О ДОЊОЈ ГРАНИЦИ МОДУЛА НУЛА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

од

ЈОВАНА КАРАМАТЕ

О ДОЊОЈ ГРАНИЦИ МОДУЛА НУЛА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

ОД ЈОВАНА КАРАМАТЕ

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 20. Децембра 1926. год.)

У овој расправи потражићемо доњу границу модула нула једне функције дате Taylor-овим редом. Тим су се проблемом бавили многи аутори а нарочито г. Мих. Петровић, у доле наведеним расправама.[1]

Начин излагања у овој расправи је исти као и начин г. Мих. Петровића, а разликује се само у томе што у место да примењујемо познати Hadamard-ов став о максимуму квадрата модула детерминанте, који игра нарочиту улогу у излагању г. Мих. Петровића, ми изваћамо једну другу горњу границу за модуо детерминанте. На тај начин долазимо до простијих резултата, али који су мање прецизни од резултата г. Мих. Петровића.

Потражимо зато најпре поменуту границу за модуо једне детерминанте облика

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

где је $\{a_\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots}$ један произвољан низ реалних или имагинарних бројева.

---

[1] Мих. Петровић: Прилог теорији бескрајних редова (Глас LXIII). Теорема о максимуму модула детермината (Рад Југослав. Акад. 1913). Bull. de la Societé Math. de France 1902 г.

Развијањем горње детерминанте по првој врсти добијамо

$$\Delta_n = a_1 \Delta_{n-1} - a_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

Означимо ли сад са Δ'_{n-1} ону од горњих двеју детерминаната која има већи модуо, то је

$$|\Delta_n| \leqslant (|a_0| + |a_1|) \cdot |\Delta'_{n-1}|$$

применимо ли сад исто посматрање на детерминанту Δ'_{n-1} која је $(n-1)$-тог реда то добијамо

$$|\Delta'_{n-1}| \leqslant (|a_0| + |a_{r_2}|) \cdot |\Delta''_{n-2}|$$

где је a_{r_2} први елеменат детерминанте Δ'_{n-1} а Δ''_{n-2} онај од минора детерминанте Δ'_{n-1} који одговарају елементима a_0 и a_{r_2}, а који има највећи модуо.

Продужимо исто посматрање на детерминантама Δ''_{n-2}, $\Delta'''_{n-3}, \cdots$ које добијамо на исти начин као што смо добили и детерминанте Δ'_{n-1}, Δ''_{n-2}, тада добијамо низ неједначина, које међусобно измножене дају

$$|\Delta_n| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n-1} (|a_0| + |a_{r_\nu}|) \cdot |a_{r_\nu}|$$

где је a_{r_ν} први елеменат детерминанте $\Delta^{(\nu)}_{n-\nu}$.

Означимо са a_{p_ν} онај од елемената a_μ $\mu = 0, 1, 2, \cdots \nu$, који има највећи модуо, како је

$$r_\nu \leqslant \nu$$

и

$$|a_0| + |a_{r_\nu}| \leqslant |a_0| + |a_{p_\nu}|$$

то добијамо

$$|\Delta_n| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n-1} (|a_0| + |a_{p_\nu}|) \cdot |a_{p_n}|$$

што нам даје тражену горњу границу за модуо посматране детерминанте.

Узмимо уместо низа $\{a_\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots}$ низ $\{a_\nu t^\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots}$ и ставимо

$$|a_\nu| = \alpha_\nu \quad {\scriptstyle \nu=0,1,\ldots} \qquad \mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} \sup \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} = \frac{1}{R}$$

t је једна реална количина која се налази у интервалу $[0, R)$ т. ј.

$$0 \leqslant t < R$$

тада је очигледно

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\nu=\infty} \alpha_\nu t^\nu = 0$$

Пошто елементи низа $\{\alpha_\nu t^\nu\}$ теже ка нули то постоји увек један од елемената који је највећи, означимо га са $\mu(t)$, означимо још са $\nu(t)$ ранг тога елемента т. ј.

$$\mu(t) = \alpha_{\nu(t)} t^{\nu(t)} \geqslant \alpha_\nu t^\nu \quad {\scriptstyle \nu=0,1,2,\ldots}$$

очигледно је да је $\nu(t)$ коначно за све $t < R$.

