

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

---

М. МИЛАНКОВИЋ  
ПРОФЕСОР УНИВЕРЗИТЕТА

АСТРОНОМСКА ТЕОРИЈА КЛИМАТСКИХ ПРОМЕНА  
И ЊЕНА ПРИМЕНА У ГЕОФИЗИЦИ

*Научна Ривита*

ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ  
БЕОГРАД, 1948

## УВОД

Кретање планета, па дакле и наше Земље, покорава се у свима појединостима строгом Њутновом закону гравитације, основном закону Небеске механике, а осунчавање планета топлотним зрацима Сунца врши се по једном другом не мање тачном геометријском закону. Применом тих двају закона могуће је прецизним језиком математике описати све промене којима подлежи осунчавање планета услед њиховог кретања око Сунца и обртања око њихових оса. И веза између осунчавања планета и температуре њихових површина и атмосфера може се, пошто и она подлежи законима физике, подвргнути математичком испитивању и описати језиком математике. Зато је било могуће изградити математичку теорију осунчавања планета и његових термичких ефеката, а њену исправност и домаћај испитати на резултатима директног посматрања и испитивања термичких феномена на Земљиној површини, а и на површинама неких планета. Тако проверена теорија омогућила је да се њоме знатно прекораче границе наших директних опажања, просторно и временски. Просторно, што су се термичке појаве изазване зрацима Сунца могле испитивати и онде где их не можемо непосредно посматрати, дакле у високим слојевима наше атмосфере, у атмосферама неких планета и на површини Месеца; временски, што су се термичке појаве на Земљиној површини и у њеној атмосфери могле том теоријом пратити корак у корак унатраг и тиме сазнати не само како, већ и којим кроком и замахом се мењала Земљина клима за време геолошке прошлости.

Из тако схваћеног проблема развила се, у низу расправа и засебних дела, наведених а приложеном списку, нова једна грана егзактних наука која је, под именима „Математичка теорија климе“, „Астрономска теорија климатских промена“ и „Теорија померања Земљиних полова“ постала саставни део климатологије, космичке физике и геофизике, па нашла широке примене у палеоклиматологији, геологији и астрофизици.

Овде је, у виду универзитетског уџбеника, изложен онај део те науке који је, као што се види из списка литературе на крају ове

књиге, нашао многобројну примену у геологији и геофизици. Садржај уџбеника расчлањен је у два одељка, први је обухватио математичку теорију, а други њену практичну примену. Док први одељак претпоставља знање више математике, други је приступачан и нематематичарима, у првом реду геолозима.

## СПИСАК

### ауторових радова о предмету овог уџбеника

1. О распореду Сунчеве радијације на површини Земље. „Глас“ Српске Академије наука. Књига ХСI. 1913.
2. О примјени математичке теорије спровођења топлоте на проблеме космичке физике. „Рад“ Југословенске Академије знаности. Књига 200. 1913.
3. Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre. Annalen der Physik. Vierte Folge. Band 43. 1914.
4. Ueber die Verringerung der Wärmeabgabe durch die Marsatmosphäre. Annalen der Physik. Vierte Folge. Band 44. 1914.
5. О питању астрономских теорија ледених доба. „Рад“ Књига 204. 1914.
6. Испитивања о клими планете Марса. „Рад“. Књига 213. 1916.
7. Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920.
8. Калорична годишња доба и њихова примена у палеоклиматском проблему. „Глас“. Књига СIХ. 1923.
9. Календар Земљине прошлости. Приступна академска беседа. „Глас“. Књига СХVII. 1926.
10. Испитивања о термичкој конституцији планетских атмосфера. „Глас“. Књига СХХ. 1926.
11. О осцилацијама температуре у разним слојевима атмосфере. „Глас“. Књига СХХХIV. 1929.
12. Астрономска теорија секуларних варијација климе. „Глас“. Књига СХLIII. 1931.
13. Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Band I des Handbuches der Klimatologie. Berlin 1930.
14. Ueber die Uratmosphäre der Erde. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Band 33. 1931.
15. Stellung und Bewegung der Erde im Weltall. Band I des Handbuches der Geophysik. Berlin 1931.
16. Drehbewegungen der Erde im Weltall. Band I des Handbuches der Geophysik. Berlin 1933.
17. Секуларна померања Земљиних полова. „Глас“. Књига CLII. 1932.
18. Säkulare Polverlagerungen. Band I des Handbuches der Geophysik. Berlin 1933.

19. Bahnkurve der säkularen Polverlagerung. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome I. 1932.

20. Нумеричко израчунавање секуларне лугање Земљиних полова. „Глас“. Књига CLIV. 1933.

21. Das Problem der Verlagerung der Drehpole der Erde in den exakten und in den beschreibenden Naturwissenschaften. Erinnerungen an Alfred Wegener. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome II. 1933.

22. Der Mechanismus der Polverlagerung und die daraus sich ergebenden Polbahnkurven. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Band 42. 1934.

23. Ueber das Problem der Polverlagerungen. Actes du congrès interbalkanique de mathématiciens. Athènes 1935.

24. Нови резултати астрономске теорије климатских промена. „Глас“. Књига CLXXV. 1937.

25. Astronomische Mittel zur Erforschung der erdgeschichtlichen Klimate. Band IX des Handbuches der Geophysik. Berlin 1938.

26. Ein neues Kapitel der exakten Wissenschaften und dessen Anwendung in den beschreibenden Naturwissenschaften. Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Tome VI. 1937.

27. Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem. Édition speciale de l'Académie serbe. Belgrade 1941.

ПРВИ ОДЕЉАК

# ТЕОРИЈА

## ГЛАВА ПРВА

### ОСНОВНИ ПОЈМОВИ СФЕРНЕ АСТРОНОМИЈЕ

§ 1. **Небеска сфера.** — Стари астрономи су веровали да је наша Земља непомична, а да се око ње крећу сва небеска тела. Тај њихов геоцентрични систем света напуштен је од доба Коперникова, али се он, формално, задржао и у нашој модерној астрономији, јер нам предочава релативна кретања небеских тела према нашој Земљи, онаква каква их, заиста, из дана у дан, виђамо и посматрамо. Како се, према основном ставу Теорије релативитета, може говорити само о релативним кретањима, не би се схватање старих астронома могло одбацити као ненаучно, ваља га само у неколико исправити. Они су замишљали да се звезде некретнице, оне које не мењају свој приви дни узајамн положај, налазе причвршћене на кристалној сфери њиховој, а да се та сфера обрће око Земље. Данас знамо да није тако, јер се те звезде налазе у разним отстојањима од нашег стајалишта, а оно што нам изгледа као звездано небо, скуп је тих звезда замишљених у истом отстојању од нас, или пројцираних на једну замишљену сферу у чијем се центру налазимо, чији је радиус произвољан, али огромно велик према димензијама наше Земље и њене путање око Сунца. Та небеска сфера је, дакле, само геометријски појам, лишен оне стварности који су јој стари астрономи приписивали. У том смислу небеска сфера је саставни и основни појам наше данашње астрономије када се ради о томе да се опишу релативна кретања небеских тела према Земљи, а то је предмет Сферне астрономије.

§ 2. **Сферне координате.** — Када се ради о томе да се кретања небеских тела, онаква каква их виђамо и опажамо, опишу језиком математике, мора се употребити какав тачно одређени координатни систем на који се односе координате ученог небеског тела. Као почетну тачку тог координатног система одабире се положај посматрача. Тај координатни систем је, у ствари, антропоцентричан. Његова почетна тачка дата је географском ширином  $\varphi$  и географском дужином

је са  $\delta$ . Сферни угао  $ZNS$  између меридијана и часовног круга зове се часовни угао; он је мерен луком  $A'B$  екватора, а броји се, као и азимут, од јужног дела меридијана у правцу од југа према западу. Тај лук означаваћемо са  $\omega$ , када га будемо мерили лучном мером, а са  $t$  када га будемо мерили временом. Деклинација  $\delta$  и часовни угао  $\omega$  су обе координате екваторског координатног система.

§ 3. Привидно кретање Сунца по небеској сфери. — Земља се креће релативно према Сунцу од запада према истоку по својој путањи чија равна пролази кроз центар Сунца, зато кретање Сунца релативно према Земљи следује у истом смислу, а у равни која пролази кроз центар Земље. Пресек те равни са небеском сфером, тј. пројекција релативне Сунчеве путање из центра Земље на небеску сферу зове се еклиптиком. Тај, такође, највећи круг небеске сфере нека буде у нашој слици предочен кругом  $EE'$ . Како Земљина оса не стоји управно на равни Земљине путање, већ затвара са нормалом те равни угао  $\epsilon$ , неће еклиптика падати у небески екватор, већ ће са њим затварати исти тај угао. Он се назива косином еклиптике. Он је у нашој слици предочен сферним углом  $A'\gamma E'$ . Права  $\gamma\gamma'$  дуж које се секу равна небеског екватора и равна еклиптике зове се равнодневичка или еквинокцијална линија. Та права продире небеску сферу у две дијаметралне тачке  $\gamma$  и  $\gamma'$  које се зову равнодневичке тачке. Тачка  $\gamma$  кроз коју пролази Сунце када се из јужне половине небеске сфере уздигне у њену северну хемисферу зове се пролетња равнодневица или, укратко, пролетња тачка, а она друга јесења равнодневица или јесења тачка. Лук  $\gamma S$  еклиптике који нам даје лучно отстојање Сунца од пролетње тачке, мерен у правцу привидног кретања Сунца по еклиптици, зове се геоцентрична лонгитуда Сунца; обележаваћемо је са  $\lambda$ . Лук  $\gamma B$  небеског екватора који лежи између пролетње тачке и пресека екватора са деклинационим кругом положеним кроз Сунце зове се ректасцензија Сунца.

Из сферног троугла  $NZS$  следује по познатом обрасцу сферне тригонометрије

$$\cos ZS = \cos NZ \cos NS + \sin NZ \sin NS \cos \sphericalangle ZNS.$$

Из наше слике и претходних дефиниција видимо да је

$$\begin{aligned} ZS = z & \quad NZ = 90^\circ - \varphi & \quad NS = 90^\circ - \delta \\ \sphericalangle ZNS = \omega. & & \end{aligned}$$

Зато је

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega. \quad (1)$$

Из сферног троугла  $\gamma BS$  у којем је угао код  $B$  прави, угао код  $\gamma$  једнак косини  $\epsilon$  еклиптике, страна  $\gamma S$  једнака лонгитуди  $\lambda$  Сунца, а

страна  $BS$  једнака деклинацији  $\delta$  Сунца, следује по познатом обрасцу за правоугле сферне троуглове

$$\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda. \quad (2)$$

Из ове једначине следује да је деклинација  $\delta$  Сунца једнака нули када је  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 180^\circ$ , тј. када се Сунце налази у равнодневичким тачкама, а да достизава своје екстремне вредности

$$\delta = +\epsilon \text{ и } \delta = -\epsilon \text{ за } \lambda = 90^\circ \text{ и } \lambda = 270^\circ.$$

Те две тачке еклиптике, удаљене за  $90^\circ$  од пролетњих тачака, зову се солстицијалне тачке; она која се налази у северној хемисфери небеске сфере зове се летњи солстицијум или сунцостаја, а она друга зимски солстицијум. Оба упоредника небеске сфере који пролазе кроз те тачке зову се обратници, северни: обратник раков, а јужни: обратник јарчев.

Интервал године за време којег Сунце пребрише лук еклиптике између пролетње равнодневице и летњег солстиција зове се астрономско пролеће северне хемисфере. За то време деклинација Сунца порасте од нуле до своје максималне вредности  $+\epsilon$ . За време астрономског лета северне хемисфере Сунце пребрише лук еклиптике између летњег солстиција и јесење равнодневице (од  $\lambda = 90^\circ$  до  $\lambda = 180^\circ$ ), а  $\delta$  опадне од  $+\epsilon$  до нуле. За време астрономске јесени северне хемисфере Сунце пребрише лук еклиптике између јесење равнодневице и зимског солстиција (од  $\lambda = 180^\circ$  до  $\lambda = 270^\circ$ ), а  $\delta$  опадне од нуле до своје минималне вредности  $-\epsilon$ . За време астрономске зиме северне хемисфере Сунце пребрише лук еклиптике између зимског солстиција и пролетње равнодневице (од  $\lambda = 270^\circ$  до  $\lambda = 360^\circ$ ), а  $\delta$  порасте од  $-\epsilon$  до 0.

Астрономско пролеће, лето, јесен и зима јужне хемисфере одговарају, тим редом, квадрантима  $\lambda = 180^\circ$  до  $\lambda = 270^\circ$ ;  $\lambda = 270^\circ$  до  $\lambda = 360^\circ$ ;  $\lambda = 0$  до  $\lambda = 90^\circ$ ;  $\lambda = 0$  до  $\lambda = 180^\circ$  привидне путање Сунца.

Постепена промена деклинације Сунца у току године изазива промену боравка Сунца изнад хоризонта посматрачева, а тиме и ток годишњих доба. Дужина дневног боравка Сунца изнад хоризонта израчунава се овако. Мери ли се часовни угао  $\omega$  Сунца временском мером, изначи ли се у њој са  $t$ , тј. стави ли се за  $\omega = 15^\circ, 30^\circ, \dots$ ,  $t = 1^h, 2^h, \dots$ , дакле

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} t, \quad (3)$$

где је  $\tau = 24^h$ , онда се час излаза, односно залаза Сунца, које ћемо означити са  $-t_0$  односно  $+t_0$  добивају из услова да је у тима тренуцима висина  $h$  Сунца изнад хоризонта једнака нули, а зенитско отстојање  $z$  Сунца једнако  $90^\circ$ . Са тим условом даје једначина (1)

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0 = 0,$$

дакле

$$\cos t_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta. \quad (4)$$

Негативни корен ове једначине даје час излаза Сунца, мерен уна-траг од правог подна, а позитивни корен час залаза Сунца, мерен унапред од тога подна. Збир  $2t_0$  тих двају интервала даје дужину дана, тј. боравка Сунца изнад хоризонта.

За  $\delta = 0$ , дакле у доба равнодневица, даје предња једначина  $t_0 = 6^h$ , тј. дужину дана од  $12^h$ . То важи за све географске ширине  $\varphi$ . Зато су у то доба на целој Земљи са изузетком полова који претстављају сингуларне тачке, дан и ноћ међусобно једнаки. Када је  $\delta > 0$ , онда су на северној хемисфери дани дужи од ноћију, а на јужној краћи; за  $\delta < 0$  обрнут је случај.

Једначина (4) има реалне корене догод је

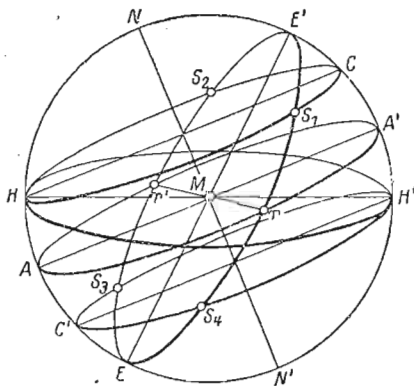
$$-1 \leq \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta \leq +1.$$

Како деклинација Сунца  $\delta$  лежи увек између граница  $-\varepsilon$  и  $+\varepsilon$ , предњи услов је испуњен за време целе године на оним географским ширинама  $\varphi$  за које је

$$-(90^\circ - \varepsilon) \leq \varphi \leq +(90^\circ - \varepsilon).$$

Упоредницама  $\varphi = -(90^\circ - \varepsilon)$  и  $\varphi = +(90^\circ - \varepsilon)$ , који се зову поларни кругови, ограничен је појас Земљине површине на којем Сунце свакодневно излази и залази. На калотама које леже с оне стране тих упоредника други је случај. Док је ту  $\delta > 90^\circ - \varphi$ , Сунце остаје целог дана изнад хоризонта; уочена географска ширина има свој дуги дан. Када деклинација  $\delta$  Сунца падне испод износа  $-(90^\circ - \varphi)$ , Сунце се не појављује изнад хоризонта, уочена географска ширина има своју дугу ноћ.

Да бисмо то стање ствари очигледно објаснили, послужимо се приложеном сликом.



Сл. 2

Нека нам у тој слици круг  $NN'$  предочава хоризонт једног места  $M$  поларне зоне Земљине;  $AA'$  нека предочава небески екватор, а  $EE'$  еклиптику. Положимо кроз северну тачку  $H$  полдневне линије  $NN'$  упоредник  $HS_1CS_2H$  небеске сфере, он ће пресећи еклиптику у тачкама  $S_1$  и  $S_2$  које имају деклинацију  $90^\circ - \varphi$ . Чим Сунце у свом годишњем ходу по еклиптици стигне у тачку  $S_1$ , оно неће, као што се из слике јасно види, залазити под хори-

зонат места  $M$  док, прелазећи лук  $S_1E'S_2$  еклиптике, не стигне у тачку  $S_2$ . Тај временски интервал назваћемо интервалом дугог дана уочене географске ширине.

Положимо ли кроз јужну тачку  $H'$  полдневне линије  $NN'$  упоредник  $H'S_3C'S_4H'$  небеске сфере, он ће пресећи еклиптику у тачкама  $S_3$  и  $S_4$  које имају деклинацију  $-(90^\circ - \varepsilon)$ , па се из слике јасно види да се Сунце за време док се креће по луку  $S_3S_4$  еклиптике, неће појављивати изнад хоризонта уоченог места. Тај временски интервал називамо интервалом дуге ноћи уочене географске ширине. Док Сунце прелази лукове  $S_2S_3$  и  $S_4S_1$  еклиптике, оно се појављује свакодневно над хоризонтом и залази испод њега.

Да бисмо одредили лонгитуде тачака  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , узећемо ово у обзир. Интервал дугог дана почиње у тренутку у којем је

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta = 1,$$

и траје догод је

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta > 1.$$

(5)

Интервал дуге ноћи почиње чим је

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta = -1,$$

(6)

и траје догод је

$$\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta < -1.$$

Деклинације тачака  $S_1, S_2, S_3, S_4$  дате су једначинама (5) и (6) које можемо стопити у ову квадратичну

$$\operatorname{tang}^2 \varphi \operatorname{tang}^2 \delta = 1.$$

Да бисмо, користећи се овом једначином, одредили лонгитуде

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$$

тачкама  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , напишимо предњу једначину овако

$$1 + \operatorname{tang}^2 \varphi = 1 + \operatorname{cotg}^2 \delta,$$

тј.

$$\sin^2 \delta = \cos^2 \varphi.$$

Узимајући у обзир једначину (2), добивамо

$$\sin^2 \lambda = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varepsilon}. \quad (7)$$

Четири корена

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$$

предње једначине који леже између 0 и  $2\pi$  претстављају лонгитуде тачака  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . При томе је, као што је лако увидети,

$$0 < \lambda_1 < \frac{\pi}{2}; \quad \lambda_2 = \pi - \lambda_1;$$

$$\lambda_3 = \pi + \lambda_1; \quad \lambda_4 = 2\pi - \lambda_1.$$

## ГЛАВА ДРУГА

### ОСУНЧАВАЊЕ ЗЕМЉЕ У ЈЕДНОМ ОДРЕЂЕНОМ ТРЕНУТКУ И У ТОКУ ЈЕДНОГ ДАНА

§ 4. **Соларна константа.** — Сунце је, изгледа, непресушив извор зрачне енергије која се брзином светлости разноси из тога извора у васионин простор. Да бисмо издашност тог извора дефинисали и математички изразили, употребимо један специјални хелиоцентрични систем који је везан са Сунцем и који се обрће са њим. Потребно је да то изближе објаснимо.

Сунце се не обрће као какво чврсто тело, већ зонално: појединим зонама Сунчеве површине одговарају различита времена за њихов потпун обртај. Нас интересују, из разлога које ћемо одмах упознати, оне зоне Сунчеве површине које леже између  $7^\circ 10'$  јужне, па до  $7^\circ 10'$  северне хелиографске ширине. Њихово обртање је доста правилно и захтева 25 дана. Оса око које се Сунце обрће не стоји управно на равни еклиптике, већ затвара са њеном нормалом угао од  $7^\circ 10'$ . Тај угао затвара, дакле, раван Сунчевог екватора са равни Земљине путање. Те две равни секу се дуж једне праве, линије чворова Сунчева екватора, а његов улазни чвор има лонгитуду од округло  $75^\circ$ .

Да опишемо последице тог стања ствари, замислимо осу Сунчеве ротације продужену до њених продора са небеском сфером, а раван Сунчева екватора, управну на ту осу, проширену до њеног пресека са небеском сфером. Тиме смо на небеској сфери добили пројекцију Сунчевог екватора и његове одговарајуће половине. Одаберемо ли у том координатном систему, који се обрће саопштеном периодом од 25 дана око своје осе, један од његових меридијана као почетни, онда је његовим координатама, хелиографском ширином  $\Phi$ , хелиографском дужином  $\Psi$  и отстојањем  $r$  од центра Сунца, одређен положај произвољне тачке простора према Сунцу и његовој површини.

Замислимо око центра Сунчева описану сферу произвољна радиуса  $r$  који је довољно велик према димензијама Сунца да би се могло



претпоставити да је Сунчеви зраци продиру у свима њеним тачкама радијално. Ограничимо на месту те сфере које има хелиографске координате  $r, \Phi, \Psi$  јединицу површине, па означимо са  $dQ$  ону топлотну количину Сунчевих зракова коју они кроз њу пронашају у временском елементу  $dt$ , онда је топлотна количина пронешена кроз ту површину у јединици времена претстављена изразом

$$J = \frac{dQ}{dt},$$

а назива се интензитетом Сунчевих зракова на уоченом месту простора.

Сунчева површина показује разне неједнакости и неправилности, на пример Сунчеве пеге које не одговарају том свом скромном имену, јер неке од њих су достигавале пречник од близу 100.000 километара па биле далеко веће од главног пресека Земље. Те пеге појављују се у екваторијалном појасу Сунчевом између хелиографских ширина  $-30^\circ$  и  $+30^\circ$ , а имају, како изгледа, уплива и на јачину радијације Сунца. Показало се да појава Сунчевих пега има своју периоду од  $33\frac{3}{8}$  година, која се расчлађава у три мање периоде, једнаке трећини, четвртини и седмини те велике периоде. Због свега тога мора се претпоставити да је интензитет Сунчевих зракова не само функција отстојања  $r$  од Сунца, већ и функција хелиографских координата  $\Phi$  и  $\Psi$ , а и времена.

Наша посматрања и проучавања интензитета Сунчевих зракова ограничавају се на хелиографске ширине између  $-7^\circ 10'$  и  $+7^\circ 10'$ , јер тај угао затвара раван Земљине путање са Сунчевим екватором, а ту зону, коју Земља не може да остави, она обиђе, пошто се креће око Сунца у истом правцу у којем Сунце ротира, за каквих 27 дана.

Трајало је доста дуго док је на отстојању Земље од Сунца пошло за руком да се посматрањима одреди средња нумеричка вредност интензитета Сунчеве радијације и њене промене. Показало се да су те промене, ако уопште постоје, веома малене и да не мењају ону средњу вредност не само за време садашњости, већ и кроз огроман део Земљине прошлости, о чему ће још бити касније говора. Та средња вредност зове се соларна константа. То је она, потпуно у топлоту претворена, зрачна енергија Сунца која у јединици времена проструји кроз јединицу површине која се налази у средњем отстојању Земље од Сунца, а која стоји управно на правцу Сунчевих зракова. При томе се за јединицу времена одабере минута, за јединицу површине квадратни центиметар, а за јединицу топлоте грам-калорија. Соларну константу означаваћемо са  $J_0$ . Према досадањим резултатима испитивања њена нумеричка вредност износи 1,94 грам-калорија по квадратном центиметру и минути. Могућно је да ће дужа и тачнија испитивања унеколико изменити овај нумерички податак, али је сигурно да се он не разликује знатно од округлог броја 2.

§ 5. Закон осунчавања Земље. — Стојећи пред задатком да математички опишемо осунчавање Земље, не ћемо, за сада, узети у обзир утицај атмосфере; то је специјалан задатак Математичке климатологије. Бавићемо се, другим речима, оним топлотним количинама Сунчевих зракова које стижу, како се то обично каже, на горњу границу Земљине атмосфере. Како таква граница стварно не постоји, пошто густина атмосфере опада са висином по барометријском закону и губи се постепено, приближујући се асимптотски нули, у дубинама простора, разумећемо под горњом границом атмосфере ону висину у којој атмосферски ваздух нема више осетног уплива на Сунчеве зракове. Та граница лежи на висини од каквих 50 километара, где је густина ваздуха мања од стотог дела његове густине на површини Земље. Не само та висина, већ и пречник Земљине лопте су толико малени према отстојању Земље од Сунца да их не морамо стављати у рачун, па зато можемо отстојање којег год било дела Земљине површине од Сунца ставити једнако тренутном отстојању центра Земље од центра Сунца, које ћемо означавати са  $r$ . Пошто Земља описује око Сунца елипсу, мораћемо променљивост њеног отстојања узимати у обзир.

Зависност интензитета Сунчевих зракова од хелиоцентричног отстојања  $r$  добивамо на овај начин. Означимо ли са  $a$  средње отстојање Земље од Сунца, тј. велику полуосу њене елиптичне путање, то кроз сферу описану тим радиусом око Сунца протиче, према ономе што је речено у претходном параграфу, у јединици времена топлотна количина

$$4\pi a^2 J_0.$$

Кроз сферу описану радиусом  $r$  око Сунца протиче у јединици времена топлотна количина

$$4\pi r^2 J.$$

Како у међупростору између Сунца и горње граице Земљине атмосфере Сунчева радијација не подлежи никаквој апсорпцији, предње две топлотне количине су међусобно једнаке, па је зато

$$J = \frac{a^2}{r^2} J_0, \quad (9)$$

или због (8)

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{a^2}{r^2} J_0. \quad (10)$$

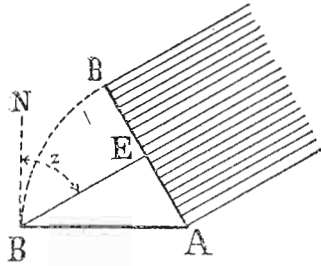
Мери ли се, као што ћемо чинити, тренутно отстојање  $r$  Земље од Сунца њеним средњим отстојањем  $a$ , тј. стави ли се

$$\frac{r}{a} = q, \quad (11)$$

онда добивамо место (10)

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} \quad (12)$$

Овај израз претставља нам ону топлотну количину која у јединици времена пада на јединицу површине управно оријентисане на правац Сунчевих зракова, а која се налази у отстојању  $\varrho$  од Сунца.



Сл. 3

Ако та јединица површине не стоји управно на правац Сунчевих зракова, већ косо, тако да њена нормала затвара са тим зрацима угао  $z$  како је то у приложеној слици предочено, онда на ту јединицу површине неће у јединици времена пасти топлотна количина (12), већ она која је садржана у снопу зракова базе  $AE$ . Како је та база предочена изразом

$$\overline{AB} \cos \angle BAE = \cos z,$$

то ће на површински елемент  $AB$  у јединици времена падати топлотна количина

$$\frac{dW}{dt} = J \cos z, \quad (13)$$

тј. због (9) и (11) топлотна количина

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} \cos z, \quad (14)$$

која се назива осунчавањем или инсолацијом уочене јединице површине.

Применимо овај образац за математичко описивање осунчавања Земље. При томе нећемо узимати у обзир неправилности њене површине, већ ћемо је претпостављати свугде уравњену, сложену из хоризонталних елемената. Елипсоидни облик Земље долази у нашим обрасцима тиме до изражаја што  $\varphi$  претставља праву географску ширину уоченог места Земљине површине, тј. угао што га вертикални правац тога места затвара са равни Земљиног екватора. У том случају угао  $z$  што га Сунчеви зраци затварају са нормалом уоченог дела Земљине површине, као што је то предочено сликом 3, није ништа друго до тренутно зенитско отстојање Сунца.

Уочимо, дакле, произвољно место Земљине површине на географској ширини  $\varphi$ , у тренутку када је отстојање Земље од Сунца, мерено њеним средњим отстојањем, једнако  $\varrho$ , зенитско отстојање Сунца

једнако  $z$ , деклинација Сунца једнака  $\delta$ , а његов часовни угао, мерен лучном мером, једнак  $\omega$ . Онда је, према једначини (1)

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega. \quad (15)$$

Ставимо ли ово у образац (14), добивамо

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega). \quad (16)$$

Овај образац изражава закон осунчавања Земље у уоченом тренутку.

При употреби овог обрасца ваља имати у виду да, чим зенитско отстојање Сунца достигне вредност  $90^\circ$ , Сунце стиже до хоризонта и залази испод њега, десна страна једначине (16) постаје, због (15), једнака нули, уочено место Земљине површине престаје бити осунчавазо све до идућег излаза Сунца. Зато предњи образац важи само за оне вредности променљивих које дају позитивно осунчавање, јер негативног осунчавања нема.

§ 6. Осунчавање Земље у једном одређеном тренутку. — У једном одређеном тренутку  $t$  којем одговара деклинација  $\delta$  Сунца, а отстојање  $\varrho$  Земље од Сунца, осунчавање Земље је само функција географских координата  $\varphi$  и  $\psi$ . Да испитамо распоред тог осунчавања, означимо са  $\omega_0$  часовни угао Сунца како се у уоченом тренутку указује према посматрачу на почетном, гринуичком, меридијану. Бројимо ли, као што је већ уговорено, географску дужину  $\psi$  од запада према истоку, онда је часовни угао Сунца у истом тренутку, а на којем год било месту географске дужине  $\psi$  дат једначином

$$\omega = \omega_0 + \psi, \quad (17)$$

па добавимо, место (16)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\omega_0 + \psi)]. \quad (18)$$

Овај образац, у којем треба сматрати за променљиве  $\varphi$  и  $\psi$ , даје нам распоред Сунчеве радијације по површини Земље.

Ставимо ли

$$\omega_0 + \psi = \psi_1, \quad (19)$$

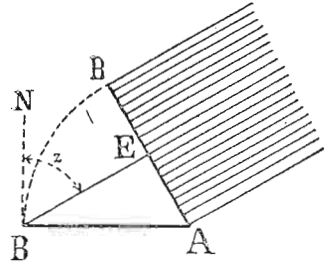
тј. бројимо ли дужину  $\psi_1$  од оног меридијана у чијој се равни налази Сунце у уоченом тренутку, добивамо

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\varrho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1). \quad (20)$$

онда добивамо место (10)

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} \quad (12)$$

Овај израз претставља нам ону топлотну количину која у јединици времена пада на јединицу површине управно оријентисане на правац Сунчевих зракова, а која се налази у отстојању  $\rho$  од Сунца.



Сл. 3

Ако та јединица површине не стоји управно на правац Сунчевих зракова, већ косо, тако да њена нормала затвара са тим зрацима угао  $z$  како је то у приложеној слици предочено, онда на ту јединицу површине неће у јединици времена пасти топлотна количина (12), већ она која је садржана у сполу зракова базе  $AE$ . Како је та база предочена изразом

$$\overline{AB} \cos \sphericalangle BAE = \cos z,$$

то ће на површински елемент  $AB$  у јединици времена падати топлотна количина

$$\frac{dW}{dt} = J \cos z, \quad (13)$$

тј. због (9) и (11) топлотна количина

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} \cos z, \quad (14)$$

која се назива осунчавањем или инсолацијом уочене јединице површине.

Применимо овај образац за математичко описивање осунчавања Земље. При томе нећемо узимати у обзир неправилности њене површине, већ ћемо је претпостављати свугде уравњену, сложену из хоризонталних елемената. Елипсоидни облик Земље долази у нашим обрасцима тиме до изражаја што  $\varphi$  претставља праву географску ширину уоченог места Земљине површине, тј. угао што га вертикални правац тога места затвара са равни Земљиног екватора. У том случају угао  $z$  што га Сунчеви зраци затварају са нормалом уоченог дела Земљине површине, као што је то предочено сликом 3, није ништа друго до тренутно зенитско отстојање Сунца.

Уочимо, дакле, произвољно место Земљине површине на географској ширини  $\varphi$ , у тренутку када је отстојање Земље од Сунца, мерено њеним средњим отстојањем, једнако  $\rho$ , зенитско отстојање Сунца

једнако  $z$ , деклинација Сунца једнака  $\delta$ , а његов часовни угао, мерен лучном мером, једнак  $\omega$ . Онда је, према једначини (1)

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega. \quad (15)$$

Ставимо ли ово у образац (14), добивамо

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega). \quad (16)$$

Овај образац изражава закон осунчавања Земље у уоченом тренутку.

При употреби овог обрасца ваља имати у виду да, чим зенитско отстојање Сунца достигне вредност  $90^\circ$ , Сунце стиже до хоризонта и залази испод њега, десна страна једначине (16) постаје, због (15), једнака нули, уочено место Земљине површине престаје бити осунчавано све до идућег излаза Сунца. Зато предњи образац важи само за оне вредности променљивих које дају позитивно осунчавање, јер негативног осунчавања нема.

§ 6. **Осунчавање Земље у једном одређеном тренутку.** — У једном одређеном тренутку  $t$  којем одговара деклинација  $\delta$  Сунца, а отстојање  $\rho$  Земље од Сунца, осунчавање Земље је само функција географских координата  $\varphi$  и  $\psi$ . Да испитамо распоред тог осунчавања, означимо са  $\omega_0$  часовни угао Сунца како се у уоченом тренутку указује према посматрачу на почетном, гринуичком, меридијану. Бројимо ли, као што је већ уговорено, географску дужину  $\psi$  од запада према истоку, онда је часовни угао Сунца у истом тренутку, а на којем год било месту географске дужине  $\psi$  дат једначином

$$\omega = \omega_0 + \psi, \quad (17)$$

па добавимо, место (16)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} [\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos (\omega_0 + \psi)]. \quad (18)$$

Овај образац, у којем треба сматрати за променљиве  $\varphi$  и  $\psi$ , даје нам распоред Сунчеве радијације по површини Земље.

Ставимо ли

$$\omega_0 + \psi = \psi_1, \quad (19)$$

тј. бројимо ли дужину  $\psi_1$  од оног меридијана у чијој се равни налази Сунце у уоченом тренутку, добивамо

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{\rho^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1). \quad (20)$$

Ово осунчавање достигава свој максимум  $\frac{J_0}{Q^2}$  на оној тачки Земљине површине на којој је

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 &= 1, \\ \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta &= \cos(\varphi - \delta) = 1. \end{aligned}$$

Та тачка има, дакле, координате  $\psi_1 = 0$ ;  $\varphi = \delta$ , па се налази на оном месту Земљине површине у чијем зениту се, у уоченом тренутку, налази Сунце.

Осунчавање достигава вредност нуле онде где координате  $\varphi$  и  $\psi_1$  задовољавају једначину

$$\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1 = 0,$$

тј. онде где је

$$\cos \psi_1 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta. \quad (21)$$

Не узимајући у обзир елипсоидални облик Земљин, тј. сматрајући Земљу за савршену лопту, предња једначина биће задовољена а свима тачкама оног круга Земљине површине дуж којег је Сунчеви зраци додирују. Због малих димензија Земљиних према њеном отстојању од Сунца могу се сви Сунчеви зраци који падају на Земљу сматрати паралелнима, па зато нам, као што је лако доказати и аналитички, предња једначина претставља онај главни круг Земљине површине чији је пол споменута тачка  $\psi_1 = 0$ ;  $\varphi = \delta$ . Тај круг називамо граничним кругом осунчавања Земље; он дели Земљину лопту у осунчану и неосунчану хемисферу.

Плоча тог граничног круга је ортогонална пројекција осунчане хемисфере, па је зато тотално осунчавање Земље у уоченом тренутку, које ћемо означити са  $J_1$ , производ површине граничног круга и интензитета  $J$  Сунчевих зракова на отстојању  $q$  од Сунца. Означимо ли дакле радиус Земљине кугле са  $R$ , добивамо

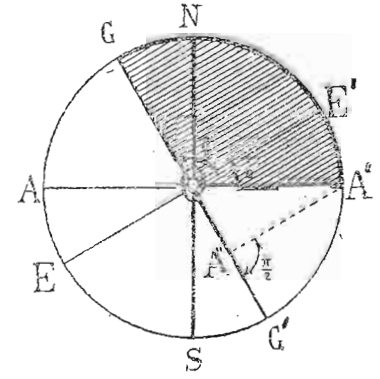
$$J_1 = \frac{J_0}{Q^2} R^2 \pi. \quad (22)$$

Средње осунчавање Земљине површине у уоченом тренутку, које ћемо означити са  $J_m$ , добива се ако предње тотално осунчавање поделимо са површином  $4\pi R^2$  Земљине лопте. Зато је

$$J_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{J_0}{Q^2}. \quad (23)$$

Гранични круг осунчавања Земље пролази само онда кроз њене половине када се Сунце нађе у њеној екваторској равни, тј. када је  $\delta = 0$ . У том случају су обе хемисфере Земљине, северна и јужна, подједнако осунчане. Иначе су њихова осунчавања различита. Тотална осунчавања тих двеју хемисфера, која ћемо означити са  $J_n$  и  $J_s$ , израчунавају се на овај начин.

Нека нам круг  $A'NAS$  предочава онај меридијан Земљин којегаван пролази кроз центар Сунца;  $N$  нека буде северни, а  $S$  јужни пол Земље,  $AA'$  пресек равни екватора са равни слике. Плива Сунчевих зракова нека буде  $E'E$ , тј. угао  $A'OE'$  једнак деклинацији  $\delta$  Сунца. Пречник  $GG'$  који стоји управно на  $EE'$  предочава пресек равни граничног круга.



Сл. 4

осунчавања Земље са равни слике. Испрециртани сектор  $GOA'ENG$  је ортогонална пројекција осунчаног дела северне хемисфере у равни слике. Ортогонална пројекција тог осунчаног дела северне хемисфере у равни граничног круга осунчавања састављена је из два дела, из северне, полукружне површине оивичене тим граничним кругом и из јужне елиптичне површине која има за велику полуосу радиус  $R$  Земљине лопте, а за малу полуосу дуж  $OA''$ , која је једнака  $R \sin \delta$ . Зато је целокупна површина те пројекције једнака

$$\frac{\pi}{2} R^2 + \frac{\pi^2}{2} R^2 \sin^2 \delta.$$

Тотално осунчавање  $J_n$  северне хемисфере добићемо ако ову површину помножимо са интензитетом  $J$  Сунчевих зракова који падају нормално на њу. Зато је

$$J_n = \frac{J_0}{Q^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 + \sin \delta), \quad (24)$$

а како је

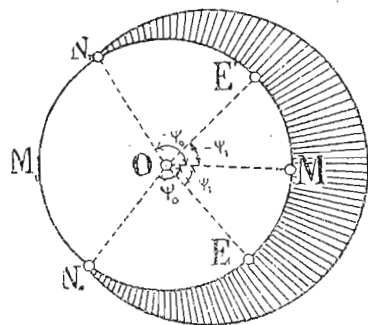
$$J_n + J_s = J_1,$$

то је

$$J_s = \frac{J_0}{Q^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 - \sin \delta). \quad (25)$$

Распоред осунчавања дуж којег било упоредника географске ширине  $\varphi$  дат је обрасцем (20) у којем ваља само  $\psi$ , сматрати за променљиво. При томе нам, као што се види из приложене слике,  $\psi$ , пре-

дочава онај угао што га радиус  $OE$  уочене тачке упоредника затвара са његовим радиусом  $OM$ , при чему  $M$  предочава ону тачку упоредника чија меридијанска раван пролази кроз центар Сунца. Из (20) сле-



Сл. 5

дује да су осунчавања двеју тачака упоредникових које леже симетрично према  $M$  међусобно једнака. Централни углови  $-\psi_0$  и  $+\psi_0$  тачака  $N_1$  и  $N_2$  у којима су осунчавања једнака нули дати су, према (21), овом једначином

$$\cos \psi_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta. \quad (26)$$

Лук  $N_1M_1N_2$  упоредника је неосунчан.

У току наших испитивања показаће се, као важан, појам средњег осунчавања уоченог упоредника. То средње осунчавање обгледаваћемо са  $w$ , а израчунаћемо га на следећи начин.

Површина бесконачно уске прстенасте пруге Земљине површине која лежи између упоредника  $\varphi$  и  $(\varphi + d\varphi)$  дата је, као што је лако увидети, обрасцем

$$df = 2\pi R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

На елемент те пруге који лежи између меридијана  $\psi_1$  и  $(\psi_1 + d\psi_1)$  пада у јединици времена ова топлотна количина Сунчевих зракова

$$\frac{dW}{dt} R^2 \cos \varphi d\varphi d\psi_1.$$

Тотално осунчавање целе прстенасте пруге у јединици времена дато је изразом

$$R^2 \cos \varphi d\varphi \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi_1.$$

Средње осунчавање  $w$  упоредника  $\varphi$  добивамо ако ову топлотну количину поделимо са површином  $df$ . Зато је

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} \frac{dW}{dt} d\psi_1. \quad (27)$$

тј. због (20)

$$w = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \psi_1) d\psi_1.$$

По извршеном интегрисању добивамо

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0). \quad (28)$$

Угао  $\psi_0$  који се овде појављује дат је обрасцем (26), па видимо да средње осунчавање  $w$  упоредника зависи само од променљивих  $\varphi$  и  $\delta$ , дакле само од обилажења Земље око Сунца, а не од њеног обртања. Исто то важи и за тотална осунчавања  $J_n$  и  $J_s$  Земљиних хемисфера.

§ 7. Дневни ток осунчавања. — Топлотна количина донешена Сунчевим зрацима квадратном центиметру на једном одређеном месту географске ширине  $\varphi$ , а за време једне одређене минуте дана дата је изразом

$$\frac{dW}{dt} = \frac{J_0}{Q^2} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega),$$

где часовни угао  $\omega$  одговара уоченом тренутку времена.

Питамо ли како се мења та количина у току једног одређеног дана, онда можемо елементе  $\varphi$  и  $\delta$  који се у предњем обрасцу појављују сматрати за константе, јер се они у току уоченог дана само незнатно мењају. Уведимо, дакле, ознаке

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_0}{Q^2} \sin \varphi \sin \delta &= A, \\ \frac{J_0}{Q^2} \cos \varphi \cos \delta &= B, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

па сматрамо ли  $A$  и  $B$  за константе, онда је осунчавање уоченог елемента Земљине површине претстављено обрасцем

$$\frac{dW}{dt} = A + B \cos \omega, \quad (30)$$

где се на десној страни има само часовни угао  $\omega$  сматрати као променљив.

Дневни ток осунчавања уочене јединице Земљине површине је, као што се види из предњег обрасца, обична тригонометриска функ-

ција часовног угла, а предочен косинусовом линијом, но са једним важним ограничењем. Предњи образац важи само за оне вредности часовног угла  $\omega$  које дају позитивни износ осунчавања, дакле за оне вредности које леже између часовног угла изласка и часовног угла заласка Сунца. То су она два угла за које је зенитско отстојање Сунца једнако  $90^\circ$ . Она су дата, због (1), једначином

$$\cos \omega_0 = -\frac{A}{B} = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta. \quad (31)$$

При томе одговара негативни корен  $-\omega_0$  изласку, а позитивни корен  $+\omega_0$  заласку Сунца. Образац (30) важи, дакле, само за интервал

$$-\omega_0 < \omega < +\omega_0,$$

а за све остале вредности од  $\omega$  осунчавање је једнако нули.

Геометријска предочба дневног тока осунчавања је, као што следује из претходног расуђивања, непрекидана сложена линија састављена из лукова косиноиде и правих линија које се поклапају са апсисном осом, а замењују косиноиду где би осунчавање, према предњим обрасцима, постало негативно.

Средини интервала од  $-\omega_0$  до  $+\omega_0$  одговара вредност  $\omega = 0$ , која означава пролаз Сунца кроз меридијан посматрачева места. Тај се тренутак зове право подне уоченог Земљиног места. Средње вредности величина  $\varphi$  и  $\delta$  у дневном интервалу Сунца одговарају том правом подну. Оне се налазе, за сваки дан у години, за право подне гринвичког меридијана у астрономским годишњацима. Ту су саопштене и њихове промене у току дана, па је зато могуће и за сваки други меридијан Земљин израчунати вредности коефицијената  $A$  и  $B$  за право подне уоченог дана у години, а према потреби и њихове промене у току уоченог дана.

Часовни угао Сунца, мерен временском мером, зова се право Сунчано време. Означимо ли то време, мерено од правог подна уоченог места, са  $t_w$ , а интервал од  $24^h$  са  $\tau$ , то је

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} t_w, \quad (32)$$

па је дневни ток осунчавања дат обрасцем

$$\frac{dW}{dt} = A + B \cos \frac{2\pi}{\tau} t_w, \quad (33)$$

као функција правог сунчаног времена.

