MATEMATIČKI FAKULTET, UNIVERZITET U BEOGRADU

MASTER RAD

SMER: Teorijska matematika i primene
TEMA: *Zlatni presek*
STUDENT: *Jelena Milojković*

MENTOR:
dr. Zoran S. Lučić

ČLANOVI KOMISIJE:
mr. Miroslava Antić i
dr. Srđan N. Vukmirović

Beograd, 2009. godina

Zlatni presek

Jelena Milojković

Beograd, 2009. godina

Sadržaj

„Najfinija stvar koju možemo iskusiti je misteriozno. To je emocija koja je osnovna i koja se nalazi u kolevci prave umetnosti i nauke. Onaj kome je to poznato, a ne može se više čuditi i biti iznenađen, je kao mrtav, kao oduvana sveća.“

Albert Einstein (1879-1955)

Glava 1

Sažetak

Cilj ovog rada je upoznavanje sa *zlatnim presekom*, njegovom povezanošću sa pravilnim poligonima i Fibonačijevim nizom.

Da bismo se upoznali sa *zlatnim presekom*, na početku ćemo se kratko osvrnuti na istorijat *zlatnog preseka*, nakon čega ćemo pažnju posvetiti konstruisanju *zlatnog preseka* i upoznavanju sa njegovim osobinama. Upoznaćemo se sa pojmom *zlatnog pravougaonika*, *zlatne spirale* i *zlatnog trougla*, kao i sa vezom između zlatnog trougla i konstruisanja pravilnog petougla i pravilnog desetougla. Dokazaćemo da stranice pravilnog šestougla i pravilnog desetougla, upisanih u isti krug, grade *zlatni presek*. Takođe, dokazaćemo i važenje zanimljive relacije između dužina stranica pravilnog petougla, pravilnog šestougla i pravilnog desetougla upisanih u isti krug ($a_{10}^2 + a_6^2 = a_5^2$). Nakon toga, biće reči o *Fibonačijevom nizu* i njegovoj povezanosti sa *zlatnim presekom*.

Kako su *zlatni presek* proučavali i koristili mnogi umetnici i arhitekte u stvaranju svojih dela, na kraju rada su opisani primeri takve njegove upotrebe. Pored toga, biće navedeni i primeri pojavljivanja *zlatnog preseka* i *Fibonačijevog niza* u prirodi.

Glava 2

Zlatni presek

Podelimo duž tako da se veći deo odnosi prema manjem kao cela duž prema većem delu.

Zlatni presek

Zašto je baš ova podela različita od svih ostalih? Da li tačka kojom smo podelili duž definiše podelu skladniju od svih ostalih? Da li upravo ovo predstavlja univerzalnu matematičku formulu lepote za kojom je vekovima tragano?

Nepoznato je kada je tačno otkrivena i primenjena, ali najverovatnije se njeno otkrivanje događalo više puta kroz istoriju, čime bi se moglo objasniti postojanje više različitih imena kojima su je nazivali. Jedno od njih je i *zlatni presek*!

U zavisnosti od konteksta, pojam *zlatnog preseka* može označavati *tačku*, koja deli duž tako da se veći deo odnosi prema manjem kao cela duž prema većem delu, zatim može označavati upravo opisani *odnos, proporciju, podelu* ili pak *broj*.

Glava 3

Istorija zlatnog preseka

3.1 Stari Egipat

Postoje oni koji tvrde da su još stari Egipćani koristili *zlatni presek* prilikom izgradnje piramida, te da je npr. odnos dužine stranice Velike piramide i njene visine (približno) jednak *zlatnom preseku*.

Pitanje je da li je ovaj odnos za Egipćanje zaista predstavljao *zlatni presek* ili je samo reč o slučajnosti, jer ne postoje pisani dokazi o tome da su Egipćani znali za *zlatni presek* i da su ga koristili prilikom izgradnje piramida.

Rhind Papirus, koji datira iz 1650. godine pre nove ere, jedan je od najstarijih pronađenih matematičkih radova. U njemu su opisane metode i problemi iz vremena drevnog Vavilona i Egipta. Pored ostalog, sadrži i rešenja za neke probleme koji su u vezi sa piramidama, ali se u njemu ne pominje *zlatni presek*.

3.2 Stara Grčka

Grci su kompletan izgled *Partenona* (Parthenon, V vek pre nove ere) na Akropolju u Atini zasnovali na „zlatnoj proporciji“. Periklo je 448. godine pre nove ere poverio nadzor nad izgradnjom Partenona Iktinu i Kalikratu, a za ukrašavanje je bio zadužen, grčki skulptor i matematičar, *Fidija* (Phidias, 480–430 stare ere). Fidija je proučavao *zlatni presek* i primenjivao stečeno znanje prilikom pravljenja skulptura kojima je ukrašavao Partenon. Za njegova dela se kaže da su ideal harmonične ravnoteže božanskog i ljudskog.

Mnoge proporcije Propileja na atinskom Akropolju arhitekte Mnezikla, takođe su u skladu sa „zlatnom podelom“.

3.3 Pitagorejci

Pitagora i njegovi sledbenici su umeli da konstruišu pravilan petougao na osnovu znanja o *zlatnom preseku*, a verovatno su ga i definisali kao podelu jedne dijagonale pravilnog petougla tačkom koja pripada drugoj dijagonali.

Pentagram

Pitagorejci su pentagram koristili kao simbol bratstva. Nazivali su ga *Zdravlje* [1] (Higija - kako se zvala i grčka boginja zdravlja) i u njemu videli matematičku savršenost. Zdravlje, tj. harmoniju tela, doveli su u vezu sa harmonijom matematičke podele u *srednjoj i krajnjoj razmeri* (tj. sa *zlatnim presekom*). [11, str.5]

Kao što ćemo kasnije videti, vrednost [2] *zlatnog preseka* je iracionalan broj. Jedna priča govori o tome da je, kada je u V veku pre nove ere, mamematičar Hipas iz Metaponta otkrio da je *zlatni presek* broj koji nije celi, pa čak nije ni racionalan broj, time potpuno šokirao sledbenike čuvenog Pitagore. Pogled na svet Pitagorejaca zasnivao se na izuzetnom poštovanju prema celim pozitivnim brojevima i njihovim razlomcima, tj. odnosima celih pozitivnih brojeva. Saznanje da postoje brojevi, poput *zlatnog preseka*, čiji broj decimala ide u beskonačnost, bez postojanja bilo kakvog ponavljanja ili obrasca, izazvala je pravu filozofsku krizu. Kako je u svojoj knjizi posvećenoj *zlatnom preseku* napisao Mario Livio, Pitagora je u osnovi verovao da je postojanje takvih brojeva tako užasno da mora predstavljati neku vrstu kosmičke greške, one koja bi trebala biti potisnuta ili čuvana u tajnosti. [10, str.5]

[1] Pentagram sa slike nalazi se u knjizi Henrija Kornelijusa Agripe (Heinrich Cornelius Agrippa, 1486.-1535.). Pitagorejska slova su ispisana oko unutrašnjeg kruga: $\acute{\upsilon}\upsilon\iota\epsilon\iota\alpha$ (Higija).

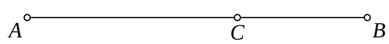
[2] pod *vrednošću zlatnog preseka* podrazumevamo broj koji predstavlja odnos dužine većeg dela prema dužini manjeg, odnosno odnos dužine cele duži prema dužini većeg dela, kada je duž podeljena *zlatnim presekom*

3.4 Euklid

Prvu jasnu definiciju onoga što je kasnije nazvano *zlatni presek* dao je, oko 300 godina pre nove ere, osnivač geometrije kao formalizovanog deduktivnog sistema, *Euklid iz Aleksandrije* (Euklid, 365–300 pre nove ere) u svojim *Elementima*.

Euklid

Euklid je definisao proporciju koja proizilazi iz jednostavne podele duži koju naziva *podelom u srednjoj i krajnjoj razmeri*. Govorio je da je duž podeljena *u srednjoj i krajnjoj razmeri* kada se cela duž prema većem delu odnosi kao veći deo prema manjem.



Euklidova podela u srednjoj i krajnjoj razmeri

Drugim rečima, ako je odnos dužine AC prema CB jednak kao odnos AB prema AC, tada je duž AB podeljena tačkom C u *srednjoj i krajnjoj razmeri*. Duž AB je duža od duži AC. Takođe i duž AC je duža od CB.

Zahvaljujući poznavanju *podele u srednjoj i krajnjoj razmeri*, kako je Euklid nazivao *zlatni presek*, Euklid u četvrtoj knjizi Elemenata, konstruiše prvo *zlatni trougao* kao jednakokraki trougao čiji je svaki ugao na osnovi dva puta veći od trećeg ugla. [8, IV.10] Nakon toga, na osnovu prethodne konstrukcije, u istoj knjizi Elemenata, u dati krug upisaće pravilni petougao. [8, IV.11]

Euklidovi Elementi [3]

Koristeći znanja u vezi sa *podelom u srednjoj i krajnjoj razmeri*, Euklid će, u trinaestoj knjizi Elemenata, utvrditi veoma zanimljivu vezu, a to je da, ako je krug opisan oko pravilnog petougla, biće kvadrat strane petougla jednak zbiru kvadrata strane šestougla i kvadratu strane desetougla upisanih u isti krug. [8, XIII.10] Trinaesta knjiga Elemenata završava se konstrukcijama pravilnog ikosaedra i pravilnog dodekaedra koje takođe zahtevaju poznavanje *podele u srednjoj i krajnjoj razmeri.*

3.5 Fibonači

Leonardo Pisano Fibonacci

Fibonači (Leonardo Pisano Fibonacci, 1170–1240) je rođen u Pizi. Živeo je u Bugiji, luci na severu Afrike smeštenoj istočno od Alžira, gde je stekao osnovno obrazovanje. To mu je omogućilo da se upozna sa arapskom aritmetikom i algebrom. U Bugiji se, praveći društvo svome ocu, poslovnom čoveku, susretao sa carinicima i trgovcima kod kojih je imao prilike da

[3] Naslovna strana prvog prevoda Euklidovih Elemenata na engleski jezik Ser Henrija Biligslija (Sir Henry Billingsley, 1570)

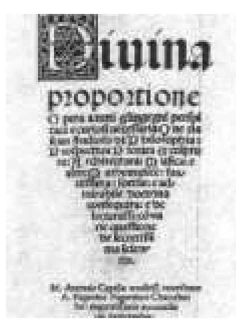
vidi kako rade sa različitim numeričkim sistemima i metodama aritmetičkih operacija, kao i da ih međusobno upoređuje. Tokom života imao je priliku da poseti mediteranske zemlje, uključujući Grčku, Egipat i Siriju. Posmatrao je cene ispisane arapskim brojevima kao i način na koji ih trgovci sabiraju koristeći abakus.

Fibonači je 1202. godine objavio *Knjigu o abakusu* (Liber Abaci) u kojoj je postavio i rešio problem u vezi sa rastom broja zečeva, a u vezi sa kojim je nastao niz 1,1,2,3,5,8,13... koji dobija ime *Fibonačijev niz.* Definišući ovaj problem, koji na prvi pogled nema veze sa *zlatnim presekom*, Fibonači je značajno proširio opseg primene *zlatnog preseka.* U trenutku kada je *Knjiga o abakusu* objavljena, samo je još nekolicina privilegovanih Evropskih intelektualaca, koji su proučavali prevode radova arapskih matematičara, bila upoznata sa hindu-arapskim brojevima koje danas koristimo. Fibonačijev niz bio je poznat još u šestom veku indijskim matematičarima, a Fibonači ga je približio Evropi. [11, str.270]

3.6 Fra Luka Pačoli

Renesansni matematičar, *fra Luka Pačoli* (fra Luca Pacioli, oko 1445–1517), rođen je u Toskani, u mestu Borgo San Sepolkro. Mnogi ga smatraju ne baš originalnim matematičarom, ali i pored toga, našao se na pravom mestu u pravo vreme i ostavio značajan trag iza sebe. Kako je Pačoli živeo u doba pronalaska štampe, njegova dela su nebrojeno puta preštampavana i dugo su služila kao osnovni udžbenik.

Prva njegova knjiga, pod nazivom *Suma znanja iz aritmetike, geometrije, učenje o proporcijama i proporcionalnosti* (Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita), odštampana je 1494. godine. Pisana je na italijanskom jeziku i objavljena je u Veneciji. U njoj je, fra Luka Pačoli, opisao dotadašnja znanja iz aritmetike, algebre i trigonometrije. Pačolijevo delo *Suma* je predstavljalo prerađeno izdanje Fibonačijeve *Knjige o abakusu.*


Diuina
proportione

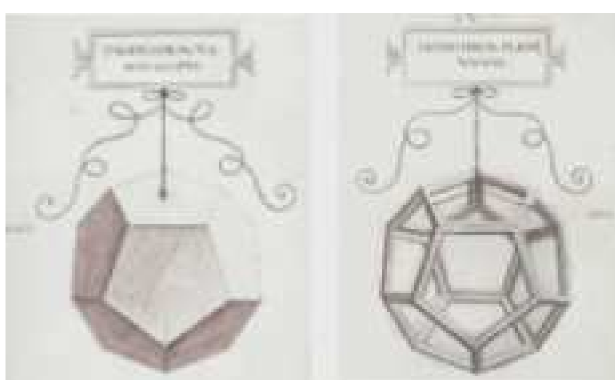
De Divina Proportione

Knjigu pod nazivom *O božanstvenoj proporciji* (De Divina Proportione), Pačoli je napisao 1509. godine. Prvi deo ove knjige posvećen je *Ludoviku Sforci* i odnosi se na teoriju geometrijskih proporcija, pre svega na *zlatni presek*. Napisan je između 1496. i 1499. godine, pod uticajem njegovih prijatelja, slavnih umetnika, *Pjera dela Frančeska* i *Leonarda da Vinčija*, koji su i sami bili poznavaoci geometrije i mnoga geometrijska znanja, pa i *zlatni presek*, su koristili u svome slikarstvu. Drugi deo knjige je posvećen arhitekturi. Treći deo predstavlja italijanski prevod sa latinskog jezika spisa *Pjera dela Frančeska* za koji Luka Pačoli nije priznao Frančeskino autorstvo.

Međutim, Pačoli je u svojoj knjizi uspeo da, pored pet Arhimedovih tela koja je rekonstruisao Pijero dela Frančeska, rekonstruiše još jedno Arhimedovo telo, čiji je stakleni model naslikao Jakopo de Barbieri na portretu Pačolija. Ovaj portret se čuva u Nacionalnom muzeju u Napulju. [11, str.280]

Jakopo de Barbieri, portret Luke Pačolija

Knjiga *O božanstvenoj proporciji* je posebno vredna zbog toga što sadrži ilustracije stvorene rukom Leonarda da Vinčija. U njoj je Leonardo nacrtao pet Platonovih tela. Leonardu se pripisuju sve ilustracije za izdanje iz 1509. godine. [11, str.280] [1, str. 9]



Leonardove ilustracije knjige De Divina Proportione

Sačuvana su samo dva rukopisa ove knjige. Jedan se nalazi u biblioteci univerziteta u Ženevi (kodeks 250), a drugi u Ambrozijevoj biblioteci *Ambrozijani* u Milanu (kodeks 170).

3.7 Klavijus

Kristofer Klavijus (Christopher Clavius, 1538–1612), nemački matematičar i astronom, koji je bio glavni arhitekta modernog Gregorijanskog kalendara, u svom prevodu Euklidovih *Elemenata* na latinski jezik iz 1574. godine *zlatni presek* naziva *proporcionalnom podelom*. [11, 128.str.]

3.8 Kepler

Nemački matematičar, astronom i astrolog, *Johan Kepler* (Johannes Kepler, 1571 - 1630), rekao je da: "geometrija ima dva blaga: jedno od njih je Pitagorina teorema, a drugo je *zlatni presek*. Prvo se može porediti sa vrednošću zlata, a drugo sa vrednim draguljem". *Kepler zlatni presek* naziva i *božanstvenom proporcijom* (kao Luka Pačoli), ali i *neprekidnom proporcijom*.

3.9 Martin Om

Po svemu sudeći, najverovatnije je pojam *zlatni presek*, tek u prvoj polovini devetnaestog veka, uveo profesor Berlinskog univerziteta *Martin Om*[4] (Martin Ohm, 1792-1872) u drugom izdanju svog udžbenika *Čista elementarna matematika* (Die Reine Elementar-Mathematik). [6, 128.str.] Martin Om u svojoj knjizi jasno ostavlja utisak da nije on izmislio termin *zlatni presek*, već da je prihvatio opšte korišćeno ime. Činjenica, da ovaj pojam nije koristio u prvom izdanju svoje knjige objavljenom 1826, ukazuje na to da je naziv *zlatni presek* stekao svoju popularnost oko 1830. godine. Moguće je da se, pre toga, ovo ime koristilo usmeno, najverovatnije u nematematičkim krugovima.

3.10 Mark Bar

U stručnoj matematičkoj literaturi, uobičajen simbol za *zlatni presek* je grčko slovo τ od grčke reči $\tau o\mu\eta$, što znači „presek".

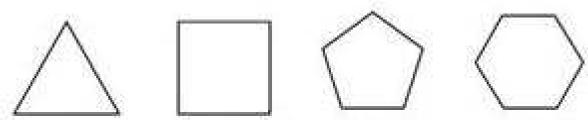
[4] Njegov brat je fizičar Georg Simon Om po kome je nazvan čuveni Omov zakon u elektromagnetizmu

$$\Phi \quad \phi$$

Na početku dvadesetog veka, američki matematičar Mark Bar (Mark Barr), dao je preseku novo ime. Za označavanje *zlatnog preseka* uveo je novi simbol Φ, od prvog (grčkog) slova imena čuvenog grčkog skulptora Fidija ($\Phi\varepsilon\iota\delta\iota\alpha\varsigma$).

3.11 Konstrukcija pravilnih poligona

Pravilni poligoni su, dugo kroz istoriju, bili predmet interesovanja mnogih naroda. Konstruisanje lenjirom i šestarom pravilnog trougla, kvadrata i pravilnog šestougla je jednostavno i bilo je poznato već i narodima pre stare Grčke.



Pravilni poligoni

Moguće je da je potreba za uvođenjem pojma *zlatnog preseka* u geometriju nastala baš tokom rešavanja problema u vezi sa konstrukcijom pravilnog petougla. Pitagorejci su uspeli da konstruišu pravilan petougao uz pomoć *zlatnog preseka*. Nisu uspeli da konstruišu pravilan sedmougao i pravilan devetougao. Mnogo kasnije je pokazano (Gaus, Vancel) da preostala dva problema i nije moguće rešiti šestarom i lenjirom.

Euklid, u svom obimnom delu Elementi, opisuje ona geometrijska znanja koja su neophodna za poznavanje pravilnih geometrijskih tela. Počevši od konstrukcije pravilnog trougla i završavajući sa konstrukcijom pravilnih poliedara, Euklid, na veoma jasan način, ističe značaj „pravilnosti“ u geometriji.

