

Univerzitet u Kragujevcu



Centar za interdisciplinarne i multidisciplinarne studije i istraživanja
Biomedicinski inženjering

Doktorska disertacija

**Generalizacija fenomenološkog Hilovog modela
u cilju izučavanja zamora mišića**

Mentor
Dr Miloš Kojić, red.prof.

Kandidat
Boban Stojanović, dipl.ing.

Kragujevac, 2007

Generalizacija fenomenološkog Hilovog modela u cilju izučavanja zamora mišića

Boban S. Stojanović

Centar za interdisciplinarne i multidisciplinarne studije i istraživanja
Univerzitet u Kragujevcu

Rezime

Mišići su organi čija je osnovna uloga da proizvode silu i kretanje. Svi mišići se dele na tri grupe: skeletne (poprečno-prugaste), glatke i srčani mišić. Skeletni mišići, kao posebna grupa mišića, pričvršćeni su za kosti i mogu ih pokretati voljno.

Pri većini svakodnevnih aktivnosti koje se obavljaju tokom dužeg vremenskog perioda dolazi do pada performansi skeletnih mišića, koji se ogleda u redukovanju maksimalne sile, smanjenju brzine odziva, smanjenju sposobnosti kontrole pokreta, itd. Iako je do sada razvijeno dosta matematičkih modela mišića, veoma mali broj modela uzima u obzir zamor, a oni modeli koji uzimaju u obzir promene karakteristika mišića tokom dužih aktivnosti, uglavnom razmatraju zamor samo pod određenim uslovima.

S obzirom na to da su dosadašnji modeli zamora mišića pod proizvoljnim uslovima aktivacije i opterećenja veoma ograničeni, u ovom radu je predstavljen novi model koji uključuje zamor mišića. Predloženi model je zasnovan na Hilovom fenomenološkom modelu koji se sastoji od kontraktalnog, serijskog i paralelnog elastičnog elementa i kao ulazne parametre koristi krive zamora pri maksimalnoj aktivaciji i krivu oporavka, kako bi se dobio odziv mišića pri proizvoljnom režimu opterećivanja. U radu je, takođe, predloženo proširenje Hilovog modela kako bi se uzelo u obzir postojanje različitih tipova vlakana unutar mišića. Različiti tipovi mišićnih vlakana mogu imati veoma različite fiziološke i mehaničke karakteristike, što bitno utiče na njihovu otpornost na zamor. Ovako definisani modeli su ugrađeni u program za proračun metodom konačnih elemenata PAK.

Primenjivost predloženih modela je verifikovana poređenjem rezultata dobijenih proračunom sa eksperimentalnim merenjima i podacima iz literature. Na primerima biceps i triceps mišića čoveka, kao i gastrocnemius mišića žabe, pokazano je da se korišćenjem modela mogu dobiti rezultati, koji sa zadovoljavajućom tačnošću opisuju realno ponašanje mišića. Pored modeliranja pojedinačnih mišića, korišćenjem predloženih modela moguće je modeliranje i čitavih mišićno-skeletnih sistema.

Kako bi se omogućila efikasna priprema modela mišića i mišićno-skeletnih sistema, razvijen je softver za automatsko generisanje modela na osnovu medicinskih snimaka, kao i modul za prikazivanje rezultata proračuna korišćenjem različitih vrsta dijagrama.

Ovako definisani modeli i razvijeni softver mogu poslužiti kao veoma moćan alat u projektovanju medicinske i sportske opreme, planiranju treninga i analizi i dizajnu vežbi. Kompjuterske simulacije zasnovane na predloženim modelima mogu u velikoj meri preduprediti povrede na radu i u značajnoj meri smanjiti troškove koje trpe pojedinac i zajednica.

Generalization of Hill's Phenomenological Model in Order to Investigate Muscle Fatigue

Boban S. Stojanovic

Center for Interdisciplinary and Multidisciplinary Studies and Research
University of Kragujevac

Abstract

Muscles are organs whose primary function is to produce force and motion. There are three types of muscles: skeletal (striated), smooth and hart muscles. Skeletal muscles are attached to bones and can move them voluntarily.

There are many daily activities which occur over an extended period of time and during which performances of muscles can be reduced (reduction of maximal force, contraction speed, movement control, etc). Although numerous mathematical models of muscles have been developed, there are only few models which take into account muscle fatigue. Most of the existing muscle fatigue models consider muscle fatigue under specific conditions only.

Motivated by the fact that the existing muscle fatigue models are very limited under arbitrary conditions of activation and loading, we here present a new model including muscle fatigue. The proposed model is based on Hill's phenomenological model consisting of contractile, serial and parallel elastic elements, but now using a fatigue curve under maximal activation and recovery curve as input parameters, in order to predict muscle response under arbitrary loading conditions. Furthermore, an extension of Hill's model is introduced, in order to take into account different fiber types. Various types of muscle fibers can have very different physiological and mechanical properties, significantly affecting their resistance to fatigue. The developed models are incorporated into the finite element software PAK.

The proposed models are verified by comparing the calculated results with experimental measurements and data from literature. By computer modeling of human biceps and triceps muscles, as well as the frog gastrocnemius muscle, it is shown that the models can predict behavior of real muscles with satisfactory precision. Besides application to single muscles, the proposed models can be used for computer simulations of complex musculoskeletal systems.

In order to provide efficient modeling of muscles and musculoskeletal systems, a software for automatic muscle generation using medical images has been developed, as well as a module for result post-processing by employing various types of graphs.

The proposed models and the developed software can be used as a very powerful tool in designing medical and sport equipment, planning trainings and analyzing exercises. Computer simulations based on the muscle mechanical models can prevent work injuries and significantly reduce costs for individuals and society.

Mojim porodicama

Predgovor

Iako sam se razvojem softvera profesionalno bavio još od gimnazijskih dana, a zatim i tokom studija na Mašinskom fakultetu u Kragujevcu, tek pri izradi diplomskog rada sam uspeo da zavirim ispod haube mašine za oponašanje prirode, koju su stvorili veliki majstori u Laboratoriji za inženjerski softver i da pokušam da u nju ugradim neke nove ideje. Nekoliko godina kasnije, u Centru za superkompjuting Univerziteta u Kragujevcu dobio sam i prvi zadatak iz oblasti biomehanike, vezan za numeričku simulaciju mehaničkog ponašanja mišića. Rad na ovom zadatku iznedrio je više naučnih radova u međunarodnim časopisima i nekoliko međunarodnih projekata, a metodi i softveri koji su tom prilikom razvijeni, sublimirani su u ovom radu.

Najveću zahvalnost za to što me je opremio znanjem i otpremio na ovaj put nauke dugujem svom mentoru Dr Milošu Kojiću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, nastavniku Centra za interdisciplinarne i multidisciplinarne studije i istraživanja i rukovodiocu Centra za naučna istraživanja SANU i Univerziteta u Kragujevcu – Program za bioinženjering. Zahvaljujući njemu nisam morao dugo da stojim na raskrsnici života tražeći pravi put, već sam veoma brzo ugledao svoju budućnost i krenuo ka njoj.

Na ovom putu sigurno ne bih uspeo bez pomoći profesora Nenada Filipovića, Vladimira Rankovića, Miloša Ivanovića i ostalih kolega i prijatelja iz Centra SANU. Takođe, posebnu zahvalnost dugujem i profesorima Mašinskog fakulteta Miroslavu Živkoviću, Nenadu Grujoviću i Radovanu Slavkoviću na spremnosti da priskoče u pomoć uvek kada je to bilo potrebno.

Na svemu što sam naučio o fiziologiji i na ustupljenoj opremi za eksperimentalna ispitivanja zahvaljujem se profesoru Mirku Rosiću, rukovodiocu Instituta za fiziologiju Medicinskog fakulteta u Kragujevcu i njegovoj saradnici Dr Suzani Pantović na ogromnoj pomoći tokom izvođenja eksperimenata.

Da bi sve bilo u skladu sa savremenim informatičkim tehnologijama zahvalnost dugujem prijateljima Nikoli i Vladimiru Milivojeviću sa Mašinskog fakulteta u Kragujevcu, koji su uvek imali najsvežije informacije o najnovijim verzijama softvera (najčešće sporijim od prethodnih).

U ime svih učesnika projekata na kojima učestvujem želeo bih da se zahvalim i Ministarstvu za nauku i zaštitu životne sredine na finansijskoj i svakoj drugoj pomoći. Skupštini grada Kragujevca zahvalio bih se za veliku podršku Programu za bioinženjering i razvoju Univerziteta uopšte. Zaslugu za nekoliko uspešnih projekata u oblasti modeliranja mišića svakako treba pripisati i prijateljima sa Politehničkog univerziteta u Hong Kongu na čelu sa profesorom Chak Yin Tangom. Za prijatnu i uspešnu saradnju zahvaljujem Institutu za vodoprivredu „Jaroslav Černi“ na čelu sa Dr Milanom Dimkićem, profesoru Akiri Tsudi sa Univerziteta Harvard i ostalim pojedincima i institucijama sa kojima sam imao prilike da sarađujem tokom svih ovih godina.

Sa posebnim zadovoljstvom želim da pomenem i Zorana Vasiljevića – Gukija, profesora Prve kragujevačke gimnazije, od koga sam učio o programiranju i životu i uz koga sam napisao svoje prve profesionalne programske redove. Za sve ono što nije programiranje, a što čini osnovu posla kojim se danas bavim zahvaljujem profesorkama Prve kragujevačke gimnazije Slavici Jevtić i Persi Terzić. Profesoru Mašinskog fakulteta Draganu Milosavljeviću zahvaljujem na svom prenetom znanju iz mehanike, kao i na nekoliko rečenica koje mi i danas služe kao vodilje.

Ne mogu a da još jednom ne pomenem svog prijatelja Vladimira Rankovića sa kojim sam mnogo toga prošao i koji me je grizao umesto savesti kada mesecima ne položimo ni jedan ispit. Ostalim prijateljima zahvaljujem na svim lepim trenucima, nepoloženim ispitima i probijenim rokovima.

I najzad, najveću zahvalnost za ono što jesam dugujem porodici iz koje sam potekao, a za ono što ću biti, supruzi Mariji koja mi je uvek davala podršku i imala razumevanja za odricanja koja sa sobom nosi ovaj posao.

Boban Stojanović

Sadržaj

Sadržaj.....	11
1. Uvod.....	13
1.1. Skeletni mišići	15
Struktura skeletnih mišića.....	15
Miozin.....	17
Aktin	18
1.2. Sila u mišiću	19
Motorna jedinica	19
Spore i brze motorne jedinice	21
Tipovi kontrakcija.....	22
Kako mišić proizvodi silu?	23
1.3. Zamor mišića	27
Mehanizmi zamora	28
Merenje zamora	32
2. Modeliranje mišića i mišićnog zamora	39
2.1. Numeričke metode za modeliranje mehaničkog odziva mišića	41
Metod konačnih elemenata	41
Nelinearna analiza u mehanici solida	42
Nelinearna analiza u slučaju velikih deformacija biosolida	47
2.2. Hilova jednačina za tetanizovani mišić	53
Bezdimenziona forma Hilove jednačine.....	54
2.3. Hilov trokomponentni model	57
2.4. Proširenje Hilovog modela kako bi se u obzir uzeli različiti tipovi vlakana	59
Prošireni Hilov viševlakanski (multifiber) model	60
Integracija napona.....	61
Tangentna konstitutivna matrica.....	65
Generalizovana izoparametarska formulacija elementa za funkcionalno promjenljive materijale (FGMs)	67
2.5. Modeliranje zamora mišića	69
Modifikovani Hilov model koji uzima u obzir zamor mišića.....	70
3. Eksperimentalno ispitivanje i numerička rešenja.....	75
3.1. Verifikacija predloženog modela zamora mišića na primeru triceps brachii mišića čoveka.....	77
3.2. Eksperimentalno ispitivanje mehaničkog ponašanja gastrocnemius mišića žabe ..	87
Oprema	87
Priprema nervno-mišićnog preparata.....	88
Minimalna i maksimalna stimulacija.....	89
Sumacija i tetanus	90
Zamor.....	90
3.3. Eksperimentalno određivanje krive zamora gastrocnemius mišića žabe	91
3.4. Verifikacija predloženog modela zamora mišića na primeru gastrocnemius mišića žabe	93
Postavka eksperimenta.....	93
Protokol ispitivanja zamora i snimanje podataka	94
Model konačnih elemenata	96
Efekat zamora mišića na njegovo mehaničko ponašanje	97
Efekti zamora mišića na deformaciju oblika	102

Efekti primene proširenog Hilovog modela koji uzima u obzir postojanje različitih tipova mišićnih vlakana	105
3.5. Model mišića biceps brachii čoveka	109
Definicija modela i njegova verifikacija	109
Kompozitni multi-fiber model mišića biceps brachii. Modeliranje odziva mišića pri unutrašnjoj aktivaciji	110
3.6. Modeliranje mišićno-skeletnih sistema	115
Mišićno-skeletni sistem ljudske ruke	116
Mišićno-skeletni sistem ljudske šake	120
Primena predloženog koncepta modeliranja mišićno skeletnih sistema u drugim oblastima	123
4. Zaključna razmatranja	125
5. Literatura	129
6. Dodaci	137
6.1. Priprema nervno-mišićnog preparata gastrocnemius mišića žabe - korak po korak	137
6.2. Modeliranje mišića i mišićno-skeletnih sistema korišćenjem programa Musculo	141
Modeliranje mišića	142
Modeliranje mišićno-skeletnog sistema	146
Proračun i prikaz rezultata	150
6.3. Integracija napona u programu za konačne elemente PAK	153
Računanje napona u kontraktilnom elementu	153
Računanje zamora (nivoa sposobnosti)	156
Integracija napona korišćenjem User Supplied materijalnog modela	156
Integracija napona za Hilov model mišića korišćenjem USMM	159

1. Uvod

Mišići su organi čija je osnovna uloga da proizvode silu i kretanje. Pored toga, mišići oslobađaju značajnu količinu toplotne energije koja može biti iskorišćena za regulaciju telesne temperature. Stimulisani od strane nerva, mišići se kontrakuju savlađujući otpor spoljašnjeg opterećenja.

Svi mišići se dele na tri grupe: poprečno-prugaste, glatke i srčani mišić. Poprečno prugasti mišići se drugačije nazivaju i skeletnim mišićima. Skeletni mišići su pričvršćeni za skelet tako da ga mogu pokretati voljno. Sa druge strane, glatki mišići i srčani mišić nisu voljni mišići, već je njihova aktivnost kontrolisana od strane endokrinog i autonomnog nervnog sistema. Glatki mišići uglavnom grade zidove unutrašnjih organa. Čak i pri istezanju, napon u ovim mišićima se ne menja. U poređenju sa poprečno-prugastim mišićima, kontrakcije glatkih mišića su sporije i ritmičnije. Srčani mišić formira srce i pravi ritmične pokrete srca. Ovaj mišić poseduje osobine i poprečno-prugastih i glatkih mišića. U ovom radu razmatraćemo samo karakteristike skeletnih mišića i njihovo modeliranje.

U ljudskom telu postoji više od 600 skeletnih mišića različitih oblika i veličina, zavisno od toga kakva je njihova funkcija. Skeletni mišići obično rade u paru, svaki sa po jedne strane kosti. Kada se jedan mišić kontrakuje, drugi skeletni mišić se izdužuje. Ovaj antagonizam između parova skeletnih mišića omogućava pravljenje velikog broja različitih pokreta tela, kao i mimike lica.

Na početku ovog poglavlja objašnjena je struktura skeletnih mišića, kao i mehanizmi uz pomoć kojih mišić proizvodi silu. Zatim se navode detalji vezani za različite vrste kontrakcija i uticaj različitih tipova vlakana na njihov intenzitet i brzinu. S obzirom na veliki značaj zamora mišića, u nastavku su izloženi mehanizmi nastanka zamora, kao i načini za određivanje mesta gde zamor nastaje i merenje njegovog intenziteta.

1.1. Skeletni mišići

Skeletni mišići čine najveći deo životinjskog tela. Kontrolisani od strane voljnih nerava, oni predstavljaju glavni pokretač životinjskog organizma. Ukoliko su stimulisani dovoljno visokom frekvencijom, mišići imaju tu osobinu da generišu maksimalnu silu koja ostaje konstantna u vremenu. Ovakvo stanje mišića se naziva *tetanizovanim* stanjem, a za takav mišić kažemo da je maksimalno aktiviran.



U nestimulisanom stanju mišić se ponaša kao običan viskoelastični materijal. Zbog toga je najčešće predmet izučavanja mišića upravo mišić u tetanizovanom stanju. Maksimalni napon kontrakcije je višestruko veći od napona nestimulisanog mišića pri istoj dužini, tako da napon neaktiviranog mišića ne igra bitnu ulogu u mehanici skeletnih mišića, osim što neaktivirani mišić vraća u početni položaj.

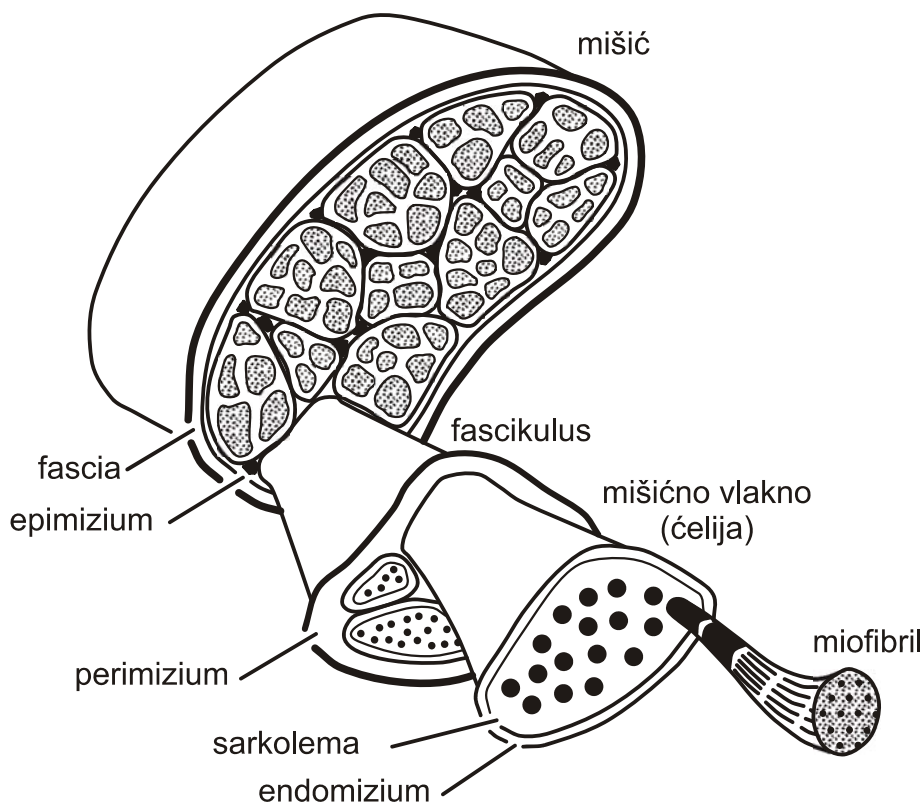
Srčani mišić je, takođe, poprečno prugast, ali on u fiziološkim uslovima nikada ne radi u tetanizovanom stanju. Srčani mišić radi u takozvanom *single twitch* režimu, što znači da svaki električni stimulans izaziva jednu kratku kontrakciju. U toku određenog perioda (refraktorni period), druga električna stimulacija ne može da izazove novu kontrakciju. Osnovna razlika između srčanog i skeletnih mišića je znatno duže trajanje refraktornog perioda kod srčanog mišića. Takođe, napon nestimulisanog srčanog mišića se ne može zanemariti kao što je to slučaj kod skeletnih mišića.

Glatki mišići nemaju poprečne pruge i nisu kontrolisani od strane voljnih nerava.

Struktura skeletnih mišića

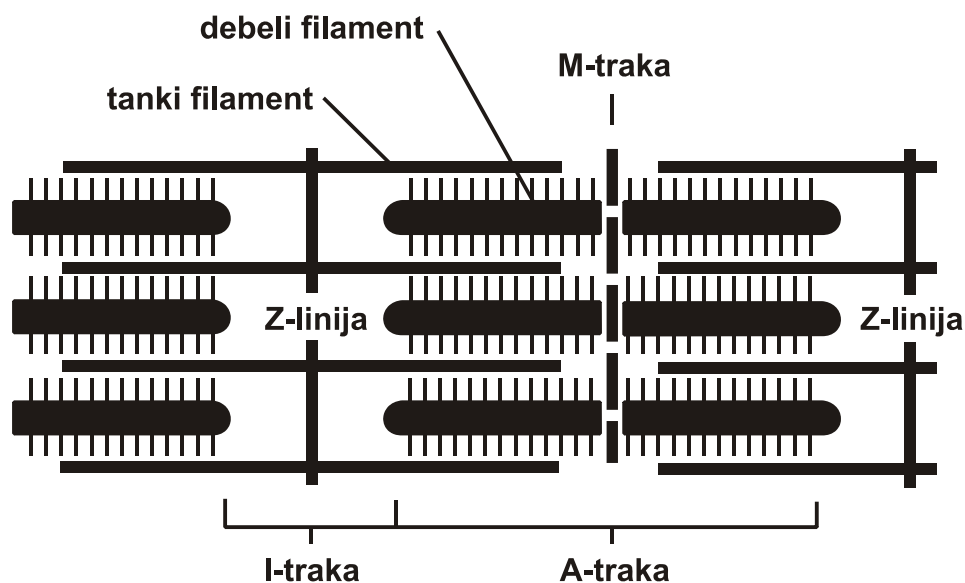
Skeletni mišići su strukturno organizovani kao splet različitih elemenata. Ceo mišić je obavijen slojem vezivnog tkiva koje se naziva *fascia*, a zatim omotačem od vezivnog

tkiva zvanim *epimizium* (Slika 1.1). Sledeća manja struktura je mišićni snop (*fascikulus*), koji se sastoji od mišićnih vlakana obavijenih vezivnim omotačem zvanim *perimizium*. Zatim sledi *mišićno vlakno*, mišićna ćelija obavijena tankim vezivnim tkivom (*endomizium*) koje povezuje pojedinačne ćelije unutar mišićnog snopa. Mišićna vlakna su ćelije sa veoma finom membranom zvanom *sarkolema*. Ona su sačinjena od *miofibrila*, od kojih se svaki sastoji od *miofilamenata*.



Slika 1.1 Shematski prikaz različitih struktura i podstruktura mišića i mišićnog vlakna

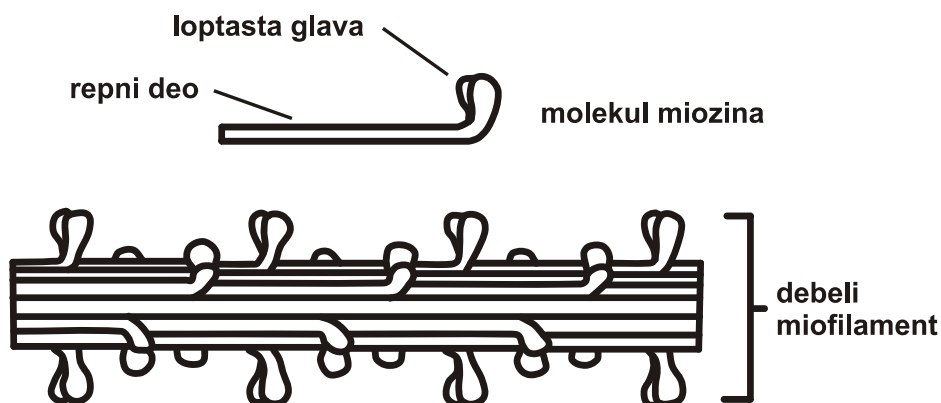
Pravilan raspored miofilamenata daje mišiću karakterističan poprečno prugasti izgled. Struktura koja se ponavlja i na taj način stvara poprečne pruge je *sarkomera* (Slika 1.2). Ograničena *Z-linijama*, sarkomera je osnovna kontraktilna jedinica skeletnih mišića. *Z*-linije su snopovi proteina koji su postavljeni normalno na uzdužnu osu miofibrila. Sarkomera se sastoji od debelih (*miozin*) i tankih (*aktin*) vlakana, koji su sastavljeni uglavnom od proteinskih lanaca po kojima su i dobili nazive. *Z*-linije presecaju miofilamente na pravilnim intervalima.



Slika 1.2 Shematski prikaz osnovne kontraktilne jedinice mišića, sarkomere

Miozin

Miozinska (debela) vlakna su smeštena u sredini sarkomere. Ona uzrokuju tamne pruge na poprečno-prugastim mišićima poznate kao *A-trake*. Miozinsko vlakno može da sadrži i do 180 molekula miozina. Svaki molekul miozina sadrži dugački deo koji se sastoji od lakog meromiozina i loptastog dela koji je sačinjen od teškog meromiozina. Loptaste glave sa izdvajaju iz vlakna u parovima, kao što je prikazano na Slici 1.3. Na svakoj glavi postoji mesto za vezivanje aktina i mesto za katalizaciju hidrolize adenozintrifosfata (ATP) koji oslobađa energiju za mišićnu kontrakciju. Pošto glave miozina poseduju mogućnost da ostvare vezu između debljeg i tanjih vlakana, one se nazivaju i *poprečni mostovi* ili *kros-bridževi* (eng. *cross-bridges*).

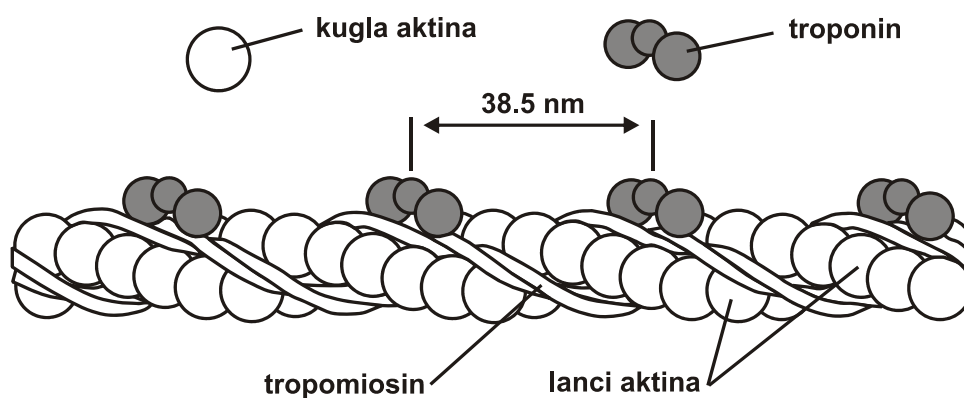


Slika 1.3 Shematski prikaz debelog miofilamenta

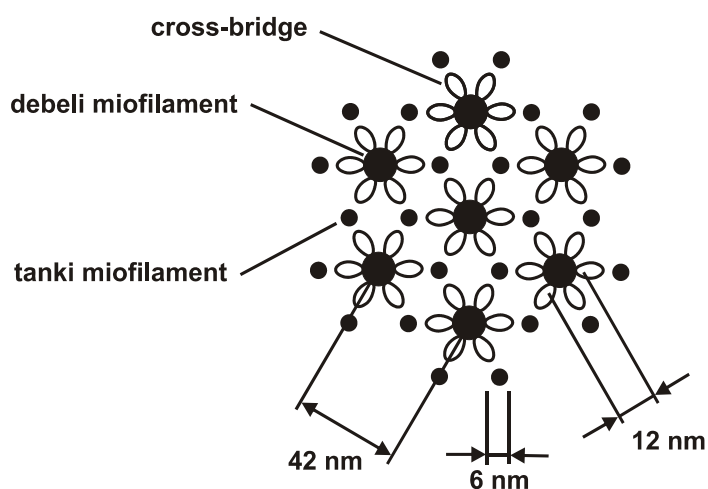
Aktin

Aktinska (tanki) vlakna su razdvojena Z-linijama (Slika 1.2) i predstavljaju svetlu traku na poprečno-prugastoj šari. Kičma tankih vlakana je sačinjena od dva spiralna lanca kugli aktina (Slika 1.4) prečnika 5-6 nm. Tanki vlakna sadrže i molekule tropomiozina i troponina. Tropomiozin je dugački vlaknasti protein koji leži u žlebu koji formiraju lanci aktina (Slika 1.4). Troponin je lociran duž tankog vlakna u intervalima od 38.5 nm.

Ukoliko bismo napravili poprečni presek u zoni gde se tanka i debela vlakna preklapaju, pokazalo bi se da je debelo vlakno okruženo sa šest tankih vlakana čineći idealan šestougao (Slika 1.5). Poprečni preseki debelih i tankih vlakana su približno 12 nm i 6 nm u prečniku, redom. Rastojanje između susednih tankih vlakana je u proseku 42 nm.



Slika 1.4 Shematski prikaz tankog miofilamenta, koji se sastoji od dva helikoidno upletena lanca aktinskih kugli, tropomiozina i troponina



Slika 1.5 Shematski prikaz rasporeda tankih i debelih miofilamenata u porečnom preseku kroz zonu preklapanja miofilamenata

1.2. Sila u mišiću



Motorna jedinica

Mišić dobija komandu za razvijanje sile od nerava. Mišićni nerv sadrži aferentne i eferentne aksone. Aferentni aksoni prenose informacije o stepenu napetosti mišića do centralnog nervnog sistema, dok eferentni aksoni prenose signale o željenoj kontrakciji od centralnog nervnog sistema do mišića. Primarni eferentni putevi se nazivaju α motorni neuroni, ili kraće α motoneuroni. Svaki α motoneuron inerviše određeni broj mišićnih vlakana. Ova funkcionalna jedinica, sastavljena od α motoneurona i mišićnih vlakana koje on inerviše, naziva se *motorna jedinica*. Motorna jedinica je najmanja kontrolna jedinica mišića iz razloga što se sva mišićna vlakna koja pripadaju istom motornom neuronu kontrakuju i relaksiraju sinhronizovano.

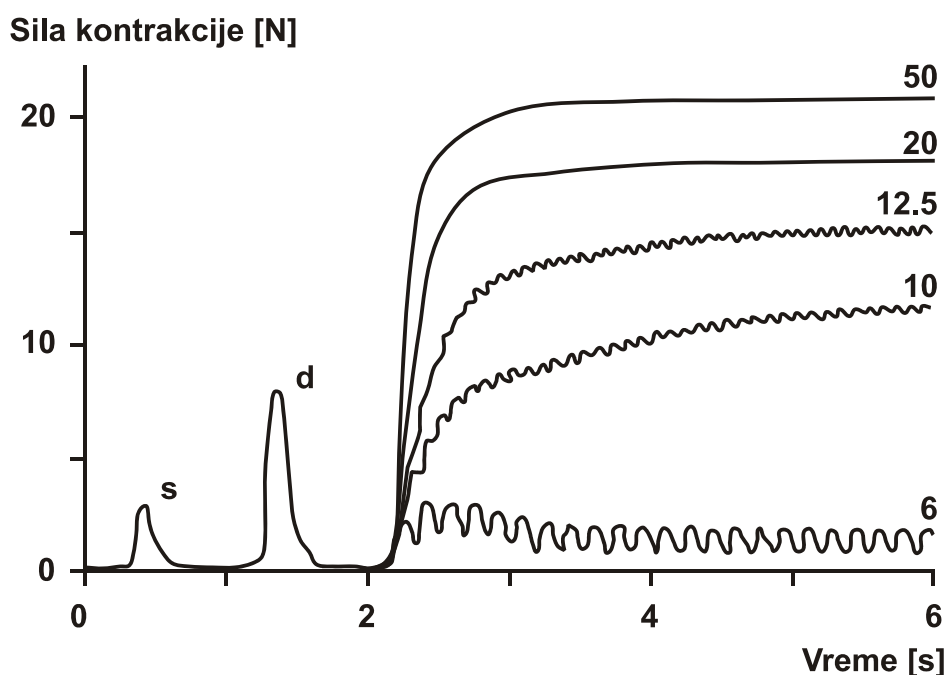
Sila u mišiću se može povećati na dva načina:

- 1) povećavanjem broja aktivnih motornih jedinica koje učestvuju u kontrakciji (prostorna sumacija) ili
- 2) povećavanjem frekvencije stimulacije motorne jedinice, tj. povećanjem sile svake pojedinačne motorne jedinice (vremenska sumacija)

Pošto su motorne jedinice raspoređene paralelno, sumiranje sila pojedinačnih motornih jedinica daje ukupnu silu mišića. Imajući to u vidu, veličina sile se može kontrolisati aktiviranjem i deaktiviranjem pojedinih motornih jedinica.

Kada motorna jedinica primi jedan impuls od svog motoneurona, njena reakcija se naziva *pojedinačni trzaj*, odnosno *singl-tvič* (eng. *single twitch*). Kod mišića sa isključivo sporim vlaknima, kao što je *soleus* kod mačke, prosečno trajanje trzaja je otprilike 200 ms (Slika

1.6). Zbog toga, ukoliko ovaj mišić primi manje od 5 impulsa u sekundi, on će napraviti nekoliko pojedinačnih trzaja. Ukoliko je frekvencija pobude veća od 5 Hz, drugi impuls će stimulisati mišić pre nego što sila od prvog trzaja potpuno isčezne. Na ovaj način dolazi do sabiranja sila, tako da povećanjem frekvencije dolazi do povećanja intenziteta ukupne sile, a sam odziv postaje sve glatkiji (bez pojedinačnih trzaja). Zahvaljujući ovom efektu, pored promene broja aktivnih motornih jedinica, sila mišića se može kontrolisati i promenom frekvencije stimulanja motornih jedinica. Za relativno male frekvencije (manje od 20 Hz za spore motorne jedinice i manje od 50 Hz za brze motorne jedinice) dolazi do relaksacije sile između dva impulsa stvarajući talasasti odziv (Slika 1.6, krive 6, 10 i 12.5 Hz). Ovakva kontrakcija se naziva *nepotpuna tetanizovana kontrakcija*. Povećanjem frekvencije stimulacije talasi počinju da se stapaju sve dok odziv ne postane potpuno gladak. Takav odziv nazivamo *potpuna tetanizovana kontrakcija*.



Slika 1.6 Single twitch (s), double twitch (d, dva impulsa razdvojena intervalom od 10 ms), nestopljene i stopljene kontrakcije soleus mišića mačke pri frekvencijama stimulacije od 6, 10, 12.5, 20 i 50 Hz.

Kontrakcije se mogu podeliti i na: submaksimalne, maksimalne i supramaksimalne. Tokom voljne stimulacije, *maksimalne* kontrakcije su one nastale pri maksimalnom naporu, dok se sve one koje su manje od maksimalne nazivaju *submaksimalnim*. Veštačkom stimulacijom, kao što je stimulacija mišića elektrodom, sila može dostići vrednosti veće od onih dobijenih voljnom kontrakcijom. Takve kontrakcije nazivamo

supramaksimalnim. One se mogu postići, na primer, povećanjem frekvencije stimulacije preko 100 Hz, što se nikako ne može učiniti voljnim kontrakcijama.

Spore i brze motorne jedinice

Motorne jedinice su sastavljene od mišićnih vlakana sličnih biohemijskih i mehaničkih karakteristika. U skladu sa tim osobinama, motorne jedinice se dele na brze i spore. Pored podele na brze i spore, postoje i mnogo finije podele iz razloga što karakteristike motornih jedinica nisu oštro podeljene već gradacijski. Brze motorne jedinice, kao što samo ime kaže, imaju veliku brzinu kontrakcije i veoma kratko vreme pojedinačnog trzaja. Sa druge strane, spore motorne jedinice imaju manju brzinu kontrakcije i duže trajanje pojedinačnog trzaja. Dalje, brze motorne jedinice su znatno sposobnije da proizvode silu anaerobnim putem (bez korišćenja kiseonika), dok spore motorne jedinice imaju bolje mehanizme za razvijanje sile aerobnim putem (uz pomoć kiseonika). Iz tog razloga su spore motorne jedinice znatno otpornije na zamor, o čemu će kasnije biti reči.

Morfološki, spore motorne jedinice su inervisane motornim neuronima malog dijametra i sadrže manje mišićnih vlakana nego odgovarajuće brze motorne jedinice. Henneman i Olson (Henneman i Olson, 1965) su otkrili značaj strukturne razlike između sporih i brzih motornih jedinica. Oni su pokazali da se tokom postepenog povećavanja sile mišića prvo regrutuju mali motorni neuroni koji inervišu spore motorne jedinice. Sa povećanjem zahteva za silom, veći motorni neuroni postepeno inervišu veće motorne jedinice i na taj način povećavaju regrutovanje brzih karakteristika mišića. Dakle, postepeno povećanje sile mišića se postiže tako što se prvo regrutuju manje i sporije motorne jedinice, a zatim veće i brže. Ovakav način aktiviranja ima za posledicu da tokom dužeg vremenskog perioda postoji mnogo veća zavisnost od sporih motornih jedinica, dok se brze motorne jedinice aktiviraju samo kada je potrebna produkcija sile većeg intenziteta. Pošto male motorne jedinice imaju velike aerobne sposobnosti, pa samim tim i veliku izdržljivost, a brze motorne jedinice slabe aerobne sposobnosti, zbog čega se brže i zamaraju, ovakav način aktiviranja je potpuno logičan i njega nazivamo *aktivacija po principu veličine* (eng. *size principle*).

Interesantno je da postoje velike razlike u rasporedu pojedinih tipova vlakana u skeletnim mišićima, pa čak i u onim mišićima koji se nalaze u istoj funkcionalnoj grupi. Ekstenzori kod mačke su odličan primer za to. Soleus mačke je sačinjen uglavnom od sporih

motornih jedinica (95-100%), (Ariano i dr., 1973; Burke i dr., 1974), dok medialni gastroknemius sadrži uglavnom brze motorne jedinice (70-80%), (Ariano i dr., 1973; Burke i Tsairis, 1973). Tokom mirnog stajanja soleus proizvodi konstantnu silu, dok je medialni gastroknemius potpuno miran. Sa povećanjem brzine kretanja maksimalna sila soleusa ostaje približno konstantna, ali se zato sila medialnog gastroknemiusa uvećava nekoliko puta (Walmsley i dr., 1978). Konačno, tokom naglih pokreta šapom sila u soleusu je veoma mala ili čak nula, za razliku od medialnog gastroknemiusa čija je aktivnost velika (Abraham i Loeb, 1985; Smith i dr., 1980). Ovakvi eksperimenti pokazuju promenu u funkcionalnim ulogama soleusa i gastroknemiusa za različite vrste pokreta. Promena funkcionalnosti je usko povezana sa rasporedom različitih tipova vlakana u ovim mišićima.

Tipovi kontrakcija

Ako nije ograničen spoljašnjim uticajem, stimulisani mišić proizvodi silu i kontrakuje se. Takva kontrakcija se naziva **koncentrična** kontrakcija. Ukoliko su krajevi mišića (ili izolovanog vlakna ili sarkomere) čvrsto fiksirani tokom kontrakcije, ovakva kontrakcija se naziva **izometrijska** (nema promene u dužini mišića, vlakna ili sarkomere). Konačno, ako spoljašnja sila prevazilazi izometrijsku silu mišića, mišić se prinudno izdužuje i to nazivamo **ekscentričnom** kontrakcijom. Treba naglasiti da tip kontrakcije može zavistiti od toga na kom nivou se kontrakcija posmatra. Na primer, tokom izometrijske kontrakcije izolovanog vlakna, sarkomere unutar tog vlakna se mogu kontrakovati i koncentrično (obično na krajevima vlakna) i ekscentrično (Gordon i dr., 1966). Dalje, postoje primeri da se mišićna vlakna kod medialnog gastroknemiusa žabe mogu skraćivati, iako se ceo mišić izdužuje (Hoffer i dr., 1989).

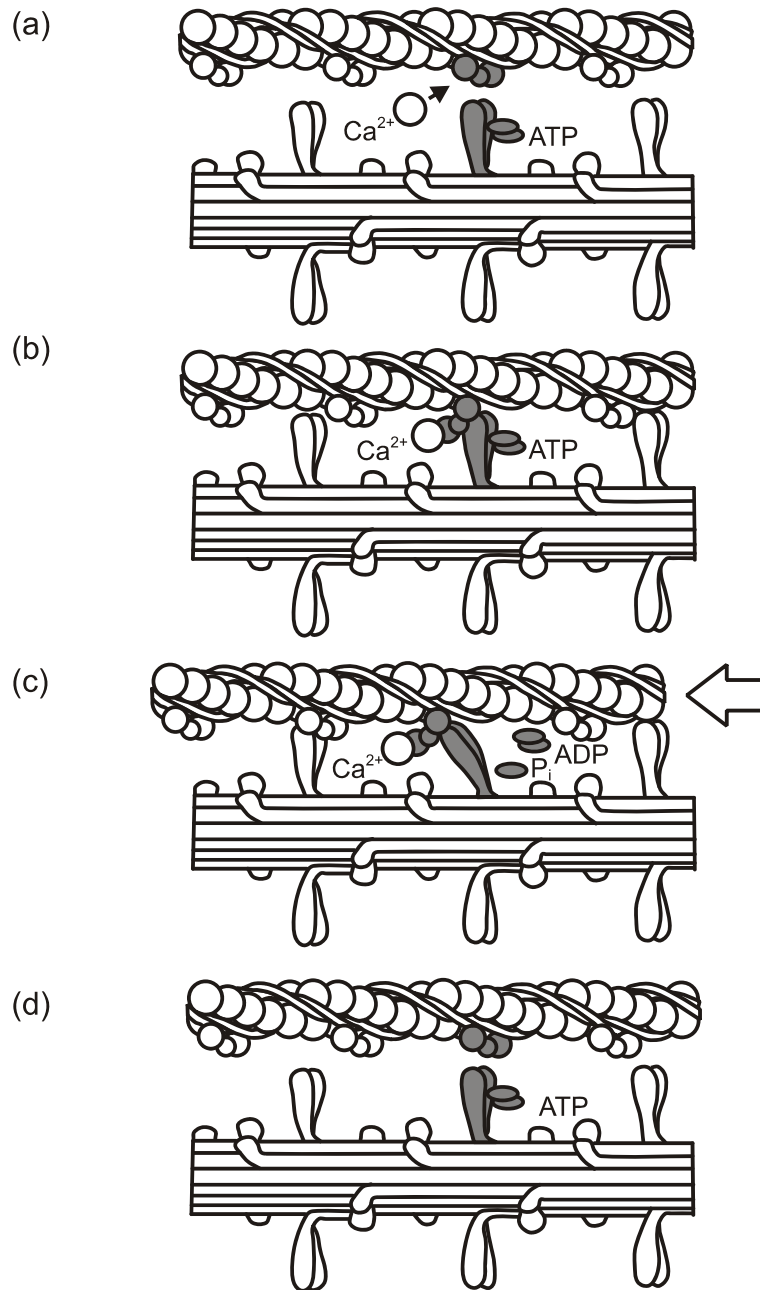
Tokom normalnih svakodnevnih pokreta, dinamičke kontrakcije se najčešće javljaju pri promeni brzine i stalnim promenama nivoa sile (Herzog, 1993). Međutim, prilikom eksperimentalnih ispitivanja mehaničkih karakteristika mišića, ustanovljeno je da je najkorisnije kontrolisati ili brzinu ili silu kontrakcije. Pokreti koji se obavljaju pri konstantnoj brzini nazivaju se **izokinetičkim**, dok se kontrakcije pri konstantnoj sili nazivaju **izotoničnim**.

Kako mišić proizvodi silu?

Molekularni mehanizam proizvodnje mišićne sile je objašnjen **teorijom poprečnih mostova**. Osnove ove teorije je postavio Huxley (Huxley, 1957), ali iako je kasnije predložena njena modifikacija, osnovni principi ove teorije su još uvek prihvaćeni od većine fiziologa koji se bave mišićima.

U okviru teorije poprečnih mostova pretpostavka je da se mišićna kontrakcija javlja usled ciklične interakcije miozinskih glavica sa vlaknima aktina (Slika 1.7). Glavice koje bočno izrastaju iz debelog vlakna su napravljene tako da mogu da se vežu za specijalna mesta na tankim vlaknima. Pokreti i proizvodnja sile se javljaju usled rotacije glavica, koje na taj način vuku tanka vlakna prema sredini sarkomere. Pretpostavka je da se relativno klizanje vlakana jedno u odnosu na drugo obavlja uz njihovu minimalnu (mogu se smatrati krutim elementima), a energija procesa kontrakcije je vezana za hidrolizu ATP-a (jedan ATP molekul po ciklusu).

Treba napomenuti da postoje i druge teorije o generisanju sile u mišiću (Pollack, 1990). Međutim, iako teorija poprečnih mostova ne može da objasni sve karakteristike skeletnih mišića, druge teorije nisu generalno prihvaćene. Naročito je bitno to što teorija poprečnih mostova ne sadrži tumačenje zavisnosti generisanja sile od istorije kontrakovanja, iako je ovaj fenomen izučavan i pre formulisanja teorije poprečnih mostova. Bilo kako bilo, većinu fenomena teorija poprečnih mostova mnogo bolje objašnjava nego što je to slučaj sa nekom od konkurentnih teorija.



Slika 1.7 Shematski prikaz ciklusa poprečnih mostova.

a) Mišić je opušten. Mesto vezivanja na tankom filamentu je pokriveno tropomiozin-troponin kompleksom.

ATP je vezan za miozinsku glavicu.

b) Posle aktivacije povećava se koncentracija kalcijuma u sarkoplazmi i kalcijum (Ca^{2+}) se veže na troponin C, izazivajući na taj način promenu u konfiguraciji koja izlaže mesta za vezivanje na aktinu.

c) Glavica se veže za aktin i izaziva promenu u konfiguraciji. Razlaganje molekula ATP na ADP i P_i obezbeđuje energiju koja izaziva kontrakciju, odnosno relativno kretanje tankih vlakana u odnosu na debela.

d) Novi ATP se veže za glavicu, tako da ona može raskinuti vezu sa tankim filamentom i spremna je za novu interakciju sa drugim mestom za vezivanje na tankom filamentu.

Sredinom devedesetih godina prošlog veka ustanovljeno je da su tanki (a vrlo verovatno i debeli) miofilamenti deformabilni. Po tradicionalnoj teoriji poprečnih mostova, miofilamenti se tretiraju kao potpuno rigidni elementi. Posmatranje miofilamenata na ovakav način povlači za sobom nekoliko praktičnih i teoretskih posledica. Na primer, ukoliko su svi miofilamenti rigidni, a sva elastičnost sarkomere leži u glavicama, merenje krutosti se može direktno povezati sa brojem vezanih glavica. Ako pretpostavimo da je krutost glavica linearna (Huxley, 1957), krutost cele sarkomere bi trebalo da bude direktno proporcionalna broju vezanih glavica. Sa tačke gledišta teorije poprečnih mostova, kruti miofilamenti imaju za posledicu to da je relativna brzina neke tačke na tankom vlaknu u odnosu na neku tačku na debelom vlaknu uvek jednaka relativnoj brzini tankog vlakna u odnosu na debelo vlakno (Huxley, 1957). U slučaju deformabilnih miofilamenata, određivanje relativne brzine tačke na tankom vlaknu u odnosu na tačku na debelom vlaknu mora da uzme u obzir srednju relativnu brzinu tankog vlakna u odnosu na debelo vlakno i lokalnu relativnu brzinu izazvanu deformabilnošću miofilamenata (Forcinito i dr., 1997).

1.3. Zamor mišića

Pri mnogim svakodnevnim aktivnostima koje se obavljaju tokom dužeg vremena, dolazi do redukovanja sile u mišićima usled zamora. Međutim, zamor mišića je kompleksan fiziološki fenomen, a mehanizmi koji do njega dovode nisu dobro poznati. Do sada su se u literaturi javljali različiti pogledi na većinu mehanizama zamora, kao i na procese koji su povezani sa zamorom. Veliki broj pokušaja je učinjen kako bi se ponašanje mišića modeliralo matematički, od onih najjednostavnijih pa sve do najsloženijih koji uzimaju u obzir mnoge fiziološke i mehaničke faktore (Baildon i Chapman, 1983; Bobet i Stein, 1998; Hannaford, 1990; Hill, 1938; Pell i Stanfield, 1972; Schultz i dr., 1991; Studer i dr., 1999; Wexler AS i dr., 1997; Woittiez i dr., 1984). Međutim, uprkos očiglednoj



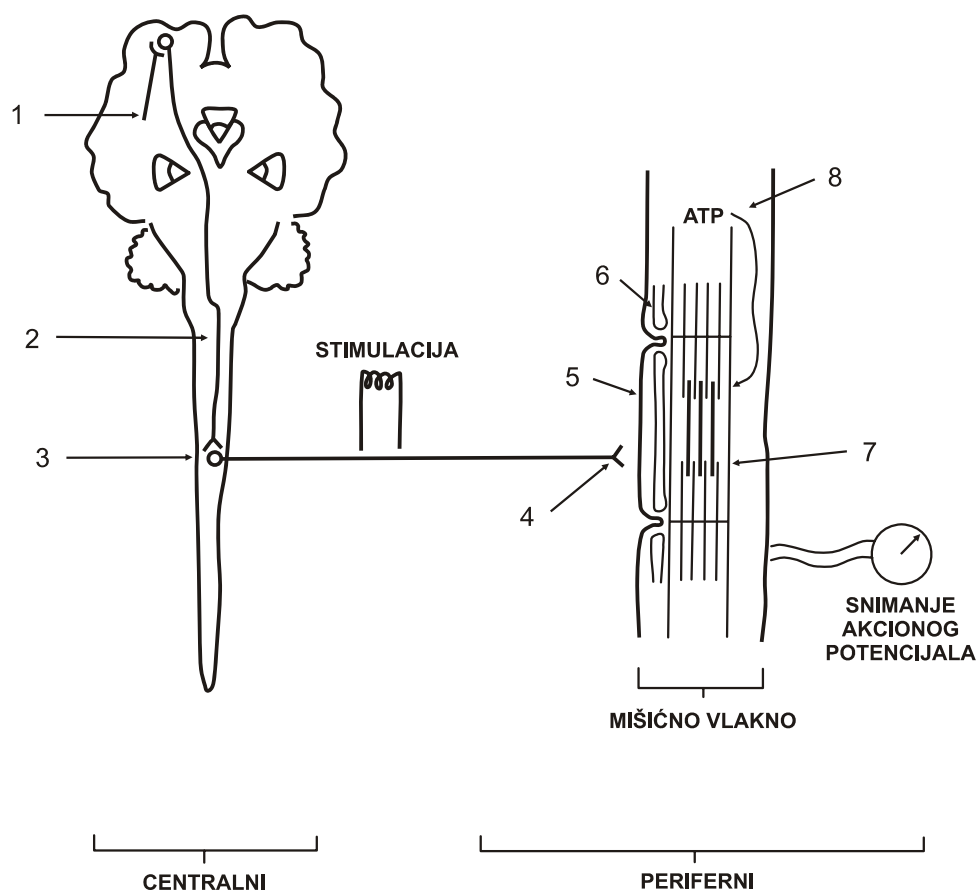
važnosti zamora, do kraja dvadesetog veka nije učinjeno mnogo napora da se matematički modelira njegov uticaj na ponašanje skeletnih mišića.

