У н и в е р з и т е т у Б е о г р а д у

Математички факултет

Процват алгебре у 19. веку у Енглеској

Специјалистички рад

Тања Чанић-Млађеновић

Београд, 2008

ПРОЦВАТ АЛГЕБРЕ У 19. ВЕКУ У ЕНГЛЕСКОЈ

Сви људи по природи ствари
теже ка знању.

Аристотел

ПОГЛЕД НА ИСТОРИЈУ МАТЕМАТИКЕ

Математика је широки комплекс идеја, а њена историја нас упознаје са низом најплеменитијих замисли многих покољења.

Реч математика потиче од грчке речи *matxema* која значи наука, знање или учење, а *matxematikos* значи математичар.

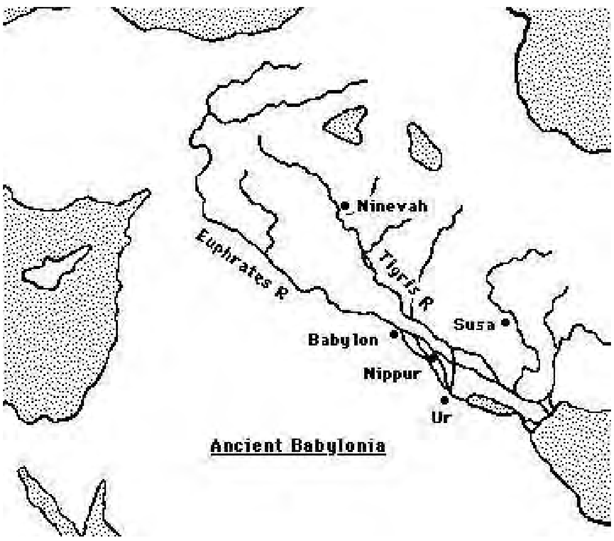
Најстарији математички текстови потичу из древне Индије око 1500. година пре нове ере *(Rigveda-Sulba Sutras)* и старог Египта око 1300.-1200. год. пре нове ере, Мезопотамије око 1800. год. пре нове ере *(Плимптон).* Сви ови радови бавили су се ткз. Питагорином теоремом која се сматра за најстаријим математичким догађајем после основне аритметике и геометрије. Значајан је допринос Хан династије у Кини (*Девет поглавља о математици)* . Стара Грчка и хеленистичка култура Египта, Мезопотамије и града Сиракузе унапредили су математичко знање. Касније Хинду математичари и исламски математичари такође дају свој допринос математици. Често су се смењивала раздобља напретка и стагнације. Почетком ренесансе у Италији у 16. веку, нова математичка открића била су удружена са научним открићима и убрзано су се развијала до данашњих дана.

РАНА МАТЕМАТИКА

Много пре првих писаних извора постојали су цртежи који су приказивали одређено математичко знање и мерење времена базирано на посматрању звезда. Тако су палеонтолози открили стене у Јужној Африци са геометријским фигурама које датирају 70.000 година пре нове ере. Значајни су и споменици из петог миленијума пре нове ере из Египта, Шкотске и Енглеске који су приказивали геометријске облике кругова, елипси и др. Године 3100. пре нове ере Египћани су увели децимални систем. Стара индијска цивилизација (*Харапа цивилизација*), развила је систем јединствених мерних јединица које су користиле децимални систем. Имали су тачан децимални лењир са малим и прецизним поделама, затим инструмент од шкољки који је служио као компас за мерење углова, инструмент за мерење позиције звезда за потребе морепловства, као и напредну технику грађења улица које су биле под правим углом.

Индијски списи нису у потпуности дешифровани тако да има мало писаних података о Харапа математици. Археолози сматрају да су припадници ове цивилизације поседовали знање о дужини обима круга према његовом пречнику односно о вредности броја π .Од хеленистичког периода грчки језик је заменио писане документе египатских научника и од тада египатски, грчки и вавилонски математичари доприносе развоју хеленистичке математике. Математички развој у Египту касније се наставља калифатом као делом исламске математике и тада арапски језик постаје писани језик којим су се користили египатски научници.

Најстарији математички текст потиче из египатског краљевства. Важан је и *Ринд папирус*, приручник из аритметике и геометрије у коме је показан начин решавања линеарних једначина, затим аритметичких и геометријских низова.Такође се бавио и начином израчунавања броја π са тачношћу мањом од једног процента, покушајем квадратуре круга и употребом котангенте. И *Берлински папирус* показује да су стари Египћани могли да реше алгебарску једначину другог реда.



