ANALYSE.—*Quelques théorèmes d'inversion relatifs aux intégrales et aux séries.*

(Première partie).

par M. J. KARAMATA (à Beograd)

1. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(0, \infty)$, telle que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ existe, ou que

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \to s \qquad \text{lorsque } x \to \infty. \tag{1}$$

Nous nous demandons à quelles conditions supplémentaires doit-être assujétie la fonction $f(x)$ pour que de là l'on puisse conclure que

$$f(x) \to o \qquad \text{avec } 1/x. \tag{2}$$

Il est évident, en effet, que de l'unique condition (1) il ne résulte aucunement la relation (2), comme le montre, par exemple, l'intégrale de FRESNEL

$$\int_0^\infty \sin t^2\,dt;$$

ceci étant vrai même lorsque la fonction $f(x)$ est supposée positive, puisque l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4 \sin^2 t}$$

existe, $f(t) = \dfrac{1}{1+t^4 \sin^2 t}$ est positif, mais ne tend pas vers zéro avec $1/t$.

En général, si l'on n'assujétit $f(x)$ à aucune autre condition, sauf celle que l'intégrale (1) ait un sens, la seule conclusion, quant aux valeurs limites de $f(x)$ pour $x = \infty$, que l'on peut en tirer, est que l'ensemble de ces valeurs limites doit contenir le point zéro.

Car, si le point zéro n'est pas une valeur limite, il résulte de la continuité de la fonction $f(x)$, que (1) ne peut pas avoir un sens.

En particulier, on tire de là que, si $f(x)$ tend vers une limite lorsque $x \to \infty$, cette limite doit forcément être égale à zéro. De sorte que, si l'on assujétit la fonction $f(x)$ à la condition d'être monotone, celle-ci sera une des conditions cherchées, puisque $f(x)$ étant monotone, il en résulte qu'elle doit tendre vers une limite lorsque $x \to \infty$.

2. En supposant que la fonction $f(x)$ a une dérivée dans $(0, \infty)$, on arrive à ce résultat évident, que *la relation (2) résulte de (1) toutes les fois que la dérivée garde un signe invariable, c'est-à-dire:*

$$f'(x) \leqslant 0 \ , \ (\text{ou bien } f'(x) \geqslant 0).$$

Or, la condition que $f'(x)$ soit constamment négatif, peut être remplacée par une condition, plus générale et moins évidente, à savoir: *il suffit déjà que $f'(x)$ soit borné supérieurement, (ou inférieurment).*

Qant à cette condition, nous la déduirons d'une autre, plus générale donnée par le lemme suivant:

Lemme. *Soit $f(x)$ une fonction continue dans $(0, \infty)$ y possédant une dérivée première; de la relation*

$$\int_0^x f(t)\, dt \to s \quad , \quad \textit{lorsque } x \to \infty, \tag{1}$$

il résulte:

$$f(x) \to 0 \quad , \quad \textit{lorsque } x \to \infty, \tag{2}$$

toutes les fois que

$$cf(x) + f'(x) \leqslant M \quad , \quad M \textit{ indépendant de } x, \tag{3}$$

c étant un nombre quelconque.

Pour démontrer ce lemme, supposons que $f(x)$ ne tend pas vers zéro lorsque $x \to \infty$. Il existera alors un nombre $a \neq 0$, et une suite infinie x_n de valeurs de x, tendant vers l'infini avec n et telle que

$$f(x_n) = a \neq 0 \qquad \text{pour tout} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Supposons ensuite que a soit positif, (des considérations semblable, s'appliquent au cas où a est négatif) et prenons M tel que

$$a\,|\,c\,| < \mathrm{M}.$$

Ces hypothèses faites, multiplions l'inégalité (3) par e^{cx}, puis l'intégrons de x à x_n. On obtient l'inégalité

$$e^{cx_n} f(x_n) - e^{cx} f(x) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{c} \{ e^{cx_n} - e^{cx} \},$$

valable pour tout $x \leqslant x_n$. En y posant $f(x_n) = a$, on en déduit

$$f(x) \geqslant \frac{1}{c} \{ \mathrm{M} - (\mathrm{M} - ac)\, e^{c(x_n - x)} \} = g(x).$$

