Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Herausgegeben von **K. Hensel, H. Hasse, L. Schlesinger.**
Druck und Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10.

Sonderabdruck aus Band 164 Heft 1. 1931.

Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen.

Von *J. Karamata* in Belgrad.

In einer unlängst erschienenen Note beweisen die Herren Hardy und Littlewood [1]) folgende zwei Sätze:

Satz 1. *Es sei $f(t)$ in jedem endlichen Intervall $(0, T)$ und $e^{-st}f(t)$ für jedes $s > 0$ im Intervalle $(0, \infty)$ integrabel. Ist*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \sim As^{-\sigma} \quad bei \quad s \to 0 \qquad (A \geqq 0, \quad \sigma > 0)$$

und

$$f(t) \geqq 0 \quad für \quad t > 0,$$

so gilt:

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim \frac{A}{\Gamma(\sigma+1)}\,x^\sigma \quad bei \quad x \to \infty.$$

Satz 2. *Es sei $f(t)$ in jedem endlichen Intervall $(0, T)$ und $e^{-st}f(t)$ für ein s_0 (und damit für alle $s \geqq s_0$) im Intervall $(0, \infty)$ integrabel. Ist*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \sim Bs^{-\sigma} \quad bei \quad s \to \infty \qquad (B \geqq 0, \quad \sigma > 0)$$

und

$$f(t) \geqq 0 \quad für \quad t > 0,$$

so gilt:

$$\int_0^x f(t)\,dt \sim \frac{B}{\Gamma(\sigma+1)}\,x^\sigma \quad bei \quad x \to 0.$$

Die beiden Autoren geben keinen direkten Beweis dieser Sätze, sie zeigen nämlich nur, wie sich die beiden Sätze elementar aus einem dritten Satz ableiten lassen, für den sie einen direkten, aber schwierigen Beweis erbringen. Dieser lautet:

Satz 3. *Es sei $f(t)$ in jedem endlichen Intervall $(0, T)$ und $\frac{f(t)}{(t+x)^\varrho}$, wo $\varrho > 0$, für jedes $x > 0$ im Intervall $(0\ \infty)$, integrabel. Ist*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+x)^\varrho}\,dt \sim Cx^{-\sigma} \quad \begin{matrix} bei\ x \to \infty \\ bzw.\ bei\ x \to 0 \end{matrix} \qquad (C \geqq 0,\ 0 < \sigma < \varrho)$$

[1]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems. Proc. of the Lond. math. soc. (2) **30** (1929), S. 23—37.

und

$$f(t) \geq 0 \quad \textit{für} \quad t > 0,$$

so gilt:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \sim C \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\varrho - \sigma + 1)} x^{\varrho-\sigma} \quad \begin{matrix} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0. \end{matrix}$$

Kurz nachher zeigte Herr G. Doetsch [2]), daß man umgekehrt den Satz 3 aus den Sätzen 1 und 2 ableiten kann, daß es also genügt, einen direkten Beweis für die Sätze 1 und 2 anzugeben.

Einen solchen direkten Beweis des Satzes 1 hat für die Spezialfälle $\sigma = 0$ und $\sigma = 1$ Herr Doetsch [3]), allgemein Herr O. Szász [4]) mit Hilfe der schwierigen Hardy-Littlewoodschen Methoden gegeben. Diese Methode ist auf Satz 2 nicht anwendbar, andererseits ist nach den Bemerkungen der Herren Doetsch und Hardy-Littlewood Satz 2 nicht aus Satz 1 zu folgern.

Vor kurzer Zeit gab ich [5]) hingegen einen direkten und einfachen Beweis des Satzes 1, welcher sich unverändert zum Beweis des Satzes 2 verwenden läßt.

In der vorstehenden Arbeit werde ich erstens diesen Beweis für die Sätze 1 und 2 gleichzeitig durchführen, indem ich zugleich diese Sätze etwas verallgemeinere, zweitens zeige ich auf eine andere Weise, als es Herr Doetsch getan hat, wie sich Satz 3 aus den Sätzen 1 und 2 (in ihren verallgemeinerten Formen) ableiten läßt. Zum Schluß gebe ich noch die Verallgemeinerung des Satzes 1 in dem Sinne, daß anstelle eines positiven $f(x)$ solche Funktionen in Betracht kommen, welche einer von Herrn R. Schmidt eingeführten Bedingung genügen.

Die Sätze 1 und 2 werden unmittelbar aus dem folgenden Hauptsatz abgeleitet

Hauptsatz 1. *Es sei $L(x)$ für $x \geq 0$ stetig, positiv und*

$$\frac{L(ux)}{L(x)} \to 1 \quad \begin{matrix} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0 \end{matrix} \quad \textit{für jedes} \quad u > 0;\,^{6)} \tag{1}$$

sei ferner

$$e^{-st} f(t) > 0 \quad \textit{für} \quad t > 0$$

und für jedes $s > 0$ im Intervall $(0, \infty)$ integrabel [7]). *Aus*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \begin{matrix} \textit{bei } s \to 0 \\ \textit{bzw. bei } s \to \infty \end{matrix} \quad (\sigma > 0) \tag{2}$$

folgt dann:

[2]) G. Doetsch, Sätze von Tauberschem Charakter im Gebiet der Laplace- und Stieltjes-Transformatic Sitzungsberichte der Preuß. Akad. der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, 1930, S. 144—157.

[3]) G. Doetsch, Ein Konvergenzkriterium für Integrale. Math. Ann. 82 (1920), S. 68—82.

[4]) O. Szász, Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art. Sitzungsberichte der Bay Akademie der Wissenschaften 1929, S. 325—340.

