О ЕКВИВАЛЕНТНИМ НИЗОВИМА

НАПИСАО
Д^р ЈОВАН КАРАМАТА

Прештампано из 234. књиге „Рада“ Југославенске академије знаности и умјетности

ЗАГРЕБ
НАДБИСКУПСКА ТИСКАРА У ЗАГРЕБУ
1928

О еквивалентним низовима.

Написао

Др. Јован Карамата.

Примљено у сједници математичко-природословнога разреда Југославенске академије знаности и умјетности 3. јула 1927.

Предмет ове расправе је у непосредној вези са нашим ранијим радовима[1], те ћемо зато ознаке и називе употребљене у тим радовима употребити и овде, без даљег тумачења.

Овде ћемо само, ради прегледности и лакоће разумевања, навести дефиницију функције распореда једног датог низа бројева, која се састоји у следећем:

Нека је дат један двоструки низ бројева $\{a_{\nu,n}\}_{n=\ldots\ldots\ldots}^{\nu=1,2,\ldots n}$ који се сви налазе у интервалу (a,b), означимо са $r_n(x)$, $a \leq x \leq b$, број елемената низа $a_{\nu,n}$, $\nu = 1,2,\ldots n$, који нису већи од x, ако низ функција

$$\nu_n(x) = \frac{r_n(x)}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

тежи једној одређеној граници, кад $n \to \infty$, за све вредности x интервала (a,b), изузев тачке једне пребројиве множине E, тада функцију

$$\nu(x) = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \nu_n(x), \quad x \subset K(E),$$

[1] a) О једној врсти граница сличних одређеним интегралима. (Теза Београд 1926. г.)
b) Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes. (C. R. t. 182. p. 833. 1926. г.)
c) Relation entre les fonctions de répartitions de deux suites dépendant l'une de l'autre. (C. R. t. 183. p. 726. 1926 г.)

називамо фукцијом распореда датог низа $\{a_{\nu,n}\}$. За сам низ $\{a_{\nu,n}\}$ казаћемо у томе случају да припада класи ν до на једне пребројиве множине E, или краће да припада класи ν.

У првоме делу ове расправе испитиваћемо особине низова који имају исту функцију распореда, и које ћемо назвати еквивалентним низовима; у другоме делу навешћемо неке примене тога посматрања и донекле ћемо прецизирати став доказан у горе цитираноме раду 1. b).

I.

Пре него што пређемо на испитивање низова који имају исту функцију распореда, посматрајмо најпре следећу специјалну класу низова:

Дефиниција: један двоструки низ бројева $\{0_{\nu,n}\}$, који се налазе у интервалу (a, b), $a \leq 0 \leq b$, назваћемо низом o, ако има за функцију распореда функцију:

$$0(x) = \begin{cases} 0 \text{ за } a \leq x < 0 \\ 1 \;\; „ \;\; 0 < x \leq b \end{cases}$$

и $0 \leq 0(o) \leq 1$.

Такви низови имају неке интересантне специјалне особине, које ћемо укратко изложити у следећем ставу:

Став I. Нека је дат један низ коначних бројева $\{a_{\nu,n}\}$, који се налазе у интервалу (a, b), $a \leq 0 \leq b$; да би он био један низ o, потребно је и довољно да један од следећа четир услова буде испуњен:

1°. да буде

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}^{\nu} (a_{\nu,n})^p = 0$$

за све $p = 1, 2, 3, \ldots$

2°. да буде

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{N(x)}{n} = 0$$

за све $x > 0$, а где је $N(x)$ раван броју елемената низа $a_{\nu,n}$, $1, 2, \ldots n$, чије апсолутне вредности нису мање од x.

3°. да буде

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}^{\nu} |a_{\nu,n}| = 0$$

4°. да буде

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}^{\nu} (a_{\nu,n})^2 = 0.$$

Докажимо један за другим горе наведена четир услова.

1°. Да је услов под 1° потребан следи из познатог става[1], по коме је

$$M_p = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}^{\nu} (a_{\nu,n})^p = \int_a^b \zeta^p \, d\,[0(\zeta)] = 0, \quad \text{за све } p = 1, 2, \ldots$$

Обратно ако је

$$M_p = 0 \quad \text{за све } p = 1, 2, 3, \ldots$$

то из егзистенције граница M_p следи и егзистенција функције распореда дотичнога низа[2], и њени су моменти сви равни нули. Према томе ако означимо са $\alpha(x)$ поменуту функцију распореда, имамо

$$\int_a^b \zeta^p \, d\left[\alpha(\zeta)\right] = 0 \quad \text{за} \quad p = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Но како функције $\alpha(x)$ и $0(x)$ имају исте моменте, и пошто обе не опадају, то се оне могу разликовати само у њиховим тачкама дисконтинуитета, па је према томе функција $\alpha(x)$ једна функција $o(x)$ т. ј. низ $\{a_{\nu,n}\}$ је један низ o.

2°. Означимо са $r_n(x)$ број елемената низа $a_{\nu,n}$, $n = 1, 2, \ldots n$, који нису већи од x, тада је

$$N(x) = r_n(-x) + n - r_n(x) + N_x, \quad x > 0$$

где је N_x број елемената дотичног низа, који су равни x-у. Ако је поменути низ један низ o, тада је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{r_n(x)}{n} = 0(x), \quad a \leq x \leq b$$

[1] loc. cit. [1] b. Théorème 1.
[2] loc. cit. [1] a. став. 24. стр. IX.

па је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{N_x}{n} = 0$$

а из горње једначине тада следи и

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{N(x)}{n} = 0 \quad \text{за} \quad x > 0.$$

Обратно, ако за један низ $\{a_{\nu,n}\}$ важи горња граница, тада ако ставимо

$$|a_{\nu,n}| \leq M \quad \text{за све} \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

имамо да је

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu (a_{\nu,n})^p \right| \leq \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu |a_{\nu,n}|^p \leq \frac{n - N(x)}{n} x^p + M^p \frac{N(x)}{n}$$

т. ј.

$$|M_p| = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu (a_{\nu,n})^p \right| \leq x^p, \quad p = 1, 2, \ldots$$

а пошто x можемо изабрати произвољно мало, то је

$$M_p = 0 \quad \text{за} \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

па је према 1^0 низ $\{a_{\nu,n}\}$ један низ o.

3^0. Нека је низ $\{a_{\nu,n}\}$ један низ o, имамо

$$\frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu |a_{\nu,n}| \leq \varepsilon + \frac{N(x)}{n} M$$

дакле је према 2^0

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu |a_{\nu,n}| = 0.$$

Обратно ако је за низ $\{a_{\nu,n}\}$ горња граница испуњена, тада је

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu (a_{\nu,n})^p \right| \leq \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu |a_{\nu,n}|^p < M^{p-1} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu |a_{\nu,n}|$$

т. ј.

