-2b_0b_1+2b_1^2)<o$.

На тај начин квадратна форма је увек позитивна. Према томе за $x^2<1$ је $U>O$, а за $x^2>1\ldots U<O$. Пошто је $\bar{\Gamma}$ увек стварно, одавде излази значајна последица:

Стварни корени једначине $X=o$ или једначине $Y=o$ налазе се између граница $+1$ и -1.

Курба трећег степена (9) састоји се из једне гране, која лежи између правих $x = +1$ и $x = -1$, додирује их у двема тачкама и пролази кроз тачку $\bar{\Gamma} = o$ $x = -x'$. Права $x = -x'$ је асимптота ове курбе.

Претпоставивши у једначини $Y = o$, да је $\bar{\Gamma}$ константно, а x_0 променљиво, добићемо другу курбу трећег степена. Да бисмо одредили њен положај, нађимо x_0 из једначине $Y = o$. Израз (6) можемо написати у облику

$$
\begin{aligned}
(13)\quad Y = {} & 4 b_1^2 (x + x') x_0^2 - 4 x_0 [b_2 (1 - x^2)(1 - x'^2) + \\
& + b_0 b_1 (x^2 + x'^2 + x x' - x^2 x'^2) + \bar{\Gamma} b_1 (1 + x x')] + \\
& + (x + x') [2 b_2 (1 - x^2)(1 - x'^2) + b_0^2 (x^2 + x'^2 - x^2 x'^2) + \\
& + 2 \bar{\Gamma} b_0 + \bar{\Gamma}^2]
\end{aligned}
$$

Решимо ли једначину $Y = o$, имаћемо

$$
\begin{aligned}
(14)\quad x_0 = {} & \frac{b_2 (1 - x^2)(1 - x'^2) + b_0 b_1 (x^2 + x'^2 + x x' - x^2 x'^2)}{2 b_1^2 (x + x')} + \\
& + \frac{\bar{\Gamma} b_1 (1 + x x') \pm \sqrt{V}}{2 b_1^2 (x + x')}
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
(15)\quad V = {} & [(1 - x^2)(1 - x'^2) b_2 + b_0 b_1 (x^2 + x'^2 + x x' - x^2 x'^2) + \\
& + \bar{\Gamma} b_1 (1 + x x')]^2 - b_1^2 (x + x')^2 [2 b_2 (1 - x^2)(1 - x'^2) + \\
& + b_0^2 (x^2 + x'^2 - x^2 x'^2) + 2 \bar{\Gamma} b_0 + \bar{\Gamma}^2]
\end{aligned}
$$

Овај израз можемо представити у облику

$$
\begin{aligned}
(16)\quad V = {} & (1 - x^2)(1 - x'^2) [(\bar{\Gamma} b_1 + b_2 - b_1 b_0 x x' + b_2 x x')^2 - \\
& - \triangle (x + x')^2]
\end{aligned}
$$

где је $\triangle$ одређено формулом (12). Израз у средњим заградама је увек позитиван. Одавде излази, да је $V > o$ за $x^2 < 1$ и $V < o$ за $x^2 > 1$. Пошто је x_0 стварно, поново долазимо до закључка, да се стварни корени једначине $X = o$, или једначине $Y = o$, налазе између граница $+1$ и -1.

Курба трећег степена (14) састоји се из једне гране, која лежи између правих $+1$ и -1 и додирује их у двема тачкама. Она пролази кроз тачку $x = -x'$ $x_0 = o$ и асимптотички се приближује правој $x = -x'$.

§ 6, 2. Приближно израчунавање кретања.

У глави V дато је решење нашег проблема у општем случају. Ово решење се своди на елиптичке функције, које се у неким специјалним случајевима могу изродити у елементарне функције. Онда се наш проблем решава елементарним путем помоћу приближних формула, које ћемо сад извести. При томе нужно је увек обраћати пажњу на величину погрешке, јер је примењивање ових формула тек онда могуће, кад ова погрешка није велика.

Узмимо фор. (21) § 4, 4

$$(1)\quad \frac{\kappa}{b_2}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

Нека су x', x^{II}, x^{III} и x^{VI} корени једначине $X = o$. Онда је по фор. (15) и (19) § 4, 4

$$(2)\quad X = -\nu^2 (x - x')(x - x^{II})(x - x^{III})(x - x^{IV})$$

Разликоваћемо два случаја: 1) кад су сви корени стварни и 2) кад су два корена стварна и два имагинарна.

Случај позитивне дискриминанте.

Као и у глави V претпоставимо, да је $x' > x^{IV} > x^{III} > x^{II}$ и да се у току кретања x налази у интервалу $x' \ldots x^{IV}$. Време се по формули (1) одређује квадратуром

$$(3)\quad \frac{\kappa\nu}{b_2}\cdot t = \int_{x^{IV}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x' - x)(x - x^{IV})(x - x^{III})(x - x^{II})}}$$

Према нашем услову имаћемо следеће неједначине:

$$(4)\quad \begin{array}{l} x' - x^{III} > x - x^{III} > x^{IV} - x^{III} \\ x' - x^{II} > x - x^{II} > x^{IV} - x^{II} \end{array}$$

Из фор. (3) и (4) излазе неједначине:

$$(5)\quad \frac{1}{\sqrt{(x' - x^{II})(x' - x^{III})}} \int_{x^{IV}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x' - x)(x - x^{IV})}} < \frac{\kappa\nu t}{b_2} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{(x^{IV} - x^{II})(x^{IV} - x^{III})}} \int_{x^{IV}}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x' - x)(x - x^{IV})}}$$

Обележимо

$$(6)\quad x' + x^{IV} = 2x^0 \qquad x' - x^{IV} = 2\epsilon \qquad x - x^0 = \delta$$

Тада је

$$(7)\quad x-x^{IV}=\epsilon+\delta \quad x'-x=\epsilon-\delta \quad \text{и}$$

$$(8)\quad \int_{x^{IV}}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(x'-x)(x-x^{IV})}}=\int_{-\epsilon}^{\delta}\frac{d\delta}{\sqrt{\epsilon^2-\delta^2}}=\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)+\frac{\pi}{2}$$

Одавде по фор. (5) добићемо

$$(9)\quad \frac{1}{\sqrt{(x'-x^{II})(x'-x^{III})}}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)<\frac{\kappa\nu}{b_2}(t-t_0)<$$
$$<\frac{1}{\sqrt{(x^{IV}-x^{II})(x^{IV}-x^{III})}}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)$$

где је $t_0=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{b_2}{\kappa\nu}$. Рачунаћемо време од тренутка, кад је $x=x^0$. Онда можемо заменити разлику $t-t_0$ са t.

Нашли смо две границе, између којих се мора налазити време t. Заменимо ли у формули (9) $\sqrt{(x'-x^{II})(x'-x^{III})}$ и $\sqrt{(x^{IV}-x^{II})(x^{IV}-x^{III})}$ средњом величином $\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}$, добићемо

$$(10)\quad t=\frac{b_2}{\kappa\nu}\frac{1}{\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)$$

Релативну погрешку θ у фор. (10) налазимо, кад поделимо разлику граница (9) нижом границом. На тај начин имаћемо:

$$\theta=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{(x^{IV}-x^{II})(x^{IV}-x^{III})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x'-x^{II})(x'-x^{III})}}}{\dfrac{1}{\sqrt{(x'-x^{II})(x'-x^{III})}}} \quad \text{или}$$

$$(11)\quad \theta=\sqrt{\frac{(x'-x^{II})(x'-x^{III})}{(x^{IV}-x^{II})(x^{IV}-x^{III})}}-1$$

Користећи се тригонометријским функцијама, можемо преписати фор. (10) у облику

$$(12)\quad \delta=\epsilon\sin\left[\frac{\kappa\nu}{b_2}\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}\cdot t\right] \quad \text{или}$$

$$(13)\quad x=x^0+\epsilon\sin\left[\frac{\kappa\nu}{b_2}\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}\cdot t\right]$$

Добивене формуле можемо примењивати тек онда, кад је величина погрешке θ мала, то јест према фор. (11), кад се x' мало разликује од x^{IV}. У идућим параграфима третираћемо три специјална случаја, кад су задовољени ови услови, наиме: 1) регуларну прецесију и пертурбационо кретање 2) псевдорегуларну прецесију и 3) стационарно кретање и пертурбационо кретање.

Формула (13) нам даје приближну везу између x и t. Изведемо још формулу, која даје приближну везу између v и t. Узмимо фор. (24) § 4, 4

$$(14) \qquad \dot{v} = \frac{\kappa}{b_2} \varphi(x)$$

или по фор. (6)

$$(15) \qquad \dot{v} = \frac{\kappa}{b_2} \varphi(x^0 + \delta)$$

Развијемо ли функцију $\varphi(x^0 + \delta)$ у ред и занемаримо квадрат δ, добићемо:

$$(16) \qquad \varphi(x^0 + \delta) = \varphi(x^0) + \varphi'(x^0) \cdot \delta$$

где је $\varphi'(x)$ извод од $\varphi(x)$, то јест

$$(17) \qquad \varphi'(x^0) = 2 \frac{x_0 b_1 (1 + x^{02}) - x^0 (\Gamma + b_0)}{(1 - x^{02})^2}$$

Супституирамо ли за δ вредност (12), добијамо по фор. (14):

$$(18) \qquad \dot{v} = \frac{\kappa}{b_2} \varphi(x^0) + \epsilon \frac{\kappa}{b_2} \varphi'(x^0) \sin\left[\frac{\kappa\nu}{b_2} \sqrt{(x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III})} \cdot t\right]$$

Интегришимо овај израз

$$(19) \qquad v = \frac{\kappa}{b_2} \varphi(x^0)\, t -$$

$$- \epsilon \frac{\varphi'(x^0)}{\nu \sqrt{(x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III})}} \cos\left[\frac{\kappa\nu}{b_2} \sqrt{(x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III})} \cdot t\right]$$

Ово је приближна зависност између v и t

На сличан начин можемо извести приближну зависност између v_1 и t. Узмимо фор. (10) § 4, 5, али написану у облику

$$(20) \qquad \dot{v}_1 = \frac{\Gamma \mu' \kappa^2 F_1(x)}{2 A b_2 \theta(x)}$$

Развијмо је у ред, као и у прећашњем случају, занемаривши квадрат δ, и интегришимо

$$(21)\quad v_1 = \frac{\Gamma\mu'\kappa^2 F_1(x^0)}{2\,A\,b_2\,\theta(x^0)} -$$

$$-\frac{\epsilon\Gamma\mu'\kappa}{2A\nu\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}}\cdot\frac{d}{dx^0}\,\frac{F_1(x^0)}{\theta(x^0)}\cdot\cos\left[\frac{\kappa\nu}{b_2}\sqrt{(x^0-x^{II})\,(x^0-x^{III})}\,.\,t\right]$$

Формуле (19) и (20) можемо примењивати тек онда, кад се x' толико мало разликује од x^{IV}, да се δ^2 може занемарити. Осим тога мора се x^0 разликовати од ± 1. Формуле (13), (19) и (21) дају решење нашег проблема у приближноме облику.

