О КРЕТАЊУ ЧВРСТОГ ТЕЛА
НА КРИВОЈ ЛИНИЈИ

ТЕЗА

ВЈАЧЕСЛАВА С. ЖАРДЕЦКОГ

ПРИМЉЕНА ЗА ДОКТОРСКИ ИСПИТ
НА СЕДНИЦИ ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ 5. МАРТА 1923
ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА ГГ.
АНТОНА БИЛИМОВИЋА и МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА
РЕДОВНИХ ПРОФЕСОРА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

БЕОГРАД, 1923
ШТАМПАРИЈА „СКЕРЛИЋ“ — КРАЉИЦЕ НАТАЛИЈЕ 12

Из CVII књиге *Гласа* Српске Краљевске Академије

САДРЖАЈ

Увод.

Једначине Lagrange'a. — 3.7 Интеграл живе силе. Случај конзервативног кретања. — 3.8 Случај тешког чврстог тела.

Глава IV. Гранични случај.

4.1 Формулисање проблема — 4.2 Избор триједра. — 4.21 Величине које улазе у природне једначине као функције параметара s и χ. — 4.3 Анализа десних страна природних једначина. — 4.4 Једначине кретања. 4.5 Једначине Lagrange-a. — 4.6 Посматрани случај као гранични општег проблема. — 4.7 Интеграл живе силе. Конзервативно кретање. — 4.8 Случај тешког чврстог тела.

Глава V. Специјални случајеви.

5.1 Кретање чврстог тела на правој линији. — 5.2 Чврсто тело на кружној линији (једначине) — 5.3 Хоризонтална кружна линија. Опште решење. — 5.31 Центар инерције у почетку триједра. — 5.32 Центар инерције на тетиви. — 5.33 Општи случај. — 5.4 Проучавање квадратура (6) и (7). — 5.5 Проучавање граничног случаја. — 5.6 Три облика кретања — 5.7 Центар инерције на тангенти.

Глава VI. О кретању чврстог тела са једним степеном слободе на кривој линији.

6.1 Опште примедбе. — 6.2 Пресек повезани са нормалом криве. 6.3 Пресек обрта се према неком закону. — 6.4 Примедба.

УВОД.

Диференцијалне једначине кретања чврстог тела могу бити, као што је познато, написане на различите начине. Класичне су методе Euler'а и Lagrange'а. Први полази из закона количине кретања и момента количине кретања с обзиром на непокретни триједар оса или покретни везани са телом (поглавито узимају се главне осе инерције у некој тачци чврстог тела) Суштина методе Lagrange'а састоји се у избору независних параметара, који одређују положај тела, а полазна је тачка за конструисање једначина један од општих принципа (d'Alembert'ов, Hamilton'ов, Lagrange'ев . . .).

Г. А. Билимовић[1]) је публиковао нови начин конструисања диференцијалних једначина кретања чврстог тела, које се добивају пројецирањем двеју геометријских једначина, изражавајућих законе количине и момента количине кретања, на осе неког триједра. Избор овог триједра стоји у вези са неким унапред познатим кинематским или динамским особинама кретања тела. На овај се начин испољава геометријска страна проблема.

Задатак је овог рада примена горње методе г. А. Билимовића за решење проблема кретања идеалног чврстог тела чије две одређене тачке клизе на датој непокретној кривој линији.

У опште проблем кретања тела на кривој линији мало је проучаван и нама су познати само радови Danielle'а[2]) у ко-

---

[1]) *Ant. Bilimovitch* Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide C. R. T. 171.

Aнт. Билимовић Природне једначине кретања чврстог тела: Глас Српске Краљевске Академије Књига XCIX.

[2]) *Danielle E.* Sul moto spontaneo di un solido di rivoluzione, vincolato per un punto dell'asse ad un cerchio fisso. Nuovo Cimento 13 (537-562), 14 (5-18), 14 (161-182).

јима се посматра кретање тела обртања које обешено једном тачком осе на непокретној кружној линији (цитирамо по Fortschritte d. Math. B. 38 S. 728). P. Painlevé[1]) решава у својим Leçons проблем кретања тешког хомогеног чврстог тела обртања; оса овог тела је игла, чији крајеви клизе без трења на двема правим линијама.

Наш проблем посматрамо у општем облику т. ј. за произволну форму криве и произволно распоређивање маса у телу. Применом методе г. А. Билимовића долазимо до система двеју симултаних обичних диференцијалних једначина другог реда. Ако постоји интеграл живе силе решење проблема састоји се у интегрисању једне диференцијалне једначине другог реда после чега се завршава квадратуром.

Једначине кретања пишемо с обзиром на специјални триједар конструисани на тетиви и зато у гл. I. решавамо проблем његовог кретања. Уз пут дајемо геометријско и кинематско тумачење величина K_u и L_u, којима се одређује обртање сваког основног триједра. Глава II. представља кратко излагање методе г. Билимовића и извод општих формула које се примењују даље.

Добивене диференцијалне једначине веома су компликоване и њихово интегрисање у коначном облику задаје несавладљиве тешкоће. Зато у гл. IV. изводимо једначине кретања за гранични случај, када су споменуте тачке веома блиске. Глава V садржи неколико специјалних случајева интегрисања једначина кретања. Најзад у глави VI додирујемо проблем кретања чврстог тела са једним степеном слободе на кривој линији.

Овом приликом изјављујемо најдубљу захвалност нашем поштованом учитељу проф. Ан. Билимовићу за савете при извођењу овог рада.

В. Жардецки.

---

1) *Painlevé P.* Leçons sur l'Integration des Equations differentielles de la Mécanique. Paris 1895.

ГЛАВА I

О кретању триједра.

1.1 *Претходне формуле из теорије вектора.*

Употребљавамо леви координатни систем и предпостављамо да је триједар оса ортогоналан. Пројекције вектора V на осе триједра Oxyz бележимо са V_{ox}, V_{oy}, V_{oz} или V_x, V_y, V_z, његов модуо (дужину) са $\overline{V}$, у скаларним изразима писаћемо и без црте.

Дужина вектора

$$(1) \qquad \overline{V} = + \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \ .$$

Продукте вектора V и W бележимо: 1) скаларни са (V, W), 2) векторијелни, т. ј. вектор чији је а) правац нормалан на раван паралелну са векторима V и W, б) смисао такав да он са векторима V, W саставља леви триједар, в) величина је површина паралелограма ограниченог векторима V и W, са [V, W].

$$(2) \quad (V, W) = \overline{V}\ \overline{W} \operatorname{Cos}(V, W) = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$$

Координате вектора [V, W] су:

$$(3) \quad [V, W]_x = V_y W_z - V_z W_y\,;\ [V, W]_y = V_z W_x - V_x W_z\,;$$
$$[V, W]_z = V_x W_y - V_y W_x\,.$$

Из теорије вектора су познате ове једнакости:

$$(4) \quad (U, [V, W]) = (V, [W, U]) = (W, [U, V]) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}$$

(5) $$\left[U, [V, W]\right] = V\,(W, U) - W\,(U, V),$$

(6) $$\left[[V_1, V_2], [V_3, V_4]\right] = ([V_3, V_4], V_1)\,V_2 - ([V_3, V_4], V_2)\,V_1$$
$$= ([V_1, V_2], V_4)\,V_3 - ([V_1, V_2]\,V_3)\,V_4$$

Вектор јединичне дужине називамо — орт, дакле, ако је дат неки правац одређен вектором U, његов орт је

(7) $$u = \frac{U}{U}$$

Геометријски извод вектора $U = U(t)$, где је t независни аргуменат, бележимо са $\dot{U}$. Из израза за извод скаларног продукта

$$\frac{d}{dt}(V, W) = (\dot{V}, W) + (V, \dot{W})$$

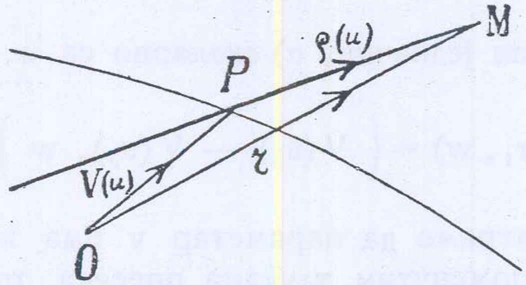
добијамо, ако је један од вектора орт неког правца, израз за пројекцију извода вектора на променљив правац

(8) $$(\dot{V}, u) = \frac{d}{dt}(V, u) - (V, \dot{u})\,.$$

1.2 *Неколико формула из теорије праволинијских површина.*

Једначина је површине у векторијелној форми, ако са r означимо радиус вектор неке тачке те површине, $r = V(u, v)$, где су u и v независни параметри. Она је еквивалентна трима скаларним $x = \overline{V}_x(u, v) = f_1(u, v)$; $y = \overline{V}_y(u, v) = f_2(u, v)$; $z = \overline{V}_z(u, v) = f_3(u, v)$, и за праволинијску површину прима облик

(9) $$r = V(u) + \varrho(u)\,.\,v$$



Слика 1.

Крајња тачка вектора V(u) описује на површини неку криву линију, која се зове директриса а чија је једначина

$$r = V(u)\,, \tag{10}$$

u представља нама дужину лука те криве.

У свакој тачци директрисе права линија PM, чије кретање ствара праволинијску површину, има одређен правац дат ортом $\varrho(u)$. Најзад v је други параметар: дужина PM. Линија PM — генератриса дата је једначином

$$r = V(u_0) + \varrho(u_0)\,.\,v \tag{11}$$

где је u_0 вредност параметра u одговарајућа т. P.

1.21 *Најкраће растојање између две генератрисе.*

Узмимо две тачке, које леже на различитим генератрисама, и које су дате векторима

$$r_1 = V(u_1) + \varrho(u_1)\,v_1\,; \quad r_2 = V(u_2) + \varrho(u_2)\,v_2$$

Вектор чији је почетак у тачци 1, а крај у т. 2 дат је једначином

$$r_2 - r_1 = V(u_2) - V(u_1) + \varrho(u_2)\,v_2 - \varrho(u_1)\,v_1\,. \tag{α}$$

Из аналитичке геометрије је познато, да је најкраће одстојање између две праве линије — растојање тачака пресека ових линија са општим перпендикуларом. Нека орт овог перпендикулара је w, тада

$$(\beta) \qquad \Big(\varrho\,(u_2),\ w \Big) = 0\,, \qquad \Big(\varrho\,(u_1),\ w \Big) = 0$$

Помножимо ли једначину α) скаларно са w, то добивамо

$$(r_2 - r_1\,,\ w) = \Big(V(u_2) - V(u_1),\ w \Big).$$

Ако сада сматрамо да параметар v има вредности, одговарајуће горе споменутим тачкама пресека, то је

$$(r_2 - r_1\,,\ w) = \delta$$

најкраће одстојање између две генератрисе.

На основу (β) можемо написати израз за w у облику

$$w = \frac{[\varrho\,(u_1),\ \varrho\,(u_2)]}{\overline{[\varrho\,(u_1),\ \varrho\,(u_2)]}}\,. \tag{12}$$

или, пошто је $[v,\ v] = o$ и $[v_1\,,\ v_2 - v_1] = [v_1\,,\ v_2] - [v_1\,, v_1] = [v_1\,, v_2]$

$$w = \frac{[\varrho\,(u_1),\ \varrho\,(u_2) - \varrho\ u_1)]}{\overline{[\varrho\,(u_1),\ \varrho\,(u_2) - \varrho\,(u_1)]}}\,. \tag{12'}$$

Дакле

$$\delta = \left(V(u_2) - V(u_1),\ \frac{[\varrho\,(u_1),\ \varrho\,(u_2) - \varrho\,(u_1)]}{\overline{[\varrho\,(u_1),\ \varrho\,(u_2) - \varrho\,(u_1)]}} \right) \tag{13}$$

$$= \left(\Delta\, V,\ \frac{[\varrho\,,\ \Delta\,\varrho]}{\overline{[\varrho\,,\ \Delta\,\varrho]}} \right)\cdot$$

1.22 *Параметар распоређивања.*

При проучавању праволинијских површина уводи се тако звани параметар распоређивања k (paramètre de distribution), који се дефинише овако

$$k = \lim \frac{\delta}{\operatorname{Sin}\,\varphi}\,,\ \text{када } u + h \text{ тежи } u$$

где је φ угао, који затварају две генератрисе (u) и (u+h).

Неки аутори дефинишу k као $\lim \dfrac{\operatorname{Sin} \varphi}{\delta}$.

Да бисмо добили векторијелни израз за k уврстимо у предходни израз вредност δ из ф. 13 и

$$\operatorname{Sin} \varphi = \overline{[\varrho(u), \varrho(u + \Delta u)]} = \overline{[\varrho, \Delta \varrho]}.$$

Онда имамо

$$k = \lim \frac{(\Delta V, [\varrho, \Delta\varrho])}{[\varrho, \Delta\varrho]^2} \tag{14}$$

1.23 *Централна тачка.*

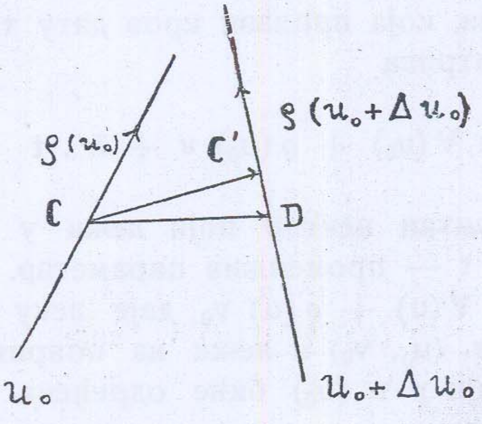
База узајамне нормале, чији је орт w, на генератриси (u_0) назива се централном тачком. Одредимо вредност v_0 параметра v одговарарајућу овој тачци. Из једначине

$$r_0 = V(u_0) + \varrho(u_0)\, v_0$$

добивамо $$\dot{r}_0 = \dot{V} + \dot{\varrho}\, v_0 + \varrho\, \dot{v}_0,$$

јер је v_0 функција параметра u.

Али из троугла CDC′ (сл. 2), где је $CC' = \Delta r_0$, $CD = \Delta\alpha\ w$, $DC' = \Delta\beta\, \varrho(u_0 + \Delta u_0)$, $\Delta r_0 = \Delta\alpha \,.\, w + \Delta\beta \,.\, \varrho(u_0 + \Delta u_0)$, $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ неки скалари или $\dot{r}_0 = \varkappa w + \mu \varrho$



Слика 2.

$$\varkappa = \lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta u}, \ \mu = \lim \frac{\Delta \beta}{\Delta u}, \quad \text{кад } \Delta u \to 0$$

$$\text{т. ј. } \dot{V} + \dot{\varrho} v_0 + \varrho \dot{v}_0 = \varkappa w + \mu . \varrho .$$

Множећи скаларно са $\dot{\varrho}$ и узимајући у обзир да је $(\dot{\varrho}, \varrho) = 0$, $(\dot{\varrho}, w) = 0$

добивамо
$$v_0 = - \frac{(\dot{V}, \dot{\varrho})}{\dot{\varrho}^2}$$

и (15)
$$r_0 = V(u_0) - \varrho(u_0) \frac{(\dot{V}, \dot{\varrho})}{\dot{\varrho}^2}$$

1.231 *Стрикциона линија.*

Геометријско место централних тачака назива се стрикционом линијом и дато је једначином

(16)
$$r = V(u) - \varrho(u) \frac{(\dot{V}, \dot{\varrho})}{\dot{\varrho}^2} .$$

1.24 *Тангентна раван.*

Тангентна раван на једној површини садржи у себи тангенте на свима кривим линијама у датој тачци на површини, зато је, да бисмо нашли једначину тангентне равни на једној праволинијској површини, потребно само написати израз за макакву тангенту јер је и генератриса тангентна на површини.

Једначина равни, која пролази кроз дату тачку (u_0, v_0) и у којој лежи генератриса

$$r = V(u_0) + \varrho(u_0) v + \lambda . t$$

где је λ неки константан вектор који лежи у равни, а није паралелан са $\varrho(u_0)$, t — променљив параметар.

Једначина $r = V(u) + \varrho(u) v_0$ даје неку криву линију, која пролази кроз т. (u_0, v_0) и лежи на површини. Тангента на овој кривој линији у т. (u_0) биће одређена вектором $\dot{r} = \dot{V}(u_0) + \dot{\varrho}(u_0) v_0$.

Узмемо ли да је $\lambda = \dot{r}$ то добивамо једначину тангентне равни у облику

$$(17) \qquad r = V(u_0) + \varrho(u_0)\, v + \left(\dot{V}(u_0) + \dot{\varrho}(u_0)\, v_0\right) t\,.$$

1.241 *Гранични положај тангентне равни.*

Замислимо сада да тачка додира, остајући на генератриси, тежи ∞. Како се види из једначине (17) при кретању додирне тачке на генератриси мења се само вектор $\lambda = \dot{V}(u_0) + \dot{\varrho}(u_0)\, v_0$. Али је вектор $\dot{V}(u_0)$ коначан и константан, зато, када v_0 тежи ∞, вектор λ тежи граничном положају $\dot{\varrho}(u_0)$, а тангентна раван окреће се око генератрисе као осе и тежи граничном положају

$$(18) \qquad r = V(u_0) + \varrho(u_0)\, v + \frac{\dot{\varrho}(u_0)}{\varrho(u_0)}\, q,$$ где је q параметар

Дакле добивамо ову теорему:

Гранични положај тангентне равни, када тачка додира тежи ∞ *је раван, која пролази кроз* ϱ *и* $\dot{\varrho}$.

1.25 *Параметри* θ, h *и* k *X. Antomari-a.*

X. Antomari применио је за проучавање праволинијских површина такозвану кинематичку методу.[1]) Идеја ове методе састоји се у томе да се површина посматра с обзиром на један покретни ортогонални триједар, који се назива „триједар везани на површину". Оса x овог триједра поклапа се са генератрисом, оса y нормална на генератрису, а лежи у асимптотној равни, најзад оса z следује из осталих (Antomari узео је десни триједар), почетак се налази у централној тачци.

Кретање овог триједра одређено је трима величинама:

1) θ — геодетска кривина сферне индикатрисе, што ју описује орт генератрисе;

2) h — пројекција брзине централне тачке на генератрису,

[1]) *X. Antomari*: Application de la méthode cinématique a l'étude des surfaces réglées etc. Paris 1894. стр. 1—15.

3) k — проекција исте брзине на нормалу на асимптотној равни или параметар распоређивања.

Свугде је узето да је независна променљива време $t = \sigma$ дужини лука сферне индикатрисе.

Од ових функција h и k карактеришу транслаторно кретање триједра а θ — обртање. Означавајући са p, q, r пројекције тренутне угаоне брзине Ω на осе покретног триједра Antomari долази, на основу познатих зависности између p, q и r и косинуса углова, што их затварају осе покретног триједра са неким непокретним, до једнакости

$$p = -\theta; \quad q = 0; \quad r = 1. \tag{19}$$

На овоме месту ми ћемо само приметити да је асимптотна раван — гранични положај тангентне равни, и дакле у њој леже вектори $\varrho(u)$ и $\dot{\varrho}(u)$.

1.3 *Основни триједар.*

Појам основног триједра је увео проф. Ант. Билимовић[1]). Принцип конструкције овог триједра састоји се у томе да узимамо неки произволни променљиви правац и називамо га основним, овај је правац карактерисан ортом u_1, који исто тако називамо основним; даље узимамо орт u_2, чији се правац подудара са правцем геометријског извода $\dot{u}_1$, најзад, орт u_3 има правац векторијелног продукта $[u_1, \dot{u}_1]$ или шта је исто $[u_1, u_2]$. Почетак овог триједра лежи у ма каквој произволној, у опште променљивој, тачци.

Осе основног триједра, имају ту особину да:

Теорема. Пројекције геометријских извода орта u_1, u_2, u_3 на исте осе изражавају се помоћу две величине K_u и L_u и то на овај начин:

$$\begin{array}{cccc} & u_1 & u_2 & u_3 \\ \dot{u}_1 & (\;0, & K_u, & 0\;) \\ \dot{u}_2 & (-K_u, & 0, & L_u) \\ \dot{u}_3 & (\;0, & -L_u, & 0\;), \end{array} \tag{20}$$

---

[1]) *Bilimovitch An.*, Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide C. R. t. 171 p. 616.

Анш. Билимовић, Природне једначине кретања чврстог тела. Глас Срп. Краљ. Академије књ. XCIX.

где су

$$(21)\quad \begin{cases} K_u = \overline{\dot u}_1 = \sqrt{u'^2_{1x} + u'^2_{1y} + u'^2_{1z}} = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z} \\ L_u = \dfrac{1}{K_u^2}(u_1, [\dot u_1, \ddot u_1]) = \dfrac{1}{K_u^2}\begin{vmatrix} u_x & u'_x & u''_x \\ u_y & u'_y & u''_y \\ u_z & u'_z & u''_z \end{vmatrix} \end{cases}$$

Доказ. $(\dot u_1, u_1) = 0$ следује из $(u_1, u_1) = 1$,

$(\dot u_1, u_2) = \overline{\dot u}_1 = K_u$, јер вектори $\dot u_1$ и u_2 имају исти правац,

$(\dot u_1, u_3) = \overline{\dot u}_1\,(u_2, u_3) = 0$ због ортогоналности u_2 и u_3,

$(\dot u_2, u_1) = -(\dot u_1, u_2) = -K_u$ следује из $(u_1, u_2) = 0$,

$(\dot u_2, u_2) = 0$, јер $(u_2, u_2) = 1$

$(\dot u_2, u_3) = \dfrac{1}{\overline{[u_1, \dot u_1]}}(\dot u_2, [u_1, \dot u_1])$, но $\dot u_2 = \left(\dfrac{\dot u_1}{\overline{\dot u}_1}\right)' = \dfrac{\ddot u_1}{\overline{\dot u}_1} - \dot u_1\left(\dfrac{1}{\overline{\dot u}_1}\right)'$ и $\overline{[u_1, \dot u_1]} = \overline{\dot u}_1 = K_u$

$(\dot u_2, u_3) = \dfrac{1}{K_u^2}(\ddot u_1\, [u_1, \dot u_1]) = L_u$,

$(\dot u_3, u_1) = 0$ следује из $(u_1, u_3) = 0$,

$(\dot u_3, u_2) = -(\dot u_2, u_3) = -L_u$ из $(u_2, u_3) = 0$,

$(\dot u_3, u_3) = 0$ из $(u_3, u_3) = 1$.

Када је основни правац одређен ма каквим вектором U, који има једнак смисао са основним правцем, а чија је дужина $\overline{U}$, онда је

$$u_1 = \frac{U}{\overline{U}},\quad u_2 = \frac{1}{\Delta}(\overline{U}\,\dot U - \overline{U}'\,U),\quad u_3 = [u_1, u_2] = \frac{1}{\Delta}\,[U, \dot U]$$

где је скалар $\Delta = \overline{[U, \dot U]}$, јер је

$$u_2 = \frac{\dot u_1}{\overline{\dot u}_1} = \frac{1}{\overline{U}^2\,\overline{\dot u}_1}(\overline{U}\,\dot U - \overline{U}'\,U) \quad \text{и} \quad \overline{U}^2\,\overline{\dot u}_1 = \overline{U}\,.\,\overline{U}\,\overline{\dot u}_1 =$$

$$\overline{U}\,.\,\overline{\dot U}\,\mathrm{Sin}\,(U, \dot U) = \overline{[U, \dot U]} = \Delta.$$

Дакле наше величине K_u и L_u примају облик

$$K_u = \overline{\dot{u}_1} = \frac{\Delta}{\overline{U}^2}$$

$$\text{(21')} \quad L_u = \frac{1}{K_u^2}\left(u_1\, [\dot{u}_1, \ddot{u}_1]\right) = \frac{\overline{U}^4}{\Delta^2}\left(\frac{U}{\overline{U}}\left[\left(\frac{\dot{U}}{\overline{U}} - \frac{\overline{U}' U}{\overline{U}^2}\right), \left(\frac{\ddot{U}}{\overline{U}} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{2\overline{U}'\dot{U}}{\overline{U}^2} - \frac{\overline{U}'' U}{\overline{U}^2} + \frac{2\,\overline{U}'^2 U}{\overline{U}^2}\right)\right]\right)$$

$$= \frac{\overline{U}}{\Delta^2}\left(U\left[\dot{U}, \ddot{U}\right]\right).$$

1.4 *Кинематско и геометријско тумачење величина* K_u *и* L_u.

Кретање основног триједра карактерише се брзином почетне тачке и тренутном угаоном брзином Ω, чије проекције на осе $u_1\ u_2\ u_3$ означимо опет са p, q и r. Узмемо ли сада брзине крајева вектора u_1, u_2, u_3 те добивамо

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= -[u_1, \Omega] = -[u_1, q\,u_2] - [u_1, r\,u_3] = r\,u_2 \\
\dot{u}_2 &= -[u_2, \Omega] = -[u_2, p\,u_1] - [u_2, r\,u_3] = p\,u_3 - r\,u_1 \\
\dot{u}_3 &= -[u_3, \Omega] = -[u_3, p\,u_1] - [u_3, q\,u_2] = -p\,u_2
\end{aligned}$$

јер, како се види из теореме § 1.3, $\dot{u}_1$ и $\dot{u}_3$ дају проекције само на осу u_2.

Из овога и горње теореме следује да су

$$p = L_u, \quad q = 0, \quad r = K_u$$

т. ј. величине K_u и L_u проекције су тренутне угаоне брзине на осе u_3 односно u_1.

Осе триједра описују при овоме кретању три узајамно ортогоналне праволинијске површине. Узмимо у обзир ону, чија је генератриса оса u_1.

Нека је једначина сферне индикатрисе, што ју описује орт u_1,

$$u_1 = \varphi(\sigma),$$

ако са σ означимо дужину лука сферне индикатрисе.

Тада $K_u = \overline{\dot{u}_1} = \overline{(\dot{u})_\sigma}\,\dfrac{d\sigma}{dt}$, где је $(\dot{u})_\sigma$ геометријски извод вектора u_1 по σ, дакле орт тангенте на сферној индикатриси, и $\overline{(\dot{u}_1)_\sigma} = 1$

Дакле

$$K_u = \frac{d\sigma}{dt} \tag{22}$$

т. ј. величина K_u је брзина тачке, краја орта u_1, на индикатриси.