Потражимо ли сад за модуо детерминанте

$$\Delta_n(t) = \begin{vmatrix} a_1 t & a_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_2 t^2 & a_1 t & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_3 t^3 & a_2 t^2 & a_1 t & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} t^{n-1} & a_{n-2} t^{n-2} & a_{n-3} t^{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 t^2 & a_0 \\ a_n t^n & a_{n-1} t^{n-1} & a_{n-2} t^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 t^2 & a^1 t \end{vmatrix}$$

горе наведену горњу границу, тада ако је

$$n > \nu(t)$$

добијамо

$$|\Delta_n(t)| \leqslant \prod_{\nu=1}^{\nu(t)-1} (\alpha_0 + \alpha_{p_\nu} t^{p_\nu}) \cdot [\alpha_0 + \mu(t)]^{n-\nu(t)} \cdot \mu(t)$$

према томе видимо лако, пошто је $\nu(t)$ коначан и независан од n, да је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \sup \sqrt[n]{|\Delta_n(t)|} \leqslant (\alpha_0 + \mu(t))$$

резултат који ће нам одмах бити потребан.

Нека нам је сад дат Taylor-ов ред

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad |z| \leqslant R.$$

Ставимо у место z, zt са $0 \leqslant t < R$, то је

$$f(zt) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu t^\nu \quad |z| < \frac{R}{t}$$

познато је, да развитак функције $\frac{1}{f(zt)}$ има облик

$$\frac{1}{f(tz)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\Delta_\nu(t)}{a_0^{\nu+1}} z^\nu \quad |z| < R_1$$

где је $\Delta_\nu(t)$ горе означена детерминанта. Пошто је радиус конвергенције R_1 тога реда раван или модулу најмање нуле функције $f(zt)$ $\left(\text{ако има нула у кругу радиуса } \frac{R}{t}\right)$ или модулу најближег сингуларитета функције $f(tz)$, (изузев полова), то према пређашњем ми можемо наћи једну доњу границу за R_1, која је у исто време и доња граница нула функције $f(tz)$, ако их има у кругу радиуса $\frac{R}{t}$.

Наиме према пређашњем је

$$\frac{1}{R_1} = \underset{\nu=\infty}{\mathrm{L}\,sup} \sqrt[\nu]{\left|\frac{\Delta_\nu(t)}{a_0^\nu}\right|} \leqslant \frac{\alpha_0+\mu(t)}{\alpha_0}$$

т. ј.

$$R_1 \geqslant \frac{\alpha_0}{\alpha_0+\mu(t)} \quad 0 \leqslant t < R$$

како је међутим

$$R_1 = \frac{\rho}{t}$$

где је ρ радиус конвергенције реда

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\Delta_\nu}{a_0^{\nu+1}} z^\nu$$

то је дакле

$$\rho \geqslant \frac{\alpha_0 t}{\alpha_0+\mu(t)} \quad \text{за } 0 \leqslant t < R$$

који нам израз даје тражену доњу границу за модуо нула функције $f(z)$, што можемо изрећи у облику следећег става:

Став 1. *Нека је једна, у тачци $z=0$ холоморфна функција $f(z)$, дата редом*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad |z| < R$$

тада она нема ниједну нулу у кругу описаном око почетка а са радиусом дужине

$$\tau(t) = \frac{\alpha_0 t}{\alpha_0+\mu(t)} \quad 0 \leqslant t \leqslant R$$

где је

$$|a_\nu| = \alpha_\nu \quad \nu=0,1,2,\dots$$

а $\mu(t)$ највећи од елемената низа $\{\alpha_\nu t^\nu\}_{\nu=0,1,2,\dots}$

Из овога става видимо дакле да ако означимо са λ корен најмањег модула функције $f(z)$, постоји неједначина

$$\frac{t}{\lambda} \leqslant \frac{\alpha_0+\mu(t)}{\alpha_0} \quad 0 \leqslant t < R$$

која нам представља једну интересантну везу између коефицијента највећег модула функције

$$f(zt) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu t^\nu z^\nu$$

и корена најмањег модула исте функције.