De l'inégalité $\mathrm{M} - ac > 0$, il résulte que la fonction $g(x)$ croît constamment avec x, puisque

$$g'(x) = (\mathrm{M} - ac)\, e^{c(x_n - x)} > 0,$$

et est égale à zéro lorsque x est égal à

$$x'_n = x_n + \frac{1}{c} \lg \left(1 - \frac{ac}{\mathrm{M}} \right) < x_n .$$

En intégrant donc l'inégalité précédante de x'_n à x_n, on aura

$$\int_{x'_n}^{x_n} f(t)\, dt \geqslant \frac{\mathrm{M}}{c^2} \left\{ -\lg \left(1 - \frac{ac}{\mathrm{M}} \right) - \frac{ac}{\mathrm{M}} \right\} > \frac{a^2}{\mathrm{M}} \{ 1 - \lg 2 \} > 0.$$

Or, cette inégalité contredit l'hypothèse (1) d'après laquelle on devrait avoir

$$\int_{x'}^{x} f(t)\, dt \to 0 \qquad \text{pour tout } x > x' \to \infty.$$

Il faut donc que $f(x) \to 0$ avec $1/x$. c. q. f. d.

Pour $c = 0$, ce lemme nous fournit les deux cas particuliers mentionnés plus haut. D'autre part, pour $c = 1$, il est équivalent à un lemme de M. E. Landau[1]) que l'auteur a exprimé sous la forme suivante:

---

[1]) E. Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie, 1929 p. 58 Dans cet ouvrage, l'auteur démontre au fond un lemme plus général, dont l'analogue, ainsi que sa généralisation, sera traité dans la Note suivante.

Soit $g(x)$ une fonction définie dans $(0, a)$, $a > 0$, y possédant une dérivée seconde et telle que

$$g(x) \to s \quad , \quad \textit{lorsque } x \to 0;$$

alors

$$xg'(x) \to 0 \quad , \quad \textit{lorsque } x \to 0,$$

toutes les fois que

$$x^2 g''(x) < M \ , \ M \textit{ indépendant de } x.$$

Il suffit, en effet, de poser

$$g(x) = \int_0^y f(t)\, dt \quad , \quad x = e^{-y},$$

pour obtenir

$$xg'(x) = f(y)$$

et

$$x^2 g''(x) = f(y) + f'(y),$$

ce qui montre bien que, pour $c = 1$, le lemme de M. E. Landau est équivalent au lemme précédant.

3. L'inégalité (3) donne une réponse à la question posée au début. Mais d'une part, elle exige l'existance de la dérivée de la fonction $f(x)$, d'autre part, elle n'est point une condition nécessaire, comme le montre, par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x^3}{x}$$

qui satisfait aux relations (1) et (2), mais pas à l'inégalité (3).

A cet égard, nous allons établir une nouvelle condition, qui n'exige point l'existance de la dérivée de $f(x)$ et qui représentera une condition nécessaire et suffisante. Elle généralisera en outre la condition (3), parce que nous la démontrerons pour une intégrale de Stieltjes ayant la forme

$$\int_0^\infty f(t)\, d\{a(t)\},$$

$a(t)$ étant une fonction monotone qui tend vers l'infini avec t.[1])

[1]) Le cas où $a(x)$ reste borné ne présente aucun intérêt pour cette étude, puisque dans ce cas la relation (4) est vérifiée pour toute fonction $f(x)$ bornée dans $(0, \infty)$.

Théorème 1. *Soient $f(x)$ et $a(x)$ deux fonctions continues dans l'intervalle $(0, \infty)$, $a(x)$ étant en outre monotone, tendant vers l'infini avec x; de la relation*

$$\int_0^x f(t)\, d\{a(t)\} \to s \quad , \quad \textit{lorsque } x \to \infty, \tag{4}$$

il résulte:

$$f(x) \to 0 \quad , \quad \textit{lorsque } x \to \infty, \tag{2}$$

toutes les fois que

$$\limsup_{x=\infty} \ \underset{x \leqslant x' \leqslant X_\eta}{f(x') - f(x)} \leqslant \varpi(\eta) \to 0 \textit{ avec } \eta, \tag{5}$$