Даље $\dot{u}_1 = (\dot{u}_1)_\sigma \dfrac{d\sigma}{dt}$, а $\ddot{u}_1 = (\ddot{u}_1)_\sigma \left(\dfrac{d\sigma}{dt}\right)^2 + (\dot{u}_1)_\sigma \dfrac{d^2\sigma}{dt^2}$,

одакле следује

$$L_u = \frac{1}{K_u^2}(u_1, [\dot{u}_1, \ddot{u}_1]) = \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2}\left(u_1, \left[(\dot{u}_1)_\sigma \frac{d\sigma}{dt}, (\ddot{u}_1)_\sigma \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\dot{u}_1)_\sigma \frac{d^2\sigma}{dt^2}\right]\right)$$

$$= \left(u_1 \left[(\dot{u}_1)_\sigma, (\ddot{u}_1)_\sigma\right]\right) \frac{d\sigma}{dt} = \left((\ddot{u}_1)_\sigma \left[u_1, (\dot{u}_1)_\sigma\right]\right) \frac{d\sigma}{dt}.$$

Вектор $(\ddot{u}_1)_\sigma$ је кривина индикатрисе, јер је $(\dot{u}_1)_\sigma$ орт тангенте; вектор $[u_1, (\dot{u}_1)_\sigma]$ лежи у тангентној равни на кугли радиуса $1 = \overline{u_1}$ јер u_1 стоји нормално на њу, а $(\dot{u}_1)_\sigma$ лежи у њој, дакле $\left((\ddot{u}_1)_\sigma [u_1, (\dot{u}_1)_\sigma]\right)$ је проекција кривине на тангентну раван, т. ј. геодетска кривина θ.

Дакле добијамо

$$L_u = \theta \frac{d\sigma}{dt}. \tag{22}$$

Ако сада заједно са Antomari ставимо, да дужина лука сферне индикатрисе представља нам време ($\sigma = t$) то добивамо

$$K_u = r = 1, \qquad L_u = p = \theta$$

т. ј. формуле (19) (промена знака наступила је услед тога, што смо сада узели леви триједар).

Подударање ових резултата излази из тога. да триједар Antomari-a није ништа друго него основни триједар, конструисани на орту генератрисе.

Диференцирамо ли по параметру σ једначину

$$\left(\mathrm{u}_1, (\dot{\mathrm{u}}_1)_\sigma\right) = 0\,,$$

то добивамо

$$\left(\mathrm{u}_1, (\ddot{\mathrm{u}}_1)_\sigma\right) = -1 \quad \text{јер} \quad \left((\dot{\mathrm{u}}_1)_\sigma, (\dot{\mathrm{u}}_1)_\sigma\right) = \overline{(\dot{\mathrm{u}}_1)}_\sigma^2 = 1\,.$$

Вектор-кривина $(\ddot{\mathrm{u}}_1)_\sigma$ има проекције 1) на осу u_1 једнаку -1, 2) на тангентну раван θ, дакле његов модуо — кривина индикатрисе

$$\mathrm{K}_\sigma = \overline{(\ddot{\mathrm{u}}_1)_\sigma} = \sqrt{1+\theta^2}\,.$$

Узмемо ли сада

$$\overline{\Omega}^2 = \mathrm{K}_\mathrm{u}^2 + \mathrm{L}_\mathrm{u}^2 = (1+\theta^2)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \mathrm{K}_\sigma^2\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\,,$$

то добивамо

$$\overline{\Omega} = \mathrm{K}_\sigma \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{т. ј.} \tag{23}$$

Теорема. Модуо тренутне угаоне брзине основног триједра једнак је производу кривине сферне индикатрисе, што ју описује основни орт, са брзином његовог краја на индикатриси.

1.5 *Триједар конструисани на тангенти.*

Нека је сада основни правац тангента на трајекторији почетне тачке A. Тада је, као што је познато (види на пр. Marcolongo[1]), основни триједар састављен од тангенте, главне нормале и бинормале траекторије почетка и за геометријске

[1] *R. Marcolongo,* Theoretische Mechanik B. I. S. S. 30-32. Leipzig 1912.

изводе орта ових праваца, који бележимо са T, N односно b важи теорема Serret-Frenet, да су

$$(\dot{T})_s = KN, \quad (\dot{N})_s = -KT + Lb, \quad (\dot{b})_s = -LN,$$

где су вектори $(K) = (\dot{T})_s$ и $(L) = (\dot{b})_s$ кривина односно завртање трајекторије почетка, K и L њихови модули.

Ако приметимо да је $(\dot{u})_t = (\dot{u})_s \dfrac{ds}{dt} = (\dot{u})_s v_A$ и упоредимо изразе Serret-Frenet са оним који следују из теореме § 1.3, добићемо да су

$$(24) \quad \begin{cases} K_u = K_T = K v_A, \\ L_u = L_T = L v_A. \end{cases}$$

Дакле кретање триједра конструисаног на тангенти на трајекторији неке тачке изабране за почетну одређује се помоћу три величине v_A, K, L, које су функције дужине лука ове трајекторије.

Приметимо да формуле (22) и (24) дају могућност лако извести везу између кривине, завртања криве линије и геодетске кривине сферне индикатрисе

$$L_u = \theta \frac{d\sigma}{dt} = \theta K_u \quad .$$

Откуда скративши са v_A добијамо

$$L = \theta K \quad .$$

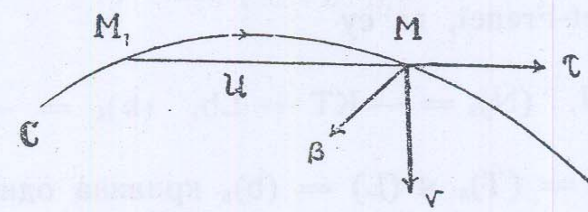
1.6 *Основни триједар конструисани на тетиви.*

Крива линија C дата је једначином $r = V(s)$, где је параметар s дужина лука.

Кроз тачке M, $r = V(s)$, и M_1, $r = V(s_1)$ повучимо тетиву $M_1 M$ и продужимо је ван т. M. Означимо са σ дужину лука $M_1 M$, $\sigma = s - s_1$.

Положај праве $M_1 M$ биће одређен вектором

$$(25) \qquad U = V(s) - V(s-\sigma).$$



Слика 3.

Претпоставимо још да је тетива $M_1 M$ константне дужине, $\bar{U} = \text{const}$. Када се тачка M креће на датој кривој линији, вектор U мења свој правац, али остаје константан по модулу, њега ми бирамо за основни правац, и на њему конструишемо основни триједар у тачци M.

Означимо са τ орт основног правца

$$\tau = \frac{U}{\bar{U}} .$$

Из овога следује, јер је $\bar{U}' = o$, $\dot{\tau} = \dfrac{\dot{U}}{\bar{U}}$.

Орт правца $\dot{\tau}$: $\nu = \dfrac{\dot{\tau}}{\bar{\dot{\tau}}} = \dfrac{\dot{U}}{\bar{U}} : \dfrac{\bar{\dot{U}}}{\bar{U}} = \dfrac{\dot{U}}{\bar{\dot{U}}}$, даје нама другу осу триједра.

Трећа оса има правац вектора $[\tau, \dot{\tau}]$, т. ј. правац $[U, \dot{U}]$, њен орт

$$\beta = \frac{[U, \dot{U}]}{\overline{[U, \dot{U}]}} ,$$

где је $\overline{[U, \dot{U}]} = \bar{U} \cdot \bar{\dot{U}}$, јер $\dot{U} \perp U$.

Кретање овако конструисаног основног триједра $M \tau \nu \beta$ одређује се прво брзином почетне тачке $M - v_M$ и тренутном угаоном брзином Ω, чије су пројекције на осе основног триједра: L_τ , O , K_τ .

Величине

$$K_\tau = \dot{\tau} = \frac{\dot{\bar{U}}}{\bar{U}}, \tag{26}$$

$$L_\tau = \frac{1}{K_\tau^2}(\tau, [\dot{\tau}, \ddot{\tau}]) = \frac{1}{\bar{U}\ \dot{\bar{U}}^2}(U, [\dot{U}, \ddot{U}])$$

су функције параметра s, али овај улази још у све изразе и имплицитно преко параметра σ.

Параметар σ, можемо одредити као функцију s из једначине

$$(U, U) = \bar{U}^2 = \text{const.} = \Big(V(s) - V(s-\sigma),\ V(s) - V(s-\sigma) \Big).$$

Ако је дата крива линија једначином $r = V(s)$, а $\bar{U} =$ const. онда

$$\sigma = \sigma(s)$$

Како једначина $\bar{U}^2 =$ const. може имати неколико корена, то треба узети за σ ону вредност која одговара начелним условима проблема.

Трансформишемо изразе за K_τ и L_τ. Најпре променимо аргуменат по којем врши се диференцирање

$$\dot{U}_t = (\dot{U})_s \frac{ds}{dt} = \Big(\dot{V}_s(s) - \dot{V}_s(s-\sigma) \Big) \frac{ds}{dt}.$$

Али $\dot{V}_s(s) = \dot{r} = t_s$ орту тангенте у тачци M.

Даље $\dot{V}_s(s-\sigma) = \dot{V}_{s-\sigma}(s-\sigma)(1-\sigma'_s) = t_{s_1}(1-\sigma'_s)$, где је t_{s_1} орт тангенте у тачци M_1.

Диференцирањем једначине $\bar{U}^2 =$ const. добивамо

$$\Big(V(s) - V(s_1),\ \dot{V}_s(s) - \dot{V}_s(s) \Big) = o.$$

Одакле, ако смeнимо $\dot{V}_s(s_1)$ са $t_{s_1}(1-\sigma'_s)$ и $\dot{V}_s$ са t_s

$$\sigma'_s = 1 - \frac{\left(V(s) - V(s_1),\ t_s\right)}{\left(V(s) - V(s_1),\ t_{s_1}\right)}, \quad \text{но } V(s) - V(s_1) = U\tau$$

$$\sigma'_s = 1 - \frac{(\tau,\ t_s)}{(\tau,\ t_{s_1})}$$

и

$$\dot{V}_s(s-\sigma) = t_{s_1}\frac{(\tau,\ t_s)}{(\tau,\ t_{s_1})}.$$

Дакле вектор $\dot{U}_s = \dfrac{t_s(\tau,\ t_{s_1}) - t_{s_1}(\tau,\ t_s)}{(\tau,\ t_{s_1})}$.

Применимо ли сада формулу 5 (§ 1.1) и узмимо у обзир да је

$$(\dot{\tau})_s = \frac{(\dot{U})_s}{U}$$

то је (27) $$(\dot{\tau})_s = \frac{1}{(U,\ t_{s_1})}\left[\tau,\ [t_s,\ t_{s_1}]\right].$$

На основу горњег

$$(28)_1 \qquad K_\tau = \frac{\overline{\left[\tau,\ [t_s,\ t_{s_1}]\right]}}{(U,\ t_{s_1})}\,\frac{ds}{dt}.$$

Другу величину L_τ узмимо у облику

$$(28)_2 \qquad L_\tau = \frac{1}{K_\tau^2}(\tau,\ [\dot{\tau},\ \ddot{\tau}]) = \frac{1}{K_\tau^2}\left(\tau,\ \left[(\dot{\tau})_s,\ (\ddot{\tau})_s\right]\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.$$

Из израза (27) диференцирањем по s добивамо

$$(\ddot{\tau})_s = \frac{1}{(U,\ t_{s_1})}\left\{\left[(\dot{\tau})_s,\ [t_s,\ t_{s_1}]\right] + \left[\tau[\dot{t}_s,\ t_{s_1}]\right] + \right.$$

$$+\left[\tau\left[t_s,\ \dot{t}_{s1}\right]\right]\Big\} - \left[\tau\left[t_s,\ t_{s1}\right]\right]\frac{(\dot{U},\ t_{s1})}{(U,\ t_{s1})^2}$$

Овај израз као и (27) унесимо у L_τ и трансформишемо сваки од сабирака засебно, остављајући на страни све скаларне чинитеље.

$$1)\ \left(\tau,\left[(\dot{\tau})_s\ \left[(\dot{\tau})_s,\left[t_s,t_{s1}\right]\right]\right]\right)=\left(\tau,(\dot{\tau})_s\left(\left[t_s,\ t_{s1}\right],(\dot{\tau})_s\right)\right)$$

$$-\left(\tau,\ \left[t_s,\ t_{s1}\right]\right)\left((\dot{\tau})_s,\ (\dot{\tau})_s\right)$$

на основу формуле 5 (§ 1.1), но $\left(\tau,\ (\dot{\tau})_s\right)=0$, $(\dot{\tau},\ \dot{\tau})=K^2_\tau$, дакле овај је израз једнак:

$$-(\tau,\ [t_s,\ t_{s1}])\,K^2_\tau:\ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

$$2)\ \left(\tau,\left[(\dot{\tau})_s,\left[\tau\left[\dot{t}_s,t_{s1}\right]\right]\right]\right)=(\tau,\tau)\left((\dot{\tau})_s,\ [\dot{t}_s,t_{s1}]\right)-$$

$$-\left(\tau,\ [\dot{t}_s,t_{s1}]\right)\left(\tau,(\dot{\tau})_s\right)=\left((\dot{\tau})_s,\ [\dot{t}_s,\ t_{s1}]\right),$$

$$=K_\tau\left(\nu,\ [\dot{t}_s,\ t_{s1}]\right):\ \frac{ds}{dt},$$

$$\text{јер } (\tau,\ \tau)=1,\ \text{а } (\tau,\dot{\tau})=0.$$

$$3)\ \left(\tau,\left[\ \dot{\tau})_s,\left[\tau,\ [t_s,\ \dot{t}_{s1}]\right]\right]\right)=K_\tau\ \ (\nu,\ [t_s,\ \dot{t}_{s1}]):\ \frac{ds}{dt}$$ аналого трансформацији 2) али је $\dot{t}_{s1}$ геометријски извод орта t_{s1} по s т. ј.

$$\dot{t}_{s1}=(\dot{V}_{s1})_s=\ddot{V}_{s_1s_1}(1-\sigma'_s)=\dot{t}_{s_1s_1}\,\frac{(\tau,\ t_s)}{(\tau,\ t_{s_1})}.$$

4) најзад последњи члан је раван нули, јер је

$$\left[\dot{\tau},\left[\tau,\left[t_s,\ t_{s_1}\right]\right]\right]=0$$

Скупимо сада све горе изведено

$$
(29) \quad L_\tau = \frac{1}{(U,\, t_{s_1})} \Big\{ -(\tau,\, [t_s,\, t_{s_1}]) \frac{ds}{dt} + \frac{(\nu,\, [\dot{t}_s,\, t_{s_1}])}{K_\tau} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{(\nu,\, [t_s,\, \dot{t}_{s_1 s_1}])}{K_\tau} \frac{(\tau,\, t_s)}{(\tau,\, t_{s_1})} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \Big\}
$$

где су вектори $\dot{t}_s$ и $\dot{t}_{ss_1}$ кривине у тачкама M односно M_1 криве линије C.

Означимо са K_{ss_1} и L_{ss_1} следеће величине, функције дужине лука

$$
(30) \quad \begin{cases} K_{ss_1} = \dfrac{\overline{\left[\tau,\, [t_s,\, t_{s_1}]\right]}}{(U,\, t_{s1})}, \\[2ex] L_{ss_1} = \dfrac{1}{(U,\, t_{s_1})} \Big\{ -(\tau,\, [t_s,\, t_{s_1}]) + \dfrac{(\nu,\, [\dot{t}_s,\, t_{s1}])}{K_{ss_1}} + \dfrac{(\nu,\, [t_s,\, \dot{t}_{ss}])}{K_{s s_1}} \dfrac{(\tau,\, t_s)}{(\tau,\, t_{s1})} \Big\} \end{cases}
$$

последња може да буде представљена у облику

$$
(30') \qquad L_{ss1} = \frac{1}{(U,\, t_{s_1})} \Big\{ -(\tau,\, [t_s,\, t_{s1}]) + \frac{\left(\tau, \left[[t_s,\, t_{s_1}],\, [\dot{t}_s,\, t_{s1}]\right]\right)}{K^2_{ss_1}} \Big\} .
$$

Онда за K_τ и L_τ имамо ова два израза, ако са v_M означимо брзину т. M,

$$
(31) \quad \begin{aligned} K_\tau &= K_{ss_1}\, v_M \\ L_\tau &= L_{ss_1}\, v_M \end{aligned}
$$

аналого случају триједра конструисаног на тангенти.

Дакле, када је дата крива линија и тетива константне дужине, можемо наћи из једначине 25 параметар σ (бирајући вредност одговарајућу начелним условима) као функцију s, после тога одредити величине τ, t_s, t_{s_1}, $\dot{t}_s$, $\dot{t}_{s_1 s_1}$ и, најзад, K_{ss_1} и L_{ss_1} из формула (30).

Кретање нашег основног триједра $M\tau\nu\beta$ биће одређено: 1) транслаторни део — брзином v_M почетка и 2) обртање — тренутном угаоном брзином Ω, чије су пројекције на осе τ, ν, β: $L_{ss_1} v_M$, 0, $K_{ss_1} v_M$.

1.61 *Величине* K_{ss_1} и L_{ss_1}. *Случај дегенерације.*

Као што се види из израза 26 и 31

$$K_\tau = \bar{\dot{\tau}} = \bar{\dot{\tau}}_s \frac{ds}{dt} = K_{ss_1} \frac{ds}{dt} \text{ т. ј.}$$

$$K_{ss_1} = \bar{\dot{\tau}}_s$$

модуо геометријског извода орта тетиве.

Узмимо геометријски извод по s вектора $\beta = \dfrac{[\tau,\ \dot{\tau}]}{K_\tau} = \dfrac{[\tau,\ (\dot{\tau})_s]}{K_{ss_1}}$

$$(\dot{\beta})_s = \frac{[(\dot{\tau})_s,\ (\dot{\tau})_s] + [\tau,\ (\ddot{\tau})_s]}{K_{ss_1}} - \frac{K'_{ss_1}\,[\tau,\ (\dot{\tau})_s]}{K^2_{ss_1}} = \frac{[\tau,\ (\ddot{\tau})_s]}{K_{ss_1}} - \frac{K'_{ss_1}\,[\tau,\ (\dot{\tau})_s]}{K^2_{ss_1}}$$

и помножимо га скаларно са вектором $\nu = \dfrac{(\dot{\tau})_s}{K_{ss_1}}$.

$$\left((\dot{\beta})_s,\ \nu\right) = \frac{\left((\dot{\tau})_s\,[\tau,\ (\ddot{\tau})_s]\right)}{K^2_{ss_1}} = -\frac{\left(\tau,\ [(\dot{\tau})_s,\ (\ddot{\tau})_s]\right)}{K^2_{ss_1}}.$$

Ако упоредимо овај израз са $(28)_2$ и сетимо се основне теореме § 1.3, видимо да је пројекција вектора $(\dot{\beta})_s$ на осу ν у исто време његов модуо са знаком —

и дакле $$L_{ss_1} = \overline{(\dot{\beta})}_s$$

т. ј. L_{ss_1} модуо геометријског извода вектора β по дужини лука s.

Величине K_{ss_1} и L_{ss_1} потпуно су аналоге кривини и обртању и можемо конструисати векторе $(K_{ss_1}) = (\dot{\tau})_s$ и $(L_{ss_1}) = (\dot{\beta})_s$, аналоге вектору — кривине и вектору — обртања.

Ако дужина тетиве тежи нули онда триједар конструисани на њој тежи ка триједру тангента, гл. нормала и бинормала, величине пак K_{ss_1} и L_{ss_1} теже K и L.

1.62 *Косинуси углова праваца* τ, ν, β *са тангентом у т. М. Њихове изводе.*

Означимо са τ_T, ν_T, β_T косинусе углова оса τ, ν, β са тангентом T у тачци M т. ј.

$$\tau_T = (\tau, t_s), \qquad \nu_T = (\nu, t_s), \qquad \beta_T = (\beta, t_s). \tag{32}$$

Диференцирамо сада по s

$$\begin{aligned} \tau'_T &= (\dot{\tau}, t_s) + (\tau, \dot{t}_s), \\ \nu'_T &= (\dot{\nu}, t_s) + (\nu, \dot{t}_s), \\ \beta'_T &= (\dot{\beta}, t_s) + (\beta, \dot{t}_s). \end{aligned}$$

Ако означимо са (K_s) в.-кривину у т. M, са $K_{s\tau}$, $K_{s\nu}$, $K_{s\beta}$ његове пројекције на осе τ, ν, β и узмимо у обзир шему (§ 1.3) за пројекције извода τ, ν, β на исте осе, то добивамо

$$\left\{ \begin{aligned} \tau'_T &= K_{s\tau} + K_{ss_1} \nu_T, \\ \nu'_T &= K_{s\nu} - K_{ss_1} \tau_T + L_{ss_1} \beta_T, \\ \beta'_T &= K_{s\beta} \qquad\qquad\quad - L_{ss_1} \nu_T. \end{aligned} \right. \tag{33}$$

1.63 *Пресек нормалних равни у тачкама* M и M_1.

У даљим извођењима ће нам требати положај правепресека нормалних равни у т.т. M и M_1 криве линије. Свака линија која лежи у нормалној равни ортогонална тангенти и према томе орт тражене праве је дат изразом

$$\varrho = \frac{[t_s, t_{s_1}]}{|[t_s, t_{s_1}]|}.$$

Нађимо једну тачку те праве. Једначина главне нормале у т. M може да буде написана овако $r = V(s) + u \cdot N$ где је u - параметар, N - орт гл. нормале. Главна нормала сече уопште нашу праву, коју називаћемо права ll, у некој т. A (ако је крива линија оваква да су N и ϱ паралелне, онда исто расуђивање можемо применити на бинормалу или гл. нормалу у т. M_1) и $r_A = V(s) + u_A N$. Даље имамо $V(s) + u_A N = V(s_1) + v_A n + w_A B$, где су n, B орте гл. нормале и бинормале у т. M_1, v и w неки параметри.

Из овога следује $\left(V(s) - V(s_1),\ t_{s_1}\right) + u_A\,(N,\ t_{s_1}) = 0$,

$$r_A = V(s) - \frac{(U,\ t_{s_1})}{(N,\ t_{s_1})}\, N$$

и једначина праве ll у овоме облику

$$(34) \qquad r = V(s) - \frac{(U,\ t_{s_1})}{(N,\ t_{s_1})}\, N + \frac{[t_s,\ t_{s_1}]}{[t_s,\ t_{s_1}]}\; u\ .$$

Израчунајмо још пројекције вектора ϱ на осе τ, ν, β, а то су

$$\varrho_\tau = \frac{(\tau,\ [t_s,\ t_{s_1}])}{[t_s,\ t_{s_1}]},$$

$$(35) \qquad \varrho_\nu = \frac{(\nu,\ [t_s,\ t_{s_1}])}{[t_s,\ t_{s_1}]} = \frac{\left([\tau[t_s,\ t_{s_1}]],\ [t_s,\ t_{s_1}]\right)}{\tau\,(U,\ t_{s_1})\,[t_s,\ t_{s_1}]} = 0,$$

$$\varrho_\beta = \frac{(\beta,\ [t_s,\ t_{s_1}])}{[t_s,\ t_{s_1}]} = -\,K_{ss_1}\,\frac{(U,\ t_{s_1})}{[t_s,\ t_{s_1}]}$$

јер је $\beta = [\tau,\ \nu]$

и, најзад, вектор

$$[\varrho,\ N] = -\left[N,\ [t_s,\ t_{s_1}]\right] = -\ t_s\,(N,\ t_{s_1})\ .$$

Права ll нормална је на обе тангенте а паралелна са равни $\tau\beta$.

1.64 *Друго геометријско представљање кретања триједра* $M\tau\nu\beta$.

Кретање триједра конструисаног на тетиви може бити представљено на други начин сем онога који смо споменули у § 1.6, наиме, као два обртања: 1) око осе *II* (§ 1.63) и 2) око тетиве. Нека је прво обртање представљено вектором $\delta\omega\,[t_s, t_{s_1}]$, који одговара померању тачке M за $\delta s \,.\, t_s$. Из овога услова лако је одредити $\delta\omega$. Означимо са ϱ_A вектор чији је почетак у т. M, а крај у A.

Као што се види из (34) $\varrho_A = -\dfrac{(U, t_{s_1})}{(N, t_{s_1})} N$ и према томе

$$\delta s \,.\, t_s = \left[\delta\omega\,[t_s, t_{s_1}], \frac{(U, t_{s_1})}{(N, t_{s_1})} N\right] =$$

$$= -\delta\omega \frac{(U, t_{s_1})}{(N, t_{s_1})}\Big[N, [t_s, t_{s_1}]\Big] = -\delta\omega \frac{(U, t_{s_1})}{(N, t_{s_1})} (N, t_{s_1})\, t_s,$$

$$\delta\omega = -\frac{\delta s}{(U, t_{s_1})}.$$

Тачка M_1 помакне се у правцу t_{s_1} и триједар $M\tau\nu\beta$ обрне се. Овај је део његовог обртања карактерисан вектором $\delta\omega$ чије су пројекције на осе $\tau\nu\beta$, према 35 § 1.63:

$$\left(-\frac{(\tau\,[t_s, t_{s_1}])}{(U, t_{s_1})}\delta s,\ 0,\ K_{ss_1}\,\delta s\right).$$

Али потпуно обртање одређује се вектором $\delta\Omega$ ($L_{ss_1}\,\delta s$, 0, $K_{ss_1}\,\delta s$) (узимамо као независну променљиву s). Зато је потребно заокренути триједар око осе τ и то тако да би ово обртање било карактерисано вектором

$$\left(L_{ss_1} + \frac{(\tau\,[t_s, t_{s_1}])}{(U, t_{s_1})}\right)\delta s\,\tau = \frac{\left(\tau, \Big[[t_s, t_s], [t_s, t_{s_1}]\Big]\right)}{K^2_{ss_1}\,(U, t_{s_1})}\delta s\,\tau.$$

ГЛАВА II

Природне једначине кретања чврстог тела[1]).

2.1 *Моменти и продукти инерције.*

Изрази за моменат и продукат инерције у следећем векторијелном облику уведени су пр. Ан. Билимовићем[1]) и то

$$(1)\quad \begin{aligned} J_u &= \Sigma m_i\,([u,\varrho_i],[u,\varrho_i]),\\ \Pi_{uv} &= -\,\Sigma m_i\,([u,\varrho_i],[v,\varrho_i]), \end{aligned}$$

где су u, v орти одговарајућих праваца, ϱ_i — вектор чији је почетак у некој т. 0, а крај у т. M_i (маса m_i).

Лако је доказати да ови изрази имају познати садржај, наиме $([u,\varrho_i],[u,\varrho_i]) = \overline{[u,\varrho_i]}^2 = \varrho_i^2 \operatorname{Sin}^2(u,\varrho_i) = r_i^2$, ако са r_i означимо одстојање т. M_i од праве u;

$$\Big([u,\varrho_i],[v,\varrho_i]\Big) = \Big(v,\Big[\varrho_i,[u,\varrho_i]\Big]\Big) = (v,u)(\varrho_i,\varrho_i) -$$
$$-\,(v,\varrho_i)(u,\varrho_i)$$

(v,ϱ_i), (u,ϱ_i) представљају пројекције на осе v, u; ако су ове осе ортогоналне, имамо обичан израз за продукат инерције, јер је $(u,v)=0$. У противном случају овај је израз генерализација за косоугли систем оса.

Интересантно је, како се из ових израза може извести теорема Steiner'а за моменат инерције и сасвим њој аналога за продукат инерције.

Нека су у т. M дата два правца u, v, узмимо два њима паралелна правца у центру инерције C и ставимо

$\varrho_i = \varrho_c + r_i$, вектори ϱ_i, ϱ_c имају почетак у т. M, r_i у т. C.

