Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Petar Maksimović

Jednočlani potpuni skupovi veznika za iskaznu logiku

— Master teza —

mentor: dr Predrag Janičić

Beograd
2008

Sadržaj

Predgovor

Jedan od seminarskih radova u okviru ispita "Matematička logika u računarstvu" na četvrtoj godini Matematičkog fakulteta u Beogradu, tokom akademske 2004/2005. godine, imao je za temu pisanje programa koji bi, za dati logički veznik proizvoljne arnosti, davao odgovor da li taj veznik čini potpun skup veznika ili ne. Iz tog seminarskog rada je, igrom slučaja, proistekla jedna elegantna teorema o karakterizaciji jednočlanih potpunih skupova veznika, koja je dalje, uz svesrdnu pomoć mog tadašnjeg profesora, a sadašnjeg mentora, prof. dr Predraga Janičića, pretočena u rad koji je, 2006. godine, objavljen u časopisu "Mathematical Logic Quarterly" [8]. Ta teorema čini i okosnicu ove master teze. Ovom prilikom bih hteo da zahvalim profesoru Janičiću, pre svega na tome što me je uveo u vode naučno-istraživačkog rada, kao i na velikom broju korisnih saveta i smernica datih tokom izrade ove teze. Takođe bih hteo da zahvalim prof. dr Zoranu Ognjanoviću i mr Filipu Mariću, koji su svojim konstruktivnim primedbama doprineli sveukupnoj celovitosti ove master teze.

Glavna istraživačka tema ove teze jesu jednočlani potpuni skupovi veznika za iskaznu logiku. Rad se sastoji iz šest glava. Prva glava sadrži kratak pregled iskazne logike i potpunih skupova veznika kroz istoriju. U glavi 2 su predstavljeni sintaksa i semantika iskazne logike i uvedeni pojmovi potpunog skupa veznika, formalne teorije i deduktivnog sistema. Glava 3 sadrži pregled dosadašnjih rezultata na temu karakterizacije proizvoljnog potpunog skupa veznika i deduktivnih sistema sa jednočlanim potpunim skupovima veznika. Originalni doprinos ovog rada obuhvata glave 4 i 5. U glavi 4 je prikazana teorema o karakterizaciji jednočlanih potpunih skupova veznika, koja čini okosnicu ovog rada i čiji dokaz je objavljen u časopisu Mathematical Logic Quarterly 2006. godine [8]. U glavi 5 je dato gornje ograničenje minimalne dužine aksiomskih shema u odnosu na proizvoljan jednočlan skup veznika. Konačno, u glavi 6 su izloženi zaključci i ideje za dalji rad.

Petar Maksimović

Beograd, 21.09.2008.

Glava 1

Uvod

U prvom delu ove glave biće dat pregled istorijata iskazne logike, dok će u drugom dalu biti dat kratak osvrt na potpune skupove veznika i njihovu primenu. Najveći deo materijala iz ove glave preuzet je iz izvora [1], [2] i [4].

1.1 Kratak istorijat iskazne logike

Počeci logike kao nezavisne discipline datiraju iz vremena grčkog filozofa Aristotela (384–322 p.n.e.). Iako se u svojim spisima Aristotel bavio logikom kategorija i kvantifikatorima kao što su "za svaki" i "postoji", koji izlaze van okvira iskazne logike, on je zaslužan za formulisanje dva principa od izuzetnog značaja za nju. Ti principi su danas poznati kao zakon isključenja trećeg i zakon kontradikcije. Prvi od njih tvrdi da svaki iskaz mora biti ili tačan ili netačan, dok drugi tvrdi da nijedan iskaz ne može biti istovremeno i tačan i netačan. Postoje indicije da je Aristotel, ili bar neki od njegovih naslednika u Liceju, uvideo potrebu za razvijanjem složenih iskaza, koji bi uključivali disjunkcije, konjunkcije i uslovne iskaze, ali da nisu uloženi neki značajniji napori u razvoj logike u tom smeru.

Nešto ozbiljniji pokušaji proučavanja operatora nad iskazima, odnosno logičkih veznika, kao što su "i" (konjunkcija, $\wedge$), "ili" (disjunkcija, $\vee$) i "ako-onda" (implikacija, $\Rightarrow$) su preduzeti od strane filozofa stoika krajem trećeg veka pre nove ere. Kako je veći deo njihovih originalnih radova izgubljen, ne može se sa sigurnošću tvrditi ko je prvi započeo proučavanje kog dela tadašnje stoičke iskazne logike, ali se smatra da je Krisipus (280–205 p.n.e.) najviše doprineo njenom razvoju, time što je izdvojio određen broj načina za formiranje složenih premisa i za svaku od njih naveo korektna pravila zaključivanja. Neka od njih, kao što su *modus ponens* i *modus tolens* su se održala i do danas.

Tokom srednjeg veka nije došlo do nekih značajnijih pomaka. Iz ovog perioda se mogu izdvojiti radovi Galena, iz drugog veka nove ere, zatim Betiusa, iz šestog veka nove ere, kao i radovi srednjevekovnih mislilaca kao što su Piter Abelard (1079-1142) i Vilijam od Okama (1288-1347). Veći deo njihovog rada se odnosio na razvijanje bolje formalizacije Aristotelovih ili Krisipusovih principa, uvođenje bolje terminologije i unapređivanje diskusije o odnosima između veznika. Na primer, smatra se da je Abelard prvi jasno razdvojio ekskluzivnu od inkluzivne disjunkcije i uvideo da je inkluzivna pogodnija za razvoj jednostavnih logika.

Sledeći značajan pomak u razvoju iskazne logike se desio tek sredinom devetnaestog veka, sa zasnivanjem simboličke logike u radovima Augustusa De Morgana (1806-1871) i, posebno, Džordža Bula (1815-1864), koji su, imajući za inspiraciju tadašnje radove na polju algebre, reformisali i proširili tradicionalnu Aristotelovsku doktrinu logike i razvili adekvatne instrumente za istraživanje osnovnih koncepata matematike, kao što su teorija skupova, teorija dokaza, teorija modela i teorija rekurzije. Ovi rezultati su pokrenuli interesovanje tadašnjih matematičara za logiku, a imali su i velikog udela u dizajnu računara i programiranju tokom dvadesetog veka.

Vrhunac logike devetnaestog veka je dostignut 1879. godine, kada je Gotlib Frege (1848-1925) u svojoj knjizi "Begriffsschrift" ("Zapisivanje pojmova") precizno uveo formalni jezik i svojstva kvantifikatora, određen broj aksiomatskih shema i pravila izvođenja, kao i pojmove izvođenja i dokaza. Iako svojim sadržajem ova knjiga izlazi iz okvira iskazne logike, iz Fregeove aksiomatizacije predikatskog računa se može izvesti prva potpuna aksiomatizacija iskazne logike. Zbog svih otkrića koje je Frege u ovoj knjizi predstavio, 1879. godina se smatra najznačajnijom godinom u istoriji logike.

Početkom dvadesetog veka, Bertrand Rasel je, u svom radu iz 1906. godine „Teorija implikacije", dao potpunu aksiomatizaciju iskazne logike drugačiju od Fregeove, da bi nešto kasnije, 1910. godine, zajedno sa Alfredom Vajthedom u njihovom kapitalnom delu "Principia Mathematica" dao još jednu potpunu aksiomatizaciju, koristeći negaciju i disjunkciju kao osnovne logičke veznike. Godine 1917., Francuski logičar Žan Niko je dao aksiomatizaciju iskazne logike koristeći samo Šeferov veznik $\uparrow$, jednu aksiomsku shemu i jedno pravilo izvođenja.

Tokom narednih trideset godina, mnogi logičari i mislioci, među kojima su Dejvid Hilbert, Alfred Tarski, Jan Lukašijevič, Gerhard Gencen i Alonzo Čerč, sistematizovano su se bavili ispitivanjem deduktivnih sistema za iskaznu logiku i njima srodnom metateorijom. Tarski je prvi precizno definisao pojam semantike, odnosno značenja formula iskazne logike, dok je, sa druge strane, Gencen, vodeći se idejom da stvori račun bliži intuitivnom logičkom zaključivanju od formalizama Fregea, Rasela i Hilberta, razvio sistem prirodne dedukcije i račun sekvenata.

Iskazna logika je, u nastavku dvadesetog veka, zajedno sa predikatskom logikom ostvarila značajan uticaj na razvoj računarstva i prvih programskih jezika i dala bitan doprinos izgradnji teorije formalnih jezika. Konačno, neke od metoda zaključivanja u iskaznoj i predikatskoj logici, kao što su metod rezolucije i metod tabloa, našle su svoju primenu u oblasti automatskog rezonovanja, koja je i danas veoma aktuelna.

1.2 O potpunim skupovima veznika

Prvi rezultati na temu potpunih skupova veznika datiraju iz druge polovine devetnaestog veka, kada je nemački logičar Gotlib Frege prvi dokazao da skup veznika $\{\neg, \Rightarrow\}$ čini potpun skup veznika.