Случај негативне дискриминанте.

Нека су x' и x^{IV} стварни корени $(x' > x^{IV})$, и нека је

$$x^{II} = \alpha + i\beta \qquad x^{III} = \alpha - i\beta$$

Онда је:

$$(22)\quad (x-x^{II})(x-x^{III}) = (x-\alpha)^2+\beta^2 \qquad (x'-x^{II})(x'-x^{III}) = (x'-\alpha)^2+\beta$$
$$(x^{IV}-x^{II})(x^{IV}-x^{III}) = (x^{IV}-\alpha)^2+\beta^2$$

Према нашем услову имаћемо неједначину, ако претпоставимо, да је $\alpha < x^{IV} < x'$:

$$(x'-x^{II})(x'-x^{III}) > (x-x^{II})(x-x^{III}) > (x^{IV}-x^{II})(x^{IV}-x^{III})$$

Одавде, као и у пређашњем случају, добијамо поново формуле (13), (19) и (21).

Исто налазимо, кад претпоставимо да је $\alpha > x' > x^{IV}$.

Расмотримо најзад случај, кад је $x' > \alpha > x^{IV}$. Претпоставимо, да је $x'-\alpha > \alpha - x^{IV}$. Користећи се неједначинама:

$$(23)\quad (x'-x^{II})(x'-x^{III}) > (x-x^{II})(x-x^{III}) > (\alpha-x^{II})(\alpha-x^{III})$$

и размишљајући као и раније, поново добијамо једначину (13). За величину релативне погрешке имаћемо

$$(24)\quad \theta = \sqrt{\frac{(x'-x^{II})(x'-x^{III})}{(\alpha-x^{II})(\alpha-x^{III})}} - 1$$

Кад x' тежи x^{IV}, α такође тежи x', а погрешка θ постаје бесконачно-малом величином.

§ 6, 3. Регуларна прецесија. Пертурбационо кретање.

У овом параграфу ћемо расправљати питање о могућности регуларне прецесије и о њеној стабилности у случају котрљања гироскопске лопте по сфери.

Регуларну прецесију, ако је могуће, добијамо, као посебни случај кретања, претпоставивши, да се поклапају обадва упоредника x' и x^{IV}, између којих се налази путања тачке M. Аналитички ово можемо изразити условом, да једначина $X = o$ има између $+1$ и -1 двоструки корен, или друкчије, да једначина $Y = o$ фор. (6) § 6, 1 има корен $x = x'$, то јест, да је

$$(1) \quad Y(x') = 4\,b_2(x' - x_0)(1 - x'^2)^2 + \\ + 4(-b_0 x' + b_1 x_0)(-b_0 x'^2 + 2 b_1 x' x_0 - \overline{\Gamma}) + \\ + 2(b_0 x'^2 - \overline{\Gamma})(2 b_1 x_0 x'^2 - b_0 x'^3 - \overline{\Gamma} x') = o$$

или

$$(2) \quad 2\,b_2(x' - x_0)(1 - x'^2)^2 + (-b_0 x'^2 + 2 b_1 x_0 x' - \\ - \overline{\Gamma}) \cdot [2(-b_0 x' + b_1 x_0) + x'(b_0 x'^2 - \overline{\Gamma})] = o$$

За пречишћавање могућности регуларне прецесије узмимо једначине (20), (24) § 4, 4 и (10) § 4, 5

$$(3) \quad \dot{x} = \frac{\kappa}{b_2}\sqrt{X} \qquad \dot{v} = \frac{\kappa}{b_2}\varphi(x) \qquad \dot{v}_1 = \frac{\Gamma \mu' \kappa^2 F_1(x)}{2\,b_2 A\,\theta(x)}$$

Ове једначине, кад је задовољен услов (2), имају посебно решење

$$(4) \quad x = x' = x^{IV} = \text{const.} \qquad \dot{v} = \dot{v}_0 = \frac{\kappa}{b_2}\varphi(x') = \text{const.}$$

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_{10} = \frac{\Gamma \mu \kappa^2 F_1(x')}{2\,b_2 A\,\theta(x')} = \text{const.}$$

Одавде је

$$(5) \quad \begin{array}{lll} v = \dot{v}_0 t + v_0 & v_1 = \dot{v}_{10} t + v_{10} & \tau = o \ \text{(по фор. (9) § 4, 2)} \\ s = s_0 \ \text{(по фор. (8) § 4, 2)} & & n = n_0 \ \text{(по фор. (1) § 4, 4)} \\ u_1 = u_{10} = \text{const. (по фор. (8) § 4, 3)} & & \vartheta = 90^0 \ \text{(по фор. (7) § 4, 3)} \end{array}$$

Добивено посебно решење истоветно је са већ расмотреним, на крају IV главе, специјалним случајем кретања. Лако је видети, да овај случај одговара регуларној прецесији.

Покажимо, да је услов (6) § 4, 6 истоветан са условом (2). Помножимо фор. (6) § 4, 6 са $\sin^3 u_0$ и заменимо $\dot{v}_0$ са s_0. Тада ћемо добити:

$$(6) \quad P\,s_0 \sin u_0 \left(n_0 \sin^2 u_0 + \cos u_0 \frac{s_0 \sin u_0}{\mu}\right) - \mu' \sin^2 u_0 A\,n_0 \frac{s_0 \sin u_0}{\mu} = \\ = \kappa \sin^2 u_0 (s_0 \sin u_0 \cos u_0 + n_0 \sin^2 u_0)$$

или по формули (7) § 4, 4

$$\frac{\mu\kappa}{2A}\cdot(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})\cdot\left[-(1-x'^2)\cdot\frac{\kappa\mu(x'-x_0)}{A}+\right.$$

$$\left.+\kappa x'\cdot\frac{(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})}{2PA}\right]+$$

$$+\mu'(1-x'^2)\mu\kappa(x'-x_0)\cdot\frac{\kappa(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})}{2PA}=$$

$$=\kappa(1-x'^2)\left[\frac{x'\kappa\mu(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})}{2PA}-\right.$$

$$\left.-(1-x'^2)\cdot\frac{\mu\kappa(x'-x_0)}{A}\right]$$

Друкчије можемо преписати

$$(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})\cdot[(1-x'^2)(x'-x_0)(2A\mu'-2P\mu)+$$

$$+x'(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})]=$$

$$=2A(1-x'^2)[x'(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})-$$

$$-2P(1-x'^2)(x'-x_0)]$$

Узевши у обзир, да је $2A\mu'-2P\mu=-2b_1$, имаћемо

$$(7)\quad (-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})\cdot[-2b_1(1-x'^2)(x'-x_0)+$$

$$+x'(-b_0x'^2+2b_1x_0x'-\overline{\Gamma})-2A(1-x'^2)x']=$$

$$=-2b_2(1-x'^2)^2(x'-x_0)$$

Овај услов је истоветан са условом (2). На тај начин видимо, да су заиста услови (2) и (6) § 4, 6 еквивалентни.

Доказавши могућност регуларне прецесије, узмимо у претрес пертурбационо кретање, које добијамо, кад дамо лопти бесконачно-мали удар, то јест кад бесконачно-мало променимо константе s_0, τ_0, n_0 или константе $\overline{\Gamma}$, x_0, x'. Овде се могу десити два случаја према томе, да ли је кретање стабилно или лабилно.

За регуларну прецесију је нужно, да се два од четири корена x', x^{II}, x^{III} и x^{IV} изједначе. Стабилност кретања зависи од тога, који се од ових корена поклапају. Расмотримо засебно случај позитивне и случај негативне дискриминанте и регуларну прецесију, као границу између ова два случаја.

Нека су сва четири корена x', x^{II}, x^{III} и x^{IV} стварна. Узмимо шему (2) § 5, 5. У току кретања, како смо видели, промењива величина x може варирати само у интервалу $x' \ldots x^{IV}$ или у интервалу $x^{II} \ldots x^{III}$. При континуирном мењању произвољних констаната h', x_0, $\overline{\Gamma}$ корени x', x^{II}, x^{III}, x^{IV} у општем случају мењају се континуирно. Стога, кад у процесу ових варијација x' постане једнако x^{IV} или x^{II} једнако x^{III}, онда одговарајућа регуларна прецесија има стабилни карактер. Збиља, нека је $x = x' = x^{IV}$. Ако сад бесконачно-мало пореметимо кретање, корени ће се x' и x^{IV}, задржавајући стварне вредности, бесконачно-мало разликовати од своје заједничке почетне вредности, а координата x остаће између њих. Кретање биће стабилно. Посве другу слику добијемо у случају подударности корена x^{IV} и x^{III}. Ако бесконачно-мало пореметимо одговарајућу регуларну прецесију $x = x^{IV} = x^{III}$, могу се десити два случаја: 1) или ће корени x^{IV} и x^{III} постати имагинарни, те ће координата x асцилирати у интервалу $x' \dots x^{II}$ 2) или ће корени x^{IV} и x^{III} остати стварни, те ће координата x осцилирати у једном од интервала $x' \dots x^{IV}$ или $x^{II} \dots x^{III}$. Обадва случаја одговарају лабилноме кретању.

Разгледајмо сад случај негативне дискриминанте. Нека су x' и x^{IV} стварни корени. Пореметимо бесконачно-мало кретање. Корени x' и x^{IV} добиће бесконачно-мали прираштај, задржавајући стварне вредности, а координата x почеће варирати између њих. Кретање ће имати стабилни карактер.

На тај начин, видимо, да, кад су сва четири корена стварни, кретање може бити и стабилно и лабилно. Кретање је увек стабилно, кад су два од четири корена x', x^{II}, x^{III}, x^{IV} имагинарни.