Онда је

$$J_u = \Sigma m_i\,([u,\varrho_c + r_i],[u,\varrho_c + r_i]) = \Sigma m_i\,([u,r_i],[u,r_i]) +$$
$$+\,2\,\Sigma m_i\,([u,\varrho_c],[u,r_i]) + \Sigma m_i\,([u,\varrho_c],[u,\varrho_c]).$$

Први члан је моменат инерције око осе u, која пролази кроз центар инерције, други је једнак 0, јер $\Sigma m_i r_i = 0$,

[1]) Ан. Билимовић l. c. стр. 8.

најзад трећи је $M\delta^2$, где је δ одстојање оса u, које пролазе кроз т. т. M и C, јер је $[u, \varrho_c] = \varrho_c \operatorname{Sin}(u, \varrho_c) = \delta$. Теорема Steiner'а

$$J_u = J_{uc} + M\delta^2 .$$

Даље имамо

$$\begin{aligned} \Pi_{uv} &= -\Sigma m_i \left([u, \varrho_c + r_i], [v, \varrho_c + r_i]\right) = \\ &-\Sigma m_i \left([u, r_i], [v, r_i]\right) - \Sigma m_i \left([u, \varrho_c], [v, \varrho_c]\right) \\ &= \Pi_{uvc} - M\left([u, \varrho_c] [v, \varrho_c]\right). \end{aligned}$$

ако су осе u и v ортогоналне, други члан је једнак

$$+ M(u, \varrho_c)(v, \varrho_c).$$

Када су дата три узајамно ортогонална правца, односно којих моменти и продукти инерције означени са J_1, J_2, J_3, Π_{23}, Π_{31}, Π_{12}, а косинуси углова праваца u и v са осама 1, 2, 3: u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, онда можемо да изведемо следеће изразе за J_u и Π_{uv}

$$\begin{aligned} J_u = \Sigma m_i \left([u, \varrho_i], [u, \varrho_i]\right) &= \Sigma m_i \Big\{ (u_2 \varrho_{i3} - u_3 \varrho_{i2})^2 + \\ &+ (u_3 \varrho_{i1} - u_1 \varrho_{i3})^2 + (u_1 \varrho_{i2} - u_2 \varrho_{i1})^2 \Big\} = \\ = \Sigma m_i \Big\{ u_1^2 (\varrho_{i2}^2 + \varrho_{i3}^2) &+ u_2^2 (\varrho_{i3}^2 + \varrho_{i1}^2) + \\ + u_3^2 (\varrho_{i1}^2 + \varrho_{i2}^2) - 2u_2 u_3 \varrho_{i2} \varrho_{i3} &- 2u_3 u_1 \varrho_{i3} \varrho_{i1} - \\ &- 2u_1 u_2 \varrho_{i1} \varrho_{i2} \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{uv} = -\Sigma m_i \Big\{ &(u_2 \varrho_{i3} - u_3 \varrho_{i2})(v_2 \varrho_{i3} - v_3 \varrho_{i2}) + \\ + &(u_3 \varrho_{i1} - u_1 \varrho_{i3})(v_3 \varrho_{i1} - v_1 \varrho_{i3}) + \\ + &(u_1 \varrho_{i2} - u_2 \varrho_{i1})(v_1 \varrho_{i2} - v_2 \varrho_{i1}) \Big\} = \end{aligned}$$

$$= - \Sigma m_i \left\{ u_1 v_1 (\varrho_{i2}^2 + \varrho_{i3}^2) + u_2 v_2 (\varrho_{i3}^2 + \varrho_{i1}^2) + \right.$$
$$+ u_3 v_3 (\varrho_{i1}^2 + \varrho_{i2}^2) - (u_2 v_3 + u_3 v_2) \varrho_{i3} \varrho_{i2} -$$
$$\left. - (u_3 v_1 + u_1 v_3) \varrho_{i1} \varrho_{i3} - (u_1 v_2 + u_2 v_1) \varrho_{i2} \varrho_{i1} \right\} .$$

Но

$$J_1 = \Sigma m_i (\varrho_{i2}^2 + \varrho_{i3}^2), \quad J_2 = \Sigma m_i (\varrho_{i3}^2 + \varrho_{i1}^2), \quad J_3 = \Sigma m_i (\varrho_{i2}^2 + \varrho_{i1}^2),$$
$$\Pi_{23} = \Sigma m_i \varrho_{i2} \varrho_{i3}, \quad \Pi_{31} = \Sigma m_i \varrho_{i3} \varrho_{i1}, \quad \Pi_{12} = \Sigma m_i \varrho_{i1} \varrho_{i2}.$$

Дакле дефинитивно добивамо

$$J_u = J_1 u_1^2 + J_2 u_2^2 + J_3 u_3^2 - 2 \Pi_{23} u_2 u_3 - 2 \Pi_{31} u_3 u_1 - 2 \Pi_{12} u_1 u_2$$

(2)

$$\Pi_{uv} = - \left\{ J_1 u_1 v_1 + J_2 u_2 v_2 + J_3 u_3 v_3 - \Pi_{23} (u_2 v_3 + u_3 v_2) - \Pi_{31} (u_3 v_1 + u_1 v_3) - \Pi_{12} (u_1 v_2 + u_2 v_1) \right\} .$$

2.2 *Жива сила.*

Како се кинематско стање чврстога тела одређује помоћу транслаторне брзине неке његове тачке A, коју ћемо звати пол, и тренутном угаоном брзином Ω, то је згодније трансформисати израз живе силе

(3) $$2 T = \Sigma m_i v_i^2,$$

где је m_i маса т. m_i, v_i — њена брзина. Означимо са v_A — транслаторну брзину пола A, са ϱ_i вектор, чији је почетак у полу A, а крај у т. m_i, најзад, са ϱ_c вектор, чији је почетак у A, а крај у центру инерције, са M — масу система т. ј. чврстог тела.

Онда је

$$v_i = v_A + [\Omega, \varrho_i]$$

и

$$\varrho_c = \frac{\Sigma m_i \varrho_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \varrho_i}{M} .$$

Ставимо сада ове изразе у (3)

$$(3') \quad 2\,T = \Sigma\,(m_i\, v_i\,,\, v_i\,) = M\, v_A^2 + 2\,M\,(v_A\,,\,[\Omega\,,\,\varrho_c\,]) + \Sigma\, m_i\,([\Omega\,,\,\varrho_i\,],\,[\Omega\,,\,\varrho_i\,]) = M\, v_A^2 + 2\,M\,(v_A\,,\,[\Omega,\,\varrho_c\,]) + \Omega^2\, J_\Omega$$

где је J_Ω, моменат инерције око осе Ω (види 1, § 2.1).

Узмимо да је пол A — почетак неког ортогоналног триједра, чије осе означимо са 1, 2, 3, тада је на основу (1), (4) § 1.1 и (2) § 2.1

$$(3'') \quad \begin{aligned} 2\,T &= M\,(v_{A1}^2 + v_{A2}^2 + v_{A3}^2) + 2\,M\,\{\, v_{A1}\,(\Omega_2\,\varrho_{c3} - \\ &- \Omega_3\,\varrho_{c2}) + v_{A2}\,(\Omega_3\,\varrho_{c1} - \Omega_1\,\varrho_{c3}) + v_{A3}\,(\Omega_1\,\varrho_{c2} - \\ &- \Omega_2\,\varrho_{c1})\,\} + J_1\,\Omega_1^2 + J_2\,\Omega_2^2 + J_3\,\Omega_3^2 - 2\,\Pi_{23}\,\Omega_2\,\Omega_3 - \\ &- 2\,\Pi_{31}\,\Omega_3\,\Omega_1 - 2\,\Pi_{12}\,\Omega_1\,\Omega_2 \end{aligned}$$

где смо са индексима 1, 2, 3 означили пројекције на одговарајуће осе т. ј.

$$v_A\,(v_{A1}\,,\,v_{A2}\,,\,v_{A3})\,,\quad \Omega\,(\Omega_1\,,\,\Omega_2\,,\,\Omega_3),\quad \varrho_c\,(\varrho_{c1}\,,\,\varrho_{c2},\,\varrho_{c3})\,.$$

Напишимо још изразе за делимичне изводе живе силе, посматране као функције компонената брзине v_A и тренутне угасне брзине Ω

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} &= M v_{A1} + M\,(\Omega_2\,\varrho_{c3} - \Omega_3\,\varrho_{c2}), \\ \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} &= M v_{A2} + M\,(\Omega_3\,\varrho_{c1} - \Omega_1\,\varrho_{c3}), \\ \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} &= M v_{A3} + M\,(\Omega_1\,\varrho_{c2} - \Omega_2\,\varrho_{c1})\,, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \Omega_1} &= M\,(\varrho_{c2}\, v_{A3} - \varrho_{c3}\, v_{A2}) + J_1\,\Omega_1 - \Pi_{31}\,\Omega_3 - \Pi_{12}\,\Omega_2, \\ \frac{\partial T}{\partial \Omega_2} &= M\,(\varrho_{c3}\, v_{A1} - \varrho_{c1}\, v_{A3}) + J_2\,\Omega_2 - \Pi_{12}\,\Omega_1 - \Pi_{23}\,\Omega_3, \\ \frac{\partial T}{\partial \Omega_3} &= M\,(\varrho_{c1}\, v_{A2} - \varrho_{c2}\, v_{A1}) + J_3\,\Omega_3 - \Pi_{23}\,\Omega_2 - \Pi_{31}\,\Omega_1. \end{aligned} \right.$$

2.3 *Закони количине кретања и момента количине кретања.*

Ако сматрамо да су чврста тела системи материјалних тачака, онда за њих важе закони количине кретања и момента количине кретања, који су консеквенције другог Њутоновог принципа, и који могу бити дати следећим геометријским једначинама

$$(6) \qquad (\dot{M}) = (F) + (R)\,,$$

$$(7) \qquad (\dot{G}^{(M)}) + [v_M\,,\, M] = (L^{(M)}) + (\Lambda^{(M)})$$

где су $M = \Sigma m_i v_i$ — вектор количина кретања чврстога тела,

$F = \Sigma F_i$ — резултујући вектор сила, које дејствују на чврсто тело,

$R = \Sigma R_i$ — резултујући вектор реакција;

и $G^{(M)} = \Sigma g_i^{(M)} = \Sigma [\varrho_i\,,\, m_i v_i]$ главни моменат количине кретања око т. M,

$$\left.\begin{array}{l} L^{(M)} = \Sigma L_i^{(M)} = \Sigma [\varrho_i\,,\, F_i] \\ \Lambda^{(M)} = \Sigma \Lambda_i^{(M)} = \Sigma [\varrho_i\,,\, R_i] \end{array}\right\}$$ главни моменти сила односно реакција око исте тачке,

најзад, ϱ_i је вектор са почетком у ма каквој т. M (полу) а крајем у т. m_i. Пол M може да буде покретан или непокретан, ми ћемо га сматрати као покретног (зато се појављује у једначини 7 члан $[v_M, M]$) и означаваћемо његову брзину са v_M.

На основу 8 (§ 1.1) имамо следеће изразе за пројекције геометријских једначина на неки променљив правац u

$$(6') \qquad \frac{d}{dt}(M, u) - (M, \dot{u}) = (F, u) + (R, u)\,,$$

$$(7') \qquad \frac{d}{dt}(G^{(M)}, u) - (G^{(M)}, \dot{u}) + ([v_M, M], u) = (L^{(M)}, u) + (\Lambda^{(M)}, u).$$

Између пројекција вектора M и $G^{(M)}$ на осе ортогоналног триједра $M123$ и парцијелних извода живе силе (4) и (5) § 2.2 постоје везе, које се виде из једначина

$$M = \Sigma m_i v_i = \Sigma m_i (v_M + [\Omega\,,\, \varrho_i]) = M v_M + M [\Omega\,,\, \varrho_c]$$

$$G^{(M)} = \Sigma g_i^{(M)} = \Sigma [\varrho_i\,,\, m_i v_i] = \Sigma [m_i \varrho_i\,,\, v_M] +$$

$$+ \Sigma \left[m_i \varrho_i , [\Omega , \varrho_i] \right] = M [\varrho_c , v_M] + \Omega \Sigma (m_i \varrho_i , \varrho_i) -$$
$$- \Sigma m_i \varrho_i (\varrho_i , \Omega) .$$

Пројецирамо ли ове једначине на осу 1, на пример, то добивамо

$$M_1 = M v_{M1} + M (\Omega_2 \varrho_{c3} - \Omega_3 \varrho_{c2})$$

$$G_1^{(M)} = M (\varrho_{c2} v_{M3} - \varrho_{c3} v_{M2}) + \Omega_1 \Sigma m_i \varrho_i^2 - \Omega_1 \Sigma m_i \varrho_{i1}^2 -$$
$$- \Omega_2 \Sigma m_i \varrho_{i1} \varrho_{i2} - \Omega_3 \Sigma m_i \varrho_{i1} \varrho_{i3} .$$

Ако узмимо у обзир да је $\varrho_i^2 = \varrho_{i1}^2 + \varrho_{i2}^2 + \varrho_{i3}^2$ и изразе за моменте и продукте инерције (§ 2.1), и упоредимо са (4) и (5) § 2.2, онда добивамо

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial v_{M1}} = M_1 , \quad \frac{\partial T}{\partial v_{M2}} = M_2 , \quad \frac{\partial T}{\partial v_{M3}} = M_3 ; \\ &\frac{\partial T}{\partial \Omega_1} = G_1^{(M)}, \quad \frac{\partial T}{\partial \Omega_2} = G_2^{(M)}, \quad \frac{\partial T}{\partial \Omega_3} = G_3^{(M)} . \end{aligned} \right.$$

2.4 *Једначине кретања чврстог тела с обзиром на произвољни основни триједар.*

Геометријске једначине (6) и (7) § 2.3, које изражавају законе количине кретања и момента количине кретања, еквивалентне су шест скаларним. Ове скаларне једначине добивају се, када се једначине (6) и (7) пројецирају на осе неког триједра. Нека је у полу M на произволном за сада правцу и конструисан основни триједар $M u_1 u_2 u_3$. Означавајући као што и пре са индексима 1, 2, 3 пројекције на осе u_1, u_2, u_3, на основу 20 (§ 1.3), (6′), (7′) § 2.3 и (2), (4) § 1.1, добивамо следећи систем скаларних једначина

$$(9): \quad \begin{aligned} &\frac{d M_1}{dt} - M_2 K_u = F_1 + R_1 \\ &\frac{d M_2}{dt} + M_1 K_u - M_3 L_u = F_2 + R_2 \\ &\frac{d M_3}{dt} + M_2 L_u = F_3 + R_3 \end{aligned}$$

$$\frac{d\,G_1^{(M)}}{dt} - G_2^{(M)} K_u + v_{M2} M_3 - v_{M3} M_2 = L_1^{(M)} + \Lambda_1^{(M)}$$

$$\frac{d\,G_2^{(M)}}{dt} + G_1^{(M)} K_u - G_3^{(M)} L_u + v_{M3} M_1 - v_{M1} M_3 = L_2^{(M)} + \Lambda_2^{(M)}$$

$$\frac{d\,G_3^{(M)}}{dt} + G_2^{(M)} L_u + v_{M1} M_2 - v_{M2} M_1 = L_3^{(M)} + \Lambda_3^{(M)} .$$

Нека се транслаторни део кретања карактерише брзином т. А чврстог тела v_A. Жива сила имаће исти облик (3″) § 2.2, само почетци свих вектора изузев ϱ биће у т. А и моменте и продукте инерције треба узимати с обзиром на осе, чији је почетак у т. А, а које су паралелне са осама u_1, u_2, u_3. У овоме случају пројекције вектора M имају вредности:

$$M_1 = \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} , \quad M_2 = \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} , \quad M_3 = \frac{\partial T}{\partial v_{A3}}$$

а пројекције вектора $G^{(M)}$

$$G_1^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_1} + b\, M_3 - c\, M_2 , \quad G_2^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_2} + c\, M_1 - a\, M_3 , \quad G_3^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_3} + a\, M_2 - b\, M_1$$

где су a, b, c пројекције вектора ϱ, чији је почетак у т. М а крај у т. А јер

$$G^{(M)} = G^{(A)} + [\varrho , M] .$$

2.5 *Принцип конструисања природних једначина.*

Кретање чврстог тела дешава се према законима количине кретања и момента количине кретања, који дају нама шест диференцијалних једначина другога реда. Дакле, ако су дате силе, које дејствују на чврсто тело, интегрисање овог система симултаних обичних диференцијалних једначина решава питање. У случају слободног чврстог тела потребно је интегрисати систем шест једначина, јер за одређивање кретања потребно је шест координатних параметара, на пример, три координате тачке чврстог тела и три Euler'ова угла. Ако тело није слободно, т. ј. постоје неке везе, онда одговарајућим избором координатних параметара можемо смањити ред проблема. Ове диференцијалне једначине могу бити конструисане на различите начине — пројецирањем геометријских једначина (6) и (7) § 2.3 на разне триједре. Ако се избор триједра оснива на неким кинематским или динамским особинама кретања или стоји у вези са телом, онда добивене на овај начин једначине г. А. Билимовић назива природним једначинама кретања чврстог тела, зато јер оне карактеришу суштину кретања. Натуралне једначине за тачку дате L. Euler'ом су њихов специјални случај.

За конструисање система природних једначина није неопходно узимати само један тријер него може се бирати један систем састављен из појединих једначина различитих система добивених пројецирањем једначина (6) а (7) § 2.3 на различите триједре. Потребно је само да буду ове једначине независне и, наравно, све величине, које улазе, буду изражене помоћу једних те истих координатних параметара.

Основни триједар може се конструисати, на пример, на овим правцима: а) права непокретна везана са телом, б) тангента на трајекторији неке изабране тачке, в) тренутна угаона брзина, г) количина кретања, д) моменат количине кретања и т. д.

Једначине (9) § 2.4 представљају систем природних једначина у најопштијем облику, ако је избор основног триједра извршен према горе реченом. Да бисмо могли написати ове једначине у облику где се појављују изабрани координатни параметри, потребно је најпре наћи величине K_u и L_u као функције ових параметара. Ово се може извршити чим је дат основни триједар. Израз живе силе (3″) § 2.2 у којем наравно све величине треба да буду написане као функције координатних параметара, даје онда величине

$$M_1 = \frac{\partial T}{\partial v_{M_1}} \; . \; . \; . \; . \; G_3^{(M)} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_3} \; .$$

Уврстимо ли све вредности горњих величина у једначине (9) § 2.4 то добивамо тражени систем једначина, који треба интегрисати.

За случај неслободног чврстог тела у једначине улазе још непознате реакције веза. Али згодним избором основног правца можемо понекад искључити непознате реакције и тако добити један део система једначина у који улазе само изабрани координатни параметри. Када су ови параметри нађени као функције времена послужиће други део система, који садржи и непознате реакције, за њихово одређивање.

Што се тиче избора координатних параметара то је згодно понекад узети две групе: једну, која одређује кретање основног триједра с обзиром на неки непокретан триједар, и другу, која даје кретање чврстог тела с обзиром на основни триједар.

2.6 *Специјални случајеви природних једначина.*

Задржимо се детаљније на два специјална случаја природних једначина кретања чврстог тела, који ће бити потребни за решавање нашег проблема о кретању чврстог тела на кривој линији, наиме: а) ако је основни правац права непокретно везана са телом и б) основни је правац тангента на трајекторији неке изабране тачке тела.

2.61 *Основни је правац права непокретно везана са телом.*

Нека је почетак основног триједра тачка A тела, а основни правац права C, која пролази кроз т. A. Означимо њен орт са d_1, и конструишемо основни триједар $A\,d_1\,d_2\,d_3$. Величине K_d и L_d можемо наћи на основу следећега. Брзина краја вектора d_1

$$(\dot{d}_1) = [\omega,\ d_1] = \dot{\overline{d}}_1\, d_2\text{*)}$$

Множећи скаларно са d_3 добићемо

$$0 = (d_3,\ [\omega,\ d_1]) = (\omega,\ [d_1,\ d_3]) = -(\omega,\ d_2)$$

---

*) Због техничких тешкоћа означаваћемо даље тренутну угаону брзину са ω, сем тога мења се и облик грчких слова.

т. ј. вектор ω, тренутна угаона брзина кретања чврстог тела, лежи у равни $d_1 d_3$, а $\omega_2 = 0$.

Из овога одмах закључујемо

$$K_d = d_1 = \omega \operatorname{Sin}(\omega, d_1) = \omega \operatorname{Cos}(\omega, d_3) = \omega_3$$

и пошто је

$$(\dot{\omega}, d_2) + (\omega, \dot{d_2}) = \dot{\omega} \operatorname{Cos}(\omega, d_2) + (-\omega_1 K_d + \omega_3 L_d) = 0$$

$$L_d = \frac{1}{\omega_3}\left(\omega_1 \omega_3 - \dot{\omega} \operatorname{Cos}(\omega, d_2)\right).$$

Дакле дефинитивно имамо

$$K_d = \omega_3\,; \quad L_d = \frac{1}{\omega_3}\left(\omega_1 \omega_3 - \dot{\omega} \operatorname{Cos}(\omega, d_2)\right). \tag{10}$$

Жива сила има облик, који добивамо из 3″ § 2.2, куда ставимо $\omega_2 = 0$

$$2T = M(v^2_{A1} + v^2_{A2} + v^2_{A3}) + 2M\Big\{ - v_{A1}\,\omega_3\,\varrho_{c2} + v_{A2}(\omega_3\,\varrho_{c1} - \omega_1\,\varrho_{c3}) + v_{A3}\,\omega_1\,\varrho_{c2}\Big\} + J_1\,\omega^2_1 + J_3\,\omega^2_3 - 2\,\Pi_{31}\,\omega_1\,\omega_3 \tag{11}$$

где су узете пројекције свих величина на осе d_1 d_2 d_3. Приметимо још да је моменат инерције око осе d_1 $J_1 = \text{const.}$

Из израза (4) (5) § 2.2 добивамо

$$M_1 = \frac{\partial T}{\partial v_{A1}} = Mv_{A1} - M\,\omega_3\,\rho_{c2} \tag{12}$$

$$M_2 = \frac{\partial T}{\partial v_{A2}} = Mv_{A2} + M(\omega_3\,\rho_{c1} - \omega_1\,\varrho_{c3})$$

$$M_3 = \frac{\partial T}{\partial v_{A3}} = Mv_{A3} + M\,\omega_1\,\rho_{c2}$$

$$G_1^{(A)} = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = M(\rho_{c2}\,v_{A3} - \rho_{c3}\,v_{A2}) + J_1\,\omega_1 - \Pi_{31}\,\omega_3$$

$$G_2^{(A)} = \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = M(\rho_{c3} v_{A1} - \rho_{c1} v_{A3}) - \Pi_{12}\,\omega_1 - \Pi_{23}\,\omega_3$$

$$G_3^{(A)} = \frac{\partial T}{\partial \omega_3} = M(\rho_{c1} v_{A2} - \rho_{c2} v_{A1}) + J_3\,\omega_3 - \Pi_{31}\,\omega_1\,.$$

Уврстимо ли изразе (10) и (11) у једначине (9) § 2.4 то добивамо овај систем природних једначина за триједар $Ad_1d_2d_3$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{M v_{A1} - M\,\omega_3\,\rho_{c2}\right\} - \left\{M v_{A2} + M\,(\omega_3\,\rho_{c1} - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \omega_1\,\rho_{c3})\right\}\omega_3 \qquad = F_1 + R_1 \\
&\frac{d}{dt}\left\{M v_{A2} + M\,(\omega_3\,\rho_{c1} - \omega_1\,\rho_{c3})\right\} + \left\{M v_{A1} - \right. \\
&\left. - M\,\omega_3\,\rho_{c2}\right\}\omega_3 - \left\{M v_{A3} + M\,\omega_1\,\rho_{c2}\right\}\Big(\omega_1 - \\
&\qquad\qquad - \frac{\dot{\omega}}{\omega_3}\,\mathrm{Cos}\,(\dot{\omega}, d_3)\Big) \qquad = F_2 + R_2 \\
&\frac{d}{dt}\left\{M v_{A3} + M\,\omega_1\,\rho_{c2}\right\} + \left\{M v_{A2} + M\,(\omega_3\,\rho_{c1} - \right. \\
&\left. - \omega_1\,\rho_{c3})\right\}\Big(\omega_1 - \frac{\dot{\omega}}{\omega_3}\,\mathrm{Cos}\,(\dot{\omega}, d_3)\Big) \qquad = F_3 + R_3 \\
&\frac{d}{dt}\left\{M\,(\rho_{c2}\,v_{A3} - \rho_{c3}\,v_{A2}) + J_1\,\omega_1 - \Pi_{31}\,\omega_3\right\} - \\
&- \left\{M\,(\rho_{c3}\,v_{A1} - \rho_{c1}\,v_{A3}) - \Pi_{12}\,\omega_1 - \Pi_{23}\,\omega_3\right\}\omega_3 + \\
&+ v_{A2}\left\{M v_{A3} + M\,\omega_1\,\rho_{c2}\right\} - v_{A3}\left\{M v_{A2} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + M\,(\omega_3\,\rho_{c1} - \omega_1\,\rho_{c3})\right\} = L_1^{(A)} + \Lambda_1^{(A)} \\
&\frac{d}{dt}\left\{M\,(\rho_{c3}\,v_{A1} - \rho_{c1}\,v_{A3}) - \Pi_{12}\,\omega_1 - \Pi_{23}\,\omega_3\right\} + \\
&+ \left\{M\,(\rho_{c2}\,v_{A3} - \rho_{c3}\,v_{A2}) + J_1\,\omega_1 - \Pi_{31}\,\omega_3\right\}\omega_3 -
\end{aligned} \tag{13}$$

$$- \left\{ M(\rho_{c1} v_{A2} - \rho_{c2} v_{A1}) + J_3 \omega_3 - \Pi_{31} \omega_1 \right\} \left(\omega_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{\omega_3} \mathrm{Cos}\,(\omega, d_2) \right) + v_{A3} \left\{ M v_{A1} - M \omega_3 \rho_{c2} \right\} -$$

$$- v_{A1} \left\{ M v_{A3} + M \omega_1 \rho_{c1} \right\} = L_2^{(A)} + \Lambda_2^{(A)}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ M(\rho_{c1} v_{A2} - \rho_{c2} v_{A1}) + J_3 \omega_3 - \Pi_{31} \omega_1 \right\} +$$

$$+ \left\{ M(\rho_{c3} v_{A1} - \rho_{c1} v_{A3}) - \Pi_{12} \omega_1 - \Pi_{23} \omega_3 \right\} \left(\omega_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{\omega_3} \mathrm{Cos}\,(\omega, d_2) \right) + v_{A1} \left\{ M v_{A2} + \right.$$

$$\left. + M(\omega_3 \rho_{c1} - \omega_1 \rho_{e3}) \right\} - v_{A2} \left\{ M v_{A1} - \right.$$

$$\left. - M \omega_3 \rho_{c2} \right\} = L_3^{(A)} + \Lambda_3^{(A)}.$$

2.62 *Основни је правац тангента трајекторије изабране тачке тела.*

Ако узмемо да је основни правац тангента трајекторије неке тачке A тела (пола), онда је основни триједар састављен тангентом, главном нормалом и бинормалом ове трајекторије у т. A. Означимо орте ових праваца са T, N односно b. Ми смо доказали да величине K_T и L_T имају овај облик (24) § 1.5

$$K_T = K v_A, \quad L_T = L v_A,$$

где су K и L кривина односно завртање трајекторије у т. A.