Što se tiče jednočlanih potpunih skupova veznika, američki logičar Čarls Pirs je 1880. godine pokazao svojstvo potpunosti svakog od binarnih veznika $\uparrow$ i $\downarrow$, ali svoje rezultate nije nigde publikovao. Prvi publikovani rezultati na tu temu datiraju iz 1913. godine, kada je američki logičar Henri Šefer dokazao da se uobičajeni logički veznici $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ mogu predstaviti preko logičkog veznika $\uparrow$, samim tim pokazujući da veznik $\uparrow$ čini sam za sebe potpun skup veznika i potvrđujući rezultate Pirsa.

Godine 1941., Post je dao neophodne i dovoljne uslove za potpunost proizvoljnog skupa veznika [12]. Glavna svrha tog njegovog rada je bio kompletan opis svih funkcionalno zatvorenih skupova bulovskih funkcija. Kao dodatni rezultat, formulisao je pet svojstava predpotpunosti, a preko njih dalje i kriterijum potpunosti. U radu [11], autori su prilagodili Postovu zastarelu notaciju modernoj logici i, koristeći tu novu notaciju, ponovo dokazali sva bitna tvrđenja iz pomenutog Postovog rada.

Potpuni skupovi veznika nalaze svoju primenu u mnogim granama, kako matematike, tako i informatike i elektronike. Na primer, u digitalnim sistemima kod kojih je neophodna upotreba određenih logičkih kola moguće je koristiti potpune skupove logičkih veznika, jer se preko veznika iz takvog skupa mogu izgraditi sva logička kola. Mnoga logička kola se konstruišu samo korišćenjem jednog od dva potpuna binarna veznika $\uparrow$ i $\downarrow$, pri čemu se ipak češće koristi veznik $\uparrow$.

Prezapisivanje iskaznih formula u njima logički ekvivalentne formule se koristi u mnogim kontekstima. U nekim situacijama, poželjno je da te formule budu zapisane korišćenjem određenog potpunog skupa logičkih veznika.

Potpuni skupovi veznika se mogu koristiti i pri razvoju deduktivnih sistema, u kojima se u okviru aksioma i pravila izvođenja koriste samo veznici iz tog skupa. Na taj način se mogu dobiti elegantni deduktivni sistemi, pogodni za dalju formalnu analizu.

Postoje rezultati vezani za potpune skupove veznika u okviru viševrednosnih logika [5], kao i odgovarajuća karakterizacija potpunosti u nekim specijalnim slučajevima.

Glava 2

Osnovni pojmovi i notacija

U okviru ove glave biće uvedeni sintaksa i semantika iskazne logike, pojam potpunog skupa logičkih veznika, kao i pojmovi formalne teorije i deduktivnog sistema.

2.1 Sintaksa i semantika iskazne logike

U prvom delu ovog poglavlja biće uvedena sintaksa iskazne logike, dok će u drugom delu biti uvedena semantika iskazne logike u stilu Tarskog.

2.1.1 Sintaksa iskazne logike

Definicija 2.1 *Neka je alfabet Σ unija sledeća četiri skupa:*

1. *prebrojivog skupa iskaznih slova P;*
2. *skupa logičkih veznika $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, pri čemu je $\neg$ unarni logički veznik, dok su $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ binarni logički veznici;*
3. *skupa logičkih konstanti $\{\top, \bot\}$;*
4. *skupa pomoćnih simbola $\{(,)\}$.*

Skup iskaznih formula *(ili* jezik iskazne logike*) nad skupom P, u oznaci For_P, je* najmanji podskup skupa svih reči nad alfabetom Σ, takav da važi:

- iskazna slova iz skupa P i logičke konstante su iskazne formule;
- ukoliko su A i B iskazne formule, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$ i $(A \Leftrightarrow B)$ iskazne formule.

Iskazna slova nazivamo i *iskaznim promenljivim* ili *iskaznim varijablama*. Logičke veznike nazivamo i *bulovskim veznicima* ili, kraće, *veznicima*. Veznik $\neg$ nazivamo *negacija*, veznik $\wedge$ *konjunkcija*, veznik $\vee$ *disjunkcija*, veznik $\Rightarrow$

implikacija i veznik $\Leftrightarrow$ *ekvivalencija.* Simbol logičke konstante $\top$ čitamo *te*, dok simbol logičke konstante $\bot$ čitamo *nete.* Iskazne formule nazivamo kraće *formulama* ili *iskazima.*

Ukoliko su dve formule A i B sintaksno identične, tj. ukoliko su jednake kao nizovi simbola, tada pišemo $A = B$. U suprotnom, pišemo $A \neq B$.

Zagrade se koriste kako bi se obezbedila jednoznačnost tumačenja iskaznih formula. Međutim, zbog čitljivosti, uvešćemo konvenciju zasnovanu na prioritetu veznika. Najveći prioritet dodelićemo vezniku $\neg$, za kojim slede, u opadajućem redosledu prioriteta, veznici $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$. Ovime je omogućeno izostavljanje zagrada u iskaznim formulama bez gubitka jednoznačnosti pri njihovom tumačenju.

Definicija 2.2 *Funkcija l iz skupa iskaznih formula u skup $\mathbb{N}$ svakoj iskaznoj formuli pridružuje njenu* dužinu *na sledeći način:*

1. *ukoliko je A atomička iskazna formula, onda je $l(A) = 1$,*
2. $l(\neg A) = l(A) + 1$,
3. $l(A \wedge B) = l(A) + l(B) + 1$,
4. $l(A \vee B) = l(A) + l(B) + 1$,
5. $l(A \Rightarrow B) = l(A) + l(B) + 1$,
6. $l(A \Leftrightarrow B) = l(A) + l(B) + 1$,

Ovakvom definicijom je obezbeđeno da se svakoj formuli pridružuje jedinstvena dužina.

2.1.2 Semantika iskazne logike

Semantički aspekt iskazne logike govori o značenju formula. U nastavku će biti uvedena semantika iskazne logike u stilu Tarskog.

Funkcije $v : P \rightarrow \{0, 1\}$ nazivamo *valuacijama* i skup svih valuacija označavamo sa Ω. Skup $\{0, 1\}$, iako predstavlja kodomen funkcije v, nazivamo *domenom* ili *univerzumom* valuacije. Svaka valuacija v određuje po jednu funkciju $I_v : For_P \rightarrow \{0, 1\}$, koju nazivamo *interpretacijom* za valuaciju V, i koju definišemo na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za svako $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$, $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } I_v(A) = 1 \\ 1, & \text{ako je } I_v(A) = 0 \end{cases}$,

- $I_v(A \wedge B) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } I_v(A) = 1 \text{ i } I_v(B) = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$,

- $I_v(A \vee B) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } I_v(A) = 0 \text{ i } I_v(B) = 0, \\ 1, & \text{inače;} \end{cases}$

- $I_v(A \Rightarrow B) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } I_v(A) = 1, \text{ i } I_v(B) = 0, \\ 1, & \text{inače;} \end{cases}$

- $I_v(A \Leftrightarrow B) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } I_v(A) = I_v(B), \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$

Vrednost $I_v(A)$ nazivamo *vrednošću iskazne formule A u interpretaciji I_v*. Ukoliko za valuaciju v važi $I_v(A) = 1$, tada kažemo da je iskazna formula A *tačna u interpretaciji I_v* i da je iskazna formula A *tačna u valuaciji v*. Ukoliko za valuaciju v važi $I_v(A) = 0$, tada kažemo da je iskazna formula A *netačna u interpretaciji I_v*.

Indukcijom nad skupom iskaznih formula se jednostavno pokazuje da se, za određenu valuaciju v, funkcijom I_v, definisanom na navedeni način, svakoj iskaznoj formuli A pridružuje jedinstvena vrednost $I_v(A)$, u toj interpretaciji.

Definicija 2.3 *Valuacija v je* zadovoljavajuća *za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v* model *za A i pišemo $v \models A$.*

Definicija 2.4 *Iskazna formula A je:*

- zadovoljiva*, ukoliko postoji valuacija koja je za nju zadovoljavajuća;*

- valjana *ili* tautologija*, u oznaci $\models A$, ukoliko je svaka valuacija za nju zadovoljavajuća;*

- poreciva*, ukoliko postoji valuacija koja za nju nije zadovoljavajuća;*

- nezadovoljiva *ili* kontradikcija*, ukoliko svaka valuacija za nju nije zadovoljavajuća.*

Definicija 2.5 *Za dve iskazne formule A i B kažemo da su* logički ekvivalentne*, u oznaci $A \equiv B$ ukoliko je svaki model formule A ujedno i model formule B i obratno.*

2.2 Potpuni skupovi logičkih veznika

Istinitosna funkcija ili *bulovska funkcija* arnosti n je funkcija koja preslikava skup $\{0,1\}^n$ u skup $\{0,1\}$. Primetimo da za dato n postoji 2^{2^n} istinitosnih funkcija arnosti n.