[5]) J. Karamata Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze, Math. Zeitschrift.

[6]) Stetige und positive Funktionen $L(x)$, welche der Bedingung

$$L(ux)/L(x) \to 1 \quad \text{bei} \quad x \to \infty \quad \text{für jedes} \quad u > 0$$

genügen, werde ich von nun ab als langsam wachsende Funktionen bezeichnen (gleichgültig ob sie monoton wach oder fallen, oder ob sie zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen oszillieren); die Funktionen von der Fo $x^\sigma L(x)$ nenne ich hingegen regulär wachsende Funktionen. Diese Terminologie habe ich in meiner Arbeit: „Sur [illegible] wo ich diese Funktionen eingehend behandle. Gleichung (1) besagt also, daß $L(x)$ und $L(1/x)$ langsam wachser Funktionen sind. Siehe diesbezüglich auch I. Schur, Zur Theorie der [illegible] und Hölderschen Mittelwe Math. Zeitschrift 31 (1929), S. 391—407.

[7]) Der Einfachheit halber wird die Integrabilität im Riemannschen Sinne verstanden.

$$(3)\quad \int_0^\infty e^{-st} g(st)\, f(t)\, dt \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} g(t)\, d\{t^\sigma\} \qquad \begin{array}{r} \textit{bei } s \to 0 \\ \textit{bzw. bei } s \to \infty \end{array}$$

für jede beschränkte[8]) *und R-integrable Funktion* $g(t)$. *Für* $\sigma = 0$ *ist unter* t^σ *diejenige Funktion zu verstehen, welche für* $t = 0$ *gleich Null ist, sonst gleich Eins, und* $g(t)$ *soll in diesem Falle für* $t = 0$ *stetig sein.*

Beweis. Setzt man in (2) $s(n+1)$ anstatt s, so ist wegen (1):

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{-snt} f(t)\, dt \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s(n+1)}\right) \frac{1}{(n+1)^\sigma} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{(n+1)^\sigma}$$

$$= s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} e^{-nt} d\{t^\sigma\},$$

also

$$\int_0^\infty e^{-st} P(e^{-st})\, f(t)\, dt \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} P(e^{-t})\, d\{t^\sigma\},$$

wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom ist. Da sich weiter jeder im Intervalle $(0, 1)$ beschränkten und R-integrablen Funktion $h(x)$ zwei Polynome $P_1(x)$ und $P_2(x)$ derart zuordnen lassen, daß

$$P_1(x) \leq h(x) \leq P_2(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

und daß

$$\int_0^\infty e^{-t} \{P_2(e^{-t}) - P_1(e^{-t})\}\, d\{t^\sigma\} < \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

ausfällt, so folgt die Gleichung (3), in der $h(e^{-t}) = g(t)$ gesetzt worden ist. — In dieser Ausführung bezieht sich das Zeichen „$\sim$" durchweg auf $s \to 0$, bzw. durchweg auf $s \to \infty$.

Es gilt ein ähnlicher Satz, in dem die Laplacesche Transformierte $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ durch ein Stieltjessches Integral $\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\}$ ausgedrückt wird, nämlich:

Hauptsatz I.[9]). *Es seien* $L(x)$ *und* $L\left(\frac{1}{x}\right)$ *langsam wachsende Funktionen; sei ferner* $A(t)$ *von beschränkter Schwankung, derart daß* $\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\}$ *für jedes* $s > 0$ *exi-*

[8]) Die Funktion $g(t)$ braucht nicht immer als beschränkt vorausgesetzt zu sein; wird sie aber in der Umgebung eines Punktes $0 \leq a \leq \infty$ nicht beschränkt, so muß sie sich doch so verhalten, daß

$$|g(t)| \leq G(t) \text{ in der Umgebung von } a \text{ sei,}$$

wo $G(t)$ monoton ins Unendliche wächst, wenn $t \to a$, und

$$\int_0^\infty e^{-t} G(t)\, d\{t^\sigma\} \text{ einen Sinn hat.}$$

Hiernach folgt z. B. aus (2):

$$\int_0^\infty e^{-st} t^\lambda f(t)\, dt \sim s^{-(\sigma+\lambda)} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{\Gamma(\sigma+\lambda)}{\Gamma(\sigma)}, \quad \lambda \geq 0.$$

[9]) Sein Beweis ist ähnlich dem des Hauptsatzes 1. und findet sich durchgeführt in meiner unter [5]) zitierten Arbeit.

stiert und

$$\int_0^\infty e^{-st}\,|d\{A(t)\}| = O\left\{s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right)\right\} \quad \begin{matrix} \text{bei } s \to 0 \\ \text{bzw. bei } s \to \infty \end{matrix} \qquad (\sigma \geqq 0).$$

Aus

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \begin{matrix} \text{bei } s \to 0 \\ \text{bzw. bei } s \to \infty \end{matrix} \tag{4}$$

folgt:

$$\int_0^\infty e^{-st} g(st)\, d\{A(t)\} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} g(t)\, d\{t^\sigma\} \quad \begin{matrix} \text{bei } s \to 0 \\ \text{bzw. bei } s \to \infty \end{matrix} \tag{5}$$

für jede stetige und beschränkte Funktion $g(t)$. Für $\sigma = 0$ ist unter t^σ diejenige Funktion zu verstehen, welche für $t = 0$ gleich Null ist, sonst gleich Eins [10]).