Изведимо аналитичке услове стабилности и лабилности кретања. Нека имамо регуларну прецесију $x = x' = x^{IV}$. Услов, да корен $x = x' = x^{IV}$ задовољава једначину $Y = 0$ (6) § 6, 1, даје нам формулу (1). Одузмимо ову формулу од израза (6) § 6, 1 за Y. Добићемо

$$Y = (x - x') \cdot Z \qquad \text{где је} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Z = {} & 2 b_2 (1 - x'^2) [1 - x^2 - 2 (x' - x_0) (x + x')] + \\ & + b_0^2 (x^2 + 2 x x' + 3 x'^2 - x'^2 x^2 - 2 x x'^3 - 2 x'^4) - \\ & - 4 b_1 b_0 x_0 (x'^2 x + x'^3 - x - 2 x') - \\ & - 4 \overline{\Gamma} b_1 x_0 x + 4 b_1^2 x_0^2 + 2 \overline{\Gamma} b_0 + \overline{\Gamma}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Квадратна једначина $Z = 0$ има два корена $x = x^{II}$ и $x = x^{III}$. Ако су ова два корена имагинарна, или ако су реална, али обадва истовремено већа или мања од $x' = x^{IV}$, онда је кретање стабилно. Ако се $x' = x^{IV}$ налази у интервалу између корена x^{II} и x^{III}, онда кретање има лабилни карактер. Узевши у обзир, да је $Z > o$ за $x = +\infty$, добићемо следећи услов стабилности кретања:

Ако супституирање $x = x'$ у изразу (9) даје позитиван број, кретање је стабилно; ако је резултат супституирања негативан, кретање је лабилно.

Другим речима, ако је $Z(x') > o$, онда је кретање стабилно; ако је $Z(x') < o$, онда је кретање лабилно. На тај начин, услов је стабилности према (9):

$$(10) \quad 2b_2(1-x'^2)(1-3x'^2+4x_0x')+b_0^2(6x'^2-5x'^4)-$$
$$-4b_1b_0x_0(2x'^3-3x')+4b_1^2x_0^2-4\overline{\Gamma}b_1x'x_0+2\overline{\Gamma}b_0+\overline{\Gamma}^2 > o.$$

Као пример разгледајмо случај, кад се тачка додира M креће по екватору, то јест, кад је $x' = x^{IV} = o$. Услов (2) добија облик

$$(11) \quad b_2 + b_1\overline{\Gamma} = o$$

а услов (10) облик

$$(12) \quad 2b_2 + 4b_1^2x_0^2 + 2\overline{\Gamma}b_0 + \overline{\Gamma}^2 > o$$

Супституирамо ли $\overline{\Gamma} = -\frac{b_2}{b_1}$, добијемо, да је кретање стабилно, кад је

$$(13) \quad x_0^2 > \frac{b_2(2b_0b_1 - 2b_1^2 - b_2)}{4b_1^4}$$

и лабилно, кад је

$$(14) \quad x_0^2 < \frac{b_2(2b_0b_1 - 2b_1^2 - b_2)}{4b_1^4}$$

Посматрајмо сад у појединостима пертурбационо кретање у случају, кад су задовољени услови стабилности. При томе можемо се користити приближним формулама § 6, 2. Заиста, пертурбационо кретање се у случају стабилности дешава између два бесконачно-блиска упоредника x' и x^{IV}. Дакле погрешка (11) § 6, 2, коју чинимо, користећи се приближнима формулама, биће бесконачно-мала. Пертурбационо кретање се карактерише елементима ϵ и x^0 по фор. (6) § 6, 2. Израчунамо ли ове елементе, налазимо без икакве тешкоће једначине пертурбационог кретања.

Разгледајмо два специјална случаја. Пре свега претпоставимо, да је удар, који је пореметио кретање, променио само брзине s_0 и n_0, не утичући на величину брзине $\tau = \tau_0 = o$. Обележимо прираштаје, које су добиле брзине s_0 и n_0, са Δs_0 и Δn_0.

Јасно је, да се у овом случају један од граничних упоредника поремећеног кретања подудара са упоредником $x = x'$. Косинус ширине, који одговара другом упореднику и који обележавамо са $x' + 2\epsilon$ према § 6, 2, добијамо, ако решимо једначину $Y = o$ (6) § 6, 1, у коју морамо супституирати нове вредности констаната x_0 и $\overline{\Gamma}$. Прираштаје Δx_0 и $\Delta \overline{\Gamma}$ ових констаната израчунавамо по фор. (1) и (2) § 6, 1. Полином Y развијамо у ред као функцију од $x_0 + \Delta x_0$, $\overline{\Gamma} + \Delta \overline{\Gamma}$ и $x' + 2\epsilon$. При томе могу се занемарити више потенције бесконачно-малих величина Δx_0, $\Delta \overline{\Gamma}$ и 2ϵ. На тај начин, добијамо

$$(15) \qquad Y(x' + 2\epsilon, x_0 + \Delta x_0, \overline{\Gamma} + \Delta \overline{\Gamma}) = 2\epsilon \frac{\partial Y}{\partial x'} + \Delta x_0 \frac{\partial Y}{\partial x_0} + \Delta \overline{\Gamma} \frac{\partial Y}{\partial \overline{\Gamma}}$$

јер је $\qquad Y(x', x_0, \overline{\Gamma}) = o$

Једначина $\quad Y(x' + 2\epsilon, x_0 + \Delta x_0, \overline{\Gamma} + \Delta \overline{\Gamma}) = o \qquad$ даје

$$(16) \qquad 2\epsilon = -\frac{\Delta x_0 \dfrac{\partial Y}{\partial x_0} + \Delta \overline{\Gamma} \dfrac{\partial Y}{\partial \overline{\Gamma}}}{\dfrac{\partial Y}{\partial x'}}$$

Косинус ширине средњег упоредника x^0 одређујемо по формули

$$(17) \qquad x^0 = x' + \epsilon.$$

Кад знамо Δs_0 и Δn_0 налазимо ϵ и x^0 по формулама (16) и (17).

Претпоставимо сад, да је удар саопштио брзини $\tau = o$ прираштај $\Delta \tau_0$, не променивши s_0 и n_0. У овом случају се ни један од граничних упоредника неће поклапати са упоредником $x = x'$. Константе x_0 и $\overline{\Gamma}$ остају без промене, а константа h'^2 добиће прираштај $\Delta h'^2$.

Овај прираштај израчунавамо по формули

$$(18) \qquad \frac{b_2^2}{\mu^2 \kappa^2} \Delta \tau_0^2 (1 - x'^2) = (h'^2 + \Delta h'^2 - \overline{x' - x_0}^2)(1 - x'^2) - \\ - (-b_0 x'^2 + 2 b_1 x_0 x' - \overline{\Gamma})^2$$

За налажење граничних упоредника поремећеног кретања мораћемо решити једначину

$$(19) \qquad X(x, h'^2 + \Delta h'^2) = (h'^2 + \Delta h'^2 - \overline{x - x_0}^2)(1 - x^2) - \\ - (-b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \overline{\Gamma})^2 = o.$$

или, ако избацимо $h'^2 + \Delta h'^2$ помоћу формуле (18), једначину

$$(20) \quad -\frac{b_2^2}{\mu^2 \kappa^2} \triangle \tau_0^2 (1 - x^2) = \frac{1 - x^2}{1 - x'^2} \cdot (- b_0 x'^2 + 2 b_1 x_0 x' - \overline{\Gamma})^2 + $$
$$+ (1 - x^2)(x' + x - 2 x_0)(x' - x) - (- b_0 x^2 + 2 b_1 x_0 x - \overline{\Gamma})^2$$

Пошто десна страна ове једначине по формули (5) § 6, 1 мора имати корене $x = x' = x^{IV}$ $x = x^{II}$ $x = x^{III}$, можемо написати

$$(21) \quad \frac{b_2^2}{\mu^2 \kappa^2} \triangle \tau_0^2 (1 - x^2) = v^2 (x - x')^2 (x - x^{II})(x - x^{III})$$

Супституирамо ли $x = x' + \epsilon'$, налазимо:

$$(22) \quad \epsilon'^2 = \frac{b_2^2 \triangle \tau_0^2 [1 - (x' + \epsilon')^2]}{\mu^2 \kappa^2 v^2 (x^{II} - x' - \epsilon)(x^{III} - x' - \epsilon)}$$

Пошто су ϵ' и $\triangle \tau$ бесконачно-мале величине, добићемо, ако развијемо десну страну једначине (22) у ред, и ако се занемаре величине реда вишег од другог

$$(23) \quad \epsilon' = \pm \frac{b_2 \triangle \tau_0}{\mu \kappa v} \cdot \sqrt{\frac{1 - x'^2}{(x' - x^{II})(x' - x^{III})}}$$

На тај начин имаћемо за косинусе граничних упоредника изразе

$$(24) \quad x = x' + \epsilon' \quad \text{и} \quad x = x' - \epsilon'$$

где је ϵ' одређено формулом (23). Упоредник $x = x'$ биће средњи упоредник поремећеног кретања $(x' = x^0)$.

Расмотримо општи случај, кад удар мења величине свију брзина s_0, n_0, $\tau_0 = o$. Обележимо прираштаје ових брзина са $\triangle s_0$, $\triangle n_0$ и $\triangle \tau_0$. Прираштаје $\triangle \overline{\Gamma}$ и $\triangle x_0$ одредимо по формулама (1) и (2) § 6, 1, а прираштај $\triangle h'^2$ по формули

$$(25) \quad \frac{b_2^2}{\mu^2 \kappa^2} \triangle \tau_0^2 (1 - x'^2) = [(h'^2 + \triangle h'^2 - (x' - x_0 - \triangle x_0)^2](1 - x'^2) -$$
$$- [- b_0 x'^2 + 2 b_1 (x_0 + \triangle x_0) x' - (\overline{\Gamma} + \triangle \overline{\Gamma})]^2$$

За изналажење граничних упоредника поремећеног кретања мораћемо решити једначину

$$(26) \quad X(x, h'^2 + \triangle h'^2, x_0 + \triangle x_0, \overline{\Gamma} + \triangle \overline{\Gamma}) = o \qquad \text{или}$$
$$[h'^2 + \triangle h'^2 - (x - x_0 - \triangle x_0)^2](1 - x^2) -$$
$$- [- b_0 x^2 + 2 b_1 x (x_0 + \triangle x_0) - (\overline{\Gamma} + \triangle \overline{\Gamma})]^2 = o$$

На исти начин, као и у пређашњем случају, напишимо ову једначину у облику

$$(27)\quad \frac{b_2^2}{\kappa^2\mu^2}\triangle\tau_0^2(1-x^2)= \\ =\nu^2(x-x')(x-x'-2\epsilon)(x-x^{II}-\triangle x^{II})(x-x^{III}-\triangle x^{III})$$

Овде се 2ϵ одређује фор. (16), а са $\triangle x^{II}$ и $\triangle x^{III}$ су означени прираштаји, које добијају корени x^{II} и x^{III} у првоме специјалноме случају који смо расмотрили, то јест, кад је $\triangle\tau_0=0$. Супституирамо ли $x=x'+\epsilon+\epsilon''$, добићемо

$$(28)\quad \epsilon''^2-\epsilon^2=\frac{b_2^2\triangle\tau_0^2(1-x^2)}{\kappa^2\mu^2\nu^2(x-x^{II}-\triangle x^{II})(x-x^{III}-\triangle x^{III})}$$

или ако се занемаре величине трећег и виших редова

$$(29)\quad \epsilon''^2-\epsilon^2=\frac{b_2^2\triangle\tau_0^2(1-x'^2)}{\kappa^2\mu^2\nu^2(x'-x^{II})(x'-x^{III})}$$

Упоредимо ли фор. (29) и (23), налазимо зависност

$$(30)\quad \epsilon''^2=\epsilon'^2+\epsilon^2$$

Једначина (30) одређује ϵ''. За косинусе граничних упоредника добијемо израз

$$(31)\quad x=x'+\epsilon-\epsilon'' \quad и \quad x=x'+\epsilon+\epsilon''$$

а за средњи упоредник израз

$$(32)\quad x^0=x'+\epsilon$$

Формуле (30), (31) и (32) одређују елементе поремећеног кретања у општем случају. Супституирамо ли ове формуле у једначине (13), (19) и (21) § 6, 2, добијамо једначине пертубационог кретања у коначном облику. Путања тачке M на покретној лопти је одређена фор. (13) и (19).

