Marko D. Leko

BORNOVO RELATIVISTICKI CVRSTO TELO

(doktorska disertacija)

S A D R Z A J

Smatram svojom prijatnom duznoscu da istaknem da mi je temu moje doktorske disertacije predlozio moj kolega Dr Rastko Stojanovic.

Beograd, 14.III.1963.

UVOD

Posmatrajmo sistem tacaka C_{ξ^i} ($i = 1,2,3$), gde su ξ^i parametri koji karakterisu bilo koju od tacaka sistema.

Klasicna definicija cvrstog tela: "za sistem tacaka se kaze da predstavlja cvrsto telo ako je rastojanje istovremenih polozaja dveju bilo kojih tacaka sistema tokom vremena nepromenljivo i zavisi samo od izbora tih dveju tacaka", neodrziva je u teoriji relativnosti jer se zasniva na pojmu istovremenosti koji u teoriji relativnosti nema apsolutno znacenje. Prema tome, usvajajuci gornju definiciju, u teoriji relativnosti bi se moglo reci samo da je sistem tacaka C_{ξ^i} cvrst u odnosu na odredjenog posmatraca, pa "cvrstoca" nekog sistema ne bi bila prirodna osobina tog sistema sa stanovista teorije relativnosti.

Trazeci osobinu sistema tacaka C_{ξ^i} koja bi bila kovarijantna u odnosu na transformacije teorije relativnosti (i, prema tome, nezavisna od posmatraca) a koja bi predstavljala generalizaciju klasicnog cvrstog tela, Maks Born[1] (Max Born) je dao ovu definiciju relativisticki cvrstog tela: "za sistem tacaka C_{ξ^i} se kaze da predstavlja relativisticki cvrsto telo ako je za svake dve bliske tacke tog sistema interval izmedju odgovarajucih svetskih linija, upravan na tim linijama, stalan tokom tog kretanja". Izrazi "interval" i "upravan" su u ovoj definiciji shvaceni u smislu metrike prostor-vremena. Potrebno je na-

[1] M. Born, Ann. Phys., 30, 1 (1909).

glasiti da je Born, definisuci relativisticki cvrsto te! mislio na cvrsto telo u specijalnoj teoriji relativnost To je i prirodno, jer je vreme kada je Born dao svoju d finiciju prethodilo pojavi opste teorije relativnosti.

Interesantno je da nema radova iz kojih bi se vide da se Born kasnije bavio tim problemom i u opstoj teori relativnosti, ma da se definicija koju je dao moze, be ikakvih izmena, primeniti i u opstoj teoriji relativno

Ubrzo po Bornovom definisanju relativisticki cvrs tela Hergloc[2] (G. Herglotz) i Neter[3] (F. Noether) su, nezavisno jedan od drugog, pokazali da Bornovo cvrsto u specijalnoj teoriji relativnosti ima samo <u>tri</u> stepen slobode. To je ocigledan nedostatak Bornovog cvrstog t Ali, kako do danas nije data nijedna prihvatljivija de nicija, skoro svi radovi[4] koji su u vezi s relativist cvrstim telom zasnivaju se na Bornovoj definiciji.

Problemom cvrstog tela u opstoj teoriji relativno prvi su se bavili i matematicki izrazili Bornovu defin ju Salcman i Taub[5] (G. Salzman i A. Taub). U delu svc

---

[2] G. Herglotz, Ann. Phys. <u>31</u>, 393 (1909-1910).

[3] F. Noether, Ann. Phys., <u>31</u>, 919 (1909-1910).

[4] Pomenucemo radove:

J.R.Pounder, Communications of the Dublin Inst te for Advanced Studies, Ser.A, No.11 (1954). U ovom autor proucava relativisticki cvrste obrtne povrsine.

J.L.Synge, Stud.Math. [redacted] Mech. Presented to R chard von Mises, New York, 1954, p.217. U ovom radu s proucava kretanje relativisticki cvrstih povrsina uo

J. L. Synge, Math.Zeits., <u>72</u> (1), 82 (1959). U radu autor je proglasio za meru brzine deformacije iz koji Salcman i Taub oznacuju sa $D_{\alpha\beta}$ (vidi izraz (1. i na osnovu toga je predlozio jednu relativisticku te ju elasticnosti.

R.A.Toupin, Arch.Ratl.Mech.Anal., <u>1</u> (3), 181(U tom radu autor ukazuje da se ne moze formulisati m ka kontinuuma u relativnosti bez definicije relativi cvrstog tela.

[5] G.Salzman and A.H.Taub, Phys.Rev., <u>95</u>, 1659 (195

rada koji se odnosi na kinematiku Bornovog cvrstog tela oni su, osim matematickog oblika Bornove definicije, izveli u tenzorskom obliku rezultate Hergloca i Netera, koji se odnose na kretanje Bornovog cvrstog tela u specijalnoj teoriji relativnosti. Problem broja stepeni slobode Bornovog cvrstog tela u opstoj teoriji relativnosti nisu ni oni niti iko posle njih razmatrali.

U ovome radu izlozicemo izvodjenje ~~xxxxxxxxx~~ diferencijalnih jednacina kretanja Bornovog cvrstog tela u opstoj teoriji relativnosti koje su u pomenutom radu dali Saloman i Taub, zatim cemo pokazati da te diferencijalne jednacine mogu biti zadovoljene samo ako je zadovoljen jedan od dva jednostavnija sistema diferencijalnih jednacina. Pokazacemo, dalje, da svaki od ta dva sistema dopusta kretanje koje ima samo <u>tri</u> stepena slobode. Nacin prilasenja problemu i pojedini rezultati se potpuno razlikuju od onih koje su dali Hergloc i Neter. Dalje cemo pokazati da i klasicna aproksimacija kretanja Bornovog cvrstog tela ima samo tri stepena slobode, sto konacno potvrdjuje da Bornovo relativisticki cvrsto telo <u>nije</u> generalizacija klasicnog cvrstog tela, pa smo naveli i jedan pokusaj takve generalizacije, za koji smo pokazali da predstavlja samo specijalan slucaj Bornovog tela. Najzad, nezavisno od problema broja stepeni slobode, pokazali smo da, i pored velikog nedostatka Bornovog relativisticki cvrstog tela, izmedju njega i klasicnog cvrstog tela postoji uocljiva analogija, koja na osnovu Bornove definicije nije ocigledna. Na kraju smo predlozili put za koji, na osnovu iskustva stecenog za vreme izrade ovog rada, verujemo da moze dovesti do resenja problema relativisticke generalizacije klasicnog cvrstog tela.

U izlaganju cemo se sluziti oznakama koje su Saloman i Taub koristili u svome gore pomenutom radu. Pri tome ce latinski indeksi uzimati vrednosti 1,2,3, a grcki 1,2,3,4. Duznost nam je da istaknemo da i navedena stilizacija Bornove definicije pripada istim autorima.

GLAVA I

DIFERENCIJALNE JEDNACINE KRETANJA BORNOVOG RELATIVISTICKI CVRSTOG TELA U OPSTOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

U datom koordinatnom sistemu x^{α} prostor-vremena, gde je $x^4 = ct$, pri cemu je c brzina prostiranja svetlosti u vakuumu a t vreme u tom koordinatnom sistemu, kretanje sistema tacaka C_{ξ^i} odredjeno je jednacinama

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(\xi^i, \theta), \tag{1.1}$$

gde je θ ma koji parametar vremenskog tipa (moze se, na primer, uzeti da je $\theta = x^4$). Po pretpostavci, jednacine (1.1) predstavljaju nesingularnu transformaciju izmedju koordinata x^{α} i koordinata ξ^i, θ. Dalje se pretpostavlja da jedna cine (1.1), za fiksirane vrednosti ξ^i predstavljaju parametarske jednacine linije vremenskog tipa, jer po pretpostavci nijedna tacka C_{ξ^i} bilo kog sistema tacak nema brzinu ni u jednom trenutku koja dostize ili prevazilazi brzinu svetlosti, i da funkcije $x^{\alpha}(\xi^i, \theta)$ imaju neprekidne druge parcijalne izvode po ξ^i, θ. Neka je $g_{\alpha\beta}$ metricki tenzor prostor-vremena u x^{α} koordinatnom sistemu takav da signatura forme $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$ bude 2 a da tom formom definisan interval prostornog tipa bude pozitivan (tj. takav da u specijalnoj teoriji relativnosti u odnosu na Galilejeve koordinate glasi

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 - (dx^4)^2.)$$

Neka je

$$\mathcal{U}^{\alpha}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta}\equiv x^{\alpha}_{,\theta}\,. \qquad (1.2)$$

$\mathcal{U}^{\alpha}$ je cetvorovektor brzine vremenskog tipa, pa mu je intenzitet

$$\left(-g_{\alpha\beta}\mathcal{U}^{\alpha}\mathcal{U}^{\beta}\right)^{1/2}. \qquad (1.3)$$

Cetvorovektor

$$u^{\alpha}=\left(-g_{\lambda\mu}\mathcal{U}^{\lambda}\mathcal{U}^{\mu}\right)^{-1/2}\mathcal{U}^{\alpha} \qquad (1.4)$$

je cetvorovektor za koji je

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}=u_{\alpha}u^{\alpha}=-1, \qquad (1.5)$$

gde je

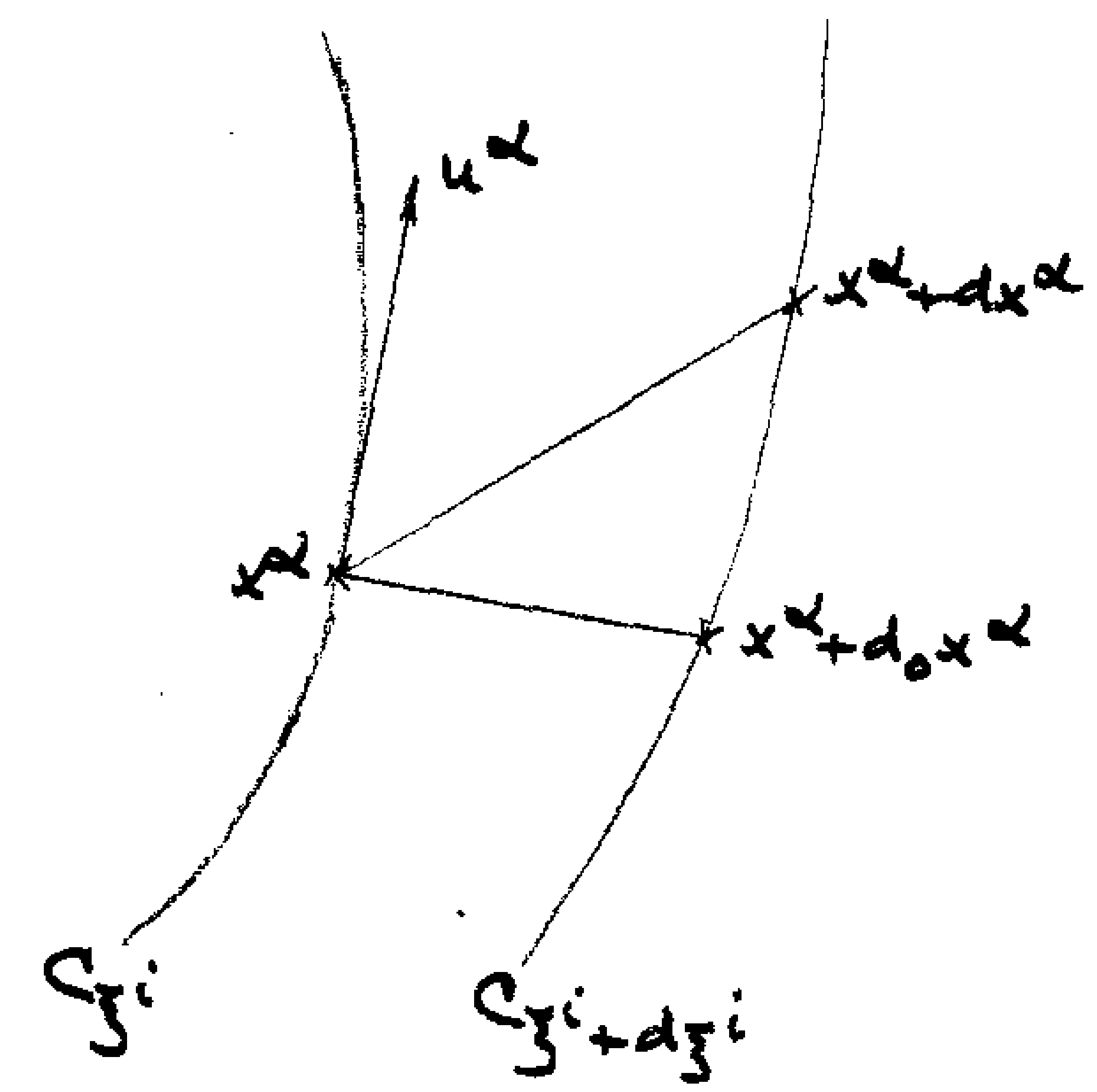
$$u_{\alpha}=g_{\alpha\beta}u^{\beta}, \qquad (1.6)$$

tj. u^{α} je jedinicni cetvorovektor brzine. Iz (1.5) je

$$u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}=0, \qquad (1.7)$$

gde je $u_{\alpha;\beta}$ kovarijantni izvod vektora u_{α} po x^{β}.