Да би међутим горе нађена граница била што прецизнија треба у интервалу $[0, R]$, t изабрати тако да функција

$$\frac{\alpha_0+\mu(t)}{\alpha_0 t}$$

добије своју минималну вредност; чије је одређивање у општем случају доста тешко.

Међутим из горњег посматрања можемо добити неке интересантне резултате, као н. пр. следећи:

Ако модули коефицијената a_ν монотоно опадају, т. ј. ако је

расту!

$$\alpha_{\nu+1} \geqslant \alpha_\nu \quad \nu=0,1,2,\dots$$

тада функција

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

нема ниједну нулу у кругу описаном око почетка са радиусом $\frac{1}{2}$; $\left(\text{или тачније са радиусом } \frac{\alpha_0+\alpha_1}{\alpha_0}\right)$.

Напоменимо овде још већ познати став: корени λ, једног полинома n-тог степена

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$$

задовољавају неједначину

$$\frac{\alpha_0 + M}{\alpha_0} \leqslant |\lambda_\nu| \leqslant \frac{\alpha^n + M}{\alpha_n}$$

где је M највећи од елемената; то је један специјалан случај става 1., јер према њему добијамо

$$\frac{\alpha_0 t}{\alpha_0 + \mu(t)} \leqslant |\lambda_\nu| \leqslant \frac{\alpha_n + \mu(t)}{\alpha_n t} \quad 0 \leqslant t$$

која се неједначина за $t = 1$ претвара у горњу неједначину.

Упоредимо напослетку горе добивене резултате из става 1. са резултатом г. Мих. Петровића, чија је доња граница нула дата изразом

$$\Gamma(t) = \frac{\sqrt{\theta(t^2)}}{\alpha_0 t} \quad 0 \leqslant t \leqslant R$$

где је

$$\theta(t^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu t^\nu)^2$$

Ако означимо са t_1 и t_2 оне вредности од t за које функције $\frac{\theta(t^2)}{t^2}$ и $\frac{\alpha_0 + \mu(t)}{t}$ добијају своју минималну вредност, тада је $\gamma(t_2)$ најтачнија граница коју нам даје став 1., а $\Gamma(t_1)$ став г. Мих. Петровића; на неким специјалним случајевима може се видети да је

$$\Gamma(t_1) \geqslant \gamma(t_2)$$

т. ј. граница $\Gamma(t_1)$ је прецизнија од границе $\gamma(t_2)$, но то би требало још доказати и за општи случај.

У специјалном случају кад је

$$f(z) = \alpha + \frac{z}{1-z} = \alpha + z + z^2 + \cdots$$

добија се

$$\Gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \sqrt{\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}} \\ t_2 = 1 \end{array} \right\}$$

тако да се за $\alpha = -1$ нађене горње границе поклапају са самим модулом корена посматране функције, исти је случај и за функцију

$$f(z) = a_0 + a_1 z$$

где је

$$\Gamma(\infty) = \gamma(\infty) = \frac{|a_0|}{a_1}$$

Из овога видимо да нам став 1. даје један простији израз за доњу границу модула нула функције $f(z)$ него што је израз г. Мих. Петровића, али је он у исто време мање прецизан.

Ми можемо међутим наћи прецизније изразе него што је израз г. Мих. Петровића, али који су у исто време и компликованији; овде ћемо укратко потражити вредност таквог једног израза.

Уочимо зато најпре детерминанту $\Delta_n(t)$ на страни 105. и уместо да директно на њу применимо Madamard-ову неједначину, ми ћемо најпре трансформисати елементе те детерминанте на следећи начин:

Нека је $\{b_\nu\}_{\nu=0,1,2,\ldots}$ и $b_0 \neq 0$ један произвољан низ бројева или у опште функција од t, т. ј.

$$b_\nu = b_\nu(t) \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

чија граница

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sup \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \frac{1}{R'}$$

остаје коначна т. ј. $R' \neq 0$.