Nun ist es leicht, durch Spezialisierung der Funktion $g(t)$ in den Hauptsätzen die erwähnten Verallgemeinerungen der Sätze 1 und 2 zu gewinnen; setzt man nämlich im Hauptsatze 1

$$e^{-t} g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 & \text{für} \quad 1 < t < \infty \end{cases}, \tag{6}$$

so ergibt sich, daß aus (2) die Gleichung

$$\int_0^x f(t)\, dt \sim \frac{x^\sigma L(x)}{\Gamma(\sigma+1)} \quad \begin{matrix} \text{bei } x \to 0 \\ \text{bzw. bei } x \to 0 \end{matrix}$$

folgt, was eine Verallgemeinerung der Aussage von Satz 1 und 2 darstellt.

Der Hauptsatz I hingegen gibt den

Satz I—II. *Es seien $L(x)$ und $L(1/x)$ langsam wachsende Funktionen; es sei ferner $A(t)$ nicht abnehmend* [11]), *und $\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\}$ habe einen Sinn für jedes $s > 0$. Aus*

[10]) Im Falle daß $A(t)$ nicht abnimmt, könnte man einen dem Hauptsatze 1 ähnlichen Satz ableiten, nämlich daß aus (4) die Gleichung (5) folgt für jede im Riemann-Stieltjesschen Sinne bezüglich der Funktion $A(t)$ integrable Funktion $g(st)$, nur darf s im allgemeinen Falle nicht alle positiven Werte durchlaufen, damit die Unstetigkeiten der Funktionen $g(st)$ und $A(t)$ nicht zusammenfallen. Ist $A(t)$ stetig, so fällt diese Bedingung weg.

[11]) Es sei schon hier bemerkt, daß in dem Falle, wo $x^\sigma L(x) \to \infty$ bei $x \to \infty$ (der Einfachheit halber betrachte ich hier nur den Fall, wo $x \to \infty$), die Bedingung der Monotonie der Funktion $A(t)$ durch eine geringere ersetzt werden kann. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß Satz I noch gilt, wenn eine Funktion $B(t)$ existiert, so daß $A(t) + B(t)$ nicht abnimmt, d. h.

$$A(t+h) - A(t) > -\{B(t+h) - B(t)\} \text{ für } h > 0,$$

und

$$B(x) \sim b x^\sigma L(x) \text{ bei } x \to \infty,\ b > 0. \tag{I}$$

Diese Bedingung enthält z. B. die folgende:

$$A(x+h) - A(x) = O_L\{(x+h)^\sigma L(x+h) - x^\sigma L(x)\},\ h > 0; \tag{II}$$

oder: Wenn $A(x)$ eine Ableitung besitzt und die Ableitung von $x^\sigma L(x)$ ebenfalls regulär wachsend ist ($\sigma > 0$), so kann die Bedingung (II) durch die folgende ersetzt werden:

$$A'(x) = O_L\{x^{\sigma-1} L(x)\},\ \sigma > 0. \tag{III}$$

Dies ist richtig, weil in diesem Falle

$$\{x^\sigma L(x)\}' \sim \sigma x^{\sigma-1} L(x)$$

(siehe meine unter [8]) zitierte Note S. 51, Abschnitt 7), also wegen (III) $A'(x) = O_L\{[x^\sigma L(x)]'\}$, was durch Integration (II) ergibt.

Andererseits ist leicht einzusehen, daß aus der Bedingung (I)

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqq t \leqq \lambda x} \frac{A(t) - A(x)}{x^\sigma L(x)} > -b(\lambda^\sigma - 1) \to 0 \quad \text{bei} \quad 1 < \lambda \to 1$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \begin{array}{l} \textit{bei } s \to 0 \\ \textit{bzw. bei } s \to \infty \end{array}$$

folgt dann:

$$A(x) \sim \frac{x^\sigma L(x)}{\Gamma(\sigma+1)} \qquad \begin{array}{l} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0\,. \end{array}$$

Dieser Satz kann nach der Bemerkung unter [10]) mit derselben speziellen Funktion (6) gewonnen werden. Eine direkte Zurückführung des Satzes I—II auf den Hauptsatz I ist im Falle $s \to 0$, $x \to \infty$ in meiner unter [5]) zitierten Arbeit bewerkstelligt.

Um nun noch die entsprechende Verallgemeinerung des Satzes 3 nämlich:

Satz III. *Es seien $L(x)$ und $L(1/x)$ langsam wachsende Funktionen, sei ferner $A(t)$ nicht abnehmend und existiere das Integral*

$$\int_0^\infty \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^\varrho} \quad \textit{für jedes } x > 0 \quad (\varrho \geqq 0).$$

Aus

$$\int_0^\infty \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^\varrho} \sim x^{-\sigma} L(x) \qquad \begin{array}{l} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0 \end{array} \qquad (0 \leqq \sigma \leqq \varrho)$$

folgt dann:

$$(7) \qquad A(x) \sim \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\varrho-\sigma+1)}\, x^{\varrho-\sigma} L(x) \qquad \begin{array}{l} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0\,. \end{array}$$

aus Satz I—II abzuleiten, beweise ich zunächst den folgenden

Hauptsatz II. *Es seien $L(x)$ und $L(1/x)$ langsam wachsende Funktnnen; sei ferner $A(t)$ nicht abnehmend und existiere das Integral*

$$\int_0^\infty \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^\varrho} \quad \textit{für jedes } x > 0 \quad (\varrho \geqq 0).$$