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n (a_{\nu,n})^p = 0 \quad \text{за} \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

па је према 1^0 низ $\{a_{\nu,n}\}$ један низ o.

4^0. Према 1^0 је очигледно да је услов 4^0 потребан. Покажимо још да је он и довољан. Видимо најпре према 3^0 да је низ $\{b_{\nu,n}\} \equiv \{(a_{\nu,n})^2\}$ један низ o, јер је

$$(a_{\nu,n})^2 = b_{\nu,n} < 0 \quad \text{за све} \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

па је дакле према познатом ставу[1], (пошто је функција $|\sqrt{x}|$ континуирана у тачци $x = 0$)

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu |a_{\nu,n}| = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu \left| \sqrt{b_{\nu,n}} \right| = \int_a^b |\sqrt{\xi}| \, d[0(\xi)] = 0$$

што нам према 1^0 казује да је низ $\{a_{\nu,n}\}$ један низ o.

Из горе доказаног става, а нарочито из услова 4^0 видимо специјалну природу низова o; дочим је за један произвољни низ бројева потребно да егзистирају сви моменти M_p, $p = 0, 1, 2, \ldots$, па да он припада класи r, за један низ o је довољно да постоји само моменат M_2, и да је $M_2 = 0$, па да он припада дотичној класи. У даљем ћемо излагању видети примену низова o.

Посматрајмо сад два низа бројева $\{a_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$, за које ћемо од сада претпоставити да су сви коначни и да се налазе у интервалу (a, b).

Помоћу елемената $a_{\nu,n}$ и $\beta_{\nu,n}$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots n)$ можемо формирати $n!$ различитих група од n елемената, облика

$$(a_{\nu,n}, \beta_{n_\nu,n}), \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots n$$

где је n_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ једна од $n!$ пермутација бројева $1, 2, 3, \ldots n$. Другим речима, ако је дата једна функција двеју

[1] loc. cit. [2].

променљивих $\psi(x, y)$, можемо горњим начином из низова $\left\{\alpha_{\nu,n}\right\}$ и $\left\{\beta_{\nu,n}\right\}$ формирати бескрајно много различитих двоструких низова облика

$$\left\{\psi\left(\alpha_{\nu,n}; \beta_{n_\nu,n}\right)\right\} \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

где је n_ν, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots n)$ једна извесна пермутација бројева $1, 2, 3, \ldots n$.

На основи горе реченог, пређимо сад на основни став, по коме можемо распознати када два низа имају исту функцију распореда.

Став II. Потребан и довољан услов да два низа $\left\{\alpha_{\nu,n}\right\}$ и $\left\{\beta_{\nu,n}\right\}$, чији су елементи сви коначни, имају исту функцију распореда (до на једне пребројиве множине тачака) је да један од низова

$$\left\{\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}\right\} \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

буде један низ o.

Или (што је исто према ставу I. 3°) да постоји једна таква пермутација $\beta_{n_\nu,n}$ елемената $\beta_{\nu,n}$ да израз

$$\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \left|\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}\right|$$

тежи нули са $\frac{1}{n}$.

Да је горњи услов довољан следи из неједначине

$$\left|\sum_1^n{}_\nu \left(\alpha_{\nu,n}\right)^p - \left(\beta_{n_\nu,n}\right)^p\right| \leq$$

$$\leq \sum_1^n{}_\nu \left|\left(\alpha_{\nu,n}\right)^p - \left(\beta_{n_\nu,n}\right)^p\right| = \sum_1^n{}_\nu \left|\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}\right| \cdot$$

$$\cdot\left|\alpha_{\nu,n}^{p-1} + \alpha_{\nu,n}^{p-2}\beta_{n_\nu,n} + \cdots + \beta_{n_\nu,n}^{p-1}\right| \leq p\,M^{p-1}\sum_1^n{}_\nu \left|\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}\right|$$

где је $\left|\alpha_{\nu,n}\right| \leq M$ и $\left|\beta_{\nu,n}\right| \leq M$, $\begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, \ldots, \end{matrix}$

одакле, ако претпоставимо да низ $\left\{\alpha_{\nu,n}\right\}$ припада класи ν, имамо

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \left(\beta_{n_\nu,n}\right)^p = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \left(\beta_{\nu,n}\right)^p = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \left(\alpha_{\nu,n}\right)^p.$$
$$p = 1, 2, \ldots$$

што, према познатим резултатима[1], казује да и низ $\left\{\beta_{\nu,n}\right\}$ припада класи ν и да има исту функцију распореда као и низ $\left\{\alpha_{\nu,n}\right\}$.

Докажимо сад обратно да, ако низови $\left\{\alpha_{\nu,n}\right\}$ и $\left\{\beta_{\nu,n}\right\}$ имају исту функцију распореда $\nu(x)$ (до на једне пребројиве множине тачака), тада постоји увек једна таква пермутација $\beta_{n_\nu,n}$, елемената $\beta_{\nu,n}$, да је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \left|\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}\right| = 0.$$

Нека је зато

$$\alpha_{\nu,n} \leq \alpha_{\nu+1,n}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots n-1$$

и нека је n_ν такво да буде

$$\beta_{n_\nu,n} \leq \beta_{n_{\nu+1},n}; \quad \nu = 1, 2, \ldots n-1$$

показаћемо да у томе случају, под горњом претпоставком, израз

$$\frac{1}{n}\sum_1^n{}_\nu \left|\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}\right|$$

тежи нули са $\frac{1}{n}$. Нека је зато $A_n(x)$ и $B_n(x)$ број елемената низа $\alpha_{\nu,n}$ односно $\beta_{\nu,n}$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, који нису већи од x; ставимо

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{n}A_n(x), \qquad \beta_n(x) = \frac{1}{n}B_n(x)$$

и нека су

$$\nu_n(x) \quad \text{и} \quad \varepsilon_n(x)$$

[1] loc. cit. [3].

инверсне функције функција $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$; тада је

$$\alpha_{\nu,n} = \vartheta_n\left(\frac{K_\nu}{n}\right) \quad \beta_{n\,\nu,n} = g_n\left(\frac{K_\nu}{n}\right) \quad \begin{matrix}\nu = 1, 2, \dots n\\ n = 1, 2, 3, \dots\end{matrix}$$

где је $\nu - 1 < K_\nu \leq \nu$.