Вавилонска математика односи се на математику народа Мезопотамије (данашњи Ирак), од раних Сумера до почетка хеленистичког периода. Касније Вавилонска математика се спаја са грчком и египатском математиком. За разлику од египатске математике за коју има мало писаних трагова, наша сазнања о Вавилонској математици су много богатија. Нађено је преко 400 глинених таблица, већина их потиче од 1800. до 1600. године, пре нове ере и покрива области дељења, аритметике, квадратних и кубних једначина и израчунавање Питагорине троструке везе. Садржале су и таблице множења, тригонометрију и методе решавања линеарних и квадратних једначина.

Вавилонска математика користила је *хексагезимални нумерички систем*. Од тога потиче данашње коришћење 60 секунди у минути, 60 минута у сату и 360 (60x60) степени у кругу.

ПОСТАНАК АЛГЕБРЕ

У Старом веку аритметика се развијала сасвим независно од тадашњег развоја логике, у коме је доминантну улогу имао *Аристотел.*

Аристотел(384.пне.–322.пне.)

Аристотел је, више него било који други мислилац, заслужан за одређивање оријантације (правца) и садржаја историје развоја сазнања на Западу. Он је творац философског и научног система који је кроз векове био камен темељац и покретачки дух за средњевековну хришћанску и исламску схоластичку мисао, све до краја 17. века. Западна култура је била Аристотеловског карактера. Чак и после великих сазнајних револуција у следећим вековима, његови концепти и идеје су остали дубоко укорењени у западном начину размишљања.

Аристотел је рођен у Стагири, на полуострву Халкидики, на северу Грчке. Његов отац је био лекар Никомах, староседелац у Стагири, а мајка му се звала Феста и њена породица је имала имање у Калки.

Нема сумње да је Никомах желео да Аристотел постане лекар, због обичаја да се медицинске вештине држе у тајности и преносе са колена на колено. Тада људи нису долазили код лекара него су лекари путовали од места до места, водећи бригу о болесницима. Иако нема много података о младом Аристотелу, врло је вероватно да је путовао са оцем. Зна се да је Никомах сматрао услове за рад у Халкидикију, мање задовољавајућим од оних у суседној Македонији, и почео је да ради тамо, био је толико успешан да је ускоро постао лични лекар македонског краља Аминтеја III.

«Према традицији која се одржала 250 година после његове смрти, која је тада била доминантна ,Аристотел је у истој години држао не једно већ два или три предавања: логике, психологије, политике, економије, етике, реторике, поезије, он је записивао своја

предавања, проширујући и прерађујући их неколико пута. Још је значајније да већина набројаних појмова није постојала пре њега, тако да је он био први који их је засновао, као системске дисциплине.»

Анегдоте у којима се спомиње приказују га као доброг и осећајног човека без трага самољубља. Био је углађен, носио је прстење и кратку фризуру, патио је од лошег варења, а помиње се и чир. Био је добар говорник, са луцидношћу у предавањима убедљивошћу у разговору и оштроумним досеткама. У очима бројних супарника, био је својеглав и уображен, али пре свега човек за дивљење.

Важност његовог утицаја лежи у чињеници да је добро познавао елементарну математику и веровао је да математика има велики значај као једна од три теоријске науке.

...Аристотел је био свестан важних Еудоксових открића, који су суштински утицали на излагање Еуклидових Елемената. Историјски списи јасно показују Аристотелово препознавање важности Еудоксове Теорије пропорција која је разрађена у петој књизи Елементи, исто тако и метод исцрпљивања при мерењу површина и запремина, као и метод концентричних кругова при одређивању путања планета...
... бројни различити погледи на математику су представљени у радовима које данас поседујемо и доказују да је данас могуће конструисати и реконструисати ту философију са великим степеном веродостојности.

Аристотелова идеја о непрекидности у математици је:

...да се не може направити од независних делова, непрекидно је оно коме се границе између два узастопна дела не разликују, ако се ти делови додирују.

Према Аристотеловом уверењу бесконачност не постоји као стварна величина, постоји само у смислу потенцијалног.

