

**Геометрија на тлу СХС (Југославије)
у периоду од 1918. године до 1941. године**

Срђан Бурић
Ментор: проф. др Зоран Лучић
2006/2007.године

Садржај:

1. Увод.....	2-7
2. Геометрија на подручју Србије.....	8-19
3. Геометрија на подручју Војводине.....	20-34
4. Геометрија на подручју Хрватске.....	35-44
5. Геометрија на подручју Словеније.....	45-53
6. Закључак.....	54-58
7. Литературе.....	59-60

Увод

После завршетка Првог светског рата, крахом краљевине Аустро-Угарске и стварањем нове јужнословенске државе 01. децембра 1918. године, под именом *Уједињено Краљевство Срба, Хрвата и Словенаца*, поставило се уопште питање представницима власти нове државе: *“Како ли ће се организовати настава математике и нацртне геометрије као заједнички део образовног система упркос постојању два различита система: српски и хрватскословеначки?”*

Постојала су два различита система образовања између Војводине, Хрватске, Словеније, Далмације и Славоније које су биле под влашћу династије Хабзбурговаца са једне стране и Краљевине Србије, која је била самостална од 1848. године Берлинским конгресом, под влашћу династије Карађорђевића (пре династија Обреновић свргнута мајским превратом 1903. године) са друге стране.

Систем образовања и васпитања новостворене државе јужнословенских народа Уједињеног Краљевства Срба, Хрвата и Словенаца је изгледало овако:

1. четвороразредна основна школа,
2. двогодишња или трогодишња нижа стручна школа,
3. четвороразредна нижа гимназија,
4. осморазредна гимназија,
5. четворогодишња или петогодишња стручна школа,
6. специјална школа за дефектну децу,
7. двогодишња виша школа,
8. четворогодишња или петогодишња висока школа и факултети.

Постојале су три универзитетска центра: Љубљански, Загребачки и Београдски.

Владале су разне болештине, недостајао је наставнички кадар за наставу, ученици разних вероисповести као и њихови родитељи су се питали: “*Шта и како доноси неизвесна будућност новостворене јужнословенске државе УКСХС?*”

Министарство просвете Уједињеног Краљевства Срба, Хрвата и Словенаца & Краљевине Срба, Хрвата и Словенаца & Краљевине Југославије, је одлучио, према парламентарно-монархистичкој (*управно-територијалној*) подели унутар земље трију краљевства Србије, Хрватске и Словеније на челу династије Карађорђевић, касније стварањем девет бановине (*бановина-управна и самоуправна јединица*) 03. октобра 1929. пре увођења шестојануарске диктатуре указом краља Александра I Карађорђевића: Дравска (Љубљана), Савска (Загреб), Врбаска (Бањалука), Дринска (Сарајево), Приморска (Сплит), Зетска (Цетиње), Дунавска (Нови Сад), Моравска (Ниш) и Вардарска (Скопље) са челом Управа града Београда у чијем саставу су се налазиле Земун и Панчево, упркос недостатку огрева, плате, уџбеника, социјалних немира и штрајкова које су владале у то доба, да начини следећи програм рада где су постојале нижи течајни испити (српскохрватски језик, математика, француски или немачки језик, земљопис и историја) и виши течајни испити (српскохрватски језик, француски или немачки језик, математика и историја са географијом):

Предмет:	Број часова по разредима								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII	
Веронаука:	2	2	2	2	2	2	2	/	

Српски језик:	5	5	4	5	4	4	4	5
Француски језик:	3	3	3	3	3	3	3	3
Немачки језик:	/	/	3	3	3	3	3	3
Латински језик:	/	/	/	/	4	4	3	3
Историја:	/	2	3	3	3	3	3	3
Земљопис:	2	2	2	2	2	2	1	2
Јестаственица:	3	3	/	/	2	3	/	/
Геологија:	/	/	/	/	/	/	2	/
Математика:	4	4	4	3	3	3	4	4
Физика:	/	/	2	2	/	/	3	3
Хемија:	/	/	/	3	/	/	/	2
Филозофија:	/	/	/	/	/	/	2	2
Хигијена:	/	/	1	1	/	1	1	/
Цртање:	2	2	2	2	2	1	/	/
Писање:	2	1	/	/	/	/	/	/
Женски ручни рад:	2	2	2	/	/	/	/	/
Певање:	2	2	/	/	/	/	/	/
Гимнастика:	2	2	2	2	2	1	/	/

Постојала је секција за математику односно где су се одвијале праксе и за професоре, ученике и студенте. Програм рада је био *“систематско прелажење градива из математике и технологије са практичним вежбањима”*. Наставнички савет је одлучио да наставник из математике и геометрије мора да се стручно да се

усавршава односно да припреми скицу свог предавања, где ће ученици моћи да забележе у своје нотесе.

Постојале су библиотеке са фондом књига, у периоду од 1920/1921. до 1939/1940. године:

Наставни предмети:	Број предмета у збиркама:	
	1920/1921	1939/1940
Математика:	/	89
Физика:	679	490
Хемија:	588	719
Биологија:	1920	1611
Минералологија:	1671	1296
Географија:	/	99
Историја:	311	504
Нумизматичка збирка:	2171	1237
Збирка за цртање:	696	403
Гимнастичка збирка:	562	98
Археолошких предмета:	12	147
Збирка за певање:	/	135
Професорска библиотека:	/	3006
Ђачка библиотека:	/	2817

Настава из математике и геометрије се одвијала и међу јеврејском заједницом, што значи да су постојале четири типа школе: *Хедер* (на српском *соба*), *Јешива* (на српском *училиште*), *Хевра Шас* (на српском *друштво шест редова*)

Мишна) и *Талмуд Тора* (на српском *талмудистичка наука*). Било је укупно 47 јеврејских школа у оквиру система уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца, где су постојали и приватни часови који су учитељи са звањем *ludi magistera* одржали код имућних грађана.

Навешћемо имена учитеља и професора који су предавали не само својим сународницима него и припадницима српске, мађарске и немачке заједнице: Берта Месарош (1887-1942), Мавро Голдбергер-Черњен (1890-1923), Саломон Фирст (Секел) (1897-1921), Људевит Данеш (Дајч) (1884-1942), Мавро Фан (1919), др Деже Колман (1884-1944), Фрања Трауб (1891-1944), Исидор Санто (1888-1944), Флора Браун, Фрањо Флајшер, Игњат Кадаш, Вилим Нидерман, Михајло Броди, Самуел Кертес, Д. Хајнал, Александар Бирнбаум, Вилим Дарваш, Хуго Бихлер. На жалост, свршени и образовни јевреји нису могли да похађају више школе и универзитета, јер се осећао антисемитизам који је владао у доба владе др Милана Стојадиновића и др Драгише Цветковић - др Влатко Мачек до пуча 25. марта 1941. године када је основана нова краткотрајна влада на челу ђенерала ваздухопловства Душана Симовића са краљем Петра II Карађорђевића до краткотрајног априлског слома Краљевине Југославије 06. априла 1941. године. Неки су страдали у нацистичким и квинслишким логорима у Другом светском рату.

Настава из математике и геоемтрије за дефектну децу се одвијала у пет завода за глувонему децу:

1. Завод за глувонему децу “Краљ Дечански” у Београду,
2. Дом глувонемих у Земуну (1924-1928),
3. Дом глувих “Краља Александра I” у Јагодини (1918-1944),

4. Завод за глувонему децу “Карађорђе I” у Крагујевцу (1928-1941),
5. Завод за глувонему децу у Новом Саду (1929-1936).

Списак наставних предмета коју је саставио професор Коста Б. Николић (1860-1928) према књизи професора др Трајбела (*Lehr-Plan für die Königliche Taubstumm-Anstalt in Berlin*) се одвијала у наведеним заводима: артикулација и настава језика (говорење, читање, писање и граматика), хришћанска наука, рачун, географија, историја, јестаственица, физика и хемија, лепо писање, цртање и геометрија, гимнастика и техничко образовање.

Рачун, цртање и геометрија су требале да послуже глувонемим децама ради јачања интелектуалног памћења, развитка логичког мишљења и да буду равноправни са децом која су похађала редовни систем школовања, упркос предрасудама које су владале у то време.

Геометрија на подручју Србије

На подручју кнежевине Србије, касније краљевине Србије, у другој половини XIX века, математика и геометрија се сматрају као научне дисциплине, захваљујући Великој школи (1863-1905) у коме се појављују први српски уџбеници: *Начела више математике у три дела* (Београд 1858, 1860 и 1872) проф. др Емилијана Јосимовића, *Тригонометрија* (Београд 1875), *Наука о комбинацијама* (Београд 1883) проф. др Димитрија Нешића, *Аналитичка геометрија тачке, круга и коничних пресека*, први и други том (Београд 1896) и *Теорија детерминаната* (Београд 1899) проф. др Богдана Гавриловића. Од оснивања самог Универзитета 1905. године у Београду, на Филозофском и Техничком факултету се одржавају курсеви из математике и геометрије, где су касније докторирали будући научници из теоријске и геометријске математике: проф. др Тадија Пејовић (1923), проф. др Радивоје Кашанин (1924), проф. др Јован Карамата (1926), проф. др Милош Радојчић (1928), проф. др Драгослав Митриновић (1933), проф. др Данило Михњевић (1934), проф. др Константин Орлов (1934), проф. др Петар Музен (1937), проф. др Драгољуб Марковић (1938) и проф. др Војислав Авакумовић (1939). Такође су дошли и руски емигранти Никола Салтиков и Антон Билимович, где су наставили да истраже област парцијалних једначина, област механике и област геометрије. Покренути су часописи у коме су објављени научноистраживачки радови: *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade* (1932), *Glas* (1933) и *Bulletin de l'Académie des sciences mathématiques et naturelles* (1933). Објављени су и уџбеници: *Основи инфинитезималног рачуна*, I-II том

(Београд 1920 и 1922) проф. др Димитрија Данића, *Диференцијални и интегрални рачун са применом у геометрији*, I-VIII том (Београд 1928-1941) проф. др Тадије Пејовића и *Виша математика*, I том (Београд 1934).

*

Проф. др Војислав Г. Авакумовић је рођен 12. марта 1910. године као најмлађе дете у Земуну (Аустроугарска). Основну школу је завршио у седишту српске православне епархије Сремски Карловац у периоду од 1916. до 1920. године. Бавио се пливањем, веслањем, јахањем и бербом грожђе.

1923. године је доживео незамисливи и тежак губитак оба родитеља, тако бригу о њему је преузео његов ујак др Петар Марковић. Поред талента за сликарство које је неговано код њега, што нам ставља до знања увод у геометријско сликарство, да заврши гимназију - нижу и вишу од 1920. до матурирања, јуна 1928. године. Исте године у јесен се уписао на Уметничку академију у Риму на одсек за вајарство. Током студије је открио да га више привлаче природне науке, те се уписао на Техничку Високу школу (1929-1931) у Берлину - смер конструктор авионских мотора.

Бавио се боксом и алпинизмом. Боксовао је на универзитетским такмичењима у Велтер (Welter) категорији, а алпинизмом у Словенији где је на Северној стени на Триглаву у августу 1931. године доживео несрећу постајући инвалид носећи протезу у 21. години.

Вратио се у Сремским Карловцима у зиму између 1931. и 1932. године да се рехабилитује и размишљао је: *“Шта да учи?”* На основу наговора професора и рођака Карамате, почео је да студира математику на Београдском универзитету

(Филозофски факултет) у периоду од 1932. до 1938. године и схватио је да је математика краљица свих наука. Дипломирао је 1938. године, где је 4. априла 1939. године докторирао под тезом *О понашању Лаплацових интеграла на рубу конвергенције*. Радио је као суплент у мушкој земунској гимназији од 1939. до 1940. године и као асистент на Техничком факултету - грађевински одсек - све до априлског слома 1941. године на Техничком факултету.