Помножимо елементе прве колоне детерминанте $\Delta_n(t)$ са b_0, елементе друге колоне са $b_1 t$, елементе треће колоне са $b_2 t^2$ и у опште елементе $(\nu+1)$-ве колоне са $b_\nu t^\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots n-1$ и додајмо све тако добивене колоне ново добивеној првој колони; помножимо даље елементе друге колоне са b_0, елементе треће са $b_1 t$ и у опште елементе $(\nu+2)$ те колоне са $b_\nu t^\nu$ $\nu = 1, 2, 3, \cdots n-2$, и додајмо све тако добивене колоне ново добивеној другој колони, продужимо сад на тај начин даље т. ј. додајмо елементима μ-те колоне помножене са b_0, елементе $(\mu+\nu)$-те колоне помножене са $b_\nu t^\nu$ $\nu = 1, 2, \cdots (n-\mu)$; тада добијамо за $\Delta_n(t)$ израз

$$\Delta_n(t) = \frac{1}{b_0^n} \begin{vmatrix} (ab)_1 t, & (ab)_0, & 0, & \cdots, 0 \\ (ab)_2 t^2, & (ab)_1 t, & (ab)_0, & \cdots, 0 \\ (ab)_3 t^3, & (ab)_2 t^2, & (ab)_1 t, & \cdots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (ab)_{n-1} t^{n-1}, & (ab)_{n-2} t^{n-2}, & (ab)_{n-3} t^{n-3}, & \cdots, (ab)_0 \\ (ab)_n t^n - b_n t^n, & (ab)_{n-1} t^{n-1} - b_{n-1} t^{n-1}, & (ab)_{n-2} t^{n-2} - b_{n-2} t^{n-2}, & \cdots, (ab)_1 t - b_1 \end{vmatrix}$$

задовољ

где је Ј
става 1.

која се
Уп
са резу
дата из

где је

А
$\frac{\theta(t^2)}{t^2}$ и $\frac{\alpha}{}$
најтачн
Петров

т. ј. гра
бало јо
У

добија

тако да
модуло
функци

где је

$$(ab)_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu-\nu} b_\nu \qquad \mu = 0, 1, 2, \cdots$$

Применом Hadamard-ове теореме на овако трансформирану детерминанту, лако увиђамо следећи резултат:

Нека је

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \qquad |z| < R'$$

и нека су P_1 и P_2 модули најближих сингуларитета функција

$$f_1(z)\cdot f(z) \quad \text{и} \quad f_1(z)(f(z)-1),$$

означимо са $m(P_1, P_2)$ најмањи од бројева P_1 и P_2, добијамо да је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} sup \left|\sqrt[n]{\Delta_n(t)}\right| \leqslant \frac{1}{|a_0\cdot b_0|^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} |(ab)_\nu|^2 \cdot t^{2\nu}$$

за

$$0 \leqslant t \leqslant m(P_1, P_2)$$

и то ма каква била, у тачци $z = 0$ холоморфна функција $f_1(z)$.

С обзиром на раније речено, добијамо дакле за доњу границу модула најближег сингуларитета функције $^1/f(z)$, израз:

$$\rho \geqslant \frac{|a_0 b_0|\cdot t}{\sqrt{\Pi(t)}} \qquad 0 \leqslant t \leqslant m(P_1, P_2)$$

где је

$$\Pi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |(ab)_\nu|^2 t^{2\nu} \qquad t < P_1$$

Међутим, према познатој теореми да је интеграл квадрата модула по кругу $|z| = 1$, једне у и на томе кругу аналитичне функције, помножен са $^1/_2\pi$, раван збиру квадрата модула њених Taylor-ових коефицијената, видимо да је

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(te^{\theta i})|^2\cdot|f(te^{\theta i})|^2 d\theta$$

те према томе добијамо следећи интересантан став:

Став 2.: *Нека је дата јана у тачци $z = 0$ холоморфна функција*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad |z| < R$$

и нека је

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu \qquad |z| < R'$$

тада функција $f(z)$ нема ниједну нулу у кругу описаном око почетка, а са радиусом дужине

$$\frac{|a_0 b_0|\cdot t}{\sqrt{\Pi(t)}} \qquad 0 \leqslant t \leqslant m(P_1, P_2)$$

где су:

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_1(te^{\theta i})|^2\cdot|f(te^{\theta i})|^2 d\theta,$$

P_1 и P_2 радиуси конвергенције редова

$$f(z)f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (ab)_\nu z^\nu \qquad |z| < P_1$$

$$f_1(z)(f(z)-1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} [(ab)_\nu - b_\nu] z^\nu \qquad |z| < P_2;$$

и што за ма какву, у тачци $z = 0$ холоморфну функцију $f_1(z)$.

