

ГЛАС

СРПСКЕ КРАЉЕВСКЕ АКАДЕМИЈЕ

СХХ

ПРВИ РАЗРЕД

55



1926.

ГРАФИЧКИ ЗАВОД »МАКАРИЈЕ« А. Д. — БЕОГРАД-ЗЕМУН

ИСПИТИВАЊА О ТЕРМИЧКОЈ КОНСТИТУЦИЈИ ПЛАНЕТСКИХ АТМОСФЕРА

ОД М. МИЛАНКОВИЋА

(Приказано на скупу Академије Природни: Наука 1. фебруара 1926 год.)

I

Резултати мога пре пет година публикованог дела¹ постали су полазном тачком нових дела немачких научника² и примљени као саставни део науке³. Оправдано је, дакле, продужити рад у започетом правцу. Ја сам се у томе делу бавио измеђ осталог и питањем терминке конституације планетских атмосфера, посветио му око 70 страна и довео га до конкретних нумеричких резултата. Сада мислим да та испитивања применим у проблему историје наше Земље и у питању атмосфера спољних планета о којима је врло мало познато. Но пре тога потребно је да чисто теоријски део тога питања ставим на нешто ширу основу но што је то учињено у споменутом делу.

¹ *Milankovitch*, Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire. Paris 1920.

² *Köppen-Wegener*, Die Klimate der geologischen Vorzeit. Berlin 1924 — *Sörgel*, Die Gliederung und absolute Zeitrechnung des Eiszeitalters. Berlin 1925.

³ Види н. пр. *Scheiner-Graff*, Astrophysik. Leipzig 1922, p. 263, 276 — *Hann-Süring*, Lehrbuch der Meteorologie. Vierte Auflage. Leipzig 1921. p. 157, 173. — *Köppen*, Die Klimate der Planeten. Die Umschau 27. Jahrg. (1923) p. 1—3. — *Eckardt*, Die Klimatischen Verhältnisse der geologischen Vergangenheit. Die Naturwissenschaften 13. Jahrg. (1925) p. 81—89 — *Kritzinger*, Das Marsklima „S'rias“ Bd 57 (1924) p. 67—69. — *Banachiewicz*, Kopernik a astronomja nowoczesna. Rocznik astronomiczny obserwatorium Krakowskiego. Tom. III. (1924) p 68—76. — *Schoenberg*, Ueber die Temperaturen der Planeten. Phys. Zeitschrift. 26. Jahrg (1925) p. 870—898.

II

Гасови од којих су саграђене планетске атмосфере поковају се Мариотовом и Гелисаковом закону

$$vp = R\theta,$$

где v означава специфични волумен или реципрочну вредност густине, p притисак а θ апсолутну температуру гаса; R представља гасну константу. Ова једначина важи довољно тачно и за паре догод се у њима не дешавају промене агрегатног стања. Означимо ли, дакле, са $p(x)$ парцијални притисак ученога гаса у висини x изнад планетске површине, са $\rho(x)$ његову густину, а са $\theta(x)$ његову апсолутну температуру на томе месту, то постоји једначина

$$(1) \quad p(x) = R\theta(x)\rho(x).$$

Означив са g акцелерацију теже на површини планете и занемарив незнатну интерну гравитацију саме атмосфере, то је акцелерација на висини x дата једначином

$$g(x) = \frac{r^2}{(r+x)^2} g_0,$$

где је r радиус планетске кугле. Како је x малено према r , то можемо предњој једначини дати и овај облик

$$(2) \quad g(x) = \left(1 - 2\frac{x}{r}\right) g_0.$$

Гасови атмосфере поковају се и барометријској једначини

$$(3) \quad dp(x) = -g(x)\rho(x)dx.$$

Ако је температура планетске коре, као што ће у нашим проблемима бити случај, тако висока да је количина топлоте W_p што ју емитира планетска површина веома велика према оној што је она прима од Сунца, то би у случају једногасне атмосфере и при механичкој и радиационој равнотежи постојала једначина

$$2\sigma\theta^4(x) = W_p \left[1 + k \int_x^h \rho(x) dx\right],$$

где σ означава константу Стефановог закона, k апсорпциони коефицијент гаса, а h висину атмосфере. Означимо граничну температуру атмосфере т. ј. температуру $\theta(h)$ са μ , добијамо

$$2\sigma\mu^4 = W_p,$$

т. ј.