Zapazimo, sada, svetske linije dveju bliskih tacaka C_{ξ^i} i $C_{\xi^i+d\xi^i}$ (sl.1) i na svetskoj liniji tacke C_{ξ^i} bilo koji dogadjaj x^{α}, a na svetskoj liniji tacke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ njemu bliski dogadjaj $x^{\alpha}+dx^{\alpha}$. U opstem slucaju pomeranje



sl.1.

$$dx^{\alpha}=x^{\alpha}_{,i}d\xi^i+\mathcal{U}^{\alpha}d\theta, \qquad \left(x^{\alpha}_{,i}\equiv\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i}\right) \qquad (1.8)$$

nije upravno na svetskoj liniji tacke C_{ξ^i}, tj. u opstem slucaju ne vazi

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}dx^{\beta}=0. \tag{1.9}$$

Stoga nam je cilj da, za date vrednosti $d\xi^i$, nadjemo ono $d\theta$ za koje je zadovoljena jednacina (1.9). Stavljajuci (1.8) u (1.9) dobivamo

$$u_{\alpha}\left(x^{\alpha}_{,i}\,d\xi^i+\mathcal{U}^{\alpha}d\theta\right)=0,$$

odakle je

$$d\theta=-\,\frac{u_{\alpha}x^{\alpha}_{,i}}{u_{\beta}\mathcal{U}^{\beta}}\,d\xi^i,$$

sto zamenom u (1.8) za pomeranje $d_o x^{\alpha}$ upravno na svetskoj liniji tacke C_{ξ^i} daje

$$d_o x^{\alpha}=\left(x^{\alpha}_{,i}-\frac{\mathcal{U}^{\alpha}u_{\lambda}}{u_{\rho}\mathcal{U}^{\rho}}\,x^{\lambda}_{,i}\right)d\xi^i.$$

Smenivsi, na osnovu (1.4), $\mathcal{U}^{\alpha}$ izrazom

$$\mathcal{U}^{\alpha}=\left(-\mathcal{U}_{\nu}\mathcal{U}^{\nu}\right)^{1/2}u^{\alpha},$$

za $d_o x^{\alpha}$ dobivamo

$$d_o x^{\alpha}=\left(x^{\alpha}_{,i}-\frac{u^{\alpha}u_{\lambda}}{u_{\rho}u^{\rho}}\,x^{\lambda}_{,i}\right)d\xi^i. \tag{1.10}$$

Napominjemo da smo kolicnik smeli skratiti sa $\left(-\mathcal{U}_{\nu}\mathcal{U}^{\nu}\right)^{1/2}$ jer je, kao sto je vec spomenuto, $\mathcal{U}^{\alpha}$ cetvorovektor vremenskog tipa pa je, svakako, $\mathcal{U}_{\nu}\mathcal{U}^{\nu}\neq 0$. Najzad, zbog (1.5), imamo da je

$$d_o x^{\alpha}=\left(x^{\alpha}_{,i}+u^{\alpha}u_{\lambda}x^{\lambda}_{,i}\right)d\xi^i. \tag{1.11}$$

Bornova definicija relativisticki cvrstog tela zahteva, sada, da izraz

$$dl^2=g_{\alpha\beta}\,d_o x^{\alpha}d_o x^{\beta} \tag{1.12}$$

ne zavisi od θ, tj. da je

$$(dl^2)_{,\theta}=0. \tag{1.13}$$

Smenivsi (1.11) u (1.12) dobivamo

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}(x^\alpha_{,i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i})(x^\beta_{,j} + u^\beta u_\mu x^\mu_{,j})d\xi^i d\xi^j,$$

odn.

$$dl^2 = g_{\alpha\beta}x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j}d\xi^i d\xi^j + g_{\alpha\beta}u^\beta u_\mu x^\alpha_{,i}x^\mu_{,j}d\xi^i d\xi^j +$$

$$+ g_{\alpha\beta}u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i}x^\beta_{,j}d\xi^i d\xi^j + g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta u_\lambda u_\mu x^\lambda_{,i}x^\mu_{,j}d\xi^i d\xi^j,$$

ili, podesnom izmenom nemih indeksa i uzimajuci u obzir (1.5) i (1.6),

$$dl^2 = (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j}d\xi^i d\xi^j. \tag{1.14}$$

S obzirom da velicine $d\xi^i$ ne zavise[6] od θ i s obzirom da su proizvoljne, sada se iz (1.13) dobiva

$$\left[(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j}\right]_{,\theta} = 0. \tag{1.15}$$

Izvevsi naznaceno parcijalno diferenciranje po θ, dobiva se

$$(g_{\alpha\beta,\theta} + u_{\alpha,\theta}u_\beta + u_\alpha u_{\beta,\theta})x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j} + (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)(x^\alpha_{,i})_{,\theta}x^\beta_{,j} +$$

$$+ (g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta)x^\alpha_{,i}(x^\beta_{,j})_{,\theta} = 0. \tag{1.16}$$

Kako su drugi parcijalni izvodi funkcija x^α po pretpostavci neprekidni po argumentima ξ^i i θ to je

$$(x^\alpha_{,i})_{,\theta} = (x^\alpha_{,\theta})_{,i},$$

tj.

$$(x^\alpha_{,i})_{,\theta} = \mathcal{U}^\alpha_{,i} = \mathcal{U}^\alpha_{,\gamma}x^\gamma_{,i},$$

$$\left(\mathcal{U}^\alpha_{,i} \equiv \frac{\partial \mathcal{U}^\alpha}{\partial \xi^i},\ \mathcal{U}^\alpha_{,\gamma} \equiv \frac{\partial \mathcal{U}^\alpha}{\partial x^\gamma}\right)$$

kako je

$$u_{\alpha,\theta} = u_{\alpha,\gamma}x^\gamma_{,\theta} = u_{\alpha,\gamma}\mathcal{U}^\gamma$$

---

[6] Salcman i Taub su u daljem izvodjenju uveli i koristili pojam sopstvenog vremena.

i kako je

$$g_{\alpha\beta,\theta} = g_{\alpha\beta,\lambda}\, x^{\lambda}_{,\theta} = g_{\alpha\beta,\lambda}\, U^{\lambda},$$

tj.

$$g_{\alpha\beta,\theta} = \left(g_{\alpha\gamma} \left\{ {\gamma \atop \beta\lambda} \right\} + g_{\gamma\beta} \left\{ {\gamma \atop \alpha\lambda} \right\} \right) U^{\lambda},$$

gde je $\left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\}$ Kristofelov simbol druge vrste, to (1.16) postaje

$$\left[\left(g_{\alpha\gamma} \left\{ {\gamma \atop \beta\lambda} \right\} + g_{\gamma\beta} \left\{ {\gamma \atop \alpha\lambda} \right\} \right) U^{\lambda} + u_{\alpha,\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\alpha} u_{\beta,\gamma} U^{\gamma} \right] x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} +$$

$$+ \left(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta} \right) U^{\alpha}_{,\gamma}\, x^{\gamma}_{,i} x^{\beta}_{,j} + \left(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha} u_{\beta} \right) U^{\beta}_{,\gamma}\, x^{\alpha}_{,i} x^{\gamma}_{,j} = 0.$$

Podesnom izmenom nemih indeksa dobivamo

$$\left[\left(g_{\alpha\gamma} \left\{ {\gamma \atop \beta\lambda} \right\} + g_{\gamma\beta} \left\{ {\gamma \atop \alpha\lambda} \right\} \right) U^{\lambda} + u_{\alpha,\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\alpha} u_{\beta,\gamma} U^{\gamma} + \right.$$

$$\left. + \left(g_{\gamma\beta} + u_{\gamma} u_{\beta} \right) U^{\gamma}_{,\alpha} + \left(g_{\alpha\gamma} + u_{\alpha} u_{\gamma} \right) U^{\gamma}_{,\beta} \right] x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} = 0,$$

odn.

$$\left[g_{\alpha\gamma} \left(U^{\gamma}_{,\beta} + \left\{ {\gamma \atop \beta\lambda} \right\} U^{\lambda} \right) + g_{\gamma\beta} \left(U^{\gamma}_{,\alpha} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\lambda} \right\} U^{\lambda} \right) + \right.$$

$$+ \left(u_{\alpha,\gamma} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\gamma} \right\} u_{\lambda} \right) U^{\gamma} u_{\beta} + \left(u_{\beta,\gamma} - \left\{ {\lambda \atop \beta\gamma} \right\} u_{\lambda} \right) U^{\gamma} u_{\alpha} +$$

$$\left. + \left(U^{\gamma}_{,\alpha} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\lambda} \right\} U^{\lambda} \right) u_{\gamma} u_{\beta} + \left(U^{\gamma}_{,\beta} + \left\{ {\gamma \atop \beta\lambda} \right\} U^{\lambda} \right) u_{\alpha} u_{\gamma} \right] x^{\alpha}_{,i} x^{\beta}_{,j} = 0.$$

S obzirom da izrazi u okruglim zagradama predstavljaju kovarijantne izvode odgovarajucih vektora, poslednja se jednacina moze napisati u obliku

$$\left(g_{\alpha\gamma} U^{\gamma}_{;\beta} + g_{\gamma\beta} U^{\gamma}_{;\alpha} + u_{\alpha;\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\beta;\gamma} U^{\gamma} u_{\alpha} + \right.$$

$$\left. + U^{\gamma}_{;\alpha} u_{\gamma} u_{\beta} + U^{\gamma}_{;\beta} u_{\gamma} u_{\alpha} \right) x^{\alpha}_{,i}\, x^{\beta}_{,j} = 0,$$

tj. u obliku

$$\left(U_{\alpha;\beta} + U_{\gamma;\beta} u^{\gamma} u_{\alpha} + U_{\beta;\alpha} + U_{\gamma;\alpha} u^{\gamma} u_{\beta} + \right.$$

$$\left. + u_{\alpha;\gamma} U^{\gamma} u_{\beta} + u_{\beta;\gamma} U^{\gamma} u_{\alpha} \right) x^{\alpha}_{,i}\, x^{\beta}_{,j} = 0,$$

ili, najzad, u obliku

$$[U_{\gamma;\beta}(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha})+U_{\gamma;\alpha}(\delta^{\gamma}_{\beta}+u^{\gamma}u_{\beta})+$$

$$+u_{\alpha;\gamma}U^{\gamma}u_{\beta}+u_{\beta;\gamma}U^{\gamma}u_{\alpha}]x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0, \qquad (1.17)$$

gde je

$$\delta^{\gamma}_{\alpha}=\begin{cases}1, & \gamma=\alpha\\ 0, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

Kronekerov simbol.

Iz (1.4) je

$$U_{\alpha}=(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}u_{\alpha}, \qquad (1.18)$$

i, na osnovu toga,

$$U_{\gamma;\beta}(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha})=\left[(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}_{,\beta}u_{\gamma}+(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}u_{\gamma;\beta}\right](\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha})$$

$$=(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}_{,\beta}(u_{\alpha}+u_{\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha})+$$

$$+(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}(u_{\alpha;\beta}+u_{\gamma;\beta}u^{\gamma}u_{\alpha}),$$

sto je, zbog (1.5) i (1.7),

$$U_{\gamma;\beta}(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha})=(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}u_{\alpha;\beta}. \qquad (1.19)$$

Koriscenjem (1.18) u obliku

$$U^{\alpha}=(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}u^{\alpha} \qquad (1.20)$$

i (1.19), (1.17) postaje, posle skracivanja sa $(-U_{\lambda}U^{\lambda})^{1/2}$,

$$(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}+u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha})x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0. \qquad (1.21)$$

Da bismo sebi olaksali dalje pisanje, uvedimo tenzor

$$D_{\alpha\beta}=u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}+u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha}. \qquad (1.22)$$

Sa tom oznakom, (1.21) glasi

$$D_{\alpha\beta}\, x^{\alpha}_{,i}\, x^{\beta}_{,j} = 0, \tag{1.23}$$

odn.

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{j}} = 0. \tag{1.24}$$

Posmatrajmo, sada, izraz $D_{\alpha\beta} u^{\alpha}$. Uzimajuci, ponovo, u obzir (1.7) i (1.5) dobivamo

$$D_{\alpha\beta} u^{\alpha} = 0 .$$

Mnozenjem te jednacine sa $(-u_{\lambda}u^{\lambda})^{1/2}$ dobiva se, zbog (1.20),

$$D_{\alpha\beta} U^{\alpha} = 0,$$

odn.

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta} = 0, \tag{1.25}$$

a, otuda, i

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{i}} = 0 \tag{1.26}$$

i

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \theta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \theta} = 0. \tag{1.27}$$

Ako jos, zbog podesnosti, za trenutak uvedemo oznaku

$$\xi^{4} = \theta,$$

jednacine (1.24), (1.26) i (1.27) se zajedno mogu napisati u obliku

$$D_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} = 0. \tag{1.28}$$

Posmatrajmo (1.28) kao sistem od 16 homogenih linearnih jednacina po 16 nepoznatih $D_{\alpha\beta}$. Uvedimo matricu

$$T = \left\{ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \right\}, \tag{1.29}$$

cija je determinanta

$$\Delta = |T| = \left| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \right| \tag{1.30}$$

Jakobijan funkcija x^{α} u odnosu na promenljive ξ^{λ}.

Da bismo napisali matricu koeficijenata uz nepoznate $D_{\alpha\beta}$ u sistemu jednacina (1.28) postupimo na sledeci nacin. Pre svega fiksirajmo λ i α. Time u sistemu (1.28) uocavamo samo one jednacine koje imaju to fiksirano λ i bilo koje μ, i u tim jednacinama posmatramo samo koeficijente uz cetiri nepoznate $D_{\alpha\beta}$ koje imaju fiksirano α i bilo koje β. Matrica tih koeficijenata je

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} \left\{ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}} \right\},$$

tj.

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} T. \tag{1.31}$$

Matrica $\mathcal{S}$ svih koeficijenata celog sistema (1.28) je, sada,

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}} T \right\},$$

sto, na osnovu (D II.3) (vidi Dodatak II), predstavlja Kronekerov proizvod matrice T samom sobom, tj.

$$\mathcal{S} = T \times T. \tag{1.32}$$

S obzirom da je T nesingularna matrica, jer je njena determinanta $\Delta \neq 0$ (na osnovu pretpostavke da jednacine (1.1) predstavljaju nesingularnu transformaciju izmedju koordinata x^{α} i koordinata ξ^{λ}), i da je T matrica cetvrtog reda, dobivamo da je determinanta sistema jednacina (1.28), na osnovu (D II.5)

$$|S| = |T|^4 |T|^4 = |T|^8 = A^8 \neq 0. \tag{1.33}$$

Otuda sledi da su jednacine (1.28) zadovoljene samo za

$$D_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.34}$$

S obzirom na (1.22), jednacina (1.34) se moze eksplicitno napisati u obliku

$$u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} + u_{\alpha;\gamma} u^{\gamma} u_{\beta} + u_{\beta;\gamma} u^{\gamma} u_{\alpha} = 0, \tag{1.35}$$

sto i predstavlja Salcman-Taubove diferencijalne jednacine kretanja Bornovog cvrstog tela u opstoj teoriji relativnosti.

G L A V A II

DVE VRSTE KRETANJA BORNOVOG CVRSTOG TELA U OPSTOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

Posmatrajuci jednacinu (1.35), tj.

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}+u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha}=0, \tag{2.1}$$

neposredno se vidi da je ta jednacina zadovoljena ako je

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0, \tag{2.2}$$

tj. ako je tenzor $u_{\alpha;\beta}$ antisimetrican, jer je tada, zbo (1.7), i

$$u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=-u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}u_{\beta}=0.$$

Medjutim, vidi se da je jednacina (2.1) zadovoljena i ako je

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=0. \tag{2.3}$$

Jednacine (2.2) i (2.3) su nezavisne, jer se jedna na drugu ne moze svesti. Zaista,na osnovu (2.2) sledi da je

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=u_{\alpha;\beta}-u_{\gamma;\alpha}u^{\gamma}u_{\beta},$$

tj., zbog (1.7),

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=u_{\alpha;\beta}.$$

sto, na osnovu (2.2), ne mora biti jednako nuli. Obrnut na osnovu (2.3) i (1.7) je

$$(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha})u^{\beta}u_{\gamma}=u_{\alpha;\beta}u^{\beta}u_{\gamma}=-u_{\alpha;\gamma},$$

sto na osnovu (2.3) ne mora biti jednako nuli, odakle sledi da ni

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}$$

ne mora biti jednako nuli.