Осим тога имамо за овај случај

$$v_{A1} = v_A, \quad v_{A2} = v_{A3} = 0$$

и зато се сви изрази и једначине јако упрошћавају.

Уврстимо сада ове вредности горњих величина у израз живе силе 3″ § 2.2 и њених извода (4) и (5) § 2.2

Жива сила

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad 2\,T = {} & M v_A^2 + 2\,M v_A\,(\omega_N\,\rho_{Cb} - \omega_b\,\rho_{CN}) + J_T\,\omega_T^2 + \\
& + J_N\,\omega_N^2 + J_b\,\omega_b^2 - 2\,\Pi_{Nb}\,\omega_N\,\omega_b - 2\,\Pi_{bT}\,\omega_b\,\omega_T - \\
& - 2\,\Pi_{TN}\,\omega_T\,\omega_N
\end{aligned}
$$

и

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
M_1 &= M v_A + M\,(\omega_N\,\rho_{Cb} - \omega_b\,\rho_{CN}) \\
M_2 &= M\,(\omega_b\,\rho_{C\Gamma} - \omega_T\,\rho_{Cb}) \\
M_3 &= M\,(\omega_T\,\rho_{CN} - \omega_N\,\rho_{CT}) \\
G_1^{(A)} &= J_T\,\omega_T - \Pi_{bT}\,\omega_b - \Pi_{TN}\,\omega_N \\
G_2^{(A)} &= M\,\rho_{Cb}\,v_A + J_N\,\omega_N - \Pi_{TN}\,\omega_T - \Pi_{Nb}\,\omega_b \\
G_3^{(A)} &= -M\,\rho_{CN}\,v_A + J_b\,\omega_b - \Pi_{Nb}\,\omega_N - \Pi_{bT}\,\omega_T\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ставимо сада нађене изразе у једначине (9) § 2.4 и добивамо систем природних једначина за основни триједар A_{TNb}:

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\Big\{ M\,(v_A + \omega_N\,\rho_{cb} - \omega_b\,\rho_{CN}) \Big\} - M\,(\omega_b\,\rho_{CT} - \omega_T\,\rho_{cb}) K v_A \\
& \qquad = F_T + R_T \\
& \frac{d}{dt}\Big\{ M\,(\omega_b\,\rho_{CT} - \omega_T\,\rho_{cb}) \Big\} + M\,(v_A + \omega_N\,\rho_{cb} - \\
& - \omega_b\,\rho_{CN})\,K\,v_A - M\,(\omega_T\,\rho_{CN} - \omega_N\,\rho_{CT})\,L\,v_A = F_N + R_N \\
& \frac{d}{dt}\Big\{ M\,(\omega_T\,\rho_{CN} - \omega_N\,\rho_{CT}) \Big\} + M\,(\omega_b\,\rho_{CT} - \omega_T\,\rho_{cb})\,L\,v_A \\
& \qquad = F_b + R_b \\
& \frac{d}{dt}\Big\{ J_T\,\omega_T - \Pi_{bT}\,\omega_b - \Pi_{TN}\,\omega_N \Big\} - (M\,\rho_{cb}\,v_A + J_N\,\omega_N - \\
& \qquad - \Pi_{TN}\,\omega_T - \Pi_{Nb}\,\omega_b\,)\,K\,v_A = L_T^{(A)} + \Lambda_T^{(A)} \\
& \frac{d}{dt}\Big\{ M\,\rho_{cb}\,v_A + J_N\,\omega_N - \Pi_{TN}\,\omega_T - \Pi_{Nb}\,\omega_b \Big\} + (J_T\,\omega_T - \\
& - \Pi_{bT}\,\omega_b - \Pi_{TN}\,\omega_N\,)\,K\,v_A - (-M\,\rho_{CN}\,v_A + J_b\,\omega_b - \\
& - \Pi_{Nb}\,\omega_N - \Pi_{bT}\,\omega_T\,)\,L\,v_A - v_A\,M\,(\omega_T\,\rho_{CN} - \omega_N\,\rho_{CT}) \\
& \qquad = L_N^{(A)} + \Lambda_N^{(A)} \\
& \frac{d}{dt}\Big\{ - M\,\rho_{CN}\,v_A + J_b\,\omega_b - \Pi_{Nb}\,\omega_N - \Pi_{bT}\,\omega_T \Big\} + (M\,\rho_{cb}\,v_A + \\
& + J_N\,\omega_N - \Pi_{TN}\,\omega_T - \Pi_{Nb}\,\omega_b\,)\,L\,v_A + v_A\,M\,(\omega_b\,\rho_{CT} - \omega_T\,\rho_{cb}) \\
& \qquad = L_b^{(A)} + \Lambda_b^{(A)}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

2.63 *Општа примедба о даљем трансформисању.*

Да бисмо дошли до дефинитивног облика једначина где се појављују независни координатни параметри потребно је: прво, наћи пројекције брзине пола и тренутне угаоне брзине, као функција ових параметара, речено важи и за координате центра инерције у основном триједру (ρ_{c_1}, ρ_{c_2}, ρ_{c_3}) као и за пројекције главнога вектора и главног момента сила,

друго, наћи изразе за моменте и продукте инерције око оса основног триједра. Ако изаберемо неки триједар непокретно везани са телом, онда можемо сматрати да су моменти инерције око његових оса познати зато јер се помоћу Steiner'ове теореме и њој аналоге могу бити изражене помоћу главних централних момената. За даље извођење једначина је дакле потребно успоставити везу између тих константних момената и продуката инерције са оним промењљивима, које улазе у једначине. Ова веза се даје опет помоћу неких функција координатних параметара а то ми можемо извести згоднијим избором триједара.

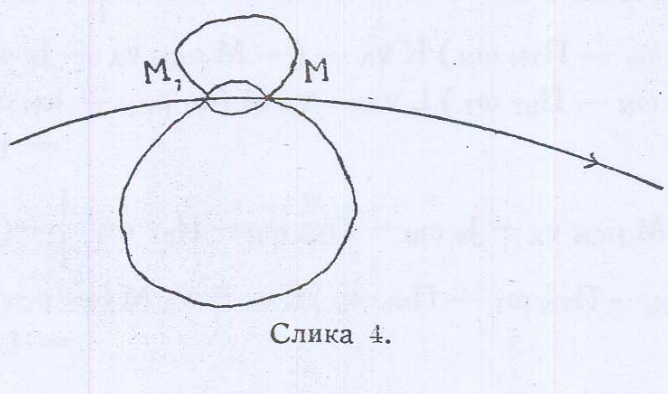
ГЛАВА III

Једначине кретања чврстог тела на кривој линији.

3.1 *Формулисање проблема.*

Проблем, који ми ставимо може да буде формулисан овако: одредити кретања чврстог тела, чије две одређене тачке леже на датој кривој линији, под дејством датих сила.

Према горереченом тело може да клизи по кривој линији и да се обрће око тетиве, која спаја две тачке криве линије,



Слика 4.

са којима се поклапају у датом тренутку тачке чврстог тела, као осе.

3.2 *Избор основног триједра.*

Од праваца на којима би се могао конструисати основни тријед najприроднији су ова два: тангента криве линије у једној од споменутих тачака и тетива, која спаја исте тачке. Али је решење проблема првим путем веома компликовано и зато ћемо изабрати као основни тријед — тријед конструисани на тетиви и извести природне једначине кретања тела за овај тријед.

Проблем кретања овог основног триједра је решен у § 1.6. Положај се одређује дужином лука s, а кретање брзином почетне тачке и величинама

$$K_\tau = K_{ss_1} \frac{ds}{dt} \text{ и } L_\tau = L_{ss_1} \frac{ds}{dt}$$

где су K_{ss_1} и L_{ss_1} функције s дате изразима (30) § 1.6.

Као почетак триједра ми бирамо т. М. предњу с обзиром на смисао кретања у почетном тренутку.

За одређивање положаја чврстог тела, које има два степена слободе, потребно је узети два координатна параметра, зато ћемо изабрати за параметре: дужину (s) лука криве линије до тачке M и угао χ што га затварају оса ν тријед $M\tau\nu\beta$ и нека оса, за сада неодређена, која је непокретно везана са телом и лежи у равни $\nu\beta$. Онда параметар s одређује положај тријед $M\tau\nu\beta$, а параметар χ — положај тела с обзиром на овај тријед.

Ми сматрамо да је чврсто тело репрезентирано триједром $M\xi\eta\zeta$, који је непокретно везан са телом, а чије су осе наперене овако: оса ζ поклапа се са осом τ тријед $M\tau\nu\beta$, осе ξ и η леже у равни $\nu\beta$ и то тако да када ξ дође у положај ν, η поклапа се са β. Угао $\chi = (\nu\xi)$ расте у смислу сказаљке на сату, а одређује положај тријед $M\xi\eta\zeta$ с обзиром на $M\tau\nu\beta$.

Узмимо као полазне једначине (13) § 2.61, јер основни тријед спада у категорију тријед, конструисаних на правој непокретно везаној са телом, дакле $\omega_\lambda = \omega_\nu = 0$. Само нећемо ставити опште изразе за K_d и L_d него специјалне:

$$K_\tau = K_{ss_1}\frac{ds}{dt} \quad \text{и} \quad L_\tau = L_{ss_1}\frac{ds}{dt}.$$

Онда имамо овај систем једначина :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big\{ M(v_{M\tau} - \omega_\beta \rho_{c\nu}) \Big\} - M(v_{M\nu} + \omega_\beta \rho_{c\tau} - \\
&\qquad\qquad - \omega_\tau \rho_{c\beta}) K_{ss_1}\frac{ds}{dt} = F_\tau + R_\tau , \\
&\frac{d}{dt}\Big\{ M(v_{M\nu} + \omega_\beta \rho_{c\tau} - \omega_\tau \rho_{c\beta}) \Big\} + M(v_{M\tau} - \\
&- \omega_\beta \rho_{c\nu}) K_{ss_1}\frac{ds}{dt} - M(v_{M\beta} + \omega_\tau \rho_{c\nu}) L_{ss_1}\frac{ds}{dt} = F_\nu + R_\nu , \\
&\frac{d}{dt}\Big\{ M(v_{M\beta} + \omega_\tau \rho_{c\nu}) \Big\} + M(v_{M\nu} + \omega_\beta \rho_{c\tau} - \\
&\qquad\qquad - \omega_\tau \rho_{c\beta}) L_{ss_1}\frac{ds}{dt} = F_\beta + R_\beta , \\
&\frac{d}{dt}\Big\{ M(\rho_{c\nu} v_{M\beta} - \rho_{c\beta} v_{M\nu}) + J_\tau \omega_\tau - \Pi_{\beta\tau}\omega_\beta \Big\} - \\
&- \Big\{ M(\rho_{c\beta} v_{M\tau} - \rho_{c\tau} v_{M\beta}) - \Pi_{\tau\nu}\omega_\tau - \Pi_{\nu\beta}\omega_\beta \Big\} K_{ss_1}\frac{ds}{dt} + \\
&+ M\omega_\tau(\rho_{c\nu} v_{M\nu} + \rho_{c\beta} v_{M\beta}) - M\omega_\beta \rho_{c\tau} v_{M\beta} = L_\tau^{(M)} + \Lambda_\tau^{(M)} . \\
&\frac{d}{dt}\Big\{ M(\rho_{c\beta} v_{M\tau} - \rho_{c\tau} v_{M\beta}) - \Pi_{\tau\nu}\omega_\tau - \Pi_{\nu\beta}\omega_\beta \Big\} + \\
&+ \Big\{ M(\rho_{c\nu} v_{M\beta} - \rho_{c\beta} v_{M\nu}) + J_\tau \omega_\tau - \Pi_{\beta\tau}\omega_\beta \Big\} K_{ss_1}\frac{ds}{dt} - \\
&- \Big\{ M(\rho_{c\tau} v_{M\nu} - \rho_{c\nu} v_{M\tau}) + J_\beta \omega_\beta - \Pi_{\beta\tau}\omega_\tau \Big\} L_{ss_1}\frac{ds}{dt} - \\
&\qquad - M\omega_\tau \rho_{c\nu} v_{M\tau} - M\omega_\beta \rho_{c\nu} v_{M\beta} = L_\nu^{(M)} + \Lambda_\nu^{(M)} , \\
&\frac{d}{dt}\Big\{ M(\rho_{c\tau} v_{M\nu} - \rho_{c\nu} v_{M\tau}) + J_\beta \omega_\beta - \Pi_{\beta\tau}\omega_\tau \Big\} + \\
&+ \Big\{ M(\rho_{c\beta} v_{M\tau} - \rho_{c\tau} v_{M\beta}) - \Pi_{\tau\nu}\omega_\tau - \Pi_{\nu\beta}\omega_\beta \Big\} L_{ss_1}\frac{ds}{dt} + \\
&+ M\omega_\beta(\rho_{c\nu} v_{M\nu} + \rho_{c\tau} v_{M\tau}) - M\omega_\tau \rho_{c\beta} v_{M\tau} = L_\beta^{(M)} + \Lambda_\beta^{(M)} .
\end{aligned}\right.$$

3.3 *Трансформација величина, које улазе у једначине* (1).

У једначинама (1) налазе се четири групе величина, које треба изразити као функције координатних параметара s и χ, наиме 1) $v_{M\tau}$, $v_{M\nu}$, $v_{M\beta}$, 2) ω_τ, ω_β, 3) $\rho_{c\tau}$, $\rho_{c\nu}$, $\rho_{c\beta}$ и 4) J_τ, J_ν, J_β, $\Pi_{\tau\nu}$, $\Pi_{\nu\beta}$, $\Pi_{\beta\tau}$.

3.31 *Пројекције брзине пола* M *на осе* τ, ν, β.

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
v_{M\tau} &= (v_M, \tau) = \tau_T \frac{ds}{dt}, \\
v_{M\nu} &= (v_M, \tau) = \nu_T \frac{ds}{dt}, \\
v_{M\beta} &= (v_M, \beta) = \beta_T \frac{ds}{dt},
\end{aligned}
\right.
$$

где су τ_T, ν_T, β_T косинуси праваца τ, ν, β са тангентом у т. M (§ 1 62).

3.32 *Пројекције тренутне угаоне брзине* ω *на исте осе.*

Да бисмо нашли пројекције тренутне угаоне брзине ω тела раставимо је у две компоненте ω_1 и ω_2. Нека је ω_1 тренутна угаона брзина триједра $M\tau\nu\beta$, онда је ω_2 тренутна угаона брзина триједра $M\xi\eta\zeta$ с обзиром на $M\tau\nu\beta$.

Пројекције на осе τ, ν, β вектора ω_1 су према § 1.4 и (31) § 1.6: $L_{ss_1} \dfrac{ds}{dt}$, 0, $K_{ss_1} \dfrac{ds}{dt}$, а пројекције вектора ω_2: $\dfrac{d\chi}{dt}$, 0, 0.

Зато је

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\omega_\tau &= L_{ss_1} \frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}, \\
\omega_\nu &= 0, \\
\omega_\beta &= K_{ss_1} \frac{ds}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

3.33 *Пројекције вектора ρ_c на исте осе.*

Вектор ρ_c, чији је почетак у т. M а крај у т. C — центру инерције даје константну пројекцију на осу τ, коју бележићемо са $\rho_{c\tau}$. Узмимо сада пројекције вектора ρ_c на раван $\nu\beta$ као осу ξ и обележимо ову пројекцију са $\rho_{c\xi}$ и она је константна. Како је сада $(\rho_c, \eta) = 0$, а угао $(\rho_{c\xi}, \nu)$ је једнак са χ, то имамо

$$(4) \quad \begin{cases} \rho_{c\tau} = \text{const.} \;, \\ \rho_{c\nu} = \rho_{c\xi} \operatorname{Cos} \chi \;, \\ \rho_{c\beta} = \rho_{c\xi} \operatorname{Sin} \chi \;. \end{cases}$$

3.34 *Моменти и продукти инерције око истих оса.*

Сматрамо да су дати моменти и продукти инерције око оса триједра $M\xi\eta\zeta$ и бележимо њих са J_ξ, J_η, J_ζ, $\Pi_{\eta\zeta}$, $\Pi_{\zeta\xi}$, $\Pi_{\xi\eta}$ — они су сви константни.

На основу израза (2) § 2.1 и узимајући у обзир шему за косинусе углова

	ξ	η	ζ
τ	0	0	1
η	$\operatorname{Cos}\chi$	$-\operatorname{Sin}\chi$	0
β	$\operatorname{Sin}\chi$	$\operatorname{Cos}\chi$	0

добивамо

$$(5) \quad \begin{cases} J_\tau = J_\zeta = \text{const.} \,, \\ J_\nu = J_\xi \operatorname{Cos}^2 \chi + J_\eta \operatorname{Sin}^2 \chi + 2\, \Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi \,, \\ J_\beta = J_\xi \operatorname{Sin}^2 \chi + J_\eta \operatorname{Cos}^2 \chi - 2\, \Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi \,, \\ \Pi_{\nu\beta} = -\,[J_\xi \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi - J_\eta \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi - \\ \qquad\qquad - \Pi_{\xi\eta} (\operatorname{Cos}^2\chi - \operatorname{Sin}^2\chi)] \,, \\ \Pi_{\beta\tau} = -\,(-\,\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos}\chi - \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin}\chi) \,, \\ \Pi_{\tau\nu} = -\,(\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Sin}\chi - \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Cos}\chi) \,. \end{cases}$$

Диференцирамо ли по параметру χ, то добивамо ове везе

$$(6)\quad \begin{cases} J'_\tau = 0\,, & J'_\nu = 2\,\Pi_{\nu\beta}\,, & J'_\beta = -\,2\,\Pi_{\nu\beta}\,, \\ \Pi'_{\nu\beta} = J_\beta - J_\eta\,, & \Pi'_{\beta\tau} = \Pi_{\tau\nu}\,, & \Pi'_{\tau\nu} = -\,\Pi_{\beta\tau}\,. \end{cases}$$

3.4 *Природне једначине.*

Уврстимо изразе (2), (3), (4) § 3.3 у једначине (1) § 3.2, а задржимо величине $J_\tau \ldots \Pi_{\tau\nu}$ да не бисмо и сувише компликовали те једначине. Узмимо још у обзир везе између горе споменутих величина (у § 3.3) и њихових извода: (6) § 3.3, (33) § 1.62. Најзад, означимо са индексом $'$ изводе по параметру s.

Онда после диференцирања и скраћивања долазимо до овога система природних једначина:

$$(7)\quad \begin{cases} M\,(\tau_T - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K_{ss})\,\dfrac{d^2s}{dt^2} - M\,(-\,K_{S\tau} + \rho_{C\tau}\,K^2{}_{ss_1} + \\ \quad + \rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K'_{ss_1} - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,K_{ss_1}\,L_{ss_1})\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + \\ \qquad\qquad + 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,K_{ss_1}\,\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} = F_\tau + R_\tau\,, \\ M\,(\nu_T + \rho_{C\tau}\,K_{ss_1} - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L_{ss_1})\,\dfrac{d^2s}{dt^2} - M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,\dfrac{d^2\chi}{dt^2} - \\ \quad - M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2 - 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L_{ss_1}\,\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} + \\ \quad + M\,(K_{S\nu} + \rho_{C\tau}\,K'_{ss_1} - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L'_{ss_1} - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L^2{}_{ss_1} - \\ \qquad\qquad - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K^2{}_{ss_1})\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = F_\nu + R_\nu\,, \\ M\,(\beta_T + \rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L_{ss_1})\,\dfrac{d^2s}{dt^2} + M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\dfrac{d^2\chi}{dt^2} + M\,(K_{S\beta} + \\ \quad + \rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L'_{ss_1} + \rho_{C\tau}\,K_{ss_1}\,L_{ss_1} - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L^2{}_{ss_1})\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 - \\ \quad - 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L_{ss_1}\,\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} - M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2 = F_\beta + R_\beta\,, \end{cases}$$

$$
(7)\left\{
\begin{aligned}
&(M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\beta_T - M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,\nu_T + J_\tau\,L_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau}\,K_{ss_1})\frac{d^2s}{dt^2} + \\
&+ J_\tau\,\frac{d^2\chi}{dt^2} + (J_\tau\,L'_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau}\,K'_{ss_1} + \Pi_{\nu\beta}\,K^2_{ss_1} + \Pi_{\nu\tau}\,K_{ss_1}\,L_{ss_1} \\
&+ M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K_{s\beta} - M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,K_{s\nu})\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L^{(M)}_\tau + \Lambda^{(M)}_\tau, \\
&(M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,\tau_\Gamma - M\rho_{c\tau}\,\beta_\tau - \Pi_{\nu\beta}\,K_{ss_1} - \Pi_{\nu\tau}\,L_{ss_1})\frac{d^2s}{dt^2} - \\
&- \Pi_{\nu\tau}\,\frac{d^2\chi}{dt^2} + \Pi_{\beta\tau}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + [(J_\tau + J_\nu - J_\beta)\,K_{ss_1} + \\
&+ 2\,\Pi_{\beta\tau}\,L_{ss_1}]\frac{ds}{dt}\frac{d\chi}{dt} + \Big(M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,K_{s\tau} - \Pi_{\nu\beta}\,K'_{ss_1} - \\
&- \Pi_{\nu\tau}\,L'_{ss_1} + (J_\tau - J_\beta)\,K_{ss_1}\,L_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau}\,K^2_{ss_1} + \\
&\qquad\qquad + \Pi_{\beta\tau}\,L^2_{ss_1}\Big)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L^{(M)}_\nu + \Lambda^{(M)}_\nu, \\
&(M\rho_{c\tau}\,\nu_T - M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\tau_T + J_\beta\,K_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau}\,L_{ss_1})\frac{d^2s}{dt^2} - \\
&- \Pi_{\beta\tau}\,\frac{d^2\chi}{dt^2} - \Pi_{\nu\tau}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - 2\,(\Pi_{\nu\beta}\,K_{ss_1} + \Pi_{\nu\tau}\,L_{ss_1})\frac{d\chi}{dt}\frac{ds}{dt} + \\
&+ (M\rho_{c\tau}\,K_{s\nu} - M\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K_{s\tau} + J_\beta\,K'_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau}\,L'_{ss_1} - \\
&\qquad - \Pi_{\nu\beta}\,K_{ss_1}\,L_{ss_1} - \Pi_{\nu\tau}\,L^2_{ss_1})\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L^{(M)}_\beta + \Lambda^{(M)}_\beta.
\end{aligned}
\right.
$$

У овоме систему једначина има осам непознатих величина, наиме координатни параметри s и χ и шест пројекција реакција криве линије у тачкама M и M_1 на осе основног триједра $M\tau\nu\beta$.

Али се број реакција може редуцирати на четири. Ако имамо случај неидеалних веза, т. ј. постоји трење, то растављамо сваку од наших реакција у две компоненте: 1) тангентну на кривој и 2) нормалну. Што се тиче тангентних компонената, оне морају бити дате неким законом, али на овоме нећемо се заустављати, јер у даљим извођењима посматраћемо само идеалне везе.

Нормалне пак компоненте задовољавају услове

$$(8)\quad \begin{aligned} (R_{1N}, t_s) &= 0 = R_{1N\tau}\,\tau_T + R_{1N\nu}\,\nu_T + R_{1N\beta}\,\beta_T \\ (R_{2n}, t_{s_1}) &= 0 = R_{2n\tau}\,\tau_{T1} + R_{2n\nu}\,\nu_{T1} + R_{2n\beta}\,\beta_{T1} \end{aligned}$$

који изражавају да оне леже у нормалним равнима у т. т. M и M_1. Ознаке су јасне.

Узели смо у обзир само трење клизања, али може постојати још трење обртања. Онда ће се појавити моменат трења око осе τ, али је овај врло мали.

Ако су везе идеалне постоје само услови (8). У сваком случају помоћу ових услова можемо елиминисати две непознате реакције тако да дефинитивно добивамо систем од шест једначина са шест непознатим функцијама.

Интегришемо ли овај систем, то нађемо параметри s и χ и четири реакције као функције времена, а остале две реакције одредимо из услова (8).

Означимо краткоће ради леве стране једначина (7) са Φ_τ, Φ_ν, Φ_β односно Ψ_τ, Ψ_ν, Ψ_β.

3.41 *Састав десних страна.*

У десне стране једначина (7) улазе пројекције на осе триједра $M\tau\nu\beta$ главног вектора (F_τ, F_ν, F_β), главног момента око т. M ($L_\tau^{(M)}$, $L_\nu^{(M)}$, $L_\beta^{(M)}$) сила, које дејствују на тело а такође пројекције (R_τ, R_ν, R_β) главног вектора и главног момента ($\Lambda_\tau^{(M)}$, $\Lambda_\nu^{(M)}$, $\Lambda_\beta^{(M)}$) реакција. Прва је група дата, другу треба одредити.

Претпоставимо за даља извођења да су везе идеалне.

У опште непосредно из геометријских особина проблема имамо, означавајући са R_1 реакцију у т. M, а њене пројекције са $R_{1\tau}$, $R_{1\nu}$, $R_{1\beta}$, а реакцију у т. M_1 и њене пројекције са R_2 ($R_{2\tau}$, $R_{2\nu}$, $R_{2\beta}$):

$\Lambda_\tau^{(M)} = 0$, јер R_1 и R_2 пролазе кроз т. т. M и M_1 на правој τ,

$\Lambda_\nu^{(M)} = U\,R_{2\beta}$, јер је $\Lambda^{(M)} = [-U, R_2]$,

$\Lambda_\beta^{(M)} = -U\,R_{2\nu}$.

Најзад узмимо у обзир нашу претпоставку. Раставимо реакције R_1 и R_2 у компоненте у правцима главне нормале (N) и бинормале (b) у т. M односно M_1 (n, B)

$$(R_1) = (R_{1N}) + (R_{1b})$$
$$(R_2) = (R_{2n}) + (R_{2B})$$

и означимо косинусе ових праваца са осама τ, ν, β по овој шеми

	N	b	n	B
τ	τ_N	τ_b	τ_n	τ_B
ν	ν_N	ν_b	ν_n	ν_B
β	β_N	β_b	β_n	β_B

који су сви функције параметра s.

