БРАНИСЛАВ МАРТИЋ и ДУШАН АДАМОВИЋ

ДВЕ КЛАСЕ ФУНКЦИЈА КОЈЕ НИСУ АНАЛИТИЧКЕ У ТАЧКИ А ИСПУЊАВАЈУ У ЊОЈ CAUCHY—RIEMANN—ОВЕ УСЛОВЕ

Математички весник
1 (16), Св. 2, 1964

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр. 151 — 153.

ДВЕ КЛАСЕ ФУНКЦИЈА КОЈЕ НИСУ АНАЛИТИЧКЕ У ТАЧКИ А ИСПУЊАВАЈУ У ЊОЈ CAUCHY-RIEMANN-ОВЕ УСЛОВЕ

Бранислав Марѿић и Душан Адамовић

(Саопштено 26. септембра 1963)

1. Нека је

$$p_k^r(x) = x^k + a_{k+1}^r x^{k+1} + \cdots + a_r^r x^r \qquad (2 < k < r), \tag{1}$$

при чему су коефицијенти овог полинома произвољни реални бројеви. Означимо са K скуп свих функција $f(z)$ комплексне промењиве z дефинисаних једнакошћу

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} \dfrac{p_n^s(x) - p_m^t(y)}{p_{n-1}^u(x) + p_{m-1}^v(y)} + i\,\dfrac{p_n^s(x) + p_m^t(y)}{p_{n-1}^u(x) + p_{m-1}^v(y)}, \\ \qquad\qquad z = x + iy \neq 0 \quad (p_{n-1}^n + p_{m-1}^v \neq 0) \\ 0 \qquad\qquad , \quad z = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Како ни за једну функцију из скупа K

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{(1+i)\,p_n^s(x) + (i-1)\,p_m^t(y)}{(x+iy)\,[p_{n-1}^u(x) + p_{m-1}^v(y)]}$$

не постоји, јер је, на пример

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \begin{cases} 0 &, \ n \neq m \\ \dfrac{1+i}{2} &, \ n = m \end{cases}$$

кад $z \to 0$ по кривој линији $x^n = y^m$ $(x > 0)$, док је

$$\lim_{z \to 1} \frac{f(z)}{z} = 1 + i$$

кад $z \to 0$ по y-оси, то функције из скупа K немају извод у тачки $z = 0$, тј. нису аналитичке у тој тачки.

Како је, даље,

$$u_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{p_n^s(x)}{x p_{n-1}^u(x)} = 1$$

и

$$u_y(0, 0) = -1, \quad v_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 1,$$

функције $f(z)$ у тачки $z = 0$ испуњавају *Cauchy-Riemann*-ове услове.

Напоменимо да у специјалном случају кад је $n = s = m = t = 3$ и $u = v = 2$ из скупа K добијамо функцију коју је конструисао *Pollard* [1], показавши да

Cauchy-Riemann-ови услови нису довољни за аналитичност функције у тачки. Наиме, та његова функција је дефинисана једнакошћу

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(1+i)\,x^3-(1-i)\,y^3}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

и непрекидна је у тачки $z=0$.

Што се тиче функција из скупа K, интересантно је приметити да оне могу у тачки $z=0$ бити непрекидне или прекидне, шта више без граничне вредности кад $z\to 0$. На пример, ако су бројеви m и n парни, функција $f(z)$ је, што се лако показује, непрекидна за $z=0$. С друге стране, функција

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3+x^5}+i\,\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3+x^5}, & z=x+iy\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

припада скупу K, а за $t>0$

$$I_m\{f(t-it)\}=\frac{2}{t}\to+\infty, \qquad t\to+0.$$

2. Означимо са E скуп функција $f(z)$ комплексне променљиве z које су у области која садржи тачку $z=0$ дефинисане на следећи начин

$$f(z)=\begin{cases}R(z)\,e^{-1/z^{4k}}, & z\neq 0, \quad (k=1,2,\ldots)\\ 0 & z=0\end{cases} \tag{3}$$

где је $R(z)$ произвољна рационална функција.

Из

$$f(z)=R(z)\,e^{-1/z^{4k}}=u(x,y)+iv(x,y)$$

за $y=0$ добијамо

$$R(x)\,e^{-1/x^{4k}}=\{R_e[R(x)]+iI_m[R(x)]\}\,e^{-1/x}=u(x,0)+iv(x,0),$$

где $R_e(a)$ и $I_m(a)$ означава реални и имагинарни део од a. Одатле,

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}R_e[R(x)]\,e^{-1/x^{4k}}=0$$

и даље, после кратког рачуна, слично

$$u_y(0,0)=v_x(0,0)=v_y(0,0)=0,$$

тј. *Cauchy-Riemann*-ovi услови испуњени су у тачки $z=0$. Очевидно је, с друге стране, да функције из скупа E немају граничну вредност кад $z\to 0$, јер је тачка $z=0$ есенцијални сингуларитет сваке такве функције.

Последња класа функција $f(z)$ представља генерализацију примера који се наводи у уџбенику *E. C. Titchmarsh*-а [2].

3. У [3] *S. Ćetković* је доказао да постоји класа H_p функција $f(z)$ таквих да су оне прекидне у свакој тачки, а да при том на једном скупу

свуда-густо распоређених тачака задовољавају *Cauchy-Riemann*-ove једначине. Међутим, класе K и E функција $f(z)$ из тачака 1. и 2. не могу се упоређивати са овом класом H_p.

На крају ћемо приметити да се класе K и E функција $f(z)$могу лако модификовати тако да сви они закључци који су важили за тачку $z=0$ важе у некој произвољно одабраној тачки $z=\alpha+\beta i$.

LITERATURA

[1] T. Copson, *Theory of functions of a complex variable*, London, str. 41.

[2] E. C. Titchmarsh, *Theory of functions*, Oxford University press, str. 70.

[3] S. Ćetković, *Nekoliko priloga teoriji svuda-gusto neprekidnih funkcija*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija Matematika i fizika, № 33 (1960).

DEUX CLASSES DE FONCTIONS NON ANALYTIQUES DANS LE POINT OÙ ELLES SATISFONT AUX CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMANN

B. Martić et *D. Adamović*

Résumé

On cite deux classes de fonctions de variable complexe, à savoir celle des fonctions (2), définies au moyen des polynômes réels (1), et celle des fonctions (3), où $R(z)$ désigne une fonction rationnelle arbitraire, qui ne sont pas analytiques dans le point $z=0$, bien qu'elles satisfassent aux conditions de Cauchy-Riemann dans ce point. On remarque que les fonctions de la première classe peuvent être continues ou discontinues dans le point $z=0$.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
1 (16), 1964, стр. 153—156.

AN ELEMENTARY INEQUALITY

M. Marjanović

(Communicated October 8, 1963)

The aim of this note is a generalization of the following inequality

$$|x+y|+|y+z|+|z+x|\leq|x+y+z|+|x|+|y|+|z|, \tag{1}$$

where x, y, z are three arbitrary real numbers.

Some generalizations of this inequality, when x, y, z are arbitrary vectors, have been given in [1], [2], [3], where these authors refer to it as Hlawka's inequality.