Kada kontrakcija mišića traje neki određeni period, mišić počinje da se zamara. Proizvodnja sile je poremećena unutrašnjim efektima zamora i oporavka u neuromišićnom sistemu. Zbog toga mnogi istraživači definišu zamor kao "smanjenje sposobnosti mišića da proizvede maksimalnu silu" (Bigland-Ritchie i dr., 1986; Vøllestad i dr., 1988; Gandevia i dr., 1995). Međutim, neke druge pojave slične zamoru bi takođe mogle slično da se nazovu. Iz tog razloga rečenica "svako smanjenje sposobnosti mišića da proizvede maksimalnu silu izazvano vežbanjem" (Vøllestad, 1997) bi možda bila najbolja definicija zamora.

Mehanizmi zamora

Voljna kontrakcija zavisi od serije događaja, počev od adekvatne ulazne pobude u višim motornim centrima, pa sve do energetski zavisne interakcije aktina i miozina. Poremećaj u bilo kom od ovih događaja može rezultovati smanjenjem sile, što predstavlja zamor mišića. Neka od mnogih mogućih mesta pojave poremećaja prikazana su na Slici 1.8. Ona mogu biti grubo podeljena u tri osnovne kategorije:

- 1) Mesta koja podrazumevaju prenošenje akcionog potencijala od centralnog nervnog sistema do mišića (mesta od 1-5);
- 2) Različiti metabolički i enzimski procesi koji obezbeđuju energiju za mehanizam kontrakcije (mesta 7-8);
- 3) Proces povezivanja pobude i kontrakcije, koji povezuje prve dve kategorije (mesta 4 i 6).

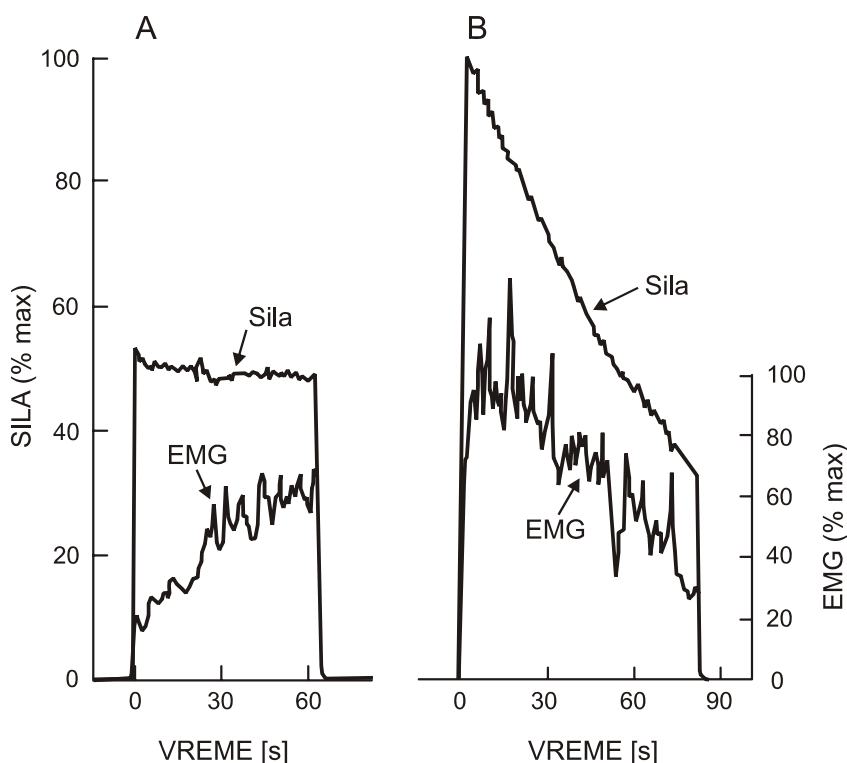


Slika 1.8 Neka od mogućih mesta pojave zamora i metodi za njihovo ispitivanje

Mnogi istraživači tradicionalno posmatraju zamor kao jedinstveni entitet, tražeći zajednički fiziološki mehanizam koji ga uzrokuje. Zbog toga je zamor pripisivan

isključivo poremećajima u centralnom nervnom sistemu, oštećenju u neuromišićnim vezama ili čisto kontraktilnim i metaboličkim uzrocima. Međutim, pošto mišićna kontrakcija zavisi od čitavog lanca događaja, tokom dugotrajnih aktivnosti javljaju se promene na mnogim mestima istovremeno. Štaviše, različite vrste vežbi izazivaju neravnomeran uticaj na različita mesta. Zbog toga, oštećenje pojedinačnog mesta ili kombinacije više mesta prvenstveno zavisi od tipa i intenziteta mišićne aktivnosti koja izaziva zamor.

Složena interakcija između različitih mesta očigledna je u mnogim situacijama u kojima dolazi do pojave zamora. Na primer, zamor usled vežbi slabog intenziteta je jasno povezan sa trošenjem izvora energije (Bergström i dr., 1967, Karlsson i dr., 1981). Pa ipak električna stimulacija kvadricepsa iscrpljenih trkača dugoprugaša, koji jedva mogu da stoje, pokazuje da je snaga njihovih mišića veoma malo redukovana, dok je njihova neuromišićna koordinacija očigledno poremećena (Jones, 1981). Poremećaji u sprezi pobuda/kontrakcija se javlja kao zajednički činilac zamora u različitim oblicima vežbi, od neprekidne maksimalne izometrijske kontrakcije do trčanja uz stepenice (Edwards i dr., 1997) i poremećaja disanja koji se pripisuje zamoru mišića dijafragme (Aubier, 1981). Međutim, značaj oštećenja sprege pobuda/kontrakcija još uvek je nejasan. Takođe, motivacija i njen uticaj na centralnu pobudu su česti faktori za određivanje uspešnosti kod vežbi sa maksimalnim naporom. Zbog svega ovoga zamor se može posmatrati kao sveukupna posledica mnogih međusobno povezanih procesa, od kojih svaki može biti detektovan posebnim tipom vežbi. Sa druge strane, s obzirom da se mnoge promene dešavaju istovremeno, veoma je teško odrediti koji uzrok izaziva određeni efekat. Na primer, kod ritmičkih vežbi kao što je trčanje ili vožnja bicikla, ustanovljena je jasna paralela između zamora i akumulacije laktata. Ostaje da se pokaže da li laktat izaziva zamor ili je jednostavno paralelni nus-proizvod. Slično, svaka promena električne aktivnosti ne mora obavezno biti uzrok istovremenih promena u proizvodnji sile, osim ako to nije direktno pokazano.



Slika 1.9 Sila i EMG aktivnost tokom neprekidne voljne izometrijske kontrakcije mišića *biceps brachii* pri

A) konstantnoj sili koja se održava na 50% maksimalne voljne sile

B) tokom neprekidne maksimalne kontrakcije

(Bigland-Ritchie, 1981)

Kada je smanjene sile praćeno istovremenim padom električne aktivnosti, zamor se uglavnom pripisuje oštećenju u pobudi, ali ukoliko je električna aktivnost neumanjena, smatra se da je oštećenje u kontraktilnom sistemu. Zbog toga, zaključak koji se donosi zavisi od odnosa EMG (Elektro-MioGram) i sile (Stephens, 1972). U skladu sa ovakvom jednostavnom interpretacijom, različiti mehanizmi su odgovorni za zamor pri neprekidnim izometrijskim kontrakcijama prikazanim na Slikama 1.9A i 1.9B. Na Slici 1.9A održavana je konstantna submaksimalna aktivacija, koja je praćena postepenim povećanjem EMG kako se zamor razvija. Ovo se obično povezuje sa regrutovanjem dodatnih motornih jedinica kako se kontraktilna oštećena javljaju u jedinicama koje su već aktivne (Edwards, 1956). Pretpostavlja se da je električna stimulacija u ovom slučaju neoštećena. Na Slici 1.9B i sila i EMG opadaju istovremeno, sugerišući da zamor usled maksimalne kontrakcije prvenstveno nastaje usled neadekvatne električne stimulacije (Stephens, 1972). Pre nego što se donese zaključak da su potpuno različiti mehanizmi odgovorni za pojavu zamora tokom veoma sličnih tipova kontrakcija, moraju biti razmotreni i drugi faktori koji takođe izazivaju promene sile ili EMG. Pored prethodno

navedene interpretacije odnosa EMG/sila pri voljnim kontrakcijama, ovi faktori takođe uključuju i razlike u električnim i mehaničkim odzivima pri zamoru različitih tipova mišićnih vlakana. Zamor mišića se ne odlikuje samo gubitkom sposobnosti da se proizvede sila, već i smanjenjem brzine kontrakcije (Edwards i dr., 1972, 1975; Mosso, 1892). Frekvencija pobude koja je potrebna da bi se održao određeni nivo mišićne aktivacije je direktno proporcionalan brzini kontrakcije. Odatle, fiziološki odziv na svaku promenu u električnoj pobudi zavisi od istovremenih promena u mišićnoj mehanici, a gubitak sile ne mora obavezno da bude rezultat smanjenja električne aktivnosti.

Ukoliko se zamor meri na osnovu smanjenja sile, promene dužine mišića i brzine pokreta ne smeju da utiču na merenje. Slično, promene u sveukupnoj mišićnoj aktivnosti ne smeju biti pripisane promeni ponašanja pojedinačnih motornih jedinica ukoliko je broj aktivnih jedinica promenljiv. Štaviše, merenja sile i električne aktivnosti mogu biti narušena nekontrolisanim stepenom oporavka ukoliko aktivnost nije neprekidna. Ove činjenice komplikuju interpretaciju većine podataka o zamoru publikovanih u literaturi. Zbog toga se najčešće razmatra zamor pri neprekidnoj maksimalnoj izometrijskoj kontrakciji, gde su mnogi od ovih problema izbegnuti. Koliko su ovi rezultati daleko od ostalih tipova kontrakcija, ostaje da se proveriti.

Kako bi se ustanovilo da li je zamor rezultat smanjenjem aktivacije centralnog nervnog sistema, moguće je uporediti brzinu opadanja intenziteta sile tokom neprekidne maksimalne izometrijske voljne kontrakcije sa brzinom prilikom maksimalne stimulacije motornog nerva (Slika 1.8). Ukoliko sila opada brže tokom voljne aktivnosti i ukoliko se može obnoviti pomoću stimulacije nerva, onda je reč o „centralnom“ zamoru. U slučaju da sila podjednako opada u obe varijante, zamor je najverovatnije nastao na nekom mestu iza tačke stimulacije i takav zamor se naziva „perifernim“. Poremećaj retko nastaje u prostiranju akcionog potencijala duž motornog neurona, ali se to veoma često dešava na neuromišićnom spoju. Efikasnost prenošenja akcionog potencijala preko neuromišićnog spoja i preko površinske membrane mišića može se izmeriti tokom voljnih kontrakcija tako što se snimaju:

- 1) Masovni akcioni potencijal (M wave) izazvan iz površine mišića superpozicijom pojedinačnih maksimalnih impulsa na nervu;
- 2) Prirodni, integralni „globalni“ EMG;

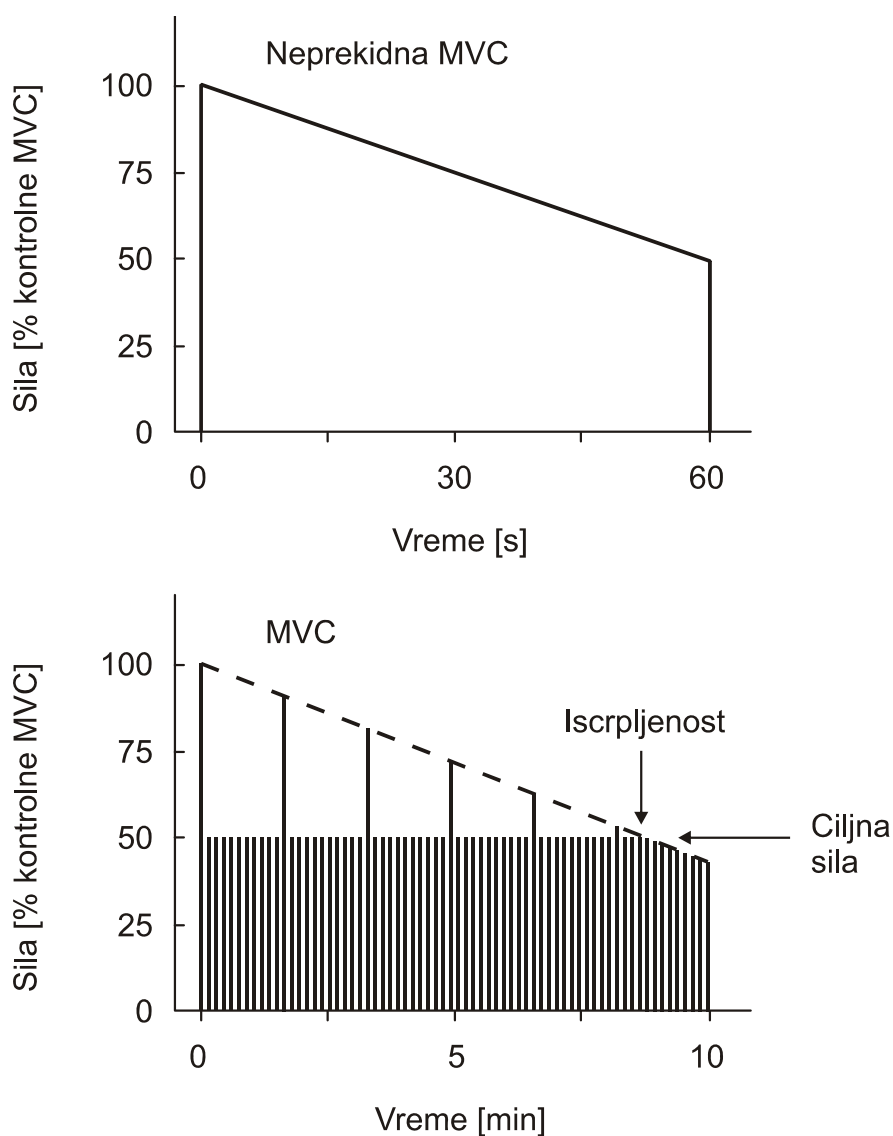
- 3) Aktivnost malih uzoraka gradivnih motornih jedinica, korišćenjem tankih intramuskularnih žičanih elektroda.

Poslednje navedeno merenje omogućava da se svaka promena u sveukupnoj mišićnoj aktivnosti može analizirati u svetlu promene broja i veličine pojedinih vlakana i potencijala motornih jedinica, a ponekad i u funkciji promena u ponašanju pojedinačnih motornih jedinica. Promene u sposobnosti površine mišića da prenese akcioni potencijal može se razdvojiti od promena u neuromišićnoj transmisiji poređenjem rezultata stimulacije nerva sa rezultatima direktno pobuđenog izolovanog mišića u prisustvu neke vrste mišićnog relaksanta (otrov, anestetik), kada neuromišićna transmisija nije moguća (Jones, Bigland 1979; Jones 1981). Ukoliko se gubitak sile ne može povezati ni sa jednim od ovih mesta, onda se može smatrati da je zamor rezultat događaja na t-tubularnom sistemu ili iza njega.

Merenje zamora

Neuromišićni zamor se pod određenim okolnostima može reflektovati na opadanje performansi. Na primer, tokom neprekidne maksimalne kontrakcije sila mišića će opadati postepeno, tako da se zamor može uočiti od početka vežbe (Slika 1.10 gore). Ukoliko se, međutim, generiše submaksimalna kontrakcija, željeni intenzitet se može održati duže vreme. U ovom slučaju zamor može biti primećen tek u trenutku kada mišić više nije u mogućnosti da proizvede željenu silu. Ova nemogućnost mišića da proizvede maksimalnu silu je posledica pratećih procesa tokom vežbe, koji se mogu utvrditi povremenim merenjem maksimalne sile (Slika 1.10 dole).

Maksimalna voljna generisana sila. Pouzdana ocena zamora mišića (kao što je prikazano u Tabeli 1.1) u mnogome zavisi od merenja sposobnosti da mišić generiše silu. Kod ljudi je često korišćena maksimalna voljna sila izometrijske kontrakcije. Kao što navodi nekoliko autora, voljno generisana sila je ograničena nedostatkom motivacije i inhibitorским efektima na različitim nivoima u centralnom nervnom sistemu i na nivou mišića (Slika 1.11) (Vollestad, 1995; Gandevia, 1995; Windhorst and Boorman, 1995).

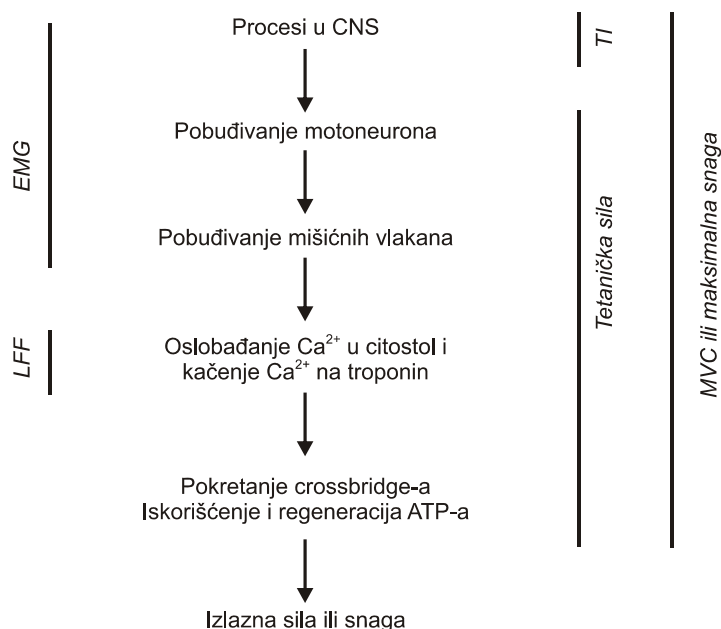


Slika 1.10 Shematski prikaz protokola zamora pri neprekidnoj maksimalnoj voljnoj kontrakciji (MVC) (gore) i pri cikličnim kontrakcijama od 45% MVC (dole). Zamor, ocenjen na osnovu sile pri MVC, se javlja od početka u oba protokola, iako redukcija nije vidljiva toko prvih 10 min cikličnih submaksimalnih kontrakcija (Vollestad, 1997).

Nekada čak nije dovoljno ni snažno ohrabrivanje i stalna povratna informacija da potpuno otkloni centralna ograničenja. Iz tog razloga Gandevia (Gandevia, 1995) ističe važnost pravljenja razlike između maksimalne voljne sile kontrakcije i maksimalne pobuđene sile (Tabela 1.1). Maksimalna pobuđena sila se može odrediti električnom stimulacijom mišićnog nerva. Ukoliko termin zamor ograničimo na „smanjenje sposobnosti mišića da generiše silu izazvano vežbom“, centralni zamor se može definisati kao „smanjenje maksimalne voljne sile kontrakcije, koje se javlja tokom vežbe koja nije praćena padom maksimalne pobuđene sile“.

Tabela 1.1 Terminologija i definicije

Termin	Definicija
Sila pri maksimalnoj voljnoj kontrakciji	Sila generisana pri postojanju povratne sprege i ohrabivanja, kada subjekat veruje da je to maksimalan napor.
Maksimalna pobuđena sila	Sila koju generiše mišić ili grupa mišića kada dodatno povećanje električne stimulacije ne uvećava silu.
Maksimalna izlazna snaga	Snaga generisana pri postojanju povratne sprege i ohrabivanja, kada subjekat veruje da je to maksimalan napor.
Zamor mišića	Svaki gubitak sposobnosti mišića da generiše silu ili snagu izazvan vežbom.
Centralni zamor	Svaka redukcija sile maksimalne voljne kontrakcije koja nije praćena istovremenom redukcijom maksimalne pobuđene sile.



Slika 1.11 Shematski prikaz kako različiti metodi, često korišćeni u studijama zamora, mogu otkriti informacije o procesima koji su potencijalno uključeni u generisanje sile ili snage. EMG: elektromiografija;

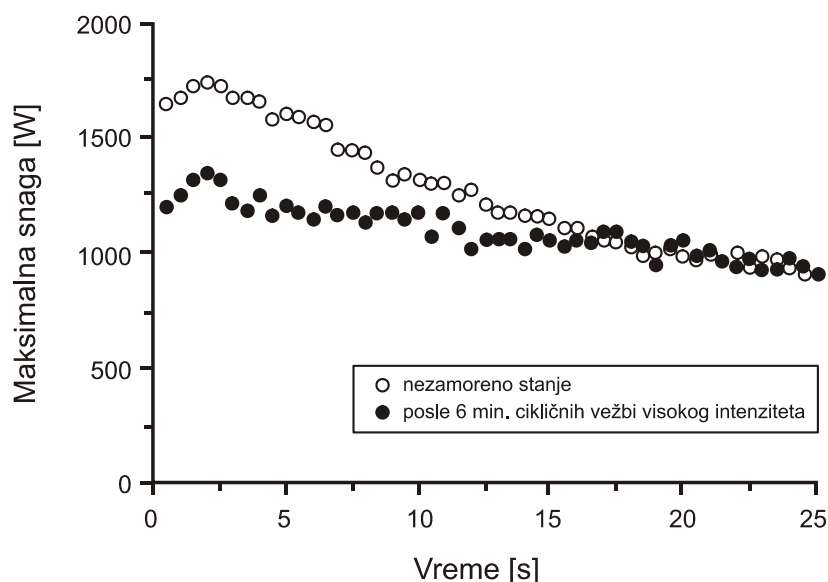
LFF: zamor pri niskim frekvencijama; TI: tvič interpolacija; MVC: maksimalna voljna kontrakcija.

U skladu sa definicijom u Tabeli 1.1, najdirektnija ocena zamora se dobija merenjem sile ili snage nastale kao rezultat maksimalnog voljnog napora ili električne tetaničke stimulacije.

Maksimalne voljne kontrakcije (MVC) se dobijaju tako što se subjekat instruiira da proizvede najveću moguću silu, pri čemu su promene dužine ograničene na početno zatezanje mišićno-tetivne jedinice. Osnova direktnog merenja je oprema za merenje sile,

kao i pouzdani i ponovljivi uslovi testiranja. Na primer, zamor tokom vežbi sa ekstenzorima kolena je lako kvantifikovati iz razloga što postoji samo jedan pravac generisanja sile (ili pokreta), a noga se može držati uvek u standardnoj poziciji. Uz vežbu i verbalno hrabrenje od strane osoblja, mogu se postići veoma male varijacije maksimalne voljne kontrakcije nezamorenih zglobova gornjih i donjih ekstremiteta. Korisnost maksimalne voljne kontrakcije za druge mišićne grupe je manje očigledna. U mnogim situacijama agonisti i antagonisti mogu na različite i nepredvidive načine uticati na proizvedenu silu. Štaviše, biomehanika može biti prilično komplikovana, kao što je to slučaj kod ramena ili donjeg dela kičme. U takvim slučajevima veoma je teško pripisati pad maksimalne sile ili snage bilo kom specifičnom mišiću, ukoliko ne postoje neke dodatne informacije.

Snaga. Pored ocene sposobnosti da generiše silu, često je važnije izmeriti mogućnost mišića da proizvede snagu. U poređenju sa izometrijskim kontrakcijama, koncentrične kontrakcije (na primer vožnja bicikla) su više energetske zahtevne i zahtevaju bržu regeneraciju ATP-a (Woledge i dr., 1985). Tako, merenje maksimalne izlazne snage može dati dodatne informacije, pošto se promene u procesima uključenim u oslobađanje i iskorišćenje energije mogu mnogo lakše detektovati pri koncentričnim nego pri isometrijskim kontrakcijama.



Slika 1.12 Maksimalna snaga svake kontrakcije generisana tokom 25 sekundi maksimalnog cikličnog napora pri konstantnoj frekvenciji (120 o/min). Prazni krugovi predstavljaju nezamoreno stanje; puni krugovi predstavljaju podatke dobijene odmah posle 6 minuta zamaranja cikličnim vežbama visokog intenziteta (Beelen i Sargeant, 1991).

Tokom poslednjih decenija postalo je moguće izmeriti izlaznu snagu. U istraživanjima se koriste specijalno konstruisani ergometri sa konstantnom brzinom, kao i komercijalni isokinetički uređaji (Cheetham i dr., 1986; McCartney i dr., 1983; Perrine i Edgerton, 1978). Maksimalna izlazna snaga se može meriti pri različitim brzinama kontrakcije, ali zbog pokreta, svaka kontrakcija je kratka. Moment će biti promenljiv tokom ciklusa kontrakcije, a maksimalni moment (ili snaga), kao i ukupni rad se mogu izračunati. Ove promenljive su analogne sili pri maksimalnoj voljnoj kontrakciji. Kontinuirano snimanje momenta svake kontrakcije takođe omogućava istraživanje promena u maksimalnom i prosečnom momentu izazvanih vežbom. Na ovaj način moguće je poređenje promena u različitim fazama kontrakcije.

U studijama zamora, promene izlazne snage se najčešće izučavaju na osnovu trenutnih promena u snazi svake kontrakcije pri kratkom maksimalnom naporu. Maksimalna snaga se dostiže za nekoliko sekundi, a zatim postepeno opada (Slika 1.12)(Sargeant i dr., 1981; Cheetham i dr., 1986; Beelen i Sargeant, 1991). Snaga obično opadne 50% tokom maksimalnog napora tokom 30 s, kao što je prikazano na Slici 1.12 (prazni kružići). Razvoj zamora tokom jedne ovakve vežbe se tako može uporediti sa zamorom tokom neprekidne maksimalne izometrijske voljne kontrakcije (Slika 1.10) (Jones i dr., 1979; Bigland-Ritchie i dr., 1983).

Kako bi se proces zamaranja detaljnije izučio, jedan od pristupa može biti upoređivanje efekata maksimalne snage sa efektima maksimalne sile. U studiji Newham i dr. (1991) ispitivani su izokinetički moment i sposobnost generisanja izometrijske sile pre i posle 4 minuta maksimalnog istezanja kolena. Sila pri maksimalnoj voljnoj kontrakciji i maksimalni moment tokom brzih izokinetičkih kontrakcija su opali na oko 80%, dok je pri sporim izokinetičkim kontrakcijama primećen nešto veći pad. Odatle, sveukupni zamor može biti ocenjen na osnovu različitih probnih kontrakcija.

Jedna od prednosti korišćenja maksimalne voljne sile ili snage prilikom ispitivanja zamora je to što je takav izlaz integralni rezultat celokupnog lanca događaja. I jedan i drugi pristup uključuju različite ulaze na svim nivoima u procesu aktivacije (Slika 1.11). Odatle, svaki pad na izlazu može nastati usled centralnog zamora ili usled faktora iza motoneurona. Voljne kontrakcije mogu poslužiti kao prvi izbor metoda, pre dodatnih istraživanja koja bi detaljnije ispitala mesta i mehanizme zamora.

Tetanička sila. U nekim situacijama, maksimalna sila ili snaga mogu biti ispitani korišćenjem električne stimulacije motoneurona ili samog mišića. Korišćenjem ovog pristupa, sva ograničenja nastala u centralnom nervnom sistemu su isključena, tako da se može ispitati sposobnost mišića koji se razmatra. Stimulacija nerva zahteva pristup nervu koji se stimuliše i lako je primenjiva kod malih mišića, kao što su mišići šake. Takođe, mišići potkolenice, pa čak i respiratorni mišići se mogu ispitivati stimulacijom nerva (Bigland-Ritchie i dr., 1986; Fitch i McComas, 1985; Bellamare i Bigland-Ritchie, 1987; McKenzie i Gandevia, 1991). Jedna od mana stimulacije nerva je to što intenzivna stimulacija može dovesti do blokade neuromišićne transmisije (Jones, 1996). Ukoliko dođe do ovakve blokade, dobijena merenja su nepouzdana, a izmereni zamor je precenjen u odnosu na stvarni fiziološki zamor. Kako bi se izbegao ovaj problem, mnogi istraživači koriste kratke serije visokofrekventne stimulacije. Za većinu potreba, stimulacija od 50 Hz tokom 200-400 ms je dovoljna da se dostigne tetanička sila. Pojedinačni trzaji (single twitch) su takođe često korišćeni da bi se izmerio potencijal za generisanje sile. Sila pri pojedinačnim trzajima je obično veoma mala, tako da ju je teško tačno izmeriti. Štaviše, različiti tipovi mišićnih vlakana imaju različite stepene tvič potencijacije. S obzirom na sva ova razmatranja, interpretacija sile pojedinačnog trzaja je dosta teška.

Pošto generisanje tetaničke sile ne zavisi od centralnog sistema, poređenje sa promenama pri maksimalnim voljnim kontrakcijama obezbeđuje procenu centralnog zamora. Nekoliko istraživača je koristilo ovakvu proceduru i pokazalo da se ponovljene submaksimalne kontrakcije kvadricepsa mogu obavljati preko 30 min bez primetnog centralnog zamora (Bigland-Ritchie i dr., 1986; Vollestad i dr., 1988). Takođe, kod pacijenata koji imaju fibromialgiju i žale se na umor, nije se moglo ustanoviti postojanje centralnog zamora tokom 20-30 min cikličnih vežbi kvadricepsa (Menghshoel i dr., 1995). Kada je isti protokol primenjen na zdrave subjekte, korišćenjem soleusa ili respiratornih mišića, maksimalna voljna sila je opala duplo brže od tetaničke sile. To pokazuje da se polovina gubitka maksimalne voljne sile može objasniti procesima u centralnom nervnom sistemu (Bigland-Ritchie i dr., 1986; Bellamare i Bigland-Ritchie, 1987). Na osnovu toga možemo zaključiti da razvoj centralnog zamora može značajno da varira između različitih mišića.

Zamor pri niskim frekvencijama (Low Frequency Fatigue – LFF). U mnogim istraživanjima je korišćena sila pojedinačnog trzaja kako bi se procenio gubitak u sposobnosti da se generiše sila. Još od prvih rezultata Edwardsa i dr. (1977), mnogi istraživači su pokazali brži pad sile pojedinačnog trzaja u odnosu na tetaničku silu. Štaviše, nasuprot relativno brzom oporavku od tetaničke sile, sila pojedinačnog trzaja zahteva sate i dane kako bi se mišić potpuno oporavio (Jones, 1996). Nesrazmerno opadanje sile pojedinačnog trzaja se naziva zamorom pri niskoj frekvenciji (low-frequency fatigue – LFF) i ustanovljen je tokom intenzivnih vežbi, kao i tokom cikličnih submaksimalnih kontrakcija (Edwards i dr., 1977; Bigland-Ritchie i dr., 1986). Edwards i dr. (1977) su zaključili da je LFF izazvan redukovanim oslobađanjem Ca^{2+} iz sarkoplazmatskog retikuluma. Skorija istraživanja na životinjskim mišićima *in vitro* su potkrepila ovu pretpostavku (Westerblad i dr., 1933). Pošto sila pojedinačnog trzaja može biti veoma mala tokom vežbe, mnogi autori koriste odnos između sile generisane pri 10 (ili 20) i 50 Hz kao meru zamora pri niskoj frekvenciji. Tako, električna stimulacija nerva ili mišića niskim i visokim frekvencijama može obezbediti procenu efikasnosti prenosa signala od pobude sarkoleme do vezivanja Ca^{2+} za kontraktilne proteine.

2. Modeliranje mišića i mišićnog zamora

Mišić je materijalno telo koje se pokreće i deformiše pod spoljašnjim i unutrašnjim mehaničkim dejstvima. Zahvaljujući tome osnovni mehanički principi kretanja deformabilnih tela mogu biti primenjeni. Kako bi se opisalo mehaničko ponašanje bioloških tkiva, zakoni o održanju energije, mase i impulsa igraju glavnu ulogu. Ovi zakoni, zajedno sa konstitutivnim relacijama koje opisuju materijalne karakteristike tkiva, kao i graničnim i početnim uslovima, omogućavaju da se matematički reši veliki spektar funkcionalnih bioloških problema. Matematički, ove relacije su predstavljene parcijalnim diferencijalnim jednačinama.

Mnogi meki biološki materijali su izloženi velikim deformacijama, a relacije između napona i deformacije su nelinearne, anizotropne i nehomogene. Kada na to dodamo i kompleksnu geometriju bioloških struktura, postaje nemoguće naći rešenje ovih jednačina u zatvorenom obliku. Umesto toga možemo iskoristiti različite numeričke metode kako bismo našli zadovoljavajuće približno rešenje ovih jednačina. Kako bi se odredio mehanički odziv mišića, možemo iskoristiti metode analize mehanike solida, kao što je Metod konačnih elemenata. Metod konačnih elemenata transformiše parcijalne diferencijalne jednačine u konačan skup algebarskih jednačina.

Ponašanje skeletnog mišića je bazirano na visoko nelinearnom aktivnom i pasivnom delu, koji su opisani različitim matematičkim modelima. Ovi modeli uključuju različite parametre od stimulacije koja kontroliše aktivni napon do mehaničkih karakteristika tkiva koje određuju pasivni napon.

U ovom poglavlju je predstavljen osnovni koncept analize skeletnih mišića metodom konačnih elemenata, koji je praktično isti za sva deformabilna tela i konstrukcije. S obzirom da su mišići izloženi velikim pomeranjima i deformacijama, obrađen je i generalni pristup u modeliranju velikih pomeranja i deformacija metodom konačnih elemenata. Pored ovoga date su i neke specifičnosti vezane za modeliranje mišića, kao i detalji koji se odnose na modeliranje mišićnog zamora.

2.1. Numeričke metode za modeliranje mehaničkog odziva mišića

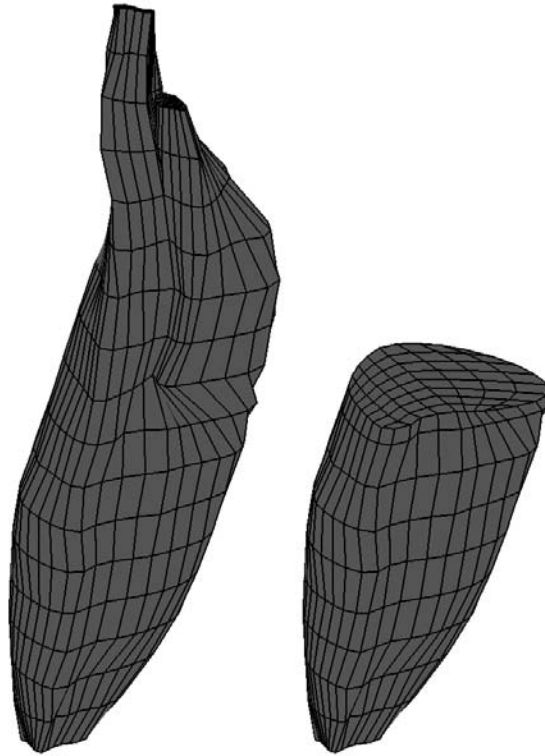
Metod konačnih elemenata

Analiza inženjerskih sistema zahteva idealizovanje tih sistema u formi koja može biti rešena, formulaciju matematičkog modela, rešavanje ovog modela i interpretaciju rezultata. Metod konačnih elemenata (MKE) je jedan od najopštijih numeričkih metoda koji se koristi za rešavanje problema u inženjerskim analizama i dizajnu.

Razvoj MKE je direktno vezan za pojavu računara. Osnovne ideje MKE postavili su Argiris (Argyris i Kelsey, 1954), Turner (Turner i dr., 1956) i Klaf (Clough, 1960). Sedamdesetih godina započeta je primena MKE na nelinearne probleme čvrstih tela (solida), kao i na druge oblasti (mehanika fluida, provođenje toplote, elektromagnetizam itd.) (Kojic i dr., 1998). Primena MKE je danas proširena i na najsloženije probleme kao što je biomehanika i bioinženjering uopšte.

S obzirom da je ponašanje većine kompleksnih struktura gotovo nemoguće opisati analitičkom formom, koristeći MKE ovakve strukture diskretizujemo na veliki broj konačnih elemenata čije ponašanje možemo opisati tačno ili približno tačno. Svi elementi povezani su međusobno zajedničkim čvorovima, a njihove međusobne relacije su definisane zakonima o održanju mase, energije i impulsa, kao i konstitutivnim jednačinama materijala od koga su sačinjeni elementi. Ovakve, međusobno povezane, relacije formiraju sistem algebarskih jednačina koji je moguće rešiti direktnim ili iterativnim metodama. Rešavanjem sistema praktično se dobija konfiguracija strukture u ravnotežnom stanju.

Slika 2.1 daje shematski prikaz mišića diskretizovanog na 3D konačne elemente. Mišić se deformiše pri spoljašnjem opterećenju i unutrašnjoj pobudi i u opštem slučaju ima velika pomeranja i deformacije.

Slika 2.1 Mišić *biceps brachii* čoveka diskretizovan na 3D konačne elemente

Nelinearna analiza u mehanici solida

Osnovni problem u nelinearnoj analizi je pronalaženje ravnotežnog stanja tela izloženog određenom opterećenju. Ukoliko pretpostavimo da su spoljašnja opterećenja funkcija vremena, uslovi ravnoteže sistema konačnih elemenata, koji predstavlja telo koje se razmatra, može se izraziti kao

$${}^n \mathbf{F}^{ext} - {}^n \mathbf{F}^{int} = \mathbf{0} \quad (2.1.1)$$

gde je ${}^n \mathbf{F}^{ext}$ vektor spoljašnjih čvornih sila u konfiguraciji n , a ${}^n \mathbf{F}^{int}$ vektor čvornih sila koje odgovaraju naponima elemenata u ovoj konfiguraciji. Tako imamo da je

$${}^n \mathbf{F}^{ext} = {}^n \mathbf{F}_C^{ext} + {}^n \mathbf{F}_S^{ext} + {}^n \mathbf{F}_V^{ext} \quad (2.1.2)$$

gde su ${}^n \mathbf{F}_C^{ext}$, ${}^n \mathbf{F}_S^{ext}$ i ${}^n \mathbf{F}_V^{ext}$ vektori čvornih, površinskih i zapreminskih sila redom.

Relacija u jednačini (2.1.1) mora da izrazi ravnotežno stanje sistema u trenutnoj deformisanoj konfiguraciji, uzimajući u obzir sve nelinearnosti. Takođe, u dinamičkoj analizi, vektor ${}^n \mathbf{F}^{ext}$ uključuje inercione i prigušne sile.

Ukoliko se radi o rešavanju nelinearnog odziva, ravnotežna jednačina (2.1.1) mora biti zadovoljena tokom čitave istorije opterećivanja. Drugim rečima, promenljiva n može da uzme bilo koju vrednost između nule i poslednje konfiguracije od interesa.

Za mnoge probleme potrebno je izračunati napone i pomeranja pri određenom opterećenju ili u određenom vremenskom trenutku. U nekim nelinearnim statičkim analizama ravnotežna konfiguracija koja odgovara ovom opterećenju može biti izračunata bez računanja drugih ravnotežnih konfiguracija. Međutim, ukoliko analiza uključuje nelinearne geometrijske i materijalne uslove koji zavise od istorije opterećenja, ravnotežne relacije moraju biti rešene za celokupni vremenski interval od interesa. Ovakvi problemi se mogu efikasno rešiti korišćenjem inkrementalne sheme "korak po korak" (Bathe, 1996).

Osnova inkrementalne sheme "korak po korak" je pretpostavka da je poznato rešenje za konfiguraciju n , a da se traži rešenje za konfiguraciju $n+1$. Odatle, za konfiguraciju $n+1$ imamo

$${}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}} = \mathbf{0} \quad (2.1.3)$$

Pretpostavimo da ${}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}}$ ne zavisi od vremena. Pošto je rešenje za konfiguraciju n poznato, možemo da napišemo

$${}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}} = {}^n\mathbf{F}^{\text{int}} + \mathbf{F}^{\text{int}} \quad (2.1.4)$$

gde je \mathbf{F}^{int} priraštaj sila koji odgovara priraštaju pomeranja i napona u elementu od konfiguracije n do konfiguracije $n+1$. Ovaj vektor se aproksimativno može napisati korišćenjem tangentne matrice ${}^n\mathbf{K}$ koja odgovara geometrijskim i materijalnim uslovima u konfiguraciji n ,

$$\mathbf{F}^{\text{int}} \approx {}^n\mathbf{K}\mathbf{U} \quad (2.1.5)$$

pri čemu je \mathbf{U} vektor priraštaja pomeranja u čvorovima, a

$${}^n\mathbf{K} = \frac{\partial {}^n\mathbf{F}^{\text{int}}}{\partial {}^n\mathbf{U}} \quad (2.1.6)$$

Zamenom (2.1.5) i (2.1.4) u (2.1.3), dobijamo

$${}^n \mathbf{K} \mathbf{U} = {}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^n \mathbf{F}^{\text{int}} \quad (2.1.7)$$

tako da rešavanjem po \mathbf{U} možemo izračunati i približna pomeranja u konfiguraciji $n+1$,

$${}^{n+1} \mathbf{U} \approx {}^n \mathbf{U} + \mathbf{U} \quad (2.1.8)$$

Pošto smo izračunali približna pomeranja koja odgovaraju konfiguraciji $n+1$, možemo izračunati napone i odgovarajuće čvorne sile. Međutim, zbog aproksimacije u jednačini (2.1.5), ova rešenja mogu imati značajnu grešku, tako da je neophodan iterativni postupak kako bi se dobilo rešenje zadovoljavajuće tačnosti.

Najčešće korišćen metod je Njutn-Rafson iterativni metod (Kojic i Bathe, 2005). Jednačine koje se koriste u Njutn-Rafson iteracijama ($i = 1, 2, 3, \dots$) su

$$\begin{aligned} {}^{n+1} \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} &= {}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{int}(i-1)} \\ {}^{n+1} \mathbf{U}^{(i)} &= {}^{n+1} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

sa početnim uslovima

$${}^{n+1} \mathbf{U}^{(0)} = {}^n \mathbf{U}; \quad {}^{n+1} \mathbf{K}^{(0)} = {}^n \mathbf{K}; \quad {}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{int}(0)} = {}^n \mathbf{F}^{\text{int}} \quad (2.1.10)$$

Vektor nebalansiranih sila ${}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{int}(i-1)}$ odgovara silama koje još nisu uravnotežene naponima u elementima, pa je potreban inkrement čvornih pomeranja. Ovo korigovanje čvornih pomeranja u iteracijama se obavlja sve dok neuravnotežene sile i priraštaji pomeranja ne budu dovoljno mali.

Korišćenjem relacija (2.1.11) i (2.1.12) dobijamo vektor unutrašnjih sila ${}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{int}(i-1)}$ i matricu krutosti ${}^{n+1} \mathbf{K}^{(i-1)}$. U slučaju nelinearnog materijalnog modela (posebno kada se u MKE program ugrađuje novi model) osnovni zadatak je računanje napona ${}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ i tangentne konstitutivne matrice ${}^{n+1} \mathbf{C}^{(i-1)}$ u okviru konačnog elementa, pošto imamo da je

$${}^{n+1} \mathbf{F}^{\text{int}(i-1)} = \int_{V^{(i-1)}} \left({}^{n+1} \mathbf{B}^T {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} \right)^{(i-1)} dV \quad (2.1.11)$$

$${}^{n+1}\mathbf{K}^{(i-1)} = \int_{{}^{n+1}V^{(i-1)}} \left({}^{n+1}\mathbf{B}^T {}^{n+1}\mathbf{C} {}^{n+1}\mathbf{B} \right)^{(i-1)} dV \quad (2.1.12)$$

pri čemu je ${}^{n+1}\mathbf{B}$ matrica izvoda interpolacionih funkcija.

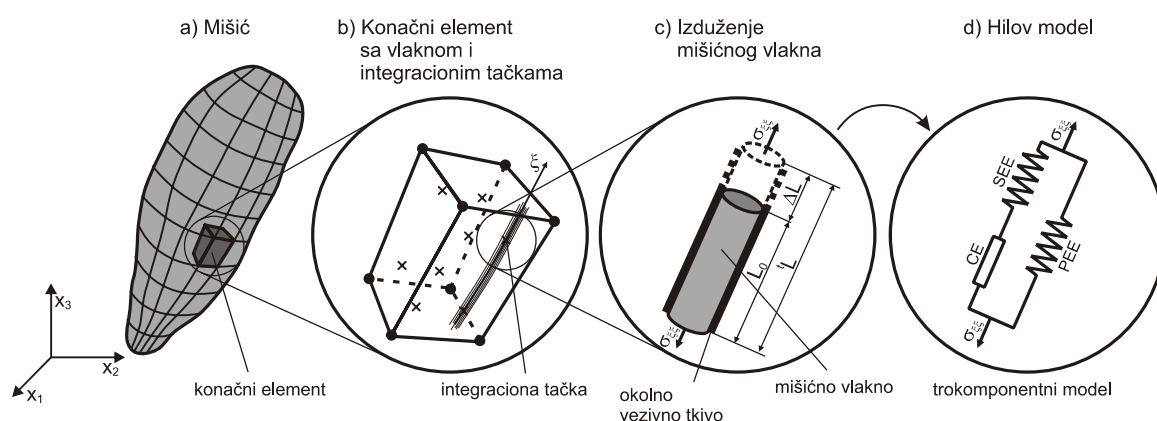
Za tačnost rezultata najvažnije je tačno određivanje unutrašnjih sila ${}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}(i-1)}$ iz pomeranja ${}^{n+1}\mathbf{U}^{(i-1)}$, što znači tačna integracija napona. Tačnost tangentne matrice ${}^{n+1}\mathbf{K}^{(i-1)}$ ne utiče na tačnost rešenja, ali značajno utiče na smanjenje broja iteracija potrebnih da bi se dostigla konvergencija.

Tabela 2.1 Njutr-Rafsonova iterativna shema (Kojic i Bathe, 2005)

<p>1. Inicijalizacija konfiguracije $n + 1$</p> <p>$i = 0$</p> <p>${}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}(0)} = {}^n\mathbf{F}^{\text{int}}, \quad {}^{n+1}\mathbf{K}^{(0)} = {}^n\mathbf{K}, \quad {}^{n+1}\mathbf{U}^{(0)} = {}^n\mathbf{U}$</p> <p>2. Iteracija i</p> <p>$i = i + 1$</p> <p>${}^{n+1}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}(i-1)}$</p> <p>${}^{n+1}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{n+1}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)}$</p> <p>3. Provera konvergencije</p> <p>a) Kriterijum sile</p> $\ {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}(i)}\ \leq \varepsilon_F \ {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^n\mathbf{F}^{\text{int}}\ $ <p>b) Kriterijum pomeranja</p> $\ \Delta\mathbf{U}^{(i)}\ \leq \varepsilon_D \ {}^{n+1}\mathbf{U}^{(i)}\ $ <p>c) Kriterijum energije</p> $\Delta\mathbf{U}^{(i)T} \left({}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{int}(i)} \right) \leq \varepsilon_E \Delta\mathbf{U}^{(1)T} \left({}^{n+1}\mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^n\mathbf{F}^{\text{int}} \right)$ <p>4. Ukoliko kriterijum konvergencije nije zadovoljen procedura se ponavlja od 2. koraka. U suprotnom, započinj se iteracije za sledeću konfiguraciju (1. korak)</p>

Kao što je naglašeno u uvodnom poglavlju, skeletni mišići imaju vlaknastu strukturu, a sila se generiše unutar mišićnih vlakana. Imajući to u vidu, zadatak je odrediti napone u pravcu mišićnih vlakana. Na Slici 2.2b je šematski prikazan konačni element sa vlaknom,

čija je orijentacija u prostoru definisana jediničnim vektorom ξ_0 (osa ξ na slici). Ovaj pravac odgovara integracionoj tački korišćenoj za numeričko određivanje matrica i vektora konačnog elementa u jednačinama (2.1.9), (2.1.11) i (2.1.12). Napon u pravcu vlakna, označen sa $\sigma_{\xi\xi}$ (koji se sastoji od aktivnog dela σ_s i pasivnog dela σ^E), zavisi od izduženja ΔL , ili relativne dužine mišićnog vlakna $\lambda = 1 + \Delta L / L_0$ (Slika 2.2c). Napomenimo da relativna dužina predstavlja odnos tekuće i početne dužine elementarnog materijalnog vlakna. Radi kraćeg pisanja u nastavku ćemo koristiti englesku reč za relativnu dužinu, "streč" (eng. *stretch*), koja je ustaljena u literaturi iz ove oblasti. U prethodnoj relaciji L_0 je početna dužina vlakna, kada je napon jednak nuli. Zavisnost $\sigma_{\xi\xi}(\lambda)$ predstavlja *konstitutivnu relaciju* mišića. Ova konstitutivna relacija se može definisati fenomenološkim (eksperimentalno određenim) materijalnom modelom, kao što je Hilov model, šematski prikazan na Slici 2.2d.



Slika 2.2 Shematski prikaz modeliranja mišića metodom konačnih elemenata: od mišića kao deformabilnog tela do Hilovog modela. a) Mišić diskretizovan na konačne elemente; b) 3D konačni element sa integracionim tačkama i mišićnim vlaknom; c) Izduženje mišićnog vlakna pod naponom $\sigma_{\xi\xi}$; d) Hilov trokomponentni model.

U nastavku će biti prikazano računanje streča u pravcu vlakna za trenutnu konfiguraciju u okviru inkrementalno-iterativne sheme (2.1.9), koji je potreban za određivanje napona. Poslednja poznata konfiguracija za korak $n+1$ i iteraciju $i-1$ je data vektorom položaja materijalnih tačaka ${}^{n+1}\mathbf{x}^{(i-1)}$. Pomeranja su predstavljena vektorom ${}^{n+1}\mathbf{u}^{(i-1)}$.

Generalno, za trenutnu konfiguraciju se računa jedinični vektor ${}^{n+1}\xi_0^{(i-1)}$ i streč u pravcu vlakna ${}^{n+1}\lambda^{(i-1)}$. Zatim se računa napon ${}^{n+1}\sigma_s^{(i-1)}$ na osnovu materijalnog modela mišića, kao i koeficijenta ${}^{n+1}C_s^{(i-1)} \equiv \partial {}^{n+1}\sigma_s^{(i-1)} / \partial {}^{n+1}e_{\xi\xi}$ neophodnog za računanje tangentne konstitutivne matrice ${}^{n+1}\mathbf{C}^{(i-1)}$:

$${}^{n+1}\sigma_s^{(i-1)} = \sigma_s \left({}^{n+1}\lambda^{(i-1)} \right), \quad {}^{n+1}C_s^{(i-1)} \equiv \frac{\partial {}^{n+1}\sigma_s^{(i-1)}}{\partial {}^{n+1}e_{\xi\xi}^{(i-1)}} = \left({}^{n+1}\lambda \frac{\partial {}^{n+1}\sigma_s}{\partial {}^{n+1}\lambda} \right)^{(i-1)} \quad (2.1.13)$$

Ovde je korišćena relacija $\partial(\bullet)/\partial e_{\xi\xi} = \lambda \partial(\bullet)/\partial \lambda$, gde je $e_{\xi\xi} = \ln(L/L_0)$ logaritamska deformacija vlakna (koju ćemo ubuduće koristiti kao deformaciju i zvati je "deformacija").