Medjutim, ne vidi se da jednacina (2.1) nema resenje koje nije resenje ni jedne od jednacina (2.2) ili (2.3).

Da bismo to pokazali napisimo jednacinu (2.1) u obliku[7]

$$(u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda})(\delta^{\lambda}_{\alpha}+u^{\lambda}u_{\alpha})(\delta^{\mu}_{\beta}+u^{\mu}u_{\beta})=0\,. \qquad (2.4)$$

Ovaj sistem homogenih linearnih jednacina po $u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda}$ ima ocigledna trivijalna resenja

$$u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda}=0,$$

sto i predstavlja jednacinu (2.2). Da sistem (2.4) ima i resenja koja se razlikuju od (2.2) pokazacemo izracunavanjem determinante sistema.

Razmisljanjem slicnim razmisljanju koje smo koristili pri nalazenju determinante sistema (1.28) nalazimo da je matrica koeficijenata sistema (2.4)

$$\mathcal{M}=L\times L, \qquad (2.5)$$

gde je L matrica

$$L=\{\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda}\} \qquad (2.6)$$

(α je indeks vrste, a λ kolone). Otuda je, opet na osnovu (D II.5), determinanta sistema (2.4)

[7] Ovaj oblik jednacine (2.1) dali su Salcman i Taub.

$$|\mathcal{M}| = |L|^{8}. \tag{2.7}$$

Lako je izracunati da je

$$|L| = |\delta^{\alpha}_{\lambda} + u^{\alpha}u_{\lambda}| = 1 + u_{\gamma}u^{\gamma},$$

ili, zbog (1.5),

$$|L| = 0, \tag{2.8}$$

pa je

$$|\mathcal{M}| = 0, \tag{2.9}$$

sto znaci da sistem (2.4) ima resenja razlicita od (2.2). To smo mi, uostalom, vec i videli kada smo naveli jednacine (2.3). Tacno je da jednacine (2.3) ne predstavljaju veze izmedju velicina $u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}$, ali cinjenica da, zbog (2.9), postoje medju tim velicinama veze koje se razlikuju od (2.2), dopusta mogucnost da se one, linearnim kombinacijama, mogu svesti na veze (2.3) izmedju velicina $u_{\alpha;\beta}$. Pitanje da li su netrivijalna resenja jednacina (2.4) po $u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}$ ekvivalentna ili nisu jednacinama (2.3) svodi se, sada, na pitanje da li broj uslovljenih nepoznatih[8] $u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}$ u jednacinama (2.4) daje ili ne upravo broj uslovljenih nepoznatih $u_{\alpha;\beta}$ u jednacinama (2.3). Prema tome, za odgovor na nase pitanje presudno je odredjivanje rangova matrica sistema (2.3) i (2.4).

Videli smo vec da je (2.5) matrica koeficijenata sistema (2.4) i da je determinanta matrice L jednaka nuli. Kako je, na primer,

$$|\delta^{i}_{j} + u^{i}u_{j}| = 1 + u^{i}u_{i} = -u^{4}u_{4} \neq 0,$$

to je rang $\rho(L)$ matrice L

$$\rho(L) = 3. \tag{2.10}$$

Otuda je, na osnovu (2.5) i (D II.4), rang $\rho(\mathcal{M})$ matrice

---

[8] Vidi T.P.Andjelic: Matrice, Naucna knjiga, Beograd 1962, str. 144.

$$\rho(\mathcal{U}) = \left[\rho(L)\right]^2 = 9. \tag{2.11}$$

Uvedimo oznaku

$$s_{\alpha\beta} = u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha}. \tag{2.12}$$

Sada rezultat (2.11) tvrdi da u sistemu (2.4) postoji devet linearno nezavisnih jednacina. (Lako je pokazati da su to, na primer, jednacine

$$(\delta_i^\alpha + u^\alpha u_i)(\delta_j^\beta + u^\beta u_j)s_{\alpha\beta} = 0.) \tag{2.13}$$

Pored tih jednacina medju velicinama $s_{\alpha\beta}$ moraju vaziti i jednacine

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}, \qquad \alpha > \beta$$

kojih ima sest. Dakle, za odredjivanje 16 netrivijalnih resenja $s_{\alpha\beta}$ sistema jednacina (2.4) imamo na raspolozenju ukupno 15 linearno nezavisnih jednacina, pa je, prema tome, samo jedna od tih nepoznatih proizvoljna (slobodna nepoznata).

Da bismo videli koliko otuda sledi proizvoljnih velicina $u_{\alpha;\beta}$, prebrojmo jednacine koje nam stoje na raspolozenju za nalazenje tih velicina kada su odredjene nepoznate $s_{\alpha\beta}$. Pre svega, imamo deset linearno nezavisnih jednacina (2.12), tj.

$$u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} = s_{\alpha\beta} \tag{2.14}$$

(deset ih je linearno nezavisnih, jer su jednacine (2.12 simetricne u odnosu na α i β). Pored tih jednacina postoje cetiri veze (1.7), tj.

$$u_{\alpha;\beta}u^\alpha = 0. \tag{2.15}$$

Izmedju jednacina (2.14) i (2.15) ne postoji linearna zavisnost. Napominjemo da smo prilikom trazenja linearno nezavisnih jednacina (2.4) koristili samo vezu $u_\alpha u^\alpha = -1$ (na osnovu te veze smo zakljucili da je $|L| = 0$).

Skup jednacina (2.14) i (2.15) predstavlja sistem od 14 jednacina (nehomogenih) sa 16 nepoznatih, pa su, stoga, dve od njih proizvoljne. Kako je medju velicinama $\Delta_{\alpha\beta}$ jedna proizvoljna to imamo dve proizvoljne velicine $u_{\alpha;\beta}$ i jednu proizvoljnu vezu $u_{\lambda;\mu}+u_{\mu;\lambda}=\Delta_{\lambda\mu}$ ako je $\lambda \neq \mu$ (pri cemu, naravno, mora biti $\lambda,\mu \neq \alpha,\beta$) ili tri proizvoljne velicine $u_{\alpha;\beta}$, od kojih je jedna $u_{A;A}$, ako je Δ_{AA} proizvoljno. U oba slucaja, razumljivo, nijedne dve proizvoljne velicine $u_{\alpha;\beta}$ ne smeju biti one koje se pojavljuju u istoj jednacini (2.14).

Vratimo se, sada, na jednacine (2.3). Njih mozemo napisati u obliku

$$u_{\alpha;\gamma}\left(\delta^{\gamma}_{\beta}+u^{\gamma}u_{\beta}\right)=0. \tag{2.16}$$

Ovo je sistem od 16 homogenih linearnih jednacina sa 16 nepoznatih $u_{\alpha;\beta}$. Trivijalna resenja

$$u_{\alpha;\beta}=0 \tag{2.17}$$

zadovoljavaju i jednacine (2.2), te nas, stoga, sada ne interesuju. Lako se moze pokazati da je determinanta sistema (2.16)

$$\begin{vmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{vmatrix} = |L|^4 = 0,$$

gde je L, opet, matrica (2.6). Otuda sledi da sistem (2.16) ima resenja razlicita od (2.17).

S obzirom da je $\rho(L)=3$, rang matrice koeficijenata

$$\begin{Bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{Bmatrix}$$

sistema (2.16) je $4\rho(L)=12$. Prema tome, u sistemu (2.16) ima 12 linearno nezavisnih jednacina. (Lako je pokazati da su to, na primer, jednacine

$$\left(\delta^{\beta}_{i}+u^{\beta}u_{i}\right)u_{\alpha;\beta}=0.) \tag{2.18}$$

Pored tih jednacina medju velicinama $u_{\alpha;\beta}$ moraju vaziti i jednacine (1.7), tj.

$$u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}=0, \qquad (2.19)$$

koje su linearno nezavisne i kojih ima cetiri. Medjutim, skup jednacina (2.18) i (2.19) nije sistem linearno nezavisnih jednacina. I zaista, pomnozivsi jednacine (2.19) sa $\delta^{\beta}_{i}+u^{\beta}u_{i}$ i sabravsi po β dobivamo

$$\left[(\delta^{\beta}_{i}+u^{\beta}u_{i})u_{\alpha;\beta}\right]u^{\alpha}=0,$$

a to predstavlja tri linearne veze (i = 1,2,3) izmedju jednacina (2.18). Prema tome, medju jednacinama (2.18) i (2.19) ima 13 linearno nezavisnih jednacina sa 16 nepoznatih velicina $u_{\alpha;\beta}$, sto znaci da su, kao i malopre, tri od njih proizvoljne.

Na osnovu toga, sada smemo zakljuciti da su jedina resenja sistema (2.4), odn. (2.1), koja se razlikuju od resenja sistema (2.2) upravo resenja sistema (2.3).

Proucimo jos koliko proizvoljnih velicina $u_{\alpha;\beta}$ ima ako se Bornovo cvrsto telo u opstoj teoriji relativnosti krece tako da zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2).

Tih velicina je 16 i one osim 10 jednacina (2.2) ($\alpha\leq\beta$), tj.

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0, \qquad (\alpha\leq\beta) \qquad (2.20)$$

moraju zadovoljavati i cetiri jednacine (1.7), odn. (2.15). Jednacine (2.20) su, kao sto se i neposredno vidi, linearno nezavisne. Tako isto su i jednacine (2.15) medju sobom linearno nezavisne. Medjutim, skup jednacina (2.20) i (2.15) je skup linearno zavisnih jednacina. Pokazacemo da je, na primer, jednacina

$$u_{\alpha;4}u^{\alpha}=0 \qquad (2.21)$$

posledica jednacina (2.2) i jednacina

$$u_{\alpha;i}u^{\alpha}=0, \qquad (2.22)$$

a iz samog toka tog racuna bice jasno da su 13 jednacina

(2.20) i (2.22) medju sobom linearno nezavisne.

Posmatrajmo izraz $u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}u^{\beta}$. S obzirom da je $u_{\alpha;\beta}$, na osnovu (2.2), antisimetrican tenzor, sledi d je

$$u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}u^{\beta}=0. \qquad (2.23$$

S druge strane, zbog (2.22), imamo da je

$$(u_{\alpha;\beta}u^{\alpha})u^{\beta}=0=(u_{\alpha;i}u^{\alpha})u^{i}+(u_{\alpha;4}u^{\alpha})u^{4}$$
$$=(u_{\alpha;4}u^{\alpha})u^{4},$$

pa, posto je

$$u^{4}=(-u_{\lambda}u^{\lambda})^{-1/2}\ \frac{\partial x^{4}}{\partial\theta}\neq 0$$

(jer $x^{4}=ct$ mora zavisiti od θ koje je vremenskog tip pa), dobivamo jednacinu (2.2~~1~~).

Skup jednacina (2.20) i (2.22) je, stoga, skup 13 linearno nezavisnih jednacina sa 16 nepoznatih velicina $u_{\alpha;\beta}$. Prema tome, tri od tih velicina su proizvoljne.

Na osnovu svega ovoga, sada mozemo tvrditi:

<u>Bornovo cvrsto telo u opstoj teoriji relativnosti krece se tako da zadovoljava bar jedan od sistema diferencijalnih jednacina</u>

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0 \qquad (2.2)$$

<u>ili</u>

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=0, \qquad (2.3)$$

<u>i pri tome su tri od velicina $u_{\alpha;\beta}$ proizvoljne.</u>

Posmatrajuci sistem jednacina (2.1) vidi se da je on zadovoljen i ako je zadovoljen sistem jednacina

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}u_{\alpha}=0. \qquad (2.24)$$

Na osnovu onoga sto smo dokazali trebalo bi ocekivati d mora postojati nacin da se linearnim kombinacijama sistem jednacina (2.24) svede na jedan bilo koji od sistem jednacina (2.2) ili (2.3) ili da se bar jedan od tih si

tema može svesti na sistem (2.24). Medjutim, svi pokuš
ji u tom smislu su pretrpeli neuspeh. Sada ćemo pokazati da je to neslaganje s iznetim dokazom samo prividno.

Množenjem jednačine (2.24) s u^{α} i sabiranjem po α dobivamo, zbog (1.5) i (1.7),

$$u_{\beta;\gamma}u^{\gamma}=0,$$

pa se, na osnovu tog rezultata, jednačine (2.24) svode na

$$u_{\alpha;\beta}=0. \qquad (2.25)$$

Dakle, jednačine (2.24) tvrde isto što i jednačin (2.25), pa su, prema tome, samo specijalan, trivijalan slučaj i jednačina (2.2) i jednačina (2.3).

G L A V A   III

BROJ STEPENI SLOBODE BORNOVOG CVRSTOG TELA U OPSTOJ TEORIJI RELATIVNOSTI

Da bismo proucili koliko stepeni slobode ima Bornovo cvrsto telo u opstoj teoriji relativnosti treba, slicno slucaju cvrstog tela u klasicnoj mehanici koji smo prikazali u Dodatku I, prouciti koliko medju velicinama $u_{\alpha;\beta}$ ima proizvoljnih. To sto odgovor na pitanje o broju stepeni slobode Bornovog tela zasnivamo na istom principu kao i odgovor na pitanje o broju stepeni slobode klasicnog cvrstog tela ne treba da nas zbunjuje, jer posmatrac u teoriji relativnosti operise istim pojmovima i velicinama kao i posmatrac u klasicnoj mehanici i jedina je razlika medju njima u metrici za koju su vezani. Posmatrac u teoriji relativnosti, iako svestan relativnosti rastojanja i vremenskih intervala, ipak posmatra rastojanja i vremenske intervale. Mera rastojanja ili vremenskog intervala je relativna, ali je apsolutna njihova egzistencija.

U Glavi II smo pokazali da se Bornovo cvrsto telo krece tako da zadovoljava ili diferencijalne jednacine

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha}=0, \qquad (3.1)$$

ili diferencijalne jednacine

$$u_{\alpha;\beta}+u_{\alpha;\gamma}u^{\gamma}u_{\beta}=0, \qquad (3.2)$$

i da su u oba slucaja medju velicinama $u_{\alpha;\beta}$ tri proizvoljne.

Sa velicina $u_{\alpha;\beta}$ predjimo sada na velicine $\mathcal{U}_{\alpha;\beta}$. Vezu izmedju njih daje jednacina (1.19), tj.

$$\mathcal{U}_{\gamma;\beta}\left(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha}\right)=\left(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda}\right)^{1/2}u_{\alpha;\beta}\,. \tag{3.3}$$

Izborom tri velicine $u_{\alpha;\beta}$ odredjene su, i u slucaju (3.1) i u slucaju (3.2), sve ostale, tako da (3.3) predstavlja sistem od 16 jednacina sa 16 nepoznatih $\mathcal{U}_{\alpha;\beta}$. Medjutim, s obzirom da je matrica koeficijenata sistema (3.3) (vidi matricu koeficijenata sistema (2.16)) singularna, to 16 jednacina (3.3) nisu medju sobom linearno nezavisne. Necemo ispitivanjem matrice koeficijenata prosirene nezavisnim clanovima na desnim stranama jednacina (3.3) pokazivati da sistem (3.3) nije protivrecan niti cemo tim putem pokazivati koliko je medju tim jednacinama linearno nezavisnih, vec cemo to uciniti jednostavnijim putem.