$$(4) \quad \frac{\theta^4(x)}{\mu^4} = 1 + k \int_x^h \rho(x) dx.$$

III

Уочимо сада случај када је атмосфера сложена из n разних гасова, констаната R_1, R_2, \dots, R_n , а апсорпционих коефицијената k_1, k_2, \dots, k_n , онда су термичке прилике такве атмосфере у случају механичке и радиационе равнотеже регулисане следећим једначинама

$$(5) \quad p_i(x) = R_i \theta(x) \rho_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Занемаримо у (2) мали број $2\frac{x}{r}$ према јединици, добијамо место (3)

$$(6) \quad dp = -g \rho_i(x) dx, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

па је због тога парцијални притисак у висини x једнак

$$(7) \quad p_i(x) = g \int_x^h \rho_i(x) dx.$$

Једначину (4) ваља сада заменити овом

$$(8) \quad \frac{\theta^4(x)}{\mu^4} = 1 + \sum_1^n k_i \int_x^h \rho_i(x) dx,$$

т. ј.

$$(9) \quad \frac{\theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4} = \frac{1}{g} \sum_1^n k_i p_i(x).$$

Из (5) и (6) следује

$$(10) \quad \frac{dp_i(x)}{p_i(x)} = -\frac{g}{R_i \theta(x)} dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Диференцијалне једначине (9) и (10), дакле ~~укупно~~ $(n+1)$ на броју, одређују величине $\theta(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x) \dots p_n(x)$ као функције од x , т. ј. дају термичку конституцију атмосфере.

Из (10) следује

$$(11) \quad p_i(x) = p_i(0) e^{-\frac{g}{R_i} \int_0^x \Theta(x) dx}$$

и из (9), диференцијацијом по x и применом једначина (10),

$$\frac{4\Theta^4(x) d\Theta(x)}{\mu^4 dx} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{R_i} p_i(x).$$

IV

Нумеричко израчунавање термичке конституције планетске атмосфере помоћу претходних једначина не даје никаквих стварних тешкоћа, но те се једначине даду интегрисати у коначном облику само у специјалним случајевима.

Такав се један случај указује, ако су сви коефицијенти апсорпције, сем једног јединог, занемариви, т. ј. ако атмосфера садржи само један гас који апсорбује емитовану радијацију планете.

Стаavimo дакле

$$(13) \quad k_i = 0, \quad \text{за } i = 2, 3, \dots, n$$

онда је

$$(14) \quad \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4} = \frac{1}{g} k_1 p_1(x),$$

$$(15) \quad \frac{4\Theta^4(x) d\Theta(x)}{\mu^4 dx} = \frac{k_1}{R_1} p_1(x),$$

Одавде следује елиминацијом $p_1(x)$

$$(16) \quad dx = -\frac{4R_1}{g} \frac{\Theta^4(x) d\Theta(x)}{\Theta^4(x) - \mu^4}$$

Интеграција ове једначине даје, ако температуру најдоњег атмосферског слоја, т. ј. за $x=0$, означимо са Θ_0 , следећу једначину између x и $\Theta(x)$ у експлицитном облику према x :

$$(17) \quad \begin{cases} x = \frac{R_1}{g} \left[C_0 - 4\Theta(x) + \mu \left[\log_{\text{nat}} \frac{\Theta(x) + \mu}{\Theta(x) - \mu} + 2 \arctang \frac{\Theta(x)}{\mu} \right] \right] \\ C_0 = 4\Theta_0 - \mu \left[\log_{\text{nat}} \frac{\Theta_0 + \mu}{\Theta_0 - \mu} + 2 \arctang \frac{\Theta_0}{\mu} \right]. \end{cases}$$

Из (5) и (14) следује

$$(18) \quad \rho_1(x) = \frac{g}{R_1 k_1} \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4 \Theta(x)},$$

т. ј. због (5)

$$(19) \quad p_1(x) = \frac{g}{k_1} \frac{\Theta^4(x) - \mu^4}{\mu^4}.$$

Једначине (11) и (5) дају притиске и густине осталих саставних делова атмосфере.