...Нека моје мишљење не служи као ограничење математичарима у њиховом проучавању, иако оно негира постојање бесконачности у смислу стварне величине, као продужење које се не може достићи, за тако нешто, није потребно да користе бесконачност, већ само захтевамо да се коначна права линија може продужити колико им драго... То ионако неће представљати разлику у сврси коришћења при доказивању.

Математика је наука која изучава аксиоматски дефинисане апстрактне структуре користећи логику.

Изучавање структуре почиње са бројевима, у почетку са природним и целим бројевима. Основна правила за аритметичке операције су дефинисана у основној алгебри а додатна својства целих бројева се изучавају у теорији бројева. Изучавање метода за решавање једначина је довело до развоја апстрактне алгебре која између осталог изучава прстенове и поља, структуре које генерализују особине које поседују бројеви.

У математици, прстен је алгебарска структура у којој су дефинисани сабирање и множење, и имају својства описана ниже. Прстен је генерализација скупа целих бројева. Други примери прстена су полиноми и цели бројеви по модулу . Грана апстрактне алгебре која проучава прстенове се назива теоријом прстенова.

Прстен је скуп R на коме важе две бинарне операције $+ : R \times R \to R$ и $\cdot : R \times R \to R$, које се називају *сабирање и множење,* такве да:

$(R,+)$ је Абелова група са неутралном 0

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$0+a = a+0 = a$$
$$a+b = b+a$$

За свако a из R постоји елемент који се означава са $-a$, такав да

$$a+-a = -a+a = 0$$

$(R,\cdot)$ је моноид са неутралом 1:

$$(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Множење је дистрибутивно над сабирањем:

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$$
$$(a+b)\cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c)$$

Мада је сабирање у прстену комутативно, па је $a+b=b+a$ множење у прстену не мора да буде комутативно , $a \cdot b$ не мора да буде једнако $b \cdot a$. Прстенови који су такође комутативни и у односу на множење (као што је прстен целих бројева) називају се

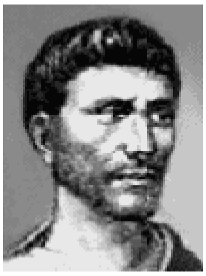
комутативним прстеновима. Нису сви прстенови комутативни. На пример, *M (K)* прстен n x n матрица над пољем *K* је некомутативни прстен (n>1).
Прстенови не морају да буду ни мултипликативно инверзни. Елемент a у прстену се назива јединицом ако је инвертибилан у односу на множење: ако постоји елемент b у прстену, такав да је $a \cdot b = b \cdot a = 1$, тада је b јединствено одређено преко a и пишемо $a^{-1} = b$. Скуп свих јединица у *R* формира групу у односу на множење прстена; ова група се означава са *U(R)* или *R**

Аритметика као наука о бројевима и о операцијама са бројевима је веома стара наука. Тешко је створити слику како и где се алгебра почела развијати. Као плод дугог искуства, у борби са природним силама, а у најстојању да очува себе и своју врсту, да живот учини бољим, човек је дошао до сазнања о броју, о операцијама, законима о бројевима, о врстама бројева, о њиховој примени као и о најразноврснијим надградњама бројева (вектори, матрице,....).

Врло је дугачак пут од примитивних представа о броју, записивању броја, рачунању па до данашњег стања у математици у којем алгебра заузима једно од најзначајнијих места.

Реч *алгебра* потиче од арапске речи *ал-габр* која значи испуњење, извршење. Под влашћу калифа *Ал-Ма'мун*-а (813.-833.) у Багдаду, арапски математичар, астроном и географ *Мухамед Ибн Муса Ал-Кваризми* написао је спис о решавању линеарних и квадратних једначина. У њему се говори о примени ових решења у практичним мерењима и у решавању питања наследства и трговине. Наслов рада је *Сажета књига о прорачуну помоћу алгабр-а и ал-мугабала.* Аутор дефинише *алгабр* као операцију сабирања (одузимања), једнаких функција од (до) обе стране једначине да би их свео на стандардну форму чије главно решење назива *јидхр* (корен). Утицај *Ал-Кваризмијеве* алгебре на средњевековну алгебру био је огроман, а користили су се преводи на латински језик научника *Роберта Честера (1140.) и Ђирарда де Кремона (1150.).*

Почетак решавања једначина најчешће везујемо за старогрчког



Диофант (210./214.-284./298)

математичара *Диофанта* али постоје докази да су се једначине у древној Кини решавале и много пре. Јапански математичар *Секи Кова* (1683.) је побољшао врло стару кинеску методу решавања система линеарних једначина чији су коефицијенти приказивани бамбусовим штапићима. Бамбусов штапић био је постављен у таблици на оно место где треба да стоји одговарајући коефицијент. Помицањем и преслагањем штапића решавао се овај систем једначина.