Funkcija interpretacije definisana za veznike $\neg$ i $\vee$ se može prikazati tablično:

$I_v(A)$	$I_v(\neg A)$
0	1
1	0

$I_v(A)$	$I_v(B)$	$I_V(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Razmatrajući strukturu ovih tablica, zaključujemo da je moguće definisati četiri različita (u smislu semantike Tarskog) veznika arnosti 1, odnosno šesnaest različitih veznika arnosti 2. U opštem slučaju, za dato n, moguće je definisati 2^{2^n} različitih veznika arnosti n, a 2^{2^n} je upravo i broj svih istinitosnih funkcija arnosti n. Lako je pokazati da se može uspostaviti bijekcija između skupa svih logičkih veznika arnosti n i skupa svih istinitosnih funkcija arnosti n i prirodno je da ta bijekcija bude indukovana upravo funkcijom interpretacije.

Neka je $\mathcal{F}$ skup istinitosnih funkcija proizvoljne arnosti. Svaka funkcija $\varphi \in \mathcal{F}$ je jednoznačno indukovana funkcijom interpretacije odgovarajućeg logičkog veznika c_φ i u daljem tekstu ćemo istinitosne funkcije identifikovati sa njima odgovarajućim logičkim veznicima. Sa $\mathrm{F}m(\mathcal{F})$ označavamo skup svih iskaznih formula nad prebrojivim skupom iskaznih slova P i skupom logičkih veznika $\{c_\varphi : \varphi \in \mathcal{F}\}$. Taj skup se definiše induktivno, na način analogan onome korišćenom u definiciji 2.1. Sa stanovišta algebre, $\mathrm{F}m(\mathcal{F})$ je upravo slobodna algebra tipa $(c_\varphi : \varphi \in \mathcal{F})$, generisana skupom P.

Ukoliko je $A = A(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ formula koja sadrži n iskaznih promenljivih $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$, tada A indukuje n-arnu istinitosnu funkciju $\overline{A} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ na sledeći način: vrednost $\overline{A}(x_1, \ldots, x_k)$ se dobija valuiranjem promenljivih valuacijom $v : P \to \{0,1\}$, gde je $v(p_{i_j}) = x_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ i interpretiranjem veznika c_φ interpretacijom indukovanom valuacijom v. Može se pokazati da logički ekvivalentne formule sa istim brojem iskaznih slova generišu identične istinitosne funkcije.

Istinitosna funkcija φ (odnosno, njoj odgovarajući logički veznik c_φ) se naziva *definabilnom* preko skupa iskaznih funkcija $\mathcal{F}$ (*definabilnim* preko skupa veznika koji odgovaraju funkcijama iz skupa $\mathcal{F}$), ukoliko je $\varphi = \overline{A}$, za neku formulu $A \in \mathrm{F}m(\mathcal{F})$.

Skup svih istinitosnih funkcija definabilnih preko skupa $\mathcal{F}$ nazivamo *funkcionalnim zatvorenjem* $\mathcal{F}$ i označavamo sa $[\mathcal{F}]$. Skup $\mathcal{F}$ nazivamo *funkcionalno zatvorenim* ukoliko je $\mathcal{F} = [\mathcal{F}]$. Ukoliko je $\mathcal{F}$ funkcionalno zatvoren, i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, takav da je $[\mathcal{E}] = \mathcal{F}$, kažemo da je $\mathcal{F}$ generisan skupom $\mathcal{E}$ i ukoliko je još $\mathcal{E}$ funkcionalno nezavisan, odnosno minimalni generator, tada $\mathcal{E}$ nazivamo *bazom* $\mathcal{F}$. Skup istinitosnih funkcija $\mathcal{F}$ se naziva *funkcionalno potpunim* ukoliko je $[\mathcal{F}]$ jednak skupu svih istinitosnih funkcija. Skup logičkih veznika se naziva *potpunim* ukoliko je njemu odgovarajući skup istinitosnih funkcija funkcionalno potpun.

n-arna istinitosna funkcija φ i njen odgovarajući veznik c_φ se mogu definisati koristeći *istinitosne tablice*:

p_1	p_2	$\ldots$	p_{n-1}	p_n	$\varphi(p_1, \ldots, p_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	t_0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
α_1	α_2	$\ldots$	α_{n-1}	α_n	t_α
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\ldots$	1	1	t_{2^n-1}

gde t_α označava vrednost formule $c_\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ za datu valuaciju $v \in \Omega$, dok je α broj čija je binarna reprezentacija oblika $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, gde je $\alpha_1 = v(p_1), \ldots, \alpha_n = v(p_n)$.

Jedina dva binarna veznika koja sama čine potpun skup logičkih veznika su Šeferov veznik $\uparrow$ i Pirsov veznik (koji se naziva još i Lukačijevičev veznikom) $\downarrow$, dati sledećim istinitosnim tablicama:

x_1	x_2	$x_1 \uparrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Dokaz ovog tvrđenja se može naći u, npr. [4].

2.3 Deduktivni sistemi

??

Definicija 2.6 *Formalnu teoriju $\mathcal{T}$ čini:*

1. *prebrojiv skup Σ simbola, koji čine* alfabet *teorije $\mathcal{T}$;*

2. *podskup skupa svih reči nad alfabetom Σ; elemente ovog skupa nazivamo* dobro zasnovanim formulama *ili, kraće,* formulama *teorije $\mathcal{T}$;*

3. *podskup skupa svih formula teorije $\mathcal{T}$, koji zovemo* skupom aksioma *teorije $\mathcal{T}$; ukoliko je skup aksioma rekurzivan, tada teoriju $\mathcal{T}$ nazivamo* aksiomatibilnom teorijom*;*

4. *konačan skup $R_1, \ldots, R_n$ relacija (ili shema relacija) između formula koje nazivamo* pravilima izvođenja*; za svako pravilo izvođenja arnosti $j+1$ i za svaki skup od $j+1$ formula $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Psi\}$ se može efektivno odrediti da li je prvih j formula u relaciji R_i sa $j+1$-om formulom; ukoliko je to slučaj, onda kažemo da je ta formula direktna posledica datog skupa od j formula na osnovu pravila R_i i pišemo*

$$\frac{\Phi_1 \ \ldots \ \Phi_n}{\Psi} \ R_i$$

Skupovi opisani u tačkama 3 i 4 prethodne definicije određuju deduktivni sistem u okviru formalne teorije $\mathcal{T}$. Primetimo da su ovako definisani deduktivni sistemi čisto sintaksne prirode i da se u okviru njih ni na koji način ne pominje semantika formula.

Definicija 2.7 *Pod* dokazom *formule Φ u okviru formalne teorije $\mathcal{T}$ podrazumevamo niz formula $\Phi_1, \ldots, \Phi_n = \Phi$, takav da za svako i važi da je formula Φ_i ili aksioma teorije $\mathcal{T}$ ili direktna posledica nekih od prethodnih formula u nizu, na osnovu nekog pravila izvođenja.*

Dobro zasnovana formula Φ teorije $\mathcal{T}$ je *deduktivna posledica* skupa formula Γ, u oznaci $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \Phi$, ukoliko postoji dokaz formule Φ u okviru teorije $\mathcal{T}$, koji kao aksiome može uključivati i formule iz skupa Γ. Elemente skupa Γ tada nazivamo i *hipotezama* ili *premisama* tog dokaza. Kada je jasno o kojoj je teoriji reč, umesto $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} \Phi$ pišemo $\Gamma \vdash \Phi$. Ukoliko je skup Γ prazan, umesto $\emptyset \vdash \Phi$ pišemo $\vdash \Phi$ i kažemo da je formula Φ *teorema* teorije $\mathcal{T}$, kao i da je formula Φ *dokaziva* u okviru teorije $\mathcal{T}$.

Definicija 2.8 *Formalna teorija $\mathcal{T}$ je* aksiomatska *ukoliko je skup njenih aksioma rekurzivan.*

Primer 2.1 *Hilbertov sistem, koji se još naziva i teorija L, je jedan od deduktivnih sistema za iskaznu logiku. U okviru njega, jezik iskazne logike je definisan na nešto drugačiji način nego u glavi 2.1.1. Za osnovne logičke veznike se uzimaju samo veznici $\neg$ i $\Rightarrow$, dok se ostali logički veznici i logičke konstante definišu preko njih i smatraju skraćenicama i u skladu sa tim se prilagođava i definicija skupa iskaznih formula.*

Aksiome teorije L su sledeće sheme formula (gde su A, B i C proizvoljne iskazne formule):

(A1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(A2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(A3) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$

U okviru teorije L postoji jedno pravilo izvođenja, modus ponens*:*

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\ (MP)$$

Skup aksioma teorije L je beskonačan, ali je rekurzivan, pa teorija L jeste aksiomatska teorija i ona, između ostalog, zadovoljava sledeće osobine:

- saglasnost – *ukoliko je formula A teorema teorije L, onda je ona tautologija,*
- potpunost – *ukoliko je formula A tautologija, onda je ona teorema teorije L,*
- konzistentnost – *ne postoji iskazna formula A, takva da su A i $\neg A$ teoreme teorije L, i*
- odlučivost – *za svaku iskaznu formulu A se može efektivno proveriti da li je teorema teorije L.*

Glava 3

Pregled postojećih rezultata

U ovoj glavi biće predstavljeni neki od najznačajnijih postojećih rezultata o potpunim skupovima logičkih veznika. U prvom delu biće predstavljena njihova opšta karakterizacija, dok će u drugom delu biti predstavljeni rezultati na temu deduktivnih sistema u kojima učestvuju potpuni logički veznici $\uparrow$ i $\downarrow$.

