MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP — TÜBINGEN
E. SCHMIDT — BERLIN
I. SCHUR — BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN

LEIPZIG

Sonderabdruck aus Band 33, Heft 2.

J. Karamata

Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze.

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1931

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

---

33. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Neuer Beweis und Verallgemeinerung einiger Tauberian-Sätze.

Von

J. Karamata in Belgrad.

Die Herren Hardy und Littlewood[1] haben folgende zwei Sätze bewiesen:

Satz A. *Es sei*

$$(1) \qquad a_n \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \quad \textit{konvergent für} \quad r < 1$$

und

$$(2) \qquad \varphi(x) = a x^\sigma (\lg x)^{\sigma_1} (\lg \lg x)^{\sigma_2} \ldots (\lg_k x)^{\sigma_k}, \qquad \sigma > 0;$$

aus

$$f(r) \sim \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \textit{für} \quad r \to 1$$

folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(n) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Satz B. *Es sei*

$$a_n \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \to \infty, \qquad \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 \quad \textit{für} \quad n \to \infty,$$

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s} \quad \textit{konvergent für} \quad s > 0$$

und

$$\varphi(x) = a x^\sigma, \qquad \sigma > 0;$$

aus

$$f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{für} \quad s \to 0$$

folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(\lambda_n) \quad \textit{für} \quad n \to \infty.$$

Was den Satz A betrifft, so wurde dieser von Herrn R. Schmidt[2]) weitgehend verallgemeinert, indem er erstens die Bedingung (1) durch eine allgemeinere ersetzt, zweitens die Funktion $\varphi(x)$, durch die, in seiner Arbeit so genannten gestrahlten Funktionen (Folgen) ersetzt, welche (2) als Spezialfall enthalten. Im Falle $a_\nu \geqq 0$ habe ich den Satz von Herrn R. Schmidt (im Referat des ersten Kongreß der Rumänischen Mathematiker, Cluj, April 1929, noch nicht erschienen) in einfacherer Form bewiesen. Die dabei vorkommenden Funktionen $\varphi(x)$ habe ich „regulär wachsende Funktionen" genannt, diese stimmen für $\sigma > 0$ mit der von Herrn Schmidt eingeführten gestrahlten Funktionen überein, für $\sigma = 0$ aber enthalten sie die gestrahlten Funktionen, was ich an einer anderen Stelle[3]) eingehend behandelte.

Der Satz B wurde anderseits von Herrn O. Szász[4]) verallgemeinert, indem er die Bedingung $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1$ wegließ und statt Dirichletscher Reihen Integrale von der Form $\int_0^\infty A(x) e^{-sx} dx$, wo $A(x)$ nicht abnimmt, betrachtete (die schon die Herren Landau[5]) und Doetsch[6]) in speziellen Fällen betrachteten[7])). Die Funktion $\varphi(x)$ behält aber die spezielle Form $a \cdot x^\sigma$.

In dieser Arbeit behalte ich die Annahme $a_n \geqq 0$ bei, verallgemeinere aber die beiden oben angeführten Sätze, indem ich den einer allgemeineren Funktion $\varphi(x)$ entsprechenden Integralsatz beweise. Anstatt Integrale obiger Form betrachte ich Stieltjessche Integrale der Form $\int_0^\infty e^{-sx} d\{A(x)\}$ mit

---

[1]) Hardy-Littlewood, Tauberian Theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, Proc. of the London Math. Soc. (2), **13** (1914), S. 174–191 (S. 180); Some theorems concerning Dirichlet's series, Messenger of Math. **43** (1914), S. 134–147.

[2]) R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 89–152 (S. 151).

[3]) J. Karamata, Sur le mode de croissance régulière des fonctions, Mathematica (Cluj, Roumanie) **4** (1930), S. 38–53.

[4]) O. Szász, Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberischen Art, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. (1929), S. 325–340 (S. 326).

[5]) E. Landau, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1907, S. 8–28.

[6]) Doetsch, Math. Annalen **82** (1920), S. 68–82.