Кад удар ишчезава, онда амплитуде треперења ϵ'' и $\frac{\epsilon''}{\nu}\frac{\varphi(x^0)}{\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}}$ теже нули, али периода треперења

$$(33)\quad \omega=\frac{b_2\pi}{\kappa\nu\sqrt{(x^0-x^{II})(x^0-x^{III})}}$$

тежи коначној граници. Ову границу израчунавамо узимајући у обзир, да је

$$\nu^2(x-x^{II})(x-x^{III})=\frac{Z(x)}{1-x'^2}$$

где је $Z(x)$ одређено формулом (9).

На тај начин добијамо

$$(34) \quad \omega = \frac{b_2 \pi \sqrt{1 - x'^2}}{\kappa \sqrt{Z(x')}}$$

У случају, кад је x' бесконачно блиско ± 1, не можемо се више користити за израчунавање v фор. (19) § 6, 2, јер онда $\varphi(x^0)$ и $\varphi'(x^0)$ добијају бесконачно-велике вредности. Мораћемо узети једначину (14) § 6, 2 и, користећи се формулом (13), наћи v, узевши квадратуру.

Једначине и елементе пертурбационог кретања можемо добити још и на други начин, користећи се следећом методом.*

Претпоставимо да је задовољен услов стабилности кретања, то јест да је $Z(x') > o$. За налажење једначина пертурбационог кретања заменимо у фор. (3)

$$x = x_1 + \triangle x \quad h'^2 = h_1'^2 + \delta h'^2 \quad \overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_1 + \delta \overline{\Gamma} \quad x_0 = x_{01} + \delta x_0$$

где су x_1, $h_1'^2$, $\overline{\Gamma}_1$, x_{01} константе, које одређују регуларну прецесију т. ј. задовољавају услове:

$$(35) \quad X(x_1, h_1'^2, \overline{\Gamma}_1, x_{01}) = o \qquad \frac{\partial X}{\partial x_1} = o$$

Једначина (3) прима облик

$$(36) \quad \left(\frac{d \triangle x}{dt}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{b_2^2} X(x_1 + \triangle x, h_1'^2 + \delta h'^2, \ldots)$$

Развијемо у ред десну страну ове једначине занемаривши бесконачно мале величине трећег реда.

$$(37) \quad \left(\frac{d \triangle x}{dt}\right)^2 = \frac{\kappa^2}{b_2^2} \left[\delta X + \triangle x \frac{\partial \delta X}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \triangle x^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2}\right]$$

где је

$$(38) \quad \delta X = X(x_1, h_1'^2 + \delta h'^2, \overline{\Gamma}_1 + \delta \overline{\Gamma}, x_{01} + \delta x_0)$$

Општи интеграл једначине (37) тражићемо у облику

(39) $\triangle x = \triangle x_1 + L \sin(pt + \alpha)$ где је α произвољна константа.

---

* Routh. Die Dynamik der Systeme starrer Körper. Band II. Kapital VI § 257. Leipzig. 1898.

Имаћемо

$$(40)\quad L^2 p^2 \cos^2 (pt+\alpha) - \frac{\kappa^2}{2 b_2^2} \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} \Big[L^2 \sin^2 (pt+\alpha) + + 2 L \triangle x_1 \sin (pt+\alpha) + \triangle x_1^2 \Big] - - \frac{\kappa^2}{b_2^2} \frac{\partial \delta X}{\partial x_1} \Big[\triangle x_1 + L \sin (pt+\alpha) \Big] - \frac{\kappa^2}{b_2^2} \delta X = o$$

За одређивање L, p, $\triangle x_1$ добијамо следеће формуле:

$$(41)\quad L^2 p^2 = -\frac{\kappa^2}{2 b_2^2} \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} L^2 \qquad p^2 = -\frac{\kappa^2}{2 b_2^2} \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2}$$

$$(42)\quad 2 p^2 \triangle x_1 L = \frac{\kappa^2}{b_2^2} \frac{\partial \delta X}{\partial x_1} \cdot L \qquad \triangle x_1 = \frac{1}{2 p^2} \frac{\kappa^2}{b_2^2} \frac{\partial \delta X}{\partial x_1}$$

$$(43)\quad p^2 (L^2 + \triangle x_1^2) - 2 p^2 \triangle x_1^2 = \frac{\kappa^2}{b_2^2} \delta X \qquad p^2 L^2 = \frac{\kappa^2}{b_2^2} \delta X + p^2 \triangle x_1^2$$

Пошто смо претпоставили да је $Z(x_1) > o$, морамо имати $\frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} < o$ т. ј. фор. (41) даје за p реалну вредност. Према (43) вредност L исто је реална, јер је $\delta X > o$.

Узевши у обзир да је

$$(44)\quad \delta X = \frac{b_2^2 \triangle \tau^2 \sin^2 u}{\mu^2 \kappa^2} = \frac{b_2^2 \triangle \tau^2 (1 - x_1^2)}{\mu^2 \kappa^2}$$

$$X = - \nu^2 (x - x_1)^2 (x - x^{II}) (x - x^{III})$$

лако можемо извести све формуле (11) — (33) овог § из формула (34), (39), (42), (43) и (41).

У горе наведеној дискусији ми смо изоставили случај, кад је

$$(45)\quad \frac{\partial Y}{\partial x'} = o \text{ или } Z(x') = o$$

У овоме случају потребна је једна дубља анализа, која ипак не представља тешкоће. Претпоставимо да је $x' = x^{IV} = x^{III} \neq x^{II}$. Обележимо ли $x' = x^{IV} = x^{III}$ са x_1 лако долазимо до ових услова:

Кад је у пертурбационом кретању

$$(46) \qquad x_1 \geqq x^{IV}$$

онда је кретање стабилно. Кад је у пертурбационом кретању

$$(47) \qquad x_1 \leqq x^{III}$$

кретање је лабилно.

На тај начин у овом случају нема ни апсолутне стабилности, нити апсолутне лабилности. Из фор. (46) и (47) можемо добити аналитичке услове, које морају задовољавати пертурбације произвољних констаната, да би кретање имало овај или онај карактер.

Да бисмо исцрпли све могуће случајеве, морамо још споменути случај кад је $x' = x^{IV} = x^{III} = x^{II}$. Кретање је у овом случају увек стабилно.

§ 6, 4. Псевдорегуларна прецесија.

Псевдорегуларну прецесију, ако је могуће, добијамо, кад претпоставимо, да је угаона брзина гироскопа око осовине симетрије величина веома велика према брзинама s_0 и n_0. Према томе нека су разломци $\frac{s_0}{\kappa}$ и $\frac{n_0}{\kappa}$ бесконачно-мале величине првог реда. Користећи се формулама (1) и (2) § 6, 1, имаћемо:

$$(1) \quad x_0 = x' - \triangle x_0 \qquad \bar{\Gamma} = -b_0 x'^2 + 2 b_1 x_0 x' - \triangle \bar{\Gamma}$$

где су $\triangle x_0$ и $\triangle \bar{\Gamma}$ бесконачно-мале величине првог реда

$$(2) \quad \triangle x_0 = \frac{A n_0}{\kappa \mu} \qquad \triangle \bar{\Gamma} = \frac{b_2 s_0 \sqrt{1 - x'^2}}{\mu \kappa}$$

Супституирамо фор. (1) у изразу (6) § 6, 1 за Y:

$$\begin{aligned}(3) \quad Y = {} & 2 b_2 (x - x' + 2 \triangle x_0)(1 - x^2)(1 - x'^2) + \\ & + (-b_0 \cdot \overline{x + x'} + 2 b_1 x_0) \cdot [-b_0 (x^2 - x'^2) + \\ & + 2 b_1 x_0 (x - x') + 2 \triangle \bar{\Gamma}] + (b_0 x x' - \bar{\Gamma})[4 b_1 x x_0 x' - \\ & - (x + x')(b_0 x' . \overline{x - x'} + 2 b_1 x_0 x' - \triangle \bar{\Gamma})]\end{aligned}$$

Након неколико упрошћења добијамо израз

$$(4) \quad Y = (x - x') \cdot Z(x) + W(x) \qquad \text{где је}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad Z(x) = {} & 2 b_2 (1 - x^2)(1 - x'^2) + (-b_0 \overline{x + x'} + 2 b_1 x_0)^2 + \\ & + x' (b_0 x x' - \bar{\Gamma})(-b_0 . \overline{x + x'} + 2 b_1 x_0)\end{aligned}$$

$$(6) \quad W(x) = 4 b_2 \triangle x_0 (1 - x^2)(1 - x'^2) + \\ + 2 \triangle \overline{\Gamma}(- b_0 \overline{x + x'} + 2 b_1 x_0) + \triangle \overline{\Gamma}(x + x')(b_0 x x' - \overline{\Gamma})$$

Формуле (5) и (6) можемо упростити, ако занемаримо у првој бесконачно-мале величине првог реда, а у другој — бесконачно-мале величине другог реда. Ово имамо право учинити, узевши у обзир, да је $Z(x)$ коначна величина, а $W(x)$ — бесконачно-мала величина првог реда.

$$(7) \quad Z(x) = (1 - x'^2)\left[2 b_2 (1 - x^2) + (- b_0 \overline{x + x'} + 2 b_1 x_0)^2\right]$$

$$(8) \quad W(x) = 4 b_2 \triangle x_0 (1 - x^2)(1 - x'^2) + \\ + \triangle \overline{\Gamma}(- b_0 \overline{x + x'} + 2 b_1 x_0)(2 - x x' - x'^2)$$

Решавајући једначину (4) $Y = o$ одређујемо други гранични упоредник. Могућност псевдорегуларне прецесије доказаћемо, ако нађемо, да се гранични упоредници налазе бесконачно-блиско један другоме, кад су $\triangle x_0$ и $\triangle \overline{\Gamma}$ фор. (2) величине бесконачно-мале. Представимо да је кретање, које расматрамо, поремећено кретање неког граничног случаја, кад су $\triangle x_0 = o$ $\triangle \overline{\Gamma} = o$ и $W(x) = o$, и применимо услов задњег параграфа о стабилности кретања. Функција $Z(x)$ позитивна је за $x = + \infty$. Осим тога је $Z(x') > o$. Према томе по фор. (4) кретање увек има стабилни карактер, то јест, гранични упоредници теже, да се поклапају, кад $\triangle x_0$ и $\triangle \overline{\Gamma}$ теже нули. На тај начин, потребан је и довољан услов за псевдорегуларну прецесију доста велико повећавање угаоне брзине гироскопа.