3.1 Postova karakterizacija PSV

Iako počeci iskazne logike i istraživanja istinitosnih funkcija datiraju znatno ranije, prve rezultate u vezi sa karakterizacijom funkcionalne potpunosti proizvoljnog skupa istinitosnih funkcija (i, samim tim, karakterizacije potpunosti proizvoljnog skupa logičkih veznika) je dao, 1941. godine, američki matematičar i logičar Emil Post [12]. Međutim, notacija koju je on koristio je bila, sa tačke gledišta moderne logike, veoma komplikovana. Formulacije i dokazi Postovih tvrđenja iz tog rada, prilagođeni modernoj notaciji, su prezentovani u radu [11], na kojem se i zasniva ovaj pregled.

Uvešćemo, neformalno, pojam *irelevantnog argumenta* ili *irelevantne pozicije* u okviru istinitosne funkcije. Argument istinitosne funkcije je *irelevantan* ukoliko njegova vrednost nema uticaj na vrednost funkcije. Na primer, neka je data istinitosna funkcija $\varphi(p_1, p_2)$ svojom istinitosnom tablicom:

p_1	p_2	$\varphi(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Primetimo da vrednosti koje ima funkcije φ u sva četiri slučaja predstavljaju negaciju prvog argumenta funkcije, odnosno da vrednost drugog argumenta nema uticaja na vrednost funkcije, te je, stoga, drugi argument funkcije irelevantan.

Definišimo, neformalno, dalje pet svojstava vezanih za istinitosne funkcije:

Svojstvo 1. *Funkcije zatvorene za 0*: Istinitosna funkcija φ je *zatvorena za 0* ukoliko je $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$, odnosno ukoliko je, koristeći oznake iz glave 2, $t_0 = 0$.

Svojstvo 2. *Funkcije zatvorene za 1*: Istinitosna funkcija φ je *zatvorena za 1* ukoliko je $\varphi(1, \ldots, 1) = 1$, odnosno ukoliko je, koristeći oznake iz glave 2, $t_{2^n-1} = 1$.

Svojstvo 3. *Brojačke funkcije*: Istinitosna funkcija φ je *brojačka* ukoliko važi da se svakom promenom vrednosti argumenta funkcije na poziciji koja nije irelevantna uvek menja i vrednost same funkcije. Drugim rečima, za takvu funkciju, svaka pozicija je ili irelevantna ili uvek relevantna. Može se dati jednostavan kriterijum za određivanje da li je neka istinitosna funkcija ujedno i brojačka: prvo se uklone irelevantne pozicije, a zatim, ukoliko važi da

a) kada je paran broj argumenata funkcije φ jednak 1, tada je vrednost funkcije φ jednaka 1 i kada je neparan broj argumenata funkcije φ jednak 0, tada je vrednost funkcije φ jednaka 0, ili obratno,
b) kada je neparan broj argumenata funkcije φ jednak 1, tada je vrednost funkcije φ jednaka 1 i kada je paran broj argumenata funkcije φ jednak 0, tada je vrednost funkcije φ jednaka 0,

tada je funkcija φ brojačka.

Svojstvo 4. *Monotone funkcije*: n-arna istinitosna funkcija φ je *monotona* ukoliko važi da, za svake dve n-torke $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ i $Y = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ nula i jedinica koje se razlikuju samo na jednoj poziciji, a za koje važi $X \leq Y$[1], ujedno važi i $\varphi(X) \leq \varphi(Y)$.

Svojstvo 5. *Samo-dualne funkcije*: Kažemo da je istinitosna funkcija φ *samo-dualna* ukoliko su nizovi nula i jedinica koji se dobijaju kada se vrednosti funkcije u istinitosnoj tablici poređaju po redu čitanja odozgo nadole i odozdo nagore komplementarni.

Koristeći navedena svojstva, može se formulisati Postova teoremu o karakterizaciji:

Teorema 3.1 *Skup istinitosnih funkcija $\mathcal{F}$ je funkcionalno potpun ako i samo ako za svako od pet navedenih svojstava, postoji istinitosna funkcija koja pripada skupu $\mathcal{F}$ koja to svojstvo ne zadovoljava.*

[1] Ovde je u pitanju leksikografsko poređenje, uz konvenciju da je $0 < 1$.

Primer 3.1 *Pokažimo da skup $\{\neg, \wedge\}$ čini potpun skup veznika.*

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Kako je, za veznik $\neg$, $t_0 = 1$ i $t_1 = 0$, važi da njemu odgovarajuća istinitosna funkcija $f_\neg$ ne zadovoljava svojstva 1 i 2. Takođe, kako važi $0 < 1$, a $1 = \varphi_\neg(0) > \varphi_\neg(1) = 0$, važi da $\varphi_\neg$ ne zadovoljava ni svojstvo 4. Sa druge strane, $\varphi_\neg$ zadovoljava svojstva 3 i 5. Dakle, da bi se pokazalo da skup $\{\neg, \wedge\}$ čini potpun skup veznika, potrebno je još pokazati da istinitosna funkcija $\varphi_\wedge$, koja odgovara vezniku $\wedge$, ne zadovoljava svojstva 3 i 5. Za funkciju $\varphi_\wedge$ važi da je $\varphi_\wedge(0,0) = \varphi_\wedge(0,1) = 0$, pa kako je u prvom slučaju paran, a u drugom neparan broj argumenata jednakih 0, i kako je vrednost funkcije ista u oba ta slučaja, funkcija $\varphi_\wedge$ ne zadovoljava svojstvo 3. Dalje, važi da je niz nula i jedinica vrednosti funkcije $\varphi_\wedge$ koji se dobija čitanjem njene istinitosne tablice odozgo nadole jednak 0001, *kao i da je niz koji se dobija čitanjem odozdo nagore jednak* 1000. *Kako ta dva niza nisu komplementarna, funkcija $\varphi_\wedge$ ne zadovoljava svojstvo 5.*

Na osnovu teoreme 3.1 sledi da skup $\{\varphi_\neg, \varphi_\wedge\}$ čini funkcionalno potpun skup istinitosnih funkcija, a samim tim, važi da odgovarajući skup veznika $\{\neg, \wedge\}$ čini potpun skup veznika.

Primer 3.2 *Lako se proverava da logički veznici $\uparrow$ i $\downarrow$ ne zadovoljavaju nijedno od pet navedenih svojstava, te da svaki od njih čini, sam za sebe, jednočlan potpun skup veznika.*

3.2 Deduktivni sistemi sa jednočlanim PSV

U poglavlju **??** navedene su četiri osobine koje zadovoljava Hilbertov sistem aksioma: saglasnost, potpunost, konzistentnost i odlučivost. Te četiri osobine su od velike važnosti za bilo koju formalnu teoriju, jer se preko njih ostvaruje veza između sintakse i semantike te teorije. Shodno tome, za dati deduktivni sistem sa konačnim skupom aksioma se mogu postaviti sledeća pitanja:

- Da li postoji opšti algoritam kojim se može utvrditi saglasnost i potpunost tog sistema?
- Da li postoji opšti algoritam kojim se ispituje nezavisnost aksioma tog sistema?
- Da li za svaki skup aksioma postoji algoritam kojim se može ispitati da li je data formula teorema tog sistema?

Lineal i Post su 1949. godine dokazali [6] da su sva tri navedena problema neodlučiva. Oni su dali samo skicu dokaza, dok je pun dokaz neodlučivosti objavljen 1963. godine, u radu [16]. Iz ovih rezultata sledi da eventualni dokazi saglasnosti i potpunosti sistema mogu značajno varirati u strukturi i složenosti, kao i da nema garancija da mala promena u strukturi aksioma neće dovesti do velike promene u tim dokazima.

U nastavku ove glave će biti predstavljeni dosadašnji rezultati na temu deduktivnih sistema koji imaju istu izražajnost kao i Hilbertov sistem, a koji od logičkih veznika koriste isključivo jedan od dva binarna potpuna veznika, $\uparrow$ i $\downarrow$.

Kod takvih deduktivnih sistema, kao i kod teorije L, neophodno je prilagoditi definiciju jezika iskazne logike i skupa iskaznih formula, što se čini na način analogan onome prikazanom u primeru 2.1, kao i definiciju dužine formule. Dalje je neophodno definisati odgovarajuće skupove aksioma i pravila izvođenja.