Желимо ли да дневни ток осунчавања претставимо као функцију средњег времена  $t$  које нам показују наши обични часовници, онда ваља имати у виду да између правог и средњег сунчаног времена постоји ова релација

$$t_w = t - E, \quad (34)$$

где се  $E$  назива временским изједначењем. Оно је за сваки дан године саопштено у астрономским годишњацима.

§ 8. Дневне топлотне количине осунчавања. — Топлотна количина што је Сунчеви зраци донашају у току дана уоченој јединици Земљине површине зове се дневна топлотна количина. Означимо је са  $W$ , а израчунати на следећи начин.

Из (34) следује, ако са  $t$  означимо средње време којим меримо временске интервале,

$$\frac{dt_w}{dt} = 1 - \frac{dE}{dt}.$$

Овај последњи извод претставља промену временског изједначења у јединици времена; она је увек толико малена да се може занемарити поред јединице. Зато је

$$\frac{dt_w}{dt} = 1.$$

Како је

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt_w} \cdot \frac{dt_w}{dt} = \frac{dW}{dt_w},$$

а због (32)

$$dt_w = \frac{\tau}{2\pi} d\omega,$$

то је

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{dW}{d\omega},$$

а због (30)

$$dW = \frac{\tau}{2\pi} (A + B \cos \omega) d\omega. \quad (35)$$

Дневну топлотну количину  $W$ , добивамо интегрисањем предњег израза између граница  $-\omega_0$  и  $+\omega_0$ . Зато је

$$W_\tau = \frac{\tau}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) d\omega, \quad (36)$$

дакле

$$W_r = \frac{\tau}{\pi} (A\omega_0 + B\sin\omega_0). \quad (37)$$

Узимајући у обзир (29), добивамо

$$W_r = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} (\omega_0 \sin\varphi \sin\delta + \sin\omega_0 \cos\varphi \cos\delta). \quad (38)$$

При томе је због (31)

$$\cos\omega_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta. \quad (39)$$

Служећи се предњим обрасцима можемо израчунати дневну топлотну количину за свако место Земљине површине и за сваки дан у години пошто се нумеричке вредности астрономских елемената  $\varrho$  и  $\delta$  налазе у астрономским годишњацима. О тим дневним топлотним количинама даћемо опширнијег извештаја у другом одељку ове књиге. Као припрему за тај извештај, извешћемо овде још неке закључке из предњих образаца.

У доба пролетње равнодневице, када је  $\lambda = 0$  и  $\delta = 0$ , добивамо из (39) да је  $\omega_0 = 90^\circ$ , а из (38)

$$W_r = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho_1^2} \cos\varphi, \quad (40)$$

где нам  $\varrho_1$  претставља нумеричку вредност од  $\varrho$  у доба пролетње равнодневице. Овај образац казује да су у доба пролетње равнодневице дневне топлотне количине пропорционалне косинусу географске ширине  $\varphi$ .

Слично важи и за јесењу равнодневицу; онда је  $\lambda = 180^\circ$ ;  $\delta = 0$ ;  $\omega_0 = 90^\circ$ , па зато

$$W_r = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho_2^2} \cos\varphi, \quad (41)$$

где нам  $\varrho_2$  претставља нумеричку вредност од  $\varrho$  у доба јесење равнодневице. Но дневне топлотне количине у доба тих двеју равнодневица на истим географским ширинама нису међусобно једнаке, јер отстојање  $\varrho_2$  Земље од Сунца у доба јесење равнодневице није исто као у доба пролетње равнодневице.

На оним географским ширинама на којима уоченог дана Сунце не залази под хоризонт, треба ставити  $\omega_0 = \pi$ , па је у том случају

$$W_r = \tau \frac{J_0}{\varrho^2} \sin\varphi \sin\delta, \quad (42)$$

или због (2)

$$W_r = \tau \frac{J_0}{\varrho^2} \sin\varphi \sin\epsilon \sin\lambda. \quad (43)$$

Ова једначина казује да је у поларним крајевима, пошто се  $\varrho$  слабо мења у току године, максимум дневног осунчавања у доба других дана налази на самом полу.

На екватору је  $\varphi = 0$  тј. због (31)  $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ , па зато

$$W_r = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{\varrho^2} \cos\delta. \quad (44)$$

Ова једначина казује да, када се у току године  $\varrho$  не би мењало, осунчавање екватора би било једноставна тригонометријска функција деклинације Сунца. То је, због слабог мењања  $\varrho$  у току године, са великом приближношћу и случај.

Саопштени начин израчунавања дневних количина осунчавања у току године, одавна употребљаван, дао је прву оријентацију о распореду Сунчеве топлоте по површини Земље и о мењању тог распореда у току године. Црпећи податке о годишњим променама отстојања  $\varrho$  и деклинације  $\delta$  Сунца из астрономских годишњака, он нам не открива механизам тих промена. Због тога је потребно наћи други начин израчунавања годишњих промена осунчавања који открива и све њихове узроке.

## ГЛАВА ТРЕЋА

## ДИСКОНТИНУИТЕТИ ОСУНЧАВАЊА И ЊИХОВО ЕЛИМИНИСАЊЕ ИЗ ОБРАЗАЦА

§ 9. Веза између дневне количине и средњег осунчавања упоредника. — Осунчавање сваког места Земљине површине врши се са прекидима. Да бисмо те прекиде правилно класификовали, потребно је Земљину површину поделити у три зоне: ону која лежи између јужног и северног поларног круга, коју ћемо назвати неарктичном зоном, и два преостала дела Земљине површине, оне две поларне калоте које леже с оне друге стране тих поларних кругова, а које ћемо назвати, отступајући при томе од уобичајених назива, једним те истим именом, арктичним зонама.

На свима местима неарктичне зоне Сунце излази свакодневно изнад хоризонта и залази сваки дан пода њ. Осунчавање којег било места те зоне прекида се, дакле, свакодневно, а тај прекид, који траје целу ноћ, мења се са изузетком екватора, и својом дужином из дана у дан.

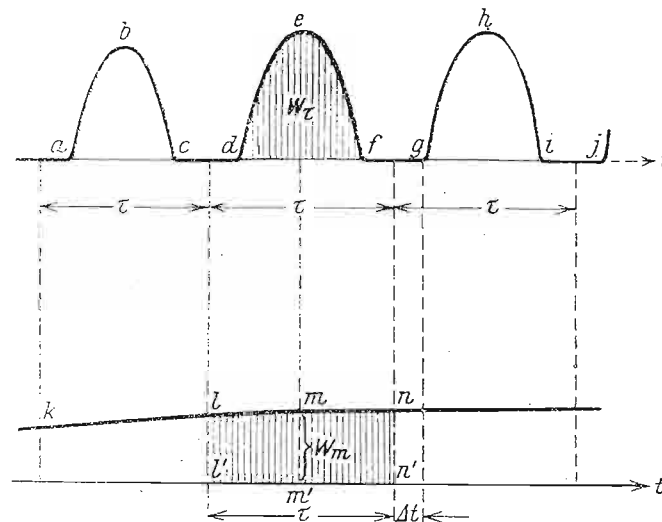
На арктичним зонама настају, као што смо растумачили у § 3 и објаснили сликом 2, такви свакодневни прекиди осунчавања догод се Сунце креће по луковима који леже између тачака  $S_2$  и  $S_3$  или тачака  $S_4$  и  $S_5$  еклиптике које одговарају уоченој географској ширини; преостали део године припада или интервалу дугог дана или интервалу дуге ноћи. На половима се распада цела година само у један дуги дан и једну дугу ноћ.

Уочимо ли које год место неарктичне зоне Земљине површине или које место арктичних зона у доба када се на њему свакодневно одмењују дан и ноћ, онда је ток његовог осунчавања предочен горњим делом приложене слике линијом  $abcdefghi$ .

Та линија састављена је од таласних брегова, који предочавају дневни ток осунчавања уоченог места, и правих делова који леже у апсцисној оси и који одговарају интервалима ноћи. Ширина и висина тих бре-

гова и њихови међусобни размаци мењају се, због променљивости величина  $q$  и  $d$ , у току године.

Ордината које год било тачке те преломљене линије претставља нам осунчавање уочене јединице Земљине површине у једном одређеном тренутку. То осунчавање дато је обрасцем (16), при чему имамо замислити да су све варијабилне које се појављују у том обрасцу



Сл. 6

изражене као функције времена  $t$ , а ово предочено апсцисом наше слике. Лако је увидети да испрециртана површина  $defd$  претставља дневну количину осунчавања за време онога дана који одговара интервалу  $df$ , боравку Сунца изнад хоризонта. Ту количину означили смо са  $W_t$ , а претставили обрасцима (38) и (39).

Кад бисмо хтели да израчунамо топлотну количину која се за време произвољног дела године Сунчевим зрацима доноси на уочену јединицу Земљине површине, морали бисмо, изгледа, приступити израчунавању целог једног збира интеграла од којих би се сваки ограничио на по један брег предочене линије, а број тих интеграла био једнак броју боравака Сунца изнад хоризонта уочена места.

Тај приметан посао можемо избећи ако се послужимо средњим осунчавањем  $w$  уоченог упоредника, растумаченим у § 6, а датим обрасцем (28) и (26). То средње осунчавање само је онда једнако нули када је уочени упоредник потпуно неосунчан. То се у неарктичној зони не дешава никада, а у арктичним зонама само једанпут у години, у доба дуге ноћи. Предочимо ли, дакле, како је то учињено у доњем



делу приложене слике, средње осунчавање и уоченог упоредника као функцију времена  $t$ , добићемо криву  $k l m n$  која није дисконтинуирна. Између те криве и оне изнад ње постоји ова значајна веза.

Напишимо још једном напоменуте обрасце (38) и (39) за израчунавање дневне количине  $W$ , осунчавања и обрасце (28) и (26) за средње осунчавање и уоченог упоредника, дакле

$$W_r = \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} (\omega_0 \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_0 \cos \varphi \cos \delta),$$

$$\cos \omega_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta,$$

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0),$$

$$\cos \psi_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta,$$

онда добивимо ово. Сваком произвољном тренутку  $t$  године одговарају тачно, одређене вредности величина  $Q$  и  $\delta$ . Ставимо ли те вредности у предње обрасце па израчунамо ли помоћу њих  $W_r$  и  $w$ , то видимо да између њих постижи веза

$$W_r = \tau w. \quad (45)$$

При томе ваља имати у виду још ово. Израчунавајући ону количину  $W_r$  осунчавања која у доба једног одређеног дана године пада на уочену јединицу површине на упореднику  $\varphi$ , тј. изводећи образац (38), ставили смо у њега за  $Q$  и  $\delta$  оне вредности које одговарају правом подну уочена места. То је она тачка  $m'$  временске скале што полови интервал  $\tau$  који сиже од праве поноћи до поноћи уоченог дана године на уоченом месту. Означимо ли ординату  $m'/m$  на томе месту са  $w_m$ , онда нам слика казује да између њеног горњег и њеног доњег дела постоји ова релација

$$W_r = \tau w_m. \quad (45^*)$$

Величине  $Q$  и  $\delta$  мењају се у току дана сасвим незнатно, па се лук  $ln$  доње криве наше слике може сматрати за прав, а испрециртана површина за трапез, па је та површина са врло великом приближношћу једнака  $\tau w_m$  или према предњем обрасцу једнака  $W_r$ . Зато су испрециртане површине горњег и доњег дела наше слике међусобно једнаке.

Желимо ли, дакле, да израчунамо ону топлотну количину  $W_m$  која за време једног целог броја дана  $m$  пада на јединицу површине уоченог места географске ширине, онда можемо, место да интегрисемо дисконтинуирну функцију  $\frac{dW}{dt}$ , ту интеграцију извршити преко уоченог временског интервала на континуирној функцији  $w$ , па добивамо

$$W_m = \int_{t_1}^{t_1 + m\tau} w dt. \quad (46)$$

При томе треба да се тренутак  $t_1$  подудара са правом поноћи уоченог места.

Ако  $m$  није цео број или ако интервал  $m\tau$  не сиже од поноћи до поноћи, онда предњи образац није строго тачан, па разлика између површина обухваћеним линијама  $abcdef\dots$  и  $klmn\dots$  може бити осетљива. Та разлика потиче отуда што нам површина обухваћена првом од тих линија претставља ону топлотну количину која за време уоченог интервала од  $t_1$  до  $t_2$  пада на једну одређену јединицу површине на географској ширини  $\varphi$ , док површина обухваћена другом линијом претставља ону топлотну количину која за време истог интервала пада просечно на све јединице површине уочене географске ширине. Из те просечне топлотне количине предочене интегралом

$$W = \int_{t_1}^{t_2} w dt \quad (47)$$

елиминисане су све неједнакости топлотних количина доведених у интервалу  $t_1$  до  $t_2$  појединим деловима уоченог упоредника.

За време кратких интервала те неједнакости могу бити знатне. Тако, на пример за време интервала од 12 часова може уочено место упоредника да прими целокупну дневну количину, а дијаметрално место истог упоредника да остане потпуно неосунчано, но штогод је интервал  $t_1$  до  $t_2$  дужи, те неједнакости бивају све мање. Па и за време целе године постоје извесне разлике у осунчавању разних места уоченог упоредника. Тропска година не обухвата цео број дана већ је за једну четвртину дана дужа. Тај вишак пада на једном месту упоредника у дан, а на другом у ноћ, због чега је прво место нешто јаче осунчано у току те године но оно друго. Но већ у раздобљу од четири године те неједнакости исчезавају, и оне не долазе уопште у обзир када говоримо о клими наше Земље која се бави само средњим температурама добивених из дугог низа година. Зато нам  $W$  претставља баш ону топлотну количину која је основ при математском испитивању Земљине климе.

§ 10. Развијање образаца осунчавања Земље у редове. — Желимо ли да извршимо интегрисање дато обрасцем (47), потребно је пре свега, да све променљиве које се посредством претходних једначина појављују у интегранду изразимо помоћу једне једине. Као такву независно променљиву одабраћемо лонгитуду Сунца, јер по њој се од-

вија ток годишњих доба. Сем тога је потребно интегранду дати облик згодан за интегрисање. То се може најбоље извршити развијајући га у ред, и зато ћемо приступити томе послу.

Уведемо ли, ради краћег писања, ова означања,

$$\operatorname{tang} \varphi = n, \quad (48)$$

$$\sin \varepsilon = k, \quad (49)$$

онда обрасци (28) и (26) добивају овај облик

$$w = \frac{1}{x} \cdot \frac{I_0}{\varrho^2} \cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0), \quad (50)$$

$$\cos \psi_0 = -n \operatorname{tang} \delta. \quad (51)$$

Из предњих једначина следује

$$\sin \psi_0 = \sqrt{1 - n^2 \operatorname{tang}^2 \delta} = \sqrt{\frac{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta}{\cos^2 \delta}},$$

$$\cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - (1 + n^2) \sin^2 \delta},$$

тј. због (2) и (49)

$$\cos \delta \sin \psi_0 = \sqrt{1 - k^2 (1 + n^2) \sin^2 \delta}. \quad (52)$$

Овај израз може се помоћу биномијалног обрасца развити у ред за свако  $\lambda$  догод је

$$k^2 (1 + n^2) \leq 1,$$

тј. догод су задовољене ове неједначине

$$\sin^2 \varepsilon (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi) \leq 1,$$

$$\sin^2 \varepsilon \leq \cos^2 \varphi,$$

$$-(90^\circ - \varepsilon) \leq \varphi \leq +(90^\circ - \varepsilon),$$

тј. кадгод уочени упоредник  $\varphi$  припада неарктичној зони Земљине површине. То ћемо, за сада, претпоставити, а касније се вратити на случај када уочени упоредник припада било једној или другој од арктичких зона.

Наговештеним развијањем у ред помоћу биномијалног обрасца

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

добива се

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin \psi_0 = & 1 - \frac{1}{2} (1 + n^2) k^2 \sin^2 \lambda - \frac{1}{2^3} (1 + n^2)^2 k^4 \sin^4 \lambda - \\ & - \frac{1}{2^4} (1 + n^2)^3 k^6 \sin^6 \lambda - \frac{5}{2^7} (1 + n^2)^4 k^8 \sin^8 \lambda - \\ & - \frac{7}{2^8} (1 + n^2)^5 k^{10} \sin^{10} \lambda - \frac{3 \cdot 7}{2^{10}} (1 + n^2)^6 k^{12} \sin^{12} \lambda - \\ & - \frac{3 \cdot 11}{2^{11}} (1 + n^2)^7 k^{14} \sin^{14} \lambda - \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Из (51) следује

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \sin (n \operatorname{tang} \delta). \quad (54)$$

Овај израз може се развити у Меклауринов ред догод је

$$-1 \leq n \operatorname{tang} \delta \leq +1.$$

То је, према (48) и § 3, онда случај када уочени упоредник припада неарктичној зони, што смо и претпоставили.

Наговештено развијање у ред даје

$$\begin{aligned} \psi_0 = & \frac{\pi}{2} + n \operatorname{tang} \delta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 \operatorname{tang}^3 \delta + \\ & + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{3}{5} n^5 \operatorname{tang}^5 \delta + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 \operatorname{tang}^7 \delta + \\ & + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 \operatorname{tang}^9 \delta + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} \operatorname{tang}^{11} \delta + \\ & + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13} n^{13} \operatorname{tang}^{13} \delta + \dots \end{aligned} \quad (55)$$

Из (2) и (49) следује

$$\operatorname{tang} \delta = \sqrt{\frac{\sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \delta}} = k \sin \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}}, \quad (56)$$

$$\psi_0 \sin \delta = \psi_0 k \sin \lambda. \quad (57)$$

Стаavimo ли израз за  $\operatorname{tang} \delta$  из (56) у (55), а тај, на тај начин добивени израз за  $\psi_0$  у (57), онда добивамо овај ред

$$\begin{aligned} \psi_0 \sin \delta = & \frac{\pi}{2} k \sin \lambda + n k^2 \sin^2 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} n^3 k^4 \sin^4 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{5} n^5 k^6 \sin^6 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{5}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{5}{7} n^7 k^8 \sin^8 \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{7}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{5 \cdot 7}{9} n^9 k^{10} \sin^{10} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{9}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^8} \cdot \frac{7 \cdot 9}{11} n^{11} k^{12} \sin^{12} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{11}{2}} + \\ & + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13} n^{13} k^{14} \sin^{14} \lambda (1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{13}{2}} + \dots (58) \end{aligned}$$

Развијемо ли предње изразе у заградама по биномијалном обрасцу у ред, па образујемо ли уз помоћ (53) ред за израз

$$n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0,$$

уредимо ли га по потенцијама од  $\sin \lambda$  и уведемо ли ова означања

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k^2}{2} (-1 + n^2) \\ a_2 &= \frac{k^4}{8} (-1 + 2n^2) + \frac{k^4}{24} n^4 \\ a_3 &= \frac{k^6}{16} (-1 + 3n^2 + n^4) + \frac{k^6}{80} n^6 \\ a_4 &= \frac{5k^8}{128} (-1 + 4n^2 + 2n^4) + \frac{k^8}{32} n^6 + \frac{5k^8}{896} n^8 \\ a_5 &= \frac{7k^{10}}{256} (-1 + 5n^2 + \frac{10}{3} n^4 + 2n^6) + \frac{5k^{10}}{256} n^8 + \frac{7k^{10}}{2304} n^{10} \\ a_6 &= \frac{21k^{12}}{1024} (-1 + 6n^2 + 5n^4 + 4n^6) + \frac{k^{12}}{1024} (45n^8 + 12n^{10}) + \frac{21k^{12}}{11246} n^{12} \\ a_7 &= \frac{33k^{14}}{2048} (-1 + 7n^2 + 7n^4 + 7n^6 + 5n^8) + \frac{7k^{14}}{2048} (11n^{10} + 3n^{12}) + \\ & + \frac{33k^{14}}{26624} n^{14}, \end{aligned} \quad (59)$$

то, добивамо

$$n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = 1 + \frac{\pi}{2} n k \sin \lambda + \sum_m a_m \sin^{2m} \lambda. \quad (60)$$

Предње развијање у ред било је везано за услов да уочени упоредник припада неарктичкој зони. Припада ли тај упоредник којој од арктичких зона, мора се при израчунавању предњег израза разликовати да ли лонгитуда  $\lambda$  Сунца припада интервалу дугог дана, интервалу дуге ноћи или пак интервалима дневног излаза и залаза Сунца.

За време дуге ноћи, тј. за

$$\lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_4,$$

уочени упоредник је на целој својој дужини неосунчан, тј.  $\psi_0 = 0$ , па је зато и претходни израз једнак нули.

За време интервала дугог дана, тј. за

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,$$

упоредник је осунчан на целој својој дужини, тј.  $\psi_0 = \pi$ , а због тога је

$$n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0 = \pi n k \sin \delta = \pi n k \sin \lambda. \quad (61)$$

Интервали дневног излаза и залаза Сунца, они који одговарају лонгитудама

$$0 < \lambda < \lambda_1; \lambda_2 < \lambda < \lambda_3; \lambda_4 < \lambda < 2\pi$$

Сунца, окарактеризовани су, према ономе што смо о њима рекли, неједнакошћу

$$-1 < n \tan \delta < +1. \quad (62)$$

Лако је доказати да догод је (62) задовољено, тј. догод Сунце прелази предњи интервал, претходно развијање у ред је дозвољено и за арктичке зоне.

Из услова који следеју иза (52) и (54) заиста следеју да је претходно развијање у ред дозвољено догод је

$$k^2(1 + n^2) \sin^2 \lambda < 1 \quad (63)$$

и

$$n^2 \tan^2 \delta < 1.$$

Последњи услов истоветан је са (62), па је и задовољен, јер дамо ли му овај облик

$$n^2 < \cot^2 \delta,$$

$$1 + n^2 < 1 + \cot^2 \delta = \operatorname{cosec}^2 \delta,$$

$$(1 + n^2) \sin^2 \delta < 1,$$

онда видимо да је због (2) и (49) и услов (63) испуњен, а развијање у ред могућно. Тим начином решени су у позитивном смислу сви могући случајеви.

Због потребног интегрисања добивеног реда, потребно је потенције од  $\sin \lambda$  које се појављују у (60) изразити косинусима многоструких аргумента.

Томе задатку служи познати образац

$$(-1)^m 2^{2m-1} \sin^{2m} \lambda \equiv \cos 2m\lambda - \binom{2m}{1} \cos(2m-2)\lambda + \binom{2m}{2} \cos(2m-4)\lambda - \dots \mp \binom{2m}{m} \frac{1}{2}. \quad (64)$$

Ставимо ли још, краћег писања ради,

$$\begin{aligned} b_0 &= \cos \varphi \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} \binom{2}{1} a_1 + \frac{1}{2^4} \binom{4}{2} a_2 + \frac{1}{2^6} \binom{6}{3} a_3 + \frac{1}{2^8} \binom{8}{4} a_4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 + \frac{1}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 + \frac{1}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 \right\}, \\ b_1 &= \frac{\cos \varphi}{2} \left\{ a_1 + \frac{1}{2^2} \binom{4}{1} a_2 + \frac{1}{2^4} \binom{6}{2} a_3 + \frac{1}{2^6} \binom{8}{3} a_4 + \frac{1}{2^8} \binom{10}{4} a_5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 + \frac{1}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 \right\}, \\ b_2 &= \frac{\cos \varphi}{2^3} \left\{ a_2 + \frac{1}{2^2} \binom{6}{1} a_3 + \frac{1}{2^4} \binom{8}{2} a_4 + \frac{1}{2^6} \binom{10}{3} a_5 + \frac{1}{2^8} \binom{12}{4} a_6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 \right\}, \\ b_3 &= \frac{\cos \varphi}{2^5} \left\{ a_3 + \frac{1}{2^2} \binom{8}{1} a_4 + \frac{1}{2^4} \binom{10}{2} a_5 + \frac{1}{2^6} \binom{12}{3} a_6 + \frac{1}{2^8} \binom{14}{4} a_7 \right\}, \\ b_4 &= \frac{\cos \varphi}{2^7} \left\{ a_4 + \frac{1}{2^2} \binom{10}{1} a_5 + \frac{1}{2^4} \binom{12}{2} a_6 + \frac{1}{2^6} \binom{14}{3} a_7 \right\}, \\ b_5 &= \frac{\cos \varphi}{2^9} \left\{ a_5 + \frac{1}{2^2} \binom{12}{1} a_6 + \frac{1}{2^4} \binom{14}{2} a_7 \right\}, \\ b_6 &= \frac{\cos \varphi}{2^{11}} \left\{ a_6 + \frac{1}{2^2} \binom{14}{1} a_7 \right\}, \\ b_7 &= \frac{\cos \varphi}{2^{13}} a_7, \end{aligned} \quad (65)$$

онда добивамо

$$\cos \varphi (n \psi_0 \sin \delta + \cos \delta \sin \psi_0) = b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - \dots \quad (66)$$

Нумеричке вредности коефицијената  $b_0, b_1, b_2, \dots$  предњег реда, израчунате за  $\epsilon = 23^\circ 27' 30''$ , саопштене су у приложеној табlici. Видећемо како се оне могу израчунати и за сваки други нагиб еклиптике.

ТАБЛИЦА I

Нумеричке вредности коефицијената  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_7$

$\varphi$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$
0°	+ 0,9591	- 0,0413	- 0,0004	- 0,0000				
5°	+ 0,9558	- 0,0407	- 0,0004	- 0,0000				
10°	+ 0,9458	- 0,0393	- 0,0004	- 0,0000				
15°	+ 0,9293	- 0,0369	- 0,0004	- 0,0000				
20°	+ 0,9065	- 0,0334	- 0,0003	- 0,0000				
25°	+ 0,8777	- 0,0289	- 0,0002	- 0,0000				
30°	+ 0,8429	- 0,0232	- 0,0001	+ 0,0000				
35°	+ 0,8028	- 0,0163	+ 0,0001	+ 0,0000				
40°	+ 0,7577	- 0,0081	+ 0,0002	+ 0,0000				
45°	+ 0,7084	+ 0,0018	+ 0,0005	+ 0,0000				
50°	+ 0,6558	+ 0,0138	+ 0,0009	+ 0,0000				
55°	+ 0,6014	+ 0,0286	+ 0,0014	+ 0,0001	+ 0,0000			
60°	+ 0,5455	+ 0,0477	+ 0,0024	+ 0,0002	+ 0,0000			
65°	+ 0,4932	+ 0,0746	+ 0,0045	+ 0,0005	+ 0,0001	+ 0,0000		
70°	+ 0,4540	+ 0,1223	+ 0,0123	+ 0,0024	+ 0,0005	+ 0,0002	+ 0,0000	
75°	+ 0,5161	+ 0,3312	+ 0,1024	+ 0,0382	+ 0,0111	+ 0,0013	+ 0,0003	+ 0,0000

Као што се види из таблице I, ред (66) конвергира веома брзо. Ставимо ли (66) у (50) добивамо

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + \\ &\quad + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + \dots). \end{aligned} \quad (67)$$

Упада у очи да у предњем обрасцу отстојање  $q$  Сунца нисмо изразили као функцију лонгитуде  $\lambda$  Сунца, као што смо то урадили са осталим променљивама. То ћемо урадити тек доцније, јер ће нам образац (67) у свом садањем облику бити потребан. Употребимо га за сада да помоћу њега изведемо неке значајне особине коефицијената.

При извођењу обрасца (67) пошли смо од ових једначина

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} (\psi_0 \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \sin \psi_0), \quad (68)$$

$$\cos \psi_0 = -\operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta, \quad (69)$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda. \quad (70)$$

За  $\lambda = 0$  даје (70)  $\delta = 0$ , (69)  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ , а (68)

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} \cos \varphi,$$

док из (67) следује

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{Q^2} (b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - + \dots). \quad (71)$$

Из последња два обрасца следује важна релација

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - + \dots = \cos \varphi. \quad (72)$$

Сличне једначине могу се извести и за друге вредности од  $\lambda$ ; оне су врло једноставне, на пример, за  $\lambda = 45^\circ$  и  $\lambda = 90^\circ$ , па омогућавају да се помоћу њих добије потребан број линеарних једначина које се могу употребити за израчунавање нумеричких вредности коефицијената  $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$  и за контролу таблице I. Да она задовољава образац (72), види се на први поглед.

## ГЛАВА ЧЕТВРТА

### ГОДИШЊИ ТОК ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ

§ 11. Основни обрасци за математичко описивање годишњег тока осунчавања Земље. — Годишњи ток осунчавања Земље последња је кретања Земље око Сунца. То Земљино кретање следује по Кеплеровим законима. Према првом од тих закона Земља описује око Сунца елипсу у чијој жижи се налази Сунце. Изразимо ту чињеницу језиком математике.

Нека нам крива  $ACBDA$  предочава путању Земље;  $AB$  је велика, а  $CD$  мала оса те елиптичне путање,  $S$  и  $F$  су обе жиже те елипсе, при чему  $S$  нека буде она жижа која лежи у центру Сунца. Тачка  $B$  зове се перихел, а тачка  $A$  афелиум. Означимо ли са  $a$  велику, а са  $b$  малу полуосу те елипсе, онда је

$$\overline{OS} = \overline{OF} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Број

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (73)$$

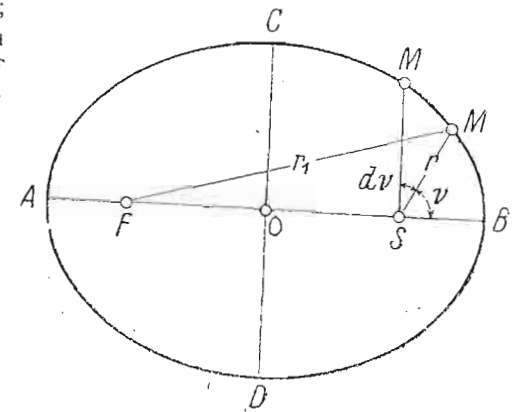
зове се нумерички ексцентрицитет или, кратко, ексцентрицитет елипсе. Из предње једначине следује

$$\text{Дуж} \quad b^2 = a^2 (1 - e^2). \quad (74)$$

$$\text{или} \quad p = \frac{b^2}{a} \quad (75)$$

или

$$\text{зове се параметар елипсе.} \quad p = a \sqrt{1 - e^2} \quad (76)$$



Спојимо произвољну тачку  $M$  елипсе, тј. произвољан положај Земље на њеној путањи, са жижама  $S$  и  $F$ , па означимо радиусвектор  $SM$  са  $r$ , а радиусвектор  $FM$  са  $r_1$ , онда је, према самој дефиницији елипсе,

$$r + r_1 = 2a.$$

Угао  $BSM$ , који ћемо означити са  $\nu$ , зове се права хелиоцентрична аномалија Земље у њеном положају  $M$ .

Из троугла  $FSM$ , где је  $FS = 2ea$ , следује по Карноовом обрасцу

$$r_1^2 = (2ea)^2 + r^2 + 4ea r \cos \nu.$$

Ставимо овде за  $r_1$  његову вредност

$$r_1 = 2a - r,$$

добивамо

$$(1 + e \cos \nu) ar = a^2 - e^2 a^2 = b^2,$$

дакле

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \nu)},$$

или због (76)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}. \quad (77)$$

Ово је једначина Земљине путање и математички изражај првог Кеплеровог закона.

Да бисмо други Кеплеров закон, који казује да радиусвектор  $r$  превлачи у једнаким деловима времена једнаке површине, обухватили математичким обрасцем, означимо са  $dv$  прираштај праве аномалије који одговара бесконачно маленом временском интервалу  $dt$ . За време тог интервала пребрисао је радиусвектор  $r$  површину  $\frac{1}{2} r^2 dv$  бесконачно уског троугла  $MSM'$ . Количник

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt}$$

зове се секторска брзина; она је, према другом Кеплеровом закону, константна, па је зато

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} C,$$

где  $C$  означава једну константу једнаку двострукој секторској брзини. Из предњих једначина следује

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C, \quad (78)$$

чиме је други Кеплеров закон изражен у диференцијалном облику.

Предњој једначини можемо дати и други облик. Означимо време обилажења Земље око Сунца са  $T$ . За то време пребрише радиусвектор  $r$  целу површину  $\pi ab$  оивичену елипсом Земљине путање. Зато је секторска брзина дата и овим изразом

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\pi ab}{T},$$

па је зато

$$C = \frac{2 \pi ab}{T}$$

и

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{2 \pi ab}{T} \quad (79)$$

тј. због (74)

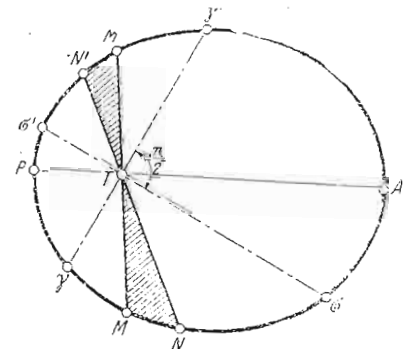
$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{2 \pi}{T} a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (80)$$

Сада можемо приступити математичком описивању годишњег тока осунчавања Земље. При томе ћемо, као што смо то учинили при математичком описивању дневног тока осунчавања, стати на геоцентрично становиште. Нека нам, дакле, у приложеној слици тачка  $T$  предочава Земљу, а елипса  $PMAM'P$  релативну путању Сунца према њој.

Сада се тачка  $P$  те путање, најближа Земљи, зове перигеум, а најдаља тачка  $A$  апогеум. Предочава ли  $S$  тренутни положај Сунца на тој његовој релативној путањи према Земљи, онда се угао  $PTM$  што га радиусвектор  $TM = r$  затвара са осом елипсе напереном према перигеуму, назива правом геоцентричном аномалијом Сунца. Означимо га са  $\nu$ . Како он игра исту ону улогу као и онај који смо са истом ознаком употребљавали при хелиоцентричном становишту, то ће једначина релативне путање Сунца према Земљи бити идентична једначини (77).

Уговорили смо да отстојање  $r$  Земље од Сунца меримо великом полуосом  $a$  Земљине путање, тј. ставили смо

$$e = \frac{r}{a} \quad (81)$$



Сл. 8

па зато добивамо за релативну путању Сунца према Земљи, место (77), ову једначину

$$q = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v}, \quad (82)$$

а за кретање Сунца по тој путањи, место (80), ову једначину

$$q^2 \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - e^2}. \quad (83)$$

Налази ли се Сунце у доба пролетње равнодневице у тачки  $\gamma$  своје релативне путање, онда нам права  $\gamma\gamma'$  предочава еквинокцијалну линију. Повучемо ли кроз  $T$  праву  $\sigma\sigma'$  нормалну на  $\gamma\gamma'$ , онда нам тачке  $\sigma$  и  $\sigma'$  предочавају положаје кроз које пролази Сунце у доба летњег односно зимског солстиција. Угао  $PT\gamma$  зове се аномалијом пролетње тачке; означаваћемо га са  $v_0$ . Како угао  $\gamma TM$  предочава праву геоцентричну лонгитуду Сунца коју смо означивали са  $\lambda$ , то је

$$v = v_0 + \lambda. \quad (84)$$

Ставимо ли ово у (82), добивамо

$$q = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(v_0 + \lambda)}. \quad (85)$$

Ексцентрицитет  $e$  Земљине путање увек је толико мален да се његов квадрат може занемарити поред јединице. Зато добивамо, стављајући (85) у (67), а занемарујући квадрате од  $e$ ,

$$w = \frac{J_0}{\pi} [1 + 2e \cos(v_0 + \lambda)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - \dots). \quad (86)$$

Овај образац даје нам годишњи ток средњег осунчавања  $w$  јединице површине на географској ширини  $\varphi$  као функцију лонгитуде Сунца. Множећи  $w$  са  $\tau$ , добивамо

$$W_\tau = \tau w \quad (87)$$

средње дневно осунчавање уоченог тренутка године.

Аналитичко предочавање величина  $w$  и  $W_\tau$  као функција времена  $t$  далеко је компликованије, но оно нам неће бити потребно за питања којима ћемо се овде бавити.

§ 12. Осунчавање Земљиних упоредника за време произвољних делова године. — Као што је показано у § 11, интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2} w dt, \quad (88)$$

предочава топлотну количину Сунчевог зрачења упућеног у интервалу  $t_1$  до  $t_2$  јединици површине упоредника  $\varphi$ . Топлотна количина упућена тој јединици за време интервала док Сунце прелази на свом релативном путу према Земљи интервал  $\lambda'$  до  $\lambda''$  еклиптике дата је изразом

$$W = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda. \quad (89)$$

Не узимајући у обзир веома споре промене којима подлеже положај перигеума услед померања апсидне линије и положај равнодневица услед прецесије, дакле не узимајући у обзир секуларну промену отстојања перигеума од пролетње тачке, која је према временским променама аномалије  $v$  и лонгитуде  $\lambda$  Сунца у току године сасвим незнатна, можемо аномалију  $v_0$  пролетње тачке која се појављује у једначини (84) сматрати за константу. Диференцијација те једначине по времену  $t$  даје

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Ставимо ли ово у једначину (83), добивамо

$$q^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - e^2}. \quad (90)$$

Било је, према (67),

$$w = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J_0}{q^2} (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - \dots).$$

Овај образац важи за неарктичну зону за све лонгитуде  $\lambda$  Сунца, но у арктичким зонама само за интервал дневног излаза и залаза Сунца.

За интервал дугога дана, за који је  $\psi_0 = \pi$ , ваља за арктичне зоне, због (27) и (70), предњи образац заменити са

$$w = \frac{J_0}{q^2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda. \quad (92)$$

Стаavimo ли (91) односно (92) у (89), то се у том интегралу појављује у оба случаја, а због (90), константни фактор

$$\frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{1}{1-e^2}$$

који можемо извадити пред знак интеграла. Тиме је радиусвектор  $\varrho$  елиминисан из наших једначина, због чега га нисмо ни изражавали као функцију од  $\lambda$ . Добивамо, дакле, ова два обрасца

$$W = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\pi + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - + \dots) d\lambda,$$

$$W = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon \int_{\lambda'}^{\lambda''} \sin \lambda d\lambda.$$

Извршимо ли ове интеграције, добивамо

$$W = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0(\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} \sin \varepsilon \sin \varphi (\cos \lambda'' - \cos \lambda') - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda'' - \sin 6\lambda') + \frac{b_4}{8} (\sin 8\lambda'' - \sin 8\lambda') - + \dots \right\} \quad (93)$$

$$W = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \sin \varphi \sin \varepsilon (\cos \lambda' - \cos \lambda''). \quad (94)$$

Образац (94) важи за интервал дугог дана; иначе важи образац (93). Изрази (93) и (94) не мењају се ако се у њима изврши супституција

$$\varphi | - \varphi; \quad \lambda' | \lambda' + \pi; \quad \lambda'' | \lambda'' + \pi.$$

Одавде следује ово правило.

Количина осунчавања која пада на јединицу површине географске ширине  $\varphi$  за време док Сунце пролази лук  $\lambda'$  до  $\lambda''$  еклиптике једнака је количини која пада на јединицу површине географске ширине  $-\varphi$  за време док Сунце прелази лук еклиптике између  $\lambda' + \pi$  и  $\lambda'' + \pi$ .

Вратимо се опет слици 8. Ако нам у њој  $MN$  предочава лук  $\lambda'$  до  $\lambda''$ , онда лук  $M'N'$  који лежи дијаметрално према луку  $MN$  предочава лук  $\lambda' + \pi$  до  $\lambda'' + \pi$ . Како предње правило важи за све географске

ширине, може се казати да је количина осунчавања једне од Земљиних хемисфера за време док Сунце прелази произвољан део  $MN$  своје путање једнака осунчавању друге хемисфере за време док Сунце прелази дијаметралан лук  $M'N'$  своје путање.

Важно је већ сада напоменути да, све када би обе хемисфере, по распореду својих континената и по својим атмосферским приликама, биле истоветне, једнакост напоменутих количина осунчавања не би за собом повлачила истоветност годишњег тока температуре на тим хемисферама, јер испрецигани сектори  $TMN$  и  $TM'N'$  слике 8 имају неједнаке површине, па су зато, по другом Кеплеровом закону, интервали за време којих Сунце прелази луконе  $MN$  и  $M'N'$  различити.

§ 13. Астрономска годишња доба. — Делови године за време којих, почињући од пролетње равнодневице, Сунце прелази квадранте еклиптике називају се астрономским годишњим добима. То су она доба за време којих Сунце прелази лукове  $\gamma\sigma$ ;  $\sigma\gamma'$ ;  $\gamma'\sigma'$ ;  $\sigma'\gamma$  (сл. 8) своје релативне путање према Земљи. Пошто површине сектора елипсе који одговарају тим луковима нису једнаке, а радиусвектор Сунца пребришава у једнаким деловима времена једнаке површине, та годишња доба имају неједнако трајање. Само онда, а то се због постепеног померања равнодневица дешава тек у току векова, када се екваторијална линија поклопи са великом осом елипсе Сунчеве релативне путање, астрономско пролеће има исту дужину као и зима, а лето као и јесен. Када те две линије стоје управно једна на другој, пролеће има дужину лета, а јесен дужину зиме.

Време које је потребно да се Сунце, полазећи из пролетње равнодневице, врати поново у њу зове се тропска година; астрономска годишња доба њени су делови. За време тропске године помакне се пролетња тачка за 55 лучних секунда, па је Сунце сустигне 20 временских минута доцније но што би то био случај кад би била непомична. Стављајући у рачун стварну дужину  $T$  тропске године, не морамо, при израчунавању дужине астрономских доба једне одређене епохе, оно померање равноднечичке тачке узимати у обзир.

За нас су од нарочите важности дужине астрономских полугодина, астрономске летње полугодине, збира астрономског пролећа и лета, и астрономске зимске полугодине, збира астрономске јесени и зиме. Означимо ли, дакле, дужину астрономске летње полугодине северне хемисфере са  $T_s$ , дужину њене зимске полугодине са  $T_w$ , дужину летње полугодине јужне хемисфере са  $\bar{T}_s$ , а дужину њене зимске полугодине са  $\bar{T}_w$ , то је

$$T_s + T_w = T \quad (95)$$

$$\bar{T}_w = T_w \quad \bar{T}_s = T_s, \quad (96)$$

где  $T$  означава дужину тропске године.



Означава ли  $F_s$  површину сектора  $\gamma\sigma\gamma'$  (сл. 8), а  $F$  површину целе елипсе  $PMAM'P$ , то је, према другом Кеплеровом закону,

$$T = \frac{F_s}{F} T. \quad (97)$$

При томе је

$$F_s = \frac{1}{2} \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \pi} \varrho^2 d\nu, \quad F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\nu,$$

а због (82), ако занемаримо квадрат од  $e$ ,

$$\varrho^2 = (1 + e \cos \nu)^{-2} = 1 - 2e \cos \nu.$$

Зато је

$$T_s = T \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu : \int_0^{2\pi} (1 - 2e \cos \nu) d\nu.$$

Извршимо ли ове квадратуре, добивамо помоћу (95)

$$\left. \begin{aligned} T_s &= \frac{1}{2} T \left( 1 + \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right), \\ T_w &= \frac{1}{2} T \left( 1 - \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$$T_s - T_w = T \frac{4e}{\pi} \sin \nu_0. \quad (99)$$

Сада је  $e = 0,01675$ ;  $\nu_0 = 77^\circ 38' 30''$ , па се са  $T = 365,2422^d$  за  $T_s$  и  $T_w$  добива

$$T_s = 186 \text{ дана } 10 \text{ часова,}$$

$$T_w = 178 \text{ дана } 20 \text{ часова.}$$

Као што се из ових бројева види, на северној хемисфери је летња полугодина 7 дана и 14 часова дужа од зимске, на јужној хемисфери обрнут је случај.

§ 14. Осунчавање Земљиних упоредника за време појединих годишњих доба. — Од нарочитог значаја су оне топлотне количине што их Сунце шаље појединим упоредницима за време астрономских годишњих доба.