3.12 Gaus, Vancel - konstrukcija pravilnih poligona

U devetnaestom veku, sa svojih devetnaest godina *Gaus* (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855.) je utvrdio da se pravilni n-tougao može konstruisati ako su neparni delitelji broja n međusobno različiti i prosti *Fermaovi brojevi*

$$2^{2^k} + 1.$$

Tako je moguća konstrukcija pravilnih poligona koji imaju 3, 5, 17, 257,... stranica.

Johann Carl Friedrich Gauss

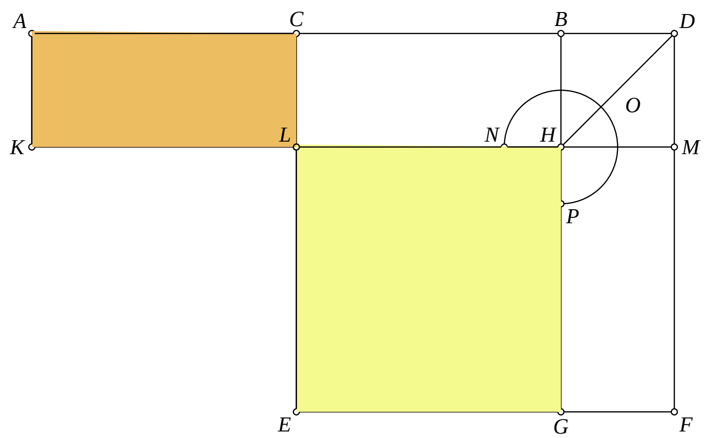
Vancel (Pirre Laurent Wantzell, 1814–1848) je nakon Gausa dokazao da Gausov uslov za konstrukciju n-tougla nije samo dovoljan već i potreban. Na osnovu toga sledi da šestarom i lenjirom nije moguće konstruisati pravilni sedmougao (jer 7 nije Fermaov broj), kao ni pravilan devetougao (jer delioci broja 9 nisu međusobno različiti). [11, 129.str.]

Glava 4

Konstruisanje zlatnog preseka

4.1 Euklidova podela u srednjoj i krajnjoj razmeri

Euklidovi Elementi, II.6. Kako sledeće tvrđenje Euklid koristi prilikom konstruisanja *zlatnog preseka*, pogledajmo prvo njegov dokaz[1].



Euklidovi Elementi II.6

U šestom stavu druge knjige Elemenata [8, II.6] Euklid dokazuje da ako se duž prepolovi i doda joj se nova duž, tada je pravougaonik sačinjen od

[1] U dokazima opisanim u ovom radu, pogotovu kada je reč o dokazima preuzetim iz Euklidovih elemenata, ponekad će biti korišćeni termini specifični za vreme u kome su dokazi nastajali (npr. „crtamo tačke“). U savremenoj matematici koriste se drugačiji termini. Na primer, savremenom matematičkom terminologijom bi termin „nacrta“ zamenili terminom „konstruiše“.

cele i dodate duži zajedno sa kvadratom na polovini duži jednak kvadratu na polovini duži i dodatoj duži (tj. „$AKMD + LEGH = CEFD$“).

Neka je duž AB prepolovljena tačkom C i neka je duž BD dodata duži AB. Treba dokazati da je pravougaonik sačinjen od AD i DB zajedno sa kvadratom nad CB jednak kvadratu nad CD.

Nacrtajmo kvadrat $CEFD$ nad CD i spojimo DE. Nacrtajmo BG kroz tačku B paralelno sa EC ili DF, nacrtajmo KM kroz tačku H paralelnu sa AB ili EF i, dalje, nacrtajmo AK kroz A paralelnu sa CL ili DM.

Kako je AC jednako CB biće i pravougaonik određen sa AL jednak pravougaoniku određenom sa CH. Ali kako je pravougaonik određen sa CH jednak pravougaoniku određenom sa HF biće i pravougaonik određen sa AL jednak pravougaoniku određenim sa HF.

Dodajmo svakom od njih pravougaonik CM. Tada sledi da je celi pravougaonik određen sa AM jednak gnomon[2] u NOP.

AM je pravougaonik određen sa AD i DB, i $DM = DB$, pa je gnomon NOP takođe jednak pravougaoniku određenom sa AD i DB.

Dodajmo svakom po kvadrat nad LG koji je jednak kvadratu nad BC. Tada je pravougaonik određen sa AD i DB zajedno sa kvadratom nad CB jednak gnomonu NOP zajedno sa kvadratom nad LG.

Gnomon NOP i kvadrat nad LG daju kvadrat $CEFD$, koji je određen sa CD.

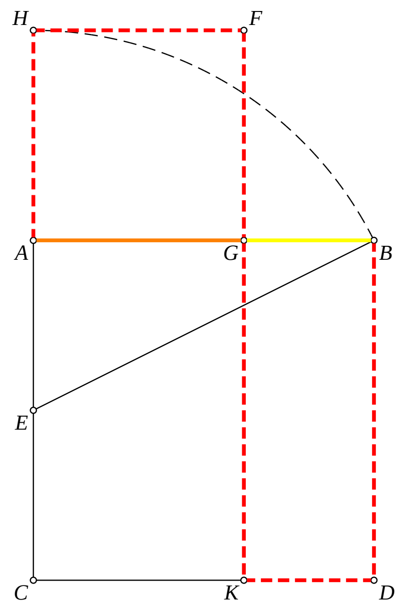
Otuda je pravougaonik određen sa AD i DB zajedno sa kvadratom nad CB jednak kvdratu nad CD.

Dakle, ako duž prepolovimo i dodamo joj novu duž, tada će pravougaonik određen celom duži i dodatoj duži zajedno sa kvadratom nad polovinom duži biti jednak kvadratu nad polovinom duži kojoj je dodata nova duž. [8, II.6]

Euklidovi Elementi, II.11. Euklid, u jedanaestom stavu druge knjige Elemenata [11, str.131] [8, II.11], na sledeći način, konstruiše tačku koja datu duž razlaže na dve duži takve da se veća prema manjoj odnosi kao cela duž prema većoj:

[2] Gnomon je ravna figura koja se dobija kada se ukloni paralelogram iz ugla većeg paralelograma.

Neka je AB duž koju je potrebno podeliti tako da je pravougaonik obuhvaćen celom duži i manjim odsečkom jednak kvadratu nad većim odsečkom. Nad AB nacrtamo kvadrat $ABCD$. Tačkom E prepolovimo AC. Nacrtamo duž BE. Produžimo CA do H tako da je EH jednako BE. Nacrtamo kvadrat (čija je dijagonala) HG na AH i produžimo FG do K. Tvrdimo da je AB podeljeno tačkom G tako da je pravougaonik obuhvaćen dužima AB i BG jednak kvadratu na AG.



Euklidova kostrukcija podele u srednjoj i krajnjoj razmeri

Na osnovu ranije dokazanog Euklidovog tvrđenja II.6, pravougaonik obuhvaćen dužima CH i HA zajedno sa kvadratom na AE jednak je kvadratu na EH jer je duž AC prepolovljena tačkom E, a prava AH njeno produženje. [8, II.6] Kako je EH jednako duži EB, pravougaonik obuhvaćen dužima CH i HA zajedno sa kvadratom na AE jednak je kvadratu na EB. Sa druge strane, kvadrat na EB jednak je kvadratima na BA i na AE, jer je ugao kod tačke A prav[I.47]. Na osnovu prethodnog sledi da je pravougaonik od CH i HA zajedno sa kvadratom na AE jednak kvadratima na BA i AE. Kada oduzmemo zajednički kvadrat na AE, onda je pravougaonik od CH i HA jednak kvadratu na AB. Oduzimanjem pravougaonika obuhvaćenog dužima CH i HA pravougaonik (čija je dijagonala) HK jer je AH jednako HF, a kvadrat na AB je AD, biće pravougaonik HK jednak kvadratu AD. Ako se oduzme zajednički pravougaonik AK, ostatak HG biće jednak pravougaoniku GD. Kako je GD pravougaonik obuhvaćen dužima AB i BG, jer je duž AB jednaka duži BD, a HG je kvadrat na AG, biće pravougaonik obuhvaćen dužima AB i BG jednak kvadratu na AG.

Ovako je data duž AB podeljena tačkom G tako da je pravougaonik obuhvaćen dužima AB i BG jednak kvadratu na AG, što je i trebalo dokazati.

Pogledajmo kako prethodni dokaz izgleda zapisan savremenom matematičkom simbolikom:

Euklid dokazuje da je u tački G duž AB podeljena u srednoj i krajnjoj razmeri, tj. da je

$$AG^2 = AB \cdot BG.$$

Na osnovu [8, II.6] važi:

$$CH \cdot AH + AE^2 = EH^2.$$

Kako je $CH = AH + AC$ i $EH^2 = BE^2 = AB^2 + AE^2$, sledi da je

$$(AH + AC) \cdot AH + AE^2 = AB^2 + AE^2,$$

tj.

$$(AH + AC) \cdot AH = AB^2.$$

Kako je $AH = AG$ i $AC = AB$, biće

$$(AG + AB) \cdot AG = AB^2 = AB \cdot (BG + AG),$$

odakle je

$$AG^2 = AB \cdot BG,$$

pa je i

$$AB : AG = AG : BG.$$

Ovim je dokazano da je duž AB razložena tačkom G na dve duži AG i GB, tako da se cela duž (AB) odnosi prema većem delu (AG) onako kako se veći deo (AG) odnosi prema manjem delu (GB). Ovakvu podelu duži Euklid je nazivao „podela u srednjoj i krajnjoj razmeri“

Pored toga što je duž AB, kako bi mnogo godina posle Euklida rekli, razložena na dve duži *zlatnim presekom*, i razlaganje duži HC tačkom A je *zlatni presek*. Prema prethodnom dokazu:

$$(AH + AC) \cdot AH + AE^2 = AB^2 + AE^2,$$

odakle je

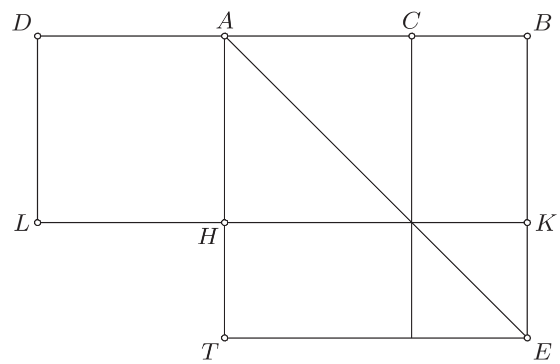
$$(AH + AC) \cdot AH = AB^2,$$

a kako je $AB = AC$ i $AH + AC = HC$ sledi da je

$$HC \cdot AH = AC^2$$

pa je i razlaganje duži HC tačkom A *zlatni presek*.

Euklidovi Elementi, XIII.5. Ranije pomenuto tvrđenje, Euklid je dokazao u stavu pet trinaeste knjige Elemenata. [8, XIII.5] Euklidova formulacija ovog tvrđenja glasi: „Ako je neka duž podeljena neprekidno, pa joj se doda veći deo podeljene duži, biće i cela dobijena duž podeljena neprekidno i njen veći deo je polazna duž.“



Euklidovi Elementi XIII.5

Neka je duž AB podeljena u srednjoj i krajnjoj razmeri tačkom C i neka je AC veći segment. Produžimo duž BA do tačke D, takve da je AD jednako AC. Tvrdimo da je duž DB podeljena u srednjoj i krajnjoj razmeri u tački A i da je polazna duž AB njen veći segment.

Nacrtajmo kvadrat AE nad AB. Kako je AB podeljena u srednjoj i krajnjoj razmeri u tački C, sledi da je pravougaonik nad AB i BC jednak kvadratu nad AC.

CE je pravougaonik određen sa AB i BC, i CH je kvadrat nad AC, pa je pravougaonik CE jednak kvadratu HC.

Pravougaonik HE je jednak pravougaoniku CE, i kvadrat DH je jednak kvadratu HC, pa je i kvadrat DH jednak pravouganiku HE. Sledi da je celi pravougaonik DK jednak celom kvadratu AE.

DK je pravougaonik određen sa BD i DL, pa kako je DL jednako DA i AE je kvadrat nad AB, sledi da je pravougaonik određen sa BD i DA jednak kvadratu nad AB.

Otuda je DB prema BA isto što i BA prema AD. I DB je veće od BA, pa je i BA veće od AD.

Zbog toga je DB podeljeno u srednjoj i krajnjoj razmeri sa tačkom A i AB je veće od AD.

Otuda, ako je duž podeljena u srednjoj i krajnjoj razmeri i doda joj se duž jednaka većem segmentu, onda je cela duž podeljena u srednjoj i krajnjoj razmeri i polazna duž je veći segment.

Konstrukcija „spoljne tačke“ zlatnog preseka Čitajući opis Euklidove konstrukcije preseka u srednjoj i krajnjoj razmeri [11, str.133], možemo zapaziti i način na koji za zadatu duž AC možemo konstruisati tačku H takvu da je razlaganje duži HC tačkom A *zlatni presek*. Za zadatu duž AC opisanu tačku H možemo pronaći tako što konstuišemo tačku B koja pripada upravnoj na A i za koju važi $AB \cong AC$, a zatim krug sa središtem E (polovi AC) koji sadrži tačku B. Presek tog kruga i prave AC je tražena tačka H.

Euklid će u Elementima, na još jednom mestu, u šestoj knjizi stav trideset [8, VI.30], na nov način, utemeljen na pojmu sličnosti, konstruisati podelu duži „u srednjoj i krajnjoj razmeri“.

4.2 Broj Φ u Euklidovoj konstrukciji

U Euklidovoj konstrukciji podele u srednjoj i krajnjoj razmeri, trougao ABE je pravougli, pa zato važi:

$$AB^2 + AE^2 = BE^2,$$

kako je $AE = \frac{AB}{2}$ i $BE = EH$ sledi da je

$$AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = EH^2,$$

a kako je $EH = AE + AH$ biće i

$$AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = (AE + AH)^2 = \left(\frac{AB}{2} + AG\right)^2$$

pa je

$$AB^2 - AB \cdot AG - AG^2 = 0,$$

odakle sledi da je

$$\left(\frac{AB}{AG}\right)^2 - \frac{AB}{AG} - 1 = 0$$

a odavde je

$$\frac{AB}{AG} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots.$$

Broj $\frac{AB}{AG}$, gde je tačka G tačka *zlatnog preseka* duži AB, obeležavamo sa Φ.

Kao što smo već videli, Φ je pozitivno rešenje kvadratne jednačine

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

tj. važi

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0. \tag{4.1}$$

Označimo recipročnu vrednost broja Φ ($\frac{AG}{AB}$) sa malim slovom ϕ:

$$\phi = \frac{1}{\Phi}.$$

Tada, takođe, važi i

$$\phi = \Phi - 1 = 0,6180339887\ldots,$$

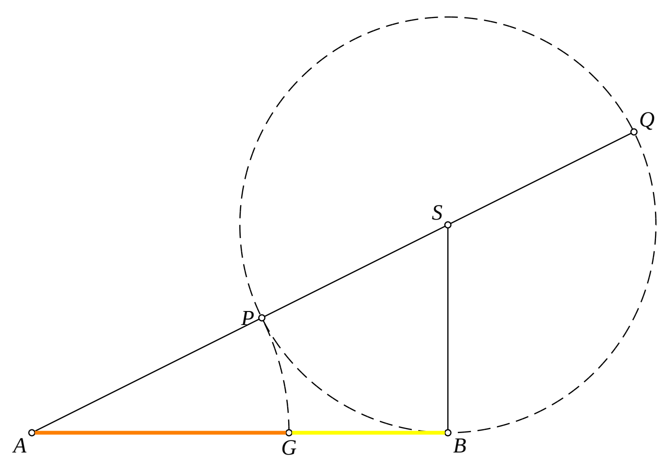
pa važi da je:

$$1 + \phi = \Phi.$$

Primetimo da Φ nije racionalan broj jer $\sqrt{5}$ nije racionalan i da je Φ jedinstveni realni broj kojem je recipročna vrednost za jedan manja od njega samog. [11, str.134]

4.3 Heronova konstrukcija zlatnog preseka

Pogledajmo kako izgleda Heronova konstrukcija *zlatnog preseka* date duži AB:



Heronova konstrukcija zlatnog preseka

Konstruiše se krug k čiji je prečnik podudaran duži AB i koji dodiruje pravu AB u tački B. Nacrta prava koja sadrži tačku A i središte S tog kruga, a zatim tačka G takva da pripada duži AB i krugu sa središtem u tački A koji dodiruje krug k.

Ako pretpostavimo da je $AG = 1$, a $AB = a$, kako je trougao ABS pravougli, važi da je

$$AS^2 = AB^2 + BS^2$$

odakle je

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

tj.

$$1 + a + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

odakle sledi

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

a poznato nam je da je Φ jedino pozitivno rešenje ove jednačine.

Sledi geometrijski dokaz Heronove konstrukcije *zlatnog preseka*. Neka AS seče k u tačkama P i Q, pri čemu je $AP \cong AG$. Na osnovu teoreme o potenciji tačke u odnosu na krug važi:

$$AB^2 = AP \cdot AQ.$$

Kako AB možemo zapisati kao $AG + BG$, a AQ kao $AP + PQ$, važi

$$AB \cdot (AG + BG) = AP \cdot (AP + PQ).$$

Kako je $PQ = AB$ biće i

$$AB \cdot (AG + BG) = AG \cdot (AG + AB).$$

Odatle sledi da je

$$AB \cdot AG + AB \cdot BG = AG^2 + AB \cdot AG,$$

pa je

$$AB \cdot BG = AG^2,$$

tj. razlaganje duži AB tačkom G je *zlatni presek*. [11, str.134] [7, str.27] [15, str.23]

Ova konstrukcija se prvi put pominje u Naizirijevim komentarima Heronovog komentara metode koja se koristi u dokazu teoreme [II.11] u Euklidovim Elementima. Gerardo iz Kremone je u XII veku preveo ovaj tekst na latinski jezik. [11, str.136] [6, str.111]

Primetimo da, ako je $AB = 1$, tada, zbog $AS = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ i $BS = SQ = SP = \frac{1}{2}$, važi:

$$AP = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \phi$$

i

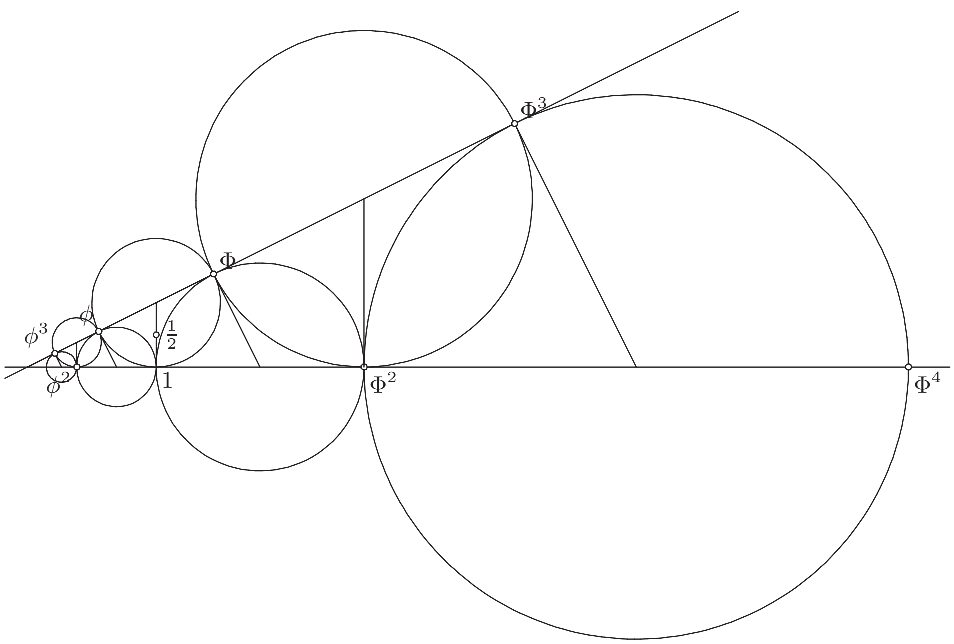
$$AQ = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi.$$

Prethodne vrednosti smo dobili tako što smo dužinu hipotenuze trougla ABS umanjili i uvećali za dužinu poluprečnika kruga k.