Jedan od najstarijih zaključaka u ovoj oblasti je da je veznik $\uparrow$, uslovno rečeno, pogodniji za rad od veznika $\downarrow$. Naime, najkraća tautologija koja sadrži jedino veznik $\uparrow$ je $(p \uparrow p) \uparrow p$, dok je, u slučaju veznika $\downarrow$, to $((p \downarrow p) \downarrow p) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow p)$, pa je za očekivati da tautologije koje sadrže veznik $\downarrow$ budu duže od onih sa veznikom $\uparrow$. Dalje, neka od pravila izvođenja koja bi se mogla pojedinačno koristiti u okviru odgovarajućih deduktivnih sistema sa veznikom $\uparrow$ su: [14]

$$\frac{A \quad A\uparrow(B\uparrow C)}{C}\ (S1) \qquad \frac{A \quad A\uparrow(B\uparrow C)}{B}\ (S2) \qquad \frac{A \quad A\uparrow(B\uparrow B)}{B}\ (S3)$$

Najčešće se u okviru deduktivnih sistema koristi pravilo $(S1)$. Ono je, na primer, jače od pravila $(S3)$, jer postoji veća sloboda u drugom zahtevu koji mora biti ispunjen za primenu pravila. Iz istog razloga je i pravilo $(S2)$ jače od pravila $(S3)$. U slučaju deduktivnih sistema sa veznikom $\downarrow$, mogla bi se koristiti pravila oblika:

$$\frac{A \quad ((A\downarrow B)\downarrow C)\downarrow D}{C}\ (D1) \qquad \frac{A \quad ((A\downarrow B)\downarrow C)\downarrow((A\downarrow B)\downarrow C)}{C}\ (D2) \qquad \frac{A \quad ((A\downarrow A)\downarrow B)\downarrow C}{B}\ (D3)\ ,$$

uz napomenu da se u okviru deduktivnih sistema najčešće koristi pravilo $(D1)$. Iz prethodno razmatranog vidimo da su i pravila izvođenja jednostavnija u slučaju veznika $\uparrow$, te se, iz ovih razloga, veći deo rezultata odnosi na deduktivne sisteme sa veznikom $\uparrow$.

Godine 1917., Žan Niko [10] je predstavio deduktivni sistem koji se sastojao iz jedne aksiome dužine 23:

$$(p \uparrow (q \uparrow r)) \uparrow ((t \uparrow (t \uparrow t)) \uparrow ((s \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow s) \uparrow (p \uparrow s))))$$

i jednog pravila izvođenja – (S1). Dokaz potpunosti tog sistema koji je Niko dao u tom radu nije bio korektan, već je pravi dokaz potpunosti dat tek 1965. godine, u radu T. Šarlea [14].

Lukašijevič je pokazao u radu [7] da se, uz pravilo izvođenja ($S1$) može koristiti i sledeća aksioma, dužine 23, dobijena iz Nikoove zamenom $[t \to s]$:

$$(p \uparrow (q \uparrow r)) \uparrow ((s \uparrow (s \uparrow s)) \uparrow ((s \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow s) \uparrow (p \uparrow s))))$$

Lukašijevičev učenik Vajsberg je kasnije otkrio jednu [15], dok je i sam Lukašijevič otkrio drugu, organsku[2] aksiomu dužine 23:

$$(p \uparrow (q \uparrow r)) \uparrow (((s \uparrow r) \uparrow ((p \uparrow s) \uparrow (p \uparrow s))) \uparrow (p \uparrow (p \uparrow q)))$$

$$(p \uparrow (q \uparrow r)) \uparrow ((p \uparrow (r \uparrow p)) \uparrow ((s \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow s) \uparrow (p \uparrow s))))$$

Naredna teorema iz rada [14] povezuje deduktivne sisteme sa veznikom $\uparrow$ sa onima sa veznikom $\downarrow$. Uvešćemo konvenciju da formula oblika A^* označava formulu A u kojoj su sva pojavljivanja veznika $\uparrow$ zamenjena veznikom $\downarrow$.

Teorema 3.2 *Ukoliko formule A_1 i A_2 čine potpun skup aksioma za veznik $\uparrow$, sa pravilom izvođenja $\frac{A \;\; A\uparrow(B\uparrow C)}{C}$, tada formule*

(B_1) $((((p \downarrow (q \downarrow (r \downarrow s))) \downarrow (p \downarrow (p \downarrow p))) \downarrow ((((t \downarrow q) \downarrow (t \downarrow q)) \downarrow (t \downarrow s)) \downarrow (p \downarrow (p \downarrow p)))) \downarrow A_1^*)$

(B_2) $((((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (q \downarrow p)) \downarrow A_2^*)$

čine potpun skup aksioma za veznik $\downarrow$, sa pravilom izvođenja

$$\frac{A \;\; (((A^* \downarrow B^*) \downarrow C^*) \downarrow D^*)}{C^*}$$

gde je D proizvoljna formula koja sadrži veznik $\uparrow$.

Primena ove teoreme će biti ilustrovana na sledećem primeru.

Primer 3.3 *Može se pokazati da deduktivni sistem koji se sastoji od aksioma*

(A1) $p \uparrow (p \uparrow p)$

(A2) $(p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (((s \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow s) \uparrow (p \uparrow s))) \uparrow ((s \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow s) \uparrow (p \uparrow s))))$

i pravila izvođenja ($S3$) čini potpun skup aksioma za veznik $\uparrow$. Na osnovu teoreme 3.2, deduktivni sistem koji se sastoji iz aksioma

[2] Aksioma se naziva *organskom* ukoliko nijedna njena potformula nije tautologija

(A1) $((((p \downarrow (q \downarrow (r \downarrow s))) \downarrow (p \downarrow (p \downarrow p))) \downarrow ((((t \downarrow q) \downarrow (t \downarrow q)) \downarrow (t \downarrow s)) \downarrow (p \downarrow (p \downarrow p)))) \downarrow (p \downarrow (p \downarrow p)))$

(A2) $((((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (q \downarrow p)) \downarrow ((p \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (((s \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow s) \downarrow (p \downarrow s))) \downarrow ((s \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow s) \downarrow (p \downarrow s))))))$

i pravila izvođenja $\frac{A \ ((A \downarrow B) \downarrow B) \downarrow C}{B}$ $(D3)$ *čini potpun skup aksioma za veznik* $\downarrow$.

Rezultati objavljeni u radu [9], iako se ne odnose na iskaznu logiku, su od značaja za temu jednočlanih potpunih skupova veznika. Taj rad se, između ostalog, bavi jednakosnom aksiomatizacijom bulovih algebri, pri čemu se zahteva da skup jednakosnih aksioma bude jednočlan i da u tim aksiomama od logičkih veznika figuriše jedino veznik $\uparrow$. Pokazano je, koristeći tehnike automatske dedukcije, da postoje jednakosne aksiome koje uključuju jedino veznik $\uparrow$ i koje su dužine 15, kao što su, na primer

$$(x \uparrow ((y \uparrow x) \uparrow x)) \uparrow (y \uparrow (z \uparrow x)) = y$$

ili

$$(((y \uparrow (x \uparrow y)) \uparrow y) \uparrow (x \uparrow (z \uparrow y))) = x$$

kao i da je to najkraća moguća dužina za takve aksiome.

Glava 4

Teorema o karakterizaciji jednočlanih PSV

U prva dva dela ove glave biće dati dovoljni i neophodni uslovi za potpunost jednočlanog skupa veznika, dok će u trećem delu biti prebrojani svi jednočlani potpuni skupovi veznika. Važno je napomenuti da su, iako se mogu izvesti iz Postovih rezultata prikazanih u glavi 3, rezultati prikazani u ovoj glavi dobijeni nezavisno od njih i predstavljaju elegantniji dokaz specijalnog slučaja Postovog tvrđenja.

4.1 Dovoljan uslov potpunosti za jednočlane PSV

Trivijalno se pokazuje da nijedan unarni veznik ne čini potpun skup veznika. Takođe, poznato je da su jedina dva binarna veznika koja sami čine potpune skupove veznika veznici $\uparrow$ i $\downarrow$, te ćemo u nastavku razmatrati jedino veznike arnosti veće ili jednake tri, uz korišćenje vrednosti t_α, opisanih u glavi 2.

Dovoljni uslovi potpunosti za jednočlane potpune skupove veznika su dati narednom lemom. [1]

Lema 4.1 *Ukoliko logički veznik ρ, arnosti n, ispunjava uslove:*

- $t_0 = 1$*;*
- $t_{2^n-1} = 0$*;*
- *postoji neko x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake;*

tada skup $\{\rho\}$ čini jednočlan potpun skup logičkih veznika.

[1] Ovde je izložen dokaz tvrđenja iz rada [8], dok se nešto jednostavnija njegova verzija može naći u radu [13]. U tom radu, prvo se konstruiše logički veznik $\tau(p_0, p_1) = \rho(p_{x_0}, \ldots, p_{x_{n-1}})$, gde su $x_0, \ldots, x_{n-1}$ cifre binarne reprezentacije broja x iz trećeg uslova leme 4.1, a zatim se razmatraju slučajevi po vrednostima koje mogu uzimati p_0 i p_1.