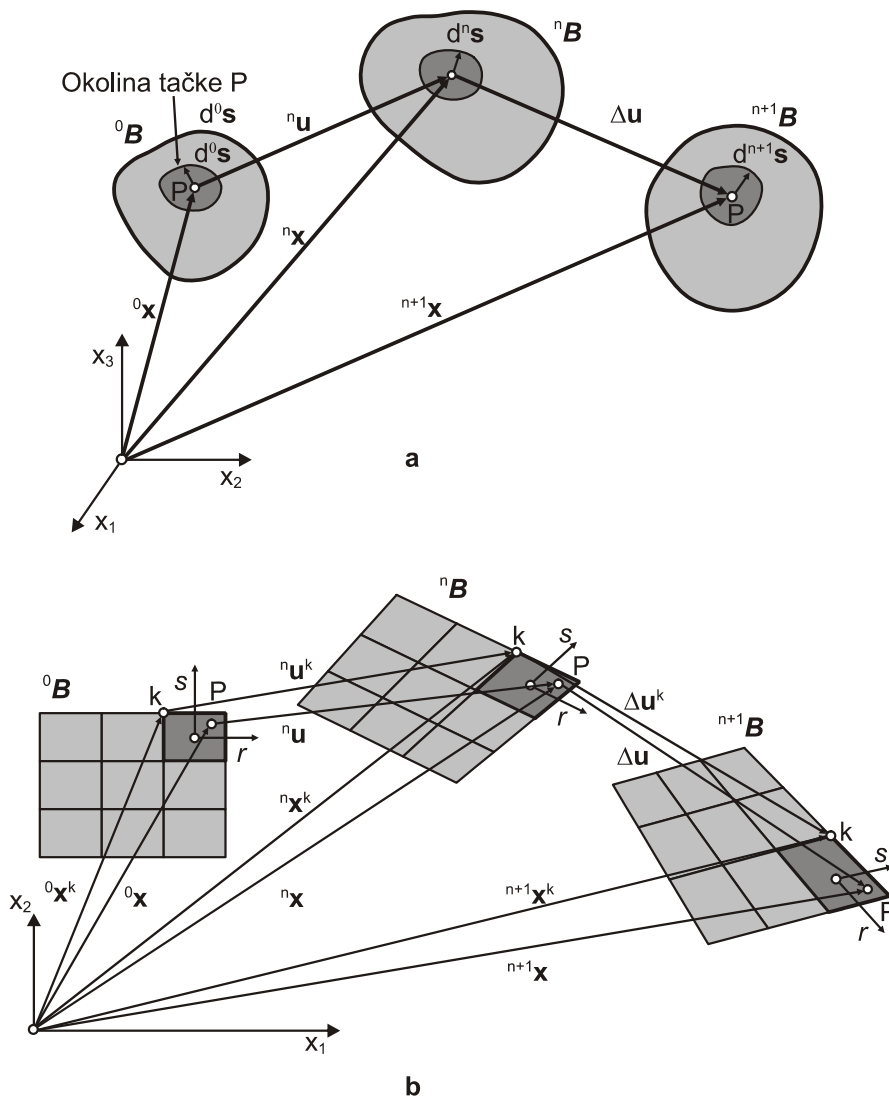
U narednim poglavljima su dati detalji računanja streča ${}^{n+1}\lambda^{(i-1)}$, kao i napona ${}^{n+1}\sigma_s^{(i-1)}$ i koeficijenta ${}^{n+1}C_s^{(i-1)}$ za Hilov model i njegovu modifikaciju.

Nelinearna analiza u slučaju velikih deformacija biosolida

Veoma često u inženjerskoj praksi pomeranja i deformacije nisu mali. U oblasti bioinženjeringa, zbog specifičnosti živih tkiva, velika pomeranja i velike deformacije materijala su gotovo pravilo. Iz tog razloga, za uspešno modeliranje ovakvih problema najčešće nije dovoljno korišćenje formulacija koje važe za male deformacije, već je potrebno uvesti mere napona i deformacija koje odgovaraju ovim uslovima. Ovde navodimo osnovne relacije iz oblasti velikih deformacija (tekst je uglavnom prema knjizi Kojic i Bathe (2005)).

Posmatrajmo telo B koje se sastoji od materijalnih čestica kontinualno raspoređenih u prostoru (Slika 2.3). U stacionarnom Dekartovom koordinatnom sistemu (x_1, x_2, x_3) definišaćemo kretanje čestica. U početnoj konfiguraciji $n=0$, materijalna čestica P , infinitezimalno male zapremine, ima koordinate

$${}^0\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x}(0) \quad (2.1.14)$$



Slika 2.3 Kretanje. a) Uopšteni prikaz kretanja tela; b) Prikaz kretanja tela konačnim elementima, 2D prikaz; r, s – lokalne ose četvorougornog elementa (Kojic i Bathe, 2005)

U konfiguraciji n pozicija tačke je

$${}^n \mathbf{x} = {}^n \mathbf{x}(t) \quad (2.1.15)$$

pri čemu je pomeranje tačke definisano promenom pozicije materijalne tačke u vremenu.

Posmatrajmo sada sve materijalne tačke tela B . Skup tačaka određenih koordinatama ${}^0 \mathbf{x}$ svih materijalnih tačaka predstavlja inicijalnu konfiguraciju ${}^0 B$, dok skup tačaka ${}^n \mathbf{x}$ predstavlja konfiguraciju ${}^n B$.

Korišćenjem izoparametarskih (prirodnih) koordinata r , s i t , definišemo poziciju tačke unutar elementa kao

$${}^n \mathbf{x} = \sum_{k=1}^N h_k {}^n \mathbf{x}^k \quad (2.1.16)$$

gde su $h_k(r, s, t)$ interpolacione funkcije, a N je broj čvorova elementa. Iz ovoga sledi da je kretanje celog tela B definisano kretanjem konačnog broja čvornih tačaka.

Pomeranje materijalne tačke P od konfiguracije 0 do konfiguracije n definišemo kao

$${}^n \mathbf{u}({}^0 \mathbf{x}, t) = {}^n \mathbf{x}({}^0 \mathbf{x}, t) - {}^0 \mathbf{x} \quad (2.1.17)$$

ili korišćenjem oblika prirodnijeg za konačne elemente kao:

$${}^n \mathbf{u} = \sum_{k=1}^N h_k ({}^n \mathbf{x}^k - {}^0 \mathbf{x}^k) = \sum_{k=1}^N h_k {}^n \mathbf{u}^k \quad (2.1.18)$$

gde su ${}^n \mathbf{u}^k$ pomeranja čvornih tačaka, definisana kao

$${}^n \mathbf{u}^k = {}^n \mathbf{x}^k - {}^0 \mathbf{x}^k \quad (2.1.19)$$

Gradijent deformacije. Gradijent deformacije predstavlja osnovnu veličinu za opisivanje kinematike deformacije kontinuuma. Gradijent deformacije u konfiguraciji n , u odnosu na referentnu konfiguraciju ${}^0 B$ se definiše kao

$${}^n \mathbf{F} = \frac{\partial {}^n \mathbf{x}}{\partial {}^0 \mathbf{x}} \quad (2.1.20)$$

ili u komponentalnom obliku kao

$${}^n F_{ij} = \frac{\partial {}^n x_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (2.1.21)$$

Ukoliko koristimo diskretizaciju metodom konačnih elemenata, onda gradijent deformacije u tački P možemo izraziti kao

$${}^n_0\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^n x_i}{\partial r_m} & \frac{\partial r_m}{\partial^0 x_j} \end{bmatrix} = {}^n\mathbf{J}^T ({}^0\mathbf{J}^{-1})^T \quad (2.1.22)$$

gde su ${}^n\mathbf{J}$ i ${}^0\mathbf{J}$ matrice Jakobijana transformacije između Dekartovih i prirodnih koordinata u konfiguraciji n i konfiguraciji 0 (Bathe, 1996). Ove matrice možemo napisati u komponentalnom obliku

$${}^nJ_{im} = \frac{\partial^n x_m}{\partial r_i} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial r_i} {}^n x_m^k \quad (2.1.23)$$

odnosno

$${}^0J_{mj} = \frac{\partial^0 x_j}{\partial r_m} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial h_k}{\partial r_m} {}^0 x_j^k \quad (2.1.24)$$

Takođe koristimo i

$${}^0_n\mathbf{F} = \frac{\partial^0 \mathbf{x}}{\partial^n \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^0 x_i}{\partial^n x_j} \end{bmatrix} \quad (2.1.25)$$

Iz (2.1.21) i (2.1.25) zaključujemo da važi

$${}^n_0\mathbf{F} {}^0_n\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^n x_i}{\partial^0 x_k} & \frac{\partial^0 x_k}{\partial^n x_j} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.1.26)$$

zbog čega ${}^0_n\mathbf{F}$ nazivamo *inverznim gradijentom deformacije* za koji važi

$${}^0_n\mathbf{F} = {}^n_0\mathbf{F}^{-1} \quad (2.1.27)$$

Primenom (2.1.21) i lančanog pravila za konfiguracije 0B , nB , ${}^{n+1}B$ dobijamo

$${}^{n+1}_0\mathbf{F} = {}^{n+1}_n\mathbf{F} {}^n_0\mathbf{F} \quad (2.1.28)$$

Veličinu ${}^{n+1}_n\mathbf{F}$ nazivamo *relativnim gradijentom deformacije*.

Gradijent deformacije se može izraziti u funkciji pomeranja kao

$${}^n\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial^n \mathbf{u}}{\partial^0 \mathbf{x}} \quad (2.1.29)$$

gde je $\frac{\partial^n \mathbf{u}}{\partial^0 \mathbf{x}}$ *gradijent pomeranja*. Slično važi i za inverzni gradijent deformacije

$${}^0\mathbf{F} = \mathbf{I} - \frac{\partial^n \mathbf{u}}{\partial^n \mathbf{x}} \quad (2.1.30)$$

Korišćenjem gradijenta deformacije možemo izračunati promenu zapremine materijala uz pomoć relacije

$$d^n V = (\det {}^n\mathbf{F}) d^0 V \quad (2.1.31)$$

gde su $d^n V$ i $d^0 V$ zapremine iste materijalne čestice u konfiguracijama ${}^n B$ i ${}^0 B$.

Da bismo istakli fizičko značenje gradijenta deformacije, razmotrimo sledeću relaciju

$$d^n x_i = {}^n F_{ik} d^0 x_k \quad (2.1.32)$$

koja sledi iz (2.1.21), odnosno u matricnoj formi

$$d^n \mathbf{s} = {}^n \mathbf{F} d^0 \mathbf{s} \quad (2.1.33)$$

Iz prethodne relacije vidimo da ${}^n \mathbf{F}$ povezuje diferencijalne materijalne vektore $d^n \mathbf{s}$ i $d^0 \mathbf{s}$ u tački P (sastoje se od istih materijalnih čestica) u konfiguracijama ${}^n B$ i ${}^0 B$.

Korišćenjem gradijenta deformacije možemo da izračunamo izduženje (streč) materijalnog elementa. Iz relacije (2.1.33) sledi da je

$${}^n \lambda = \left\| {}^n \mathbf{F} {}^0 \mathbf{n} \right\| \quad (2.1.34)$$

pri čemu jedinični vektor ${}^0 \mathbf{n}$ definiše pravac materijalnog elementa u referentnoj konfiguraciji ${}^0 B$.

Streč materijalnog elementa u pravcu ${}^n \mathbf{n}$ u konfiguraciji ${}^n B$ se na sličan način, korišćenjem (2.1.30) i (2.1.33), može izraziti kao

$${}^n \lambda = \left\| {}_n^0 \mathbf{F}^n \mathbf{n} \right\|^{-1} \quad (2.1.35)$$

Tenzori deformacija. Napišimo sada izraze za kvadrate dužina materijalnih vektora $d^n \mathbf{s}$ i $d^0 \mathbf{s}$ u tački P u konfiguracijama ${}^n B$ i ${}^0 B$

$$\begin{aligned} (d^n s)^2 &= d^0 \mathbf{s}^T {}_n^0 \mathbf{C} d^0 \mathbf{s} \\ (d^0 s)^2 &= d^n \mathbf{s}^T {}_n^0 \mathbf{C} d^n \mathbf{s} \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

gde su

$${}_n^0 \mathbf{C} = {}_n^0 \mathbf{F}^T {}_n^0 \mathbf{F} \quad (2.1.37)$$

i

$${}_n^0 \mathbf{B} = {}_n^0 \mathbf{F}^T {}_n^0 \mathbf{F} \quad (2.1.38)$$

desni Koši-Grinov tenzor deformacije i Fingerov tenzor deformacije, redom.

Naročito pogodno je korišćenje levog Koši-Grinovog tenzora deformacije

$${}_n^0 \mathbf{B} = {}_n^0 \mathbf{F} {}_n^0 \mathbf{F}^T \quad (2.1.39)$$

odakle se streč može izraziti kao

$${}^n \lambda = \left({}^n \mathbf{n}^T {}_n^0 \mathbf{B} {}^n \mathbf{n} \right)^{-1/2} \quad (2.1.40)$$

pri čemu je

$${}_n^0 \mathbf{B} = {}_n^0 \mathbf{B}^{-1} = \left({}_n^0 \mathbf{F}^{-1} \right)^T {}_n^0 \mathbf{F}^{-1} \quad (2.1.41)$$

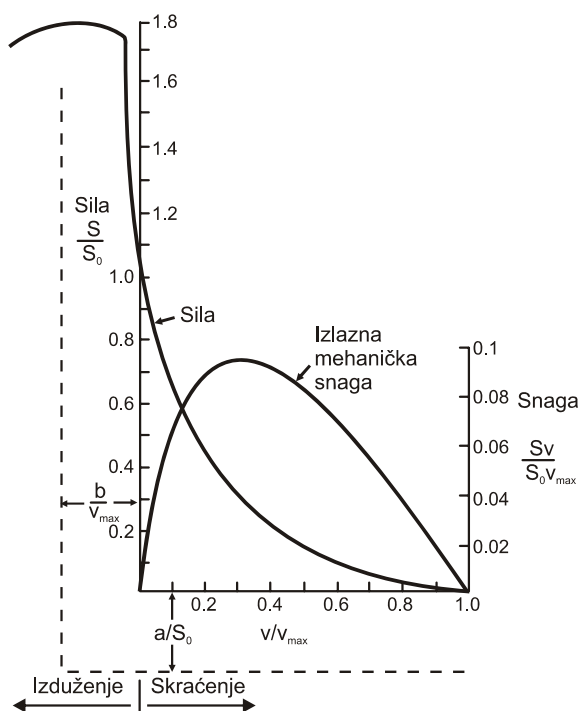
2.2. Hilova jednačina za tetanizovani mišić

Hilova jednačina (Hill, 1938) je jedna od najpoznatijih jednačina u mehanici mišića. Ova jednačina ima oblik

$$(v+b)(S+a) = b(S_0+a) \quad (2.2.1)$$

u kojoj S predstavlja napon u mišiću, v brzinu kontrakcije, a a , b i S_0 konstante. Grubo, jednačina (2.2.1) govori da je brzina učinjenog rada, a samim tim i brzina konvertovanja energije iz hemijske reakcije, konstantna.

Hilova jednačina se odnosi na sposobnost mišića da se kontrakuje. To je empirijska jednačina zasnovana na eksperimentalnim podacima o sartorius mišiću žabe. Mišić je na oba kraja pričvršćen štipaljka i fiksiran tako da mu je dužina L_0 konstanta (izometrijski uslovi), a zatim stimulisan električnim impulsima dovoljno visokog napona i voltaže tako da se razvije maksimalni napon S_0 . Pri tetanizovanim uslovima jedan kraj mišića je naglo otpušten do napona u mišiću S koji je manji od S_0 . Mišić istovremeno počinje da se kontrakuje, pri čemu se meri brzina kontrakcije v . Relacija između napona u mišiću S i brzine kontrakcije v je data na Slici 2.4.



Slika 2.4 Relacija sila (napon) - brzina kontrakcije

Bezdimenziona forma Hilove jednačine

Osnovna Hilova jednačina (2.2.1) se može napisati i kao

$$v = b \frac{S_0 - S}{S + a} \quad (2.2.2)$$

ili

$$S = \frac{bS_0 - av}{v + b} = a \frac{v_0 - v}{v + b} \quad (2.2.3)$$

Kada je $S = 0$, brzina dostiže maksimum

$$v_0 = \frac{bS_0}{a} \quad (2.2.4)$$

koji se koristi u jednačini (2.2.3). Jednačine (2.2.2) i (2.2.4) možemo napisati u bezdimenzionoj formi

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1 - (S/S_0)}{1 + c(S/S_0)} \quad (2.2.5)$$

ili

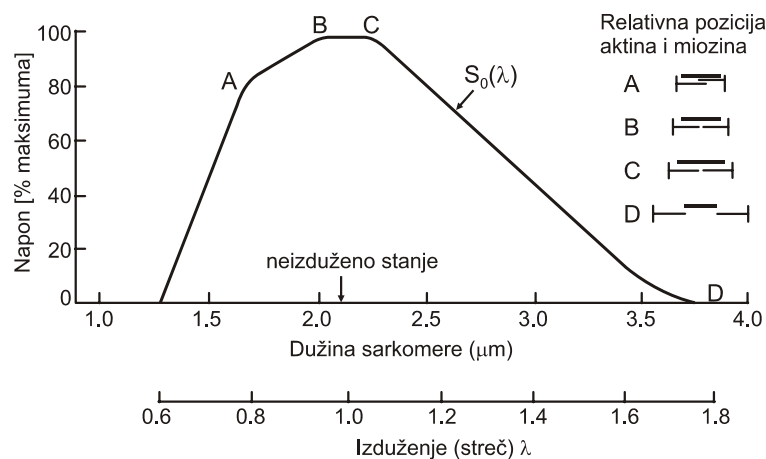
$$\frac{S}{S_0} = \frac{1 - (v/v_0)}{1 + c(v/v_0)} \quad (2.2.6)$$

gde je

$$c = \frac{S_0}{a} \quad (2.2.7)$$

Maksimalni izometrijski napon S_0 strogo zavisi od L_0 . Ukoliko je L_0 suviše malo ili suviše veliko, S_0 pada na nulu. Postoji optimalna dužina L_0 pri kojoj je S_0 maksimalno. Slika 2.5 prikazuje relaciju između S_0 i L_0 (izraženo kao dužina sarkomere) za jedno vlakno skeletnog mišića žabe (Gordon, 1966). Sa slike se može videti da kada je dužina sarkomere u opsegu 2.0-2.2 μm , maksimalni razvijeni napon ne zavisi od dužine mišića. Međutim, kada je dužina mišićnog vlakna van ovog opsega, maksimalni napon je manji.

Ova osobina mišića se najčešće objašnjava promenom broja spojeva između vlakana miozina i aktina. Ukoliko je mišić suviše izdužen, vlakna miozina i aktina su suviše udaljena, broj spojeva opada i dolazi do smanjenja napona. Ukoliko je mišić suviše skupljen, dolazi do međusobnog preklapanja vlakana aktina čime se narušava funkcija spojeva sa miozinom (Fung, 1993).



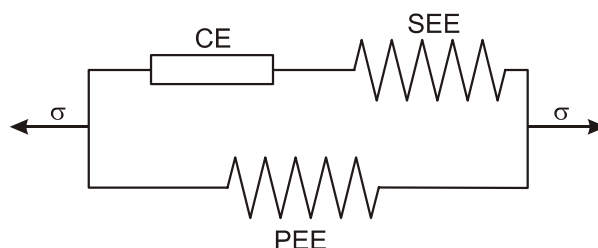
Slika 2.5 Gordonova kriva. Izometrijska kriva napon-dužina (Gordon, 1966)

Danas postoji generalna saglasnost da v_0 zavisi od L_0 po veoma kompleksnom zakonu, ali da je ta zavisnost zanemariva. Konstanta c je skoro nezavisna od L_0 , tako da je konstanta a skoro proporcionalna maksimalnom naponu S_0 . Konstanta b je jednaka v_0/c , pri čemu je c za skeletne mišiće u opsegu 1.2 do 4.

2.3. Hilov trokomponentni model

Mehaničko ponašanje mišića je opsežno izučavano još od najranijih radova Blix-a (Blix, 1981, 1893, 1894) i Hill-a (Hill, 1922, 1938, 1940). Od 1938. godine Hilov model mišića je dominantan u ovoj oblasti. U šezdesetogodišnjem periodu mnoge ideje su dodate u model kako bi se prilagodio novim otkrićima. Na primer, "serijski element" je evoluirao do veoma kompleksnog entiteta, "funkcija aktivacije" je uvedena kako bi se objasnio režim trzaja (single twitch), a raspored tri komponente u modelu je više puta modifikovan, ali još uvek nije usvojen jedinstveni model [7].

Hilov model predstavlja aktivni mišić sastavljen od tri elementa (Slika 2.6). Dva elementa su povezana redno: a) kontraktilni element CE, koji je u neaktiviranom stanju potpuno istegljiv (napon u njemu jednak nuli), ali kada se aktivira ima moć skraćivanja; i b) nelinearni elastični element SEE. Da bi se uzela u obzir elastičnost mišića u stanju kada nije aktiviran, uveden je i "paralelni elastični element" PEE.



Slika 2.6 Hilov funkcionalni model mišića

Mnogi autori izjednačavaju kontraktilni element sa klizajućim molekulima aktina i miozina, a generisanje sile sa brojem aktivnih spojeva između njih. Ponašanje kontraktilnog elementa je opisano Hilovom jednačinom (2.2.1) i Gordonovom krivom (Slika 2.5). Serijski element predstavlja elastičnost koja se javlja u spojevima aktina i miozina, kao i na Z-linijama. Paralelni elastični element reprezentuje elastičnost vezivnog tkiva, ćelijskih membrana itd.

Opsežna istraživanja mnogih autora su pokazala da je zavisnost $\partial S / \partial \eta$ od S približno prava linija, pri čemu je S napon, a η izduženje serijskog elementa u sarkomeri. S obzirom da S mora biti jednako nuli kada je η jednako nuli, možemo da napišemo

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \alpha(S + \beta) \quad (2.3.1)$$

što posle integraljenja daje

$$S = (S^* + \beta)e^{\alpha(\eta - \eta^*)} - \beta \quad (2.3.2)$$

pri čemu su α i β konstante, a S^* i η^* par eksperimentalnih vrednosti. Iz uslova $S = 0$ kada je $\eta = 0$ sledi

$$\beta = \frac{S^* e^{-\alpha \eta^*}}{1 - e^{-\alpha \eta^*}} \quad (2.3.3)$$

Za papilarni mišić mačke konstante α i β imaju sledeće vrednosti (Parmley i Sonnenblick, 1967)

$\alpha = 0.4$ po procentu dužine mišića

$\alpha\beta = 0.8$ po procentu dužine mišića

2.4. Proširenje Hilovog modela kako bi se u obzir uzeli različiti tipovi vlakana¹

Većina prethodnih verzija Hilovog modela je bazirana na teoriji kliznih elemenata koja posmatra samo jednu sarkomeru. Mišić je posmatran kao skup sarkomera, iako je pretpostavka da su sve sarkomere identične veoma sumnjiva. Određeni broj autora je pokazao da je mišić struktura sačinjena od heterogenog materijala, što za posledicu ima neuniformnu raspodelu napona i deformacija (Pappas i dr., 2002), kao i različito zamaranje određenih delova mišića (Witte, 2004).

Pojedinačni mišić, kao organ, predstavlja skup različitih tipova sarkomera. Širok spektar kontraktilnih karakteristika pojedinih tipova vlakana omogućava pojavu veoma različitih mehaničkih odziva, od ekstremno naglih pokreta bacanja do laganih neprekidnih pokreta i osnovnog držanja tela. Najjednostavnija podela skeletnih mišića na brze i spore (tonične) je predložena pre oko 40 godina (Lannergren i Smith, 1966). Pored ove osnovne podele, brza vlakna se dalje mogu podeliti u tri odvojena tipa. Pored ovoga, prostorni raspored različitih tipova mišićnih vlakana može da bude promenljiv od mišića do mišića, kao i sa promenom tačke uzorkovanja unutar mišića i starosti osobe na kojoj se uzorkovanje vrši (Froes i dr., 1987; Lexell i Downham, 1991).

Osnovna razlika između brzih i sporih mišićnih vlakana je u vremenu kontrakcije. Vreme kontrakcije kod brzih mišićnih vlakana je znatno kraće u odnosu na vreme kontrakcije sporih vlakana. Pri određivanju koji tip motornih jedinica učestvuje u aktivaciji, veoma važan aspekt koji mora biti razmotren je to što ova dva tipa mišićnih vlakana imaju različite pragove aktivacije. Spora vlakna imaju niži prag aktivacije nego što je to slučaj sa brzim vlaknima (Liu i dr., 2002). Takođe, poznato je da se brza vlakna zamaraju znatno brže od sporih mišićnih vlakana, a selektivna regrutacija brzih vlakana tokom isprekidanih stimulacija može da objasni brži pad u intenzitetu sile (Chasiotis, 1987).

Maksimalna sila koju mišić proizvodi zavisi, u opštem slučaju, od procenta sporih i brzih vlakana u zapremini mišića. Pretpostavlja se da je ovaj procenat definisan skoro potpuno genetskim nasleđem. Tako izgleda da se neki ljudi rađaju da budu maratonci, dok se drugi rađaju da budu sprinteri i skakači. Do neke mere ovo može predodrediti atletske

¹ Publikovano u međunarodnom časopisu: Stojanovic B, Kojic M, Rosic M, Tsui CP, Tang CY. An Extension of Hill's Three-Component Model to Include Different Fiber Types in Finite Element Modeling of Muscle. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* In press.

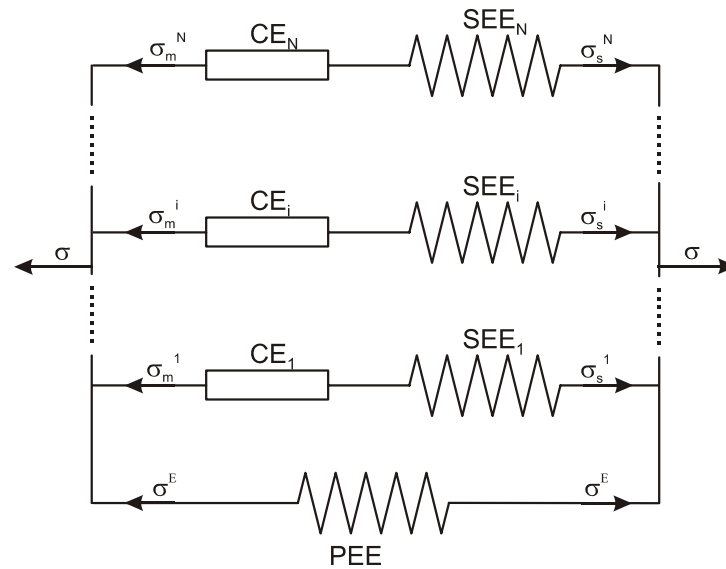
sposobnosti pojedinaca. Na primer, maratonci imaju samo oko 18% brzih mišićnih vlakana, dok sprinteri imaju i preko 65% brzih mišićnih vlakana, pa samim tim i znatno veću snagu od maratonaca (Guyton, 2005). Sa druge strane, usled velikog procenta brzih (brzo zamarajućih) mišićnih vlakana, sprinteri mogu da proizvedu maksimalnu silu samo u toku nekoliko sekundi do minuta. Imajući u vidu ove fiziološke činjenice, sledi da Hilov model može uspešno da bude korišćen za proračun sile u mišiću samo ukoliko uzme u obzir učešće različitih tipova vlakana unutar mišića.

Sa mehaničke tačke gledišta, mišić može biti posmatran kao mehanički sistem ili konstrukcija. Pošto je konstitutivna relacija napon-deformacija materijala mišića nelinearna, mišić predstavlja nelinearan mehanički sistem. Najčešće korišćena metoda za rešavanje kompleksnih materijalno i/ili geometrijski nelinearnih problema je metoda konačnih elemenata. U inkrementalno-iterativnoj shemi može biti izračunata ravnotežna konfiguracija mišića, tako što se mišić posmatra kao konstrukcija sačinjena od aktivnih vlaknastih elemenata, koji imaju mogućnost kontrakovanja pri aktivaciji unutar deformabilnog kontinuuma vezivnog tkiva. Ključni korak u ovoj shemi, određivanje napona u mišićnom vlaknu koji odgovara priraštaju deformacije vlakna, je razvijen korišćenjem Hilovog modela (Kojic i dr., 1998). Osnovni Hilov model pretpostavlja postojanje jednog tipa mišićnog vlakna i nije pogodan za precizno modeliranje uticaja prostornog rasporeda različitih tipova mišićnih vlakana na mehanički odziv skeletnih mišića.

U ovom poglavlju je predloženo proširenje Hilovog modela kako bi se uzeli u obzir različiti tipovi mišićnih vlakana. Zbog toga je koncept viševlakanskog (multi-fiber) materijalnog modela primenjen na nivou materijalne tačke kontinuuma. Ovaj model se praktično sastoji od određenog broja sarkomera različitog tipa, povezanih paralelno sa okolnim vezivnim tkivom.

Prošireni Hilov viševlakanski (multifiber) model

S obzirom da je Hilov trokomponentni model zasnovan na jednoj sarkomeri, takav model nije pogodan za modeliranje kompozitnih mišića koji se sastoje od različitih tipova mišićnih vlakana. Kako bi se prevazišao ovaj nedostatak, predložen je viševlakanski (multi-fiber) model kao što je prikazano na Slici 2.7.

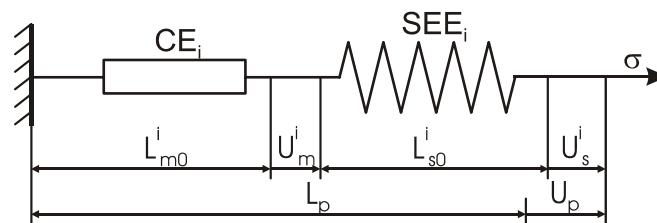


Slika 2.7 Prošireni Hilov funkcionalni model mišića

Ovaj model se sastoji od određenog broja nizova serijskih i kontraktilnih elemenata, koji predstavljaju snop različitih tipova sarkomera (aktivni deo mišića), paralelno vezanih sa linearnim elastičnim elementom koji predstavlja vezivno tkivo (pasivni deo). Na ovom shematskom prikazu CE_i i SEE_i su kontraktilni i serijski elastični element i -tog tipa mišićnog vlakna, dok je PEE paralelni elastični element. Sva ova vlakna imaju istu orijentaciju u prostoru u posmatranoj materijalnoj tački, i to nazivamo pravcem vlakana.

Integracija napona

Osnovni zadatak pri integraciji napona je da se odredi napon u pravcu mišićnih vlakana (Kojic i dr., 1998). Geometrija prikazana na Slici 2.8 odgovara pravcu i -tog tipa vlakana u proizvoljnom stanju.

Slika 2.8 Geometrija i -tog kontraktilnog CE_i , i nelinearnog elastičnog serijskog SEE_i elementa

U stanju bez aktivacije sledeća relacija može se napisati za svaki tip vlakana:

$$L_{p0} + {}^0U_p = L_{m0}^i + {}^0U_m^i + L_{s0}^i + {}^0U_s^i, \quad i = 1..N \quad (2.4.1)$$

gde je L_{p0} ukupna početna dužina, dok su L_{m0}^i i L_{s0}^i inicijalne dužine kontraktilnog i serijskog elastičnog elementa i -tog tipa vlakana; 0U_p , ${}^0U_m^i$ i ${}^0U_s^i$ su početna izduženja odgovarajućih elemenata (ovde je uzeto da su jednaka nuli). Ukupan broj različitih tipova vlakana je označen sa N . U tekstu koji sledi, indeks i označava i -ti tip vlakana, i podrazumeva se da je $i = 1..N$. Odnos početnih dužina serijskog i kontraktilnog i -tog tipa vlakana je dat kao

$$k^i = \frac{{}^0L_s^i}{{}^0L_m^i} \quad (2.4.2)$$

Deljenjem jednačine (2.4.1) sa L_{m0}^i i korišćenjem jednakosti $L_{p0} = L_{m0}^i + L_{s0}^i$, dobija se relacija za početne strečeve kao

$${}^0\lambda_m^i = (1 + k^i) {}^0\lambda_p - k^i \quad (2.4.3)$$

U proizvoljnom vremenskom trenutku t , jednačina za dužine može biti zapisana u sledećem obliku

$${}^tL_p = L_{p0} + {}^tU_p = L_{m0}^i + {}^0U_m^i + \int_{t_a^i}^t v_m dt + L_{s0}^i + {}^tU_s^i \quad (2.4.4)$$

gde je v_m brzina promene dužine mišića, a t_a^i vreme aktivacije i -tog tipa vlakana.

Deljenjem ove jednačine sa L_{m0}^i dobijamo

$$(1 + k^i) {}^t\lambda_p = {}^0\lambda_m^i + \int_{t_a^i}^t \frac{v_m}{L_{m0}^i} dt + k^i {}^t\lambda_s^i \quad (2.4.5)$$

Odatle, na kraju vremenskog koraka ova jednačina može biti napisana kao

$$(1 + k^i)^{n+1} \lambda_p = {}^n\lambda_m^i + \Delta\lambda_m^i + k^i {}^n\lambda_s^i + k^i \Delta\lambda_s^i \quad (2.4.6)$$

gde $\Delta\lambda_m^i$ su $\Delta\lambda_s^i$ priraštaji strečeva i -tog tipa vlakana.

Primenjujući sada Hilovu jednačinu (2.2.6) na svaki tip vlakana u multi-fiber funkcionalnom modelu sa Slike 2.7 dobijamo

$${}^{n+1}\sigma_m^i = {}^n\sigma_0^i {}^{n+1}\alpha_a^i \frac{1 + \Delta\lambda_m^i / \Delta\lambda_{m0}^i}{1 - c^i \Delta\lambda_m^i / \Delta\lambda_{m0}^i} \quad (2.4.7)$$

gde je ${}^{n+1}\sigma_m^i$ napon u kontraktilnom elementu. Primetimo da za kontraktilni i serijski elastični element u svakoj konfiguraciji važi ${}^{n+1}\sigma_m^i = {}^{n+1}\sigma_s^i$, tj. naponi u ova dva elementa su jednaki (${}^{n+1}\sigma_s^i$ je napon u serijskom elastičnom elementu). Napon ${}^n\sigma_0^i$ je maksimalni napon koji odgovara streču ${}^n\lambda_p^i$, u skladu sa Gordonovom krivom na Slici 2.5. U prethodnoj jednačini je uzeto da je kompresivna brzina pozitivna. Takođe je uvedena i funkcija aktivacije ${}^{n+1}\alpha_a^i$ kako bi se simulirala submaksimalna aktivacija vlakna. Priraštaj streča $\Delta\lambda_{m0}^i$ se može izračunati kao

$$\Delta\lambda_{m0}^i = \Delta t \dot{\lambda}_{m0}^i \quad (2.4.8)$$

gde je $\dot{\lambda}_{m0}^i$ brzina promene streča koja odgovara maksimalnom izometrijskom tetanizujućem naponu.

Dalje, u skladu sa jednačinom (2.3.2), konstitutivna relacija za napon u serijskom elastičnom elementu i -tog tipa vlakana je

$${}^{n+1}\sigma_s^i = \left({}^n\sigma_s^i + \beta^i \right) e^{\alpha^i \Delta\lambda_s^i} - \beta^i \quad (2.4.9)$$

gde su α^i i β^i materijalne konstante vlakna, a ${}^n\sigma_s^i$ se može izraziti kao

$${}^n\sigma_s^i = \beta^i \left(e^{\alpha^i ({}^n\lambda_s^i - 1)} - 1 \right) \quad (2.4.10)$$

Iz jednačine (2.4.6) sledi

$$\Delta\lambda_m^i = a_1^i - k^i \Delta\lambda_s^i \quad (2.4.11)$$

gde je

$$a_1^i = (1 + k^i)^{n+1} \lambda_p - {}^n \lambda_m^i - k^n \lambda_s^i \quad (2.4.12)$$

Iz uslova da su naponi u kontraktilnom i serijskom elementu jednaki, tj. ${}^{n+1} \sigma_m^i = {}^{n+1} \sigma_s^i$, i jednačina (2.4.7), (2.4.9) i (2.4.11), dobija se sledeća nelinearna jednačina

$$f(\Delta \lambda_s^i) = (a_2^i + a_3^i \Delta \lambda_s^i) e^{\alpha^i \Delta \lambda_s^i} + a_4^i \Delta \lambda_s^i + a_5^i = 0 \quad (2.4.13)$$

gde su

$$\begin{aligned} a_2^i &= ({}^n \sigma_s^i + \beta^i) \left(1 - \frac{a_1^i c^i}{\Delta \lambda_{m0}^i} \right), & a_3^i &= ({}^n \sigma_s^i + \beta^i) \frac{k^i c^i}{\Delta \lambda_{m0}^i} \\ a_4^i &= k^i \frac{{}^n \sigma_0^i {}^{n+1} \alpha_a^i - \beta^i c^i}{\Delta \lambda_{m0}^i}, & a_5^i &= -{}^n \sigma_0^i {}^{n+1} \alpha_a^i - \beta^i - a_1^i \frac{{}^n \sigma_0^i {}^{n+1} \alpha_a^i - \beta^i c^i}{\Delta \lambda_{m0}^i} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Ova nelinearna jednačina sa jednom nepoznatom, $\Delta \lambda_s^i$, može se rešiti standardnom Njutnovom metodom. Odatle, za dati streč u pravcu mišićnih vlakana, ${}^{n+1} \lambda_p$ (izračunat iz pomeranja ${}^{n+1} \mathbf{u}$ u materijalnoj tački mišića), posle rešavanja jednačine (2.4.13) po promenljivoj $\Delta \lambda_s^i$, dobija se napon ${}^{n+1} \sigma_s^i$ iz jednačine (2.4.9), a samim tim i napon ${}^{n+1} \sigma_m^i$ u materijalnoj tački.

Sada, komponenta aktivnog dela napona u pravcu vlakna, ${}^{n+1} \sigma_s^i$, može biti napisana kao

$${}^{n+1} \sigma_s^i = \sum_{i=1}^N \varphi^i {}^{n+1} \sigma_s^i \quad (2.4.15)$$

gde je φ^i udeo i -tog tipa vlakna u aktivnom delu mišića. Treba primetiti da je sledeća jednačina zadovoljena (po definiciji udela φ^i)

$$\sum_{i=1}^N \varphi^i = 1 \quad (2.4.16)$$

Detaljan opis interpolacije udela φ^i na nivou integracione tačke dat je u narednoj sekciji.

Napon u paralelnom elastičnom elementu se računa kao

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{C}^E {}^{n+1}\mathbf{e} \quad (2.4.17)$$

gde je \mathbf{C}^E elastična konstitutivna matrica okolnog vezivnog tkiva, a ${}^{n+1}\mathbf{e}$ deformacija u materijalnoj tački, određena iz pomeranja. Konačno, ukupni napon može biti izražen kao

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^E (1 - \phi) + \phi {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s \quad (2.4.18)$$

gde je ϕ udeo aktivnog dela u ukupnoj zapremini mišića. Treba primetiti da napon ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s$ ima samo jednu nenultu komponentu i to u pravcu vlakna.

Tangentna konstitutivna matrica

Tangentna konstitutivna matrica ${}^{n+1}\mathbf{C}$ (Kojic i Bathe, 2005) mišića kao kontinuuma može se izračunati korišćenjem izraza (2.4.18),

$${}^{n+1}\mathbf{C} = \frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\mathbf{e}} = (1 - \phi)\mathbf{C}^E + \phi \frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s}{\partial {}^{n+1}\mathbf{e}} \quad (2.4.19)$$

Ova konstitutivna matrica odgovara globalnom koordinatnom sistemu. Međutim, mi možemo odrediti izvode $\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s / \partial {}^{n+1}\mathbf{e}$ u lokalnom koordinatnom sistemu ξ, η, ζ gde je ξ pravac vlakna u integracionoj tački, dok su η i ζ ose normalne na osu ξ . Računanje izvoda u lokalnom koordinatnom sistemu je moguće iz razloga što postoji zavisnost ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s^i({}^{n+1}\lambda_p)$ definisana jednačinama (2.4.9), (2.4.12) i (2.4.13) koje odgovaraju lokalnom sistemu. U skladu sa tim formiramo lokalnu konstitutivnu matricu ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{C}}$ čiji su članovi:

$${}^{n+1}\bar{C}_{11} = (1 - \phi)C_{11}^E + \phi \frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s}{\partial {}^{n+1}e_{\xi\xi}}; \quad {}^{n+1}\bar{C}_{ij} = (1 - \phi)C_{ij}^E \quad \text{za ostale } i, j \quad (2.4.20)$$

gde su C_{ij}^E članovi elastične matrice okolnog konektivnog tkiva.

Konačno, transformišemo matricu ${}^{n+1}\bar{\mathbf{C}}$ na globalni koordinatni sistem (Kojić i Bathe, 2005). U nastavku je data procedura za određivanje izvoda $\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_s / \partial {}^{n+1}e_{\xi\xi} = {}^{n+1}C_s$.

Izražavamo ${}^{n+1}C_s$ kao

$${}^{n+1}C_s = {}^{n+1}\lambda_p \sum_{i=1}^N \varphi^i \frac{\partial^{n+1} \sigma_s^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} \quad (2.4.21)$$

pri čemu koristimo relaciju

$$\frac{\partial^{n+1} \sigma_s^i}{\partial^{n+1} e_{\xi\xi}^i} = {}^{n+1}\lambda_p \frac{\partial^{n+1} \sigma_s^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} \quad (2.4.22)$$

Dalje, iz jednačine (2.4.9) sledi

$$\frac{\partial^{n+1} \sigma_s^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} = \alpha^i ({}^n \sigma_s^i + \beta^i) e^{\alpha^i \Delta \lambda_s^i} \frac{\partial \Delta \lambda_s^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} \quad (2.4.23)$$

Kako bismo izračunali $\partial \Delta \lambda_s^i / \partial^{n+1} \lambda_p$ diferenciramo nelinearnu jednačinu (2.4.13) po ${}^{n+1} \lambda_p$ i dobijamo

$$\frac{\partial f(\Delta \lambda_s^i)}{\partial^{n+1} \lambda_p} = (k_2^i + a_3^i x) e^{\alpha^i \Delta \lambda_s^i} + (a_2^i + a_3^i \Delta \lambda_s^i) \alpha^i e^{\alpha^i \Delta \lambda_s^i} x + a_4^i x + \frac{\partial a_5^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} = 0 \quad (2.4.24)$$

gde je nepoznata $x = \frac{\partial \Delta \lambda_s^i}{\partial^{n+1} \lambda_p}$

Iz ove jednačine sledi

$$\frac{\partial \Delta \lambda_s^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} = - \frac{k_5^i + k_2^i}{e^{\alpha^i \Delta \lambda_s^i} (a_3^i + \alpha^i (a_2^i + a_3^i \Delta \lambda_s^i)) + a_4^i} \quad (2.4.25)$$

gde su

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} &= 1 + k^i, & \frac{\partial a_2^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} &= - ({}^n \sigma_s^i + \beta^i) \left(\frac{c^i}{\Delta \lambda_{m0}^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} \right) = k_2^i \\ \frac{\partial a_5^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} &= - \frac{a_4^i}{k^i} \frac{\partial a_1^i}{\partial^{n+1} \lambda_p} = k_5^i \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

Tako dobijamo $\partial\Delta\lambda_s^i/\partial^{n+1}\lambda_p$ iz (2.4.25), zamenjujemo u (2.4.23) kako bismo odredili $\partial^{n+1}\sigma_s^i/\partial^{n+1}\lambda_p$, i dalje zamenjujemo u (2.4.21) da bismo odredili ${}^{n+1}C_s$.

Na sličan način, imajući u vidu da važi relacija ${}^{n+1}\sigma_m^i = {}^{n+1}\sigma_s^i$, komponenta ${}^{n+1}C_s$ se može izračunati i kao

$${}^{n+1}C_s = {}^{n+1}\lambda_p \sum_{i=1}^N \varphi^i \frac{\partial^{n+1}\sigma_m^i}{\partial^{n+1}\lambda_p} \quad (2.4.27)$$

pri čemu iz jednačine (2.4.11) sledi

$$\frac{\partial\Delta\lambda_m^i}{\partial^{n+1}\lambda_p} = \frac{\partial a_1^i}{\partial^{n+1}\lambda_p} - k^i \frac{\partial\Delta\lambda_s^i}{\partial^{n+1}\lambda_p} \quad (2.4.28)$$

Generalizovana izoparametarska formulacija elementa za funkcionalno promenljive materijale (FGMs)

S obzirom da je udeo određenog tipa vlakana neuniformno raspoređen unutar zapremine mišića, mora se uzeti u obzir materijalna heterogenost. Do sada su predložena dva pristupa:

- 1) homogeni elementi sa konstantnim materijalnim karakteristikama na nivou elementa, koji se računaju u centru svakog elementa; i
- 2) promenljivi elementi, koji uključuje gradijent materijalne karakteristike na nivou elementa.

Shema za promenljive konačne elemente koju su predložili Santare i Lambros (Santare i Lambros, 2000) je zasnovana na određivanju materijalnih karakteristika direktno u integracionim tačkama. Sa druge strane, u shemi koju su predložili Kim i Paulino (Kim i Paulino, 2002), interpolaciona funkcija koja se koristi za interpolaciju pomeranja i geometrije se takođe koristi za interpolaciju materijalnih parametara. Ova formulacija elementa se naziva *Generalizovana Izoparametarska Formulacija Elementa (Generalized Isoparametric Element Formulation)*. Odatle, interpolacija udela pojedinih tipova vlakana u aktivnom delu mišića je data kao

$$\varphi^i = \sum_{j=1}^m H_j \varphi_j^i \quad (2.4.29)$$

gde je \mathbf{H}_j matrica interpolacione funkcije, a ϕ_j^i udeo i -tog tipa vlakana u j -tom čvoru elementa. Osnovna prednost ove formulacije je to što se nehomogeni materijali mogu dovoljno tačno simulirati čak i sa grubom diskretizacijom mreže (Kim i Paulino, 2002).

U programski paket PAK (Kojic i dr., 1996) su ugrađene obe sheme; homogena i shema promenljivih elemenata. Ustanovljeno je da shema promenljivih elemenata ima prednost iz razloga što omogućava postepene promene materijalnih parametara unutar modela, sa "glatkim" poljima napona i deformacija.

2.5. Modeliranje zamora mišića¹

Do sada je razvijeno nekoliko modela koji razmatraju zamor mišića, uključujući i nefiziološke analitičke modele (Hawkins i Hull, 1993; Boom i dr., 1993; Mizrahi i dr., 1997; Rabischong i Chavet, 1997) i neke modele koji koriste fiziološke podatke (Mizrahi i dr., 1997; Chesler i Durfee, 1997) ili metabolička merenja (Giat i dr., 1996; Mizrahi i dr., 1997) kao parametre zamora (Bobet i Stein, 1998). Hawkins i Hull (Hawkins i Hull, 1993) su posmatrali efekte zamora i proizvedenu silu tokom dužeg vremenskog perioda uvodeći nekoliko empirijskih parametara u svoj model mišića zasnovan na vlaknima, kao što su vreme izdržljivosti i brzina zamaranja vlakna. Giat i ostali (Giat i dr., 1996) i Levin i Mizrahi (Levin i Mizrahi, 1999) su razvili modele zasnovane na približnom merenju privremenih promena u mišićnom metabolizmu. Kako bi se opisali zamor mišića i efekti opravka, uvedene su i funkcija regrutacije motornih jedinica i funkcija sposobnosti mišića (Riener i dr., 1996; Riener i Quintern, 1997). Liu i ostali (Liu i dr., 2002) su razvili dinamički model zamora mišića zasnovan na faktoru zamora, faktoru oporavka, broju moronih jedinica i jednom ulaznom parametru za napor mozga. Razlika u zamoru mišića aktiviranih od strane centralnog nervnog sistema (CNS) i različitih tipova funkcionalne električne stimulacije (FES) je takođe ispitivana od strane mnogih istraživača (Deluca, 1984; Enoka i Stuart, 1992).

Većina modela mišića je razmatrala zamor mišića samo pod određenim uslovima kao što su konstantna aktivacija, ciklična aktivacija, konstantna sila, konstantna snaga i td. Međutim, modeli zamora mišića pod proizvoljnim uslovima aktivacije i opterećenja su veoma ograničeni. U ovom radu, novi model koji uključuje zamor mišića, razvijen je na bazi Hilovog modela kako bi se predvideli efekti zamora na relaciju sila-vreme skeletnog mišića. Uticaj zamora, određen trima ulaznim parametrima, inkorporiran je u Hilov model mišića i tako ugrađen u program za rešavanje metodom konačnih elemenata, PAK. Uticaj različitih oblika krivih zamora i oporavka biće analiziran u ovom radu. Rezultati dobijeni proračunom biće upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima, kao i sa podacima iz postojeće literature.

¹ Publikovano u međunarodnom časopisu: Tang CY, Stojanovic B, Tsui CP, Kojic M. Modeling of muscle fatigue using Hill's model. *Bio-Medical Materials and Engineering* 2005; 15: 341-348.

Modifikovani Hilov model koji uzima u obzir zamor mišića

Napon koji se razvija u kontraktilnom elementu nezamorenog mišića i koji zavisi od funkcije aktivacije mišića, α_a , može biti izražen kao (Kojic i dr., 1998)

$${}^{n+1}\sigma_m = {}^{n+1}\alpha_a {}^n\sigma_0(\lambda_p) \frac{1 + \Delta\lambda_m / \Delta\lambda_{m0}}{1 - c\Delta\lambda_m / \Delta\lambda_{m0}} \quad (2.4.30)$$

gde su λ i λ_0 trenutni i početni streč mišića, a indeksi m i p se odnose na kontraktilni i paralelni elastični element respektivno. ${}^n\sigma_0(\lambda_p)$ je maksimalni napon pri tetanizovanim uslovima koji odgovara streču ${}^n\lambda_p = {}^n\lambda$, i može se odrediti sa Gordonove krive (Slika 2.5). Vrednost funkcije α_a mora da zadovoljava uslov da je $0 \leq \alpha_a \leq 1$. Međutim, ova jednačina ne uzima u obzir zamor mišića.

Pojava zamora može biti izazvana u mišiću koji je opterećen određenim vremenski period konstantnom ili promenljivom silom. Usled smanjenja sposobnosti mišića da proizvodi silu, tetanički napon zamorenog mišića $\sigma_{0f}(\lambda, t)$ je uvek manji od tetaničkog napona nezamorenog mišića $\sigma_0(\lambda, t)$. Pretpostavimo da je $F_0(\alpha_a, \lambda)$ sila koju razvija nezamoreni mišić pri aktivaciji α_a i ukupnom streču λ , a $F_f(\alpha_a, \lambda, t)$ sila koju razvija zamoreni mišić pri istoj aktivaciji α_a . Ove sile odgovaraju naponima u tetanizovanim uslovima $\sigma_0(\lambda, t)$ i $\sigma_{0f}(\lambda, t)$, redom. Sada se *nivo sposobnosti (fitness level)* može definisati kao

$$\alpha_f(t) = \frac{F_f(\alpha_a, \lambda, t)}{F_0(\alpha_a, \lambda)} = \frac{\sigma_{0f}(\lambda, t)}{\sigma_0(\lambda)} \quad (2.4.31)$$

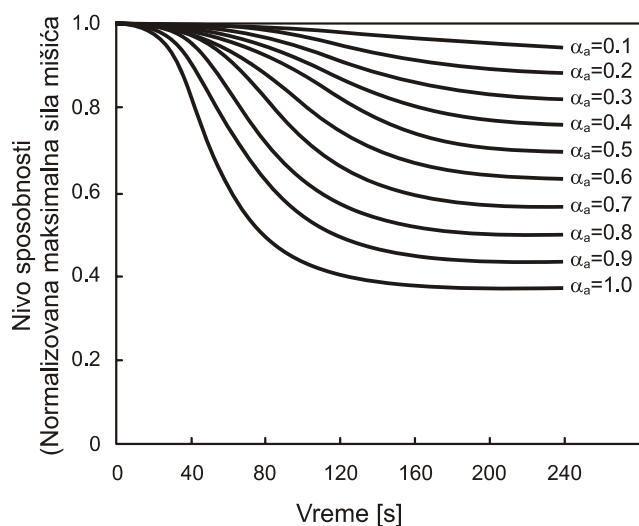
U skladu sa prethodnom relacijom, nivo sposobnosti je normalizovana maksimalna sila koju mišić može da proizvede, i koji može imati vrednost između 0 i 1. U slučaju potpuno odmornog mišića nivo zamora je jednak 1, dok za mišić izložen određenim uslovima opterećivanja, nivo sposobnosti opada sa vremenom.