Означимо сад још са $\gamma_n(x)$ функцију

$$\gamma_n(x) = |\vartheta_n(x) - g_n(x)|$$

тада видимо лако да је

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_{\nu,n} - \beta_{p_\nu,n}| = \int_0^1 \gamma_n(\xi)\,d\xi = I_n.$$

Да бисмо сад доказали да горњи интеграл I_n тежи нули са $\frac{1}{n}$: напоменимо следеће две особине низа функција $\gamma_n(x)$.

1°. Низ функција тежи нули за све x интервала $[0, 1]$ изузев у тачкама једне пребројиве множине.

Јер према познатим резултатима[1] и према претпоставци, низови $\vartheta_n(x)$ и $g_n(x)$ конвергишу, до на тачке једне пребројиве множине, инверсној функцији $\mu(x)$ функције распореда $\nu(x)$ низова $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$.

2°. Варијација низа функција $\gamma_n(x)$ је униформно ограничена; јер је

$$V = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} |\gamma_n(x_\nu) - \gamma_n(x_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \Big| |\vartheta_n(x_\nu) - g_n(x_\nu)| -$$

$$- |\vartheta_n(x_{\nu-1}) - g_n(x_{\nu-1})| \Big| \leq \sum_{\nu=1}^{\varkappa} |\vartheta_n(x_\nu) - g_n(x_\nu) - \vartheta_n(x_{\nu-1}) +$$

$$+ g_n(x_{\nu-1})| \leq \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \big(\vartheta_n(x_\nu) - \vartheta_n(x_{\nu-1})\big) +$$

$$+ \big(g_n(x_\nu) - g_n(x_{\nu-1})\big) \leq 2\,(b-a)$$

где је $0 = x_0 < x_\nu < x_{\nu+1} < x_\varkappa = 1$, $\nu = 1, 2, \dots \varkappa - 1$, једна произвољна подела интервала $[0, 1]$.

[1] loc. cit. [1] a. стр. 8. став. I.

Из ових особина низа $\gamma_n(x)$ следи да, ако један парцијалан низ $\gamma_p(x)$ конвергира т. ј.

$$\mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} \gamma_{p_\nu}(x) = \gamma^{(p)}(x)$$

тада је функција $\gamma^{(p)}(x)$ ограничене вариације (à variation bornée) и равна је нули за све x интервала $[0, 1]$, изузев у тачкама једне пребројиве множине; према томе је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} I_{p_\nu} = \mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} \int_0^1 \gamma_{p_\nu}(\xi)\,d\xi = \int_0^1 \gamma^{(p)}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Извадимо сад један произвољан парцијалан низ $\gamma_{p_\nu}(x)$ из низа $\gamma_\nu(x)$, према Hilbert-Banach-овом ставу, пошто је $\gamma_\nu(x)$ равна модулу разлика двеју униформно ограничених монотоних функција, ми можемо из низа $\gamma_{p_\nu}(x)$ увек извадити један парцијалан низ $\gamma_{pp_\nu}(x)$ који је конвергентан, па је дакле у томе случају

$$\mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} I_{pp_\nu} = \mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} \int_0^1 \gamma_{pp_\nu}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Дакле из сваког парцијалног низа I_{p_ν} низа I_ν, можемо увек извадити један парцијалан низ I_{pp_ν}, који тежи нули; према чему мора и сам низ I_ν тежити нули. Јер ако тај низ не тежи нули, из њега можемо увек извадити један парцијалан низ који тежи једном броју различитом од нуле, а из тога парцијалног низа не можемо никад извадити парцијалне низове који теже нули.

Дакле је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n}| = \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} I_n = 0$$

чиме је горњи став потпуно доказан.

Према горњем ставу ми ћемо сад поставити следећу дефиницију:

Дефиниција. Два низа $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$, чији су елементи сви коначни, назваћемо **еквивалентним**, ако постоји таква једна пермутација $\beta_{n_{\nu},n}$, елемената $\beta_{\nu,n}$, $(\nu=1,2,\dots n)$ да израз

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}-\beta_{n_{\nu},n}\right|$$

тежи нули са $\frac{1}{n}$; а што ћемо означити са

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}.$$

Из овако дефинисане еквиваленције видимо према ставу II. да, ако низ $\{\alpha_{\nu,n}\}$ припада класи ν, те ако је

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}$$

тада и низ $\{\beta_{\nu,n}\}$ припада класи α и има исту функцију распореда као и низ $\{\alpha_{\nu,n}\}$, (до на једне пребројиве множине тачака). Ако међутим низ $\{\alpha_{\nu,n}\}$ не припада класи ν и ако је $\alpha_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}$, тада и низ $\{\beta_{\nu,n}\}$ неће припадати класи ν.

Дакле, из саме еквиваленције можемо закључити да или оба низа припадају класи ν, а у томе случају имају исту функцију распореда, или ниједан не припада тој класи.

Покажимо сад аналогију између овако дефинисане еквиваленције и обичне једнакости; то увиђамо из следећег низа факата:

1°. Ако је

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}\quad\text{и}\quad\beta_{n_{\nu},n}\backsim\gamma_{n'_{\nu},n}$$

тада је

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\gamma_{n'_{\nu},n}.$$

Јер је

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}-\gamma_{n'_{\nu},n}\right|\leq\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}-\beta_{n_{\nu},n}\right|+\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\beta_{n_{\nu},n}-\gamma_{n'_{\nu},n}\right|.$$

2°. Ако је

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n}\quad\text{и}\quad\beta_{\nu,n}\backsim\beta'_{n'_{\nu},n}$$

тада је

$$\alpha_{\nu,n}\pm\beta_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n}\pm\beta'_{n'_{\nu},n}.$$

Јер је

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}\pm\beta_{\nu,n}-\alpha'_{n_{\nu},n}\mp\beta'_{n'_{\nu},n}\right|\leq\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}-\alpha'_{n_{\nu},n}\right|+\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\beta_{\nu,n}-\beta'_{n'_{\nu},n}\right|.$$

3°. Ако је

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}$$

и $\{\gamma_{\nu,n}\}$ један произвољан низ коначних бројева, т. ј.

$$\left|\gamma_{\nu,n}\right|\leq M\quad\begin{matrix}\nu=1,2,\dots n.\\ n=1,2,3,\dots\end{matrix}$$

тада је

$$\alpha_{\nu,n}\cdot\gamma_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}\cdot\gamma_{\nu,n}.$$

Јер је

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}\cdot\gamma_{\nu,n}-\beta_{n_{\nu},n}\cdot\gamma_{\nu,n}\right|\leq M\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}-\beta_{n_{\nu},n}\right|.$$

4°. Ако је

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n}\quad\text{и}\quad\beta_{\nu,n}\backsim\beta'_{n'_{\nu},n}$$