Означимо са

$$W_I, \quad W_{II}, \quad W_{III}, \quad W_{IV},$$

оне од тих топлотних количина које, тим редом, за време астрономског пролећа, лета, јесени и зиме бивају упућене јединици површине географске ширине  $\varphi$  северне хемисфере, а са

$$\bar{W}_I, \quad \bar{W}_{II}, \quad \bar{W}_{III}, \quad \bar{W}_{IV},$$

оне које за време истоимених астрономских доба јужне хемисфере бивају упућене истој географској ширини јужне хемисфере. Онда је према правилу, изведеном у § 12,

$$\bar{W}_I = W_{III}; \quad \bar{W}_{II} = W_{IV}; \quad \bar{W}_{III} = W_I; \quad \bar{W}_{IV} = W_{II}. \quad (100)$$

Желимо ли да израчунамо  $W_I$ , ваља резликovati да ли уочени упоредник припада неарктичној зони или којој од арктичних зона. У првом случају треба у (93) ставити  $\lambda' = 0$ ;  $\lambda'' = \frac{\pi}{2}$ , па тако добијамо

$$W_I = \frac{T}{4\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 + \sin \varphi \sin \varepsilon). \quad (101)$$

У другом случају треба уочено годишње доба расчланити коренима једначине (7) у интервал дневног излаза и залаза Сунца и у интервал дугога дана. За први интервал ваља применити образац (93), а за други образац (94). За време дуге ноћи упоредник је неосунчан. Водећи о свему томе рачуна, добивамо

$$\begin{aligned} W_I &= \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 - + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (102)$$

Иста два обрасца добивају се при израчунавању количине  $W_{II}$  при чему ваља ставити  $\lambda' = \frac{\pi}{2}$ ;  $\lambda'' = \pi$ . Зато је

$$W_{II} = W_I. \quad (103)$$

За количину  $W_{III}$ , за коју ваља ставити  $\lambda' = \frac{\pi}{2}$ ;  $\lambda'' = \pi$  добива се за неарктичну зону

$$W_{III} = \frac{T}{4\pi} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - \sin \varphi \sin \varepsilon), \quad (104)$$

а за арктичну зону

$$W_{III} = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{1-e^2} \left\{ b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon - \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - \right. \\ \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda_1 + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda_1 + \dots \right\}. \quad (105)$$

Иста два обрасца као ова два претходна добивају се при израчунавању количине  $W_{IV}$  за коју ваља ставити  $\lambda' = 3/2\pi$ ;  $\lambda'' = 2\pi$ . Зато је

$$W_{IV} = W_{III}, \quad (106)$$

а сем тога, као што следује из (100), (103) и (106),

$$\bar{W}_{II} = \bar{W}_I \quad \bar{W}_{IV} = \bar{W}_{III}. \quad (107)$$

Једначине (103), (106), (107) казују да је топлотна количина осунчавања за време астрономског лета једнака оној која одговара пролећу, а она која одговара зими једнака јесењој.

Помоћу једначина (100), (103), (106), (107) можемо свих осам количина  $W_I, W_{II}, W_{III}, W_{IV}, \bar{W}_I, \bar{W}_{II}, \bar{W}_{III}, \bar{W}_{IV}$ , изразити помоћу њих двеју. Као такве одабраћемо ове две количине

$$\left. \begin{aligned} W_s &= 2 W_I, \\ W_w &= 2 W_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Прва од њих претставља нам топлотну количину упућену северној географској ширини  $\varphi$  за време летње полугодине, тј. за време пролећа и лета, а друга упућену јој за време зимске полугодине, тј. за време јесени и зиме.

Означимо ли количине упућене географској ширини  $\varphi$  јужне хемисфере за време јужне летње полугодине односно за време јужне зимске полугодине са  $\bar{W}_s$  и  $\bar{W}_w$ , то је

$$\bar{W}_s = 2 \bar{W}_{III} \quad \bar{W}_w = 2 W_I$$

тј. због (100) и (108)

$$\bar{W}_s = W_s \quad \bar{W}_w = W_w. \quad (109)$$

Свака географска ширина јужне хемисфере добија, дакле, за време јужне летње полугодине исту ону количину осунчавања што је добија иста географска ширина северне хемисфере за време северне летње полугодине, а за време јужне зимске полугодине исту ону

количину осунчавања што је добија иста географска ширина северне хемисфере за време северне зимске полугодине. То следује из правила доказаног у § 12.

Израчунавање количина  $W_s$  и  $W_w$  врши се на овај начин. Из (101) до (109) следује образац

$$W_s - W_w = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{1-e^2} \sin \varphi \sin \varepsilon, \quad (110)$$

који важи за све географске ширине. Из наведених образаца следује још

$$W_s + W_w = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{1-e^2} b_0, \quad (111)$$

$$W_s + W_w = \frac{T}{\pi^2} \cdot \frac{J_0}{1-e^2} \left\{ 2 b_0 \lambda_1 + \pi \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \lambda_1 - b_1 \sin 2\lambda_1 + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{2} \sin 4\lambda_1 - \frac{b_3}{3} \sin 6\lambda_1 + \dots \right\}, \quad (112)$$

при чему први образац важи за неарктичну зону, а други за арктичне зоне.

Величина

$$W_T = W_s + W_w, \quad (113)$$

претставља ону количину осунчавања упућену ученој географској ширини за време целе године.

За оба Земљина пола добива се из (7)  $\lambda_1 = 0$ , па је зато

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \pm 90^\circ, \\ W_w &= 0, \\ W_s &= W_T = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{1-e^2} \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Нумеричке вредности топлотних количина  $W_s, W_w, W_T$  за сваки пети степен географске ширине налазе се саопштене у другом одељку ове књиге.

§ 15. Осунчавање Земљиних хемисфера у току произвољних делова године. — Означимо ли са  $dN$  односно са  $dS$  топлотну количину упућену северној односно јужној хемисфери Земљиној у елементу  $dt$  времена, онда је према (24) и (25)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 + \sin \delta), \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{J_0}{\varrho^2} \cdot \frac{\pi}{2} R^2 (1 - \sin \delta). \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

За време док Сунце прелази лук еклиптике ограничен лонгитудами  $\lambda'$  и  $\lambda''$  бивају северној односно јужној хемисфери Земљиној одашиљање ове топлотне количине

$$N = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} d\lambda, \quad S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dS}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} d\lambda.$$

Обзиром на (115), (2), (90) предњи обрасци добивају овај облик

$$N = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 + \sin \epsilon \sin \lambda) d\lambda,$$

$$S = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 - \sin \epsilon \sin \lambda) d\lambda.$$

Изврше ли се предње квадратуре, добива се

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ (\lambda'' - \lambda') - \sin \epsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda') \right\}, \\ S &= \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ (\lambda'' - \lambda') + \sin \epsilon (\cos \lambda'' - \cos \lambda') \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Одавде следује да док Сунце прелази лук  $\lambda'$  до  $\lambda''$  еклиптике бива целој Земљиној лопти одаслана ова топлотна количина

$$N + S = \frac{T}{2} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} (\lambda'' - \lambda'). \quad (117)$$

Она је пропорционална прираштају лонгитуде  $\lambda$  Сунца и зато једна те иста за сва четири астрономска годишња доба.

Обележимо ли са  $N_s$  односно са  $N_w$  ону топлотну количину која бива упућивана северној Земљиној хемисфери за време њене летње односно за време зимске полугодине, а са  $S_s$  односно са  $S_w$  топлотну количину упућену јужној хемисфери за време њене летње односно зимске полугодине, то је због (116)

$$\left. \begin{aligned} N_s &= S_s = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi + 2 \sin \epsilon), \\ N_w &= S_w = \frac{T}{4} \cdot \frac{J_0 R^2}{\sqrt{1-e^2}} (\pi - 2 \sin \epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Ове две количине стоје у значајној сразмери

$$\frac{N_s}{N_w} = \frac{S_s}{S_w} = \frac{\pi + 2 \sin \epsilon}{\pi - 2 \sin \epsilon}. \quad (119)$$

Из (117) следује да је топлотна количина упућена целој Земљиној лопти за време целе године једнака

$$\frac{T J_0 R^2 \pi}{\sqrt{1-e^2}}$$

Просечно осунчавање Земље по јединици времена и јединици површине добива се ако предњу количину поделимо са временом  $T$  и површином  $4\pi R^2$  Земљиним. Она је дата обрасцем

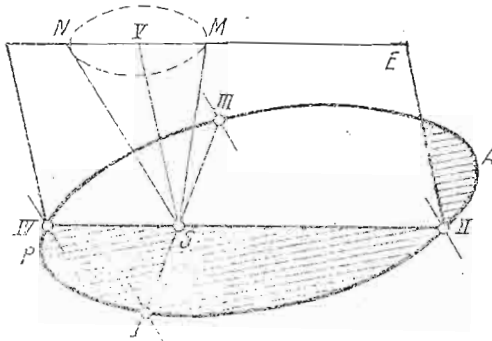
$$J_m^T = \frac{J_0}{4\sqrt{1-e^2}}. \quad (120)$$

Често се претпостављало да је просечно осунчавање Земље по јединици времена и површине једнако просечном осунчавању из њеног средњег отстојања  $q = 1$  од Сунца. То осунчавање дато је због (23) изразом  $\frac{1}{4} J_0$ , па би само при кружној путањи Земље тј. при  $e = 0$  било једнако осунчавању  $J_m^T$ .

## ГЛАВА ПЕТА

СЕКУЛАРНИ ПОРЕМЕЋАЈИ ЗЕМЉИНЕ ОСЕ И ПУТАЊЕ  
И ЊИХОВЕ ПОСЛЕДИЦЕ

§ 16. Механизам секуларних поремећаја Земљине осе и путање. — При испитивањима дневног и годишњег осунчавања Земљиног претпоставили смо да путања Земље и нагиб њене осе не подлежу никаквим променама, тј. сматрали смо елементе  $\epsilon$ ,  $e$ ,  $\nu_0$  за константе. То смо смели учинити, јер се ти елементи не мењају осетно и у подужем низу година. Но у току векова они подлежу променама које се



Сл. 9

називају секуларним. Ми их, проучавајући климу садашњости, не морасмо узети у обзир, али су те промене, као што ћемо видети, биле од пресудног утицаја на климу Земљине прошлости која ће бити главни предмет другог одељка ове књиге. Зато се њима морамо позабавити и у овом првом, теоретском, одељку да бисмо у њему изградиле математички апарат потребан за онај други одељак.

Нека нам у приложеној слици тачка  $S$  претставља центар Сунца, а елипса  $PIAIII P$  годишњу путању Земље око Сунца. Замислимо ли у тачки  $S$  праву  $SV$  нормалну на раван Земљине путање, а наперену према северној страни небеске сфере и праву  $SN$  паралелну Земљиној осе, онда нам угао  $VSN$  предочава нагиб те осе или косину  $\epsilon$  еклиптике. Раван  $E$  положена кроз праве  $SN$  и  $SV$  стоји управно на равни Земљине путање и сече је дуж праве  $IVII$ . Тачке  $II$  и  $IV$  предочавају као што је лако увидети, солстицијалне положаје Земље на њеној путањи, а ако у равни Земљине путање повучемо кроз  $S$  праву  $SI$  управну на праву  $IVII$ , она ће погодити Земљину путању у тачкама  $I$  и  $III$  које нам предочавају еквинокијалне положаје Земљине. Временски интервали који протеку између пролаза Земље кроз четири кардиналне тачке  $I, II, III, IV$  предочавају нам астрономска годишња доба. При томе одговара интервал пута  $IIIII$  летњој полугодина  $T_s$  северне хемисфере, а интервал  $IIIIVI$  њеној зимској полугодина  $T_w$ . Неједнакост сектора  $IIIII$  и  $IIIIVI$  има за последицу неједнакости тих полугодина. Положај свих тих тачака Земљине путање одређен је углом  $III SP$ , при чему  $P$  предочава ону тачку Земљине путање која је најближа Сунцу, перихел. Угао  $III SP$ , који ћемо означавати са  $\Pi_1$ , зове се лонгитуда перихела обзиром на пролетњу тачку уочене епохе. У доба пролетње равнодневице, када се Земља налази у положају  $I$ , видимо Сунце пројцирано у правцу  $IS$  на небеској сфери. Зато се продорна тачка те праве са небеском сфером зове пролетњом тачком. Налази ли се Земља у тачки  $P$  њене путање, онда се Сунце налази у перигеуму своје релативне путање према Земљи. Зато угао  $ASIII$  што га правци  $PS$  и  $IS$  међусобно затварају предочава аномалију  $\nu_0$  пролетње тачке. Пошто тачке  $P$  и  $A$  леже дијаметрално на правој положеној кроз  $S$ , то следује из слике

$$\nu_0 = 180^\circ - \Pi_1. \quad (121)$$

Кад планете не би својом међусобном привлачном снагом поремећавале своја кретања, а Земљина оса не би својом прецесијом мењала своју оријентацију у простору, била би Земљина путања, како је у нашој слици претстављена, непроменљива, а њене кардиналне тачке  $I, II, III, IV$  непомицне. Годишњи ток осунчавања Земље, како смо га у претходном поглављу описали, понављао би се без икаквих промена из године у годину. Но то није случај. Привлачно дејство Сунца и Месеца на нашу елипсоидалну Земљу има за последицу да се Земљина оса, па тиме и права  $SN$  повучена паралелно тој осе полако помера и описује за време од каквих 26.000 година конус  $NSM$  којег је оса  $SV$ , а угао што га изводнице његове са том осом затварају једнак косини  $\epsilon$  еклиптике. Услед тог заошјавања Земљине осе обрће се раван  $E$  око праве  $SV$  као осе, а кардиналне тачке  $I, II, III, IV$  селе

се у правцу кретања казаљке на сату дуж Земљине путање. Оне би ту путању обишле за време споменутог интервала од 26.000 година када би та путања била непомична. Но, због споменутих међусобних планетских поремећаја, велика оса елипсе Земљине путање иде у сусрет кардиналним тачкама, па оне обиђу Земљину путању, од перихела до перихела, за каквих 21.000 година. За то време, које треба сматрати само као осредњу вредност, порасте угао  $\Pi$  за  $360^\circ$ .

Услед узајамног поремећаја планета, Земљина путања се постепено мења, придржавајући при томе свој елиптички облик. Велика полуоса те елипсе не мења при томе своју дужину, али ексцентрицитет елипсе подлеже осетнијим секуларним променама. И равна њена врши мања колебања у простору чиме се мења и нагиб  $i$  Земљине осе према тој равни. То повлачи за собом да права  $SV$  коју смо досада сматрали непомичном врда у простору чиме и конус  $NSM$  губи своју непомичност и правилност.

Осунчавање Земље зависи само од облика и димензија Земљине путање и оријентације Земљине осе према тој путањи, а не зависи од положаја те путање и Сунца у простору васионе. Тај међусобни положај Сунца, Земље и њене путање једнозначно је одређен астрономским елементима  $a, \Pi, e$  и  $\epsilon$ . То следује и из тога што се у нашим обрасцима којима се израчунавају све појединости осунчавања Земље појављују само астрономски елементи  $a, n_0, e, \epsilon$ , од којих се елемент  $n_0$  може једначином (121) изразити помоћу елемента  $\Pi$ . Велика полуоса  $a$  Земљине путање не подлеже секуларним променама па зато при израчунавању секуларних промена осунчавања Земље долазе само у обзир секуларне промене елемената  $\Pi, e$  и  $\epsilon$ .

Израчунавање секуларних промена тих елемената задатак је Небеске механике. Она је, ослањајући се на Њутнов закон гравитације, у стању да тај задатак реши прецизношћу која је меће на прво место међу егзактним наукама, да израчуна те секуларне промене за дуги низ векова и да их прати у будућност и у древну прошлост онолико колико је потребно за палеоклиматске проблеме којима ћемо се бавити у другом одељку ове књиге.

Тај, за нас толико важни проблем обрађен је у потребном обиму у уџбеницима београдског Универзитета који се баве Небеском механиком. Зато ћемо овде саопштити само коначно решење његово.

При испитивању промена астрономских елемената наше Земље мора се узети у обзир узајамно привлачно дејство свих планета и у рачуне ставити све промене којима подлежу сви астрономски елементи тих планета. Познавање њихових маса и њиховог тренутног положаја једне одређене епохе довољно је да се њихови положаји и елементи који одређују њихове путање израчунају и за сваки други произвољан

моменат удаљен за време  $t$  од иницијалног момента. При томе се, природно, мора одабрати један стални координатни систем на који се односе кретања тих планета. За почетну тачку тог система одабире се центар Сунца, а за његову основну равна, равна Земљине путање одређене епохе. Оса  $X$  тог система упира се према пролетњој тачки те епохе. У том координатном систему одређују се положаји и облици планетских путања на овај начин. Пресек равни планетске путање са основном равни координатног система зове се линија чворова. Она продорна тачка те праве са небеском сфером у којој се планета при свом годишњем кретању око Сунца уздигне изнад северне стране основне равни назива се узлазним чвором. Положај тог узлазног чвора, па тиме и линије чворова, одређен је углом што га та права затвара са осом  $X$  нашег координатног система, бројећи тај угао у смислу годишњег кретања планете око Сунца. Тај угао назива се лонгитудом узлазног чвора, а означава са  $\Omega$ . Угао што га равна планетске путање затвара са основном равни координатног система зове се нагиб планетске путање, а означава са  $i$ . Тај угао је увек мален, јер равни свих планета затварају малене углове са равни Земљине путање, а и колебају се између врло уских граница. Елементима  $\Omega$  и  $i$  одређена је једнозначно равна планетске путање било којег год тренутка проучаваног временског интервала. Угао што га велика полуоса планетске путање, наперена према перихелу, затвара са линијом чворова зове се лонгитудом перихела према узлазном чвору, а означава са  $\omega$ . Њом је одређен положај планетске путање у њеној равни. Место те лонгитуде перихела уводи се у астрономске рачуне поремећаја збир

$$\Pi = \Omega + \omega \quad (122)$$

који се назива, укратко, лонгитудом перихела.

Сама елипса планетске путање одређена је једнозначно својом великом полуосом  $a$  и својим нумеричким ексцентрицитетом  $e$ .

Познавање положаја планете у њеној путањи у једном одређеном тренутку времена не долази у обзир у рачуну секуларног тока осунчавања Земље, већ само астрономски елементи

$$\Omega, i, \Pi, a, e.$$

Доказано је да велике полуосе  $a$  планетских путања не подлеже секуларним поремећајима, па зато имамо да водимо рачуна једино о секуларним променама елемената

$$\Omega, i, \Pi, e.$$

Обрасци помоћу којих се израчунавају секуларне промене елемената  $e$  и  $\Pi$ , до којих Небеска механика долази путем у чије се појединости не можемо упуштати, су ови:

$$\left. \begin{aligned} e \sin \Pi &= N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \\ &+ \dots + N_n \sin(g_n t + \beta_n), \\ e \cos \Pi &= N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \\ &+ \dots + N_n \cos(g_n t + \beta_n). \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Број  $n$  чланова десна стране ових образаца једнак је целокупном броју планета, а  $N, g, \beta$  су константе које се одређују из иницијалних услова.

За израчунавање секуларних промена елемената  $i$  и  $\Omega$  добивају се ови обрасци:

$$\left. \begin{aligned} \tan g i \sin \Omega &= N_1 \sin \beta_1 + N_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \\ &+ \dots + N_n \sin(g_n t + \beta_n), \\ \tan g i \cos \Omega &= N_1 \cos \beta_1 + N_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \\ &+ \dots + N_n \cos(g_n t + \beta_n). \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

где су  $N, g, \beta$  константе одређене иницијалним условима, а различите од оних које се појављују у (123).

Из предњих једначина следе ове значајне конзеквенције.

Подигнемо ли једначине (123) на квадрат и саберемо ли их, добивамо

$$e^2 = \sum N_i^2 + 2 \sum \sum N_i N_j \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j], \quad (125)$$

при чему је у двоструком збиру индекс  $i$  увек различит од индекса  $j$ .

Овим образцем могу се израчунати секуларне промене ексцентрицитета путање уочене планете. Двоструки збир који се појављује у том образцу достигао би своју највећу могућу вредност када би сваки косинус који се налази у њему био једнак јединици, а имао онај знак при којем је произрод  $N_i N_j$  позитиван. У таквом случају било би

$$e^2 = (N_1 + N_2 + \dots + N_n)^2,$$

при чему  $N_1, N_2, \dots, N_n$  ваља узети са позитивним знаком. Зато је

$$\lim. \sup. e = |N_1| + |N_2| + \dots + |N_n|. \quad (126)$$

Највећа нумеричка вредност што је ексцентрицитет уочене планетске путање може уопште достићи једнака је збиру апсолутних

вредности коефицијената  $N_i$ . Тиме је дата горња граница тог ексцентрицитета.

Истим поступком добивимо, ако једначине (124) подигнемо на квадрат и саберемо их, ову једначину:

$$\tan g^2 i = \sum N_i^2 + 2 \sum \sum N_i N_j \cos[(g_i - g_j)t + \beta_i - \beta_j], \quad (127)$$

па као што је из једначине (125) следовала једначина (126) тако следе из претходне једначине

$$\lim. \sup. \tan g i = |N_1| + |N_2| + \dots + |N_n|, \quad (128)$$

којом се једначином могу одредити границе између којих осцилује нагиб уочене планетске путање.

Као што смо већ напоменули, померање перихела комбинује се са померањем пролетње тачке услед прецесије, а та оба померања мењају отстојање  $\Pi$ , перихела од пролетње тачке уоченог тренутка прошлости или будућности  $-t$  односно  $+t$ . Означимо ли са  $\Pi'$  пут што га је превалила пролетња тачка за време  $t$ , бројаног од иницијалног момента, тј. онај износ за који се она удаљила од продорне осе  $X$  са небеском сфером, то је удаљење  $\Pi'$ , перихела од тренутне пролетње тачке у тренутку  $t$  дато образцем

$$\Pi_t = \Pi + \Pi'. \quad (129)$$

Као што је речено, нас не интересује нагиб Земљине путање према основној равни нашег координатног система, већ нагиб  $\varepsilon$  Земљине осе према променљивој равни Земљине путање и секуларне промене тога нагиба. Оне су последице секуларних промена елемената  $i$  и  $\Omega$  и саме прецесије. Из тих промена следе овај образац секуларних промена нагиба еклиптике

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = N_1' \cos(g_1' t + \beta_1') + N_2' \cos(g_2' t + \beta_2') + \dots + N_n' \cos(g_n' t + \beta_n'), \quad (130)$$

где су  $\varepsilon_0, N', g', \beta'$  константе које се одређују из иницијалних услова.

§ 17. Последице секуларних поремећаја на осунчавање Земље за време појединих астрономских годишњих доба. — Познавајући секуларне промене астрономских елемената  $\varepsilon, e$  и  $\Pi$ , тј. њихове нумеричке вредности за сваку уочену годину проучаваног периода Земљине прошлости, могли бисмо помоћу тих нумеричких података и помоћу образаца развијених у другој и четвртој глави ове књиге израчунати све таблице и израдити све цртеже којима ћемо, у другом одељку ове књиге, предочити садање стање осунчавања Земље. Но

такав рачун био би врло приметан и, имајући у виду дуги низ векова на који ћемо проширити наша испитивања, практично скоро неизводљив. Тај посао можемо веома упростити узимајући у обзир да се нагиб Земљине осе и ексцентрицитет Земљине путање мењају у низу векова између уских граница.

Почећемо са тиме да испитамо последице секуларних поремећаја на топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  што их прима уочени упоредник Земљин за време астрономске летње односно зимске полугодине.

У обрасцима (110), (111), (112) помоћу којих се израчунавају те топлотне количине појављује се елементар  $\varepsilon$  експлицитно, а и посредством коефицијената  $b_0, b_1, b_2, \dots$  пошто су они, као што се види из образаца (49), (59) и (65), функције елемента  $\varepsilon$ . Зато је, пре свега, потребно израчунати промене којима подлеже ти коефицијенти услед променљивости елемента  $\varepsilon$ .

При томе ваља имати у виду ово. Секуларне промене елемента  $\varepsilon$  врше се између врло уских граница, па се зато промене које оне изазивају на коефицијентима  $b_0, b_1, b_2, \dots$  и на количинама  $W_s, W_w$  могу ставити пропорционалним изводима

$$\frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon}, \dots, \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon}.$$

Означимо ли дакле, са

$$\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta W_s, \Delta W_w$$

промене побројаних величина изазваних прираштајем нагиба  $\varepsilon$  еклиптике од једног лучног степена, то је

$$\Delta b_0 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta b_1 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta b_2 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon}. \quad (131)$$

$$\Delta W_s = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon}; \quad \Delta W_w = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon}. \quad (132)$$

Из образаца (59) у којима је због (49)

$$k = \sin \varepsilon$$

слеђује

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial a_1}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{k}{2} (-1 + n^2) \cos \varepsilon = 2 \frac{a_1}{k} \cos \varepsilon = 2 \frac{a_1}{\tan \varepsilon},$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial a_2}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial \varepsilon} = 4 \frac{a_2}{\tan \varepsilon},$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \varepsilon} = 6 \frac{a_3}{\tan \varepsilon},$$

па је због (65)

$$\frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\cos \varphi}{\tan \varepsilon} \left\{ a_1 + \frac{4}{2^4} \binom{4}{2} a_2 + \frac{6}{2^6} \binom{6}{3} a_3 + \frac{8}{2^8} \binom{8}{4} a_4 + \right. \\ \left. + \frac{10}{2^{10}} \binom{10}{5} a_5 + \frac{12}{2^{12}} \binom{12}{6} a_6 + \frac{14}{2^{14}} \binom{14}{7} a_7 + \dots \right\},$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} = \frac{\cos \varphi}{2 \tan \varepsilon} \left\{ 2 a_1 + \frac{4}{2^2} \binom{4}{1} a_2 + \frac{6}{2^4} \binom{6}{2} a_3 + \frac{8}{2^6} \binom{8}{3} a_4 + \right. \\ \left. + \frac{10}{2^8} \binom{10}{4} a_5 + \frac{12}{2^{10}} \binom{12}{5} a_6 + \frac{14}{2^{12}} \binom{14}{6} a_7 + \dots \right\}, \quad (133)$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} = \frac{\cos \varphi}{2^3 \tan \varepsilon} \left\{ 4 a_2 + \frac{6}{2^2} \binom{6}{1} a_3 + \frac{8}{2^4} \binom{8}{2} a_4 + \right. \\ \left. + \frac{10}{2^6} \binom{10}{3} a_5 + \frac{14}{2^{10}} \binom{14}{5} a_7 + \dots \right\},$$

Диференцијацијом израза (110), (111), (112) по  $\varepsilon$  добијамо

$$\frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{|1 - e^2|} \sin \varphi \cos \varepsilon, \quad (134)$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{J_0}{|1 - e^2|} \cdot \frac{\partial b_0}{\partial \varepsilon}, \quad (135)$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W_w}{\partial \varepsilon} = \frac{T}{\pi^2} \cdot \frac{J_0}{|1 - e^2|} \left\{ 2 \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varepsilon} \lambda_1 + 2 b_0 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\ \left. + \pi \sin \varphi \cos \varepsilon \cos \lambda_1 - \pi \sin \varphi \sin \varepsilon \sin \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{\partial b_1}{\partial \varepsilon} \sin 2 \lambda_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial b_2}{\partial \varepsilon} \sin 4 \lambda_1 - \frac{1}{8} \frac{\partial b_3}{\partial \varepsilon} \sin 6 \lambda_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] + 2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} \left[ -b_1 \cos 2 \lambda_1 + b_2 \cos 4 \lambda_1 - b_3 \cos 6 \lambda_1 + \dots \right] \right\}. \quad (136)$$

Једначина (134) важи за све географске ширине, једначина (135) само за неарктичну зону, а једначина (136) само за арктичке зоне. У тој једначини  $\lambda_1$  је, као што смо видели, дато једначином

ТАБЛИЦА II

Географска ширина	У табlici I саопштени коефицијенти							
	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$
	мењају се при прираштају једног степена нагиба еклиптике за							
0°	-0,00339	-0,00346	-0,00007					
5°	-0,00335	-0,00341	-0,00007					
10°	-0,00323	-0,00330	-0,00007					
15°	-0,00302	-0,00308	-0,00006					
20°	-0,00274	-0,00278	-0,00005					
25°	-0,00236	-0,00239	-0,00004					
30°	-0,00189	-0,00191	-0,00002					
35°	-0,00129	-0,00128	+0,00002					
40°	-0,00060	-0,00056	+0,00003					
45°	+0,00023	+0,00031	+0,00009	+0,00001				
50°	+0,00127	+0,00142	+0,00017	+0,00001				
55°	+0,00255	+0,00280	+0,00027	+0,00003				
60°	+0,00426	+0,00469	+0,00047	+0,00005	+0,00001			
65°	+0,00687	+0,00772	+0,00103	+0,00017	+0,00003			
70°	+0,01260	+0,01538	+0,00357	+0,00100	+0,00024	+0,00004	+0,00001	
75°	+0,05705	+0,08748	+0,04429	+0,01851	+0,00571	+0,00122	+0,00016	+0,00001

$$\sin \lambda_1 = \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon}$$

па је зато  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon}$  дато једначином

$$\cos \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon} = -\cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon}$$

У приложеној табlici II саопштене су промене коефицијената  $b_0, b_1, b_2, \dots$  при прираштају од једног степена нагиба  $\varepsilon$  еклиптике. Промене топлотних количина  $\Delta W_s, \Delta W_w, \Delta W_T$  при таквом прираштају нагиба еклиптике биће саопштене у другом одељку ове књиге.

У обрасцима (110), (111), (112) којима се израчунавају топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  појављује се ексцентрицитет  $e$  Земљине путање само у фактору

$$\frac{1}{1 - e^2}$$

Ексцентрицитет Земљине путање мења се између уских граница. За време другог раздобља геолошке прошлости, који ће бити предмет испитивања другог одељка ове књиге, минимална нумеричка вредност ексцентрицитета била је 0,0051, а максимална 0,0475. Због тога су се напоменуте топлотне количине услед промена ексцентрицитета  $e$ , а према њиховој садашњој нумеричкој вредности могле умањити тек за 0,013%, а увећати тек за 0,0999%. Те су промене толико незнатне да се не морају узимати у обзир.

Када се, дакле, ради о томе да се израчунају топлотне количине  $W_s, W_w, W_T$ , које било епохе  $t$  уоченог раздобља геолошке прошлости, онда није потребно израчунавати их истим компликованим рачуном којим смо их израчунали за садашње доба, већ се може поћи од тих садашњих. Означимо ли те садашње количине са  $W_s^0, W_w^0, W_T^0$ , садашњу нумеричку вредност косине еклиптике са  $\varepsilon_0$ , а косину еклиптике епохе  $t$  са  $\varepsilon$ , па ставимо ли

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0, \quad (137)$$

онда нам  $\Delta \varepsilon$  предочава прираштај нагиба еклиптике који се има мерити степенима. Онда је према напред саопштеном

$$\left. \begin{aligned} W_s &= W_s^0 + \Delta W_s \Delta \varepsilon, \\ W_w &= W_w^0 + \Delta W_w \Delta \varepsilon, \\ W_T &= W_T^0 + \Delta W_T \Delta \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

§ 18. Последице секуларних поремећаја на дужине астрономских годишњих доба. При израчунавању секуларних промена топлотних количина  $W_s$  и  $W_w$  долазе у обзир само секуларне промене нагиба  $\varepsilon$  еклиптике, а при израчунавању секуларних промена дужина годишњих доба  $T_s$  и  $T_w$  обрнут је случај. Из једначина (98), (99) и (121) следује

$$\left. \begin{aligned} T_s &= \frac{1}{2} T \left( 1 + \frac{4e}{\pi} \sin \Pi_s \right), \\ T_w &= \frac{1}{2} T \left( 1 - \frac{4e}{\pi} \sin \Pi_w \right). \end{aligned} \right\} \quad (139)$$



$$T_s - T_w = T \frac{4e}{\pi} \sin \Pi_\gamma. \quad (140)$$

Дужине тих годишњих доба не зависе, дакле, од нагиба еклип- тике, већ од ексцентрицитета  $e$  Земљине путање и лонгитуде  $\Pi_\gamma$  перихела. При томе се ексцентрицитет  $e$  појављује у првој потенцији. Те дужине и њихова разлика су једноставне функције секуларно про- менљивих величина  $\Pi_\gamma$  и  $e$ .

Што се тиче променљивости ових двају астрономских елемената са временом, ствар стоји овако.

Дужина перихела  $\Pi_\gamma$  мења се прилично монотонно и порасте за  $360^\circ$  за време од каквих 21.000 година. За то време изврши  $\sin \Pi_\gamma$  једну потпуну осцилацију између  $-1$  и  $+1$ . Зато се та функција, у свом главном изгледу, може предочити хармоничном осцилацијом

$$\sin \Pi_\gamma = a_1 \sin \frac{2\pi}{T_1} t,$$

где  $t$  означава време,  $a_1$  амплитуду, а  $T_1$  периоду, при чему је

$$a_1 = 1 \quad T_1 = 21.000 \text{ година.}$$

И секуларне промене ексцентрицитета  $e$  имају осцилаторан ка- рактер; оне се врше, као што је већ речено, између својих најширих граница 0,0051 и 0,0475. Означимо аритметску средину ових двају бро- јева са  $m$ , а половину њихове разлике са  $a_2$  и узмимо у обзир да је осредња периода осцилација ексцентрицитета  $e$  Земљине путање  $T_2 = 92.000$  година, то се те осцилације могу отприлике предочити обрасцем

$$e = m + a_2 \sin \left( \frac{2\pi}{T_2} t + \varepsilon \right),$$

где је  $m = 0,026$ ,  $a_2 = 0,021$ , а где  $\varepsilon$  предочава различитост фаза по- сматраних двеју осцилација.

Брзина којима се мења  $\sin \Pi_\gamma$  односно  $e$  дато је временским из- водима предњих израза, тј. обрасцима

$$\frac{d}{dt} \sin \Pi_\gamma = a_1 \frac{2\pi}{T_1} \cos \frac{2\pi}{T_1} t,$$

$$\frac{de}{dt} = a_2 \frac{2\pi}{T_2} \cos \left( \frac{2\pi}{T_2} t + \varepsilon \right).$$

И те брзине се мењају осцилаторно, периодама  $T_1$  и  $T_2$ , а ам- плитудами

$$a_1 = a_1 \frac{2\pi}{T_1}, \quad a_2 = a_2 \frac{2\pi}{T_2}.$$

Те амплитуде стоје у размери

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}.$$

Ставимо ли овамо саопштене нумеричке вредности за  $a_1, a_2, T_1, T_2$ , добивамо да су промене синуса перихела  $\Pi_\gamma$  преко 200 пута брже од промена ексцентрицитета  $e$ .

Зато се у секуларним променама дужина годишњих доба јаче испољавају осцилације синуса перихела од осцилација ексцентрицитета: прве су јаче и брже, а друге слабије и спорије. Оне брже и јаче осци- лације периоде од 21.000 година бивају у току од 92.000 година по- степено и наизменично појачаване и слабљене онима друге врсте. Та- ласи првих осцилација порасту за то време до својих најјачих и опадну до својих најслабијих замаха. Гребени тих таласа, када је у питању разлика  $T_1 - T_2$ , наступају врло блиско добима када је  $\Pi_\gamma = 90^\circ$ , а удолице таласа када је  $\Pi_\gamma = 270^\circ$ , јер у то доба достизава  $\sin \Pi_\gamma$  своју максималну односно своју минималну вредност.

Разлика  $T_s - T_w$  годишњих доба исчезава сасвим када је

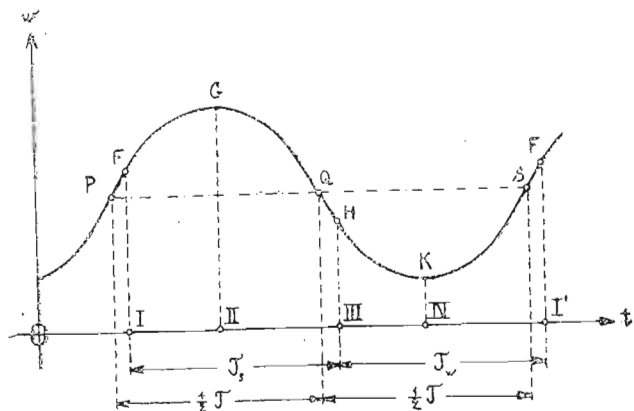
$$\Pi_\gamma = 0 \text{ или } \Pi_\gamma = 180^\circ.$$

Зато су времена геолошке прошлости када је  $\Pi_\gamma = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  од нарочитог значаја при испитивањима климатских промена тога доба.

## ГЛАВА ШЕСТА

МАТЕМАТИЧКО ПРЕДОЧАВАЊЕ СЕКУЛАРНОГ ТОКА  
ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ

§ 19. Калорична годишња доба. — У претходном поглављу извели смо обрасце (138) којима се могу израчунати топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  што их Сунце шаље ученој географској ширини  $\varphi$  за време  $T_s$  астрономске летње полугодине односно за време  $T_w$  астрономске зимске полугодине било у којој години геолошке прошлости. Обрасцима (139) могу се израчунати и дужине тих полугодина. Но тим računом није још добивено све што је потребно за испитивање секуларног тока осунчавања Земље, јер се због неједнакости временских ин-



Сл. 10

тервала  $T_s$  и  $T_w$  не могу правилно оценити и међусобно упоредити термички ефекти топлотних количина  $W_s$  и  $W_w$ , о чему ће још подробније бити говора у другом одељку ове књиге. За такво упоређење мора се поћи другим путем. Да бисмо га објаснили, послужимо се приложеном сликом.

Том сликом предочен је годишњи ток осунчавања ученог упоредника. У њој предочава, дакле, апсциса време  $t$ , а ордината средње осунчавање  $w$  упоредника у одговарајућем тренутку времена. Тај годишњи ток  $w(t)$  предочен је таласастом кривом  $PFQHKSF'$ . Тренуци пролетње равнодневице, летњег солстиција, јесење равнодневице, зимњег солстиција и наредне пролетње равнодневице обележени су римским бројевима I, II, III, IV и I'. Зато нам дуж I III предочава дужину  $T_s$  астрономске летње полугодине, а дуж III I' дужину  $T_w$  астрономске зимске полугодине. Одговарајући интегрални функције  $w(t)$ , тј. површина I III  $HQGF$  I односно III I'  $F'SKH$  III предочавају нам топлотну количину  $W_s$  односно  $W_w$ .

У произвољној години геолошке прошлости био је годишњи ток осунчавања истог упоредника, због променљивости астрономских елемената, други но сада што је; споменути интегрални  $W_s$  и  $W_w$  па и дужине  $T_s$  и  $T_w$  биле су различите од садањих, једино је збир

$$T_s + T_w = T,$$

тј. дужина тропске године, био исти, јер су секуларне промене тропске дужине сасвим незнатне.

Да бисмо математичким језиком оцртали главне линије секуларног тока осунчавања, поступићемо овако. Расчланићемо тропску годину у две једнаке дуге, дакле стварне, полугодине, од којих једна обухвата све дане године у којима је осунчавање упоредника било јаче но у којем год било дану друге полугодине.

Овако јасно формулисан проблем решићемо математички у идућем параграфу, но већ сада можемо дати геометријску интерпретацију његовог решења.

Годишњи ток осунчавања упоредника, како је предочен кривом  $PFQHKSF'$ , ако се из њега искључе његове секуларне промене које тек у дугом низу година постају осетне, је периодична функција времена са периодом  $T$ . У умереним зонама и у тропској зони изнад географских ширина од  $16^\circ$  годишњи ток је предочен једноставном таласастом линијом која за време те периоде има само један максимум и један минимум. Ограничимо, за сада, наша расуђивања на тај велики део Земљине површине. Онда је јасно ово.

Одмеримо ли на картији дуж једнаку у одабраном мерилу половини тропске године, тј. једнаку  $\frac{T}{2}$ , па померамо ли је на слици 10 паралелно апсцисној оси све дотле док њене крајње тачке не додирну нацртану криву, рецимо у тачкама  $P$  и  $Q$ , онда ће, због тога што је таласна дужина нацртане криве једнака  $T$ , и продужење праве  $PQ$  до пресека  $S$  са кривом бити једнако  $\frac{T}{2}$ . Отсеци  $PQ$  и  $QS$  предочавају оба она два одељка године која задовољавају постављеном захтеву.

Та два одељка називају се калоричним полугодинама, она од њих која обухвата све даће јачег осунчавања и претставља тиме калорични максимум што га уочена географска ширина може да добије у току од пола године, зове се калорична летња полугодина, а она друга зове се калорична зимска полугодина. Свака од њих има, како год да се мењају астрономски елементи, сталну дужину од 182 дана, 14 сати и 54 минуте.

Израчунамо ли почетак и свршетак тих калоричних полугодина, и топлотне количине које им одговарају у садашњости и у уоченој години геолошке прошлости, можемо добивене резултате међусобно упоредити, јер се они односе на једнаке и непроменљиве временске интервале.

Применом појма калоричних годишњих доба добивамо сретство да тачно пратимо секуларни ток осунчавања Земље, а као што је често случај при решавању нових проблема, моћићемо, као што ћемо видети у другом одљеку ове књиге, да тим сретством одредимо и главни ефекат секуларног тока осунчавања Земље, секуларно померање границе вечног снега.

§ 20. Почети и свршети калоричних полугодина. — Означимо ли са  $t_1$  почетак калоричне летње полугодине, а са  $t_2$  њен свршетак, то је захтев да је та полугодина стварна полугодина изражен једначином

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2}. \quad (141)$$

Захтев да је осунчавање уоченог упоредника на почетку те полугодине једнак осунчавању, на њеном крају изражен је једначином

$$w(t_1) = w(t_2). \quad (142)$$

Ове две једначине су довољне за одређивање тренутака  $t_1$  и  $t_2$ . Оне нам казују још и ово.

Означимо ли са  $Q_s$  односно са  $Q_w$  ону топлотну количину осунчавања упућену уоченом упореднику за време калоричне летње односно за време калоричне зимске полугодине, то је

$$Q_s = \int_{t_1}^{t_2} w(t) dt \quad Q_w = \int_{t_2}^{t_1 + T} w(t) dt,$$

тј. због (141)

$$Q_s = \int_{t_1}^{t_1 + \frac{T}{2}} w(t) dt \quad Q_w = \int_{t_1 + \frac{T}{2}}^{t_1 + T} w(t) dt. \quad (143)$$

Изводи по  $t$ , ових израза дају

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_s}{dt_1} &= w\left(t_1 + \frac{T}{2}\right) - w(t_1), \\ \frac{dQ_w}{dt_1} &= w(t_1 + T) - w\left(t_1 + \frac{T}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

Како се секуларне промене функције  $w(t)$  у току једне године изванредно малене, то је

$$w(t_1 + T) = w(t_2). \quad (145)$$

Ставимо ли (141) и (145) у (144), то добивамо

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_s}{dt_1} &= w(t_2) - w(t_1), \\ \frac{dQ_w}{dt_1} &= w(t_1) - w(t_2), \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

тј. због (142)

$$\frac{dQ_s}{dt_1} = 0, \quad \frac{dQ_w}{dt_1} = 0. \quad (147)$$

Начинилимо ли извод од (146) по  $t_1$  и узмемо ли у обзир да је због (141), где је  $T$  константно

$$dt_1 = dt_2,$$

добивамо

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Q_s}{dt_1^2} &= \frac{d}{dt_2} w(t_2) - \frac{d}{dt_1} w(t_1), \\ \frac{d^2 Q_w}{dt_1^2} &= \frac{d}{dt_1} w(t_1) - \frac{d}{dt_2} w(t_2). \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Из слике слеђује да је у почетку  $t_1$  калоричне летње полугодине

$$\frac{d}{dt_1} w(t_1) > 0,$$

а у почетку  $t_2$  калоричне зимске полугодине

$$\frac{d}{dt_2} w(t_2) < 0.$$

Зато је

$$\frac{d^2 Q_s}{dt_1^2} < 0, \quad \frac{d^2 Q_w}{dt_1^2} > 0. \quad (149)$$

Једначине (147) и неједначине (149) казују ово.

Временске границе  $t_1$  и  $t_2$  калоричних годишњих доба су такве да топлотна количина  $Q_s$  летње полугодине достизава своју максималну, а топлотна количина  $Q_w$  зимске полугодине своју минималну вредност; њима је година у погледу топлотних количина које им одговарају подељена у две екстремне половине, па зато оне у пуној мери одговарају имену које смо им наденули.

Све то следује и из приложене слике.

При израчунавању почетака и свршетака калоричних полугодина увешћемо место времена  $t_1$  и  $t_2$  лонгитуде Сунца у тима тренуцима, јер је у једначинама којима смо претставили годишњи ток осунчавања упоредника тај елемент уведен као независна променљива.