Korišćenjem relacije (2.4.31), napon koji se razvija u kontraktilnom elementu zamorenog mišića, slično jednačini (2.4.30), može se napisati kao

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}\sigma_m &= {}^{n+1}\alpha_a {}^n\sigma_{0f}(\lambda_p) \frac{1 + \Delta\lambda_m / \Delta\lambda_{m0}}{1 - c\Delta\lambda_m / \Delta\lambda_{m0}} \\
&= {}^{n+1}\alpha_a {}^n\alpha_f {}^n\sigma_0(\lambda_p) \frac{1 + \Delta\lambda_m / \Delta\lambda_{m0}}{1 - c\Delta\lambda_m / \Delta\lambda_{m0}}
\end{aligned}
\tag{2.4.32}$$

S obzirom da mehanizmi koji izazivaju pojavu zamora još uvek nisu dobro poznati, ne postoji pouzdan model koji bi mogao da predvidi nivo sposobnosti mišića podvrgnutog proizvoljnoj aktivaciji tokom dužeg vremenskog perioda. Nekoliko modela predloženih u literaturi se mogu iskoristiti kako bi se odredio nivo sposobnosti $\alpha_f(t, \dots)$, u zavisnosti od vremena, aktivacije, i drugih fizioloških i nefizioloških parametara.

Krive zamora. Vremenska zavisnost maksimalne sile mišića pri različitim neprekidnim konstantnim aktivacijama može se odrediti eksperimentalno, na način opisan u uvodnom poglavlju. Normalizovanjem snimljenih krivih sila-vreme u odnosu na maksimalnu silu potpuno odmornog mišića, dobijamo nivo sposobnosti pri konstantnim aktivacijama $\alpha_{fca}(\alpha_a, t)$. Tipičan skup funkcija $\alpha_{fca}(\alpha_a, t)$ je dat na Slici 2.9. Primećujemo da je opadanje funkcije $\alpha_{fca}(\alpha_a, t)$ strmije za veće vrednosti nivoa aktivacije $\alpha_a = const$.



Slika 2.9 Primer krivih zamora pri različitim neprekidnim konstantnim aktivacijama $\alpha_a = const$.

Pretpostavimo da brzina zamaranja ne zavisi od celokupne istorije opterećivanja, već samo od trenutnog nivoa sposobnosti i trenutne aktivacije. Iz toga sledi da će brzina zamaranja mišića posle proizvoljnog opterećivanja biti jednaka brzini zamaranja pri

neprekidnoj konstantnoj aktivaciji za aktivaciju i nivo sposobnosti jednake trenutnim, što može biti napisano kao

$$\left. \frac{\partial \alpha_f(\alpha_a)}{\partial t} \right|_{\alpha_f} = \left. \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_a)}{\partial t} \right|_{\alpha_f} \quad (2.4.33)$$

ili u inkrementalnom obliku

$${}^{n+1}\alpha_f(\alpha_a) = {}^n\alpha_f + \Delta t \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_a, t_{fca} + \Delta t)}{\partial t} \quad (2.4.34)$$

pri čemu se t_{fca} dobija iz uslova da je $\alpha_{fca}(\alpha_a, t_{fca}) = {}^n\alpha_f$.

U većini relanih slučajeva, ne postoji merena kriva $\alpha_{fca}(\alpha_a, t)$ za neprekidnu konstantnu aktivaciju jednaku trenutnoj, proizvoljno zadatoj, aktivaciji mišića α_a . U tom slučaju je potrebno izvršiti interpolaciju između dve krive $\alpha_{fca}(\alpha_{a1}, t)$ i $\alpha_{fca}(\alpha_{a2}, t)$, pri čemu je α_{a1} prva manja, a α_{a2} prva veća aktivacija od aktivacije α_a , za koje su poznate krive zamora (krive nivoa sposobnosti). Ukoliko pretpostavimo linearnu interpolaciju, brzina zamaranja pri aktivaciji α_a data jednačinom (2.4.33) bi se mogla odrediti kao

$$\left. \frac{\partial \alpha_f(\alpha_a)}{\partial t} \right|_{\alpha_f} = \left. \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_{a1})}{\partial t} \right|_{\alpha_f} + \frac{\alpha_a - \alpha_{a1}}{\alpha_{a2} - \alpha_{a1}} \left(\left. \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_{a2})}{\partial t} \right|_{\alpha_f} - \left. \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_{a1})}{\partial t} \right|_{\alpha_f} \right) \quad (2.4.35)$$

Slično kao u jednačini (2.4.34), relacija (2.4.35) na kraju koraka se sada može napisati u inkrementalnom obliku kao

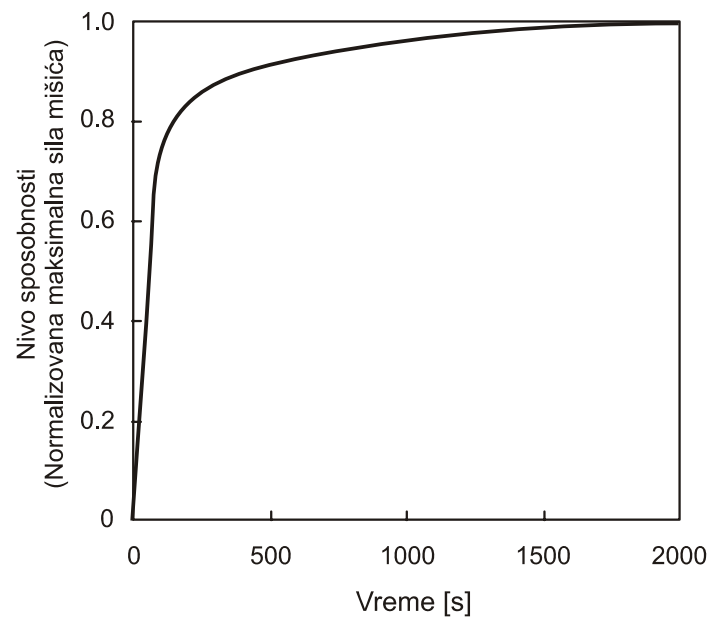
$${}^{n+1}\alpha_f(\alpha_a) = {}^n\alpha_f + \Delta t \left[v_1 + \frac{\alpha_a - \alpha_{a1}}{\alpha_{a2} - \alpha_{a1}} (v_2 - v_1) \right] \quad (2.4.36)$$

gde su

$$v_1 = \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_{a1}, t_{fca1} + \Delta t)}{\partial t} \quad \text{i} \quad v_2 = \frac{\partial \alpha_{fca}(\alpha_{a2}, t_{fca2} + \Delta t)}{\partial t} \quad (2.4.37)$$

Vremena t_{fca1} i t_{fca2} u jednačini (2.4.37) se dobijaju iz uslova $\alpha_{fca}(\alpha_{a1}, t_{fca1}) = {}^n\alpha_f$ i $\alpha_{fca}(\alpha_{a2}, t_{fca2}) = {}^n\alpha_f$.

Krive oporavka. Slično krivama zamora aktiviranog mišića, možemo dobiti i vremensku zavisnost nivoa sposobnosti u slučaju kada nema aktivacije, t.j. kada se mišić odmara. Ovakva kriva predstavlja krivu oporavka $\alpha_r(t)$ mišića koji se odmara. Tipična kriva oporavka je prikazana na Slici 2.10. Kriva oporavka se može odrediti eksperimentalno, tako što se posle zamora, u periodu dok se mišić odmara, povremeno meri maksimalna izlazna sila u veoma kratkim intervalima kako ne bi došlo do ponovnog zamaranja mišića.



Slika 2.10 Primer krive oporavka

Sada, inkrementalni oblik (2.4.34) za nivo sposobnosti u stanju odmaranja

$${}^{n+1}\alpha_f(\alpha_a) = {}^n\alpha_f + \Delta t \frac{\partial \alpha_r(t_r + \Delta t)}{\partial t} \quad (2.4.38)$$

gde se vreme t_r dobija iz uslova da je $\alpha_r(t_r) = {}^n\alpha_f$.

U opštem slučaju, postoje periodi opterećivanja mišića praćeni periodima odmaranja. U skladu sa tim, koristimo ili jednačinu (2.4.34) ili (2.4.38) da bismo izračunali nivo

sposobnosti ${}^{n+1}\alpha_f(\alpha_a)$, u zavisnosti od toga da li je mišić aktiviran ili se odmara. U opštem slučaju imamo

$${}^{n+1}\alpha_f(\alpha_a) = \begin{cases} {}^n\alpha_f + \Delta t \frac{\partial \alpha_{fca}(t_{fca} + \Delta t)}{\partial t}, & \alpha_a > 0 \\ {}^n\alpha_f + \Delta t \frac{\partial \alpha_r(t_r + \Delta t)}{\partial t}, & \alpha_a = 0 \end{cases} \quad (2.4.39)$$

3. Eksperimentalno ispitivanje i numerička rešenja

U cilju boljeg razumevanja mehanike skeletnih mišića i njihovih mehaničkih i drugih karakteristika, neophodno je zaći dublje u njihovu strukturu i otkriti mehanizme koji dovode do različitih fenomena vezanih za ponašanje mišića. Sa druge strane, posmatranjem mišića kao celine, moguće je doći do zaključaka koji delimično ili u potpunosti objašnjavaju odziv mišića pod određenim okolnostima. U svakom slučaju, neophodno je izvršiti eksperimentalna ispitivanja, bilo da se radi o njenoj mikro ili makrostrukturi.

Matematički model kojim je opisano ponašanje mišića može nastati kao rezultat modeliranja stvarnih fizičkih pojava u mikrostrukturi mišića, kao što je to slučaj kod Huxly-jevog modela (Huxley i Niedergerke, 1954; Huxley i Hanson, 1954), ili pak kao rezultat posmatranja odziva mišića bez zalaženja u uzroke takvog ponašanja, što je slučaj sa fenomenološkim Hilovim modelom (Hill, 1938). Svaki matematički model mišića podrazumeva postojanje ulaznih parametara koji predstavljaju karakteristike mišića ili njegovih delova. Ove veličine mogu i ne moraju imati fizički smisao, ali u svakom slučaju moraju biti rezultat eksperimentalnih ispitivanja, kao jedinog relevantnog izvora informacija.

U ovom poglavlju su dati neki detalji vezani za eksperimentalna ispitivanja na osnovu kojih su utvrđeni ulazni parametri predloženih modela. Korišćenjem matematičkih modela i ulaznih parametara dobijenih eksperimentalno ili iz postojeće literature, dobijena su numerička rešenja čija je validnost zatim upoređena sa eksperimentalnim podacima.

3.1. Verifikacija predloženog modela zamora mišića na primeru *triceps brachii* mišića čoveka¹

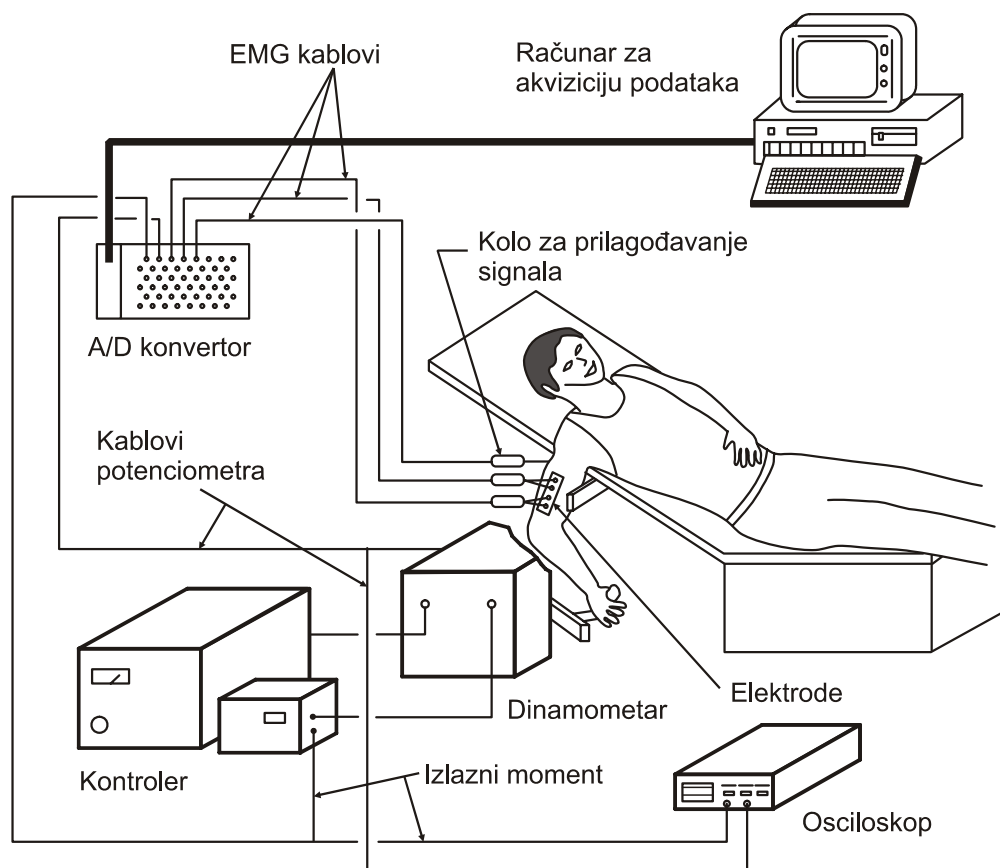
Kako bi se proverila primenljivost predloženog modela zamora mišića, iskorišćeni su eksperimentalni rezultati koje su dali Hawkins i Hull (Hawkins i Hull, 1993). U cilju formiranja potpune slike o tome kako treba da izgleda jedan tipičan protokol merjenja zamora mišića, u nastavku su dati detalji ovog eksperimenta.

U studiji istezanja lakta je učestvovalo 10 muških dobrovoljaca, uzrasta između 21 i 41 godine (srednji uzrast, težina i visina su bili 27.6 godina, 736 N i 1.78, redom). Svi subjekti su bili u dobroj fizičkoj kondiciji. Svakom subjektu je objašnjen protokol pre početka eksperimenta i data mu je mogućnost da prekine vežbu u bilo kom trenutku.

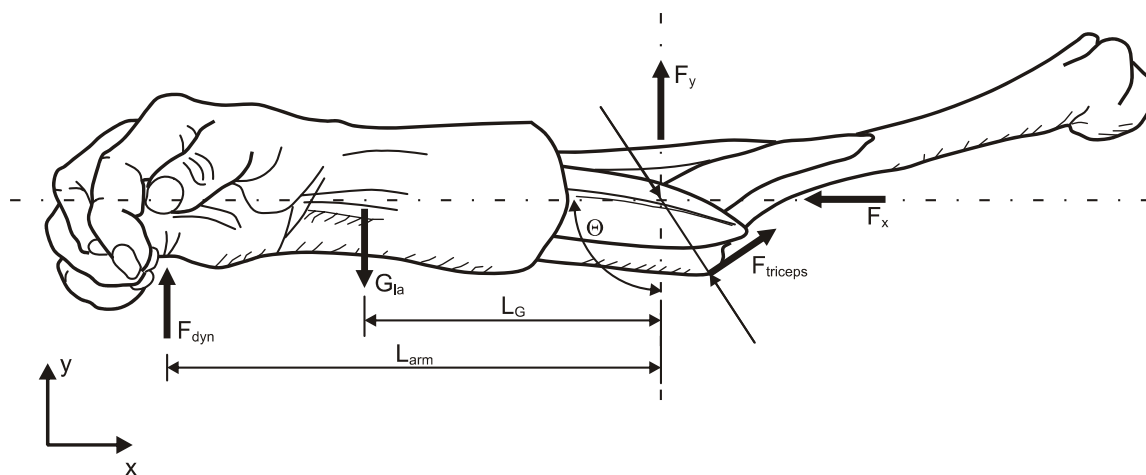
Sila u mišiću *triceps brachii* je određena predloženim matematičkim modelom i direktnim merenjem baziranim na dinamici krutih tela u dva testa zamora, statičkom i dinamičkom. Određivanje sile tricepsa zahteva informacije specifične za dati pristup. Jedan od ciljeva procedure testiranja je da se subjekat pozicionira tako da jedino mišić triceps učestvuje u stvaranju momenta sile tokom protokola istezanja lakta. Kako bi se postigao ovaj cilj, subjekat je postavljen na specijalno dizajniranu stolicu tako da mu je desna ruka usmerena posteriorno u odnosu na torzo i poduprta drvenim podupiračem (Slika 3.1). Ovakav položaj ruke je izabran na osnovu probnih testova koji su pokazali da ova pozicija izoluje zglob lakta i sprečava druge strukture da utiču na silu koju meri dinamometar.

Da bi se odredila sila i ostale potrebne informacije, snimaju se signali iz dva izvora. Rotacioni potencijometar daje napon proporcionalan uglu lakta. Dinamometar daje napon proporcionalan sili na poluzi držača ruke. Podaci izmereni na potencijometru i dinamometru se konvertuju u digitalni signal korišćenjem A/D konvertora. Ovi signali se zatim procesiraju korišćenjem specijalnog softvera, kako bi se odredili uglovi zgloba i sile u ruci.

¹ Publikovano u međunarodnom časopisu: Tang CY, Stojanovic B, Tsui CP, Kojic M. Modeling of muscle fatigue using Hill's model. *Bio-Medical Materials and Engineering* 2005; 15: 341-348.



Slika 3.1 Postavka eksperimenta korišćena u studiji istezanja lakti. Momenti u laktu su određeni na osnovu podataka snimljenih dinamometrom. Uglovi zgloba su dobijeni na osnovu podataka sa potencimetra. Nivoi aktivacije mišića *triceps brachii* su snimljeni korišćenjem površinskih elektroda.



Slika 3.2 Shematski prikaz podlakti subjekta. Sila mišića *triceps brachii* ($F_{triceps}$) i težina podlakti (G_{la}), pomnožene odgovarajućim kracima sile u odnosu na centar zgloba lakti, daju moment oko lakti. Tokom izometrijskog testa ovaj moment je uravnotežen momentom koji stvara sila (F_{dyn}) koja deluje na šaku.

U direktnom pristupu je korišćena analiza dinamike krutih tela u sprezi sa podacima sa dinamometra kako bi se izračunala sila u tricepsu ($F_{triceps}$). Shematski prikaz podlaktka je dat na Slici 3.2. Relacija koja opisuje rotacionu dinamiku ovog segmenta je data jednačinom (3.1.1):

$$-F_{triceps}r_T - G_{la}L_G \sin \Theta + F_{dyn}L_{arm} = I(\alpha_a) \quad (3.1.1)$$

gde su

- F_{dyn} - sila izmerena korišćenjem dinamometra (N),
- $F_{triceps}$ - sila tricepsa dobijena na osnovu dinamike krutog tela (N),
- L_{arm} - rastojanje od centra zgloba lakta do ručice dinamometra (cm),
- r_T - dužina kraka sile (poluge) tricepsa (cm),
- L_G - rastojanje do centra mase podlaktice i šake mereno od lakta (cm),
- G_{la} - težina podlaktka i šake (N),
- I - moment inercije podlaktka i šake oko centra zgloba lakta (kg cm^2),
- α_a - ugaono ubrzanje podlaktka (rad s^{-2}) i
- Θ - ugao podlaktka u odnosu na vertikalnu (rad)

Pri izvođenju jednačine (3.1.1) pretpostavljeno je da triceps generiše najveći deo momenta koji isteže lakat. Dinamometar je podešen tako da radi ili u izometrijskom ili u izokinetičkom režimu. U skladu sa tim član $I(\alpha_a)$ je jednak nuli. Jednačina (3.1.1) se može drugačije napisati kako bi se dobio izraz za silu tricepsa u funkciji od ostalih veličina kao

$$F_{triceps} = (F_{dyn}L_{arm} - G_{la}L_G \sin \Theta) / r_T \quad (3.1.2)$$

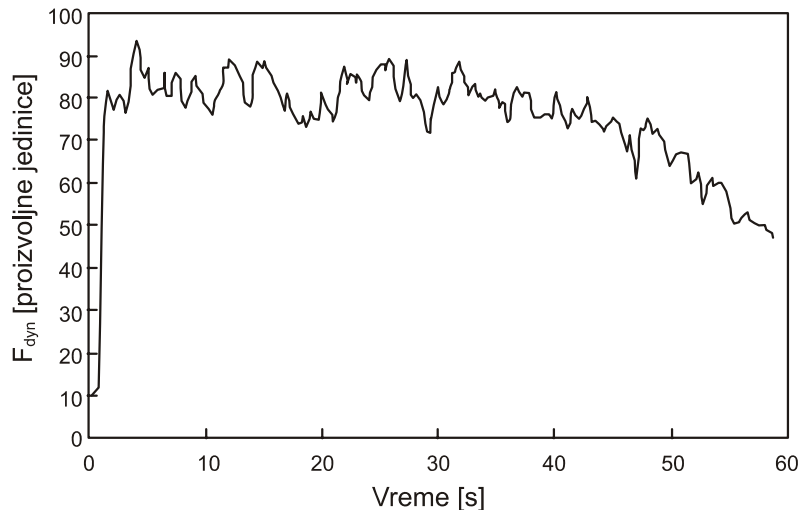
Veličine koje se pojavljuju na desnoj strani jednačine (3.1.2) su dobijene eksperimentalno ili iz podataka iz literature. F_{dyn} se dobija na osnovu izlaza iz dinamometra i dužine poluge. Koristi se prosečna ili trenutna vrednost sile F_{dyn} u zavisnosti od toga koja vrsta istežanja se vrši. U slučaju izometrijskih vežbi određuje se prosečna sila za vremenski interval od 500 ms. Kod izokinetičkih vežbi meri se trenutna sila pri uglu zgloba od 75° . Ugao zgloba Θ se određuje na osnovu podataka sa potenciometra. Podatak o kraku sile tricepsa r_T je preuzet iz rada Amis i dr. (1979). Krak sile predstavlja normalno rastojanje od ose zgloba lakta do linije dejstva tricepsa. Podaci o težini G_{la} i centru mase podlaktka i

šake određeni su na osnovu antropometrijskih podataka subjekta iz rada Plagenhoef (1983).

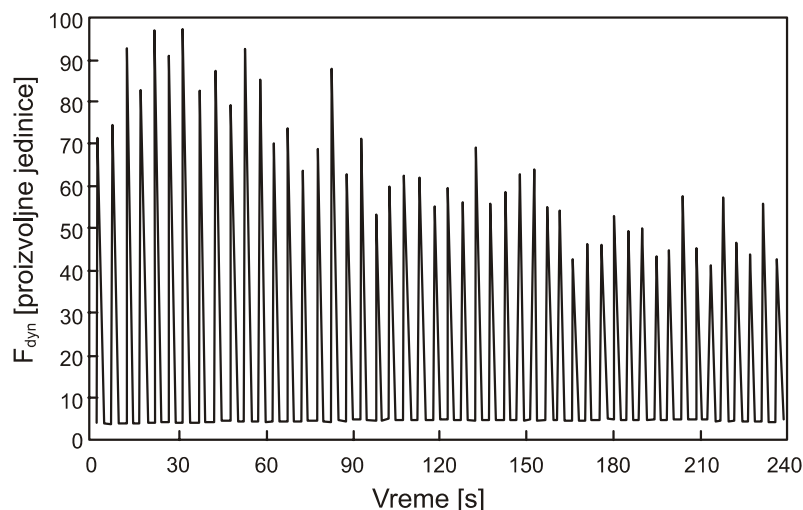
Sila $F_{triceps}$ je izračunata korišćenjem prethodno navedene procedure za dva protokola. U prvom testu subjekat obavlja maksimalnu izometrijsku kontrakciju do potpune iscrpljenosti, pri čemu je ugao lakta 75° . U drugom testu subjekat obavlja ciklično istežanje lakta uz maksimalni napor, pri brzini od 90° s^{-1} i sa 50% aktivnog vremena. U testovima je vršeno merenje sile dinamometrom u trajanju od 60 i 240 sekundi, redom. Sve sile su normalizovane u odnosu na maksimalnu silu generisanu na početku vežbe. Pretpostavka je da je svaki subjekat maksimalno aktivirao triceps tokom svih testova.

Primenjivost matematičkog modela zamora, predloženog u poglavlju 2.5, je proverena upoređivanjem normalizovane izračunate sile tricepsa sa silom dobijenom na osnovu podataka sa dinamometra u određenim vremenskim trenucima.

Krive zamora dobijene sa jednog subjekta tokom izometrijskog i dinamičkog testa su prikazane na Slikama 3.3 i 3.4, redom.

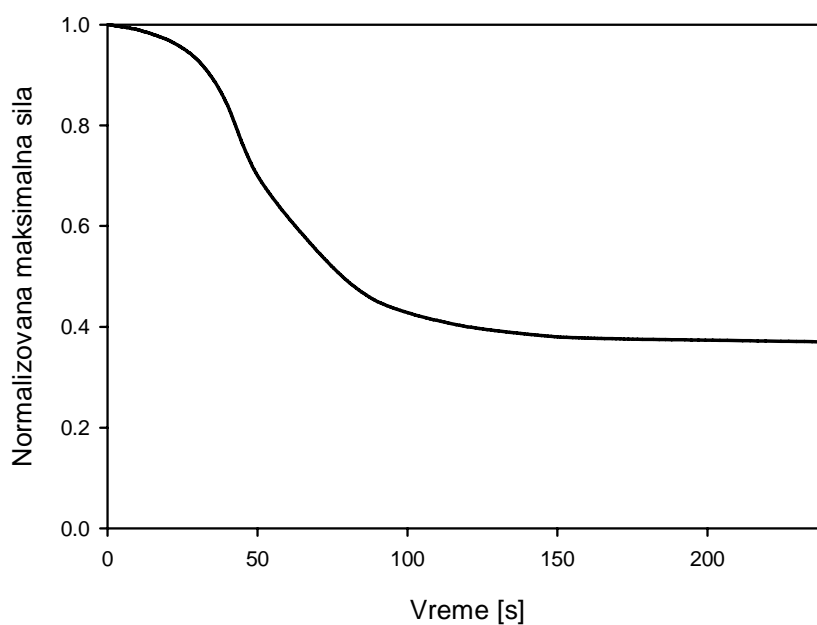


Slika 3.3 Izometrijska kriva zamora dobijena sa jednog subjekta pri maksimalnom naporu. Vreme testiranja je bilo 60 sekundi. Skala na vertikalnoj osi je proporcionalna sili izmerenoj na dinamometru.



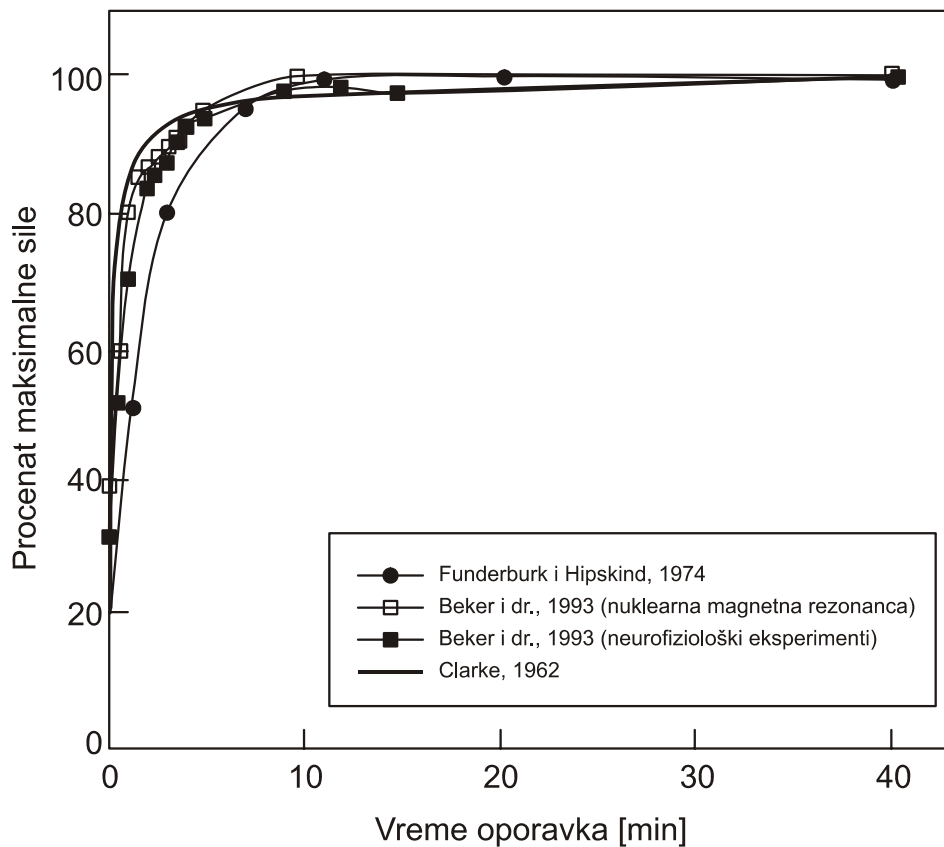
Slika 3.4 Dinamička kriva zamora dobijena sa jednog subjekta pri maksimalnom naporu i 50% aktivnog vremena. Vreme trajanja testa je bila 240 sekundi. Skala na vertikalnoj osi je proporcionalna sili izmerenoj na dinamometru.

U skladu sa eksperimentalnim rezultatima i postojećim modelima (Hawkins i Hull, 1993; Liu i dr., 2002) određeni su ulazni parametri za krivu zamora pri neprekidnoj maksimalnoj aktivaciji. Kriva zamora pri neprekidnoj maksimalnoj aktivaciji prikazana na Slici 3.5 je dobijen fitovanjem izometrijske krive zamora sa rezultatima jednog subjekta pri maksimalnom naporu (Slika 3.3).

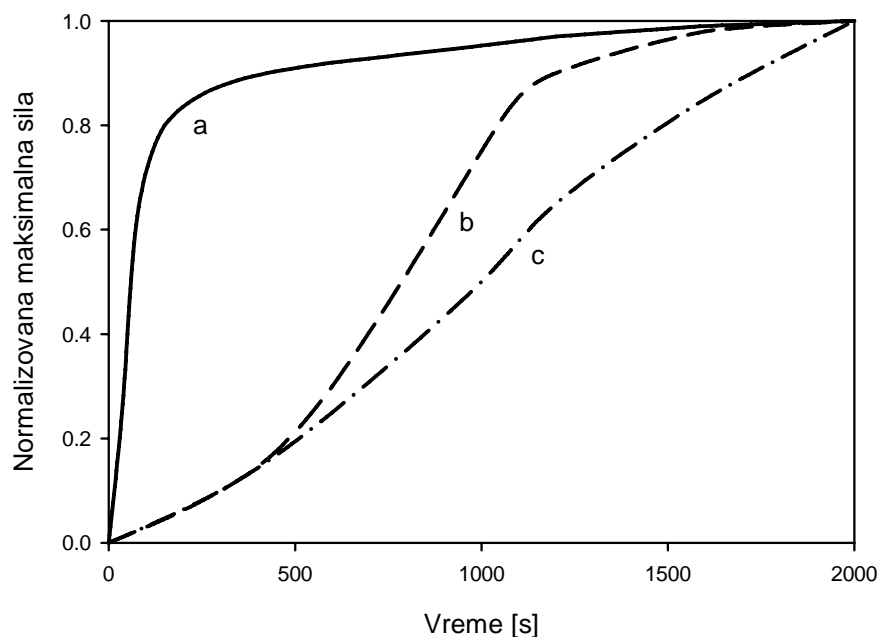


Slika 3.5 Kriva zamora pri neprekidnoj maksimalnoj aktivaciji

Na Slici 3.6 prikazane su eksperimentalne krive oporavka preuzete iz literature (Funderburk i dr., 1974; Beker i dr., 1993; Clarke, 1962). Korišćenjem usrednjenih vrednosti sa ovih krivih dobijena je kriva oporavka označena sa (a) na Slici 3.7. Druge dve krive su probne krive koje imaju za cilj da pokažu da uticaj eventualnih poremećaja u mehanizmima za oporavak mišića (povrede, medicinski tretman, lekovi) na generisanje sile u mišiću.



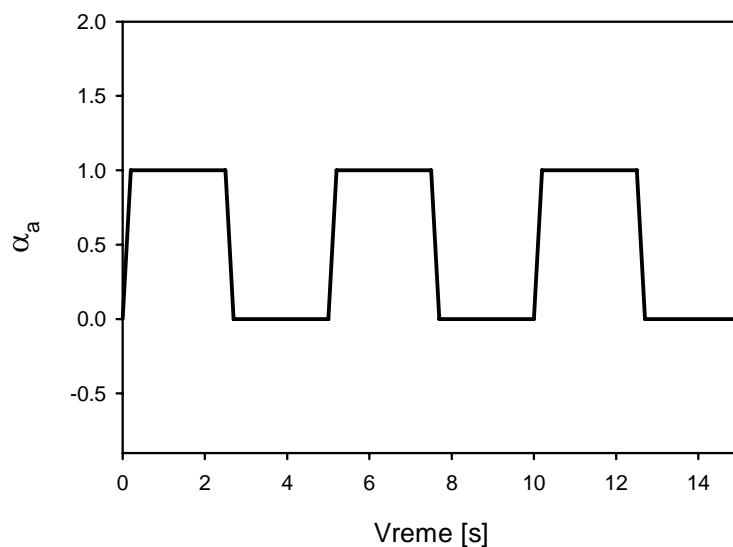
Slika 3.6 Eksperimentalne krive oporavka.



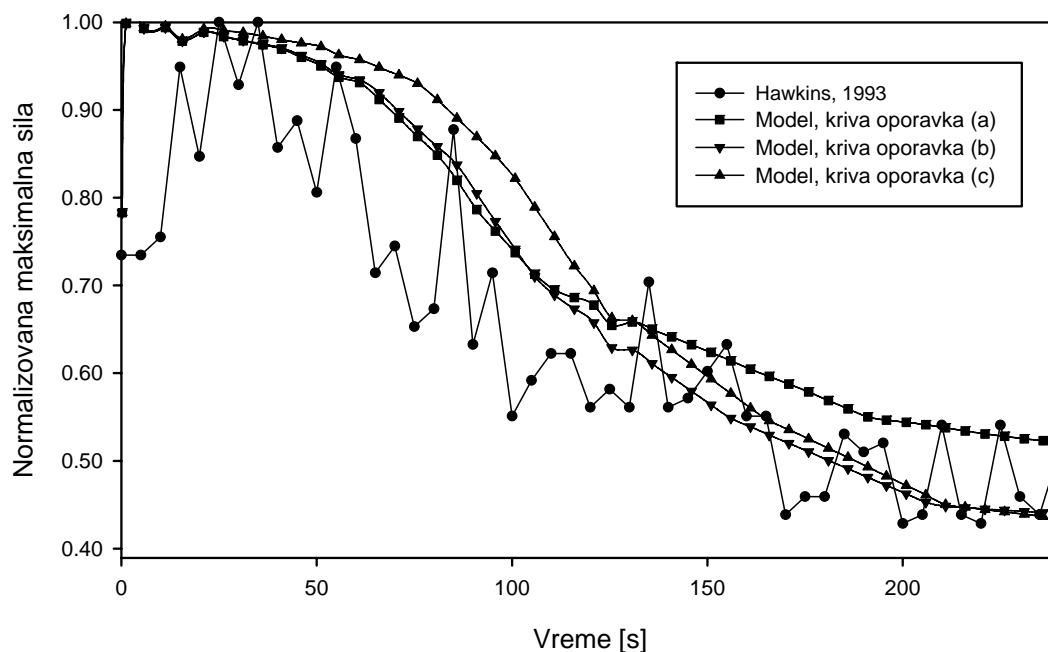
Slika 3.7 Tri različita oblika krive oporavka korišćene u proračunu.

- a) Kriva dobijena na osnovu eksperimentalnih podataka iz literature
- b) Kriva oporavka sa najvećom brzinom oporavka pri srednjim nivoima zamora
- c) Kriva oporavka sa velikom brzinom oporavka pri malim stepenima zamora

Kako bi bilo moguće testiranje primenjivosti i tačnosti prethodno izvedenih relacija, mišić triceps je podvrgnut cikličnoj maksimalnoj aktivaciji sa 50% aktivnog vremena i frekvencijom 0.2 Hz tokom 240 sekundi kao što je pokazano na Slici 3.8. Razmatrana su tri različita oblika krive oporavka prikazanih na Slici 3.7. Poređenje rezultata proračuna sa eksperimentalnim rezultatima datim u Hawkins and Hull (1993) je prikazano na Slici 3.9. Sa Slike 3.9 se može videti da se korišćenjem realne, eksperimentalno dobijene krive oporavka (kriva a) dobija odlično poklapanje sa merenim rezultatima. Sa druge strane probne krive koje bi uključile eventualne poremećaje (krive b i c), pokazuju izvesna odstupanja u odnosu na merene rezultate, što je i očekivano, s obzirom na to da one ne reprezentuju oporavak zdravog mišića, iako su eksperimenti izvršeni na potpuno zdravim subjektima.



Slika 3.8 Oblik funkcije ciklične aktivacije sa 50% aktivnog vremena i frekvencijom od 0.2 Hz.



Slika 3.9 Poređenje eksperimentalnih merenja i rezultata proračuna za triceps pod cikličnom maksimalnom aktivacijom sa 50% aktivnog vremena i frekvencijom 0.2 Hz tokom 240 sekundi

Proces oporavka tokom ciklične maksimalne aktivacije je veoma važan zato što omogućava mišiću da se odmori i oporavi od zamora tokom perioda bez aktivacije. Brzina oporavka zavisi od oblika krive oporavka. Treba naglasiti da se kriva oporavka određuje merenjem maksimalne sile mišića od stanja potpune zamorenosti do stanja bez zamora.. Zbog toga se početni deo krive oporavka odnosi na stanje kada je mišić dosta

zamoren. Sa Slike 3.7 se može videti da probna kriva oporavka (c) ima veliku brzinu oporavka za mišić sa malim nivoom zamora u poređenju sa krivama (a) i (b). Odatle, izračunata normalizovana maksimalna sila korišćenjem krive (c) veća je nego korišćenjem krivih (a) i (b) pri niskim nivoima zamora kao što je prikazano na Slici 3.9, jer je proces kojim se obnavlja sposobnost mišića da generiše silu dat krivom (c), u regionu malih zamora najintenzivniji u slučaju ove krive. Ovaj efekat je suprotan krivoj (a) koja ima veći nagib krive normalizovane maksimalne sile nego druge dve krive u regionu velikog zamora. Rezultat je razumljiv, jer kriva (a) ima najintenzivniji oporavak kada je mišić značajno zamoren.

Primećuje se, takođe, da postoji izvesna razlika između izračunatih i eksperimentalnih rezultata na samom startu procesa aktivacije. Ovakvo neslaganje se može objasniti činjenicom da mišić nije sposoban da proizvede maksimalnu silu odmah na početku vežbe, već je potreban izvestan period da se mišić "zagreje", što nije uzeto u obzir predloženim matematičkim modelom.

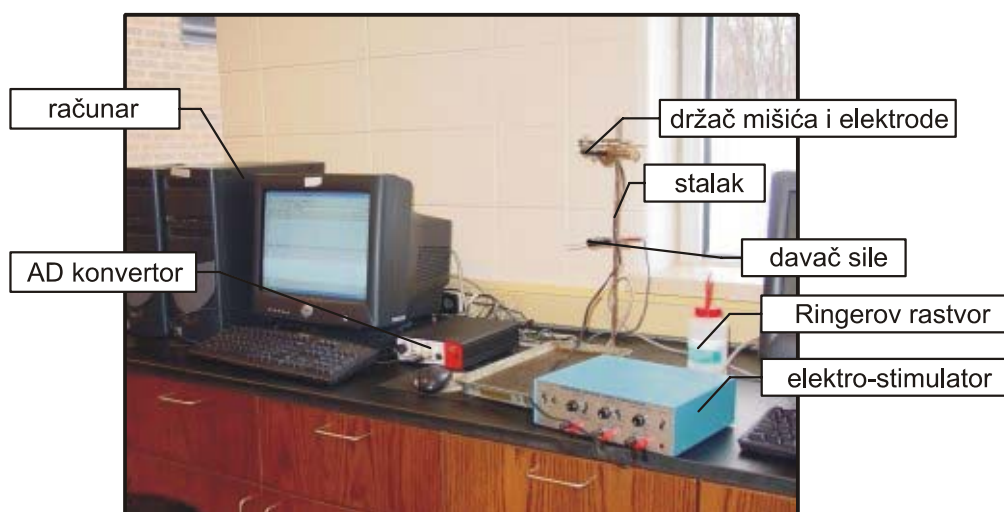
3.2. *Eksperimentalno ispitivanje mehaničkog ponašanja gastrocnemius mišića žabe*

Oprema

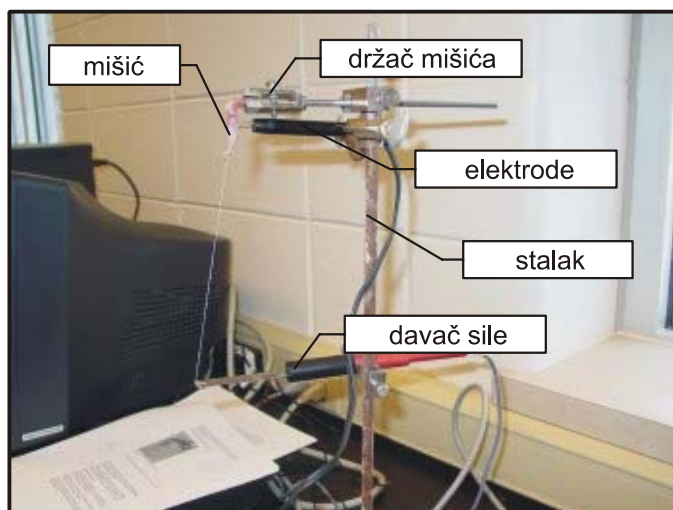
Kako bi se uspešno sprovedo merenje mehaničkih karakteristika *gastrocnemius* mišića žabe, pored opreme za pripremu samog preparata, neophodno je posedovati odgovarajuću elektro-mehaničku opremu za stimulaciju mišića i merenje njegovog odziva. Pod opremom za stimulaciju mišića podrazumevamo električni stimulator, kablove i elektrode kojima se vrši pobuda mišića preko *ishiadicus* nerva. Pod opremom za monitoring podrazumevaju se davač sile, kablovi, AD konvertor i računar na kome se registruje odziv mišića. Kod sofisticiranih sistema računar se može koristiti i kao uređaj za upravljanje stimulacijom. Spisak potrebne opreme dat je u Tabeli 3.1.

Tabela 3.1 Oprema potrebna za eksperimentalno ispitivanje mehaničkog ponašanja *gastrocnemius* mišića žabe

Računar	Oprema za disekciju
Elektrode za stimulaciju	Stalak
Elektro-stimulator	Štipaljke
Davač sile (mehano-električni transdjuser)	Konac
AD konvertor	Igle
Kablovi	Korpica sa tegovima
Konektori	Ringerov rastvor



Slika 3.10 Eksperimentalni set za merenje mehaničkih karakteristika mišića



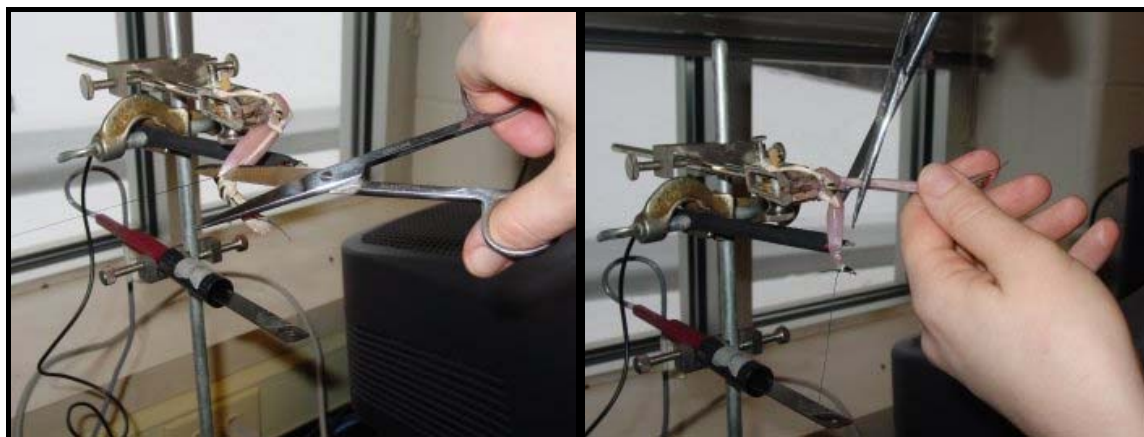
Slika 3.11 Stalac sa štipaljka, elektrodama i davačem sile

Priprema nervno-mišićnog preparata

Za ispitivanje funkcionalnih osobina mišića i mišićnog nerva najčešće se koristi nervno-mišićni preparat žabe (izolovan mišić gastrocnemius sa pripadajućim nervom ishiadicusom).

Žaba se dekapituje uvlačenjem jednog kraka makaza u usta dok se drugim krakom vrši presecanje glave u nivou iza bubnih opni (granica između kičmene i produžene moždine). Dužom iglom razori se kičmena moždina. Zatim se pristupa otvaranju trbušne duplje rezom od simfize račvasto prema toraksu. Povlače se trbušni organi na više, pošto se prethodno preseče rektalni deo debelog creva u karlici. Zatim se izvrši poprečno presecanje žabe iznad korenova n. ishiadicus-a. Dok se jednom rukom, palcem i kažiprstom, drži presečeni deo kičmenog stuba, drugom rukom se povlači se koža žabe naniže. Ogoljeni zadnji ekstremiteti se stavljaju na čistu staklenu površinu nakvašenu Ringer-ovim rastvorom. Posle toga provlače se konci ispod nerva, uz sam kičmeni stub, nerv se podveže a zatim i preseče. Oba se nerva preparišu do ulaska u karlicu, a zatim se prstima lomi karlica u predelu simfize i odvajaju se ekstremiteti. Na preparatu se pažljivo razmaknu mišići buta tako da se uoči nerv ishiadicus, a zatim se preparira nerv između mišića zadnje lože natkolenice sve do kolenog zgloba. Odstranjuju se mišići natkolenice a femur se preseče u nivou svoje polovine. Posle toga se preseca Ahilova tetiva i mišić gastrocnemius se preparišu do kolenog zgloba a kosti potkolenice se potpuno uklanjaju. Kroz Ahilovu tetivu se provuče konac pomoću igle, koji omogućava kasnije postavljanje preparata (jednim krajem se preparat preko femura fiksira za držač, a drugim krajem

preko konca poveže sa mehanoelektričnim transduserom (Slika 3.12)). Nervno mišićni preparat dakle čine: nerv ishiadicus, mišić gastrocnemius i zglob kolena sa polovinom femura. Ispravnost preparata se proverava draženjem nerva ishiadicusa Galvanijevom viljuškom.



Slika 3.12 Postavljanje mišića

Minimalna i maksimalna stimulacija

Na početku eksperimenta potrebno je odrediti minimalnu stimulaciju (voltažu) potrebnu da se izazove kontrakcija mišića. Prilikom određivanja minimuma stimulacije, mišić se stimuliše pojedinačnim impulsima. Napon na elektrodama se postavi na nulu, a zatim se voltaža postepeno povećava sve do trenutka dok se ne pojave prve kontrakcije mišića. Minimalna voltaža pri kojoj dolazi do kontrakcije mišića naziva se "prag draži".

Pošto je zabeležen prag draži, nastavlja se sa postepenim povećanjem voltaže sve dok se ne postigne maksimum sile. Potrebno je odrediti napon koji izaziva maksimalnu kontrakciju i čijim daljim povećanjem ne dolazi do povećanja sile. Ovaj napon se naziva "maksimalni stimulus". Svako stimulisanje naponom nižim od maksimalnog se naziva "submaksimalna stimulacija".

Ovako određene vrednosti minimalnog i maksimalnog napona se koriste u nastavku eksperimenta.

Sumacija i tetanus

Ukoliko se mišić stimuliše nizom impulsa istog intenziteta, tako da između dva impulsa nema vremena da se opusti potpuno, odziv na drugi impuls će biti veći nego na prethodni. Ovaj fenomen se naziva "sumacija talasa".

Stimulisanje mišića još većom frekvencijom će proizvesti potpuno stapanje sumiranih trzajeva, koje nazivamo "tetanus". Pri nekompletnom tetanusu kriva kontrakcije pokazuje male delove relaksacije, dok je kod kompletnog tetanusa kriva potpuno glatka.

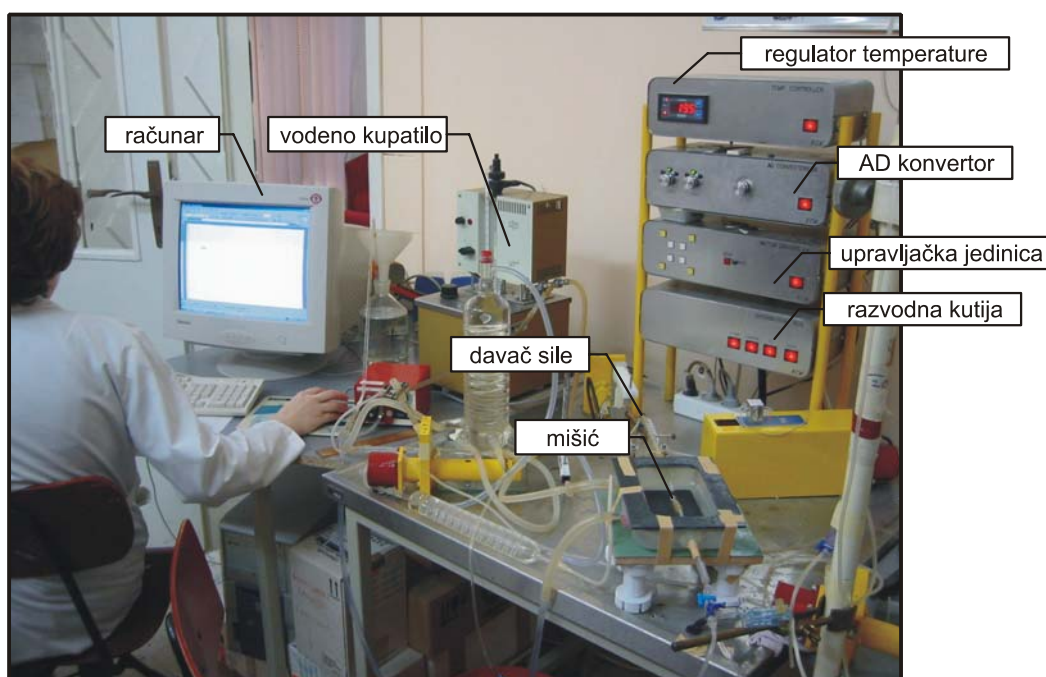
U eksperimentu koji pokazuje sumaciju, mišić se prvo pobuđuje jednim impulsom u sekundi (1Hz), a zatim se preparatu omogući da se odmori oko 15 sekundi. Posle toga stimulisanje se ponavlja sa učestanošću od 2 impulsa u sekundi (2Hz). Stimulacija ne sme da traje duže od 5 sekundi kako ne bi došlo do zamaranja mišića. Slična procedura se ponavlja stimulisanjem 5 i 10 puta u sekundi (5Hz i 10Hz). Pri ovoj frekvenciji se već primećuje sumiranje uzastopnih pojedinačnih trzaja i povećano skraćivanje mišića usled preklapanja kontrakcija. Stimulisanje se zatim nastavlja frekvencijama od 25 i 50 Hz, pri čemu dolazi do potpunog stapanja pojedinačnih kontrakcija u trajnu kontinualnu kontrakciju, tetanus. Ovakva kontrakcija se naziva tetanizovanom kontrakcijom".