тада је

$$\alpha_{\nu,n}\cdot\beta_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n'_{\nu},n}\cdot\beta'_{n'_{\nu},n}.$$

Јер према 3° имамо

$$\alpha_{\nu,n}\cdot\beta_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n}\cdot\beta_{\nu,n}\ \text{и}\ \alpha'_{n_{\nu},n}\cdot\beta_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n}\cdot\beta'_{n'_{\nu},n}$$

па је с обзиром на 1°

$$\alpha_{\nu,n}\cdot\beta_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n}\cdot\beta'_{n'_{\nu},n}.$$

Ако сад применемо, један коначан број пута, операције изложене у 2°, 3° и 4°, лако увиђамо следећи резултат:

5°. Ако је $P(x, y)$ један полином по x и y, тада из еквиваленција

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n} \text{ и } \beta_{\nu,n}\backsim\beta'_{n'_{\nu},n}$$

следи

$$P(\alpha_{\nu,n};\ \beta_{\nu,n})\backsim P\left(\alpha'_{n_{\nu},n};\ \beta'_{n'_{\nu},n}\right).$$

А на основи овога можемо доказати следећи став:

Став III. Ако су елементи низова $\{\alpha_{\nu,n}\}$, $\{\alpha'_{\nu,n}\}$, $\{\beta_{\nu,n}\}$ и $\{\beta'_{\nu,n}\}$ сви коначни, т. ј.

$$a\leq\alpha_{\nu,n}\leq b,\ c\leq\beta_{\nu,n}<d \qquad \nu=1,2,\ldots,n$$
$$a\leq\beta'_{\nu,n}\leq b,\ c\leq\beta'_{\nu,n}\leq d \qquad n=1,2,3,\ldots$$

и ако је функција $\psi(x, y)$ континуирана за

$$a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d$$

тада из еквиваленција

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\alpha'_{n_{\nu},n} \text{ и } \beta_{\nu,n}\backsim\beta'_{n'_{\nu},n}$$

следи

$$\psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})\backsim\psi(\alpha'_{n'_{\nu},n};\ \beta'_{n'_{\nu},n}).$$

Пошто сваку континуирану функцију $\psi(x, y)$ можемо униформно апроксимирати помоћу полинома $P(x, y)$ т. ј.

$$\left|\psi(x, y)-P(x, y)\right|<\varepsilon$$

то следи

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|\psi(\alpha_{\nu,n},\beta_{\nu,n})-P(\alpha_{\nu,n},\beta_{\nu,n})\right|<\varepsilon$$

и

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|\psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})-P(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right|<\varepsilon$$

а према 5° је

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|P(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})-P(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right|<\varepsilon'$$

а одавде

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|\psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})-\psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|\left\{\psi(\alpha_{\nu,n},\beta_{\nu,n})-P(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})\right\}+\left\{P(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right.\right.$$

$$\left.\left.-\psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right\}+\left\{P(\alpha_{\nu,n},\beta_{\nu,n})-P(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right\}\right|<$$

$$\leq\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|\psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})-P(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})\right|+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|\psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})-P(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right|$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\left|P(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})-P(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})\right|\leq 2\varepsilon+\varepsilon'$$

дакле је

$$\psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n})\backsim\psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})$$

ш. ј. т. д.

Овај став, као што видимо, обухвата као специјалне случајеве 2°, 3°, 4° и 5°.

Напоменимо још да горњи став можемо лако уопштити и на функције са произвољно много променљивих. Међутим, кад је ψ функција само једне променљиве, важи следећи општији став:

Став IV. Ако је $\nu(x)$ функција распореда низа $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и ако је $f(x)$, RS — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$, тада из еквиваленције

$$\alpha_{\nu,n}\backsim\beta_{n_{\nu},n}$$

следи

$$f(\alpha_{\nu,n}) \backsim f(\beta_{n_{\nu},n}).$$

Да бисмо доказали овај став, напоменимо најпре да, ако је $f(x)$ RS — интеграбилна, тада постоји увек једна континуирана функција $\psi(x)$ таква, да је

$$\psi(x) \leq f(x), \quad a \leq x \leq b$$

и да је

$$\int_a^b f(\zeta)\, d\left[\nu(\xi)\right] - \int_a^b \psi(\zeta)\, d\left[\nu(\zeta)\right] < \varepsilon$$

где је ε произвољно мали позитиван број.

Према томе је

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| f(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\beta_{n_{\nu},n}) \right| = \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| f(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\alpha_{\nu,n}) + \right.$$

$$\left. + \psi(\beta_{n_{\nu},n}) - f(\beta_{n_{\nu},n}) + \psi(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\beta_{n_{\nu},n}) \right| < .$$

$$\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\alpha_{\nu,n}) + \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n}) - \psi(\beta_{\nu,n}) +$$

$$+ \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| \psi(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\beta_{n_{\nu},n}) \right|$$

а како је

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\alpha_{\nu,n}) = \int_a^b \left[f(\zeta) - \psi(\zeta) \right] d\left[\nu(\zeta)\right] < \varepsilon$$

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n}) - \psi(\beta_{\nu,n}) = \int_a^b \left[f(\zeta) - \psi(\zeta) \right] d\left[\nu(\zeta)\right] < \varepsilon$$

и (према ставу III.)

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| \psi(\alpha_{\nu,n}) - \psi(\beta_{n_{\nu},n}) \right| = 0$$

то из горње неједначине следи

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| f(\alpha_{\nu,n}) - f(\beta_{n_{\nu},n}) \right| < 2\varepsilon$$

а пошто ε можемо бирати произвољно мало, то је дакле

$$f(\alpha_{\nu,n}) \backsim f(\beta_{n_{\nu},n}). \qquad \text{ш. ј. т. д.}$$

У другоме делу ове расправе показаћемо како се може из овог става добити један потребан и довољан услов за RS — интеграбилност једне дате функције.

На крају напоменимо још ово:

Став III. нам казује да из еквиваленција

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n_{\nu},n} \quad \text{и} \quad \beta_{\nu,n} \backsim \beta'_{n'_{\nu},n}$$

следи еквиваленција

$$\psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n}) \backsim \psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n})$$

али, као што смо већ раније напоменули, из ове еквиваленције никако се не може закључити да један од низова

$$\left\{ \psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n}) \right\} \text{ или } \left\{ \psi(\alpha'_{n_{\nu},n};\beta'_{n'_{\nu},n}) \right\}$$

припада класи ν, штавише ни из претпоставке да оба низа $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$ припадају класи ν, не следи да низ $\{\psi(\alpha_{\nu,n};\beta_{\nu,n}\}$ припада тој класи.