X_η étant tel que

$$a(X_\eta) - a(x) = \eta. \tag{5'}$$

Démonstration:

a)

$$\liminf_{x=\infty} f(x) \geqslant 0.$$

En effet, il résulte de (4) que

$$\int_x^X f(t)\, d\{a(t)\} \to 0 \qquad \text{pour tout } X \geqslant x \to \infty,$$

donc, moyennant l'identité

$$f(x)\{a(X) - a(x)\} = \int_x^X f(x)\, d\{a(t)\},$$

on obtient

$$-f(x)\{a(X) - a(x)\} = \int_x^X \{f(t) - f(x)\}\, d\{a(t)\} + o(1)^{1})$$

$$\leqslant \underset{x \leqslant t \leqslant X}{\mathrm{Max}} \{f(t) - f(x)\}\{a(X) - a(x)\} + o(1),$$

par conséquent, si l'on prend pour X la quantité X_η définie par (5'), il s'en suit:

$$\limsup_{x=\infty} -f(x) = -\liminf_{x=\infty} f(x) \leqslant \varpi(\eta),$$

ce qui, d'après (5), démontre l'affirmation.

b)

$$m(x) = \min_{x \leqslant t \leqslant X_\eta} f(t) \to 0 \qquad \text{avec } 1/x.$$

[1]) Le symbol $o(1)$ désigne une quantité qui $\to 0$ avec $1/x$.

Car, si cela n'a pas lieu, il existera d'après *a)* un nombre $m > 0$, et une suite $x^{(k)}$ de valeurs de x, telles que

$$m\,(x^{(k)}) \to m \quad \text{lorsque} \quad x^{(k)} \to \infty.$$

Il s'ensuivrait que

$$\int_{x_{(k)}}^{X_\eta^{(k)}} f(t)\, d\{a(t)\} \geqslant m\,(x^{(k)})\,\{a\,(X_\eta^{(k)}) - a\,(x^{(k)})\} = \eta \,.\, m\,(x^{(k)}) \to m\,.\,\eta > 0,$$

ce qui contredirait l'hypothèse 4.

c) $$\limsup_{x=\infty} f(x) \leqslant 0.$$

Car, en remplaçant x, dans (5), par le nombre x_m, tel que $f(x_m) = m\,(x)$, on a, d'après *b)* et (5):

$$\lim_{x_m=\infty} \sup_{x_m \leqslant x' \leqslant X\eta} f(x') - f(x_m) = \lim_{x_m=\infty} \sup_{x_m \leqslant x' \leqslant X\eta} f(x') \leqslant w\,(\eta) \to 0 \qquad \text{avec } \eta.$$

Puisque x' peut parcourir toutes les valeurs positives, lorsque $x_m \to \infty$, il en résulte l'affirmation *c)*.

Les points *a)* et *c)* démontrent le théorème proposé.

Il est facile de voir que la condition (5) contient la condition (3) comme cas particulier. Nous le montrerons en déduisant pour l'intégrale de Stieltjes une condition analogue à la condition (3). En y ajoutant l'hypothèse que $a(x)$ possède une dérivée, cette condition prend la forme suivante:

Pour que (2) résulte de (4) il suffit que

$$cf(x)\, a'(x) + f'(x) < Ma'(x) \quad , \quad M \text{ indépendant de } x, \tag{6}$$

c étant un nombre quelconque.

Nous n'avons qu'à montrer que (5) est toujours rempli lorsque (6) l'est; or, en intégrant (6) de x à $x' \leqslant X_\eta$, on obtient

$$c\int_x^{x'} f(t)\, d\{a(t)\} + f(x') - f(x) < M\{a(x') - a(x)\} \leqslant M\{a(X_\eta) - a(x)\}$$

et puisque $\displaystyle\int_x^{x'} f(t)\, d\{a(t)\} \to 0$ pour tout $x' \geqslant x \to \infty$, on a

$$f(x') - f(x) < M\eta + o(1) \quad , \quad \text{pour tout } x \leqslant x' \leqslant X_\eta,$$

ce qui montre que (5) est rempli lorsque la condition (6) l'est; l'affirmation précédente est ainsi démontrée.