Napisimo jednacine (3.3) u obliku

$$a_{\alpha\beta}\equiv\mathcal{U}_{\gamma;\beta}\left(\delta^{\gamma}_{\alpha}+u^{\gamma}u_{\alpha}\right)-\left(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda}\right)^{1/2}u_{\alpha;\beta}=0. \tag{3.4}$$

Pokazacemo da iz jednacina

$$a_{i\beta}=0 \tag{3.5}$$

sledi jednacina $a_{4\beta}=0$. I zaista, s obzirom na (1.5) (1.7) imamo da je

$$a_{\alpha\beta}u^{\alpha}\equiv 0,$$

pa je

$$a_{4\beta}u^{4}=-a_{i\beta}u^{i},$$

ili, na osnovu (3.5) i cinjenice da je $u^{4}=\left(-\mathcal{U}_{\lambda}\mathcal{U}^{\lambda}\right)^{1/2}\frac{\partial x^{4}}{\partial\theta}\neq 0$ (jer $x^{4}=ct$ mora zavisiti od parametra θ),

$$a_{4\beta}=0.$$

Stoga u sistemu (3.3), odn. (3.4), ima samo 12 linearno nezavisnih jednacina, na primer jednacine (3.5).

Proucimo prvo slucaj (3.1). Pomnozivsi jednacinu (3.1) sa u^β i sabravsi po β dobivamo, zbog (1.7),

$$u_{\alpha;\beta}u^\beta = 0. \tag{3.6}$$

Pomnozivsi, dalje, jednacinu (3.6) sa $(-U_\lambda U^\lambda)^{1/2}$ dobivamo

$$u_{\alpha;\beta}U^\beta = 0. \tag{3.7}$$

Jednacinu (3.6) mozemo napisati u obliku

$$\left[(-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2} U_\alpha\right]_{;\beta} u^\beta = 0,$$

odakle je

$$(-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2}_{,\beta}\, u^\beta U_\alpha + (-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2} U_{\alpha;\beta} u^\beta = 0.$$

Pomnozivsi ovu jednacinu sa u_γ dobivamo

$$(-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2}_{,\beta}\, u^\beta U_\alpha u_\gamma + (-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2} U_{\alpha;\beta} u_\gamma u^\beta = 0, \tag{3.8}$$

a izmenom indeksa α i γ u (3.8), s obzirom da je $U_\alpha u_\gamma = u_\alpha U_\gamma$,

$$(-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2}_{,\beta}\, u^\beta U_\alpha u_\gamma + (-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2} U_{\gamma;\beta} u_\alpha u^\beta = 0. \tag{3.9}$$

Najzad, oduzevsi jednacine (3.8) i (3.9) i podelivsi rezultujucu jednacinu sa $(-U_\lambda U^\lambda)^{-1/2} \neq 0$ imamo

$$U_{\alpha;\beta} u^\beta u_\gamma = U_{\gamma;\beta} u^\beta u_\alpha. \tag{3.10}$$

Sada smo u stanju da pokazemo da je i

$$a_{\alpha\beta} u^\beta \equiv 0. \tag{3.11}$$

I zaista je, s obzirom na (1.7),

$$a_{\alpha\beta}u^\beta = (U_{\alpha;\beta} + U_{\gamma;\beta}u^\gamma u_\alpha)u^\beta =$$
$$= U_{\alpha;\beta}u^\beta + U_{\gamma;\beta}u^\beta u_\alpha u^\gamma.$$

Drugi clan mozemo, s obzirom na (3.10) napisati u obliku

$$u_{\alpha;\beta}u^{\beta}u_{\gamma}u^{\gamma},$$

pa se, zbog (1.5), dobiva (3.11).

Pokazacemo da, u slucaju (3.1) a na osnovu (3.11), ni 12 jednacina (3.5) nisu linearno nezavisne, nego da, na primer, iz

$$a_{i;j}=0, \tag{3.12}$$

sledi $a_{i;4}=0$. (3.11) se moze, za $\alpha=i$, napisati u obliku

$$a_{i;4}u^{4}=-a_{i;j}u^{j},$$

odakle je, uzevsi u obzir (3.12) i $u^4\neq 0$,

$$a_{i;4}=0.$$

Prema tome, medju jednacinama (3.4), odn. (3.3), ima, u slucaju (3.1), samo devet linearno nezavisnih jednacina. Kako su jos, kao sto smo videli u Glavi II, tri medju ~~njima~~ velicinama $u_{\alpha;\beta}$ proizvoljne sledi da medju velicinama $u_{\alpha;\beta}$ imamo (16-9)+3=10 proizvoljnih.

Da bi nam dalje razmisljanje bilo blize onom kojim smo se sluzili u Dodatku I, napisimo jednacine (3.3) u obliku

$$u^{\gamma}_{;\beta}\left(\delta^{\alpha}_{\gamma}+u^{\alpha}u_{\gamma}\right)=\left(-u_{\lambda}u^{\lambda}\right)^{1/2}u^{\alpha}_{;\beta}. \tag{3.13}$$

Pre nego sto budemo odredili koje od velicina $u^{\alpha}_{;\beta}$ smemo uzeti za proizvoljne, razmotrimo velicine $u^{4}_{;\beta}$ i $u^{\alpha}_{;4}$. Razlozi koje cemo navesti ubedice nas da pri izboru velicina koje cemo uzeti za proizvoljne moramo bas njih uzeti, naravno ukoliko proizvoljnost svake od tih velicina ne dovodi do protivrecnosti.

Sto se tice velicina

$$u^{4}_{;\beta}=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial x^{4}}{\partial\theta}\right)+\left\{{4\atop \gamma\beta}\right\}u^{\gamma}, \tag{3.14}$$

ni za jednu od njih ne smemo a da ne uzmemo da je proizvoljna jer bi je proizvoljnost drugih velicina odredjivala, cime bi bilo odredjeno $\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial x^4}{\partial \theta}\right)$, odn. u krajnjoj liniji izraz $\frac{\partial x^4}{\partial \theta}$. S obzirom da je sve do sada svim izvodjenjima bila sacuvana proizvoljnost parametra θ (s jedinim ogranicenjem da mora biti vremenskog tipa) koju smo pretpostavili uvodjenjem tog parametra na pocetku Glave I, vidi se da prilikom izbora proizvoljnih velicina moramo uzeti i sve medju sobom nezavisne velicine $u^4_{;\beta}$.

U pogledu velicina

$$u^\alpha_{;4} = \frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta}\right) + \left\{ {\alpha \atop \gamma\, 4} \right\} u^\gamma, \qquad (3.15)$$

stvar stoji slicno jer izraz $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta}$, koji implicira koordinate brzine, mora biti proizvoljan zbog proizvoljnosti parametra θ.

Treba jos samo videti da li medju velicinama $u^4_{;\beta}$ i $u^i_{;4}$ ($u^4_{;4}$ je vec obuhvaceno u skupu velicina $u^4_{;\beta}$ ne postoji neka zavisnost.

Odmah se vidi da ~~ju~~ u svakoj od jednacina (3.13) postoji samo jedna od velicina $u^4_{;\beta}$ pa da ih, stoga, sve cetiri mozemo uzeti za proizvoljne. Jednacine (3.13) za $\alpha = i$ i $\beta = 4$ (koje su linearno nezavisne) glase

$$u^\gamma_{;4}\left(\delta^i_\gamma + u^i u_\gamma\right) = \left(-u_\lambda u^\lambda\right)^{1/2} u^i_{;4}. \qquad (3.16)$$

S obzirom da su to tri jednacine sa tri velicine $u^i_{;4}$ na prvi pogled izgleda da nijedna od njih ne moze biti proizvoljna nego da su sve tri odredjena resenja gornjih jednacina. Medjutim, u Glavi II smo videli da su medju velicinama $u_{\alpha;\beta}$ tri proizvoljne, a, kao sto se vidi iz jednacine (2.15) napisane za $\beta = 4$ u obliku

$$u^i_{;4} u_i + u^4_{;4} u_4 = 0,$$

sve tri velicine $u^i_{;4}$ na desnim stranama jednacina ~~(3.16) mogu biti uzete za proizvoljne~~ ...

(3.16) mogu biti uzete za proizvoljne, odakle sledi da $U^i_{;k}$ mogu biti uzete za proizvoljne velicine, sto, na osnovu onoga sto je gore receno, i treba uciniti.

Dakle, medju 10 proizvoljnih velicina $U^\alpha_{;\beta}$ treba uzeti sedam velicina (3.14) i (3.15). Od ostalih devet velicina $U^i_{;j}$ treba za proizvoljne izabrati jos samo tri.

Sada mozemo pristupiti trazenju broja stepeni slobode u slucaju kretanja odredjenog jednacinom (3.1). Jednacina (3.6) predstavlja diferencijalnu jednacinu geodezijske linije, pa izrazava jednu veoma vaznu i zanimljivu osobinu ove vrste kretanja Bornovog cvrstog tela. Naime, Bornovo cvrsto telo za koje vazi (3.1) krece se tako da je svetska linija svake njegove tacke geodezijska linija prostor-vremena.

Fiksirajmo, sada, jedan skup ξ^i_0. Dobiveni rezultat tvrdi da je svetska linija tacke $C_{\xi^i_0}$ geodezijska linija (koja je pocetnim uslovima potpuno odredjena). Na osnovu toga izgleda kao da kretanje tacke $C_{\xi^i_0}$ ima jedan stepen slobode. Medjutim, u prostor-vremenu prostorni polozaj je neodvojivo vezan za trenutak, tako da razmisljanje, uobicajeno u klasicnoj mehanici, koje apstrahujuci vreme dovodi do saznanja da je za odredjivanje polozaja tacke koja se krece po unapred odredjenoj krivoj dovoljan jedan parametar i koje na taj nacin dopusta proizvoljan zakon puta, u prostor-vremenu moze biti pogresan. Pokazacemo da je nase kretanje upravo takvo i da se tacka $C_{\xi^i_0}$ krece po geodezijskoj liniji po zakonu koji je pocetnim uslovima potpuno odredjen.

Posmatrajmo izraz $U^\alpha_{;\beta}U^\beta$. Na osnovu (1.4) mozemo napisati da je

$$U^\alpha_{;\beta}U^\beta = \left[(-U_\lambda U^\lambda)^{1/2} u^\alpha\right]_{;\beta} U^\beta$$

$$= (-U_\lambda U^\lambda)^{1/2}_{,\beta} U^\beta u^\alpha + (-U_\lambda U^\lambda)^{1/2} u^\alpha_{;\beta} U^\beta .$$

Kako je, iz (3.7),

$$u^\alpha_{;\beta} U^\beta = g^{\alpha\gamma} u_{\gamma;\beta} U^\beta = 0,$$

to dobivamo

$$u^{\alpha}_{;\beta} u^{\beta} = (-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}_{,\beta} u^{\beta} u^{\alpha}. \qquad (3.17$$

Setivsi se da je

$$u^{\alpha}_{;\beta} = u^{\alpha}_{,\beta} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} u^{\gamma}$$

i da je

$$u^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \theta} ,$$

iz (3.17) dobivamo

$$u^{\alpha}_{,\theta} + \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} u^{\beta} u^{\gamma} = (-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}_{,\theta} u^{\alpha}. \qquad (3.18)$$

(Podsecamo da je $u^{\alpha}_{,\theta} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \theta}$ a ne $\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\theta}}$.) Sada samo iskoristiti proizvoljnost parametra θ. Kao sto smo i rekli prilikom njegovog uvodjenja u pocetku Glave I, mozemo uzeti da je $\theta = x^4$. Tada je

$$u^4 = 1, \qquad u^4 = (-u_{\lambda} u^{\lambda})^{-1/2},$$

a otuda

$$u^4_{,\theta} = 0,$$

pa za $\theta = x^4$ i $\alpha = 4$ jednacina (3.18) daje

$$(-u_{\lambda} u^{\lambda})^{1/2}_{,\theta} = \frac{1}{u^4} \left\{ {4 \atop \beta\gamma} \right\} u^{\beta} u^{\gamma}, \qquad (3.19)$$

pa se (3.18) moze napisati u obliku

$$u^{\alpha}_{,\theta} = \frac{1}{u^4} \left(\left\{ {4 \atop \beta\gamma} \right\} u^{\alpha} - \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} u^4 \right) u^{\beta} u^{\gamma}. \qquad (3.20)$$

Iz ove jednacine se vidi da je promena brzine u^{α} sa vremenom $t = \frac{1}{c}\theta$ potpuno odredjena metrikom prostor-vremena i brzinom u^{α} u tom trenutku, te je, prema tome, brzina duz cele svetske linije, a, stoga, i zakon kretanja, potpuno odredjena pocetnim uslovima. Iz toga zakljucujemo da kretanje tacke $C_{\xi^i_0}$ nema nijedan stepen slobode.

Zakljucak, je, mozda, na prvi pogled cudan i u klasicnoj mehanici neuobicajen, ali ima veoma jednostavno tumacenje. Radi lakseg razumevanja tumacenje cemo primeniti u slucaju specijalne teorije relativnosti, a otuda ce, imajuci u vidu mogucu metriku opste teorije relativnosti, biti jasno da postoji analogija onoga sto cemo navesti sa tumacenjem koje bi trebalo dati u opstoj teoriji relativnosti.

U specijalnoj teoriji relativnosti geodezijske linije su prave, pa je kretanje tacke $C_{\xi^i_0}$ pravolinijsko. S obzirom da se u specijalnoj teoriji relativnosti mogu uvesti takve koordinate za koje su Kristofelovi simboli druge vrste $\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\}$ jednaki nuli (Galilejeve koordinate), iz (3.20) sledi da se tacka $C_{\xi^i_0}$ krece jednoliko pravolinijski. S obzirom da se u teoriji relativnosti ne moze govoriti o nekom apsolutnom miru i da se tacka koja je u miru u odnosu na jednog posmatraca u specijalnoj teoriji relativnosti krece jednoliko pravolinijski u odnosu na drugog, vidi se da je kretanje nase tacke $C_{\xi^i_0}$ i u specijalnoj i u opstoj teoriji relativnosti generalizacija mirovanja tacke u klasicnoj mehanici, koje nema nijedan stepen slobode.