[7]) Ebenfalls haben die Herren Hardy und Littlewood in der Note: Notes on the theory of series (XI): In Tauberian theorems, Proc. of the Lond. math. Soc. (2) **30** (1929), S. 23–37 (Theorem 1) den analogen Satz für Integrale von der Form

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \quad f(t) \geqq 0,$$

bewiesen; diese Integrale wie auch diejenigen, die Herr Szász betrachtet, sind aber in dem Stieltjesschen Integrale

$$\int_0^\infty e^{-st} d[A(t)], \quad A(t) \text{ nicht abnehmend,}$$

enthalten.

der nicht abnehmenden Funktion $A(x)$, da diese die Dirichletschen Reihen direkt als Spezialfall enthalten; denn es ist

$$\int_0^\infty e^{-sx} d\{A(x)\} = \sum_{\nu=1}^\infty a_\nu e^{-\lambda_\nu s},$$

wenn

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \lambda_1, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n & \text{„ } \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

gesetzt wird.

Die Funktion $\varphi(x)$ setze ich als „regulär wachsend" voraus. Diesen Begriff habe ich in meiner unter [3]) zitierten Arbeit eingeführt, weshalb ich hier nur die Definition und die Haupteigenschaft ohne Beweis angebe.

Die stetige und positive Funktion $\varphi(x)$, welche mit x ins Unendliche wächst (welcher Fall uns hier nur interessiert), wird *regulär wachsend* genannt, wenn

$$(3) \qquad \frac{1}{x\varphi(x)} \int_0^x \varphi(t)\, dt \to \frac{1}{\sigma+1}, \qquad \sigma \geqq 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

und dann wird

$$(4) \qquad \varphi(x) = x^\sigma L(x),$$

wo $L(x)$ eine *langsam wachsende, abfallende oder oszillierende* Funktion genannt wird und folgende Eigenschaft hat:

$$(5) \qquad L(xr)/L(r) \to 1 \quad \text{bei} \quad r \to \infty \quad \text{für jedes } x > 0.$$

Umgekehrt folgt (3) aus (4) und (5).

Die erwähnte Verallgemeinerung lautet:

Satz 1. *Es sei $A(x)$ nicht abnehmend, $\varphi(x)$ regulär wachsend,*

$$\varphi(x) = x^\sigma L(x) \to \infty, \quad \textit{wenn} \quad x \to \infty, \quad \sigma \geqq 0,$$

sei ferner das Integral

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \quad \textit{für} \quad s > 0 \quad \textit{konvergent};$$

aus

$$f(s) \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{für} \quad s \to 0$$

folgt dann

$$A(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) \quad \textit{für} \quad x \to \infty.$$

Diesen Satz folgere ich aus dem folgenden

Hauptsatz. *Sei*

$$(6) \qquad \varphi(x) = x^\sigma L(x) \to \infty, \quad \textit{wenn} \quad x \to \infty, \quad \sigma \geqq 0,$$

$$(5) \qquad L(xr)/L(r) \to 1 \quad \textit{bei} \quad r \to \infty \quad \textit{für jedes} \quad x > 0;\text{[4]})$$

[4]) Im Falle, wo $L(x)$ nicht abnimmt, genügt schon, wie Herr Landau (Bull. Acad. Belgique 1911, S. 443) gezeigt hat, daß $L(2r)/L(r) \to 1$ bei $r \to \infty$.

sei ferner das Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \quad \textit{für} \quad s > 0 \quad \textit{konvergent}$$

und

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-st} |d\{A(t)\}| = O\left\{\varphi\left(\frac{1}{s}\right)\right\}.$$

Aus

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-st} d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \quad \textit{bei} \quad s \to 0$$

folgt dann

$$\int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st})\, d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t})\, d\{t^\sigma\} \quad \textit{bei} \quad s \to 0$$

für jede im Intervalle $(0, 1)$ *stetige Funktion* $g(x)$. (*Für* $\sigma = 0$ *hat man unter* t^σ *diejenige Funktion zu verstehen, die* $= 0$ *für* $t = 0$, *sonst* $= 1$ *ist.*)

Beweis. Setzt man in (8) $(k+1)s$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ statt s, so folgt wegen (5) und (6)

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{-kst} d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{(k+1)s}\right) \sim \frac{1}{(k+1)^\sigma} \varphi\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} e^{-kt} d\{t^\sigma\},$$

also ist

$$\int_0^\infty e^{-st} P(e^{-st})\, d\{A(t)\} \sim \varphi\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \int_0^\infty e^{-t} P(e^{-t})\, d\{t^\sigma\},$$

wo $P(x)$ ein beliebiges Polynom ist. Da jede stetige Funktion durch Polynome gleichmäßig approximiert werden kann, ist wegen (7) der Hauptsatz bewiesen.