У периоду од 1945. до 1953. године је предавао математику на Техничкој Великој школи - грађевински сектор. 1951. године је добио звање ванредни професор. 1952. године је постао дописни члан Српске академије наука и уметности, где је држао значајна предавања у Математичком институту у периоду од 1946. до 1958. године. А у периоду од 1953. године после тешке болести је прешао на Педагошку високу школу у Новом Саду. Ценио је и у Београду и у Новом Саду студенте као своју децу. Гостовао је на Сарајевском универзитету, на Светском конгресу математичара у Амстердаму, Шведском универзитету у Лунду, на Немачком универзитету у Шварцалду, Гисену - проучавајући математичке проблеме и у Гетингему. У Гетингему је доживео саобраћајну несрећу у Немачкој, сломивши пршљен у 52. години. Чудо га је спасло, па је радио као директор Института за проучавање атомског језгра у Јили (Jüli) и био је директор Техничке Високе школе у Ачену (Achen). Чак је гостовао и на Минхенском и на Марбуршком (Philips) универзитету, где је добио звање *ординариус* и *емеритус* 1. априла 1976. године. Умро је 19. августа 1990. године, а сахрањен је у породичној гробници у Сремским Карловцима према његовој жељи.

Подаци о предавању из геометрије се налазе у иностранство у поменутиим универзитетима, где на жалост нема приступа. Бавио се проблемима Лапласове трансформације где код приближавања променљиве сингуларној тачки дуж реалне осе и приближавања преко целе равни, у коме уводи нова приближавања преко области ограничених параболома са одређеним додиром имагинарне осе. Имао је подршку од славних математичара Винера (N. Wiener) и Пита (H. R. Pitt).

Објавио је следећа дела: *О једном 0-инверзном ставу*. Рад ЈАЗУ 79 (1936), стр. 169-186, *Über einige Taubersche Sätze deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist I*. Math. Z. 41 (1936), str. 345-356, *Über Laplacesche Integrale deren Wachstum von iteriertem Exponential-charakter ist*. Bull. Acad. Serbe Sci. Ser. Mat. Fiz. 3 (1936), str. 173-181, *Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuen Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten*. C. R. du 2^{me} Congr. Interbalk. Des Math. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40 (1938), str. 101-106, *О понашању Лаплацевих интеграла на рубу области конвергенције*. Докторска дисертација. Београд, Млада Србија, (1940), 54 стране, *Neuer Beweis eines Satzes von G. H. Hardy und S. Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten*. Amer. J. Math. 62 (1940), str. 877-880, *Über das Verhalten Dirichletscher Reihen am Rande des Konvergenzgebietes*. Math. Z. 46 (1940), str. 650-664, *Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponential character ist I*. Math. Z. 46 (1940), str. 62-66, *Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponential character ist II*. Math. Z. 46 (1940), str. 67-69, *Bemerkungen über Laplacesche Integrale, deren Wachstum vom Exponential character ist III*. Math. Z. 46 (1940), str. 141-152, *О услову конвергенције*

0-инверзног става Лаплацеове трансформације. Рад ЈАЗУ 74 (1941), стр. 143-156,
Über die Konvergenzbedingung der Inversionssätze der Laplaceschen Transformation.
Bull. Int. acad. Croate Cl. Sci. Math. Nat. 34 (1941), str. 49-67.

*

Проф. др Татомир Анђелић је рођен 11. новембра 1903. године у засеоку Буковац између Чачка и Краљева код Бечања. Основну школу је завршио у Мрчајевцима 1914. године. Шестогодишњу гимназију је завршио са прекидима у току и после Првог светског рата. Виши течајни испит је положио јуна 1922. године у Чачку.

У периоду од 1922. до 1927. године студирао је математику, физику и астрономију на познатом универзитету у Хајделбергу. На Филозофском факултету Београдског универзитета провео је школске године 1927/1928. године и јуна 1928. године је завршио математичку групу наука тог факултета. Испит за професора средње школе је положио 1932. године, а докторску тезу *Диференцијалне једначине кретања нехолономних система у инкопресибилној течности* је положио после Другог светског рата у фебруару 1946. године. Предавао је математику у другој београдској гимназији, пре друга мушка реална гимназија, у периоду од 1928. до 1945. године. 1948. године је изабран за доцента при Катедри за механику и астрономију, а од 1951. године је ванредни професор за предмете механике, 1957. године је постао редовни професор Природно-математичког факултета у Београду, 17. децембра 1959. године је био дописни члан САНУ и на крају био је директор Математичког Института САНУ до 1978. године. Волео је да предаје геометрију ђацима. Из тог рада је написао књигу превевевши Ајзенхарову *Диференцијалну*

геометрију где је касније настао уџбеник *Елементарна геометрија*. Био је члан немачких, аустријских, америчких, енглеских и француских институција као и часописа *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt für Mathematik* и *Österreichische mathematische Nachrichten*. Такође је члан Друштва математичара, друштва механичара и друштва астронома. Умро је 1993. године у Београду.

Проф. др Татомир Анђелић је у сарадњи са проф. др Антоном Билимовичем написао књигу *Геометрија за пети разред гимназије* из 1940. године. Посматрајући књигу, може се рећи да је одлично написана и навешћу један део увода из методе непосредног посматрања и један део из основне појмове и аксиоме.

Читајући *Методу непосредног посматрања* коју је написао проф. др Татомир Анђелић, уочио је неке крупне недостатке коју поседује сам посматрач, која се примењује у нижим разредима, посматрајући разне геометријске предмете њихових особина, мерење њихових дужина, углова, површина и запремина наводећи практична важећа правила: тела, површине, линије и тачке. Узимајући моделе или цртајући слике путем *посматрања* долазило се до методе непосредног посматрања. Значи према њему једна ствар самом посматрачу може изгледати другачије него другом, што значи да се посматра оком, а знамо сви да је око подложно обманама. Такође се не може веровати ни цртежу, јер посматрач може погрешити приликом конструисању саме слике. Наведимо један пример. Ако изводимо неки резултат о особинама троугла, онда нацртамо неки одређен троугао или више одређених троуглова. Непосредно посматрање тих неколико троуглова не даје увек сигуран одговор на питање, да ли те особине припадају свима троуглова.

Тачка a , права p и раван α сачињавају један *општи геометријски појам*. Посматраћемо везу између тачака, правих и равни коју називамо *аксиоме*. Имамо четири аксиоме које гласе: **Аксиома 1:** *Кроз две разне тачке увек се може повући само једна права* (аксиома тачака и праве), **Аксиома 2:** *На свакој правој увек постоје бар две тачке; а постоје бар три тачке у равни које не леже на истој правој* (аксиома праве и тачака), **Аксиома 3:** *Три тачке, које нису на истој правој, одређују увек само једну раван* (аксиома тачака и равни), **Аксиома 4:** *Ако права има две заједничке тачке са равни, свака њена тачка је у тој равни* (аксиома праве и равни).

Посматраћемо на пример теорему која гласи: *Две разне праве не могу имати две тачке заједничке*.

Проф. др Татомир Анђелић је претпостављао да ако би две разне праве имале две заједничке тачке, онда би се, у том случају, кроз две тачке могле повући две разне праве, што према аксиоми 1, је немогуће. Значи две разне тачке могу имати или само једну заједничку тачку што објашњава да се те две поменуте праве секу у једној тачки или ниједну што објашњава да те две поменуте праве се не секу јер леже у истој равни и паралелне су.

Објавио је следећа дела: *Математичари и рачун*, Гласник Југ. проф.. друш. 1934, *Геометрија за први разред гимназије*, са Антоном Билимовичем, 1936. године, *Геометрија за други разред гимназије*, са Антоном Билимовичем, 1937. године, *Геометрија за трећи разред гимназије*, са Антоном Билимовичем, 1938. године, *Геометрија за четврти разред гимназије*, са Антоном Билимовичем, 1939. године, *Координација математичке наставе*, изв. са седнице и саопштења Југ.

мат. дру. 1939, *Геометрија за пети разред гимназије*, са Антоном Билимовичем, 1940. године, *Геометрија за шести разред гимназије*, са Антоном Билимовичем, 1941. године.

*

Проф. др Антон Дмитрич Билимович је рођен 20. јула 1879. године у Житомиру (Украјина). Основну школу и кадетски корпус је завршио 1896. године у родном месту, где је 1903. године на Физичко-математичком факултету, Кијевског универзитета, дипломирао са златном медаљом. Радио је 25. новембра 1896. године као асистент, те 1905. године као приватдоцент и на крају као редовни професор 1915. године на Новоросијском универзитету у Одеси све до октобарске социјалистичке револуције 1917. године где је емигрирао у нову отаџбину уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца. 20. априла 1920. године је изабран за контрактуалног професора примењене математике на Универзитету. 18. фебруара 1925. године је изабран за дописног, а звање редовног професора примењене математике је добио 3. новембра 1926. године на Универзитету и касније 17. фебруара 1936. године за редовног члана Српске краљевске академије наука, где је званично проглашен 7. марта 1937. године на основу његове присутне беседе *Природна проучавања у геометрији и механици*. У периоду од 1939. до 1940. године је био секретар Одељења природно-математичких наука. Био је оснивач клуба математичара Београдског универзитета и где је као оснивач Математичког института САНУ 1946. године био први управник у послератној години. Као наставник Природно-математичког факултета пензионисан је 1955. године, а

изабран је 3. јуна 1964. године за доживотног почасног председника Југословенског друштва за механику и умро је 17. септембра 1970. године у Београду.

Био је омиљен међу студентима: Н. Стојко, В. Зардечки, Р. Тарашевић, В. Демченко; међу професорима: К. Вороњец и Т. Анђелић; међу доцентима: Ђ. Мушицки, Р. Стојановић и В. Вујичић.

Изучавао је теорију вектора, проблеме кривине кривих површи. Објавио је научни рад *Геометријске основе рачуна са дијадама* у коме је приказао оригиналну геометријску интерпретацију афинора звани *тензорски метод*. У његов круг су спадале механика и геофизика. Последњи пут се бацио на проблеме теорије неаналитичких функција - са становишта њихове геометријске интерпретације и примене у теорији струјања.

Бавио се применом Пфафове методе у геометријској оптици, питањем геометрије стеновитих маса и тако даље. У средњем образовању је његов допринос у прављењу уџбеника геометрије познат *Еуклидови Елементи*. Покренуо је часопис *Publications de l'Institut*. Одликован је орденом Св. Саве III реда.

Проф. др Антон Билимович је у сарадњи са проф. др Татомиром Анђелићем написао истоимену књигу које сам навео код биографије проф. др Татомир Анђелић. Навешћу само један део из увода о дедуктивној методи и један део из праве, полуправе и дужи.

Читајући о *дедуктивној методи*, проф. др Антон Биимович је покушавао да дефиницију *дедуктивни метод* који важи само из претпостављених или постављених истина коју зовемо општим именом *геометријска истина* приближи посматрачу да би схватио уопште геометрију. Значи, почиње се од основних

појмова и сматрају се као унапред дати, а не посматрањем. На пример, појмове тачке, праве и равни треба сматрати као основне појмове. У самој дефиницији се неки нов појам објашњава помоћу других раније познатих појмова, на пример, трапез је четвороугао са две паралелне стране - што дефинише дефиницију самог трапеца.

Приметићемо неке везе које се успостављају између појединих геометријских појмова зване *аксиоме*. На пример, реченица која гласи: Кроз две разне тачке увек се може повући само једна права - аксиома - хоће да нам каже да се успоставља веза између појмова праве и тачке и њена садржина је сама по себи јасна и не може се извести или објаснити другим истинама.