Онда имамо

$$R_{1\tau} = R_{1N}\,\tau_N + R_{1b}\,\tau_b\,, \quad R_{1\nu} = R_{1N}\,\nu_N + R_{1b}\,\nu_b\,,$$
$$R_{1\beta} = R_{1N}\,\beta_N + R_{1b}\,\beta_b\,;$$
$$R_{2\tau} = R_{2n}\,\tau_n + R_{2B}\,\tau_B\,, \quad R_{2\nu} = R_{2n}\,\nu_n + R_{2B}\,\nu_B\,,$$
$$R_{2\beta} = R_{2n}\,\beta_n + R_{2B}\,\beta_B\,,$$

и

$$R_\tau = R_{1\tau} + R_{2\tau} = R_{1N}\,\tau_N + R_{1b}\,\tau_b + R_{2n}\,\tau_n + R_{2B}\,\tau_B\,,$$
$$R_\nu = R_{1\nu} + R_{2\nu} = R_{1N}\,\nu_N + R_{1b}\,\nu_b + R_{2n}\,\nu_n + R_{2B}\,\nu_B\,,$$
$$R_\beta = R_{1\beta} + R_{2\beta} = R_{1N}\,\beta_N + R_{1b}\,\beta_b + R_{2n}\,\beta_n + R_{2B}\,\beta_B\,.$$

Дакле можемо да напишемо једначине (7) у овоме облику:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_\tau &= F_\tau + R_{1N}\,\tau_N + R_{1b}\,\tau_b + R_{2n}\,\tau_n + R_{2B}\,\tau_B \\ \Phi_\nu &= F_\nu + R_{1N}\,\nu_N + R_{1b}\,\nu_b + R_{2n}\,\nu_n + R_{2B}\,\nu_B \\ \Phi_\beta &= F_\beta + R_{1N}\,\beta_N + R_{1b}\,\beta_b + R_{2n}\,\beta_n + R_{2B}\,\beta_B \\ \Psi_\tau &= L_\tau^{(M)} \\ \frac{1}{U}\,\Psi_\nu &= \frac{1}{U}\,L_\nu^{(M)} + R_{2n}\,\beta_n + R_{2B}\,\beta_B \\ \frac{1}{U}\,\Psi_\beta &= \frac{1}{U}\,L_\beta^{(M)} - R_{2n}\,\nu_n - R_{2B}\,\nu_B\,. \end{aligned}\right.$$

3.5 *Две једначине независне од реакција.*

У посматраном случају, када су везе без трења, можемо добити две једначине које садрже само координатне параметре, а не садрже реакције и тиме се наш проблем своди на решење система двеју једначина другог реда.

Прва од тих једначина је једначина четврта система (9), а друга може да се изведе на следећи начин.

Одузмимо пету једначину од треће (9) и додајмо другу шестој

$$\Phi_\nu + \frac{1}{U}\Psi_\beta = F_\nu + \frac{1}{U} L_\beta^{(M)} + R_{1N}\,\nu_N + R_{1b}\,\nu_b$$

$$\Phi_\beta - \frac{1}{U}\Psi_\nu = F_\beta - \frac{1}{U} L_\nu^{(M)} + R_{1N}\,\beta_N + R_{1b}\,\beta_b \,.$$

Да бисмо добили трећу једначину која садржи R_{1N} и R_{1b} помножимо прву једначину (9) са τ_{T1}, пету са β_{T1} и шесту са $-\nu_{T1}$, где индекс $T1$ указује да се узима тангента у т. M_1, и саберемо. Онда узимајући у обзир да је

$$\tau_n\,\tau_{T1} + \nu_n\,\nu_{T1} + \beta_n\,\beta_{T1} = (n\,,\,T_1) = 0 \qquad \tau_B\,\tau_{T1} + \nu_B\,\nu_{T1} + \beta_B\,\beta_{T1} = 0,$$

добивамо

$$\Phi_\tau\,\tau_{T1} - \frac{1}{U}\,\Psi_\beta\,\nu_{T1} + \frac{1}{U}\,\Psi_\nu\,\beta_{T1} = F_\tau\,\tau_{T1} - \frac{1}{U}\,L_\beta^{(M)}\,\nu_{T1} +$$
$$+ \frac{1}{U}\,L_\nu^{(M)}\,\beta_{T1} + R_{1N}\,\tau_N\,\tau_{T1} + R_{1b}\,\tau_b\,\tau_{T1}$$

или

$$\frac{1}{\tau_{T1}}\left(\Phi_\tau\,\tau_{T1} - \frac{1}{U}\Psi_\beta\,\nu_{T1} + \frac{1}{U}\,\Psi_\nu\,\beta_{T1}\right) = \frac{1}{\tau_{T1}}\left(F_\tau\,\tau_{T1} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{U}\,L_\beta^{(M)}\,\nu_{T1} + \frac{1}{U}\,L_\nu^{(M)}\,\beta_{T1}\right) + R_{1N}\,\tau_N + R_{1b}\,\tau_b\,.$$

Множимо ли ову последњу са τ_T, а две горње једначине са ν_T односно β_T то добивамо

$$\Phi_\tau\,\tau_T + \Phi_\nu\,\nu_T + \Phi_\beta\,\beta_T + \Psi_\nu\left(\frac{\tau_T\,\beta_{T1}}{U\,\tau_{T1}} - \frac{\beta_T}{U}\right) + \Psi_\beta\left(\frac{\nu_T}{U} - \right.$$

$$- \frac{\tau_T\ \nu_{T1}}{U\ \tau_{T1}} \Big) = F_\tau\ \tau_T + F_\nu\ \nu_T + F_\beta\ \beta_T + L_\nu^{(M)} \left(\frac{\tau_T\ \beta_{T1}}{U\ \tau_{T1}} - \frac{\beta_T}{U} \right) +$$

$$+ L_\beta^{(M)} \left(\frac{\nu_T}{U} - \frac{\tau_T\ \nu_{T1}}{U\ \tau_{T1}} \right)$$

јер

$$\tau_T\,\tau_N + \nu_T\,\nu_N + \beta_T\,\beta_N = (\tau\,,\,N) = 0$$
$$\tau_T\,\tau_b + \nu_T\,\nu_b + \beta_T\,\beta_b = (\tau\,,\,b) = 0\,.$$

Испитујмо коефицијенте који стоје у заградама:

$$\frac{\nu_T\,\tau_{T1} - \tau_T\,\nu_{T1}}{U\,\tau_{T1}} = \frac{(\nu\,,\,t_s)\,(\tau\,,\,t_{s_1}) - (\nu\,,\,t_{s_1})\,(\tau\,,\,t_s)}{U\,(\tau\,,\,t_{s_1})} =$$

$$= (\dot{\tau}_s\,,\,\nu) = \dot{\tau}_s = K_{ss_1}$$

(види § 1.6) и

$$\frac{\tau_T\,\beta_{T1} - \tau_{T1}\,\beta_T}{U\,\tau_{T1}} = \frac{(\beta\,,\,t_{s_1})\,(\tau\,,\,t_s) - (\beta\,,\,t_s)\,(\tau\,,\,t_{s_1})}{U\,(\tau\,,\,t_{s_1})} =$$

$$= -(\dot{\tau}_s\,,\,\beta) = 0\,,\ \text{јер је}\ \beta = \frac{[\tau\,,\,\dot{\tau}]}{[\tau\,,\,\dot{\tau}]}\,.$$

Приметимо још да је $F_\tau\ \tau_T + F_\nu\ \nu_T + F_\beta\ \beta_T = F_T$, тако да можемо написати тражени систем у овом облику

$$(10)\quad \begin{cases} \Phi_\tau\ \tau_T + \Phi_\nu\ \nu_T + \Phi_\beta\ \beta_T + \Psi_\beta\ K_{ss_1} = F_T + K_{ss_1}\ L_\beta^{(M)} \\ \Psi_\tau = L_\tau^{(M)}\,. \end{cases}$$

3.51 *Други начин извађења једначина независних од реакција.*

Применимо сада примедбу (§ 2.5) да се могу узимати једначине с обзиром на разне триједре. У нашем проблему постоји један правац, који може послужити као основни, а то је права *II* (§ 1.63) — пресек нормалних равни у т. т. M и M_1. Ова права има ту особину да реакције не дају око ње моменте, зато, ако узмемо пројекцију геом. једначине која изражава закон момента количине кретања (7) § 2.3 добићемо једначину која заједно са четвртом једн. система (9) даје систем две једначине са две промењиве s и χ.

Једначина (7) ако узмемо као пол т. A (§ 1.63), примиће облик

$$\dot{G}^{(A)} + [v_A, M] = L^{(A)} + \Lambda^{(A)}.$$

Помножимо је скаларно са $[t_s, t_{s_1}] = \overline{[t_s, t_{s_1}]}\, \rho$ где је ρ орт праве ll

$$(\dot{G}^{(A)}, [t_s, t_{s_1}]) + ([v_A, M], [t_s, t_{s_1}]) = (L^{(A)}, [t_s, t_{s_1}]),$$

јер је

$$(\Lambda^{(A)}, \rho) = 0.$$

Ставимо ли сада у ову једначину

$$G^{(A)} = G^{(M)} - [\rho_A, M], \quad L^{(A)} = L^{(M)} - [\rho_A, F]$$

где је

$$\rho_A = -\frac{(U, t_{s_1})}{(N, t_{s_1})} N,$$

вектор чији је почетак у т. M, а крај у т. A, и приметимо ли да је

$$\dot{G}^{(A)} = \dot{G}^{(M)} - [\rho_A, \dot{M}] - [\dot{\rho}_A, M] = \dot{G}^{(M)} - [\rho_A, \dot{M}] - $$
$$- [v_A, M] + [v_M, M],$$

то добивамо

$$(\dot{G}^{(M)}, [t_s, t_{s_1}]) - \left(\dot{M}\left[[t_s, t_{s_1}], \rho_A\right]\right) + \left(M\left[[t_s, t_{s_1}], v_M\right]\right) =$$
$$= (L^{(M)}, [t_s, t_{s_1}]) - \left(F, \left[[t_s, t_{s_1}], \rho_A\right]\right).$$

Али (види § 1.63)

$$\left[[t_s, t_{s_1}], \rho_A\right] = (U, t_{s_1})\, t_s$$

$$(\dot{G}^{(M)}, [t_s, t_{s_1}]) = (\dot{G}^{(M)}, \tau)(\tau, [t_s, t_{s_1}]) - (\dot{G}^{(M)}, \beta) K_{ss_1}(U, t_{s_1})$$
$$= (\tau [t_s, t_{s_1}]) \left(\frac{d}{dt} G^{(M)}_{\tau} - K_{\tau} G_{\gamma}\right)$$
$$- K_{ss_1}(U, t_{s_1}) \left(\frac{d}{dt} G^{(M)}_{\beta} + L_{\tau} G_{\gamma}\right)$$

$$([t_s, t_{s_1}], [v_M, M]) = (\tau, [t_s, t_{s_1}]) (v_{M\nu} M_\beta - v_{M\beta} M_\nu) -$$

$$- K_{ss_1} (U, t_{s_1}) (v_{M\tau} M_\nu - v_{M\nu} M_\tau)$$

$$(\dot{M}, t_s) = (\dot{M}, \tau) \tau_T + (\dot{M}, \nu) \nu_T + (\dot{M}, \beta) \beta_T$$

где индекси τ, ν, β увек означавају пројекције на одговарајуће осе.

Ставимо ове изразе у горњу једначину

$$-(U, t_{s_1}) \left\{ (\dot{M}, \tau) \tau_T + (\dot{M}, \nu) \nu_T + (\dot{M}, \beta) \beta_T \right\} -$$

$$-(U, t_{s_1}) K_{ss_1} \left\{ \frac{d}{dt} G^{(M)}_\beta + L_\tau G^{(M)}_\nu + v_{M\tau} M_\nu - v_{M\nu} M_\tau \right\} +$$

$$+ (\tau, [t_s, t_{s_1}]) \left\{ \frac{d}{dt} G^{(M)}_\tau - K_\tau G_\nu + v_{M\nu} M_\beta - v_{M\beta} M_\nu \right\} =$$

$$= - F_T (U, t_{s_1}) - K_{ss_1} (U, t_{s_1}) L^{(M)}_\beta + (\tau [t_s, t_{s_1}]) L^{(M)}_T.$$

Ако упоредимо са (9) § 2.4 видимо да је $(\dot{M}, \tau) = \Phi_\tau$ и т. д.; дакле дефинитивно добивамо

$$(11) \quad \begin{cases} \Phi_\tau \tau_T + \Phi_\nu \nu_T + \Phi_\beta \beta_T + K_{ss_1} \Psi_\beta - \\ - \dfrac{(\tau, [t_s, t_{s_1}])}{(U, t_{s_1})} \Psi_\tau = F_T + K_{ss_1} L^{(M)}_\beta - \dfrac{(\tau, [t_s, t_{s_1}])}{(U, t_{s_1})} L^{(M)}_\tau, \\ \Psi_\tau = L^{(M)}_\tau \end{cases}$$

систем који је еквивалентан систему (10).

Додајмо првој од једначина (11) другу помножену са

$$\frac{\left(\tau, \left[[t_s, t_{s_1}], [t_s, t_{s_1}] \right]\right)}{K^2_{ss_1} (U, t_{s_1})} = L_{ss_1} + \frac{(\tau, [t_s, t_{s_1}])}{(U, t_{s_1})}.$$

Онда је тако добивени систем

$$
(12)\quad \begin{cases} \Phi_\tau\ \tau_T + \Phi_\nu\ \nu_T + \Phi_\beta\ \beta_T + L_{ss_1}\ \Psi_\tau + K_{ss_1}\ \Psi_\beta = \\ \qquad = F_T + L_{ss_1}\ L_\tau^{(M)} + K_{ss_1}\ L_\beta^{(M)} \\ \qquad\qquad \Psi_\tau = L_\tau^{(M)} \end{cases}
$$

Lagrange'ов систем како ћемо показати у идућем §.

3.6 *Једначине Lagrange'а.*

Једначине Lagrange'а другога облика биће за наш случај ове:

$$
(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial s'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial s} = Q_s \\ \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \chi'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \chi} = Q_\chi \end{cases}
$$

где смо индексом $'$ означили изводе параметара s и χ по времену. Q_s и Q_χ, то су генералисане силе т. ј. коефицијенти прираштаја координатних параметара s и χ у изразу за радњу сила (спољних) на могућем померању.

Да бисмо написали ове једначине у проширеном облику узмимо израз живе силе

$$
2\,T = M\left(v^2_{M\tau} + v^2_{M\nu} + v^2_{M\beta}\right) + 2\,M\Big\{ - v_{M\tau}\,\rho_{C\nu}\,\omega_\beta +
$$
$$
+ v_{M\nu}\,(\omega_\beta\ \rho_{C\tau} - \omega_\tau\ \rho_{C\beta}) + v_{M\beta}\,\rho_{C\nu}\,\omega_\tau + J_\tau\ \omega^2{}_\tau + J_\beta\ \omega^2{}_\beta -
$$
$$
- 2\,\Pi_{\beta T}\,\omega_\beta\,\omega_\tau\,.
$$

Ако уврстимо вредности ових величина одређене изразима 2—5 § 3.3 нађимо 2 T као функцију параметара s и χ и њихових извода s' и χ'; али ми нећемо то писати него, служећи се споменутим изразима, израчунајмо парцијалне изводе функције 2 T (s, χ, s', χ') посматране као сложене функције тих величина

$$
\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial v_{M\tau}}\frac{\partial v_{M\tau}}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial v_{M\nu}}\frac{\partial v_{M\nu}}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial v_{M\beta}}\frac{\partial v_{M\beta}}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial \omega_\tau}\frac{\partial \omega_\tau}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial \omega_\beta}\frac{\partial \omega_\beta}{\partial s}
$$

$$\frac{\partial T}{\partial s'} = \frac{\partial T}{\partial v_{M\tau}} \frac{\partial v_{M\tau}}{\partial s'} + \frac{\partial T}{\partial v_{M\nu}} \frac{\partial v_{M\nu}}{\partial s'} + \frac{\partial T}{\partial v_{M\beta}} \frac{\partial v_{M\beta}}{\partial s'} + \frac{\partial T}{\partial \omega_\tau} \frac{\partial \omega_\tau}{\partial s'} + \frac{\partial T}{\partial \omega_\beta} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial s'}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \chi} = \frac{\partial T}{\partial \rho_{C\nu}} \frac{\partial \rho_{C\nu}}{\partial \chi} + \frac{\partial T}{\partial \rho_{C\beta}} \frac{\partial \rho_{C\beta}}{\partial \chi} + \frac{\partial T}{\partial J_\beta} \frac{\partial J_\beta}{\partial \chi} + \frac{\partial T}{\partial \Pi_{\beta\tau}} \frac{\partial \Pi_{\beta\tau}}{\partial \chi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \chi'} = \frac{\partial T}{\partial \omega_\tau} \frac{\partial \omega_\tau}{\partial \chi'} \,.$$

Даље имамо (види 12 § 2.6 и 2.4 § 3.3)

$$\frac{\partial T}{\partial v_{M\tau}} = M_\tau = M\tau_T\, s' - M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos} \chi\, K_{ss_1}\, s'$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_{M\nu}} = M_\nu = M\nu_T\, s' + M\,[\rho_{C\tau}\, K_{ss_1}\, s' - \rho_{C\xi} \operatorname{Sin} \chi\, (L_{ss_1}\, s' + \chi')]$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_{M\beta}} = M_\beta = M\beta_T\, s' + M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos} \chi\, (L_{ss_1}\, s' + \chi')$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\tau} = G^{(M)}_\tau = M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos} \chi\, \beta_T\, s' - M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin} \chi\, \nu_T\, s' + \\ + J_\tau\, (L_{ss_1}\, s' + \chi') - \Pi_{\beta\tau}\, K_{ss_1}\, s'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\beta} = G^{(M)}_\beta = M\, \rho_{C\tau}\, \nu_T\, s' - M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos} \chi\, \tau_T\, s' + J_\beta\, K_{ss_1}\, s' - \\ - \Pi_{\beta\tau}\, (L_{ss_1}\, s' + \chi') \,.$$

Из израза живе силе добивамо

$$\frac{\partial T}{\partial \rho_{C\nu}} = - Mv_{M\tau}\, \omega_\beta + Mv_{M\beta}\, \omega_\tau = M\,\beta_T\, (L_{ss_1}\, s' + \chi')\, s' - \\ - M\, K_{ss_1}\, \tau_\nu\, (s')^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho_{C\beta}} = - Mv_{M\nu}\, \omega_\tau = - M\, \nu_T\, (L_{ss_1}\, s' + \chi')\, s'$$

$$\frac{\partial T}{\partial J_\beta} = \frac{1}{2}\, \omega_\beta^2 = \frac{1}{2}\, K^2_{ss_1}\, (s')^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Pi_{\beta\tau}} = - \omega_{\beta}\, \omega_{\tau} = - K_{ss_1} (L_{ss_1} s' + \chi') s' .$$

Најзад, изводимо на основу 2—5 § 3.3 и 33 § 1·62

$$\frac{\partial v_{M\tau}}{\partial s} = K_{s\tau} s' + K_{ss_1} \nu_T s' , \qquad \frac{\partial v_{M\tau}}{\partial s'} = \tau_T ,$$

$$\frac{\partial v_{M\nu}}{\partial s} = K_{s\nu} s' - K_{ss_1} \tau_T s' + L_{ss_1} \beta_T s' , \qquad \frac{\partial v_{M\nu}}{\partial s'} = \nu_T$$

$$\frac{\partial v_{M\beta}}{\partial s} = K_{s\beta} s' - L_{ss_1} \nu_T s' , \qquad \frac{\partial v_{M\beta}}{\partial s'} = \beta_T ,$$

$$\frac{\partial \omega_\tau}{\partial s} = L'_{ss_1} s' , \frac{\partial \omega_\beta}{\partial s} = K'_{ss_1} s'; \frac{\partial \omega_\tau}{\partial s'} = L_{ss_1} , \quad \frac{\partial \omega}{\partial s'} = K_{ss_1} ; \frac{\partial \omega_\tau}{\partial \chi'} = 1 ,$$

$$\frac{\partial \rho_{c\nu}}{\partial \chi} = - \rho_{c\xi} \operatorname{Sin} \chi , \quad \frac{\partial \rho_{c\beta}}{\partial \chi} = \rho_{c\xi} \operatorname{Cos} \chi ,$$

$$\frac{\partial J_\beta}{\partial \chi} = - 2\, \Pi_{\nu\beta} , \quad \frac{\partial \Pi_{\beta\tau}}{\partial \chi} = \Pi_{\tau\nu} .$$

Увели смо, краткоће ради, ознаке за $\frac{ds}{dt}$ и $\frac{d\chi}{dt}$ — s', односно χ', али смо оставили индекс $'$ да указује диференцирање по s за све остале величине. Сада се враћамо опет ка првобитним ознакама $\frac{ds}{dt}$ и $\frac{d\chi}{dt}$.

Остало је нама да испитујемо десне стране Lagrange'евих једначина (13) т. ј. да одредимо састав величина Q_s и Q_χ . Проучићемо за тај циљ могућа померања тела, која одговарају варијацијама δs и $\delta \chi$.

Нека, дакле, параметар s промени се за δs . Онда ће т. M прећи на тангенти пут $\delta s \,.\, t_s$, али у исти мах, пошто је померање могуће, т. ј. у сагласности са везама, т. M_1 креће се на тангенти t_{s_1} . Радња реакција равна је нули.

Ово померање није ништа друго но обртање око осе *11* — представимо га са вектором $\delta\omega\, [t_s , t_{s_1}]$ и одредимо $\delta\omega$

$$\Big[\delta\omega\,[t_s\,,\,t_{s_1}],\ -\rho_A\Big] = \delta s\,.\,t_s \quad \text{где је}\ -\rho_A = \frac{(U\,,\,t_{s_1})}{(N\,,\,t_{s_1})} N\ (\S\ 3.51)\,.$$

Одакле следује после лаких трансформација (§ 1.64)

$$\delta\omega = -\frac{\delta s}{(U\,,\,t_{s_1})}$$

и вектор $\delta\omega\,[t_s\,,\,t_{s_1}]$ има следеће пројекције на осе τ, ν, β: $-\dfrac{(\tau\,[t_s\,,\,t_{s_1}])}{(U\,,\,t_{s_1})}\delta s$, 0, $K_{ss_1}\,\delta s$ како се то види из 35 § 1.63. Али када се s промени за δs триједар $M\tau\nu\beta$ се окрене и ово обртање је представљено вектором чије су пројекције $L_{ss_1}\,\delta s$, 0, $K_{ss_1}\,\delta s$. Дакле да не би променили угао χ морамо још обрнути тело око осе τ тако да потпуно обртање око те осе буде представљено са $L_{ss_1}\,\delta s$ т. ј. са

$$\frac{\Big(\tau\,,\Big[\,[t_s\,,\,t_{s_1}],\,[t_s\,,\,\dot{t}_{s_1}]\,\Big]\Big)\delta s}{K^2_{ss_1}\ (U\,,\,t_{s_1})} = \delta\omega_1\,.$$

Уочимо сада неку т. m_i. Услед првог померања она ће се помакнути за $\Big[\,\delta\omega\,[t_s\,,\,t_{s_1}],\ \rho_{Ai}\Big]$ где је $\rho_{Ai} = -\rho_A + \rho_i$ (почетак вектора ρ_{Ai} у т. A, крај у m_i, почетак вектора ρ_i у т. M, крај у m_i). Услед другог померања т. m_i помакне се за $[\delta\omega_1\,\tau,\ \rho_i\,]$.

Дакле елементарна радња сила, које дејствују на т. m_i, биће на померању δs

$$\begin{aligned}
\delta_s A_i &= \Big(F_i\,,\Big[\,\delta\omega\,[t_s\,,\,t_{s_1}],\ \rho_{Ai}\Big] + [\delta\omega_1\,\tau,\ \rho_i\,]\Big) \\
&= (\delta\omega\,[t_s\,,\,t_{s_1}] + \delta\omega_1\,\tau,\ [\rho_i\,,\,F_i\,]) + \\
&\quad + \Big(F_i\Big[\,\delta\omega\ [t_s\,,\,t_{s_1}],\ \frac{(U\,,\,t_{s_1})}{(N\,,\,t_{s_1})}N\,\Big]\Big) \\
&= (F_i\,,\,t_s)\,\delta s + (L_{ss_1}\,L^{(M)}_{i\tau} + K_{ss_1}\,L^{(M)}_{i\beta})\,\delta s
\end{aligned}$$

Сумирајући за све тачке тела добивамо овај израз:

$$(\alpha) \qquad \delta_s A = (F_T + L_{ss_1}\,L^{(M)}_{\tau} + K_{ss_1}\,L^{(M)}_{\beta})\,\delta s\,.$$

Варирамо ли сада само параметар χ, тело се заокрене око осе τ за угао $\delta\chi$. Ово обртање може бити представљено са вектором $\delta\chi\,\tau$. Свака ће тачка m_i (ρ_i) прећи пут $[\rho_i\,,\ \delta\chi\,\tau]$, који не противречи везама. Елементарна радња $\delta_\chi A_i =$ $(F_i\,[\rho_i\,,\ \delta\chi\,\tau])$ спољних сила које дејствују на тело. Сумирајући поново за све тачке тела имамо

$$(\beta) \qquad \delta_\chi A = \Sigma\,(\delta\chi\,\tau\,[\rho_i\,,\ F_i\,]) = (\tau,\ L^{(M)})\,\delta\chi = L^{(M)}_\tau\,\delta\chi\,.$$

Саберемо ли α и β то добивамо елементарну радњу сила на могућем померању тела, одговарајућем варијацијама параметара s и χ: δs и $\delta\chi$

$$\delta A = (F_T + L_{ss_1}\,L^{(M)}_\tau + K_{ss_1}\,L^{(M)}_\beta)\,\delta s + L^{(M)}_\tau\,\delta\chi\,.$$

Одакле следује

$$(14) \qquad Q_s = F_T + L_{ss_1}\,L^{(M)}_\tau + K_{ss_1}\,L^{(M)}_\beta\,, \quad Q_\chi = L^{(M)}_\tau$$

На основу горе доказаног и расуђивања у § 1.64 ми можемо, дакле, представити кретање чврстог тела на кривој линији као низ доследних обртања око тетиве и праве *ll*.