Ово можемо увидети из следећег: док је, за егзистенцију границе

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\alpha_{\nu,n})$$

за све континуиране функције $f(x)$, потребно и довољно да постоје све границе

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (\alpha_{\nu,n})^{p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

за егзистенцију границе

$$A. \qquad \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \; \psi\left(\alpha_{\nu,n}, \beta_{\nu,n}\right)$$

за све континуиране функције $\psi(x\, y)$, потребно је и довољно да постоје све границе

$$B. \qquad \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\alpha_{\nu,n}\right)^{p} \cdot \left(\beta_{\nu,n}\right)^{q}, \quad \begin{matrix} p = 0, 1, 2, \ldots \\ q = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

што лако увиђамо из факта да се свака континуирана функција $\psi(x, y)$ може униформно апроксимирати помоћу полинома $P(x, y)$.

Према томе видимо да само егзистенција граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\alpha_{\nu,n}\right)^{p} \quad \text{и} \quad \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\beta_{\nu,n}\right)^{p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

т. ј. претпоставка да низови $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$ припадају класи ν, није довољно да граница $A.$ постоји за једну произвољну континуирану функцију $\psi(x, y)$.

Међутим, према ранијем разлагању, може се и без примене граница $B.$ у извесним случајевима закључити да низ $\left\{\psi\left(\alpha_{\nu,n}, \beta_{\nu,n}\right)\right\}$ припада класи ν, као што нам то казује следећи став:

Став V. Ако низови $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$ припадају класи ν, са одговарајућим функцијама распореда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, и ако постоји једна функција $f(x)$ таква да је она RS — интеграбилна с обзиром на $\alpha(x)$ и да је

$$\beta_{\nu,n} \infty f\left(\alpha_{\nu,n}\right)$$

тада и низ $\left\{\psi\left(\alpha_{\nu,n}, \beta_{\nu,n}\right)\right\}$ припада класи ν.

[1] Штавише, према једном Lebesgue-овом ставу (Bull. d. Sciences, Math. t. XXXVII. 1903.) да се свака континуирана функција $\psi(x, y)$ може униформно апроксимирати помоћу полинома облика $P(z)$, $z = x + i\, y$, следи да је потребно и довољно да постоје све границе облика

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\alpha_{\nu,n} + i\, \beta_{\nu,n}\right)^{p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \qquad i = \sqrt{-1}$$

Према ставу III. из еквиваленције $\beta_{\nu,n} \backsim f\left(\alpha_{\nu,n}\right)$ следи

$$\psi\left(\alpha_{\nu,n}, \beta_{\nu,n}\right) \backsim \psi\left(\alpha_{\nu,n}, f\left(\beta_{\nu,n}\right)\right)$$

а пошто су све функције

$$\left[\psi\left(x, f(x)\right)\right]^{p} \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

RS — интеграбилне с обзиром на $\alpha(x)$, то следи да низ $\left\{\psi\left(\alpha_{\nu,n}, f\left(\alpha_{\nu,n}\right)\right)\right\}$, па према томе и низ $\left\{\psi\left(\alpha_{\nu,n}, \beta_{\nu,n}\right)\right\}$ припада класи ν, и да оба низа имају исту функцију распореда.

ш. ј. т. д.

Приметимо на крају још и то да су услови горњег става увек испуњени кад год низови $\{\alpha_{\nu,n}\}$ и $\{\beta_{\nu,n}\}$ припадају класи ν, и кад је

$$\alpha_{\nu,n} < \alpha_{\nu+1,n} \;\text{и}\; \beta_{\nu,n} < \beta_{\nu+1,n}, \qquad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}$$

II.

У овом ћемо делу најпре прецизирати један, већ раније доказан став[1] и навешћемо, у вези са пређашњим излагањем, неке његове примене.

Поменути став гласи:

Став VI. Потребан и довољан услов да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} f\left(\alpha_{\nu,n}\right)$$

постоји за све низове $\{\alpha_{\nu,n}\}$ који имају функцију $\nu(x)$ за функцију распореда јесте тај да $f(x)$ буде RS — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$.

Да је услов довољан, доказано је већ у горе цитираном раду; треба дакле још да докажемо да, ако функција $f(x)$ није RS — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$, увек постоји један такав низ $\beta_{\nu,n} \backsim \alpha_{\nu,n}$ да горе наведена граница не постоји.

Познато је да је потребан и довољан услов да $f(x)$ буде RS — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$:

[1] loc. cit. 2.

1. да се дисконтинуитети функција $f(x)$ и $\nu(x)$ не поклапају;

2. да функција $f[\mu(x)]$, где је $\mu(x)$ инверсна функција функције $\nu(x)$, буде R — интеграбилна.

Према томе, ако функција $f(x)$ није RS — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$, значи или да функција $f[\mu(x)]$ није R — интеграбилна, или да се извесни дисконтинуитети функција $f(x)$ и $\nu(x)$ поклапају.

Претпоставимо најпре да $f[\mu(x)]$ није R — интеграбилни, и посматрајмо низ

$$\mu\left(\frac{\varkappa_{\nu,n}}{n}\right) \sim a_{n\,\nu,n}, \text{ где је } \nu-1<\varkappa_{\nu,n}\le\nu,$$

очигледно је да можемо изабрати два низа $\{\varkappa'_{\nu,n}\}$ и $\{\varkappa''_{\nu,n}\}$ тако да буде:

$$\left|\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f\left[\mu\left(\frac{\varkappa'_{\nu,n}}{n}\right)\right]-\overline{\int_a^b} f\left[\mu(\zeta)\right]d\zeta\right|<\varepsilon$$

и

$$\left|\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f\left[\mu\left(\frac{\varkappa''_{\nu,n}}{n}\right)\right]-\underline{\int_a^b} f\left[\mu(\zeta)\right]d\zeta\right|<\varepsilon$$

а пошто је по претпоставци

$$\underline{\int_a^b} f\left[\mu(\zeta)\right]d\zeta \neq \overline{\int_a^b} f\left[\mu(\zeta)\right]d\zeta$$

$\left(\overline{\int}\right.$ и $\underline{\int}$ су горњи и доњи интеграли$\left.\right)$, то очигледно постоји један такав низ бројева $\{\varkappa'''_{\nu,n}\}$ да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f\left[\mu\left(\frac{\varkappa'''_{\nu,n}}{n}\right)\right]$$

уопште не постоји.