Из једначина (86) и (121) следује

$$w = \frac{J_0}{\pi} [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda - b_1 \cos 2\lambda + b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + \dots). \quad (150)$$

Означимо ли, дакле, са  $\lambda_1$  лонгитуду Сунца у почетку калоричне летње полугодине, а са  $\lambda_2$  при њеном свршетку, онда је захтев (142) изражен једначином

$$w(\lambda_1) = w(\lambda_2), \quad (151)$$

тј. због (150) једначином

$$\begin{aligned} & [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda_1)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda_1 - \\ & - b_1 \cos 2\lambda_1 + b_2 \cos 4\lambda_1 - b_3 \cos 6\lambda_1 + \dots) = \\ & = [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda_2)] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda_2 - \\ & - b_1 \cos 2\lambda_2 + b_2 \cos 4\lambda_2 - b_3 \cos 6\lambda_2 + \dots). \end{aligned} \quad (152)$$

Да бисмо захтев (142) изразили помоћу лонгитуда  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  Сунца, заља имати у виду ово. Рекли смо већ да је ексцентрицитет  $e$  Земљине путање увек толико мален да се његов квадрат може занемарити попоред јединице. Зато можемо једначину (90) замети овом

$$dt = \frac{T}{2\pi} \varrho^2 d\lambda. \quad (153)$$

Исто тако можемо, имајући у виду (121), једначину (85) заменити једначином

$$\varrho = \frac{1}{1 - e \cos(\Pi_\gamma - \lambda)}$$

Из истих разлога је

$$\varrho^2 = 1 + 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda). \quad (154)$$

Стављајући ово у (153), добивамо

$$dt = \frac{T}{2\pi} [1 + 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda)] d\lambda.$$

Време које протече док Сунце превази интервал од  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  треба, према (141), да буде једнако  $\frac{T}{2}$ . Зато је

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dt = \frac{T}{2\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [1 + 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda)] d\lambda = \frac{T}{2}.$$

Извршило ли ову интеграцију, добивамо

$$\lambda_2 - \lambda_1 - 2e \sin(\Pi_\gamma - \lambda_2) + 2e \sin(\Pi_\gamma - \lambda_1) = \pi. \quad (155)$$

Из једначина (152) и (155) могу се израчунати лонгитуде  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

**§ 21. Топлотне количине упућене упореднику за време калоричних полугодина.** — Да бисмо израчунали топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$  упућене уоченом упореднику за време калоричних полугодина, спроведимо у претходним једначинама ову супституцију

$$\lambda_1 = \lambda', \quad \lambda_2 = \pi - \lambda'. \quad (156)$$

Онда је

$$\lambda'' = \lambda_1, \quad \lambda'' = \pi - \lambda_2. \quad (157)$$

Варијабилна  $\lambda'$  претставља нам, дакле, лучно отстојање Сунца у почетку калоричне летње полугодине, мерено од пролетње равнодневице у правцу лонгитуда, тј. у смислу годишњег кретања Сунца, а варијабилна  $\lambda''$  лучно отстојање Сунца у почетку зимске калоричне полугодине, мерено од јесење равнодневице у смислу противном годишњем кретању Сунца.

Израчунате помоћу варијабилних  $\lambda'$  и  $\lambda''$ , топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$  упућене упореднику за време калоричне летње односно за време калоричне зимске полугодине дате су овим обрасцима

$$Q_s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda'}^{\pi - \lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda, \quad (158)$$

$$Q_w = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1 + 2\pi} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda = \int_{\pi - \lambda''}^{2\pi + \lambda'} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda, \quad (159)$$

док једначине (152) и (155) добивају овај облик

$$\begin{aligned} & [1 - 2e \cos(\Pi_\gamma - \lambda')] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda' - \\ & - b_1 \cos 2\lambda' + b_2 \cos 4\lambda' - b_3 \cos 6\lambda' + \dots) = \\ & = [1 + 2e \cos(\Pi_\gamma + \lambda'')] (b_0 + \frac{\pi}{2} \sin \varphi \sin \epsilon \sin \lambda'' - \\ & - b_1 \cos 2\lambda'' + b_2 \cos 4\lambda'' - b_3 \cos 6\lambda'' + \dots), \end{aligned} \quad (160)$$

$$\lambda' + \lambda'' = 2e [\sin(\Pi_\gamma - \lambda') + \sin(\Pi_\gamma + \lambda'')]. \quad (161)$$

Са  $e = 0$  дала би једначина (161)  $\lambda' = \lambda''$ , а једначина (161)  $\lambda' + \lambda'' = 0$ . Зато је

$$\lim_{e=0} \lambda' = 0 \quad \lim_{e=0} \lambda'' = 0. \quad (162)$$

Како  $\lambda'$  и  $\lambda''$  претстављају лучна отстојања у почетку калоричне летње односно зимске полугодине од пролетње односно јесење равнодневице, видимо да би за  $e = 0$  почетак тих полугодина пао у пролетњу односно у зимску равнодневицу.

Ексцентрицитет  $e$  Земљине путање различит је од нуле, али увек већма мален и зато су и лукови  $\lambda'$  и  $\lambda''$  увек малени.

Како је

$$(\pi - \lambda'') - \lambda' = (\pi - 0) - (\lambda' - 0) - [\pi - (\pi - \lambda'')],$$

а

$$(2\pi + \lambda') - (\pi - \lambda'') = (2\pi - \pi) + (\lambda' - 0) + [\pi - (\pi - \lambda'')].$$

можемо интеграле (158) и (159) заменити овима

$$Q_s = \int_0^\pi w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda - \int_0^{\lambda'} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda - \int_{\pi - \lambda''}^\pi w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda, \quad (163)$$

$$Q_w = \int_\pi^{2\pi} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda + \int_0^{\lambda'} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda + \int_{\pi - \lambda''}^\pi w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda. \quad (164)$$

Интеграли који се појављују у предњим обрасцима истоветни су интегралу (89), па се зато можемо користити резултатима § 12 и § 13. При томе ваља имати ово у виду. Како су, као што смо рекли,  $\lambda'$  и  $\lambda''$  малени лукови од којих први почиње код пролетње равнодневице, а други свршава код јесење равнодневице, то је за сво време прелаза Сунца преко тих лукова његова деклинација  $\delta$  малена. Зато ти лукови, са изузетком географских ширина у близини полова, на које нећемо, за сада, раширити наша испитивања, припадају интервалима дневног излаза и залаза Сунца. Због тога ваља при израчунавању интеграла који се протежу преко тих лукова применити образац (93). Зато добивамо

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda'} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda &= \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda' + \frac{\pi}{2} \sin \epsilon \sin \varphi - \frac{\pi}{2} \sin \epsilon \sin \varphi \cos \lambda' - \right. \\ & \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda' + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda' - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda' + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (165)$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi - \lambda''}^\pi w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda &= \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 \lambda'' + \frac{\pi}{2} \sin \epsilon \sin \varphi - \frac{\pi}{2} \sin \epsilon \sin \varphi \cos \lambda'' - \right. \\ & \left. - \frac{b_1}{2} \sin 2\lambda'' + \frac{b_2}{4} \sin 4\lambda'' - \frac{b_3}{6} \sin 6\lambda'' + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (166)$$

Интеграл који се протеже преко интервала од 0 до  $\pi$  претставља нам топлотну количину осунчавања уоченог упоредника за време астрономске летње полугодине коју смо количину означили са  $W_s$ , а интеграл који се протеже преко интервала од  $\pi$  до  $2\pi$  претставља нам топлотну количину осунчавања уоченог упоредника за време астрономске зимске полугодине, коју смо означили са  $W_w$ . Зато је

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\pi} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda &= W_s, \\ \int_{\pi}^{2\pi} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda &= W_w. \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

Стављајући (165), (166), (167) у (163) и (164) добивамо

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= W_s - K, \\ Q_w &= W_w + K, \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

где нам  $K$  претставља збир интеграла (165) и (166), тј.

$$\begin{aligned} K &= \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ b_0 (\lambda' + \lambda'') + \pi \sin \epsilon \sin \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} \sin \epsilon \sin \varphi (\cos \lambda' + \cos \lambda'') - \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda' + \sin 2\lambda'') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda' + \sin 4\lambda'') - \frac{b_3}{6} (\sin 6\lambda' + \sin 6\lambda'') + \dots \right\}. \quad (169) \end{aligned}$$

§ 22. Израчунавање топлотних количина упућених упореднику за време калоричних полугодина. — У другом одељку ове књиге указаће се потреба да израчунамо топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$ , за 173 разне године геолошке прошлости и за 16 разних географских ширина, дакле њих свега 2768. Тај посао био би врло приметан кад би се при њему служили претходним тачним обрасцима у којима смо учинили само то упрошћење што смо занемарили квадрат ексцентритета Земљине путање као сабирка јединице, што практично не умањује тачност претходних једначина. Но за њихову практичну примену могу се претходне једначине даље упростити, а да оне при томе даду још увек ону тачност коју захтевамо од наших рачуна.

Видели смо да су луци  $\lambda'$  и  $\lambda''$  малени, а из таблице 1 следује још да и нумеричке вредности коефицијента  $b_0, b_1, b_2, \dots$  опадају врло нагло. Зато се у претходној једначини синуси тих лукова могу заменити њима самима, а косинуси јединицом. У наредним члановима који имају нагло опадајуће коефицијенте може се то исто учинити и код многоструких тих лукова. На тај начин добивамо место (169) овај образац

$$K = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{J_0}{\sqrt{1-e^2}} (b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots) (\lambda' + \lambda''). \quad (170)$$

Како је, према једначини (72),

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots = \cos \varphi,$$

добивамо

$$K = \frac{T J_0 \cos \varphi}{2\pi^2 \sqrt{1-e^2}} (\lambda' + \lambda''). \quad (171)$$

Као што се из ове једначине види, долази при израчунавању топлотних количина  $Q_s$  и  $Q_w$  у обзир само збир лукова  $\lambda'$  и  $\lambda''$ . Тај збир дат је обрасцем (161) који можемо написати и у овом облику

$$\lambda' + \lambda'' = 2e [\cos \lambda' + \cos \lambda''] \sin \Pi_\gamma - (\sin \lambda' - \sin \lambda'') \cos \Pi_\gamma. \quad (172)$$

Заменимо ли и овде синус лукова  $\lambda'$  и  $\lambda''$  самим луковима, а њихов косинус јединицом, добивамо

$$\lambda' + \lambda'' = 2e [2 \sin \Pi_\gamma - (\lambda' - \lambda'') \cos \Pi_\gamma]. \quad (173)$$

Напоменули смо већ да су при испитивању секуларног тока осунчавања Земље најважнији они моменти геолошке прошлости када је  $\Pi_\gamma = 90^\circ$  и када је  $\Pi_\gamma = 270^\circ$ . У та оба случаја је  $\cos \Pi_\gamma = 0$  па је зато

$$\lambda' + \lambda'' = \pm 4e.$$

За остала доба геолошке прошлости у којима осунчавање не достизава своје напоменуте екстремне вредности, можемо у обрасцу (173) занемарити забирак  $2e(\lambda' - \lambda'') \cos \Pi_\gamma$ , јер су у њему и ексцентритет  $e$  и разлика лукова  $(\lambda' - \lambda'')$  малени, па добивамо

$$\lambda' + \lambda'' = 4e \sin \Pi_\gamma. \quad (174)$$

Овај образац прелази за  $\sin \Pi_\gamma = 90^\circ, 270^\circ$  у претходни, па се зато можемо њиме служити у свима случајевима.

Ставимо ли (174) у (171), добивамо

$$K = \frac{2 T J_0 \cos \varphi}{\pi^2 \sqrt{1-e^2}} e \sin \Pi_\gamma. \quad (175)$$

И овде можемо занемарити  $e^2$  поред јединице, па добивамо коначно

$$K = \frac{2 T J_0 \cos \varphi}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma. \quad (176)$$

Овај образац може се извести и на овај начин.

Означимо са  $\Delta t_1$  онај временски интервал за који почетак калоричне летње полугодине стиже иза пролетње равнодневице, а са  $\Delta t_2$  временски интервал за који свршетак те калоричне полугодине стиже пре почетка јесење равнодневице. Како калорична летња, а и зимска, полугодина има сталну дужину  $1/2 T$ , то је

$$\Delta t_1 + \frac{1}{2} T + \Delta t_2 = T_s, \quad (177)$$

тј.

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = T_s - \frac{1}{2} T.$$

Из обрасца (139) следује

$$T_s - \frac{1}{2} T = \frac{2e}{\pi} T \sin P_\gamma.$$

Зато је

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2e}{\pi} T \sin P_\gamma. \quad (178)$$

Топлотне количине упућене уоченом упореднику за време интервала  $(\Delta t_1 + \Delta t_2)$  претстављају нам топлотну количину  $K$  за коју је, према (168), топлотна количина  $W_s$  астрономске летње полугодине већа од топлотне количине  $Q_s$  калоричне летње полугодине. Ради се сада о томе да израчунамо ту топлотну количину  $K$ . При томе ваља имати у виду.

Временски интервали  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  су кратки; они почињу или свршавају са тренуцима равнодневица. Означимо ли са  $w_1$  средње осунчавање уоченог упоредника у доба пролетње, а са  $w_2$  такво осунчавање у доба јесење равнодневице, свако од њих обрачунато по јединици времена, то можемо ставити

$$K = w_1 \Delta t_1 + w_2 \Delta t_2. \quad (179)$$

Осунчавања  $w_1$  и  $w_2$  у доба равнодневица добивамо ако у (150) ставимо  $\lambda = 0$  односно  $\lambda = 180^\circ$  па затим применимо образац (72), но можемо их израчунавати и на овај начин.

Из једначина (40), (41) и (45) следује да је

$$w_1 = \frac{1}{\varrho_1^2} \cdot \frac{J_0}{\pi} \cos \varphi \quad w_2 = \frac{1}{\varrho_2^2} \cdot \frac{J_0}{\pi} \cos \varphi,$$

где  $\varrho_1$  одговара лонгитуди Сунца  $\lambda = 0$ , а  $\varrho_2$  лонгитуди  $\lambda = 180^\circ$ .

Из једначина (85) и (121) следује ако, као што смо уговорили,  $e^2$  занемаримо поред јединице,

$$\frac{1}{\varrho} = 1 - e \cos (P_\gamma - \lambda) \quad \frac{1}{\varrho^2} = 1 - 2e \cos (P_\gamma - \lambda).$$

Зато је

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{J_0}{\pi} (1 - 2e \cos P_\gamma) \cos \varphi, \\ w_2 &= \frac{J_0}{\pi} (1 - 2e \cos P_\gamma) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

Из једначина (179) и (180) следује

$$K = \frac{J_0 \cos \varphi}{\pi} [(1 - 2e \cos P_\gamma) \Delta t_1 + (1 + 2e \cos P_\gamma) \Delta t_2]. \quad (181)$$

Рекли смо већ да се овај образац не би смео употребити за упореднике у близини полова, пошто би онда интервали  $\Delta t_1$  и  $\Delta t_2$  могли пасти у лугу ноћ.

Када је  $P_\gamma = 90^\circ$  или када је  $P_\gamma = 270^\circ$ , онда је

$$K = \frac{J_0 \cos \varphi}{\pi} (\Delta t_1 + \Delta t_2).$$

Ставимо ли овамо (178), добивамо

$$K = \frac{2T J_0 \cos \varphi}{\pi^2} e \sin P_\gamma, \quad (182)$$

дакле образац истоветан обрасцу (176).

И када је  $P_\gamma$  различито од  $90^\circ$  или  $270^\circ$ , можемо применити предњи образац, јер се у (181) члан  $2e \cos P_\gamma$  може занемарити поред јединице због малог  $e$ .

Овај други начин извођења предњег обрасца показао је јасно зашто се у њему појављује  $\cos \varphi$ . Та тригонометријска функција оличава распоред осунчавања Земље у доба равнодневица.

Ставимо ли

$$\frac{2T J_0}{\pi^2} = k, \quad (183)$$

где  $k$  означава једну константу, исту за све упореднике, добивамо

$$K = k e \cos \varphi \sin P_\gamma. \quad (184)$$

Ставимо ли ово у (168) добивамо

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= W_s - k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma, \\ Q_w &= W_w + k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Ови обрасци важе за северну хемисферу Земљину. За јужну хемисферу, на којој се летња полугодина поклапа са зимском полугодом северне хемисфере, а зимска са летњом, важе ови обрасци

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_s &= W_s + k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma, \\ \bar{Q}_w &= W_w - k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Предњим обрасцима могу се, у вези са обрасцима (110), (111) и (112) израчунати топлотне количине упућене уоченом упореднику са време калоричних полугодина.

**§ 23. Математичко предочавање секуларног тока осунчавања Земљиних упоредника.** — Калоричним годишњим добима и топлотним количинама које им одговарају добили смо сретство да математичким језиком опишемо главне црте осунчавања Земље у прошлости и будућности. У тим топлотним количинама долазе до тачног изражаја главне линије осунчавања Земље, опрека између лета и зиме. Њима ћемо моћи извести и испитати и главне климатске последице секуларног тока осунчавања Земље.

То испитивање ослања се на секуларне промене астрономских елемената  $\varepsilon, e, \Pi_\gamma$  које се добивају астрономским рачуном. При томе рачуну одабире се један одређени тренутак садашњости за почетак временске скале. Означимо га са  $t_0$ . Томе тренутку нека одговарају нумеричке вредности  $\varepsilon_0, e_0, \Pi_\gamma^0$  астрономских елемената  $\varepsilon, e, \Pi_\gamma$ . Са тим нумеричким вредностима израчунате топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  означимо са  $W_s^0$  и  $W_w^0$ . Онда иницијалном моменту  $t_0$  одговарају ове топлотне количине осунчавања уоченог упоредника за време калоричних полугодина

$$\left. \begin{aligned} Q_s^0 &= W_s^0 - k e_0 \cos \varphi \sin \Pi_\gamma^0, \\ Q_w^0 &= W_w^0 + k e_0 \cos \varphi \sin \Pi_\gamma^0. \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

Астрономске елементе који одговарају произвољном моменту  $t$  геолошке прошлости означимо са  $\varepsilon, e, \Pi_\gamma$ , а набројане топлотне количине означимо са  $W_s, W_w, Q_s, Q_w$ . Оне се изражавају на овај начин. Нека нам

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad (188)$$

претставља разлику нагиба еклиптике уоченог доба  $t$  и садашњости. Њу ваља мерити лучним степенима. Онда је, према једначинама (138)

$$\left. \begin{aligned} W_s &= W_s^0 + \Delta W_s \Delta \varepsilon, \\ W_w &= W_w^0 + \Delta W_w \Delta \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

где  $\Delta W_s$  и  $\Delta W_w$  означавају промене количина  $W_s$  и  $W_w$  при прираштају нагиба еклиптике од једног степена. Нумеричке вредности тих промена израчунате по поступку саопштеном у § 17, налазе се табеларно претстављене у другом одељку ове књиге.

Количине  $Q_s$  и  $Q_w$  претстављене су, према (185) и (189) овим обрасцима

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= W_s^0 + \Delta W_s \Delta \varepsilon - k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma, \\ Q_w &= W_w^0 + \Delta W_w \Delta \varepsilon + k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

Разлике

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= Q_s - Q_s^0 \\ \Delta Q_w &= Q_w - Q_w^0 \end{aligned} \right\}$$

предочавају нам секуларне промене топлотних количина упућених уоченом упореднику за време калоричних полугодина. Оне су према претходним једначинама дате обрасцима

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= \Delta W_s \Delta \varepsilon - k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma + k e_0 \cos \varphi \sin \Pi_\gamma^0 \\ \Delta Q_w &= \Delta W_w \Delta \varepsilon + k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma + k e_0 \cos \varphi \sin \Pi_\gamma^0. \end{aligned} \right\} \quad (191)$$

Уведимо означење

$$e \sin \Pi_\gamma - e_0 \sin \Pi_\gamma^0 = \Delta (e \sin \Pi_\gamma), \quad (192)$$

то претходни обрасци добивају овај облик

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= \Delta W_s \Delta \varepsilon - k \cos \varphi \cdot \Delta (e \sin \Pi_\gamma), \\ \Delta Q_w &= \Delta W_w \Delta \varepsilon + k \cos \varphi \cdot \Delta (e \sin \Pi_\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

Ови обрасци важе за северну хемисферу Земљину; за јужну важе ови

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{Q}_s &= \Delta W_s \Delta \varepsilon + k \cos \varphi \cdot \Delta (e \sin \Pi_\gamma), \\ \Delta \bar{Q}_w &= \Delta W_w \Delta \varepsilon - k \cos \varphi \cdot \Delta (e \sin \Pi_\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

Овим обрасцима у којима долазе до изражаја секуларне промене свих трију астрономских елемената израчунаћемо у другом одељку ове књиге секуларни ток осунчавања Земље.



§ 24. **Калорични екватор.** — Она географска ширина на којој су топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$  једна другој једнаке зове се калоричним екватором, јер су обе полугодине калорично еквивалентне. Положај тог калоричног екватора одређује се на овај начин.

Према његовој дефиницији, калорични екватор лежи на оној географској ширини на којој је

$$Q_s = Q_w. \quad (195)$$

Применом једначина (185) добивамо

$$W_s - W_w = 2 k e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma, \quad (196)$$

тј. због (183)

$$W_s - W_w = \frac{4 T J_0}{\pi^2} e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma. \quad (197)$$

Једначина (110) даје, ако у њој занемаримо  $e^2$  поред јединице,

$$W_s - W_w = \frac{T J_0}{\pi} \sin \varphi \sin \varepsilon. \quad (198)$$

Из предњих једначина следује

$$\pi \sin \varphi \sin \varepsilon = 4 e \cos \varphi \sin \Pi_\gamma,$$

тј.

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{4 e}{\pi} \cdot \frac{\sin \Pi_\gamma}{\sin \varepsilon}. \quad (199)$$

Овим обрасцем одређен је једнозначно положај калоричног екватора. Због малог  $e$  у предњем обрасцу, он се налази увек недалеко географског екватора. Данас он лежи на трећем степену северне географске ширине. Како је ту  $Q_s = Q_w$ , а северно од њега  $Q_s > Q_w$ , док је јужно од њега  $Q_s < Q_w$ , то на географским ширинама од  $0^\circ$  па до  $3^\circ$  настаје инверзија годишњих доба, летња полугодина тих географских ширина пада у доба зимске полугодине северне хемисфере. Те географске ширине припадају калорично јужној хемисфери.

О тој појави биће још говора у другом одељку ове књиге. Онда ћемо видети да ја за време геолошке прошлости калорични екватор мењао свој положај. Предњи образац даје нам сретство да, са израчунатим нумеричким вредностима астрономских елемената, одредимо за свако уочено доба геолошке прошлости географску ширину калоричног екватора.

§ 25. **Математичко предочавање секуларног тока осунчавања појединих зона Земљине површине.** — У другом одељку ове књиге указаће се потреба да испитамо не само секуларни ток осунча-

вања појединих упоредника, већ и такав ток осунчавања појединих делова Земљине површине ограничених двама произвољним упоредницима. То се врши на следећи начин.

Уочена зона Земљине површине нека лежи између упоредника географске ширине  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Прстенасти део Земљине површине ограничен упоредницима  $\varphi$  и  $(\varphi + d\varphi)$  има површину

$$dF = 2 \pi R^2 \cos \varphi d\varphi, \quad (200)$$

при чему  $R$  означава радиус Земљине лопте.

На тај елеменат падају у епохи  $t$  геолошке прошлости за време калоричне летње односно за време калоричне зимске полугодине ове топлотне количине

$$dQ_s = Q_s dF \quad dQ_w = Q_w dF. \quad (201)$$

Узевши у обзир једначине (185) и (183), добивамо

$$\left. \begin{aligned} dQ_s &= 2 \pi R^2 \left\{ W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{2 T J_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \cos^2 \varphi d\varphi \right\}, \\ dQ_w &= 2 \pi R^2 \left\{ W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{2 T J_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \cos^2 \varphi d\varphi \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Зона Земљине површине ограничена упоредницима  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  добива за време калоричних полугодина ове топлотне количине

$$\left. \begin{aligned} G_s &= 2 \pi R^2 \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{2 T J_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \right\}, \\ G_w &= 2 \pi R^2 \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{2 T J_0}{\pi^2} e \sin \Pi_\gamma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Јединици површине ове зоне бивају за време калоричних полугодина улућиване ове топлотне количине

$$Q_s = \frac{G_s}{F} \quad Q_w = \frac{G_w}{F}, \quad (204)$$

при чему  $F$  означава целокупну површину те зоне. Та површина дата је овим обрасцем

$$F = 2 \pi R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = 2 \pi R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (205)$$

Узме ли се у обзир да је

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1),$$

онда следеће из претходних једначина

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} [\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e \sin \Pi_\gamma \right\}, \\ Q_w &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} [\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e \sin \Pi_\gamma \right\}. \end{aligned} \right\} (206)$$

Садашњости одговарају ове топлотне количине

$$\left. \begin{aligned} Q_s^0 &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_s^0 \cos \varphi d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} [\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e_0 \sin \Pi_\gamma^0 \right\}, \\ Q_w^0 &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} W_w^0 \cos \varphi d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} [\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] e_0 \sin \Pi_\gamma^0 \right\}. \end{aligned} \right\} (207)$$

Како је, према једначинама (138)

$$\left. \begin{aligned} W_s &= W_s^0 + \Delta W_s \Delta \varepsilon, \\ W_w &= W_w^0 + \Delta W_w \Delta \varepsilon, \end{aligned} \right\} (208)$$

то су секуларне промене

$$\Delta Q_s = Q_s - Q_s^0 \quad \Delta Q_w = Q_w - Q_w^0$$

топлотних количина  $Q_s$  и  $Q_w$  предочене следећим изразима

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \Delta \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi d\varphi - \frac{TJ_0}{\pi^2} [\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \right\}, \\ \Delta Q_w &= \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \left\{ \Delta \varepsilon \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi d\varphi + \frac{TJ_0}{\pi^2} [\varphi_2 - \varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1)] \Delta (e \sin \Pi_\gamma) \right\}. \end{aligned} \right\} (209)$$

Топлотна количина упућена за време целе године, тј.

$$Q_T = Q_s + Q_w = W_T$$

подлежи, пошто је

$$\Delta Q_T = \Delta Q_s + \Delta Q_w = \Delta W_T,$$

само овој секуларној промени

$$\Delta Q_T = \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_T \cos \varphi d\varphi. \quad (210)$$

Одређени интеграл који се појављују у претходним обрасцима, тј.

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi d\varphi \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi d\varphi \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_T \cos \varphi d\varphi$$

могу се уз припомоћ таблице VI саопштене у другом одељку ове књиге израчунати механичком квадратуром. Када се то учини и стави

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_s \cos \varphi d\varphi &= \Delta H_s, \\ \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta W_w \cos \varphi d\varphi &= \Delta H_w, \\ \frac{1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} \cdot \frac{TJ_0}{\pi^2} \left[ (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] &= M, \end{aligned} \right\} (211)$$

где су  $\Delta H_s$ ,  $\Delta H_w$  и  $M$  константе једнозначно одређене границама  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уочене зоне Земљине површине, онда се добивају ови обрасци

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= \Delta H_s \Delta \varepsilon - M \Delta (e \sin P_\gamma), \\ \Delta Q_w &= \Delta H_w \Delta \varepsilon + M \Delta (e \sin P_\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

Ови обрасци важе за северну хемисферу; за зоне јужне хемисфере ваља их заменити овим обрасцима

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{Q}_s &= \Delta H_s \Delta \varepsilon + M \Delta (e \sin P_\gamma), \\ \Delta \bar{Q}_w &= \Delta H_w \Delta \varepsilon - M \Delta (e \sin P_\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

Ставе ли се у претходне обрасце нумеричке вредности секуларних промена  $\Delta \varepsilon$  и  $\Delta (e \sin P_\gamma)$  астрономских елемената добивају се секуларне промене топлотних количина  $Q_s$  и  $Q_w$  које су се десиле за време геолошке прошлости.

**§ 26. Секуларне промене Земљиних снежних поларних калота и њихове последице.** — Секуларне промене осунчавања Земље имале су, као што ћемо видети, за последицу да су се висинске и географске границе вечног снега померале. У временима када су летње топлотне количине  $Q_s$  бивале све мање, спуштала се граница вечног снега са планина у долине, а снежна поларна калота постајала је све шира. Како снежни покривач Земљин има велику рефлексиону способност, враћао је он знатну количину топлотних зракова Сунца у интерпланетарни простор, па је та количина остала неупотребљена у термичком гасињу наше Земље. Ту појаву ћемо сада испитати и извести обрасце који ће нам омогућити да у другом одељку ове књиге дођемо до нумеричких резултата о термичким ефектима проучаване појаве.

Уочимо северну или јужну поларну калоту Земљине површине ограничену упоредником једне одређене географске ширине, рецимо  $\varphi_0$  одабране тако да ограничава један део Земљине површине који је данас у већем делу зимске полугодине покривен снегом. Летњи снежни покривач те калоте нека сиже данас до географске ширине  $\varphi_1$  и ограничава данашњу снежну калоту Земљину. Та снежна калота имала је у добу  $t$  геолошке прошлости друго пространство па нека је онда сизала до географске ширине  $\varphi$ . То померање границе вечног снега било је, као што ћемо видети, изазвано секуларним променама  $\Delta Q_s$  летње топлотне количине  $Q_s$ . Када је та секуларна промена била позитивна, тј. летње осунчавање веће него сада што је, онда је граница  $\varphi$  снежне калоте била ближа полу. Означимо ли са  $\Delta_1 Q_s$  секуларну промену  $\Delta Q_s$  летњег осунчавање уочене калоте, како је даје образац (212) то између садашње границе  $\varphi_1$  летњег снежног покри-

вача и његове границе  $\varphi$  у доба  $t$  геолошке прошлости постоји у довољној апроксимацији ова релација

$$\varphi = \varphi_1 + \mu \Delta_1 Q_s, \quad (214)$$

где  $\mu$  означава један фактор пропорционалитета. Њега ћемо моћи да одредимо довољном тачношћу из трагова некадањих граница вечног снега.

Предњим обрасцем дате су секуларне промене северне снежне поларне калоте Земљине. Њихове последице биле су ове.

Означимо са  $F_0$  површину уочене калоте Земљине, ограничене упоредником  $\varphi_0$ , означимо са  $F_1$  површину садање поларне снежне калоте Земљине која, као што смо рекли, сиже до упоредника  $\varphi_1$ , и означимо са  $F$  површину те снежне калоте у добу  $t$  геолошке прошлости када је она сизала до упоредника  $\varphi$ . Служећи се обрасцем (205) и остављајући у њ  $\varphi_2 = 90^\circ$ , а за  $\varphi_1$  једно за другим  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , добивамо

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= 2 \pi r^2 (1 - \sin \varphi_0), \\ F_1 &= 2 \pi r^2 (1 - \sin \varphi_1), \\ F &= 2 \pi r^2 (1 - \sin \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

где смо радиус Земљине кугле означили са  $r$ .

Означимо са  $R$  рефлексиону способност јединице површине снежног покривача Земљиног, а са  $R_0$  рефлексиону способност јединице површине Земљине непокривене снегом, онда је апсорпциона способност тих двеју врста површине Земље

$$a = 1 - R \quad a_0 = 1 - R_0.$$

Апсорпциона способност уочене калоте Земљине у њеном садањем стању дата је обрасцем

$$A_0 = F_1 \cdot a + (F_0 - F_1) a_0.$$

Та апсорпциона способност у добу  $t$  геолошке прошлости била је

$$A = F \cdot a + (F_0 - F) a_0.$$

У добу  $t$  геолошке прошлости била је, дакле, та апсорпциона способност за

$$A - A_0 = (F - F_1) (a - a_0) \quad (216)$$

већа од садашње. тј, прерачунао на јединицу површине уочене калоте  $F_0$  већа за

$$\Delta a = (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0}. \quad (217)$$

У добу  $t$  геолошке прошлости апсорбовала је јединица површине калоте ограничене упоредником  $\varphi_0$  више но сада овај део оне летње топлотне количине која је, прошавши кроз атмосферу, стигла до Земљине површине. Означимо ту топлотну количину са  $Q_s'$  то је секуларна промена летњег осунчавања изазвана променом рефлексивне способности Земљине површине, коју ћемо означити са  $\Delta_2 Q_s'$ , једнака

$$\Delta_2 Q_s = \Delta a Q_s'. \quad (218)$$

Топлотна количина  $Q_s'$  која за време калоричне летње полугодине стиже кроз атмосферу до Земљине површине није једнака топлотној количини  $Q_s$  која за то време стиже на горњу границу атмосфере, јер Сунчеви зраци, пролазећи кроз атмосферу, бивају слабљени на двојаки начин, рефлексивом и апсорпцијом. Означимо са  $R_1$  рефлексивну способност Земљине атмосфере, то би, кад не би било оног другог чиниоца у слабљењу Сунчевих зрака при пролазу кроз атмосферу, од топлотне количине  $Q_s$  само део  $(1 - R_1) Q_s$  стигао до површине Земље. Због апсорпције Сунчевих зрака у атмосфери мора се тај део још помножити фактором  $\varkappa$  који је мањи од јединице, а који се назива трансмисионим коефицијентом атмосфере за количину  $Q_s$ . Зато је

$$Q_s' = (1 - R_1) \varkappa Q_s. \quad (219)$$

Ставимо ли ово у (218), добивамо

$$\Delta_2 Q_s = \Delta a \cdot \varkappa (1 - R_1) Q_s, \quad (220)$$

тј. због (217)

$$\Delta_2 Q_s = \varkappa (1 - R_1) (a - a_0) \frac{F - F_1}{F_0} Q_s. \quad (221)$$

Ставимо ли овамо изразе (215) и (214), добивамо

$$\Delta_2 Q_s = \varkappa (1 - R_1) (a - a_0) \frac{\sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \mu \Delta_1 Q_s)}{1 - \sin \varphi_0} Q_s. \quad (222)$$

Означимо ли садање летње осунчавање уочене Земљине калоте ограничене упоредником  $\varphi_0$  са  $Q_s^0$ , то је

$$Q_s = Q_s^0 + \Delta_1 Q_s. \quad (223)$$

Показаћемо у другом одељку ове књиге на конкретним примерима како се помоћу предњих образаца израчунавају и термичке последице наведених секуларних промена рефлексивне способности Земље и њене атмосфере.

## ДРУГИ ОДЕЉАК

# ПРИМЕНА

## ГЛАВА СЕДМА

### НУМЕРИЧКИ ПОДАЦИ О САДАШЊЕМ СТАЊУ ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ

§ 27. Нумерички подаци о осунчавању Земљиних упоредника у току године. — Пре но што приступимо испитивању климатских промена у току векова, потребно је да се подробније упознамо са садашњим стањем осунчавања Земље. Тим питањем бавили су се, не узимајући при томе утицај атмосфере, Халеј (1693), Ламберт (1779), и Мич (1856), али га је тек Винер (1877) потпуније решио и дао подробније нумеричке податке о осунчавању Земљиних упоредника у току године. При својем израчунавању топлотних дневних количина упућених појединим географским ширинама у току појединих дана године служио се обрасцима (38) и (39), какви су саопштени у првом одељку ове књиге, а узимајући нумеричке податке за отстојање  $\delta$  Сунца од Земље и за његову деклинацију  $\delta$  из енглеског „Наутичког Алманаха“ за годину 1874 и 1875. Како у оно доба нумеричка вредност соларне константе није била позната, узео ју је Винер за јединицу топлотне количине. Резултати његова рачуна имају зато тај недостатак што важе потпуно строго само за напоменуте године, а и тај што нам не дају дневне топлотне количине у њиховим стварним јединицама, калоријама. Ти недостаци губе своју тежину кад се узме у обзир да су се астрономски елементи који одређују осунчавање Земље од Винеровог доба па до данас само незнатно променили, тако да његови бројеви важе са довољном тачношћу и за садашњост. Сем тога, када познајемо нумеричку вредност соларне константе, не постоји никаква тешкоћа да Винерове податке прерачунамо у калорије. То је учињено приложеном таблицом III, при чему је за соларну константу стављено 2 грамакалорије по квадратном сантиметру и минути. У тој таблици саопштене су дневне количине у грамакалоријама за 17 дана у години, удаљених један од другог за интервал од  $22^{\circ} 30'$  лонгитуде Сунца за сваки десети степен географске ширине.

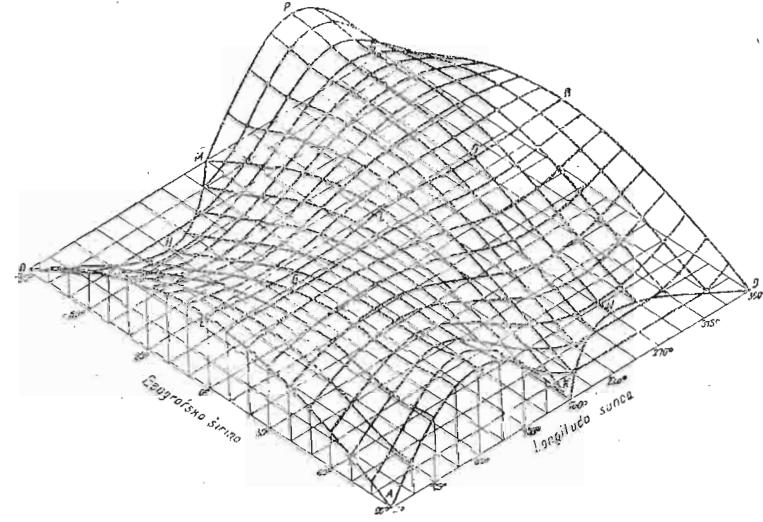
Дневне топлотне количине осунчавања у грам-калоријама по  $\text{cm}^2$ .  $J_0 = 2$  грам-калорије по  $\text{cm}^2$  и минути

Лонгитуда Сунца	0°	22°30'	45°	67°30'	90°	112°30'	135°	157°30'	180°	202°30'	225°	247°30'	270°	292°30'	315°	337°30'	360°
+90°		436	796	1030	1110	1025	789	431									
+80°	160	436	781	1014	1093	1010	777	431	158	7					25	135	316
+70°	316	541	772	958	1043	963	765	535	312	133	25				151	285	461
+60°	461	655	834	963	1009	958	826	618	456	281	150	74			298	432	593
+50°	593	755	891	988	1070	983	866	747	586	427	295	210			447	570	707
+40°	707	832	938	1002	1022	997	929	823	698	562	442	359			586	691	799
+30°	799	892	958	997	1075	990	949	882	789	683	581	507			712	793	867
+20°	867	922	952	964	964	959	944	911	857	783	706	646			820	871	909
+10°	909	925	921	908	900	904	913	914	898	861	813	771			924	924	923
0	923	900	863	829	814	825	856	890	912	913	897	877			965	949	909
-10°	909	849	783	729	708	726	776	839	898	938	956	960			998	946	867
-20°	867	773	680	611	585	608	674	764	857	935	989	1019			1030	915	799
-30°	799	674	560	479	450	477	555	666	789	904	994	1052			1073	1003	915
-40°	707	555	426	339	306	338	422	549	698	844	973	1059			1092	1064	982
-50°	593	421	285	199	170	198	282	417	586	766	929	1015			1089	1050	937
-60°	461	277	144	70	48	70	143	274	456	664	866	1018			1078	1023	873
-70°	316	131	24				24	130	312	548	802	1024			1114	1029	809
-80°	160	7						7	158	442	814	1073			1167	1078	821
-90°									442	826	1089	1185			1095	834	447
Дан	21 март	13 април	6 мај	29 мај	22 јуни	15 јули	8 август	31 август	23 септем.	16 октоб.	8 новем.	30 новем.	22 децем.	13 јануар	4 фебр.	26 фебр.	21 март

Географска ширина

Било би свакако корисно кад би се та таблица заменила новом, проширеном на сваки пети степен географске ширине и на удвостручен број дана, но она ће нам, и у овом облику бити довољна да из ње извучемо важне закључке о садашњем стању осунчавања Земље.

§ 28. Графичко предочавање осунчавања Земљиних упоредника у току године. — Да бисмо добили јасну слику о току осунчавања



Сл. 11

Земљиних упоредника у току године, предочили смо податке таблице III графички. У томе циљу употребљен је у приложеној слици 11 аксонометријски начин. Три праве  $AB$ ,  $AD$  и она које иде у правцу  $0^\circ E$  предочавају, косо посматране, три осе управне једна на другу. На осу  $AB$  пренесене су лонгитуде Сунца, на осу  $AD$  географске ширине, а на трећу осу, управну на раван четвороугла  $ABCD$ , пренесене су одговарајуће топлотне дневне количине. Крајње тачке тих управних дужина, повезане међусобно кривама, оцртавају једну заталасану површину која нам предочава промене дневних количина у току године и када се померамо од упоредника до упоредника Земљиног. Пресек  $AED$  те површине са вертикалном равни положеном кроз осу  $AD$  која одговара лонгитуди Сунца једнакој нули, предочава нам дневне топлотне количине у доба пролетње равнодневице као функцију географске ширине.

Према обрасцу (40) првог одељка ове књиге, та крива је обична косиноида. У доба пролетње равнодневице су дневне топлотне количине пропорционалне косинусу географске ширине; оне достижу свој максимум на екватору, а на оба пола једнаке су нули.

Чим се Сунце удаљи из пролетње равнодневице, мења се тај једноставни распоред дневних топлотних количина. То се види јасно из приложене слике: око јужног пола ствара се неосунчана калота Земљина која се проширује из дана у дан све до летњег солстиција северне хемисфере када Сунце има лонгитуду од  $90^\circ$ . У истом раздобљу помера се максимум осунчавања са екватора према северу, а осунчавање северног пола је у наглom порасту. Ту, око северног пола, у оној зони где Сунце у то доба не залази под хоризонт, максимум дневног осунчавања налази се, као што следује из једначине (43) првог одељка ове књиге, на самом полу. На том полу образовао се један споредан максимум осунчавања, а површина предочена нашом сликом показује уз линију  $AFK$  једну слабу удолицу у којој се налази минимум осунчавања и сели се њом, удаљујући се све више од тога пола. Када не би било Земљине атмосфере, северни пол би већ 25 маја био она тачка Земљине површине која тога дана добива највећу дневну топлотну количину. У то доба образовао се над њиме апсолутни максимум дневног осунчавања, а дотадањи апсолутни максимум, који се померио од екватора до географске ширине од  $36^\circ$ , постаје споредним максимумом.

У доба летњег солстиција северне хемисфере, када је лонгитуда Сунца једнака  $90^\circ$ , распоред дневних топлотних количина предочен је линијом  $FGH$ . Северни пол достигао је своје највеће дневно осунчавање од 1100 грамакалорија, док се споредни максимум, са својих 1023 грамакалорија померио до географске ширине од  $43^\circ 33' 34''$ . Минимум осунчавања на северној хемисфери померио се до географске ширине од  $60^\circ 52' 16''$  и износи 1008 грамакалорија. На јужној хемисфери при удаљавању од екватора према југу осунчавање нагло опада и исчезавана на поларном кругу; антарктичка поларна зона је потпуно неосунчана.

Почевши од тога тренутка, осунчавање северног пола бива све мање, минимум дневног осунчавања почиње му се приближавати да би га достигао у доба јесење равнодневице. Апсолутни максимум скаче са северног пола 19 јула и премешта се на  $36^\circ$  северне географске ширине, а одавде се сели према екватору где стиже у доба јесење равнодневице, када је лонгитуда Сунца једнака  $180^\circ$ . У том тренутку неосунчана калота јужне хемисфере је исчезла, а распоред дневних количина осунчавања дуж меридијана предочен је косиноидом  $KLM$ ; она није конгруентна косиноиди  $AED$ , јер је отстојање Земље од Сунца у доба јесење равнодневице различито од отстојања у доба пролетње равнодневице.

Одмах иза тога максимум осунчавања који је био стигао до екватора крене према југу, а око северног пола почиње се образовати неосунчана калота Земљина, осунчавање јужног пола је у сталном порасту, и на њему се ствара споредни максимум који од 25 новембра до 17 јануара прелази у ранг апсолутног максимума. Тог потоњег дана

скаче главни максимум на  $36^\circ$  јужне географске ширине и одавде се креће према екватору где стиже у доба пролетње равнодневице. Минимум дневног осунчавања на јужној хемисфери сели се удолицом која се на слици јасно разазнаје и достиже своје највеће растојање од јужног пола у доба северног зимског солстиција на ширини од  $61^\circ 52' 16''$ , а стиже у доба пролетње равнодневице на јужни пол.

У доба северног зимског солстиција, при лонгитуди Сунца од  $270^\circ$ , распоред дневних топлотних количина дуж меридијана предочен је линијом  $NOP$  наше слике. Она је слична линији  $HGF$ , но има осетно веће апликате: максимум дневног осунчавања јужног пола мери 1185 грамакалорија, а споредни максимум на географској ширини од  $43^\circ 33' 34''$  достиже 1094 калорија. Узрок је тому тај што у доба јужног лета Земља пролази кроз перихелиум. Тиме је летње осунчавање јужне хемисфере појачано, а зимско ослабљено.