Очигледно је да у овоме ставу можемо међусобно пермутирати функције $f(z)$ и $f_1(z)$ ако при томе сменимо вредност P_2 са P_2' која нам представља модуо најблжег сингуларитета функције $f(z)(f_1(z)-1)$.

Напоменимо овде још да кад би применили став г. Мих. Петровића на функцију $f(z)\cdot f_1(z)$ добили би да она нема ниједну нулу у кругу са центром у почетку и радиусом дужине

$$\frac{|a_0\cdot b_0|\, t}{\sqrt{\Pi(t)}} \qquad \text{где је } 0 \leqslant t \leqslant P_1$$

али одавде ми неможемо закључити да функције $f(z)$ или $f_1(t)_1$ немају ниједну нулу у поменутоме кругу, а да би то било испуњено видимо према ставу 2. да t несме више варирати у интераалу $[0, P_1)$ већ само у интервалу $[0, m(P_1, P_2)]$ или $[0, m(P_1, P_2')]$.

Пошто је у ставу 2. функција $f_1(z)$ произвољна то видимо да је можемо увек тако изабрати да добивена доња граница за модуо нула функције $f(z)$ буде прецизнија од границе г. Мих. Петровића; то ће већ и онда бити случај ако за функцију $f_1(z)$ узмемо један полином n-тог степена, и његове коефициенте изаберемо тако да интеграл $\Pi(t)$ узме своју минималну вредност.

Ставимо дакле

$$f_1(z) = P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu z^\nu \qquad \text{са } b_0 = 1$$

и претпоставимо: да је радиус конвергенције реда $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ раван 1, т. ј. $R = 1$, и да је

$$f(0) = a_0 = 1;$$

тада је доња граница модула нула функције $f(z)$ дата изразом

$$\frac{t}{\sqrt{\Pi(t)}} \qquad \text{где је } 0 \leqslant t \leqslant P_1$$

и

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_n(te^{\theta i})|^2 \cdot |f(te^{\theta i})|^2 d\theta$$

Да би сад изабрали коефициенте b_ν полинома $P_n(z)$ тако да горњи интеграл узме своју минималну вредност, сматрајмо $\Pi(t)$ као функцију од b_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$. Ако тада ставимо да су парцијални изводи од $\Pi(t)$ по b_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ равни нули, добићемо n једначина које нам дају тражене вредности за b_ν. Напоменимо још да уместо b_ν можемо узети као непознате $b_\nu t^\nu = z_\nu = x_\nu + i y_\nu$, па је дакле

$$P_n(te^{\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu e^{\nu\theta i} = p_n(\theta) \qquad \text{са } z_0 = 1.$$

како је међутим

$$\frac{\partial |p_n(\theta)|^2}{\partial x_\mu} + i\frac{\partial |p_n(\theta)|^2}{\partial y_\mu} = 2e^{-\mu\theta i} p_n(\theta)$$

то је

$$\frac{\partial \Pi(t)}{\partial y_\mu} + i\frac{\partial \Pi(t)}{\partial y_\mu} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu e^{(\nu-\mu)\theta i} |f(te^{\theta i})|^2 d\theta.$$

Ставимо сад

$$c_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(te^{\theta i})|^2 e^{\nu\theta i} dt \qquad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (A_1)$$

тако да ако је

$$|f(te^{\theta i})|^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta$$

тада је

$$c_0 = a_0, \quad c_\nu = a_\nu + i b_\nu \quad \text{и} \quad c_{-\nu} = \bar{c}_\nu = a_\nu - i b_\nu \qquad (A_2)$$

Пошто мора бити

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_\mu} + i\frac{\partial \Pi}{\partial y_\mu} = 0 \qquad \mu = 1, 2, \cdots n$$

то добијамо следећи систем од n линеарних једначина

$$\begin{array}{l}
c_0 z_1 + c_1 z_2 + \cdots + c_{n-1} z_n = -c_{-1} \\
c_{-1} z_1 + c_0 z_2 + \cdots + c_{n-2} z_n = -c_{-2} \\
c_{-2} z_1 + c_{-1} z_2 + \cdots + c_{n-3} z_n = -c_{-3} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{-(n-1)} z_1 + c_{-(n-2)} z_2 + \cdots + c_0 z_n = -c_{-n}
\end{array}$$