У самој геометрији се осим основних истина и аксиома - остале геометријске истине се изводе из аксиома или других претходно изведених истина коју зовемо *ставове* или *теореме*, а њихово извођење директан доказ потврђено оно што је речено или индиректан доказ није потврђено оно што није речено. Сам став, чија истинитост непосредно следује из претходног става тако да се не мора нарочито доказивати зове се *последица*.

При крају, предмет геометрије су сами задаци које зовемо *проблеме*. Имамо три задатка: *рачунски* - израчунавање једне или више геометријских величина, *конструктивни* - цртањем помоћу шестара и лењира и *доказни* - извођење неке истине која раније није била изведена.

Значи, према њему се геометрија дели на два дела: *планиметрија* (геометрија у равни) и *стереометрија* (геометрија у простору).

Проф. др Антон Билимович је покушавао да докаже све оне особине праве помоћу аксиома, на пример, може се лако доказати да на правој има бескрајно много тачака и томе слично познато одраније.

Или ако на правој посматрамо тачку, рецимо A , и све тачке праве само с једне стране тачке A , заједно чине полуправу и кажемо да је A гранична тачка или крај полуправе, те проф. др Антон Билимович закључује да било која тачка на полуправој дели на две полуправе.

Или кад се на правој узму две разне тачке, A и B , део праве између њих чини дуж AB које зове проф. др Антон Билимович *граничне тачке* или *крајеви дужи*.

Или свака права у равни дели ту раван да две области - две полуравни. Ако две тачке, A и B , равни леже са исте стране праве p , проф. др Антон Билимович сматра да дуж AB сва лежи са те стране. А ако су тачке C и D на разним странама, онда проф. др Антон Билимович сматра да дуж CD сече праву p , то јест права p и дуж CD имају заједничку тачку E .

Објавио је следећа дела: *Рачун са облицима*, Б. 1922, *О линијама инерције на површини*, СІХ књ. Гласа. Б. 1923, *Једначине кретања чврстог тела у новој векторској форми*, СХХV књ. Гласа. Б. 1927, *О математској настави у средњој школи*, Унив. живот, 7, Б. 1927, *О неким специјалним случајевима проблема n тела*, СХХVІІІ књ. Гласа, Б. 1927, *О једначинама кретања нехолономног система*, СХХVІІІ књ. Гласа, Б. 1927, *Једначине кретања материјалног система, ако су осе потпуне произвољне*, СХХVІІІ књ. Гласа, Б. 1927, *О хеликоидалним случајевима проблема n тела*, СХХVІV књ. Гласа, Б. 1927, *Приложеніе абсолютной геометріи*

къ *классической механикѣ*, Труды IV Съезда Русских Академических организаций за границей, 1930, *Геометриске основе рачуна са диадама*, I Диада и Афинор, Б. 1930, *Fondements géométriques de la théorie des diades et des affineurs*, Stockholm, 1931, *Прилог геометријској теорији иваријаната*, CLXIII, књ. Гласа, Б. 1934, *Елементарно решење два позната случаја проблема трију тела*, са Б. Петронијевићем, Гласник Југ. проф. друш. XV књ. Б. 1935, *Zur geometrischen theorie der invarianten eines mehrdimensionalen affionors*, Bulletin No 2, Belgrade, 1935, *О геометрији степенованих маса*, Ibidem, *Sur la géométrie des masses élevées à la puissance arbitraire*, Ibidem, *О векторском излагању геометрие маса*, Технички лист, XVIII, Загреб, 1936, *Природна проучавања у геометрији и механици*, Ibidem, *Sur les coefficients de dissymetrie*, Ibidem, *Sur les recherches intrinsèques en Géométrie et Mécanique*, Ibidem, *Улога једако-рогљастих Архимедових полиједара у проблему више тела*, CLXXXV књ. Гласа, Б. 1941, *О једном специјалном случају проблема четирију тела*. Ibidem.

Геометрија на подручју Војводине

На подручју Војводине (Панчево), били су истакнути професори - геометричари: проф. др Богдан Зарић (1937 - Филозофски факултет), проф. др Милан Ђурђевић (12. децембар 1897. године - Виша педагошка школа), проф. др Емил Марошан (Филозофски факултет), проф. др Јелка Шуковић (Виша педагошка школа), проф. др Станислав Фемпл (Филозофски факултет), проф. др Мирко Сковран (Филозофски факултет), проф. др Михаљ Шварц - Фекете (Mihály Schwarcz - Fekete), проф. др Предраг Ј. Чучин, проф. др Деже Секе (Szöke Dezső), проф. др Људевит А. Хорањ, проф. др Атанасије Шестопапов, проф. др Арпад Вереш (Agrád Veres) и проф. др Иван Арновљевић.

*

Проф. др Богдан Гавриловић је рођен 1. јануара 1864. године у Новом Саду. Основну школу и гимназију је завршио у родном месту. Песник Јован Јовановић Змај у часопису “*Невен*” га описује као даровитог и вредног талентованог ђака. Као питомац српске институције 1881. године *Текелијанум завод*, завршава студије на Одсеку за математику, физику и астрономију на Филозофском факултету Универзитета у Будимпешти, седиште Угарске монархије. 1883. године је положио основни професорски испит.

Био је мачевалац, гимнастичар и председник спортског друштва “*Сокол*”. Докторску дисертацију из области аналитичких функција *О представљањима једнограних аналитичких функција* је одбранио 11. јуна 1887. године на мађарском

језику (*Az egyértékű analytikus függvények előállításairól*) на поменутом универзитету.

1887. године долази у Београд где постаје наставник (суплент) Више школе, а 2. децембра 1892. године почасни (редовни) професор. Водио је Катедру за нижу математику Филозофског факултета и указом краља Милана Обреновића због држављанства је постављен за “контрактуалног суплента Филозофског факултета Велике школе под условима за стране поданике”.

У оквиру свога рада је предавао аналитичку геометрију, тригонометрију и основне школске математике.

1894. године професор Богдан Гавриловић држи наставу математике за студенте Техничког факултета. Занимао се уопште за алгебру, геометрију и теорију бројева. Од те три гране навешћемо геометрију, где је приступао преко Декартове аналитичке методе координата приказујући научне радове кроз две књиге: *Аналитичка геометрија* и *Теорија детерминаната*.

Занимало га је како ли математика, утиче на развој људског друштва и цивилизације уопште, делује као наука, у коме је види као академску беседу о проблему простора, хипер-простора и континуума.

Оснивач је библиотеке Математичког семинара. 1901. године постаје дописни члан Академије наука, а 1905. године њен редовни члан и 1906. године постаје дописни члан Југославенске академије знаности и умјетности у Загребу.

1921. године на тлу уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца означава период другог мандата за ректора Београдског универзитета самог професора све до 1924. године и све до пензионисања 1929. године и даље предаје

аналитичку геометрију на Техничком факултету све до априлског слома 1941. године.

1931. године је био председник Српске академије наука и уметности и био је члан италијанског друштва *Circolo matematico di Palermo*, грчког друштва *Dr.hon. causa*, члан Друштва “*Никола Тесла*”, директор Института тог друштва 1939. године и оснивач и члана Математичког Института САНУ све до смрти 7. августа 1947. године. Био је одликован орденом светог Саве IV реда, медаљом Милоша Великог, орденом Карађорђева звезда IV степена, орденом Бели орао V степена и медаљом Црвеног крста.

Професор Богдан Гавриловић је написао три научна рада из аналитичке геометрије. Прва два су поменута уз нагласак изучавања геометријска својства неких фамилија конусних пресека (кривих другог реда), затим особине неких геометријских трансформација, специјално пројективних, и слика кривих другог реда добијених из тих поменутих трансформација, док ћемо се на трећи осврнути то јест *О прецртима спрегнутих тачака једног трансфинитног скупа конгруентних пројективних низова тачака*. Реч је о прецртима хиперболичкотрансфинитних *природних* скупова, то јест уз помоћ синтетичке и аналитичке формуле је доказано да рој тих хипербола не може формирати један хипер-простор од осам димензија. У том смислу је применио принцип Канторове теорије скупова уз помоћ геометрије.

Проф. др Богдан Гавриловић је у раду *Аналитична геометрија праве, круга и коничних пресека* описао како су Грци, још у древно доба, почели бавити проблемом методе пунктуалне и тангненијалне геометрије. Значи посматрали су

како планете и комете путују трајекторијама уз опис апроксимативне конике. Затим је у једном одељку *Тачка и тангенцијалне координате* увео пројективне координате правих познате под именом *тангенцијалне координате праве* са аналитичким и геометријским мотивацијом у коме каже да је дат уређен пар (u, v) где су u и v параметри у нормалној једначини праве $ux + vy + 1 = 0$ којом је права јединствено одређена. Дате координате су познате као Пликерове координате правих. Објашњавао је да под пунктуалном геометријом се подразумева главни елемент слика тачка, а под тангенцијалном геометријом се подразумева главни елемент слика праве. Док је у другом одељку *Трилинеарне координате тачке у пројективној равни* описао је аналитички метод рада решавања пројективних координата у разним геометријским задацима и испитивања коника, као *начело корелације (дуалитет)* за удвајање општег принципа геометријских истина познате под именом Понселова, Шаслова, Жергонова и Мебијусова геометријска истина. По проф. др Богдану Гавриловићу, један резултат који је добијен помоћу тангенцијалних координата и други резултат добијен помоћу паралелних координата указује да између та два резултата постоји одређена узајамност где се геометријска теорема лакше преноси из пунктуалне у тангенцијалну геометрију. То значи, по њему, у појединим теоремама место речи тачка, права, место, тачке у којима се секу праве и тако даље треба просто узимати речи права, тачка, обвојница, праве које спајају тачке и тако даље у којој постоје две теореме познате под именом *дуалне* или *корелативне* теореме.

Објавио је следећа дела: *Проблем простора, хиперпростора и континуума*, Глас LXXIX, 1926, *Један прилог теорији једногласних емалитичких функција*,

Лозанићева споменица, 1919-1927, *О прецртима трансфинитних природних скупова*, Гл. Акад, *О вредностима неких одређених интеграла*, Рад, књ. 147, *Сарусово правило у теорији просторних детермината*, Рад, књ. 147, стр.132-138.

*

Проф. др Светомир Фемпл је рођен 26. јула 1903. године у Земуну. Потиче из угледне јеврејско-српске породице. Основну школу и гимназију је завршио у Земуну и у Руми. После тога је завршио Краљевску трговачку академију и Бечку економску академију да би могао да се уписује на Филозофски факултет 1922. године на студије математике где на крају дипломира 1926. године.

После тога добије звање суплент у познатој панчевачкој гимназији од 1926. до 1933. године, у астрономској опсерваторији од 1933. до 1936. године, у земунској гимназији од 1936. до 1948. године и на крају у Вишој педагошкој школи од 1948. до 1958. године.

Докторску дисертацију је одбранио 1956. године на Сарајевском универзитету под тезом: *О једној линеарној комбинацији нормалних елиптичких интеграла I и II врсте*. Чланови комисије су били: др Војислав Авакумовић, др Радивоје Кашанин, др Милош Радојчић и др Махмуд Барјактаревић.

Радио је на Електротехничком факултету на катедри за математику све до пензионисања 1973. године. Био је члан Математичког Института где је одржавао интересантна предавања у вези са математиком и геометријом и умро је у Београду 21. јуна 1986. године.

Објавио је следећа дела: *О предавању коничних пресека у средњој школи*, Гласник југословенског професорског друштва, Књига XIX, свеска 5, јануар 1939.