Пошто се у случају псевдорегуларне прецесије путања тачке M налази између два бесконачно блиска упоредника, можемо се користити приближним формулама § 6, 2. Познавајући $\triangle x_0$ и $\triangle \overline{\Gamma}$ фор. (2) израчунамо елементе кретања ϵ и x^0. Супституирамо затим добивене изразе у фор. (13), (19) и (21) § 6, 2 и нађемо коначне једначине псевдорегуларне прецесије.

Косинус ширине другог граничног упоредника одредимо по формули (4) из једначине:

$$(9) \qquad x - x' = - \frac{W(x)}{Z(x)}$$

Супституирамо $x' - x = 2\epsilon$ (6) § 6, 2

$$(10) \qquad 2\epsilon = \frac{W(x' - 2\epsilon)}{Z(x' - 2\epsilon)}$$

Развијемо десну страну овог израза у ред. Ако се занемаре величине другог реда, добијемо

$$(11)\quad 2\epsilon = \frac{4b_2 \triangle x_0 (1-x'^2)^2 + 4\triangle \overline{\Gamma}(1-x'^2)(-b_0 x' + b_1 x_0)}{(1-x'^2)[2b_2(1-x'^2)+4(-b_0 x' + b_1 x_0)^2]} \quad \text{или}$$

$$(12)\quad \epsilon = \frac{\triangle x_0 b_2 (1-x'^2) + \triangle \overline{\Gamma}(-b_0 x' + b_1 x_0)}{b_2(1-x'^2) + 2(-b_0 x' + b_1 x_0)^2}$$

Косинус ширине средњег упоредника одредимо по формули

$$(13)\quad x^0 = x' - \epsilon$$

Израчунајмо још периоду треперења

$$(14)\quad \omega = \frac{b_2 \pi}{\kappa \nu \sqrt{(x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III})}}$$

Ако се занемаре бесконачне мале величине првог реда, можемо написати

$$(15)\quad (x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III}) = \frac{Z(x')}{(1-x'^2)\nu^2}$$

или одавде

$$(16)\quad \omega = \frac{b_2 \pi}{\kappa \sqrt{2b_2(1-x'^2) + 4(-b_0 x' + b_1 x_0)^2}}$$

Супституирамо ли фор. (12), (13) и (15) у фор. (13), (19) и (21) § 6, 2, добићемо коначне једначине псевдорегуларне прецесије у најопштијем случају.

§ 6, 5. Котрљање лопте по сфери.

Кад угаона брзина гироскопа око осовине симетрије тежи нули, онда се котрљање гироскопске лопте своди на котрљање обичне лопте. Расмотримо једначине главе IV за овај гранични случај, кад је $\lim \kappa = 0$.

Из формула (5), (9) и (14) § 4, 4 излази, да производи κx_0, $\kappa \overline{\Gamma}$, $\kappa h'$ теже коначној граници, кад κ тежи нули. Обележимо

$$(1)\quad \lim \mu \kappa x_0 = \frac{a}{2b_1} \qquad \lim \mu \kappa \overline{\Gamma} = -b$$

$$\lim 2b_2 \mu^2 \kappa^2 (h'^2 - x_0^2) = l^2$$

где су a, b, l нове произвољне константе.

Узевши у обзир, да је $\lim \varkappa \cos u = o$, добићемо из фор. (3) § 4, 4

(2) $n = n_0 = \text{const.}$

Формула (7) § 4. 4 добија облик

(3) $b_2 s . \sin u = ax + b$

а формула (12) § 4, 4 своди се на једначину

(4) $b_2^2 \tau^2 \sin^2 u = l^2 (1 - x^2) - (ax + b)^2$

Време налазимо квадратуром

(5) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 b_2^2 \mu^2 = X$ где је

(6) $X = -x^2 (a^2 + l^2) - 2\, x\, ab + (l^2 - b^2)$

Дискриминанта задњег израза

(7) $\triangle^2 = (a^2 + l^2)(l^2 - b^2) + a^2 b^2 = l^2 (a^2 + l^2 - b^2)$

позитивна је, јер једначина $X = o$ има два стварна корена у интервалу $+1$ и -1.

Супституирамо

(8) $x (a^2 + l^2) + a\, b = z \sqrt{a^2 + l^2}$

Онда из једначине (5) добијамо

(9) $$\frac{dt}{b_2 \mu} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\triangle^2}{a^2 + l^2} - z^2}}$$

Интегришемо ли, налазимо да је

(10) $$\frac{t}{b_2 \mu} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \arc \sin \frac{z \sqrt{a^2 + l^2}}{\triangle}$$ или

(11) $$z = \frac{\triangle}{\sqrt{a^2 + l^2}} \sin \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{b_2 \mu} . t$$ или

(12) $x (a^2 + l^2) + a\, b = \triangle \sin \alpha t$ где је

(13) $$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{b_2 \mu}$$

Формулу (25) § 4, 4 препишимо у облику

(14) $$dv = \frac{ax + b}{(1 - x^2) \sqrt{X}} dx$$ или

(15) $$b_2 \mu\, dv = \frac{ax + b}{1 - x^2} dt = \left[\frac{a + b}{2} \cdot \frac{1}{1 - x} - \frac{a - b}{2} \cdot \frac{1}{1 + x}\right] dt$$

Суптитуирамо ли овде формулу (12) у место x, добићемо

$$(16)\quad b_2\,\mu\,dv = \frac{a^2+l^2}{2\triangle}\left[\frac{(a+b)\,dt}{a_1-\sin\alpha t}+\frac{(a-b)\,dt}{a_2-\sin\alpha t}\right]\qquad \text{где је}$$

$$(17)\quad a_1=\frac{a^2+l^2+a\,b}{\triangle}\qquad a_2=\frac{a\,b-a^2-l^2}{\triangle}$$

Узевши у обзир једнакости

$$(18)\quad a_1^2-1=\frac{(a^2+l^2)(a+b)^2}{\triangle^2}>0\qquad a_2^2-1=\frac{(a^2+l^2)(a-b)^2}{\triangle^2}>0$$

интегришимо израз (16) по формули

$$(19)\quad \int\frac{dt}{a_1-\sin\alpha t}=-\frac{1}{\alpha\sqrt{a_1^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-a_1\sin\alpha t}{\cos\alpha t\,.\sqrt{a_1^2-1}}$$

Имаћемо

$$(20)\quad v=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-a_1\sin\alpha t}{\cos\alpha t\sqrt{a_1^2-1}}+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-a_2\sin\alpha t}{\cos\alpha t\sqrt{a_2^2-1}}\right]+\mathrm{const.}$$

Најзад, из фор. (3) § 4, 5 добијамо

$$(21)\quad \mathrm{tg}\,\vartheta=-\frac{ax+b}{\sqrt{l^2(1-x^2)-(ax+b)^2}}$$

Супституирамо ли фор. (2) у фор. (8) § 4, 3, налазимо:

$$(22)\quad u_1=u_1^0=\mathrm{const.}$$

За налажење v_1 узмимо образац (10) § 4, 5, који даје

$$(23)\quad \dot v_1=\frac{\mu'\,l^2}{2\,A\,b_2\,\mu\,\Gamma\sin u_1^0}\qquad \text{јер је}\qquad \lim\left[F_1(x)\cdot\kappa^2\right]=\frac{l^2}{\mu}$$

Интеграцијом налазимо

$$(24)\quad v_1=c\,t+d\qquad \text{где је}$$

$$(25)\quad c=\frac{\mu'\,l^2}{2\,A\,b_2\,\mu\,\Gamma\sin u_1^0}$$

Формулама (12), (20), (21), (22) и (24) решава се у коначном облику проблем о котрљању лопте по сфери. Као што видимо, ово кретање се може расматрати, као гранични случај нашег проблема.

§ 6, 6. Стационарно кретање. Пертурбационо кретање.

Стационарно кретање гироскопске лопте добијамо, кад претпоставимо да је

$$(1)\quad s = s_0 = o, \quad n = -\dot{\vartheta} = \text{const.} \quad \tau = \tau_0 = o \quad u = o$$
$$x = x' = x^{IV} = \pm 1 \quad \dot{v} = o, \quad \cos u_1 = \pm 1, \quad \dot{v}_1 = o^*$$

Ово кретање је могуће, јер оно задовољава диференцијалне једначине кретања из главе IV. Тачка M је непокретна и поклапа се са полом гироскопске лопте, која се обрће са константном угаоном брзином око у простору непокретне осовине гироскопа.

Услове, које морају у овом случају задовољавати константе x_0, h', $\overline{\Gamma}$, добићемо, ако супституирамо у јед. (2) и (3) § 6, 1 $s_0 = o$ и $x' = +1$

$$(2)\quad -b_0 + 2 b_1 x_0 - \overline{\Gamma} = o$$

$$(3)\quad h'^2 = (1 - x_0)^2$$

Задња једначина изражава услов, да једначина $X = o$ (4) § 6, 1 има двоструки корен $x = +1$.

За пречишћавање стабилности стационарног кретања размотримо пертурбационо кретање. Пореметимо кретање помоћу бочног удара, бесконачно-мало променивши брзину $\tau_0 = o$. Претпоставимо, да угаона брзина око нормале n_0 није поремећена, јер поремећење ове брзине и онако не нарушава стабилност кретања. Тада пертурбациона сила неће променити константу x_0. Прираштај константе h'^2 обележимо са $\triangle h'^2$ и одредимо из једначине (12) § 4, 4.:

$$(4)\quad \frac{b_2^2 \triangle \tau^2}{\mu^2 \kappa^2} = 2 b_2 \left[h'^2 + \triangle h'^2 - (1 - x_0)^2 \right]$$

која према формули (3) прима облик

$$(5)\quad \triangle h'^2 = \frac{b_2 \triangle \tau^2}{2 \mu^2 \kappa^2}$$

За налажење косинуса ширине другог упоредника не можемо се више користити једначином (5) § 6, 1 због фактора $(1 - x'^2)$, који у њу улази.