које одређују непознате z_μ, па је према томе:

$$z_\mu = -\frac{\Delta_n^{(\mu)}}{\Delta_n}$$

где је

$$\Delta_n = \begin{vmatrix}
c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\
\bar{c}_1 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\
\bar{c}_2 & \bar{c}_1 & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \bar{c}_{n-3} & \cdots & c_0
\end{vmatrix} \qquad (B.)$$

и

$$\Delta_n^{(\mu)} = \begin{vmatrix}
c_0 & c_1 & \cdots & c_{\mu-2} & \bar{c}_1 & c_\mu & \cdots & c_{n-1} \\
\bar{c}_1 & c_0 & \cdots & c_{\mu-3} & \bar{c}_2 & c_{\mu-1} & \cdots & c_{n-2} \\
\bar{c}_2 & \bar{c}_1 & \cdots & c_{\mu-4} & \bar{c}_3 & c_{\mu-2} & \cdots & c_{n-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \cdots & \bar{c}_{n-\mu+1} & \bar{c}_n & c_{n-\mu-1} & \cdots & c_0
\end{vmatrix}$$

На исти начин видимо да вредност траженог полинома можемо написати у облику

$$P_n(z) = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} z^0 & z^1 & z^2 & z^3 & \cdots & z^n \\ \bar{c}_1 & c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_{n-1} \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & c_0 & \cdots & \cdots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \cdots & \cdots & c_0 \end{vmatrix} \qquad (C.)$$

Што се тиче минимума самог интеграла $\Pi(t)$, можемо га изразити на следећи начин:

Означимо са $(-1)^\nu \frac{\Delta_{\nu,n}}{\Delta_n}$ коефицијенат од z^ν, полинома $P_n(z)$ т. ј. $\Delta_{\nu,n}$ је минор горње детерминанте који одговара елементу z^ν, и нека је $\bar{\Delta}_{\nu,n}$ њена коњугована вредност, тада је

$$|p_n(\theta)|^2 = p_n(\theta)\cdot\bar{p}_n(\theta) = = \frac{1}{|\Delta_n|^2}\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\Delta_{\nu,n}e^{\nu\theta i}\right\}\cdot\left\{\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\bar{\Delta}_{\mu,n}e^{-\mu\theta i}\right\}$$

т. ј.

$$|p_n(\theta)|^2 = \frac{1}{|\Delta_n|^2}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\bar{\Delta}_{\mu,n}\cdot\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\Delta_{\nu,n}e^{(\nu-\mu)\theta i}$$

па дакле минимум од $\Pi(t)$ има за вредност

$$Min\{\Pi(t)\} = \frac{1}{|\Delta_n|^2}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\bar{\Delta}_{\mu,n}\cdot\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\nu\Delta_{\nu,n}c_{\nu-\mu} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta_n|^2}\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\bar{\Delta}_{\mu,n}\begin{vmatrix} c_{-\mu} & c_{-\mu+1} & c_{-\mu+2} & \cdots & c_{-\mu+n} \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{-\mu} & c_{-\mu+1} & c_{-\mu+2} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}$$

а како су горње детерминанте све једнаке нули, осим кад је $\mu = 0$, у којем је случају она равна детерминанти Δ_{n+1} то добијамо

$$Min\{\Pi(t)\} = \frac{\bar{\Delta}_{0,n}\cdot\Delta_{n+1}}{|\Delta_n|^2}$$

пошто је даље $\bar{\Delta}_{0,n} = \bar{\Delta}_n = \Delta_n$, јер је Δ_n реалан број, то добијамо коначно за $\Pi(t)$ израз

$$\Pi(t) = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}.$$

На тај начин дакле добијамо следећи резултат:

Став 3. *Интеграл*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(te^{\theta i})^2 |f(te^{\theta i})|^2 d\theta$$

добија своју минималну вредност ако за полином $P_n(z)$ *узмемо израз* $(C.)$ *и тада је тај минимум раван количнику*

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$$

где је Δ_n *детерминанта* (B). Овај се резултат већ налази код G. Szegö[1] где је на други начин изведен.