године, Београд, стр. 375-380, *Једно објашњење Неперовог правила*, Гласник југословенског професорског друштва, Књига XX, свеска 3, новембар 1939. године, Београд, стр. 207-210, *Ајлерова права, Фајербахов круг и њихова веза*, Гласник југословенског професорског друштва, Књига XX, свеска 6, фебруар 1940. године, Београд, стр. 462-466, *Критеријум за одређивање угла троугла*, Гласник југословенског професорског друштва, Књига XXI, свеска 2, октобар 1940. године, Београд, стр. 116-119.

Проф. др Светомир Фемпл је употребио један критеријум за једнозначност решења, на основу кога би се за одређивање угла употребила само формула за угао двеју правих. Тиме би се избегло и израчунавање координата тачака и дужине страна.

Нека су дате једначине страна троугла $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$a: A_1x + B_1y + C_1 = 0, b: A_2x + B_2y + C_2 = 0, c: A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Из косинусне теореме следи:

$$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc.$$

Да би угао α био оштар, мора бити задовољен услов:

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0,$$

при чему ова неједначина има аналитичку форму:

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 > 0$$

те након сређивања добијамо следећи облик:

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \left(1 + \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) \cdot \left(\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \right) \right) > 0.$$

Пошто је други члан трећег фактора представља производ коефицијената смера a_3 и a_2 страна c и b , то последњу неједначину можемо писати у облику:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(1+a_2 a_3)>0.$$

Апсцисе темена су:

$$x_1=(B_2C_3 - B_3C_2)/(A_2B_3 - A_3B_2), x_2=(B_3C_1 - B_1C_3)/(A_3B_1 - A_1B_3),$$

$$x_3=(B_1C_2 - B_2C_1)/(A_1B_2 - A_2B_1).$$

Одавде је

$$x_1-x_2=(B_2C_3 - B_3C_2)/(A_2B_3 - A_3B_2) - (B_3C_1 - B_1C_3)/(A_3B_1 - A_1B_3),$$

те након сређивања добијамо

$$x_1-x_2=-(B_3D)/\Delta_1 \Delta_2,$$

где је:

$$\Delta_1= A_2B_3 - A_3B_2, \Delta_2= A_3B_1 - A_1B_3,$$

$$D=A_3(B_2C_1 - B_1C_2)+B_3(A_1C_2 - A_2C_1)+C_3(A_2B_1 - A_1B_2).$$

Величине x_2 и x_3 смо могли добити из x_1 цикличном пермутацијом индекса.

Ако је извршимо на изразу x_1-x_2 , добићемо редом x_2-x_3 и x_3-x_1 , при чему детерминанта не мења своју вредност. Због тога ће бити

$$x_2-x_3=-(B_1D)/\Delta_2\Delta_3, x_3-x_1=-(B_2D)/\Delta_3\Delta_1,$$

где је

$$\Delta_3= A_1B_2 - A_2B_1, \text{ као и}$$

$$x_1-x_3=+(B_3D)/\Delta_1\Delta_2.$$

Производ $(x_1-x_2)(x_1-x_3)$ добија форму

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)= -(B_2B_3D^2)/\Delta_1^2\Delta_2 \Delta_3,$$

а услов да угао α буде оштар

$$-(B_2B_3D^2)/\Delta_1^2\Delta_2 \Delta_3(1+a_2 a_3)>0,$$

или, после дељења са негативним бројем $-D^2/\Delta_1^2$

$$(B_2 B_3) / \Delta_2 \Delta_3 (1 + a_2 a_3) < 0.$$

Пошто је коефицијент смера праве

$a_v = A_v / B_v$ где је $v=1,2,3$, то је

$$\Delta_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = B_1 B_3 (A_2 / B_2 - A_3 / B_3) = B_2 B_3 (-a_2 + a_3),$$

$$\Delta_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 = B_1 B_3 (A_3 / B_3 - A_1 / B_1) = B_1 B_3 (-a_3 + a_1),$$

$$\Delta_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 = B_1 B_2 (A_1 / B_1 - A_2 / B_2) = B_1 B_2 (-a_1 + a_2),$$

$$\Delta_2 \Delta_3 = -B_1^2 B_2 B_3 (a_1 - a_3) (a_1 - a_2) < 0,$$

па наш услов постаје

$$-(B_2 B_3 (1 + a_2 a_3)) / B_1^2 B_2 B_3 (a_1 - a_3) (a_1 - a_2) < 0.$$

После скраћивања са $B_2 B_3$ и множења са негативним бројем $-B_1^2$ добијамо

$$(1 + a_2 a_3) / (a_1 - a_3) (a_1 - a_2) > 0.$$

Пошто се овде ради само о знаку, то последњем изразу можемо дати следећи

облик

$$(a_1 - a_2) (a_1 - a_3) (1 + a_2 a_3) > 0.$$

Аналогно добијамо услове за β и γ , } (I)

$$(a_2 - a_1) (a_2 - a_3) (1 + a_1 a_3) > 0,$$

$$(a_3 - a_1) (a_3 - a_2) (1 + a_1 a_2) > 0.$$

Множењем ових једначина добијамо

$$-(a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 (1 + a_2 a_3) (1 + a_1 a_3) (1 + a_1 a_2) > 0$$

или, после дељења са негативним бројем -

$$-(a_1 - a_2)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_2 - a_3)^2 (1 + a_2 a_3) (1 + a_1 a_3) (1 + a_1 a_2) < 0 \text{ (II).}$$

Ово је услов да би троугао био оштроугли. Кад би троугао био тупоугли, овај би израз био позитиван, јер имамо само један туп угао, па би један од услова (I) променио знак.

Резимирајмо сада добивене резултате.

Да би троуглу са датим једначинама страна одредили углове, одредићемо најпре врсту троугла. Тога ради формирамо израз

$$(1 + a_2 a_3)(1 + a_1 a_3)(1 + a_1 a_2).$$

Ако је тај израз негативан, троугао је оштроугли. Ако је он једнак нули имамо правоугли троугао. Примењујући формулу за угао двеју правих (тангенсе узимамо са позитивним знаком) добијамо углове. Ако је последњи израз позитиван, имамо тупоугли троугао. Да би одредили који је угао туп, формирамо изразе (I). Незадовољења неједначина казује да је одговарајући угао туп. (У случају тупоуглог троугла може бити незадовољења само једна од неједначина (I)).

*

Проф. др Иван Арновљевић је рођен 7. марта 1869. године у Кикинди. У осмој и у деветој години остао је сироће. Апсолвирао је прва четири разреда гимназије у Кикинди, а друга виша четири разреда на самоуправној Српској православној великој гимназији у Новом Саду, где је 1886. године матурирао.

Као питомац Матице српске је студирао на Техничкој великој школи у Бечу, тадашње Аустроугарске, где је 1892. године положио други државни испит за звање грађевинског инжињера.

Код професора П. Нојмана (P. Neumann) Техничке Велике школе у Брно се школовао за конструктора мостова и железнице. Ту је заступљена геометрија као

вид конструкције. Радио је у аустријским фирмама као што су *Seligmann, Waagner, Postuwanschitz, Kapsch, Brunner, Kurz* и *Biró*.

Учествовао је у градњи челичних мостова преко реке Gail и Skawe као и у Србији. Одбранио је докторску тезу 4. маја 1910. године и почео је да ради у Катедри за механику и статику инжињерских конструкција где је одржао предавање *Однос механике према инжињерским наукама*. Био је заточен у Куфштајну тврђава *Geroldseck* због своје српске припадности без обзира што му је држава била Аустроугарска где је касније ослобођен оптужбе.

После слома Аустроугаске, радио је у новоствореној држави уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца на Београдском универзитету све до пензионисања 20. маја 1939. године. По одлуци Савета Техничког факултета предавао је и кинематику и динамику као заслужни професор све до априлског слома 1941. године.

После рата је постао дописни члан САНУ 18. марта 1948. године, а исте године 8. септембра и члан Научног савета Математичког Института САНУ.

Проф. др Иван Арновљевић је у раду *Кривина линија у геометричком излагању* написао појмове из диференцијалне геометрије: тангента (пунктуалне координате криве и тангенцијалне координате криве), кривина криве, прелом, оскулациони круг, угао торзије, главна нормала, бинормала, Ланкретова теорема, оскулациона лопта, природна једначина криве и параметарске једначине криве, у коме је објашњавао главну улогу криве линије.

У сарадњи са проф. др Б. Петронијевићем, обојица су у раду *Геометријска дедукација извода вишег реда кружних функција $\sin x$ и $\cos x$* доказали у

Лајбницовом диференцијалном рачуну да постоји на беспрекоран начин геометријска егзистенција вишег реда неке функције.

И на крају је у раду *Луци другог степена* напоменуо је да се за геометријску осовину неког свода или лучног носача бира најједноставнија крива линија звана *крива другог степена* примењујући општу једначину опште криве другог реда и на крају је анализирајући их, закључио је да та једначина представља један од конусних пресека без обзира што је параметар постао коефицијент.

Објавио је следећа дела: *Über die Festigkeit von Löt-Leim-und Nietverbindungen*, Öst. Wochenschrift f.d.öff. Baudienst, 1919, Heft 7/8, *Поларне отпорне линије ослонаца код лучног носача са два зглавка*, Југославенска академија знаности и умјетности, свезак 11/12, стр. 81-91, књига 221 разреда математичко-природословнога, 64, стр. 57-90, Загреб 1919, *Кривина линија у геометријском излагању*, споменица С. М. Лезанића, стр. 11, Београд 1922, *Déduction géométrique des derives supérieures des fonctions circulaires sin x et cos y*, заједно са Б. Петронијевићем, L'enseignement mathématique, 1932, No. 5-6 p. 297-304, Geneve 1924, *Полиедар нападних монената*, Технички лист, Годиште VI, број 17, 20 и 23, Загреб 1924, *Геометријски односи између верижних полигона и моментног полиедра*, Технички лист, Годиште VI, број 17, 20 и 23, Загреб 1924, *Једноставни оквир и његови статички одређени облици*, Технички лист, Годиште VI, број 17, 20 и 23, Загреб 1924, *Страх од математике и како да га савладамо*, Педагогијска књижица, св. 32 и 33, Београд 1926, *Механика*, Педагогијска књижица, св. 51, 52 и 53, Београд 1926, *Теоријска математика*, Педагогијска књижица, св. 40, 41 и 42, Београд 1926, *Кинетички притисак звона*, Технички лист, Загреб, година X, бр. 2,

стр. 26-30 1928, *Убрзање тачке у поларним координатама, изведено геометријским путем*, Технички лист, Годиште II, број 15 и 16, стр. 225-226, Загреб 1929, *Луци другог степена*, Технички лист, Годиште XII, број 3, стр. 40-41, Загреб 1930, *Стереометријско представљање момената равних фигура*, Годишњак Техничког факултета, сепарат стр. 1-5, Београд 1935, *Инваријантна сила изражених у тетраедричним координатама*, Годишњак Техничког факултета, сепарат стр. 1-5, Београд 1937.

*

Проф. др Михајл Шварц Фекете је рођен у Сенти 19. јула 1886. године. Његов отац Шандор Шварц је био познати књижар и штампар који је прву књижару у Сенти отворио још децембра 1875. године. Мајка му је била Ема Штеин.

Породица Шварц је у време Михаљевог рођења живела као подстанари у кући удовице Севера Пецарског, да би касније ту кућу купила.

Средњу школу је започео у сенђанској гимназији 1896. године још под именом Михаљ Шварц. Био је одличан ученик, у 5., 6. и 7. разреду је био најбољи ђак. Породица је 1899. године променила презиме у мађарско Фекете и од тада се он у разредним дневницима и сведочанствима јавља као Михаљ Фекете.