Ставимо сада све горње величине у једначине 13 и после диференцирања и редуцирања долазимо до овога облика Lagrange'евих једначина

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &(M - 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K_{ss_1}\,\tau_T + 2\,M\,\rho_{C\tau}\,K_{ss_1}\,\nu_T - \\ &- 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L_{ss_1}\,\nu_T + 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L_{ss_1}\,\beta_T - \\ &- 2\,\Pi_{\beta\tau}\,K_{ss_1}\,L_{ss_1} + J_\tau\,L^2_{ss_1} + J_\beta\,K^2_{ss_1})\,\frac{d^2 s}{dt^2} + \\ &+ (-\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,\nu_T + M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\beta_T + J_\xi\,L_{ss_1} - \\ &- \Pi_{\beta\tau}\,K_{ss_1})\,\frac{d^2\chi}{dt^2} + (2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,K_{ss_1}\,\tau_T - \\ &- 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\nu_T\,L_{ss_1} - 2\,M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,\beta_T\,L_{ss_1} - \\ &- 2\,\Pi_{\tau\nu}\,K_{ss_1}\,L_{ss_1} - 2\,\Pi_{\nu\beta}\,K^2_{ss_1})\,\frac{ds}{dt}\frac{d\chi}{dt} + (-M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\nu_T \\ &- M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,\beta_T - \Pi_{\tau\nu}\,K_{ss_1})\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \end{aligned} \right.$$

$$
(15)\left\{\begin{aligned}
&+ (- M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi K'_{ss_1} \tau_T + M\rho_{C\tau} K'_{ss_1} \nu_T + \\
&+ M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi L'_{ss_1} \beta_T - M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi L'_{ss_1} \nu_T + \\
&+ M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi K_{S\beta} L_{ss_1} - M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi K_{S\nu} L_{ss_1} - \\
&- M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi L^2_{ss_1} \nu_T - M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi L^2_{ss_1} \beta_T + \\
&+ M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi K_{ss_1} L_{ss_1} \tau_T + M\rho_{C\tau} K_{ss_1} L_{ss_1} \beta_T - \\
&- M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi K_{ss_1} K_{S\tau} - M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi K^2_{ss_1} \nu_T - \\
&- M\rho_{C\tau} K^2_{ss_1} \tau_T + M\rho_{C\tau} K_{ss_1} K_{S\nu} + J_\tau L_{ss_1} L'_{ss_1} + \\
&+ J_\beta K_{ss_1} K'_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau} K_{ss_1} L'_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau} K'_{ss_1} L_{ss_1}) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \\
&\qquad\qquad = F_T + L_{ss_1} L^{(M)}_\tau + K_{ss_1} L^{(M)}_\beta \\
&(M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi \beta_T - M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi \nu_T + J_\tau L_{ss_1} - \\
&- \Pi_{\beta\tau} K_{ss_1}) \frac{d^2 s}{dt^2} + J_\tau \frac{d^2\chi}{dt^2} + (M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi K_{S\beta} - \\
&- M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi K_{S\nu} + J_\tau L'_{ss_1} - \Pi_{\beta\tau} K'_{ss_1} + \Pi_{\nu\beta} K^2_{ss_1} + \\
&+ \Pi_{\tau\nu} K_{ss_1} L_{ss_1}) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L^{(M)}_\tau
\end{aligned}\right.
$$

јер је, сем наведених већ израза, $\tau^2_T + \nu^2_T + \beta^2_T = 1$ и $K_{S\tau} \tau_T + K_{S\nu} \nu_T + K_{S\beta} \beta_T = K_S (N, T) = 0$.

Систем (15), као што је лако увидети на основу (7) § 3.4, идентичан је систему (12). Системе (10) и (11) нећемо писати у проширеном облику.

3.7 *Интеграл живе силе. Случај конзервативног кретања.*

Ако силе, које дејствују на тело, имају потенцијал, онда постоји интеграл живе силе

$T = U + h$, где је $- U$ потенцијал, а h константа.

Напишимо овај израз у проширеном облику и за то ставимо у општу једнакост, која одређује 2 T (3″) § 2.2 изразе 2—4 § 3.3 .

$$
(16)\left\{\begin{aligned}
&[M - 2M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi K_{ss_1} \tau_T + 2M\rho_{C\tau} K_{ss_1} \nu_T - \\
&- 2M\rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi L_{ss_1} \nu_T + 2M\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi L_{ss_1} \beta_T +
\end{aligned}\right.
$$

$$
(16)\quad \begin{cases} + J_\tau\, L^2_{ss_1} + J_\beta\, K^2_{ss_1} - 2\,\Pi_{\beta\tau}\, K_{ss_1}\, L_{ss_1}] \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + \\ + [-2\,M\,\rho_{C\xi}\, \operatorname{Sin}\chi\, \nu_T + 2\,M\,\rho_{C\xi}\, \operatorname{Cos}\chi\, \beta_T + 2\,J_\tau\, L_{ss_1} - \\ - 2\,\Pi_{\beta\tau}\, K_{ss_1}] \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} + J_\tau \left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2 = 2\,(U + h)\,. \end{cases}
$$

У случају конзервативног кретања т. ј. када силе имају потенцијал ми можемо искористити интеграл живе силе (16) и то заменити с њим једну од једначина система (10) или (11) или (12), наравно најкомпликованију.

Помоћу интеграла живе силе и друге од једначина ма каквог од споменутих система можемо извести једну једначину другог реда која везује параметре s и χ, другим речима можемо елиминисати време.

Узмимо за тај циљ једначину $\Psi_\tau = L^{(M)}_\tau$, као најпростију, и која може бити представљена у облику

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \chi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \chi} = \frac{\partial U}{\partial \chi} \quad \text{јер је Lagrange'ова једначина}\,.
$$

Посматрајмо координатни параметар χ као функцију s и напишимо интеграл живе силе у овоме облику

$$
T = s'^2\, T_1 = U + h\,.
$$

Одакле следује да је $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \dfrac{U+h}{T_1}$, или $dt = ds \sqrt{\dfrac{T_1}{U+h}}$.

Према познатим правилима из овога израза одређујемо други извод координате s и то

$$
\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{2T_1}\left(\frac{T_1}{U+h}\,\frac{dU}{ds} - \frac{dT_1}{ds}\right)\frac{U+h}{T_1}\,.
$$

Трансформишемо Lagrange'ову једначину уводећи T_1 и означимо са $\dot{\chi} = \dfrac{d\chi}{ds}$, $\dfrac{\partial T}{\partial \chi} = s'^2\,\dfrac{\partial T_1}{\partial \chi}$, $\dfrac{\partial T}{\partial \chi'} = s'\,\dfrac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}$,

$\dfrac{d}{dt}\left(s'\,\dfrac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\right) - s'^2\,\dfrac{\partial T_1}{\partial \chi} = \dfrac{\partial U}{\partial \chi}$, диференцирамо ли по t први члан: $s' \dfrac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}$ и смењујемо после dt, s'^2, $\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ са горњим изразима то добивамо дефинитивно

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\right)+\frac{1}{2T_1}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\left(\frac{T_1}{U+h}\frac{dU}{ds}+\frac{dT_1}{ds}\right)- \tag{17}$$

$$-\frac{\partial T_1}{\partial \chi}=\frac{T_1}{U+h}\frac{\partial U}{\partial \chi}.$$

Ово је диференцијална једначина другог реда која везује параметре s и χ. Одредимо ли из ње χ као функцију s, онда из интеграла живе силе добићемо квадратуром време.

Можемо елиминисати време и на други начин, наиме, помоћу оне Lagrange'ове једначине, коју смо заменили са интегралом живе силе у нашем систему:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s'}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial s},\text{ но }\frac{\partial T}{\partial s'}=2\,s'\,T_1+s'^2\,\frac{\partial T_1}{\partial s'}=$$

$$=2\,s'\,T_1-s'\,\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\,\dot{\chi}=s'\,G;\ \frac{\partial T}{\partial s}=s'^2\,\frac{\partial T_1}{\partial s},$$

дакле $$G\frac{d^2 s}{dt^2}+\frac{U+h}{T_1}\frac{dG}{ds}-\frac{U+h}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial s}=\frac{\partial U}{\partial s}$$

и $$\frac{d^2 s}{dt^2}=\frac{1}{G}\left(\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{U+h}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial s}-\frac{U+h}{T_1}\frac{dG}{ds}\right),$$

где је $$G=2\,T_1-\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\,\dot{\chi}.$$

Ставимо овај израз у другу Lagrange'ову једначину, то добивамо

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\right)+\frac{1}{G}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\left(\frac{T_1}{U+h}\frac{\partial U}{\partial s}+\frac{\partial T_1}{\partial s}-\frac{dG}{ds}\right)- \tag{17'}$$

$$-\frac{\partial T_1}{\partial \chi}=\frac{T_1}{U+h}\frac{\partial U}{\partial \chi}.$$

Једначине (17) и (17') су идентичне, као што је лако увидети, узевши у обзир да је

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial \chi}\dot{\chi}, \quad \frac{dT_1}{ds} = \frac{\partial T_1}{\partial s} + \frac{\partial T_1}{\partial \chi}\dot{\chi} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\ddot{\chi},$$

$$\frac{dG}{ds} = 2\frac{dT_1}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\right)\dot{\chi} - \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\chi}}\ddot{\chi}, \quad \text{где је } \dot{\chi} = \frac{d\chi}{ds}, \ \ddot{\chi} = \frac{d^2\chi}{ds^2}.$$

Написана у облику (17′) ова једначина представља специјални случај једначина Jacobi[1]) из којих се може искључити ирационалност помоћу опште методе, а користећи се првом Lagrange'овом једначином, која је замењена у систему интегралом живе силе, као што је показао г. Ант. Билимовић[2]).

3.8 *Случај тешког чврстог тела.*

Напишимо једначине кретања чврстог тела, на које дејствује сила тежине. Означимо орт правца у којем дејствује сила тежине са α, а косинусе углова што их затварају са овим правцем осе триједра $M\tau\nu\beta$ са τ_α, ν_α, β_α (fonct. s).

Онда $F = Mg\alpha$, а приложено је у т. C — центру тежине и

$$(18) \quad F_\tau = Mg\tau_\alpha, \ F_\nu = Mg\nu_\alpha, \ F_\beta = Mg\beta_\alpha, \ F_T = Mg t_\alpha,$$
$$L^{(M)} = [\rho_c, Mg\alpha].$$

$$(19) \quad \begin{cases} L^{(M)}_\tau = (\tau, [\rho_C, Mg\alpha]) = Mg\rho_{C\xi}(\operatorname{Cos}\chi\,\beta_\alpha - \operatorname{Sin}\chi\,\nu_\alpha) \\ L^{(M)}_\nu = (\nu, [\rho_C, Mg\alpha]) = Mg(\rho_{C\xi}\operatorname{Sin}\chi\,\tau_\alpha - \rho_{C\tau}\beta_\alpha) \\ L^{(M)}_\beta = (\beta, [\rho_C, Mg\alpha]) = Mg(\rho_{C\tau}\nu_\alpha - \rho_{C\xi}\operatorname{Cos}\chi\,\tau_\alpha) \end{cases}$$

Дакле, на пример, систем 10 прима облик

$$(19) \quad \begin{cases} \Phi_\tau\tau_T + \Phi_\nu\nu_T + \Phi_\beta\beta_T + \Psi_\beta K_{ss_1} = Mg\,[t_\alpha + \\ \qquad + K_{ss_1}(\rho_{C\tau}\nu_\alpha - \rho_{C\xi}\operatorname{Cos}\chi\,\tau_\alpha)] \\ \Psi_\tau = Mg\,\rho_{C\xi}(\operatorname{Cos}\chi\,\beta_\alpha - \operatorname{Sin}\chi\,\nu_\alpha). \end{cases}$$

---

[1]) *Jacobi* C. G. J. Vorlesungen über Dynamik. Sechste Vorl. S.S. 49-51.

[2]) *Ант. Билимовичъ.* Уравненія движенія для консервативныхъ системъ и ихъ приложенія стр. 1—6.

Приметимо да је уопште за криву линију, која лежи у равни

$$\beta_T = 0 \quad \text{и} \quad L_{ss_1} = 0$$

и системи једначина 10—12 су идентични.

ГЛАВА IV.

Гранични случај.

4.1 *Формулисање проблема.*

На овоме месту ми ћемо проучити онај случај, када је одстојање тачака M и M_1, у којима се чврсто тело наслања на криву линију, толико мaлено да се може сматрати истог реда као и елеменат те криве.

Дакле проблем може да буде овако формулисан: чврсто тело, чије се две одређене тачке налазе на датој кривој линији, креће се услед дејства датих сила; одредити кретање. И у овоме случају имамо, наравно, два степена слободе, јер два параметра одређују клизање дуж криве и обртање око праве $M\,M_1$. Обртање око ма које од нормала на правој $M\,M_1$ искључено је тиме да и ако веома мaлено $M\,M_1$ није стегнуто у тачку.

Ми ћемо извести једначине кретања независно од генералног случаја (глава III) а после показаћемо каква веза постоји између ових и оних.

4.2 *Избор триједра.*

Како се кретање одређује брзином неке тачке тела и тренутном угаоном брзином, то ћемо одабрати као пол триједра т. A средину веома маленог лука $M\,M_1$. И ако т. A мења свој положај у телу, сматрамо да је лук $M\,M_1$ тако мален да можемо занемарити ово померање пола A у телу и узети га као репрезентативну тачку тела.

Као и пре, узмимо за први параметар дужину лука s, која ће сем положаја пола A одређивати триједар конструисани на тангенти (§ 1.5), т. ј. тангенту, главну нормалу и бинормалу. Означаваћемо га са $A\,\tau\,\nu\,b$.

У вези са горњом предпоставком стоји друга да ми можемо сматрати да је тангента непокретно везана са телом и према томе кретање тела с обзиром на триједар А т N b представља обртање око тангенте, које ћемо одређивати углом χ што га затвара главна нормала са неком осом у равни N b непокретно везаном са телом.

Повежимо са телом триједар $A\xi\eta\zeta$ и то тако да оса ζ поклапа се са тангентом, а оса ξ — са пројекцијом на раван N b вектора ρ_C чији је почетак у т. А, а крај у т. С центру инерције и узмимо као полазне једначине (16) § 2.62.

4.21 *Величине које улазе у природне једначине као функције параметара* s и χ.

Јасно је да пројекције брзине пола А, $v_A = \dfrac{ds}{dt}$, једнаке су

$$(1) \qquad v_{AT} = v_A = \frac{ds}{dt}, \; v_{AN} = v_{Ab} = 0 .$$

Кретање триједра А т N b одређује се брзином пола А и тренутном угаоном брзином ω_1 чије су пројекције на осе т N b. L_T, 0, K_T, где је

$$K_T = K\frac{ds}{dt}, \; L_T = L\frac{ds}{dt} \qquad (24) \; § \; 1.5$$

K је кривина, L — је завртање криве линије у т. А.

Како је обртање тела око тангенте представљено са вектором $\dfrac{d\chi}{dt}T$ то тренутна угаона брзина тела Ω има ове пројекције на осе т N b

$$(2) \qquad \Omega_T = L\frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}, \; \Omega_N = 0, \; \Omega_b = K\frac{ds}{dt} .$$

Пројекције вектора ρ_C (гореспоменутог) услед избора триједра $A\xi\eta\zeta$ биће:

$$(3) \quad \rho_{CT} = \rho_{C\zeta} \text{ const.}, \quad \rho_{CN} = \rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi, \quad \rho_{Cb} = \rho_{C\xi} \operatorname{Sin}\chi .$$

Најзад моменти и продукти инерције око оса $\tau N b$, ако посматрамо исти око оса $\xi \eta \zeta$ као дате, одређују се на основу (2) § 2.1 изразима (упореди (5) § 3.34)

$$
(4) \quad \begin{cases}
J_\tau = J_\zeta = \text{const.} \\
J_N = J_\xi \operatorname{Cos}^2 \chi + J_\eta \operatorname{Sin}^2 \chi + 2\,\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin} \chi \operatorname{Cos} \chi \\
J_b = J_\xi \operatorname{Sin}^2 \chi + J_\eta \operatorname{Cos}^2 \chi - 2\,\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin} \chi \operatorname{Cos} \chi \\
\Pi_{\tau N} = -(\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Sin} \chi - \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Cos} \chi) \\
\Pi_{Nb} = -[J_\xi \operatorname{Sin} \chi \operatorname{Cos} \chi - J_\eta \operatorname{Sin} \chi \operatorname{Cos} \chi - \Pi_{\xi\eta} (\operatorname{Cos}^2 \chi - \operatorname{Sin}^2 \chi)] \\
\Pi_{b\tau} = -(-\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos} \chi - \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin} \chi) .
\end{cases}
$$

Између извода ових величина по параметру χ постоје везе

$$
(5) \quad \begin{cases}
J'_\tau = 0 , \quad J'_N = 2\,\Pi_{Nb} , \quad J'_b = -2\,\Pi_{Nb} , \\
\Pi'_{Nb} = J_b - J_N , \quad \Pi'_{b\tau} = \Pi_{\tau N} , \quad \Pi'_{\tau N} = -\Pi_{b\tau} .
\end{cases}
$$

4.3 *Анализа десних страна природних једначина.*

Знамо да су десне стране природних једначина збирови пројекција главног вектора и главног момента датих сила на осе $\tau N b$ и пројекција главног вектора и главног момента реакција. Испитујмо последњу групу. У случају неидеалних веза реакције ће бити састављене од нормалних реакција криве у т. M и M_1 и трења клизења и обртања. У даљим извођењима сматрамо везе као идеалне и зато обе врсте трења отпадају. Реакције криве линије, дакле, леже у нормалним равнима у т. M и M_1. Свака од тих реакција заклапаће, услед наше претпоставке о маленкости лука MM_1, са тангентом у т. A, као и са векторима AM и AM_1 угао близу 90^0 (изузев неких сингуларних тачака). Зато ћемо сматрати да су главни вектор и главни моменат реакција у нормалној равни Nb, и према томе не дају пројекција на тангенту у т. A т. ј.

$$
R_\tau = 0, \qquad \Lambda_\tau^{(A)} = 0 .
$$

Што се тиче главног момента реакција око т. A то ми га можемо сматрати као веома малу величину, када се упореди са осталим, јер је он раван

$$\Lambda^{(A)} = [\rho_1, R_1] + [\rho_2, R_2]$$

где су ρ_1, ρ_2 вектори чији је почетак т. A, а крајеви т. M односно M_1, дакле веома малене величине, а R_1 и R_2 реакције у истим тачкама.

Зато у првој апроксимацији могли би да занемаримо пројекције овог вектора у једначинама.

4.4 *Једначине кретања.*

Ставимо сада изразе 1—3 у (15) § 2·62 и израчунајмо величине $M_T \ldots$ $G_b^{(A)}$ остављајући само моменте и продукте инерције око оса T N b да не би сувише компликовали те изразе

$$M_T = M\frac{ds}{dt} - M K \rho_{c\xi} \operatorname{Cos}\chi \frac{ds}{dt}$$

$$M_N = M\left[\rho_{cT} K \frac{ds}{dt} - \rho_{c\xi} \operatorname{Sin}\chi \left(L\frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right)\right]$$

$$M_b = M\rho_{c\xi} \operatorname{Cos}\chi \left(L\frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right)$$

$$G_T^{(A)} = J_T\left(L\frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right) - \Pi_{bT} K \frac{ds}{dt}$$

$$G_N^{(A)} = M\rho_{c\xi} \operatorname{Sin}\chi \frac{ds}{dt} - \Pi_{TN}\left(L\frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right) - \Pi_{Nb} K \frac{ds}{dt}$$

$$G_b^{(A)} = -M\rho_{c\xi} \operatorname{Cos}\chi \frac{ds}{dt} + J_b K \frac{ds}{dt} - \Pi_{bT}\left(L\frac{ds}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right).$$

Уврстимо ли ове изразе у једначине (16) § 2.62 то добивамо, узимајући у обзир речено у 4.3, после лаких трансформација следећи систем диференцијалних једначина:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} M(1 - K\rho_{c\xi} \operatorname{Cos}\chi)\dfrac{d^2s}{dt^2} - M(K'\rho_{c\xi} \operatorname{Cos}\chi + K^2\rho_{cT} - \\ \quad - K L \rho_{c\xi} \operatorname{Sin}\chi)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 + 2MK\rho_{c\xi} \operatorname{Sin}\chi \dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} = F_T \\ M(\rho_{cT} K - \rho_{c\xi} \operatorname{Sin}\chi L)\dfrac{d^2s}{dt^2} - M\rho_{c\xi} \operatorname{Sin}\chi \dfrac{d^2\chi}{dt^2} \end{array}\right.$$

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
& - 2\,M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\chi}{dt} - M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \\
& + M\,(K - \rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,K^2 - \rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L^2 + \rho_{cT}\,K' - \\
& \qquad - \rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L')\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = F_N + R_N \\[2ex]
& M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L\,\frac{d^2s}{dt^2} + M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,\frac{d^2\chi}{dt^2} - \\
& - 2\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,M\,L\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\chi}{dt} - M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \\
& + M\,(\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,L' + \rho_{cT}\,K\,L - \rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,L^2)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\
& \qquad = F_b + R_b \\[2ex]
& (J_T\,L - \Pi_{bT}\,K)\,\frac{d^2s}{dt^2} + J_T\,\frac{d^2\chi}{dt^2} + (J_T\,L' - \Pi_{bT}\,K' - \\
& - M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi\,K + \Pi_{TN}\,K\,L + \Pi_{Nb}\,K^2)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + L_T^{(A)} \\[2ex]
& (M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi - \Pi_{TN}\,L - \Pi_{Nb}\,K)\,\frac{d^2s}{dt^2} - \Pi_{TN}\,\frac{d^2\chi}{dt^2} + \\
& - \Pi_{bT}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + [(J_T + J_N - J_b)\,K + 2\,\Pi_{bT}\,L]\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\chi}{dt} + \\
& + [(J_T - J_b)\,K\,L - \Pi_{Nb}\,K' - \Pi_{TN}\,L' - \Pi_{bT}\,K^2 + \\
& \qquad + \Pi_{bT}\,L^2]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L_N^{(A)} + \Lambda_N^{(A)} \\[2ex]
& (- M\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi\,J_b\,K - \Pi_{bT}\,L)\,\frac{d^2s}{dt^2} - \Pi_{bT}\,\frac{d^2\chi}{dt^2} \\
& - \Pi_{TN}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 - 2\,(\Pi_{Nb}\,K + \Pi_{TN}\,L)\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\chi}{dt} + \\
& + (M\,\rho_{cT}\,K + J_b\,K' - \Pi_{bT}\,L' - \Pi_{Nb}\,K\,L - \\
& \qquad - \Pi_{TN}\,L^2)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L_b^{(A)} + \Lambda_b^{(A)}
\end{aligned}
\right.
$$

Као што се непосредно види у овоме случају није потребно тражити једначине слободне од реакција, јер су такове једначине прва и четврта и према томе оне су довољне за решење проблема.

Напишимо, дакле, систем две диференцијалне једначине другог реда из којих се одређују координатни параметри s и χ.

$$
(7)\quad \begin{cases}
M(1 - K\rho_{C\xi}\operatorname{Cos}\chi)\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2MK\rho_{C\xi}\operatorname{Sin}\chi\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} - \\
- M(K'\rho_{C\xi}\operatorname{Cos}\chi + K^2\rho_{CT} - KL\rho_{C\xi}\operatorname{Sin}\chi)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = F_T \\
(J_T L - \Pi_{bT}K)\dfrac{d^2s}{dt^2} + J_T\dfrac{d^2\chi}{dt^2} + (J_T L' - \Pi_{bT}K' - \\
- M\rho_{C\xi}\operatorname{Sin}\chi K + \Pi_{TN}KL + \Pi_{Nb}K^2)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = L_T^{(A)}.
\end{cases}
$$

4.5 *Једначине Lagrange'а*.

На исти начин као у глави III можемо извести Lagrange'ове једначине. За то полазимо од једначина 13 § 3.6 и сматрамо живу силу, која прима у овоме случају сасвим једноставни облик:

$$2T = Mv_A^2 - 2M\rho_{CN}v_A\Omega_b + J_T\Omega_T + J_b\Omega_b - 2\Pi_{bT}\Omega_b\Omega_T$$

(из 14 § 2.62), као функцију величина v_A, ρ_{CN}, Ω_T, Ω_b, J_b, Π_{bT}, које су опет функције s, χ, $\dfrac{ds}{dt}$, $\dfrac{d\chi}{dt}$ дате 1—4 § 4.21.

Q_s и Q_χ су коефицијенти варијација параметара δs, $\delta\chi$ у изразу елементарне радње на могућем померању сила и реакција. Последња радња равна је нули пошто померање је могуће, а како смо предпоставили да везе не зависе од времена, у ред могућих померања спада и реално померање чврстог тела. Зато као и пре ми можемо представити себи да могуће померање састоји из два: прво, када за тренутак вежемо непокретно чврсто тело са триједром $A\tau N b$, што ће бити карактерисано варијацијом δs, и, друго обртање око тангенте за угао $\delta\chi$. На основу расуђивања аналогих оним у § 3.6, добићемо да је

$$Q_s = F_T + L\,L_T^{(A)} + K\,L_b^{(A)}, \qquad Q_\chi = L_T^{(A)}$$

И према томе после лаких трансформација долазимо до овога облика Lagrange'ових једначина

$$
(8)\quad \begin{cases}
(M - 2MK\rho_{C\xi}\operatorname{Cos}\chi + J_T L^2 + J_b K^2 - 2\Pi_{bT} K L)\dfrac{d^2s}{dt^2} + \\
+ (J_T L - \Pi_{bT} K)\dfrac{d^2\chi}{dt^2} + 2(MK\rho_{C\xi}\operatorname{Sin}\chi - \Pi_{TN} K L - \\
- \Pi_{Nb} K^2)\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt} - \Pi_{TN} K\left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2 + (- M\rho_{C\xi}\operatorname{Cos}\chi K' \\
- J_T L L' - \Pi_{bT} K L' - \Pi_{bT} K' L + J_b K K')\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \\
\qquad = F_T + L L_T^{(A)} + K L_b^{(A)} \\
(J_T L - \Pi_{Tb} K)\dfrac{d^2s}{dt^2} + J_T\dfrac{d^2\chi}{dt^2} - (M\rho_{C\xi}\operatorname{Sin}\chi K - J_T L' + \\
+ \Pi_{Tb} K' - \Pi_{bN} K^2 - \Pi_{TN} K L)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = L_T^{(A)}.
\end{cases}
$$

Као што се види и у овоме случају друга Lagrange'ова једначина поклапа се са другом природном једначином. Што се тиче прелаза од система (7) ка (8) то он се може извршити без специјалног испитивања реакција и трансформација, аналогих ономе у §§ 3.45-3.5, него кад се узме примедба на крају § 4.3 у обзир, т. ј. ако ставимо $\Lambda_b^{(A)} = 0$. Помножимо ли тада четврту природну једначину са L, а шесту са K и додамо првој, то добивамо тачно прву Lagrange'ову једначину.

4.6 *Посматрани случај, као гранични општег проблема.*

Када се узму у обзир граничне вредности оних величина, које зависе од избора триједра, наиме косинуси углова триједра $M\tau\nu\beta$ са $A\,T\,N\,b$, пројекције брзине почетка триједра, K_{ss_1}, L_{ss_1}, момената и продуката инерције и т. д., то је јасно да, када тачка M_1 тежи M, све једначине (7) § 3.4, (10) § 3.5 теже облику (6) и (7) § 4.4. Узрок, наравно лежи у томе да триједар $M\tau\nu\beta$ тежи граничном положају $A\,T\,N\,b$, а и цео наш проблем гранични случај општег, проучаваног у гл. III.

Једначине изведене за општи проблем веома су компликоване и зато једначине ове главе могле би послужити, као много простије, за приближно решавање проблема у случају када је тетива $M M_1$ доста малена.