Fiksirajmo, sada, $\theta = \theta_0$ pa potrazimo brzinu tacke $C_{\xi^i_0 + d\xi^i}$ u dogadjaju $x^\alpha_0 + d_0 x^\alpha$, gde je $x^\alpha_0 = x^\alpha(\xi^i_0, \theta_0)$, imajuci ~~x xiim~~ na umu da znamo brzinu tacke $C_{\xi^i_0}$. Do na velicine prvog reda u odnosu na $d\xi^i$ brzina tacke $C_{\xi^i_0 + d\xi^i}$ je

$$u^\alpha + u^\alpha_{;\beta}\, d_0 x^\beta.$$

Od 10 proizvoljnih velicina $u^\alpha_{;\beta}$ njih sedam, tj. $u^4_{;\beta}$ i $u^i_{;4}$ je vezano za proizvoljnost izbora parametra θ, pa, stoga, ne uticu na broj stepeni slobode. Prema tome, moguca pomeranja cvrstog tela pri fiksiranom dogadjaju

x^α_0 zavisi od tri proizvoljne velicine te nase telo i samo <u>tri</u> stepena slobode.

Sa stanovista posmatraca, a u toj ulozi se mi i nalazimo, uverljivija je sledeca analiza. Fiksirajuci dogadjaj x^α_0 fiksirali smo i trenutak $t_0 = \frac{1}{c} x^4_0$. Potrazimo <u>prostorne</u> koordinate brzine tacke $C_{\xi^i_0 + d\xi^i}$ u dogadjaju koji je istovremen dogadjaju x^α_0, tj. u dogadjaju $x^\alpha_0 + d^* x^\alpha$, pri cemu je

$$d^* x^\alpha = x^\alpha_{,i}\, d\xi^i + u^\alpha d\theta$$

takav vektor pomeranja da je

$$d^* x^4 = 0 .$$

Opet, do na velicine prvog reda u odnosu na $d\xi^i$, prostorne koordinate brzine tacke $C_{\xi^i_0 + d\xi^i}$ u trenutku t_0 su

$$u^i + u^i_{;j} \cdot d^* x^j$$

(jer je $d^* x^4 = 0$). Medju velicinama $u^i_{;j}$, kao sto smo videli, ima samo tri proizvoljne, pa ponovo zakljucujemo da nase telo ima samo tri stepena slobode.

Iz svega sto je receno mogli bismo, mozda, reci da je kretanje (3.1) neka vrsta generalizacije obrtanja cvrstog tela oko nepomicne tacke iz klasicne mehanike, ali ne treba izgubiti iz vida da je to kretanje takvo da svetske linije svih tacaka moraju biti geodezijske linije prostor-vremena. Podrobnije ispitivanje kretanja (3.1) necemo dati, jer bi nas odvelo daleko od naseg glavnog cilja - odredjivanja broja stepeni sloboda Bornovog cvrstog tela.

Predjimo, sada, na ispitivanje slucaja (3.2). Odredjivanje broja stepeni slobode ovog kretanja je ~~nesr~~ sravnjeno lakse. Odmah uvidjamo da ne mora vaziti jednacina (3.6), te da, stoga, svetske linije ~~tacak~~ tacaka naseg cvrstog tela ne moraju biti geodezijske linije prostor-vremena niti je svetska linija bilo kakva odredjena linija. S druge strane, opet zato sto ne mora vaziti (3.6) ne mora vaziti ni (3.20), sto znaci da kretanja tacke $C_{\xi_0^i}$ ne mora biti ni generalizacija jednolikog kretanja niti je odredjen bilo kakav zakon kretanja dogadjaja po, inace neodredjenoj, ~~krivoj~~ svetskoj liniji. Otuda sledi da kretanje tacke $C_{\xi_0^i}$ ima tri stepena slobode.

Izabravsi svetsku liniju tacke $C_{\xi_0^i}$ pokazacemo da su svetske linije svih ostalih tacaka odredjene. Zaista, ma za koje fiksirano θ_0 fiksiran je dogadjaj x_0^α pa, prema tome, i jedinicni vektor u^α te izabrane svetske linije u dogadjaju x_0^α. Do na velicine prvog reda u odnosu na $d\xi^i$, jedinicni vektor svetske linije tacke $C_{\xi_0^i + d\xi^i}$ u dogadjaju $x_0^\alpha + d_0 x^\alpha$ je

$$u^\alpha + u^\alpha{}_{;\beta}\, d_0 x^\beta .$$

Nase telo se krece tako da zadovoljava jednacinu (3.2), koju mozemo napisati u obliku

$$u^\alpha{}_{;\beta} + u^\alpha{}_{;\lambda} u^\lambda u_\beta = 0 . \tag{3.21}$$

Pomnozivsi ovu jednacinu sa $d_0 x^\beta$ dobivamo, zbog upravnosti vektora u^α i $d_0 x^\beta$, tj. zbog $u_\beta d_0 x^\beta = 0$,

$$u^\alpha{}_{;\beta}\, d_0 x^\beta = 0 . \tag{3.22}$$

Jednacina (3.22) izrazava cinjenicu da su svetske linije svih tacaka naseg tela medjusobno paralelne (u smislu metrike prostor-vremena), te svetska linija tacke $C_{\xi_0^i}$ odredjuje i svetske linije svih ostalih tacaka, ili, sto je isto, kretanje tacke $C_{\xi_0^i}$ odredjuje kretanje i svake druge tacke naseg tela.

Prema tome, cvrsto telo koje se krece tako da zadovoljava diferencijalne jednacine (3.2) ima, takodje, <u>tri</u> stepena slobode. Na osnovu izlozenih osobina tog kretanja vidi se da ono predstavlja generalizaciju translatornog kretanja klasicnog cvrstog tela.

Dakle, postoje dva moguca tipa kretanja Bornovog cvrstog tela u opstoj teoriji relativnosti i u oba slucaja kretanje takvog tela ima samo <u>tri stepena slobode</u>.

I ovde treba da pomenemo, kao i u Dodatku I, da i sama struktura prostora moze uticati na smanjenje broja stepeni slobode,~~koji je posledica iskljucivo~~ onog broja koji je posledica <u>iskljucivo</u> definicije cvrstog tela.

G L A V A   IV

KLASICNA APROKSIMACIJA[9] BORNOVOG CVRSTOG TELA

U Uvodu smo vec pomenuli da je Born, definisuci relativisticki cvrsto telo, zeleo ne samo da pod tim imenom podrazumeva jednu klasu kretanja sistema tacaka u teoriji relativnosti, nego i da ta klasa kretanja predstavlja generalizaciju kretanja klasicnog cvrstog tela.

Poznata je cinjenica da je klasicna (Njutnova) mehanika aproksimacija specijalnog slucaja opste teorije relativnosti - specijalne teorije relativnosti, za brzine koje su dovoljno male da se mogu zanemariti u poredjenju sa brzinom svetlosti (klasicna aproksimacija). Stoga i svaki relativisticki pojam, ako jeste generalizacija nekog klasicnog pojma, mora biti takav da njegov specijalan oblik, koji ima u specijalnoj teoriji relativnosti, u klasicnoj aproksimaciji da upravo klasicni pojam cija je on generalizacija.

Na osnovu ovoga je jasno da je kretanje Bornovog cvrstog tela generalizacija kretanja klasicnog cvrstog tela samo ako se ono, u klasicnoj aproksimaciji, svede na ovo poslednje.

---

[9] Izraz "klasicna aproksimacija" smo upotrebili radi kratkoce i pod njim podrazumevamo aproksimaciju kojom rezultati specijalne teorije relativnosti prelaze u rezultate klasicne (Njutnove) mehanike.

Prirodno je postaviti pitanje da li je uopste potrebno
nalaziti klasicnu aproksimaciju kretanja Bornovog cvrst
tela, kada smo vec videli da ono ima samo tri stepena sl
bode a ne sest kao sto ima kretanje klasicnog cvrstog te
la. Normalno je ocekivati da se aproksimacijom broj stepeni slobode nece povecati. Medjutim, zakljuciti samo na osnovu tog ocekivanja da kretanje Bornovog cvrstog tela nije generalizacija kretanja klasicnog cvrstog tela nije ubedljivo jer se unapred ne sme odbaciti mogucnost da se aproksimacijom mogu pojaviti i novi stepeni slobode[10].

Po definiciji, Bornovo cvrsto telo je onaj sistem t
caka za koji vazi (1.13), tj.

$$(g_{\alpha\beta}\, d_0 x^{\alpha}\, d_0 x^{\beta})_{,\theta} = 0. \tag{4.1}$$

Izraz u zagradi ima isti oblik i u specijalnoj teoriji relativnosti, pri cemu je u tom specijalnom slucaju uvek moguce naci takve koordinate (Galilejeve koordinate) da metricki tenzor bude

$$g_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}. \tag{4.2}$$

Izaberimo, sada, da je

$$\theta = x^4 \quad (= ct). \tag{4.3}$$

Tada je

$$d_0 x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l} d\xi^l + u^i d\theta, \tag{4.4}$$

i

$$d_0 x^4 = d\theta, \tag{4.5}$$

jer je, zbog (4.3),

---

[10] Na to me je upozorio moj profesor Dr Konstantin Voronjec.

$$\frac{\partial x^4}{\partial \xi^i} = 0 \tag{4.6}$$

i

$$u^4 = \frac{\partial x^4}{\partial \theta} = 1. \tag{4.7}$$

Razmotrimo sta biva sa $d_0 x^\alpha$ u klasicnoj aproksimaciji.

Matematicki izraz pretpostavke da je brzina (trobrzina) tacke C_{ξ^i} mala u poredjenju s brzinom c svetlosti je

$$u^i \ll u^4 \quad (=1). \tag{4.8}$$

S obzirom na (4.7) i metricki tenzor (4.2), iz uslova upravnosti vektora u^α i $d_0 x^\alpha$ dobivamo

$$d_0 x^4 = \sum_{i=1}^{3} u^i d_0 x^i, \tag{4.9}$$

odakle je u klasicnoj aproksimaciji, zbog (4.8),

$$d_0 x^4 \approx 0. \tag{4.10}$$

Na osnovu toga je, iz (4.4) i (4.5),

$$d_0 x^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^l} d\xi^l \tag{4.11}$$

i

$$d_0 x^4 = 0. \tag{4.12}$$

Ako sa $x^\alpha + d^* x^\alpha$ obelezimo dogadjaj na svetskoj liniji tacke $C_{\xi^i + d\xi^i}$ koji je istovremen dogadjaju x^α na svetskoj liniji tacke C_{ξ^i}, onda je

$$d^* x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} d\xi^i. \tag{4.13}$$

Sada se vidi da je klasicna aproksimacija vektora $d_0 x^\alpha$ vektor $d^* x^\alpha$ (vidi jednacinu (4.6)), sto znaci da su, u klasicnoj aproksimaciji, dogadjaji x^α i $x^\alpha + d_0 x^\alpha$

istovremeni.

Prema tome, klasicna aproksimacija ~~xxktxxx~~ Bornovog zahteva je

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{4} d^{*}x^{\alpha} d^{*}x^{\alpha}\right)_{,\theta} = 0, \tag{4.14}$$

ili, mnozenjem sa $\frac{d\theta}{dt}$ $(= c)$ i zbog $d^{*}x^{4} = 0$,

$$\left(\sum_{i=1}^{3} d^{*}x^{i} d^{*}x^{i}\right)_{,t} = 0. \tag{4.15}$$

Dakle, u klasicnoj aproksimaciji Bornova definicija zahteva da rastojanje (u obicnom, prostornom smislu) istovremenih polozaja tacaka $C_{\xi^{i}}$ i $C_{\xi^{i}+d\xi^{i}}$ ostane tokom vremena nepromenjeno, a to je upravo i zahtev definicije klasicnog cvrstog tela.

Da li se iz toga sme zakljuciti da se <u>kretanje</u> Bornovog cvrstog tela u klasicnoj aproksimaciji svodi na kretanje klasicnog cvrstog tela, ~~mx~~ ili, da budemo precizniji, da je <u>kretanje</u> Bornovog cvrstog tela generalizacija kretanja klasicnog cvrstog tela?

Jednacina (4.15) tvrdi samo da je klasicna aproksimacija Bornovog cvrstog tela - cvrsto telo u klasicnom smislu. Istina je da se iz jednacine (4.15), koja je identicna jednacini (D I.2) ~~za~~ za Dekartove pravougle koordinate, dobivaju uslovi (D I.6) koje mora zadovoljavati kretanje klasicnog cvrstog tela. Iz toga moze izgledati verovatno da je i generalizacija bilo kog klasicno moguceg kretanja klasicnog cvrstog tela neko kretanje Bornovog cvrstog tela. Medjutim, na osnovu osobina mogucih kretanja Bornovog cvrstog tela, koje smo upoznali u Glavi III, izgleda, s druge strane, kao da su moguca kretanja Bornovog cvrstog tela generalizacije samo nekih od mogucih kretanja klasicnog cvrstog tela.

Konacan odgovor, prema tome, treba traziti jedino u klasicnoj aproksimaciji diferencijalnih jednacina kretanja Bornovog cvrstog tela.

Sada smo pred izborom da li da se odlucimo na trazenje klasicne aproksimacije diferencijalnih jednacina (2.1) ili na trazenje klasicnih aproksimacija posebno diferencijalnih jednacina (2.2), a posebno diferencijalnih jednacina (2.3). Polazeci od jednacina (2.1) dobili bismo uslove koje, u klasicnoj aproksimaciji, moraju zadovoljavati velicine $u_{\alpha;\beta}$, ali nam oni ne bi jemcili, kao ni uslov (4.15), da je svako kretanje koje zadovoljava te uslove - kretanje kome kao generalizacija odgovara neko od kretanja Bornovog cvrstog tela[11].

Definicija Bornovog cvrstog tela dopusta da se ono krece samo tako da zadovoljava ili sistem diferencijalnih jednacina (2.2) ili sistem diferencijalnih jednacina (2.3). Ispitajmo klasicne aproksimacije tih kretanja. Rezultati tih ispitivanja dace konacan odgovor na pitanje da li se kretanje Bornovog cvrstog tela sme smatrati generalizacijom kretanja klasicnog cvrstog tela ili ne.

U specijalnoj teoriji relativnosti u odnosu na koordinate u odnosu ~~na~~ koje je metricki tenzor dat sa (4.2), je

$$u_i = u^i, \quad u_4 = -u^4 = -1, \quad (\theta = x^4) \tag{4.16}$$

odakle je

$$u_\alpha u^\alpha = \sum_{i=1}^{3} u^i u^i - 1,$$

odn.

$$(-u_\alpha u^\alpha)^{1/2} = \left(1 - \sum_{i=1}^{3} u^i u^i\right)^{1/2} \tag{4.17}$$

Taj se izraz, s obzirom na (4.8), u klasicnoj aproksimaciji svodi na

$$(-u_\alpha u^\alpha)^{1/2} = 1. \tag{4.18}$$

---

[11] I zaista, klasicnom aproksimacijom jednacina (2.1) dobivaju se jednacine (D I.6) i proizvoljnost velicina $u_{i;4}$. Ovo tvrdjenje necemo ovde dokazivati, ali, poklonivsi mu poverenje, smemo zakljuciti jedino, kao i iz jednacine (4.15) da je svako kretanje Bornovog cvrstog tela takvo da njegova klasicna aproksimacija predstavlja kretanje klasicnog cvrstog tela, ali ne i obrnuto.