Матурски испит је положио јуна 1904. године и од свих матураната он једини бира наставнички позив.

Факултет завршава у Будимпешти да би 1909. докторирао. Након овога, проводи годину у немачком Гетингену у друштву познатог математичара Е. Ландауна. По повратку кући био је асистент Беке Маноа на будимпештанској научној институцији и након тога квалификује се за самосталног професора. На

факултету се упознаје са математичарем Фејер Липотом под чијим ће утицајем почети да се бави анализом.

Прву научну расправу писао је 1908. године (*Egy ismeretient tartalmazó lineáris kongruencia-rendszerek általános tárgyalása*).

1912. године на Кембриџу у Енглеској на светском конгресу математичара, са 574 учесника из 28 земаља, Мађарска је тада први пут од Аустрије самостално заступала. Један од 16 чланова мађарске делегације био је и Михаљ Фекете и то у друштву изузетних математичара као што су Fejér Lipót, Riesz Frigyes, еке Manó, Kürschák József, Rátz László, Goldziher Károly и други.

Након неколико година рада на позицији асистента он напушта факултет и добија запослење у грађанској школи у Будимпешти где ради до 1919. године, затим кратко време предаје у женској гимназији у улици Ваци и Пратер.

Упркос значајним научним радовима због свог понашања, за време *Tanácsköztársaság*, 1920. године лишен је свог радног места и искључили су га из друштва математичара и физичара, чак ни предавања на факултету није могао да одржава. Тада постаје светски познат математичар. Био је кућни наставник математике гимназијалцу Нојману Јаношу и још пре Нојманове матуре заједно објављују једно научно дело *A komplex együtthatós polinomok gyökeinek elheiyekedéséről*.

Након овога, једно време ради у Феникс осигуравајућем друштву док најзад 1925. године добија место професора у мушкој гимназији пештанског јеврејског црквеног друштва. Његова научна достигнућа су већ тада била призната у свету. 1928. године је добио позивницу да предаје на литвански факултет *Ковно*, то јест на

јерусалимски факултет *Хебер*. Позив су потпомогли Хадамард и Ландау који су веома ценили његов рад. Фекет је изабрао други неведени факултет, где је предавао једну годину да би га након тога прогласили за директора Математичког института *Алберт Ајнштајн*, где је радио до смрти.

1928. године на Болоњском светском математичком конгресу последњи пут је, као члан мађарске делегације од 21. члана представљао Мађарску, а касније у овим скуповима учествује као изасланик Израела.

1935. - 1936. године је декан природно-математичког факултета у Јерусалиму а у годинама 1945.-1948. је ректор факултета.

У почетку је његово интересовање било окренуто теорији бројева, међутим, под утицајем Фејер Липота анализа је постала главно подручје његовог истраживања. Најзначајније достигнуће му је *A transzfinit-átmérő fogalmának a megalkotása (a z komplex sík korlátos, zárt, végtelen sok pontot tartalmazó E halmazán értelmezett $d(E)$ halmazfüggvény)*.

Друга значајнија подручја Шварцових истраживања су: *A ponthalmazok elmélete, interpolációelmélet, algebra és komplex változós függvénytan határterülete, divergens sorok szummációja, Fourier-sorok*.

Пуно је путовао по свету и био је познато лице математичких конференција и семинара.

Последњих година живота поново стиже до *A transzfinit-átmérő*, у шта се временом прикључују многи познати математичари, поред Pólya György и Szegő Gáboron, такођер P. J. Myrberg, J. W. Lindeberg, P. Nevanlinna, J. Gillis, Erdős Pál и

други. Поводом одласка у пензију, 1955. године добио је израелску награду егзатних наука.

Умро је 13. маја 1957. године у току рада, за радним столом. Његовом смрћу научни свет је претрпео велики губитак. Михаљ Фекете није био само изузетан и способан математичар, већ и величанствен предавач и изузетан педагог. Његова личност, захваљујући врлинама, била је пријатна. Био је један од ученика Фејера Липота који су освојили својим радовима на пољу математике освојили значајна признања.

Вредно је пажње је то колико је група научника математичара рођених осамдесетих и деведесетих година 19 века богата као и висок ступањ који представља: Fejér Lipòt (1880-1959), Riesz Frigyes (1880-1956), Kármón Tódor (1881-1963) ...

Михаљ Фекете заузима место међу заборављеним великанима свог родног места, чије су прве кораке у свет науке, у тадашњој с правом познатој сенћанској гимназији, утрли њени одлични професори. У његовом родном граду и данас постоји кућа у којој је рођен и на коју (и једну улицу су назвали по њему) би требало сместити спомен плочу у сећање на овог светски познатог математичара.

Навешћемо само области из геометрије које је он објавио: *The zeros of Riemann's zeta function on the critical line*, J. London Math. Soc. 1, 1925, *Relations between the transfinite diameter (Abstract)*, Bull. Amer. Math. Soc. 53, 1938.

Геометрија на подручју Хрватске

На подручју територије бановине Хрватске, математика и геометрија су постале научне дисциплине, што можемо нагласити да су први математичари на подручју Дубровника, били геометричари: Марин Геталдић из XVII века и Руђер Бошковић из XVIII века. Геометричар Марин Геталдић је геометријске проблеме посматрао под утицајем алгебарске методе где се сматрао као оснивачем аналитичке геометрије из дела *De resolutione et compositione mathematica Rome 1630*. Геометричар Руђер Бошковић се бавио графичким решавањем сферних трокута, затим је написао познато дело *Sectionum conicarum elementa ...* у коме је износио теорију о кривуљама другог степена. Те након формирања Академије наука као високе школе у Загребу 1774. године, с катедром за елементарну математику, геометрију, архитектуру и хидротехнику, у коме је изашла прва књига математичара Мије Шилобода *Arithmetika Horvacka* 1769. године. После тога настаје Свеучилиште (1874) и Југославенска академија знаности и умјетности (1866) у Загребу, где су се касније, истакли: проф. др Ј. Ванечек (*О просторним кривуљама и правчастим и опћим плохама*), проф. др А. Стрнад, проф. др Е. Долежал, проф. др Јурај Мајцен (*Разна пресликавања плоха трећег реда на равнину и плохе другог ступња*), проф. др Карл Захрадник, проф. др Давид Сеген, проф. др Владимир Варићак (*Кривуља другог и трећег реда*), проф. др В. Ниче (*О правчастом простору и о имагинарним елементима кривуља и плоха*, Загреб), проф. др Рудолф Цесарец (*О вишедимензионалним правилним тијелима*, Загреб), проф. др Антон Ваксељ (*Диференцијална геометрија, алгебра, теорија*

аналитичких функција), проф. др Иван Видав (*Анализа и теорија диференцијалних једнаци у комплексном подручју*). Објављени су радови из геометрије у часопису *Раd*, у публикацији *Bulletin des travaux de la classe des sciences mathématiques et naturelles*, и у *Наставном вјеснику*.

*

Проф. др Владимир Варићак је рођен 16. марта 1865. године у Швици, крај Оточца у Лици, као треће од деветоро деце. Завршио је основну школу у Сиску; затим пети и шести разред грађанске школе; те трећи и четврти разред реалке у Петрињи 1878/1879 и 1879/1880, и на крају више разреде у Загребу, где је матурирао 1883. године. Наредне године је и положио гимназијску матуру ради наставка студијског школовања на Филозофском факултету у Загребу код професора математике Карла Захрадника, професора физике Винка Дворжака, професора хемије Густава Јаначека и професора филозофије и педагогике Фр. Марковића. Апсолвирао је 1887. године. А идуће године је положио професорски квалификациони испит из математике и физике ради предавања у реалкама. Докторирао је 6. јануара 1891. године код професора Карла Захрадника под тезом *Ножшиње кривуље*. Бавио се и сферном тригонометријом као и анализом 1895. године на Филозофском факултету у Загребу. Усавршио се 11. јуна 1895. године за алгебарску анализу и сферну тригонометрију. Бавио се и стенографијом код професора Магдића. Занимљиво је да реч *варићак* значи мера за жито.

Предавао је у земунској реалци 1888. године, у бакарној наутичкој школи 1889. године, у загребачкој реалци 1891 и у осијечкој реалци 1892. године. 1895. године му је додељена звање *venia legendi* за алгебарску анализу и сферну

тригонометрију на Филозофском факултету у Загребу. 1896. године је радио као професор доњоградске гимназије у Загребу. Био је учитељ физике и механике Шумарске академије 1898. године, а 1899. године је постао суплент на математичкој столици Филозофског факултета у Загребу те 11. децембра исте године постаје ванредни професор.

11. новембра 1902. године је постао редовни професор математике Филозофског факултета у Загребу све до пензионисања 11. септембра 1936. године. Био је декан 1904/05, ректор 1921/22 и проректор 1928/29 и 1931/32 и члан Југославенске академије знаности и умјетности у Загребу, дописни члан Српске академије наука у Београду, члан Чешке сполечности наука у Прагу, члан Хрв. Природословног друштва, и члан Југославенског математичког друштва. Од осталих одликовања треба истаћи диплому Физичко-математичког друштва Казањског универзитета, коју је добио 1927. године учествујући у међународном такмичењу за награду Лобачевског.

1911. године је Владимир Варићак доказао да се основне ствари Ајнштајнове неЊутновске кинетике (Њутновске кинетике) могу извести аналитичким путем из геометрије Лобачевскога (Еуклидске геометрије). Ту је нашао везу између Лобачевске и Еуклидске геометрије помоћу Алберта Ајнштајнове теорије релативности.

Под утицајем свог ментора професора Карла Захрадника истраживао је о ножишицима, Декартовој листи, Паскаловој пужевој линији, проблемима хиперболичке геометрије уз Поинкарове интерпретације, трансформације и транслације у равнини Лобачевскога, једнаци правца у хиперболичкој равнини,

опћенитој еквидистантној линији и плохи, и тако даље. На крају се бавио живот и дело научника Руђера Бошковића као и дидактиком математике професора Хочевара.

За тачке правца p , рећи ћемо да леже у бесконачној удаљености, тако да ће на пр. два полукруга са средиштем на p бити на два паралелна правца Лобачевскога, ако се сијеку у некој тачки правца p . Сада је јасно да се у тој новој геометрији може сваком тачком T равни π повући са сваким правцем α две паралеле: полукругови кроз T и сједишта A' или A'' полукруга α са p , а са средиштем на p . Исто тако видимо, да је лако нацртати и такав трокут Лобачевскога, којему је сваки угао једнак нула степени: треба на пр. само нацртати један полукруг k са средиштем на p и његове тангенте у тачкама где се k и p секу; или овако: нацртати ма каква три полукруга са средиштима на p , али тако да се два по два додирују!

Тако је геометрија Лобачевскога по Варићаку постала и за еуклидовце сасвим зорном, а технички се све проводи узимајући да је $ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2$, а не $ds^2=dx^2+dy^2$.

Слично се, у једној половини обичног простора, интерпретира и тродимензионална геометрија Лобачевскога.

Тако је геометрију Лобачевског изучавао Владимир Варићак при томе издвајајући занимљиви рад о правцу, кругу, равну и кугли. Извео је релације између Декартових координата у Еуклидској равни и координата у геометрији Лобачевскога, као и релације између просторних координата у Еуклидовом и у Лобачевском простору, проширујући Лахтинова истраживања.

Објавио је следећа дела: *Елементи векторске алгебре у простору Лобачевскога*, Споменица Лозанића, стр. 167-174, Београд 1922, *О предочивању дистанца*, рад 230, стр. 259-263, 1924, *Геометрија Лобачевскога и принцип релативности*, 1920/21/22/23/30/31/33/34, *Геометрија на кугли и на псеудосфери*, *Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschewskischen Raume*, Zagreb, strane 124, 1924. godine.