Према том резултату видимо дакле да већ у случају кад је полином $P_n(z)$ првог степена, минимум горњег интеграла даје једну доњу границу за модуо нула функције $f(z)$, која је прецизнија од границе г. Мих. Петровића; то можемо увидети и директно јер је у томе случају

$$\Pi(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{c_0^2 - c_1\bar{c}_1}{c_0} = \frac{c_0^2 - |c_1|^2}{c_0}$$

или пошто је

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 d\theta \qquad c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 e^{\theta i} d\theta$$

то видимо, ако означимо са λ корен најмањег модула функције $f(z)$, да је

$$\frac{t^2}{|\lambda|^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 d\theta \leqq$$

$$\leqq \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 d\theta\right)^2 - \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 \cos\theta\, d\theta\right)^2 - \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 \sin\theta\, d\theta\right)^2$$

која је неједначина очигледно прецизнија, премда компликованија, од неједначине

[1] Beiträge zur Theorie der Toeplitzchen Formen. Math. Zeitschrift. Bd. 6 u. 9.

$$\frac{t^2}{|\lambda_1|^2} < \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(te^{\theta i})|^2 d\theta$$

коју нам даје став г. Мих. Петровића.

Посматрајмо још случај кад степен полинома $P_n(z)$ бескрајно расте; границе којима теже горе посматрани изрази налазе се већ у горе цитираном раду од г. G. Szegö-a, и ми ћемо овде навести већ готове резултате:

Имамо најпре за граничну вредност минимума $Min\{(\Pi(t)\}$

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} lg|f(te^{\theta i})|\, d\theta} \qquad 0 < t < 1$$

а за границу полинома $P_n(z)$ следи:

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} P_n(z) = e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} lg|f(te^{\theta i})|\, d\theta} \cdot \frac{1}{f(tz)} \prod_{1}^{p} \frac{tz\lambda_\nu - |\lambda_\nu|^2}{tz\bar{\lambda}_\nu - t^2} \qquad \text{за} \qquad |z| < 1,\ t < 1$$

а где су $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \cdots p)$ корени функције $f(z)$ који се налазе у кругу $|z| = t$.

Према томе видимо да функција $f(z)$ нема ниједну нулу у кругу

$$|z| = \frac{1}{t} e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(te^{\theta i})|\, d\theta} \qquad 0 < t < 1$$

т. ј. ако је λ_1 корен најмањег модеила функције $f(z)$ тада је

$$\frac{t}{|\lambda_1|} < e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(te^{\theta i})|\, d\theta} \qquad 0 < t < 1.$$

и лако увиђамо да постоји увек једно тако t да се горња неједначина претвара у једначину, т. ј. да је максимум функције

$$\frac{1}{t} e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(te^{\theta i})|\, d\theta}$$

раван најмањем модулу корена функције $f(z)$.

Међутим ови резултати следе директно и из Jensen-ове формуле, наиме из

$$\frac{t^p}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(te^{\theta i})|\, d\theta} \qquad f(0) = 1$$

где су λ_ν корени функције $f(z)$ који се налазе у кругу $|z| = t$, т. ј.

$$\left|\frac{t}{\lambda_\nu}\right| > 1$$

па је дакле

$$\frac{t}{|\lambda_1|} < \frac{t^p}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|}$$

одакле следи горња неједначина.

Напоменимо овде још да, пошто низ $\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ монотоно опада, то имамо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(te^{\theta i})|^2 d\theta = c_0 > \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} > e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} log|f(te^{\theta i})|\, d\theta} = \frac{t^{2p}}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|^2}$$

а одавде добијамо да је, не само

$$\left|\frac{t}{\lambda_1}\right|^2 < \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$$

већ је и

$$\frac{t^{2p}}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|^2} \leq \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

што нам уопштава познату Landau-ову неједначину

$$\frac{t^{2p}}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|^2} < \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(te^{\theta i})|^2 d\theta = c_0 = \Delta_1$$

која се добија из наше неједначине, стављајући $n = 0$, јер је

$$\Delta_0 = 1 \quad \text{и} \quad \Delta_1 = c_0.$$

SUR UNE LIMITE INFÉRIEURE AU MODULE DES ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR J. KARAMATA

Résumé.