Otuda je, dalje, u klasicnoj aproksimaciji

$$u^\alpha = \mathcal{U}^\alpha \qquad \text{odn.} \qquad u_\alpha = \mathcal{U}_\alpha \,. \tag{4.19}$$

S druge strane, u odnosu na Galilejeve koordinate u specijalnoj teoriji relativnosti, imamo da je

$$\left\{ {\alpha \atop \beta \gamma} \right\} = 0,$$

pa se, u odnosu na te koordinate, kovarijantni izvod svodi na parcijalni izvod, tj. vazi

$$u_{\alpha;\beta} = u_{\alpha,\beta} \,. \tag{4.20}$$

Predjimo, sada, na trazenje klasicne aproksimacije kretanja koje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2). One za $\alpha = i$, $\beta = j$ i s obzirom na (4.20) i (4.19) u klasicnoj aproksimaciji daju

$$\mathcal{U}_{i,j} + \mathcal{U}_{j,i} = 0, \tag{4.21}$$

za $\alpha = i$, $\beta = 4$

$$\mathcal{U}_{i,4} = 0, \tag{4.22}$$

jer je, na osnovu (4.16),

$$\mathcal{U}_{4,i} = 0, \tag{4.23}$$

a za $\alpha = \beta = 4$ jednacinu

$$\mathcal{U}^4{}_{,4} = 0, \tag{4.24}$$

koja je (treba imati na umu da je $\theta = x^4$) trivijalna jer tvrdi da je

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\frac{\partial x^4}{\partial x^4}\right) = 0 \,.$$

Jednacine (4.21) tvrde ono sto sledi i iz jednacina (4.15), tj. da je klasicna aproksimacija Bornovog cvrstog tela cije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2) telo koje je cvrsto i u klasicnom smislu. I zaista, mnozenjem jednacina (4.21) sa $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^l}$ dobiva se

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi^l}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}+\frac{\partial u_j}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^l}=0. \tag{4.25}$$

Kako je, dalje, uzevsi u obzir (4.16),

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi^l}=\frac{\partial u^i}{\partial \xi^l}=\frac{\partial}{\partial \xi^l}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\right),$$

(4.25) postaje

$$\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\right]=0,$$

odn.

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}=0. \tag{4.26}$$

Mnozenjem poslednje jednacine sa $d\xi^k d\xi^l$ dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{3} d_\xi x^i d_\xi x^i=0, \tag{4.27}$$

gde je

$$d_\xi x^i=\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}d\xi^k,$$

identicno sa (4.13) za $\alpha = i$. Mnozenjem jednacine (4.26 sa $\frac{d\theta}{dt}$ ($= c$) dobiva se jednacina (4.15).

Uzgred pomenimo da je jednacina (4.26) ekvivalentna jednacinama (4.21) s obzirom na proizvoljnost velicina $d\xi^i$, sto se moze dokazati postupkom slicnim postupku koji smo koristili pri izvodjenju jednacina (D I.6) iz jednacine (D I.2).

Jednacina (4.22), koja se, zbog (4.16) moze napisati i u obliku

$$u^i_{,4}=0, \tag{4.28}$$

tvrdi da, fiksirajuci bilo koji polozaj (odredjen prostor-nim koordinatama x^i), brzina svake tacke klasicne aproksimacije Bornovog cvrstog tela cije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2) koja se nadje u tom polozaju ne zavisi od trenutka u kome se u tom polozaju nadje.

S druge strane, jednacine (3.6), tj.

$$u_{\alpha;\beta}u^{\beta}=0,$$

koje se dobivaju mnozenjem jednacina (2.2) sa u^{β} i sabiranjem po β, u klasicnoj aproksimaciji, na osnovu (4.20) i (4.19), za $\alpha=i$ glase

$$\mathcal{U}_{i,\beta}\mathcal{U}^{\beta}=0,$$

tj.

$$\frac{\partial \mathcal{U}_i}{\partial \theta}=0,$$

ili, sto je, zbog (4.16), isto sto i

$$\frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial \theta}=0. \tag{4.29}$$

Ove jednacine tvrde da je brzina svake tacke klasicne aproksimacije Bornovog cvrstog tela cije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2), i to kao vektorska velicina, stalna tokom vremena. Iz njih sledi da je

$$\frac{\partial x^i}{\partial \theta}\equiv \mathcal{U}^i=\mathcal{U}^i(\xi^j), \tag{4.30}$$

odakle je

$$x^i=\mathcal{U}^i\cdot\theta+f^i(\xi^j). \tag{4.31}$$

Smenivsi nadjene ~~xxxxxxx~~ izraze za funkcije x^i u (4.26) dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial \xi^j}\theta+\frac{\partial f^i}{\partial \xi^j}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{U}^i}{\partial \xi^k}\theta+\frac{\partial f^i}{\partial \xi^k}\right)=0,$$

odn.

$$\sum_{i=1}^{3}\left(2\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k}\theta+\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}\frac{\partial f^i}{\partial \xi^k}+\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k}\frac{\partial f^i}{\partial \xi^j}\right)=0. \qquad (4.32)$$

Posto jednacine (4.32) moraju identicki vaziti po θ dobivamo, izmedju ostalog,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k}=0, \qquad (4.33)$$

i, posebno, za $k=j$,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}\right)^2=0,$$

odakle sledi i

$$\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j}=0. \qquad (4.34)$$

Jednacine (4.34) tvrde da u datom trenutku θ sve tacke klasicne aproksimacije Bornovog cvrstog tela cije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2) imaju iste brzine i to kao vektorske velicine, pa zajedno sa jednacinama (4.29) tvrde da se nase telo (proucavana klasicna aproksimacija) krece jednoliko pravolinijski translatorno.

Iz (4.29) i (4.34) za velicinu

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}+\frac{\partial u^i}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x^j},$$

sledi, uzevsi u obzir i (4.16),

$$u_{i,j}=0. \qquad (4.35)$$

Skup jednacina (4.35) i (4.22) tvrdi ponovo ono isto sto je tvrdio i skup jednacina (4.34) i (4.29), naime, da se u klasicnoj aproksimaciji kretanje Bornovog cvrstog tela koje se krece tako da zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2) svodi na jednoliko pravolinijsko translatorno kretanje.

Podsecamo da smo, analizujuci kretanje koje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.2), u Glavi III na

str. 29, rekli da je to neka vrsta generalizacije obrta-
nja klasicnog cvrstog tela oko nepomicne tacke, ili, st
je, na osnovu Galilejevog klasicnog principa relativnos
isto, oko tacke koja se krece jednoliko pravolinijski. I
osnovu toga a u svetlosti rezultata koje smo sada dobil
izgleda da je "obrtanje" Bornovog cvrstog tela malo u p
redjenju sa brzinama kretanja njegovih tacaka, tako da u
klasicnoj aproksimaciji daje klasicno cvrsto telo koje s
krece jednoliko pravolonijski translatorno.

To sto smo zakljucili, samo maglovito opisuje osobi
ne tog kretanja Bornovog cvrstog tela, ali bi nas, ponav
ljamo, potpunija analiza tog kretanja suvise udaljila od
naseg glavnog zadatka. U ovoj Glavi nas interesuje samo
klasicna aproksimacija kretanja Bornovog cvrstog tela, a
takvu aproksimaciju kretanja koje zadovoljava sistem di-
ferencijalnih jednacina (2.2) smo dobili potpuno preciz-
no.

Nadjimo, sada, klasicnu aproksimaciju jednacina ~~(2~~
(2.3). S obzirom na (4.20) i (4.19) one se mogu napisati
u obliku

$$\mathcal{U}_{\alpha,\beta}+\mathcal{U}_{\alpha,k}\mathcal{U}^k\mathcal{U}_\beta+\mathcal{U}_{\alpha,4}\mathcal{U}^4\mathcal{U}_\beta=0. \qquad (4.36$$

Za $\alpha=i$, $\beta=j$, dobivamo, zbog (4.8),

$$\mathcal{U}_{i,j}=0. \qquad (4.37$$

Za $\alpha=i$, $\beta=4$ imamo jednacinu

$$\mathcal{U}_{i,4}+\mathcal{U}_{i,k}\mathcal{U}^k\mathcal{U}_4+\mathcal{U}_{i,4}\mathcal{U}^4\mathcal{U}_4=0,$$

koja se, na osnovu (4.16) i (4.37), svodi na identicnost,
pa ne daje nikakav uslov za velicine

$$\mathcal{U}_{i,4}. \qquad (4.38)$$

Za $\alpha=4$, $\beta=j$, zbog (4.23) i (4.24), jednacina
(4.36) se opet svodi na identicnost, a isto tako i za
$\alpha=\beta=4$.

Jednacine (4.37) i proizvoljnost izraza (4.38) zajed-no tvrde da je kretanje ~~[illegible]~~ dobiveno klasicnom aproksima-cijom kretanja Bornovog cvrstog tela koje zadovoljava sis-tem diferencijalnih jednacina (2.3), translatorno.

Vidimo, dakle, da klasicna aproksimacija kretanja Bornovog relativisticki cvrstog tela daje klasicno trans-latorno kretanje klasicnog cvrstog tela: u prvom slucaju jednoliko pravolinijsko translatorno, ili, sto je na osno-vu Galilejevog klasicnog principa relativnosti isto, miro-vanje cvrstog tela, pri cemu to kretanje nema nijedan ste-pen slobode, a u drugom slucaju proizvoljno translatorno kretanje cvrstog tela koje, prema tome, ima tri stepena slobode.

Na osnovu svega toga smemo zakljuciti da Bornovo re-lativisticki cvrsto telo <u>nije</u> generalizacija klasicnog cvrstog tela.

G L A V A V

TOMASOVO RELATIVISTICKI CVRSTO TELO

U potrazi za definicijom relativisticki cvrstog tela koje bi bilo generalizacija klasicnog cvrstog tela, T. Tomas[12] (T. Y. Thomas) je dao definiciju iz koje sledi zahtev: sistem tacaka C_{ξ^i} predstavlja relativisticki cvrsto telo ako se krece tako da zadovoljava jednacine

$$u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} = 0 . \tag{5.1}$$

Pokazacemo da sistem tacaka koji se krece tako da zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (5.1) predstavlja Bornovo relativisticki cvrsto telo i da, prema tome, ne moze biti generalizacija klasicnog cvrstog tela.

Bornovo relativisticki cvrsto telo je onaj sistem tacaka cije kretanje zadovoljava sistem diferencijalnih jednacina (2.1), koje se mogu napisati i u ekvivalentnom obliku (2.4), tj.

$$(u_{\nu;\beta} + u_{\beta;\nu})(\delta^{\nu}_{\lambda} + u^{\nu}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu} + u^{\beta}u_{\mu}) = 0. \tag{5.2}$$

Mnozenjem ove jednacine sa $(-u_\sigma u^\sigma)^{1/2}$ i s obzirom na

12) T. Y. Thomas, Arch. Ratl. mech. Anal., Vol.9, No.4., p.301 (1962).

(1.19) dobivamo

$$\left[u_{\alpha;\beta}(\delta^{\alpha}_{\nu}+u^{\alpha}u_{\nu})+u_{\alpha;\nu}(\delta^{\alpha}_{\beta}+u^{\alpha}u_{\beta})\right](\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})=0. \quad (5.3$$

S obzirom da, zbog (1.5), vazi

$$(\delta^{\alpha}_{\nu}+u^{\alpha}u_{\nu})(\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})=\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda}, \quad (5.4$$

oslobadjajuci se uglaste zagrade iz (5.3) dobivamo

$$u_{\alpha;\beta}(\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})+u_{\alpha;\nu}(\delta^{\alpha}_{\mu}+u^{\alpha}u_{\mu})(\delta^{\nu}_{\lambda}+u^{\nu}u_{\lambda})=0. \quad (5.5$$

Izmenivsi na podesan nacin indekse u drugom clanu dobivam

$$(u_{\alpha;\beta}+u_{\beta;\alpha})(\delta^{\alpha}_{\lambda}+u^{\alpha}u_{\lambda})(\delta^{\beta}_{\mu}+u^{\beta}u_{\mu})=0. \quad (5.6$$

Lako je pokazati[13)] i obrnuto da se iz jednacine (5.6) mo ze dobiti jednacina (5.2).

Prema tome, ako se sistem tacaka krece tako da zadov ljava jednacine (5.1) sigurno zadovoljava i jednacine (5.6), odn. Tomasevo relativisticki cvrsto telo je specijalan slucaj Bornovog relativisticki cvrstog tela i, stoga, ne predstavlja generalizaciju klasicnog cvrstog tela.

Kretanje Bornovog cvrstog tela koje zadovoljava jednacine (5.1) ima neke veoma interesantne osobine.

Pokazacemo, prvo, da je to kretanje takvo da je telo za posmatraca opste teorije relativnosti cvrsto i u klasicnom smislu (ne prelazeci na klasicnu aproksimaciju).