Zamor

Pri frekvenciji stimulacije od jednog impulsa u sekundi (1Hz) snima se odziv mišića sve dok on razvija značajnu silu (5-10 minuta). Sve vreme stimulisanja uočava se postepeno opadanje sile koje nastaje usled zamora mišića. Treba voditi računa da do opadanja sile može doći i usled sušenja mišića i nerva, pa ih iz tog razloga treba kvasiti Ringerovim rastvorom sve vreme trajanja eksperimenta.

3.3. *Eksperimentalno određivanje krive zamora gastrocnemius mišića žabe*¹

Merenje sile u mišiću koji je izložen dugotrajnoj konstantnoj aktivaciji, je izvršeno u skladu sa protokolom opisanim u sekciji *Eksperimentalno ispitivanje mehaničkog ponašanja gastrocnemius mišića žabe*. Poštujući predviđenu proceduru, pripremljen je preparat *gastrocnemius* mišića žabe, a zatim postavljen na uređaj za dvoosno istezanje tkiva (Slika 3.13). S obzirom da je u eksperimentu sa mišićem potrebno meriti samo silu u podužnom pravcu mišića, korišćena je mogućnost merenja samo po jednoj osi.

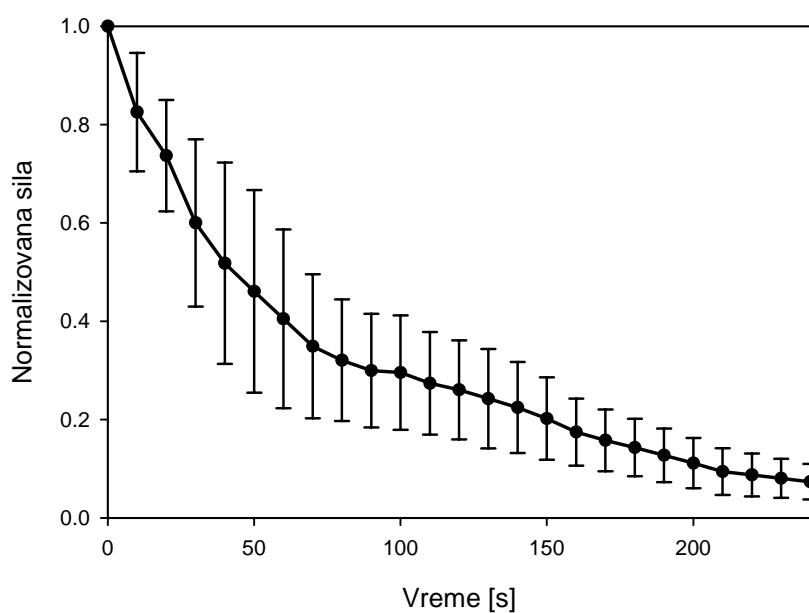


Slika 3.13 Postavka eksperimenta

Mišić je aktiviran serijom pravougaonih impulsa širine 10 ms. Prag draži mišića je bio 0.2 V, a napon stimulisanja 1 V. Frekvencija stimulisanja je podešena na 10 Hz, iznad čega nije registrovano dalje povećanje intenziteta sile. Sve vreme eksperimenta mišić je kvašen Ringerovim rastvorom (Na^+ 147.10, K^+ 4.0 i Ca^{2+} 2.25, izraženo u mM).

¹ Ovaj eksperiment izveden je uz pomoć opreme i istraživača na Institutu za fiziologiju Medicinskog fakulteta u Kragujevcu, na čelu sa profesorom Mirkom Rosićem. Eksperimenti su izvedeni u okviru naučnih projekata Ministarstva za nauku i zaštitu životne sredine TR6209 i OI144028, čiji je rukovodilac prof. Miloš Kojić, nosilac Centar za naučna istraživanja SANU i Univerziteta u Kragujevcu, a učesnici Medicinski fakultet, Mašinski fakultet i Prirodno-matematički fakultet u Kragujevcu.

Korišćenjem davača sile, pojačavača i ostalih elektronskih komponenti, na PC računaru je kontinuirano merena sila u mišiću sa frekvencijom odabiranja od 10 odabiraka u sekundi. Radi lakše statističke obrade i prikaza izmerenih vrednosti, bez bitnog narušavanja opštosti i preciznost, izabrani su samo podaci na svakih 10 sekundi. Na Slici 3.14 data je srednja izmerena normalizovana sila u mišiću tokom 240 sekundi neprekidne maksimalne aktivacije 6 primeraka mišića. Vertikalnim linijama predstavljena je standardna devijacija merenja, koja je po svojoj veličini uobičajena za većinu bioloških eksperimenata.



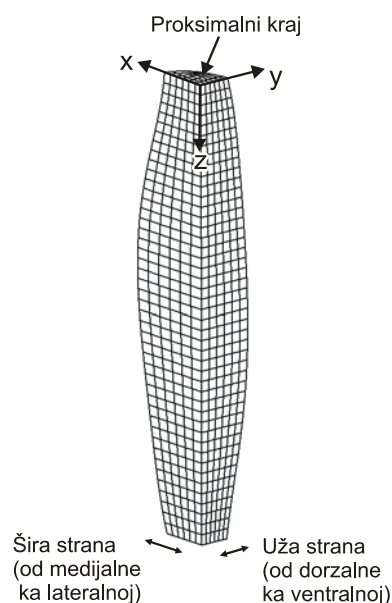
Slika 3.14 Normalizovana sila u *gastrocnemius* mišiću žabe pri konstantnoj aktivaciji tokom dužeg vremenskog perioda.

3.4. Verifikacija predloženog modela zamora mišića na primeru *gastrocnemius* mišića žabe¹

Postavka eksperimenta

Kako bi bilo izvršeno poređenje eksperimentalnih rezultata i proračuna, izabran je izolovani *gastrocnemius* mišić žabe, zato što je on široko korišćen u velikom broju radova koji se odnose na biomehaniku mišića (Barclay, 1999; Ianuzzo i dr., 1987). Korišćenje životinja u eksperimentalne svrhe je odobreno od strane Departmana za zdravlje Hong Konga. Mišićni preparat je pripremljen u skladu sa standardnom laboratorijskom procedurom. Primerci jedne vrste žaba koje žive na području Hong Kong-a (eng. *Bull frog*, lat. *Rana catesbeiana*), su žrtvovani dekapitacijom i pitovanjem. Posle pitovanja žabe, uklonjena je koža sa noge, od sredine butine do Ahilove tetive. *Gastrocnemius* mišići (n = 10, dužina 45 ± 2 mm, masa 23 ± 2 g) su izolovani tako da nerv *ishiadicus* ostane neoštećen, kako bi se očuvala vitalnost nervno-mišićnog preparata tokom procesa merenja.

Visina [mm] (od proksimalnog do distalnog kraja)	Širina [mm] (od medijalne ka lateralnoj strani)	Debljina [mm] (od dorzalne ka ventralnoj strani)
0.0	10.2	6.4
5.0	11.8	8.4
11.0	16.2	9.8
16.0	16.8	10
22.0	17.4	11.6
28.0	16.6	10.8
33.0	14.4	10.0
39.0	12.6	8.2
45.0	9.6	6.0



Slika 3.15 Model *gastrocnemius* mišića žabe

¹ Eksperimentalna ispitivanja i proračuni su rađeni na Politehničkom Univerzitetu u Hong Kongu, u okviru zajedničkog projekta tog univerziteta i Univerziteta u Kragujevcu, pod nazivom "Mechanistic Damage Modelling of Skeletal Muscles Using Hybrid Segment-Superelement Technique". Dobijeni rezultati su publikovani u međunarodnom časopisu: Tang CY, Tsui CP, Stojanovic B, Kojic M. Finite Element Modelling of Skeletal Muscles Coupled with Fatigue. *International Journal of Mechanical Sciences*. In press.

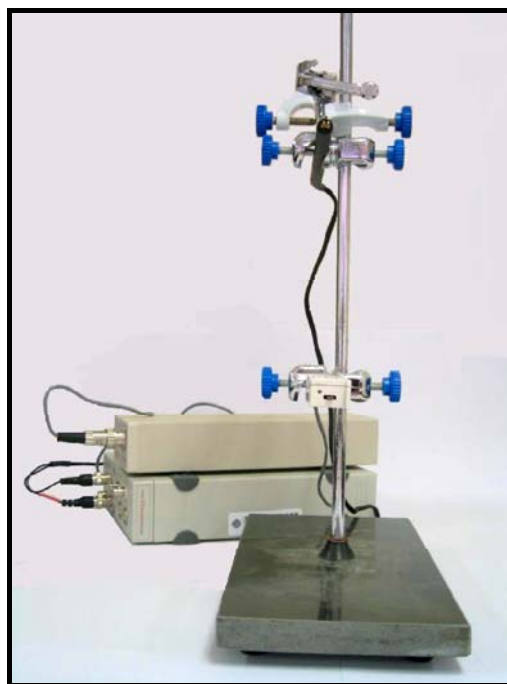
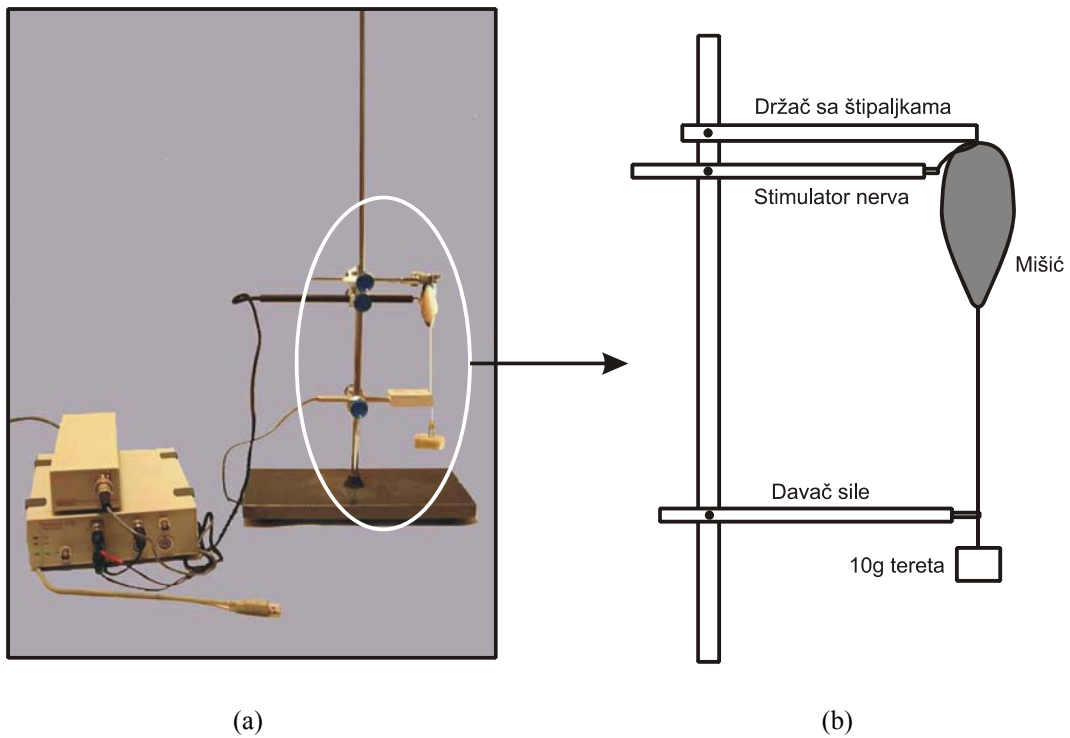
Širina i debljina mišića su merene na različitim rastojanjima od proksimalnog kraja sa preciznošću 0.1 mm. Kako bi bio razvijen model konačnih elemenata, neke tipične dimenzije mišića žabe su date u tabeli na Slici 3.15.

Nerv *ishiadicus* je odvojen od potkolenice, dok je mišić i dalje ostao neodvojen od žabe. Tako odvojen nerv je stimulisan elektrodama da bi se odredila minimalna jačina struje koja proizvodi primetnu kontrakciju mišića. Očitavanjem odgovarajućeg napona na osciloskopu određuje se prag draži. Mišić je zatim odvojen od žabe i stavljen u normalan Ringerov rastvor (u mM: 115 NaCl, 2.5 KCl, 1.8 CaCl₂, 0.85 NaH₂PO₄, 2.15 Na₂HPO₄ i 0.1 mg/ml *d*-tubokurarina pH 7.0) koji je neprekidno ozračivan. Oprema je postavljena kao što je prikazano na Slici 3.16.

Ogoljeni femur je horizontalno uklješten u štipaljke kao što je prikazano na Slikama 3.16a i 3.16b, kako bi bilo moguće da mišić bude postavljen u vertikalni položaj. Mišić je opterećen tegom od 10g koji je uz pomoć konca vezan za Ahilovu tetivu.

Protokol ispitivanja zamora i snimanje podataka

Nerv koji stimulišu elektrode je postavljen normalno na centralnu osu mišića, na njegovoj široj strani i na rastojanju od 10mm od proksimalnog kraja mišića, kao na Slici 3.16b (Hart i dr., 1999). Mišić je preko nerva stimulisan tetaničkim četvorouganim impulsima voltaže 0.7V, pri čemu je prag draži bio 0.2V. Frekvencija stimulacije je bila 10Hz, iznad koje više nije bilo povećanja sile, što pokazuje da je postignuta potpuna tetanička kontrakcija. Mišić je stimulisan svake 4 sekunde u periodima od po 2 sekunde, čime je postignuta aktivacija sa 50% aktivnog vremena. Signal sa davača sile je sniman na računaru korišćenjem sistema za akviziciju podataka na 5 kHz, uz pomoć 16-bitnog analogno-digitalnog konvertera (ML825; PowerLab 2/25, ADInstruments™) i softvera Chart 5.0. Davač sile (MLT050; PowerLab 2/25, ADInstruments™) je imao rezonantnu frekvenciju od Hz. Promena oblika mišića je merena uz pomoć uniformne mreže projektovane na mišić (Chen i Zeltzer, 1992). Proces deformisanja mišića po širini i debljini je sniman simultano pomoću dve digitalne kamere (Slike 3.16a i 3.16c) sa brzinom od 25 slika u sekundi.



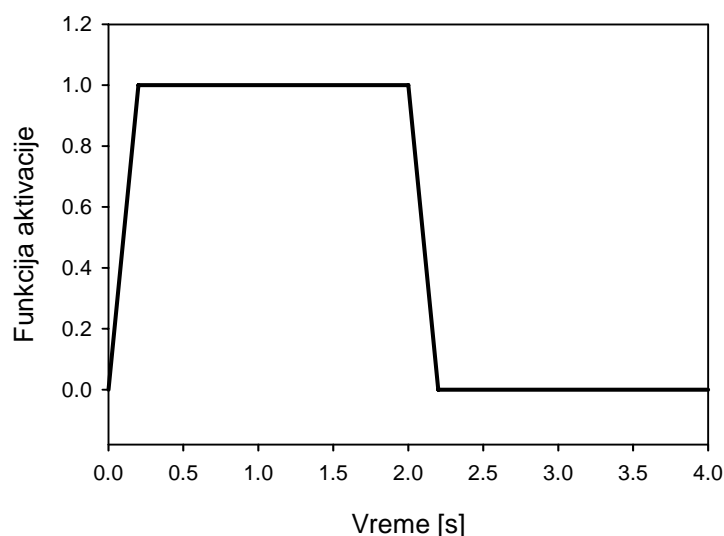
Slika 3.16 Postavka eksperimenta sa izolovanim *gastrocnemius* mišićem žabe stimulisanim električnim impulsima.

- a) Snimanje deformisanja mišića sa njegove šire strane (od medijalne ka lateralnoj)
- b) Shematski prikaz dela eksperimentalne opreme
- c) Snimanje deformisanja mišića sa njegove uže strane (od dorzalne ka ventralnoj)

Model konačnih elemenata

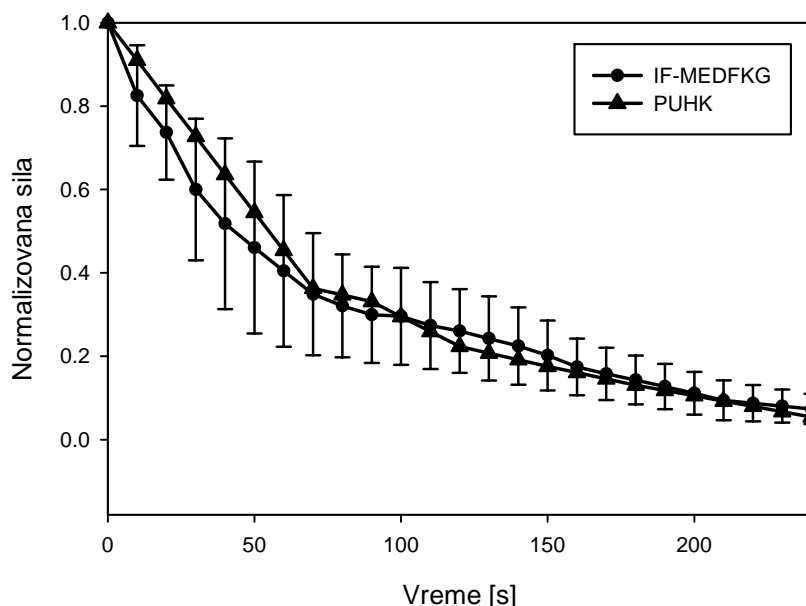
Dimenzije mišića žabe korišćene za kreiranje modela konačnih elemenata su dobijene korišćenjem pristupa opisanog u eksperimentalnoj sekciji i podataka datih u tabeli na Slici 3.15. Telo mišića je modelirano korišćenjem 3D 8-čvornih heksahedralnih konačnih elemenata, pri čemu je pretpostavljeno da se pravac mišićnih vlakana poklapa sa trećom lokalnom osom elementa (Kojic i dr., 1996). Zahvaljujući ravanskoj simetriji, razmatrana je samo jedna četvrtina modela mišića, kao što je pokazano na Slici 3.15. Svi čvorovi u x - z ravni imaju ograničeno pomeranje u y pravcu, dok svi čvorovi u y - z ravni imaju ograničeno pomeranje u x pravcu. Čvorovi na najvišem sloju ($z = 0$) imaju ograničeni translaciju u z pravcu. Svim čvorovima na najnižem sloju ($z = h = 45$) su zadata ograničenja na taj način da je njihovo pomeranje u z pravcu jednako pomeranju centralnog čvora na koordinati $(0, 0, 45)$, kako bi se održala paralelnost ovog sloja sa ravni x - y . Kada se koriste trodimenzionalni konačni elementi potrebno je globalno ograničiti i rotacije oko sve tri ose. Mala koncentrisana sila od 0.025N ($1/4 \times 0.1\text{N}$) je zadata na najnižem sloju kako bi se simuliralo opterećenje od 10 grama u eksperimentu.

U ovom primeru je korišćen prošireni Hilov model sa jednim tipom vlakana, što ga praktično izjednačava sa osnovnim Hilovim modelom. Aktivaciona funkcija za mišić je 0.25Hz i 50% aktivnog vremena, kao što je pokazano na Slici 3.17.



Slika 3.17. Aktivaciona funkcija za mišić žabe (0.25 Hz , 50% aktivnog vremena).

Kriva zamora pri neprekidnoj maksimalnoj aktivaciji je određena eksperimentalno, stimulisanjem mišića serijom impulsa, sa frekvencijom 10 Hz (Slika 3.18). Na dijagramu je moguće uočiti da se izmerena kriva (PUHK) nalazi unutar standardne devijacije merenja izvršenog na Institutu za fiziologiju Medicinskog fakulteta u Kragujevcu (IF-MEDFKG), što potvrđuje ispravnost i pouzdanost ova dva merenja.



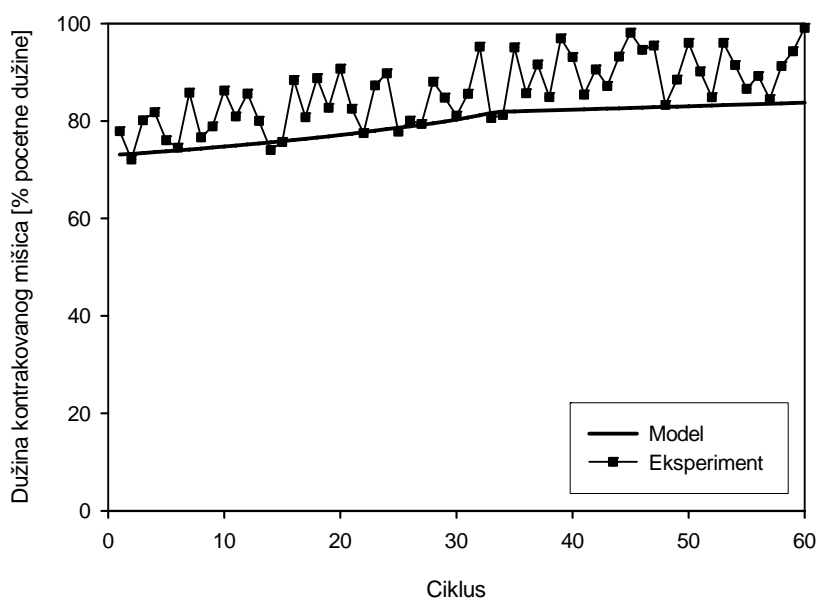
Slika 3.18 Eksperimentalne krive zamora pri neprekidnoj maksimalnoj aktivaciji dobijene na Institutu za fiziologiju Medicinskog fakulteta u Kragujevcu (IF-MEDFKG) i Politehničkom univerzitetu u Hong Kongu (PUHK).

Kako bi bilo moguće modelirati uticaj mišićnog zamora na oblik mišića u pojedinim vremenskim trenucima, upotrebljeno je ukupno 660 vremenskih koraka za simulaciju 60 ciklusa opterećenja mišića. Svaki ciklus se sastoji od 10 koraka po 0.22 sekunde pod aktivacijom i jednog koraka od 1.8 sekundi odmaranja mišića. Pun efekat maksimalne aktivacije se javlja na kraju drugog koraka svakog ciklusa, 0.44 sekunde od početka ciklusa. Ovo kašnjenje u proizvodnji maksimalne sile je posledica viskoelastičnih osobina modela. Izabran je iterativni metod *Full Newton* sa tolerancijom 10^{-6} za energetski kriterijum.

Efekat zamora mišića na njegovo mehaničko ponašanje

Korišćenjem predloženog modela mišića koji uzima u obzir zamor izvršen je proračun skraćanja mišića tokom 240 sekundi ciklične aktivacije, kao što je to opisano u

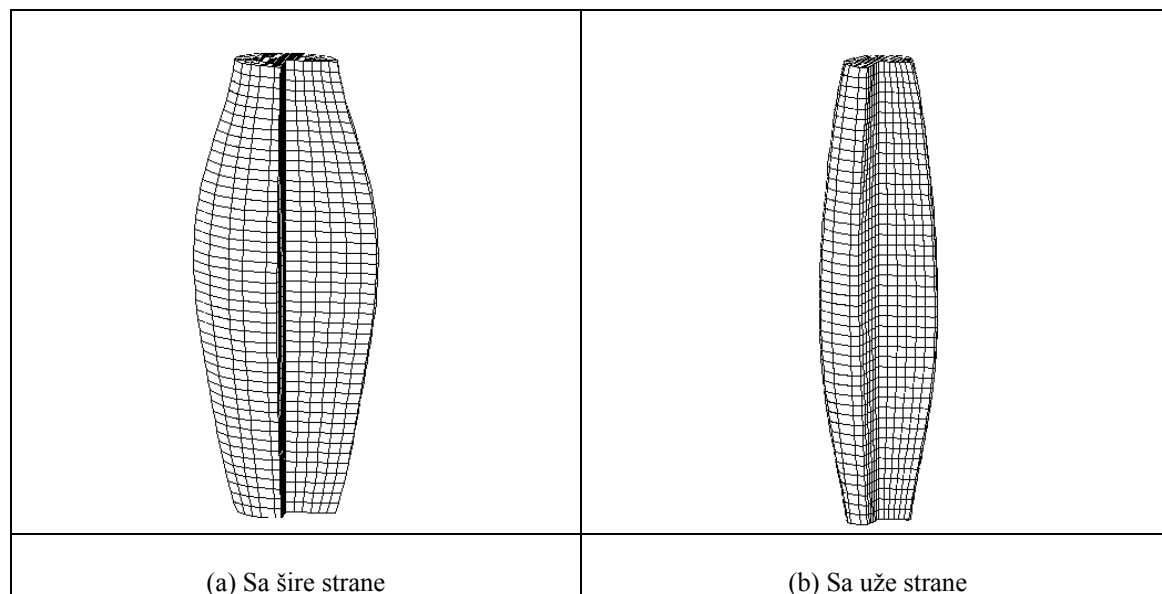
prethodnoj sekciji. Kako bi se utvrdila primenljivost predloženog modela, dobijeni rezultati upoređeni su sa eksperimentalnim podacima (Slika 3.19). Sa dijagrama je moguće videti da se na početku eksperimenta mišić skraćuje na oko 75% svoje početne dužine, dok je skraćenje posle 60 ciklusa, usled pojave zamora, znatno manje, tako da se mišić skraćuje na približno 90% svoje početne dužine. Rezultati dobijeni proračunom neznatno odstupaju od eksperimentalnih rezultata, tako da se greška predviđanja kreće u prihvatljivim granicama. Sa dijagrama je moguće uočiti da je trend promene skraćenja usled zamora gotovo identičan u oba slučaja, ali da kriva dobijena proračunom tokom čitavog perioda aktivacije ima nešto niže vrednosti od eksperimentalne krive. S obzirom da se razlika javlja već u prvom ciklusu, može se zaključiti da uzrok greške ne leži u predloženom modelu zamora, već da model mišića generalno daje veća skraćenja od stvarnih. Ova razlika može biti posledica nedovoljno tačne geometrije i materijalnih parametara korišćenih u simulaciji.



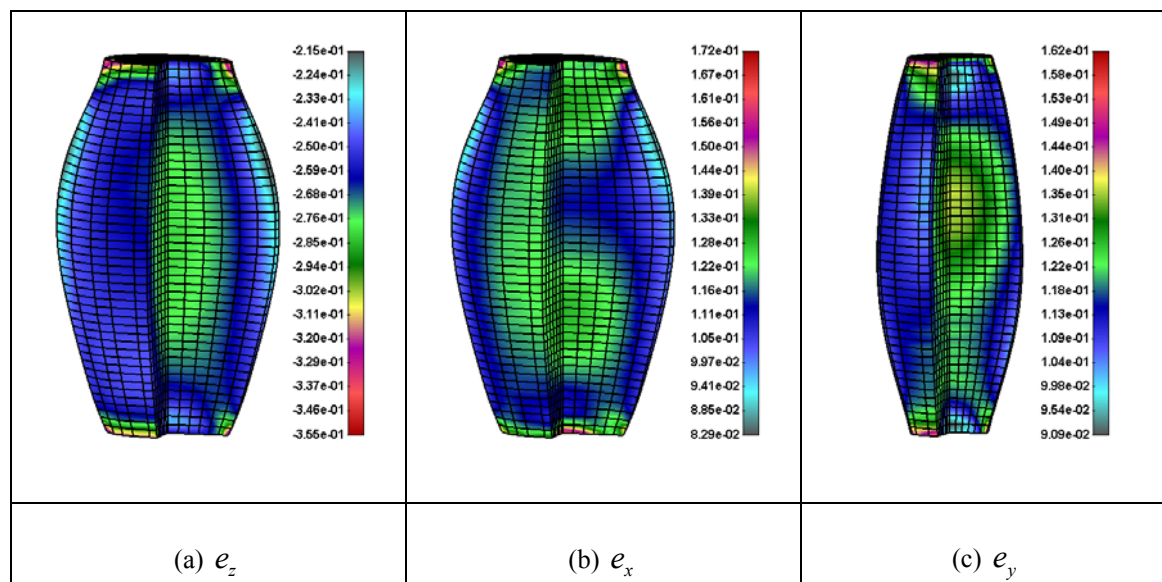
Slika 3.19 Skraćenje mišića tokom 240 sekundi ciklične aktivacije

Nedeformisane mreže mišića žabe posmatrano sa šire i uže strane su prikazane na Slici 3.20. Kada je mišić izložen aktivaciji, mišić se deformiše u različitim pravcima. Na Slici 3.21 su prikazane normalne deformacije mišića u x , y i z pravcu u prvom ciklusu maksimalne aktivacije, pri čemu je uzet u obzir i zamor mišića. Na Slici 3.21a, normalne deformacije u z pravcu, e_z , u centralnom delu mišića su negativne što vodi do zaključka da se mišić skraćuje. e_x i e_y su normalne deformacije mišića u x i y pravcu koji su

normalni na uzdužnu osu mišića. Obe vrednosti, e_x i e_y , su pozitivne, što govori da se mišić tokom kontrakcije širi u transverzalnim pravcima kao što je prikazano na Slikama 3.21b i 3.21c. Ovakvo deformisanje mišića je slično deformisanju modela datog u radu Oomens i dr. (2003), a koji ne uzima u obzir zamor mišića.



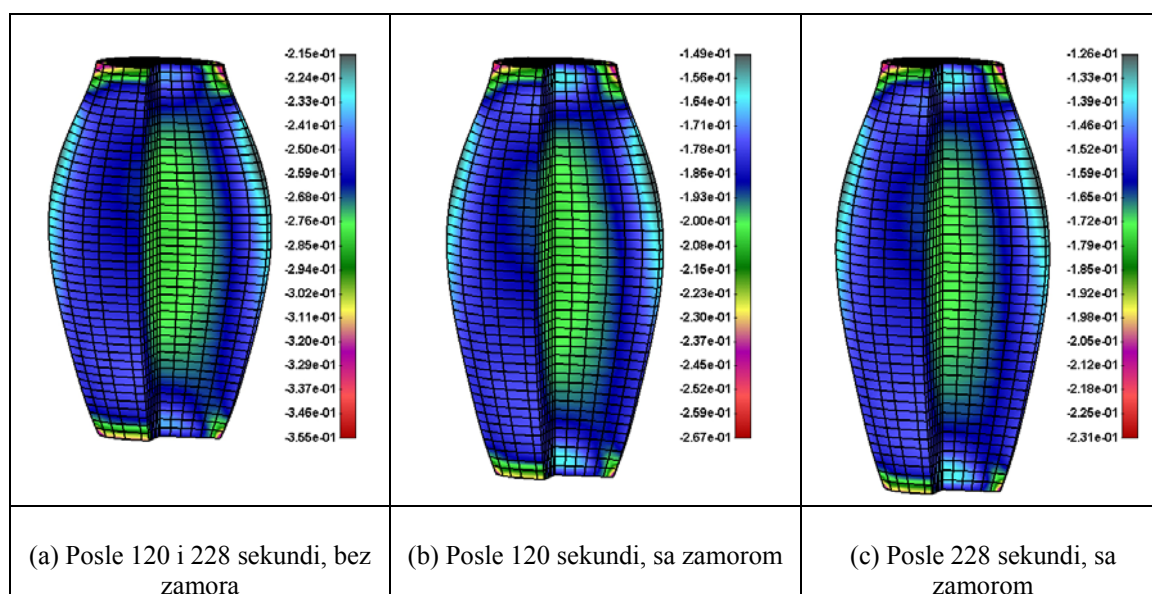
Slika 3.20 Nedeformisana mreža konačnih elemenata za mišić žabe iz dve projekcije



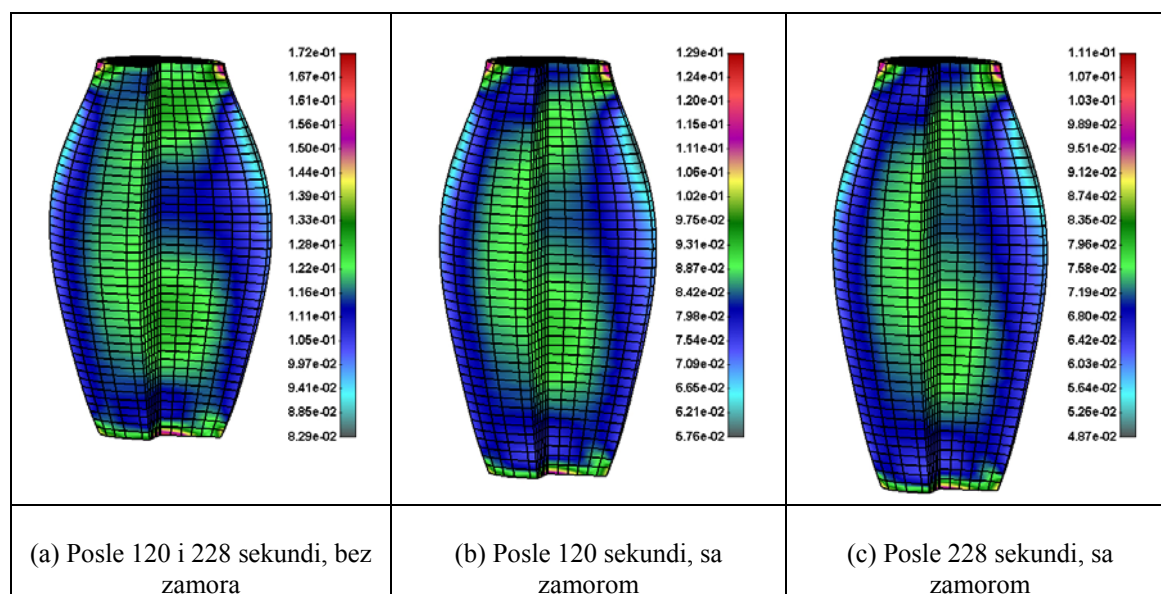
Slika 3.21 Normalne deformacije u x , y i z pravcu, pri maksimalnoj aktivaciji u prvom ciklusu. Zamor mišića je uzet u obzir.

U nastavku je dato poređenje rezultata dobijenih korišćenjem modela sa i bez uzimanja u obzir mišićnog zamora. Kada je mišić izložen maksimalnoj aktivaciji u trenutku $t=120$

sekundi, maksimalne i minimalne vrednosti deformacije e_z dobijene korišćenjem modela koji ne uzima u obzir zamor su -0.355 i -0.215 redom (Slika 3.22a), dok vrednosti dobijene korišćenjem modela koji uzima u obzir zamor opadaju na -0.267 i -0.149 redom (Slika 3.22b). Ova činjenica govori je zamor mišića izazvao veliko smanjenje deformacija od oko 25~31% u uzdužnoj kontrakciji mišića žabe, što je prikazano na Slici 3.22b, u odnosu na model koji ne uzima u obzir zamor, prikazan na Slici 3.22a. Treba primetiti da je vreme mereno u odnosu na maksimalnu aktivaciju prvog ciklusa, kako bi se izbegli prelazni procesi nastali kao posledica viskoelastičnog ponašanja, što znači da prikazana vremena imaju pomak od 0.44 sekunde u odnosu na vreme od početka simulacije. Kada je mišić potpuno aktiviran u trenutku $t=228$ sekundi, raspodela deformacija e_z i e_x dobijenih korišćenjem modela koji ne uzima u obzir zamor je nepromenjena i ostaje ista tokom čitavog procesa aktivacije, kao što je prikazano na Slikama 3.22a i 3.23a. U slučaju razmatranja zamora, maksimalne i minimalne vrednosti deformacije e_z mišića prikazanog na Slici 3.22c dalje opadaju za 14% i 16% redom. Zaključujemo da sposobnost kontrakcije mišića u uzdužnom pravcu opada tokom čitavog procesa aktivacije, iako je raspored deformacija u mišiću u tri vremenska trenutka skoro isti. Takođe se može uočiti sa Slike 3.23c da se čitav mišić mnogo manje deformiše u x pravcu u trenutku $t=228$ sekundi, u odnosu na trenutak $t=120$ sekundi prikazan na Slici 3.23b. Odatle sledi da takođe postoji i opadanje sposobnosti širenja mišića u poprečnom pravcu.

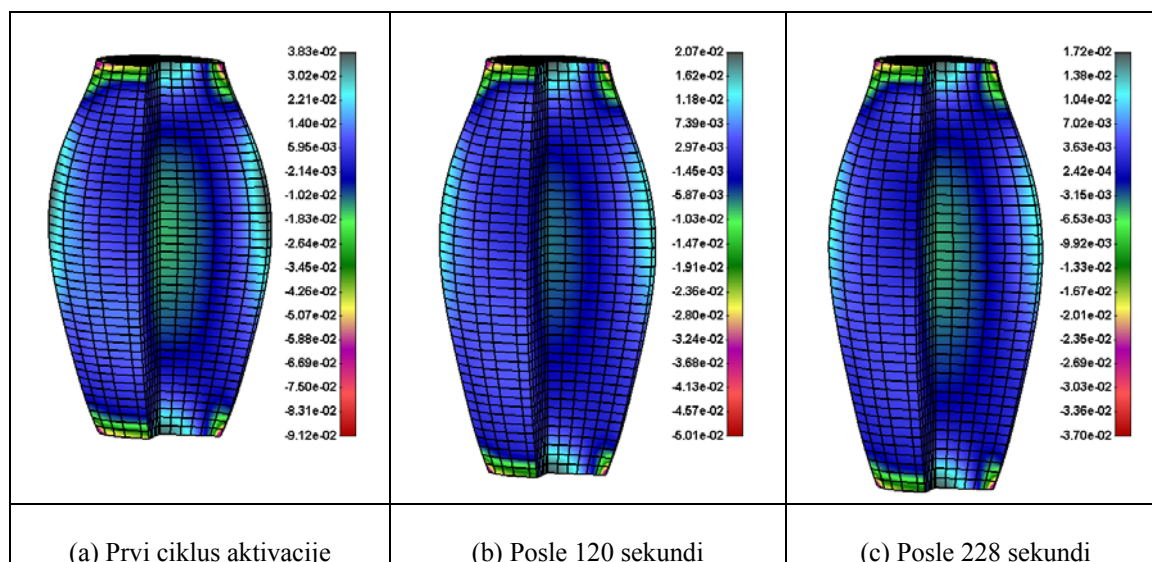


Slika 3.22 Normalne deformacije u z pravcu u različitim vremenskim trenucima, u slučaju kada zamor nije uzet u obzir (a) i kada je uzet u obzir (b,c).



Slika 3.23 Normalne deformacije u x pravcu u različitim vremenskim trenucima, u slučaju kada zamor nije uzet u obzir (a) i kada je uzet u obzir (b,c).

Efekte zamora mišića mogu se uočiti i posmatranjem raspodele napona, kao što je pokazano na Slici 3.24. Pri maksimalnoj aktivaciji u prvom ciklusu, vrednosti napona u pravcu vlakana (Slika 3.24a) leže između -9.12×10^{-2} i 3.83×10^{-2} MPa. U trenutku $t=120$ sekundi, opseg napona koji se razvija u mišiću prikazanom na Slici 3.24b je redukovana na $-5.01 \times 10^{-2} \sim 2.07 \times 10^{-2}$ MPa. Slično, raspodela napona koji se razvija u mišiću i njegova dalja redukcija se mogu uočiti sa Slike 3.24c, gde vreme dostiže 228 sekundi. Iz ovoga se može videti da je opadanje sile (napona) znatno manje u periodu posle 120 sekundi, što je direktna posledica oblika krive zamora.

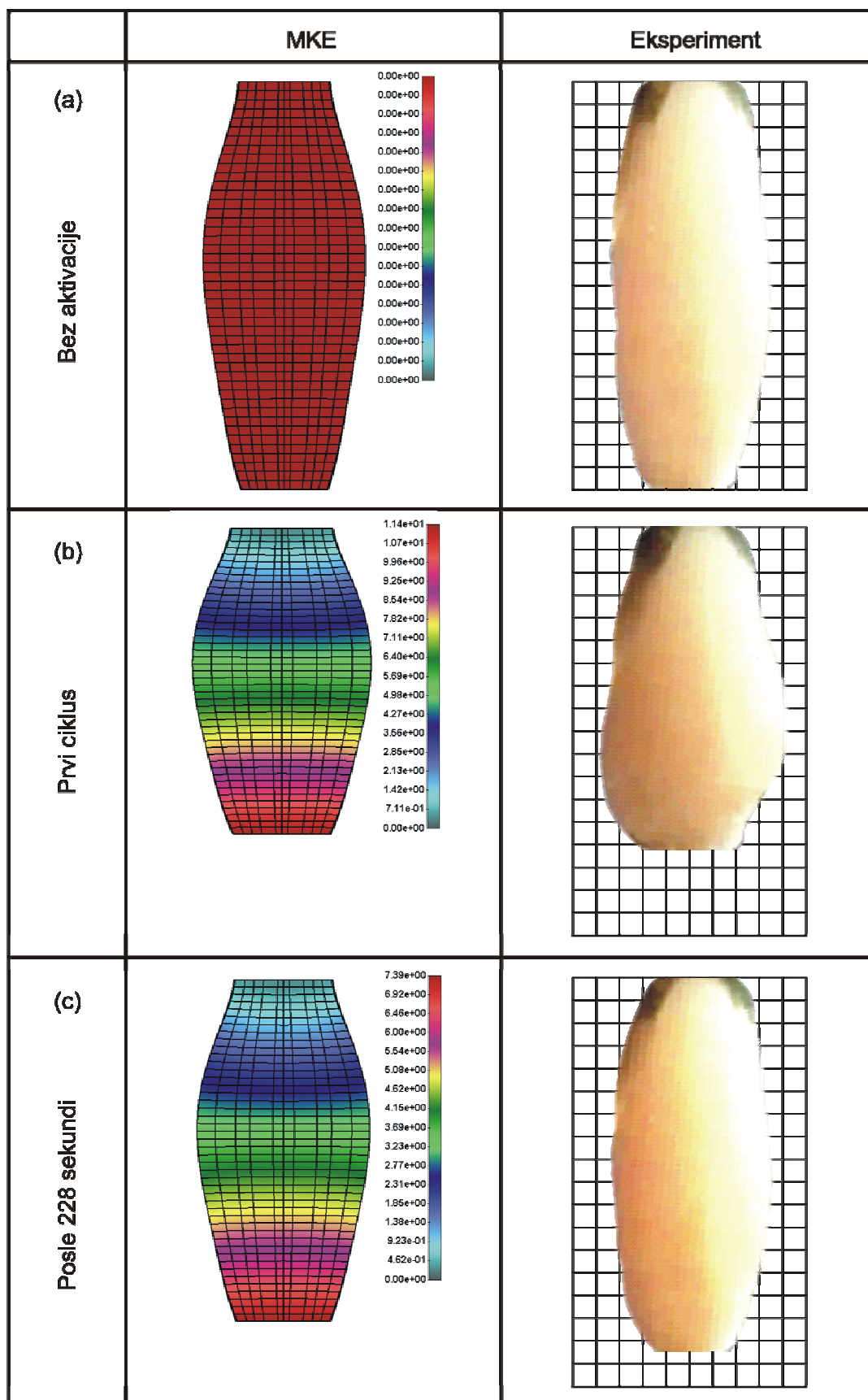


Slika 3.24 Napon u mišiću pri punoj aktivaciji u različitim vremenskim trenucima.

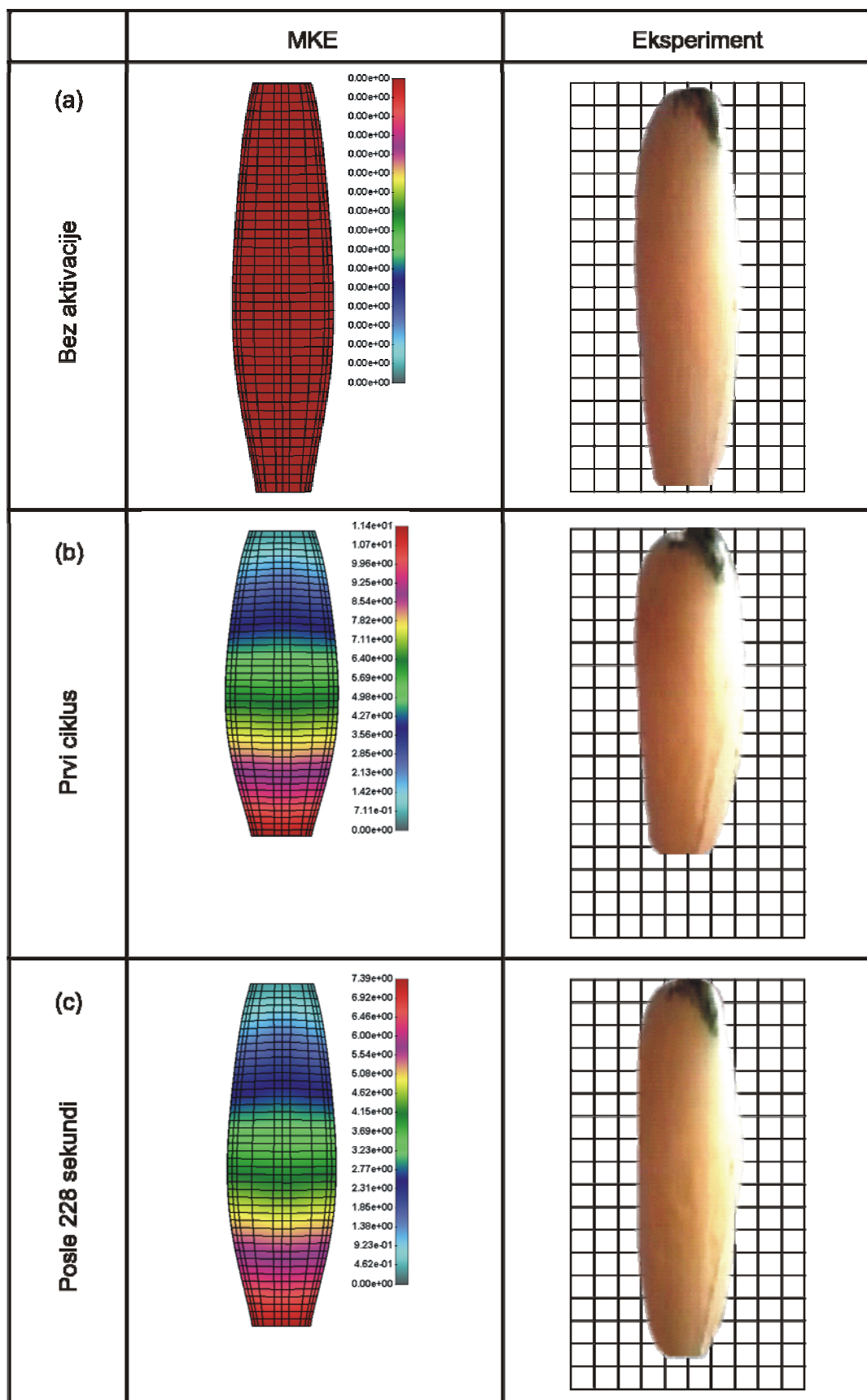
Zamor mišića je uzet u obzir.

Efekti zamora mišića na deformaciju oblika

Poređenja deformisanja mišića posmatrano sa šire i uže strane dobijenih simulacijom metodom konačnih elemenata i eksperimentom, prikazana su na Slikama 3.25 i 3.26. U trenutku $t=0$ sekundi., mišić je u nedeformisanom stanju, što je prikazano na Slikama 3.25a i 3.26a redom. Pri maksimalnoj aktivaciji u prvom ciklusu, mišić ima najveću kontrakciju. Centralni deo mišića se kontrakuje u pravcu svoje uzdužne ose, ali se u poprečnim pravcima širi (Slike 3.25b-levo i 3.26b-levo). Na Slici 3.25b-levo, maksimalno širenje mišića u poprečnom pravcu dobijeno proračunom je veoma blisko eksperimentalno dobijenom širenju prikazanom na Slici 3.25b-desno. Izračunato maksimalno širenje mišića u užoj projekciji prikazano na Slici 3.26b-levo je tek nešto malo veće od širenja dobijenog eksperimentom, koje je dato na Slici 3.26b-desno. Međutim, maksimalno širenje mišića u široj projekciji se javlja u njegovom donjem delu, dok se maksimalno širenje u užoj projekciji javlja u središnjem delu mišića. Ovakvo ponašanje mišića je posledica nejednake aktivacije u svim njegovim delovima, što ovim modelom nije razmatrano. Slični efekti se mogu dobiti uvođenjem više tipova vlakana, čiji bi udeo bio nehomogen unutar zapremine mišića.



Slika 3.25 Poređenje deformisanja oblika mišića pri punoj aktivaciji u određenim vremenskim trenucima, između simulacije metodom konačnih elemenata i eksperimentalnih rezultata, posmatrano sa šire strane.



Slika 3.26 Poređenje deformisanja oblika mišića pri punoj aktivaciji u određenim vremenskim trenucima, između simulacije metodom konačnih elemenata i eksperimentalnih rezultata, posmatrano sa uže strane.

U vremenskom trenutku $t=228$ sekundi, mišić je takođe pod maksimalnom aktivacijom. Međutim, usled efekta zamora mišića, javlja se značajna redukcija sposobnosti skraćenja u uzdužnom pravcu, odnosno širenja u poprečnim pravcima, što se može videti na Slikama 3.25c-levo i 3.26c-levo. Izračunata maksimalna uzdužna kontrakcija i maksimalno poprečno širenje, prikazani na Slikama 3.25c-levo i 3.26c-levo, su nešto veći nego što to pokazuju eksperimentalni rezultati prikazani na Slikama 3.25c-desno i 3.26c-desno, redom. Ovakva odstupanja mogu biti posledica nedeovoljno tačno utvrđenih parametara modela, kao i manjkavosti modela u pogledu predviđanja efekata kao što su odumiranje ćelija i drugih fenomena koji se javljaju prilikom *in vitro* eksperimenata.

Efekte primene proširenog Hilovog modela koji uzima u obzir postojanje različitih tipova mišićnih vlakana

U nastavku su prikazane glavne karakteristike viševlakanskog proširenog Hilovog modela i proračun odziva *gastrocnemius* mišića žabe iz prethodne sekcije na osnovu predloženog modela. Izračunato je ponašanje mišića pri single-twitch aktivaciji, za različite raspodele sporih i brzih vlakana. Pretpostavka je da je raspodela pojedinih tipova vlakana linearna duž radijusa poprečnog preseka. U primeru su korišćene materijalne karakteristike date u Tabeli 3.2, koje su preuzete iz literature (Kojic i dr., 1998; Fung, 1993).