---

* Даље ћемо претпостављати, да је $x' = +1$. Све формуле овог параграфа лако је применити у случају, кад је $x' = -1$.

Мораћемо узети почетну једначину $X = o$ фор. (4) § 6,1. Ова једначина мора имати корен $x' = +1$, откуд излази услов (2). Избацимо ли константу $\overline{\Gamma}$ помоћу овог услова, добијамо

$$(6) \quad X = (1 - x)\,Y \quad \text{где је}$$

$$(7) \quad Y = 2b_2\,(h'^2 + \triangle h'^2 - \overline{x - x_0}^2)\,(1 + x) - \\ - (1 - x)\,(b_0\,\overline{1 + x} - 2b_1\,x_0)^2$$

Услов (3) изражава, да за $\triangle h'^2 = o$ једначина $Y = o$ има корен $x = x^{IV} = +1$. Супституирамо ли h'^2 из фор. (3), имаћемо

$$(8) \quad Y = (1 - x)\,Z + 2b_2\,(1 + x)\,\triangle h'^2 \quad \text{где је}$$

$$(9) \quad Z = 2b_2\,(1 + x - 2x_0)\,(1 + x) - (b_0\,\overline{1 + x} - 2b_1 x_0)^2 \quad \text{или}$$

$$(10) \quad Z(x) = -(b_0^2 - 2b_2)\,(1 + x)^2 + \\ + 4x_0\,(1 + x)\,(b_0 b_1 - b_2) - 4b_1^2 x_0^2$$

Дискриминанта $\triangle$ овог израза је негативна

$$(11) \quad \triangle = (b_0 b_1 - b_2)^2 - b_1^2\,(b_0^2 - 2b_2) = \\ = b_2\,(b_2 - 2b_0 b_1 + 2b_1^2) < o$$

Према томе квадратна једначина $Z = o$ нема стварних корена.

Користећи се условом стабилности кретања § 6, 3, одавде долазимо до закључка, да кретање у овом случају увек има стабилни карактер.

Супституирамо у једначину $Y = o$ (8)

$$(12) \quad x^{IV} = 1 - 2\epsilon$$

и добијемо

$$(13) \quad \epsilon = -\frac{2\,(1 - \epsilon)\,\triangle h'^2}{Z\,(1 - 2\epsilon)}$$

Или ако се занемаре бесконачно-мале величине виших редова

$$(14) \quad \epsilon = -\frac{2\,\triangle h'^2}{Z(1)} \quad \text{или}$$

$$(15) \quad \epsilon = -\frac{\triangle h'^2}{2\,[2b_2\,(1 - x_0) - (b_0 - b_1 x_0)^2]}$$

За налажење приближних једначина кретања можемо се користити § 6, 2. Формулу (13) § 6, 2 можемо применити и у задатом случају

$$(16) \quad x = x^0 + \epsilon \sin \frac{\pi t}{\omega} \qquad \text{где је}$$

$$(17) \quad x^0 = 1 - \epsilon \qquad \omega = \frac{b_2 \pi}{\kappa \nu \sqrt{(x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III})}}$$

Помоћу фор. (12) и (17) преобразимо јед. (16) на следећи начин

$$(18) \quad 1 - x = \frac{1 - x^{IV}}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{\omega}\right)$$

или рачунајући време од тренутка, кад је $x = x' = +1$

$$(19) \quad 1 - x = \frac{1 - x^{IV}}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi t}{\omega}\right)$$

Супституирамо ли у задњу формулу

$$x = \cos u \qquad x^{IV} = \cos u^{IV}$$

добијамо

$$(20) \quad \sin \frac{u}{2} = \sin \frac{u^{IV}}{2} \cdot \sin \frac{\pi t}{2 \omega}$$

Узевши у обзир, да су углови u и u^{IV} врло мали, можемо написати

$$(21) \quad u = u^{IV} \cdot \sin \frac{\pi t}{2 \omega}$$

За израчунавање v узмимо фор. (19) § 6, 2, у којој за $\varphi(x)$ морамо сад узети израз

$$(22) \quad \varphi(x) = \frac{b_0 (1 + x) - 2 b_1 x_0}{1 + x}$$

и према томе

$$(23) \quad \varphi(1) = b_0 - b_1 x_0 \qquad \varphi'(1) = \frac{b_1 x_0}{2}$$

На тај начин добијамо, узевши за почетак времена тренутак, кад је $x = x' = +1$

$$(24) \quad v = \frac{\kappa}{b_2} (b_0 - b_1 x_0) t + \epsilon \frac{b_1 x_0}{2 \nu \sqrt{(x^0 - x^{II})(x^0 - x^{III})}} \sin \frac{\pi}{2 \omega}$$

Периоду 2ω израчунавамо, узевши у обзир, да је

$$(25) \quad Z(x) = -\nu^2 (x - x^{II})(x - x^{III})$$

Користећи се фор. (10) и (17), добијамо

$$(26) \quad \omega = \frac{b_2 \pi}{2 \kappa \sqrt{(b_0 - b_1 x_0)^2 - 2 b_2 (1 - x_0)}}$$

§ 6, 7. Одличите трајекторије.

У пређашним смо параграфима расмотрили низ специјалних случајева кретања гироскопске лопте, који се решавају у елементарним функцијама. Морамо још споменути случај, кад је $x^{II} = x^{III}$, а тачка додира M осцилира између упоредника x' и x^{IV}. Овај се случај такође своди на елементарне квадратуре. Не задржавајући се на њему, узмимо сад у претрес питање о одличитим трајекторијама кретања, то јест о оним трајекторијама, које не зависе од почетне енергије система.*

За полазну тачку наших истраживања узмимо диференцијалне једначине кретања (14), (15) и (16) § 4, 3, једначине (7), (8) и (9) § 4, 2 и једначине веза (2) и (3) § 4, 2. Супституирамо ли у диференцијалним једначинама кретања (14), (15) и (16) § 4, 3 изразе (7), (8) и (9) § 4, 2 и користимо ли се фор. (2) и (3) § 4, 2, добићемо једначине облика

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2 v}{d t^2} &= K_v^{(2)} + K_v^{(1)} \\ \frac{d^2 u}{d t^2} &= K_u^{(2)} + K_u^{(1)} \\ \frac{d^2 \vartheta}{d t^2} &= K_\vartheta^{(2)} + K_\vartheta^{(1)} \end{aligned}$$

где су $K_u^{(2)}$, $K_v^{(2)}$ и $K_\vartheta^{(2)}$ квадратне хомогене функције, а $K_u^{(1)}$, $K_v^{(1)}$ и $K_\vartheta^{(1)}$ линеарне хомогене функције брзина $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{\vartheta}$. При томе приметимо, да је

$$(2)\quad K_v^{(1)} = -\frac{\kappa\tau \cos u}{P\mu \sin u} \qquad\qquad (3)\quad K_u^{(1)} = \frac{\kappa (s \cos u + n \sin u)}{P\mu}$$

$$(4)\quad K_\vartheta^{(1)} = \frac{\kappa\tau \sin u}{A} - \cos u\, K_v^{(1)} - \mu' \operatorname{ctg} u_1 \cos\vartheta\, K_u^{(1)} - \\ - \mu' \operatorname{ctg} u_1 \sin\vartheta\, K_v^{(1)}$$

Узмимо за независну промењливу величину v. Онда имаћемо:

$$(5)\quad \frac{d^2 u}{d t^2} = \frac{d^2 u}{d v^2} \dot{v}^2 + \frac{d u}{d v} \cdot \ddot{v}$$

---

* Painlevé. Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes. Bulletin de la societé mathématique de France. 1894. Paris. Bilimovitch, Sur les trajectoires d'un système non-holonome. Comptes rendus. 1916.

и слично за $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, где је $\ddot{v}=\frac{d^2 v}{dt^2}$. Одавде

$$(6)\qquad \frac{d^2 u}{dv^2}=\frac{\left(K_u^{(2)}-\frac{du}{dv}K_v^{(2)}\right)+\left(K_u^{(1)}-\frac{du}{dv}K_v^{(1)}\right)}{\dot{v}^2}$$

Обележимо ли

$$(7)\qquad \frac{K_u^{(2)}}{\dot{v}^2}=K_u^{x(2)}\qquad \frac{K_\vartheta^{(2)}}{\dot{v}^2}=K_\vartheta^{x(2)}\dots\qquad \frac{K_u^{(1)}}{\dot{v}^2}=K_u^{x(1)}\dots..$$

добићемо

$$(8)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2 u}{dv^2}&=K_u^{x(2)}-\frac{du}{dv}K_v^{x(2)}+\frac{K_u^{x(1)}-\frac{du}{dv}K_v^{x(1)}}{\dot{v}}\\ \frac{d^2\vartheta}{dv^2}&=K_\vartheta^{x(2)}-\frac{d\vartheta}{dv}K_v^{x(2)}+\frac{K_\vartheta^{x(1)}-\frac{d\vartheta}{dv}K_v^{x(1)}}{\dot{v}}\end{aligned}$$

Диференцијалне једначине трајекторије налазимо, ако избацимо време из фор. (8) и из фор. (2) и (3) § 4,2. На тај начин добијемо једначине

$$(9)\qquad \begin{aligned}\frac{du_1}{dv}&=-\mu'\sin\vartheta\frac{du}{dv}+\mu'\sin u\cos\vartheta\\ \sin u_1\frac{dv_1}{dv}&=\mu'\cos\vartheta\frac{du}{dv}+\mu'\sin u\sin\vartheta\end{aligned}$$

$$(10)\qquad \frac{\psi_u}{\chi_u}=\frac{\psi_\vartheta}{\chi_\vartheta}\qquad \text{где је}$$

$$\chi_u=\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{du}{dv}K_v^{x(2)}-K_u^{x(2)}\qquad\qquad \psi_u=K_u^{x(1)}-\frac{du}{dv}K_v^{x(1)}\quad \text{и т. д.}$$

Диференцирајмо једнакост $\dot{v}^2=\frac{\psi^2_u}{\chi^2_u}$. Наћи ћемо:

$$\frac{d}{dv}\dot{v}^2=2\ddot{v}=2\left(K_v^{x(2)}\cdot\frac{\psi^2_u}{\chi^2_u}+K_v^{x(1)}\cdot\frac{\psi_u}{\chi_u}\right)\qquad\text{или}$$

$$(11)\qquad \frac{d}{dv}\frac{\psi_u}{\chi_u}=K_v^{x(2)}\frac{\psi_u}{\chi_u}+K_v^{x(1)}$$

Последња једначина је трећег реда по u. Једначине (9), (10) и

(11) су диференцијалне једначине трајекторија система. Њихови општи интеграли зависе од седам произвољних констананата.