Jednacine (5.1) se mogu napisati u obliku

$$u_{\alpha,\beta}-\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}u_{\gamma}+u_{\beta,\alpha}-\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}u_{\gamma}=0,$$

---

13) Ekvivalentnost jednacina (5.2) i (5.6) konstatovali su Saleman i Taub u svom ovde vec pomenutom radu. Samo su oni pogresno verovali da su i jednacine (5.1) i (2. medju sobom ekvivalentne. Greska u njihovom zakljucivanju je potekla, u krajnjoj liniji, zbog koriscenja pojma sopstvenog vremena.

odakle je, dalje,

$$(g_{\alpha\mu}u^{\mu})_{,\beta}+(g_{\beta\mu}u^{\mu})_{,\alpha}-2\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}u_{\gamma}=0,$$

$$g_{\alpha\mu,\beta}u^{\mu}+g_{\beta\mu,\alpha}u^{\mu}+g_{\alpha\mu}u^{\mu}_{,\beta}+g_{\beta\mu}u^{\mu}_{,\alpha}-2\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}u_{\gamma}=0,$$

te, s obzirom na

$$g_{\alpha\mu,\beta}=g_{\lambda\mu}\left\{{\lambda \atop \alpha\beta}\right\}+g_{\alpha\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\beta}\right\}, \tag{5.7}$$

dobivamo

$$\left(g_{\alpha\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\beta}\right\}+g_{\beta\lambda}\left\{{\lambda \atop \mu\alpha}\right\}\right)u^{\mu}+g_{\alpha\mu}u^{\mu}_{,\beta}+g_{\beta\mu}u^{\mu}_{,\alpha}=0.$$

Koristeci opet (5.7) imamo

$$g_{\alpha\beta,\mu}u^{\mu}+g_{\alpha\mu}u^{\mu}_{,\beta}+g_{\beta\mu}u^{\mu}_{,\alpha}=0.$$

Pomnozivsi ~~mmmk~~ ove jednacine sa $x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}$ i sabravsi po α i β dobivamo

$$g_{\alpha\mu}(u^{\mu}_{,\beta}x^{\beta}_{,j})x^{\alpha}_{,i}+g_{\beta\mu}(u^{\mu}_{,\alpha}x^{\alpha}_{,i})x^{\beta}_{,j}+g_{\alpha\beta,\mu}u^{\mu}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0. \tag{5.8}$$

Zbog

$$u^{\mu}_{,\beta}x^{\beta}_{,j}=u^{\mu}_{,j}=(x^{\mu}_{,\theta})_{,j}=(x^{\mu}_{,j})_{,\theta}$$

i

$$g_{\alpha\beta,\mu}u^{\mu}=g_{\alpha\beta,\mu}x^{\mu}_{,\theta}=g_{\alpha\beta,\theta},$$

jednacine (5.8) mozemo napisati u obliku

$$g_{\alpha\mu}x^{\alpha}_{,i}(x^{\mu}_{,j})_{,\theta}+g_{\beta\mu}(x^{\mu}_{,i})_{,\theta}x^{\beta}_{,j}+g_{\alpha\beta,\theta}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0,$$

ili, podesnom izmenom nemih indeksa,

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}_{,i}(x^{\beta}_{,j})_{,\theta}+g_{\alpha\beta}(x^{\alpha}_{,i})_{,\theta}x^{\beta}_{,j}+g_{\alpha\beta,\theta}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}=0,$$

tj.

$$(g_{\alpha\beta}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j})_{,\theta}=0. \qquad (5.9)$$

Pomnozivsi te jednacine sa $d\xi^i d\xi^j$ i sabravsi po i i j i s obzirom da $d\xi^i$ ne zavisi od θ, dobivamo

$$(g_{\alpha\beta}x^{\alpha}_{,i}x^{\beta}_{,j}\,d\xi^i d\xi^j)_{,\theta}=0. \qquad (5.10)$$

Ako sada uzmemo da je $\theta=x^4=ct$ dobivamo

$$\left(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^m}\,d\xi^l d\xi^m\right)_{,t}=0, \qquad (5.11)$$

jer je

$$\frac{\partial x^4}{\partial \xi^i}=0.$$

Izraz u zagradi, odn.

$$dl^2=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^l}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^m}\,d\xi^l d\xi^m, \qquad (5.12)$$

predstavlja rastojanje (u obicnom prostornom smislu) isto vremenih (za datog posmatraca) polozaja tacaka C_{ξ^i} i $C_{\xi^i+d\xi^i}$, pa jednacina (5.11) i izrazava cvrstocu tela u klasicnom smislu.

Druga interesantna osobina kretanja koje zadovoljava jednacine (5.1) je u sledecem. Pomnozivsi jednacine (5.1) sa $u^{\alpha}u^{\beta}$ i sabravsi po α i β dobivamo

$$u_{\alpha;\beta}u^{\alpha}u^{\beta}=0,$$

sto se moze napisati u obliku

$$(u_{\alpha}u^{\alpha})_{,\beta}u^{\beta}=0, \qquad (5.13)$$

ili najzad, s obzirom na (1.2), u obliku

$$(u_{\alpha}u^{\alpha})_{,\theta}=0. \qquad (5.14)$$

~~Jednacina (5.14)~~

Jednacina (5.14) izrazava cinjenicu da se dogadjaj x^α krece po svetskoj liniji tacke C_{ξ^i} tako da je intenzitet cetvorovektora brzine stalan tokom kretanja. Pri tome je skup ξ^i proizvoljan.

Dalje, u specijalnoj teoriji relativnosti u Galilejevim koordinatama, u odnosu na koje metricki tensor ima oblik (4.2), i za $\theta = x^4$ jednacina (5.14) ima oblik

$$\left(\sum_{i=1}^{3} u^i u^i - 1\right)_{,t} = 0,$$

odakle je

$$\left(\sum_{i=1}^{3} u^i u^i\right)_{,t} = 0. \qquad (5.15)$$

Ova jednacina tvrdi da se svaka tacka C_{ξ^i} krece jednoliko.

S druge strane, jednacina (5.1) za $\alpha = i$, $\beta = 4$, u specijalnoj teoriji relativnosti za Galilejeve koordinate glasi

$$u^i_{,4} = -u_{4,i} ,$$

odn., za $\theta = x^4 = ct$, s obzirom da je $u_4 = -u^4 = -\frac{\partial x^4}{\partial \theta} = -1$,

$$u^i_{,4} = 0 . \qquad (5.16)$$

Jednacine (5.16) tvrde da, fiksirajuci bilo koji polozaj (odredjen prostornim koordinatama x^i) brzina svake tacke tela koja se nadje u tom polozaju ne zavisi od trenutka u kome se u tom polozaju nadje.

Posmatrajuci rezultat (5.11) u specijalnoj teoriji relativnosti, mozemo odrediti prirodu kretanja odredjenog jednacinama (5.1). Poznato je da i samo kretanje u relativnosti prouzrokuje deformaciju duzina (tzv. Lorencova kontrakcija). Jedina mogucnost da se rastojanja (u obicnom prostornom smislu) tacaka tela ne menjaju tokom vremena je da je, u specijalnoj teoriji relativnosti, to kretanje jednoliko pravolinijsko translatorno. Pri tom treba imati na umu da pomenuta rastojanja nisu invarijantna (prirodne osobine tela), sto jednacina (5.11), uostalom, i ne tvrdi, vec samo da je invarijantna osobina njihove konstantnosti. To znaci, ako su ta rastojanja konstantna u odnosu na jedan koordinatni sistem - konstantna su i u odnosu na svaki drugi inercioni koordinatni sistem, odn. ako se telo krece jednoliko pravolinijski translatorno u odnosu na jedan inercioni koordinatni sistem - krece se jednoliko pravolinijski translatorno i u odnosu na svaki drugi inercioni koordinatni sistem.

G L A V A VI

ANALOGIJA KLASICNOG I BORNOVOG RELATIVISTICKI CVRSTOG TELA[14)]

Born svojom definicijom nije uspeo da generalise kretanje klasicnog cvrstog tela. U nameri da nadjemo takvu generalizaciju, ako se ona uopste moze naci (a nase je ~~mizkjanja~~ licno uverenje da za to mora postojati neki nacin) pokusali smo da, pre svega, sagledamo razliku izmedju relativisticke i klasicne kinematike cvrstog tela posmatrajuci ih sa analognih gledista.

Pojam prostor-vremena nije privilegija teorije relativnosti. I u klasicnoj mehanici se moze definisati odgovarajuci pojam - klasicni prostor-vreme, kao skup dogadjaja, gde pod dogadjajem podrazumevamo velicinu odredjenu sa cetiri broja: tri broja x^i koji odredjuju polozaj tacke u prostoru i cetvrtog broja t koji odredjuje trenutak u kome se tacka u prostoru posmatra.

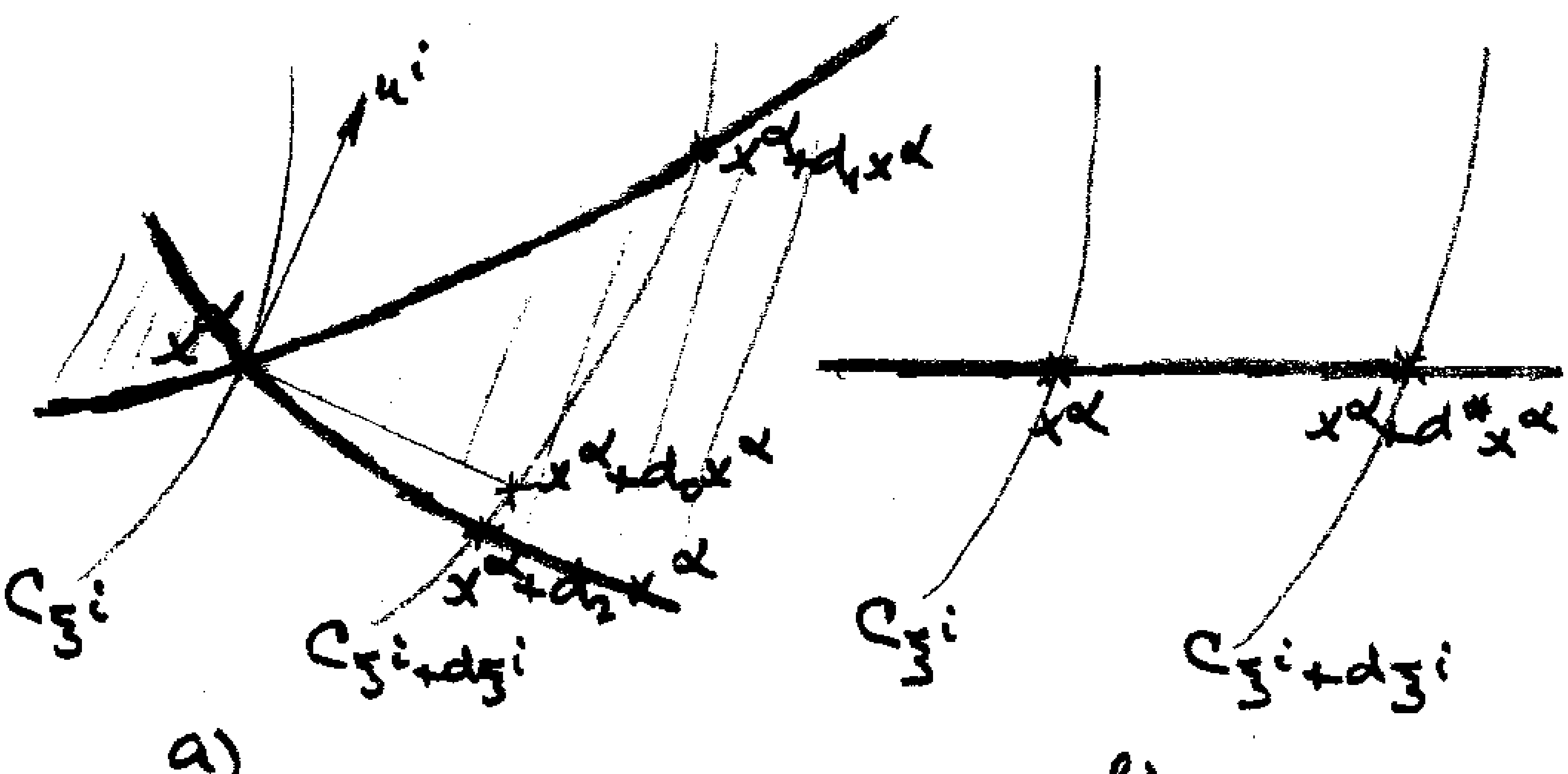
Kretanju tacke odgovara neprekidan niz dogadjaja, pa je takvo kretanje u klasicnom prostor-vremenu predstavljeno linijom - klasicnom svetskom linijom.

Govoreci o metrici prostor-vremena moramo se ogra-

14) Rezultate prvog dela ove Glave smo vec izneli u radu koji je objavljen u casopisu Publication de l'Institut Mathématiques, Beograd, Tome 1(15),1961,str.25.

niciti samo na intervale izmedju dogadjaja koji leze u istoj, bilo kojoj, hiperravni t = const. i takav interval predstavlja rastojanje (u uobicajenom za prostorno smislu) istovremenih polozaja dveju tacaka.

Posmatrajmo jedan dogadjaj x^α u prostor-vremenu teorije relativnosti (sl.2a). Skup svetskih linija svetlosnih zrakova kroz x^α obrazuje nula-hiperpovrsinu prostor-vremena (u specijalnoj teoriji relativnosti nula-hiperkonus). Nula hiperpovrsina kroz x^α je na



sl.2.

sl.2a shematski prikazana debelom linijom. Deo prostor vremena koji je na slici osencen je skup takvih dogadjaja za koje su vektori pomeranja koji ih spajaju sa dogadjajem x^α prostornog tipa. Moze se pokazati[15] da se uvek moze naci takav koordinatni sistem da dogadjaji koje spaja vektor pomeranja prostornog tipa budu u odnosu na takav koordinatni sistem istovremeni. Stoga se takvi dogadjaji, po Foku, i zovu kvaziistovremeni dogadjaji. Sada se vidi da je analogon osencenom delu relativistickog prostor-vremena u klasicnom prostor-vremenu (sl.2b) samo debela linija kroz dogadjaj x^α, tj. skup svih dogadjaja istovremenih dogadjaju x^α.

Neka je C_{ξ^i} (sl.2a) svetska linija tacke C_{ξ^i} (koja prolazi kroz dogadjaj x^α), a $C_{\xi^i + d\xi^i}$ svetska

[15] Vidi В.А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, Москва 1955, стр. 50.

linija tacke $C_{\xi^i+d\xi^i}$. Neka su $x^\alpha+d_1x^\alpha$ i $x^\alpha+$ $+d_2x^\alpha$ dogadjaji na svetskoj liniji tacke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ u kojima ona prodire kroz nula-hiperpovrsinu kroz x^α i neka je $x^\alpha+d^*x^\alpha$ dogadjaj na klasicnoj svetskoj liniji tacke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ koji je istovremen dogadjaju x^α. Skup dogadjaja na svetskoj liniji tacke $C_{\xi^i+d\xi}$ izmedju dogadjaja $x^\alpha+d_1x^\alpha$ i $x^\alpha+d_2x^\alpha$ je skup kvaziistovremenih dogadjaja tacke $C_{\xi^i+d\xi^i}$ dogadjaju x^α, pa je $x^\alpha+d^*x^\alpha$ klasicni analogon bilo kog dogadjaja iz pomenutog skupa.

Kako, u teoriji relativnosti, dva vektora vremenskog tipa ne mogu biti uzajamno upravni[16], vektor d_0x^α, definisan jednacinom (1.11), mora biti prostornog tipa, pa dogadjaj $x^\alpha+d_0x^\alpha$ pripada pomenutom skupu dogadjaja. Medjutim, i pored toga sto izmedju dogadjaja $x^\alpha+d_0x^\alpha$ i dogadjaja (u klasicnom prostor-vremenu) $x^\alpha+d^*x^\alpha$ na taj nacin postoji analogija, odmah se vidi da, zbog mnostva dogadjaja u relativistickom prostor-vremenu koji su analogni dogadjaju $x^\alpha+$ $+d^*x^\alpha$, ta analogija nije ubedljiva.