Um aus dem Hauptsatze den Satz 1 zu erschließen, setze ich zuerst

$$e^{-t} g(e^{-t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq t \leqq 1, \\ 1 + \frac{\varepsilon - t}{\varepsilon} & \text{„ } 1 \leqq t \leqq 1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, \\ 0 & \text{„ } 1 + \varepsilon \leqq t. \end{cases}$$

Dann folgt, wenn man $1/s = x$ setzt,

$$(9) \qquad \begin{aligned} &A(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x(1+\varepsilon)} (1 + \varepsilon - st)\, d\{A(t)\} \\ &\sim \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) + \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)} \varphi(x) \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} (1 + \varepsilon - t)\, d\{t^\sigma\}. \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$e^{-t}g(e^{-t}) = g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1-\varepsilon, \\ \frac{t-1+\varepsilon}{\varepsilon} & \text{"} \quad 1-\varepsilon \leqq t \leqq 1, \\ \frac{1+\varepsilon-t}{\varepsilon} & \text{"} \quad 1 \leqq t \leqq 1+\varepsilon, \\ 0 & \text{"} \quad 1+\varepsilon \leqq t, \end{cases}$$

so ist, da $A(x)$ nicht abnimmt,

$$0 < \frac{1}{\varphi(x)}\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x(1+\varepsilon)}(1+\varepsilon-st)\,d\{A(t)\}$$

$$\frac{1}{\varphi(x)}\int_{x(1-\varepsilon)}^{x(1+\varepsilon)} g_\varepsilon(st)\,d\{A(t)\} \to \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} g_\varepsilon(t)\,d\{t^\sigma\} = \frac{1}{\Gamma(\sigma+2)}\cdot\frac{(1+\varepsilon)^{\sigma+1}+(1-\varepsilon)^{\sigma+1}-2}{\varepsilon}$$

woraus nach (9) Satz 1 folgt.

Bemerkung. Nach Satz 1 ist leicht zu ersehen, daß folgender Satz gilt:

Satz 2. *Sei $A(x)$ eine nicht abnehmende Funktion derart, daß*

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}}\,d\{A(t)\} = \varphi(x) \to \infty \quad \textit{für} \quad x \to \infty$$

eine regulär wachsende Funktion ist[9]*), ferner sei $a(x)$ eine stetige und* ***einseitig beschränkte Funktion***; *aus*

$$\int_0^\infty e^{-st}\,a(t)\,d\{A(t)\} \sim a\int_0^\infty e^{-st}\,d\{A(t)\}, \qquad s \to 0,$$

folgt dann

$$\int_0^x a(t)\,d\{A(t)\} \sim a\,A(x).$$

Ist

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \lambda_1, \\ p_1+p_2+\dots+p_n & \text{"} \quad \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1}, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dann folgt aus diesem Satz ein Resultat, welches ich im Referat des ersten Kongresses der slawischen Mathematiker, Warschau 1929, bewiesen habe und welches lautet:

[9]) Damit $\varphi(x)$ eine regulär wachsende Funktion sei, ist nach Satz 1 notwendig und hinreichend, daß es $A(x)$ ist, also wegen (3), daß

$$\frac{1}{x\cdot A(x)}\int_0^x A(t)\,dt$$

einen Grenzwert für $x = \infty$ besitzt.

$A(x)$ erfülle die Bedingungen des Satzes 2.[10]) *Aus*

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\,p_\nu\,e^{-\lambda_\nu s}}{\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu\,e^{-\lambda_\nu s}} \to a \quad \text{bei} \quad s \to 0$$

und

$$a_n > O(1)$$

folgt dann

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \to a \quad \text{bei} \quad n \to \infty$$

(wo $a(\lambda_n) = a_n$ gesetzt ist).

[10]) D. h., wegen [9]), daß der Ausdruck

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\,\frac{\lambda_\nu}{x}}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}, \qquad \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1},$$

einen Grenzwert besitzt, wenn $x \to \infty$.

(Eingegangen am 25. Juni 1930.)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Printed in Germany.