Када бисмо неку данашњу једначину на пр:

$$5\,x + 3\,y = 7,$$

дали неком из доба Диофанта, он би био крајње збуњен, иако је знао да реши ту једначину. Наиме, у то доба математичари су се користили потпуно другачијим начином решавања задатака, а овај данашњи запис у облику симбола тек је скорији изум.

Диофант је први решавао овакве једначине. Не зна се тачно када је живео, неки аутори верују да је живио у трећем веку после Христа, док га други смештају у рани почетак првог века. Али поуздано се зна да је он био грчки математичар, који је радио у палати на александријском колеџу у Египту. Он је започео да користи алгебарске симболе и они су убрзо заменили писање алгебре у прози, на вербалан начин који се називао «*реторичка алгебра*». Његов рад сачуван је у шест поглавља Аритметике која су данас позната (седам поглавља је изгубљено),и то је био најстарији системски трактат о алгебри. Диофант се првенствено интересовао за теорију бројева и решавање једначина. Велики је његов допринос напретку алгебре употребом симбола за величине, математичке операције и односе, јер су пре тога све ове величине описиване речима.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primum Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

19. ВЕК

Француска револуција и Наополеонова епоха створиле су веома повољне услове за даљи развој математике. На европском континенту отворен је пут индустријској револуцији. Она је подстицала неговање физичких наука и створила друштвене класе са новим погледима на живот, које су биле заинтересоване за науку и техничко образовање. У академски живот продрле су демократске идеје, а застареле форме мишљења подвргнуте су критици. Школе и универзитети били су преображени и обновљени.

Првих година деветнаестог века математика је ступила у своје златно доба и овај најплоднији период у историји математике отпочео је увелико 1830. године. Ниједно претходно доба није се приближило овом периоду у погледу дубине и огромног замаха математике. Једине епохе које уопште могу да се пореде са овим периодом јесу *Архимедова* (287.-212. пре нове ере), *и Њутнова (I.N.Newton 1642.*-1727.). Математичко наслеђе које је деветнаести век добио од својих претходника, било је велико и у погледу квантитета и у погледу квалитета, тако велико да је један пророк 1830. године јадиковао како је *«златно доба математичке литературе несумњиво прошло»*. Ово огромно наслеђе од бар двадесет векова било је вишеструко повећано до завршетка века.

Ако би се дух математике од средине деветнаестог века могао описати једном реченицом, онда би то вероватно била *све већа генерализација и све оштрија самокритичност.* Како је деветнаести век одмицао, математичари су се све више претварали у градитеље огромних и садржајних научних система у којима су појединачне теореме биле потпуно подређене величанственим структурама свеобухватних теорија. Златно доба математике карактерисала је израда све моћнијег оружја за напад на читаво мноштво старих тешкоћа, уместо за вођење појединачних битки са њима. То је оно по чему се кардинално издваја начин рада математичара данас од онога који су највећи математичари примењивали све до прве трећине седамнаестог века. Пораст математичких снага који је лагано почео у осамнаестом веку, нарочито са *Лагранжом* у аналитичкој механици, убрзавао се током целог деветнаестог века а добрим делом и у двадесетом веку.

Друга страна медаље је све већа строгост. Такозвана очигледност је поново пажљиво испитивана више пута из свих углова, и често је било нађено да се не ради о очигледности већ о неистинитости. «Очигледно» је најопаснија реч у математици.

У 19. веку математика је постала веома апстрактна. Тада је живео један од највећих математичара *Карл Фридрих Гаус* .


Карл Фридрих Гаус (1777-1855.)

Гаус се родио 1777. године, у немачком граду Брауншвајгу и био је син надничара. Војвода Брауншвајга обратио је пажњу на младог вундеркинда и побринуо се за његово школовање. Од 1795. до 1798. године млади Гаус је учио у Гетингену, а 1799. године докторирао је у Хелмштату. Од 1807. године до своје смрти (1855.) безбрижно и мирно је радио као директор опсерваторије и професор универзитета у своме родном месту.