Ako sada katetu $BS = \frac{1}{2}$ pravouglog trougla ABS zamenimo katetom dužine $\frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$, a ranije uočenu kružnicu kružnicom sa centrom u tački S poluprečnika $\frac{n}{2}$, primetimo da važi

$$AQ - AP = n.$$

Kako je i $AB^2 = 1$ i $AB = AP \cdot AQ$, za svako $n \in \mathbb{N}$ dobijamo dve recipročne dužine koje se međusobno razlikuju za prirodni broj n, tj. koje su svojim decimalnim reprezentacijama iste posle decimalne tačke.

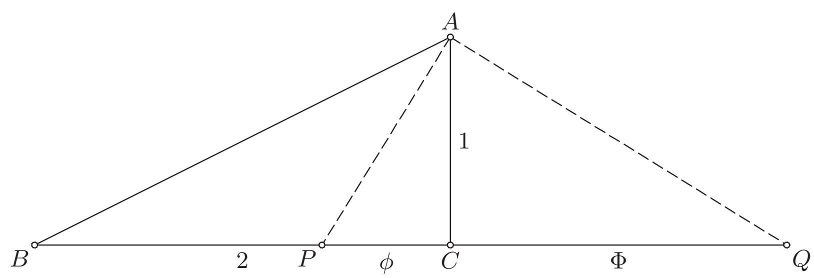


Konstruisanje stepena Φ

Ponavljajući Heronovu konstrukciju, možemo konstruisati stepene brojeva Φ i ϕ, kao što je to na prethodnoj slici predstavljeno [15, str.24].

4.4 Konstrukcija zlatnog preseka uz pomoć simetrale ugla

Pogledajmo još jedan metod konstruisanja *zlatnog preseka*. [15, str.25] U pravouglom trouglu ABC, čije su katete $BC = 2$ i $AC = 1$, konstruišimo unutrašnju i spoljašnju simetralu ugla kod temena A. Ona seče pravu BC u tačkama P i Q.



Konstrukcija korišćenjem simetrale

Kako tačka P deli duž BC u odnosu koji je jednak odnosu stranica AC i AB imamo da je

$$\frac{CP}{BP} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

što zajedno sa jednakošću

$$CP + BP = 2$$

daje

$$CP = \phi.$$

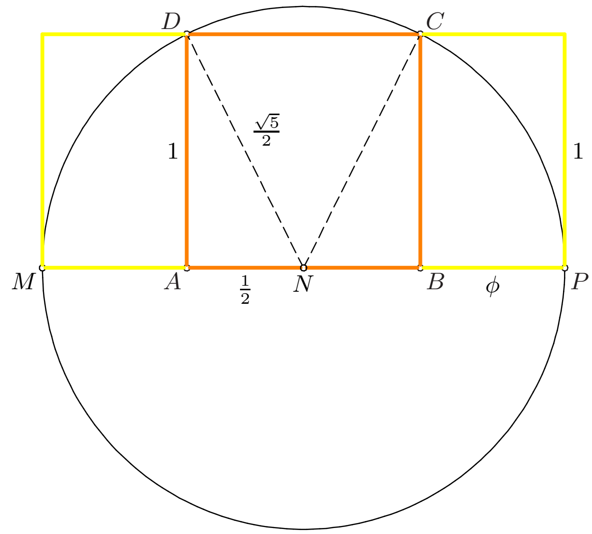
Koristeći teoremu o dužini visine pravouglog trougla ($AC = \sqrt{PC \cdot CQ}$, jer su trouglovi APC i ACQ slični) zaključujemo da je

$$1 = \sqrt{\phi \cdot CQ}$$

$$CQ = \frac{1}{\phi} = \Phi.$$

4.5 Konstrukcija zlatnog preseka - kvadrat i krug

Krug konstruisan iz centra osnove kvadrata, koji sadrži naspramna temena kvadrata, „stvoriće“ *zlatni presek* sa obe strane produžene osnove. [3, str.3]



Konstrukcija zlatnog preseka - kvadrat i krug

Zaista, ako je $ABCD$ kvadrat čija je stranica dužine 1, tada je prečnik kruga sa centrom u tački N (središtu AB), koji sadrži temena kvadrata D i C, jednak $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (AND je pravougli trougao sa katetama dužine $\frac{1}{2}$ i 1 i dužina njegove hipotenuze je jednaka dužini poluprečnika kruga).
Pa je i

$$MN = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

odakle sledi da je

$$MB = MN + NB = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi,$$

dok je

$$AM = MN - AN = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi.$$

Odatle, ponovo, sledi da je

$$MB = AB + AM = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \phi = \Phi.$$

Na osnovu prethodnog biće

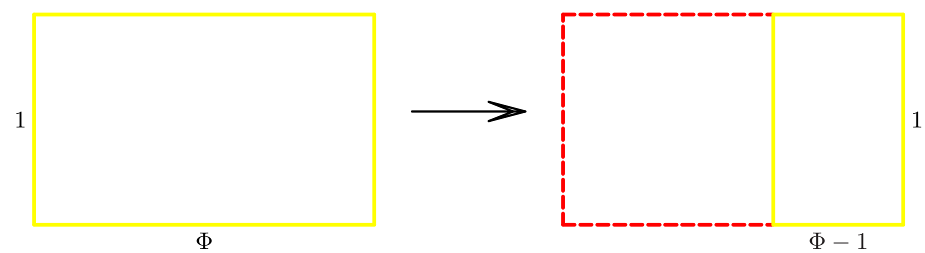
$$AB^2 = 1 = MB \cdot AM,$$

tj. tačka A je *zlati presek* duži MB. Iz istog razloga i tačka B je *zlatni presek* duži AP.

Glava 5

Zlatni pravougaonik

Za pravougaonik čije su stranice u odnosu $1 : \Phi$ kažemo da je *zlatni pravougaonik*. Deljenjem takvog pravougaonika na kvadrat i novi pravougaonik, stranice novodobijenog pravougaonika će biti u odnosu $(\Phi - 1) : 1$.



Zlatni pravougaonik

Kao što smo ranije videli, Φ zadovoljava jednačinu:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0,$$

odakle sledi da je

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0,$$

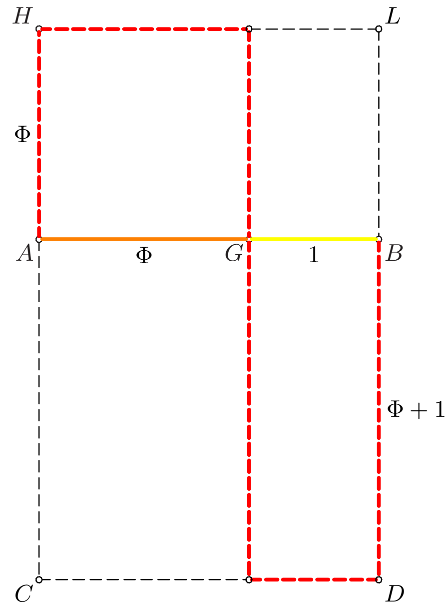
tj.

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi},$$

odnosno

$$\frac{\Phi - 1}{1} = \frac{1}{\Phi},$$

odakle sledi da je i novodobijeni pravougaonik *zlatni pravougaonik*, jer su pomenuti pravougaonici slični, odnosno, jer su i stranice novodobijenog pravougaonika u odnosu $1 : \Phi$.



Euklidova podela u srednjoj i krajnjoj razmeri

Kao što je ranije rečeno, Euklid je još oko 300 godina pre nove ere dao definiciju *zlatnog preseka* koristeći termin *podela u srednjoj i krajnjoj razmeri*, tj. govorio je o podeli duži takvoj da je:
„pravougaonik obuhvaćen celom duži i jednim odsečkom jednak kvadratu na drugom odsečku“, mislivši na podelu duži za koju važi:

$$GB \cdot AB = AG^2,$$

tj.

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AB}{AG}.$$

Ako je $GB = 1$ $(AG = \Phi)$ onda iz prethodne jednakosti sledi da je

$$\Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi}$$

te dobijamo istu jednačinu kao ranije: $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

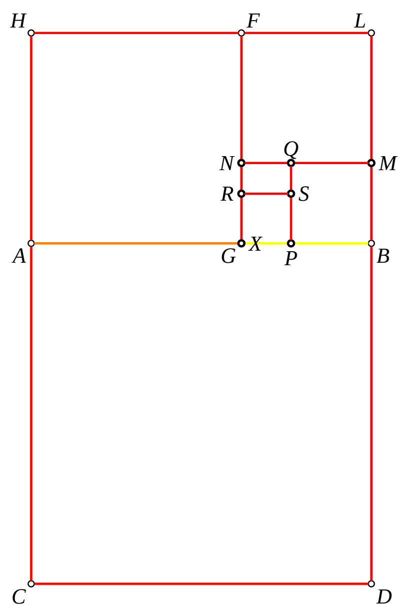
Ukoliko u Euklidovoj konstrukciji *zlatnog preseka* II.11 tačkama H, C i D pridružimo tačku L takvu da je $HCDL$ pravougaonik, primetimo da je

$$\frac{HC}{CD} = \frac{HC}{AC},$$

a kako smo dokazali da tačka A deli duž HC *zlatnim presekom*, tada je i

$$\frac{HC}{CD} = \Phi,$$

tj. odnos veće ivice ovog pravougaonika prema manjoj je Φ, pa je pravougaonik $HCDL$ *zlatni pravougaonik*.



Zlatni pravougaonici

Duž AB razlaže *zlatni pravougaonik* na kvadrat $ABCD$ i pravougaonik $ABLH$ kojem je odnos veće ivice prema manjoj jednak:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AB}{AG} = \Phi,$$

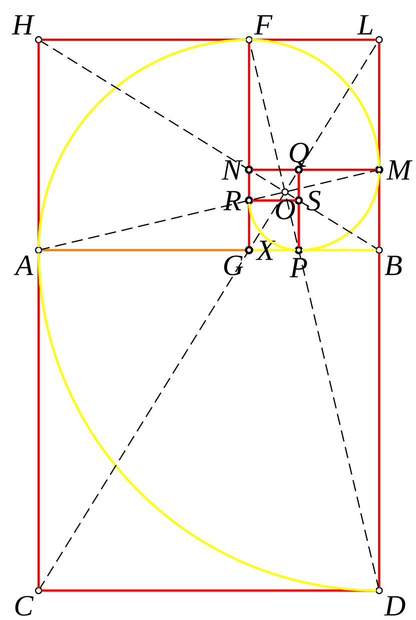
pa je i pravougaonik $ABLH$ *zlatni pravougaonik*.

Slično duž GF razlaže $ABLH$ na kvadrat $ABFH$ i *zlatni pravougaonik* $GBLF$, a duž MN pravougaonik $GBLF$ na kvadrat $MNFL$ i *zlatni pravougaonik* $GBMN$, itd.

Glava 6

Zlatna spirala

Uzastopne tačke koje se nalaze na dužoj ivici pravougaonika i '"dele" - „učestvuju u podeli", *zlatnog pravougaonika* na kvadrat i novi *zlatni pravougaonik*, leže na logaritamskoj spirali koju nazivamo *zlatna spirala*.



Aproksimacija zlatne spirale

Zlatni pravougaonici su međusobno slični (jer imaju iste odnose dužina stranica). Pošto je pravougaonik $BLFG$ homotetičan pravougaoniku $DLHC$, teme G pripada dijagonali CL pravougaonika $DLHC$. Iz istog razloga, teme N *zlatnog pravougaonika* $GBMN$ pripada dijagonali HB pravougaonika $ABLH$. I ne samo to. Pravougaonik $DLHC$ je slika pravougaonika $ABLH$

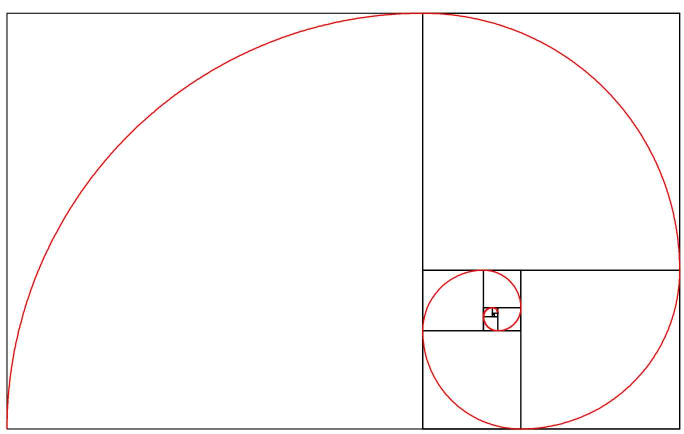
u dilativnoj rotaciji za prav ugao sa koeficijentom Φ, pa su zbog toga prave CL i HB međusobno upravne. Pomenutom dilativnom rotacijom se pravougaonik $FGBL$ preslikava u pravougaonik $ABLH$, a pravougaonik $MNGB$ u pravougaonik $FGBL$ itd. Središte dilativne rotacije je tačka O koja je presek dijagonala CL i HB. Prave AM i DF takođe sadrže tačku O, središte dilativne rotacije. Kako je $OC : OH = \Phi$ (koeficijent dilativne rotacije) i $AC : AH = \Phi$, na osnovu Euklidovog stava VI.3 prema kojem simetrala ugla deli naspramnu stranicu trougla proporcionalno ostalim dvema, sledi da je OA bisektrisa ugla COH. Iz istog razloga OF je bisektrisa ugla HOL. Iz predhodna dva zaključka sledi da su prave AO i FO upravne. Dakle prave CL, HB, AM i FD razlažu ravan na osam međusobno podudarnih uglova i sadrže sva temena svih *zlatnih pravougaonika* u uočenom nizu. Svaka tačka niza R, P, M, F, A, D, $\ldots$ pomenutom dilativnom rotacijom preslikava se u sledeću. Neka je O središte polarnog koordinatnog sistema, a R tačka sa koordinatama $(1,0)$, tačka P će imati koordinate $(\Phi, \frac{\pi}{2})$, $M(\Phi^2, \pi)$, $F(\Phi^3, \frac{3\pi}{2})$, $A(\Phi^4, 2\pi)$, $\ldots$. Polarne koordinate tačaka R, P, M, F, A, D, $\ldots$ su:

$$\rho = \Phi^n \ , \varphi = \frac{\pi n}{2},$$

pa navedene tačke pripadaju logaritamskoj spirali opisanoj jednačinom:

$$\rho = a^{\varphi} \ , a = \Phi^{\frac{2}{\pi}}.$$

Navedena logaritamska spirala seče ivice *zlatnog pravougaonika* pod veoma malim uglom, tako da se može aproksimirati unijom četvrtina krugova upisanih u kvadrate koji pripadaju *zlatnim pravougaonicima*. [11, str.137] [2, str.164]



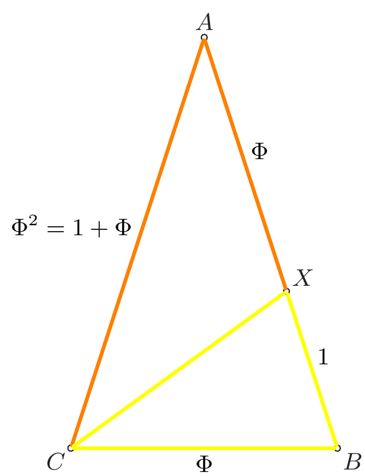
Zlatna spirala[1]

[1]Korigovani WinGCLC primer

Glava 7

Zlatni trougao

Zlatni trougao možemo definisati kao jednakokraki trougao ABC kod koga uočavanjem simetrale ugla kod temena C dobijamo novi trougao CXB koji je *sličan* polaznom trouglu ABC.



Zlatni trougao

Neka je ABC *zlatni trougao* i neka simetrala ugla ACB seče stranicu AB u tački X. Ako je $\angle BCX = \alpha$, tada je i $\angle XCA = \alpha$ jer je X na simetrali ugla ACB. Takođe je i $\angle CAB = \alpha$, jer je, po pretpostavci, trougao ACB sličan trouglu CBX.

Tada važi $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$ (uglovi na osnovici jednakokrakog trougla), dok je zbog sličnosti trouglova ACB i XCB, $\angle BXC = 2\alpha$.

Kako je zbir uglova u trouglu $180°$, sledi da je $5\alpha = 180°$, odakle je $\alpha = 36°$.

Odatle sledi da su uglovi u *zlatnom trouglu* 36°, 72° i 72° (trouglovi ACB, XCB). Uglovi trougla AXC su 36°, 36° i 108°.

Pretpostavimo da je XB dužine 1, a dužinu duži BC označimo sa x. Trouglovi XCB i ACB su jednakokraki, pa je $BC = XC$ i $XC = XA$, i sve pomenute duži su dužine x. Kako je $AC = AB$, sledi da je

$$AC = x + 1.$$

Ali kako je trougao ABC sličan trouglu CXB, važi proporcija

$$AC : BC = BC : BX,$$

tj.

$$AC : x = x : 1$$

pa je tako

$$AC = x^2.$$

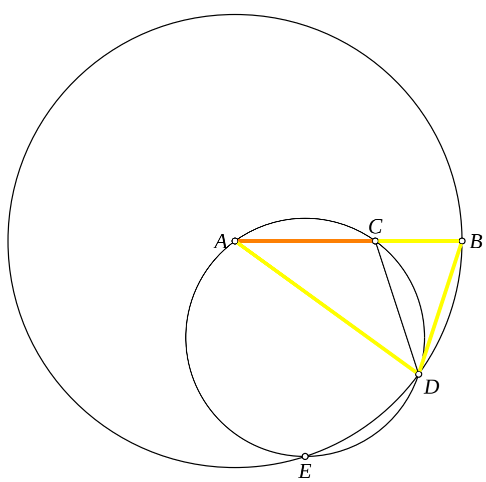
Otuda je

$$x^2 = x + 1,$$

što potvrđuje da je x zaista *zlatni presek* (tj. $x = \Phi$).