Enfin, il est facile à voir que pour $a(x) = x$, (6) est équivalent à (3).

Remarquons que la condition (5), mise sous la forme du lemme de M. E. Landau, est équivalente à

$$\lim_{x=0} \sup_{x(1-\varepsilon) \leqslant x_1 \leqslant x} [x_1 g'(x_1) - xg'(x)] \leqslant w\,(\varepsilon) \to 0 \qquad \text{avec } \varepsilon.$$

4) Dans le théorème précédant on a supposé que $a(x)$ était une fonction continue. Au moyen de cette hypothèse on aurait pu ramener l'étude de l'intégrale de Stieltjes directement à une intégrale ordinaire, puisqu'en désignant par $b(x)$ l'inverse de $a(x)$ on a

$$\int_0^\infty f(t)\, d\{a(t)\} = \int_{a(0)}^\infty f\{b(x)\}\, dx,$$

$f\{b(x)\}$ étant toujours une fonction continue.

En ne supposant plus la continuité de $a(x)$, la condition (5) n'est plus appliquable, puisque la seconde égalité, pour $\eta \to 0$, n'a pas lieu dans le cas général. D'autre part, on peut la modifier de façon qu'elle reste valable aussi dans ce cas, ce qui donne le théorème suivant:

Théorème 2. *Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ et $a(x)$ une fonction monotone, tendant vers l'infini avec x; du fait que*

$$\int_0^x f(t)\, d\{a(t)\} \to s \quad \text{lorsque } x \to \infty, \tag{4}$$

il résulte

$$f(x) \to 0 \quad , \quad \text{lorsque } x \to \infty, \tag{2}$$

lorsque

$$\sup_{x \leqslant x' \leqslant X} f(x') - f(x) \leqslant w\,(x) \to 0 \qquad \text{avec } 1/x, \tag{7}$$

X étant tel qu'on ait

$$a(X) - a(x) > a > 0 \quad , \quad \text{pour tout } X > x \to \infty. \tag{7'}$$

La démonstration de ce théorème étant absolument identique à celle du théorème 1, nous n'y insisterons point.

Or, ce théorème contient les analogues des théorèmes précédants relatifs aux series.

Il suffit, en effet, de prendre pour $a(x)$ une fonction constante par intervalles, possédant aux points $x = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, des sauts de longueur d_n, c'est-à-dire

$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu & \text{lorsque } n \leqslant x < n+1 \ , \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

puis de poser

$$f(n) = a_n.$$

L'intégrale de STIELTJES est alors égale à

$$\int_0^x f(t)\, d\{\, a(t)\,\} = \sum_{\nu=0}^{[x]} a_\nu d_\nu\,,$$

et le théorème 2, prend la forme suivante :

Théorème 3. *Soit d_n une suite de nombres tels que*

$$d_n \geqslant 0 \quad , \quad et \qquad \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \to \infty \qquad avec\ n\,; \tag{8}$$

a_n étant une suite de nombres quelconques, il résulte de la convergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu d_\nu = s \tag{9}$$

que

$$a_n \to 0 \qquad , \qquad lorsque\ n \to \infty, \tag{10}$$

toutes les fois que

$$\underset{n \leqslant n' \leqslant N(n)}{a^{n'} - a_n} \leqslant w\,(n) \to o \qquad avec\ 1/n, \tag{11}$$

$N\,(n)$ étant choisi de telle manière qu'on ait

$$\sum_{\nu=n}^{N(n)} d_\nu > a > 0 \qquad pour\ tout\ n. \tag{12}$$

Mais on voit que ce théorème n'a plus sa raison d'être lorsque d_n reste constamment plus grand qu'un nombre $d > 0$. Car, dans ce cas, il résulte déjà de la convergence de la série (9) que a_n doit $\to 0$.

De même, lorsque lim inf $d_n = 0$, sans que $d_n \to$ vers une limite, $a_{n_k} \to 0$ pour toute suite particulière n_k, telle que $d_{n_k} \to d > 0$, et le théorème précédant n'est à appliquer qu'aux indices n'_k pour lesquels $d_{n_k} \to 0$.