Konstanta	Spora vlakna	Brza vlakna
α	9.4	9.4
β	0.11	0.11
a	0.01	0.07
λ_{m0}	2.0	10.0
k	0.3	0.3
σ_0	0.06	0.4

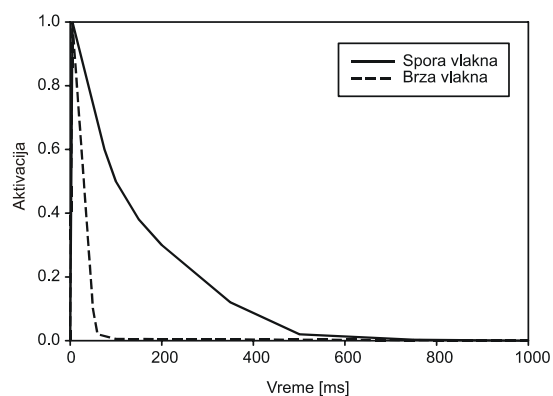


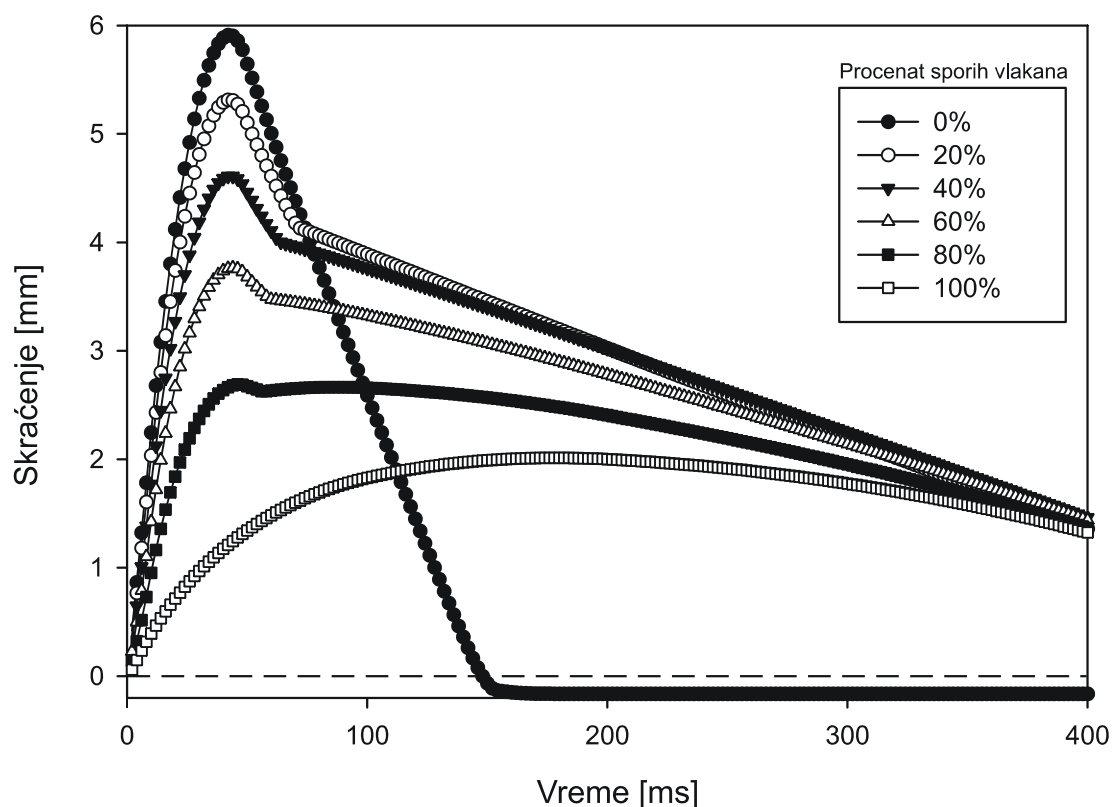
Tabela 3.2 Materijalne karakteristike za Hilov model sa dva tipa vlakana

Slika 3.27 Funkcije aktivacije za spora i brza vlakna

Funkcije aktivacije koje odgovaraju single-twitch kontrakcijama sa maksimalnom vrednošću posle 5 ms (Neidhard-Doll i dr., 2004; Phillips i dr., 2004) i koje su korišćene u ovom modelu, prikazane su na Slici 3.27.

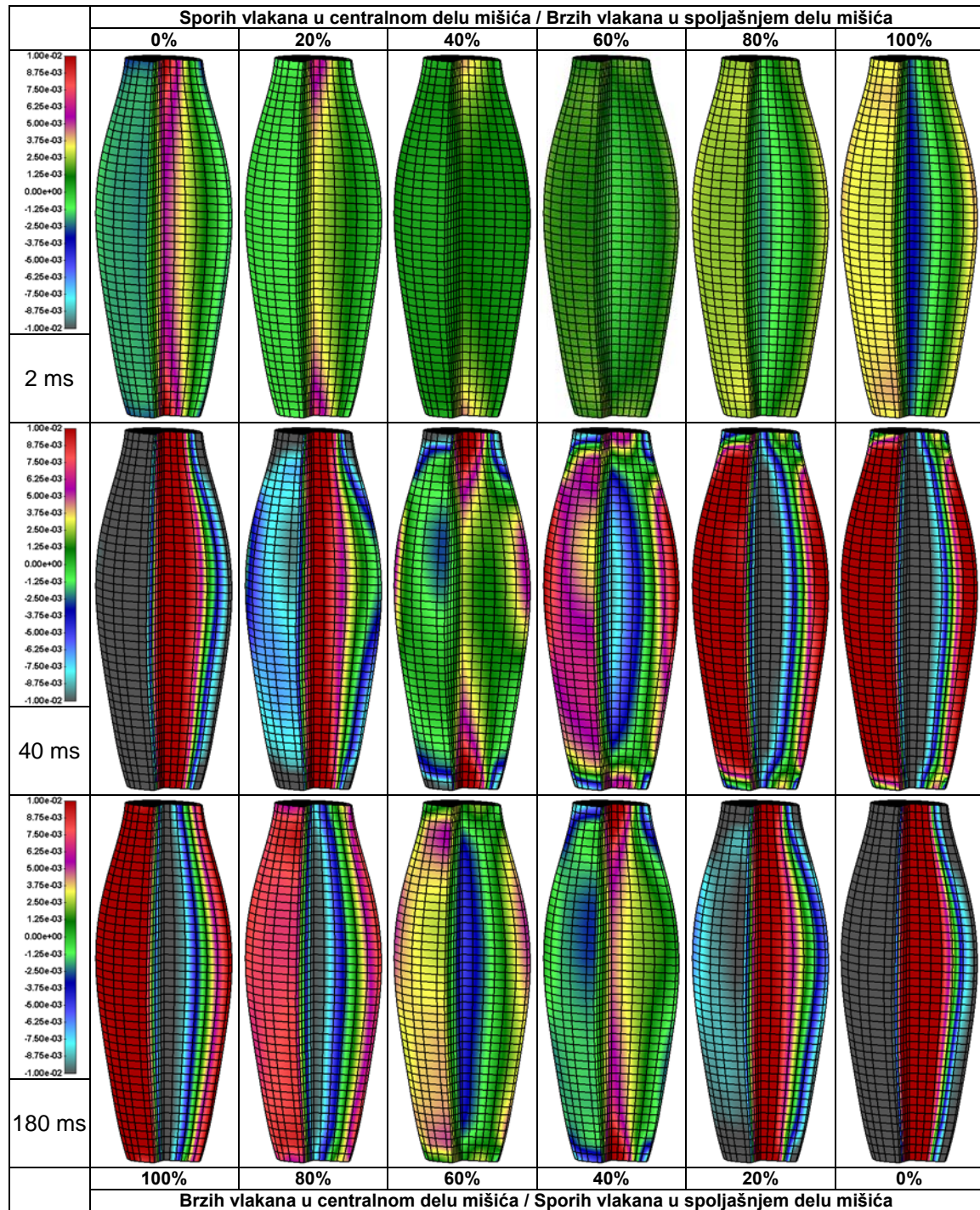
Korišćenjem različitog procentualnog učešća brzih i sporih vlakana, izračunato je skraćenje mišića u vremenu. Izračunate vrednosti su prikazane na Slici 3.28. Sa slike se

može videti da se vreme do maksimalnog skraćenja postepeno povećava sa povećanjem procentualnog učešća sporih mišićnih vlakana, dok je u slučaju mišića koji je izgrađen isključivo od sporih vlakana, ovo vreme značajno uvećano. Takođe, rezultati pokazuju da maksimalno skraćenje mišića naglo opada sa smanjenjem učešća brzih mišićnih vlakana, tako da za mišić sa isključivo sporim vlaknima ovo skraćenje iznosi oko 30% skraćenja mišića sa isključivo brzim vlaknima. Skraćenje predviđeno proračunom kvalitativno odgovara eksperimentalnim rezultatima datim u literaturi (Fung, 1993; Cogshall i Bekey, 1970).



Slika 3.28 Odziv mišića u zavisnosti od procentualnog učešća sporih i brzih mišićnih vlakana

Na Slici 3.29 je prikazana raspodela aksijalnog napona unutar poprečnog preseka mišića, u zavisnosti od raspodele različitih tipova vlakana. U slučaju kada centralni deo poprečnog preseka mišića sadrži 0% sporih vlakana, dok površina mišića sadrži 100% sporih vlakana, posle 40 ms središnji deo poprečnog preseka proizvodi značajnu silu, dok je spoljašnji deo pasivan. Nasuprot tome, kada centralni deo sadrži 100% sporih vlakana, dok površina mišića sadrži 0% sporih vlakana, spoljašnji deo proizvodi maksimalnu silu, dok je unutrašnji deo pasivan. Raspodela napona za druge procentualne rasporede mišićnih vlakana bi bila između ova dva ekstremna slučaja.



Slika 3.29 Raspodela aksijalnog napona unutar poprečnog preseka mišića u zavisnosti od rasporeda sporih i brzih mišićnih vlakana

3.5. Model mišića *biceps brachii* čoveka¹

Definicija modela i njegova verifikacija

Kako bi se pokazale glavne karakteristike multi-fiber Hilovog modela mišića, korišćena je pojednostavljena geometrija mišića *biceps brachii*, kao što je dato u Papas i dr. (2002), (Slika 3.30). Telo mišića je modelirano 3D osmočvornim heksahedralnim elementima pri čemu je pretpostavljeno da je pravac vlakana u pravcu treće lokalne ose elementa (Kojic i dr., 1996). Tetive koje povezuju mišić sa tačkama fiksacije su modelirane kao sloj 3D elemenata i snop 1D štapnih elemenata sa elastičnim materijalnim karakteristikama. Jangov modul elastičnosti mišićnih tetiva je uzet kao $E = 0.6GPa$, što je prosečna vrednost data u literaturi (Benedict i dr., 1968; Vigot i dr., 1995; Kubo i dr., 1999). Proksimalna tetiva je vezana za tačku fiksacije, dok je distalna tetiva preko elastične opruge povezana sa fiksiranom tačkom. Da bi bilo moguće računanje ukupne sile mišića, u tački za koju je vezana opruga zadato je pomeranje jednako nuli.

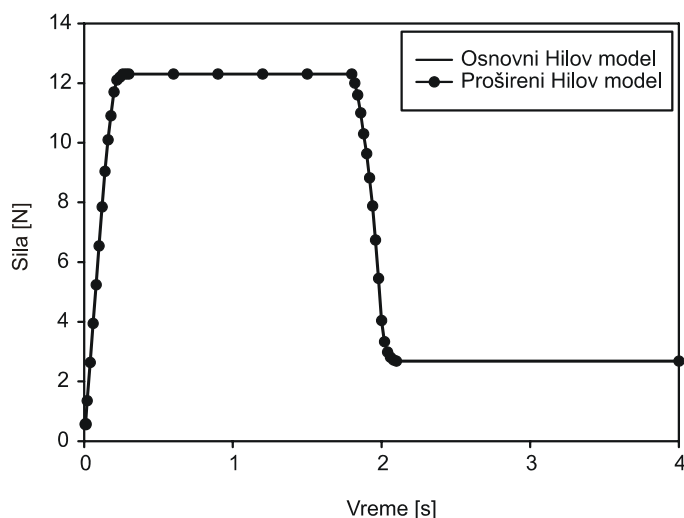


Slika 3.30 Pojednostavljen model mišića *biceps brachii* kod čoveka

Kako bi se proverilo da li su multi-fiber Hilov model i generalizovana izoparametarska formulacija elementa za funkcionalno promenljive materijale ispravno inkorporirane u program za konačne elemente, PAK, izvršene su dve simulacije. U prvoj simulaciji je korišćen osnovni Hilov trokomponentni model, pri čemu su materijalne karakteristike i

¹ Publikovano u međunarodnom časopisu: Stojanovic B, Kojic M, Rosic M, Tsui CP, Tang CY. An Extension of Hill's Three-Component Model to Include Different Fiber Types in Finite Element Modeling of Muscle. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* In press.

funkcija aktivacije uzeti iz Kojić i dr. (1998). Sa druge strane, u drugoj simulaciji je korišćen Hilov multi-fiber model. Dva tipa vlakana, I (spora) i II (brza) su raspoređena unutar mišića tako da je procenat tipa I bio 40% za površinska vlakna mišića biceps brachii, i 60% za dubinska vlakna bicepsa (Buchanan, 1995), uz pretpostavku da je promena u radijalnim pravcima poprečnih preseka linearna. Kako bi bilo moguće izvršiti poređenje između ove dve simulacije, karakteristike oba tipa vlakana u drugoj simulaciji su namerno postavljene na jednake vrednosti kao u prvoj simulaciji. S obzirom da je u tački za koju je vezana opruga zadato pomeranje jednako nuli, kao rezultat proračuna dobijena je sila u toj tački, što predstavlja i ukupnu silu mišića. Izračunata sila u mišiću kao funkcija vremena je prikazana na Slici 3.31.



3.31 Poređenje između Hilovog modela i ekvivalentnog Hilovog 2-fiber modela

Kao što se može videti sa Slike 3.31, korišćenjem istih karakteristika za oba tipa vlakana, Hilov 2-fiber model daje potpuno iste rezultate kao i ekvivalentni Hilov model. Iz toga možemo da zaključimo da je formulacija multi-fiber Hilovog modela i generalizovana izoparametarska formulacija elementa za funkcionalno promenljive materijale korektno ugrađena u programski paket PAK.

Kompozitni multi-fiber model mišića biceps brachii. Modeliranje odziva mišića pri unutrašnjoj aktivaciji

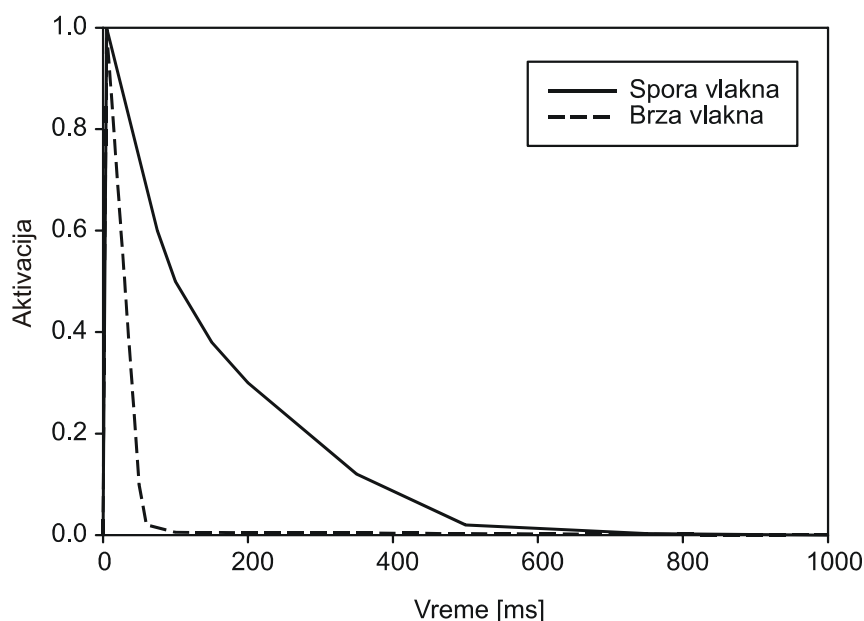
U ovom delu su prikazane glavne karakteristike Hilovog multi-fiber modela i proračun odziva mišića *biceps brachii* korišćenjem ovog modela. Korišćenjem iste geometrije i graničnih uslova kao u prethodnoj sekciji, izračunato je ponašanje mišića pri single-twitch

aktivaciji za različite raspodele sporih i brzih vlakana. Kao i u prethodnoj sekciji, pretpostavljena je linearna raspodela udela pojedinih vlakana duž radijusa mišića. Materijalne karakteristike preuzete iz literature (Fung, 1993; Kojic i dr., 1998) su date u Tabeli 3.3.

Table 3.3 Materijalne karakteristike Hilovog 2-fiber modela

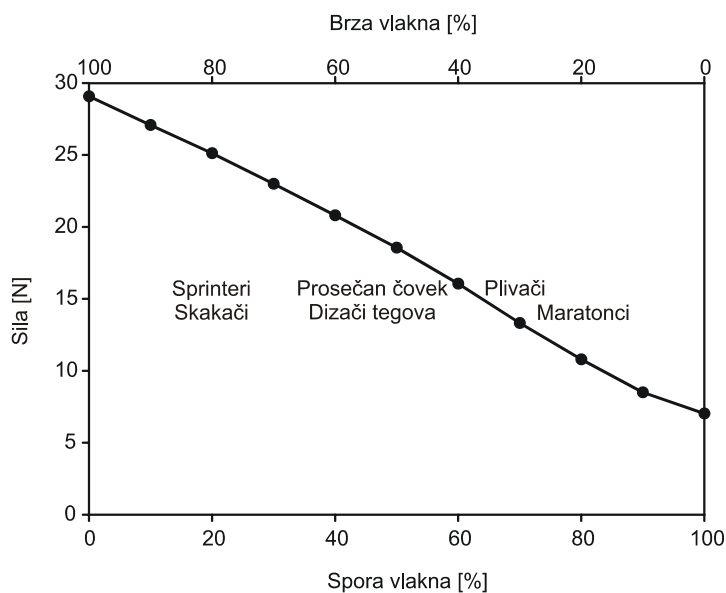
Konstanta	Spora vlakna	Brza vlakna
α	9.4	9.4
β	0.11	0.11
a	0.01	0.07
λ_{m0}	2.0	10.0
k	0.3	0.3
σ_0	0.06	0.4

Funkcija aktivacije koja je korišćena u modelu, a koja odgovara single-twitch kontrakciji sa maksimumom posle 5 ms (Neidhard-Doll i dr., 2004; Phillips i dr., 2004), je prikazana na Slici 3.32.



3.32 Funkcije aktivacije za spora i brza vlakna

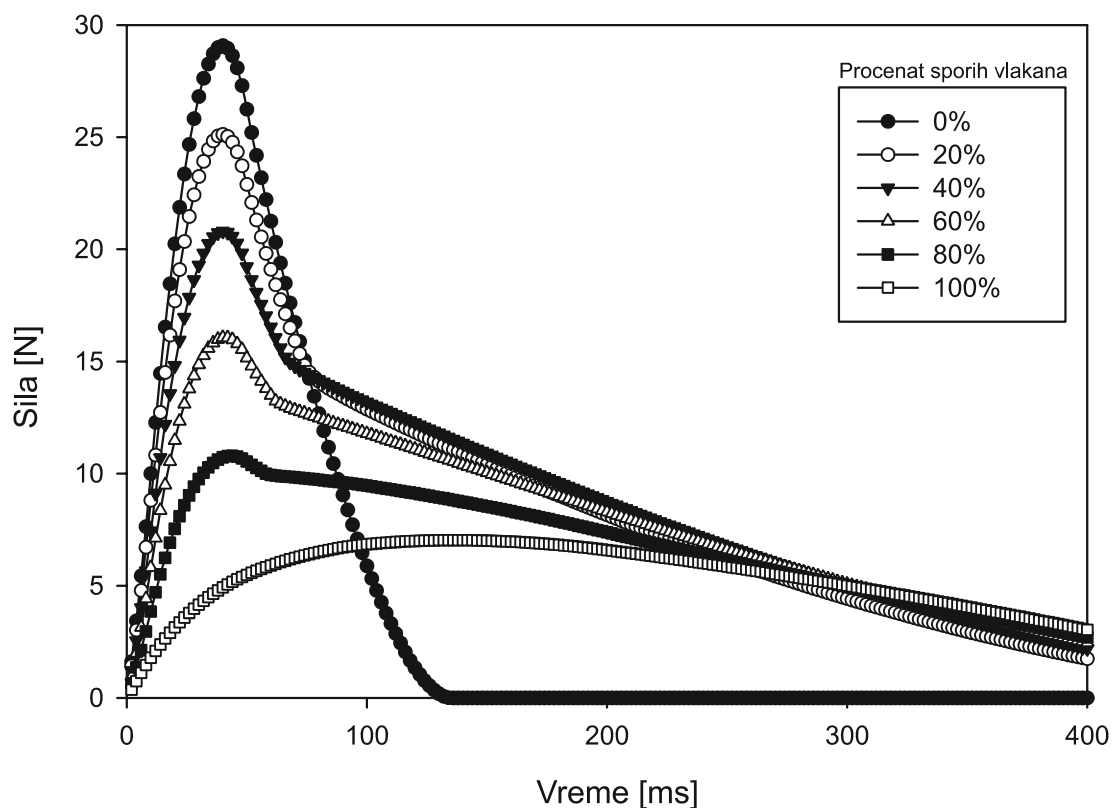
Računali smo maksimalnu silu u funkciji procenta sporih i brzih vlakana. Slika 3.33 prikazuje zavisnost maksimalne sile od procenta sporih i brzih vlakana. Sa slike se može videti da sa variranjem udela sporih vlakana od 0-100%, ukupna sila mišića opadne nekoliko puta.



3.33 Izračunata ukupna sila mišića u zavisnosti od procenta sporih i brzih mišićnih vlakana

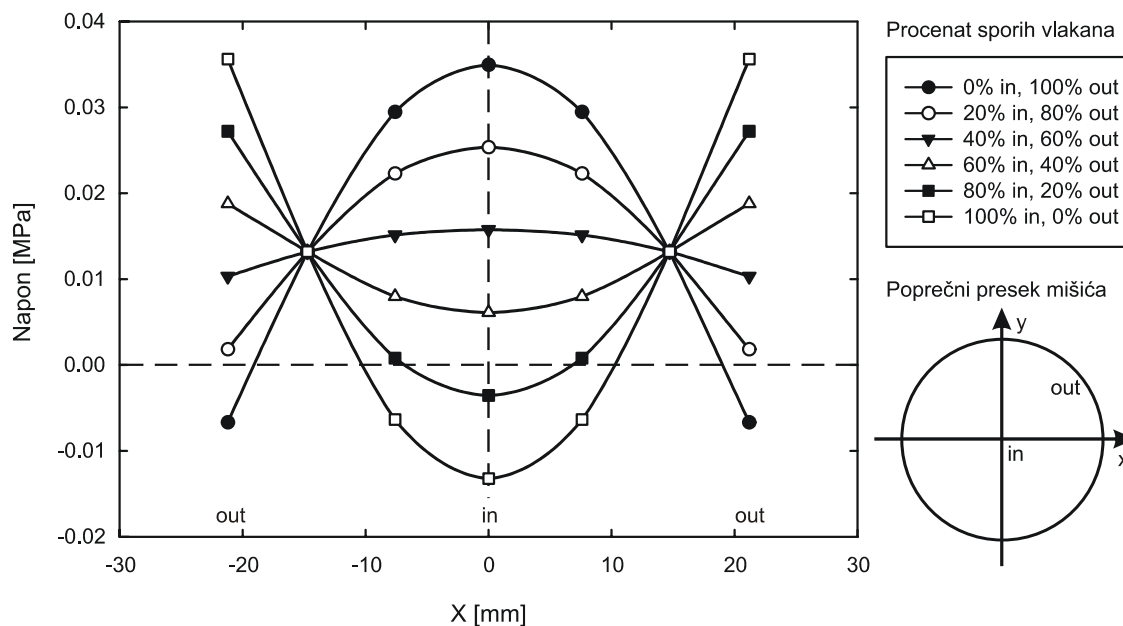
Takođe smo računali razvoj kontraktilne sile mišića u vremenu koristeći različite procenete sporih i brzih vlakana. Vremena single-twitch kontrakcije korišćena u ovom modelu odgovaraju mišićima čoveka: 40 ms za brza vlakna, i 100 do 150 ms za spora vlakna. Izračunati razvoj mišićne sile je prikazan na Slici 3.34. Može se primetiti da se vremenski interval za razvoj maksimalne sile blago povećava sa povećanjem procenta sporih vlakana, dok je u slučaju postojanja samo sporih vlakana vreme razvoja maksimalne sile znatno povećano. Takođe, rezultati pokazuju da maksimalna sila naglo opada sa smanjenjem procenta brzih vlakana, a ukupni pad je oko 6 puta se promenom od 100% do 0% brzih mišićnih vlakana. Sila izračunata korišćenjem multi-fiber Hilovog modela. Sila izračunata korišćenjem multi-fiber Hilovog modela kvalitativno odgovara silama datim u literaturi (Coggshall, 1970; Fung, 1993).

Treba pomenuti da su eksperimentalna merenja serije potencijala motornih jedinica tokom stacionarne voljne kontrakcije pokazala da se aktivacija pojedinih jedinica ne javlja apsolutno pravilno (Lippold, 1957). Intervali aktivacije (recipročna vrednost intervala aktivacije je frekvencija aktivacije) variraju oko nekog srednjeg intervala. Zbog toga u model mora biti uključena stohastika vremena aktivacije (aktivacione funkcije), kako bi se omogućilo bolje predviđanje mišićnog odziva i kako bi se poboljšala predikcija čisto determinističkog modela prikazanog na Slici 3.34.



3.34 Odziv mišića u zavisnosti od procenta sporih mišićnih vlakana

Slika 3.35 prikazuje raspodelu aksijalnog napona unutar poprečnog preseka mišića u zavisnosti od raspodele različitih tipova vlakana. U slučaju kada centralni deo poprečnog preseka mišića (*in*) sadrži 0% sporih vlakana, dok površina mišića (*out*) sadrži 100% sporih vlakana, vidimo da posle 40 ms centralni deo poprečnog preseka proizvodi značajnu silu, dok je spoljašnji deo pasivan. Na suprot tome, kada centralni deo sadrži 100% sporih vlakana, dok površina mišića sadrži 0% sporih vlakana, spoljašnji deo proizvodi maksimalnu silu, dok je unutrašnji deo pasivan. Raspored napona za drugačije raspodele vlakana su između ova dva ekstremna slučaja. Slučaj kada je procenat sporih vlakana 60% za unutrašnjost mišića, a 40% za spoljašnji deo, najviše odgovara mišiću *biceps brachii* čoveka.



Slika 3.35 Raspodela aksijalnog napona unutar poprečnog preseka mišića u zavisnosti od raspodele različitih tipova vlakana (x je radijalno rastojanje od centralne linije mišića)

U ovom poglavlju je radi efikasnosti proračuna i potrebe da se na očiglednom primeru pokažu karakteristike proširenog viševlakanskog Hilovog modela korišćen pojednostavljeni model mišića *biceps brachii*. Detalji o modeliranju realnog mišića *biceps brachii* dati su u Dodatku 6.2, *Modeliranje mišića i mišićno-skeletnih sistema korišćenjem programa Musculo*.

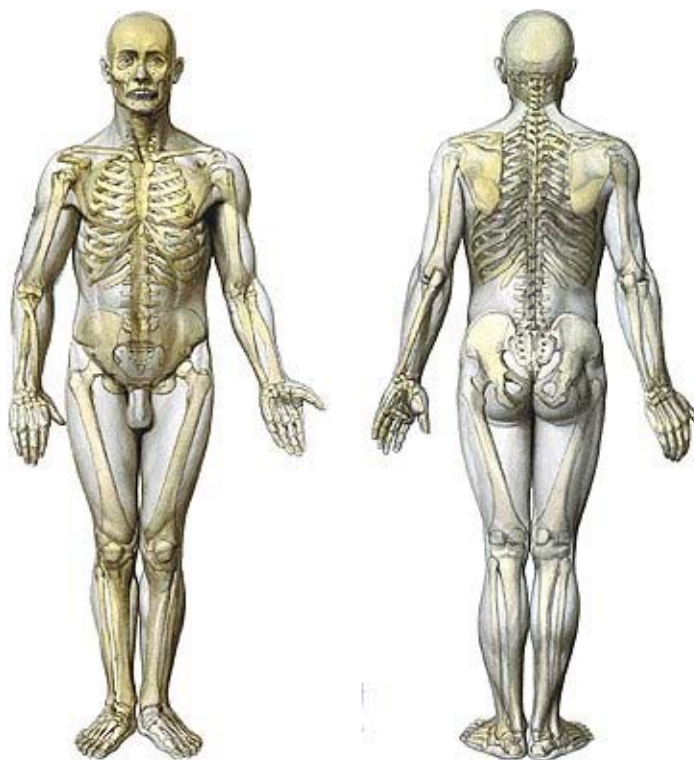
3.6. Modeliranje mišićno-skeletnih sistema

Mišićno-skeletni sistem (MSS) je sistem organa koji životinjama omogućava da se kreću. Pored kretanja, skelet takođe nosi i štiti unutrašnje organe.

Mišićno-skeletni sistem čoveka se sastoji od skeleta, koji je sačinjen od kostiju međusobno povezanih zglobovima, i skeletnih mišića vezanih za skelet pomoću tetiva.

Skelet čoveka nije nepromenjiv već trpi stalne promene tokom života. U početku fetus nema čvrst skelet, a kosti se formiraju postepeno tokom devet meseci trudnoće. Na rođenju su sve kosti formirane, ali novorođenče ima više kostiju nego odrastao čovek. U proseku, odrastao čovek ima 206 kostiju (broj kostiju može da varira od osobe do osobe), dok se beba se rađa sa oko 300 kostiju. Ova razlika proizilazi iz određenog broja malih kostiju koje se spajaju tokom odrastanja. Rast se obično završava između 13 i 18 godina, kada kosti nemaju više zaliha hrskavice da bi obezbedile dalji razvoj.

Najduža i najteža kost u telu je *femur*, a najmanje su kosti u srednjem uhu. Kod odraslog čoveka kosti zauzimaju oko 20% ukupne telesne mase.



Slika 3.36 Skeletni sistem čoveka

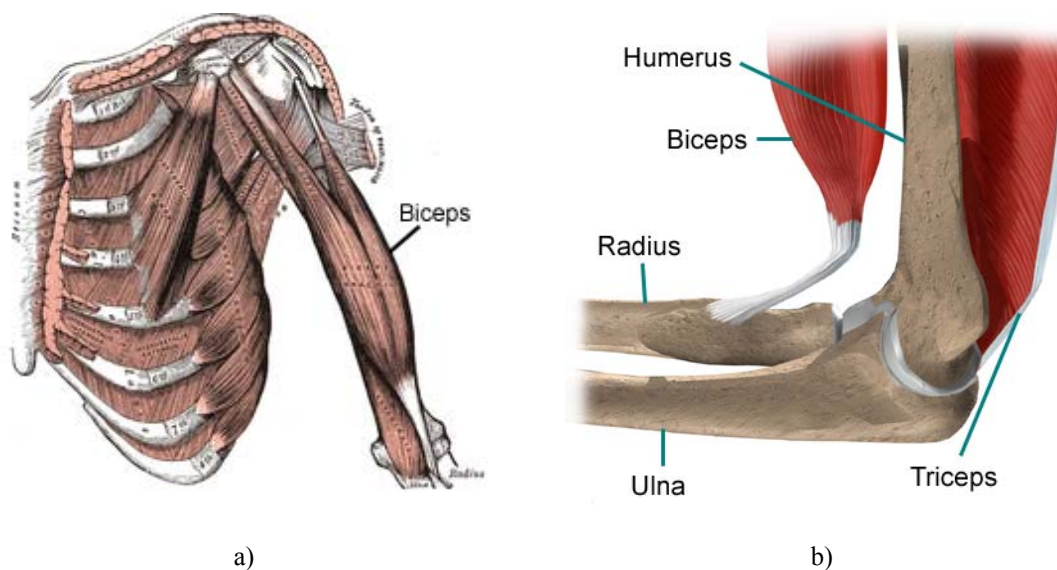
Pored ostalih funkcija, mišići imaju ulogu da pokreću skelet, a samim tim i čitavo telo. Mišići su preko tetiva povezani sa kostima i pokreću ih principom poluga. Veze između mišića i kostiju su najčešće veoma blizu zglobova, tako da je krak sile veoma mali u poređenju sa dužinom kostiju. Iz tog razloga je sila na kraju kosti nekoliko puta manja od sile koju razvija mišić koji je pokreće (Slika 3.39).



Slika 3.37 Mišićni sistem čoveka

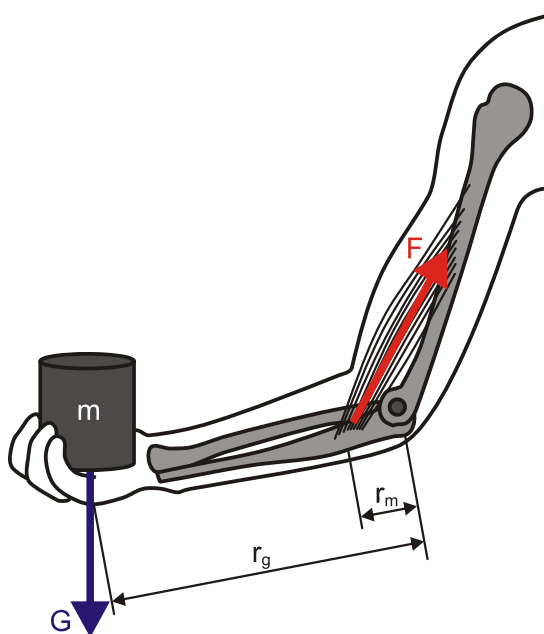
Mišićno-skeletni sistem ljudske ruke

Jedan od primera sprege mišića i kostiju u cilju izvođenja pokreta je sistem ljudske ruke. Pored ostalih mišića, jedan od najbitnijih pokretača ljudske podlaktice je mišić *biceps brachii*. Sam naziv biceps brachii potiče od latinske fraze "dve glave ruke", što proizilazi iz činjenice da se mišić sastoji od dva snopa koji imaju zasebne proksimalne krajeve, ali se na distalnom kraju stapaju u jednu tačku vezivanja u blizini lakta. Na proksimalnom kraju, **kratka glava** bicepsa je vezana za korakoidni proces skapule, dok se **dugačka glava** proteže preko glave humerusa i vezuje se na skapulu kod superglenoidne tuberkle (Slika 3.38a). Na distalnom kraju biceps je vezan za radius i, s obzirom da ova kost može da rotira oko zgloba lakta, biceps može da je pokreće (Slika 3.38b).



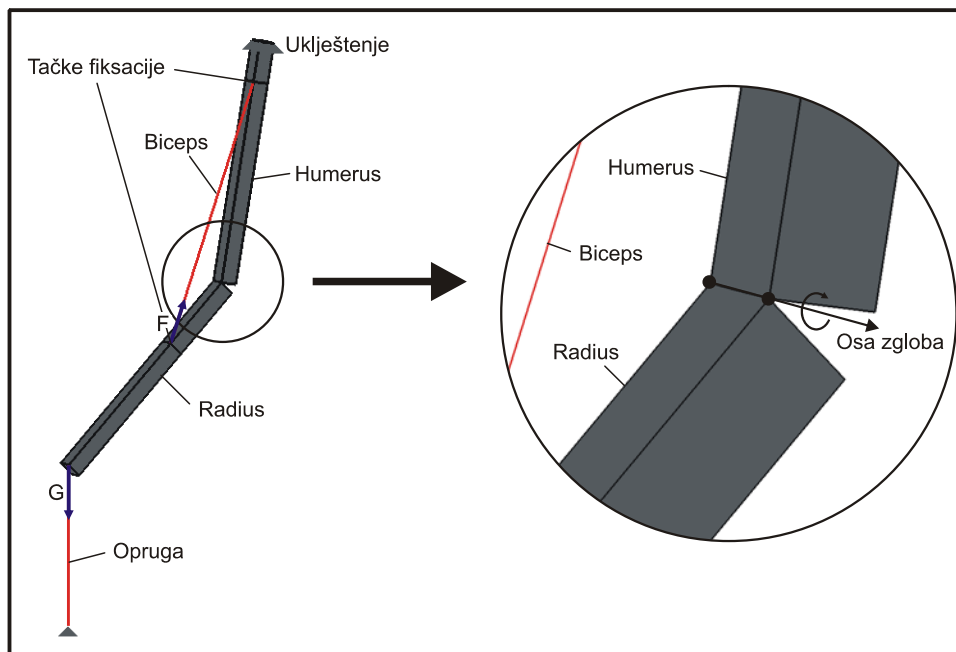
Slika 3.38 Anatomija ljudske ruke

Na Slici 3.39 shematski je prikazano funkcionisanje ljudske ruke. Na distalnom delu humerusa nalazi se zglob lakta na koji je vezan radius. Biceps je svojim proksimalnim krajem vezan za skapulu, ali se pri posmatranju pokreta u laktu može smatrati da je vezan za glavu humerusa. Distalni kraj bicepsa je vezan za radius na rastojanju r_m od ose rotacije. U nastavku radiusa i ulne se nalazi šaka koja može biti opterećena konstantnom ili promenljivom silom.



Slika 3.39 Funkcionalni model ljudske ruke

Model konačnih elemenata ekvivalentan modelu na Slici 3.39 prikazan je na Slici 3.40, sa jedinom razlikom što je konstantno opterećenje tega zamenjeno oprugom čija je sila proporcionalna njenom izduženju.



Slika 3.40 Ljudska ruka modelirana konačnim elementima

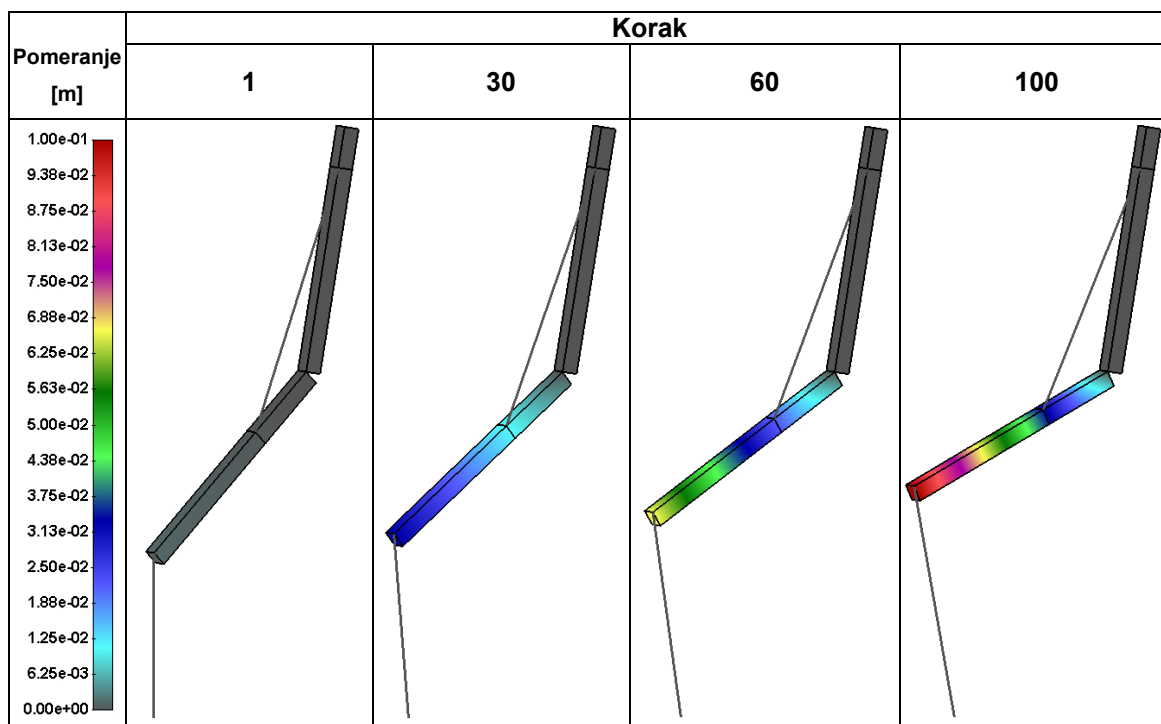
U modelu konačnih elemenata kosti su predstavljene jednim ili više 8-čvornih 3D elemenata. U slučaju postojanja tačaka vezivanja tetiva za kost, kost obavezno mora biti izdvojena na više elemenata, tako da se novodobijeni čvorovi mogu iskoristiti za vezivanje elemenata kojima su predstavljeni mišići.

U slučaju modeliranja mišićno-skeletnih sistema, mišići mogu biti predstavljeni kao trodimenzionalni (8-čvorni 3D elementi) ili, radi pojednostavljenja modela, kao linijski jednodimenzionalni elementi (štapovi). U oba slučaja materijalne karakteristike elemenata su definisane Hilovim modelom mišića. U slučaju da je mišić modeliran kao trodimenzionalni, njegova veza sa kostima ostvaruje se preko 1D linearnih elastičnih elemenata koji predstavljaju tetive.

Što se tiče modeliranja zglobova, u ovom radu predstavljeno je modeliranje samo zglobova koji omogućavaju rotaciju oko jedne ose. Ovakvi zglobovi su modelirani tako što su dva 3D elementa vezana u tačno dva čvora, kao što je to prikazano na Slici 3.40. Na ovaj način, zajednički čvorovi ne dozvoljavaju relativno pomeranje kosti podlaktka u

odnosu na nadlakt, ali omogućavaju slobodnu rotaciju oko ose koja je određena sa ova dva čvora. Kako bi bilo moguće modeliranje i ostalih tipova zglobova, budući rad u ovoj oblasti bi morao kao zadatak da ima razvoj posebnih tipova elemenata koji bi omogućili postojanje proizvoljnih ose rotacije.

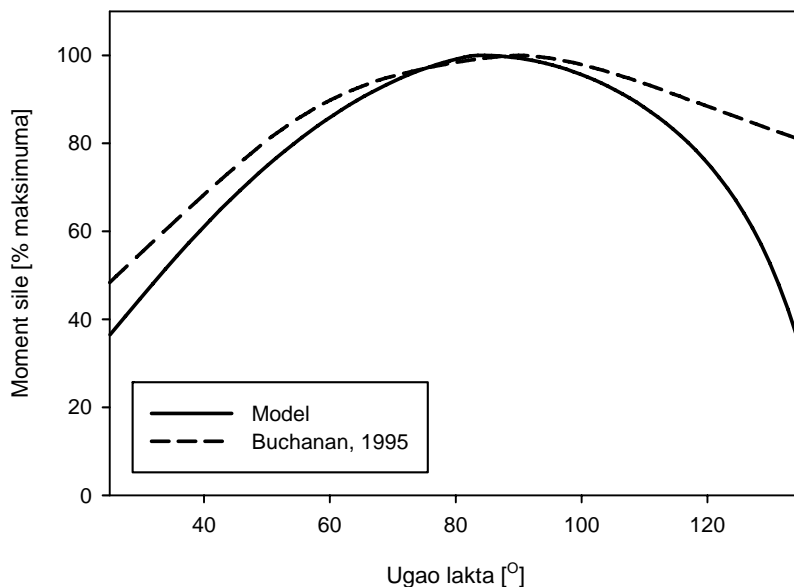
Korišćenjem predloženog modela, posle proračuna dobijeni su rezultati prikazani na Slici 3.41. Različitim bojama su predstavljena pomeranja čije veličine su date u paleti.



Slika 3.41 Rezultati proračuna ljudske ruke metodom konačnih elemenata

Da bi se odredila zavisnost momenta sile u zglobu lakta, iz modela je uklonjena opruga, a zatim je na kraju podlakta zadato postepeno pomeranje do pozicije u kojoj podlakt i nadlakt zaklapaju ugao od 135 stepeni, pri čemu je aktivacija mišića povećavana do maksimuma. Ugao lakta je zatim postepeno smanjivan do vrednosti od 25 stepeni, pri čemu je aktivacija održavana na maksimumu. Sve vreme smanjivanja ugla merena je sila na kraju podlakta iz koje je jednostavnom transformacijom dobijen i moment sile u zglobu lakta. Poređenje zavisnosti momenta sile od ugla lakta dobijene korišćenjem predloženog modela sa eksperimentalnim rezultatima iz literature (Buchanan, 1995), prikazani su na Slici 3.42. Moment dostiže svoju maksimalnu vrednost pri uglovima od oko 90 stepeni, dok sa udaljavanjem od ove vrednosti moment drastično opada. Ovakav oblik krive moment-ugao je razumljiv, s obzirom da biceps, u skladu sa Gordonovom

krivom (Slika 2.5), maksimalnu silu generiše u svom neistegnutom stanju, odnosno pri uglovima lakta između 90 i 110 stepeni. Na oblik krive dodatno utiče i promena kraka sile, koja takođe zavisi od ugla.



Slika 3.42 Zavisnost momenta sile od ugla zgloba lakta

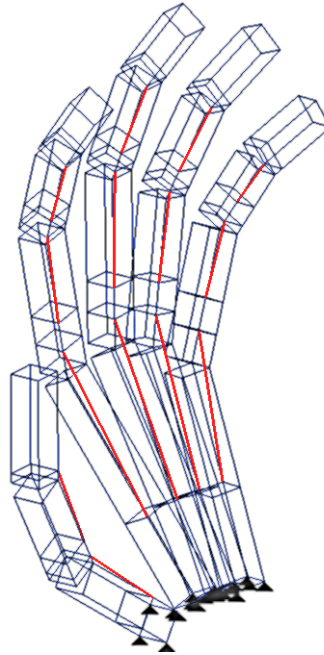
Sa dijagrama je moguće videti da model daje zadovoljavajuće poklapanje sa eksperimentalnim rezultatima za uglove od 30° do 110°. Veća odstupanja na krajevima intervala su posledica činjenice da je u modelu razmatran samo mišić *biceps brachii*, iako u stvarnosti postoji više fleksora koji izazivaju savijanje lakta. Svaki od ovih mišića ima različite opsege u kojima generiše maksimalnu silu, tako da kompenzuje slabljenje sile u drugim mišićima usled promene njihove dužine i promene kraka sile kojom deluju na podlakt.

Mišićno-skeletni sistem ljudske šake

Poseban izazov u oblasti modeliranja mišićno-skeletnih sistema predstavlja modeliranje sistema ljudske šake. Ljudska šaka predstavlja veoma kompleksan sistem, koji se sastoji od nekoliko desetina kostiju i mišića.

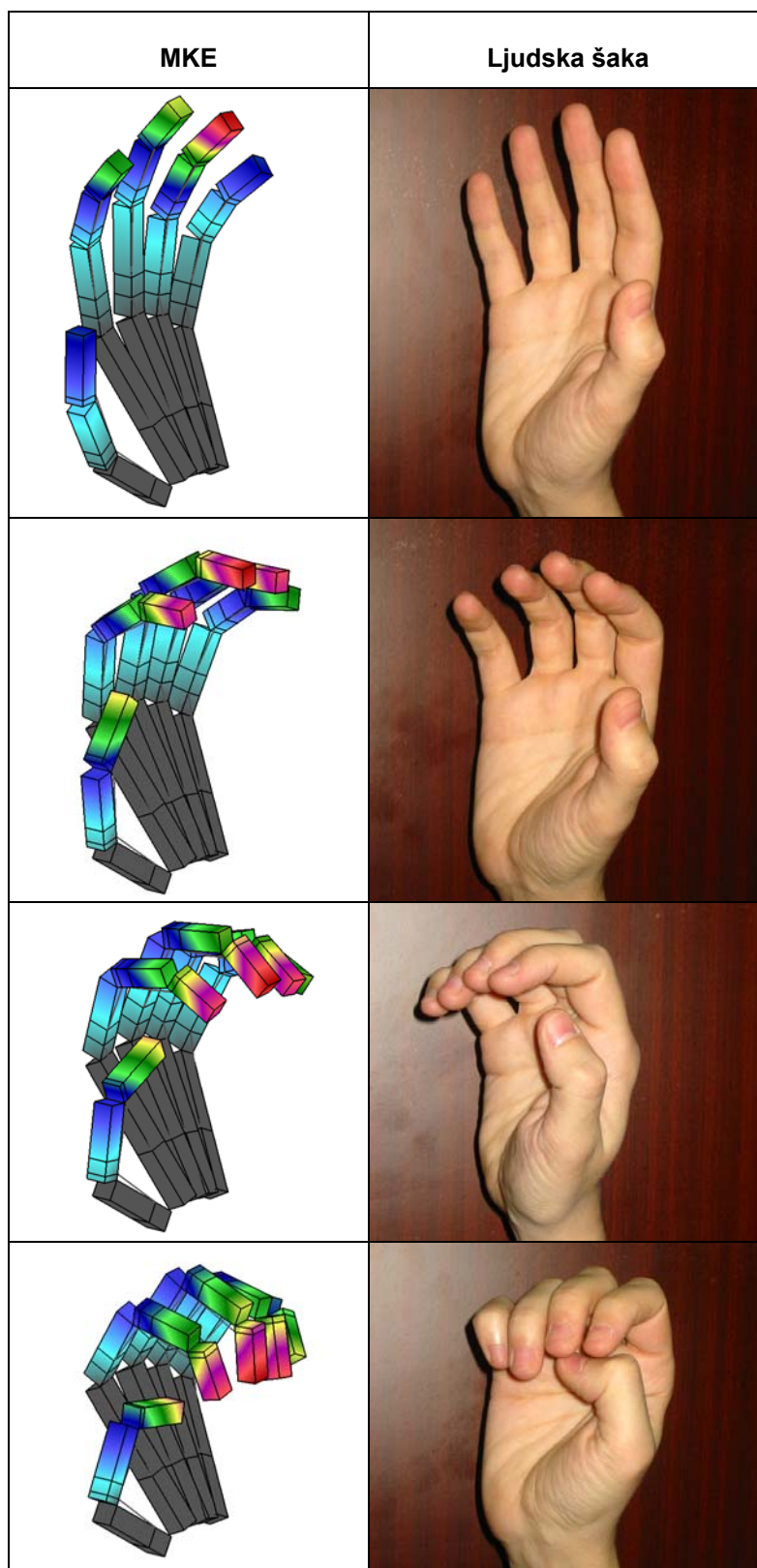
Model ljudske šake, modeliran metodom konačnih elemenata se sastoji od 19 kostiju (Slika 3.43 - plavo) i 14 mišića (Slika 3.43 - crveno). Kao i u slučaju modeliranja ljudske ruke, kosti su modelirane 8-čvornim 3D elementima velike krutosti, dok su mišići modelirani 1D elementima čije su materijalne karakteristike definisane Hilovim modelom

mišića. Svaka kost je modelirana pomoću više 3D elemenata kako bi se obezbedili dodatni čvorovi za vezivanje mišića. Kostí korena šake su čvrsto pričvršćene, dok su kosti prstiju vezane lančano jedna na drugu. Svake dve susedne kosti u okviru jednog prsta povezane su mišićem koji omogućava rotaciju oko zgloba koji ih povezuje.