*

Проф. др Рудолф Цесарец је рођен 2. марта 1889. године у Загребу, као друго дете од седморо и потиче из породице Цесарец - Сенк. Школовао се у свом родном граду где је положио испит зрелости у Првој реалној гимназији 1907. године. Уписао се на Мудрословни факултет краљевског Свеучилишта зимског семестра 1908/1909. године где је апсолвирао школске године 1911/1912. године. Занимљиво је да се више бавио математиком и дескриптивном геометријом где су му предавачи били познати професори С. Бохничек, Ј. Мајцен, Д. Сеген и В. Варићак.

Дипломирао је код професора В. Варићака и Ј. Мајцена у пролећном професорском испитном року 1916. године чиме му је признато право да може да предаје математику и дескриптивну геометрију у свим разредима средњих школа.

Радио је као намјенски учитељ 1912. године у привременој малој реалној гимназији у Крапини. После положеног професорског испита постао је прави средњошколски учитељ 1917. године. Тек 1919. године на тлу новостворене државе уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца добије признање као професор и премештен је у Прву реалну гимназију школске године 1919/1920. године.

На предлог професорског збора Мудрословног факултета у пролеће 1919. године је изабран за службу Геометријској столици Мудрословног факултета, непуних неколико месеци на своју молбу враћен је у службу код Крапине одакле је 1920/1921. године је премештен у службу код реалне гимназије код Копривнице и остаје до јесени 1928. године.

1924. године је положио латински језик ради рада на докторској дисертацији која гласи *Теорија Euklid-ових, Riemann-ових, Weyl-ових и Eddingt-ононих простора*. У јесен 1927. године стиче звање доктор филозофских наука. Филозофски факултет у Загребу је поднео допис Министарству просвете краљевине Срба, Хрвата и Словенаца предлог за плаћени допуст професору др Рудолфу Цесарецу ради усавршавања у геометрији у Берлину код професора Г. Шеферса (G. Scheffers) класичне диференцијалне и нацртне геометрије, школске године 1927/1928. године, где му је одобрен ради каснијег преузимања катедре за геометрију која је остала упражњена смрћу професора Јурја Мајцена.

Наредне школске године 1928/1929. године проводи у Паризу код професора Е. Картана (E. Cartan) ради упознавања нове модерне диференцијалне геометрије. То му је омогућило да води успешно катедру за геометрију на Филозофском факултету у Загребу од школске године 1929/1930. године, где је 1935. године унапређен у звање редовног професора све до пензионисања 1946. године од народних власти у Загребу и тек на интервенцију професора др Станка Билинског враћен је као хонорарни наставник новоотворене Природословно-математичког факултета од школске године 1947/1948. до повлачења због болести и старости 1964/1965.

Сада ћемо посматрати три фазе, а то су:

1. Прва фаза је Риманова геометрија у коме је написана докторска дисертација и у коме је почела преовлађавати неспретан и сложен апарат који је потискивао чисте геометријске садржаје.

2. Друга фаза је неевклидска геометрија, то јест Cayley-Klein пројективно заснивање као апсолутна теоријска творевина било које плохе другог ступња и дегенериране, значи Риманове елиптичке геометрије и хиперболичке геометрије Лобачевског.

Узима једноплошни хиперболоид. Помоћу пројективних трансформација његова једнаджба се може свести на облик

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Оперативни простор “треће геометрије” је нутрина N тог хиперболоида. Сада се посматрају два сустава изводница тог хиперболоида, они су дани једнаджбама

$$y + z = \lambda(1 + x),$$

$$y - z = (1 - x)/\lambda$$

као и

$$y + z = \mu(1 - x),$$

$$y - z = (1 + x)/\mu.$$

На тај начин је сваком параметара (λ , μ) придружена по једна изводница сваког од тих сустава. Како се те изводнице сијеку у тој точки на хиперболоиду, то сваком пару (λ , μ) припада точка на хиперболоиду. Та је точка реална само у

случају реалних параметара. Два пара $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ реалних параметара одређују реални правац простора \mathbb{H} и то спојницу проматраних тачака.

Ако су λ_j и μ_j комплексни, то јест $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \mu_j = \gamma_j + i\delta_j, \beta_j\delta_j \neq 0, (j=1,2)$, онда таква два пара опћенито одређују комплексни правац. Ако је $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ и $\mu_2 = \bar{\mu}_1$, онда је та спојница реална.

Важан је обрат, то јест сваки се реалан правац да карактеризирати помоћу таква два пара. Дакле у тој “трећој” геометрији, имамо два типа реалних правца, већ према томе да ли они пробадају апсолуту имагинарно или реални. Прве зове Цесарец **правцима 1. врсте**, а друге **правцима друге 2. врсте**.

Сада слиједи захват који показује дубину Цесареве геометријске мисли. Он узима правац 2. врсте, тај је одређен са два пара $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ реалних параметара и проматра два егземплара Поимкарове полуравнине. Бројевима λ_1, λ_2 одређене су у првој од тих полуравнина двије тачке $A(\lambda_1, 0), A(\lambda_2, 0)$, а њима је одређена полукружница (правац хиперболичке равнине) којој је дужина \bar{AB} дијаметар. На слични је начин правцу 2. врсте придружен пар тачака друге полуравнине. Хиперболичка гibaња у тим полуравнинама дана су са

$$\lambda' = (p_1\lambda + q_1)/(r_1\lambda + s_1), \mu' = (p_2\mu + q_2)/(r_2\mu + s_2), p_i s_i - q_i r_i \neq 0, i = 1, 2.$$

Свако од ових гibaња индуцира трансформацију полукружница (праваца у Поимкаревом моделу), а потоња пак трансформацију изводница апсолутног хиперболоида. То индуцирано пресликавање пресликава изводнице једног сустава опет у изводнице тог сустава. Дакле на споменути начин Цесарец добива пресликавање скупа правца простора \mathbb{H} у самог себе, а сва та пресликавања творе

групу с обзиром на композицију као груповну операцију (**група гibaња у правчастој геометрији простора H**).

Сада он користећи ту групу детаљно развија правчасту геометрију простора H , а помоћу ње и точковну геометрију, те изводи метричке односе у геометрији простора H .

У овом раду он уводи и једну нову врсту четворокута које је назвао Витоперим паралелограмима. То су четворокути којима сва четири врха не леже у истој равнини, а супротне им странице леже и на такозваним Клифородовим паралелама или такозваним паратактичким правцима. Изведена су и многа својства таквих четворокута. На пример сва су четири кута тих четворокута једнака и тако даље.

Надаље, Цесарец класифицира у тој “трећој” геометрији и скицира како се она може развити користећи уместо Поинкарове полуравнине Клајнов модел хиперболичке геометрије.

3. Трећа фаза је теорија алгебарске кривуље. Ту се истиче рад *О циркуларним рационалним кривуљама 4. реда изведеним из извјесних коноида*.

Био је сарадник Југославенске академије знаности и умјетности и члан Института за математику Свеучилишта у Загребу. Био је члан друштва математичара и члан француског математичког друштва.

Био је изврстан предавач. Одликовала су се његова предавања јасноћом, ригорозношћу и систематичношћу, педантношћу и терминолошки. Његова чувена изрека гласи *Формула у вези кута и дистанце паралелности представља кључић од сефа у којему се крију најљепше тајне хиперболичке геометрије*, то јест хоће да

каже да је свака формула живописна и представља извор многих тајних геометријских информација.

Објавио је следећа дела: Upute za izvođenje geometrijskih crteža, *Nastavni Vjesnik* 27 (1918/19), 301–306, *Sur les triples spirales logarithmiques dans l'espace*, *Bull. Soc. Math. de France* 57 (1929), 104–110. E. Cartan i njegovo djelo o Riemannovim prostorima, *Nastavni Vjesnik* 37 (1928/29), 312–232, *Nikolaj Ivanovič Lobačevski, O stogodišnjici neeuclidске geometrije*, *Novosti, Za-greb*, br. 275 od 5.X 1930, 25–26. *O neeuclidskoj geometriji, osnovanoj na apsolutnom jednoplošnom hiperboloidu*, *Rad JAZU* 241 (1931), 81–124, *Sur la géométrie non euclidienne basée sur l'hyperboloïde a une nappe comme l'absolue*, *Bull. Internat. Acad. Sci. Yougoslave* 25 (1931), 25–37, *O rješavanju geometrijskih zadataka*, *Matem. list za srednju školu I* (1932), 97–103, 119–122, *Über die Berechnung von Orthogonen der hyperbolischen Ebene*, *Sitzungsberic-hted. Heidelberger Akad. d. Wissensch., Math.–Naturwiss. Kl.* 1932, 4 Abh., 1–12, *Konstrukcija pravilnih ortogona*, *Rad JAZU* 246 (1933), 216–223, *Über die Konstruktion der regulären Orthogone*, *Bull. Internat. Acad. Sci. Yougoslave* 27 (1933), 90–92, *Nekoja domaća amaterska rješenja klasičnih problema geometrije*, *Nastavni Vjes-nik* 49 (1940/41), 324–334. Dr. Vladimir Varićak, *Nastavni Vjesnik* 50 (1941/1942), 405–408.

Геометрија на подручју Словеније

На подручју територије Словеније математика и геометрија су постале научне дисциплине у првој половини XVI века. На артистичком факултету у Бечу је математичар Андреј Ферлач (1490-1551), из Свечине крај Марибора, проучавао математику и објављивао више радова. Као и његова колега Јанез Олбен (1643-1725). На разним језуитским колегијумима су се истакли професор Франц Прекенфелдт (1681-1744) из Љубљане и професор Јуриј Вега (1754-1802) са делима *Vorlesungen über die Mathematik, Manuale* и *Thesaurus*. На бечком универзитету почетком XIX века су се истакли професор математике Јожеф Јенко из Крања, методичар математичке наставе Франц Мочник (1814-1892), проф. др Франц Хочевар (1853-1919) са делом *Аналитичка геометрија простора*. У средњим школама су се истакли проф. др Б. Вовк, проф. др Јосип Неједли, проф. др Михаел Маркич, проф. др Марко Похлин (*Vukovce za rajtengo*, 1781), проф. др Франц Метелко, проф. др Симон Рудмаш, проф. др Орослав Цаф, проф. др Јанез Лапајнеа (*Геометрија за основне школе*, 1872), проф. др Лука Лавтар (*Аритметика*, 1879 и *Геометрија за учитељске школе*, 1881) и проф. др Јосип Целестин (*Аритметика и геометрија за ниже разреде гимназије*). Након формирања љубљанског универзитета (1919) у Љубљани, касније су се истакли: проф. др Фран Јеран (*Дескриптивна геометрија*, 1920. године, Љубљана), проф. др Рихард Зупанчич (*Геометрија*, Филозофски факултет, Љубљана), проф. др Јосип Племељ, проф. др Антон Ваксељ (*Диференцијална геоемтрија, алгебра, теорија аналитичких*

функција), проф. др Иван Видав (*Анализа и теорија диференцијалних једнаци у комплексном подручју*).