Aus

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{d\{A(t)\}}{(t+x)^\varrho} \sim x^{-\sigma} L(x) \qquad \begin{array}{l} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0 \end{array} \qquad (0 \leqq \sigma \leqq \varrho)$$

folgt dann:

$$(9) \quad \int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right) d\{A(t)\} \sim x^{\varrho-\sigma} L(x)\, \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t} g(t)\, t^{\sigma-1}\, dt \qquad \begin{array}{l} \textit{bi } x \to \infty \\ \textit{bzw. bi } x \to 0, \end{array}$$

wo

$$G(y) = \int_0^\infty e^{-y\zeta} e^{-\zeta} g(\zeta)\, \zeta^{\varrho-1}\, d\zeta,$$

---

folgt, so daß die Bedingung

$$\text{(IV)} \qquad \liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x \leqq t \leqq x\lambda} \frac{A(t)-A(x)}{x^\sigma L(x)} > -w(\lambda) \to 0 \quad \text{bei} \quad 1 < \lambda \to 1,$$

eine geringere als die Bedingung (I) ist. Die Bedingung (IV) ist hingegen diejenige, welche im Gebiet der Laplaceschen Transformation derjenigen entspricht, die Herr R. Schmidt in seiner Arbeit „Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschrift 22 (1925), S. 89—159" betrachtet.

Es besteht nun die Frage, ob auch umgekehrt (I) aus (IV) folgt, in welchem Falle der Satz I, wo die Bedingung der Monotonie der Funktion $A(t)$ durch (IV) ersetzt ist, bei $x^\sigma L(x) \to \infty$ schon bewiesen wäre *und $g(t)$ eine beliebige beschränkte und R-integrable Funktion ist.* [*Für $\sigma = 0$ bedeutet die rechte Seite von* (9) $\Gamma(\varrho) x^{\varrho} L(x) g(0)$].

Beweis. Setzt man im Integral (8)

$$\frac{1}{(t+x)^{\varrho}} = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int\limits_0^{\infty} e^{-t\tau} e^{-x\tau} \tau^{\varrho-1}\, d\tau,$$

und ersetzt in derselben Gleichung x durch $x(1+n)$, so folgt:

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-t\tau} e^{-x\tau} P(e^{-x\tau})\, \tau^{\varrho-1}\, d\tau\, d\{A(t)\} \sim \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)} x^{-\sigma} L(x) \int\limits_0^{\infty} e^{-t} P(e^{-t})\, t^{\sigma-1}\, dt$$

woraus sich wie bei dem Hauptsatz I ergibt:

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-t\tau} e^{-x\tau} h(e^{-x\tau})\, \tau^{\varrho-1}\, d\tau\, d\{A(t)\} \sim x^{-\sigma} L(x) \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_0^{\infty} e^{-t} h(e^{-t})\, t^{\sigma-1}\, dt.$$

Diese Gleichung geht durch die Substitutionen

$$h(e^{-t}) = g(t), \quad \tau x = \zeta$$

in (9) über, was Hauptsatz II beweist.

Wird nun im Hauptsatze II $g(t)$ so gewählt, daß

$$e^{-t} g(t)\, t^{\varrho-1} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < t < 1+\varepsilon \\ 0 & \text{für}\ 1+\varepsilon < t < \infty, \end{cases}$$

und $1/x = s$ gesetzt, so geht Gleichung (9) über in

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-st} \frac{1 - e^{-st\varepsilon}}{st\varepsilon}\, d\{A(t)\} \sim s^{-(\varrho-\sigma)} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^{\sigma-\varrho+1} - 1}{(\sigma-\varrho+1)\,\varepsilon},$$

und da in dieser Gleichung der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ gemacht werden kann, so folgt:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-st}\, d\{A(t)\} \sim s^{-(\varrho-\sigma)} L\left(\frac{1}{s}\right) \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)};$$

diese Gleichung führt Satz III auf Satz I—II zurück.

In vorstehender Ausführung bezieht sich das Zeichen „$\sim$" entweder durchweg aul

$$x \to \infty, \quad s \to 0 \quad \text{oder durchweg auf} \quad x \to 0, \quad s \to \infty.$$

Es sei hier noch erwähnt, daß sich Satz III noch dadurch verallgemeinern läßt. daß man auch der im Integrale (8) vorkommenden Funktion $\frac{1}{(x+t)^{\varrho}}$ einen langsan wachsenden Fattor $L_1(x+t)$ zusetzt, in dem Sinne, daß man im erwähnten Integra diese Funktion durch eine allgemeinere ersetzt, nämlich durch

$$w(x+t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-(x+t)\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

wo $\varphi(t) = t^{\varrho-1} l(t)$ eine regulär wachsende Funktion ist. Das zeigt der folgende Satz

Satz IV. *Seien* $L(x), L\left(\frac{1}{x}\right), L_1(x), L_1\left(\frac{1}{x}\right)$ *langsam wachsende Funktionen, und s*

~~Laplacesche Transformierte~~ der regulär wachsenden Funktic eißt:

$$w(x) = \frac{1}{x^{\varrho} L_1(x)} = \int\limits_0^{\infty} e^{-x\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta;$$

sei ferner $A(t)$ nicht abnehmend und existiere das Integral

$$V(x) = \int_0^\infty w(x+t)\, d\{A(t)\} \quad \textit{für jedes} \quad x > 0.$$

Aus

$$(10) \qquad V(x) \sim x^{-\sigma} L(x) \quad \begin{array}{l} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0 \end{array}$$

folgt dann:

$$A(x) \sim \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(\varrho - \sigma + 1)} x^{\varrho-\sigma} L(x)\, L_1(x) \qquad \begin{array}{l} \textit{bei } x \to \infty \\ \textit{bzw. bei } x \to 0. \end{array}$$

Da der Beweis fast derselbe, wie derjenige des Satzes III ist, so sei er hier nur in Kürze dargelegt.