Ако је систем (9), (10), (11) интегрисан, т. ј. ако су познате u, ϑ, u_1, v_1 у функцији v и седам произвољних констананата, онда време t налазимо квадратуром

$$(12) \quad t = \int \frac{\Psi_u}{\chi_u} dv$$

Два кретања, која се разликују само својим почетком, сматраћемо као истоветна. Уз тај услов задати систем трајекторија по фор. (12) у општем случају допушта само једно кретање.

Овај је закључак погрешан, кад размере $\frac{\Psi_u}{\chi_u}$ и $\frac{\Psi_\vartheta}{\chi_\vartheta}$ добију неодређени облик $\frac{0}{0}$. Одличите (remarquable) трајекторије се, према Painlevé-у, зову оне трајекторије, које задовољавају овај услов, т. ј. једначине:

$$(13) \quad \chi_u = \chi_\vartheta = 0$$

$$(14) \quad \Psi_u = \Psi_\vartheta = 0$$

У општем случају услови (13) и (14) нису сагласни. Кад су одличите трајекторије могуће, налазимо их интегрисањем система (14) и (9) првог реда. Одавде излази, да одличите трајекторије могу зависети само од четири произвољне константе. Ако су познате одличите трајекторије, то јест ако су познате u, ϑ, u_1, v_1 у функцији v, онда супституцијом њихових вредности у интегралу живе силе (10) § 4, 3, налазимо време квадратуром:

$$(15) \quad t = \int dv \sqrt{\frac{F(v)}{2h}} \quad \text{где је} \quad F(v) = \frac{2\Theta}{v^2}$$

Из последње формуле излази, да је на одличитим трајекторијама могуће безбројно мноштво различитих кретања, која одговарају различитим вредностима константе живе силе h. Ова кретања могу зависети само од шест произвољних констананата: четири произвољне константе одличитих трајекторија, константе живе силе h и константе интеграције фор. (15).

Расмотримо регуларну прецесију с гледишта одличитих трајекторија. Опште решење проблема о котрљању гироскопске лопте по сфери зависи од осам произвољних констананата. У случају, кад је задовољен услов (2) § 6, 3, имамо регуларну прецесију, која на тај начин зависи од 7 произвољних констаната. Одавде излази, да у општем случају не могу свакој регуларној прецесији одговарати одличите трајекторије. Ми морамо увестиош бар једно ограничење на произвољне константе, па тек онда, можда, добијемо одличите трајекторије. Ову нову везу између произвољних констаната налазимо, ако супституирамо једначину (5) § 6, 3 у условима (14).

На тај начин имаћемо једначину

$$(16)\qquad K_u^{x(1)} = o \qquad \text{или}$$

$s_0 \cos u_0 + n_0 \sin u_0 = o$ или после супституирања формула (7) и (8) § 4, 2

$$(17)\qquad \mu \sin u_0 \cos u_0 \dot{v}_0 - \sin u_0 (\cos u_0 \dot{v}_0 + \cos u_{10} \dot{v}_{10}) = o$$

Одавде, користећи се фор. (3) § 4, 2, добијамо

$$\mu \sin u_0 \cos u_0 \dot{v}_0 - \sin u_0 (\cos u_0 \cdot \dot{v}_0 + \sin u_0 \operatorname{ctg} u_{10} \mu' \dot{v}_0) = o \qquad \text{или}$$

$$(18)\qquad \sin u_0 \cdot \sin (u_0 - u_{10}) = o \,.$$

Прва два корена ове једначине $u_0 = o, \pi \ldots$ дају случај стационарног кретања, о чему се можемо уверити и непосредно, користећи се једначинама (14). Два друга корена

$$(19)\qquad u_0 = u_{10} \quad \text{и} \quad u_0 = u_{10} + \pi$$

дају потребан и довољан услов, уз који регуларној прецесији заиста одговарају одличите трајекторије, т. ј. кад је задовољен један од услова (19), онда је на трајекторијама регуларне прецесије могуће безбројно мноштво кретања, која одговарају различним вредностима почетне енергије гироскопске лопте. Ове трајекторије регуларне прецесије зависе од четири произвољне константе.* Према томе оне су опште решење система једначина (9) и (14), које карактеришу одличите трајекторије. На тај начин долазимо до закључка:

* О овоме се можемо уверити и непосредно. Збиља, положај непокретне осовине $O_1 Z_1$, која се подудара са моментом количина кретања гироскопске лопте односно тачке M, зависи од две произвољне константе; ширине упоредника $u_0 = u_{10}$ дају трећу произвољну константу и најзад, зависност између координата v и v_1 одређује се четвртом произвољном константом.

У случају котрљања гироскопске лопте одличите трајектурије су трајекторије регуларне прецесије, које задовољавају услов (19).

Услов (19) изражава, да је осовина гироскопа у току кретања паралелна са непокретном у простору осовином $O_1\ Z_1$.

У случају котрљања просте сфере по сфери то јест кад је $\kappa = o$, једначина (16) према (3) је индентично задовољена. Према томе у овом случају све су трајекторије регуларних прецесија одличите трајекторије.

Василије Демченко

ROULEMENT SANS GLISSEMENT D'UNE BALLE GYROSCOPIQUE SUR UNE SPHÈRE

PAR V. DEMTCHENKO.

(Résumé)

Dans ce traité nous étudions le problème du roulement sans glissement de la balle gyroscopique sur la sphère, ce qui est l'un des problèmes spéciaux du roulement des corps gyroscopiques sur une surface. Les trois premiers chapitres sont d'un caractère général et contiennent la cinématique et la dynamique d'un corps roulant. Dans les trois derniers chapitres, qui forment la partie la plus grande et spéciale du traité, est donnée la solution et l'analyse du problème posé. La plupart des peu nombreux problèmes du roulemet d'une surface sur une autre, qui étaient jusqu'a présent discutés, se rapportent aux trois cas spéciaux, c'est à dire: au roulement d'une surface sur une plaine, au roulement d'une balle sur une surface* et au roulement d'une surface sur une sphère. La théorie complète des problèmes de la dernière sorte est donnée par le professeur Voronetz.**

L'application des paramètres proposés par C. Neumann*** est très utile dans tous les problèmes du roulement d'une surface sur une autre. Supposons qu'un corps solide T, limité par une surface S, roule sur une surface fixe S_1. Désignons les paramètres de Gauss de la surface S_1 par u_1 et v_1 et ceux de la surface S par u et v. Prenons pour les lignes coordonnées leurs lignes de courbure. Construisons au point du contact M deux trièdres gauches $Muvn$ et $Mu_1v_1n_1$, dont les premiers axes coïncident avec les directions positives des lignes coordonnées u et v ou bien u_1 et v_1. Les coordonnées de Neumann du corps

---

* Voir Routh. A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Chap. V Part. II.

** Über die Bewegung eines starren Körpers . . . Math. An. 70 B. 1911.

*** Grundzüge der analytischen Mechanik. Leipziger Berichte 1899.

T sont: les coordonnées courbes de Gauss u_1 et v_1 du point M sur la surface S_1, les coordonnées courbes de Gauss u et v du point M sur la surface S et l'angle ϑ entre les axes v_1 et u (voir la figure 1 page 3). Désignons les projections de la vitesse angulière ω du corps T sur les axes Muvn par s, τ, n. En se servant de la théorie des surfaces, nous recevons pour s, τ, n les expressions (8) et (9) § 1,2 (page 4). Soient $\mathfrak{v}^1$ et $\mathfrak{v}$ les vitesses absolue et relative (par rapport au corps T) du point M. Si le corps roule sans glisser, alors on a

$$(1) \qquad \mathfrak{v}^1 = \mathfrak{v}$$

En projetant cette équation vectorielle sur les axes Mu et Mv, nous recevons les formules (1) § 1, 3 (page 7). Ce sont les liaisons différentielles, qui agissent sur le corps roulant sans glissement.

Désignons le vecteur de la quantité de mouvement du corps T par $\mathfrak{M}$ et le vecteur du moment des quantités de mouvement autour du pôle M par $G^{(M)}$. Les réactions des liaisons ne donnent pas de moment autour du pôle M. Par conséquent, en se servant de la loi du moment des quantités de mouvement et en prenant en considération, que $\mathfrak{v}^1 = \mathfrak{v}$, nous recevons l'équation

$$(2) \qquad \dot{G}^{(M)} + [\mathfrak{v}\,\mathfrak{M}] = L^{(M)}$$

ou $L^{(M)}$ est le moment autour du pôle M des forces, qui agissent sur le corps solide. De cette façon on résout le problème du roulement sans glissement d'un corps solide sur une surface constante par l'intégration du système de huit équations différentielles du premier ordre, à savoir: des équations (2) et des équations (1) § 1, 3 et (9) § 1, 2. Ce système détermine huit fonctions inconnues du temps t: u, v, u_1, v_1, ϑ, s, τ, n.

Les équations de mouvement d'un corps solide roulant, que nous avons reçues, peuvent être généralisées au cas, où un gyroscope symétrique se trouve dans l'intérieur du corps T. Supposons, que l'axe du gyroscope coïncide avec l'un des axes principaux centraux du corps T et que son centre de gravité coïncide avec le centre de gravité du corps T. Supposons encore, que les forces appliquées sur le gyroscope ne donnent pas du moment autour de l'axe du gyroscope, c'est à dire, que le moment des quantités de mouvement κ du gyroscope autour de son axe soit constant. Le moment des quantités de mouvement du système du gyroscope et du corps gyroscopique autour du pôle

M est donné par l'expression: $G^{(M)}+\kappa$, où $G^{(M)}$ est le moment des quantités de mouvement du système, si la rotation du gyroscope autour de l'axe était zéro. En prenant en considération, que $\dot{\kappa}=[\omega\kappa]$, nous recevons l'équation

$$(3) \qquad \dot{G}^{(M)}+[\mathfrak{v}\,\mathfrak{M}]=L^{(M)}+[\kappa\,\omega]$$

où $\mathfrak{M}$ est la quantité de mouvement du système du gyroscope e du corps gyroscopique.