Из Гаусових дневника се види да је он у седамнаестој години почео да долази до изненађујућих открића, на пример, 1795. године, независно од Ојлера, пронашао је *закон квадратне реципрочности (узајамности)* у теорији бројева. Нека од његових раних открића изложена су у његовој хелмштатској дисертацији из 1799. године, као и у његовим импознатним *Аритметичким истраживањима (Disquisitiones arithmeticae*, 1801.). У дисертацији је дат први строги доказ тзв. *«Основне теореме алгебре»*, у којој се тврди да свака алгебарска једначина са реалним коефицијентима има најмање један корен, па према томе, има толико корена колико износи број јединица у изложиоцу степена једначине. Сама та теорема потиче од Алберта Жирара, који је био издавач радова: *Нова открића у алгебри (Invention nouvelle en algebre,* 1629.), а Даламбер је покушао да је докаже. Гаусу се допала та теорема и касније је дао још два доказа, али се поново вратио на свој први доказ. У трећем доказу (1816.) користио је комплексне интеграле и то показује како је Гаус рано овладао теоријом комплексних бројева.

У *Аритметичким истраживањима* сабране су све тековине Гаусових претходника у области теорије бројева и тиме је теорија бројева толико обогаћена да се појава те књиге сматра почетком савремене теорије бројева. Централно место у књизи заузима теорија квадратних форми, остатака и конгруенције другог степена. Изузетна достигнућа су закон о квадратним остацима *«Златна теорема»*, коју је први у потпуности доказао Гаус. Он је подједнако био одушевљен том теоремом као и *Основном теоремом алгебре*. Касније је објавио још пет доказа, а један доказ нађен је међу његовим папирима после његове смрти. У *Аритметичким истраживањима* садрже се и Гаусови резултати о подели круга, то јест о коренима једначине

$$x^n + 1$$

Ту је он дошао до изванредне теореме, у којој се тврди да се само помоћу шестара и лењира може конструисати правилни *седамнаестоугао*, односно уопштено, правилни n-тоугао где је

$n = 2^p + 1, p = 2^k$ за n прост број , а k = 0, 1, 2, 3...

што представља задивљујуће геометријско уопштење у грчком духу.

Гаус није заборавио своју прву љубав *«царицу математике»* већ је у периоду када је све своје снаге концентрисао на геодезијске проблеме радио на биквадратним резидуумима и о томе је 1825. и 1831. године објавио радове. То је био наставак његове теорије квадратних остатака, која је изложена у *Аритметичким истраживањима,* али је овом приликом користио нову методу *теорију комплексних бројева.* У раду из 1831. године, дата је не само алгебра већ и аритметика комплексних бројева. Ту се појављује нова теорија простих бројева, у којој 3 и даље остаје прост број, али

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$$

више није прост број. Та нова теорија комплексних бројева објаснила је многе нејасноће у аритметици, пошто се закон квадратне узајамности овде добијао лакше него у области реалних бројева. У том раду је Гаус заувек одстранио ону тајанственост која је обавијала комплексне бројеве, уводећи појам комплексног броја помоћу тачака у равни.

Гаус је још 1800. године открио елиптичке функције, а око 1816. године, владао је нееуклидском геометријом. Био је немачки математичар и научник који је дао значајан допринос у многим пољима, укључујући теорију бројева, анализу, диференцијалну геометрију, геодезију, електростатику, астрономију и оптику. Познат као «принц математичара» и «највећи математичар од давнина», Гаус је оставио траг на многим пољима математике и науке и сматра се једним од најутицајнијих математичара у историји.

Гаус је био чудо од детета, о чему сведоче бројне анегдоте које се тичу његове запрепашћујуће преране зрелости која се могла приметити још у време док је имао две године.

Позната је анегдота која каже да је једном приликом Гаусов учитељ задао да се саберу сви бројеви од 1 до 100, вероватно да би «запослио ученике». На његово велико изненађење, Гаус који је тада имао 7 година одмах је рекао тачан резултат: 5050. Ево како је млади математичар то решио: Посматрајући низ 1,2,3,4,....97,98,99,100, чије је чланове требало сабрати, уочио је извесну законитост: када сабере 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98, и тако даље, увек добије збир 101. Таквих парова има тачно 50 па је тражени збир једнак $50 \cdot 101 = 5050$. Овај поступак назван је *«Гаусов поступак»*.