Aus (10) folgt wie beim Beweis des Hauptsatzes II:

$$(11) \qquad \int_0^\infty W_\varrho(x, t)\, d\{A(t)\} \sim x^{-\sigma} L(x) \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t} g(t)\, t^{\sigma-1}\, dt,$$

wo

$$W_\varrho(x, t) = \int_0^\infty e^{-t\zeta} e^{-x\zeta} g(x\zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta.$$

Ist nun

$$e^{-t} g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 < t < 1 + \varepsilon \\ 0 & \text{für} \quad 1 + \varepsilon < t < \infty, \end{cases}$$

so wird

$$W_\varrho(x, t) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1+\varepsilon}{x}} e^{-t\zeta}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta.$$

(11) ergibt also, indem man $\eta = x\zeta$ setzt und durch ε/x dividiert:

$$\int_0^\infty d\{A(t)\} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} e^{-\frac{t}{x}\eta}\, \varphi\left(\frac{\eta}{x}\right) d\eta \sim x^{1-\sigma} L(x) \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \cdot \frac{(1+\varepsilon)^\sigma - 1}{\sigma\varepsilon},$$

woraus, wenn $\varepsilon \to 0$, $x = 1/s$ und $\varphi(x) = x^{\varrho-1} l(x) \sim \dfrac{x^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)\, L_1(1/x)}$ gesetzt wird, folgt:

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \sim s^{-(\varrho-\sigma)} \frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\sigma)} L\left(\frac{1}{s}\right) L_1\left(\frac{1}{s}\right).$$

Hieraus erhält man auf Grund von Satz I—II die Behauptung. — Im vorstehenden Beweis bezieht sich wieder das Zeichen „$\sim$" auf $x \to \infty$, $s \to 0$, bzw. auf $x \to 0$, $s \to \infty$.

Ich gehe noch zu der Verallgemeinerung des Satzes 1 oder I über (ähnliche Schlüsse sind auf die Sätze 2 und 3 anwendbar), welche am Anfang und unter [11]) schon erwähnt war, und in welcher also die Monotonie der Funktion $A(t)$ durch die Bedingung (IV) im Zitat [11]) ersetzt wird; dieser Satz lautet:

Satz A. *Es sei die Funktion $L(x)$ für $x \geq 0$ stetig, positiv und*

$$L(ux)/L(x) \to 1 \quad \textit{bei} \quad x \to \infty \quad \textit{für jedes} \quad u > 0;$$

sei ferner $A(x)$ von beschränkter Schwankung und existiere das Integral

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \quad \textit{für jedes} \quad s > 0.$$

Aus

$$(12)\qquad \int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad bei \quad s \to 0, \quad \sigma \geqq 0,$$

und

$$(13)\qquad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqq t \leqq \lambda x} \frac{A(t) - A(x)}{x^\sigma L(x)} > -w(\lambda) \to 0 \quad bei \quad 1 < \lambda \to 1,$$

folgt:

$$(14)\qquad A(x) \sim x^\sigma L(x) \quad bei \quad x \to \infty.$$

Den Beweis dieses Satzes führe ich auf die zwei folgenden zurück:

Satz B. *Sei $L(x)$ langsam wachsend, sei ferner $A(x)$ von beschränkter Schwankung und existiere das Integral*

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \quad \textit{für jedes} \quad s > 0.$$

Aus

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} \sim s^{-\sigma} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad bei \quad s \to 0, \quad \sigma \geqq 0,$$

und

$$(15)\qquad A(x) = O_L\{x^\sigma L(x)\} \quad bei \quad x \to \infty$$

folgt:

$$(16)\qquad \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\, dt \sim x^\sigma L(x) \quad bei \quad x \to \infty.$$

Satz C. *Sei $L(x)$ langsam wachsend, und $A(t)$ R-integrabel.*
Aus

$$(16)\qquad \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\, dt \sim x^\sigma L(x), \quad bei \quad x \to \infty, \quad \sigma \geqq 0,$$

und

$$(13)\qquad \liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqq t \leqq x\lambda} \frac{A(t) - A(x)}{x^\sigma L(x)} > -w(\lambda) \to 0 \quad bei \quad 1 < \lambda \to 1,$$

folgt:

$$A(x) \sim x^\sigma L(x) \quad bei \quad x \to \infty.$$

Der Satz B folgt aus der Bemerkung unter [11]), Bedingung (III), da

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\{A(t)\} = s\int_0^\infty e^{-st}\, d\left\{\int_0^t A(\tau)\, d\tau\right\},$$

wenn $A(0) = 0$ gesetzt wird, also wegen (12)

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\left\{\int_0^t A(\tau)\, d\tau\right\} \sim s^{-(\sigma+1)} L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{bei} \quad s \to 0,$$

woraus unter der Bedingung (15) die Gleichung (16) folgt.

Der Satz bleibt sogar richtig bei $\sigma > -1$.

Um Satz C zu beweisen, bemerke ich zuerst, daß es genügt, statt (16) die folgende Gleichung:

$$(17)\qquad \int_0^x A(t)\, dt = o\{x^{\sigma+1} L(x)\} \quad bei \quad x \to \infty$$

vorauszusetzen (da man nur statt $A(x)$ die Funktion $A(x) - x^\sigma L(x)$ zu betrachten hätte) und daß aus (17)

$$\int_x^{x\lambda} A(t)\,dt = o\{x^{\sigma+1} L(x)\} \quad \text{bei} \quad x \to \infty, \quad \lambda > 1 \tag{18}$$

folgt.