V

Ако је Θ_0 велико према μ онда је за велик део атмосфере, т. ј. њених доњих слојева, μ^4 занемариво према $\Theta^4(x)$, па је због (16)

$$(20) \quad \frac{d\Theta(x)}{dx} = -\frac{g}{4R_1}.$$

Градијент температуре доњих слојева зависи, дакле, само од гасне константе R_1 .

Интеграција предње једначине даје

$$(21) \quad \Theta(x) = \Theta_0 - \frac{g}{4R_1} x,$$

а једначине (18) и (19) добивају сада ове облике

$$(22) \quad \rho_1(x) = \frac{g}{R_1 k_1} \frac{\Theta^3(x)}{\mu^4},$$

$$(23) \quad p_1(x) = \frac{g}{k_1} \frac{\Theta^4(x)}{\mu^4}.$$

Означимо целокупне масе појединих гасова, садржане у атмосферском стубу над јединицом планетске површине са M_1, M_2, \dots, M_3 , то је

$$(24) \quad M_i = \int_0^h \rho_i(x) dx,$$

дакле због (7)

$$(25) \quad p_i(0) = g M_i.$$

Тако нам даје једначина (14) у овом случају

$$(26) \quad \left(\frac{\Theta_0}{\mu} \right)^4 = k_1 M_1$$

дакле

$$(27) \quad p_1(x) = \frac{g}{k_1} \left(\frac{\theta_0}{\mu} \right)^4$$

$$(28) \quad p_1(x) = p_1(0) \frac{\theta^4(x)}{\theta_0^4}$$

$$(29) \quad \rho_1(x) = \rho_1(0) \frac{\theta^3(x)}{\theta_0^3}$$

Из (21) следује

$$\int_0^x \frac{dx}{\theta(x)} = -\frac{4R_1}{g} \log_{\text{nat}} \frac{\theta(x)}{\theta_0}$$

дакле због (11)

$$(30) \quad p_i(x) = p_i(0) \left[\frac{\theta(x)}{\theta_0} \right]^{4 \frac{R_1}{R_i}}$$

Одавде се добива помоћу (5)

$$(31) \quad \rho_i(x) = \rho_i(0) \left[\frac{\theta(x)}{\theta_0} \right]^{4 \frac{R_1}{R_i} - 1}$$

Из (29) и (31) следује

$$(32) \quad \frac{\rho_i(x)}{\rho_1(x)} = \frac{\rho_i(0)}{\rho_1(0)} \left[\frac{\theta(x)}{\theta_0} \right]^{4 \frac{R_1 - R_i}{R_i}}$$

Ова ~~једна~~ једначина даје промену примесе разних гасова у атмосфери са висином.

Како је у нашем случају

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} < 1$$

то ће примеса гаса константе R_i у атмосфери расти са висином када буде $R_i > R$. Пошто гасне константе стоје у обратној размери молекуларних тежина, то ће примеса лакших гасова расти са висином по закону (32).

VI

Узму ли се у обзир динамички процеси у атмосфери и са њима проузроковане термичке промене, то ће се, у случају да је атмосфера саграђена од једнога гаса константе R_1 , она налазити у индиферентној механичкој равнотежи ако градијенат температуре буде представљен изразом

$$(33) \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{g}{R_1} \frac{\kappa - 1}{\kappa},$$

где је

$$(34) \quad \kappa = \frac{c'}{c}$$

при чему c и c' означавају специфичне топлоте гаса при константној запремини односно при константном притиску.

Ако је атмосфера саграђена од триатомног гаса, онда је

$$\kappa = \frac{4}{3},$$

па у томе случају добива услов (33) облик

$$(35) \quad \frac{d\theta(x)}{dx} = -\frac{g}{4R_1},$$

дакле потпуно идентичан са једначином (20). Тако долазимо до резултата да су услови радиационе и индиферентне механичке равнотеже идентични у случају када је атмосфера саграђена од триатомног гаса. То је случај када је атмосфера саграђена од водене паре а са њиме ћемо се још нарочито бавити. У томе важном случају важе, данас већ напуштени резултати теорије Ритера¹, па зато они заслужују поновну пажњу научника.