Гаус је крунисао аритметику за *краљицу математике.* Захваљујући његовом снажном проналазачком духу дошло је до више дубоких и широких токова математичког прогреса у деветнаестом и двадесетом веку.

За Гауса, као и за Грке, аритметика је пре свега била проучавање особина целих бројева. Грци су, употребљавали различите изразе за рачунање и примену рачунања у трговини. За ову практичну врсту аритметике аристократски робовласнички Грци осећали су неку врсту презира називајући је *логистиком* , именом које је остало да живи у школама које се баве логиком и основама математике

Руски математичар *Николај Иванович Лобачевски* и мађарски математичар *Јанош Бољаи* открили су *нееуклидску геометрију*, која је названа хиперболичка геометрија. Хиперболичка геометрија се разликовала од класичне Еуклидове геометрије по томе што је одбацивала *Еуклидов пети постулат*. Закон Еуклидове геометрије који тврди да постоји тачно једна права кроз дату тачку која не сече дату праву,заменили су са постулатом који је дозволио да постоји више таквих правих кроз дату тачку које не секу дату праву.

Било је веома храбро што је *Лобачевски* објавио своја открића у *Кратком прегледу основа геометрије*. Још једна верзија нееуклидске геометрије звана *елиптичка геометрија* развијена је касније у деветнаестом веку заслугом немачког математичара *Георга Бернхарда Римана*. У елиптичкој геометрији не постоје паралелне праве.

Иако је прва реакција математичара на нееуклидску геометрију била негативна, касније се показало да је нееуклидска геометрија врло важна за развој *Ајнштајнове* теорије релативитета.

Лобачевски је открио метод за проналажење апроксимације) корена алгебарских једначина који се у Русији још увек назива *Лобачевски* метод познат као *Данделин-Графов* метод на западу. Та два математичара су независно један од другог и од Лобачевског открили овај метод.

Nils Henrik Abel (1802-1829) *Evariste Galois (1811.-1832.)*

Nils Henrik Abel, норвежанин *и Evariste Galois,* француз доказали су да не постоји општа алгебарска метода за решавање полиномских једначина већег од четвртог степена Њихови радови били су основа за даљи развој *теорије група и* повезаних области *апстрактне алгебре.*

Nils Henrik Abel дао је значајне радове у теорији реалних и комплексних функција, посебно у општој теорији интеграла алгебарских функција и теорији степених редова, развио теорију елиптичких функција и теорију решавања алгебарских једначина вишег степена. Независно од других поставио је основе теорије интегралних једначина. Исцпрљен сиромаштвом умро је од туберкулозе. Абелов ред је дивергентни ред. Абелова група је комутативна група. Његово прво издање сабраних дела изашло је 1839.године.

У апстрактној алгебри, група је скуп са бинарном операцијом који задовољава одређене аксиоме. На пример, скуп целих бројева са сабирањем је група. Грана математике која проучава групе је теорија група.

Многе структуре којима се математика бави су уствари групе. Међу њима су познати бројни системи, као што су цели бројеви, рационални бројеви, реални бројеви и комплексни бројеви за сабирање, као и рационални бројеви различити од нуле, реални бројеви и комплексни бројеви за множење. Теорија група има широку примену у математици и у другим природним наукама и многе се алгебарске структуре, као што су поља и векторски простори могу сажето дефинисати.Теорија група пружа важан алат за проучавање симетрије, с обзиром да симетрије сваког објекта граде групу. Групе су стога кључне апстракције у гранама физике које се односе на симетрију, као што су теорија релативности, квантна механика и физика честица. Њихова способност представљања геометријских трансформација налази примену у хемији, рачунарству и другим пољима.

Група *(G,*)* је скуп *G* са бинарном операцијом $*$, која задовољава следеће четири аксиоме:

- *Затвореност:* За свако *a,b* из *G*, резултат $a*b$ је такође у *G*.
- *Асоцијативност:* За свако *a, b* и *c* из *G*, $(a*b)*c = a*(b*c)$.
- *Неутрални елемент:* Постоји елемент *e* из *G* такав да за свако *a* из *G*,
  $e*a = a*e = a$
- *Инверзни елементи или инверз:* За свако *a* из *G*, постоји елемент *b*, такође из *G*, такав да $a*b = b*a = e$, где је *e* неутрални елемент.