Претпоставимо ли сад даље да је функција $f[\mu(\zeta)]$ R — интеграбилна, али да се извесни дисконтинуитети функција

$f(x)$ и $\nu(x)$ међу собом поклапају. Тада ако означимо са α један дисконтинуитет функција $f(x)$ и $\nu(x)$ и ако је

$$\nu(\alpha-0)=y_0\,,\quad \nu(\alpha+0)=y_1\,.$$

$$y_1-y_0=d>0$$

функција $\mu(x)$ је у интервалу (y_0, y_1) константна и равна α. Према томе низ бројева $\mu\left(\frac{\varkappa_\nu}{n}\right)$, $\nu-1<\varkappa_\nu\le\nu$; $(\nu=1,2,\dots n)$ садржи p_n елемената, који су сви равни α, и то кад је

$$y_0<\frac{\varkappa_\nu}{n}<y_1$$

а

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{p_n}{n}=d=y_1-y_0\,.$$

Ако дакле сменемо тих p_n елемената са p_n првих елемената једног низа a_ν, $(\nu=1,2,\dots)$, који тежи граници α, и означимо тако добивени нов низ са $\{\beta_{\nu,n}\}$, тада је очигледно

$$\beta_{\nu,n}\sim\mu\left(\frac{\varkappa_\nu}{n}\right)\sim a_{n\,\nu,n}\,.$$

Посматрајмо сад израз

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n})=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f\left[\mu\left(\frac{\varkappa_\nu}{n}\right)\right]-\frac{p_n}{n}f(\alpha)+$$

$$+\frac{p_n}{n}\cdot\frac{1}{p_n}\sum_{1}^{p_n}{}^{\nu} f(a_\nu)$$

према претпоставци, прва сума тежи једној одређеној граници A кад $n\to\infty$, дакле је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n})=A-d\,f(\alpha)+d\mathop{\mathbf{L}}_{\varkappa=\infty}\frac{1}{\varkappa}\sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} f(a_\nu)$$

а како је α једна тачка дисконтинуитета функције $f(x)$, то очигледно можемо увек изабрати један такав низ бројева $\{a_\nu\}$, да буде

$$\mathop{\mathbf{L}}_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

а да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(a_\nu)$$

не постоји.

На тај је начин доказано да, ако $f(x)$ није RS— интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$, постоји увек један низ $\{\beta_{\nu,n}\}$ са функцијом распореда $\nu(x)$, такав да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n})$$

не постоји; према томе је и горњи став потпуно доказан.

Као прву примену овога става, докажимо, у неку руку инверсан став става IV., који се, у исто време, може изрећи и као услов за RS— интеграбилност једне произвољне функције, а који гласи:

Став VII. Нека је $\{\alpha_{\nu,n}\}$ један низ који има $\nu(x)$ за функцију распореда; потребан и довољан услов да функција $f(x)$ буде RS— интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$ јесте тај да за све низове $\{\beta_{\nu,n}\}$ који задовољавају еквиваленцију

$$\alpha_{\nu,n} \sim \beta_{n_{\nu},n}$$

следи

$$f(\alpha_{\nu,n}) \sim f(\beta_{n_{\nu},n}).$$

Или другим речима, да буде

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| f(\alpha_{\nu,n}) - f(\beta_{n_{\nu},n}) \right| = 0$$

за све низове $\{\beta_{\nu,n}\}$ за које је

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| \alpha_{\nu,n} - \beta_{n_{\nu},n} \right| = 0.$$

Да је овај услов довољан, следи из става IV. Покажимо још да је он и потребан т. ј. да из егзистенције еквиваленција

$$f(\alpha_{\nu,n}) \sim f(\beta_{n_{\nu},n})$$

за све низове за које је $\alpha_{\nu,n} \sim \beta_{n_{\nu},n}$, следи RS— интеграбилност функције $f(x)$ с обзиром на функцију $\nu(x)$.

Нека је зато $f(x)$ једна произвољна функција; посматрајмо низ

$$\mu\left(\frac{x_{\nu,n}}{n}\right) \sim \alpha_{n'_{\nu},n}, \quad \nu - 1 < x_{n'_{\nu},n} \leq \nu$$

Из доказа става VI. следи да постоји увек један такав низ бројева $\{x_{\nu,n}\}$ да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f\left[\mu\left(\frac{x_{\nu,n}}{n}\right)\right]$$

постоји, а према томе из еквиваленције

$$f\left[\mu\left(\frac{x_{\nu,n}}{n}\right)\right] \sim f(\alpha_{n'_{\nu},n}) \sim f(\beta_{n'_{\nu},n})$$

следи да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n})$$

егзистира за све низове $\{\beta_{\nu,n}\}$ за које је $\alpha_{\nu,n} \sim \beta_{n_{\nu},n}$, па је дакле према ставу IV. функција RS— интеграбилна с обзиром на функцију $\nu(x)$.

ш. ј. т. д.

На основу става IV. ми још можемо одговорити и на следеће питање.

Познато је да из RS— интеграбилности функција $f(x)$ и $\varphi(x)$ с обзиром на једну монотону функцију $\nu(x)$, не следи уопште RS — интеграбилност функције $f[\varphi(x)]$, с обзиром на исту функцију. Према томе може се поставити следеће питање:

Ако нам је дата функција $\varphi(x)$, RS — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$, које услове има да задовољи функција $f(x)$, па да $f[\varphi(x)]$ буде RS — интеграбилна, с обзиром на $\nu(x)$.

Да бисмо одговорили на ово питање, напоменимо најпре следеће:

У једном ранијем раду[1] дефинисали смо једну, функцији $\varphi(x)$ одговарајућу функцију $\varphi(x, y)$ на следећи начин:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ за } \varphi(x) > y \\ 1 \text{ за } \varphi(x) \leq y \end{cases}$$

и ставимо

$$\lambda(y) = \int_a^b \varphi(\zeta\, y)\, d\,[\nu(\zeta)].$$

Тада одговор на постављено питање гласи:

Став VIII. Нека је $\varphi(x)\, RS$ — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$, да би $f[\varphi(x)]$ била RS — интеграбилна с обзиром на исту функцију, довољно је да $f(x)$ буде RS — интеграбилна с обзиром на $\lambda(x)$.

Ставимо

$$\{\beta_{\nu,n}\} \equiv \{\varphi(\alpha_{\nu,n})\}$$

тада је, према горе цитираном раду, $\lambda(x)$ функција распореда низа $\{\beta_{\nu,n}\}$. Како је међутим

$$\frac{1}{n}\sum_1^n{}^{\nu} f(\beta_{\nu,n}) = \frac{1}{n}\sum_1^n{}^{\nu} f\left[\varphi(\alpha_{\nu,n})\right]$$

то из претпоставке да је $f(x)\, RS$ — интеграбилна с обзиром на $\lambda(x)$ и из става IV. следи да граница

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_1^n{}^{\nu} f\left[\varphi(\alpha_{\nu,n})\right]$$

[1] loc. cit. 1. c. Théorème I.