Nun ist

a) $$\limsup_{x=\infty} \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)} < 0.$$

Denn weil auf Grund von (18)

$$-x(\lambda-1)A(x) = \int_x^{x\lambda}\{A(t)-A(x)\}\,dt + o\{x^{\sigma+1}L(x)\} > x(\lambda-1)\min_{x\leq t\leq x\lambda}\{A(t)-A(x)\} + o\{x^{\sigma+1}L(x)\}$$

ist, so wird nach (13)

$$\limsup_{x=\infty} \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)} < w(\lambda) \to 0 \quad \text{bei} \quad \lambda \to 1,$$

was a) beweist.

b) $$M(x) = \max_{x\leq t\leq x\lambda} \frac{A(t)}{t^\sigma L(t)} \to 0 \quad \text{bei} \quad x \to \infty.$$

Denn findet dies nicht statt, so existiert eine Zahl $-M$, $M > 0$, und eine Folge x_ν-Werte, derart daß

$$M(x_\nu) \to -M \quad \text{bei } x_\nu \to \infty;$$

dann wird aber

$$\frac{1}{x_\nu^{\sigma+1}L(x_\nu)}\int_{x_\nu}^{x_\nu\lambda} A(t)dt \leq \frac{M(x_\nu)}{x_\nu^{\sigma+1}L(x_\nu)}\int_{x_\nu}^{x_\nu\lambda} t^\sigma L(t)\,dt \to \frac{-M}{\sigma+1}(\lambda^{\sigma+1}-1) \quad \text{bei } x \to \infty \text{ [12]},$$

was (18) wiederspricht.

c) $$\liminf_{x=\infty} \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)} \geq 0.$$

Es sei x_μ derart, daß

$$\frac{A(x_\mu)}{x_\mu^\sigma L(x_\mu)} = M(x);$$

dann ist wegen (13) und b)

$$\liminf_{x_\mu=\infty} \frac{A(t)-A(x_\mu)}{x_\mu^\sigma L(x_\mu)} = \liminf_{x_\mu=\infty} \frac{A(t)}{x_\mu^\sigma L(x_\mu)} > -w(\lambda), \quad x_\mu \leqq t \leqq \lambda x_\mu,$$

das heißt

$$\liminf_{x_\mu=\infty} \frac{A(t)}{t^\sigma L(t)} > 0, \quad x_\mu \leq t < x_\mu\lambda,$$

und da t bei $x_\mu \to \infty$ beliebig gegen Unendlich streben kann, so folgt c).

Wegen a) und c) ist der Satz C bewiesen [13]).

[12]) Siehe meine unter [6]) zitierte Note, S. 40.

[13]) Es sei hier noch bemerkt, daß dieser Beweis fast unverändert bleibt, wenn die Bedingung (13) durch die folgende:

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x\leq t\leq\lambda x}\left\{\frac{A(t)}{t^\sigma L(t)} - \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)}\right\} > -w(\lambda) \to 0 \text{ bei } 1 < \lambda \to 1$$

ersetzt wird.

Die Zurückführung des Satzes A auf die Sätze B und C ist im Falle $\sigma > 0$ besonders leicht, da schon aus der Bedingung (13) die Bedingung (15) folgt. Ist nämlich

$$A(x\lambda) - A(x) > - Mx^{\sigma} L(x), \quad \lambda > 1, \quad M > 0, \quad \sigma > 0,$$

so wird

$$A(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{A(x\lambda^{-\nu}) - A(x\lambda^{-\nu-1})\} > - M \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\sigma} \lambda^{-(\nu+1)\sigma} L(x\lambda^{-(\nu+1)\sigma}) =$$
$$= - M x^{\sigma} L(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^{\sigma}}\right)^{\nu+1} \frac{L(x/\lambda^{\nu+1})}{L(x)},$$

das heißt

$$A(x) > \frac{-M}{\lambda^{\sigma} - 1} x^{\sigma} L(x) \{1 + \varepsilon(x)\}, \quad \text{wo} \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{bei} \quad x \to \infty.$$

Dies besagt also, daß (15) aus (13) folgt, so daß im Falle $\sigma > 0$ die aufeinanderfolgende Anwendung der Sätze B und C den Satz A beweist.

Der Fall, wo $\sigma = 0$ ist, bietet größere Schwierigkeiten dar, da

$$A(t) - A(x) > - M\, L(x), \quad \lambda > 1, \quad x \leq t \leq x\lambda,$$

nicht notwendig die einseitige Beschränktheit von $\dfrac{A(x)}{L(x)}$ nach sich zieht. Man könnte sich hingegen des folgenden Hilfssatzes bedienen:

Hilfsatz. *Aus*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\{A(t)\} = O\left\{L\left(\frac{1}{s}\right)\right\} \quad bei \quad s \to 0$$

und

$$A(t) - A(x) > - ML(x), \quad \lambda > 1, \quad x > t \leq x\lambda$$

folgt:

$$A(x) = O_L\{L(x)\} \quad bei \quad x \to \infty \text{ [14]}.$$

Hier gebe ich aber einen andern Beweis, der von folgendem, den Tauberschen o-Sätzen entsprechenden Satz Gebrauch macht:

Satz D. *Es sei $L(x)$ langsam wachsend, sei ferner $B(t)$ von beschränkter Schwankung und existiere das Integral $\int_0^{\infty} e^{-st} d\{B(t)\}$ für jedes $s > 0$.*

Aus

(19) $$\int_0^{\infty} e^{-st} d\{B(t)\} \sim L\left(\frac{1}{s}\right) \quad bei \quad s \to 0$$

und

(20) $$B(x\lambda) - B(x) = o\{L(x)\} \quad bei \quad x \to \infty, \quad \lambda > 1,$$

folgt:

(21) $$B(x) \sim L(x) \quad bei \quad x \to \infty.$$

Beweis. Ist $y = x\lambda^p$, $\lambda > 1$, p *ganz*, und wegen (20)

$$|B(t\lambda) - B(t)| < \varepsilon_1(t) L(t), \quad \text{wo} \quad \varepsilon_1(t) \to 0 \quad \text{bei} \quad t \to \infty,$$

so wird

[14]) Diese Beweisanordnung wäre diejenige, welche Herr T. Vijayaraghavan in „A Tauberian theorem, Journa London Math. Soc. 1 (1926), S. 113—120" für Potenzreihen gegeben hat.

$$|B(y) - B(x)| = \left|\sum_{\nu=1}^{p}\left\{B\left(\frac{y}{\lambda^\nu}\lambda\right) - B\left(\frac{y}{\lambda^\nu}\right)\right\}\right| < \sum_{\nu=1}^{p} \varepsilon_1\left(\frac{y}{\lambda^\nu}\right) L\left(\frac{y}{\lambda^\nu}\right)$$
$$= L(y)\cdot \lg\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{\lg\lambda}\cdot\frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p}\varepsilon_1(y\lambda^{-\nu})\frac{L(y\lambda^{-\nu})}{L(y)},$$

das heißt

$$(22)\qquad |B(y) - B(x)| \leq L(y)\lg\left(\frac{y}{x}\right)\varepsilon(y), \quad \text{wo} \quad \varepsilon(y)\to 0 \quad \text{bei} \quad y\to\infty\ ^{15)}.$$

Daraus folgt, wenn $x = \frac{1}{s}$ und

$$B(x) - \int_0^x e^{-st} d\{B(t)\} = (1 - e^{-1})B(x) - s\int_0^x e^{-st}B(t)dt = s\int_0^x e^{-st}\{B(x) - B(t)\}dt$$

gesetzt wird, daß

$$|B(x) - \int_0^x e^{-st} d\{B(t)\}| \leq \varepsilon(x)L(x)s\int_0^x \lg\left(\frac{x}{t}\right)dt = \varepsilon(x)L(x)\int_0^1 \lg\left(\frac{1}{t}\right)dt,$$

das heißt

$$(23)\qquad B(x) - \int_0^x e^{-st} d\{B(t)\} = o\{L(x)\} \quad \text{bei} \quad x = \frac{1}{s}\to\infty.$$

Weiter wird

$$\left|\int_x^\infty e^{-st} d\{B(t)\}\right| < \sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\int_{x\lambda^\nu}^{x\lambda^{\nu+1}} e^{-st} d\{B(t)\}\right| < \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda^\nu}|B(t_\nu) - B(x\lambda^\nu)| \leq L(x)\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda^\nu}\varepsilon_\nu(x\lambda^\nu),$$
$$\text{wo} \quad x\lambda^\nu \leq t_\nu < x\lambda^{\nu+1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_\nu(x)\to 0 \quad \text{bei} \quad x\to\infty,$$

da, wie schon unter [15]) bemerkt war, die Gleichung (20) gleichmäßig in λ besteht. Es ist also

$$\int_x^\infty e^{-st} d\{B(t)\} = o\{L(x)\} \quad \text{bei} \quad x = 1/s\to\infty,$$

woraus wegen (23)

$$B(x) - \int_0^\infty e^{-st} d\{B(t)\} = o\{L(x)\} \quad \text{bei} \quad x = 1/s\to\infty,$$

welche Gleichung zusammen mit (19) die Gleichung (21) ergibt.

Sei nun

$$(24)\qquad \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \sim L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{bei} \quad s\to 0;$$

daraus folgt, wenn t durch $t\lambda$ ersetzt wird:

$$\int_0^\infty e^{-s\lambda t} d\{A(t\lambda)\} \sim L\left(\frac{1}{s}\right) \sim L\left(\frac{1}{s\lambda}\right) \quad \text{bei} \quad s\to 0,$$

also

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(\lambda t) - A(t)\} = o\left\{L\left(\frac{1}{s}\right)\right\} \quad \text{bei} \quad s\to 0.$$

Da wegen (13) (für $\sigma = 0$)

[15]) Nach der Eigenschaft der langsam wachsenden Funktionen, daß
$$L(\lambda x)\sim L(x) \text{ bei } x\to\infty \text{ für jedes } \lambda > 0$$
gleichmäßig in bezug auf $\lambda > \varepsilon > 0$ besteht, ist auch (20) wegen (22) gleichmäßig in λ.

$$A(\lambda t) - A(t) = o\{L(t)\} \quad \text{bei} \quad t \to \infty,$$

ist, so folgt nach Satz B:

$$B(\lambda x) - B(x) = o\{L(x)\} \quad \text{bei} \quad x \to \infty,$$

wo

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\,dt, \tag{25}$$

gesetzt worden ist.

Weiter folgt aus (24)):

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} = s\int_0^\infty e^{-st} A(t)\,dt = s^2 \int_0^\infty e^{-st}\, t B(t)\,dt \sim L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{bei} \quad s \to 0,$$

woraus folgt:

$$\int_0^\infty e^{-st} B(t)\,dt \sim \int_s^\infty L\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\,; \text{ [16]}$$

beachtet man, daß

$$\int_s^\infty L\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int_0^x L(t)\,dt \sim x L(x) \quad \text{bei} \quad x = 1/s \to \infty \text{ [17]}$$

ist, so wird

$$s\int_0^\infty e^{-st} B(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} d\{B(t)\} \sim L\left(\frac{1}{s}\right) \quad \text{bei} \quad s \to 0.$$

Aus dieser Gleichung und Gleichung (25) folgt endlich nach Satz D, daß

$$B(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)\,dt \sim L(x) \quad \text{bei} \quad x \to \infty,$$

also nach Satz C

$$A(x) \sim L(x) \quad \text{bei} \quad x \to \infty,$$

was Satz A vollständig beweist.