Slika 3.43 Ljudska šaka modelirana konačnim elementima

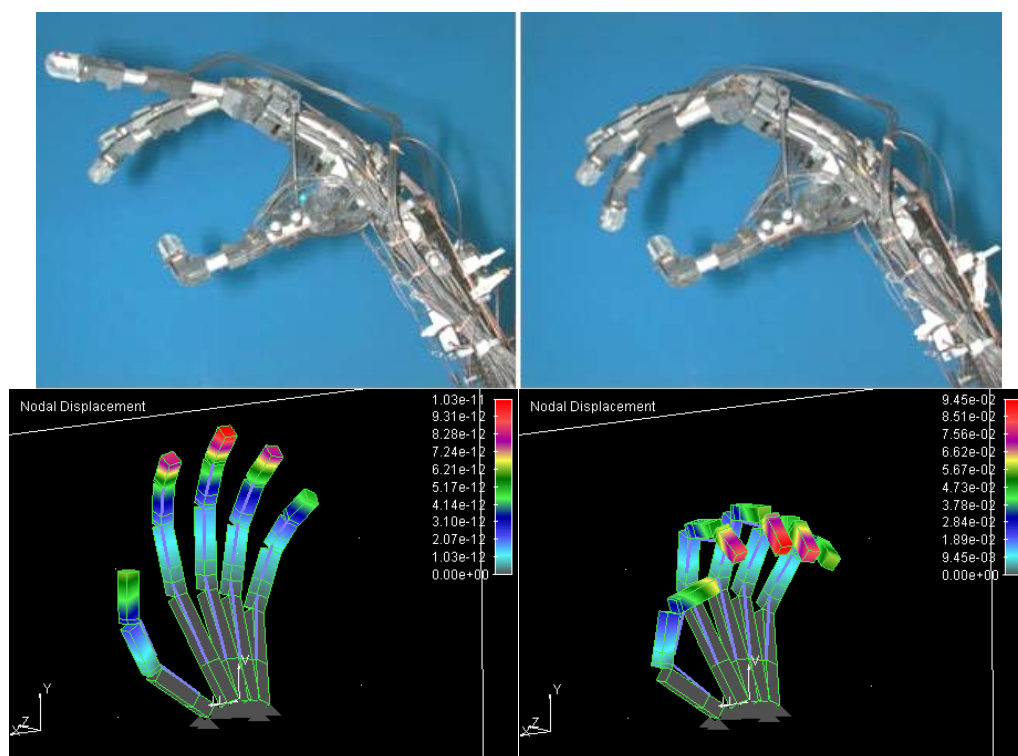
Korišćenjem ovakvog modela dobijeni su realistični pokreti prstiju šake. Poređenje rezultata dobijenih proračunom sa realnom šakom prikazano je na Slici 3.44.



Slika 3.44 Poređenje rezultata proračuna sa ponašanjem realne ljudske šake

Primena predloženog koncepta modeliranja mišićno skeletnih sistema u drugim oblastima

Pored prikazanog modeliranja mišićno skeletnih sistema, predloženi koncept može biti primenjen i u drugim oblastima, kao što su robotika, izučavanje jonskih polimer-metal kompozita (IPMC), itd. Mogućnost modeliranja ljudske šake, kao veoma kompleksnog sistema, pokazuje da je korišćenjem sličnih metoda moguće modeliranje i složenih robotskih sistema. Jonski polimer-metal kompoziti predstavljaju novi tip elektroaktivnih polimera (EAP) koji menjaju oblik i veličini pri stimulaciji malim naponima ili strujama. Kao takvi, oni mogu biti iskorišćeni kao pokretači u različitim mehanizmima. Zbog njihovih osobina da se kontrakuju pri električnom impulsu, vrlo često ih nazivaju i "veštački mišići". Imajući u vidu ovu činjenicu, budući rad u ovoj oblasti bi mogao biti posvećen primeni modela elektroaktivnih polimera umesto modela mišića, kako bi se simulirao rad veštačkih ljudskih organa, kao što je šaka (Slika 3.45)



Slika 3.45 Veštačka šaka od elektroaktivnih polimera: Gornje dve slike predstavljaju prototip koji je proizvela Jet Propulsion Laboratory, NASA; Donje dve slike predstavljaju simulaciju korišćenjem aktivnih konačnih elemenata¹.

¹ Projekat: Modelling and Fabrication of Optical Fibre Embedded Ionic Polymer-Metal Composites for Intelligent Product Design, Principal Investigator: CY Tang, ISE, Hong Kong Polytechnic University.

4. Zaključna razmatranja

Mišići su organi čija je osnovna uloga da, stimulisani od strane voljnih nerava, proizvode silu i kretanje. Svi mišići se dele na skeletne (poprečno-prugaste), glatke i srčani mišić. U ovom radu razmatrani su samo skeletni mišići.

Struktura skeletnih mišića je veoma složena i organizovana je kao splet različitih elemenata. Osnovna kontraktilna jedinica mišića, sarkomera, sastoji se od tankih i debelih proteinskih lanaca, aktina i miozina, čija međusobno dejstvo objašnjava sposobnost mišića da se kontrakuje. Osnovna funkcionalna jedinica je sastavljena od α motoneurona i mišićnih vlakana koje on inerviše i naziva se *motorna jedinica*. Sve motorne jedinice se grubo mogu podeliti na brze i spore, koje se međusobno razlikuju morfološki, po načinu funkcionisanja, brzini i intenzitetu kontrakcije, kao i po otpornosti na zamor. Procentualno učešće pojedinih tipova vlakana i njihov raspored može značajno da varira u zavisnosti od vrste mišića i njegove funkcije u organizmu.

Tokom svih aktivnosti koje se obaljaju tokom dužeg vremena dolazi do redukovanja sile u mišićima usled zamora. Međutim, zamor mišića je kompleksan fiziološki fenomen, a mehanizmi koji do njega dovode još uvek nisu dovoljno poznati. Voljna kontrakcija zavisi od serije događaja, počev od adekvatne ulazne pobude u motornim centrima, pa sve do energetske zavisne interakcije aktina i miozina. Poremećaj u bilo kojoj kariki ovog lanca može rezultovati smanjenjem performansi, što predstavlja zamor mišića. Nivo zamora je moguće meriti praćenjem promene različitih veličina, kao što su maksimalna sila, snaga, brzina kontrakcije itd. Takođe, pogodnim dizajnom eksperimenta moguće je locirati mesta nastanka zamora.

Mišić je materijalno telo koje se pokreće i deformiše pod spoljašnjim i unutrašnjim mehaničkim dejstvima, tako da se za opisivanje njegovog ponašanja mogu primeniti osnovni mehanički principi kretanja deformabilnih tela. S obzirom na složenost geometrije i materijalnih karakteristika mišića, ovakve probleme je nemoguće rešavati analitičkim metodama, već je potrebno koristiti numeričke metode kao što je Metod konačnih elemenata.

U ovom radu dati su osnovni principi rešavanja problema mehanike solida Metodom konačnih elemenata, sa naglaskom na modeliranje struktura koje su izložene velikim pomeranjima i deformacijama, što je to slučaj sa većinom živih tkiva kao što su mišići.

Zahvaljujući svojoj veoma složenoj strukturi, mišići pokazuju izuzetno nelinearne karakteristike, pa je zato sa posebnom pažnjom obrađen koncept rešavanja nelinearnih problema inkrementalno-iterativnim postupkom.

Kao osnova za matematičko modeliranje ponašanja mišića uzeta je Hilova jednačina kojom je opisana relacija između brzine i sile mišića u tetanizovanom stanju. Maksimalni tetanički napon, a samim tim i maksimalna sila koju mišić može da razvije, strogo zavisi od stepena izduženja mišića i definisan je Gordonovom krivom. Hilov trokomponentni model mišića je fenomenološki funkcionalni model koji se sastoji od kontraktilnog, serijskog elastičnog i paralelnog elastičnog elementa. Ponašanje kontraktilnog elementa je opisano Hilovom jednačinom i Gordonovom krivom, dok je ponašanje serijskog elementa viskoelastičnog karaktera.

S obzirom da Hilov model i većina drugih modela opisuju ponašanje samo jedne sarkomere, oni ne mogu biti adekvatno iskorišćeni za modeliranje mišića koji sadrže više različitih tipova mišićnih vlakana. Kako bi se prevazišao nedostatak dosadašnjih modela, u ovom radu predložen je viševlakanski (*multifiber*) model zasnovan na Hilovom trokomponentnom modelu. Ovaj kompozitni model u stvari predstavlja snop različitih mišićnih vlakana proizvoljnih karakteristika, koji su u određenim procentima raspoređeni unutar zapremine mišića. Ponašanje mišića kao celine je rezultat sumacije pojedinih tipova vlakana koji mogu imati različite aktivacije, maksimalne sile, brzine odziva, brzine zamaranja itd. Pored opisa viševlakanskog modela mišića, u radu je detaljno prikazan postupak integracije napona i računanja tangentne matrice za ovaj materijalni model, kao i njegova ugradnja u program za proračun metodom konačnih elemenata PAK. Imajući u vidu da su udeli pojedinih tipova vlakana unutar zapremine mišića najčešće neuniformni, u program je ugrađena i *Generalizovana izoparametarska formulacija elemenata za funkcionalno promenljive materijale*, koja omogućava definisanje procenta određenog tipa vlakna u svim čvornim tačkama i njihovu interpolaciju unutar elemenata.

Postupak integracije napona je opšti i primenjiv na 2D i 3D analizu, pri čemu su pretpostavljene velike deformacije i pomeranja. Zahvaljujući tome omogućeno je modeliranje proizvoljnih promena oblika mišića tokom određenog vremenskog perioda. S obzirom da je integracija napona svedena na rešavanje sistema nezavisnih algebarskih jednačina, odnosno na traženje nula nezavisnih monotonih funkcija, razvijena numerička procedura je numerički efikasna i pouzdana.

Većina postojećih modela mišića razmatra zamor mišića samo pod određenim uslovima kao što su konstantna aktivacija, ciklična aktivacija, konstantna sila, konstantna snaga itd. Modeli zamora mišića pod proizvoljnim uslovima aktivacije i opterećenja su veoma ograničeni. U ovom radu, na bazi osnovnog Hilovog modela i proširenog, viševlakanskog modela mišića, razvijen je novi model koji uključuje i zamor mišića, kako bi se predvideli efekti zamora na relaciju sila-vreme skeletnog mišića. Uticaj zamora, određen krivama zamora i relaksacije, inkorporiran je u Hilov model mišića i tako ugrađen u program za rešavanje metodom konačnih elemenata, PAK.

Kako bi bilo moguće verifikovati primenjivost prethodno predloženih modela, izvršena je serija eksperimenata na Institutu za fiziologiju Medicinskog fakulteta u Kragujevcu i na Politehničkom univerzitetu u Hong Kongu. Za verifikaciju su, takođe, korišćeni i rezultati eksperimentalnih ispitivanja objavljeni u literaturi. Na primerima biceps i triceps mišića čoveka, kao i na primeru gastrocnemius mišića žabe, pokazano je da predloženi modeli mišića i mišićnog zamora kvantitativno i kvalitativno, sa zadovoljavajućom tačnošću opisuju ponašanje realnih mišića. Pored ponašanja pojedinačnih mišića, predloženi modeli se mogu koristiti i za modeliranje ponašanja mišićno-skeletnih sistema, što je i pokazano na primeru ljudske ruke i veoma složenom sistemu ljudske šake.

Predloženi model pretpostavlja poznat procenat različitih tipova vlakana u pojedinim tačkama mišića. Prostorni raspored procentualnog učešća vlakana može biti proizvoljna funkcija (u ovom radu je korišćena linearna funkcija). Takođe, prostorni raspored može biti eksperimentalno određen ili dat nekim stohastičkim modelom. Prikazani pristup je primenjiv na kompleksne realne mišićne structure, različite grupe mišića, proizvoljno orijentisane u prostoru, sa spoljašnjim opterećenjem i unutrašnjom aktivacijom.

Ovako definisani modeli mogu poslužiti kao veoma moćan alat u projektovanju medicinske i sportske opreme, planiranju treninga i analizi i dizajnu vežbi. Kompjuterske simulacije zasnovane na predloženim modelima mogu u velikoj meri preduprediti povrede na radu i u značajnoj meri smanjiti troškove koje trpe pojedinac i zajednica.

Pravci budućeg razvoja bi trebalo da budu usmereni, pre svega, ka rešavanju nedostataka predloženih modela, a zatim i ka njihovom daljem usavršavanju kako bi se omogućilo što realističnije modeliranje mišića i mišićno-skeletnih struktura. Jedna od najvažnijih nedostataka viševlakanskog modela koji bi trebalo otkloniti je nemogućnost modeliranja

vremenskog pomaka u aktivaciji vlakana istog tipa. S obzirom da je reč o veoma velikom broju vlakana u okviru jednog mišića, neophodno je primeniti neku od stohastičkih metoda. Na takav način otklonila bi se oštra granica u brzini odziva različitih tipova vlakana koja postoji u predloženom modelu, iako je taj prelaz u prirodi postepen. U domenu modeliranja mišićno skeletnih sistema neophodno je razviti posebne tipove konačnih elemenata kojima bi bila moguća simulacija funkcionisanja i ostalih tipova zglobova osim cilindričnih.

U okviru budućih istraživanja u oblasti modeliranja mišića posebno interesantno bi bilo rasvetliti značaj kontakta između mišića i kostiju, kao i međusobnog kontakta susednih mišića. U ovu svrhu moguće je koristiti postojeće metode rešavanja kontaktnih problema, ali je svakako potrebno razviti i nove metode koje bi bile prilagođene ovoj vrsti problema. Razvoj novih tipova elemenata bi omogućio modeliranje zglobova sa različitim stepenima slobode koji bi vernije opisali realne mišićno-skeletne sisteme, a modeli veštačkih mišića bazirani na elektroaktivnim polimerima bi ovom konceptu dali na opštosti i omogućili simuliranje robotskih sistema. Takođe, od velikog značaja bi mogla biti i istraživanja ponašanja mišića bestežinskom stanju, čiji bi rezultati mogli biti korišćeni u budućim svemirskim programima. S obzirom na visoku cenu svemirskih istraživanja, mogućnost kompjuterskog modeliranja mišića u bestežinskom stanju bi značajno uticala na smanjene troškova.

Imajući u vidu postavljene ciljeve, sa sigurnošću se može reći da su rezultati ovog istraživanja nadmašili prvobitne planove autora. Tokom rada na modelu zamora mišića, iz dana u dan je bilo potrebno rešavati probleme koji su se javljali. Fenomen zamora, daleko kompleksniji nego što je to bilo očekivano, zahtevao je stalno pomeranje granica onoga što je trebalo uraditi, a nova saznanja do kojih je autor vremenom dolazio nametala su sve zahtevnije i zahtevnije zadatke. Iako se sfera znanja sve više širila, a veličina neznanja postajala sve očiglednija, ostala je vera da je ovim radom ukraden bar jedan delić od nepoznatog.

5. Literatura

- [1] Abraham LD and Loeb GE. The distal hindlimb musculature of the cat. *Exp. Brain Res.*, 1985; 58: 580-593.
- [2] Amis AA, Dowson D, Wright V. Muscle strength and musculo-skeletal geometry of the upper limb. *Eng. Med.* 1979, 8(1): 41-48.
- [3] Argyris JH and Kelsley S. Energy Theorems and Structural Analysis. *Aircraft Engineering*. 1954; 26.
- [4] Ariano MA, Armstrong RB, Edgerton VR. Hindlimb muscle fiber populations of five mammals. *J. Histochem. Cytochem.*, 1973; 21(1): 51-55.
- [5] Aubier E, Farkas G, DeTroyer A, Mozzes R, Roussos C. Detection of diaphragmatic fatigue in man by phrenic stimulations. *Journal of Applied Physiology: Respiratory, Environmental and Exercise Physiology*, 1981.
- [6] Baildon RWA and Chapman AE. A new approach to the human muscle model. *J. Biomechanics*, 1983; 16: 803-809.
- [7] Baker AJ, Kostov KG, Miller RG, Weiner MW. Slow force recovery after long-duration exercise: metabolic and activation factors in muscle fatigue. *J. Appl. Physiol.* 1993; 74(5): 2294-2300.
- [8] Barclay CJ. A weakly coupled version of the Huxley crossbridge model can simulate energetic of amphibian and mammalian skeletal muscle. *Journal of Muscle Research and Cell Motility*. 1999; 20: 163-176.
- [9] Bathe KJ, *Finite element Procedures*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [10] Beelen A and Sargeant AJ. Effect of fatigue on maximal power output at different contraction velocities in humans. *J. Appl. Physiol.*, 1991; 71: 2332-2337.
- [11] Bellamare F. and Bigland-Ritchie B. Central components of diaphragmatic fatigue assessed from bilateral phrenic nerve stimulation. *J. Appl. Physiol.*, 1987; 62: 1307-1316.
- [12] Benedict JV, Walker LB, Harris EH. Stress-strain characteristics and tensile strength of unembalmed human tendon. *J. Biomech.* 1968; 1: 53-63.
- [13] Bergström J, Hermansen L, Hultman E, Saltin B. Diet, muscle glycogen and physical performance. *Acta Physiologica Scandinavica*, 1967; 71: 140-150.
- [14] Bigland-Ritchie B. EMG/Force Relations and Fatigue of Human Voluntary Contractions. 1981.
- [15] Bigland-Ritchie B, Cafarelli E, Vøllestad NK. Fatigue of submaximal static contractions. *Acta Physiol. Scand.*, 1986; 128: 137-148.
- [16] Bigland-Ritchie B, Furbush F, Woods JJ. Fatigue of intermittent submaximal voluntary contractions: central and peripheral factors. *J. Appl. Physiol.*, 1986; 61: 421-429.
- [17] Bigland-Ritchie B, Johansson R, Lippold OCJ, Smith S, Woods JJ. Changes in motoneurone firing rates during sustained maximal contractions. *J. Physiol. Lond.*, 1983; 340: 335-346.

- [18] Blix M. Die Lange und die Spannung des Muskels. *Scand. Arch. Physiol.* 1891; 3: 295-318.
- [19] Blix M. Die Lange und die Spannung des Muskels. *Scand. Arch. Physiol.* 1893; 4: 399-409.
- [20] Blix M. Die Lange und die Spannung des Muskels. *Scand. Arch. Physiol.* 1894; 5: 149-206.
- [21] Bobet J and Stein BB. A simple model of force generation by skeletal muscle during dynamic isometric contractions. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 1998; 45: 1010–1016.
- [22] Boom HBK, Mulder AJ, Veltink PH. Fatigue during functional neuromuscular stimulation. *Prog. Brain Res.* 1993; 97: 409-418.
- [23] Buchanan TS. Evidence that maximum muscle stress is not a constant: differences in specific tension in elbow flexors and extensors. *Med. Eng. Phys* 1995; 17(7): 529-536.
- [24] Burke RE, Levine DN, Saleman M, Tsairis P. Motor units in cat soleus muscle: physiological, histochemical and morphological characteristics. *J. Physiol. (London)*, 1974; 238: 503-514.
- [25] Burke RE and Tsairis P. Anatomy and innervation ratios in motor units of cat gastrocnemius. *J. Physiol. (London)*, 1973; 234: 749-765.
- [26] Chasiotis D, Bergstrom M, Hultman E. ATP utilization and force during intermittent and continuous muscle contractions. *J. Appl. Physiol.* 1987; 63(1): 167-174.
- [27] Cheatham ME, Boobis LH, Brooks S, Williams C. Human muscle metabolism during sprint running, *J. Appl. Physiol.*, 1986; 61: 54-60.
- [28] Chen DT and Zeltzer D. Pump it up: Computer animation of a biomechanically based model of muscle using the finite element method. *Computer Graphics*, 1992; 26: 89-98.
- [29] Chesler NC and Durfee WK. Surface EMG as a fatigue indicator during FES-induced isometric muscle contractions. *J. Electromyogr. Kinesiol.* 1997; 7: 27–37.
- [30] Clarke DH. Strength recovery from static and dynamic muscular fatigue. University of California, 1962.
- [31] Clough RW. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proceedings, Second ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA*, 1960; 345-378.
- [32] Coggshall JC and Bekey GA. A Stochastic Model of Skeletal Muscle Based on Motor Unit Properties. *Mathematical Biosciences*, 1970; 7: 405-419.
- [33] Deluca C. Myoelectrical manifestations of localized muscular fatigue in human. *CRC Crit. Rev. Biomed. Eng.* 1984; 11: 251–279.
- [34] Edwards RG, Lippold OCJ. The relation between force and integrated electrical activity in fatigued muscle. *Journal of Physiology (London)*, 1956; 132: 677-681.
- [35] Edwards RHT, Hill DK, Jones DA. Effect of fatigue on the time course of relaxation from isometric contractions of skeletal muscle in man. *Journal of Physiology (London)*, 1972; 227: 26P-27P.

- [36] Edwards RHT, Hill DK, Jones DA, Merton PA. Metabolic changes associated with the slowing of relaxation in fatigued mouse muscle. *Journal of Physiology (London)*, 1975; 251: 287-301.
- [37] Edwards RHT, Hill DK, Jones DA, Merton PA. Fatigue of long duration in human skeletal muscle after exercise. *Journal of Physiology (London)*, 1977; 272: 769-778.
- [38] Enoka RM and Stuart DG. Neurobiology of muscle fatigue. *J. Appl. Physiol.* 1992; 72: 1631-1648.
- [39] Fitch S and McComas A. Influence of human muscle length on fatigue. *J. Physiol. Lond.*, 1985; 362: 205-213.
- [40] Forcinito M, Epstein M, Herzog W. Theoretical considerations on myofibrils stiffness. *Biophys. J.*, 1997; 72: 1278-1286.
- [41] Froes MMQ, Kristmundsdottir F, Mahon M, Cumming WJK. Muscle morphometry in motor neuron disease. *Neuropathol. Appl. Neurobiol.* 1987; 13: 405– 419.
- [42] Funderburk CF, Hipskind SG, Welton RC, Lind AR. Development of and recovery from fatigue induced by static effort at various tensions. *Journal of applied physiology.* 1974; 37(3): 392-396.
- [43] Fung YC, *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag 1993.
- [44] Gandevia SC, Enoka RM, McComas AJ, Stuart DG, Thomas CK. Neurobiology of muscle fatigue. In Gandevia S, Enoka RM, McComas AJ, Stuart DG, Thomas CK (Eds.), *Fatigue—Neural and Muscular Mechanisms*, Plenum Press, New York, 1995, pp. 515–525.
- [45] Giat Y, Mizrahi Y, Levy M. A model of fatigue and recovery in paraplegic's quadriceps muscle subjected to intermittent FES. *J. Biomech. Eng.* 1996; 118: 357-366.
- [46] Gordon AM, Huxley AF, Julian FJ. The variation in isometric tension with sarcomere length in vertebrate muscle fibers. *J. Physiol. (London)*, 1966; 184: 170-192.
- [47] Guyton AC. *Medical Physiology*. Elsevier 2005.
- [48] Hannaford B. A nonlinear model of the phasic dynamics of muscle activation. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 1990; 37: 1067–1075.
- [49] Hart FX, Berner NJ, McMillen RL. Modelling the anisotropic electrical properties of skeletal muscle. *Physics in Medicine and Biology*, 1999; 44: 413-421.
- [50] Hawkins DA and Hull ML. Muscle force as affected by fatigue: mathematical model and experimental verification. *J. Biomech.* 1993; 26: 1117-1128.
- [51] Henneman E and Olson CB. Relations between structure and function in the design of skeletal muscles. *J. Neurophysiol.*, 1965; 28: 581-598.
- [52] Herzog W, Leonard TR, Guimarnaes ACS. Forces in gastrocnemius, soleus, and plantaris tendons of the freely moving cat. *J. Biomech.*, 1993; 26: 945-953.
- [53] Hill AV. The maximum work and mechanical efficiency of human muscles, and their most economical speed. *J. Physiol.*, 1922; 56: 19-41.

- [54] Hill AV. The heat of shortening and the dynamic constants of muscle. *Proc. R Soc. London*, 1938; 126B: 136-195.
- [55] Hill AV. The dynamic constants of human muscle. *Proc. R Soc. London*, 1940; 128B: 263-274.
- [56] Hoffer JA, Caputi AA, Pose IE, Griffiths RI. Roles of muscle activity and load on the relationship between muscle spindle length and whole muscle length in the freely walking cat. *Progress in Brain Research*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1989; pp. 75-85.
- [57] Huxley AF. Muscle structure and theories of contraction. *Prog. Biophys. Biophys. Chem.*, 1957; 7: 255-318.
- [58] Huxley AF and Niedergerke R. Structural changes in muscle during contraction. *Nature*. 1954; 173: 971-973.
- [59] Huxley HE and Hanson J. Changes in the cross-striations of muscle during contraction and stretch and their structural interpretation. *Nature*. 1954; 173: 973-976.
- [60] Ianuzzo CD, Arbour F, Jamnik V. A laboratory experiment on muscular metabolism and fatigue using the isolated frog muscle preparation. *Journal of Biological Education*. 1987; 21: 46-50.
- [61] Jones DA. Muscle fatigue due to changes beyond the neuromuscular junction. In Porter R and Whelan J (Eds.), *Human Muscle Fatigue: Physiological Mechanisms*. Turnbridge Wells: Pitman Medical Ltd., 1981.
- [62] Jones DA. High- and low-frequency fatigue revisited. *Acta Physiol. Scand.*, 1996; 156: 265-270.
- [63] Jones DA, Bigland-Ritchie B, Edwards RHT. Excitation frequency and muscle fatigue: mechanical responses during voluntary and stimulated contractions. *Exp. Neurol.*, 1979; 64: 401-413.
- [64] Karlsson J, Jodin B, Jacobs I, Kiser P. Relevance of muscle fiber type to fatigue of short intense, and prolonged exercise in man. In Porter R and Whelan J (Eds.), *Human Muscle Fatigue: Physiological Mechanisms*. Turnbridge Wells: Pitman Medical Ltd., 1981.
- [65] Kim JH, Paulino GH. Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *ASME Journal of Applied Mechanics* 2002; 69: 502-514.
- [66] Kojic M and Bathe KJ. *Inelastic Analysis of Solids and Structures*. Springer-Verlag, 2005.
- [67] Kojic M, Mijailovic S, Zdravkovic N. Modelling of muscle behaviour by the finite element method using Hill's three-element model. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1998; 43: 941-953.
- [68] Kojic M, Slavkovic R, Zivkovic M, Grujovic N, *PAK – Finite Element Program for Linear and Non-linear Structural Analysis, Mass and Heat Transfer and Biomechanics*, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kragujevac, 1996.
- [69] Kojić M, Slavković R, Zivković M, Grujović N. *Metod konačnih elemenata I - Linearna analiza*, Mašinski fakultet u Kragujevcu, 1998.

- [70] Kubo K, Kawakami Y, Fukunaga T. Influence of elastic properties of tendon structures on jump performance in humans. *J. Appl. Physiol.* 1999; 87(6): 2090–2096.
- [71] Lannergren J and Smith RS. Types of muscle fibres in toad skeletal muscle. *Acta Physiol. Scand.*, 1966; 68: 263–274.
- [72] Levin O and Mizrahi J. EMG and metabolite-based prediction of force in paralyzed quadriceps muscle under interrupted stimulation, *IEEE Trans. Rehab. Eng.* 1999; 7: 301-314.
- [73] Lexell J and Downham DY. The occurrence of fibre-type grouping in healthy human muscle: a quantitative study of cross-sections of whole vastus lateralis from men between 15 and 83 years. *Acta Neuropathol.* 1991; 81: 377–381.
- [74] Lippold OCJ, Redfearn JWT, Vuco L. The rhythmical activity of groups of motor units on the voluntary contraction of muscle. *J. Physiol.* 1957; 137: 473-487.
- [75] Liu JZ, Brown RW, Yue GH. A Dynamical Model of Muscle Activation, Fatigue, and Recovery. *Biophysical Journal*, 2002; 82: 2344–2359.
- [76] McCartney N, Heigenhauser GJF, Sargeant AJ, Jones NL. A constant-velocity cycle ergometer for the study of dynamic muscle function. *J. Appl. Physiol.*, 1983; 55: 212-217.
- [77] McKenzie DK and Gandevia SC. Recovery from fatigue of human diaphragm and limb muscles. *Respir. Physiol.*, 1991; 84: 49-60.
- [78] Mengshoel AM, Saugen E, Førre Ø, Vøllestad NK. Muscle fatigue in early fibromyalgia. *J. Rheumatol.*, 1995; 22: 143-150.
- [79] Mizrahi J, Levin O, Aviram A, Isakov E, Susak Z. Muscle fatigue in interrupted stimulation: effect of partial recovery on force and EMG dynamics. *J. Electromyogr. Kinesiol.* 1997; 7: 51-65.
- [80] Mizrahi J, Seelenfreund D, Isakov E, Susak Z. Predicted and measured muscle forces after recoveries of differing durations following fatigue in functional electrical stimulation. *Artif. Organs.* 1997; 21: 236-239.
- [81] Mosso A. *Die Ermüdung*. Leipzig: Hirzel, 1892, p. 333.
- [82] Neidhard-Doll AT, Phillips CA, Repperger DW, Reynolds DB. Biomimetic model of skeletal muscle isometric contraction: II. A phenomenological model of the skeletal muscle excitation–contraction coupling process. *Computers in Biology and Medicine*, 2004; 34: 323-344.
- [83] Newham DJ, McCarthy T, Turner J. Voluntary activation of human quadriceps during and after isokinetic exercise. *J. Appl. Physiol.*, 1991; 71: 2122-2126.
- [84] Oomens CWJ, Maenhout M, van Oijen CH, Drost MR, Baaijens FP. Finite element modelling of contracting skeletal muscle. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B - Biological Sciences*, 2003; 358: 1453-1460.
- [85] Pappas GP, Asakawa DS, Delp SL, Zajac FE, Drace JE. Nonuniform shortening in the biceps brachii during elbow flexion. *J. Appl. Physiol.* 2002; 92: 2381-2389.
- [86] Parmley WW and Sonnenblick EH. Series elasticity in hearth muscle. *Circulation Res.*, 1967; 20: 112-123.

- [87] Pell KM and Stanfield JW. Mechanical model of skeletal muscle. *Am. J. Phys. Med.*, 1972; 51: 23–28.
- [88] Perrine JJ and Edgerton VR. Muscle force-velocity and power-velocity relationships under isokinetic loading. *Med. Sci. Sports*, 1978; 10(3): 159-166.
- [89] Phillips CA, Repperger DW, Neidhard-Doll AT, Reynolds DB. Biomimetic model of skeletal muscle isometric contraction: I. an energetic–viscoelastic model for the skeletal muscle isometric force twitch. *Computers in Biology and Medicine*, 2004; 34(4): 307-328.
- [90] Plagenhoef S. Anatomical data for analyzing human motion. *Res. Q. Exercise Sport*. 1983; 54(2): 169-178.
- [91] Pollack GH. *Muscles and Molecules: Uncovering the Principles of Biological Motion*. Ebner and Sons, Seattle. 1990.
- [92] Rabischong E and Chavet P. Regression-based indices of fatigue in paraplegic's electrically stimulated quadriceps. *Med. Eng. Phys.* 1997; 19: 749-754.
- [93] Riener R and Quintern J. A physiologically based model of muscle activation verified by electrical stimulation. *J. Bioelectrochem. Bioenerget.* 1997; 43: 257-264.
- [94] Riener R, Quintern J, Schmidt G. Biomechanical model of the human knee evaluated by neuromuscular stimulation. *J. Biomech.* 1996; 29: 1157-1167.
- [95] Santare MH, Lambros J. Use of Graded Finite Elements to Model the Behavior of Nonhomogeneous Materials. *ASME J. Appl. Mech.* 2000; 67: 819–822.
- [96] Sargeant AJ, Hoinville E, Young A. Maximum leg force and power output during short-term dynamic exercise. *J. Appl. Physiol.*, 1981; 51: 1175-1182.
- [97] Schultz AB, Faulkner JA, Kadhiresan VA. A simple Hill element—nonlinear spring model of muscle contraction biomechanics. *J. Appl. Physiol.*, 1991; 70: 803–812.
- [98] Smith JL, Betts B, Edgerton VR, Zernicke RF. Rapid ankle extension during paw shakes: Selective recruitment of fast ankle extensors. *J. Neurophysiol.*, 1980; 43: 612-620.
- [99] Stephens JA and Taylor A. Fatigue of maintained voluntary muscle contraction in man. *Journal of Physiology (London)*, 1972; 220: 1-18.
- [100] Stojanovic B, Kojic M, Otasevic L. *Musculo - Software for modeling of muscles and musculo-skeletal systems*. Center for Scientific Research of SASA and University of Kragujevac, 2006.
- [101] Stojanovic B, Kojic M, Rosic M, Tsui CP, Tang CY. An Extension of Hill's Three-Component Model to Include Different Fiber Types in Finite Element Modeling of Muscle. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* In press.
- [102] Stojanovic B, Kojic M, Rosic M, Tsui CP, Tang CY. Finite element modeling of muscle using extended Hill's model with different fiber types. *Proceedings of First South-East European Conference on Computational Mechanics SEECM-06, June 28-30, 2006, Kragujevac, Serbia and Montenegro*. 2006; pp. 446-453.
- [103] Studer LM, Ruegg DG, Gabriel JP. A model for steady isometric muscle activation. *Biol. Cybern.*, 1999; 80: 339–355.

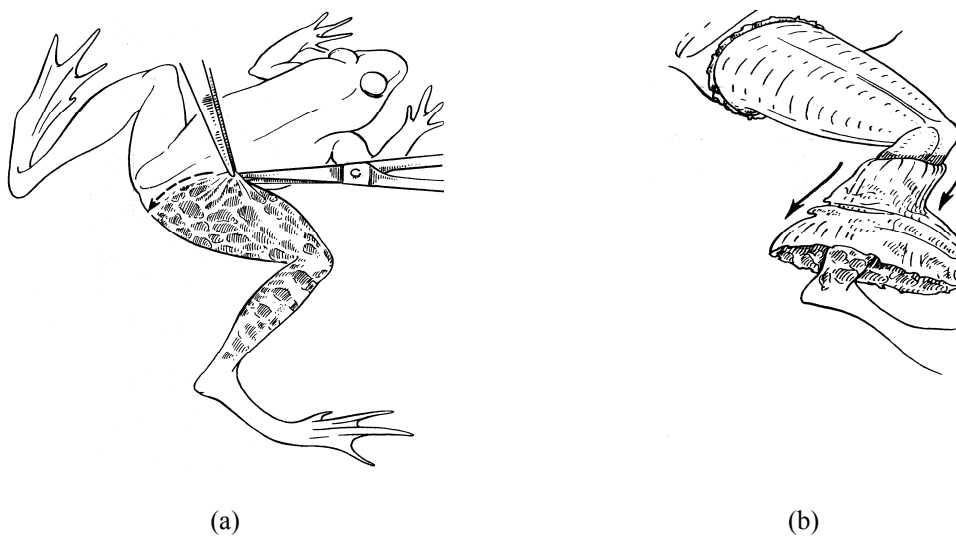
- [104] Tang CY, Stojanovic B, Tsui CP, Kojic M. Modeling of muscle fatigue using Hill's model. *Biomedical Materials and Engineering*. 2005; 15(5): 341-348.
- [105] Tang CY, Tsui CP, Stojanovic B, Kojic M. Finite Element Modelling of Skeletal Muscles Coupled with Fatigue. *International Journal of Mechanical Sciences*. In press.
- [106] Turner MJ, Clough RW, Martin HC, Topp LJ. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1956; 23: 805-823.
- [107] Vøllestad NK. Changes in activation, contractile speed and electrolyte balance during fatigue of sustained and repeated contractions. In Roussos, C. (Ed.), *The Thorax*, Marcel Dekker, New York, 1995; pp. 235-253.
- [108] Vigt M, Moller FB, Simonsen EB, Poulsen PD. The influence of tendon Young's modulus, dimensions and instantaneous moment arms on the efficiency of human movement. *J. Biomech.* 1995; 28: 281-291.
- [109] Vøllestad NK. Measurement of human muscle fatigue. *J. Neuroscience Methods*, 1997; 74: 219-227.
- [110] Vøllestad NK, Sejersted OM, Bahr R, Woods JJ, Bigland-Ritchie B. Motor drive and metabolic responses during repeated submaximal contractions in man. *J. Appl. Physiol.*, 1988; 64: 1421-1427.
- [111] Walmsley B, Hodgson JA, Burke RE. Forces produced by medial gastrocnemius and soleus muscles during locomotion in freely moving cats. *J. Neurophysiol.*, 1978; 41: 1203-1215.
- [112] Westerblad H, Duty S, Allen DG. Intracellular calcium concentration during low-frequency fatigue in isolated single fibers of mouse skeletal muscle. *J. Appl. Physiol.*, 1993; 75(1): 382-388.
- [113] Wexler AS, Ding J, Binder-Macleod SA. A mathematical model that predicts skeletal muscle force. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 1997; 44: 337-348.
- [114] Windhorst U and Boorman G. Overview: Potential role of segmental motor circuitry in muscle fatigue. In Gandevia SC, Enoka RM, McComas AJ, Stuart DG, Thomas CK. (Eds.), *Fatigue-Neural and Muscular Mechanisms*, Plenum Press, New York, 1995; pp. 241-258.
- [115] Witte RS, Dow DE, Olafsson R, Shi Y, O'Donnell M. High Resolution Ultrasound Imaging of Skeletal Muscle Dynamics and Effects of Fatigue. *Proceedings of the 2004 IEEE Ultrasonics Symposium 2004*; 764-767.
- [116] Woittiez RD, Huijing PA, Boom HBK, Rozendal RH. A three-dimensional muscle model: a quantified relation between form and function of skeletal muscles. *J. Morphol.*, 1984; 182: 95-113.
- [117] Woledge RC, Curtin NA and Homsher E. *Energetic Aspects of Muscle Contraction*. Academic Press, London, 1985.

6. Dodaci

6.1. **Priprema nervno-mišićnog preparata gastrocnemius mišića žabe - korak po korak**

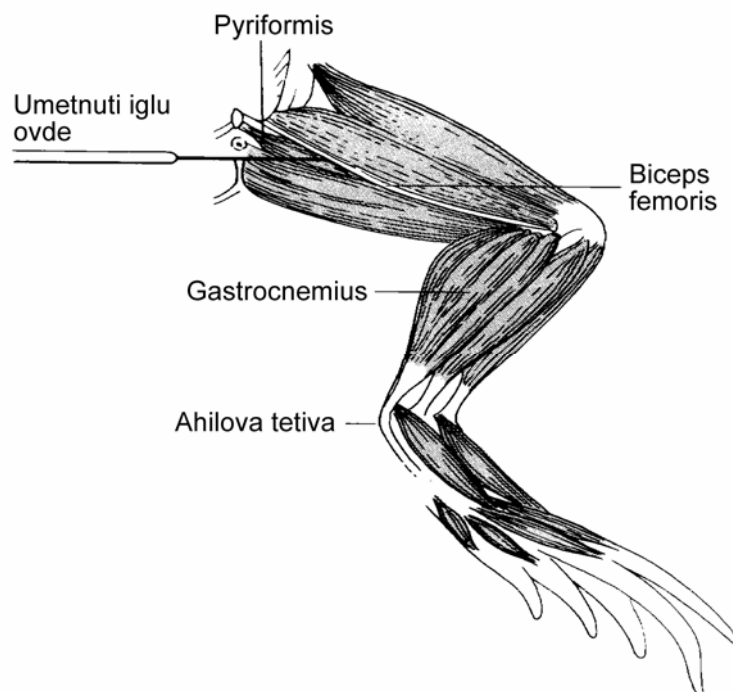
Najčešće korišćeni preparat za eksperimente na skeletnim mišićima je mišić gastrocnemius žabe. Iz tog razloga u nastavku ćemo navesti najvažnije korake u pripremi preparata za eksperiment.

- 1) Dvostruko *pitovati* žabu (eng. *pith* - ubiti povredom kičmene moždine). Postoji više načina kako se može izvesti dvostruko pitovanje. Prvo pitovanje se izvodi u cilju uništavanja mozga. Jedan od načina je da se makazama izvrši dekapitacija čime se potpuno odstranjuje gornji deo glave. Prvo pitovanje se takođe može izvesti tako što se jednom rukom žaba čvrsto drži, a zatim se kroz kožu sa zadnje strane vrata brzim pokretom zarije metalna igla u mozak. Metalna igla se zavrti u krug kako bi se uništio mozak. Pošto su sve više moždane funkcije uništene, ovakva žaba se naziva "jednom pitovana žaba". Posle toga igla se zariva u kičmenu moždinu i pomera gole-dole sve dok postoje trzaji nogu. Sada su i više moždane funkcije i refleksne funkcije uništene i takvu žabu nazivamo "dvostruko pitovana žaba". Igla mora biti dovoljno duga da može da se zarije do kraja kičmene moždine i da lako prodire u nju. Ukoliko prodiranje igle ide teško, igla je najverovatnije van kičmene moždine. Kao rezultat dvostrukog pitovanja žaba ne može da oseti bol.
- 2) Ukloniti kožu sa jedne noge tako što se prvo koža iseče što je više moguće oko butine, a zatim malo povrne kao što je prikazano na Slici 6.1a. Povrnuta koža se uhvati jednom rukom, a žaba drugom, posle čega se brzim pokretom koža kompletno svlači sa noge (Slika 6.1b).



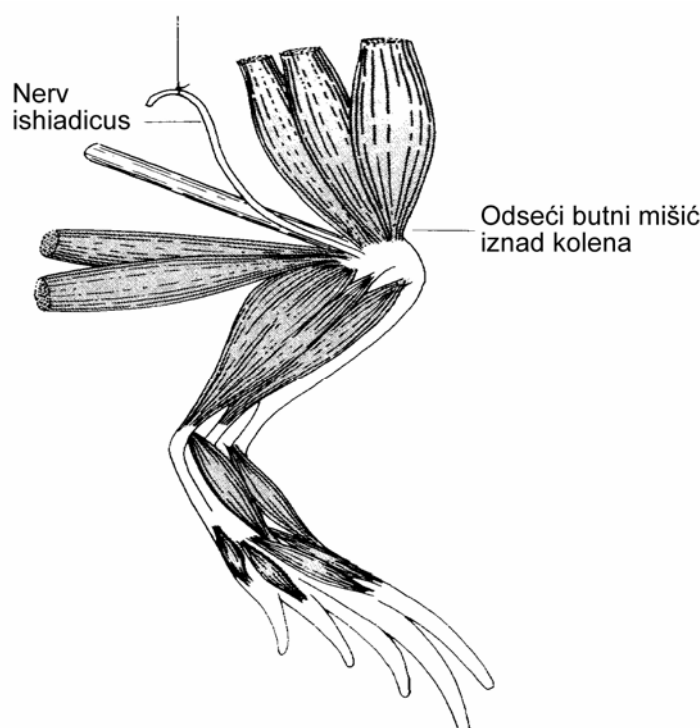
Slika 6.1 Odstranjivanje kože

- 3) Pomoću Slike 6.2 locirati mišić gastrocnemius. **Tokom ostatka eksperimenta održavati mišić u vlažnom stanju korišćenjem Ringerovog rastvora.**



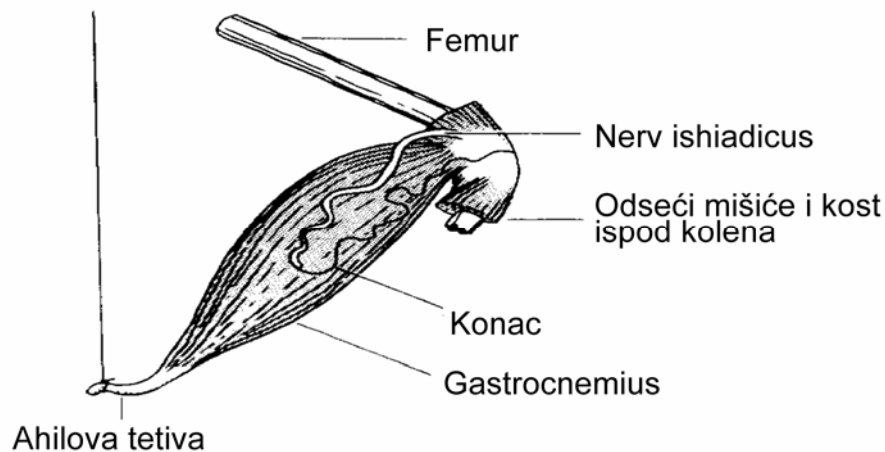
Slika 6.2 Lociranje gastrocnemius mišića i ishiadicus nerva.

- 4) Pažljivo umetnuti staklenu iglu da bi se razdvojili butni mišići kako bi ishiadicus nerv postao vidljiv (Slika 6.2). **Ne dodirivati ishiadicus metalnim instrumentima i izbegavati nepotrebno povlačenje i hvatanje ovog nerva.**
- 5) Odseći ishiadicus nerv što proksimalnije to tela.
- 6) Korišćenjem staklene igle, nežno izdvojiti nerv i položiti ga na površinu gastrocnemius mišića.
- 7) Odseći butne mišiće blizu njihovog početka kod karličnog pojasa, a zatim i odmah iznad kolena (Slika 6.3). **Voditi računa da se ne iseče mišić gastrocnemius ili nerv ishiadicus.**



Slika 6.3 Izolovanje gastrocnemius mišića i ishiadicus nerva

- 8) Koristeći staklenu iglu, razdvojiti i osloboditi mišić gastrocnemius od ostalih nožnih mišića.
- 9) Locirati Ahilovu tetivu (Slike 6.2 i 6.4). Vezati 15 cm dugačko parče konca oko njenog najnižeg dela. Odseći tetivu na mestu između konca i stopala.



Slika 6.4 Izolovani preparat

- 10) Podići i pomeriti mišić gastrocnemius na jednu stranu. Odseći ostale mišiće potkolenice i kost (tibiofibula) odmah ispod kolena.
- 11) Odseći butnu kost na otprilike 2.5 cm (Slika 6.4).
- 12) Koleno pričvrstiti za držač i položiti mišić u kadicu. Napuniti kadicu do pola Ringerovim rastvorom.
- 13) Povući konac koji je vezan za tetivu i zakačiti njegov kraj za polugu transdjusera.
- 14) Podesiti zategnutost konca pomeranjem transdjusera. Voditi računa da konac bude pod uglom od 90 stepeni u odnosu na polugu transdjusera.
- 15) Korišćenjem staklene igle, postaviti nerv preko elektroda. Elektrode držati van Ringerovog rastvora. **Sve vreme održavati nerv u vlažnom stanju prskanjem Ringerovim rastvorom i uklanjati nerv sa elektroda kada nije u upotrebi.**

6.2. Modeliranje mišića i mišićno-skeletnih sistema korišćenjem programa Musculo¹

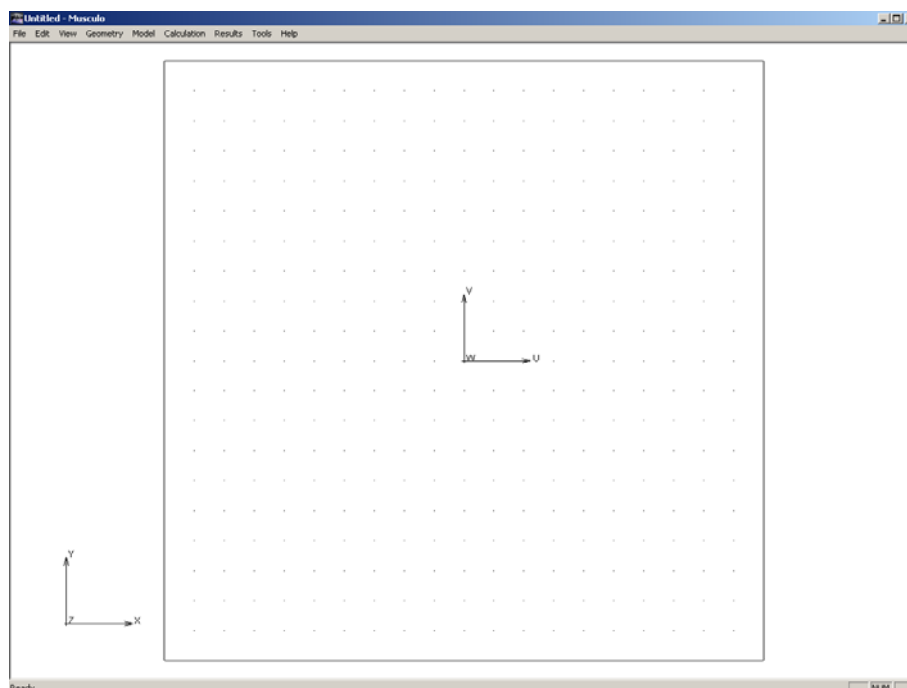
Modeliranje Metodom konačnih elemenata je veoma zahtevan zadatak i obuhvata više faza. Neke od najbitnijih faza u modeliranju su definisanje geometrije problema, konstatovanje postojanja eventualnih simetrija, formiranje mreže konačnih elemenata, definisanje njihovih materijalnih i drugih karakteristika i zadavanje graničnih uslova i opterećenja. Da bi proračun ovako formiranog modela bio tačan i efikasan, potrebno je podesiti i parametre proračuna, kao što su broj i dužina koraka, tip analize, iterativni metod u slučaju nelinearnih proračuna, kriterijumi konvergencije, tolerancije, itd. Posle uspešno obavljenog proračuna sledi prikazivanje rezultata u vidu tabela, 2D i 3D dijagrama, konturnih i vektorskih prikaza, izolinija i drugih vrsta grafikona i njihovo valjano tumačenje.

Pojedine faze u procesu modeliranja Metodom konačnih elemenata mogu biti veoma zahtevne u zavisnosti od vrste i složenosti modela. Takođe, u slučaju složenih modela, efikasnost samog proračuna može biti ugrožena, pa je potrebno pribеći raznim trikovima u procesu modeliranja, kako bi proračun bio efikasan i celishodan. Složenost formiranja modela naročito dolazi do izražaja u oblasti bioinženjeringa, pri modeliranju organa nepravilnih oblika i veoma složenih materijalnih karakteristika, graničnih uslova i opterećenja.

Ljudski i životinjski mišići su u opštem slučaju nepravilnog oblika i vrlo retko poseduju ravni ili ose simetrije. Iz tog razloga formiranje odgovarajuće mreže konačnih elemenata je veoma komplikovano, a dobijena mreža često nekvalitetna i proračunski zahtevna. Takođe, materijalne karakteristike mišića su visoko nelinearne, pa se u obzir mora uzeti i materijalna nelinearnost. Sa druge strane, zbog svoje funkcije u organizmu, mišići su izloženi velikim pomeranjima i deformacijama, tako da se ni geometrijska nelinearnost ne sme zanemariti. Problem dodatno složenim čine i komplikovani granični uslovi, uzrokovani položajem mišića u telu i njihovom povezanošću sa skeletom, kao i opterećenja izazvana unutrašnjom aktivacijom, interakcijom sa drugim organima, pa čak i gravitacijom.

¹ Program Musculo je rezultat zajedničkog projekta Politehničkog univerziteta u Hong Kongu i Univerziteta u Kragujevcu, pod nazivom "Mechanistic Damage Modelling of Skeletal Muscles Using Hybrid Segment-Superelement Technique"

Zbog svih navedenih razloga modeliranje mišića Metodom konačnih elemenata je do sada bilo veoma komplikovano i zahtevalo je dosta teorijskog i praktičnog znanja, kao i veliku količinu vremena. Kako bi bilo omogućeno relativno lako modeliranje mišića i mišićno-skeletnih sistema, razvijen je programski paket Musculo (Stojanovic i dr., 2006). Program Musculo je veoma efikasan alat za modeliranje mišića, koji u sebi objedinjuje pretprocesor za pripremu modela i postprocesor za prikaz rezultata. Sam proračun ovako pripremljenog modela obavlja se korišćenjem programa za analizu metodom konačnih elemenata, PAK-S (Kojic i dr., 1996). Program Musculo je razvijen u programskom jeziku Visual C++ 6.0, korišćenjem koncepta objektnog programiranja. Program za proračun PAK-S, napisan je u programskom jeziku FORTRAN.