Dokaz: Neka postoji vrednost x, $0 < x < 2^{n-1}$, takva da važi $t_x = t_{2^n-1-x}$. Kako su sve odgovarajuće cifre u binarnim reprezentacijama brojeva x i $2^n - 1 - x$ komplementarne, istinitosna tablica veznika $\rho(p_1, \ldots, p_n)$ ima sledeći oblik:

p_1	p_2	$\ldots$	p_{n-1}	p_n	$\rho(p_1, \ldots, p_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	t_0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	t_x
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1 - x_1$	$1 - x_2$	$\ldots$	$1 - x_{n-1}$	$1 - x_n$	t_{2^n-1-x}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\ldots$	1	1	t_{2^n-1}

Definišimo binarni veznik τ na sledeći način: $\tau(p_1, p_2) \equiv \rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde je

$$A_i = \begin{cases} p_1, & \text{ako je } x_i = 0, \\ p_2, & \text{ako je } x_i = 1, \end{cases}$$

gde x_i označava vrednost i-te cifre u binarnoj reprezentaciji broja x.

Za $v(p_1) = 0, v(p_2) = 0$, važi $v(A_i) = 0$, dok za $v(p_1) = 1, v(p_2) = 1$, važi $v(A_i) = 1$.

Za $v(p_1) = 0, v(p_2) = 1$, važi:

$$v(A_i) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x_i = 0, \\ 1, & \text{ako je } x_i = 1. \end{cases}$$

odnosno važi $v(A_i) = x_i$.

Slično tome, za $v(p_1) = 1, v(p_2) = 0$, važi:

$$v(A_i) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_i = 0, \\ 0, & \text{ako je } x_i = 1. \end{cases}$$

tj. važi $v(A_i) = 1 - x_i$.

Dakle, istinitosna tablica veznika τ ima sledeći oblik:

p_1	p_2	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\tau(p_1, p_2)\ (\equiv \rho(A_1, \ldots, A_n))$
0	0	0	0	$\ldots$	0	t_0
0	1	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	t_x
1	0	$1 - x_1$	$1 - x_2$	$\ldots$	$1 - x_n$	t_{2^n-1-x}
1	1	1	1	$\ldots$	1	t_{2^n-1}

U skladu sa načinjenim pretpostavkama, važi $t_0 = 1$ i $t_{2^n-1} = 0$, kao i da je ili $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$ ili $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$.

Ukoliko je $t_x = t_{2^n-1-x} = 1$, tada je istinitosna tablica veznika τ oblika:

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a to je upravo istinitosna tablica veznika $\uparrow$. Kako $\{\uparrow\}$ čini jednočlan potpun skup veznika i kako je $\uparrow$ definabilan preko veznika $\{\rho\}$, sledi da i $\{\rho\}$ takođe čini jednočlan potpun skup veznika.

Ukoliko je $t_x = t_{2^n-1-x} = 0$, tada je istinitosna tablica veznika τ oblika:

p_1	p_2	$\tau(p_1, p_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

a to je upravo istinitosna tablica veznika $\downarrow$. Kako $\{\downarrow\}$ čini jednočlan potpun skup veznika i kako je $\uparrow$ definabilan preko veznika $\{\rho\}$, sledi da i $\{\rho\}$ takođe čini jednočlan potpun skup veznika. □

4.2 Neophodan uslov potpunosti za jednočlane PSV

Pre nego što dokažemo da su uslovi leme 4.1 neophodni, dokazaćemo sledeću lemu.

Lema 4.2 *Pretpostavimo da je ρ logički veznik arnosti n takav da u okviru njegove istinitosne tablice važi $t_0 = 1$, $t_{2^n-1} = 0$, i da ne postoji vrednost x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake. Tada je formula $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$, logički ekvivalentna jednoj od sledećih formula: p_1, $\neg p_1$, p_2, $\neg p_2$.* [2]

Dokaz: Ukoliko važi da $A_i \in \{p_1, \neg p_1\}$ ili $A_i \in \{p_2, \neg p_2\}$, tj. ukoliko u skupu svih A_i figuriše samo jedno iskazno slovo (bez umanjivanja opštosti,

[2] Ovde pod $\neg$ podrazumevamo definiciju tog veznika preko veznika $\{\rho\}$, na primer, $\neg p = \rho(p, p, \ldots, p)$.

pretpostavićemo da je u pitanju iskazno slovo p_1), tada istinitosna tablica za formulu $\rho(A_1, \ldots, A_n)$ ima oblik:

p_1	$\neg p_1$	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	1	α_1	α_2	$\ldots$	α_n	t_α
1	0	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	t_β

Na osnovu mogućnosti izbora za A_i, za svako A_i važi da je $\beta_i = 1 - \alpha_i$, što znači da je $\beta = 2^n - 1 - \alpha$. Na osnovu pretpostavki leme, važi da je $t_\beta \neq t_\alpha$, te je, stoga (kako vrednosti koje imaju t_i mogu biti jedino 0 ili 1), $t_\beta = 1 - t_\alpha$. Tvrđenje dokazujemo razmatranjem sledeća dva slučaja:

1. Ukoliko je $t_\alpha = 0$, tada je $t_\beta = 1$, što znači da je $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. Ukoliko je $t_\alpha = 1$, tada je $t_\beta = 0$, što znači da je $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

Analogno se razmatra slučaj kada u skupu svih A_i figuriše samo iskazno slovo p_2. Dalje, neka u skupu svih A_i figurišu oba iskazna slova p_1 i p_2. Tada istinitosna tablica za formulu $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$ ima sledeći oblik:

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	A_1	A_2	$\ldots$	A_n	$\rho(A_1, \ldots, A_n)$
0	0	1	1	α_1	α_2	$\ldots$	α_n	t_α
0	1	1	0	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	t_β
1	0	0	1	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_n	t_γ
1	1	0	0	δ_1	δ_2	$\ldots$	δ_n	t_δ

Primetimo da, na osnovu mogućnosti izbora za A_i, za svako A_i važi da je $\delta_i = 1 - \alpha_i$ i $\gamma_i = 1 - \beta_i$, što znači da je $\delta = 2^n - 1 - \alpha$ i $\gamma = 2^n - 1 - \beta$. Na osnovu pretpostavki leme, važi da je $t_\delta \neq t_\alpha$ i $t_\gamma \neq t_\beta$, te je, stoga (kako vrednosti t_i mogu biti jedino 0 ili 1), $t_\delta = 1 - t_\alpha$ i $t_\gamma = 1 - t_\beta$. Tvrđenje dokazujemo razmatranjem sledeća četiri slučaja:

1. Ukoliko je $t_\alpha = 0$ i $t_\beta = 0$, tada je $t_\gamma = 1$ i $t_\delta = 1$, što znači da je $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_1$.
2. Ukoliko je $t_\alpha = 0$ i $t_\beta = 1$, tada je $t_\gamma = 0$ i $t_\delta = 1$, što znači da je $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv p_2$.
3. Ukoliko je $t_\alpha = 1$ i $t_\beta = 0$, tada je $t_\gamma = 1$ i $t_\delta = 0$, što znači da je $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_2$.
4. Ukoliko je $t_\alpha = 1$ i $t_\beta = 1$, tada je $t_\gamma = 0$ i $t_\delta = 0$, što znači da je $\rho(A_1, \ldots, A_n) \equiv \neg p_1$.

□

Sada možemo pokazati da su uslovi leme 4.1 neophodni.

Lema 4.3 *Za dati logički veznik ρ arnosti n, ukoliko $\{\rho\}$ čini jednočlani potpun skup veznika, tada su ispunjeni sledeći uslovi:*

- $t_0 = 1$;
- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji neko x, $0 < x < 2^{n-1}$, takvo da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake.*

Dokaz: Ukoliko bi bilo $t_0 = 0$ ili $t_{2^n-1} = 1$, tada se razmatranjem analognim onome iz leme 4.2 može pokazati da veznik $\neg$ ne bi bio definabilan preko $\{\rho\}$ i, stoga, $\{\rho\}$ ne bi činio potpun skup veznika. Dakle, mora biti $t_0 = 1$ i $t_{2^n-1} = 0$.