Може се показати да је инверзни елемент датог елемента јединствен, и да су леви и десни инверзи елемената једнаки. Постоје и уже дефиниције, које замењују другу и трећу аксиому концептом левог (или десног) неутралног и инверзног елемента.

Група *(G,*)* се често означава само са *G*, кад не постоји неједнозначност око тога шта је операција.

Ред групе *G*, који се означава са $|G|$, је број елемената у скупу *G*. Ако ред није коначан, тада је група *бесконачна група,* што се означава са $|G| = \infty$.

Скуп *H* је подгрупа групе *G* ако је подскуп од *G* и група у односу на операцију дефинисану на *G*. Другим речима, *H* је подгрупа од *(G,*)* ако је рестрикција од $*$ на *H* операција групе на *H*. Како су остала својства аутоматски задовољена, $H \subset G$ је подгрупа групе *G* ако и само ако је затворена у односу на $*$ и инверз.

Ако је *G* коначна група, тада је коначна и *H*. Притом, ред од *H* дели ред од *G* (*Лагранжова теорема).*

Група *G* је *Абелова група* (или комутативна) ако је операција комутативна, то јест, за свако *a,b из G, a* $*$ *b = b* $*$ *a.* Не-Абелова група је група која није Абелова. Абелове су групе добиле име по математичару *Nilsu Abelu.*

Циклична група је група чији се елементи могу генерисати узастопном применом операције која дефинише групу (и операције узимања инверзног елемента), примењене на само један елемент те групе. Овај примитивни елемент се назива генератором, или примитивним елементом групе.

У 19. веку нема више математичара на краљевским дворовима или у аристократским салонима. Чланство у научним академијама више није главно занимање, пошто су чланови академија обично радили на универзитетима или у техничким школама, тако да су они били колико предавачи толико и истраживачи. *Бернули, Лагранж* и *Лаплас* предавали су само повремено. Одговорност предавача сада расте и професори математике постају васпитачи и испитивачи омладине. Учвршћивање веза међу научницима у оквирима једне нације подрива интернационализам ранијих векова, мада се међународна размена мисли наставља. Национални језици постепено замењују латински језик у науци. Математичари почињу да се специјализују за поједине области и као што се раније о *Лајбницу, Ојлеру* и *Даламберу* могло говорити као о «математичару» или о геометру у оном смислу у којем је та реч употребљавана у 18. веку, тако се о *Кошију* говори као о аналитичару, о *Кејлију* као о алгебристи, о *Штајнеру* као о геометру, а о *Кантору* као о оснивачу теорије скупова. Наступило је време специјализације и у математичкој физици, а затим су се појавили и научници у области математичке статистике или математичке логике. Само високи степен обдарености омогућавао је да се излази из оквира специјализација. Најснажнији утицај на математичаре 19. века имали су радови *Гауса, Римана, Клајна* и *Поенкареа.*

Физичари и други научници су сматрали да је теорија група идеалан начин изучавања симетрије. У 19. веку основана су и прва математичка друштва у Лондону, Паризу, Палерму. Број креативних математичара у том периоду није био велики,неки од њих су рођењем били богати а неке су подржавали богати заштитници нпр. *Гауса.*

У 19. веку британски математичари: *Џон Валис, Вилијам Роуан Хамилтон, Артур Кејли, Џорџ Бул,*... преузимају вођство у изучавању алгебре. Пажња је усмерена према бројним «*алгебрама*», односно, различитим математичким објектима *(вектори, матрице, трансформације...)* и различитим операцијама које се могу извести на овим објектима. Тако се подручје алгебре проширило у студије алгебарске форме и структуре и алгебра више није била ограничена обичним системом бројева. Најзначајнији продор је можда развој некомутативне алгебре. Ово су алгебре у којима операције множења не морају бити комутативне. (Први пример такве алгебре су били Хамилтонови кватерниони - 1843.). *Пикок (Британац, 1791.-1858.*) био је оснивач аксиоматског размишљања у аритметици и алгебри. Због тога је називан «*Еуклид алгебре*». *Де Морган (Британац 1806.-1871.)* наставио је Пикоков рад узимајући у обзир операције дефинисане апстрактним симболима. *Хамилтон (Ирац,* 1805.-1865.) показао је да се комплексни бројеви могу изразити као формална алгебра са операцијама дефинисаним као уређеним паром реалних бројева.