*

Проф. др Фран Јеран је рођен 5. октобра 1881. године у Љубљани. Основну школу и реалку је завршио у свом родном граду. Уписао се на Техничку високу школу (2. семестра) и на државни универзитет (8. семестра) у Градцу где је после тога службовао у другој реалној гимназији, затим у посебној Маријиној реалки и у реалки у Градцу 1908-1909. године, а од октобра 1909. године је у реалки у Љубљани. Био је чувени професор математике из описне геометрије у љубљанској реалки и дугорочни управник. Важио је за доброг методичара. Самостално је, али и са другима написао средњошколске уџбенике. Његово најпознатије дело је: *Основни појми описне геометрије* из 1920. године. У сарадњи са колегом проф. др Матек је написао дело *Геометрија за 4. и 5. р. средњих шол.* 1922. године. Приредио је друго издање *Маткове Геометрије за 6., 7. и 8. р. сред. шол* 1921. године и *Матек-Петерлинове Аритметике за 1., 2. и 3. р. сред. шол* 1922. године. Саставио је дело *Кажипот за избиру шол и поклицев з додатком о нотрањем устроју најважнејших шол* 1914. године и подал *Оснутек учнега начрта за геометрију и геом. писање на меишчанских шолах* 1921. године. Био је члан више школског света у Љубљани 1921/22. године и 1925. године је, као председник Професорског друштва секција, подробно учествовао у нацрту реформи типа средњих школа у својству Министарства просвете уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца касније краљевине Југославије. После рата је преузео место директора 1. гимназије, где је 1947. године написао дело *Вај из тригонометрије и*

аналитичне геометрије за средње школе. Умро је 31. маја 1954. године не стигавши да поново издаје друго издање првобитног дела Основни појми описне геометрије.

Проф. др Фран Јеран је, у делу *Основни појми описне геометрије* коју је штампала Југослованска тискарна 1920. године у Љубљани, направио 9. одељака, и то: *Правокотна пројекција, Пошевна пројекција, Правокотна ин пошевна пројекција оглатих телес, Точке ин премице в медсебојни леги, Правокотна ин пошевна пројекција окроглих телес, Равнина, Нове пројекцијске равнине, Вртење телес околи пројцирних оси и Стожкосечнице.* Занимљива је у глави 43. *Механично начртовање параболе.* Ево опис те главе: Положи равнило ин правокотни-трикотник $BСD$ с катето BC об водницо, тер притрди ен конец нити, које должина мери CD , в жаришчу F , други конец па в точки D трикотника. Ако помикаш трикотник $BСD$ с катето BC об равнилу ин притискаш мед тем нит с свинчниково коницо об катето CD тако, да је нит напета, зачрта свинчникова коница T дел горње половице параболе. Кајти ведно је: $TC=TF$. В практичном живљењу опазујемо достикрат облико параболе; н. пр. водни цурек студенчнице, пот камна, ки га вржеш в ненавпично смер, локи железних мостов, пота кометов ин звездних утринков итд.

Ево још један занимљив опис у глави 50. *Механично начртовање хиперболе:* Вземи равнило ин нит тер нареди на њених концех зањки тако, да је њију раздаља за велико ос $2a$ крајша од равнила. Нато притрди ен конец равнила вртљиво в жаришчу F_1 , ено зањко в другом жаришчу F_2 , друго зањко па на другом концу к равнила. Ако вртиш равнило околи F_1 тер притискаш мед тем вртењем с

свинчничково коницо нит ведно к равнилу тако, да остане тачас вса нит напета, потем нарише свинчничкова коница горњи дел десне хиперболне веје.

Кајти: $TF_1 - TF_2 = (TF_1 + \mathbf{TK}) - (TF_2 + \mathbf{TK}) = (\text{должина равнила}) - (\text{должина нити}) = F_1P = 2a$.

Налога: Нареди превржен правокоутник ABCD с подаљшаними страницама АВ ин CD. Доказ: Ако држимо дијагонала АС непремично тер помикамо остали апарат, потем добимо симетричне превржене трапезе АВ'CD'. Пресечишче Т подаљшаних краков такега трапеза зачртава хиперболо з жаришчема А ин С ин з главно осјо $2a = CD$; всакократна симетрала трапеза па је хиперболна тангента t в точки Т.

Кајти: Четворокоутник AMD'T је делтоид ин $TC - TA = TC - TD' = D'C = DC = 2a$.

*

Проф. др Рихард Зупанчич је рођен 22. децембра 1878. године у Љубљани као седмо дете из немачко-словеначке породице Suppantschitsch-Pollak. Без обзира на римокатоличке вере, више су говорили на немачком него на словеначком језику. Завршио је основну немачку школу (des Deutschen Schulvereins) у Љубљани од 1885. до 1889. године где је одатле био после матуре немачки гимназијалац и 1897. године се уписао на Дунајску високу техничку школу, смер машинство, где се после две године проведених пребацио на филозофски факултет дунајског универзитета од 1899. до 1903. године ради изучавање математике и физике све до дипломирања 3. марта 1903. године.

После завршетка студије био је асистент на Политехничкој академији на Дунају од 1902. до 1903. године; професор математике на III немачкој реалки у Прагу од 1903. до 1904. године и од 1904. до 1919. године био је професор XVIII реалке на Дунају. У том периоду је написао уџбенике за средњу школу, учествовао је на семестрима у Гетингему и у Паризу слушајући предавања познатих математичара Хилберта из механике, Клајна из анализе, Бернштајна из елиптичне функције, где је 1913. године на Дунајском универзитету одбранио докторску дисертацију под називом *Zur Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate* стичући звање Dr. phil и на крају радио у аустријском министарству за просвету за међународну математичку публикацију.

Што се тиче војске, служио је од 1915. до 1918. године као надпоручник-инжињерац у инжињерској чети аустроугарске војске. После пропасти Хабзбуршке монархије и стварање уједињеног краљевства Срба, Хрвата и Словенаца 1. децембра 1918. године професор Племељ и професор Зупанчич су 1919. године покренули иницијативу за оснивање Универзитета у Љубљани при министарству СХС. Проф. др Рихард Зупанчич је као члан субкомисије за универзитетски статут, колегијума техничког факултета, члан комисије за библиотеке активно је учествовао где је краљ СХС Петар I Карађорђевић поставио за редовног професора Техничког факултета. Био је од 1920. до 1921. године ректор универзитета, а од 1921. до 1922. проректор. Од 1922. до 1923. као и од 1932. до 1933. био је декан Техничког факултета. Био је дописни члан Academie des Sciences (Toulouse) и 1928. године је одликован орденом светог Саве II степена ради успешног развијања математичких метода из Математике I, Математике II, из диференцијалне

једначине у аналитичкој механици, као и развијања геометрије, диференцијалне геометрије и критичног увода у инфинитезималном рачуну у војном смислу при министарству војске и морнарице СХС.

Од 1935. године је био председник испитне комисије за професорске испите, а од 1938. године био је примљен у словеначку академију наука и уметности. Захваљујући њему произишашли су нови докторати из Института за физику и Института за упорабну математику краљевине Југославије све до априлског слома 6. априла 1941. године, а то су: Антон Ваксља, Валентин Кушарј, Антон Петерлин и Алојзиј Ваднал. Током окупације и припајање Љубљане италијанској окупационој зони, мало се зна о његовом преживљавању као и послератне несрећне године које су владале доласком народних власти друге Југославије, избачен је из словеначке академије наука и уметности, приморале су га на изгнанство у Аустрију (Грац) где је умро 21. марта 1949. године као човек професор крхког здравља због неправде нанешене речима само од једног новопеченог академика проф.. др Францет Кидрич.

Његова позната дела су: инфинитезимални рачун, диференцијалне једначине, аналитичка динамика и векторска алгебра у геометрији. Његова дела из геометрије, филозофије, и других грана су волшебно нестала из стана 6. маја 1945. године наредбом народне власти у Љубљани и ректора Алојза Крала.

Објавио је следећа дела: *Geometrische Anschauungslehre für die 1. Klasse der Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. Mit 77 Fig. Im Text und 221 Fragen und Aufgaben.* Wien, F. Tempsky 1909. 40. str. (Verrdnungsblatt, Wien, 1909, 320), *Grundrisz der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien. I. Heft, für die II. Klasse.*

Mit 117. Fig. Im Text und 208 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempisky 1909. 8. str. (Bibliothek des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst, Wien), *Grundrisz der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien. II. Heft. Für die III. Klasse.* Wien, F. Tempisky 1909. 87+(I) str. (Bibliothek der Techn. Hochschule, Wien), *Geometrische Anschauungslehre für die I. Klasse der Realgymnasien.* Ausg. f. Realgymnasien. Mit 77 Fig. Im Text und 221 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempisky 1909. 40+(I) str. (Bibliothek des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst, Wien), *Grundrisz der Geometrie. I. Heft. Für die zweite Klasse der Realgymnasien.* Ausgabe f. Realgymnasien. Mit 117 Figuren im Text und 197 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempisky 1909. 58+(I) str. (Bibliothek der Techn. Hochschule, Wien), *Grundrisz der Geometrie. II. Heft. Für die dritte Klasse der Realgymnasien.* Ausgabe f. Realgymnasien. Mit 153 Figuren u. 393 Fragen u. Aufgaben. Wien, F. Tempisky 1909. 88 str. (L'Enseignement mathématique, Paris-Genève 1910, 78), *Grundrisz der Geometrie für Realschulen. I. Heft, für die II. Klasse.* Mit 124 Fig. Im Text, 3 Taf. Und 208 Fragen und Antworten. Wien, F. Tempisky 1910. 68 str. (Knjižnica Slovenskega šolskega muzeja, Ljubljana), *Grundrisz der Geometrie für Realschulen. II. Heft, für die III. Klasse.* Wien, F. Tempisky 1910. 92. str. (Bibliothek des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst, Wien), *Lehrbuch der Geometrie für die IV. Und V. Klasse der Realschulen, Planimetrie und Stereometrie.* Mit 299 Fig. Im ext und 1171 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempisky 1910. 302 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und Realgymnasien. Mittelstufe. Planimetrie und Stereometrie.* Mit 349 Fig. Im Text und 1296 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempisky 1910. 340 str. (Knjižnica Slovenskega šolskega muzeja, Ljubljana), *Grundrisz d.*

Geometrie für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen. II Heft. Für d. III Klasse. Mit 153 Fig. Im Text, 3 Taf. Und 393 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1910. 92 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Leitfaden der darstellenden Geometrie für die V. und VI. Klasse der Realgymnasien.* Mit 212 Figuren im Text u. 204 Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1910. 196 str. (Bibliothek des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst, Wien), *Helly, Eduard, Lösungen d. Aufgaben in Suppantšitsch Lehrbuch d. Geometrie f. d. IV. u. V. Kl. D. Gymnasien u. Realgymnasien.* Wien, . Tempsky 1911. 91+(I) str. (Bibliothek des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst, Wien), *Helly, Eduard, Lösungen d. Aufgaben in Suppantšitsch Lehrbuch d. Geometrie f. d. IV. u. V. Kl. D. Realgymnasien.* Wien, F. Tempsky 1911. 84+(I) str. (Österreichische Nationalbibliothek, Wien), *Leitfaden der darstellenden Geometrie für die V. bis VII. Klasse der Realschulen.* Mit 311 Fig. Im Text u. 375 Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1911. 269 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Lehrbuch der Geometrie. Trigonometrie und analytische Geometrie. Für die VI. Bis VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien.* Mit 176 Figuren im Text und 795 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1912. 294 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Lehrbuch der Geometrie. Trigonometrie und analytische Geometrie. Für die VI. Und VII. Klasse der Realschulen.* Mit 200 Fig. Im Text und 786 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1913. 300 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Geometrie für Mädchenlyzeen. 1. Heft für die 1. Klasse.* Für Mädchenlyzeen bearbeitet von Emil Börner. Mit 64 Fig. Im Text und 205 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1913. 36+(I) str. (Knjižnica Slovenskega šolskega muzeja, Ljubljana),

Geometrie für Mädchenlyzeen. 2. Heft für die 2. Klasse. Für Mädchenlyzeen bearbeitet von Emil Börner. Mit 104 Fig. Im Text und 208 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1913. 49 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Geometrie für Mädchenlyzeen. 3. Heft für die 3. Klasse.* Für Mädchenlyzeen bearbeitet von Emil Börner. Mit 143 Fig. Im Text und 386 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1913. 82 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Geometrie für Mädchenlyzeen. 6. Heft für die 6. Klasse.* Für Mädchenlyzeen bearbeitet von Emil Börner. Mit 43 Fig. Im Text und 107 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1914. 59 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Geometrie für Mädchenlyzeen. 4. Heft für die 4. Klasse.* Für Mädchenlyzeen bearbeitet von Emil Börner. Mit 135 Fig. Im Text und 247 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1915. 98 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Geometrie für Mädchenlyzeen. 5. Heft für die 5. Klasse.* Für Mädchenlyzeen bearbeitet von Emil Börner. Mit 66 Fig. Im Text und 205 Fragen und Aufgaben. Wien, F. Tempsky 1915. 44 str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana), *Pogladowa nauka geometryi dla klasy pierwszej j gimnazyów, gimnazyów realnych i szkól realnych.* Przetłumaczył Dr Lüdwick Hordyński. Lwów Warszawa, G. Seyfarth, Gebethner i Wolff 1911. (II)+41+(I) str. (Matematična knjižnica Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana).