Dans cette note l'auteur démotre le théoréme suivent:

Soit donnée une fonction $f(z)$ holomorphe au point $z=0$ et soit

$$f(z)=\sum_{0=\nu}^{\infty} a_\nu z^\nu \qquad |z|<R$$

la fonction n'a point de zéro dans le cerle ayant l'origine pour centre et de rayon égal à

$$\tau(t)=\frac{\alpha_0 t}{\alpha_0+\mu(t)} \qquad 0\leqslant t\leqslant R$$

où l'on a

$$|a_\nu|=\alpha_\nu \qquad \nu=0,1,2,\ldots$$

et $\mu(t)$ est le plus grand des termes de la suite

$$\{\alpha_\nu t^\nu\} \qquad \nu=0,1,2,\ldots$$

La limite est effectivement atteinte dans les deux cas suivants:

$$f(z)=a_0+a_1 z$$
$$f(z)=-1+z+z^2+z^3+\cdots$$

Ensuite l'auteur montre que l'on peut abtenir des limite plus precise mais moins simple, en utilisant le théoréme suivent:

Soit

$$f(z)=1+a_1 z+a_2 z^2+\cdots \qquad |z|<1$$

une fonction holomorphe dans le cercle $|z|=1$ et

$$f_1(z)=1+b_1 z+b_2 z^2+\cdots \qquad |z|<R'$$

une fonction quelcouque holomorphe au point $z=0$.

Alors la fonction $f(z)$ n'a point de zéros dans le cercle de centre o et de rayon

$$\frac{t}{\sqrt{\Pi(t)}} \qquad \text{pour} \qquad 0\leqslant t<m(P_1,P_2)$$

ou

$$\Pi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_1(te^{\theta i})|^2\cdot|f(te^{\theta i})|^2 d\theta$$

P_1 et P_2 étant les modules des singularités les plus près de l'origine des fonctions

$$f_1(z)\cdot f(z) \quad \text{et} \quad f_1(z)(f(z)-1)$$

et $m(P_1,P_2)$ étant la plus petite des quantitées P_1 et P_2.

Ce thèorème est valable *quelleque soit la fonction $f_1(z)$ holomorphe à l'origine.*

En prenant pour $f_1(z)$ un polynom $P_n(z)$ de degré n, et en déterminant les coeficients de ce polynom de telle sorte que $\Pi(t)$ prent la plus petite valeur on obtient le résultat suivent:

Soit

$$c_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}|f(te^{\theta i})|^2 e^{\nu i}d\theta, \quad c_{-\nu}=\bar{c}_\nu$$

en posant

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ \bar{c}_1 & c_0 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-2} \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & c_0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \bar{c}_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 \end{vmatrix}$$

on a

$$Min\{\Pi(t)\}=\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$$

et ce minimum est atteint pour le polynome

$$P_n(z)=\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} z^0 & z^1 & z^2 & \cdot & \cdot & \cdot & z^n \\ \bar{c}_1 & c_0 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_1 & c_0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 \end{vmatrix}$$

De la on en tire que *la fonction $f(z)$ n'a point de zéro dans le cercle*

$$|z|^2 = t^2 \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \qquad 0 < t < 1.$$

Ou utilisant certaine resultats de G. Szegö, c. à. d.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(te^{\theta i})|\, d\theta}$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(te^{\theta i})|^2 d\theta = c_0 > \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} > e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(te^{\theta i})|\, d\theta} =$$

$$= \frac{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|^2}{t^{2p}}$$

aù λ_ν $\nu = 1, 2, \cdots n$ désigne les racine de $f(z)$, situées dans le cercle $|z| = t$ (la dernière équation nous exprime le theorème de Jensen), l'auteur obtient une généralisation du théorème de de Landau exprimé par l'inegalitée

$$\frac{t^{2p}}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|^2} < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(te^{\theta i})|^2 d\theta$$

Cette généralisation consiste en l'inégalité

$$\frac{t^{2p}}{|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_p|^2} < \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \qquad n = 0, 1, 2 \cdots$$

Se reduisant au theorème de Landau pour $n = 0$, car

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = c_0.$$