Pretpostavimo da ne postoji vrednost x, $0 < x < 2^{n-1}$, takva da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake. Tada, na osnovu leme 4.2, važi da je formula $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$, logički ekvivalentna jednoj od formula p_1, $\neg p_1$, p_2, ili $\neg p_2$. Kako $\{\rho\}$ čini potpun skup veznika, tada se formula $p_1 \uparrow p_2$ može predstaviti preko veznika ρ. U toj reprezentaciji, svaki podizraz $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2, \neg p_1, \neg p_2\}$ (i svakako, svaki podizraz $\rho(A_1, \ldots, A_n)$, gde $A_i \in \{p_1, p_2\}$) se može prezapisati kao p_1, $\neg p_1$, p_2, ili $\neg p_2$, uz očuvanje logičke ekvivalencije sa početnom formulom. Trivijalno se pokazuje da se ovakav proces prezapisivanja zaustavlja i da se reprezentacija $p_1 \uparrow p_2$ prezapisuje u p_1, $\neg p_1$, p_2, ili $\neg p_2$. Međutim, ovo je kontradikcija, jer formula $p_1 \uparrow p_2$ nije logički ekvivalentna nijednoj od tih formula. Dakle, zaključujemo da je načinjena pretpostavka bila pogrešna i da mora postojati neka vrednost x, $0 < x < 2^{n-1}$ takva da su vrednosti t_x i t_{2^n-1-x} jednake, što je i trebalo pokazati. □

4.3 Teorema o karakterizaciji

Iz lema 4.1 i 4.3 dobija se teorema o karakterizaciji:

Teorema 4.1 *Za dati logički veznik ρ, skup $\{\rho\}$ je potpun ako i samo ako su sledeći uslovi ispunjeni:*

- $t_0 = 1$;

- $t_{2^n-1} = 0$;
- *postoji neko* x, $0 < x < 2^{n-1}$, *takvo da su vrednosti* t_x *i* t_{2^n-1-x} *jednake.*

Primer 4.1 *Logički veznici* if-then-else (levo) i slučajno odabran veznik ρ (desno), oba arnosti 3, su dati sledećim istinitosnim tablicama:

p_1	p_2	p_3	if-then-else(p_1, p_2, p_3)	
0	0	0	$t_0 = 0$	
0	0	1	$t_1 = 1$	$\leftarrow$
0	1	0	$t_2 = 0$	
0	1	1	$t_3 = 1$	
1	0	0	$t_4 = 0$	
1	0	1	$t_5 = 0$	
1	1	0	$t_6 = 1$	$\leftarrow$
1	1	1	$t_7 = 1$	

p_1	p_2	p_3	$\rho(p_1, p_2, p_3)$	
0	0	0	$t_0 = 1$	$\leftarrow$
0	0	1	$t_1 = 0$	
0	1	0	$t_2 = 0$	
0	1	1	$t_3 = 1$	$\leftarrow$
1	0	0	$t_4 = 1$	$\leftarrow$
1	0	1	$t_5 = 1$	
1	1	0	$t_6 = 1$	
1	1	1	$t_7 = 0$	$\leftarrow$

Kod veznika if-then-else, vrednosti t_1 i t_{2^3-1-1} su jednake, ali $t_0 \neq 1$, tako da {if-then-else} ne čini potpun skup veznika. U slučaju veznika ρ, vrednosti t_3 i t_{2^3-1-3} su jednake, a kako je i $t_0 = 1$ i $t_{2^3-1} = 0$, $\{\rho\}$ čini potpun skup veznika. Korišćenjem veznika ρ može se predstaviti $a \uparrow b$ na sledeći način: $a \uparrow b \equiv \rho(a, b, b)$.

4.4 Prebrojavanje jednočlanih PSV

Iz navedene karakterizacije jednostavno proizilazi da postoji $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ (od 2^{2^n}) jednočlanih potpunih skupova veznika arnosti n. Zaista, iz skupa svih jednočlanih skupova veznika arnosti n moraju se prvo odbaciti svi oni za koje važi $t_0 = 0$ (čime se prepolovljava njihov početni broj – 2^{2^n}); zatim se moraju odbaciti svi oni za koje važi $t_{2^n-1} = 0$ (čime se opet prepolovljava trenutni broj veznika), posle čega ostaje 2^{2^n-2} jednočlanih skupova veznika; konačno, iz tog skupa se moraju odbaciti svi oni jednočlani skupovi veznika za koje su vrednosti t_x i t_{2^n-x-1} u okviru njihovih istinitosnih tablica različite za svako x $(0 < x < 2^n - 1)$ – za svaku kombinaciju vrednosti t_1, t_2, ..., $t_{2^{n-1}-1}$ postoji po jedan takav veznik, pa kako ukupno postoji $2^{n-1} - 1$ takvih vrednosti t_i, zaključujemo da je neophodno odbaciti još $2^{2^{n-1}-1}$ jednočlanih skupova veznika. Iz ovog razmatranja sledi sledeća teorema.

Teorema 4.2 *Za dato* n, $n \geq 1$, *postoji* $2^{2^n-2} - 2^{2^{n-1}-1}$ *jednočlanih potpunih skupova veznika arnosti* n.

Glava 5

Procena minimalne dužine aksioma

U okviru ove glave biće data teorema koja daje gornje ograničenje za minimalnu dužinu aksioma u okviru deduktivnih sistema koji se zasnivaju na jednočlanim potpunim skupovima veznika.

Radi lakšeg razmatranja, u ovoj glavi će biti korišćen prefiksni zapis, pa će, na primer, umesto $a \uparrow b$ pisati $\uparrow (a, b)$.

Na osnovu rezultata iz pregleda [3], najmanja dužina aksiome koja sadrži samo veznik $\uparrow$ i koja uz pravilo izvođenja $(S1)$, navedeno u glavi 3.2, sama za sebe čini potpun skup aksioma je 23. Jedna od takvih aksioma [3] je i

$$\uparrow (\uparrow (p, \uparrow (q, r)), \uparrow (\uparrow (p, \uparrow (q, r)), \uparrow (\uparrow (s, r), \uparrow (\uparrow (r, s), \uparrow (p, s))))) \tag{5.1}$$

Neka je dat potpun jednočlan skup veznika $\{\rho\}$, gde je ρ logički veznik arnosti n. Tada se formula $\uparrow (a, b)$ može zapisati u obliku

$$a{\uparrow}b = \rho(A_1, \ldots, A_n), \tag{5.2}$$

gde je, za svako odgovarajuće i, ili $A_i = a$, ili $A_i = b$. Označimo broj pojavljivanja a u (5.2) sa α, i broj pojavljivanja b u (5.2) sa β. Zbog činjenice da je veznik $\uparrow$ binaran, mora važiti $\alpha \geq 1$ i $\beta \geq 1$. Neka su date formule F_1 i F_2, čije su dužine redom l_1 i l_2. Lako se proverava da formula $\uparrow (F_1, F_2)$, predstavljena koristeći samo veznik ρ, ima dužinu:

$$\alpha{\cdot}l_1 + \beta{\cdot}l_2 + 1 \tag{5.3}$$

Naime, formula F_1 se mora zapisati α puta, dok se formula F_2 mora zapisati β puta. Kada se na to doda i veznik ρ koji se nalazi na početku formule, dobija se upravo izraz (5.3).

Jasno je da aksioma (5.1), prezapisana preko veznika ρ, čini potpun skup aksioma za veznik ρ, uz odgovarajuće prezapisano pravilo izvođenja.

Koristeći formulu (5.3), dobija se da je dužina tako prezapisane aksiome (5.1) jednaka

$$\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(p,\underbrace{\uparrow(q,r)}_{n+1})}_{\alpha+\beta(n+1)+1},\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(p,\underbrace{\uparrow(q,r)}_{n+1})}_{\alpha+\beta(n+1)+1},\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(s,r)}_{n+1},\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(r,s)}_{n+1},\underbrace{\uparrow(p,s)}_{n+1})}_{\alpha(n+1)+\beta(n+1)+1})}_{\alpha(n+1)+\beta(\alpha(n+1)+\beta(n+1)+1)+1})}_{\alpha(\alpha+\beta(n+1)+1)+\beta(\alpha(n+1)+\beta(\alpha(n+1)+\beta(n+1)+1)+1)+1})}_{\alpha(\alpha+\beta(n+1)+1)+\beta(\alpha(\alpha+\beta(n+1)+1)+\beta(\alpha(n+1)+\beta(\alpha(n+1)+\beta(n+1)+1)+1)+1)+1} \tag{5.4}$$

Kada se poslednji dobijeni izraz iz (5.4) pojednostavi i kada se iskoristi identitet $\alpha + \beta = n$, dobijamo da je dužina prezapisane aksiome (5.1), kao funkcija arnosti n logičkog veznika ρ i parametra β, data sledećom formulom

$$L(n, \beta) = (\beta^3 + 2\beta^2 + 2\beta + 1)n^2 + (1 - \beta^2 - \beta^3)n + 1 \tag{5.5}$$

Za fiksirano $n \geq 2$, lako se pokaže da je $L(\beta)$ rastuća funkcija. Dakle, $L(n, \beta)$ je najmanje po n za najmanju vrednost β, odnosno za $\beta = 1$. Tehnikom konstrukcije sličnoj onoj prikazanoj u dokazu leme 4.1, može se pokazati da takav veznik ρ arnosti n, za kojeg važi da je $\beta = 1$ i koji čini potpun skup veznika, postoji. Na osnovu svega rečenog, postoji gornje ograničenje za minimalnu dužinu $L_{min}(n)$ aksiome u kojoj se koristi samo jedan potpun veznik ρ arnosti n

$$L_{min}(n) \leq 6n^2 - n + 1, \tag{5.6}$$

tj. da važi

$$L_{min}(n) \; = \; O(n^2).$$

U narednoj tabeli je dat pregled vrednosti $L_{min}(n)$ za prvih nekoliko vrednosti n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_{min}(n) \leq$	23	52	93	146	211	288	377	478	591

Primetimo da je, za $n = 2$, vrednost izraza $6n^2 - n + 1$ jednaka upravo 23, što je u skladu sa rezultatima izloženim u [3], gde je pokazano da važi jednakost $L_{min}(2) = 23$. Dakle, navedena procena je najbolja moguća za $n = 2$.