Закључак

Зашто сам навео професорку др Јудиту Цофман?

Навео сам је зато што је њен покојни тата познавао те угледне и познате математичаре који су долазили у том периоду на његова имања коју је поседовао и према причима између оца и кћери, која је у њој оставила траг занимације из свеобухватне области математике, које је у себи поставила циљ: истраживање о математичарима, њихов метод рада као и истраживање о проблематичним односима које се јављају између математике и ученика.

Проф.. др Јудита Цофман је рођена 1936. године у Вршцу. Потиче из угледне предратне јеврејско-немачке породице Цофман (Zoffmenn). Основну школу и гимназију је завршила у родном граду, а Филозофски факултет у Новом Саду где је 22. новембра 1963. године одбранила докторску дисертацију под називом: *О коначним недезарговим пројективним генерисаним четвортемеником.*

Бавила се проблемима геометрије између два светска рата и њена област је *коначна пројективна раван*. То је дубинско испитивање саме основне пројективне геометрије. У том добу природно се појавила идеја о самој конструкцији нових класа пројективних равни на основу старе класе аксиома уз пројективне равни била реална или комплексна, с тим је коришћен алгебарско-геометријски метод у увођењу координата у дати пројективни раван и да на основу алгебарске структуре координатног домена се доказује теорема геометријског карактера.

У оквиру диференцирања појединих подручја геометрије је настала геометрија коначних равни које се састоје од коначног броја тачака и правих, при чему је права инцидентна са коначним бројем тачака.

Сада ћемо посматрати случај геометрије *недезаргових равни* за разлику од геометрије *дезаргових равни*.

Дезаргова теорема гласи:

Ако су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ такви да се праве A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 секу у истој тачки S , онда се одговарајуће стране, то јест праве A_1C_1 и A_2C_2 , A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 секу у тачкама које припадају истој правој s .

Недезаргова теорема гласи:

Обрнуто, ако се парови одговарајућих страна секу у трима колинеарним тачкама, онда одговарајућа темена одређују конкурентне праве.

Дезаргова теорема је задовољена у простору где важе свих девет аксиома што значи да ако тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ припадају двома разним равнима, онда је права S пресек те две равни. Пројектовањем саме конфигурације на једну од ове две равни, добија се доказ Дезаргове теореме у самој равни, а ако се не користи пројективни простор и ради се само о пројективној равни, значи отпада сама Дезаргова теорема.

Ситуација изгледа овако:

Нека је дата пројективна раван π . То је скуп тачака P са одређеним подскуповима, правима p , у коме је дефинисана релација припадања следећим аксиомама:

A_1 : Постоји једна и само једна права којој припадају две различите произвољне тачке.

A_2 : Постоји бар једна тачка којој припадају две различите произвољне праве.

A_3 : Постоје четири тачке од којих ниједна од три не припадају истој правој.

На основу аксиоме A_3 у самој равни π постоји бар један четворотеменик то јест скуп четири тачке A, B, C и D од којих ниједна од три не припадају истој правој. Сада ћемо применити процес комплетирања у следећем:

Означимо са S_1 скуп пменуте четири тачке. На основу аксиоме A_1 , сваке од њих две одређују праву. Унију скупа свих тих правих и скупа S_1 означимо са S_2 . На основу аксиоме A_2 , праве из S_2 , означимо са S_3 . Значи S_1 је унија скупа S_3 и нових правих које су *спојнице* тачака у S_3 а нису у S_3 . И тако добијеном скупу S_1 додајемо нове тачке низом скупова S_1 од којих је сваки садржан у равни π . Унија свих скупова S_1 задовољава аксиоме A_1, A_2 и A_3 што представља пројективну раван π генерисану четворотемеником $ABCD$.

Скуп елемената равни π је *прави* подскуп скупа елемената равни π што у првом случају је π права подраван равни π , или се та два скупа поклапају што у другом случају полазна раван π је генерисана својим четворотемеником $ABCD$.

Увек се наилазило на тешкоће не саме Јудите Цофман него и самих геометричара између два светска рата и после Другог свеског рата, а то је: проналажење општег поступка којим би се утврдило кад се раван може генерисати четворотемеником, а кад не.

Бавила се Килгровом хипотезом која гласи: *свака коначна недезаргова раван може бити генерисана четворотемеником као и геометријском структуром Мебијусове равни и законе алгебарских структура у самој геометрији* што је јој омогућило да дође до фасцинатног закључка које смо напоменули претходно, а то је:

Нека је π коначна пројективна раван а K - класа пројективних подравни равни π , која задовољава следеће услове: сваки четворотеменик равни π садржан је у најмање једној подравни из скупа K и сваке две подравни из скупа K које имају заједничке три различите колинеарне тачке A , B и C имају заједничке и све остале тачке праве AB .

Тада се долази до закључка да је ипак коначна пројективна раван π Дезаргова.

Током своје професорске каријере Јудита Цофман је применила различите методе код својих ученика: започети процес независног истраживања лакших проблема и задатака, демонстрирати приступ ка начину решававања проблема, дискутовати о решењима чувених математичких проблема из давних времена, описивати проблеме и често постављати питање шта и како их решити и на крају склоност и умеће у раду са младим математичарима Јудита Цофман је развила перфекције.

Познати су следећи њени радови из геоемтрије: *The validity of certain configuration - theorem in Hall planes*, Roma, 1963, *Transitivity on triangles in finite projective planes*, London, third series vol. XVIII, 1968, *Inversions in finite Möbius planes of even order*, Berlin, M. Z. 116, 1-7, 1970, *Simple groups and Möbius planes of*

even order, Berlin, M. Z. 120, 299-306, 1971, *Triple transitivity in projective planes of even order*, Berlin, A. M. vol. XXII, fasc. 5, 556-560, 1971, *Baer subplanes in finite projective and affine planes*, Otava, C. J. M., vol. XXIV, no. 1, 90-97, 1972, *Baer subplanes of affine and projective planes*, Berlin, M. Z. 126, 339-344, 1972, *On subplanes of affine and projective planes*, *What to solve? Problems and suggestions for young mathematicians*, Oxford, C. P., 1990, *Numbers and shapes revisited. More problems and suggestions for young mathematicians*, Oxford, C. P., 1995, *Einblicke in die Geschichte der mathematik, aufgaben and materialen für die sekundarstufe 1*, Heidelberg - Berlin, S. A. V., 1999.

Литература

Списак литература које сам користио приликом истраживања: Anton Suhadolc: *Življenje in delo matematika Riharda Zupančiča*, I-2 Kronika, Ljubljana, strana 85-94, 2001. godine, Jože Povsić: *Bibliografija Riharda Zupančiča*, Ljubljana, strana 1-23, 1978. godine, Архив Математичког Института САНУ: проф. др Станимир Фемпл, стране 1-10, Београд, Станимир Фемпл: *Критеријум за одређивање углова троугла*, Гласник југословенског професорског друштва, Београд, књ. XXI /св. 2/, стране 116-119, октобар 1940. године, Даница Николић-Деспотовић, Милева Првановић: *Јудита Цофман - први доктор математичких наука на универзитету у Новом Саду (1936-2001)*, свеске Матице српске, грађа и прилози за културну и друштвену историју, серија природних наука, св. 12 Нови Сад, 2004. године, Архив САНУ: Татомир Р. Анђелић, дописни члан, отисак из годишњака САНУ број LXXI, Београд, стране 1-3, 1964. године, Архив Математичког Института САНУ: проф. др Војислав Авакумовић, стране 1-12, Београд, Архив Математичког Института САНУ: проф. др Антон Билимович, стране 1-24, Београд, Архив Математичког Института САНУ: проф. др Иван Арновљевић, стране 1-16, Београд, Архив Математичког Института САНУ: проф. др Владимир Варићак, стране 1-29, Београд, Ђуро Курепа: *Прва 100 рођења математичара В. Варићака*, ПМФ, Београд 1965. године, Хрватско природословно друштво: Владимир Варићак, Гласник, стр. 64-74, Загреб, 1948. године, Жарко Дадић: *В. Варићак и његова истраживања неееуклидске геометрије и теорије релативности*, стр. 15-22, Гопсић, 1978. године, Српска краљевска академија: В. Варићак, дописни члан, Годишњак XXVII, 1913/14. године, Др В. Вркљан: Др Владимир Варићак (поводом његове 70), Наставни

вјесник, 1934/35/41/42, Загреб, Boris Pavković: Rudolf Cesarec znastvenik i pedagog, PMF - matematički odjel i društvo matematičara i fizičara SRH, Zagreb, strane 67-76, 1989. godine, R. Cesarec: Sur les triples spirales logarithmiques dans l'espace, Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 104-110, Matematikal Lapok: Fekete Mihály munkáinak jegyzéke (1886-1957), 1-5, Budapest, Панчевачка гимназија 1868-1968: *Гимназија између два рата*, Панчево, стране 27-43, 1968. године, Историјски архив Панчева, Архив САНУ, Несиба Палибрк-Сукић: *Руске избеглице у Панчеву 1919-1941, одломак руске школе у Панчеву*, стране 44-52, Градска библиотека и историјски архив Панчево, 2005. године, Просвета: *Математика*, стране 41-43, Павле Шосбергер: *Јевреји у Војводини - школе и настава*, Прометеј, стр. 134-153, Нови Сад, 1998. године, Млада енциклопедија ПРОСВЕТА: *Бановина*, страна 152, први том, 1978. године, Млада енциклопедија ПРОСВЕТА: *Историја*, страна 48-50, други том, 1978. године, Млада енциклопедија ПРОСВЕТА: *Васпитање и образовање*, страна 48-50, други том, 1978. године, Др Љубомир Савић: *Почеци школовања глувих*, стране 49-116, Историја сурдопедагогије Србије, Београд, 1991. године, Др Љубомир Савић: *Васпитање и образовање глувих између два рата (1919-1941)*, стране 117-154, Историја сурдопедагогије Србије, Београд, 1991. године, F. Ahlin: *Prof. Fran Jeran (5.10.1881.-31.5.1854.)*, Obzornik za mat. in fiziko, Ljubljana, Slovenačka bibliografija o prof. dr Franu Jeranu str. 404, Ljubljana, 1954. године, Fran Jeran: *Osnovni pojmi opisne geometrije*, Jugoslovanska tiskarna, Ljubljana, 1920. године.