7.1 Euklidova konstrukcija Zlatnog trougla

Euklid, u desetom stavu četvrte knjige Elemenata [8, IV.10], konstruiše *zlatni trougao*, tj. „jednakokraki trougao kome su oba ugla na osnovi duplo veća od preostalog ugla“.



Euklidova konstrukcija zlatnog trougla

Podelimo duž AB tačkom C takvom da je pravougaonik određen sa AB i BC jednak kvadratu na CA. Opišimo krug BDE sa centrom A i poluprečnikom AB. Na krugu BDE uočimo tačku D, takvu da je duž BD jednaka duži AC, pri čemu AC nije duže od dijametra kruga BDE. Spojimo AD i DC i opišemo krug ACD oko trougla ACD.

Tada, kako je pravougaonik obuhvaćen dužima AB i BC, jednak kvadratu na AC i važi da je AC jednako BD, biće i pravougaonik obuhvaćen dužima AB i BC jednak kvadratu nad BD.

Kako je tačka B uzeta iz spoljašnjosti kruga ACD i iz tačke B dve duži, BA i BD, imaju dodirnih tačaka sa krugom ACD, i jedna od njih ga seče, a pravougaonik obuhvaćen dužima je jednak kvadratu nad BD, sledi da BD dodiruje krug ACD. [8, III.37]

BD dodiruje krug, a DC ga seče u tački D, pa je otuda ugao BDC jednak uglu DAC. [8, III.32]

Ugao BDC je jednak uglu DAC, te ako dodamo ugao CDA svakome, sledi da je ugao BDA jednak sumi dva ugla CDA i DAC. Ali kako je spoljašnji ugao BCD jednak sumi uglova CDA i DAC, biće i ugao BDA jednak uglu BCD. [8, I.32]

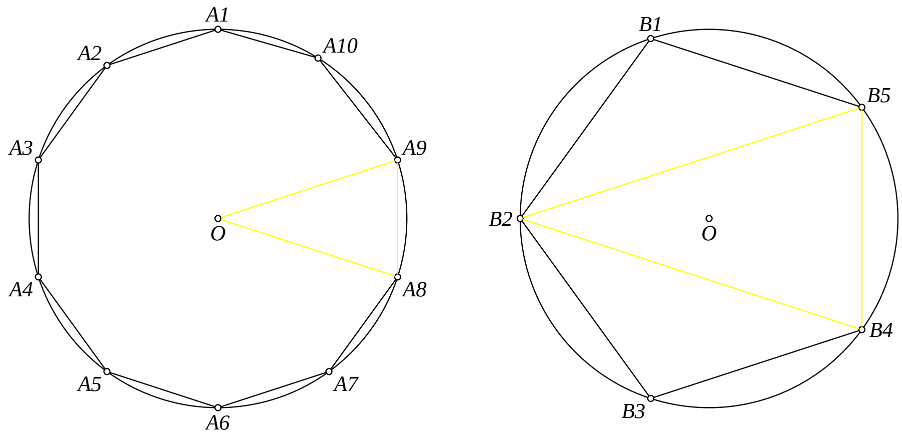
Budući da je ugao BDA jednak uglu CBD, jer je duž AD jednaka duži AB, sledi da je i ugao DBA takođe jednak uglu BCD. [8, I.5] Otuda su sva tri ugla: BDA, DBA i BCD, međusobo jednaka. Kako je ugao DBC jednak uglu BCD, stranica BD je takođe jednaka stranici DC. [8, I.6]

Ali po pretpostavci je BD jednako CA, pa je i CA jednako CD, tako da je i ugao CDA jednak uglu DAC. Otuda je suma uglova CDA i DAC duplo veća od ugla DAC [8, I.5]

I ugao BCD je jednak sumi uglova CDA i DAC, pa je otuda i ugao BCD duplo veći od ugla CAD. Ali kako je ugao BCD jednak svakom od uglova BDA i DBA, svaki od uglova BDA i DBA je takođe duplo veći od ugla DAB

Zato su kod konstruisanog jednakokrakog trougla ABD oba ugla na osnovici duplo veća od preostalog ugla. [8, IV.10]

U nastavku teksta videćemo vezu između *zlatnog trougla* i konstrukcije pravilnih poligona: petougla i desetougla. Videćemo da će, ako opišemo krug oko *zlatnog trougla*, osnovica trougla biti stranica pravilnog petougla upisanog u taj krug, a ako konstruišemo krug kome je središte vrh tog trougla, a naspramna ivica tetiva tog kruga, tada će ta ivica biti stranica pravilnog desetougla upisanog u pomenuti krug.



Zlatni trougao u pravilnom desetouglu i pravilnom petouglu

7.2 Božanstvena proporcija

Konstrukcija pravilnog petougla i pravilnog desetougla. U sedmom poglavlju knjige *De divina proportione*, Luka Pačoli dokazuje da je Φ poluprečnik kruga opisanog oko pravilnog desetougla ivice 1. Na osnovu ove osobine biće moguće konstruisati pravilan desetougao i pravilan petougao.

Neka je AB ivica, a S središte pravilnog desetougla. Ugao kod temena S trougla SAB biće $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$, a uglovi kod temena A i B biće $\frac{2\pi}{5}$. Neka bisektrisa ugla kod temena A seče duž SB u tački P.

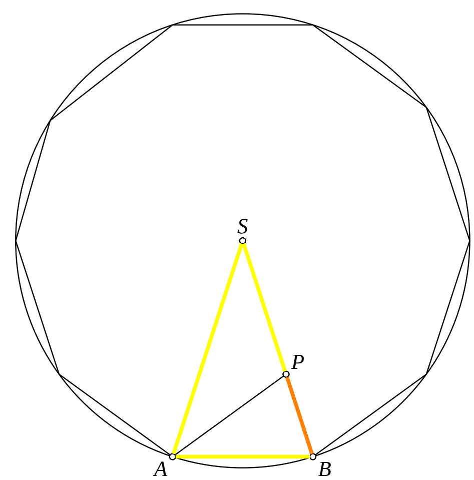
Tada, zbog sličnosti trouglova SAB i ABP važi:

$$SA : AB = AB : BP.$$

Kako je $AB \cong AP \cong SP$ i $SA \cong SB$ biće:

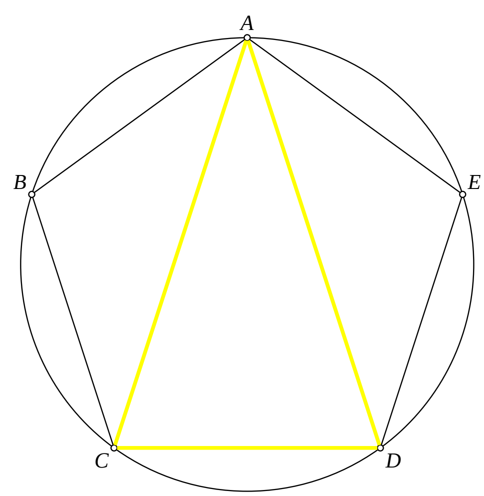
$$SB : SP = SP : BP,$$

pa je P *zlatni presek* duži SB.



Konstrukcija pravilnog desetougla

Dakle, ivica pravilnog desetougla upisanog u zadati krug je veća duž dobijena razlaganjem poluprečnika zadatog kruga *zlatnim presekom*, pa je za konstrukciju pravilnog desetougla dovoljno konstruisati trougao kome su oba ugla na osnovi duplo veća od preostalog ugla (tj. trougao kojem je ugao kod jednog temena dvostruko manji od svakog od ostalih dvaju uglova). [8, IV.10]

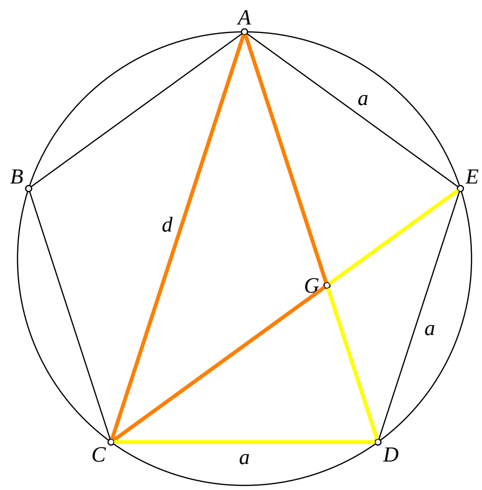


Konstrukcija pravilnog petougla

Euklid, u jedanaestom stavu četvrte knjige Elemenata [8, IV.11], uočava da je i za konstrukciju pravilnog petougla, dovoljno znati konstrukciju *zlatnog* *trougla*. Zaista, u petouglu $ABCDE$ trougao ACD je *zlatan trougao* jer je

$$\angle ADC \cong \angle ACD \cong \angle ACE + \angle ECD \cong 2\angle CAD.$$

Razlaganje dijagonale pravilnog petougla. Luka Pačoli, u devetom poglavlju knjige *De divina proportione*, dokazuje da je razlaganje dijagonale pravilnog petougla tačkom u kojoj je seče druga dijagonala *zlatni presek*. Euklid ovo tvrđenje dokazuje u osmom stavu trinaeste knjige Elemenata. [8, XIII.8]



Zlatni presek dijagonala pravilnog petougla

Zaista, ako je G presek dijagonala AD i CE pravilnog petougla $ABCDE$, budući da su trouglovi AGC i DGE slični, biće

$$AG : GD = AC : DE.$$

Kako je $AC = AD$ (dijagonale uočenog petougla) i $DE = BC$ (stranice uočenog petougla) biće i

$$AG : GD = AD : BC,$$

a kako je $ABCG$ paralelogram tj. kako važi $BC = AG$, biće i

$$AG : GD = AD : AG,$$

tj. sledi da je G tačka zlatnog preseka duži AD, tj. važi da je razlaganje dijagonale pravilnog petougla tačkom u kojoj je seče druga dijagonala *zlatni presek*.

Ako sa a označimo dužinu stranice petougla, a sa d dužinu njegove dijagonale, na osnovu prethodnog važi i sledeća jednakost

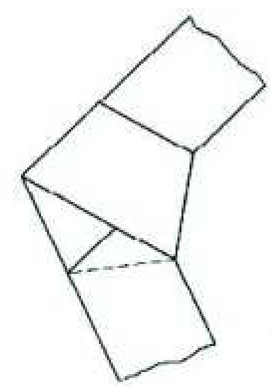
$$a : (d - a) = d : a = \Phi.$$

Dakle, pored toga što je razlaganje dijagonale pravilnog petougla tačkom u kojoj je seče druga dijagonala *zlatni presek*, i odnos mera dijagonala i stranice pravilnog petougla je broj Φ. tj.

$$d : a = \Phi.$$

Pitagorejci su znali za ovu činjenicu.

Ako je stranica pravilnog petougla jednaka 1, tada je dužina dijagonale jednaka Φ. Za dijagonale pravilnog petougla kažemo da dele jedna drugu u *zlatnom preseku*.



Petougao od trake

Kao što je, jedan od najvećih matematičara dvadesetog veka, *Kokseter* (Harold Scott MacDonald Coxeter, 1907–2003), opisao u svojoj knjizi *Uvod u geometriju*, ako vežemo dugačku traku papira u jednostavan čvor i pažljivo ga izravnamo, dobićemo petougao sa njegovim dijagonalama. [2, str. 161]

Glava 8

Odnos ivica pravilnih poligona upisanih u isti krug

U narednim redovima biće reči o vezi koja postoji između pravilnog petougla, pravilnog šestougla i pravilnog desetougla koji su upisani u isti krug i čije su ivice respektivno označene sa a_5, a_6 i a_{10}.

8.1 Desetougao, šestougao

Euklid, u devetom stavu trinaeste knjige Elemenata [8, XIII.9], dokazuje da je zbir stranice pravilnog šestougla i stranice pravilnog desetougla, upisanih u isti krug, podeljen *u srednjoj i krajnjoj razmeri* i pri tome je veći deo stranica šestougla.

Pogledajmo kako Euklid dokazuje ovo tvrđenje:

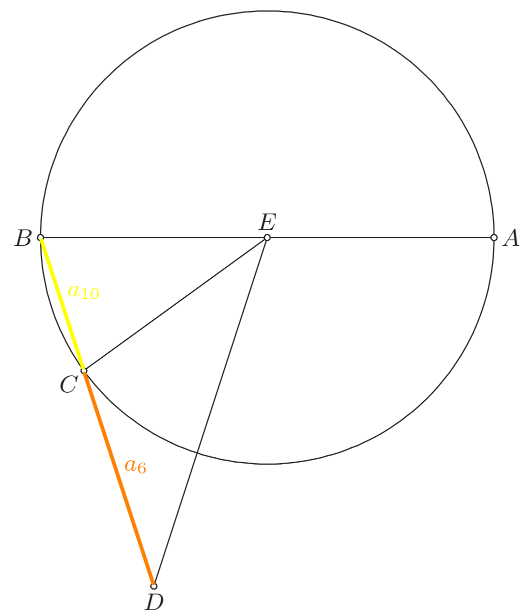
Neka je ABC krug i, za figure upisane u krug, neka je BC stranica pravilnog desetougla i CD stranica pravilnog šestougla i neka one budu na pravoj liniji. Euklid dokazuje da je duž BD podeljena *u srednjoj i krajnjoj razmeri* i da je CD njen veći segment.

Uočimo centar kruga E, spojimo EB, EC i ED i produžimo BE do A.

Iz toga što je BC stranica pravilnog desetougla, sledi da je luk ACB pet puta veći od luka BC. Otuda je luk AC četiri puta veći od luka CB.

Luk AC se odnosi prema luku CB kao ugao AEC prema uglu CEB. Otuda je ugao AEC četiri puta veći od ugla CEB.

Kako je ugao EBC jednak uglu ECB, sledi da je ugao AEC (spoljašnji ugao trougla) dva puta veći od ugla ECB.



Euklidovi Elementi III.9

Kako je duž EC jednaka duži CD, jer je svaka od njih jednaka stranici pravilnog šestougla upisanog u krug ABC, biće i ugao CED jednak uglu CDE. Otuda je ugao ECB dva puta veći od ugla EDC.

Kako je za ugao AEC dokazano da je dva puta veći od ugla ECB, tada je ugao AEC četiri puta veći od ugla EDC. I za ugao AEC je takođe dokazano da je četiri puta veći od ugla BEC, pa je ugao EDC jednak uglu BEC.

Ugao EBD je zajednički za dva trougla BEC i BED, pa je onda i preostali ugao BED jednak preostalom uglu ECB. Zbog toga je trougao EBD sličan trouglu EBC.

Zato je odnos DB prema BE isti kao odnos EB prema BC.

EB je jednako CD, pa je zato BD prema DC isto kao DC prema CB.

I DB je veće od DC, pa je zato i DC veće od CB.

Odatle sledi da je duž BD tačkom C podeljena *u srednjoj i krajnjoj razmeri* i DC je veći segment.

Otuda, ako stranicu šestougla i stranicu desetougla upisanih u isti krug dodamo jednu drugoj, tada će cela duž biti podeljenja *u srednjoj i krajnjoj razmeri*, pri čemu će njen veći segment biti stranica šestougla.

Ovaj dokaz zapisan savremenom matematičkom simbolikom izgleda ovako: Kako je BC stranica pravilnog desetougla važi:

$$\widehat{ACB} = 5 \cdot \widehat{BC},$$

otuda je

$$\widehat{AC} = 4 \cdot \widehat{BC}.$$

Kako je odnos luka AC prema luku CB isti kao odnos ugla AEC prema uglu CEB važi:

$$\angle AEC = 4 \cdot \angle CEB,$$

pa kako je

$$\angle EBC = \angle ECB$$

i

$$\angle AEC = \angle EBC + \angle ECB$$

sledi da je

$$\angle AEC = 2 \cdot \angle ECB.$$

Kako je $EC = CD = a_6$

$$\angle CED = \angle CDE$$

što zajedno sa $ECB = CED + CDE$ pokazuje da je

$$\angle ECB = 2 \cdot \angle EDC.$$

Iz $\angle AEC = 2 \cdot \angle ECB$ i $\angle ECB = 2 \cdot \angle EDC$ sledi da je

$$\angle AEC = 4 \cdot \angle EDC.$$

Ranije je dokazano i da je

$$\angle AEC = 4 \cdot \angle BEC,$$

pa važi da je

$$\angle EDC = \angle BEC.$$

Kako su trouglovi EBD i EBC slični sledi da je

$$BC : BE = BE : BD$$

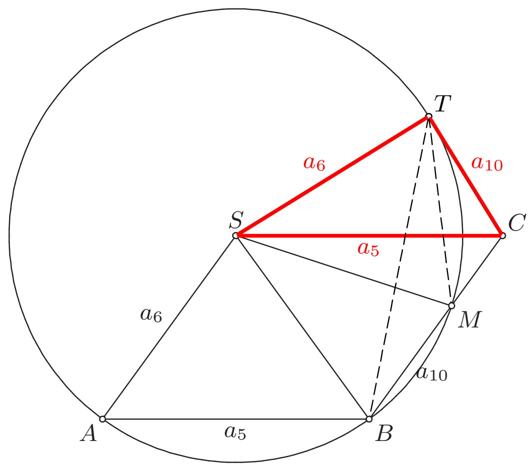
pa kako je $BE = CE$, važi

$$BC : CD = CD : BD$$

i kako je BD veće od DC onda je i DC veće od CB.

8.2 Desetougao, šestougao i petougao

Postoji veoma zanimljiva veza između dužina stranica pravilnog petougla, pravilnog šestougla i pravilnog desetougla upisanih u isti krug. Naime, one predstavljaju i stranice pravouglog trougla, tj. ako su njihove stranice označene respektivno sa a_5, a_6 i a_{10}, tada važi jednakost $a_{10}^2 + a_6^2 = a_5^2$.



$$a_{10}^2 + a_6^2 = a_5^2$$

Neka je AB ivica pravilnog petougla upisanog u krug k sa središtem S. Neka je C tačka takva da je $SABC$ paralelogram, a tačka M ona u kojoj ivica BC seče krug. Tada su, kao uglovi sa paralelnim kracima, podudarni uglovi $\angle SBM$ i $\angle ASB$ i važi:

$$\angle SBM \cong \angle ASB \cong \frac{2\pi}{5}.$$

Otuda je trougao SBM jednakokraki trougao ($SB = SM$) sa uglovima na osnovici od $\frac{2\pi}{5}$, tj. trougao SBM je *zlatni trougao*. Kao osnovica zlatnog trougla, BM je ivica pravilnog desetougla upisanog u krug k.