постоји за све низове $\{\alpha_{\nu,n}\}$ који имају $\nu(x)$ за функцију распореда. Дакле да је $f[\varphi(x)]\, RS$ — интеграбилна с обзиром на $\nu(x)$.

Међутим овај услов није **потребан**, као што се може увидети, ако за $\varphi(x)$ узмемо функцију

$$\varphi(x) = \begin{cases} a \text{ за } x < \alpha \\ b \text{ за } x \leq \alpha \end{cases}$$

и ако претпоставимо да је $f(x)$ дисконтинуирана у тачкама a и b, $a \neq b$.

Ако у горњем ставу ставимо $\nu(x) = x$, добијамо сличан став за R — интеграбилност, наиме:

Да би $f[\varphi(x)]$ била R — интеграбилна функција, када је $\varphi(x)$ R — интеграбилна, довољно је да $f(x)$ буде RS — интеграбилна функција с обзиром на

$$\lambda(x) = \int_a^b \varphi(\zeta, x)\, d\,\zeta.$$

8.

O ekvivalentnim nizovima. — Sur les suites équivalentes.

Izvadak iz rasprave priopćene u „Radu", knj. 234., str. 223.—245. — Résumé du Mémoire publié dans le „Rad", T. 234, p. 223—245.

Napisao — Par

Dr. Jovan Karamata.

La présente note ne fait qu'une suite des travaux déjà publiés par l'auteur.[4] Pour la notation et la terminologie se rapporter aux travaux cités.

Dans la première partie de cette note l'auteur, avant de définir l'équivalence des suites de nombres, considère les suites particulières suivantes:

---

[1] A. Sommerfeld, Atombau, 3. Aufl. S. 733.

[2] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, I, 152.

[3] F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, I, 52.

[4] C. R. t. 182, p. 833; t. 183, p. 726.

Définition: On appellera une suite de nombres $\{a_{\nu,n}\}$ une suite o, si elle a pour fonction de répartition la fonction

$$0(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \quad " \quad x > 0 \end{cases}$$

et

$$0 \leq 0(o) \leq 1.$$

Les suites o ont des propriétés particulières exprimées dans le théorème suivant:

Théorème I. Soit $\{a_{\nu,n}\}$ une suite de nombres bornés, situés dans l'intervalle (a, b), $a \leq 0 \leq b$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit une suite o est que l'une des quatre conditions suivantes soit remplie:

1°.
$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (a_{\nu,n})^p = 0$$

pour tout $p = 1, 2, 3, \ldots$

2°.
$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{N(x)}{n} = 0$$

pour tout $x > 0$, où $N(x)$ désigne le nombre des éléments $a_{\nu,n}$, $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ dont le module est plus grand ou égal à x.

3°.
$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |a_{\nu,n}| = 0$$

4°.
$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} (a_{\nu,n})^2 = 0.$$

Moyennant les suites o, on peut maintenant formuler les conditions pour que deux suites de nombres aient la même fonction de répartition.

Théorème II. Soient $\{a_{\nu,n}\}$ et $\{b_{\nu,n}\}$ deux suites de nombres bornés; la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient la même fonction de répartition est qu'il existe une permutation $b_{n_\nu,n}$, des éléments $b_{\nu,n}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots n.)$ telle que la suite

$$\{a_{\nu,n} - b_{n_\nu,n}\}$$

soit une suite o.

Ou, en d'autres termes, telle que l'on ait

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| a_{\nu,n} - b_{n_\nu,n} \right| = 0.$$

Pour démontrer la nécessité de cette condition, l'auteur montre en particulier, que si l'on a

$$a_{\nu,n} \leq a_{\nu+1}, \text{ et } b_{n_\nu,n} \leq b_{n_\nu+1,n}$$

on aura

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| \alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n} \right| = 0$$

toutes les fois, que les suites $\{a_{\nu,n}\}$ et $\{b_{\nu,n}\}$ ont la même fonction de répartition.

D'après ce théorème, l'auteur introduit la définition suivante:

Définition: Deux suites de nombres bornés $\{a_{\nu,n}\}$ et $\{b_{\nu,n}\}$ seront nommés équivalentes, ce que l'on écrira

$$a_{\nu,n} \propto b_{n_\nu,n}$$

s'il existe une permutation $b_{n_\nu,n}$ des éléments $b_{\nu,n}$, $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ telle que

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \left| \alpha_{\nu,n} - \beta_{n_\nu,n} \right| = 0.$$

De l'équivalence ainsi définie on peut conclure que: ou bien les deux suites ont des fonctions de répartitions, auquel cas elles sont les mêmes, ou bien aucune des deux suites n'en possède.

L'auteur montre ensuite que les équivalences ont des propriétés semblables aux égalités, ce qui résulte des faits suivants:

1°. Des équivalences

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \beta_{n_{\nu},n} \quad \text{et} \quad \beta_{n_{\nu},n} \backsim \gamma_{n'_{\nu},n}$$

il résulte

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \gamma_{n'_{\nu},n} .$$

2°. Des équivalences

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n_{\nu},n} \text{ et } \beta_{\nu,n} \backsim \beta'_{n'_{\nu},n}$$

il résulte

$$\alpha_{\nu,n} \pm \beta_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n_{\nu},n} \pm \beta'_{n'_{\nu},n} .$$

3°. Soit $\{\gamma_{\nu,n}\}$ une suite de nombres bornés, c. à. d.

$$\left|\gamma_{\nu,n}\right| \leq M \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots n \\ n = 1, 2, 3, \ldots . \end{matrix}$$

de l'équivalence

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \beta_{n_{\nu},n}$$

il résulte

$$\alpha_{\nu,n} \cdot \gamma_{\nu,n} \backsim \beta_{n_{\nu},n} \cdot \gamma_{\nu,n} .$$

4°. Des équivalences

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n_{\nu},n} \text{ et } \beta_{\nu,n} \backsim \beta'_{n'_{\nu},n}$$

il résulte

$$\alpha_{\nu,n} \cdot \beta_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n'_{\nu},n} \cdot \beta'_{n'_{\nu},n} .$$

En appliquant les opérations citées dans 2°, 3° et 4°, un nombre fini de fois on obtient le résultat suivant:

5°. Soit $P(x, y)$ un polynôme en x et y; des équivalences

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n_{\nu},n} \text{ et } \beta_{\nu,n} \backsim \beta'_{n'_{\nu},n}$$

il résulte

$$P\left(\alpha_{\nu,n}, \ \beta_{\nu,n}\right) \backsim P\left(\alpha'_{n_{\nu},n}, \ \beta'_{n'_{\nu},n}\right) .$$