4 7 *Интеграл живе силе. Конзервативно кретање.*

Напишимо још интеграл живе силе у проширеном облику

$$(9)\quad \begin{aligned}&(M - 2 M \rho_{c\xi} \operatorname{Cos} \chi K + J_T L^2 + J_b K^2 - 2 \Pi_{bT} K L) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \\ &+ 2 (J_T L - \Pi_{bT} K) \frac{ds}{dt} \frac{d\chi}{dt} + J_T \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 2 (U + h) \ .\end{aligned}$$

Ако постоји овај интеграл, т. ј. имамо случај конзервативног кретања, онда можемо сменити једну од једначина система (7) или (8) са једначином (9). Потребно је само приметити да интеграл живе силе није консеквенција система (7), који је приближни, него тачног система (8), ако дате силе имају потенцијал.

4 8 *Случај тешког чврстог тела.*

Означимо са α правац силе тежине, са t_α, n_α, b_α косинусе углова оса $T N b$ са овим правцем. Онда десне су стране једначине (7) једнаке

$$(10)\qquad F_T = Mg\, t_\alpha\,, \quad L_T^{(A)} = Mg\, \rho_{c\xi} (\operatorname{Cos} \chi\, b_\alpha - \operatorname{Sin} \chi\, n_\alpha) \ .$$

Приметимо да у случају A — центар инерције ($\rho_{c\xi} = \rho_{cT} = 0$) прва једначина од (7) прима облик

$$(11)\qquad M \frac{d^2 s}{dt^2} = Mg\, t_\alpha \ .$$

Ако центар инерције лежи на тангенти ($\rho_{c\xi} = 0$) иста једначина даје

$$(12)\qquad M \frac{d^2 s}{dt^2} - M K^2 \rho_{cT} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Mg\, t_\alpha \ .$$

Једначине (11), (12) не садрже параметра χ, који после њихове интеграције можемо наћи квадратуром из интеграла живе силе.

ГЛАВА V

Специјални случајеви.

5.1 *Кретање чврстог тела на правој линији.*

Нека се тешко чврсто тело наслања у двема тачкама на праву U, чији орт означимо са τ. У овоме случају правац U остаје непромењлив и, дакле, основни тријендар постаје неодређен. Зато изаберимо другу осу ν тако да буде нормална на τ, а и на правац α силе тежине, онда ће бити $\beta = [\tau, \nu]$. Означимо са θ угао што га затварају осе U и α, према томе угао између α и β биће $90^0 + \theta$.

Узмимо систем (20) § 3.8. Пошто се правци тангенте и тетиве поклапају имамо

$$\tau_T = 1\,, \quad \nu_T = \beta_T = 0\,,$$

даље за праву линију $K_{ss_1} = L_{ss_1} = K = 0$ и, најзад $t_\alpha = \mathrm{Cos}\,\theta$, $\nu_\alpha = 0$, $\beta_\alpha = -\,\mathrm{Sin}\,\theta$.

Ставимо ове вредности у споменуте једначине (види 7 § 3.4) то добивамо

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2} = g\,\mathrm{Cos}\,\theta\,. \\[2ex] J_T\,\dfrac{d^2\chi}{dt^2} = -\,Mg\,\rho_{c\xi}\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\chi\,. \end{cases}$$

Свака од ових једначина даје се засебно интегрисати. Друга једначина није ништа друго него једначина кретања физичког клатна, на које дејствује сила $Mg\,\mathrm{Sin}\,\theta$, и ми нећемо се даље упуштати у проучавање овог познатог проблема.

Приметимо само да прва једначина даје, после две квадратуре,

$$s = g\,\mathrm{Cos}\,\theta\,\frac{t^2}{2} + c_1\,t + c_2\,.$$

У случају хоризонталне праве $s = c_1 t + c_2$, јер је $\theta = 90^0$, $\text{Cos}\,\theta = 0$, $\text{Sin}\,\theta = 1$ т. ј. кретање дуж праве униформно, а на клатно дејствује сила Mg. За вертикалну праву:

$$s = g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad \chi = c_3 t + c_4 \quad \text{т. ј. униформно обртање.}$$

5.2 *Чврсто тело на кружној линији (једначине).*

Означимо са r полупречник круга, са N нормалу на раван тога круга, са α правац силе тежине и конструишимо триједар $M\tau\nu\beta$. Осе τ (тетива) и ν леже у равни круга, а β има константан правац исти са N. Када се триједар $M\tau\nu\beta$ креће он се обрће око осе β и према томе $L_{ss_1} = 0$.

Нека је θ угао што га затварају осе τ и t_s, који је у овоме случају константан зато јер се у току кретања узајамни положај оса τ, t_s, t_{s_1} не мења. Као што је лако видети

$$\left[\,\overline{\tau\,[t_s,\; t_{s_1}]}\,\right] = \text{Sin}\;2\theta$$

и
$$(U,\, t_{s_1}) = U\,(\tau,\, t_{s_1}) = 2\,r\;\text{Sin}\;\theta\;\text{Cos}\;\theta$$

и услед тога $\quad K_{ss_1} = \dfrac{1}{r} = K$, кривини кружне линије.

Без даљих тумачења јасно је, да

$$K_{S\tau} = -\frac{1}{r}\,\text{Sin}\;\theta,\; K_{S\nu} = \frac{1}{r}\,\text{Cos}\;\theta,\; K_{S\beta} = 0\,.$$

Релативни положај триједара $M\tau\nu\beta$ и $M\,T\,N\,b$ не мења се и

$$\tau_T = \text{Cos}\;\theta,\quad \nu_T = \text{Sin}\;\theta,\quad \beta_T = 0\,.$$

Да бисмо нашли косинусе углова оса τ, ν, β, t_s са α означимо са ε угао што га затварају осе α и β, а са φ централни угао који одговара лу́ку s т. ј. $\varphi = \dfrac{s}{r}$, који ћемо мерити од т. A, што лежи у равни $N\alpha$, ако замислимо да последња пролази кроз центар круга O. Онда углови $AO\tau = 90^0 - \theta + \varphi$, $AOt_s = 90^0 + \varphi$, $AO\nu = 180^0 - \theta + \varphi$ и, дакле, из сферних троуглова $A\alpha\tau$, $A\alpha\nu$, $A\alpha t_s$, добивамо ($A\alpha = 270^0 - \varepsilon$)

$$\tau_\alpha = \text{Cos}\,(270^0 - \varepsilon)\,\text{Cos}\,(90^0 - \theta + \varphi) = -\,\text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Sin}\,(\theta - \varphi)$$
$$\nu_\alpha = \text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Cos}\,(\theta - \varphi)$$
$$\beta_\alpha = \text{Cos}\,\varepsilon = \text{const.}$$
$$t_\alpha = \text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi\,.$$

Уврстимо сада горе добивене вредности у систем (20) § 3.8, који је идентичан (12) § 3.51 јер је $L_{ss_1} = 0$ (предпостављамо да последњи написан за случај тешког тела) и онда добићемо

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
& M\left(1 + 2\frac{\rho_{c\tau}}{r}\,\text{Sin}\,\theta - 2\,\frac{\rho_{c\xi}}{r}\,\text{Cos}\,\theta\,\text{Cos}\,\chi + \frac{J_\beta}{r^2}\right)\frac{d^2s}{dt^2} - \\
& -\left(M\,\rho_{c\xi}\,\text{Sin}\,\theta\,\text{Sin}\,\chi + \frac{\Pi_{\beta\tau}}{r}\right)\frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{2}{r}\left(M\rho_{c\xi}\,\text{Cos}\,\theta\,\text{Sin}\,\chi\right. \\
& \left.-\frac{\Pi_{\nu\beta}}{r}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d\chi}{dt} - \left(M\,\rho_{c\xi}\,\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\chi + \frac{\Pi_{\nu\tau}}{r}\right)\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = \\
& = Mg\left(\text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi + \right. \\
& \left. + \frac{\rho_{c\tau}\,\text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Cos}\,(\theta - \varphi) + \rho_{c\xi}\,\text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Sin}\,(\theta - \varphi)\,\text{Cos}\,\chi}{r}\right), \\
& -\left(M\,\rho_{c\xi}\,\text{Sin}\,\theta\,\text{Sin}\,\chi + \frac{\Pi_{\beta\tau}}{r}\right)\frac{d^2s}{dt^2} + J_\tau\frac{d^2\chi}{dt^2} + \left(\frac{\Pi_{\nu\beta}}{r^2} - \right. \\
& \left. - M\frac{\rho_{c\xi}}{r}\,\text{Sin}\,\chi\,\text{Cos}\,\theta\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Mg\,\rho_{c\xi}\left(\text{Cos}\,\varepsilon\,\text{Cos}\,\chi - \right. \\
& \left. - \text{Sin}\,\varepsilon\,\text{Cos}\,(\theta - \varphi)\,\text{Sin}\,\chi\right)
\end{aligned}\right.$$

систем једначина, које одређују кретање тешког чврстог тела на косој кружној линији.

Интеграл живе силе за исти случај има облик

$$(3)\quad \left\{\left[M - 2\,M\,\frac{\rho_{c\xi}}{r}\,\text{Cos}\,\theta\,\text{Cos}\,\chi + 2\,M\,\rho_{c\tau}\frac{\text{Sin}\,\theta}{r} + \frac{J_\beta}{r^2}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \right.$$

$$
(3)\quad \begin{cases} -2\left[M\rho_{c\xi}\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\chi+\dfrac{\Pi_{\beta\tau}}{r}\right]\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt}+J_\tau\left(\dfrac{d\chi}{dt}\right)^2= \\ \qquad\qquad = 2\,(U+h) \end{cases}
$$

У исти мах гранични облик тих једначина, на основу (7) § 4.4 и (10) § 4.8

$$
(2')\quad \begin{cases} M\left(1-\dfrac{\rho_{c\xi}}{r}\operatorname{Cos}\chi\right)\dfrac{d^2s}{dt^2}+2M\dfrac{\rho_{c\xi}}{r}\operatorname{Sin}\chi\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\chi}{dt}- \\ -M\dfrac{\rho_{cT}}{r^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2=Mg\operatorname{Sin}\varepsilon\operatorname{Sin}\varphi, \\ -\dfrac{\Pi_{bT}}{r}\dfrac{d^2s}{dt^2}+J_T\dfrac{d^2\chi}{dt^2}+\left(\dfrac{\Pi_{Nb}}{r^2}-M\dfrac{\rho_{c\xi}}{r}\operatorname{Sin}\chi\right)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2= \\ =Mg\,\rho_{c\xi}\,(\operatorname{Cos}\varepsilon\operatorname{Cos}\chi-\operatorname{Sin}\varepsilon\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\chi), \end{cases}
$$

јер је $\quad b_\alpha=\beta_\alpha=\operatorname{Cos}\varepsilon,\ n_\alpha=\operatorname{Sin}\varepsilon\operatorname{Cos}\varphi,\ K=\dfrac{1}{r},$

а интеграл живе силе прима овај облик:

$$
(3')\quad \left(M-2M\frac{\rho_{c\xi}}{r}\operatorname{Cos}\chi+\frac{J_b}{r^2}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{2\,\Pi_{bT}}{r}\frac{ds}{dt}\frac{d\chi}{dt}+ \\ +J_T\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2=2\,(U+h)\,.
$$

5.3 *Хоризонтална кружна линија. Опште решење.*

У случају хоризонталне кружне линије ($\varepsilon=180^0$) десне су стране једначина (2) једнаке 0 односно $-Mg\rho_{c\xi}\operatorname{Cos}\chi$, а пошто су оне парцијални изводи функције U то имамо $\dfrac{\partial U}{\partial s}=0,\ \dfrac{\partial U}{\partial\chi}=-Mg\rho_{c\xi}\operatorname{Cos}\chi$ и према томе, не узимајући у обзир интеграционе константе имамо

$$
U=U(\chi)=-Mg\rho_{c\xi}\operatorname{Sin}\chi\,.
$$

Чак и у општем случају координатни параметар s не улази експлицитно у израз живе силе (3), а у случају хоризонталне кружне линије не садржи га потенцијал, дакле s је цикличка координата и ми имамо још један први интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial s'} = c_1 .$$

Решење проблема завршава се помоћу две квадратуре. Напишимо краткоће ради ова два интеграла у облику

$$a_{11}\, s'^2 + 2\, a_{12}\, s' \chi' + a_{22}\, \chi'^2 = 2\,(U + h)$$

$$a_{11}\, s' + a_{12}\, \chi' = c_1$$

или

$$(c_1 + a_{12}\, \chi')\, s' + a_{22}\, \chi'^2 = 2\,(U + h)$$

$$a_{11}\, s' + a_{12}\, \chi' = c_1 .$$

Одакле следује $(a_{11}\, a_{22} - a^2_{12})\, \chi'^2 = 2\, a_{11}\,(U + h) - c^2_1$

и

$$\frac{d\chi}{dt} = \sqrt{\frac{2\, a_{11}\,(U + h) - c^2_1}{a_{11}\, a_{22} - a^2_{12}}} .$$

Према томе време је дато квадратуром

$$t = \int \sqrt{\frac{a_{11}\, a_{22} - a^2_{12}}{2a_{11}(U + h) - c^2_1}}\, d\chi + c_2 . \tag{4}$$

Одредимо ли одавде χ као функцију времена, то интеграл

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c_1 - a_{12}\, \chi'}{a_{11}} .$$

где је $\chi = f(t)$, $\chi' = f'(t)$, даје могућност наћи s другом квадратуром

$$s = \int \frac{c_1 - a_{12}\, \chi'}{a_{11}}\, dt + c_3 . \tag{5}$$

Интеграционе константе одређују се начелним условима.

Према томе где се налази центар инерције разликујемо три случаја: 1) центар инерције у почетку триједра, 2) ц. ин. на тетиви, 3) ц. ин. није на тетиви.

5.31 *Центар инерције у почетку триједра* ($\rho_{c\xi} = \rho_{c\tau} = 0$).

У овоме случају коефицијенти генералисаних брзина у изразу живе силе имају облик

$$a_{11} = M + \frac{J_\beta}{r^2}\,, \quad a_{12} = -\frac{\Pi_{\beta\tau}}{r}\,, \quad a_{22} = J_\zeta = \text{const.},$$

где су $\qquad J_\beta = J_\xi \operatorname{Sin}^2\chi + J_\eta \operatorname{Cos}^2\chi - 2\,\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi\,,$

$$\Pi_{\beta\tau} = \Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos}\chi + \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin}\chi\,.$$

Али за сада не важи предњи избор оса ξ и η, непокретно везаних са телом јер је вектор $\rho_c = 0$. Зато поново изаберимо овакове осе и то на овај начин.

Замислимо да је у т. М конструисан елипсоид инерције, тај се елипсоид, наравно, креће са телом заједно. Раван $\nu\beta$ не мења свој положај у телу, јер су т. М и оса τ непокретно са њиме везане, а њен пресек са елипсоидом инерције је нека елипса. Како у свакој елипси постоје два ортогонална диаметра, који затварају са главним угао од 45 степени, и зато исти оваkови диаметри у нашој елипси биће карактерисани тиме да око њих су моменти инерције једнаки. Правце ових диаметара узмимо за осе ξ, η и, дакле, имамо $J_\xi = J_\eta$.

Одакле следује да

$$a_{11} = \frac{Mr^2 + J_\xi - 2\,\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi}{r^2}\,,$$

$$a_{12} = -\frac{\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos}\chi + \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin}\chi}{r}\,, \quad a_{22} = J_\zeta\,.$$

Уврстимо сада ове вредности величина a_{11}, a_{12}, a_{22} у 4 § 5.3 и добивамо квадратуру која у овоме случају одређује време, узимајући у обзир да је $U = 0$,

$$t = \int \sqrt{\frac{A}{B}}\, d\chi + c_2\,,$$

где је

$$A = (Mr^2 + J_\xi - 2\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi) J_\zeta - (\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos}\chi + \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin}\chi)^2 ,$$

$$B = 2 (Mr^2 + J_\xi - 2\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi) h - c_1^2 r^2 .$$

Супституцијом $y = \operatorname{tg}\chi$ приводимо овај интеграл облику

$$\left(\operatorname{Sin}^2\chi = \frac{y^2}{1+y^2},\ \operatorname{Cos}^2\chi = \frac{1}{1+y^2},\ d\chi = \frac{dy}{1+y^2} \right)$$

$$t = \int \sqrt{\frac{A'}{B'}} \frac{dy}{1+y^2} + c_2 , \tag{6}$$

где је

$$A' = Mr^2 J_\zeta + J_\xi J_\zeta - \Pi^2_{\eta\zeta} - 2 (J_\zeta \Pi_{\xi\eta} + \Pi_{\eta\zeta} \Pi_{\zeta\xi}) y + (Mr^2 J_\zeta + J_\xi J_\zeta - \Pi^2_{\zeta\xi}) y^2 ,$$

$$B' = 2 M r^2 h + 2 J_\xi h - c^2_1 r^2 - 4 \Pi_{\xi\eta} h y + (2 M r^2 h + 2 J_\xi h - c^2_1 r^2) y^2 .$$

Овај елиптички интеграл биће проучаван мало даље.

5.32 *Центар инерције на шетиви* ($\rho_{c\xi} = 0,\ \rho_{c\zeta} \neq 0$).

Узимајући исте осе ξ, η добивамо ове изразе за a_{11}, a_{12}, a_{22}

$$a_{11} = \frac{M r^2 + 2 M \rho_{c\zeta} \operatorname{Sin}\theta\, r + J_\xi - 2\Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin}\chi \operatorname{Cos}\chi}{r^2} ;$$

$$a_{12} = - \frac{\Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos}\chi + \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin}\chi}{r} ,\quad a_{22} = J_\zeta$$

и време је дато квадратуром која се разликује од (6) тиме да у њу улазе чланови са $2 M\rho_{c\zeta} \operatorname{Sin}\theta\, r$, т. ј. појављује се угао θ

$$t = \int \sqrt{\frac{A''}{B''}} \frac{dy}{1+y^2} + c_2 , \tag{7}$$

где је

$$A'' = M r^2 J_\zeta + 2 M \rho_{c\zeta} r J_\zeta \operatorname{Sin} \theta + J_\xi J_\zeta - \Pi^2_{\eta\zeta} -$$
$$- 2 (J_\zeta \Pi_{\xi\eta} + \Pi_{\eta\zeta} \Pi_{\zeta\xi}) y + (M r^2 J_\zeta + 2 M \rho_{c\zeta} r \operatorname{Sin} \theta J_\zeta +$$
$$+ J_\xi J_\zeta - \Pi^2_{\zeta\xi}) y^2,$$

$$B'' = 2 M r^2 h + 4 M \rho_{c\zeta} r h \operatorname{Sin} \theta + 2 J_\xi h - c^2{}_1 r^2 -$$
$$- 4 \Pi_{\xi\eta} h y + (2 M r^2 h + 4 M \rho_{c\zeta} r h \operatorname{Sin} \theta + 2 J_\xi h - c^2{}_1 r^2) y^2.$$

5.33 *Општи случај* ($\rho_{c\zeta} \neq 0$, $\rho_{c\xi} \neq 0$).

За овај случај важи избор оса ξ, η дати у § 3.33 и, дакле, из (3) § 5.2 добивамо

$$(8) \quad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{r^2} (M r^2 - 2 M r \rho_{c\xi} \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cos} \chi + 2 M r \rho_{c\zeta} \operatorname{Sin} \theta + \\ \quad + J_\xi \operatorname{Sin}^2 \chi + J_\eta \operatorname{Cos}^2 \chi - 2 \Pi_{\xi\eta} \operatorname{Sin} \chi \operatorname{Cos} \chi) \\ a_{12} = -\dfrac{1}{r} (M r \rho_{c\xi} \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \chi + \Pi_{\eta\zeta} \operatorname{Cos} \chi + \Pi_{\zeta\xi} \operatorname{Sin} \chi) \\ a_{22} = J_\zeta . \end{cases}$$

Функција $U = - M g \rho_{c\xi} \operatorname{Sin} \chi$. Ставимо изразе (8) у (4) и примењујемо супституцију $y = \operatorname{tg} \dfrac{\chi}{2}$. Онда, ако означимо, краткоће ради,

$$a_1 = M r^2 J_\zeta + 2 M r \rho_{c\zeta} J_\zeta \operatorname{Sin} \theta,$$
$$a_2 = J_\xi J_\zeta - (\Pi_{\zeta\xi} + M r \rho_{c\xi} \operatorname{Sin} \theta)^2, \quad a_3 = J_\eta J_\zeta - \Pi^2_{\eta\zeta},$$
$$a_4 = - 2 (J_\zeta \Pi_{\xi\eta} + \Pi_{\eta\zeta} \Pi_{\zeta\xi} + M r \rho_{c\xi} \operatorname{Sin} \theta \Pi_{\eta\zeta}),$$
$$a_5 = - 2 M r \rho_{c\xi} J_\zeta \operatorname{Cos} \theta;$$
$$b_1 = 2 h M r (r + 2 \rho_{c\zeta} \operatorname{Sin} \theta) - c^2{}_1 r^2,$$
$$b_2 = 4 (- h \Pi_{\xi\eta} + M^2 g r \rho^2_{c\xi} \operatorname{Cos} \theta),$$
$$b_3 = - 2 M^2 g r \rho_{c\xi} (r + 2 \rho_{c\zeta} \operatorname{Sin} \theta),$$
$$b_4 = 2 h J_\xi, \quad b_5 = 2 h J_\eta, \quad b_6 = - 4 M r \rho_{c\xi} h \operatorname{Cos} \theta,$$
$$b_7 = M g \rho_{c\xi} J_\xi, \quad b_8 = - 2 M \rho_{c\xi} J_\eta, \quad b_9 = 4 M g \rho_{c\xi} \Pi_{\xi\eta}$$

добивамо да је време дато овом квадратуром

$$t = 2 \int \sqrt{\frac{A'''}{B'''}} \frac{dy}{1 + y^2} + c_2 , \tag{9}$$

где је

$$A''' = (1 + y^2)\,[a_1 (1 + y^2)^2 + 4 a_2 y^2 + a_3 (1 - y^2)^2 +
+ 2 a_4 y (1 - y^2) + a_5 (1 - y^4)],$$

$$B''' = b_1 (1 + y^2)^3 + 2 b_2 y (1 - y^4) + 2 b_3 y (1 + y^2)^2 +
+ 4 b_4 y (1 + y^2) + b_5 (1 - y^2)(1 - y^4) + b_6 (1 + y^2)(1 - y^4) +
+ 8 b_7 y^3 + 2 b_8 y (1 - y^2)^2 + 4 b_9 y^2 (1 - y^2) ,$$

која је, као што се види, хиперлиптички интеграл.

5.4 *Проучавање квадратура* (6) и (7).

Интеграле (6) и (7) проучаваћемо заједно јер се они битно не разликују.

1°. Најпре узмимо случај, када је елипсоид инерције око пола M — елипсоид обртања око осе ζ, и осе ξ, η, ζ су главне осе инерције, $J_\xi = J_\eta$, J_ζ су главни моменти инерције у т. M и $\Pi_{\xi\eta} = \Pi_{\xi\zeta} = \Pi_{\eta\zeta} = 0$.

Ако означимо кoефицијенте y^2 у бројитељу и именитељу са

$$a_1 = M r^2 J_\zeta + 2 M \rho_{c\zeta} r \operatorname{Sin}\theta J_\xi J_\zeta ,$$
$$b_1 = 2 M r^2 h + 4 M \rho_{c\zeta} r h \operatorname{Sin}\theta + 2 J_\xi h - c_1^2 r^2 ,$$

то интеграл прима облик

$$t = \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \int \frac{dy}{1 + y^2} + c_2 = \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \int d\chi + c_2 = \sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\, \chi + c_2 .$$

Одакле

$$\chi = \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} (t - c_2) . \tag{10}$$

Дужину лука као функцију времена одређујемо из (5) и (8)

$$s = \int \frac{c_1 r^2}{M r^2 + 2 M r \rho_{c\zeta} \operatorname{Sin}\theta + J_\xi} dt + c_3$$

$$(10') \qquad s = \frac{c_1 r^2}{M r^2 + 2 M r \rho_{c\zeta} \operatorname{Sin} \vartheta + J_\zeta} t + c_2 .$$

Дакле, када је тело — тело обртања у механичком смислу, оно се креће униформно на кружној линији и исто тако обрће се око тетиве.

2⁰. Означимо сада са a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 коефицијенте полинома, који улазе у интеграл (7) и посматрајмо случај $a_0 = a_2$, т. ј. $\Pi_{\eta\zeta} = \Pi_{\xi\zeta}$ (овај случај садржи у себи $\Pi_{\eta\zeta} = \Pi_{\xi\zeta} = 0$, т. ј. оса ζ је главна оса инерције).

Интеграл, дакле, прима облик, јер је увек $b_0 = b_2$

$$t = \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \int \sqrt{\frac{1 + 2\alpha y + y^2}{1 + 2\beta y + y^2}} \frac{dy}{1 + y^2} + c_2 ,$$

где је
$$2\alpha = \frac{a_1}{a_0}, \quad 2\beta = \frac{b_1}{b_0} .$$

Супституцијом $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ трансформишемо га у

$$t = -\sqrt{\frac{2 a_0 - a_1}{2 b_0 - b_1}} \int \frac{x^2 + \gamma}{(x^2 + 1) \sqrt{(x^2 + \gamma)(x^2 + \delta)}} dx + c_2 ,$$

где је
$$\gamma = \frac{2a_0 + a_1}{2a_0 - a_1}, \quad \delta = \frac{2b_0 + b_1}{2b_0 - b_1} .$$

Да бисмо могли трансформисати овај интеграл ка нормалном Legendre-овом облику потребно је знати знаке величина γ и δ.

$$2 a_0 - a_1 = 2 (M r^2 + 2 M \rho_{c\zeta} r \operatorname{Sin} \vartheta + J_\xi + \Pi_{\xi\eta}) J_\zeta$$

Лако је доказати на основу израза (2) § 2.1 општу теорему да је продукат инерције односно два правца, који се секу у некој тачци и односно којих моменти инерције једнаки мање од споменутих момената. Према томе увек је $2 a_0 - a_1 > 0$.

$$2a_0 + a_1 = 2\,M r^2\,J_\zeta + 4\,M \rho_{c\zeta}\,r\,\mathrm{Sin}\,\theta\,J_\zeta +$$
$$+ 2(J_\xi - \Pi_{\xi\eta})\,J_\zeta - 4\,\Pi^2_{\xi\zeta}\,.$$

Али последња два члана представљају двоструку дискриминанту једначине елипсоида инерције а она је мања од нуле. Дакле $2a_0 + a_1 \gtreqless 0$, ако је

$$(*)\quad 2\,\Pi^2_{\xi\zeta} \lesseqgtr M r^2\,J_\zeta + 2\,M\rho_{c\zeta}\,r\,\mathrm{Sin}\,\theta\,J_\zeta + (J_\xi - \Pi_{\xi\eta})\,J_\zeta\,.$$

Даље

$$2b_0 + b_1 \gtreqless 0 \quad \text{ако} \quad \frac{c^2_1}{2h} \lesseqgtr \frac{1}{r^2}\,(M r^2 + 2\,M\rho_{c\zeta}\,r\,\mathrm{Sin}\,\theta + J_\xi - \Pi_{\xi\eta})$$
$$(**)$$
$$2b_0 - b_1 \gtreqless 0 \qquad\quad \frac{c^2_1}{2h} \lesseqgtr \frac{1}{r^2}\,(M r^2 + 2\,M\rho_{c\zeta}\,r\,\mathrm{Sin}\,\theta + J_\xi + \Pi_{\xi\eta})$$

где је

$2h = a_{11}\,s'^2_0 + 2\,a_{12}\,s'_0\,\chi'_0 + a_{22}\,\chi'^2_0\,,\quad c_1 = a_{11}\,s'_0 + a_{12}\,\chi'_0$ и у коефицијенте a_{11}, a_{12}, a_{22} уврштена вредност $\chi = \chi_0$.