И годишњи ток осунчавања појединих географских ширина јасно је предочен нашом сликом, и то оним кривама које пресецају ортогонално оне о којима смо до сада говорили. Те криве су пресеци предочене површине са вертикалним равнима константне географске ширине. Све су оне таласасте линије. Уочимо прво ону која нам предочава годишњи ток осунчавања екватора. Једначина те криве дата је обрасцем (44) првог одељка. Из тог обрасца следује ово. Када би Земљина путања била савршен круг, тј. када би радиусвектор  $\rho$  који се појављује у том обрасцу био константан, онда би крива  $EGLOR$  наше слике била двапут заталасана линија са два једнака максимума у доба равнодневица, када је деклинација  $\delta$  Сунца једнака нули, и са два једнака минимума у доба солстиција, када деклинација Сунца достизава своје екстремне вредности, једнаке нагибу еклиптике. Елиптични облик Земљине путање има за последицу да ни оба максимума ни оба минимума осунчавања екватора нису међусобно једнака и да не наступају у речена доба. Тако се, на пример, други максимум помера од 23 септембра на 14 октобар.

На географској ширини од  $16^\circ$  не постоји више таква двострука периода и, чим се та ширина прекорачи, годишњи ток осунчавања упоредника постаје једноставном осцилацијом са једним максимумом и једним минимумом, што се види јасно на слици. На поларним круговима минимум осунчавања њиховог пада на нулу и задржава ту вредност на вишим географским ширинама за време дугих ноћи тих ширина. Споменуте криве падају за време тих интервала у основну раван  $ABCD$ , а паралелне су са  $AB$ .

Криве  $AFK$  и  $MPC$  дате су једначином (43) у коју ваља ставити  $\varphi = 90^\circ$ ; оне се због слабе променљивости радиусвектора  $\rho$  у току године само мало разликују од обичних синоида. Њима недостаје онај део који би пао испод основне равни  $ABCD$ , па је ту замењен правама  $KB$  и  $DM$ .

ТАБЛИЦА V

Топлотне количине упућене за време астрономских полугодина дате у грамкалоријама

Географска ширина	Астрономска полугодина		Цела година
	летња	зимска	
	$W_s$	$W_w$	
0°	160 580	160 580	321 160
5°	165 860	154 240	320 100
10°	169 950	146 800	316 750
15°	172 860	138 360	311 220
20°	174 570	128 980	303 550
25°	175 130	118 780	293 910
30°	174 450	107 800	282 250
35°	172 650	96 190	268 840
40°	169 710	84 030	253 740
45°	165 760	71 500	237 260
50°	160 860	58 740	219 600
55°	155 300	46 100	201 400
60°	149 080	33 620	182 700
65°	143 000	22 180	165 180
70°	138 700	13 440	152 140
75°	136 150	7 380	143 530
80°	134 520	3 240	137 760
85°	133 590	740	134 330
90°	133 300	0	133 300

Криве  $DHM$  и  $KNB$  дате су једначином (7) првог одељка ове књиге.

§ 29. Нумерички подаци о топлотним количинама упућеним појединим упоредницима Земље за време астрономских годишњих доба. — Прве тачније податке о топлотним количинама упућеним за време астрономских годишњих доба појединим упоредницима дао

је Винер у својој поменутој расправи за сваки десети степен географске ширине. Ја сам их, служећи се при томе својим властитим математичким апаратом, поново израчунао и то за сваки пети степен географске ширине, упоредио их са Винеровим подацима, нашао потпуну подударност њихову са својима и прерачунао своје податке у грамкалорије, узимајући за соларну константу нумеричку вредност од 2 грамкалорије по квадратном центиметру и минути. Ти резултати саопштени су у приложеној табlici IV. Они важе, према ставу доказаном у § 12, за северну и за јужну хемисферу.

§ 30. Утицај атмосфере на осунчавање Земљине површине. — При улазу у Земљину атмосферу топлотна енергија садржана у Сунчевим зрацима подлежи различитим променама и преображајима. Прираштај густине атмосфере са приближавањем ка Земљиној површини има за последицу рефракцију Сунчевих зракова, отступање од њиховог почетног правца. Та појава нема осетног уплива на осунчавање Земљине површине и не мора се овде узимати у обзир. Далеко значајније је ова појава. Један део Сунчевих зракова бива при пролазу кроз атмосферу на њеним молекулима дифузно рефлектован, други један део апсорбован, а тек остатак стиже у виду директних Сунчевих зракова до Земљине површине. Сваки молекул атмосфере постаје споменутом рефлексijом и апсорпциjом извором двеју различитих врсте зрачења, дифузног Сунчевог зрачења и тамног зрачења молекула, изазваног његовим температурним стањем. Та зрачења распростраиу се у свима правцима, стижу до Земљине површине или у интерпланетарни простор, а на том свому путу кроз атмосферу подлеже сличним утицајима атмосфере као и директни Сунчеви зраци.

До Земљине површине стиже, дакле, зрачна енергија у виду директних Сунчевих зракова, у виду дифузног Сунчевог зрачења и у виду тамног зрачења атмосфере. Један део те зрачне енергије бива при свом доласку до Земљине површине рефлектован и упућен у атмосферу да би при пролазу кроз њу подлежао њеним већ напоменутиим утицајима, а други део бива апсорбован Земљином чврстом површином или њеном хидросфером и употребљен за повишење њене температуре. Температурно стање Земљине чврсте површине или њене хидросфере узрок је тамном зрачењу њиховом које се шири ка интерпланетарном простору, а подлежи на путу кроз атмосферу њеном већ описаном дејству. Онда где се у атмосфери налазе облаци бивају сва зрачења која на њих падају делимично рефлектовава, делимично пропуштена, а делимично апсорбована да би том последњом својом променом постала извором тамног зрачења тих облака.

Математичко испитивање и описивање пролаза Сунчевих зракова кроз атмосферу оснива се на Буге-Ламбертовом закону који су та два научника поставила за Сунчево светло, но који важи и за целокупну,



дакле и топлотну, Сунчеву радијацију. Служећи се, у том смислу, тим законом, могуће је за разна стања атмосфере, која налазе свог изражаја у трансмисионом коефицијенту атмосфере и у проценту њене наоблачености, израчунати стварно осунчавање Земљине површине и дати нумеричке податке о том осунчавању.

Ти проблеми, као и сви остали којима смо се до сада бавили и који се тичу садашњег стања осунчавања Земље, обухваћени су новом једном науком, математичком теоријом климе која је добила свој садањи облик делом наведеним у претходном списку под бројем 13, које је преведено и на руски језик.

Та наука, полазећи од фундаметалних закона физике, проучила је и математички изразила везу између осунчавања наше Земље и температурног стања Земљине површине и њене атмосфере и свих њених периодичних промена. Она је, као што је напоменуто у уводу овог дела, нашла примене и при испитивањима температуре појединих планета. Велики део те науке не улази у предмет овог удбеника којему је дат такав облик да чини једну засебну целину, ограничавајући се на проблем климатских промена Земљине прошлости.

## ГЛАВА ОСМА

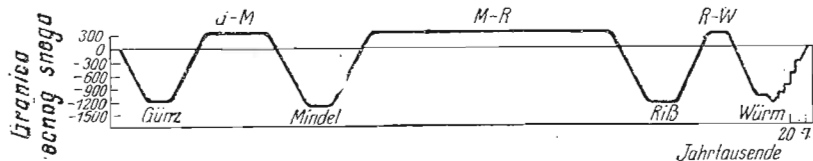
### ЛЕДЕНА ДОБА И ПРЕЂАШЊИ НЕУСПЕЛИ ПОКУШАЈИ ДА СЕ ОНА ОБЈАСНЕ

§ 31. Ледено доба. — Стогодишњим геолошким испитивањима доказало се да су за време најмлађе геолошке периоде, квартара, наступиле велике климатске промене у северним крајевима Земље које су нашле свог најјачег изражаја у тако званом леденом добима. О томе су прикупљена многобројна непобитна сведочанства од којих ћемо овде навести само најважнија, ослањајући се при томе на дело Кепена и Вегенера „Климат геолошке прошлости“, 1924. Последње поглавље тога дела бави се климом квартара и даје нам и слику науке о том питању у доба објављивања тога дела. Тако ћемо на темељу тог извештаја моћи у даљим саопштењима показати колико је наука коракнула на том пољу од те године.

Од прастарих геолошких времена, иза алгонско-камбриумског леденог доба, владала је у Европи и Северној Америци тропска и субтропска клима, но пред крај терцијара наступило, и то прво у Северној Америци, а затим у Европи, велики климатски преокрети који достигше свој врхунац у добу квартара. У планинским пределима спустила се граница вечног снега за каквих 1200 метара, тако да су при њеним најнижим положајима, у тим појединим узастопним леденим добима, огромни крајеви споменутих делова континента били прекривени леденим покривачем дебелим километар и више да би се у временима која су раздвајала та поједина ледена доба тај покривач или знатно сузио или сасвим отопио, а на његовом месту се појавила флора слична данашњој.

Већ у почетку деветнаестог века почело се увиђавати да се такве појаве које су се одиграле у подручју Алпи могу објаснити само рекама леда, ледењацима, далеко већим но што их сада онде налазимо. Они су, излазећи из планина, прекрилили и велик део северног предгорја алпијског.

Крајем деветнаестог века прикупише Пенк и Брикнер огроман материјал о пространству и променама алпијског глацијала и објавише га у свом великом делу „Алпи у леденом добу“, 1901—06. Они дођоше до закључка да су алпијски предели преживели четири ледена доба, одељена један од другог трима интергласијалним добима. Тим леденим добима наденуше имена Гинц, Миндел, Рис и Вирм. Од оних трију интергласијала био је онај који се временски налазио између Миндела и Риса далеко већи од преосталих. Пенк је, на темељу ерозија речног шљунка оталоженог за време тих ледених доба оценио распоред и ток тих доба и предочио га приложеном сликом.



Ст. 12

Трајање последње фазе тог тока, оне која је протекла од таложења Билске морене у Фирвалдстетском језеру, оценио је Пенк са каквих 20 хиљада година, интергласијално доба између Риса и Вирма са 60 хиљада година, а интергласијално доба између Миндела и Риса са 240 хиљада година. О преосталим периодима квартарног леденог доба Пенк није дао бројних података, но из његове слике следовало би да је то доба, од почетка Гинца па до недавна, трајало каквих 660 хиљада година.

Безбројни трагови квартарног леденог доба нађени су и у другим крајевима северне Европе, све до у јужну Енглеску, па до Харца и Карпата. И ту се увидело да огромне количине шљунка и ератични блокови нису ту доведени бујицама и леденим сантама како се пре мислило и о чему ће бити још говора, већ глечерима леденог покривача који је некада прекрило целу северну Европу. Но што су се више гомилали документи о траговима тих ледењака, постојало је све јасније да за северну Европу не важи Пенк-Брикнерова шема, постављена за алпијске крајеве. Показало се да је Вирмово ледено доба Пенк-Брикнерове шеме било расчлањено у три главна надирања леденог покривача, одвојена једно од другог повлачењем његовим. Та три надирања означавања су са Вирм I, Вирм II и Вирм III. Слично је важило и за Енглеску где је нађено барем шест засебних фаза надирања леденог покривача.

У Скандинавији, срцу залеђавања, теже је расчланити ледено доба у поједине фазе. Ипак се онде оцртала јасно егзистенција једног интергласијалног доба за време које је ледени покривач сасвим нестао. И на острву Коли и на обалама Белог Мора доказано је једно интергласијално доба. Оно се, ван сваке сумње, поклапа са дугим интергласијалним добом Миндел-Рис алпског глацијала које је било довољно дуго да ослободи те крајеве вечног леда.

И у оним крајевима Европе, између Алпи и леденог покривача северне Европе, који нису били никада прекривени вечним ледом, створиле су се у квартару наслага климатског значаја које говоре да је ту број климатских колебања био знатно већи но у једноставној шема Пенка и Брикнера. То говоре и геолошки налази о периодичним променама климе и у ваневропским земљама.

Иако су, на тај начин, дескриптивне природне науке успеле да нас обавесте о распрострањењу, а, донекле, и о заступности ледених доба у Европи и Северној Америци, оне нису успеле да нам даду икаквих обавештења о узроцима тих великих климатских промена квартара. Ти узроци леже изван видокруга тих наука, и они ће бити предмет овог дела. Но пре но што му приступимо биће, већ са историјске тачке гледишта, од интереса да прозборимо о неким старијим неуспелим, покушајима да се појава ледених доба објасни, да бисмо тиме повукли оштру границу између тих покушаја и резултата наших испитивања.

§ 32. Старе теорије ледених доба. — Међу безбројним старим теоријама којима се хтело објаснити појава ледених доба заузимају видно место такозване астрономске теорије којима се покушало да се та појава објасни астрономским узроцима. Први који је то учинио био је француз Адемар који је својим делом о поремећајима мора и периодичним потопима ступио 1842 године пред научни свет са тим онда врло актуелним проблемом, јер је у оно доба било већ доказано да су шљунчани наноси разасути по великом делу Европе, а исто тако и ератични блокови, од којих су неки имали огромне димензије, дошли на њихово садашње лежиште са далеког севера. Зато се, само од себе, наметнуло питање којим су сретством те камене масе онамо стигле. Да би се на то питање одговорило, постављене су разне хипотезе. По једној од њих биле су ледене санте мора, по другој огромне бујице које су се са пола излиле по Европи, по трећој ледењаци који су са севера надирали, превозно сретство тих камених маса.

У оно доба била је од већине природњака прихваћена као истина велика заблуда иначе несумњиво великог зоолога и палеонтолога Кивијеа да свака животињска врста претставља једну потпуну, објективну и непроменљиву целину. Противно ономе што данас знамо, онда се није веровало да су се те врсте постепено развиле једна из друге. Да би растумачио узастопност различитих врста за време геолошке прошлости, Кивије је веровао, и мислио да је доказао, да је читав низ страшних катастрофа уништио, један за другим, цео живи свет Земљин да би она сваки пут поновним створењем била насељена новим светом.

Стојећи под утицајем тог схватања Кивијеовог, Адемар се определио за хипотезу катастрофалних бујица и изразио своју теорију ледених доба полазећи од ових расуђивања.

Услед прецесије равнодневица и померања перихела мењају се, као што смо видели у првом одељку ове књиге, дужине годишњих доба на тај начин што се на обема хемисферама Земљиним сваких десет хиљада година одмењују дуге зиме са краткима и то тако да када је на једној од њих зима најдужа, на другој је најкраћа. Пошто се топлотне количине које Сунце шаље тим хемисферама за време њихових годишњих доба не мењају услед померања равнодневица, јасно је да ће дуга зима бити изванредно оштра, а кратка особито блага. Када се, дакле, једна од тих хемисфера нађе у периоду хладних зима, нагомилаће се ледене санте око њеног пола, а привлачно дејство тих нагомиланих ледених маса изазваће јачу поплаву те хемисфере и смањити својом хладном водом још више њену температуру. Јужна хемисфера Земљина која у садашњости има дугу зиму предочава нам, својом великом леденом калотом и својом преплављеношћу, то стање ствари. Када на таквој хемисфери наступи доба блажих зима, почеће са њених поларних крајева да отичу све јаче и јаче бујице, носећи са собом камење поларних предела. Када, напослетку, трули ледени покривач, који се, као печуркина глава, одржао на полу, препукне и распадне, онда ће се катастрофалне бујице излити преко целе Земље. Такве катастрофе понављају се, наизменично на обема хемисферама сваких десетак хиљада година.

Каснија геолошка испитивања расветлиле су питање климатских промена Земљине прошлости утолико што се увидело да се, као што смо већ били напоменули, за време извесних интервала дилувиума велики делови Европе и Северне Америке налазили под огромним дебелим леденим покривачем, а да се пренашање каменних маса према топлијим пределима могло вршити само ледењацима. Хипотезе о пливајућим сантама и о катастрофалним бујицама беху коначно одбачене, а Адемарова теорија не могла се одржати ни у свом новом облику преудешеном за ледењаке, кад се рачунски доказало да нагомилавање леда за време дилувијалног доба око полова није било ни издалека толико да би изазвало преплављивање залеђене хемисфере како га је Адемар замишљао. Ипак је Адемарова теорија постала полазном тачком других теорија ледених доба од којих је најзначајнија била теорија Кролова.

Енглески научник Крол изложио је своју теорију године 1875 и 1889 и основао је, као и Адемар, на променљивој дужини годишњих доба. Правилно је оценио утицај ексцентрицитета Земљине путање на дужине годишњих доба, како он следује из образаца (98) и (99) првог одељка ове књиге. Само при релативно великом ексцентрицитету Земљине путање може разлика у дужини годишњих доба бити знатна. Деси ли се, дакле, да се, при осетном ексцентрицитету, екваторијална линија приближи нормали апсидне линије, онда ће она Земљина хемисфера чија зимска полугодина пада у време пролаза Земље кроз афе-

лиум имати дугу и строгу зиму. Онда ће и у њеним умереним појасевима бити зимског снега где га сада никада нема, а тај снег ће се одржати преко целе зиме и спротећа се још повећати због испаравања мора, тако да ће требати дуже времена док се снег отопи у низијама. На бреговима, ма и не веома високим, снег ће се одржати и преко лета. Идућих година граница тог вечног снега спуштаће се све ниже док сви виши крајеви не буду стално прекривени снегом. Долине ће се пунити глечерима па ће већи део те Земљине хемисфере доћи постепено под снежни и ледени покривач. Тиме се ствара нови моћни фактор залеђивања, дејство снежног покривача који ће и за време лета охлађивати ваздух, стварати густе магле које ће спречавати приступ Сунчевих зракова и отежавати топлење тог покривача.

Док се на тај начин на једној од Земљиних хемисфера снег и лед нагомилавају, смањују се на другој. То ће појачати пасатне ветрове на хладној хемисфери, а особито на топлијој. Услед тога ће топла вода тропских мора отицати све до средњих ширина топле хемисфере. Лишена тог извора топлоте, она друга хемисфера биће изложена све већој хладноћи. Док на њој сви чиниоци дејствују у правцу њеног охлађења, на другој хемисфери обрнут је случај, па она преживљује своје топло, интергласијално, доба.

Са променом лучног отстојања перихела од пролетње тачке мењају се улоге обеју хемисфера. Када екваторијална линија дође до поклапања са апсидном, биће обе хемисфере у сличним термичким приликама, оне ће се наћи у прелазном стадиуму из којег ће дотле залеђена хемисфера доћи у интергласијално, а друга у гласијално доба. Тако се на свакој од обеју хемисфера Земљиних одмењују, једно за другим, ледена, прелазна и интергласијална доба, и то увек тако да кад се једна од хемисфера налази у леденом добу, преживљује друга своје интергласијално доба. Интензитет тих ледених и топлих доба повећава се са већим ексцентрицитетом Земљине путање.

Против Кролове теорије, коју смо овде саопштили у њеним главним цртама, изнесене су тешке замерке. Са климатолошке стране, као најјача, та да глечере не ствара строга зима која њихово стварање спречава, како се то данас види баш у пределима строге зиме, у унутрашњости северних континената, а нарочито у Сибирији. Спуштање границе вечног снега и надирање глечера не проузрокује строга зима, већ хладно лето.

Са геолошке тачке гледишта изнесени су против Кролове теорије ови разлози. По схватању Кроловом, ледена доба морала би се, истина неједнаког замаха, појављивати сваких двадесетак хиљада година. Тому противрече геолошке чињенице које говоре, додуше о више ледених доба, но која нису следовала једно за другим у тако кратким и правилим временским размацима. По Кролу морала би се ледена доба одмењивати на Земљиним хемисферама; истовремена или барем једна.

другима врло блиска ледена доба на обема хемисферама била би немогућа, а геолошко искуство их дозвољава.

Кролова теорија има још једну замашну грешку, што не узима у обзир промене нагиба еклиптике која су, као што ћемо видети, једна од главних узрока климатских промена. Сличне недостатке имају и каснији покушаји да се објасне ледена доба међу којима су најзначајнији Белов, Пилгримов и Хергривсов, о којима ћемо још говорити. Све те старе теорије нису биле у стању да објасне бар квалитативно главне црте феномена ледених доба, а камо ли да продру до механизма и квантитативног решења тог проблема. Зато није ни чудо што их је велики метеоролог и климатолог Хан године 1908 све од реда одбацио, уверивши се да су оне недовољне, па да говоре више у прилог сталности Земљиних климата него за њихову променљивост.

Зашто је Хан дошао до тога суда, увидећемо јасно када се упознамо са нашим решењем проблема ледених доба.

## ГЛАВА ДЕВЕТА

### ГЛАВНЕ ЦРТЕ СЕКУЛАРНОГ ТОКА ОСУНЧАВЊА ЗЕМЉЕ

§ 33. Нумерички подаци о утицају промена астрономских елемената на осунчавање Земље. — У првом одељку ове књиге видели смо да, услед узајамног привлачног дејства планета, Земљина путања мења постепено свој облик и положај у простору, а исто тако и оријентација њене осе. То има за последицу да се нагиб  $\epsilon$  Земљине осе према равни Земљине путање, другим речима, нагиб еклиптике, а затим и ексцентрицитет  $e$  Земљине путање и отстојање  $P$ , перихела од пролетње тачке мењају у току векова. Како се та три елемента појављују у обрасцима којима смо математичким језиком описали осунчавање Земље, и то осунчавање подлегаће вековним променама.

Пре но што бисмо приступили израчунавању тог вековног осунчавања Земље, биће потребно да изведемо неке помоћне таблице потребне за тај посао. Показаће се као врло корисно да при израчунавању тог секуларног тока све топлотне количине које се појављују у нашим обрасцима изразимо тако названим каноничним јединицама. То су оне јединице које се добивају ако се соларна константа одабере за јединицу топлоте, а стохиљадити део године за јединицу времена, тј. ако се стави

$$J_0 = 1 \quad T = 100.000.$$

Тим јединицама израчуната је приложена таблица V у којој су саопштене топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  упућене појединим географским ширинама за време астрономских полугодина и топлотна количина  $W_T$ , једнака збиру првих двеју.

Веза између те таблице и претходне, IV, је ова. Како тропска година обухвата 365,2422 дана, тј. 525 942 минуте и како је при израчунавању таблице стављено  $J_0 = 2$ , то је коефицијент  $TJ_0$  који се појављује у обрасцима (110) и (114) био том приликом једнак 1,051.898, док је при израчунавању таблице V једнак  $TJ_0 = 100.000$ . Зато се

ТАБЛИЦА V

Топлотне количине упућене за време астрономских полугодина дате у каноничним јединицама

Географска ширина	Астрономска полугодина		Цела година
	летња	зимска	
	$W_s$	$W_w$	$W_T$
0°	15 226	15 266	30 532
5°	15 768	14 663	30 431
10°	16 156	13 956	30 112
15°	16 433	13 153	29 586
20°	16 596	12 262	28 858
25°	16 649	11 292	27 941
30°	16 584	10 248	26 832
35°	16 413	9 144	25 557
40°	16 134	7 988	24 122
45°	15 758	6 797	22 555
50°	15 292	5 584	20 876
55°	14 764	4 383	19 147
60°	14 172	3 196	17 368
65°	13 594	2 109	15 703
70°	13 186	1 278	14 464
75°	12 943	702	13 645
80°	12 788	308	13 096
85°	12 700	70	12 770
90°	12 672	0	12 672

бројеви таблице V добивају ако се бројеви таблице IV поделе са 10.591.

Стављајући, као што је то учињено при израчунавању таблице IV,  $\varepsilon = 23^\circ 27' 30''$ ,  $e = 0,0168$ , а сем тога,  $J_0 = 1$ ,  $T = 100.000$ , могу се обрасцима саопштеним у § 17 израчунати промене  $\Delta W_s$ ,  $\Delta W_w$ ,  $\Delta W_T$  топлотних количина  $W_s$ ,  $W_w$ ,  $W_T$  при прираштају нагиба  $\varepsilon$  еклиптике од једног степена. Те промене саопштене су у приложеној табlici VI

ТАБЛИЦА VI

Промене топлотних количина саопштених у табlici V при прираштају нагиба еклиптике од једног степена

Географска ширина	$\Delta W_s$	$\Delta W_w$	$\Delta W_T$
	каноничне јединице		
0°	- 54	- 54	- 108
5°	- 31	- 75	- 106
10°	- 7	- 96	- 103
15°	+ 18	- 114	- 96
20°	+ 44	- 131	- 87
25°	+ 70	- 145	- 75
30°	+ 97	- 157	- 60
35°	+ 125	- 167	- 41
40°	+ 154	- 173	- 19
45°	+ 184	- 177	+ 7
50°	+ 215	- 175	+ 40
55°	+ 249	- 168	+ 81
60°	+ 288	- 153	+ 136
65°	+ 340	- 121	+ 219
70°	+ 420	- 59	+ 361
75°	+ 461	- 30	+ 431
90°	+ 509		+ 509

Укаже ли се потреба да се утицаји промена појединих астрономских елемената на осунчавање Земље међусобно упореде, онда је потребно знати и процентуалне промене количина  $W_s$ ,  $W_w$ ,  $W_T$  при прираштају нагиба еклиптике од једног степена. Те процентуалне промене саопштене су у приложеној табlici VII.

Већ у § 19 упозорили смо на то да се топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  што их Сунце шаље појединим упоредницама Земљиним за време астрономске летње полугодине  $T_s$  односно за време астрономске зимске полугодине  $T_w$  односе на неједнаке и секуларно променљиве ин-

ТАБЛИЦА VII

Процентуалне промене топлотних количина саопште-  
них у табlici V при прираштају нагиба еклиптике  
од једног степена

Географска ширина	$\Delta W_s$	$\Delta W_w$	$\Delta W_T$
	проценти		
0°	-0,35	-0,35	-0,35
5°	-0,20	-0,52	-0,35
10°	-0,04	-0,69	-0,34
15°	+0,11	-0,87	-0,33
20°	+0,26	-1,07	-0,30
25°	+0,42	-1,29	-0,27
30°	+0,59	-1,54	-0,22
35°	+0,76	-1,83	-0,16
40°	+0,95	-2,17	-0,08
45°	+1,17	-2,60	+0,03
50°	+1,41	-3,14	+0,19
55°	+1,69	-3,84	+0,42
60°	+2,04	-4,78	+0,78
65°	+2,51	-5,77	+1,39
70°	+3,18	-4,62	+2,49
75°	+3,57	-4,31	+3,17
90°	+4,02		+4,02

тервале и подвукли смо сав недостатак тог стања ствари. Потребно је да се тим питањем сада опширније позабавимо.

Секуларне промене дужина астрономских полугодина су доста знатне, и разлика њихових дужина која је сада, као што смо видели, једнака 7 дана и 14 часова може услед променљивости астрономских елемената достићи износ од 31 дана и 20 часова, у корист једне или друге полугодине. Да би се топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$  које одговарају тим полугодинама могле, колико толико, међусобно упоредити,

поступало се овако. Образовани су количници

$$w_s = \frac{W_s}{T_s} \quad w_w = \frac{W_w}{T_w}$$

који нам дају оне топлотне количине које Сунце упућује уоченој географској ширини за време летње односно зимске полугодине, просечно обрачунато по јединици површине и јединици времена. Израчунају ли се та просечна осунчавања како за садашњост тако и за уочену годину прошлости, може се казати да ли је у доба те прошлости за време летње односно за време зимске астрономске полугодине просечно осунчавање уоченог упоредника било јаче или слабије но што је сада. При томе се, што ваља нарочито подвући, не говори о трајању тих полугодина, оно не долази до изражаја у том просечном осунчавању. Покажимо то на једном конкретном примеру. Уочимо у то име ове две комбинације астрономских елемената које леже у границама могућности:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 21^\circ 58' & P_\gamma &= 270^\circ & e &= 0,0606, \\ \epsilon &= 24^\circ 34' & P_\gamma &= 90^\circ & e &= 0,0606. \end{aligned}$$

При тим двама комбинацијама добивамо за просечно зимско осунчавање  $w_w$  северне географске ширине од  $66^\circ$  једну те исту вредност, али при првој комбинацији дужину  $T_w$  зимске астрономске полугодине која је за пуних 28 дана већа но при другој комбинацији. Јасно је да су та два осунчавања, поред све једнакости њихове просечне вредности, сасвим различита због неједнакости времена на која се она односе.

Да би се осунчавања појединих географских ширина за време садашњости и прошлости могла међусобно упоредити, морао се тражити други пут, који сам пронашао тек после публикација своје „Théorie mathématique“, пошао њиме приликом својих израчунавања за Кепен—Веженерово дело, а усавршио тај поступак у својим каснијим публикацијама. Он је саопштен, математички фундиран и употребљен већ у првим одељку ове књиге, а овде ћу га објаснити, без употребе компликованог математичког апарата, конкретним примерима.

Вратимо се, у том циљу, табlici III која нам саопштава садање дневне количине осунчавања Земљиних упоредника и бацимо поглед на та осунчавања у доба пролетње и доба јесење равнодневице, она која одговарају лонгитуди Сунца од  $0^\circ$ , односно  $180^\circ$ . Та осунчавања су, иако се Сунце у оба случаја налази у небеском екватору и има деklinацију једнаку нули, у доба пролетње равнодневице за  $1,4\%$  већа но у доба јесење равнодневице. То потиче одатле што су отстојања Земље од Сунца у тим двама тренуцима неједнака, а квадрати

тих отстојања стоје у размери 1 : 1,014, а у тој размери опада и интензитет Сунчевих зракова. Та, данас незнатна, разлика може услед промена астрономских елемената постати знатна и достићи величину од пуних 31 процената. Ова неједнакост има за последицу да је, у таквом случају, осунчавање Земље у доба последњих дана астрономске зиме знатно јаче но при крају астрономског лета. Рекли смо већ да разлика у дужини астрономских полугодина може порастати до скоро 32 дана.

Из свега тога следује, а то је предочено и сликом 10, да астрономске полугодине не деле годину ни у два једнака, ни у интервал јачег и слабијег осунчавања. То потиче од тога што је при расчлањавању године у астрономска годишња доба вођено рачуна само о дужини дана, а не о јачини осунчавања. Док при првом од тих двају критериума долази у обзир само деклинација Сунца, долази при другом у обзир и отстојање Сунца. Зато астрономска доба немају тешње везе са осунчавањем Земље, па се помоћу њих не може прозрети до дна вековни ток тог осунчавања. То је могуће само онда ако се година расчлани у две једнаке, дакле стварне, полугодине од којих једна од њих обухвата све дане у години за време којих је осунчавање уочене географске ширине јаче од било којег дана друге полугодине.

Те године назване су калоричним полугодинама; она од њих која обухвата све дане јачег осунчавања зове се калоричном летњом полугодином, а она друга калоричном зимском полугодином.

Те полугодине не само да су међусобно једнаке, оне задржавају своју сталну дужину од 182 дана, 14 часова и 54 минуте у току векова.

Показали смо у првом одељку, шестој глави, како се за производњу годину прошлости и будућности математички одређују почечи и свршеци калоричних полугодина. Они нису једновремени на свима географским ширинама, већ задоцњавају понешто када се пође од полова ка екватору. Разуме се да се ти почечи и свршеци не подударају са почецима и свршецима астрономских полугодина. Калорична доба имају сталну дужину, а астрономска променљиву, па се тај њин вишак преко оне сталне дужине расподељује међу оба калорична доба.

Показали смо како се израчунавају топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$  што их Сунце шаље појединим географским ширинама за време калоричних полугодина. Те топлотне количине које се односе на деветнаести и на двадесети век нашег календара саопштене су, мерене каноичним јединицама, у приложеним двама таблицама VIII и IX.

У табели VIII саопштене су количине какве их је Сунце слао појединим географским ширинама у току калоричних полугодина године 1800, а у табели IX саопштене су оне промене које су количине табелице VIII претрпеле за време наредних 200 година, тј. од године 1800 до године 2000. Тако се применом тих двеју таблица могу оби-

ТАБЛИЦА VIII

Топлотне количине упућене за време калоричних полугодина године 1800, калоричне јединице

Географска ширина	Северна хемисфера		Јужна хемисфера	
	летња полугодина	зимска полугодина	летња полугодина	зимска полугодина
0°	14 930	15 601	15 601	14 930
5°	15 433	14 997	16 102	14 328
10°	15 825	14 286	16 487	13 625
15°	16 109	13 476	16 757	12 828
20°	16 281	12 577	16 912	11 946
25°	16 345	11 595	16 953	10 987
30°	16 294	10 538	16 876	9 956
35°	16 139	9 418	16 689	8 868
40°	15 878	8 244	16 392	7 730
45°	15 522	7 033	15 997	6 558
50°	15 078	5 799	15 510	5 367
55°	14 573	4 574	14 958	4 189
60°	14 005	3 363	14 342	3 027
65°	13 455	2 250	13 738	1 966
70°	13 074	1 392	13 304	1 163
75°	12 859	789	13 033	615
80°	12 733	366	12 850	250
85°	12 675	99	12 733	41
90°	12 669	7	12 676	0

чном интерполацијом израчунати топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$  које одговарају било којој години тог временског интервала.

Топлотним количинама  $Q_s$  и  $Q_w$  обухваћена је главна карактеристика годишњег тока осунчавања Земље и њених упоредника, опрека између топле и хладне полугодине и њена тачна мера. Те количине могу се без тешкоћа израчунати и за сваку годину последњег милијона година Земљине прошлости и тиме открити механизам леденог

ТАБЛИЦА IX

Промене топлотних количина саопштених у табlici VIII  
за време раздобја од 1800 до 2000 г. н. е.

Географска ширина	Северна хемисфера		Јужна хемисфера	
	летња полугодина	зимска полугодина	летња полугодина	зимска полугодина
0°	+ 7,0	- 4,2	- 4,2	+ 7,0
5°	+ 6,4	- 3,7	- 4,8	+ 7,5
10°	+ 5,7	- 3,1	- 5,4	+ 8,0
15°	+ 5,0	- 2,4	- 5,8	+ 8,4
20°	+ 4,2	- 1,9	- 6,4	+ 8,7
25°	+ 3,3	- 1,3	- 6,9	+ 8,9
30°	+ 2,3	- 0,8	- 7,5	+ 9,0
35°	+ 1,3	- 0,2	- 7,9	+ 9,0
40°	+ 0,2	+ 0,2	- 8,4	+ 8,8
45°	- 0,8	+ 0,6	- 8,8	+ 8,6
50°	- 2,0	+ 1,0	- 9,2	+ 8,2
55°	- 3,3	+ 1,2	- 9,7	+ 7,6
60°	- 4,7	+ 1,2	- 10,3	+ 6,8
65°	- 6,5	+ 0,7	- 11,3	+ 5,5
70°	- 9,0	- 0,5	- 13,0	+ 3,5
75°	- 10,5	- 0,7	- 13,5	+ 2,3
80°	- 11,8	- 0,6	- 13,8	+ 1,4
85°	- 12,7	- 0,4	- 13,7	+ 0,6
90°	- 13,3	- 0,0	- 13,3	+ 0,0

оба, описати његове главне црте и датирати све важније фазе тога леденог доба тачним астрономским рачуном. Но пре но што приступимо тим рачунима, открићемо и доказаћемо у целини све недостатке старих теорија ледених доба.

§ 34. Општа расуђивања о секуларном току осунчавања Земље. — Означимо ли нумеричке вредности астрономских елемената, ексцентрицитета Земљине путање, нагиба еклиптике и лонгитуде пе-

рихела, како оне одговарају садашњости са  $\epsilon_0, e_0, \Pi_0^0$ , а како оне одговарају уоченој години прошлости са  $\epsilon, e, \Pi$ , па ставимо ли

$$\Delta \epsilon = \epsilon - \epsilon_0, \quad e \sin \Pi - e_0 \sin \Pi_0^0 = \Delta (e \sin \Pi),$$

онда су секуларне промене  $\Delta Q_s, \Delta Q_w$  топлотних количина  $Q_s, Q_w$ , тј. њихови прираштаји према садашњости, дати обрасцима (193) и (194). При томе је коефицијент  $k$  дат обрасцем (183). Изражен каноничним јединицама, тј. стављајући  $J_0 = 1, T = 100.000$ , добивамо за њ нумеричку вредност

$$k = 20 \cdot 260.$$

Обрасци (193) и (194) имали су овај облик

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= \Delta W_s \Delta \epsilon - k \cos \varphi \Delta (e \sin \Pi), \\ \Delta Q_w &= \Delta W_w \Delta \epsilon + k \cos \varphi \Delta (e \sin \Pi), \\ \Delta \bar{Q}_s &= \Delta W_s \Delta \epsilon + k \cos \varphi \Delta (e \sin \Pi), \\ \Delta \bar{Q}_w &= \Delta W_w \Delta \epsilon - k \cos \varphi \Delta (e \sin \Pi), \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

при чему се прва два обрасца односе на северну хемисферу, а остала два на јужну. Нумеричке вредности коефицијента  $\Delta W_s$  и  $\Delta W_w$  дате су таблицом VI. При њеној употреби треба секуларну промену  $\Delta \epsilon$  нагиба еклиптике мерити лучним степенима.

Предњим обрасцима изражен је егзактним математичким језиком механизам секуларног тока осунчавања Земље. Из тих образаца можемо, већ на први поглед, очитати главне црте тог тока.

Десне стране тих образаца имају по два члана. Први члан изражава ефекат секуларних промена астрономског елемента  $\epsilon$ , а други, ефекат осталих двају елемената  $e$  и  $\Pi$  на осунчавање Земље. Испитајмо те ефекте сваки за себе.

Вратимо се табlici VI у којој су саопштене нумеричке вредности коефицијента  $\Delta W_s$  и  $\Delta W_w$  које треба само помножити са нумеричком вредности секуларне промене  $\Delta \epsilon$  нагиба еклиптике да би се добили први чланови десних страна наших образаца, а тиме и целокупни ефекат те промене.

Та таблица, објављена први пут године 1914, донела је пуну светлост о дејству секуларних промена нагиба еклиптике. Она нам казује ово.

Промене нагиба еклиптике долазе до истоветног изражаја на обим хемисферама Земље, али различитог на њеним упоредницима. Када тај нагиб порасте, повећава се, као што се види из последње колумне те таблице, доста знатно годишње осунчавање поларних крајева Земљиних, а умањује, у слабијој мери, осунчавање екваторијалног



појаса Земљиног. Границе које деле те зоне леже на упоредницима од  $43^{\circ}39'$  северне, односно јужне географске ширине.

Код полугодишњих осунчавања имамо други случај. Осунчавања за време летње калоричне полугодине умањују се прираштајем нагиба еклиптике само између оба упоредника од  $11^{\circ}23'$  северне, односно јужне географске ширине, иначе их такав прираштај, приближавањем према половима, све више увећава. Осунчавања за време зимске калоричне полугодине смањују се прираштајем нагиба еклиптике на свима географским ширинама.

Како прираштај нагиба еклиптике појачава годишње осунчавање поларних крајева, а слаби годишње осунчавање екваторијалних, може се рећи да се таквим прираштајем умањују географске опреке. Остављајући по страни напоменути екваторијални појас између упоредника  $\pm 11^{\circ}23'$ , због тога што онде уопште не долази до изражаја опрека између летње и зимске полугодине, видимо да прираштај нагиба еклиптике којим се на свима осталима деловима Земљине површине појачавају летња осунчавања, а смањују зимска, појачава опреке између лета и зиме. Спајајући све што смо до сада рекли у једну реченицу, можемо казати ово. Пораштај нагиба еклиптике умањује географске, а појачава временске опреке осунчавања, и то у истом смислу на оба хемисферама Земљиним.

Други члан десне стране образаца (224) изражава ефекат секуларних промена астрономских елемената  $e$  и  $P_y$ , уско повезаних међу собом својим производом  $e \sin P_y$ . Тај други члан пропорционалан је секуларним променама тог производа, но, као што се види на први поглед из тих образаца, он дејствује у супротном смислу на једну и другу хемисферу: када је позитиван, он умањује летње, а увећава зимско осунчавање северне хемисфере, док је на јужној хемисфери обрнут случај. Када је негативан, његово дејство је обрнуто.

Већ у § 18 говорили смо о секуларним променама производа  $e \sin P_y$ . Оне су суперпозиција двају различитих осцилација, јачих и бржих, које потичу од првог чиниоца тог производа, и слабијих и споријих, које потичу од другог чиниоца. Тај исти карактер има и други члан леве стране образаца (224), но са једном важном одликом: он зависи и од географске ширине и пропорционалан је њеном косинусу. Спојимо ли у том члану тај косинус са коефицијентом  $k$  у један коефицијент  $m$ , тј. ставимо ли

$$k \cos \varphi = m, \quad (225)$$

онда добивамо образце

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_s &= \Delta W_s \Delta \varepsilon - m \Delta(e \sin P_y), \\ \Delta Q_w &= \Delta W_w \Delta \varepsilon + m \Delta(e \sin P_y), \\ \Delta \bar{Q}_s &= \Delta W_s \Delta \varepsilon + m \Delta(e \sin P_y), \\ \Delta \bar{Q}_w &= \Delta W_w \Delta \varepsilon - m \Delta(e \sin P_y), \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

при чему је  $m$ , исто тако као и  $\Delta W_s$  и  $\Delta W_w$ , функција географске ширине. Зависност коефицијента  $m$  од географске ширине предочена је приложеном таблицом X.

ТАБЛИЦА X  
Нумеричке вредности коефицијента  $m$

$\varphi$	$0^{\circ}$	$5^{\circ}$	$10^{\circ}$	$15^{\circ}$	$20^{\circ}$	$25^{\circ}$	$30^{\circ}$	$35^{\circ}$	$40^{\circ}$
$m$	20.260	20.190	19.960	19.570	19.040	18.370	17.550	16.600	15.520
$\varphi$	$45^{\circ}$	$50^{\circ}$	$55^{\circ}$	$60^{\circ}$	$65^{\circ}$	$70^{\circ}$	$75^{\circ}$	$80^{\circ}$	$85^{\circ}$
$m$	14.330	13.030	11.620	10.130	8.560	6.930	5.240	3.520	1.770

Обрасци (226) изражавају дејство секуларних промена астрономских елемената у тачној мери. О том дејству може се рећи још и ово. Дејство астрономских елемената  $e$  и  $P_y$  изражава се, као што смо видели и у променама дужина астрономских годишњих доба. Разлика између дужине астрономске летње и зимске полугодине дата је образцем (140), тј. образцем

$$T_s - T_w = \frac{4T}{\pi} e \sin P_y. \quad (227)$$

Искључимо ли случај  $e = 0$  који се, као што ћемо видети, уопште није десио за време оног раздобја геолошке прошлости на који ћемо ограничити наша испитивања, онда горња разлика дужина годишњих дана исчежава само онда када је  $P_y$  једнако  $0^{\circ}$  или када је оно једнако  $180^{\circ}$ . Када  $P_y$  постепено расте од  $0^{\circ}$  до  $90^{\circ}$ , бива летња астрономска полугодина  $T_s$  све дужа на рачун зимске полугодине  $T_w$ . Не узимајући, за сада, у обзир секуларне промене нагиба еклиптике које једине мењају топлотне количине  $W_s$  и  $W_w$ , видимо да се дужањем летње полугодине непромењена топлотна количина  $W_s$  расподељује на све дужи и дужи временски интервал, због чега летње осунчавање, обрачунато на јединицу времена, рецимо дан, бива из године у годину слабије. За зимско дневно осунчавање обрнут је случај, оно бива све јаче. Другим речима, лета бивају хладнија, а зиме блаже. Док се на тај начин на северној хемисфери опреке између лета и зиме смањују, на јужној хемисфери, чије се лето поклапа са зимом северне хемисфере, а зима са летом, обрнут је случај, ту се те опреке увећавају. Када  $P_y$  достигне вредност од  $90^{\circ}$ , опадну сезонске опреке до свог минимума на северној хемисфери, а на јужној хемисфери попу се до свог максимума.

Када  $P_{\gamma}$  прекорачи  $90^{\circ}$ , почињу се ти екстремни смањивати. За  $P_{\gamma} = 180^{\circ}$ , дужине годишњих доба су изједначене, а тиме и осунчавања обеју хемисфера.

За  $P_{\gamma} = 270^{\circ}$  пала је дужина северне летње полугодине до свог одговарајућег минимума, а зимска порасла до максимума, сезонске опреке заостриле су се до врхунца. На јужној хемисфери те опреке су, при дугом и хладном лету, а краткој и благој зими, ублажене променама елемената  $e$  и  $P_{\gamma}$  до могућности.

Када је  $P_{\gamma} = 360^{\circ}$ , онда су обе хемисфере, при међусобној једнакој дужини годишњих доба, поново термички изједначене, а иза тога почиње изнова стара игра, са том разликом да због променљивости елемента  $e$  сезонске опреке наредне периоде за време које  $P_{\gamma}$  расте поново од  $0^{\circ}$  до  $360^{\circ}$  нису једнаке онима претходне периоде. Ако је  $e$  у порасту, оне се тим јаче заостравају односно ублажују, а ако је  $e$  у опадању, то заостравање и ублажавање бива слабије.