Puis en appliquant le théorème de Weierstrass, sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes, on obtient le théorème suivant:

Théorème III. Soient $\{\alpha_{\nu,n}\}, \{\alpha'_{\nu,n}\}, \{\beta_{\nu,n}\}$ et $\{\beta'_{\nu,n}\}$ quatre suites de nombres bornés, tels que

$$a \leq \alpha_{\nu,n} \leq b, \ c \leq \beta_{\nu,n} < d$$
$$a \leq \alpha'_{\nu,n} \leq b, \ c \leq \beta'_{\nu,n} \leq d$$

et soit $\psi(x, y)$ une fonction continue pour

$$a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d$$

des équivalences

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \alpha'_{n_{\nu},n} \text{ et } \beta_{\nu,n} \backsim \beta'_{n'_{\nu},n}$$

il résulte

$$\psi\left(\alpha_{\nu,n}; \beta_{\nu,n}\right) \backsim \psi\left(\alpha'_{n'_{\nu},n}, \ \beta'_{n'_{\nu},n}\right) .$$

Ce théorème est valable pour les fonctions ψ d'un nombre quelconque de variables. Quant aux cas ou ψ est fonction d'une seule variable, on peut le généraliser dans le sens suivant:

Théorème IV. Soit $\nu(x)$ la fonction de répartition de la suite de nombres bornés $\{\alpha_{\nu,n}\}$ et soit $f(x)$ une fonction bornée, RS-intégrable par rapport à $\nu(x)$; de l'équivalence

$$\alpha_{\nu,n} \backsim \beta_{n_{\nu},n}$$

il résulte toujours

$$f\left(\alpha_{\nu,n}\right) \backsim f\left(\beta_{n_{\nu},n}\right) .$$

A la fin de la première partie, l'auteur fait la remarque suivante:

Soit $\psi(x, y)$ une fonction continue, de l'hypothèse que les suites $\{\alpha_{\nu,n}\}$ et $\{\beta_{\nu,n}\}$ possèdent des fonctions de répartitions il ne résulte point que la suite $\{\psi(\alpha_{\nu,n}; \beta_{\nu,n})\}$ en possède aussi; car la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la limite

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} \ \psi\left(\alpha_{\nu,n}; \beta_{\nu,n}\right);$$

pour toutes les fonctions continues $\psi(x, y)$, est l'existence de toutes les limites

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}(\alpha_{\nu,n})^{p}\cdot(\beta_{\nu,n})^{q}\qquad \begin{array}{l} p=0,1,2,\ldots \\ q=0,1,2,\ldots \end{array}$$

(ou bien l'existence des limites:

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}(\alpha_{\nu,n}+i\,\beta_{\nu,n})^{p}\,,\quad i=\sqrt{-1}\,,\ p=1,2,3,\ldots\,).$$

Par contre, l'hypothèse que les suites $\{\alpha_{\nu,n}\}$ et $\{\beta_{\nu,n}\}$ possèdent des fonctions de répartition entraîne seulement l'existence des limites

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}(\alpha_{\nu,n})^{p}\ \text{ et }\ \mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}(\beta_{\nu,n})^{p}\ ,\quad p=0,1,2,\ldots$$

L'auteur donne, en outre, dans le théorème suivant, une autre condition pour que la suite $\{\psi(\alpha_{\nu,n},\beta_{\nu,n})\}$ ait une fonction de répartition.

Théorème V. Soient $\{\alpha_{\nu,n}\}$ et $\{\beta_{\nu,n}\}$ deux suites de nombres bornés et soit $\nu(x)$ la fonction de répartition de la suite $\{\alpha_{\nu,n}\}$; s'il existe une fonction $f(x)$, RS — intégrable par rapport à $\nu(x)$ et telle que

$$\beta_{\nu,n}\infty f(\alpha_{\nu,n})$$

la suite

$$\{\psi(\alpha_{\nu,n},\beta_{\nu,n})\}$$

aura nécessairement une fonction de répartition.

Dans la seconde partie, l'auteur complète d'abord un théorème déjà publié dans les travaux précédemment énumérés, à savoir:

Théorème VI. La condition nécessaire et suffisante pour que la limite

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}f(\alpha_{\nu,n})$$

existe pour toutes les suites $\{\alpha_{\nu,n}\}$ ayant $\nu(x)$ pour fonction de répartition est que la fonction $f(x)$ soit RS-intégrable par rapport à $\nu(x)$.

A l'aide de ce théorème, on peut compléter le théorème IV et l'énoncer en termes suivants:

Théorème VII. Soit $\{\alpha_{\nu,n}\}$ une suite de nombres bornés ayant $\nu(x)$ pour fonction de répartition; la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit RS-intégrable par rapport à $\nu(x)$ est que, pour toute suite $\{\beta_{\nu,n}\}$ satisfaisant à l'équivalence

$$\alpha_{\nu,n}\infty\beta_{n_{\nu},n}\,,$$

l'équivalence

$$f(\alpha_{\nu,n})\infty f(\beta_{n_{\nu},n})$$

soit satisfaite.

Ou, en d'autres termes, que

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|f(\alpha_{\nu,n})-f(\beta_{n_{\nu},n})\right|=0$$

pour toute suite $\{\beta_{\nu,n}\}$ remplissant l'équation

$$\mathop{\mathbf{L}}_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\left|\alpha_{\nu,n}-\beta_{n_{\nu},n}\right|=0.$$

Comme dernière application, l'auteur se pose la question suivante:

La fonction $\varphi(x)$ étant RS — intégrable par rapport à $\nu(x)$, quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x)$ pour que $f[\varphi(x)]$ soit RS — intégrable par rapport à $\nu(x)$?

L'auteur donne comme réponse à cette question le théorème suivant:

Théorème VIII. Soit $\varphi(x)$ une fonction RS — intégrable par rapport à $\nu(x)$; pour que $f[\varphi(x)]$ soit RS — intégrable par rapport à $\nu(x)$ il suffit que $f(x)$ soit RS — intégrable par rapport à

$$\lambda(x)=\int_{a}^{b}\varphi(\zeta,x)\,d\,[\nu(\zeta)]$$

où

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \varphi(x) > y \\ 1 & \text{,, } \varphi(x) \leq y \end{cases}$$

Pour les fonctions R— intégrables ce théorème se reduit à la proposition suivante:

Pour que $f[\varphi(x)]$ soit R— intégrable, lorsque $\varphi(x)$ est R— intégrable, il suffit que $f(x)$ soit RS— intégrable par rapport à

$$\lambda(x) = \int_a^b \varphi(\zeta, x)\, d\,\zeta .$$

Cependant la condition citée n'est pas nécessaire.