Primer 5.1 *Prikažimo postupak konstrukcije aksiome za* $n = 3$ *prethodno opisanim postupkom. Logički veznik* $\tau = \tau(p_1, p_2, p_3)$ *arnosti 3, koji će biti korišćen pri konstrukciji je dat sledećom istinitosnom tablicom.*

p_1	p_2	p_3	$\tau(p_1,p_2,p_3)$
0	0	0	$t_0 = 1$
0	0	1	$t_1 = 1$
0	1	0	$t_2 = 1$
0	1	1	$t_3 = 1$
1	0	0	$t_4 = 1$
1	0	1	$t_5 = 1$
1	1	0	$t_6 = 1$
1	1	1	$t_7 = 0$

Lako se proverava da ovaj logički veznik zaista čini jednočlan potpun skup veznika, kao i da važi $\uparrow(a,b) = \tau(a,a,b)$*, odnosno da je zadovoljen uslov* $\beta = 1$*. Prezapisivanjem se dobija:*

$$\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(p,\underbrace{\uparrow(q,r)}_{A=\tau(q,q,r)})}_{E=\tau(p,p,A)},\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(p,\underbrace{\uparrow(q,r)}_{A})}_{E},\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(s,r)}_{B=\tau(s,s,r)},\underbrace{\uparrow(\underbrace{\uparrow(r,s)}_{C=\tau(r,r,s)},\underbrace{\uparrow(p,s)}_{D=\tau(p,p,s)})}_{F=\tau(C,C,D)})}_{G=\tau(B,B,F)})}_{H=\tau(E,E,G)})}_{\tau(E,E,H)}$$

Uvrštavanjem se dobija:

$$\tau(E,E,H) = \tau(E,E,\tau(E,E,G)) = \tau(E,E,\tau(E,E,\tau(B,B,F))) =$$

$$= \tau(E,E,\tau(E,E,\tau(B,B,\tau(C,C,D)))) =$$

$$= \tau(\tau(p,p,A),\tau(p,p,A),\tau(\tau(p,p,A),\tau(p,p,A),\tau(B,B,\tau(C,C,D)))) =$$

$$= \tau(\tau(p,p,\tau(q,q,r)),\tau(p,p,\tau(q,q,r)),\tau(\tau(p,p,\tau(q,q,r)),\tau(p,p,\tau(q,q,r)),$$
$$\tau(\tau(s,s,r),\tau(s,s,r),\tau(\tau(r,r,s),\tau(r,r,s),\tau(p,p,s)))))$$

Poslednja dobijena formula je dužine 52 i ona je aksioma koja sama za sebe čini potpun skup aksioma za dati logički veznik τ *arnosti 3.*

Glava 6

Zaključci i dalji rad

Teorema o karakterizaciji jednočlanih potpunih skupova veznika, dokazana u glavi 4, daje jednostavan i elegantan uslov potpunosti, koji omogućava laku konstrukciju jednočlanih potpunih skupova veznika proizvoljne arnosti, kao i trivijalnu proveru potpunosti veznika samo na osnovu njegove istinitosne tablice. Iako se teorema može izvesti iz Postovih zaključaka, njen dokaz u ovom radu je nezavisan od prethodnih rezultata. Kao posledica teoreme, moguće je jednostavno prebrojavanje svih jednočlanih skupova potpunih veznika.

Uz pomenutu teoremu, u ovom radu je data i procena minimalne dužine aksioma kod deduktivnih sistema koji se zasnivaju na jednom logičkom vezniku proizvoljne arnosti, koji sam za sebe čini potpun skup veznika.

Kao logičan nastavak datih razmatranja, dolazi se do ideje o konstrukciji takvih deduktivnih sistema za veznike arnosti veće od 2 i o nalaženju odgovarajućih najkraćih aksioma. Ta tematika donosi mnoga interesantna pitanja, od kojih su neka

- *Kako odabrati logički veznik koji će se koristiti?*

  Na osnovu razmatranja iz glave 3, veznik $\uparrow$ je pogodniji za rad od veznika $\downarrow$. Moguće je ispitati da li slična situacija važi i za potpune veznike većih arnosti, s tim da je rezultat koji se očekuje da što je veći broj vrednosti u istinitosnoj tablici tog veznika jednakih 1, to je sa tim veznikom pogodnije raditi.

- *Kako odabrati skup aksioma i pravila izvođenja?*

  Zbog neodlučivosti problema potpunosti, nije moguće znati da li je izbor aksioma i pravila izvođenja korektan (u smislu da je dobijeni deduktivni sistem potpun), ukoliko se ne izvede sm dokaz potpunosti za taj sistem. Što se pravila izvođenja tiče, neophodno je da zadovoljavaju uslov saglasnosti, a poželjno je da budu što jednostavnija moguća i da, ukoliko je to moguće, imaju određen stepen analogije sa pravilima izloženim u glavi 3. Za odabir kandidata za aksiome je neophodno detaljno analizirati tautologije sa odabranim veznikom u odnosu na odabrana pravila izvođenja.

- *Kako dokazati potpunost takvog deduktivnog sistema?*

  U odsustvu postojanja opšteg algoritma, može se pribeći nekoj od sledećih dveju varijanti – ili se potpunost može dokazati direktno, kao u slučaju Hilbertove teorije L, bez pozivanja na druge deduktivne sisteme ili se može pokušati sa izvođenjem aksioma i pravila izvođenja nekog drugog, već poznatog potpunog deduktivnog sistema. Takođe, zbog kompleksnosti formula, pri ovom koraku je neophodna pomoć automatskih dokazivača teorema.

Literatura

[1] Mathematical logic – wikipedia, the free encyclopedia. Web adresa: *http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_logic*.

[2] Propositional logic at the internet encyclopedia of philosophy. Web adresa: *http://www.iep.utm.edu/p/prop-log.htm*.

[3] Branden Fitelson. New elegant axiomatizations of some sentential logics. Web adresa: *http://fitelson.org/ar.html*.

[4] Predrag Janičić. *Matematička logika u računarstvu*. Matematički fakultet u Beogradu, 2004.

[5] Pawel Kerntopf, Marek A. Perkowski, and Mozammel H. A. Khan. On universality of general reversible multiple-valued logic gates. In *34th International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL'04)*, pages 68–73, 2004.

[6] S. Lineal and Emil Post. Recursive unsolvability of the deducibility, tarski's completeness and independence of axioms problems of propositional calculus (abstract). *Bulletin of the AMS*, 55:50, 1949.

[7] Jan Lukasiewicz. *Selected Works*. North Holland, 1970.

[8] Petar Maksimović and Predrag Janičić. Simple characterization of functionally complete one-element sets of propositional connectives. *Mathematical Logic Quarterly*, 52(5):498–504, 2006.

[9] William McCune, Robert Veroff, Branden Fitelson, Kenneth Harris, Andrew Feist, and Larry Wos. Short single axioms for boolean algebra. *Journal of Automated Reasoning*, 29(1):1–16, 2002.

[10] Jean G. Nicod. A reduction in the number of primitive propositions of logic. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19:32–41, 1917.

[11] Francis Jeffry Pelletier and Norman M. Martin. Post's functional completeness theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31(3):462–475, 1990.

[12] Emil Post. *The Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic.* Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.

[13] Vladan Radivojević. Mali deduktivni sistemi za iskaznu logiku. Web adresa: *http://www.matf.bg.ac.yu/ janicic/ZbornikRadova.zip*, 2008.

[14] Thomas W. Scharle. Axiomatization of propositional calculus with shef-fer functors. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 6(3):209–217, 1965.

[15] Mordchaj Wajsberg. *Logical Works.* Polish Academy of Sciences, 1977.

[16] Mary Katherine Yntema. A detailed argument for the post-lineal theorems. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 5:37–50, 1964.

Sažetak

U ovoj tezi je dat pregled postojećih rezultata o jednočlanim potpunim skupovima logičkih veznika, kao i dva originalna doprinosa. Prvi originalni doprinos predstavlja teorema u okviru koje su formulisani i dokazani neophodni i dovoljni uslovi za potpunost jednočlanog skupa logičkih veznika. Ovi uslovi daju jednostavnu i elegantnu karakterizaciju jednočlanih potpunih skupova logičkih veznika proizvolje arnosti i omogućavaju njihovo prebrojavanje. Drugi originalni doprinos predstavlja davanje gornjeg ograničenja za minimalnu dužinu aksiome koja koristi samo jedan jednočlan potpun skup logičkih veznika i sama za sebe čini potpun sistem aksioma, kao funkcije arnosti tog logičkog veznika.

Summary

This thesis gives an overview of the existing results pertaining to complete one-element sets of propositional connectives, as well as two original contributions. The first one is a theorem in which sufficient and necessary conditions for a one-element set of propositional connectives to be complete are formulated and proven. These conditions provide a simple and elegant characterization of complete one-element sets of propositional connectives of arbitrary arity and make their effective counting possible. The second contribution is the placing of an upper boundary on the minimal length of a single axiom involving only one complete one-element sets of propositional connectives, as a function of the arity of the connective used.