У случајевима када једна од величина $2a_0 + a_1$, $2b_0 + b_1$, $2b_0 - b_1$ равна нули интеграл (7) приводи се елементарном. Услов (*) зависи само од структуре тела, од тога како се оно наслања на кружну линију и полупречника ове, а услови (**) зависе и од начелних услова проблема (s_0, s'_0, χ_0, χ'_0).

Ми нећемо проучавати све случајеве које се представљају различитим комбинацијама услова (*) и (**) и објаснићемо мало даље узрок за то, али пре тога узмимо случај $2a_0 + a_1 < 0$, $2b_0 - b_1 > 0$, $2b_0 + b_1 < 0$ и ставимо

$$\gamma = -\gamma^2_1 < 0\,,\quad \delta = -\delta^2_1 < 0\,.$$

Дакле

$$t = \sqrt{\frac{2a_0 - a_1}{2b_0 - b_1}} \int \frac{\gamma^2_1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{(\gamma^2_1 - x^2)\,(\delta^2_1 - x^2)}}\,dx + c_2\,.$$

За даљу трансформацију и овај случај потребно је конкретизирати, и зато сматрајмо да су начелни услови такови да је $\gamma^2_1 > \delta^2_1$, и да $x^2 < \delta^2_1$, што је (или $x^2 > \gamma^2_1$) неопходно да радиканд буде реалан.

Ставимо сада $x = \delta_1 \operatorname{sn} u$ и $k^2 = \dfrac{\delta^2_1}{\gamma^2_1} < 1$, онда је

$$t = \sqrt{\frac{2a_0 - a_1}{2b_0 - b_1}}\,\gamma_1 \int \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 + \delta^2_1 \operatorname{sn}^2 u} du + c_2$$

$$= \sqrt{\frac{2a_0 - a_1}{2b_0 - b_1}}\,\frac{1}{\gamma_1} \int \frac{\gamma^2_1 - \delta^2_1 \operatorname{sn}^2 u}{1 + \delta^2_1 \operatorname{sn}^2 u} du + c^2$$

или $$\gamma_1 \sqrt{\frac{2b_0 - b_1}{2a_0 - a_1}}(t - c_2) = -u + \int \frac{1 + \gamma^2_1}{1 + \delta^2_1 \operatorname{sn}^2 u} du\,.$$

Последњи интеграл је елиптички интеграл трећега облика, по Legendre'у, и одредимо ли аргуменат v из услова

$$\operatorname{sn}^2 v = -\frac{1}{\delta^2_1} = \frac{2b_0 - b_1}{2b_0 + b_2},$$

то на основу познате зависности[1])

$$\int_0^u \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v} = \frac{1}{2} \log \frac{H(v-u)}{H(v+u)} + u \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}$$

добивамо

$$\int \frac{1 + \gamma^2_1}{1 + \delta^2_1 \operatorname{sn}^2 u} du = \frac{1 + \gamma^2_1}{\delta^2_1} \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v} =$$

$$-\frac{(1 + \gamma^2_1)\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}\left(\frac{1}{2} \log \frac{H(v-u)}{H(v+u)} + u \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right)$$

где су sn, cn, dn, H, Θ Jacobi-еве функције.

Тако, најзад, добивамо, јер је $\gamma_1 = \sqrt{-\gamma} = \sqrt{-\dfrac{2a_0 + a_1}{2a_0 - a_1}}$,

$$1 + \gamma^2_1 = 1 - \gamma = -\frac{2a_1}{2a_0 - a_1},$$

$$t = \sqrt{\frac{-(2a_0 - a_1)^2}{(2a_0 + a_1)(2b_0 - b_1)}}\left[\left(-1 + \frac{2a_1 \operatorname{sn} v}{(2a_0 - a_1)\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right)u\right.$$

---

[1]) *Appell P. et Lacour.* Principes de la théorie des fonctions elliptiques стр. 239.

$$+\frac{a_1}{(2a_0-a_1)}\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}\log\frac{H(v-u)}{H(v+u)}\Bigg] + c_2$$

или, пошто је

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{2\,b_0 - b_1}{2\,b_0 + b_1}},\ \operatorname{cn} v = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 v} = \sqrt{\frac{2\,b_1}{2\,b_0+b_1}},$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 v} = \sqrt{\frac{2\,a_1}{2\,a_0+a_1}},$$

$$(11)\qquad t = \sqrt{-\frac{a_1}{b_1}}\left[\left(-\sqrt{\frac{b_1}{a_1(2a_0+a_1)(2b_0-b_1)}}(2\,a_0-a_1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}\right)u + \frac{1}{2}\log\frac{H(v-u)}{H(v+u)}\right] + c_2 .$$

Овај израз, који смо добили у једном једноставном случају кретања, ипак не даје могућности наћи χ као функцију времена у коначном облику. У опште решење проблема компликовано је тим да интеграл (4) даје време као функцију угла χ, и у осталим споменутим случајевима као и у посматраном инверзно одређивање угла као функције времена задаје велике и чак несавладљиве тешкоће.

5.5 *Проучавање граничног случаја.*

За гранични случај наравно важе интеграли (4) и (5) § 5.3, али опет они дају веома компликоване изразе и зато ми ћемо изабрати други начин решења. Вратимо се једначинама (2′) и напишимо их за случај: центар инерције лежи у полу M, дакле $\rho_{c\xi} = \rho_{c\zeta} = 0$, сем тога бирамо осе ξ, η као у § 5.31

$$(2'')\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = 0 \\[2ex] J_\zeta \dfrac{d^2\chi}{dt^2} + \dfrac{\Pi_{Nb}}{r^2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = 0 . \end{cases}$$

Из прве једначине следује одмах $s = c_1 t + c_2$, а како $\Pi_{Nb} = \Pi_{\xi\eta} \operatorname{Cos} 2\chi$, то друга једначина прима облик

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{\Pi_{\xi\eta}}{J_\zeta} \frac{c_1^2}{r^2} \operatorname{Cos} 2\chi = 0 .$$

Ову једначину можемо да интегришемо помоћу две квадратуре

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\Pi_{\xi\eta}}{J_\zeta} \frac{c_1^2}{r^2} \operatorname{Sin} 2\chi = c_3$$

и

$$t = \int \frac{d\chi}{\sqrt{2 c_3 - a \operatorname{Sin} 2\chi}} + c_4 \text{, где је } a = \frac{\Pi_{\xi\eta}}{J_\zeta} \frac{c_1^2}{r^2} .$$

Како је $c_1 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0$ константна брзина пола M, то је $\frac{c_1}{r}$ угаона брзина те тачке, њу ћемо означавати са φ'_0. Фиксирајмо још осу ξ, наиме њен позитиван правац даје $c_3 > 0$.

Тако добивени интеграл је елиптички. Заиста, извршимо ли супституцију

$$y = \operatorname{tg} \chi, \; d\chi = \frac{dy}{1 + y^2}, \; \operatorname{Sin} 2\chi = \frac{2y}{1 + y^2}$$

то

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{c_3 (1 + y^2) - a y} \sqrt{1 + y^2}} + c_4 = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{c_3 - ay + 2 c_3 y^2 - ay^3 + c_3 y^4}} + c_4 .$$

Решимо га у Weierstrass-овим функцијама и за то применимо опште правило[1]). Ове једнакости служе за прелаз од наших коефицијената полинома ка коефицијентима полинома 4 степена, написаног у облику

$$F(y) = a_0 y^4 + 4 a_1 y^3 + 6 a_2 y^2 + 4 a_3 y + a_4 :$$

[1]) Appell et Lacour. ibid. стр. 255.

$$a_0 = a_4 = c_3, \quad a_1 = a_3 = -\frac{a}{4}, \; a_2 = \frac{c_3}{3}.$$

Образујмо инваријанте тог полинома

$$S = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a^2_2 \qquad = \frac{4}{3} c^2_3 - \frac{a^2}{4}$$

$$T = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a^3_2 - a_0 a^2_3 - a^2_1 a_4 = \frac{8}{27} c^3_3 - \frac{1}{12} a^2 c_3$$

и узмимо сада Weierstrass-ову функцију $\wp u$, чије су инваријанте једнаке:

$$g_2 = \frac{S}{a^2_0} = \frac{1}{c^2_3}\left(\frac{4}{3} c^2_3 - \frac{a^2}{4}\right); \; g_3 = \frac{T}{a^3_0} = \frac{1}{c^2_3}\left(\frac{8}{27} c^2_3 - \frac{a^2}{12}\right),$$

и одредимо аргуменат v тако да

$$\wp v = \frac{a^2_1 - a_0 a_2}{a^2_0} = \frac{1}{c^2_3}\left(\frac{a^2}{16} - \frac{c^2_3}{3}\right)$$

$$\wp' v = \frac{a_3 a^2_0 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a^3_1}{a^3_0} = \frac{a^3}{32 \; c^3_3}.$$

Онда можемо инвертирати интеграл (12), на основу опште формуле

$$y = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

и тако добивамо, ако ставимо још $u = \sqrt{2}\,(t - c_4)$,

$$(13) \quad y = \operatorname{tg} \chi = \frac{a}{4c_3} + \frac{1}{2} \frac{\wp' \sqrt{2}\,(t - c_4) - \dfrac{a^3}{32 \; c^3_3}}{\wp \sqrt{2}\,(t - c_4) - \dfrac{1}{c^2_3}\left(\dfrac{a^2}{16} - \dfrac{c^2_3}{3}\right)}$$

Да бисмо могли одредити варијације $\operatorname{tg} \chi$ потребно је знати знак дискриминанте

$$g_2^3 - 27\, g_3^2 = \frac{a^4}{16\, c_3^6}\left(c_3^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Но како је

$$c_3 = \frac{1}{2}(\chi'_0)^2 + \frac{1}{2}\, a \operatorname{Sin} 2\chi_0, \quad a = \frac{\Pi_{\xi\eta}}{J_\zeta}\varphi'^2_0$$

и знак дискриминанте зависи од знака бинома $c_3^2 - \dfrac{a^2}{4}$, то је она $\gtreqless 0$ када је

$$(\chi'_0)^2 \gtreqless \frac{\Pi_{\xi\eta}}{J_\zeta}\varphi'^2_0\,(1 - \operatorname{Sin} 2\chi_0)$$

или

$$\frac{\chi'_0}{\varphi'_0} \gtreqless \sqrt{\frac{\Pi_{\xi\eta}}{J_\zeta}(1 - \operatorname{Sin} 2\chi_0)} = \varkappa \tag{14}$$

т. ј. облик кретања чврстога тела зависи од размере почетних угаоних брзина обртања тела око тангенте и центра инерције на кружној линији.

5.6 *Три облика кретања.*

1⁰. $\dfrac{\chi'_0}{\varphi'_0} > \varkappa$. Следујмо општој методи инверзије у реалним количинама (Appell. ibid. стр. 257—260). Како је $a_1^2 - a_0 a_2 = \dfrac{a^2}{16} - \dfrac{c_3^2}{3} < 0$, то су сва четири корена полинома $F(y)$ имагинарна, сем тога $a_0 = c_3 > 0$, то је потребно узети $u = \sqrt{2}\,(t - c_4)$ реално.

Да нађемо границе између којих се мењају функције $\wp u$ и $\wp' u$ решимо једначину $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ и помоћу Кардановних формула добивамо ова три корена

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2c_3}\sqrt{c_3^2 - \frac{a^2}{4}},$$

$$x_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\,c_3}\sqrt{c_3^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Вратимо се посматраном случају. Како је $\wp\, v < 0$, а $\wp\, u$ у интервалу $(-\omega, \omega)$ где са ω означујемо реални полупериод те функције, мења се од $\wp(-\omega) = e_1$ највећега корена горње једначине, до $\wp\,\omega = e_1$ примајући за т. 0 вредност $+\infty$ и $e_1 = x_2 > 0$, то именитељ у изразу (13) никада није раван нули. У исти мах функција $\wp'\, u$ за $u = -\omega$ једнака 0; када $u \to 0$, она расте до $+\infty$, мења свој знак у т. 0 и даље од $-\infty$ расте до $\wp'\,\omega = 0$. Сем тога из једначине

$$(\wp'\, u)^2 = 4\,(\wp\, u)^3 - g_2\, \wp\, u - g_3$$

видимо да, ако $\wp\, u$ је бесконачно велико, $\wp'\, u$ је реда $\infty^{\frac{3}{2}}$ те и размера $\dfrac{\wp' u}{\wp\, u}$ тежи бесконачности.

Према горе реченом имамо ову шему:

u	$-\omega$	0	$+\omega$
$\wp' u$	0	$+\infty,\ -\infty$	0
$\wp u$	$e_1 > 0$	$+\infty$	e_1
$\operatorname{tg}\chi$	α	$+\infty,\ -\infty$	α

где смо са α означили вредност $\operatorname{tg}\chi$ у моменту времена који задовољава једнакост $\sqrt{2}\,(t - c_4) = -\omega$.

Дакле из тога како се мења $\operatorname{tg}\chi$ можемо закључити да угао χ мења се од 0 па до 360^0 и тело извршује потпуно обртање око тангенте.

2^0. $\dfrac{\chi'_0}{\varphi'_0} = \varkappa$, $c_3^2 = \dfrac{a^2}{4}$, $c_3 = \dfrac{a}{2}$, јер је $c_3 > 0$.

Интеграл (12) трансформише се у

$$t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dy}{(1-y)\sqrt{1+y^2}} + c_4$$

и, даље, ако ставимо $y + \sqrt{1+y^2} = z$, а $z = 1 + x$,

$$t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dz}{2z - z^2 + 1} + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} + c_4 .$$

Одакле следује

$$\lambda = 2\sqrt{2a}\,(t - c_4) = \log \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$y = \operatorname{tg} \chi = \frac{3 + 2e^{\lambda} - e^{2\lambda}}{4\,(1 - e^{\lambda})} .$$

Јасно је да у овоме случају кретање има асимптотички карактер, и тело тежи граничном положају, одређеном вредношћу

$$\lim_{t \to \infty} \operatorname{tg} \chi = + \infty$$

т. ј. оса ξ тежи вертикали.

3⁰. $\frac{\chi'_0}{\varphi'_0} < \varkappa$, $\frac{a}{2} > c_3 > 0$. Дискриминанта је, дакле, негативна.

За реалне вредности аргумента u, које леже у интервалу $(-\omega_2, \omega_2)$, где је ω_2 реални део коњугованих периода функције $\wp u$, та функција расте од $\wp(-\omega_2) = e_2 = x_1 = -\frac{1}{6}$ до $+\infty$ у т. $u = 0$ и опада опет до $\wp\omega_2 = -\frac{1}{6}$. Функција $\wp' u$, која као и $\wp u$ има у том интервалу реалне вредности расте од 0 до $+\infty$ у т. 0, мења свој знак и поново расте до $\wp'\omega_2 = 0$.

Вредност аргумента v је у овом случају реална, и зато за њу именитељ једнак нули, као и бројитељ. За $u = -v$ једнак је нули само именитељ јер је $\wp u$ парна функција а $\wp' u$ непарна. Али

$$\lim_{u \to v} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \frac{\wp'' v}{\wp' v}$$ има одређену вредност $\neq \infty$.

Из шеме

u	$-\omega_2$	$-v$	0	v	$+\omega_2$
$\wp' u$	0		$+\infty, -\infty$		0
$\wp u$	$-\frac{1}{6}$		$+\infty, +\infty$		$-\frac{1}{6}$
$\operatorname{tg}\chi$	α	$-\infty, +\infty$	$+\infty, -\infty$		α
	α		$+\infty, -\infty$	$-\infty, +\infty$	α

прво за случај $0 < v < \omega_2$, друго за $-\omega < v < 0$, види се јасно карактер промена $\operatorname{tg}\chi$ и да је кретање чврстог тела у овом случају осцилаторно.

5.7 *Центар инерције на тангенти* ($\rho_{c\xi} = 0$, $\rho_{c\zeta} \neq 0$).

У овоме случаје помоћу једначина (2') § 5.2 долазимо лако до једног другог интеграла. Оне сада имају облик

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{\rho_{c\zeta}}{r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$$

$$J_\zeta \frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{1}{r^2}\left(\Pi_{Nb} - \frac{\Pi_{bT}\ \rho_{c\zeta}}{r}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0.$$

Интегришемо ли прву, то добивамо

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\frac{\rho_{c\zeta}}{r^2}t + c_1} \qquad s = -\frac{r^2}{\rho_{c\zeta}}\log\left(\frac{\rho_{c\zeta}}{r^2}t + c_1\right) + c_2$$

и стављајући ову вредност $\frac{ds}{dt}$ у другу једначину могли би završiti решење проблема њеном интеграцијом.

Исто тако могли би се послужити квадратуром (4), али су и ови путеви веома компликовани.

У општем случају $\rho_{c\xi} =\mid= 0$, $\rho_{c\zeta} =\mid= 0$ начин који смо сада применили не даје олакшица и решење проблема задаје велике тешкоће те нећемо за сада да се њим бавимо.

ГЛАВА VI.

О кретању чврстог тела са једним степеном слободе на кривој линији.

6.1 *Опште примедбе.*

Према томе како се чврсто тело наслања на криву линију, да ли су везе задржавајуће или незадржавајуће имамо неколико случајева кретања са различитим бројевима степена слободе. Сем споменутог већ у уводу случаја да се само једна тачка чврстог тела налази на кривој линији, и, дакле ово тело има четири степена слободе, и посматраног у овој радњи случаја да две одређене тачке тела клизе на кривој линији, т. ј. кретање је са два степена слободе могу бити дати услови тако да ће тело имати само један степен слободе. На овом месту ми ћемо укратко проучити тај случај.

Као конкретни случај споменимо тај када се три тачке тела налазе на кружној линији.

Посматрајмо криву као бесконачно танку жицу чији је нормални пресек различан од круга, на пр., је квадрат или елипса. Из ове предпоставке следује одмах да слободно обртање око тетиве није могуће и, дакле, тело може само уз дуж криве да клизи. Ми нећемо сада проучавати при каквим условима овакво је кретање у опште могуће и узмимо само гранични случај аналог ономе у гл. IV.

Али да бисмо могли да решавамо овај проблем потребно је да знамо природу нормалних пресека те бесконачно танке жице, т. ј. закон како се они мењају уз дуж ње и закон њиховог распоређивања изражени у функцији дужине лука. Предпоставимо да је пресек сталне величине и посматрајмо два случаја.

6.2 *Пресек повезани са нормалом криве.*

Како смо казали, проучавамо гранични случај т. ј. када се тело нaслања на криву у двема веома блиским тачкама и тако важе расуђивања која смо применили у гл. IV, наиме, можемо занемарити пројекције реакција и пројекције момената реакција на тангенту у некој тачци, која лежи између горњих. Узмимо сада да је пресек повезан непокретно са нормалом, наравно главном. У т. M, која лежи између горњих тачака, конструишемо основни триједар: тангенту, главну нормалу и бинормалу. Овај ће триједар бити непокретно везан са телом и дакле кретање овога тела биће одређено брзином пола M, $v_M = \frac{ds}{dt}$, и тренутном угаоном брзином

$\Omega\left(L\frac{ds}{dt}, 0, K\frac{ds}{dt}\right)$, где су K и L кривина, односно завртање у т. M.

У овоме случају потребан је само један координатни параметар и ми бирамо као такови дужину лука s. Једначина која би послужила за одређивање тога параметра могла би да послужи једна од ових

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & M(1 - K\rho_{CN})\frac{d^2s}{dt^2} + M(-K^2\rho_{CT} + KL\rho_{Cb} - \\ & \qquad\qquad - K'\rho_{CN})\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = F_T\,, \\ & (J_T L - \Pi_{Tb}K)\frac{d^2s}{dt^2} + (J_T L' - \Pi_{Tb}K' - MK\rho_{Cb} + \\ & \qquad\qquad + \Pi_{NT}KL + \Pi_{Nb}K^2)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = L_T^{(M)} \end{aligned}\right.$$

које се добивају из (16) § 2.62, узимајући у обзир да су сада моменти и продукти инерције, као и пројекције вектора ρ_C на осе триједра константне.

Ако постоји интеграл живе силе решење проблема свршава се једном квадратуром.

Из (14) § 2.62 имамо

$$(M - 2M\rho_{CN}K + J_T L^2 + J_b K^2)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2(U + h)\,.$$

Одакле

$$(2) \qquad t = \int \left\{ \frac{M - 2\,M\,\rho_{CN}\,K + J_T\,L^2 + J_b\,K^2}{2\,(U + h)} \right\}^{\frac{1}{2}} ds + c_1\,.$$

6.3 *Пресек обрће се према неком закону.*

Замислимо сада да се пресек обрће око тангенте према неком закону, који може да буде изражен једначином

$$(3) \qquad \chi = \chi\,(s)$$

где је χ угао што га затварају главна нормала и нека права повезана са пресеком. Онда тело обрће се око тангентѐ — осе ζ триједра $M\,\xi\,\eta\,\zeta$ — са тренутном угаоном брзином

$\omega\left(\frac{d\chi}{dt}\,,\,0,\,0\right)$, где смо у заградама написали пројекције на осе $\tau\,N\,b$.

Како је овај случај специјалан за посматрани у гл. IV, наиме угао χ је сада функција s, то можемо узети једну од једначина (7) § 4.4, које примају облик, јер је

$$\frac{d\chi}{dt} = \chi'(s)\,\frac{ds}{dt}\,,\quad \frac{d^2\chi}{dt^2} = \chi''(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \chi'(s)\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & M\left(1 - K\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi(s)\right)\frac{d^2s}{dt^2} - M\left(\rho_{C\xi}\,\mathrm{Cos}\,\chi(s)\,K' + \right. \\ & \left. + \rho_{CT}\,K^2 - \rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi(s)\,K\,L - 2\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi(s)\,K\,\chi'(s)\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ & \qquad = F_T\,, \\ & \left(J_T\,L - \Pi_{bT}\,K + J_T\,\chi'(s)\right)\frac{d^2s}{dt^2} + \left(J_T\,\chi''(s) + J_T\,L' - \right. \\ & \left. - \Pi_{bT}\,K' + \Pi_{Nb}\,K^2 + \Pi_{NT}\,K\,L - M\,\rho_{C\xi}\,\mathrm{Sin}\,\chi(s)\,K\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \\ & \qquad = L_T^{(M)}\,. \end{aligned} \right.$$

За конзервативно кретање одређујемо време из интеграла живе силе квадратуром

$$
(5)\quad \begin{cases} [M - 2\,M\,\rho_{C\xi} \operatorname{Cos}\chi\,K + J_\zeta\,L^2 + J_b\,K^2 - 2\,\Pi_{bT}\,L\,K + J_\zeta\,(\chi')^2 \\ \qquad + 2\,(J_\zeta\,L - \Pi_{bT}\,K)\,\chi']\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(U + h)\,. \end{cases}
$$

6.4 *Примедба.*

Свака од једначина (1) и (4) има облик

$$
\varphi_1(s)\,\frac{d^2s}{dt^2} + \varphi_2(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = N
$$

где је N равно F_T или $L_T^{(M)}$.

Ако време не улази експлицитно у N проблем се редуцира на интегрисање једне диференцијалне једначине првог реда и квадратуру.

На познати начин узимамо $\dfrac{ds}{dt} = s'$ као нову функцију и имамо

$$
\varphi_1(s)\,s'\,\frac{ds'}{ds} + \varphi_2(s)\,(s')^2 = N(s, s')\,.
$$

Одакле добивамо $s' = f(s, c_1)$ и

$$
t = \int \frac{ds}{f(s, c_1)} + c_2\,.
$$

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE SUR UNE COURBE

par V. JARDETZKY.

(Résumé).

Dans cet article nous traitons le problème du mouvement d'un solide dont deux points donnés sont assujettis à glisser sur une courbe fixe donnée. Pour la résolution du problème nous appliquons la méthode générale de formation des équations intrinsèques, indiquée par M. Ant. Bilimovitch. Ayant choisi *le trièdre fondamental,* qui est construit sur *la direction fondamentale* — la corde joignant les points mentionnés, nous rapportons les équations du mouvement à ce trièdre des axes mobiles. Dans ce qui suit nous appliquons ces équations à résoudre des problèmes concrets, en comparant les résultats obtenus avec les résultats obtenus par le méthode de Lagrange.

Dans le chap. I. nous analysons le mouvement du trièdre fondamental choisi sur la courbe. Ce mouvement se détermine par la vitesse de l'origine $v_M = \frac{ds}{dt}$ et par la vitesse angulaire Ω, dont les projections sur les axes du trièdre fondamental sont L_τ, 0, K_τ. Ces quantités sont fonctions de l'arc de la courbe Dans le cas du problème général du mouvement du trièdre, les quantites L et K ont l'interprétations cinématique et géométrique. Quand la variable indépendante est le temps, ces quantités sont les projections de la vitesse angulaire du trièdre fondamental sur les axes de ce trièdre. Si nous prenons pour la variable independante l'arc de l' indicatrice sphérique, nous avons $K = 1$, $L = \theta$ — courbure géodésique de l'indicatrice sphérique d'ort de la direction fondamentale.

Comme la position d'un solide par rapport à ce trièdre est determinée par un angle de deux plans passants par la corde, l'un fixé au corps l'autre au trièdre, nous prenons l'arc de la courbe et cet angle pour les paramètres indépendants.

Dans le cas de la courbe sans frottement, le problème conduit à l'intégration du système de deux équations differentielles du second ordre. Quand il existe une intégrale de la force vive, le problème se ramène à l'intégration d'une équation du second ordre et à une quadrature.

mation des équations pour le cas approximatif quand la distance des dits points est très petite.

Dans le ch. V nous donnons quelques cas d'integration pour les solides pesants. Premier exemple, c'est le mouvement d'un solide sur une droite fixe. L'autre exemple — le corps solide sur le cercle horisontal, — peut être achevé par les quadratures, car il existe une autre première intégrale correspondant au paramétre cyclique — l'arc de la courbe. Nous analysons un des cas par les fonctions elliptiques de Jacobi. Dans le cas approximatif, nous avons étudié à l'aide des fonctions elliptiques de Weierstrass le mouvement quand le centre d'inertie se trouve à l'origine du trièdre. Il y a trois cas à distringuer: mouvements oscillatoires, mouvements asymptotiques, mouvements progressifs, selon la condition donnée.

Enfin, en considérant la courbe comme un fil infiniment mince avec section normale quelconque, le cercle exclus, nous avons traité le mouvement avec un degré de liberté. Pour le cas approximatif la résolution du probléme général est liée avec l'intégration d'une équation du prémier ordre et par une quadrature; pour les systèmes conservatives elle se reduit à une seule quadrature.