Najprirodnije je pretpostaviti da je analogija potpuna izmedju dogadjaja $x^\alpha+d^*x^\alpha$ u klasicnom prostor-vremenu i srednjeg kvaziistovremenog dogadjaja $x^\alpha+d_*x^\alpha$ u relativistickom prostor-vremenu, koji se nalazi na sredini izmedju dogadjaja $x^\alpha+d_1x^\alpha$ i $x^\alpha+d_2x^\alpha$, tj. takvog dogadjaja da je

$$d_*x^\alpha=\frac{d_1x^\alpha+d_2x^\alpha}{2} \tag{6.1}$$

(na osnovu cega je do na velicine prvog reda u odnosu na d_1x^α, odn. d_2x^α i dogadjaj $x^\alpha+d_*x^\alpha$ na svetskoj liniji tacke $C_{\xi^i+d\xi^i}$), pa u definiciji relativisticki cvrstog tela zahtevati da interval definisan sa

---

[16] Vidi J.L.Synge: Relativity, The Special Theory, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1956, str.27.

$$g_{\alpha\beta} d_* x^\alpha d_* x^\beta \tag{6.2}$$

bude stalan tokom kretanja.

Medjutim, pokazacemo da je

$$d_* x^\alpha \equiv d_0 x^\alpha, \tag{6.3}$$

te da, s jedne strane, izmedju Bornovog relativistick[og] cvrstog tela i klasicnog cvrstog tela postoji, na izgled, potpuna analogija, i, s druge strane, da se ni tim putem ne moze resiti problem generalizacije pojma klasicnog cvrstog tela.

Posto su

$$d_1 x^\alpha = x^\alpha_{,i} d\xi^i + u^\alpha d_1\theta \tag{6.4}$$

i

$$d_2 x^\alpha = x^\alpha_{,i} d\xi^i + u^\alpha d_2\theta, \tag{6.5}$$

to je, na osnovu (6.1)

$$d_* x^\alpha = x^\alpha_{,i} d\xi^i + u^\alpha \frac{d_1\theta + d_2\theta}{2}, \tag{6.6}$$

gde su $d_1\theta$ i $d_2\theta$ resenja jednacine

$$g_{\alpha\beta}(x^\alpha_{,i} d\xi^i + u^\alpha d\theta)(x^\beta_{,j} d\xi^j + u^\beta d\theta) = 0. \tag{6.7}$$

Ova se jednacina moze napisati u obliku

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta (d\theta)^2 + 2 g_{\alpha\beta} u^\alpha x^\beta_{,i} d\xi^i d\theta + g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,i} x^\beta_{,j} d\xi^i d\xi^j = 0, \tag{6.8}$$

odakle je

$$\frac{d_1\theta + d_2\theta}{2} = \frac{g_{\lambda\mu} u^\lambda x^\mu_{,i} d\xi^i}{-g_{\sigma\tau} u^\sigma u^\tau},$$

pa (6.6) postaje

$$d_* x^\alpha = \left(x^\alpha_{,i} + u^\alpha \frac{u_\lambda x^\lambda_{,i}}{-u_\sigma u^\sigma} \right) d\xi^i,$$

tj.

$$d_* x^\alpha = (x^\alpha_{,i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i}) d\xi^i \tag{6.9}$$

S obzirom da je vektor $d_0 x^\alpha$ dat jednacinom (1.11),

$$d_0 x^\alpha = (x^\alpha_{,i} + u^\alpha u_\lambda x^\lambda_{,i}) d\xi^i, \tag{6.10}$$

poredjenjem jednacina (6.9) i (6.10) dobiva se (6.3), kao sto smo u pocetku i tvrdili.

* * *

Poredjenje sl.2a sa sl.2b i neuspeh Bornovog pokusaja generalizacije klasicnog cvrstog tela navodi n sledece razmisljanje.

Izabravsi ma koji invarijantan nacin odredjivanj dogadjaja na svetskoj liniji tacke $\xi^i + d\xi^i$ koji je kvaziistovremen dogadjaju x^α, tj. uzimajuci umesto jednacine (6.1) jednacinu

$$d_* x^\alpha = \frac{\lambda d_1 x^\alpha + d_2 x^\alpha}{\lambda + 1}, \tag{6.11}$$

gde je $\lambda > 0$ skalarna invarijanta, sigurno je, ma da to nismo pokusali da dokazemo, da bismo dobili kretanje koje bi u klasicnoj aproksimaciji dalo neke klase kretanja klasicnog cvrstog tela (na primer, za $\lambda = 1$, na osnovu rezultata Glave IV, klasu translatornog kretanja klasicnog cvrstog tela). Medjutim, nijedan od tih izbora ne bi doveo do kretanja tela koje bi predstavljalo generalizaciju kretanja klasicnog cvrstog tela.

Stoga odavde proisticu dva predloga: ili

1. u definiciji relativisticki cvrstog tela zahtevati da izraz (6.2) bude stalan tokom kretanja, pri cemu je $d_* x^\alpha$ dato jednacinom (6.11), gde je $\lambda > 0$ <u>proizvoljno</u> izabrana skalarna invarijanta, ili

2. zahtevati da povrsina "trougla" cija su temena u dogadjajima x^α, $x^\alpha + d_1 x^\alpha$ i $x^\alpha + d_2 x^\alpha$ (ta je povrsina infinitezimalna pa se moze aproksimativno uzeti da je ravna) bude stalna tokom kretanja.

Drugi predlog nam izgleda prihvatljiviji, jer je klasicnom pojmu rastojanja izmedju dogadjaja x^{α} i $x^{\alpha}+d^{*}x^{\alpha}$ sa sl.2b, potpuni analogom ustvari bas povrsina pomenutog trougla.

Medjutim, ti predlosi nemaju niceg zajednickog s razmatranjem Bornovog relativisticki cvrstog tela, te ih u ovom radu necemo ni ispitivati.

DODATAK I

BROJ STEPENI SLOBODE CVRSTOG TELA U KLASICNOJ MEHANICI

Neka su konacne jednacine kretanja sistema tacak C_{ξ^a} $(a = 1,2,3)$ u nekom koordinatnom sistemu x^i

$$x^i = x^i(\xi^a, t), \qquad (i = 1,2,3) \qquad \text{(D I.1)}$$

gde je t vreme. U klasicnoj mehanici taj sistem tacaka predstavlja cvrsto telo ako je

$$(g_{ij}\, dx^i dx^j)_{,t} = 0, \qquad \text{(D I.2)}$$

gde je g_{ij} metricki tenzor, a

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} d\xi^a \qquad \text{(D I.3)}$$

vektor pomeranja koji spaja tacku C_{ξ^a} s istovremenim polozajem tacke $C_{\xi^a + d\xi^a}$.

Koristeci oznake analogne oznakama iz Glave I, cija ce upotreba bez ikakvog daljeg preciziranja biti iz teksta jasna, jednacina (D I.2) se, s obzirom da velicine $d\xi^a$ ne zavise od vremena, moze napisati u obliku

$$(g_{ij}\, x^i_{;a} x^j_{;b})_{,t}\, d\xi^a d\xi^b = 0,$$

odakle je, zbog proizvoljnosti velicina $d\xi^a$,

$$(g_{ij}\,x^i_{,a}\,x^j_{,b})_{,t}=0. \tag{D I.4}$$

Imajuci na umu da je

$$g_{ij,t}=g_{ij,k}u^k=(g_{il}\{^{\,l}_{jk}\}+g_{lj}\{^{\,l}_{ik}\})u^k,\quad \left(u^k\equiv\frac{\partial x^k}{\partial t}\right)$$

(jer g_{ij} eksplicitno ne zavisi od vremena) i da je

$$(x^i_{,a})_{,t}=(x^i_{,t})_{,a}=u^i_{,a}=u^i_{;j}\,x^j_{,a},$$

postupkom slicnim postupku u Glavi I dobivamo

$$(u_{i;j}+u_{j;i})x^i_{,a}\,x^j_{,b}=0. \tag{D I.5}$$

Ako jos uzmemo u obzir da jednacine (D I.1) predstavljaju u svakom trenutku t nesingularnu transformaciju koordinata ξ^a u kordinate x^i, to mora biti

$$\det\{x^i_{,a}\}\neq 0,$$

pa iz (D I.5) sledi[17)]

$$u_{i;j}+u_{j;i}=0. \tag{D I.6}$$

I u klasicnu mehaniku se moze uvesti pojam prostor-vremena, kao sto smo i ucinili i objasnili u Glavi VI, ali se ne moze definisati metrika $g_{\alpha\beta}$ takvog klasicnog prostor-vremena vec samo metrika g_{ij} njegovog potprostora – obicnog prostora. Stoga ne postoji ni mogucnost obrazovanja kovarijantnih izvoda $u_{i;4}$, pri cemu bi x^4 trebalo da predstavlja vreme. Jedino sto se moze to je obrazovanje parcijalnih izvoda $u_{i,4}=\frac{\partial u_i}{\partial t}$ (smatrajuci u_i funkcijom promenljivih ξ^a, t a ne x^i, t) koji odredjuju kovarijantne koordinate w_i ubrzanja, definisane sa

17) Ove jednacine je izveo Th. De Donder: Bull. Acad. Roy. Belg. (Classe des Sciences), Séance du 3 janvier 1942, Nos 1-3, p.8.

(D I.7)

Pokazacemo sada, da se promenama 12 velicina

$$W_i = u_{i,4} - \left\{ {}^{\;j}_{i\,k} \right\} u_j u^k . \qquad \text{(D I.}$$

Pokazacemo, sada, da se proucavanjem 12 velicina

$$u_{i;j} \qquad \text{i} \qquad u_{i,4} \qquad \text{(D I.}$$

moze zakljuciti da cvrsto telo u klasicnoj mehanici im sest stepeni slobode.

Velicine (D I.8) nisu medjusobno nezavisne. Izmed njih 12 postoji sest relacija (D I.6) za $i \leq j$. Dakle samo su njih sest proizvoljne. Medjutim, ne mogu biti proizvoljne bilo kojih sest. Pre svega proizvoljne su velicine $u_{i,4}$ jer se ne pojavljuju u relacijama (D I.(Iz relacija (D I.6) se, dalje, vidi da se za preostale tri proizvoljne velicine mogu uzeti tri velicine $u_{i;j}$ za koje je $i \neq j$ i pri tome da medju njima nema dve k(je imaju iste indekse, na primer tri velicine $u_{i;j}$ $(i<j$ Dakle, skup sest proizvoljnih velicina

$$u_{i;j} \; (i<j), \qquad u_{i,4}, \qquad \text{(D I.9)}$$

odredjuju sve ostale velicine (D I.8).

Na koji se nacin moze protumaciti proizvoljnost sest velicina (D I.9)? Fiksirajmo skup ξ^a_o koji inace mozemo proizvoljno izabrati. Tada proizvoljnost velicina $u_{i,4}$ izrazava proizvoljnost ubrzanja tacke $C_{\xi^a_o}$, odn. proizvoljnost kretanja te tacke u tri pravca prostora, dakle, tri stepena slobode njenog kretanja.

Biranjem $u_{i,4}$ za tacku $C_{\xi^a_o}$ odredili smo diferencijalne jednacine kretanja (D I.7) tacke $C_{\xi^a_o}$, pa i samo njeno kretanje. (Pretpostavlja se da su dati pocetni uslovi, koji inace, po definiciji stepena slobode, i ne uticu na njihov broj.) Time su odredjene i velicine u_i za tu tacku.

Fiksirajmo, sada, trenutak vremena t pa potrazimo brzinu tacke $C_{\xi^a_o + d\xi^a}$ imajuci ~~x xiž~~ na umu da znamo brzinu tacke $C_{\xi^a_o}$. Do na velicine prvog reda u odnosu na $d\xi^a$ brzina tacke $C_{\xi^a_o + d\xi^a}$ je

$$u_i + u_{i;j}\, dx^j, \qquad \text{(D I.10)}$$

gde je dx^j dato sa (D I.3). To znaci da je polje br zina svih tacaka cvrstog tela bilo u kom trenutku pot puno odredjeno brzinom u_i tacke $C_{\xi^a_0}$ i skupom ve- licina $u_{i;j}$. Posto je medju ovim poslednjim njih tri proizvoljno, to pomeranje cvrstog tela pri fik- siranom polozaju tacke $C_{\xi^a_0}$ ima nova tri stepena slo bode, pa sledi da definicija (D I.2) cvrstog tela do- pusta da cvrsto telo klasicne mehanike ima sest stepe ni slobode.

Potrebno je pomenuti da i sama struktura prosto- ra moze uticati na smanjenje broja stepeni slobode - broja koji je posledica iskljucivo definicije cvrstog tela. Medjutim, u Euklidovom prostoru takvih dopun- skih ogranicenja nema, tako da kretanje klasicnog cvrstog tela u Euklidovom trodimenzionom prostoru ima upravo sest stepeni slobode.

DODATAK II

NEKI OBRASCI IZ ALGEBRE KRONEKEROVOG PROIZVODA DVEJU MATRICA[18)]

Kronekerov proizvod matrice

$$A=\{a^{\alpha}_{\beta}\} \quad (\alpha=1,\dots,m;\beta=1,\dots,n) \qquad \text{(D II.1)}$$

tipa (m, n) i matrice

$$B=\{b^{\lambda}_{\mu}\} \quad (\lambda=1,\dots,p;\mu=1,\dots,q) \qquad \text{(D II.2)}$$

tipa (p, q) je, po definiciji, matrica

$$A\times B=\{a^{\alpha}_{\beta} B\} \qquad \text{(D II.3)}$$

tipa (mp, nq).

Ako $\rho(A)$ oznacava rang matrice A, onda vazi obrazac

$$\rho(A\times B)=\rho(A)\,\rho(B). \qquad \text{(D II.4)}$$

Ako je A matrica reda m, a B matrica reda p i ako $|A|$ oznacava determinantu matrice A, onda je

$$|A\times B|=|A|^{p}\,|B|^{m}. \qquad \text{(D II.5)}$$

---

18) Vidi C.C.Mac Duffee: The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1946, str.82,8

L I T E R A T U R A

1. Andjelic, T., Matrice, Naucna Knjiga, Beograd, 1962.
2. Born, M., Ann. Phys., 30, 1 (1909).
3. De Donder, Th., Bull. Acad. Roy. Belg. (Classe des Sciences), Séance du janvier 1942, Nos 1-3, p.8.
4. Mac Duffee, C.C., The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1946.
5. Фок, В.А., Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, Москва, 1955.
6. Herglotz, G., Ann.Phys., 31, 393 (1909-1910).
7. Noether, F., Ann.Phys., 31, 919 (1909-1910).
8. Pounder, J.R., Comm.Dublin Inst.Adv.Stud., Ser.A, No.11 (1954).
9. Salzman, G. and Taub, A.H., Phys.Rev., 95, 1659 (1954).
10. Synge, J.L., Stud.Math.Mech.Presented to Richard von Mises, New York, 1954, p.217.
11. Synge, J.L., Relativity, The Special Theory, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1956.
12. Synge, J.L., Math.Zeits., 72(1), 82 (1959).
13. Thomas, T.Y., Arch.Ratl.Mech.Anal., 9(4), 301 (1962).
14. Toupin, R.A., Arch.Ratl.Mech.Anal., 1(3), 181 (1958).