Les équations différentielles du roulement sans glissement d'une surface sur une autre peuvent être reçues aussi des principes généraux de la dynamique. Mais les principes intégraux de Hamilton, Lagrange, Helmholtz ne peuvent être appliqués dans le cas de roulement sans glissement, puisque le corps est dans ce cas soumis aux liaisons différentielles. Le professeur Voronetz a donné un principe intégral d'un caractère très général, lequel peut être appliqué aux systèmes holonomes et aux systèmes non-holonomes. Ce principe est très propre à résoudre les problèmes de roulement d'un corps sur une surface fixe. Dans le troisième chapitre nous l'avons reçu du principe de D'Alembert et l'avons appliqué à la solution de notre problème.

On résout le problème général du roulement sans glissement d'un corps gyroscopique sur une surface sous les conditions mentionnées sur la position du gyroscope par l'intégration de huit équations du premier ordre, c'est à dire: des équations (3), des équations (1) § 1,3 et des équations (9) § 1,2. Ce système détermine huit fonctions inconnues de temps: u. v, u_1, v_1, ϑ, s, τ, n. La solution de ce problème général devient beaucoup plus simple pour le cas, où le corps gyroscopique est limité par une surface de révolution, dont l'axe coïncide avec l'axe du gyroscope, et si l'ellipsoïde central d'inertie du corps gyroscopique est 'ellipsoïde de révolution, dont l'axe coïncide aussi avec l'axe du gyroscope.

Le problème du roulement de ce corps gyroscopique de révolution sur une plaine se réduit à l'intégration d'une équation linéaire non-homogène du deuxième ordre et à une quadrature dans le cas, où les forces ont une résultante appliquée au centre de gravité du système, ne dépendant que de la distance du centre de gravité de la plaine du roulement et normale sur cette plaine. Si le corps gyroscopique est une balle, dont le centre de gravité coïncide avec le centre géométrique, le problème se résout par les quadratures. Ces quadratures deviennent elliptiques: 1⁰ si l'ellipsoïde central d'inertie de la balle est une sphère et 2⁰ si le moment d'inertie de la balle autour de l'axe de rotation du gyroscope est égal à la somme des moments d'inertie de la balle et du gyroscope autour de l'axe normale sur l'axe de rotation du gyroscope. Le premier problème est résolu par le professeur Bobiloff,* le second par le professeur Joukovsky.**

Le problème du roulement d'un corps gyroscopique de révolution sur une sphère se réduit à l'intégration d'une équation non-homogène linéaire du deuxième ordre, à l'intégration d'une équation de Riccati et à une quadrature dans le cas, si les forces ont une résultante appliquée au centre de gravité du système ne dépendant que de la distance du centre de gravité au centre de la balle immobile et dirigée vers ce centre. Si le corps gyroscopique est une balle, dont le centre de gravité coïncide avec le centre géométrique, on résout le problème par les quadratures. Enfin, si la position de la masse de la balle et du gyroscope satisfait les conditions de Joukovsky, ces quadratures deviennent elliptiques. C'est ce dernier problème qui est le sujet de la partie spéciale de notre traité.

Prenons comme coordonnées u, v, u_1 et v_1 le complément de la latitude et la longitude du point M sur la balle mobile et sur la balle immobile. Désignons cosu par x. Alors x se trouve au moyen de la quadrature elliptique d'une équation de la forme:

$$(4) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = X(x)$$

où $X(x)$ est le polynome du quatrième degré de x. En se servant des intégrales des surfaces et de l'intégrale de la force vive, nous calculerons les vitesses angulaires s, τ, n et les coordonnées u_1 et ϑ en fonction de x. Pour le calcul de v et v_1 sont nécessaires encore deux quadratures elliptiques de la forme:

$$(5) \quad dv = \frac{\varphi(x)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{X}} \qquad\qquad (6) \quad dv_1 = \frac{F(x)\,dx}{\theta(x)\sqrt{X}}$$

* О шарѣ съ гироскопомъ внутри ... Матем. Сборникъ XVI 1892.
** О гироскопическомъ шарѣ Бобылева. Тр. отд. физ. наукъ. VI 1893.

où $\varphi(x)$, $F(x)$ et $\theta(x)$ sont les polynomes du deuxième degré. Le polynome X a la forme $X = (1 - x^2)\psi(x) - [\varphi(x)]^2$, où $\psi(x)$ est aussi le polynome du deuxième degré. Si nous marquons les racines du polynome X par x', x^{II}, x^{III} et x^{IV}, nous recevrons $X = a_0 (x - x')(x - x^{II})(x - x^{III})(x - x^{IV})$, où a_0 est une constante négative.

Nous avons fait ensuite l'inversion des intégrales (4), (5) et (6) et avons donné une analyse abondante et l'interprétation géométrique de mouvement pour le cas général. Les coordonnées u, v, ϑ, u_1 et v_1 et les projections s, τ, n de la vitesse angulaire sont exprimées en fonction de temps au moyen des fonctions de Weierstrass $\wp$, ζ, σ. En dehors de cela la liaison entre les constantes mécaniques et elliptiques est donnée, et les arguments elliptiques et les formules reçues sont discutés du point de vue de leur réalité. Les résultats de cette discussion sont:

Le polynome X peut avoir deux ou quatre racines réelles, qui se trouvent entre les racines des polynomes $1 - x^2$, $\psi(x)$ et $\theta(x)$. Si les quatre racines sont réelles et si elles vérifient la condition $x' > x^{IV} > x^{III} > x^{II}$, alors x au cours du mouvement varie entre x' et x^{IV} ou entre x^{III} et x^{II}. Supposons toujours le premier cas. S'il n'y a que deux racines réelles, et qu'elles sont x' et x^{IV}, alors x au cours du mouvement varie entre x' et x^{IV}.

La trajectoire du point M sur la sphère mobile se trouve entre deux parallèles u' et u^{IV}, qu'elle touche successivement. La distance entre deux points de contact successifs est constante. Cette courbe est symétrique par rapport aux méridiens des points de contact. Il y a trois cas à distinguer: 1) le polynome $\varphi(x)$ n'a pas de racines dans l'intervalle $x' - x^{IV}$. La courbe a la forme (A) (voir la figure 4 page 53). 2) Le polynome $\varphi(x)$ a une racine dans l'intervalle $x' - x^{IV}$. La courbe a la forme (B) (voir la figure 5 page 53). 3) Le polynome $\varphi(x)$ a deux racines dans l'intervalle $x' - x^{IV}$. La courbe a la forme (C) (voir les figures 6 et 7 page 53).

La trajectoire du point M sur la sphère immobile est entièrement semblable à celle sur la sphère mobile. La courbe a la forme (A), (B) ou (C) d'après le nombre des racines du polynome $F(x)$ dans l'intervalle $x' - x^{IV}$. Les points de contact sur la sphère immobile répondent à ceux de la sphère mobile. L'angle θ reçoit dans ces points les valeurs $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, en se changeant ou periodiquement ou progressivement. Dans le premier cas correspondent: aux courbes (A) et (C) sur la sphère mobile les courbes (A) et (C) sur la sphère immobile et à la courbe (B) sur la sphère mobile la courbe (B) sur la sphère immobile. Dans le second cas correspondent: à la courbe (B) sur la sphère mobile les courbes (A) et (C) sur la sphère immobile et à la courbe (A) sur la sphère mobile la courbe (B) sur la sphère immobile. Finalement la courbe (C) sur la sphère immobile en ce cas est impossible.

Nous aurons les formes spéciales des courbes, si l'une des racines des polynomes $1-x^2$ et $\psi(x)$ coïncide avec x' ou x^{IV}. Si x' ou x^{IV} coïncide avec les racines du polynome $\psi(x)$, les courbes sur la sphère mobile et sur la sphère immobile ont des points de rebroussement dans les points de contact et ont la forme (D) (voir les figures 8, 9 et 10 pages 56 et 57). Quand $x' = +1$ ou $x^{IV} = -1$, la trajectoire du point M sur la sphère mobile passe par le pôle et a la forme (E) (voir les figures 11 et 12 pages 57 et 58). La courbe sur la sphère immobile n'a pas de singularités.

Le problème du roulement de la balle gyroscopique sur la sphère a, en dehors de la solution générale, encore des solutions particulières, qu'on peut recevoir par une voie élémentaire à l'aide des formules approximatives. La discussion de ces solutions particulières est contenue dans le sixième chapitre. Cette discussion est faite généralement d'après les méthodes donées par Klein et Sommerfeld dans le traité capital: „Theorie des Kreisels". Les solutions particulières de notre problème sont: la précession régulière, la précession pseudorégulière, le mouvement stationnaire et le roulement sans glissement de la balle simple sur la sphère. Tous ces mouvements sont discutés du point de vue de leur stabilité. Voici les resultats des discussions générales sur les mouvements particuliers:

1) La précession régulière est possible. Le point M décrit sur la sphère mobile et sur la sphère immobile des parallèles avec une vitesse constante. La précession est stable si $\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} < 0$ et labile si $\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} > 0$. Dans le cas $\frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} = 0$ la précession est labile si $\frac{\partial^3 X}{\partial x'^3} \neq 0$ et stable si $\frac{\partial^3 X}{\partial x'^3} = 0$. La nutation devient infiniment petite, quand la perturbation est infiniment petite, mais sa période tend vers une limite déterminée.

2) La précession pseudorégulière est possible. Elle a lieu, si la rotation du gyroscope autour de l'axe est très grande en comparaison avec les rotations initiales s_0 et τ_0 de la balle gyroscopique. Ce mouvement est toujours stable.

3) Le mouvement stationnaire est possible. Les trajectoires du point M sur la sphère mobile et sur la sphère immobile sont des points. La vitesse angulaire de la balle est constante et a la direction de l'axe du gyroscope. Le mouvement est toujours stable.

4) On a le roulement de la balle simple sur une sphère, quand la rotation du gyroscope autour de l'axe cesse.

A la fin du sixième chapitre nous avons examiné, d'après la théorie générale de Painlevé* et de Bilimovitch**, le problème des trajectoires remarquables de la balle gyroscopique, c'est à dire des trajectoires indépendantes de l'énergie initiale du système. Une analyse profonde nous mène à la conclusion, qu'en cas du roulement sans glissement de la balle gyroscopique éxiste un système des trajectoires rémarquables: ce sont les trajectoires de la précession régulière pour le cas, si l'axe du gyroscope reste au cours du mouvement constamment parallèle au vecteur immobile de moment des quantités du mouvement de la balle gyroscopique autour du point M.

---

* Sur les mouvement et les trajectoires réels des systèmes. Bulletin de la societé mathématique de France. 1894. Paris.

** Sur les trajectoires d'un système non-holonome. Comptes rendus. Séance du 1er mai 1916.