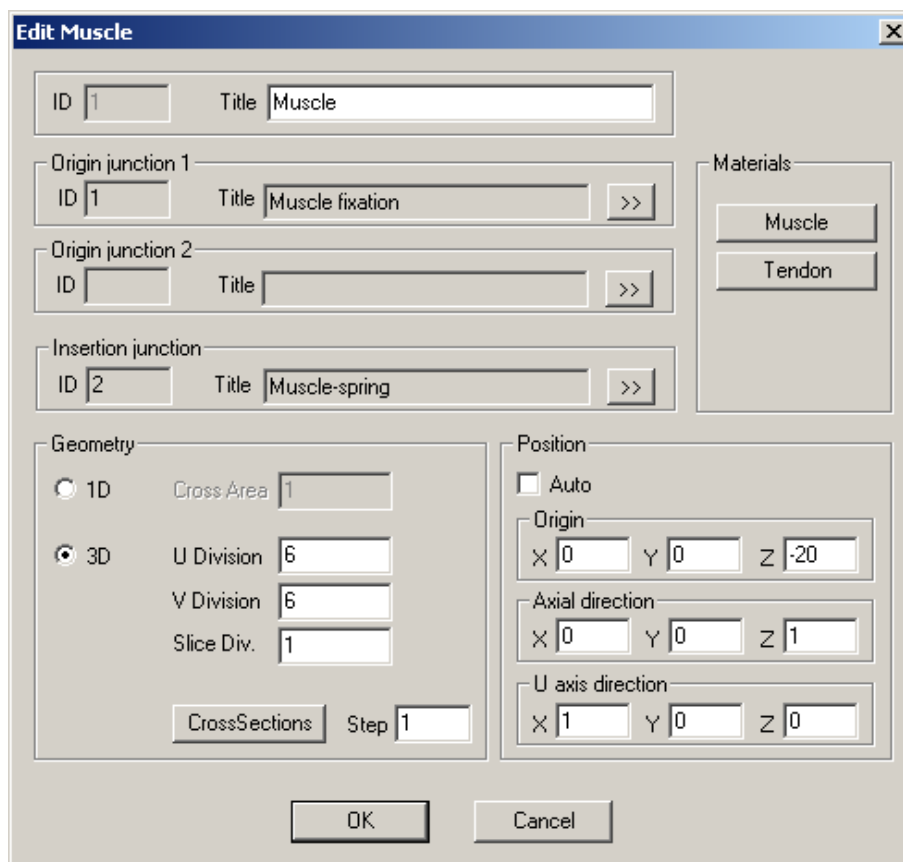


Slika 6.5 Radno okruženje programa Musculo

Modeliranje mišića

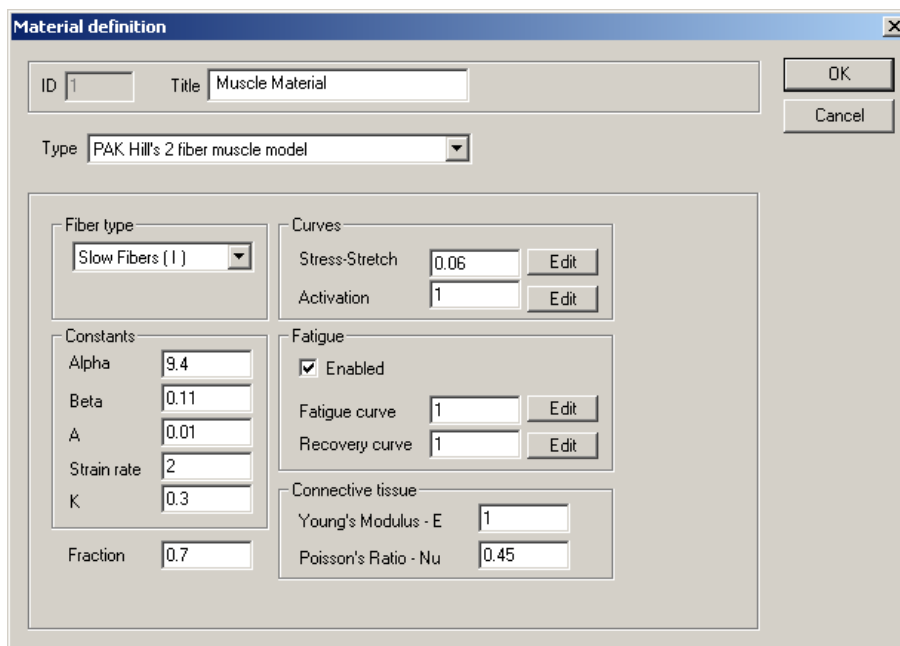
U okviru programa Musculo razvijeno je jednostavno, *user friendly*, korisničko okruženje za definisanje karakteristika mišića. Pored naziva mišića, u dijalogu prikazanom na Slici 6.6, neophodno je definisati spojeve (*junctions*), tačke u kojima je on povezan sa ostatkom mišićno-skeletnog sistema, o kojima će kasnije biti reči. Mišić može biti modeliran kao jednodimenzionalan ili trodimenzionalan. Dijalog omogućava zadavanje i pozicije mišića koja može biti eksplicitno definisana ili automatski određena na osnovu položaja odgovarajućih spojeva.

U sekciji za zadavanje materijalnih karakteristika, korisnik može definisati karakteristike mišića i tetiva.



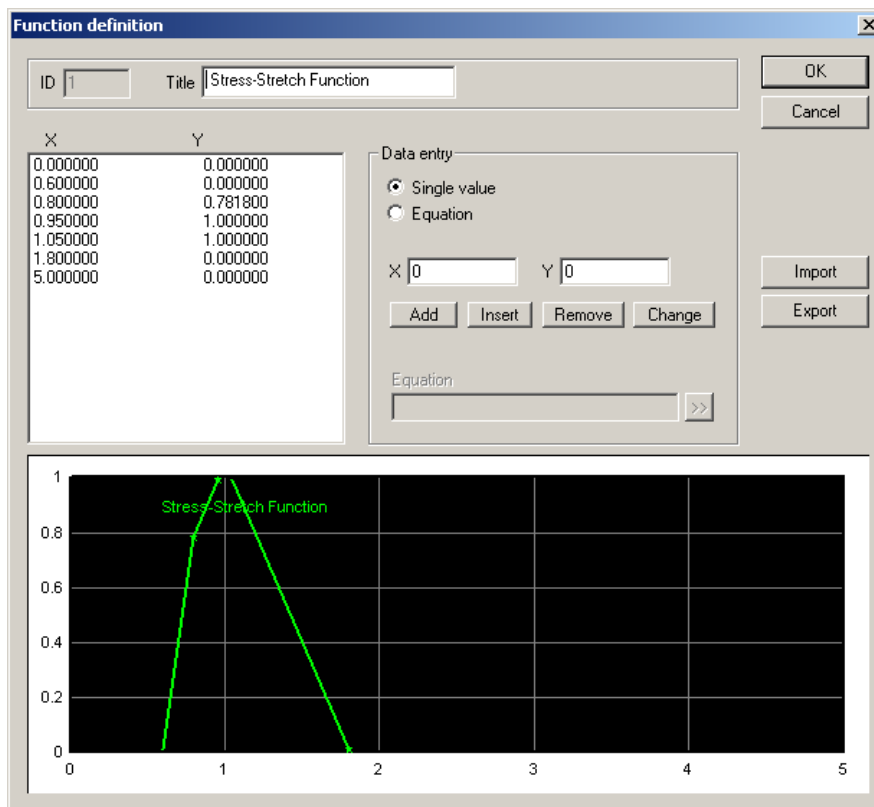
Slika 6.6 Dijalog za definisanje karakteristika mišića

Pritiskom na dugme *Muscle* u sekciji *Materials*, otvara se dijalog za zadavanje materijalnih konstanti za osnovni ili prošireni Hilov model (Slika 6.7). Ovaj dijalog sadrži sve konstante i krive koje se javljaju u jednačinama kojima su određena ova dva modela.



Slika 6.7 Dijalog za definisanje materijalnih konstanti

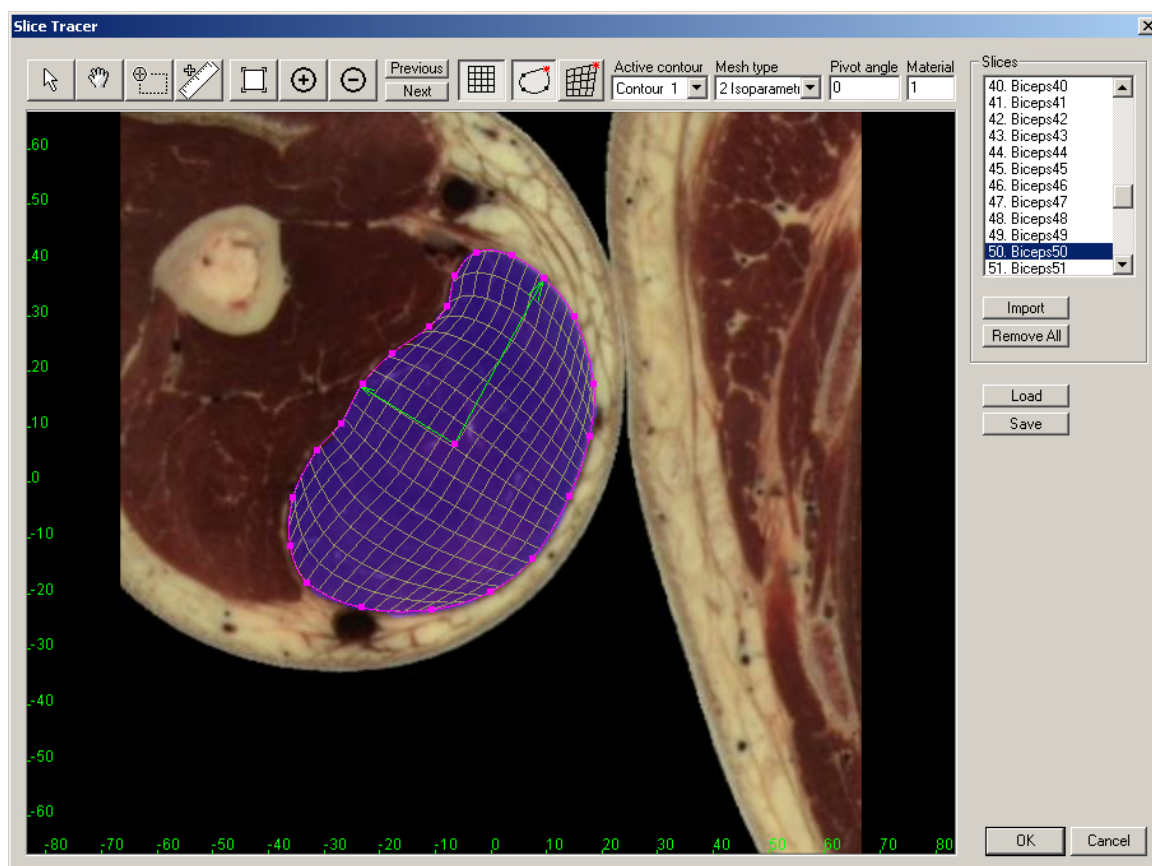
Svaka od krivih može biti nezavisno editovana korišćenjem dijaloga sa Slike 6.8. U ovom dijalogu korisnik može definisati krivu kao multilinearnu ili kao jednačinu u analitičkoj formi (linearnu, sinusoidnu...).



Slika 6.8 Dijalog za zadavanje krivih i vremenskih funkcija

Rekonstrukcija 3D geometrije mišića

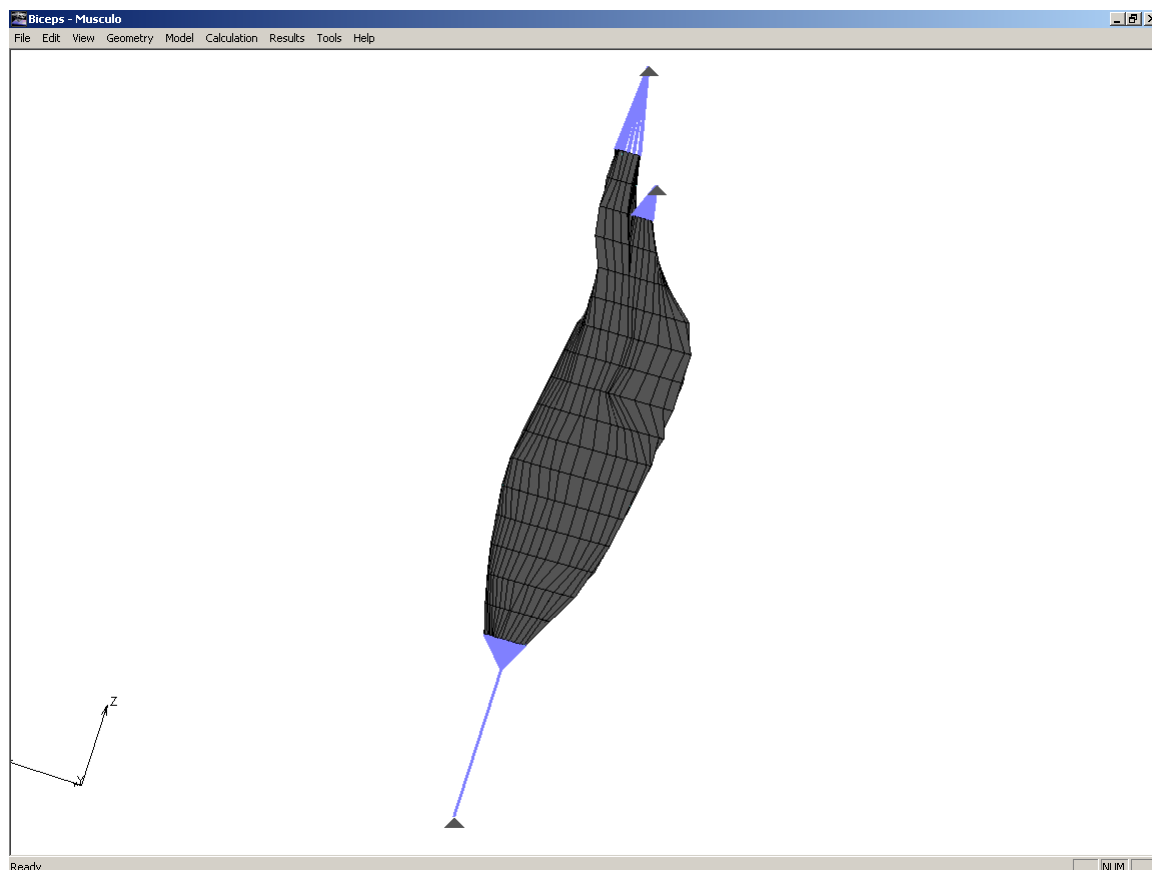
Za potrebe rekonstruisanja 3D geometrije mišića na osnovu slika poprečnih preseka donijenih iz različitih izvora kao što je baza podataka *Visible Human Project*-a, razvijen je poseban modul pod nazivom *Slice Tracer* (Slika 6.9). Ovaj modul omogućava učitavanje sekvence slika poprečnih preseka, manipulaciju njima (zoom, pan, itd.), kao i definisanje izgleda mreže konačnih elemenata u svakom poprečnom preseku. Na ovaj način omogućena je vrlo efikasna rekonstrukcija 3D geometrije mišića i automatsko generisanje odgovarajuće mreže konačnih elemenata.



Slika 6.9 *Slice Tracer*, modul za rekonstrukciju 3D geometrije mišića na osnovu slika poprečnih preseka

Na Slici 6.10 prikazan je mišić *biceps brachii* modeliran konačnim elementima. Podaci o geometriji mišića dobijeni su korišćenjem baze podataka projekta *Visible Human*. Slike poprečnih preseka mišića sa uzdužnom preciznošću od jednog preseka na 3 mm su učitane u modul *Slice Tracer* programa *Musculo*. Korišćenjem alata u ovom modulu rekonstruisane su konture svih poprečnih preseka mišića i definisani parametri mreže konačnih elemenata, kao što je to prikazano na slici 6.9. Na osnovu ovako definisanih

kontura, izvršeno je automatsko generisanje 3D mreže konačnih elemenata. Korišćenjem opcija u dijalozima na Slikama 6.6 i 6.7 izabrane su tačke vezivanja mišića i definisane njegove materijalne karakteristike.



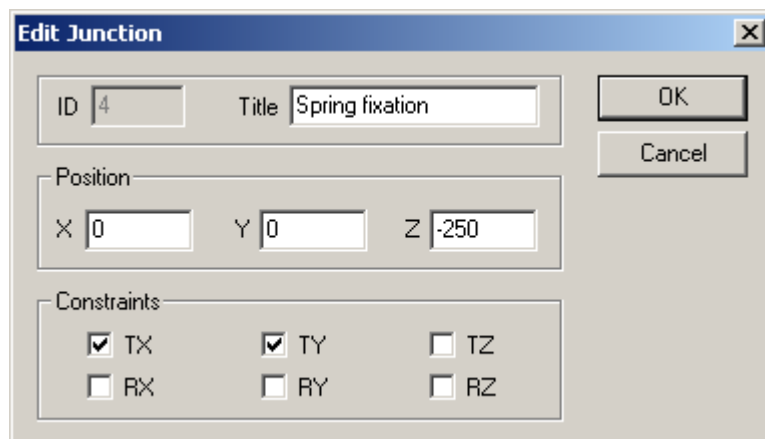
Slika 6.10 3D mreža konačnih elemenata mišića čoveka *biceps brachii*

Kako bi model bio potpuno funkcionalan, pre samog generisanja mišića neophodno je pripremiti i ostatak sistema koji čine tačke vezivanja i opruga čija je funkcija da simulira opterećenje mišića. Na ovaj način se mišić svojim proksimalnim krajem preko tetiva vezuje za čvrst oslonac, a distalnim krajem za oprugu koja je pričvršćena za nepokretnu tačku (slika 6.10). Detalji o modeliranju ovakvih i složenijih mišićno-skeletnih sistema dati su u nastavku.

Modeliranje mišićno-skeletnog sistema

Pored modeliranja pojedinačnog mišića, program Musculo omogućava i modeliranje složenijih sistema, kao što je mišićno-skeletni sistem koji se sastoji od više mišića i kostiju. Takođe, moguće je modeliranje sistema koji uključuju i druge entitete, kao što je opruga, opterećenje silom i zadato pomeranje.

Tačke koje povezuju sve elemente sistema nazivaju se spojevi (*junctions*). To su tačke u kojima su povezani mišić i kost, mišić i opruga, kost i opruga, u kojima je zadana sila ili pomeranje. U dijalogu za definisanje spojeva (Slika 6.11), pored naziva definiše se njihov položaj u prostoru, kao i eventualna ograničenja njihovog kretanja. Ovako definisani spojevi, u metodu konačnih elemenata, modeliraju se čvorovima.



Slika 6.11 Dijalog za definisanje spojeva

U dijalogu za definisanje kostiju, zadaju se dužina i prečnik kosti, kao i orijentacija kosti u prostoru (Slika 6.12). Svaka kost može biti fiksirana ili vezana za drugu kost. U slučaju da je kost fiksirana, definišu se tačka fiksacije, kao i osa zgloba kojim je fiksirana. Sa druge strane, kost može biti i vezana za drugu kost, čime se dobija skelet. Ovako definisane kosti, u metodu konačnih elemenata, modeliraju se kao kruta tela, odnosno heksahedralnim 8-čvornim 3D elementima velike krutosti.

Edit Bone

ID: 11 Title: Bone 1.1

Length: 0.052 Diameter: 0.01

Direction

X: 43 Y: 29 Z: 0

Fixation

Fixed

Fixation point

X: 0.02 Y: 0 Z: 0

Fixation ort

X: 0 Y: 0 Z: 1

Parent bone

ID: Title: >>

Junctions Material

OK Cancel

Slika 6.12 Dijalog za definisanje karakteristika kostiju

Pored navedenih osobina, postoji mogućnost definisanja i spojeva na kostima (Slika 6.13), koji mogu biti iskorišćeni kao spoj sa mišićima, odnosno kao mesta za vezivanje opruga ili zadavanje sila ili pomeranja. Svaki spoj definisan je rastojanjem od korena kosti.

Edit Bone Junctions

Position	Title
0.003000	Junction 121
0.010000	Junction 122

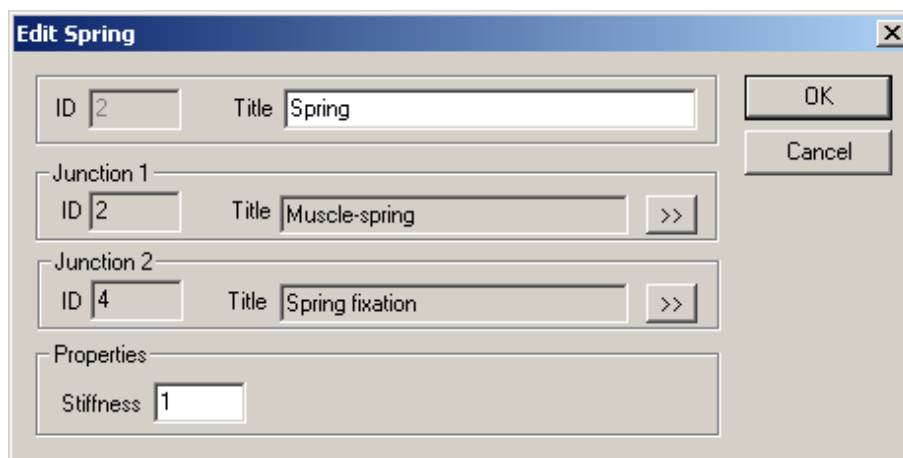
Position: 0.01 Title: Junction 122

Add Remove Change

OK Cancel

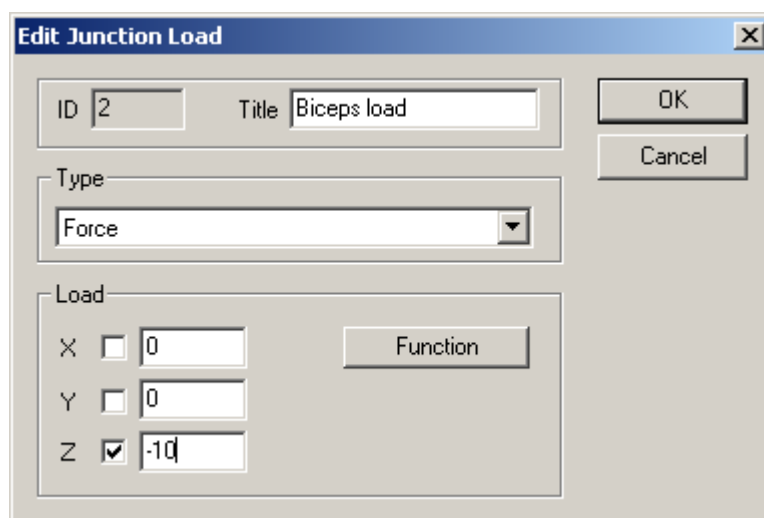
Slika 6.13 Dijalog za definisanje spojeva na kostima

Dijalog za definisanje opruga (Slika 6.14) omogućava zadavanje spojeva za koje je opruga vezana, kao i krutost same opruge.



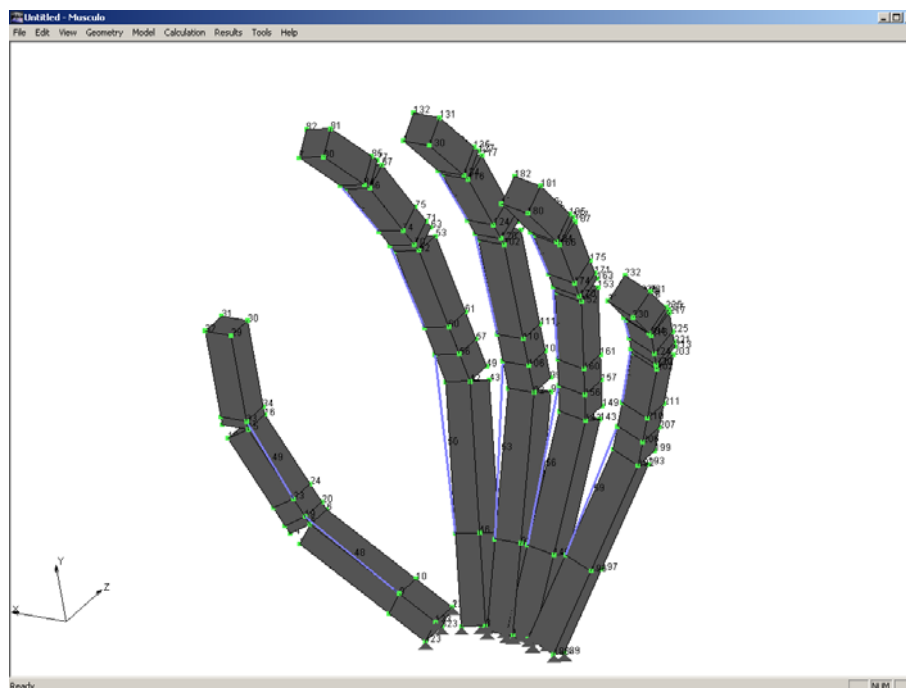
Slika 6.14 Dijalog za definisanje opruga

Korišćenjem dijaloga za zadavanje opterećenja (Slika 6.15) moguće je zadati pomeranje ili spoljašnju silu na nekom spoju, koji mogu biti konstantni ili promenljivi u vremenu.



Slika 6.15 Dijalog za definisanje spoljašnjeg opterećenja u spoju

Korišćenjem svih navedenih mogućnosti programa Musculo moguće je kreirati veoma složene modele, kao što je model ljudske šake prikazan na Slici 6.16. Ovaj model sastoji se od čak 19 kostiju i 14 mišića povezanih velikim brojem spojeva. Radi efikasnosti proračuna mišići su modelirani 1D elementima.



Slika 6.16 Model ljudske šake modeliran korišćenjem programa Musculo

Proračun i prikaz rezultata

Kada je model spreman i kada su definisani svi parametri proračuna, vrši se proračun korišćenjem programa PAK-S (Slika 6.17). U zavisnosti od složenosti modela, broja elemenata i čvorova, proračun može trajati od nekoliko sekundi do više sati. Neki detalji vezani za ugradnju Hilovog modela u program PAK-S dati su u Dodatku *Integracija napona u programu za konačne elemente PAK*.

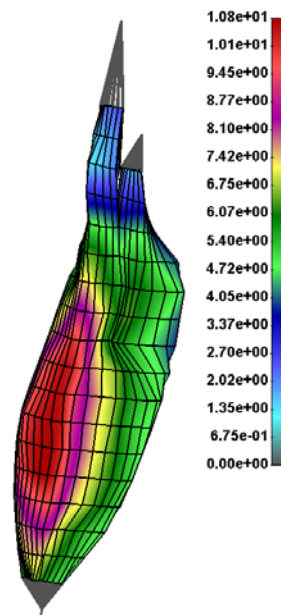
```

c:\WINDOWS\system32\cmd.exe
*** SOLUTION EQUATIONS SYSTEM <2> ***
      ITERATION = 3      ENERGY = 3.0003D-03
      ENERGY < 3> / ENERGY < 0> = 9.9813D-03
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 1 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 4 / 0 ***
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 2 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 4 / 0 ***
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 3 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 4 / 0 ***
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 4 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 4 / 0 ***
*** SOLUTION EQUATIONS SYSTEM <1> ***
*** SOLUTION EQUATIONS SYSTEM <2> ***
      ITERATION = 4      ENERGY = 2.8178D-04
      ENERGY < 4> / ENERGY < 0> = 9.3742D-04
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 1 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 5 / 0 ***
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 2 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 5 / 0 ***
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 3 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 5 / 0 ***
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 4 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 5 / 0 ***
*** SOLUTION EQUATIONS SYSTEM <1> ***
      PIVOT < 0>
*** SOLUTION EQUATIONS SYSTEM <2> ***
      ITERATION = 5      ENERGY = 4.2427D-05
      ENERGY < 5> / ENERGY < 0> = 1.4115D-04
*** STIFFNESS MATRIX FOR GROUP 1 / 4, STEP 10 / 335, ITERATION 6 / 0 ***

```

Slika 6.17 Izveštaj o toku proračuna u programu PAK-S

Posle završetka proračuna rezultate je moguće prikazati različitim tipovima dijagrama kao što je konturni prikaz (Slika 6.18), izolinije, vektori, 2D grafici, itd.



Slika 6.18 Polje pomeranja mišića *biceps brachii*

6.3. Integracija napona u programu za konačne elemente PAK

Računanje napona u kontraktilnom elementu

U skladu sa relacijama datim u poglavlju 2.4, na programskom jeziku FORTRAN napisane su funkcije za računanje napona kontraktilnog elementa. Ove funkcije su ugrađene u program za konačne elemente PAK (modul **PakHill.for**).

Funkcija: nHILLFAT

Ova funkcija se koristi za računanje trenutnog napona u kontraktilnom elementu, kao i izvoda napona po streču. Zamor mišića se može uzeti u obzir setovanjem indikatora INDFAT=1.

Zaglavlje:

```
FUNCTION nHILLFAT( dSIGS1, dSIGSD,
                  dLAMM1, dLAMMS1, dALFAF1,
                  dALFA, dBETA, dA, dDLM0F, dK,
                  dLAMM0, dLAMMS0, dLAMP1, dALFAF0,
                  dCSTR, nNSTR, dCACT, nNACT,
                  dCFAT, nNFAT, dCRES, nNRES,
                  dTIME, dDT, INDFAT)
```

Ulazni parametri:

dALFA	- koeficijent α iz Hilove jednačine	(double)
dBETA	- koeficijent β iz Hilove jednačine	(double)
dA	- koeficijent a iz Hilove jednačine	(double)
dDLM0F	- brzina streča $\dot{\lambda}_{m0}$ iz Hilove jednačine	(double)
dK	- koeficijent k iz Hilove jednačine	(double)
dLAMM0	- streč λ_m na početku koraka	(double)
dLAMMS0	- streč λ_s na kraju koraka	(double)
dLAMP1	- trenutni streč λ_p	(double)
dALFAF0	- nivo sposobnosti α_f na početku koraka	(double)
dCSTR	- relacija napon-streč (Gordonova kriva)	(double(2,100))
nNSTR	- broj tačaka na krivoj dCSTR	(integer)
dCACT	- funkcija aktivacije	(double(2,100))
nNACT	- broj tačaka na krivoj dCACT	(integer)
dCFAT	- kriva zamora pri neprestanoj aktivaciji	(double(2,100))
nNFAT	- broj tačaka na krivoj dCFAT	(integer)
dCRES	- kriva odmaranja	(double(2,100))
nNRES	- broj tačaka na krivoj dCRES	(integer)
dTIME	- trenutno vreme $t + \Delta t$	(double)
dDT	- dužina vremenskog koraka Δt	(double)
INDFAT	- indikator za računanje zamora (1=da., 0=ne)	(integer)

Izlazni parametri:		
dSIGS1	- trenutni napon u kontraktilnom elementu ${}^{n+1}\sigma_m$	(double)
dSIGSD	- izvod napona $\frac{\partial {}^{n+1}\sigma_m}{\partial {}^{n+1}\lambda}$	(double)
dLAMM1	- streč ${}^{n+1}\lambda_m$	(double)
dLAMS1	- streč ${}^{n+1}\lambda_s$	(double)
dALFAF1	- nivo sposobnosti ${}^{n+1}\alpha_f$	(double)
Funkcija vraća:		
1 ukoliko je računanje uspešno, u suprotnom 0		

Funkcija: nISIGS		
Ova funkcija se koristi za računanje napona u kontraktilnom elementu uz pomoć iteracisanja streča λ_p od ${}^n\lambda_p$ do ${}^{n+1}\lambda_p$.		
Zaglavlje:		
<pre> FUNCTION nISIGS(dSIGS, dSIGSD, dLAMM, dLAMS, dALFA, dBETA, dA, dK, dDLM0, dALFAA, dLAMM0, dLAMS0, dLAMP1, dCSTR, nNSTR) </pre>		
Ulazni parametri:		
dALFA	- koeficijent α iz Hilove jednačine	(double)
dBETA	- koeficijent β iz Hilove jednačine	(double)
dA	- koeficijent a iz Hilove jednačine	(double)
dK	- koeficijent k iz Hilove jednačine	(double)
dDLM0	- streč λ_{m0} iz Hilove jednačine	(double)
dALFAA	- trenutni nivo aktivacije ${}^{n+1}\alpha_a$	(double)
dLAMM0	- streč ${}^n\lambda_m$ na početku koraka	(double)
dLAMS0	- streč ${}^n\lambda_s$ na početku koraka	(double)
dLAMP1	- streč λ_p	(double)
dCSTR	- relacija napon-streč (Gordonova kriva)	(double(2,100))
nNSTR	- broj tačaka na krivoj dCSTR	(integer)
Izlazni parametri:		
dSIGS	- napon u kontraktilnom elementu σ_m	(double)
dSIGSD	- izvod napona u kontraktilnom elementu σ_m po streču λ_p	(double)
dLAMM	- streč λ_m	(double)

dLAMS	-	streč λ_s	(double)
Funkcija vraća: 1 ukoliko je računanje uspešno, u suprotnom 0			

Funkcija: nCSIGS			
Ova funkcija se koristi za računanje napona u kontraktilnom elementu u skladu sa jednačinom (2.4.9).			
Zaglavlje: FUNCTION nCSIGS(dSIGS, dSIGSD, dALFA, dBETA, dA, dK, dDLM0, dALFAA, dLAMM, dLAMS, dLAMP1, dLAMP0, dCSTR, nNSTR)			
Ulazni parametri:			
dALFA	-	koeficijent α iz Hilove jednačine	(double)
dBETA	-	koeficijent β iz Hilove jednačine	(double)
dA	-	koeficijent a iz Hilove jednačine	(double)
dK	-	koeficijent k iz Hilove jednačine	(double)
dDLM0	-	streč λ_{m0} iz Hilove jednačine	(double)
dALFAA	-	trenutni nivo aktivacije ${}^{n+1}\alpha_a$	(double)
dLAMM	-	streč ${}^n\lambda_m$ na početku koraka	(double)
dLAMS	-	streč ${}^n\lambda_s$ na početku koraka	(double)
dLAMP1	-	streč ${}^{n+1}\lambda_p$	(double)
dLAMP0	-	streč ${}^n\lambda_p$ na početku koraka	(double)
dCSTR	-	relacija napon-streč (Gordonova kriva)	(double(2,100))
nNSTR	-	broj tačaka na krivoj dCSTR	(integer)
Izlazni parametri:			
dSIGS	-	napon u kontraktilnom elementu σ_m	(double)
dSIGSD	-	izvod napona u kontraktilnom elementu σ_m po streču λ_p	(double)
dLAMM	-	streč λ_m koji odgovara streču λ_p	(double)
dLAMS	-	streč λ_s koji odgovara streču λ_p	(double)
Funkcija vraća: 1 ukoliko je računanje uspešno, u suprotnom 0			

Računanje zamora (nivoa sposobnosti)

Kako bi bilo moguće modeliranje zamora mišića, u skladu sa teoretskom pozadinom, u programski modul **PakHill.for** su ugrađene funkcije za proračun zamora (nivoa sposobnosti) mišića, napisane na programskom jeziku FORTRAN.

Funkcija: nCFAT	
Ova funkcija se koristi za računanje trenutnog nivoa sposobnosti mišića u skladu sa jednačinama datim u (2.4.39).	
Zaglavlje: <pre>FUNCTION nCFAT(dALFAF1, dALFAF0, dALFAA, dDT, dCFAT, nNFAT, dCRES, nNRES)</pre>	
Ulazni parametri:	
dALFAF0	nivo sposobnosti ${}^n\alpha_f$ na početku vremenskog koraka (double)
dALFAA	trenutni nivo aktivacije ${}^{n+1}\alpha_a$ (double)
dDT	dužina vremenskog koraka Δt (double)
dCFAT	kriva zamora pri neprekidnoj aktivaciji (double(2,100))
nNFAT	broj tačaka na krivoj dCFAT (integer)
dCRES	kriva odmaranja (double(2,100))
nNRES	broj tačaka na krivoj dCRES (integer)
Izlazni parametri:	
dALFAF1	trenutni nivo sposobnosti ${}^{n+1}\alpha_f$ (double)
Funkcija vraća: 1 ukoliko je računanje uspešno, u suprotnom 0	

Integracija napona korišćenjem User Supplied materijalnog modela

User supplied materijalni model (USMM) je razvijen kako bi se obezbedio alat za jednostavno ugrađivanje različitih materijalnih modela u program za konačne elemente PAK. Sastoji se od ulazno-izlaznih funkcija i funkcija za alokaciju memorije i integraciju konstitutivnih relacija.

U ulaznom fajlu može biti zadat proizvoljan broj celobrojnih i realnih ulaznih parametara, kao i proizvoljan broj krivih. Format ulaznih podataka za USMM (materijalni model 92)

je dat u uputstvu za program PAK (PAK-S Users Manual). Čitanje podataka iz ulaznog fajla i alociranje memorije su potpuno automatski, tako da korisnik ne mora da piše nove ili modifikuje postojeće ulazno-izlazne funkcije.

Razvijene su i funkcije za integraciju napona za 1D, 2D i 3D konačne elemente (moduli **Pak1492.for**, **Pak2492.for**, **Pak3492.for** redom). U nastavku je dat detaljan opis funkcija za integraciju napona 3D elemenata. Funkcije za 1D i 2D integraciju napona su veoma slične ovima za 3D integraciju, pa iz tog razloga ovde nisu opisivane.

Funkcija: TAU392	
Ova funkcija se koristi za računanje napona i konstitutivne matrice pozivanjem funkcija za navedeni podmodel (nSUBMOD=NAINT(1)).	
Zaglavlje:	
<pre> SUBROUTINE TAU392(TAUT,DEFT, dSTATE0, TAU1,DEF1, dSTATE1, NAINT,ADOUB,NACURV,ANODEVAR, NINT,NDOUB,NCURV,NVARCOUNT, NODEVARCOUNT, TAU,DEF,IRAC) </pre>	
Ulazni parametri*:	
TAUT	- naponi ${}^n\sigma$ u globalnom sistemu na početku koraka (double(6)) $TAUT=[{}^n\sigma_{xx}, {}^n\sigma_{yy}, {}^n\sigma_{zz}, {}^n\sigma_{xy}, {}^n\sigma_{yz}, {}^n\sigma_{xz}]$
DEFT	- deformacije ne u globalnom sistemu na početku koraka (double(6)) $DEFT=[{}^ne_{xx}, {}^ne_{yy}, {}^ne_{zz}, {}^ne_{xy}, {}^ne_{yz}, {}^ne_{xz}]$
dSTATE0	- niz proizvoljnih promenljivih stanja na početku koraka (double(NVARCOUNT)) (Korisnik može da zapamti bilo koju bitnu promenljivu na kraju iteracije ili koraka. Memorija za NVARCOUNT promenljivih se alocira i ove promenljive su automatski dostupne na početku svakog koraka.)
TAU1	- naponi ${}^{n+1}\sigma^{(i-1)}$ u globalnom sistemu iz prethodne iteracije (double(6)) $TAU1=[{}^{n+1}\sigma_{xx}^{(i-1)}, {}^{n+1}\sigma_{yy}^{(i-1)}, {}^{n+1}\sigma_{zz}^{(i-1)}, {}^{n+1}\sigma_{xy}^{(i-1)}, {}^{n+1}\sigma_{yz}^{(i-1)}, {}^{n+1}\sigma_{xz}^{(i-1)}]$
DEF1	- deformacije ${}^{n+1}e^{(i-1)}$ u globalnom sistemu iz prethodne iteracije (double(6)) $DEF1=[{}^{n+1}e_{xx}^{(i-1)}, {}^{n+1}e_{yy}^{(i-1)}, {}^{n+1}e_{zz}^{(i-1)}, {}^{n+1}e_{xy}^{(i-1)}, {}^{n+1}e_{yz}^{(i-1)}, {}^{n+1}e_{xz}^{(i-1)}]$
dSTATE1	- niz proizvoljnih promenljivih stanja

	iz prethodne iteracije (Iste promenljive kao u dSTATE0, ali se sada odnose na prethodnu iteraciju. Ove promenljive su, takođe, automatski dostupne.)	(double(NVARCOUNT))
NAINT	- celobrojni ulazni parametri materijala (Prvi celobrojni parametar je uvek broj podmodela. U zavisnosti od ovog parametra pozivaju se odgovarajuće funkcije za integraciju napona)	(integer(NINT))
ADOUB	- realni ulazni parametri materijala	(double(NDOUB))
NACURV	- pointeri na ulčazen parametre materijala tipa "kriva"	(integer(NCURV))
ANODEVAR	- čvorne promenljive za FGM ¹	(double(NODEVARCOUNT))
NINT	- broj celobrojnih ulaznih parametara materijala	(integer)
NDOUB	- broj realnih ulaznih parametara materijala	(integer)
NCURV	- broj materijalnih parametara tipa "kriva"	(integer)
NVARCOUNT	- broj promenljivih stanja	(integer)
NODEVARCOUNT	- broj čvornih promenljivih za FGM ¹	(integer)
DEF	- trenutne deformacije u globalnom sistemu ${}^{n+1}\mathbf{e}^i$ DEF=[${}^{n+1}e_{xx}^i, {}^{n+1}e_{yy}^i, {}^{n+1}e_{zz}^i, {}^{n+1}e_{xy}^i, {}^{n+1}e_{yz}^i, {}^{n+1}e_{xz}^i$]	(double(6))
IRAC	- indikator šta se računa (1-napon i konstitutivna matrica, 2-samo konstitutivna matrica)	
*Svi ulazni parametri su automatski dostupni ¹ Functionally Graded Materials		
Izlazni parametri*:		
dSTATE1	- niz proizvoljnih promenljivih stanja u trenutnoj iteraciji (Iste promenljive kao u dSTATE0, ali se sada odnose na prethodnu iteraciju. Ove promenljive se automatski snimaju.)	(double(NVARCOUNT))
TAU	- trenutni naponi u globalnom sistemu ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ TAU=[${}^{n+1}\sigma_{xx}^i, {}^{n+1}\sigma_{yy}^i, {}^{n+1}\sigma_{zz}^i, {}^{n+1}\sigma_{xy}^i, {}^{n+1}\sigma_{yz}^i, {}^{n+1}\sigma_{xz}^i$]	(double(6))
* Sve izlazne promenljive treba ažurirati na kraju funkcije, a one će zatim biti automatski snimljene		
Ostale promenljive dostupne preko COMMON lista:		
ELAST	- Konstitutivna matrica C	double(6,6)
XJJ	- Matrica Jakobijana IF(IRAC.EQ.2) Inverzna matrica Jakobijana IF(IRAC.NE.2)	double(3,3)
VMS	- Matrica Jakobijana u koraku n IF(IRAC.NE.2)	double(3,3)
VMS1	- Matrica Jakobijana u koraku 0 IF(IRAC.NE.2)	double(3,3)
RACGR	- Inverzni gradijent deformacije ${}^{n+1}\mathbf{X}_0^{-1}$	double(3,3)
ITER	- Broj iteracije	integer
VREME	- Vreme	double
DT	- Dužina vremenskog koraka	double

KOR	- Korak	integer
IATYP	- Tip analize	integer

Prethodno opisani interfejs omogućava najvažnije promenljive potrebne za integraciju napona. Takođe, postoje i neke važne promenljive dostupne preko COMMON lista. Obezbeđene su i brojne korisne funkcije za operacije i transformacije nad matricama. Korišćenjem postojećih funkcija i promenljivih korisnik treba da napiše FORTRAN-ski kod za integraciju napona i računanje konstitutivne matrice, a zatim da ih pozove iz ove funkcije u skladu sa navedenim podmodelom (nSUBMOD=NAINT(1)).

Integracija napona za Hilov model mišića korišćenjem USMM

U narednom delu biće prikazana ugradnja integracije napona za Hilov model mišića korišćenjem USMM (modul **PAKHill.for**). Hilov model mišića je inkorporiran u USMM kao podmodel 1 (nSUBMOD=1).

Kao što je ranije opisano, zaglavlje funkcije obezbeđuje najbitnije promenljive neophodne za integraciju napona. Međutim, za Hilov model je zgodno da se nazivi promenljivih stanja promene, kako bi kod bio razumljiviji.

Zaglavlje modifikovano za Hilov model koji uključuje zamor:

```
SUBROUTINE TAU392_1( TAUT,DEFT,
                    dSIGS0,dLAMM0,dLAMS0,dALFAF0,
                    TAU1,DEF1,
                    dSIGS1,dLAMM1,dLAMS1,dALFAF1,
                    NAINT,ADOUB,NACURV,NINT,NDOUB,
                    NCURV,TAU,DEF,IRAC)
```

Modifikovani nazivi ulazno-izlaznih promenljivih stanja za Hilov model:

Za Hilov model je pogodno promeniti nazive promenljivih stanja kako bi kod bio razumljiviji.

dSIGS0	- napon u kontraktilnom elementu na početku vremenskog koraka " σ_m "	(double)
dLAMM0	- streč kontraktilnog elementa na početku vremenskog koraka " λ_m "	(double)
dLAMS0	- streč serijskog elementa na početku vremenskog koraka " λ_s "	(double)
dALFAF0	- nivo sposobnosti na početku koraka " α_f "	(double)

dSIGS1	- napon u kontraktilnom elementu u iteraciji $^{n+1}\sigma_m^{(i-1)}$	(double)
dLAMM1	- streč kontraktilnog elementa u iteraciji $^{n+1}\lambda_m^{(i-1)}$ (ulaz) and $^{n+1}\lambda_m^i$ (izlaz)	(double)
dLAMS1	- streč serijskog elementa u iteraciji $^{n+1}\lambda_s^{(i-1)}$ (ulaz) i $^{n+1}\lambda_s^i$ (izlaz)	(double)
dALFAF1	- trenutni nivo sposobnosti $^{n+1}\alpha_f$	(double)

Ova funkcija se poziva iz funkcije TAU392 ukoliko je nSUBMOD=1 (Hilov model):

```

IF ( nSUBMOD.EQ.1 ) THEN
  CALL TAU392_1 ( TAUT,DEFT ,
                dSTATE0 ( 1 ) , dSTATE0 ( 2 ) , dSTATE0 ( 3 ) ,
                dSTATE0 ( 4 ) ,
                TAU1,DEF1 ,
                dSTATE1 ( 1 ) , dSTATE1 ( 2 ) , dSTATE1 ( 3 ) ,
                dSTATE1 ( 4 ) ,
                NAINT , ADOUB , NACURV , NINT , NDOUB , NCURV ,
                TAU , DEF , IRAC )
  RETURN
ENDIF

```

Kako dobiti ulazne parametre materijala?

Svi celobrojni ulazni parametri materijala su smešteni u niz NAINT:

nSUBMOD=NAINT (1)	Prvi celobrojni parametar uvek predstavlja podmodel (Hilov materijalni model je ugrađen kao podmodel 1)
INDFAT=NAINT (2)	Indikator da li se računa zamor mišića (1-da, 0-ne)
nAXIS=NAINT (3)	Pravac mišićnih vlakana u odnosu na lokalni koordinatni sistem (1-r, 2-s, 3-t osa)

Realni ulazni parametri materijala su smešteni u niz ADOUB:

dE	= ADOUB (1)	Jangov modul neaktivnog mišića
dNI	= ADOUB (2)	Poasonov koeficijent neaktivnog mišića
dALFA	= ADOUB (3)	Koeficijent α iz Hilove jednačine
dBETA	= ADOUB (4)	Koeficijent β iz Hilove jednačine
dA	= ADOUB (5)	Koeficijent a iz Hilove jednačine
dDLM0F	= ADOUB (6)	Brzina streča $\dot{\lambda}_{m0}$ iz Hilove jednačine
dK	= ADOUB (7)	Koeficijent k iz Hilove jednačine
dFI	= ADOUB (8)	Udeo zapremine mišićnih vlakana u ukupnoj zapremini mišića

Pointeri na ulazne parametre materijala tipa "kriva" i brojevi tačaka na njima su smešteni u niz NACURV:

nNSTR=NACURV(2 , 1)	Broj tačaka na prvoj krivoj (dCSTR)
nNACT=NACURV(2 , 2)	Broj tačaka na drugoj krivoj (dCACT)
nNFAT=NACURV(2 , 3)	Broj tačaka na trećoj krivoj (dCFAT)
nNRES=NACURV(2 , 4)	Broj tačaka na četvrtoj krivoj (dCRES)

Dobijanje krivih dCSTR, dCACT, dCFAT, i dCRES iz radnog vektora A:

CALL GETCUR(A(NACURV(1 , 1)) , dCSTR , nNSTR)	Streč-napon
CALL GETCUR(A(NACURV(1 , 2)) , dCACT , nNACT)	Vreme-aktivacija
CALL GETCUR(A(NACURV(1 , 3)) , dCFAT , nNFAT)	Vreme-zamor (neprekidna aktiv.)
CALL GETCUR(A(NACURV(1 , 4)) , dCRES , nNRES)	Vreme-zamor (odmaranje)

gde su

NACURV(1,*i*) pointer na *i*-tu ulazni krivu
 NACURV(2,*i*) broj tačaka na *i*-toj krivoj

Kako izjednačiti dva vektora?

CALL JEDNAL(VMS , XJJ , 9)	Izjednačava dva vektora
------------------------------	-------------------------

Kako transformisati vektor deformacija sa globalnog na lokalni koordinatni sistem?

CALL TRANALA(VMS1 , TSE , 0 , nAXIS)	Računa transformacionu matricu \mathbf{T}^e (TSE(6,6)) koja transformiše deformacije sa globalnog na materijalne ose. Materijalna osa nAXIS će biti u pravcu nAXIS ose elementa, a druge dve ose će biti ortogonalne.
CALL CLEAR(DEFL , 6)	Nulira vektor lokalnih deformacija \mathbf{e}_l (DEFL)
CALL MNOZI1(DEFL , TSE , DEF , 6 , 6)	Proizvod matrica $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_l + \mathbf{T}^e \mathbf{e}$

Kako izračunati elastičnu konstitutivnu matricu?

FUN(1) = dE * (1 . D0 - dFI)	Prvi element privremenog niza je Jangov modul (za Hilov model koristi se dE*(1.D0-dFI) zato što je samo (1.D0-dFI) deo mišića elastičan)
FUN(2) = dNI	Drugi element privremenog niza je Poasonov koeficijent

CALL MEL31 (FUN)

Računa elastičnu konstitutivnu matricu
(ELAST se dobija iz COMMON liste)**Kako transformisati konstitutivnu matricu na globalni koordinatni sistem?**

CALL TRAETP (ELAST, ELAST, TSE) Transformiše konstitutivnu matricu
ELAST na globalni koordinatni
sistem korišćenjem transformacione matrice TSE

Kako transformisati vektor napona sa lokalnog na globalni koordinatni sistem?

CALL CLEAR (TAU, 6) Nulira vektor napona σ (TAU)
CALL MNOZI2 (TAU, TSE, TAUL, 6, 6) Proizvod matrica $\sigma = \sigma + \mathbf{T}^{\varepsilon T} \sigma_l$