После ових општих теоријских разматрања приступимо конкретним применама изложене теорије.

VII

Већ је само по себи од интереса питање: Какова је била термичка конституција Земљине атмосфере у доба када је Земљина кора била толико топла да су се све њене воде налазиле у атмосферском плашту земље. Но сем свога историјског интереса, има ово питање у актуелан значај. Стадиум кроз који је у споменуто доба прошла Земљина атмосфера је такође стадиум кроз који морају проћи и друге атмосфере. Планете Меркур и Марс прошл~~и~~ су га сигурно, планета Венера вероватно, а и остале планете имају тек да га прођу. Зато је и за слику развитка ових планета важан одговор на ~~сва~~ постављено питање.

¹ Главни резултати његових чланака, публикованих у годинама 1878 до 1890 у *Annalen der Physik*, скупљени су у засебној монографији *Ritter A, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme. Zweiter Abdruck. Leipzig 1882.*

Главни саставни део Земљине атмосфере у проучаваном стадијуму била је, без сумње, водена пара, јер су се тада налазиле све воде Земљине, њена данашња мора, језера, реке, потоци, па и подземне воде у Земљиној атмосфери, док је кисеоник данашње Земљине љуске био већ везан са силицијумом, алуминијумом и осталим њеним саставинама.

О количини воде која се данас налази на Земљи, обавештени смо доста тачно; она је толика да би потпуно нивелисану Земљину површину покрила морем од 2000 метара дубине. Та се количина није, вероватно, осетно мењала у току векова, јер оба главна фактора која ју мењају (вулканизам и везивање воде у минералима) дејствују у противном правцу, па се њихови ефекти, макар у знатној мери међусобно компензују¹.

Остали саставни делови праатмосфере Земљине, ако их је у опште било у већој мери, утицали су само незнатно на вертикални распоред температуре, јер су апсорпциони коефицијенти обичних гасова знатно мањи од апсорпционог коефицијента водене паре. Зато можемо применити теоријске резултате, изложене под IV и V и ставити

$$(36) \quad M = 200.000 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}$$

О апсорпционом коефицијенту k_1 имамо ове податке. Емитована радијација Земљине љуске била је у проучаваном стадијуму светла. Према испитивањима установе Smithsonian Institution, дискутованим у моме споменутом делу, апсорпција светлих зрака у данашњој безоблачно претпостављеној Земљиној атмосфери достигла величину од 22 процента; од тога отпада на селективну апсорпцију 12 процената. Та је селективна апсорпција извршена скоро сасвим воденом паром, а како ова учествује и у осталој апсорпцији барем у истој мери као и остали саставци Земљине атмосфере, то се може узети да на водену пару отпада аритметска средина горњих двају бројева, т. ј. 17 процената. Зато је трансмисиони коефицијент данашње количине водене паре

$$p = 0.83.$$

При томе је претпостављено да светлосни зраци пролазе под свима могућим угловима кроз атмосферске слојеве, као што то захтевају и напред изложене једначине.

¹ Види о томе детаљније: *Walther, Geschichte der Erde und des Lebens. Leipzig 1908. p. 67 ff.*

Водена пара која се сада налази у Земљиној атмосфери покрила би, кондензована, Земљину површину слојем од 25 cm.¹ Зато је у садањем стадијуму

$$(37) \quad M_1 = 2.5 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2},$$

па је због тога, према дефиницији трансмисионог коефицијента,

$$(38) \quad e^{-k_1 M_1} = 0.83,$$

зато је

$$k_1 M_1 = 0.1863,$$

т. ј. због (36) и (37)

$$(39) \quad k_1 M_1 = 14900.$$

Једначина (26) даје, дакле

$$(40) \quad \frac{\Theta_0}{\mu} = 11.0$$

Уочићемо онај стадијум историје Земље када је њена спољна љуска била таман још у растопљеном стању. Како се скоро сви минерали, сем неких еруптивних, растапају код температура испод 1600° C, то ћемо, узев још у обзир повишење температуре растапања са притиском, ставити за апсолутну температуру најнижег атмосферског слоја:

$$(41) \quad \Theta_0 = 1873^0 \text{ abs.}$$

Онда је због (40)

$$(42) \quad \mu = 170^0 \text{ abs.}$$

За гасну константу R_1 имамо поуздан податак. Највећи део водене паре, садржане у праатмосфери, налазио се, као што ће се из следећих рачуна видети, у презагрејаном стању и изнад критичне температуре. Та се пара понашала дакле као идеалан гас и зато ваља ставити²

$$(43) \quad \frac{R_1}{g} = 4.700 \text{ cm.}$$

Помоћу ових нумеричких вредности и саопштених једначина израчунао сам термичку конституцију Земљине праатмосфере,

¹ *Hann-Sörnig, Lehrbuch der Meteorologie. Vierte Auflage Leipzig 1921. — p. 245.*

² *Emden, Gaskugeln. Leipzig 1907. p. 9 — Wegener, Thermodynamik der Atmosphäre. Leipzig 1911, p. 69.*

густину и парцијелне притиске водене паре која се ^а у њој налазила. Резултати тога рачуна саопштени су на крају ове расправе у табlici II. Ради сравањивања саопштена је у табlici I садања теоретска конституција Земљине атмосфере, објављена у моме споменутоме делу која се, као што је то показао С. Мохоровичић¹ слаже врло добро са опажањима.

VIII

Из таблица I и II може се, пре свега, прочитати ово:

Земљина праатмосфера уздизала се до огромне висине, њена густина била је на висини од 300 километара већа по

Таблица I — Tableau I

Конституција Земљине атмосфере у њеном садањем стадиуму
Constitution de l'atmosphère de la Terre dans son état actuel

Висина Altitude km	Температура Température Echelle centigrade	Притисак Pression mm de Hg	Густина Densité gr. par cm ³	Примедба Remarque
0	+ 10 ⁰	760	1.293 × 10 ⁻³	
0.918	+ 5 ⁰	679	1.134 × 10 ⁻³	
1.779	0 ⁰	610	1.038 × 10 ⁻³	Тачка смрзавања Point de congélation
2.672	- 5 ⁰	545	0.945 × 10 ⁻³	
3.602	- 10 ⁰	484	0.855 × 10 ⁻³	
4.577	- 15 ⁰	426	0.767 × 10 ⁻³	
5.606	- 20 ⁰	371	0.682 × 10 ⁻³	
6.706	- 25 ⁰	320	0.599 × 10 ⁻³	
7.891	- 30 ⁰	271	0.519 × 10 ⁻³	
9.190	- 35 ⁰	226	0.440 × 10 ⁻³	
10.644	- 40 ⁰	183	0.364 × 10 ⁻³	
12.320	- 45 ⁰	143	0.291 × 10 ⁻³	
14.344	- 50 ⁰	105	0.218 × 10 ⁻³	
16.975	- 55 ⁰	70	0.149 × 10 ⁻³	
20.977	- 60 ⁰	37	0.080 × 10 ⁻³	
31.723	- 65 ⁰	7	0.016 × 10 ⁻³	

¹ Meteorologische Zeitschrift 1921. p. 316.

Таблица II — Tableau II

Конституција Земљине атмосфере у њеном примитивном стадиуму
Constitution de l'atmosphère de la Terre dans son état primitif

Висина Altitude km	Температура Température Echelle centigrade	Притисак Pression mm de Hg	Густина Densité gr. par cm ³	Примедба Remarque
0	1600 ⁰	147.100	22.719 × 10 ⁻³	
56.40	1300 ⁰	73.122	13.456 × 10 ⁻³	
112.80	1000 ⁰	31.360	7.131 × 10 ⁻³	
150.45	800 ⁰	15.825	4.269 × 10 ⁻³	
188.06	600 ⁰	6.928	2.297 × 10 ⁻³	
225.74	400 ⁰	2.441	1.050 × 10 ⁻³	
244.68	300 ⁰	1.278	0.645 × 10 ⁻³	
263.67	200 ⁰	588	0.360 × 10 ⁻³	
283.03	100 ⁰	221	0.172 × 10 ⁻³	
292.00	55 ⁰	129	0.114 × 10 ⁻³	Тачка врења Point d'ébullition
293.00	50 ⁰	120	0.108 × 10 ⁻³	
303.53	0 ⁰	56	0.060 × 10 ⁻³	Тачка смрзавања Point de congélation
315.79	- 50 ⁰	20	0.025 × 10 ⁻³	