Kako je $AS = BC$, sledi da je BC jednako stranici pravilnog šestougla upisanog u uočeni krug. Kao što je ranije dokazano, zbir stranice šestougla i stranice desetougla upisanih u isti krug, podeljen je u srednjoj i krajnjoj razmeri i veći deo je stranica šestougla. Kako je ivica pravilnog desetougla upisanog u zadati krug (duž BM), veća duž dobijena razlaganjem poluprečnika (podudaran duži BC) zadatog kruga zlatnim presekom, tada tačka M deli duž BC u *zlatnom preseku*, pa je

$$BC : BM = BM : MC,$$

odnosno

$$BM^2 = BC \cdot MC.$$

Neka je CT tangenta kruga k u tački T. Trouglovi TMC i TBC su slični jer imaju zajednički ugao kod temena C, a uglovi CTM i TBC su podudarni, pa je

$$BC : TC = TC : MC,$$

tj.

$$TC^2 = BC \cdot MC,$$

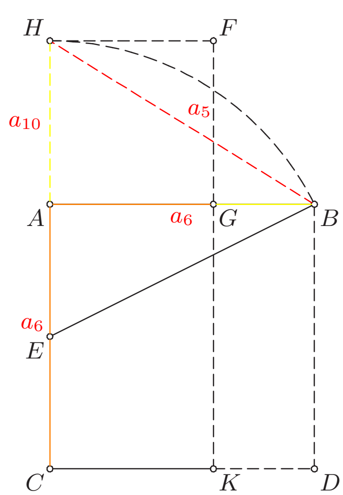
pa kako je

$$BM^2 = BC \cdot MC$$

sledi da je $TC \cong MB$. Stoga su katete pravouglog trougla STC ivice pravilnog desetougla i pravilnog šestougla, a hipotenuza je ivica pravilnog petougla upisanog u krug k, tj. važi da je

$$a_{10}^2 + a_6^2 = a_5^2.$$

Napomena:
Ako se osvrnemo na Euklidov dokaz stava II.11 Elemenata [8, II.11] možemo uočiti sledeću zanimljivost:



Euklidova konstrukcija podele u srednjoj i krajnjoj razmeri

Ako je AB poluprečnik kruga, AH će biti duž podudarna ivici pravilnog desetougla upisanog u taj krug, a BH će biti ivica pravilnog petougla upisanog u taj krug. Pored toga, pošto je tada i AC stranica pravilnog šestougla, a AH stranica pravilnog desetougla upisanih u isti krug, njihov zbir CH je tačkom A podeljen zlatnim presekom. [11, str. 141]

8.2.1 Euklidov dokaz

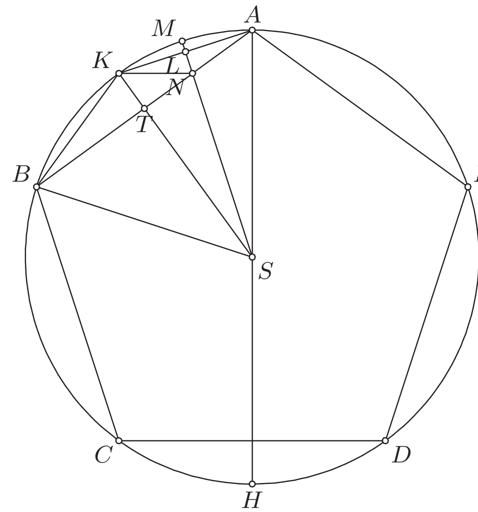
Euklid, u stavu deset trinaeste knjige Elemenata [8, XIII.10], dokazuje da važi

$$a_{10}^2 + a_6^2 = a_5^2.$$

Pogledajmo kako Euklid dokazuje ovu tvrdnju.

Neka je $ABCDE$ krug i $ABCDE$ pravilan petougao upisan u krug $ABCDE$. Euklid dokazuje da je kvadrat stranice petougla $ABCDE$ jednak zbiru kvadrata stranice šestougla i kvadrata stranice desetougla upisanih u krug $ABCDE$.

Neka je tačka S centar kruga. Produžimo AS do tačke H koja pripada kružnici. Nacrtajmo SB. Iz tačke S povucimo normalu ST na pravu AB i produžimo je do tačke K koja pripada kružnici. Nacrtajmo AK i BK. Iz tačke S povucimo SL, normalu na AK, i produžimo je do tačke M koja pripada uočenoj kružnici. SL seče AB u tački K. Nacrtajmo KN.



$a_{10}^2 + a_6^2 = a_5^2$ - *Euklidov dokaz*

Luk $ABCH$ je jednak luku $AEDH$ i jednaki su njihovi delovi ABC i AED. Onda će i ostatak CH biti jednak ostatku HD.

$$\widehat{CH} = \widehat{HD}$$

CD je luk petougla, odakle sledi da je CH luk desetougla.

Kako je SA jednako SB, a ST je normala na AB, biće i ugao ASK jednak uglu KSB, te je prema tome i luk AK jednak luku BK.

$$\widehat{AK} = \widehat{BK}$$

Luk AB je dva puta veći od luka BK, što znači da je duž BK stranica desetougla. Iz istih razloga je i luk AK dva puta veći od luka KM.

Sada, kako je luk AB dva puta veći od luka BK, a luk CD jednak luku AB, biće i luk CD dva puta veći od luka BK.

Luk CD je dva puta veći i od luka CH, pa je i luk CH jednak luku BK.

$$\widehat{CH} = \widehat{BK}$$

Luk BK je dva puta veći od luka KM, kao i luk KA, pa je i luk CH dva puta veći od luka KM.

No i luk CB je dva puta veći od luka BK, jer je luk CB jednak luku BA.

Zaključujemo da je i ceo luk HB dva puta veći od luka BM. Prema tome, i ugao HSB je dva puta veći od ugla BSM.

$$\angle HSB = 2 \cdot \angle BSM$$

Ugao HSB je dva puta veći od ugla SAB, gde je ugao SAB jednak uglu ABS. Otuda je ugao BSN jednak uglu SAB.

$$\angle BSN = \angle SAB$$

Pored toga, ugao ABS je zajednički za dva trougla ABS i BSN, pa je i preostali ugao ASB jednak preostalom uglu BNS. Stoga trouglovi ABS i BSN imaju jednake uglove.

Otuda postoji proporcija: duž AB se prema duži BS odnosi kao duž SB prema duži BN.

$$AB : BS = BS : BN$$

Zato je pravougaonik obuhvaćen sa AB i BN jednak kvadratu na BS.

Ponovo, pošto je AL jednako LK, a normala LN je zajednička, biće i KN jednako AN. Zbog toga je i ugao LKN jednak uglu LAN.

Ugao LAN jednak je uglu KBN, što znači da je i ugao LKN jednak uglu KBN.

Pored toga, i ugao kod temena A je zajednički za dva trougla AKB i AKN. Otuda je i preostali ugao AKB jednak preostalom uglu KNA.

Prema tome, trouglovi KBA i KNA imaju jednake uglove. To znači da postoji proporcija: duž AB se prema duži AK odnosi kao duž AK prema duži AN.

$$AB : AK = AK : AN$$

Zato je pravougaonik obuhvaćen sa AB i AN jednak kvadratu na AK.

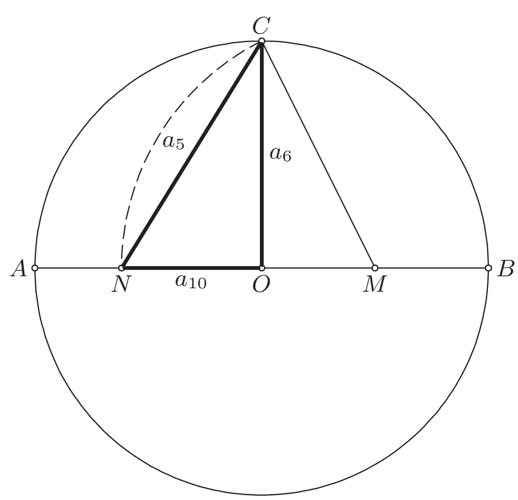
Ali dokazano je da je i pravougaonik obuhvaćen sa AB i BN jednak kvadratu na BS, pa otuda zbir pravougaonika obuhvaćenog sa AB i AN i pravougaonika obuhvaćenog sa AB i BN čini kvadrat na AB, koji je prema tome jednak zbiru kvadrata nad BS i nad AK,

$$AB^2 = BS^2 + AK^2$$

pri čemu je AB stranica petougla, BS stranica šestougla i AK stranica desetougla.

Otuda, ako je pravilan petougao upisan u krug, tada je kvadrat stranice tog petougla jednak sumi kvadrata stranica pravilnog šestougla i pravilnog desetougla upisanih u isti krug. [11, str. 142]

8.3 Ptolemajeva konstrukcija



Ptolemajeva konstrukcija

Kao što smo ranije pokazali, Euklid, u stavu šest druge knjige Elemenata [8, II.6], dokazuje da, ako je duž prepolovljena i njoj je dodata nova duž, tada je pravougaonik obuhvaćen celom duži uvećanom za dodatu duž zajedno sa kvadratom nad polovinom duži jednak kvadratu nad polovinom duži uvećanom za dodatu duž.

Na osnovu prethodnih Euklidovih stavova *Ptolemaj* u svom *Almagestu*, na jednostavan način, u dati krug upisuje pravilni desetougao i pravilni petougao, tako što konstruiše prečnik AB zadatog kruga sa središtem O, zatim poluprečnik OC koji je na njemu upravan, središte M poluprečnika OB i krug sa središtem M poluprečnika MC koji prečnik AB seče u tački N. *Ptolemaj* dokazuje da je ON ivica pravilnog desetougla i CN ivica pravilnog petougla upisanih u zadati krug. [6, str.113]

Zaista, ako je M središte duži OB, na osnovu Euklidovog stava II.6 biće

$$BN \cdot NO + OM^2 = MN^2,$$

pa kako je $MN = MC$ i $OC = OB$ sledi da je

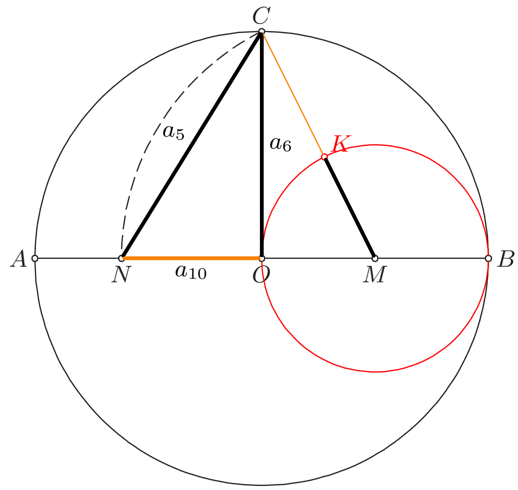
$$BN \cdot NO + OM^2 = MC^2 = OC^2 + OM^2 = OB^2 + OM^2,$$

odakle sledi da je

$$BN \cdot NO = OB^2,$$

pa je O tačka koja deli duž NB u srednjoj i krajnjoj razmeri. Na osnovu Euklidovog stava XIII.9, sledi da je ON stranica pravilnog desetougla upisanog u zadati krug, tj. $ON = a_{10}$, a kako je $OC = a_6$, na osnovu Euklidovog stava XIII.10 je $CN = a_5$.

Ako se ima u vidu Heronova konstrukcija zlatnog preseka, prethodni Ptolemajov dokaz se može pojednostaviti:



Ptolemajeva konstrukcija

Konstruišimo krug sa centrom u tački M čiji je prečnik OB i sa K označimo tačku preseka tog kruga i duži MC. Kako su krugovi sa središtem M koji, redom, sadrže tačke K i C, koncentrični, duži CK i NO biće međusobno podudarne. Na osnovu Heronove konstrukcije zlatnog preseka, duž CK je podudarna većoj duži u podeli poluprečnika OC zlatnim presekom, odakle sledi da je $NO = a_{10}$, a kako je $OC = a_6$, na osnovu Euklidovog stava XIII.10 biće i $CN = a_5$. [11, str.144]

Ako uporedimo prethodnu Ptolemajevu konstrukciju sa Euklidovom konstrukcijom zlatnog preseka, možemo primetiti da Ptolemaj zapravo konstruiše „spoljnu tačku“ zlatnog preseka duži OB ($OB = OC$) koristeći Euklidov algoritam. Preciznije, Ptolemaj konstruiše tačku N, na isti način na koji Euklid, prilikom konstruisanja zlatnog preseka, određuje tačku H. Duž OC iz Ptolemajeve konstrukcije, odgovara duži AB iz Euklidove konstrukcije.

Glava 9

Nesamerljivost

9.1 Kratak algebarski dokaz iracionalnosti Φ

Pretpostavimo da je duž podeljena *zlatnim presekom*, tj. tako da se duži deo prema celini odnosi na isti način kao kraći deo prema dužem. Pomenuti odnos je jednak

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pretpostavimo da je ovaj broj racionalan, te da se može predstaviti razlomkom $\frac{m}{n}$, gde su m i n uzajamno prosti celi brojevi. Neka je n dužina celine, a m dužina većeg dela. Tada je dužina kraćeg dela $n-m$. Sledi da je tada

$$\frac{n}{m} = \frac{m}{n-m}.$$

Ovo znači da je moguće pojednostaviti razlomak koji, po pretpostavci, nije mogao biti pojednostavljen, što je kontradikcija. Time smo pokazali da pretpostavka, da je Φ racionalan broj, nije tačna.

9.2 Geometrijski dokaz nesamerljivosti

Možemo geometrijskim putem dokazati da neka duž, i bilo koji njen deo, dobijen njenim razlaganjem zlatnim presekom, *nisu samerljive*. [11, str.144]

Neka je tačka G zlatni presek duži AB. Ako je AG veća duž u toj podeli, uočimo tačku H centralno simetričnu tački G u odnosu na tačku A.

Geometrijski dokaz nesamerljivosti

Kako je

$$AB^2 = AB \cdot (AG + GB) = AB \cdot AG + AB \cdot GB,$$

a sa obzirom na to da je G tačka zlatnog preseka duži AB, i da važi

$$AG^2 = AG \cdot GB,$$

biće i

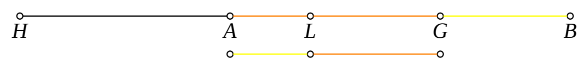
$$AB^2 = AB \cdot AG + AG^2 = (AB + AG) \cdot AG.$$

Kako je $AG = AH$ biće i

$$AB^2 = (AB + AH) \cdot AH = BH \cdot AH,$$

odakle sledi da je razlaganje duži HB tačkom A zlatni presek. [8, XIII.5]

Na isti način, ako je L tačka centralno simetrična tački B u odnosu na G, razlaganje duži AG tačkom L biće zlatni presek.



Geometrijski dokaz nesamerljivosti

Kako je G zlatni presek duži AB važi

$$AG^2 = AB \cdot GB,$$

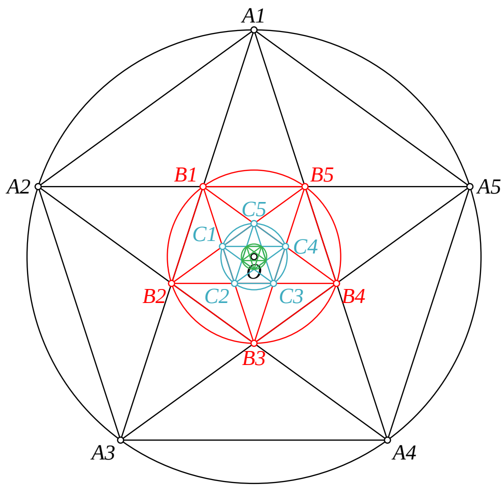
pa je stoga

$$(AL + LG)^2 = (AG + LG) \cdot LG,$$
$$AL^2 + 2 \cdot AL \cdot LG + LG^2 = AG \cdot LG + LG^2,$$
$$AL \cdot (AL + LG) + AL \cdot LG = AG \cdot LG,$$
$$AL \cdot AG = LG \cdot (AG - AL),$$
$$AL \cdot AG = LG^2,$$

odakle sledi da je tačka L zlatni presek duži AG.

Ovaj postupak možemo nastaviti u nedogled jer je veća duž, veća od polovine cele duži, a manja od dvostruke manje duži. Kako je opisani postupak isti kao pri traženju *najveće zajedničke mere* dveju duži, možemo zaključiti da su duži AB i AG nesamerljive. [8, XIII.6]

Kao što smo ranije videli, odnos mera dijagonale i stranice pravilnog petougla je broj Φ, tako da dijagonala i stranica pravilnog petougla nisu samerljive. Pogledajmo sada geometrijski dokaz ovog tvrđenja.



Petougao

Dijagonale pravilnog petougla se seku u tačkama koje su temena novog, manjeg, pravilnog petougla, itd.

Očigledno je da postoje mnoge duži koje su paralelne stranici A_3A_4 (B_2B_4, B_1B_5, kao i beskonačno drugih duži u manjim petouglovima). To znači da, pored *zlatnog trougla* $A_3A_4A_1$, postoji beskonačno drugih *zlatnih trouglova*, npr. $B_2B_4A_1$, $A_1B_1A_5$, itd. Svi ovi trouglovi su međusobno slični.

Ako sa a_1 i d_1 obeležimo stranicu i dijagonalu polaznog petougla, a sa a_2 i d_2 ivicu i dijagonalu manjeg petougla (prvog narednog po veličini), na osnovu uočenih paralelnih linija i sličnih trouglova dolazimo do sledećeg međusobnog odnosa između dijagonala i stranica pravilnih petouglova:

$$d_1 - a_1 = d_2, \text{ i } a_1 - d_2 = a_2.$$

Zaista, kako je $A_1B_2A_4A_5$ paralelogram, važi da je

$$A_1B_2 = A_4A_5 = a_1.$$

Takođe, kako je $\angle B_2B_4A_3 = \angle B_4A_3A_4$ (uglovi sa paralenim kracima) i $\angle B_4A_3A_4 = \angle B_2A_3B_4$ (A_3B_4 je simetrala ugla kod temena A_3 zlatnog trougla $A_1A_3A_4$) sledi da je trougao $B_2A_3B_4$ jednakokraki, te je

$$B_2A_3 = B_2B_4 = d_2.$$

Odatle sledi

$$d_1 - a_1 = A_1A_3 - A_4A_5 = A_1A_3 - A_1B_2 = B_2A_3 = B_2B_4 = d_2.$$

Na sličan način, kako je

$$A_1A_2 = A_2B_5 = A_2B_3$$

i

$$B_2B_4 = B_2B_5 = B_2A_2$$

važi da je

$$a_1 - d_1 = A_1A_2 - B_2B_4 = A_2B_3 - B_2A_2 = B_2B_3 = a_2.$$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da se postupak merenja dijagonale stranicom nikada ne može završiti. Odatle sledi da stranica i dijagonala pravilnog petougla nisu samerljive.

Glava 10

Zanimljive jednačine

Kao što smo ranije videli, vrednost boja Φ se jednostavno dobija kao pozitivno rešenje kvadratne jednačine[1]

$$x^2 - x - 1 = 0$$

i iznosi

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Negativno rešenje kvadratne jednačine označimo sa

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \Phi'.$$

Zanimljivo je to da je Φ' negativna recipročna vrednost broja Φ:

$$-\frac{1}{\Phi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \Phi'.$$

Φ je jedinstven po svojoj osobini da kada od njega oduzmemo jedinicu dobijemo njegovu recipročnu vrednost ($\phi = \frac{1}{\Phi}$), tj. važi da je

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}, \text{ tj. } \Phi - 1 = \phi$$

i

$$\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1, \text{ tj. } \Phi = \phi + 1.$$

Takođe, na osnovu osobina korena kvadratne jednačine, očigledno je da važi i:

$$\Phi + \Phi' = 1,$$

kao i

$$\Phi \cdot \Phi' = -1.$$

[7, 26.str]

[1] Rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ su $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ i pri tome važi $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

10.1 Linearizacija stepena zlatnog preseka

Kao što smo ranije videli, važi

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

To znači da kvadrat broja Φ možemo zameniti linearnim izrazom $(\Phi + 1)$.