Из образаца (226) слеђују, ако их упоредимо са таблицама VII и X, још ове важне конзеквенције. Процентуалне вредности коефицијената  $\Delta W_s$  и  $\Delta W_w$  све су веће што се више приближавамо половима; нумеричке вредности коефицијената  $m$  су при таквом приближавању све мање. Зато се у поларним крајевима надмоћно испољавају секуларне промене елемената  $e$ , а у екваторијалним секуларне промене елемената  $e$  и  $P_{\gamma}$ . Док се оне прве промене испољавају у истом смислу на обема хемисферама, оне друге испољавају се на тим хемисферама у противном смислу. Док, према томе, секуларни ток осунчавања поларних крајева стоји под ударцем промена нагиба еклиптике и има једноставно осцилаторан карактер, истовремен на обема хемисферама, дотле секуларни ток осунчавања екваторијалних крајева стоји под ударцем промена дужина годишњих доба и има двоструко осцилаторан ток, обрнута смисла на обема Земљиним хемисферама.

На средњим географским ширинама, а нарочито на ширинама од  $50^{\circ}$  до  $65^{\circ}$ , дакле баш онде где су фазе ледених доба оставиле своје трагове, долазе промене свих трију астрономских елемената до подједнаког изражаја и ту је, као што ћемо видети, секуларни ток осунчавања изванредно компликован.

Дошавши до ових сазнања, постаће нам сада потпуно јасно зашто старе теорије ледених доба нису ни издалека успеле да дођу до решења тог значајног проблема. Зато можемо овде да довршимо свој реферат о њима.

Видели смо како је Адемар у својој теорији ледених доба узео у обзир само секуларне промене лонгитуде перихела, дакле само једног од трију дејствујућих астрономских елемената. Крол је, додуше узео у обзир још и промене ексцентрицитета Земљине путање, но тиме се није приближио циљу, јер се, као што смо малочас видели, секуларне промене лонгитуде перихела и ексцентрицитета Земљине путање

испољавају у већој мери само у екваторијалном појасу Земљиним, дакле онде где није ни било ледених доба. Кролов следбеник Бел покушао је 1891 да Кроловој теорији даде бољи облик, узимајући у обзир и промене нагиба еклиптике, но не успевши у томе. Разлог је томе тај што је узео у обзир њихово дејство само на целокупна осунчавања Земљиних хемисфера за време астрономске летње односно зимске полугодине, како су она предочена обрасцима (118). Лако се може израчунати да прираштај нагиба еклиптике од једног степена мења та осунчавања за  $+0,81$  односно за  $-1,37$  процената. Упоредимо ли ове процентуалне промене са онима које су саопштене у таблица VII и које достизавају износе од  $+4,02$  односно од  $-5,86$  (за  $\varphi = 66^{\circ}$ ), видимо да у погледу летњих осунчавања, оних који су као што ћемо видети, пресудна за стварање ледењака, Крол није својим рачуном достигао ни петину стварног ефекта промена нагиба еклиптике.

Слични недостатак испољава и теорија Пилгрима, објављена тек после његове смрти, 1928 године. Али је Пилгрим стекао великих заслуга за решење проблема ледених доба својим израчунавањем секуларних промена астрономских елемената, о чему ће још бити говора.

И Хергривс је у својој математички исправној расправи о зависности осунчавања Земље од промена астрономских елемената, објављеној 1896, дошао до позитивних резултата о ефектима промена нагиба еклиптике. Но он је испитао те ефекте само у погледу на годишња осунчавања Земљиних упоредника, израчунао, дакле, само четврту колумну наше таблице VII. Но у тој колумни не долази до изражаја најважнији ефекат промена нагиба еклиптике, појачавање и слабљење сезонских опрека. Тај ефекат се најјаче испољио и дошао у леденим добима до пуног изражаја на географским ширинама од  $45^{\circ}$  до  $65^{\circ}$ , онде где су бројеви друге и треће колумне далеко надмашили бројеве четврте колумне, оне коју је Хергривс израчунао.

Заслужни аустријски метеоролог Р. Шпиталер покушавао је, пуних тридесет година, да реши проблем леденог доба. Већ од самог почетка својих рачуна пошао је од погрешно изведених образаца, па тиме дошао до скроз погрешних резултата. Иако је погрешност тих образаца била одавна примећена, доказана и њему саопштена, упорно је бранио исправност својих рачуна да би, сиромаш, тек пред своју смрт увидео да му је сав труд и рад био бесплодан.

## ГЛАВА ДЕСЕТА

ТОК ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ ЗА ВРЕМЕ МИНУЛИХ  
600 ХИЉАДА ГОДИНА

§ 35. Претходна питања. — Када сам се осведочио о свима недостацима старих теорија ледених доба, увидео сам да се њихов проблем мора ставити на много ширу основу но што је дотле учињено и на тој бази изградити једну засебну науку која би обухватила и теорију ледених доба као свој засебни део. Тај део те науке изложен је у првом одељку ове књиге. Овде ћемо, у њеним главним цртама, изложити његову примену. Но пре тога потребно је пречистити још нека претходна питања.

Као што смо видели у првом одељку ове књиге, секуларни ток осунчавања Земље је функција нагиба  $\epsilon$  еклиптике, ексцентрицитета  $e$  Земљине путање, лонгитиде  $P$ , перихела, соларне константе  $J_0$  и географске ширине  $\varphi$ . Астрономски елементи  $\epsilon$ ,  $e$ ,  $P$ , су једнозначно одређене функције времена  $t$ , па се њихове нумеричке вредности могу довољном тачношћу израчунати за дуги низ векова. Потребно је још да одговоримо на питање да ли величине  $J_0$  и  $\varphi$  подлеже вековним променама.

Врло брзо иза како је наша Земља преживела своје астрално стање, тј. престала бити ужарено небеско тело, обавила се чврстом кором и потамнела, изгубила је њена, још увек ражарена, унутрашњост сваки утицај на термичко стање Земљине површине. Може се израчунати да чим је Земљина чврста кора достигла дебљину од једва једног километра, а то се десило врло брзо, топлотне количине које су могле из унутрашњости Земље кроз њену кору прострујати до њене спољне површине нису биле више у стању да температуру те површине повисе и за један степен. Па ни сеисмичке и вулканске појаве, које су у том детињском добу наше Земље биле активније но сада што су, нису могле променити то стање, а ни само дејство морске плиме није имало оног утицаја на температуру Земљине површине као што га је Г. Х. Дарвин замишљао. Због свега тога топлота дона-

шана Сунчевим зрацима била је за време геолошке прошлости једина активна позиција у топлотном газдинству Земље и њене атмосфере.

За време тог раздобја од милијарди година била је издашност Сунчеве топлоте изложена полаганим променама. Према испитивањима Херцшпрунга и Расела о узајамној зависности између спектралног типа и апсолутне величине звезда некретница, а према резултатима теорије што су је изградили Бијалобјевски и Едингтон, изгледа доказано да све звезде имају истоветан ток свога развитка. Газовита лопта у свом почетном стадијуму, свака звезда има у свом детињству доста незнатну температуру, но због своје огромне величине ипак одашиље силну топлотну количину у бескрајни простор васионе. У свом даљем развоју она бива, додуше, све мања, али како при њеном смањивању њена температура бива све виша, не подлежи топлотна количина што је она зрачи у простор скоро никаквим променама док при једној одређеној густини њена температура не достигне свој максимум. Тек тада почиње снижавање њене температуре, а тиме и њене издашности у зрачењу топлоте; звезда је прекорачила врхунац свог развитка па корача, као патуљак међу осталим звездама, низбрдицом живота. Наше Сунце прекорачило је већ врхунац свога развитка, па је зато његова топлотна издашност у опадању. О величини и брзини тог опадања не располажемо никаквим поузданим бројним подацима, али су астрофизичари, геолози и климатолози мишљења да је оно било толико незнатно да се није испољило у климатској слици геолошке прошлости.

Ми ћемо се овде бавити само оним периодом те прошлости који обухвата размак од 600 хиљада година. За време тог интервала се није издашност Сунчеве топлоте променила. због чега ћемо соларну константу  $J_0$  сматрати, као што јој само име казује, временски непроменљивом.

Преостаје још да одговоримо на питање да ли је географска ширина  $\varphi$  којег било места Земљине површине непроменљива. Том питању посветио, сам велики део својих испитивања и показао да положаји Земљиних полова нису непроменљиви. То следује из геофизичке чињенице да континенти Земљине површине, саграђени из лакшег материјала, сила, почивају на својој тежој подлози, сими, по закону хидростатске равнотеже. Та подлога, чврста према краткотрајним силама, попустљива је према дуготрајним; она није флуидна, већ флуидална. Континенти Земље стрче високо изнад своје подлоге, па та геометријска асиметрија има за последицу и динамичку асиметрију. Земљина чврста кора, континенти и дна мора, бива центрифугалним силама које зависе од отстојања од центра Земље, постепено померана преко своје подлоге, а тиме се померају полови Земљине ротације по Земљиној површини. Та се појава може испитати законима механике, и описати језиком математике. Из конфигурације Земљине површине, из контура континената, могле су се израчунати и

путање која су оба Земљина пола за време геолошке прошлости превалила на лицу Земљином, а резултат рачуна потврдити и геолошким налазима. При томе се показало да се Земљини полови померају врло споро; они су се за време уоченог интервала од 600 хиљада година померили за  $48'$ . То померање је мало, па није имало уплива на ток ледених доба. Зато ћемо у нашим наредним испитивањима сматрати и величину  $\varphi$  за константу. Уосталом, не постоји никаква тешкоћа да се промене географских ширина узму накнадно у обзир, пошто ћемо наша израчунавања секуларног тока осунчавања Земље извршити за 16 еквидистантно расподељених географских ширина, па се ефекат промена географских ширина на секуларан ток осунчавања може израчунати једноставном интерполацијом.

**§ 36. Нумеричко израчунавање секуларног тока осунчавања Земље.** — Пре но што би се приступило израчунавању секуларног тока осунчавања Земљиних упоредника за време једног одређеног интервала Земљине прошлости, потребно је израчунати секуларне промене што су их претрпели за време тог раздобја они астрономски елементи који утичу на тај ток. Зато је, пре свега, потребно израчунати коефицијенте  $N, g, \beta$  једначина (123) и (124) што смо их саопштили у првом одељку ове књиге. Како све планете поремећавају узајамно своја кретања, потребно је узети их све у обзир. Узме ли се при томе у обзир само осам великих планета, то је за израчунавање тих коефицијената потребно извршити 80.640 засебних нумеричких израчунавања, а затим решити две алгебарске једначине осмог степена. После тога ваља из образаца (123) и (124), који се односе на елементе  $e, P$  и  $\Omega$ , извести обрасце за израчунавање секуларних промена нагиба еклиптике. Тај посао изискива дугогодишњи рачунски рад, па није ни чудо што је он до сада извршен довољном тачношћу само два пута.

Први који је таквом рачуну приступио био је велики математичар Лагранж, један од главних оснивача теорије планетских поремећаја. Но он је у свој рачун могао узети и обзир само шест старих планета. Планета Уранус, онда звана новом планетом, била је тек пронађена, елементи њене путање нису још били одређени, а њена маса била је непозната, јер још нису били пронађени њени сателити, а тек из кретања сателита могуће је одредити масу те планете. Како онда нису били још познати ни сателити Марсови, Лагранж је о масама већине планета имао непоуздане нумеричке податке, а планетске масе су полазна тачка за израчунавање поремећаја њихових кретања. Имајући све то у виду, Лагранж је у своме рачуну предвидео могућност коректура извршених на темељу тачнијих одређивања маса.

Крајем четвртог деценија прошлога века приступио је Леверије, каснији славни проналазач планете Нептуна, тачнијем израчунавању секуларних поремећаја планета, узимајући при томе у обзир још и

планету Уранус. Његови узорно извршени рачуни, објављени 1843, имају само један недостатак, што у њима није узет у обзир Нептун, пронађен три године доцније. Зато је иза проналаска те планете Американац Стоквел извршио ново израчунавање секуларних поремећаја планета, укључивши у њ и ту планету. Резултате свога рачуна, на који је утрошио скоро десет година, објавио је 1873 године. Од тога доба нису такви рачуни поновљени у целини.

Леверије и Стоквел задовољили су се тиме да тачно одреде нумеричке вредности свих коефицијената који се појављују у обрасцима (123) и (124) и да тима обрасцима израчунају секуларне промене астрономских елемената за сразмерно кратак временски интервал. Да ће се указати потреба да се такви рачуни протегну на дужи интервал, то нису ни слутили. То је тек увидео Л. Пилгрим чије смо име већ напоменули у § 34. Он је правилно оценио да би се проблем ледених доба могао решити само кад би се водило рачуна о секуларним променама елемената Земљине путање, али није нашао начин како да то учини. Но његова је заслуга што је, служећи се радом Стоквеловим, израчунао секуларне промене елемената  $e, e, P, \gamma$  за дуги интервал, од 1,010.000 године пре, па до 40.000 године после садашњости, боље рећи, пре и после 1850 године. Тим нумеричким резултатима Пилгримова рачуна послужио сам се при својим првим израчунавањима секуларног тока осунчавања Земље. При својим каснијим израчунавањима послужио сам се нумеричким израчунавањима секуларних промена астрономских елемената што их је са својим помоћним особљем извршио професор В. Мишковић, управник астрономске опсерваторије Универзитета у Београду. Та нумеричка израчунавања извршена су на тај начин што су на Леверијеовим рачунима извршене коректуре према нашим садашњим знањима о нумеричким вредностима планетских маса. Мишковић ми је резултате својих израчунавања дао у оном облику који одговара градњи образаца (226), тј. саопштио ми промене  $\Delta e$  нагиба еклиптике  $e$  према њеној вредности за годину 1800 коју ју Леверије одабрао за почетак своје временске скале, а исто тако промене  $\Delta (e \sin P, \gamma)$  производа  $e \sin P, \gamma$  према његовој вредности за напоменуту годину. Ти резултати саопштени су у приложеној табlici XI. Они се као што се из те таблице види, односе на 174 временска тренутка распоредана по интервалу од минулих 600 хиљада година, при чему су узети у обзир сви они тренуци када је лонгитуда  $P, \gamma$  перихела била једнака  $90^\circ$  односно  $270^\circ$ , тј. када је члан  $\Delta (e \sin P, \gamma)$  образаца (226) достигао своје екстремне вредности. Употреба Пилгримових и Мишковићевих, независно један од другог извршених, израчунавања секуларних промена астрономских елемената била је веома корисна и за њихову узајамну контролу; она је показала да се тим досадашњим сретствима секуларни ток осунчавања Земље може поуздано пратити кроз интервал од 600 хиљада година, и још нешто више, од садашњости унатраг. Но

било би свакако од велике добити за науку када би се таква израчунавања поново извршила, узимајући у обзир све велике планете и наша садашња знања о њиховим масама. Појединац не би био у стању да без туђе помоћи изврши те рачуне; они захтевају заједнички, а при томе, због потребне контроле, независан рад неколицине стручњака. Тај рачун требао би да обухвати не само геолошку прошлост од барем милион година, већ и исто толики интервал будућности, да бисмо и о њеној клими добили јасну слику као и о клими прошлости.

Користећи се рачунима споменутих двају научника и подацима својим напред саопштеним таблицама, израчунао сам, примењујући своје обрасце, секуларни ток осунчавања појединих упоредника Земљине површине. Тај свој рачун извео сам за упореднике од 5°, 15°, 25°, 35°, 45°, 55°, 65°, 75°, северне и јужне географске ширине. Сви нумерички резултати тог рачуна, њих 5536 на броју, које ћемо још предочити геометријским дијаграмима, не би могли бити саопштени у целини у овој књизи, но само у изводу што је учињено приложеном таблицом XII. Они су у целокупности објављени у моме делу „Kapen der Erdbestrahlung“.

Један део резултата саопштених у том делу налази се у табlici XII која је обухватила временски интервал од минулих 115 хиљада година, док је други један део графички предочен сликом 13 која је обухватила цео временски интервал од минулих 600 хиљада година, а која предочава секуларни ток летњег осунчавања горње границе атмосфере на упоредницама од 15°, 45° и 75° северне и јужне географске ширине.

Из те слике видимо ово. Секуларни ток осунчавања тих разних географских ширина био је разнолик. На високим географским ширинама, дакле на ширинама 75° северно и јужно, био је, мал те не, истоветан, на тропским ширинама обеју хемисфера, дакле на нашој слици на ширинама од 15°, био је супротан, а на средњим географским ширинама ни истоветан ни супротан. То потиче отуда што је у обрасцима (226), којима је тај ток израчунаван, на високим географским ширинама утицај промена  $\Delta \epsilon$  нагиба  $\epsilon$  еклиптике био пресудан због велике нумеричке вредности коефицијента  $\Delta W_s$ ; на ниским географским ширинама долази до пресудног изражаја утицај осталих двају астрономских елемената  $e$  и  $P$ , због велике нумеричке вредности коефицијента  $m$  који садржи та два елемента. Како се утицај првог од тих трију елемената испољава у истом смислу на обема хемисферама, а утицај осталих двају елемената у супротном смислу, то одатле следују те у слици 13 јасно предочене особине секуларног тока осунчавања Земље.

ТАБЛИЦА XI  
Секуларне промене астрономских елемената за време минулих  
600 хиљада година

Хиљаде година пре 1800 г.	$\Delta e$	$\Delta(e \sin P_y)$	Хиљаде година пре 1800 г.	$\Delta e$	$\Delta(e \sin P_y)$
600	-1,065	-0,0431	497,1	+0,405	+0,0071
595	-1,108	-0,0145	495	+0,347	+0,0054
590,3	-0,718	+0,0202	490	-0,095	-0,0294
590	-0,693	+0,0204	486,1	-0,480	-0,0514
585	+0,252	-0,0165	485	-0,588	-0,0516
580	+0,637	-0,0598	480	-0,902	-0,0078
579,7	+0,627	-0,0601	475,6	-0,792	+0,0228
575	+0,483	-0,0231	475	-0,773	+0,0223
570	+0,060	+0,0301	470	-0,468	-0,0198
569,4	-0,007	+0,0308	465,4	-0,177	-0,0571
565	-0,495	-0,0053	465	-0,152	-0,0567
560	-0,842	-0,0605	460	+0,422	-0,0080
559,0	-0,835	-0,0615	455	+0,682	+0,0208
555	-0,812	-0,0314	454,8	+0,658	+0,0208
550	-0,472	+0,0192	450	+0,083	-0,0053
548,6	-0,368	+0,0212	445	-0,572	-0,0458
545	-0,170	-0,0001	444,0	-0,772	-0,0465
540	+0,187	-0,0403	440	-1,072	-0,0282
537,8	+0,298	-0,0426	435	-1,332	+0,0049
535	+0,442	-0,0324	433,6	-1,275	+0,0052
530	-0,083	-0,0072	430	-0,915	-0,0089
525,3	-0,553	-0,0056	425	-0,038	-0,0301
525	-0,582	-0,0060	424,0	+0,109	-0,0300
520	-0,807	-0,0143	420	+0,657	-0,0192
515	-0,988	-0,0192	415,5	+0,822	-0,0082
510	-0,550	-0,0278	415	+0,840	-0,0085
508,2	-0,273	-0,0307	410	+0,455	-0,0207
505	+0,218	-0,0266	407,7	+0,083	-0,0243
500	+0,487	-0,0017	405	-0,350	-0,0216

ТАБЛИЦА XI

(Наставка)

Хиљаде година пре 1800 г.	Δε	Δ(εsinΠ <sub>γ</sub> )	Хиљаде година пре 1800 г.	Δε	Δ(εsinΠ <sub>γ</sub> )
400	-0,947	-0,0051	305	-0,465	+0,0114
399,2	-0,967	-0,0043	303,1	-0,007	+0,0167
395	-1,072	-0,0138	300	+0,542	+0,0018
390	-1,037	-0,0337	295	+0,680	-0,0413
389,6	-0,992	-0,0340	292,7	+0,542	-0,0481
385	-0,592	-0,0188	290	+0,378	-0,0390
380	+0,227	+0,0035	285	-0,193	+0,0002
379,7	+0,250	+0,0036	281,8	-0,577	+0,0095
375	+0,605	-0,0143	280	-0,792	+0,0050
370	+0,472	-0,0367	275	-1,073	-0,0241
369,6	+0,437	-0,0368	270,7	-0,930	-0,0342
365	+0,038	-0,0182	270	-0,907	-0,0332
360	-0,537	+0,0016	265	-0,493	-0,0200
359,9	-0,543	+0,0015	260	-0,113	-0,0081
355	-0,910	-0,0191	256,5	+0,345	-0,0041
350,9	-0,843	-0,0328	255	+0,542	-0,0040
350	-0,828	-0,0317	250	+0,873	-0,0125
345	-0,408	-0,0081	245	+0,035	-0,0336
342,1	-0,173	+0,0002	242,2	-0,313	-0,0385
340	-0,007	-0,0042	240	-0,795	-0,0346
335	+0,433	-0,0314	235	-1,267	-0,0001
332,8	+0,483	-0,0372	232,4	-1,453	+0,0148
330	+0,468	-0,0041	230	-1,538	+0,0132
325	-0,402	+0,0046	225	-1,043	-0,0292
323,3	-0,582	+0,0093	220,8	-0,097	-0,0557
320	-0,928	-0,0031	220	+0,083	-0,0551
315	-1,090	-0,0429	215	+0,842	-0,0070
313,4	-1,123	-0,0473	210	+0,853	+0,0261
310	-1,197	-0,0321	209,6	+0,807	+0,0264

ТАБЛИЦА XI

(наставка)

Хиљаде година пре 1800 г.	Δε	Δ(εsinΠ <sub>γ</sub> )	Хиљаде година пре 1800 г.	Δε	Δ(εsinΠ <sub>γ</sub> )
205	+0,280	-0,0045	100	-0,180	-0,0195
200	-0,480	-0,0559	95	+0,790	+0,0199
198,5	-0,623	-0,0598	94,0	+0,782	+0,0211
195	-0,957	-0,0398	90	+0,745	-0,0003
190	-0,977	+0,0149	85	+0,336	-0,0451
187,5	-0,898	+0,0241	82,8	+0,052	-0,0505
185	-0,780	+0,0137	80	-0,312	-0,0393
180	-0,308	-0,0361	75	-0,938	+0,0016
176,3	+0,167	-0,0526	71,9	-1,145	+0,0105
175	+0,333	-0,0503	70	-1,178	+0,0052
170	+0,542	-0,0139	65	-0,917	-0,0242
165	+0,275	+0,0136	60,6	-0,503	-0,0345
164,3	+0,205	+0,0138	60	-0,463	-0,0338
160	-0,222	-0,0044	55	-0,040	-0,0195
155	-0,760	-0,0370	50	+0,660	-0,0074
152,2	-0,885	-0,0429	47,1	+0,730	-0,0055
150	-0,983	-0,0380	45	+0,782	-0,0065
145	-0,715	-0,0092	40	-0,255	-0,0150
140	-0,133	+0,0094	35	-0,912	-0,0282
135	+0,387	-0,0084	32,7	-1,077	-0,0312
130	+0,710	-0,0408	30	-1,270	-0,0295
127,7	+0,498	-0,0469	25	-1,472	-0,0066
125	+0,250	-0,0402	22,1	-1,235	+0,0007
120	-0,802	-0,0012	20	-0,748	-0,0013
116,1	-1,160	-0,0186	15	+0,335	-0,0250
115	-1,200	-0,0170	11,1	+0,666	-0,0354
110	-1,298	-0,0225	10	+0,760	-0,0344
105,1	-1,225	-0,0545	5	+0,539	-0,0123
105	-1,223	-0,0545	0,6	+0,062	+0,0003

ТАБЛИЦА XII

Секуларне промене топлотних количина упуњених Земљиним упоредницама за време калоричних полугодина. (Оглед и извод из велике таблице „Канона“ о секуларном току осуњавања Земље за време минулих 600 хиљада година)

## Каноничне јединице

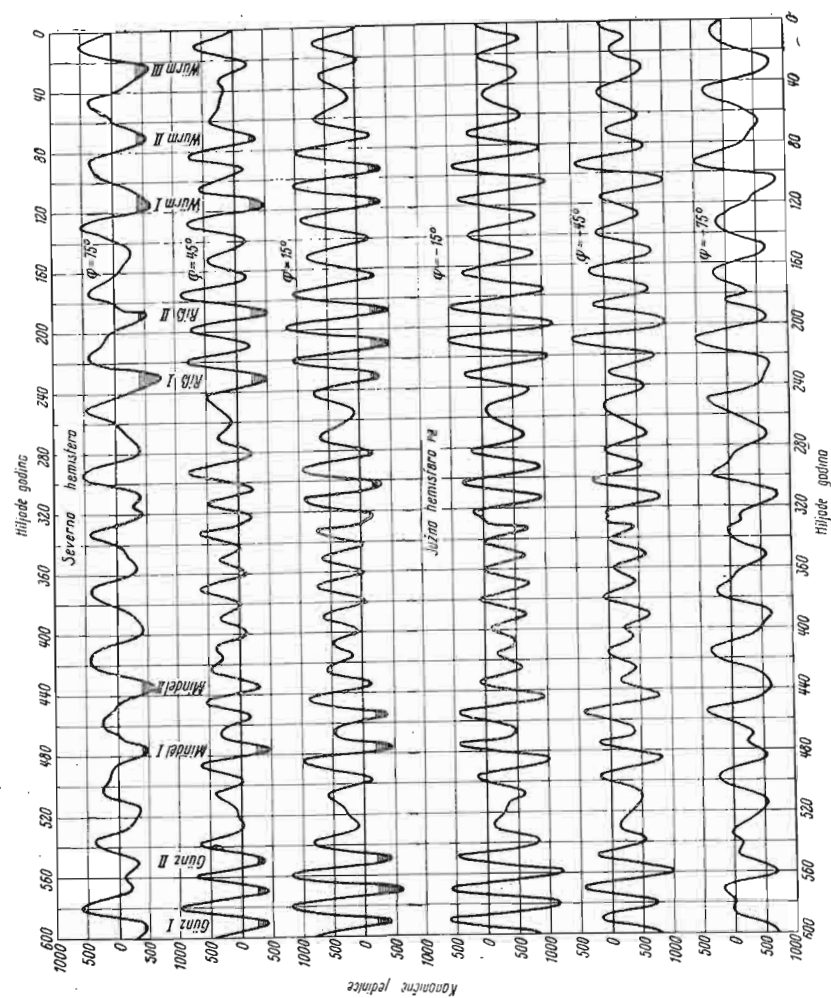
Хиљаде година пре 1800 н. е.	Северна хемисфера: Летња полугодина							
	Географска ширина							
	5°	15°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
0 <sub>6</sub>	- 8	- 5	- 2	+ 3	+ 7	+ 12	+ 18	+ 27
5	+ 231	+ 253	+ 264	+ 271	+ 275	+ 277	+ 288	+ 311
10	+ 672	+ 687	+ 685	+ 667	+ 632	+ 589	+ 553	+ 530
11 <sub>1</sub>	+ 693	+ 705	+ 697	+ 671	+ 630	+ 578	+ 529	+ 492
15	+ 495	+ 495	+ 482	+ 457	+ 420	+ 374	+ 328	+ 285
20	+ 49	+ 12	- 28	- 72	- 119	- 171	- 243	- 338
22 <sub>1</sub>	+ 24	- 36	- 99	- 166	- 237	- 315	- 426	- 573
25	+ 179	+ 103	+ 18	- 74	- 176	- 290	- 444	- 644
30	+ 635	+ 554	+ 453	+ 331	+ 189	+ 27	- 179	- 431
32 <sub>7</sub>	+ 663	+ 592	+ 498	+ 383	+ 249	+ 95	- 99	- 332
35	+ 597	+ 536	+ 454	+ 354	+ 236	+ 101	- 68	- 227
40	+ 311	+ 289	+ 258	+ 217	+ 168	+ 111	+ 42	- 39
45	+ 307	+ 141	+ 174	+ 206	+ 237	+ 271	+ 322	+ 395
47 <sub>1</sub>	+ 88	+ 121	+ 152	+ 182	+ 213	+ 246	+ 295	+ 366
50	+ 129	+ 157	+ 182	+ 206	+ 227	+ 250	+ 287	+ 343
55	+ 395	+ 381	+ 355	+ 319	+ 272	+ 217	+ 153	+ 84
60	+ 696	+ 654	+ 589	+ 504	+ 399	+ 278	+ 133	- 37
60 <sub>6</sub>	+ 712	+ 666	+ 599	+ 510	+ 401	+ 276	+ 125	- 51
65	+ 517	+ 457	+ 381	+ 288	+ 178	+ 54	- 105	- 296
70	- 68	- 123	- 178	- 233	- 292	- 354	- 446	- 570
71 <sub>9</sub>	- 177	- 227	- 273	- 317	- 361	- 407	- 479	- 583
75	- 3	- 49	- 95	- 144	- 196	- 253	- 333	- 440
80	+ 803	+ 762	+ 700	+ 614	+ 506	+ 379	+ 231	+ 62
82 <sub>8</sub>	+ 1018	+ 989	+ 932	+ 844	+ 734	+ 600	+ 450	+ 289
85	+ 901	+ 889	+ 852	+ 791	+ 708	+ 608	+ 500	+ 391
90	- 17	+ 19	+ 58	+ 98	+ 141	+ 189	+ 256	+ 346
94	- 450	- 399	- 333	- 253	- 158	- 51	+ 85	+ 251
95	- 426	- 376	- 311	- 232	- 140	- 35	+ 99	+ 260
100	+ 400	+ 379	+ 345	+ 301	+ 246	+ 182	+ 106	+ 19
105 <sub>1</sub>	+ 1139	+ 1045	+ 915	+ 752	+ 555	+ 329	+ 51	- 279
110	+ 494	+ 417	+ 322	+ 212	+ 83	- 61	- 248	- 480
115	- 306	- 355	- 396	- 433	- 465	- 497	- 554	- 642

ТАБЛИЦА XII

(Наставак)

## Каноничне јединице

Хиљаде година пре 1800 н. е.	Јужна хемисфера: Летња полугодина							
	Географска ширина							
	5°	15°	25°	35°	45°	55°	65°	75°
0 <sub>6</sub>	+ 4	+ 7	+ 10	+ 13	+ 15	+ 18	+ 24	+ 31
5	- 265	- 233	- 188	- 137	- 77	- 9	+ 78	+ 183
10	- 718	- 659	- 579	- 477	- 354	- 211	- 37	+ 170
11 <sub>1</sub>	- 735	- 681	- 603	- 505	- 384	- 246	- 77	+ 122
15	- 515	- 483	- 436	- 373	- 296	- 208	- 100	+ 23
20	- 3	- 38	- 76	- 116	- 157	- 201	- 265	- 352
22 <sub>1</sub>	+ 52	- 8	- 73	- 142	- 217	- 299	- 414	- 565
25	- 87	- 155	- 224	- 294	- 366	- 444	- 558	- 714
30	- 557	- 600	- 631	- 649	- 657	- 659	- 685	- 741
32 <sub>7</sub>	- 597	- 630	- 648	- 653	- 645	- 631	- 633	- 660
35	- 541	- 568	- 582	- 582	- 572	- 555	- 552	- 568
40	- 295	- 299	- 294	- 281	- 262	- 237	- 216	- 197
45	- 155	- 113	- 64	- 10	+ 51	+ 119	+ 210	+ 327
47 <sub>1</sub>	- 134	- 95	- 50	0	+ 55	+ 118	+ 201	+ 308
50	- 169	- 133	- 90	- 40	+ 15	+ 78	+ 161	+ 265
55	- 393	- 383	- 361	- 329	- 286	- 237	- 181	- 120
60	- 668	- 670	- 653	- 620	- 569	- 508	- 447	- 391
60 <sub>6</sub>	- 680	- 684	- 669	- 636	- 587	- 526	- 467	- 413
65	- 461	- 491	- 509	- 516	- 516	- 510	- 519	- 550
70	+ 142	+ 81	+ 14	- 61	- 142	- 232	- 356	- 516
71 <sub>9</sub>	+ 247	+ 185	+ 113	+ 31	- 61	- 163	- 299	- 473
75	+ 61	+ 15	- 37	- 90	- 150	- 215	- 305	- 424
80	- 783	- 774	- 744	- 692	- 620	- 535	- 443	- 350
82 <sub>8</sub>	- 1022	- 987	- 924	- 832	- 714	- 574	- 414	- 241
85	- 921	- 877	- 804	- 707	- 584	- 440	- 272	- 81
90	- 29	+ 7	+ 46	+ 88	+ 133	+ 183	+ 250	+ 342
94	+ 402	+ 427	+ 443	+ 449	+ 446	+ 441	+ 447	+ 471
95	+ 378	+ 404	+ 421	+ 430	+ 430	+ 429	+ 439	+ 468
100	- 388	- 385	- 371	- 347	- 312	- 272	- 228	- 185
105 <sub>1</sub>	- 1063	- 1089	- 1087	- 1058	- 1007	- 939	- 883	- 851
110	- 414	- 463	- 504	- 536	- 561	- 585	- 634	- 716
115	+ 380	+ 311	+ 228	+ 133	+ 23	- 101	- 262	- 464



Сл. 13 — Секуларни ток летњег осунчавања горње границе атмосфере на упоредницима од 15°, 45° и 75° северне и јужне географске ширине за време минулих 600 хиљада година

## ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

### ХРОНОЛОГИЈА И РАСЧЛАЊАВАЊЕ ЛЕДЕНИХ ДОВА

§ 37. Прве примене крива осунчавања. — Математичко испитивање и предочавање секуларног тока осунчавања наше Земље је, као што смо видели, предмет егзактне науке. Остајући и даље на том пољу, могу се истим сретствима из секуларних промена осунчавања извести и њихови термички ефекти и тиме добити слика климатских промена Земљине прошлости. Но пре, но што је то учињено постепеном изградњом математичке климатологије, нашао је секуларни ток осунчавања Земље, предочен својим кривама, широке примене у геологији, створивши хронологију ледених доба и омогућавајући расчлањавање тих доба у све њихове поједине фазе. До тога се дошло на овај начин.

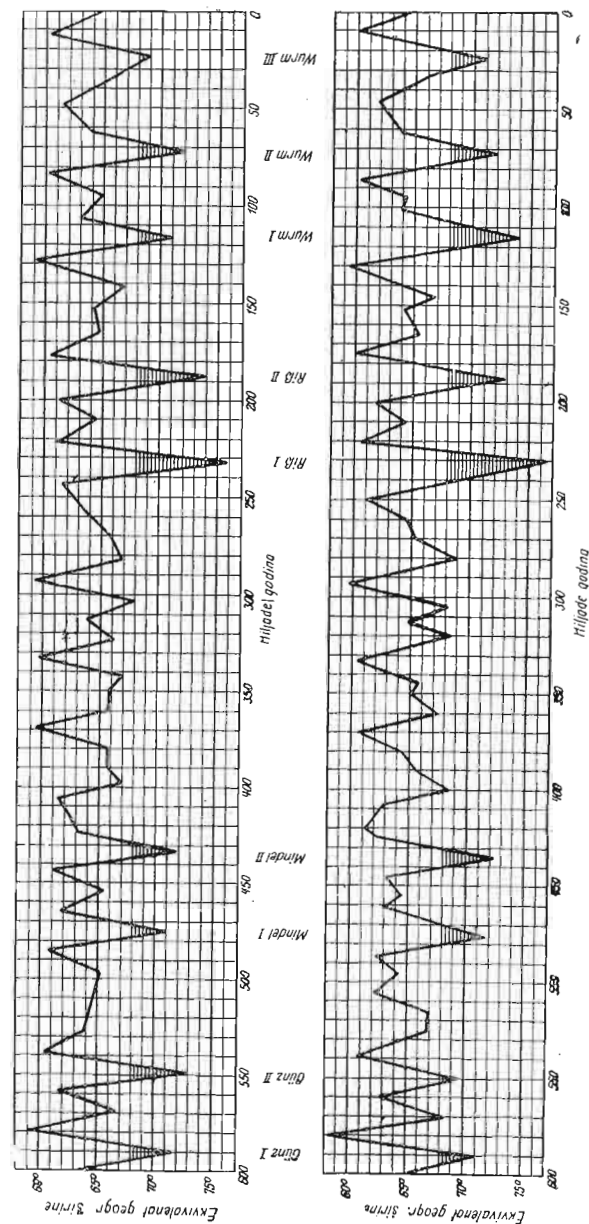
Велики немачки климатолог Владимир Кепен (рођен у Петрограду 1846, умро у Грацу 1940), чим се упознао са резултатима дела наведеног у претходном списку под 7, увидео је његов значај за испитивање климата Земљине прошлости. Он је, баш у то доба, радио на том питању и са својим зетом Алфредом Вегенером (1880—1930) спремао о том предмету велико дело „Климата Земљине прошлости“, наведеном у списку страних радова на крају ове књиге под 1. Саопштавајући ми то, позвао ме на сарадњу. После исцрпне преписке и увидевши да је, као што су то и каснија испитивања несумњиво доказала, за формацију ледењака меродавна температура летње полугодине, одлучисмо да обратим своју пажњу нарочито секуларном току летњег осунчавања упоредника Земље. Тако сам се нашао пред питањем шта се има разумети под летњом полугодином, јер да астрономска летња полугодина, због променљивости своје дужине, не заслужује тај назив, то ми је било јасно већ када сам писао своје напоменуто прво дело. Позив Кепенов на сарадњу био је потстрек да то питање решим. Решио сам га, као што смо видели, увођењем појма калоричних полугодина. Када сам извео математичке обрасце како да се из датих астро-



номских елемената  $\epsilon$ ,  $e$ ,  $P$ , израчунају оне топлотне количине осунчавања уоченог упоредника Земљиног које одговарају летњој, односно зимској, калоричној полугодина, поставило се питање, за које упореднике треба исвести те рачуне. Келен ми саветова да то учиним за упореднике од  $55^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $65^\circ$  северне географске ширине, јер је тај појас Земљине површине био главно поприште ледених доба. Својим обрацима израчунао сам, служећи се при томе напоменутим подацима Пилгримовим о секуларним променама астрономских елемената, амплитуде осцилација секуларног тока летњег осунчавања уочених упоредника за период минулих 650 хиљада година. Када сам израчунао све амплитуде тога тока које су се десиле за време тог интервала — било их је 62 — прерачунао сам их, по договору са Келеном, у фиктивне промене географске ширине да би се тиме добила очигледна слика по јединих замаха тих осцилација. Када сам дакле, рецимо, нашао да се у једном уоченом добу геолошке прошлости летње осунчавање упоредника од  $65^\circ$  смањило према таквом садашњем осунчавању, пронашао сам ону севернију географску ширину која у садашњосуди добија то смањено летње осунчавање. Када је у уоченом добу геолошке прошлости летње осунчавање упоредника било веће но сада што је, добила се фиктивна промена географске ширине према југу. Резултате рачуна предочио сам дијаграмом који је показивао три зупчасте линије које касније добише назив крива осунчавања. Тај дијаграм објављен је у Келен-Веженеровом делу, а касније често репродукован и у другим публикацијама. Она крива тог дијаграма која се односи на упоредник од  $65^\circ$  северне ширине предочена је у горњем делу слике 13.

Посматрамо ли тај дијаграм, видимо да се летње осунчавање упоредника  $65^\circ$ , а као што ћемо видети из једне од идућих слика, и осунчавање упоредника од  $60^\circ$  и  $55^\circ$  знатно умањило у добима од 589, 548, 475, 434, 231, 187, 116, 72 и 22 хиљада година пре садашњости. То су била времена хладних летњих полугодина. Тих девет упада хладноће могу се према њиховој узајамној близини сврстати у четири групе од којих прве три садржарају, свака, по два упада, а четврта три упада. У тим групама уочио је Келен четири доба Пенк-Брикнерове шеме, доба Гинца, Миндела, Риса и Вирма. Заиста, ако у том дијаграму, превлачењем хоризонталним линијама, истакнемо оне интервале за време којих је летње осунчавање упоредника од  $65^\circ$  било мање но данашње упоредника од  $68^\circ$ , видимо јасно да ти зупци надмашавају све остале зупце криве осунчавања. Спојимо ли те зупце у оне три групе о којима смо говорили, добивамо шему предочену сликом 15.

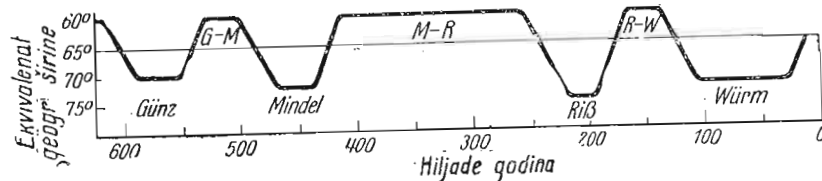
Упоредимо ли шеме слика 15 и 12, видимо да се оне добро, шта више изненадно добро, слажу када се узме у обзир да су добивене на два сасвим различита начина, геолошким испитивањем и астрономским рачуном. Позивајући се на ту подударност могао је Келен пуном одлучношћу рећи и објавити да у мојим кривама осунчавања долазе



Сл. 14. — Амплитуде секуларних осцилација летњег осунчавања упоредника од  $65^\circ$  сев. ширине  
Горе: старији дијаграм изведен на темељу Пилгримових израчунавања секуларних промена астрономских елемената;  
Доле: новији дијаграм изведен на темељу Мишковићевих израчунавања секуларних промена астрономских елемената

до потпуног изражаја четири алпијска ледена доба Пенк-Брикнерове шеме, а са тим његовим судом сагласио се убрзо иза тога и сам Брикнер.

На тај начин је Кепен, први од свију, открио везу између секуларног хода осунчавања Земље, како сам га својом теоријом и рачуном предочио, и промена Земљине климе доказаних геолошким сретствима. Но да би својом тврђењу дао јачи ослонац, морао је да одговори и на питање зашто су два, па и три, узастопна упада летње хладноће одвојена једна од другог краћим интервалом топлијих лета оставила у Алпима траг једног јединог дугог упада хладноће.



Сл. 15

Данас имамо у рукама јасан доказ зашто је то морало тако бити, пошто је, као што ћемо видети, пронађена веза између секуларног тока осунчавања и померања границе вечног снега, па смо у стању израчунати докле је та граница сизала у појединим епохама прошлости. Када се та граница спуштала у брдима до њиховог подножја, напуниле су се долине и предгорја тих планина огромним снегом који се уздигао до оних висина у којима се, очуван својом висином од отапања, одржао и за време оног кратког периода топлијих лета. Но у доба публикације Кепен-Вегенерова дела није била још пронађена квантитативна веза између осунчавања и границе вечног снега, али ју је Кепен интуитивно осетио и тиме растумачио оно питање. Он је, већ онда, могао да се позове на то да има позитивних геолошких доказа да је ледена периода Вирма била расчлањена у три засебне фазе и прорекао је да ће се такво расчлањавање морати показати и код остала три ледена доба Пенк-Брикнерове шеме. А то се, заиста убрзо догодило.

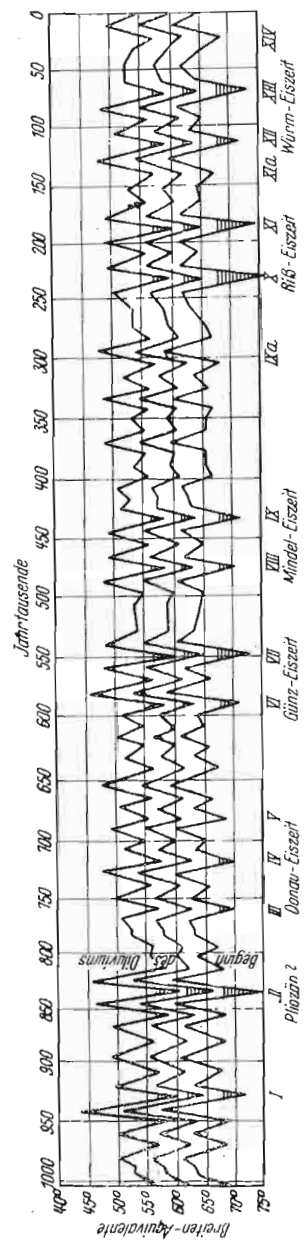
**§ 38. Хронологија леденог доба.** — Објављивањем Кепен-Вегенеровог дела год. 1924 и предавањем што га је о његовој садржини Венегер одржао исте године на конгресу природњака и лекара у Инсбруку добиле су моје криве осунчавања велики публицитет и постале полазном тачком значајних радова страних научника, о којима ћу сада укратко да реферирем. Отпочећу са делом Бартела Еберла, наведеном у списку страних радова под 5.