Was die Bedingung (13) des Satzes A betrifft, so war schon unter [18]) bemerkt, daß sie im Satze C durch die folgende:

$$\liminf_{x=\infty}\ \operatorname*{Min}_{x<t\leq x\lambda}\left\{\frac{A(t)}{t^\sigma L(t)} - \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)}\right\} > -w(\lambda) \to 0 \quad \text{bei} \quad 1 < \lambda \to 1 \tag{26}$$

ersetzt werden kann. Dies kann auch im Satz A geschehen, man braucht nur zu bemerken, daß Satz D noch giltig bleibt, wenn die Bedingung (20) durch

$$B(\lambda x) - B(x) \sim (\lambda^\sigma - 1)\, x^\sigma L(x) \quad \text{bei} \quad x \to \infty$$

und $L(x)$ durch $x^\sigma L(x)$ ersetzt wird.

Was die beiden Bedingungen (13) und (26) anbelangt, so kann bemerkt werden, daß (26) nicht mehr (wie es (13) tut) die einseitige Beschränktheit von $\dfrac{A(x)}{x^\sigma L(x)}$ nach ~~sich zieht. Aus (13) aber~~ folgt auch (26) nicht. Hingegen kann man zeigen, daß aus

[16]) Das folgt aus dem von O. Stolz, Grundzüge der Diff. und Integralrechnung, Bd. 1 (1893), S. 72—77, präzisierten de L'Hôpitalschen Satz.

[17]) Siehe in meiner unter [6]) zitierten Note, S. 40, oder 47.

$$(27)\qquad \limsup_{x=\infty} \operatorname*{Max}_{x<t\leq\lambda x} \left|\frac{A(t)-A(x)}{x^\sigma L(x)}\right| < w(\lambda) \to 0 \quad \text{bei} \quad 1 < \lambda \to 1$$

die Ungleichung

$$(28)\qquad \limsup_{x=\infty} \operatorname*{Max}_{x<t\leq\lambda x} \left|\frac{A(t)}{t^\sigma L(t)} - \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)}\right| < 2w(\lambda) \to 0 \quad \text{bei} \quad 1 < \lambda \to 1$$

folgt, da sich aus (27)

$$\limsup_{x=\infty} \left|\frac{A(x)}{x^\sigma L(x)}\right| < \frac{w(\lambda)}{\lambda^\sigma - 1}$$

ergibt, weshalb wegen (27) und

$$\frac{A(t)}{t^\sigma L(t)} - \frac{A(x)}{x^\sigma L(x)} = \frac{A(t)-A(x)}{x^\sigma L(x)} + \frac{A(t)}{t^\sigma L(t)}\left\{1 - \frac{t^\sigma L(t)}{x^\sigma L(x)}\right\}$$

(28) folgt.

Die Beziehung zwischen den Bedingungen (13) und (26) ist aber deutlich aus dem folgenden zu ersehen:

Sei $l_0(x)$ die von Herrn R. Schmidt [18]) eingeführte *langsam oszillierende Funktion* d. h.

$$\limsup_{x=\infty} |l_0(t) - l_0(x)| < w(\lambda) \to 0 \quad \text{bei} \quad 1 < \lambda \to 1, \quad x \leq t \leq x\lambda,$$

sie werde mit $\bar{l}_0(x)$ bezeichnet, wenn sie beschränkt ist; $m(x)$ sei eine beliebige nicht abnehmende Funktion; genügt dann die Funktion $A(x)$ der Bedingung (13), so kann sie in die Form gesetzt werden:

$$A(x) = x^\sigma L(x)\, \bar{l}_0(x) + m(x);$$

wenn dagegen $A(x)$ der Bedingung (26) genügt, so wird

$$A(x) = x^\sigma L(x)\, l_0(x) + x^\sigma L(x)\, m(x),$$

woraus nun ersichtlich ist, daß diejenige Funktion, welche diese beiden enthält, die Form

$$A(x) = x^\sigma L(x)\, l_0(x) + m(x),$$

haben muß, in welchem Falle aber die Giltigkeit des Satzes A noch zu prüfen wäre.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß der Satz A auf Dirichletsche Reihen angewendet, d. h. wenn man setzt:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad 0 \leq x \leq \lambda_1, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n & \textit{für} \quad \lambda_n < x \leq \lambda_{n+1}, \quad (n = 1, 2 \ldots), \end{cases}$$

neu ist. Hingegen ist er für Potenzreihen schon von Herrn R. Schmidt [19]) bewiesen worden, doch sind die Ergebnisse des Herrn Schmidt im Falle $\sigma = 0$ etwas geringer als das, was Satz A liefert, da der von ihm eingeführten *gestrahlten Funktion* $s(x)$ (welche im Falle $\sigma > 0$ mit der regulär wachsenden Funktion identisch ist) eine nicht abnehmende Funktion, *Vergleichsfunktion*, $\sigma(x)$ entspricht, so daß $s(x) \sim \sigma(x)$, eine Bedingung, welche die langsam wachsenden Funktionen im allgemeinen nicht erfüllen; diese dürfen sogar zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen oszillieren.

[18]) Siehe l. c. [11]) S. 127—142.

[19]) Siehe l. c. [11]) S. 151.

Eingegangen 13. August 1930.