Takođe, možemo dobiti linearnu reprezentaciju bilo kog pozitivnog stepena broja Φ. Na primer:

$$\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = (\Phi + 1) \cdot \Phi = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2 \cdot \Phi + 1.$$

Treći stepen broja Φ može se izračunati i na jednostavniji način, tako što množenjem sa Φ jednakosti

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

direktno dobijamo da je

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi.$$

Sada je samo potrebno da zamenimo Φ^2 sa desne strane jednakosti, njegovom linearnom reprezentacijom.

Uopšteno, sledi da iz

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

množeći sa Φ^n dobijamo da je

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n.$$

Ako znamo linearnu reprezentaciju za Φ^{n+1} i Φ^n, na osnovu njih možemo dobiti i linearnu reprezentaciju za Φ^{n+2}.

Preciznije, imamo:
$\Phi^0 = 1,$
$\Phi^1 = \Phi,$
$\Phi^2 = \Phi + 1,$
$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = 2 \cdot \Phi + 1,$
$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = 3 \cdot \Phi + 2,$
$\Phi^5 = \Phi^4 + \Phi^3 = 5 \cdot \Phi + 3,$
$\Phi^6 = \Phi^5 + \Phi^4 = 8 \cdot \Phi + 5,$
...
Svaki put je rezultat u novom redu suma rezultata iz prethodna dva reda.

Koeficijenti a_n u formuli

$$\Phi^n = a_n\Phi + a_{n-1},\ \mathrm{n} \in \{2, 3, 4, \ldots\}$$

predstavljaju Fibonačijeve brojeve, koji očigledno zadovoljavaju relaciju

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

pri čemu su $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. [10, 67.str.]

Ova linearizacija stepena broja Φ je bila poznata još *Leonardu Ojleru* (Leonhard Euler, 1707–1783), švajcarskom matematičaru i fizičaru rođenom u Bazelu. *Ojler* je bio student Johana Bernulija (Johann Bernoulli, 1667–1748). Veliki deo svoga života proveo je u St. Petersburgu. Ostavio je za sobom preko 600 važnih publikacija iz oblasti matematike, algebre, astronomije i mehanike. Uprkos tome što je 1766. godine oslepeo, nastavio je da intenzivno objavljuje svoje radove.

Glava 11

Fibonačijev niz

Originalan problem koji je Fibonači proučavao 1202. godine se odnosio na pitanje koliko brzo zečevi mogu da se razmnožavaju pod određenim idealnim okolnostima.

11.1 Fibonačijevi zečevi

Pretpostavimo da je tek rođen par zečeva, ženka i mužjak, stavljen u polje i da su zečevi sposobni da se razmnožavaju kada su starosti od jednog meseca, tako da na kraju drugog meseca ženka može roditi novi par zečeva. Pretpostavimo da naši zečevi nikada ne umiru i da ženke svakog meseca rađaju jedan novi par zečeva (i to jednu ženku i jednog mužjaka), počevši od drugog meseca pa nadalje. Pitanje koje je Fibonači postavio je bilo: Koliko parova zečeva će biti nakon jedne godine?

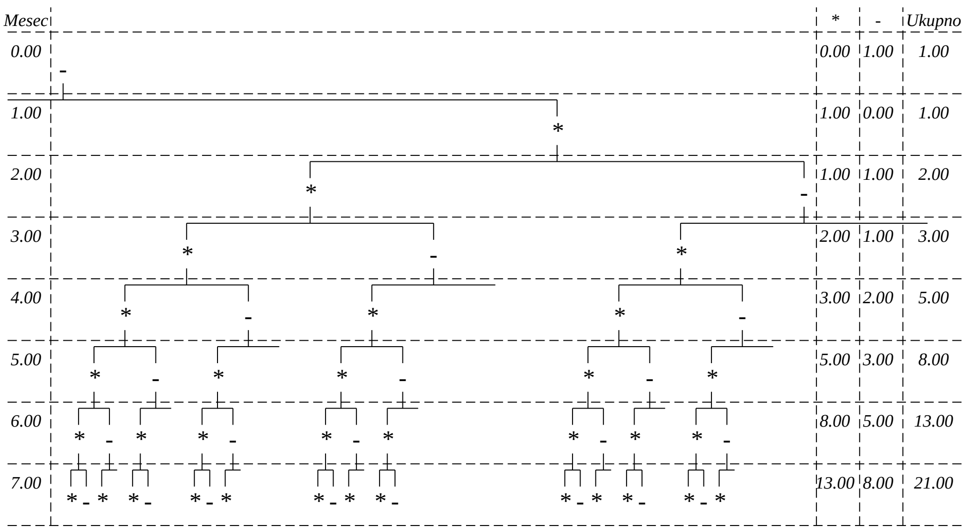
1. Na kraju prvog meseca zečevi se pare, ali još uvek postoji samo 1 par zečeva,

2. na kraju drugog meseca, ženka rađa novi par zečeva, tako da tada postoji 2 para zečeva u polju (od kojih je 1 par sposoban za dalju reprodukciju narednog meseca, a 1 nije),

3. na kraju trećeg meseca, ženka iz prvo-uočenog para zečeva rađa novi par zečeva, što daje 3 para zečeva u polju (od kojih su dva 2 sposobna za dalju reprodukciju narednog meseca, a 1 nije),

4. na kraju četvrtog meseca, ženka iz prvo-uočenog para zečeva, i ženka rođena pre dva meseca, rađaju po jedan par novih zečeva, što daje 5 parova zečeva (od kojih su 3 para sposobna za dalju reprodukciju narednog meseca, a 2 nisu), ...

Na sledećoj slici čvorovi drveta imaju vrednosti „*“ ili „-“. Pritom je njihovo značenje sledeće:
„*“ - par zečeva koji je reproduktivno sposoban,
„-“ - par zečeva koje još nije reproduktivno sposoban.



Replikacija

Dakle broj zečeva na početku meseca će biti redom: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$ (na slici predstavljeno u koloni „Ukupno“). Primetimo, odmah, da je broj parova zečeva u određenom mesecu jednak zbiru broja parova zečeva iz prethodna dva meseca.

Oko 400 godina nakon Fibonačija, Kepler je eksplicitno napisao ono što je Fibonači sigurno primetio, a to je da Fibonačijev niz možemo definisati ovako:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \text{za } n > 1. \tag{11.1}$$

Sada je jednostavno odgovoriti na Fibonačijevo pitanje koliko parova zečeva će biti nakon 12 meseci (godinu dana).

Primetimo da važe i sledeće pravilnosti: u n-tom mesecu, broj parova zečeva koji još nisu reproduktivno sposobni (na slici su označeni sa „-“) jednak je broju reproduktivno sposobnih parova iz prethodnog meseca (što je jednako ukupnom broju parova zečeva od pre dva meseca), dok je broj parova zečeva koji su reproduktivno sposobni (na slici su označeni sa „*“) jednak ukupnom broju parova zečeva iz prethodnog meseca.

Sledi da je niz definisan brojem parova zečeva koji su reproduktivno sposobni (počevši od prvog meseca, pa nadalje), *Fibonačijev niz*. Takođe, niz definisan brojem parova zečeva koji još nisu reproduktivno sposobni (počevši od drugog meseca, pa nadalje) je *Fibonačijev niz*.

11.2 Veza niza sa zlatnim presekom

Pretpostavljajući da zečevi žive beskonačno dugo, 1611. godine nemački astronom *Kepler* (Johannes Keppler 1571-1630) je otkrio da je odnos dvaju susednih članova niza sve bliži Φ kada n raste.
Nakon, od prilike, stotinu godina, škotski matematičar *Simson* (Robert Simpson 1687-1768) je dokazao da je količnik f_{n+1}/f_n konvergent neprekidnog razlomka

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}},$$

pri čemu su „konvergenti“ brojevi

$$1, 1+1=2,\ 1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{5}{3},\dots$$

Da bi dokazao da količnik članova Fibonačijevog niza teži Φ, tj. da je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\Phi,$$

Simson je koristio relaciju

$$\Phi=1+\frac{1}{\Phi},$$

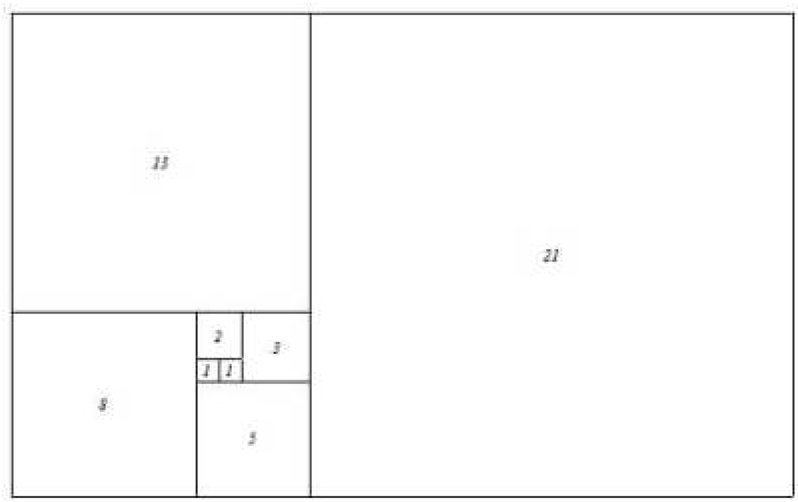
koju je ponavljao na sledeći način:

$$\Phi=1+\frac{1}{\Phi}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}.$$

[11, str.147] [2, str.166]

11.3 Fibonačijevi kvadrati

Uočimo kvadrate čije dužine stranica odgovaraju brojevima Fibonačijevog niza i poređajmo ih po „spiralnom“ obrascu.



Fibonačijevi kvadrati

Primetimo da, kako „razmotavamo obrazac“, odnos dužine i širine uzastopnih pravougaonika, koje na ovaj način dobijamo, biva sve bliži određenoj vrednosti. Ovaj odnos dužine i širine pravougaonika je zapravo odnos između dva uzastopna člana Fibonačijevog niza:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$$

Pomenuti odnosi formiraju niz x_n takav da je:

$$x_1 = \frac{1}{1}\ , x_2 = \frac{2}{1}\ , x_3 = \frac{3}{2}\ , \ldots, x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}\ , \ldots$$

Tada, koristeći rekurzivnu definiciju $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dobijamo jednakost

$$x_n = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n}$$

pa je

$$x_n = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

odakle je

$$x_n = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}$$

pa je

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Sada ako na trenutak pretpostavimo da niz konvergira broju x, možemo reći da x_n i x_{n-1} teže istom broju x, tj.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x.$$

Sledi da broj x, kome niz razlomaka konvergira, mora da zadovolja relaciju

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

a ovo je kvadratna jednačina koju smo ranije pominjali i njeno pozitivno rešenje je

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

tj. niz x_n konvergira *zlatnom preseku*, pa uočeni niz pravougaonika konvergira *zlatnom pravougaoniku*.

11.4 Fibonačijevi i Lukasovi brojevi

Zajedno sa Fibonačijevim brojevima, francuski matematičar Lukas (Édouard Lucas, 1842–1891), proučavao je sledeći niz koji je u vezi sa njima:

$$g_0 = 2,$$

$$g_1 = 1,$$

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}, \text{ za } n > 1.$$

Ako uporedimo prvih nekoliko članova ovoga niza $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...$ sa članovima Fibonačijevog niza primetićemo da za njih važi:

$$g_n = f_{n-1} + f_{n+1}. \tag{11.2}$$

Prethodnu formulu jednostavno možemo dokazati indukcijom.

Pogledajmo sada Lukasove formule:

$$f_{2n} = f_n g_n, \tag{11.3}$$

$$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2. \tag{11.4}$$

Dokažimo ih indukcijom.

Njihova tačnost je očigledna kada je n=0 ili n=1.

Pretpostavimo da je $f_{2k-1} = f_{k-1}^2 + f_k^2$ i $f_{2k} = f_k g_k$.

Kako je $f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k-1}$, sledi da je

$$\begin{aligned} f_{2k+1} &= f_{2k} + f_{2k-1} \\ &= f_k g_k + f_{k-1}^2 + f_k^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) + f_{k-1}^2 + f_k^2 = \\
&= f_k f_{k-1} + f_k f_{k+1} + f_{k-1}^2 + f_k^2 \\
&= f_{k-1}(f_k + f_{k-1}) + f_k f_{k+1} + f_k^2 = \\
&= f_{k-1} f_{k+1} + f_k f_{k+1} + f_k^2 \\
&= f_{k+1}(f_{k-1} + f_k) + f_k^2 \\
&= f_{k+1}^2 + f_k^2,
\end{aligned}
$$

tj. tada je i

$$f_{2k+1} = f_{k+1}^2 + f_k^2,$$

Pretpostavimo sada da je $f_{2k} = f_k g_k$ i $f_{2k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2$. Tada je

$$
\begin{aligned}
f_{2k+2} &= f_{2k-1} + f_{2k} \\
&= f_k^2 + f_{k+1}^2 + f_k g_k \\
&= f_k^2 + f_{k+1}^2 + f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) \\
&= f_k^2 + f_{k+1}^2 + f_k f_{k-1} + f_k f_{k+1} \\
&= f_k(f_k + f_{k-1}) + f_{k+1}(f_{k+1} + f_k) \\
&= f_k f_{k+1} + f_{k+1} f_{k+2} \\
&= f_{k+1}(f_k + f_{k+2}) \\
&= f_{k+1} g_{k+1}.
\end{aligned}
$$

tj. pa je tada i

$$f_{2k+2} = f_{k+1} g_{k+1}.$$

[2, str.166]

11.5 Stepeni broja Φ

U devetnaestom veku, *Lukas* je otkrio vezu između Fibonačijevih brojeva i broja Φ koja omogućava da se izračunaju stepeni broja Φ:

$$\Phi^n = f_n \Phi + f_{n-1}. \tag{11.5}$$

Dokažimo ovu formulu indukcijom.

Važenje jednakosti je očigledno za $n = 1$ i $n = 2$ ($\Phi^1 = \Phi$, $\Phi^2 = \Phi + 1$).

Ako pretpostavimo da je $\Phi^k = f_k\Phi + f_{k-1}$ i $\Phi^{k+1} = f_{k+1}\Phi + f_k$, sledi

$$\Phi^{k+2} = \Phi^k + \Phi^{k+1} = f_k\Phi + f_{k-1} + f_{k+1}\Phi + f_k = f_{k+2}\Phi + f_{k+1}$$

tj.

$$\Phi^{k+2} = f_{k+2}\Phi + f_{k+1}$$

pa sledi da za svako n važi

$$\Phi^n = f_n\Phi + f_{n-1}.$$

Na primer:

$$\Phi^3 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}, \Phi^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \Phi^5 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}, \Phi^6 = \frac{18+8\sqrt{5}}{2}, \ldots$$

[2, str.169] [11, str.147]

Kokseter u svojoj knjizi *Uvod u geometriju* navodi da formula (11.5) važi i kada n ima negativnu vrednost, pri čemu definiše

$$f_{-k} = f_{-k+2} - f_{-k+1}, \text{ za } k > 0,$$

tako da je

$$f_{-k} = (-1)^{k+1} f_k.$$

Otuda je, navodi *Kokseter*:

$$\Phi^{-k} = f_{-k}\Phi + f_{-k-1}, \text{ tj.}$$

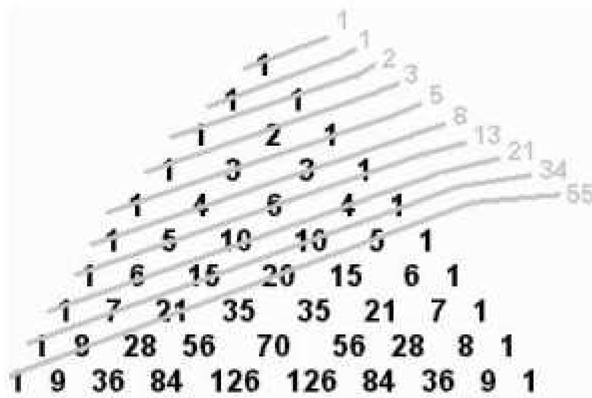
$$\Phi^{-k} = (-1)^{k+1}(f_k\Phi - f_{k+1}). \tag{11.6}$$

[2, str.167]

11.6 Fibonačijev niz u Paskalovom trouglu

Na narednoj slici je opisano pojavljivanje Fibonačijevog niza u Paskalovom trouglu [1]

[1] Definisan je koeficijentima binomnih razvoja: u n-tom redu, k-ti element ima vrednost $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Npr. u trećem redu drugi element ima vrednost $\binom{3}{2} = 3$.



PaskalovTrougao

Primetimo da zbirovi vrednosti „po dijagonali“ Paskalovog trougla čine Fibonačijev niz.

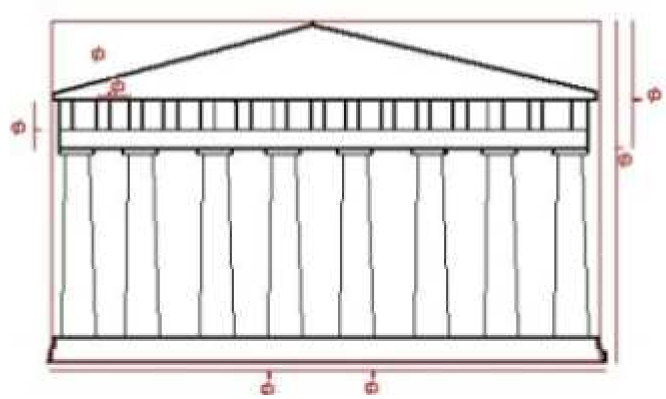
Glava 12

Zlatni presek i Fibonačijev niz u svetu oko nas

Na kraju, pogledajmo samo neke od mnogobrojnih primera zlatnog preseka i Fibonačijevog niza iz sveta oko nas, na koje ukazuje veliki broj tekstova. Napominjem da, za neke primere, postoje oprečna mišljenja o tome da li neki od navedenih odnosa u prirodi zaista predstavljaju zlatni presek ili su samo u pitanju slučajna pojavljivanja njegovih aproksimacija.

12.1 Umetnost, arhitektura

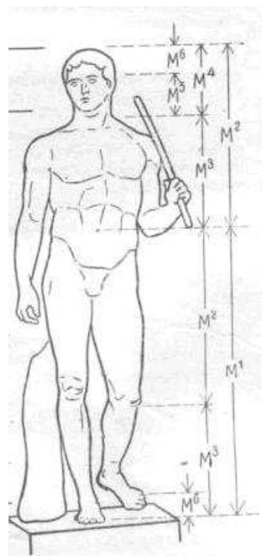
Partenon Zlatni presek i zlatni pravougaonik se pojavljuju u mnogim od postojećih proporcija poznatog grčkog hrama Partenona (448-432 stare ere) na Akropolju u Atini.