Поприште истраживачког рада Еберловог било је северно предгорје Алпи између река Лехе и Илере. Ту су два глечера, названа по тима рекама, оставила јасног трага свог некадањег пространства у свима њиховим фазама давне прошлости све до у садашњост. На том

попришту могао је Еберл да утврди докле су све ти глечери допирали за време тог дугог периода и која је била узастопност њиховог надирања и повлачења. Заиста, својим чеоним моренама забележили су ти глечери своје некадање пространство, а висинским положајима тераса долина кроз које су они надирали своју узастопност. Те забелешке могле су се, дакле, директно очитати са терена, док су се временски размази између појединих фаза надирања и повлачења могли, мањом тачношћу, одредити из висинског размака и из структуре оних тераса. О резултатима својих испитивања реферисао је Еберл својим предавањем у Геолошком Удружењу у Минхену 29 јануара 1924, дакле пре објављивања мојих крива осунчавања. Када је у јесен те године Еберл сагледао у делу Кепен-Вегенера моје криве, запањила га подударност између тих астрономским рачуном добивених крива и графичком предочбом својих властитих резултата, добивених на терену. Моје криве су, као што је речено, обухватиле период од минулих 650 хиљада година, таман толико да укључе у себе и Гинцово ледено доба. Али је Еберлу, а пре њега и Гуцвилеру, пошло за руком да пронађу трагове глацијација које су се десиле пре Гинца. Зато ме Еберл, посредством Кепена, замоли да своја израчунавања секуларних промена осунчавања споменутих трију упоредника продужим даље у прошлост. Одазивајући се његовом позиву допунио сам своја израчунавања све до пуног милиона година испред садашњости и послао нумеричке резултате и њихову графичну предочбу Еберлу. Он их је, упоређујући их са својом графичном предочбом, објавио у своме напоменутом делу 1930 године. Ти дијаграми предочени су овде сликама 16 и 17.

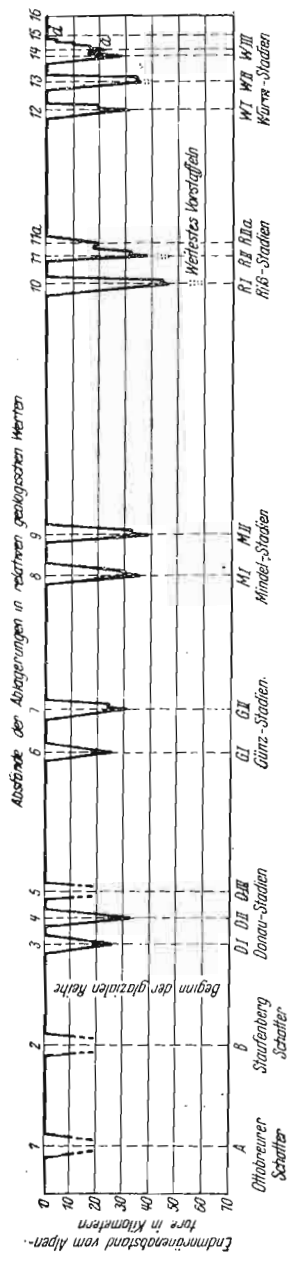
Слика 16 предочава замахе осцилација секуларног тока осунчавања уочених трију упоредника, како су они добивени астрономским рачуном, док слика 17 предочава замахе надирања напоменутих глечера, како их је Еберл утврдио на терену. Упоредимо међусобно те две слике. Бацимо, у то име, прво поглед на слику 16. Ту нам одмах упадају у очи последња три упада хладноће означена са XII, XIII и XIV. Бацимо сада поглед на слику 17. Ту уочавамо последња три надирања глечера, означена са  $W_I$ ,  $W_{II}$  и  $W_{III}$ . Својим ритмом и замасима подударују се обе те две предочбе врло додро. Видимо, заиста, да је средњи замах у обе слике најјачи, а последњи најслабији. Једина разлика између те две слике лежи у временском отстојању тих замаха. Та разлика потиче отуда што је мој дијаграм израђен на темељу тачног астрономског рачуна, а Еберлов на темељу приближног, дакле мање тачног, геолошког одређивања.

Пођимо даље. Идућа два велика замаха, она која су у слици 16 означена са X и XI, а у слици 17 са  $R_I$  и  $R_{II}$ , подударују се, исто тако, врло добро. То исто важи и за наредна два замаха означена са



Сл. 16 — Замасн осцилација секуларног тока осунчавања

VIII и IX, односно са  $M_I$  и  $M_{II}$ , која су подједнаког интензитета. Исто тако подударане постоји и за идућа две замаха означена са VI и VII односно  $G_I$  и  $G_{II}$ .



Сл. 17 — Замаси некадашних надирања глечера Леха и Илере

Пођимо још даље. У слици 16 видимо, означена са II, IV и V, три слабија упада хладноће. Њима одговарају, својим ритмом и замасима, имајући у виду оно што смо рекли о различитој тачности моје и Еверлове временске скале, да не може боље бити, три надирања глечера означена у слици 17 са  $D_I$ ,  $D_{II}$  и  $D_{III}$ . Пошавши још даље у прошлост наилазимо у слици 16 један врло јак, али изолован упад хладноће означен са II. Њему одговара у слици 17 изоловано надирање глечера, означено са B. У слици 16 наилазимо даље на још један доста снажан, али и опет изолован упад хладноће означен са I, а у слици његов корелат надирања глечера, означен са A.

Том подударношћу, која није могла бити случајна, доказано је да је Вирмска глацијација имала, заиста, три засебне фазе, како је то Кепен тврдио на темељу криве осунчавања и на темељу геолошких налаза, а да су остале три глацијације Пенк-Брикнерове шеме имале, свака, по две своје фазе, како је то Кепен закључио из мојих крива осунчавања. Такво расчлањавање је убрзо затим извршено и за остали алијски глацијал геолошким испитивањима Кнауера, Гагела и Бека.

Што се тиче оних знатнијих упада летње хладноће који су се десили пре Гинца, види се да су и они оставили свога трага, но како је од доба када су ти трагови сталожени прошло преко 800 хиљада година, њих је зуб времена већим делом изрезубљао, као што је назначено и у Еберловом дијаграму. Такви трагови, старији од Гинца, нађени су и у осталим деловима Европе. Вероватно да ти краткотрајни изоловани упади хладноће нису били у стању да створе права ледена доба. За то је било потребно два или три узастопна упада као што је то био случај код четири глацијала Пенк-Брикнерове шеме.

Но најважније што следује из слика 16 и 17 је то да је секуларни ток осунчавања Земље, сваким својим јачим замахом, оставио јасног трага на лицу Земљином. А тиме су ти трагови, као што је сликом 16 учињено, могли бити датирани астрономским календаром. Тако је квартарно доба добило своју хронологију.

Наш грађански календар није, у ствари, ништа друго до пребројавање небеских појава. У његовим елементима, дану, месецу и години, огледају се све саме космичке појаве, обртање Земље око своје осе, обилажење Месеца око Земље и обилажење Земље око Сунца. Исто је то и са календаром Земљине прошлости, створеним кривама осунчавања. У њему се огледају космичке појаве више категорије, осцилације нагиба еклиптике и ексцентрицитета Земљине путање и обилажење перихела по тој путањи. Неједнакост периода тих појава чине тај календар Земљине прошлости компликованијим но што је наш грађански календар, но не мање поузданим, јер се и он оснива на истој стварној чињеници, кретању наше Земље.

Изведен из те чињенице, чији механизам нам је боље познат но механизам ма које друге природне појаве, астрономски календар Зем-

љине прошлости предочава нам стварни ток осунчавања горње границе Земљине атмосфере. Његов ритам није могао бити измењен никаквим појавама у тој атмосфери. Периодичне промене облачности у атмосфери нису могле утицати на ефекте његовог вековног хода. А доказано је да то нису могле учинити ни промене трансмисионе способности Земљине атмосфере како су их замишљали Де Марки и Архениус. Све то мора се имати у виду кад се појаве какве несугласице између секуларног тока осунчавања Земље и трагова климатских промена опажених на лицу Земљином. Те несугласице иду на рачун непоузданости тих трагова и њиховог паралелизовања са кривама осунчавања, а никако на рачун тих крива.

§ 39. Расчлањавање леденог доба у све његове фазе. — Када је Дарвин објавио своју теорију о променљивости врста и њиногог постепеног развика једне из друге, сумњало се дуго у исправност те теорије због тога што дотле прикупљене геолошке збирке нису садржавале прелазних врста које би демонстрале њихову еволуцију. Видело се, међутим, да томе није био узрок неисправност Дарвинове теорије, већ то што су се остаци некадањег биљног и животињског царства само у изузетним случајевима могли очувати до садашњости. Слично је и са траговима климатских промена давне Земљине прошлости. Но што се тиче последњег њеног периода, такви трагови очувала су се у изобиљу. У пределима Немачке који су ограничавали снежни Земљин покривач леденог доба поједина надирања и повлачења тог покривача оставила су многобројнијих сведочанстава о себи, но што је то било у алпијским крајевима. Тако су у горњим токовима немачких река остале забележене све знатније климатске промене прошлости. Одлични немачки геолог Волфганг Сергел (1887—1946), уочивши многобројност тих трагова климатских промена, предузео је, још пре објављивања мојих крива осунчавања Земље, да те трагове испита, систематски среди и њима изврши потпуно расчлањавање леденог доба у све његове фазе. Зато се он мора сматрати творцем тог расчлањавања.

Прве ослонце за такво расчлањавање нашао је Сергел у терасама Сале и Илме, доказавши да су те терасе створене климатским променама; шљунчани речни наноси тих река настали су у хладним добима, а њихови усеци у временима благе климе. Тако је, још пре објављивања мојих крива осунчавања Земље, нашао да су се ту одменила 11 хладних са 11 топлих доба.

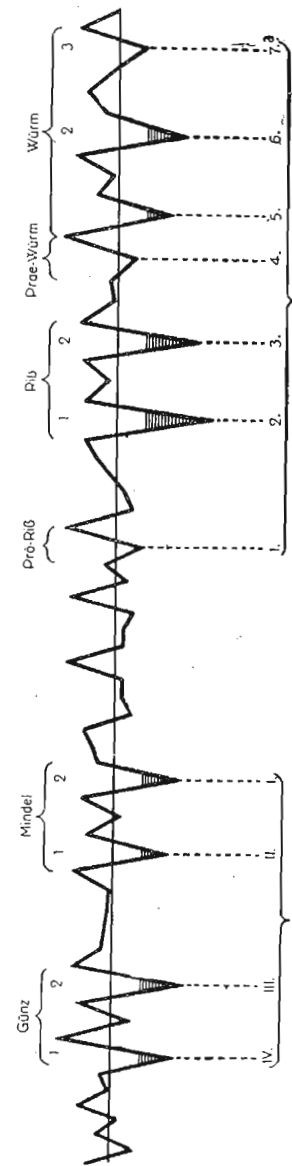
Два месеца иза како је Сергел објавио те чињенице, изашло је Кепен-Вегенерово дело и Сергел је могао да резултате својих испитивања упореди и доведе у везу са кривама осунчавања. То је учинио у своме делу наведеном у списку страних радова под 2. При томе је проширио своја испитивања на остале речне системе Немачке тако да

је тим делом расчлањавање леденог доба добило широку и чврсту основу. Из тога дела узета је приложена слика 18 која предочава упоређење и укључење тераса Илме у криву осунчавања.

Из те слике видимо да су сви већи замаси криве осунчавања нашли свој корелат у терасама Илме, и то не само оних девет великих замаха, већ и два мања која је Сергел назвао „Пре-Рис“ и „Пре-Вирм“.

Сергел се није зауставио на том значајном резултату свога рада, већ га је проширио и на друге речне системе Немачке и створио своју школу која је радила у истом правцу, а која је дала подстрек да и геолози изван Немачке приступе расчлањавању леденог доба. Пољски, фински, мађарски и руски научници приступише таквом послу, служећи се при томе мојим кривама, не само оним првим које представљаху само замахе осунчавања, већ и оним континуирним, дакле стварним, кривама које сам објавио у својим радовима наведеним у предходном списку под 13 и 25, од којих је први био саставни део и увод у Кепенову Енциклопедију климатологије, а други саставни део Гутенбергове Енциклопедије геофизике, чиме су те криве добиле још шири публицитет. Он је појачан и тиме што је моје дело, наведено у претходном списку под 13, преведено и на руски језик. Тим новим сретствима испитани су трагови климатских промена на широком простору од Урала до Рајне. Као последица тога рада би стара Пенк-Брикнерова шема ледених доба замењена новом, детаљнијом, поуздано датираним.

Не лежи у оквиру овог уџбеника да се позабавимо тим радовима геолога. Они су толико многобројни да се морамо задовољити тиме да значајније од њих, у којима се изрично примењује теорија саопштена у овом уџбенику, саопштимо у списку на крају ове књиге.



Сл. 18. — Упоређење тераса Илме са кривом осунчавања

## ГЛАВА ДВАНАЕСТА

МЕХАНИЗАМ И ТОК ВЕЛИКИХ КЛИМАТСКИХ ПРОМЕНА  
КВАРТАРНОГ ДОБА

§ 40. Непосредни термички ефекти секуларног тока осунчавања Земље. — До сада смо испитивали и математичким сретствима предочили секуларни ток осунчавања Земље како се одиграо за време минулих 600 хиљада година. Нашли смо га забележеног његовим безбројним траговима на лицу Земљиног. Сада је на реду да испитамо климатске ефекте тога тока и његову везу са споменутиим сведочанствима климатских промена прошлости. Прво ћемо испитати његове термичке ефекте.

Веза између осунчавања Земље и температуре њене површине и атмосфере је један од главних задатака Математичке климатологије која не улази у оквир овог уџбеника. Упућујући у том питању читаоца на дела наведена у претходном списку под 13 и 27, задовољићемо се овде тиме да из те области науке применимо један образац да бисмо га накнадно верификовали сретствима којима располаже овај уџбеник. Тај образац даје нам везу између средњег осунчавања  $W$  уоченог упоредника Земљиног за време године или за време њених калоричних полугодина и њиме изазване средње годишње или полугодишње температуре  $\theta(0)$  доњег слоја атмосфере, мерене апсолутном мером.

Он има овај облик

$$\sigma \theta^4(0) = \frac{1}{2} (1 - A) (1 + k_2 M) W.$$

При томе  $A$  предочава рефлексиону способност Земљине површине и атмосферског стуба који почива на јединици те површине,  $M$  масу тога стуба,  $k_2$  апсорпциони коефицијент његов за тамне зракове, а  $\sigma$  константу Стефановог закона зрачења.

Ако, испитујући термичке ефекте секуларних промена осунчавања  $W$ , не узимамо у обзир промене рефлексионе и апсорпционе способности

атмосфере, онда се у предњем обрасцу имају  $\sigma$ ,  $A$  и  $k_2$  сматрати за константе. Стављајући за њих њихове садашње, експерименталним путем одређене нумеричке вредности, добивамо образац

$$\theta^4(0) = n W,$$

при чему је

$$n = 14145 \times 10^6.$$

Ако нам, дакле,  $W$  предочава средње сезонско осунчавање уоченог упоредника Земљиног у једном одређеном добу геолошке прошлости, а  $W_0$  такво осунчавање у садашњости, а  $\theta$  односно  $\theta_0$  апсолутне температуре које тим осунчавањима одговарају, онда имамо ове једначине

$$\theta^4 = n W,$$

$$\theta_0^4 = n W_0,$$

$$\theta^4 - \theta_0^4 = n (W - W_0).$$

Разлика

$$W - W_0 = \Delta W,$$

предочава секуларну промену осунчавања  $W$ . Зато је

$$\theta^4 - \theta_0^4 = n \Delta W.$$

Ако средњу сезонску температуру доњег слоја атмосфере у доба прошлости односно у доба садашњости, мерену Целзиусовом скалом, означимо са  $u_0$  односно са  $u$ , имамо

$$\theta = 273 + u,$$

$$\theta_0 = 273 + u_0,$$

$$\theta^4 = 273^4 \left(1 + \frac{u}{273}\right)^4,$$

$$\theta_0^4 = 273^4 \left(1 + \frac{u_0}{273}\right)^4.$$

Разломци  $\frac{u}{273}$  и  $\frac{u_0}{273}$  су, пошто је реч о средњим температурама лета, зиме или целе године, увек толико малени да се њихов квадрат и њихове више потенције могу занемарити поред јединице. Зато применом биномског обрасца добивамо ово

$$\theta^4 = 273^4 \left(1 + \frac{4u}{273}\right),$$

$$\theta_0^4 = 273^4 \left(1 + \frac{4u_0}{273}\right),$$

$$\theta^4 - \theta_0^4 = 4 \times 273^3 (u - u_0).$$

Како

$$u - u_0 = \Delta u$$

предочава секуларну промену температуре доњег ваздушног слоја, следеће из претходних једначина овај образац

$$\Delta u = \frac{n}{4 \times 273^3} \Delta W.$$

Стављајући овамо саопштenu нумеричку вредност од  $n$ , добивамо

$$\Delta u = 173,8 \Delta W.$$

Желимо ли да помоћу овог обрасца израчунамо секуларну промену средње температуре летње односно зимске калоричне полугодине изазвану секуларном променом  $\Delta Q_s$  односно  $\Delta Q_w$  осунчавања уочене географске ширине за време тих калоричних полугодина, ваља имати у виду ово.

У предњем обрасцу треба за  $\Delta W$  ставити осунчавање уочене географске ширине у доба споменутих калоричних полугодина, обрачунато на минуто и јединицу површине, у грам калоријама. У нашој табелици XII саопштене су секуларне промене  $\Delta Q_s$  и  $\Delta Q_w$  полугодишњих осунчавања  $Q_s$  и  $Q_w$  у каноничним јединицама, стављајући  $J_0 = 1$ ;  $T = 100.000$ . Како година  $T$  обухвата 525.942 минуте, а како соларна константа  $J_0$  има 1,94 грам-калорије, треба бројеве табелице XII помножити са  $\frac{1,94 T}{100.000}$ , а затим поделити са дужином  $\frac{1}{2} T$  калоричне полугодине, Зато добивамо

$$\Delta u_s = \frac{1,94 \times 173,8}{50.000} \Delta Q_s$$

или, заокружено

$$\Delta u_s = \frac{1}{150} \Delta Q_s,$$

$$\Delta u_w = \frac{1}{150} \Delta Q_w.$$

Ови обрасци казују да се секуларна промена средње температуре летње односно зимске калоричне полугодине, изражена у степенима Целзиусове скале, добива ако бројеве саопштене у табелици XII поделимо са 150.

Секуларна промена средње годишње температуре дата је обрасцем

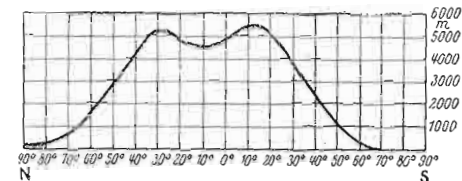
$$\Delta u_T = \frac{1}{300} (\Delta Q_s + \Delta Q_w).$$

#### § 41. Померања висинске границе вечног снега непосредно изазвана секуларним током осунчавања Земљиних упоредника.

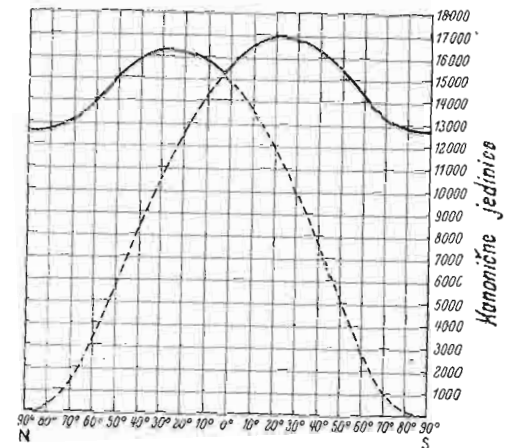
— Садашњи висински положај границе вечног снега у поједним областима Земљине површине зависи од разноврсних чиниоца, температуре, атмосферских талоба, морских струја, конфигурације континената, рељефа Земљине површине и других споредних фактора. Када питамо каква ли је померања тог висинског положаја непосредно изазвао секуларни ток осунчавања Земље за време геолошке прошлости, морамо узети у обзир само први од наведених чинилаца. Искључимо ли, дакле, све остале чиниоце или сматрамо ли их равномерно дејствујуће на површини Земље, онда висинска граница вечног снега може зависити само од географске ширине. Она ће бити, као што су то увидели већ Хумболт, Бух и Рену, изотермна површина летње полугодине, јер та топлија полугодина, за време које се снег отапа, одређује висину до које се снег одржава и за време лета. Ако снег не отопни за време те летње полугодине, неће отопити ни за време зимске полугодине. Под летњом полугодином имамо разумети термичну летњу полугодину изазвану, са задоцњавањем од 26 дана, осунчавањем упућеним Земљи за време калоричне летње полугодине.

Ради се, дакле, о томе да се пронађе веза између летњег осунчавања појединих географских ширина Земљине површине и висинског положаја границе вечног снега. О том положају извештава нас графички дијаграм што га је израдио Кепен, а који је репродукован у приложеној слици 19.

Кепен је, пошто је помоћу многобројних података о висинском положају садање границе вечног снега у појединим пределима Земљина шара израчунао средњу вредност те висине за сваку поједину географску ширину, предочио је резултат тог израчунавања графички, чиме је добио континуирну криву његова дијаграма.



Сл. 19 — Садашња висинска граница вечног снега на појединим географским ширинама



Сл. 20 — Топлотне количине упућене појединим географским ширинама за време калоричних полугодина

О садашњем меридионалном распореду топлотних количина упућених појединим географским ширинама за време калоричних полугодина дају нам потпун извештај наше таблице VIII и IX. Служећи се њима, састављен је дијаграм предочен у слици 20. Пуно извучена линија тога дијаграма односи се на летњу, а исцрткана линија на зимску калоричну полугодину. Она тачка у којој се те две криве међусобно секу одговара оној географској ширини на којој су топлотне количине упућене јој за време летње односно зимске полугодине међусобно једнаке, дакле калоричном екватору. Апсциса те тачке предочава нам садашњу географску ширину екватора. Она лежи, као што се види из слике и као што то следује из обрасца (199) ако се у њ ставе садашње нумеричке вредности астрономских елемената  $\epsilon, e, P_v$ , на трећем степену северне географске ширине.

Упореди ли се пуно извучена крива тог дијаграма са кривом слике 19, упада нам, већ на први поглед, у очи уска повезаност тих двеју крива. У једној и другој криви јасно се оцртава екваторијална удолица чија најнижа тачка лежи у обе криве на северној хемисфери. Те две криве имају, и иначе, исти изглед; од два врхунца сваке од тих крива лежи виши на јужној хемисфери. Из тих крива види се и то да крива висинског положаја границе вечног снега нема никакве везе са исцртканом кривом слике 20 која предочава меридионални распоред зимског осунчавања појединих упоредника, а ни са распоредом целогодишњег осунчавања који се добија сабирањем ордината обеју крива. Одатле следује да висински положај границе вечног снега зависи, у колико се осунчавања тиче, само од количине летњег осунчавања.

Испитајмо сретствима математике везу између споменутих двеју крива и двеју природних појава што их оне предочавају. Пошто се ради о вези између осунчавања и висинског положаја границе вечног снега, потребно је, пре свега, искључити све остале утицаје. Они се нарочито испољавају у сушним зонама које леже с обе стране екватора, а у којима је количина атмосферских талоба далеко мања но на осталим упоредничким зонама Земљине површине. Зато ћемо се, тражећи жељену везу, ограничити на онај део Земљине површине који лежи северно од упоредника од  $40^\circ$  северне ширине, а који је био и главно поприште појаве ледених доба.

У приложеној таблици XIII дати су потребни нумерички подаци за изналажење те везе. Прва колумна те таблице садржи географске ширине  $\phi$  уоченог дела Земљине површине, друга колумна садржи висинске коте  $h$  границе вечног снега према Келеновом дијаграму, мерене метрима, трећа колумна летње количине  $Q_s$  осунчавања уочених упоредника, мерене каноничним јединицама. Четврта колумна саопштава отступања  $a$  висина  $h$  од њихове аритметске средине, а пета отступања  $b$  количина  $Q_s$  од њихове аритметске средине.

ТАБЛИЦА XIII

за израчунавање везе између осунчавања и висинског положаја границе вечног снега на разним упоредницима Земљине површине

$\phi$	$h$	$Q_s$	$a$	$b$	$H$
$90^\circ$	100	12669	-1382	-1197	173
$85^\circ$	175	12675	-1307	-1191	179
$80^\circ$	300	12733	-1182	-1133	243
$75^\circ$	475	12859	-1007	-1007	381
$70^\circ$	700	13074	-782	-792	616
$65^\circ$	1075	13445	-407	-411	1033
$60^\circ$	1550	14005	+68	+140	1636
$55^\circ$	2100	14573	+618	+707	2256
$50^\circ$	2625	15078	+1143	+1212	2808
$45^\circ$	3275	15522	+1793	+1656	3294
$40^\circ$	3925	15878	+2443	+2012	3684

Служећи се подацима те таблице, израчунајмо, пре свега, корелациони фактор  $k$  између висинске коте  $h$  и количине  $Q_s$  осунчавања. Тај фактор дат је овим обрасцем

$$k = \frac{\sum ab}{\sqrt{\sum a^2 \cdot \sum b^2}}$$

Ставимо ли у тај образац нумеричке вредности саопштене у таблици XIII, добивамо

$$k = 0,996$$

Тај изванредно високи корелациони фактор посведочава уску везу између висинског положаја границе вечног снега на појединим уоченим географским ширинама и одговарајуће количине летњег осунчавања.

Да бисмо нашли математички израз за ту везу, означимо са  $H$  онај висински положај границе вечног снега који ће, мерен метрима, следовати из тог израза. Високи корелациони фактор који смо добили за ту везу, омогућава нам да висину  $H$  претставимо као линеарну функцију количине  $Q_s$ , тј. предочимо је обрасцем

$$H = A + BQ_s,$$

где су  $A$  и  $B$  константе. Оне се по теорији најмањих квадрата израчунавају из услова да збир квадрата разлика између рачуном добивених бројева за  $H$  и опажањем добивених бројева за  $h$  буде минималан, тј. да буде

$$\Sigma (H - h)^2 = \text{minimum.}$$

Из предњих двеју једначина следује

$$\Sigma (A + B Q_s - h)^2 = \text{minimum.}$$

Да би то било, морају изводи предњег израза по  $A$ , односно по  $B$  бити једнаки нули. Тим захтевом добивамо ове две једначине

$$\Sigma (A + B Q_s - h) = 0,$$

$$\Sigma (A + B Q_s - h) Q_s = 0.$$

Означимо ли са  $n$  број расположивих података о величинама  $h$ , можемо предње две једначине заменити овима

$$nA + B \Sigma Q_s - \Sigma h = 0,$$

$$A \Sigma Q_s + B \Sigma Q_s^2 - \Sigma h Q_s = 0.$$

Ставимо ли у ове једначине податке претходне таблице добивамо ове корене

$$A = -13687 \quad B = 1,094.$$

Зато је тражена веза између количине  $Q_s$  осунчавања и висинског положаја  $h$  границе вечног снега дата овим обрасцем

$$H = 1,094 Q_s - 13687.$$

Висина  $H$  зове се соларним висинским положајем границе вечног снега какав би се успоставио при отсуству или при једнакој расподели осталих фактора. У табели XIII саопштене су у последњој колумни нумеричке вредности од  $H$  за уочене географске ширине.

Предњом једначином дате су и секуларна померања границе вечног снега. Означимо ли са  $H_s$  садашњи висински положај границе вечног снега на уоченој географској ширини, а са  $H$  онај који одговара произвољном времену  $t$  прошлости, означимо ли са  $Q_s^0$  садање летње осунчавање уочене географске ширине, а са  $Q_s$  оно које одговара времену  $t$ , то је

$$H_s = 1,094 Q_s^0 - 13687$$

$$H = 1,094 Q_s - 13687.$$

Одавде следује

$$H - H_0 = 1,094 (Q_s - Q_s^0).$$

Како

$$\Delta Q_s = Q_s - Q_s^0$$

претставља секуларну промену летњег осунчавања,

$$\Delta H = H - H_0$$

секуларно померање границе вечног снега, то је

$$\Delta H = 1,094 \Delta Q_s.$$

Овај образац казује да свакој секуларној промени количине  $Q_s$  од једне каноничне јединице одговара померање границе вечног снега за 1,094 метар.

До ове везе између феномена осунчавања и померања границе вечног снега може се доћи и помоћу обрасца

$$\Delta u_s = \frac{1}{150} \Delta Q_s$$

изведеног у претходном параграфу.

Метеоролошка испитивања доказала су да се за време летње полугодине мора попети за 150 метара увис да би се дошло у слој атмосфере којег је температура за један степен нижа од оне на почетку тога успона. То важи приличном тачношћу до оних висина које долазе у обзир у питању у којим се овде бавимо. Да би се, према томе, после секуларне промене летње температуре од  $\Delta u_s$  остало на истој изотермичној површини, рецимо оној која одговара доњој граници вечног снега, било би потребно, ако је та термичка промена позитивна, попети се за размак дат једначином

$$\Delta H = 150 \Delta u_s.$$

Из последњих двеју једначина следује

$$\Delta H = \Delta Q_s.$$

Овај образац разликује се од онога што смо га малочас извели само тиме што је у њему пређашњи коефицијент 1,094 замењен јединицом. Та разлика није осетна, јер се граница вечног снега не може одредити тачно на центимetre. Зато ћемо се у будуће задовољити овим једноставнијим обрасцем који нам казује ово.

Секуларна померања границе вечног снега непосредно изазвана секуларним током осунчавања Земље добивају се ако се каноничне



јединице којима смо тај ток предочили нашом таблицом XII једноставно замене метрима. При томе знак + значи померање те границе нагоре, а знак — померање надоле.

§ 42. **Климатски ефекти секуларних промена рефлексione способности Земљине површине.** — Сазнањима добивеним у претходном параграфу добила је наша таблица XII свој климатолошки садржај. Поделимо ли бројеве саопштене у тој табlici са 150, добијамо непосредне секуларне промене средње температуре летње односно зимске полугодине. Бројеви те табlice који се односе на летњу полугодину дају непосредно изазвано померање границе вечног снега, мерено метрима.

Иста интерпретација важи и за графичко предочавање секуларног тока осунчавања Земље дато сликом 13. Ординате означене на левом крају те слике, мерене каноничним јединицама, предочавају у исти мах померање границе вечног снега, мерено метрима. Из те слике видимо да су та померања границе вечног снега прекорачавала више пута износ од 500 метара. Таквим померањем ступио је у дејство један нов климатски фактор, секуларна промена снежних поларних калота Земљиних. Тај снежни покривач има велику рефлексionу способност, па се његовим проширивањем и сужавањем мења рефлексiona способност поларних крајева Земљине површине, а тиме и термичко стање Земљине атмосфере. Механизам те појаве испитан је већ у § 26 и онде су изведени обрасци за израчунавање термичких последица те појаве. Остаје само да их сада применимо.

Геолози и географи прикупили су доста података о бившем распрострањењу снежних калота Земљиних, а Вунт је утврдио ово. Данашња граница северне снежне калоте сиже просечно до 75° северне географске ширине, а граница јужне снежне калоте просечно до 68° јужне географске ширине. За време интервала геолошке прошлости од 600 хиљада година, на који ограничавамо наша испитивања, северна снежна калота је за време свог највећег пространства стигла просечно до 55° северне ширине, а јужна за време свог највећег пространства до 63° јужне географске ширине. Имајући то у виду, испитаћемо каквог су утицаја имале те појаве на осунчавање поларних крајева Земље оивиченим 55-тим степеном северне односно јужне калоте Земљине.

Почећемо тиме да прво израчунамо какав је био секуларни ток осунчавања тих двеју калота за време минулих 600 хиљада година, не узимајући још у обзир промене рефлексione способности површина тих калота, другим речима, израчунаћемо оне топлотне количине  $Q_s$  и  $Q_w$  које су, обрачунате на јединицу површине за време тог интервала стизале на горњу границу атмосфере тих калота.

Секуларне промене тих количина дате су обрасцима (212) и (213). Стављајући, дакле,  $\varphi_1 = 55^\circ$ ;  $\varphi_2 = 90^\circ$ ;  $J_0 = 1$ ;  $T = 100.000$  и служећи

се таблицом VI, добијамо помоћу образаца (211) и по извршеној механичкој квадратури интеграла који се у тим обрасцима појављују, ове нумеричке вредности констаната датих тим обрасцима

$$\Delta H_s = 363 \quad \Delta H_w = -101 \quad M = 7900.$$

Служећи се обрасцима (212) и (213) и таблицом IX која нам даје секуларне промене астрономских елемената, можемо израчунати секуларне промене летњег односно зимског осунчавања северне односно јужне калоте Земљине оивичене упоредником од 55°. Те, по јединици површине обрачунате, секуларне промене означаћемо са  $\Delta_1 Q_s$ ,  $\Delta_1 Q_w$ ,  $\Delta_1 \bar{Q}_s$ ,  $\Delta_1 \bar{Q}_w$  да бисмо индексом 1 назначили да су оне израчунате не узимајући у обзир промене рефлексione способности уочених калота.

Када је то учињено, потребно је, као што је у § 26 изложено, израчунати секуларне промене снежних покривача тих калота.

Садашња средња ивица снежног покривача северне хемисфере лежи, као што је речено, на упореднику од 75°. Она се за време уоченог интервала геолошке прошлости распрострала све до упоредника од 55°. Из наредне табlice XIV, од које је овде саопштен само један део, следује да се минимално осунчавање северне калоте оивичене упоредником од 55° десило пре 230 хиљада година када је њено летње осунчавање, обрачунато на јединицу површине, било за 660 каноничних јединица мање но сада што је, тј. када је било  $\Delta_1 Q = -660$ . Тај дефицит имао је, као што следује из саопштених података, за последицу проширење снежног покривача за пуних 20°. Дефициту од једне каноничне јединице одговара, према томе, проширење снежног покривача за 1'82. Зато у образац (214) треба ставити  $\mu = 1'82$ ;  $\varphi_1 = 75^\circ$ . Добијамо, дакле образац

$$\varphi = 75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s.$$

При примени овог обрасца ваља имати у виду ово. Соверни снежни покривач нестао је у небреговитим крајевима потпуно када је предњи образац дао  $\varphi = 90^\circ$ , тј. када је било  $\Delta_1 Q_s = +495$ . Зато треба и за  $\Delta_1 Q_s > 495$  ставити  $\varphi = 90^\circ$ .

Примењујући предња расуђивања на јужну хемисферу, долази се до овога. Минимум летњег осунчавања уочене јужне калоте, оивичене упоредником од 55°, десило се пре 105,1 хиљада година при дефициту летњег осунчавања од 870 каноничних јединица који је проузроковао проширење снежног покривача за 5°. Дефициту од једне каноничне јединице одговара проширење тог покривача за 0'345. Зато ваља у образац (214) ставити  $\mu = 0'345$ ;  $\varphi_1 = 68^\circ$ , па добијамо

$$\varphi = 68^\circ + 0'345 \Delta_1 \bar{Q}_s.$$

Проширивање јужног снежног покривача било је знатно мање но проширивање северног, јер се јужни снежни покривач могао ширити само на рачун океана. И сужавање тог покривача било је доста малено, јер га је велика надморска висина антарктичког континента, која износи просечно 2200 метара, штитила од отапања. Потпуно отапање тог снежног покривача није се догодило за време минулих 600 хиљада година.

Да бисмо могли приступити рачунском примењивању осталих образаца § 26, потребни су нам подаци о нумеричким вредностима констаната које се у њима појављују. Ти подаци су плод дугогодишњих посматрања и испитивања; па су они тек недавно добили ону поузданост којом се можемо задовољити при нашим рачунима. То важи у првом реду за константу  $a$  која нам даје апсорпциону способност леденог покривача Земљиног. Њу је поуздано одредио 1933 Жозеф Дево испитивајући рефлексиону способност глечера и свежег снега у Пиринејима, Алпима и на Гренланду. Према тим испитивањима ваља за апсорпциону способност поларног снежног покривача Земљиног ставити

$$a = 0,55.$$

Апсорпциона способност незалеђених крајева уочене Земљине калоте једнака је, према испитивањима Вунта,

$$a_0 = 0,94.$$

Зато је за уочену северну Земљину калоту

$$a - a_0 = -0,39.$$

Према многобројним испитивањима метеоролога треба за рефлексиону способност Земљине атмосфере ставити

$$R_1 = 0,38.$$

Зато је

$$1 - R_1 = 0,62.$$

Према резултатима Математичке климатологије, коефицијент  $\kappa$  који се појављује у наведеним обрасцима има ову нумеричку вредност

$$\kappa = 0,60.$$

Стављајући све предње податке у образац (222), добивамо образац

$$\Delta_2 Q_s = -0,39 \times 0,62 \times 0,60 \frac{\sin 75^\circ - \sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s)}{1 - \sin 55^\circ} Q_s$$

који важи за северну хемисферу.

Садашње летње осунчавање  $Q_s^0$  северне Земљине калоте оивичене упоредником од  $55^\circ$  дато је, према обрасцима (200) и (201), интегралом

$$Q_s^0 = \frac{2r^2\pi}{F_0} \int_{55^\circ}^{90^\circ} Q_s \cos \varphi d\varphi,$$

при чему је  $F_0$  дато обрасцем (215) у који ваља ставити  $\varphi = 55^\circ$ . Служећи се за  $Q_s$  подацима таблице VIII, добива се механичком квадратуром

$$Q_s^0 = 13520.$$

Стављајући ово у образац (223), а  $Q_s$ , добивен тим обрасцем, у горњи образац за  $\Delta_2 Q_s$ , па извршивши у њему све рачунске операције добива се

$$\Delta_2 Q_s = 0,802 (13520 + \Delta_1 Q_s) [\sin (75^\circ + 1'82 \Delta_1 Q_s) - \sin 75^\circ].$$

Овај образац даје ефекат секуларне промене рефлексионе способности Земљине површине на осунчавање њене северне калоте оивичене упоредником од  $55^\circ$ .

Да бисмо извели такав образац и за јужну калоту Земљине површине, оивичене, упоредником од  $55^\circ$  јужне географске ширине, ваља узети у обзир ово.

Делови те калоте који леже изван њеног снежног покривача заузети су морем које носи ледене санте, због чега је њихова апсорпциона способност мања но незалеђених крајева северне хемисфере и једнака

$$a_0 = 0,88.$$

Зато је овде

$$a - a_0 = -0,33.$$

Због тога добивамо за ту јужну калоту Земљине површине овај образац.

$$\Delta_2 \bar{Q}_s = -0,33 \times 0,62 \times 0,60 \frac{\sin 68^\circ - \sin (68^\circ + 0'345 \Delta_1 \bar{Q}_s)}{1 - \sin 55^\circ} \bar{Q}_s,$$

а сем тога

$$\bar{Q}_s^0 = 13770,$$

па коначно добивамо

$$\Delta_2 \bar{Q}_s = 0,679 (13770 + \Delta_1 \bar{Q}_s) [\sin (68^\circ + 0'345 \Delta_1 \bar{Q}_s) - \sin 68^\circ].$$

Предњим обрасцима израчунао сам секуларни ток осунчавања поларних калота Земљиве површине, оивченим упоредницима  $\pm 55^\circ$ , за интервал од минулих 600 хиљада година узимајући при томе у обзир секуларне промене снежних покривача тих калота. Један део резултата тих рачуна саопштен је, примера ради, у приложеној табlici XIV.

Прва колумна те табlice саопштава геолошко време  $t$ , мерено хиљадама година од године 1800 н. е. Друга колумна саопштава секуларну промену  $\Delta_1 Q_w$  зимског осунчавања, а трећа промену  $\Delta_1 Q_w$  летњег осунчавања уочене северне калоте. Обе те промене израчунате су не узимајући у обзир дејство снежног покривача калотиног. Секуларна промена  $\Delta_2 Q_s$  летњег осунчавања изазвана тим дејством саопштена је у четвртој колумни. Збир бројева треће и четврте колумне даје целокупну секуларну промену  $\Delta Q_s$  летњег осунчавања саопштену у петој колумни. Зимско осунчавање не подлежи осетном утицају промена снежног покривача калотиног, јер је она и у садашњости за време зимске полугодине покривена снегом. Остале колумне наше табlice дају податке који се односе на уочену јужну калоту.

Дејство снежног покривача северне Земљине калоте оивчене упоредником од  $55^\circ$ , докле је тај покривач сизао у доба свог највећег пространства, распростраило се ваздушним и морским струјама и изван подручја те калоте, а слично важи и за уочену калоту јужне хемисфере. Докле, и у којој мери, се то дејство испољило својим термичким ефектима, тешко је тачно одредити. Да бисмо и о томе добили приближну слику, израчунао сам секуларни ток осунчавања Земљиних калота оивченим упоредницима од  $\pm 45^\circ$  и  $\pm 30^\circ$ , узимајући у обзир секуларне промене снежног покривача поларних калота оивченим упоредницима од  $\pm 55^\circ$ . Тај рачун извршили смо на овај начин. Образац (211) дао нам је за калоте оивчене упоредницима од  $\pm 45^\circ$  ове нумеричке вредности констаната које се појављују у обрасцима (212) и (213)

$$\Delta N_s = 306 \quad \Delta N_w = -128 \quad M = 9870,$$

а за калоте оивчене упоредницима од  $\pm 30^\circ$

$$\Delta N_s = 235 \quad \Delta N_w = -145 \quad M = 12450.$$

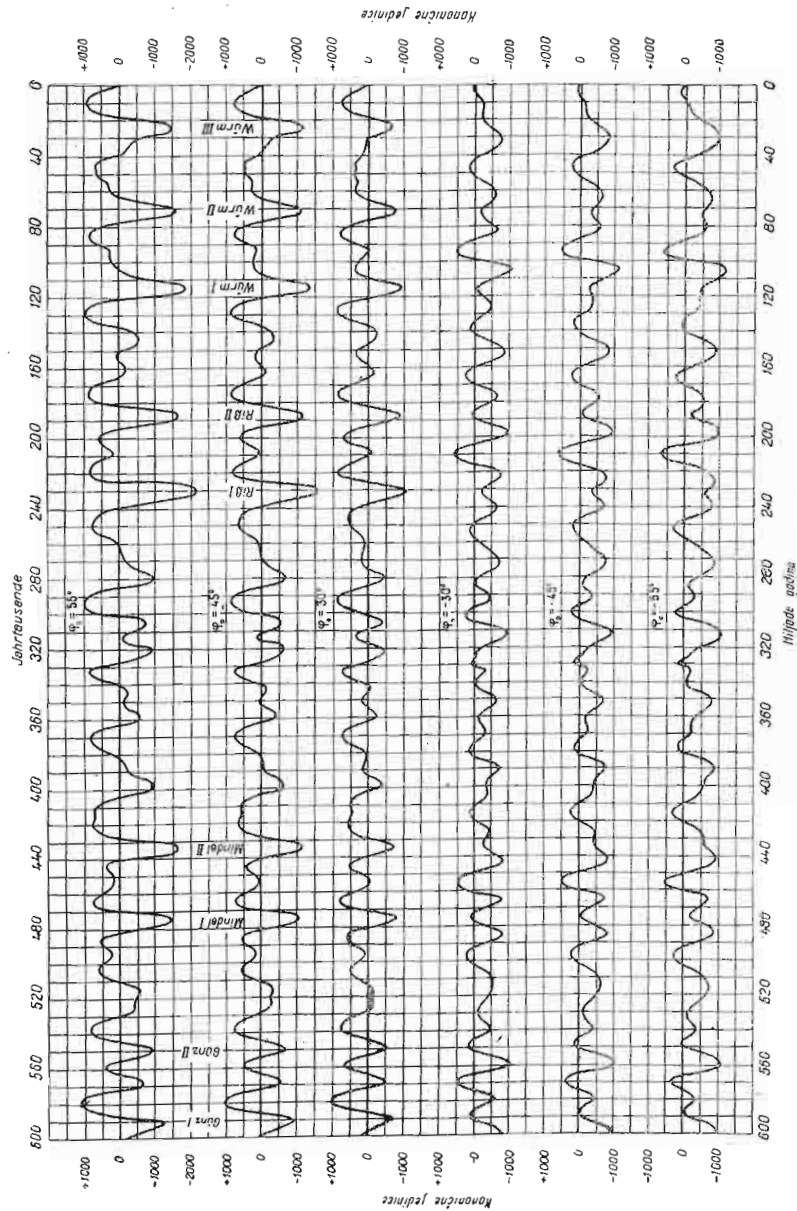
Тим нумеричким подацима и поменути обрасцима израчунате су секуларне промене  $\Delta_1 Q_s$ ,  $\Delta_1 Q_w$ ,  $\Delta_2 Q_s$ ,  $\Delta_1 Q_w$ . Секуларне промене  $\Delta_2 Q_s$  и  $\Delta_2 Q_w$  дејства снежног покривача који се у уоченом тренутку геолошке прошлости налазио на калотама оивченим упоредницима од  $\pm 55^\circ$  на осунчавање оних двеју ширих калота добио се када су се секуларне промене  $\Delta_2 Q_s$  и  $\Delta_2 Q_w$  што су се добиле за калоте оивчене упоредницима  $\pm 55^\circ$  помножиле оним бројем који даје размеру површине те калоте према површини уочене калоте. За калоту која сиже до упо-

ТАБЛИЦА XIV

Секуларни ток осунчавања Земљиних калота  
под утицајем секуларних промена њиних снежних покривача.  
Каноничне јединице.