што је сада на висини од 20 километара. Доњих 292 километара те атмосфере били су саграђени од преугрејане водене паре која се понаша као савршен гас, тако да се претпоставке изложене теорије показују на томе највећем делу праатмосфере потпуно оправдане. На километру 292-гом достигнута је тачка кључања воде¹. Са том висином почиње, дакле, зона водене паре у правом смислу речи, т. ј. зона облака. Ова се уздиже до изнад висине од 303.53 km, на којој висини лежи тачка смрзавања воде. Како је у тој висини густина атмосфере већ врло мала, то ју облаци не прекорачују знатно. Тако је Земљину праатмосферу опкољавао на висини од 300 km, као каква љуска, густ облачни вео од барем 12 km дебљине, који није дозвољавао да и један сунчев зрак светлости продре у ниже слојеве земљине атмосфере.

Обавијена непробојним облацима, Земљина праатмосфера

¹ Израчуната помоћу Zeuner-ове таблице, саопштено у Chwolson, Traité de Physique. Tome III. Paris 1909. p. 677.

могла је бити осветљавана само од доле, т. ј. од ражарене њене површине, но та њена властита светлост није могла продрети дубоко у њену атмосферу, него је била — као што се може рачунски показати — потпуно угашена већ у првом километру висине.

IX

И^{3/4} таблице II следеће још^{4/5} ово:

Термичка конституција највећег дела праатмосфере претстављена је врло добро једначином (21). Уведемо ли, место апсолутних температура, температуре мерене ~~на~~ Целзиусовој скали и означимо ове са $u(x)$, ~~то~~ можемо тој једначини дати облик

$$(44) \quad u(x) = u(0) - \frac{g}{4R_1} x.$$

Одступања нумеричких вредности таблице II од вредности које даје ова једначина, заиста су незнатна. Оне не достижу^{4/5} до висине од 200 km ни један град Целзијуса. Једначина (44) важи, дакле, за високе температуре врло тачно а, што је врло карактеристично, у тој се једначини не појављује апсорпциони коефицијент, него само гасна константа.

X

Висина при којој се достиже^{4/5} тачка кључања воде зависи не само од термичког распореда него и од распореда притиска у планетској атмосфери, а овај последњи зависи од апсорпционих способности атмосфере. Висина у којој се достиже^{4/5} тачка смрзавања не зависи од притиска, него је одређена чисто температурним условом да температура буде равна 0°C . Ова последња висина одређује нам, макар у првој апроксимацији, и овај гранични слој атмосфере који се спољњем гледаоцу указује као планетска површина. У близини тога слоја лежи, као што смо видели већ код Земљине праатмосфере, граница облака, а ти облаци су оно што видимо код планета са густим атмосферама. И до те висине важи једначина (44) толико тачно да помоћу ове можемо ту висину израчунати са грешком од неколико километара, која је занемарива. Зато је та висина дата са

$$(45) \quad H = \frac{4R_1}{g} u(0).$$

Помоћу ове једначине можемо израчунати још ону граничну висину атмосфере код које она може још да постоји као атмос-

фера водене паре. У то име ваља ставити у (45) $u(0) = 3000^\circ\text{C}$, јер при тој температури развија се сигурно, поред свог огромног притиска, толико металних пара и других гасова да атмосфера престаје бити атмосфера водене паре. Величина g је за различите планете различита, па тако добивамо за H ове вредности

Венера	640 km
Јупитер	220 km
Сатурн	530 km
Уранус	610 km
Нептун	590 km

За толико би, дакле, стварна површина планетска лежала ниже од оне коју видимо и која је гранична површина облака. Та редукција стварних димензија планетских имала би за последицу повишење њихове средње густине, но код спољних планета не у толикој мери да би донела могућност житке или круте планетске површине. Тај стадиум нису спољне планете још достигле.