Partenon

Fidija (490-430 stare ere) je proučavao zlatni presek i pravio statue za Partenon koristeći stečeno znanje.

Kopljonoša - Dorifor Plinije svedoči o tome da je skulptor Poliklet (koji je delovao negde između 460. i 420. godine stare ere), napisao knjigu o regularnim proporcijama ljudskog tela (teorijska knjiga o umetnosti) i napravio čuvenu bronzanu statuu Dorifora koja predstavlja mladića sa kopljem, Kopljonošu, i koja je dugo vremena služila kao kanon u umetnosti (tzv. grčki kanon).



Dorifor

Analiza Doriforove statue data je u knjizi *Proporcionalnost u arhitekturi* napisanoj od strane ruskog arhitekte Grima (G.D. Grim) koji pokazuje sledeću vezu poznate statue sa zlatnim presekom ($M = \Phi^{-1}$):

1. prva podela [1] Doriforove figure tj. njegove visine $M^0 = 1$ zlatnim presekom, na delove $M^1 = \Phi^{-1}$ i $M^2 = \Phi^{-2}$, prolazi kroz pupak,

2. druga podela, donjeg dela tela, na delove $M^2 = \Phi^{-2}$ i $M^3 = \Phi^{-3}$, prolazi kroz liniju kolena,

3. treća podela, gornjeg dela tela, na delove $M^3 = \Phi^{-3}$ i $M^4 = \Phi^{-4}$, prolazi kroz liniju vrata, ... [14, str. Golden Section in Greek′s Art]

Analiza Doriforove statue data je i u knjizi *The Power Of Limits* koju je napisao György Doczi. [3, str.104]

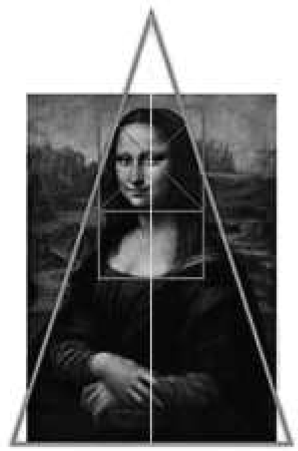
Težina skulpture počiva na jednom stopalu, dok drugo jedva dotiče pod vrhovima prstiju. Osim što su razmaknuta stopala, figura ima različitu visinu kolena, bokova i po prvi put kod skulpture ruka slobodno visi. Poliklet

[1] misli se na podelu zlatnim presekom duži čija je dužina jednaka visini statue

je smatrao da je lepota međusobno srazmeran odnos delova tela i srazmeran odnos tih delova prema celini. On je svojim skulpturama dao i osnove idealizacije portreta grčkih skulptura koje uvek imaju karakterističan grčki nos i blage linije usana.

Leonardo da Vinči Ne postoji dokumentacija koja ukazuje na to da je Leonardo namerno koristio zlatni presek tokom stvaranja portreta Mona Lize [2], ali bez obzira na to, poznata nam je činjenica da je Leonardo bio blizak prijatelj Luke Pačolija i da je poznavao zlatni presek.

Bülent Atalay, u svojoj knjizi *Matematika i Mona Liza*, navodi da, ako na Leonardovim portretima Mona Lize, Ginevre De' Benci i Dame sa hermelinom nacrtamo pravougaonik oko glave i gornjeg dela grudi (do dekoltea), odnos visine i širine tog pravougaonika predstavljaće zlatni presek.



Mona Liza, Leonardo da Vinči

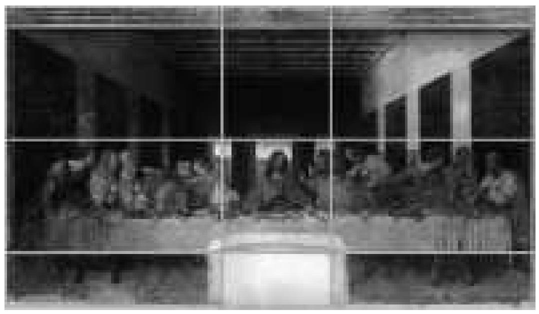
Ako sada izdvojimo kvadrat u gornjem delu pravougaonika, njegova veličina odgovaraće veličini glave portretisane osobe. Tačka, u kojoj se seku dijagonale ovog kvadrata, definiše poziciju oka, koje je dominantno u umetnikovoj kompoziciji. Na Leonardovim portretima, vertikalna linija, koja polovi svaki portret, prolazi kroz, ili pak veoma blizu jednog oka. Takođe, navodi se i zapažanje da je figura Mona Lise smeštena u zlatni trougao.

Mona Liza, Leonardo da Vinči

[2]nastao u 16.veku, ulje na platnu, čuva se u Luvru

Pored toga, u knjizi je ilustrovana i tvrdnja da je Leonardo naslikao lice Mona Lize upravo tako da, ako nacrtamo pravougaonik oko njega, odnos visine i širine tog pravougaonika, takođe, predstavlja zlatni presek. [1, str.156]

Često pominjan primer korišćenja zlatnog preseka u Leonardovim delima je njegova slika „Poslednja večera“.



Poslednja večera, Leonardo da Vinči

Pijero dela Frančeska Renesansni slikar, Pijero dela Frančeska (Piero della Francesca, 1416-1492), rođen je u Borgo San Sepolkru, u istom mestu u kome je tridesetak godina kasnije rođen i njegov učenik, Luka Pačoli. Vodio je miran život i umro je relativno nepoznat. Slavu je stekao tek u novije doba zahvaljujući kubistima koji su ga smatrali centralnom figurom renesanse. Bavio se proučavanjem perspektive i pravilnih i polupravilnih poliedara. Napisao je traktat sa naslovom *Libellus de quinque corporibus regularibus* u kojem je uspeo da rekonstruiše pet polupravilnih tela koja su bila poznata Arhimedu. Ovaj Frančeskin rukopis se nalazi u Vatikanskoj biblioteci.

Dodekaedar - Libellus de quinque corporibus regularibus

Poznavanje matematike omogućilo mu je da formira sopstveni stil u slikarstvu koji je bio u tesnoj vezi sa geometrijom. Na primer, celokupna kompozicija sa njegove freske pod nazivom *Madonna del Parto* može se smestiti u pravilni dodekaedar (Platonovo telo sa dvanaest strana od kojih je svaka petougao). Freska je završena oko 1460. godine i sada se čuva u muzeju *Museo della Madonna del Parto*, u Toskani.

Madonna del Parto, Piero della Francesca

Salvador Dali Salvador Dali (1904–1989), poznati španski umetnik dvadesetog veka, nadrealista, namerno je koristio zlatni presek u svojoj umetnosti. U njegovom delu, „Sakrament poslednje večere", ističe se veliki dodekaedar koji se izdiže iznad trpeze.

Sakrament posljednje večere, Salvador Dali

Zgrada sedišta Ujedinjenih nacija Kao primer korišćenja zlatnog preseka u savremenoj artitekturi možemo navesti zgradu sedišta Ujedinjenih nacija u New York-u [3] koja je završena 1950. godine.

[3] Iako se nalazi na istočnoj strani Midtown Manhattan-a u New York-u, teritorija koju zauzima se smatra internacionalnom teritorijom koja pripada zemljama članicama UN.

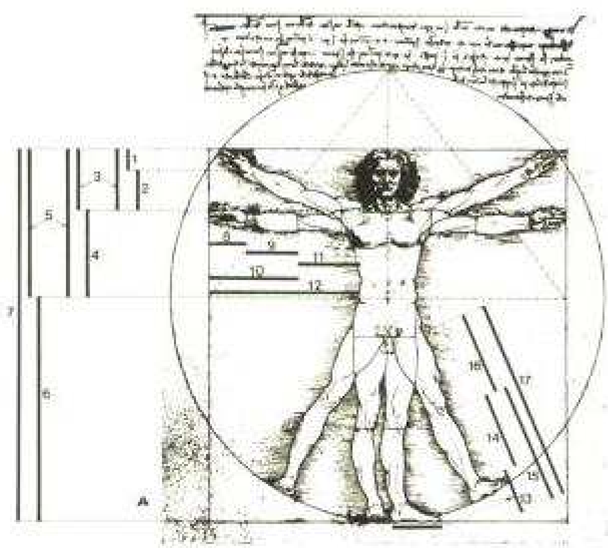
Sedište Ujedinjenih nacija

Osnova konačnog dizajna je bila zasnovana na Korbizjeovim (Le Corbusier, 1887.–1965.) nacrtima.

12.2 Anatomija

Mnogi umetnici i arhitekte su u anatomiji ljudskog tela uočavali postojanje zlatnog preseka. Pogledajmo neke primere.

Leonardov „Vitruvijevski čovek“



Leonardov „Vitruvijevski čovek“

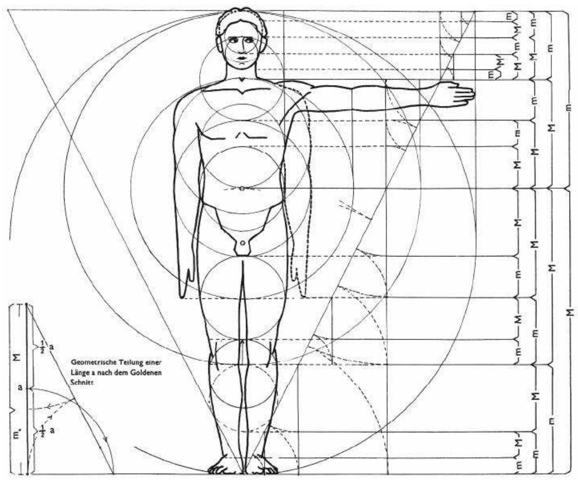
Percepcija o proporcijama čoveka se značajno menjala tokom istorije. Jedan od najstarijih pisanih dokumenata koji se bavi proporcijom čoveka napisao je, Rimski arhitekta i pisac, Marko Vitruvije (Marcus Vitruvius Polio, I vek posle nove ere). On u njoj iznosi svoj stav o tome da hramovi, da bi bili veličanstveni, moraju biti konstruisani analogno lepo-oblikovanom ljudskom telu, kod koga, kako on kaže, postoji savršena harmonija među svim njegovim delovima. Kada se za vreme renesanse ponovo otkrivala zaostavština iz stare Grčke i starog Rima, Leonadro da Vinči ilustruje Vitruvijevu ideju. On u svojoj predstavi Vitruvijevskog čoveka[4] ilustruje matematičke odnose pronađene u anatomiji čoveka i koristi zlatni presek za opisivanje tih odnosa.

Na slici je prikazana Leonardova interpretacija Vitruvijevskog čoveka na kojoj je György Doczi [3, str.93] docrtao uočene (aproksimacije) zlatnog preseka. Sledeći odnosi označenih duži na slici su približno jednaki, tj.

$$\frac{1}{2} \approx \frac{2}{3} \approx \frac{3}{4} \approx = \frac{4}{5} \approx ... \approx \frac{16}{17} \approx \frac{1}{\Phi} = \phi,$$

gde $\frac{n}{n+1}$ predstavlja odnos dužina duži označenih sa n i $n+1$.

Nojfert



Arhitektonsko projektovanje, 1943.

Nemački arhitekta, Ernst Nojfert (Ernst Neufert, 1900–1986), predavač i član raznih organizacija za standardizaciju, poznat je po svojoj knjizi *Arhitektonsko projektovanje* (Bauentwurfslehre). U njoj opširno opisuje zlatni presek koji mu omogućava vezu između svih harmonija u arhitekturi[5]. [4, str.20]

U pomenutoj knjizi ilustruje i opisuje, kako on kaže, univerzalni standard čoveka, koristeći zlatni presek. Koristeći Heronovu konstrukciju zlatnog preseka, Nojfert je, duž dužine a, podelio zlatnim presekom na dve duži, kraću, koju označava sa m i dužu, koju označava sa M. Ilustruje mnoge

[4]Bilo je i drugih pokušaja kroz istoriju da se oslika „Vetruvijanski čovek.“

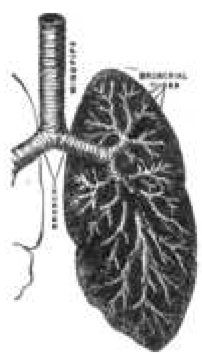
[5]U izdanju iz 1943. godine detaljnije opisuje proporciju zlatnog preseka nego u ranijem izdanju iz 1936. godine.

odnose među delovima tela koji su približno jednaki odnosu $\frac{m}{M}$.

Po Nojfertu, „zlatni presek visine čoveka nalazi se u pupku“ [6]. Duži koje je dobio razlaganjem čovekove visine[7] zlatnim presekom, nastavlja dalje da deli zlatnim presekom i tako opisuje nove standardne odnose čovekovog tela.

Korbizije Korbizije (Le Corbusier, 1887.–1965.) poznati francuski arhitekta švajcarskog porekla stvorio je svoj „Modulator“ - sistem proporcija ljudskog tela koristeći (aproksimativno) zlatni presek i Fibonačijeve brojeve. Sistem nije „zaživeo“ i nije bio šire prihvaćen, a Ernst Nojfert ga je okarakterisao kao “katalog neispravnih mera“. [4, str.23]

Bronhije Zanimljiv primer je i način na koji se bronhije dele. Svaka bronhija se deli na dve manje bronhije: jednu dužu i jednu kraću. Ova asimetrična podela nastavlja se u svakoj narednoj podeli bronhija. Postoje tvrdnje da je odnos dužine kraće bronhije prema dužoj u svakoj od podela uvek (približno) jednak $1 : \Phi$. [5, str.1]



Bronhije

12.3 Sedma umetnost

Ruski režiser *Sergej Ejzenštajn* (1898–1948) je 1925. godine režirao klasični nemi film pod nazivom *Oklopnjača Potemkin.* Mereći dužinu celuloidnog filma, on je podelio film, na delove koji se odnose u zlatnom preseku. Važne scene započinjao je na tim, unapred predviđenim, mestima.

[6] ako duž čija je dužina jednaka visini čoveka, podelimo zlatnim presekom, dobićemo dve duži. Jednu kraću, čija je dužina jednaka udaljenosti „od pupka do temena“ i drugu duža, čija je dužina jednaka udaljenosti „od pupka do stopala“

[7] duž čija je dužina jednaka visini čoveka

„Oklopnjača Potemkin"

Džonatan Berger (Jonathan Berger) iz Centra za kompjuterska istraživanja u muzici i akustici Univerziteta u Stanfordu koristio je ovaj primer kao ilustraciju Fibonačijevog niza na svojim predavanjima. [9, Fibonacci in Films]

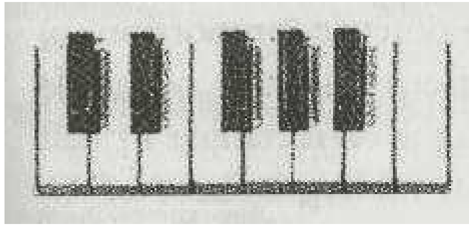
12.4 Muzika

Kompozitori Za zlatnim presekom je tragano i među muzičkim tvorevinama. Analizirana su dela mnogih kompozitora: Mocarta, Betovena, Debisija, Šuberta, Baha,... Postoje mišljenja da se zlatni presek nalazi u delima ovih muzičara. Čak ima i onih koji tvrde da, što su muzičari bili genijalniji i bolji, više je zlatnog preseka u njihovim delima.

Sa druge strane, postoje mišljenja po kojima su pronađeni zlatni preseci samo aproksimacije ili slučajnosti.

Na primer, Majk Maj, 1996. godine, u časopisu American Scientist, objavljuje članak pod nazivom „Da li je Mocart koristio zlatni presek?" u kome piše o analizama Džona Puca (John Putz) obavljenim na mnogim Mocartovim sonatama. U članku navodi kako je Džon Puc otkrio da je bilo značajnih odstupanja od zlatnog preseka i da približivanje zlatnom preseku može pre biti objašnjeno pravilima same sonate nego li namernim korišćenjem zlatnog preseka. [10, str.187]

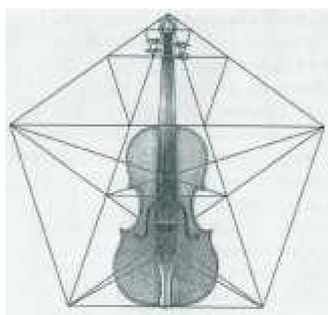
Moderna oktava Postoje tvrdnje da se Fibonačijevi brojevi nalaze u modernoj oktavi:
8 belih nota,
5 crnih nota izdeljenih u dve grupe od
3 crne note i
2 crne note.



Moderna oktava

Ali, kako navodi Mario Livio [10, str.185], ovakvo uređivanje klavirskih dirki nije u vezi sa poznavanjem Fibonačijevih brojeva, jer je nastalo u ranom petnaestom veku, mnogo ranije nego što je objavjena Pačolijeva knjiga i mnogo ranije nego što je bolje upoznat Fibonačijev niz. [10, str.185]

Stradivariusova violina U knjizi *Zlatni presek - najveća tajna prirode* [13, str.39], autora Skota Olsena, nalazi se zanimljiv prikaz uočenih proporcija kod jedne od Stradivariusovih violina.



Stradivarijusova violina

Originalni crteži, pokazuju da je Stradivari (Antonio Stradivari, 1644–1737) posebnu pažnju posvećivao pozicioniranju f-otvora na violinama i da je za to koristio zlatni presek, ali je veoma mali broj onih (ako uopšte i postoje) koji veruju u to da je zlatni presek zaslužan za nenadmašan kvalitet zvuka Stradivarijusovih violina. [10, str.184]

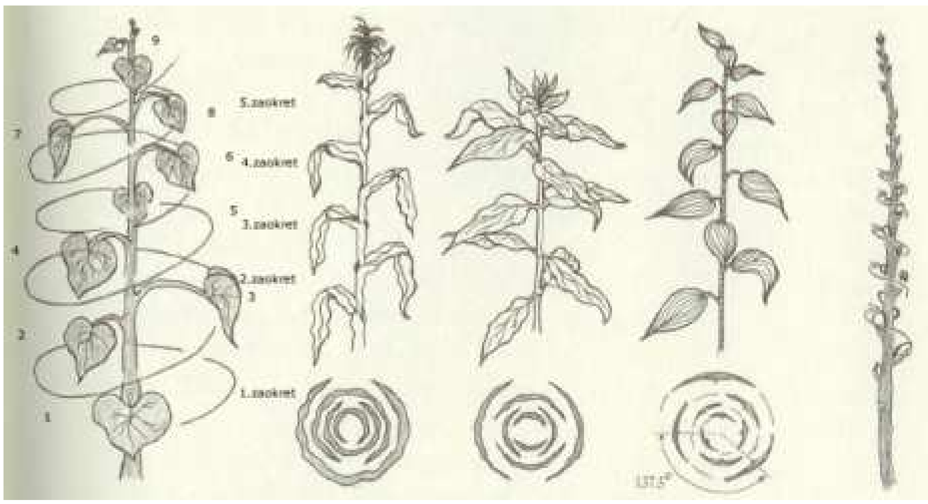
12.5 Psihologija

Fechnerova istraživanja Često citirani Fehnerovi (Gustav Theodor Fechner, 1801–1887) eksperimenti, sa pravougaonicima razlicitih proporcija, pokazali su da je najveci broj ispitanika smatrao najlepšim upravo pravougaonik približno jednak zlatnom pravougaoniku. [7, str.]