Хиљаде година пре 1800 н. е.	Северна калота				Јужна калота			
	оивчена упор дником од $55^\circ$							
	$\Delta_1 Q_w$	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	$\Delta Q_s$	$\Delta_1 Q_w$	$\Delta_1 Q_s$	$\Delta_2 Q_s$	$\Delta Q_s$
0,6	-10	+20	+30	+50	-10	+20	+10	+30
5	-150	+300	+320	+620	+50	+100	+30	+130
10	-350	+550	+380	+930	+190	+10	0	+10
11,1	-350	+520	+380	+900	+210	-40	-10	-50
15	-230	+320	+320	+640	+170	-80	-30	-110
20	+70	-260	-470	-730	+90	-280	-100	-380
22,1	+130	-460	-950	-1410	+110	-440	-150	-590
25	+100	-480	-1000	-1480	+200	-580	-210	-790
30	-100	-230	-420	-650	+360	-690	-250	-940
32,7	-140	-140	-230	-370	+360	-640	-230	-870
35	-130	-110	-180	-290	+310	-550	-200	-750
40	-90	+30	+40	+70	+150	-210	-70	-280
45	-130	+330	+330	+660	-30	+230	+90	+320
47,1	-110	+300	+320	+620	-30	+220	+90	+310
50	-130	+300	+320	+620	-10	+180	+70	+250
55	-150	+140	+170	+310	+150	-160	-60	-220
60	-220	+100	+130	+230	+320	-140	-150	-590
60,6	-220	+90	+120	+210	+320	-150	-160	-610
65	-100	-140	-230	-370	+280	-520	-190	-710
70	+160	-470	-980	-1450	+80	-390	-140	-530
71,9	+200	-500	-1050	-1550	+40	-340	-120	-460
75	+100	-350	-690	-1040	+80	-330	-110	-440
80	-280	+200	+240	+440	+340	-420	-150	-570
82,8	-410	+420	+370	+790	+390	-380	-140	-520
85	-390	+480	+380	+860	+330	-240	-80	-320
90	-80	+270	+300	+570	-80	+270	+100	+370
94	+90	+110	+140	+250	-250	+450	+170	+620
95	+80	+130	+170	+300	-240	+450	+170	+620
100	-130	+80	+110	+190	+170	-220	-80	-300
105,1	-310	-10	-20	-30	+550	-870	-320	-1190
110	-50	-290	-430	-720	+310	-650	-230	-880
115	+250	-570	-1260	-1830	-10	-310	-110	-420

редника од 45° тај број је 0,617, а за калоту која сиже до упоредника од 30°, он је 0,362. Добивеним рачунским резултатима полуњена је таблица која се односила на калоте оивичене упоредницима од ± 55°.



Сл. 21 — Графичка предлоба секуларног тока осунчавања Земљиних калота под утицајем секуларних промена снежних покривача

Немогуће је ту таблицу саопштити овде у целини, због чега смо се задовољили њеним изводом датим приложеном таблицом XIV. Но зато је већи део резултата оне велике таблице саопштен овде у слици 21 графичким дијаграмом.

§ 43. Механизам и астрономски календар великих климатских промена у току минулих 600 хиљада година. — Велики климатски догађаји квартарнога доба одиграли су се на калоти северне Земљине хемисфере која сиже до упоредника од 45°. У приложеној слици 21 предочен је другом кривом од горе, оном која је означена са  $\varphi = 45^\circ$ , секуларни ток осунчавања те калоте под утицајем секуларних промена њеног снежног покривача. Из те криве можемо очитати ово.

За време минулих 600 хиљада година смањало се средње, по јединици површине обрачунато, летње осунчавање те калоте седам пута за преко 1000 каноничних јединица, једанпут за 950, а једанпут за 700 таквих јединица. То су биле девет најјачих промена летњег осунчавања за време поменутог раздобја.

Времена тих девет минимума летњег осунчавања, мерена хиљадама година од године 1800 н. е., дата су овим бројевима

590 550 476 435 230 188 115 72 25.

У тим временима померила се средња граница вечног снега надолу за ове износе, мерене метрима,

950 700 1070 1140 1540 1190 1320 110 1010.

Дефицити летњег осунчавања проузровали су при томе ово снижење средње температуре летње полугодине, мерено Целзиусовим степенима

6,3 4,7 7,1 7,6 10,3 7,9 8,8 7,3 6,7.

И средња температура целе године снизила се при томе за ове износе, мерене Целзиусовим степенима,

2,2 1,5 2,5 3,1 4,0 2,8 3,3 2,8 3,0.

То су, дакле, била времена не само хладних лета већ и хладних година.

Тих девет времена дубоког спуштања границе вечнога снега нису равномерно распоређена дуж уоченог временског интервала од 600 хиљада година, већ су спојена у четири групе од којих су прве три обухватиле свака по два, а четврта три упада великих хладноћа. Те четири групе су оне у којима је Кепен у мојим првим кривама осунчавања назрео четири ледена доба Пенк-Брикнерове шеме.

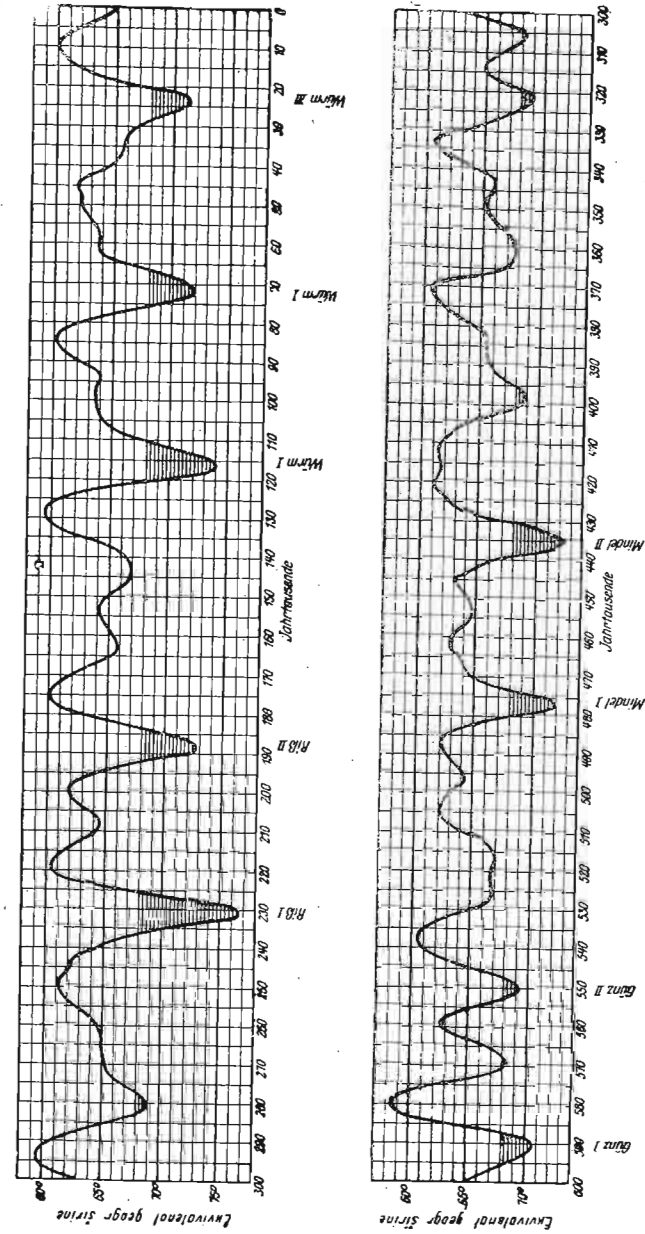
Вратимо се још једном тим старим кривама осунчавања. Прва од њих, публикована у Кепен-Вегенеровом делу, саопштена је горњим дијаграмом слике 14. У делу наведеном у претходном списку под бројем 13, надопунио сам тај дијаграм другим, изведеним на темељу Мишковићевих израчунавања секуларних промена астрономских елемената. Оба та дијаграма предочавају само амплитуде летњег осунчавања упоредника од  $65^\circ$  северне географске ширине и зато је њихова крива осунчавања састављена из појединих права тако да има зупчаст облик. Та два дијаграма послужила су за њихово међусобно упоређење и контролу. Том приликом откривене су неке мање омашке у израчунавањима секуларних промена астрономских елемената па су оне могле бити уклоњене у каснијим публикацијама.

У споменутом мом делу и у табели садржаној у њему израчунате су не само амплитуде осунчавања него и довољан број међувредности између тих амплитуда. Тиме је добивена, место зупчасте линије, једна континуирна крива осунчавања која је овде предочена сликом 22.

Кривама нацртаним у сликама 14 и 22 предочен је секуларни ток летњег осунчавања горње границе атмосфере над упоредником од  $65^\circ$  северне ширине фиктивним променама те географске ширине. Кривама слике 13 предочен је такав ток над упоредницима од  $15^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $75^\circ$  апсолутном мером секуларних промена количина осунчавања, дакле каноничним јединицама. У кривама слике 21 обухваћено је дејство секуларних промена снежног покривача Земљиних поларних дела. То дејство долази до јасног изражаја ако се криве слике 13 упореде са кривама слике 21. Тада се види како је охлађујуће дејство тог покривача издужило таласе крива осунчавања надоле и створило дубоке удолице које предочавају оних девет великих упада летње хладноће о којима смо малочас говорили.

Погледамо ли на слику 22, видимо да су те удолице у њој много јаче изражене но у слици 13 тако се крива слике 22 својим обликом скоро и не разликује од крива слике 21, а нарочито оне која је означена са  $\varphi = 45^\circ$ . Узрок томе подударану лежи у овоме. Бацимо ли поглед на пуно извучену линију слике 20 која нам предочава меридионални распоред количине осунчавања појединих упоредника за време калоричне полугодине и замислимо повучену ординату која одговара географској ширини  $x_0 = 65^\circ$  да бисмо добили везу са сликом 22 која нам предочава секуларне промене летњег осунчавања тог упоредника. Означимо ли  $y_0$  ординату тог садашњег осунчавања тог упоредника са  $y_0$ , то видимо ово. Увећа ли се секуларном променом то осунчавање за износ  $\Delta y$ , онда ћемо фиктивну промену географске ширине изазвану том секуларном променом осунчавања наћи ако на криви потражимо ону тачку чија ордината у је једнака

$$y = y_0 + \Delta y.$$



Сл. 22. — Секуларни ток летњег осунчавања упоредника од  $65^\circ$  сев. географске ширине предочен фиктивним променама те ширине

Разлика  $\Delta x$  њене апсцисе од апсцисе  $x_0 = 65^\circ$  даје тражену фиктивну промену географске ширине.

Из слике 20 се види да смањивање, дакле негативно  $\Delta u$ , летњег осунчавања уочене географске ширине изазива већу фиктивну промену  $\Delta x$  географске ширине но повећање тог осунчавања.

Зато се старе криве осунчавања својим обликом и ритмом слажу са новим кривама, па хронологија појединих фаза леденог доба која је из њих изведена остаје неодржана новијим кривама.

У старијим кривама не долази климатски ефекат секуларног тока осунчавања Земље до квантитативног изражаја. У слици 13 претстављен је секуларни ток летњег осунчавања горње границе атмосфере изнад упоредника од  $15^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $75^\circ$  северне и јужне хемисфере за време минутих 600 хиљада година. Ако, као што је већ објашњено, каноничне јединице тог дијаграма схватимо за метре померања границе вечног снега, онда видимо да су та померања била на свим упоредницима толико моћна да су оставила видног трага на лицу Земљиног и тиме омогућила хронологију климатских промена за време уоченог интервала Земљине прошлости, али не толико јака да би дала и квантитативног објашњења тих промена. То питање решено је тек радовима објављеним од 1937 до 1941, наведеним у претходном списку под 24 до 27, у којима је испитан и нумеричким резултатима предочен утицај секуларних промена снежних покривача Земљиних, са којим смо се сада упознали. Док су старије криве осунчавања створиле хронологију леденог доба, новијим кривама откривен је механизам тога доба. Јер нове криве су, као што смо показали, у стању да објасне и најјаче климатске промене квартара у њиховом пуном обиму и да покажу њихове узроке. Охлађујуће дејство снежних покривача Земљиних придружило се, као секундарни ефекат, дејству секуларних промена Земљиног осунчавања. Како је проширивање и сужавање тих снежних покривача било изазвано тим променама, показују нове криве, у којима је то дејство дошло до пуног изражаја, исти ритам као и старе криве. Тиме је хронологија квартара остала непромењена, само су сада у том календару велики климатски догађаји прошлости, слични празницима нашег грађанског календара, означени маснијим словима.

Новим кривама осунчавања решена су још и друга, дотле недодирнута питања. Док су се старе криве бавиле, углавном, географским ширинама северне хемисфере, новима је обухваћена цела Земљина површина. Њима се могло послужити при геолошким испитивањима свих Земљиних континената. Наведимо овде неке резултате који се односе на јужну хемисферу Земљину.

Од трију ванполарних континената јужне хемисфере, дакле Јужне Америке, Африке и Аустралије, само је Америка у свом јужном делу преживела за време квартара права ледена доба, јер само тај континент прекорачава, тим својим крајичком, упоредник од  $45^\circ$  према југу. При испитивању климатских промена које су се одиграле на том крају Америке долази, дакле, у обзир крива осунчавања јужне калоте Зем-

љине овичене тим упоредником. То је друга од доле крива нацртаних у слици 21. Из те слике и из таблице помоћу које је она нацртана следује ово.

За време минутих 600 хиљада година смањило се средње, по јединици површине обрачунато, летње осунчавање те калоте девет пута за преко 900 каноничних јединица. То су биле девет најјачих промена летњег осунчавања за време поменутог раздобја.

Времена тих девет минимума летњег осунчавања, мерена хиљадама година од садашњости, дата су овим бројевима

600 560 485 444 313 198 152 105 30.

У тим временима померила се средња граница вечног снега за ове износе, мерене метрима,

910 1030 830 840 980 930 840 1110 830.

У тим временима снизила се средња температура летње полугодине за

6,1 6,9 5,5 5,6 6,5 6,2 5,6 7,4 5,5,

степени, а средња температура целе године за

1,2 1,1 0,8 0,9 1,2 0,9 1,0 1,4 1,3,

степени.

Док се, као што смо видели, на северној хемисфери најјачи упад хладноће десио пре 230 хиљада година, на јужној је то било пре 105 хиљада година. Последњи упад велике хладноће десио се на северној хемисфери пре 25 хиљада година, а на јужној пре 30 хиљада година. Како је сваки такав упад трајао, као што ћемо видети 10 хиљада година и више, видимо да су се обе хемисфере Земљине пре 25 хиљада година нашле у леденом добу. Слично важи и са упадима хладноће који су се десили на јужној хемисфери пре

600 560 485 444,

а на северној хемисфери пре

590 550 476 435.

хиљада година.

Та чињеница казује да је потпуно неоправдана замерка изнесена од неких геолога да астрономска теорија, тобож слична некадањој Кроловој теорији, није у стању да објасни могућност једновремених ледених доба на обема хемисферама. Уосталом геологија није у стању да својим властитим сретствима одреди времена ледених доба тачно

на хиљаде година да би на том пољу могла да подели мегдан са астрономијом.

Астрономска теорија климата, како смо је овде изложили у њеним главним цртама, решила је проблем ледених доба, открила њихов механизам и створила њихову хронологију, полазећи од испитивања секуларног тока осунчавања Земље. Тај секуларни ток је — о томе нема сумње — протекао онако како је предочен бројним таблицама дела наведеног у претходном списку под 27. Поузданост и тачност оних двају закона на темељу којих је та теорија изграђена, Њутновог закона гравитације и закона распростирања Сунчева зрачења у простору, јемче да су за време уоченог доба Земљине прошлости појединим географским ширинама Земљине површине удуђиване тачно оне топлотне количине које су саопштене у споменути таблицама. Тек приликом трансформације енергије садржане у тим зрацима у топлотни садржај и температуру Земљиног чврстог тла, њених мора и њене атмосфере ступили су у дејство други утицаји од којих смо најважније могли обухватити физикалним законима и израчунати њихове термичке ефекте, док се остали, спореднији, нису могли подвргнути математичкој анализи. Потребно је да и о њима проговоримо коју реч.

Најважнији од тих споредних утицаја имају свој извор у конфигурацији Земљиних континената, релијефу Земљине површине и у ваздушним и морским струјама. При њиховом испитивању морају се применити емпиријске методе географије, геологије и метеорологије. Том послу приступили су, својим радовима наведеним у списку на крају ове књиге, Сергел, Бек и Вунт, користећи се при томе теоретским резултатима Математичке климатологије, која не улази у оквир овог уџбеника.

Та наука има, као што смо рекли у § 30, задатак да пронађе везу између осунчавања Земље и температура њене површине и атмосфере. При том свом подухвату она није у стању да у своје математичке обрасце стави у рачун конфигурацију Земљиних континената и неправилности Земљине површине, ни да прати морске и ваздушне струје. Зато се температуре до којих она рачуном долази називају соларним температурама. То су оне које се добивају ако се искључе сви споредни утицаји. Испитивањем тих соларних температура Математичка климатологија је успела да открије механизам термичких појава које се као последица Сунчева зрачења одигравају на Земљи и у њеној атмосфери, да израчуна средње годишње соларне температуре појединих упоредника Земљиних и да испита вертикални термички састав атмосфере са његовим периодичким променама изазваним обртањем Земље и њеним обилажењем око Сунца.

Средње годишње, а исто тако и средње сезонске соларне температуре појединих упоредника зависе, као што је речено, само од средњег осунчавања сваког од тих упоредника, па су оне једне се исте на

свим местима уоченог упоредника. То код стварних, емпиријски одређених, температура није случај. Бацимо ли поглед на малу изотерма, одређених метеоролошким опажањима, видимо да ни годишње, ни сезонске, ни месечне изотерме не теку паралелно упоредницима, јер се у њима огледа уплив конфигурације континената, релијефа Земљине површине и ваздушних и морских струја. Наши претходни рачуни односе се само на секуларне промене осунчавања Земље, дакле у крајњој конзеквенцији само на секуларне промене соларних температура. Те секуларне промене соларних температура неће се моћи осетно разликовати од секуларних промена стварних температура, јер за време раздобја од минулих 600 хиљада година, на које се односе наши рачуни, конфигурација континената и релијеф Земљине површине нису претрпели великих промена. Зато је кроз цело то доба разлика између соларних и стварних температура остала, углавном, једна те иста и она је оставила на климу прошлости исти печат као и на климу садашњости. Исто тако као што ни стварне изотерме, нису стварне ивице снежног покривача поларних крајева Земљиних текле паралелно упоредницима, већ онако како су им то, као и данас, наметали конфигурација континената, релијеф Земљине површине и ваздушне и морске струје. Ивица снежног покривача, како је за уочено доба претставља наш рачун, предочава средњу ивицу стварне ивице тога доба, јер она се добива када се из рачуна искључе напоменути средњи утицаји.

При нашим израчунавањима утицаја снежног покривача водили смо рачуна само о његовом хоризонталном пространству, а не о његовој дебљини која зависи од локалних услова и од атмосферских талоба. У пределима где је дебљина тог покривача била подједнака, била је остварена та претпоставка нашег рачуна. Она је била, заиста, остварена у великој мери у периферним крајевима поларног снежног покривача и у међупростору између њега и Алпи. Зато су се, као што је Сергел доказао, климатске промене у том међупростору одиграле онако како то произилази из крива осунчавања. Сви замаси тих крива оставили су ту свој јасни траг.

У пределу Алпи и пределима унутрашњости поларног снежног покривача ступили су у дејство још и ови чиниоци. Када је у току прошлости летње осунчавање било у опадању, померала се граница вечног снега надоле. Алпијски крајеви почели су се покривати вечним снегом чим је померање те границе надоле стигло до врхунца њихових брегова. При даљем спуштању те границе дошао је све већи део тих крајева под снежни покривач и охлађујуће дејство почело се испољавати. У нашим претходним испитивањима стављено је у наш рачун дејство поларног снежног покривача, али не дејство тог локалног алпијског покривача. Узимајући га сада накнадно у обзир, видимо да је стварна летња температура тих крајева морала бити још нижа, но што би то следовало из наших рачуна. То отступање између рачуна и

стварности које се десило при силазу криве осунчавања у удолицу постало је још јаче када је летње осунчавање почело да поново расте, тј. када се из удолице криве осунчавања пошло ка њеном идућем гребену. При таквом порасту летњег осунчавања морао се знатан део његов утрошити на отапање снежног покривача пре но што би се могао осетити пораст температуре. Тиме је минимум температуре заостао иза минимума осунчавања за извесно време које је, према дебљини снежног покривача којег је ваљало отопити, могло трајати неколико хиљада година, па и више. То задоцњавање испољило се нарочито у временима интерстадија, тј. оних временских интервала који леже између два блиска минимума криве осунчавања. У нашим последњим двома сликама назиремо такве интерстадијале између Гинца I и Гинца II, затим између Миндела I и Миндела II, даље између Риса I и Риса II и напослетку између Вирма I и Вирма II и између Вирма II и Вирма III. У тим временима је у области Алпи пораст летњег осунчавања морао већим својим делом бити утрошен на отапање снежног покривача, па је услед тога летња температура за време тог интерстадијала била знатно мања но што би то следовало из криве осунчавања. У неким крајевима није до секуларног пораста те температуре за време интерстадијала ни дошло. То је било онда када је количина нагомиланог снега била толика да је површина снежног покривача дошла у такву надморску висину да је њом била заштићена од отопљавања. Ту су, дакле, напоменути дублети и триплети минимума осунчавања изазвали утисак од по једног леденог доба тако да су у том центру алпијског залеђивања Пенк и Брикнер нашли њих свега четири и тиме створили своју шему која је каснијим испитивањима геолога морала бити напуштена.

Сличне појаве, и то у још јачој мери, одиграле су се у пределима високог севера Европе који су лежали под леденим покривачем километарске дебљине. Висински положај површине тог покривача очувао га је од потпуног отопљавања и кроз интергласијална доба која су лежала између Гинца и Миндела, Риса и Вирма. Једино дугачко интергласијално доба које је лежало између Миндела и Риса било је у стању да отопи тај снежни покривач. А снежни покривач Гренланда пркоси, висинским положајем своје површине, и дан данашњи топлоти Сунчевих зракова.

## С П И С А К

дела и расправа страних научника у којима се примењује наука овог уџбеника.

### I. Засебна научна дела

1. Köppen—Wegener, Die Klimate der geologischen Vorzeit. Berlin 1924.
2. Soergel, Die Gliederung und absolute Zeitrechnung des Eiszeitalters.
3. Wasmund, Klimaschwankungen in jüngerer geologische Zeit, Handbuch der Bodenkunde. Band 2. Berlin 1929.
4. Wegener, Die Entstehung der Kontinente. Braunschweig 1929.
5. Eberl, Die Eiszeitenfolge im nördlichen Alpenvorlande. Augsburg 1920.
6. Bülow, Alluvium. Berlin 1930.
7. Bubnoff, Grundprobleme der Geologie. Berlin 1931.
8. Seidlitz, Der Bau der Erde und die Bewegungen ihrer Oberfläche. Berlin 1932.
9. Keilhack, Eiszeiten. Handwörterbuch der Naturwissenschaften. Zweite Auflage. Jena 1933.
10. Grahmann, Grundriss der Quartärgeologie Sachsens. Leipzig 1934.
11. Bertsch, Der deutsche Wald im Wechsel der Zeiten. Tübingen 1935.
12. Schwinner, Lehrbuch der physikalischen Geologie. Band I, Berlin 1936.
13. Soergel, Die Vereisungskurve. Berlin 1937.
14. Reinig, Die Holarktis. Ein Beitrag zur diluvialen und alluvialen Geschichte der zirkumpolaren Faunen- und Florengebiete. Jena 1937.
15. Wright, The Quarternary Ice Age. 2. Edit. London 1937.
16. Soergel, Das Eiszeitalter. Jena 1938.
17. Kirsch, Geomechanik. Entwurf einer Physik der Erdgeschichte. Leipzig 1938.
18. Gutenberg, Physics of the Earth. VII tome. New York 1939.
19. Köppen, Ergänzungen und Berichtigungen zu Köppen-Wegeners Klimate der geologischen Vorzeit. Berlin 1940.
20. Zeuner, Dating the past. An Introduction to Geochronology. London 1946.

### II. Научне расправе

21. Köppen, Die Klimate der geologischen Vorzeit. „Die Umschau“ 28. Jahrgang. 1924.
22. Brückner, Klimate der Geologischen Vorzeit. Zeitschr. für Gletscherkunde. 1925.
23. Schoenberg, Ueber die Temperaturen der Planeten. Zusammenfassender Bericht. Physikalische Zeitschr. 26 Jahrgang 1925.
24. Meinardus, Klimate der geologischen Vorzeit. Meteorl. Zeitschr. 1925.
25. Soergel, Excursion ins Travertingebiet von Ehringsdorf. Paläontol. Zeitschr. 1926.



26. *Gagel*, Die Bedeutung der Verwitterungszonen für die Gliederung des Diluviums. Zentralblatt für Mineralogie 1926.
27. *Staub*, Ergebnisse neuerer Eiszeitforschung in Europa. Zeitschr. der Gesellsch. für Erkunde. 1927.
28. *Graham*, Ueber die Ausdehnung der Vereisungen Norddeutschlands und ihre Einordnung in die Strahlungskurve. Berichte der math.-phys. Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften. 1928.
29. *Grahmann*, Die absolute Zeitrechnung des Quartärs. Sitzungsber. der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 1928.
30. *Gagel*, Ueber einige nordwestdeutsche Interglaziale. Jahrbuch der preussischen geol. Landesanstalt für das Jahr 1927.
31. *Knauer*, Glazialgeologische Ergebnisse aus dem Isargletschergebiet. Zeitschr. der deutschen geol. Gesellschaft. Bd. 80. 1928.
32. *Köppen*, Neueres über Verlauf und Ursachen des europäischen Eiszeitalters. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 26. 1930.
33. *Köppen*, Schwankungen der Sonnenstrahlung seit 135 000 Jahren und deren Folgen. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 31. 1931.
34. *Reichel*, M. Milankovitch, Mathematische Klimalehre und Astronomische Theorie der Klimaschwankungen (Mitteilung). Zeitschr. für Gletscherkunde. Bd. 19, 1931.
35. *Gams*, Ueber einige Korrelationen und Altersbestimmungen in Nord-, Ost- und Mitteleuropäischen Quartär. Ukrainian Academy of sciences. 1931.
36. *Girmounsky*, Versuch einer vergleichenden Zusammenstellung der west-europäischen, amerikanischen und russischen Schemen für die Gliederung der Quartärzeit. Zeitschr. für Gletscherkunde. Bd. 19. 1931.
37. *Eberl*, Die Gliederung und Chronologie des alpinen Glazials im Bereich des Lech- und Illergletschers. Forschungen und Fortschritte. 1931.
38. *Peters u. Toepfer*, Der Anschluss der Grabungen am Peterfels bei Engen im badischen Hegau. Praehistorische Zeitschr. Bd. XXIII. 1932.
39. *Klimaszewski*, Some problems of the glaciation in Poland. Rocznik polsk. Tow. Geol. Vol. 8. 1932.
40. *Girmounsky*, Die Probleme der unteren Grenze des Anthropozoikums und einige Fragen der Synchronisation der anthropozoischen Ablagerungen. Transac. II Internat. Conf. Assoc. Study quarterm. period in Europe. 1932.
41. *Penck*, Paläoklimatologie. Geograph. Zeitschr. 28. Jahrg. 1932.
42. *Wundt*, Aenderungen der Erdalbedo während der Eiszeit. Meteorolog. Zeitschr. 1933.
43. *Steiner*, A jégkorszak csillagászati magyarázata. Pötfüzetek a termesztudományi közlönyhoz. 1933.
44. *Vardanianz*, Ursachen der Eiszeiten und Versuch einer genetischen Synchronisation der Prozesse der Orogenie, der Vergletscherung und der Erosion. Transac. II. Intern. Conf. Assoc. Study Quarterm. Vol. 2. 1933.
45. *Toepfer*, Das Alter der Saalevereisung in der Vollgliederung des Diluviums. Zentralbl. für Mineralogie, Geologie etc. 1933.
46. *Toepfer*, Die glazialen und präglazialen Schotterterrassen im mittleren Saaletal und Stellung in der geologischen und astronomischen Gliederung des Eiszeitalters. Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. Bd. XXXII. 1933.
47. *Beck*, Ueber das schweizerische und europäische Pleistozän. Eclogae geologicae Helvetiae. Vol. 26. 1933.
48. *Wundt*, Die zeitliche Aenderung der Erdalbedo als Problem. Meteorol. Zeitschr. 1934.
49. *Wundt*, Die Lage der Kalmen. Meteorol. Zeitschr. 1934.

50. *Grahmann*, Spät- und postglaziale Süßwasserbildungen in Regis-Breitungen und die Entwicklung der Urlandschaft in Westsachsen. Mitteilungen aus dem Osterlande. Bd. XXII. 1934.
51. *Wundt*, Die Klimate der Spät- und Nacheiszeit. Meteorol. Zeitschr. 1935.
52. *Wundt*, Die astronomische Theorie der Eiszeiten und die auftretenden Sekundärwirkungen. Zeitschr. für Gletscherkunde. Bd. XXII. 1935.
53. *Köppen*, Vergleich zweier Eiszeiten-Theorien. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd. 43. 1935.
54. *Gams*, Beiträge zur Mikrostratigraphie und Paläontologie des Pliozäns und Pleistozäns von Mittel- und Osteuropa und Westsibirien. Eclogae geologicae Helvetiae. Vol. 28. 1935.
55. *Toepfer*, Die mitteldiluvialen Säugetierreste aus der Saaleterrasse bei Lengfeld-Bad Kösen. Neues Jahrbuch für Mineralogie. Beil. Bd. 74. Abt. B. 1935.
56. *Zeuner*, The pleistocene Chronology of Central Europe. Geological Magazine Vol. LXXII. 1935.
57. *Knauer*, Die Ablagerungen der älteren Würm-Eiszeit (Vorrückungsphase) im süddeutschen und norddeutschen Vereisungsgebiet. Abhandl. Geol. Landesuntersuchung des Bayers. Oberbergamts. Heft 21. 1935.
58. *Blanc*, Le variazioni delle linee di riva del Mar Caspio, del Mar Nero e del Mediterraneo durante il Quaternario. Bolletino della Società Geologica Italiana. Vol. LVI. 1937.
59. *Zeuner*, A comparison of the East Anglia with that of Germany. Proceedings of the Prehistoric Society. 1937.
60. *Wundt*, Die Lage des meteorischen Aequators. Meteorolog. Zeitschr. 1937.
61. *Wolff*, Die geologischen und die landforstwirtschaftlichen Verhältnisse im Kreise Fallingb. mit einem Abriss der deutschen Vor- und Frühgeschichte, 2. Aufl. Hannover 1937.
62. *Lorenz*, Bau und Entwicklung des Erdballs. Deutsches Museum. Abhandlungen und Berichte. 9. Jahrg. 1937.
63. *Grahmann*, Die Entwicklungsgeschichte des Kaspisees und des Schwarzen Meers. Mitteil. der Gesellschaft für Erdkunde zu Leipzig. Bd. 54. 1937.
64. *Beck*, Studien über das Quartärklima im Lichte astronomischer Berechnungen. Eclogae geologicae Helvetiae. Vol. 30. 1937.
65. *Beck*, Vorläufige Mitteilungen über eine Revision des alpinen Quartärs. Vol. 30 der Eclogae geologicae Helvetiae. 1937.
66. *Richter*, Die Einordnung der Weichseleiszeit in die Strahlungskurve von Milankovitch. Geol. Rundschau. Bd. 28. 1937.
67. *Wundt*, Milankovitch, Neue Ergebnisse der astronomischen Theorie der Klimaschwankungen. Meteorol. Zeitschr. 1938.
68. *Wundt*, Die Verschiebung der Klimagürtel seit dem Ausklang der Eiszeit. Petermanns Geographische Mitteilungen. 1938.
69. *Wundt*, Die astronomische Theorie der Eiszeiten. Naturwissensch. Monatschrift „Aus der Heimat“ 1939.
70. *Penck*, Die Strahlungstheorie und die geologische Zeitrechnung. Zeitschr. der Gesellsch. für Erdkunde zu Berlin. 1938.
71. *Wundt*, Das Reflexionsvermögen der Erde zur Eiszeit. Meteorol. Zeitschr. 1938.
72. *Zeuner*, The Chronology of the Pleistocene Sea-Levels. Annals and Magazine of Natural History. 1938.
73. *Schulman*, Mathematische Klimalehre by M. Milankovitch. Bulletin of the American Meteorological Society. Vol. 19. 1938.

74. *Fauler*, Das Deckenprofil und das geologische Alter der Moustierstation von Wallertheim. Jahresh. und Mitteilungen des Oberrhein. geolog. Vereines. Bd. XXVII 1938.
75. *Zeuner*, Die Chronologie des Pleistozäns. Académie royale serbe. Belgrade. 1938.
76. *Zeuner*, Die Beziehungen des englischen und französischen Pleistozäns zum deutschen Diluvium. Verhandl. der III. Internat. Quartär-Konferenz 1936. 1938.
77. *Scherf*, Versuch einer Einteilung des ungarischen Pleistozäns auf moderner polyglazialen Grundlage. Verhandl. der III. Internationalen Quartär-Konferenz 1936. Wien, 1938.
78. *Sauramo*, Ueber das spätglaziale Klima. Verhandl. der III. Internat. Quartär-Konferenz 1936. Wien 1938.
79. *Beck*, Studien über das Quartärklima im Lichte astronomischer Berechnungen (Schluss) *Eclogae geologicae Helveticae*. Vol. 31. 1938.
80. *Beck*, Bericht über die ausserordentliche Frühjahrsversammlung der Schweizerischen Geologischen Gesellsch. in Thun. *Eclogae geologicae Helveticae*. Vol. 31. 1938.
81. *Knauer*, Die Mindel-Eiszeit, die Zeit grösster diluvialer Vergletscherung in Süddeutschland. Abhandl. der Geolog. Landesuntersuchung am Bayerischen Oberbergamt. Heft 29. 1938.
82. *Knauer*, Ueber das Alter der Moränen der Zürich-Phase im Linth-Gletscher-Gebiet. Abhandl. der geolog. Landesuntersuchung am Bayerischen Oberbergamt. Heft 33. 1938.
83. *Wundt*, Klimaänderungen in der Nacheiszeit. „Forschungen und Fortschritte“ 1939.
84. *Penck*, Eiszeit und Strahlungskurve. „Forschungen und Fortschritte“ 1939.
85. *Wundt*, Der Energiehaushalt der Erde im Lauf des Jahres und der Erdschichte. *Meteorol. Zeitschr.* 1939.
86. *Soergel* Das diluviale System. *Fortschritte der Geologie und Paläontologie*. Bd. XII, Heft 39. 1939.
87. *Blanc*, La curva di Milankovitch e la sua applicazione alle datazione assoluta dei Neandertaliani d'Italia. *Atti della Società Toscana di scienze naturali. Memorie*. Vol XLVIII. 1939.
88. *Blanc*, Dei „Microbulini“ e della precoce comparsa del mesolitico in Italia. *Rivista di Antropologia*. Vol. XXXII. 1939.
89. *Grahmann*, W. *Soergels Vereisungskurve*. „Quartär“, Bd. 2. 1939.
90. *Blanc*, Dipinto schematico rupestre nell'arnato dei bufali sotto sezze romano. *Bulletino di paleontologia italiana. Nuova serie*, vol. III. 1939.
91. *Blanc*, L'uomo fossile del Monte Circeo. *Rendiconti delle R. Accademia nazionale dei lincei*. Vol. XXIX, Serie 6. 1939.
92. *Sauramo*, The mode of the land upheaval in Fennoscandia during late-quaternary time. *Comptes Rendu de la Société géologique de Finlande*. Nr. XIII. 1939.
93. *Bertsch*, Herkunft und Entwicklung unserer Getreide. „*Manus*“ *Zeitschr. für deutsche Vorgeschichte*. Bd. 31. 1939.
94. *Köppen*, Die Wanderung des Nordpols seit der Steinkohlenzeit. *Meteorol. Zeitschr.* 1940.
95. *Blanc*, The fossil man of circe's mountain. „*Natural History*“ New York. 1940.
96. *Zeuner*, The age of Neanderthal Man. *Inst. Archeol.* London. 1940.
97. *Soergel*, Die als Pseudopariser bekannte Einlagerung im Travertinprofil von Ehringsdorf bei Weimar. *Beiträge zur Geologie von Thüringen*. Bd. V. 1940.
98. *Bacsák*, Zur Erklärung der Interglazialzeiten. „*Az időjárás*“ (Das Wetter). 1940.

99. *Wundt*, Das solare und das wirkliche Klima des Eiszeit. „*Forschungen und Fortschritte*“ 18. Jahrg. 1942.
100. *Blanc*, Cosmolisi. *Instituto italiano di paleontologia umana*. 1942—1943.
101. *Bacsák*, Die Wirkung der skandinavischen Vereisung auf der Periglazialzone. *Veröffentlichungen der kgl. ung. Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus*. Neue Reihe. Nr. 13. 1942.
102. *Blanc*, La correlazione geocronologica tra i paleantropi di Saccopastore e del Circeo e la loro posizione in una curva dell'elevazione dell'uomo. „*Boll. Soc. Geolog. de Portugal*“. 1942.
103. *Wundt*, M. Milankovitch, Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem. *Meteorol. Zeitschr.* Bd. 61. 1944.
104. *Wundt*, Zur Frage der Chronologie des Eiszeitalters. „*Forschungen und Fortschritte*“. 1943.
105. *Spitaler*, Zur Chronologie des Eiszeitalters. *Ebenda* 1943.
106. *Bacsák*, Die Erdgeschichte der letztverflossenen 600.000 Jahre. *A. M. Kir. Földtani Intezet*. 1944.
107. *Troll*, Diluvial-Geologie und Klima. *Klimaheft der „Geologischen Rundschau“*. Bd. 34, Heft 7/8. 1944.
108. *Behrmann*, Das Klima der Praeglazialzeit auf der Erde. *Ebenda*, 1944.
109. *Meinardus*, Zum Kanon der Erdbestrahlung. *Ebenda*. 1944.
110. *Wundt*, Die Mitwirkung der Erdbahnelemente bei der Entstehung der Eiszeiten *Ebenda*. 1944.

# С А Д Р Ж А Ј

	Страна
УВОД — — — — —	III
ПРВИ ОДЕЉАК	
ТЕОРИЈА	
ГЛАВА ПРВА	
ОСНОВНИ ПОЈМОВИ СФЕРНЕ АСТРОНОМИЈЕ	
§ 1. Небеска сфера — — — — —	1
§ 2. Сферне координате — — — — —	1
§ 3. Привидно кретање Сунца по небеској сфери — — — — —	1
ГЛАВА ДРУГА	
ОСУНЧАВАЊЕ ЗЕМЉЕ У ЈЕДНОМ ОДРЕЂЕНОМ ТРЕНУТКУ И У ТОКУ ЈЕДНОГА ДАНА	
§ 4. Соларна константа — — — — —	9
§ 5. Закон осунчавања Земље — — — — —	11
§ 6. Осунчавање Земље у једном одређеном тренутку — — — — —	13
§ 7. Дневни ток осунчавања — — — — —	17
§ 8. Дневне топлотне количине осунчавања — — — — —	19
ГЛАВА ТРЕЋА	
ДИСКОНТИНУИТЕТИ ОСУНЧАВАЊА И ЊИХОВО ЕЛИМИНИСАЊЕ ИЗ ОБРАЗАЦА	
§ 9. Веза између дневне количине и средњег осунчавања упоредника —	22
§ 10. Развијање образаца осунчавања Земље у редове — — — — —	25
ГЛАВА ЧЕТВРТА	
ГОДИШЊИ ТОК ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ	
§ 11. Основни образци за математичко описивање годишњег тока осунчавања Земље — — — — —	33
§ 12. Осунчавање Земљиних упоредника за време произвољних делова године — — — — —	37

§ 13. Астрономска годишња доба — — — — —	39
§ 14. Осунчавање Земљиних упоредника за време појединих годишњих доба	40
§ 15. Осунчавање Земљиних хемисфера у току произвољних делова године	43

## ГЛАВА ПЕТА

СЕКУЛАРНИ ПОРЕМЕЋАЈИ ЗЕМЉИНЕ ОСЕ И ПУТАЊЕ  
И ЊИХОВЕ ПОСЛЕДИЦЕ

§ 16. Механизам секуларних поремећаја Земљине осе и путање — — —	46
§ 17. Последице секуларних поремећаја на осунчавање Земље за време појединих астрономских годишњих доба — — — — —	51
§ 18. Последице секуларних поремећаја на дужине астрономских годишњих доба — — — — —	55

## ГЛАВА ШЕСТА

МАТЕМАТИЧКО ПРЕДОЧАВАЊЕ СЕКУЛАРНОГ ТОКА  
ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ

§ 19. Калорична годишња доба — — — — —	58
§ 20. Почети и свршеи калоричних полугодина — — — — —	60
§ 21. Топлотне количине упућене упореднику за време калоричних полугодина — — — — —	63
§ 22. Израчунавање топлотних количина упућених упореднику за време калоричних полугодина — — — — —	66
§ 23. Математичко предочавање секуларног тока осунчавања Земљиних упоредника — — — — —	70
§ 24. Калорични екватор — — — — —	72
§ 25. Математичко предочавање секуларног тока осунчавања појединих зона Земљине површине — — — — —	72
§ 26. Секуларне промене Земљиних снежних поларних калота и њихове последице — — — — —	76

## ДРУГИ ОДЕЉАК

## ПРИМЕНА

## ГЛАВА СЕДМА

НУМЕРИЧКИ ПОДАЦИ О САДАШЊЕМ СТАЊУ  
ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ

§ 27. Нумерички подаци о осунчавању Земљиних упоредника у току године	81
§ 28. Графичко предочавање осунчавања Земљиних упоредника у току године — — — — —	83
§ 29. Нумерички подаци о топлотним количинама упућеним појединим упоредницима Земље за време астрономских годишњих доба — — —	85
§ 30. Утицај атмосфере на осунчавање Земљине површине — — — — —	87

## ГЛАВА ОСМА

ЛЕДЕНА ДОБА И ПРЕЂАШЊИ НЕУСПЕЛИ ПОКУШАЈИ  
ДА СЕ ОНА ОБЈАСНЕ

§ 31. Ледена доба — — — — —	89
§ 32. Старе теорије ледених доба — — — — —	91

## ГЛАВА ДЕВЕТА

## ГЛАВНЕ ЦРТЕ СЕКУЛАРНОГ ТОКА ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ

§ 33. Нумерички подаци о утицају промена астрономских елемената на осунчавање Земље — — — — —	95
§ 34. Општа расуђивања о секуларном току осунчавања Земље — — — — —	102

## ГЛАВА ДЕСЕТА

ТОК ОСУНЧАВАЊА ЗЕМЉЕ ЗА ВРЕМЕ  
МИНУЛИХ 600 ХИЉАДА ГОДИНА

§ 35. Претходна питања — — — — —	108
§ 36. Нумеричко израчунавање секуларног тока осунчавања Земље — — —	110

## ГЛАВА ЈЕДANAЕСТА

## ХРОНОЛОГИЈА И РАШЧЛАЊАВАЊЕ ЛЕДЕНИХ ДОБА

§ 37. Прве примене крива осунчавања — — — — —	119
§ 38. Хронологија леденог доба — — — — —	122
§ 39. Рашчлањавање леденог доба и све његове фазе — — — — —	126

## ГЛАВА ДВANAЕСТА

МЕХАНИЗАМ И ТОК ВЕЛИКИХ КЛИМАТСКИХ ПРОМЕНА  
КВАРТАРНОГ ДОБА

§ 40. Непосредни термички ефекти секуларног тока осунчавања Земље —	128
§ 41. Померања висинске границе вечног снега непосредно изазвана секуларним током осунчавања Земљиних упоредника — — — — —	131
§ 42. Климатски ефекти секуларних промена рефлексивне способности Земљине површине — — — — —	136
§ 43. Механизам и астрономски календар великих климатских промена у току минулих 600 хиљада година — — — — —	143
Списак дела и расправа страних научника у којима се примењује наука овог уџбеника — — — — —	151