Le théorème précédant ne présente donc de l'intérêt que dans le cas où $d_n \to 0$. Mais alors il est facile de voir qu'aux conditions (11) et (12) on peut donner une forme analogue à celle du théorème 1., (condition (5)) c'est-à-dire on a :

Théorème 4. *Soit d_n une suite de nombres tels que*

$$d_n \geqslant 0, \qquad d_n \to 0, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \to \infty\,; \tag{12}$$

a_n etant une suite de nombres quelconques, de

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, d_\nu \to s \tag{9}$$

il résulte

$$a_n \to 0 \tag{10}$$

toutes les fois que

$$\lim_{n=\infty} \sup_{n \leqslant n' \leqslant N_\varepsilon(n)} a_{n'} - a_n \leqslant w\,(\varepsilon) \to 0\ avec\ \varepsilon, \tag{13}$$

$N_\varepsilon\,(n)$ étant le plus grand entier pour lequel

$$\sum_{\nu=n}^{N_\varepsilon(n)} d_\nu \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce théorème on peut encore remplacer la condition (13) par la suivante (analogue à (3) ou (6)):
il suffit que

$$a_{n+1} - a_n \leqslant Md_n\,. \tag{14}$$

(Il y est superflu d'ajouter le terme $c\,.\,a_n\,d_n$ puisqu'il $\to 0$). On vérifie facilement que (14) n'est qu'un cas particulier de (13), en y posant $n = n+1$, $n+2$, $n+3, \ldots\ n' \leqslant N\,(n)$, puis en additionant toutes ces inégalités.

Les deux théorèmes precédents peuvent, en quelque sorte, être considérés comme la généralisation de la proposition suivante :

u_n étant le terme général d'une série convergente, de $u_n \geqslant u_{n+1}$, il résulte que

$$nu_n \to 0 \quad avec\ 1/n.$$

Enfin, il est intéressant de comparer les théorèmes précédents à un théorème de M. G. HARDY [1]) concernant le procédé de sommation de M. RIESZ, dont la généralisation sera exposée dans la Note suivante. Pour cette raison nous ne mentionnerons ici qu'un cas particulier, (correspondant au procédé de sommation de CÉSÀRO et quant au théorème 4. au cas où $d_n = \frac{1}{n}$) qui fut généralisé, même pour le procédé de sommation d'ABEL, par M. R. SCHMIDT [2]).

[1]) G. H. HARDY, Proc. of the London Math. Society, (2). 8. p. 301—320. 1910.
[2]) R. SCHMIDT, Mathematische Zeitschrift, Bd. 22. (1925) p. 89—152.

De sorte que l'on obtient, d'après le théorème 4. et les résultats cités la proposition suivante:

De l'une quelconque des trois conditions :

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{1}{\nu} \to s \quad , \quad \textit{lorsque } n \to \infty,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \to 0 \quad , \quad \textit{lorsque } n \to \infty,$$

$$(1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \to 0 \quad , \quad \textit{lorsque } r \to 1,$$

une résulte de la précédente) on tire que

$$a_n \to 0 \qquad \textit{avec } 1/n,$$

$$\limsup_{n \to \infty,\; n < n' < n(1+\varepsilon)} a_{n'} - a_n < w(\varepsilon) \to 0 \qquad \textit{avec } \varepsilon,$$

on de M. R. Schmidt*), ou bien si*

$$a_{n+1} - a_n < M \frac{1}{n} \quad , \quad M \textit{ indépendant de } n,$$

(condition de M. M. G. Hardy *et* E. Landau*).*

Or, du fait que, des relations (15) à (17), la première est la plus r trictive, la dernière la moins restrictive { c. à. d. que (15) entraine la r tion (16), ainsi que (16) la relation (17) } il s'ensuit que la condition ({ et à fortiori la condition (19) } n'est pas assez subtile pour qu'elle pu distinguer ces relations entres elles, quoique la condition (18) représente une condition nécéssaire et suffisante pour que de l'une quelconque de ces t relations il résulte que

$$a_n \to 0 \qquad \text{avec } 1/n.$$

Beograd, 1. Mai, 1930. Manuscrit reçu le 16. Mai, 1930