12.6 Biologija

Uočeno je izražajno pojavljivanje Fibonačijevih brojeva u biljnom svetu: od dana klijanja, preko cvata, pa sve do nastanka ploda. Prilikom rasta biljke, listovi se najčešće razvijaju „koristeći“ Fibonačijeve brojeve. Broj latica na cvetu je najčešće $3, 5, 13, ...$ Broj semenki biljaka i njihov raspored (pogledajmo, na primer raspored semenki jabuke u njenom horizontalnom preseku) često je u vezi sa Fibonačijevim nizom i zlatnim presekom.

Razvijanje listova Pogledajmo primer rasta i razvijanja koji se može često sresti:



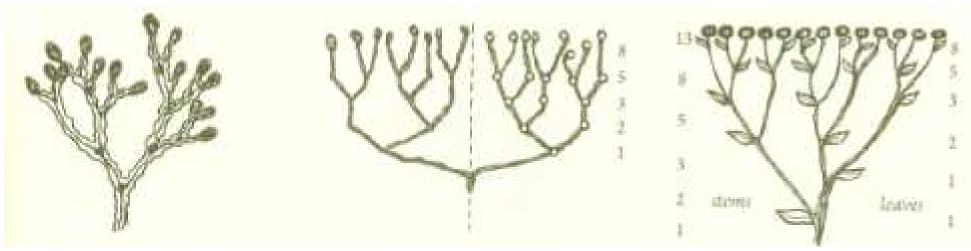
Filotaksički obrazac

Listovi na stabljici biljke razvijaju se tako da obrazuju spiralu oko stabljike. Ako posmatramo broj zaokreta spirale i broj međuprostora između listova primetićemo da, za listove koji se nalaze na istom pravcu duž stabljike (npr. listovi br. 1, 4, 9), važi da je:

1. između listova 1 i 4, broj punih zaokreta 2, a broj međuprostora 3,
2. između listova 1 i 9, broj punih zaokreta 5, a broj međuprostora 8,
3. između listova 4 i 9, broj punih zaokreta 3, a broj međuprostora 5.

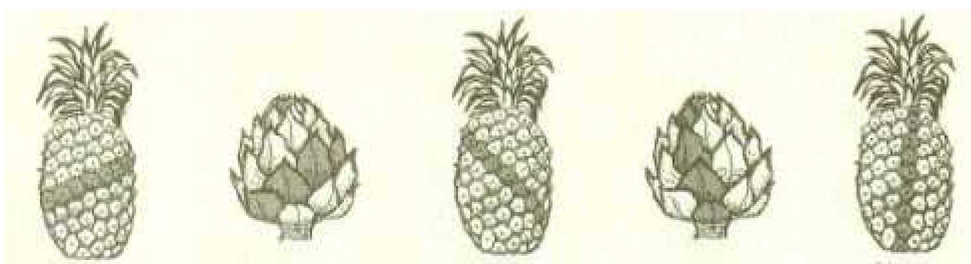
Ovakav prirodni raspored je najracionalniji jer listovima omogućava najbolju iskorišćenost sunčeve energije. [13, str.15] [7, str.161]

Grananje, listanje Način na koji veliki broj biljaka razvija svoja stabla u potpunosti odgovara dijagramu razmnožavanja Fibonačijevih zečeva. Na sledećoj slici je ovo ilustrovano na primeru rasta algi i na primeru listanja i cvetanja močvarnog stolisnika (sa šematskom predstavom u sredini). [13, str.15]



Alga, močvarni stolisnik

Spirale rasta Veoma je zanimljiva još jedna manifestacija Filotaksičkog obrasca (phyllotaxis). Kod mnogih biljaka poput suncokreta, kaktusa, stabala palmi, šišarki bora, artičoka, itd. sa matematičkom preciznošću se sledi princip spiralnog rasta i pritom je najčešće moguće lako zapaziti više takvih spirala. [13, str.14]



Ananas, artičoka

Pogledajmo kako *Kokseter* u svojoj knjizi *Uvod u geometriju* opisuje ovu pojavu:

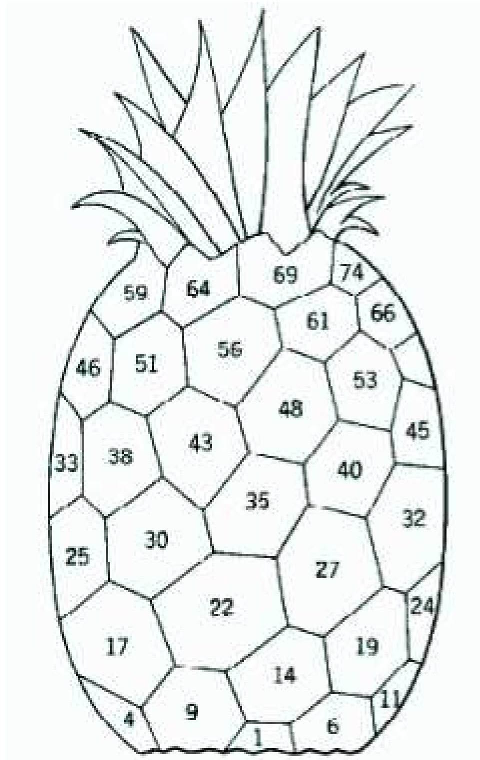
Helikoidne spirale možemo, posebno jasno, uočiti kod ananasa, čije su ćelije, približno heksagonalog oblika, vidno raspoređene u nizove koji se protežu u različitim smerovima i formiraju helikoidne spirale:

1. blago ukoso na gore, prema desnoj strani - 5 palalenih kolona,

2. strmije na gore, prema levoj strani - 8 paralenih kolona,

3. strmo na gore, prema desnoj strani - 13 paralelnih kolona.

Ako, površ ananasa predstavimo sebi kao cilindar, koji isečemo po vertikalnoj liniji (generatoru) i raširimo ga u jednu ravan, dobićemo traku između dve paralelne linije ($x = 0$ i $x = 1$). Heksagonalne ćelije poređajmo u zavisnosti od njihove udaljenosti od x ose i dodelimo im odgovarajuće (redne) brojeve. U ovakvoj mreži tačaka, tačka $(0, 0)$ se ponavlja u $(0, 1)$ (kao da smo ponovo „zarolali“ cilindar). Tačka u mreži, kojoj je dodeljen broj 1, ima koordinate $(\frac{1}{\Phi}, h)$, tj (ϕ, h), pri čemu ostaje da vrednost h treba izračunati.



Ananas - Filotaksički obrazac

Za sve vrednosti n, n-ta tačka u mreži ima koordinate (x, y), gde je x decimalni deo od $n\Phi$ (ili decimalni deo od $\frac{n}{\Phi}$), a y ima vrednost nh, tj.

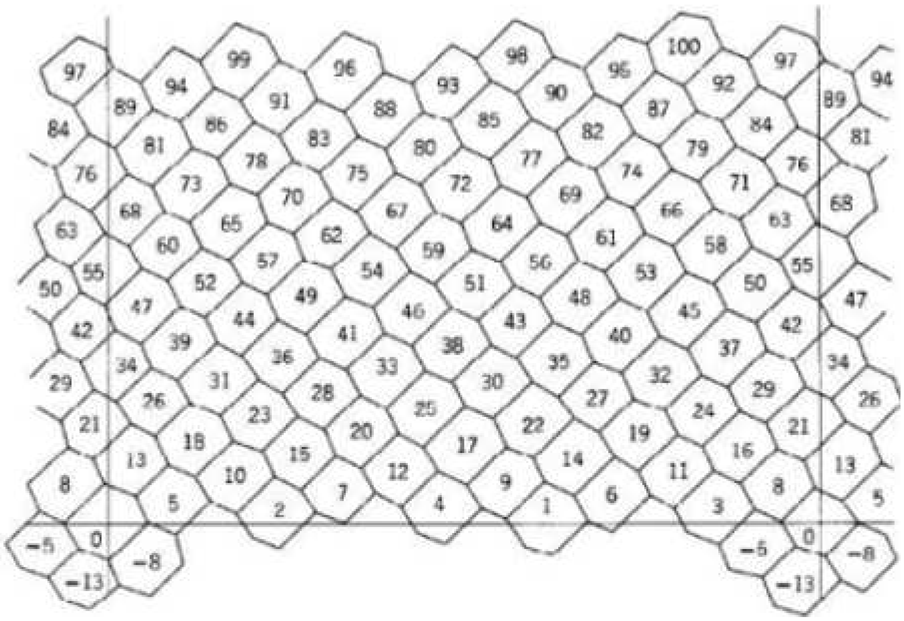
$$x = n\Phi - [n\Phi],$$

$$y = nh.$$

Ponavljanje trake ima takav efekat da se broj n pojavljuje u tački $(n\Phi + m, nh)$, za sve cele brojeve n i m. Takođe, brojevi koji se pojavljuju u koloni predstavljaju aritmetičku progresiju. Kada je ravan obmotana oko cilindra, takve prave linije postaju helikoidne spirale (u obliku su spiralnih stepenica).

Kako količnik uzastopnih Fibonačijevih brojeva $\frac{f_{k+1}}{f_k}$ konvergira ka Φ, vrednost $f_k\Phi$ je približno celi broj (f_{k+1}), što znači da njegov decimalni deo ima malu vrednost. Otuda sledi da su tačke označene sa f_k blizu y ose (posebno za velike vrednosti k).

Ovakvo uređivanje može biti napravljeno za bilo koju pozitivnu vrednost h. Na sledećoj slici, h ima vednost $\frac{1}{150}$.



Ananas - Filotaksički obrazac u ravni

Uskoro ćemo videti da je ovo od prilike najbolja vrednost koja obezbeđuje da su susedi od ćelije 0, ćelije sa Fibonačijevim brojevima $5, 13, 8$ i njihovim negativnim vrednostima, kao što je to slučaj kod ananasa. Najuočljivija kolona, (tj. kolona sa najmanjim razmakom) je ona kolona u kojoj je aritmetička progresija $f_6 = 8$.

Povećavanjem vrednosti h, smanjili bismo ugao između pravaca $0 - 5$ i $0 - 8$, tako da bi u određenom trenutku ovaj ugao postao prav i tada bi Dirihleove regije [8] [2, str.169] predstavljale pravougaonik umesto šestougla.

Na sličan način, smanjivanjem vrednosti h, povećavali bi ugao između pravaca $0 - 8$ i $0 - 13$, tako da bi u određenom trenutku, ovo postao prav ugao i u susedstvu 0 bi se pojavio i sledeći Fibonačijev broj: 21.

Da bi odredio kritične vrednosti h, u kojima se takve promene događaju, Kokseter traži uslov koji moraju ispunjavati tačke f_k i f_{k+1}, da bi činile prav ugao sa temenom u 0. To znači da za tačke

$$(f_k\Phi - f_{k+1}, f_k h), (f_{k+1}\Phi - f_{k+2}, f_{k+1}h)$$

treba da važi sledeće:

$$(f_k\Phi - f_{k+1})(f_{k+1}\Phi - f_{k+2}) + f_k f_{k+1} h^2 = 0.$$

[8] teselacija kakvu dobijamo predstavlja primer Dirihleove teselacije takođe poznate kao Voronojev dijagram

Kokseter navodi [2, str.169], da se na osnovu (4.1), (11.1), (11.2), (11.3), (11.4) i (11.6) može dokazati da je

$$f_k f_{k+1} h^2 = (f_k^2 + f_{k+1}^2)\Phi - f_{k+1} g_{k+1}$$

$$= f_{2k+1}\Phi - f_{2k+2} = \Phi^{-(2k+1)}$$

odakle sledi da je

$$h = (f_k f_{k+1})^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-(k+\frac{1}{2})}.$$

Na osnovu toga zaključuje, da su brojevi ćelija u različitim pravcima jednaki f_{k-1}, f_k, f_{k+1} (koji su u slučaju ananasa 5, 8, 13), kada se vrednost h nalazi između

$$(f_{k-1} f_k)^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-(k+\frac{1}{2})} \text{ i } (f_k f_{k+1})^{-\frac{1}{2}} \Phi^{-(k+\frac{1}{2})}.$$

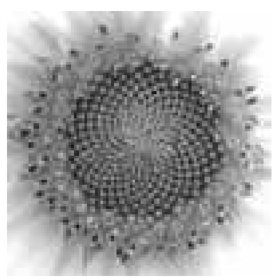
Kao pouzdanu standardnu vrednost u ovom intervalu, prirodno se ističe

$$h = f_k^{-1} \Phi^{-k}.$$

Na primer, vrednost izabrana u primeru sa prethodne slike je približno

$$\frac{\Phi^{-6}}{f_6} = \frac{0,055727...}{8} = 0,006966... \text{ [2, str.169]}$$

Ako pogledamo semenke suncokreta ili središte bele rade uočićemo njihovu uređenost u setovima spirala. Broj spirala koje se razvijaju u pravcu kazaljki na časovniku i broj onih koje se razvijaju u suprotnom pravcu su uvek dva uzastopna člana Fibonačijevog niza (npr. 8 i 13). [16, str.26]



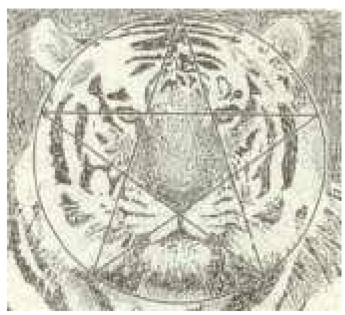
Suncokret - spirale

Na površini kaktusa nalazi se mnoštvo ispupčenja. Kod nekih kaktusa je moguće, polazeći od vrha, nacrtati spiralu koja povezuje vrhove susednih ispupčenja i na taj način se može uočiti 3, 5, 8 spirala.

Nautilus Često korišćen primer zlatnog preseka u prirodi predstavlja morska školjka Nautilus kod koje je jasno izražen spiralni princip rasta (sa faktorom rasta približno jednakim zlatnom preseku). Na poprečnom preseku školje mogu se videti komore koje životinja razvija tokom svog rasta besprekorno primenjujući matematičku formulu. [10, str.8]

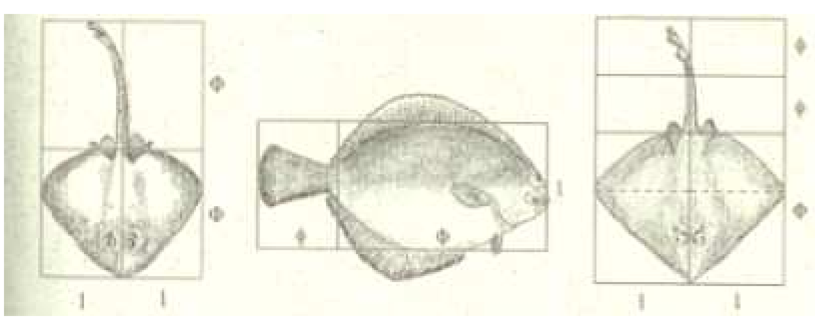
Nautilus

Životinjski svet Mnogi i u anatomiji životinjskog sveta, takođe uočavaju zlatni presek. Evo kako ove proporcije prikazuje Skot Olsen u svojoj knjizi „Zlatni presek - najveća tajna prirode“. [13, str.39]



Tigar

Slična opažanja ima i kada je u pitanju anatomija leptira, delfina, mrava, pingvina... Sudeći po ovoj knjizi, ni podvodni životinjski svet nije lišen zlatnog preseka.



Ribe

I mnogo drugih primera Priči o zlatnom preseku i Fibonačijevom nizu u svetu oko nas nikada kraja. Još je mnoštvo primera ostalo nepomenuto, poput zlatnog preseka u lancu DNK, oblicima galaksija, u kristalima nekih materijala, itd.

Glava 13

Zaključak

Zlatni presek je obimno proučavan kroz istoriju sa ciljem da se odgonetne, po mnogima, mističan karakter ovoga broja, proporcije. Da li je naučnicima zaista pošlo za rukom da matematičkom formulom opišu nešto što se na tako božanstven način pojavljuje u prirodi ili je formula samo rigidan zapis pojedinih prirodnih procesa i pojava? Ne znam da li će odgovor na ovo pitanje ikada biti odgonetnut?!

Ono što se svakako ne može poreći je to da, sa matematičkog aspekata gledano, zlatni presek ima neizmernu vrednost i predstavlja bogat izvor novih, korisnih i zanimljivih povezanosti.

Bibliografija

[1] B. ATALAY, *Math and the Mona Lisa - The Art and Science of Leonardo da Vinci, Smithsonian Books in association with Harper Collins Publishers, 2006.*

[2] H. S. M. COXETER, *Introduction to Geometry, John Wiley and sons, Inc., second edition*

[3] G. DOCZI, *The Power of Limits - Proportional Harmonies in Nature, Art & Architecture, Shambala Publications, Inc., Boston, 2005.*

[4] M. FRINGS, *The Golden Section in Architectural Theory, Nexus Network Journal, Publisher Birkhäuser Basel, Volume 4, Number 1, February, 2002*

[5] A. L. GOLDBERGER, B. J. WEST, T. DRESSELHAUS, V. BHARGAVA, *Bronchial asymmetry and Fibonacci scaling, Cellular and Molecular Life (CMLS), Publisher Birkhäuser Basel Sciences, Volume 41, Number 12, December, 1985*

[6] R. HERZ-FISHER,*A Mathematical History of the Golden Number, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.*

[7] H. E. HUNTLEY, *The divine proportion - a study in mathematical beauty, Dover Publications, Inc., New York, 1970.*

[8] D. E. JOYCE, *Euclid's Elements, Dept. Math. Comp. Sci. Clark University, http://aleph0.clarku.edu/˜djoyce/java/elements/-elements.html*

[9] R. KNOTT, *Fibonacci Numbers and The Golden Section in Art, Architecture and Music, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/-R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html*

[10] M. LIVIO, *The Golden Ratio - The Story of Phi, the World's most Astonising Number, Broadway books, 2002.*

[11] Z. LUČIĆ, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*

[12] G. MARKOWSKY, *Misconceptions about the Golden Ratio, The College Mathematics Journal, Volume 23, No 1, January, 1992., http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/teaching/maa/markowsky.pdf*

[13] S. OLSEN, *The golden section nature's greatest secret, Walker Publishing Company, Inc., New York, 2006.*

[14] A. STAKOV, A. SLUČENKOVA, *www.goldenmuseum.com, http://www.goldenmuseum.com/0305Greek_Artengl.html*

[15] H. WALSER, *The Golden Section, The Mathematical Assotiation of America, Inc., 2001.*

[16] C. WIELAND, R. GRIGG, *Golden numbers, Magazin Creation, Volume 16, No 16, September, 1994, http://www.answersingenesis.-org/creation/v16/i4/golden.asp*