$$\left[(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc\ \right])$$

Гибс (Американац, 1839.-1903.) развио је алгебру вектора у тродимензионалном простору. *Артур Кејли* (Британац, 1821.-1895.) развио је матрице (ово је некомутативна алгебра). Концепт групе (ред операција са појединачном операцијом која задовољава три аксиоме) настао је радом више математичара. Концепт поља први је објаснио *Дедекинд* 1879.године.

У апстрактној алгебри, поље је алгебарска структура у којој операције сабирања, одузимања, множења и дељења (осим дељења нулом) могу да се спроводе, и важе иста правила која су позната из основне аритметике. Сва поља су прстенови, али нису сви прстенови поља. Поља се разликују од прстенова највише по захтеву да је дељење могуће, али и данас, по захтеву да је операција множења на пољу комутативна. Прототипски пример поља је скуп *Q*, поље рационалних бројева. Међу другим важним примерима је поље реалних бројева *R*, поље комплексних бројева *C* и, за сваки прост број *n*,поље целих бројева по модулу *n*, што се означава *Z/pZ*, F_p или GF*(p)*. За свако поље *K* , скуп *K(X)* рационалних функција са коефицијентима из *K* је такође поље.

Дефиниција 1

Поље је комутативни прстен са дељењем.

Дефиниција 2

Поље је комутативан прстен (*F*,+,∗*)* такав да 0 није једнако 1 и сви елементи из *F* изузев 0 имају мултипликативни инверзни елемент. (Ваља имати у виду да су 0 и 1 неутрални за + и ∗ редом, и могу се разликовати од реалних бројева 0 и 1).

Дефиниција 3

Експлицитно, поље дефинишу следећа својства:

Затвореност скупа *F* у односу на + и ∗

За свако *a,b* из *F*, и *a* + *b* и *a*∗ *b* припадају F (или формалније, + и ∗ су бинарне операције на F).

И + и ∗ су асоцијативне.

Концепт поља је увео Дедикинд, који је користио немачку реч *Korper* (тело) за овај појам. Он је такође први дефинисао прстенове, али израз *прстен (Zahlring)* је увео Хилберт.

Џон Валис

Он је био један од најзначајнијих енглеских математичара пре Њутна.

Отац Џона Валиса био је веома уважени свештеник у Ашфорду и оженио се Џоаном Чепмен 1612. која му је била друга жена. Валис је имао само четири година када му је умро отац .

Џон Валис (1616.-1703.)

Џон је похађао школу у Ашфорду, али је његова мајка одлучила да се преселе због епидемије куге.Похађао је школу у Тентердену, Кент 1625.где је показао значајан потенцијал као ученик. Пишући своју аутобиографију, Валис је рекао:

"Мој циљ чак и као детету увек је био да не учим механички, већ да сазнам узроке и разлоге онога што учим".

Иако је имао само 13 година сматрао је да је спреман за универзитет. Од 1631. годину дана је провео у школи у Есексу где је научио латински, грчки и хебрејски. Учио је и логику али у то време математици није придаван већи значај. Када га је једном приликом брат учио правилима аритметике Валис је био одушевљен математиком и своју заинтересованост је објаснио:

"Одговара мом темпераменту, тако да је не гледам само као предмет учења већ као пријатан начин да проведем слободно време".

Читао је само оне књиге из математике које је случајно налазио:

"Није било никог да ме усмери које књиге да читам, шта да тражим. Математика се тада није сматрала академским студијама, већ више механички - као посао трговаца, занатлија, морнара, истраживача"....

Похађао је Емануел Колеџ у Кембриџу и учио етику, метафизику, географију, астрономију, медицину и анатомију. Иако није намеравао да се посвети медицини, револуционарно је бранио мишљење свог предавача Франциса Флисона у јавној дебати о циркулацији крви.Валис је 1637.године дипломирао и наставио је студије. Титулу магистра добио је 1640. а исте године биран је за капелана цркве. Тада се десио догађај који ће знатно утицати на његову будућност:

"Једне вечери стигло је писмо у шифрама о хапшењу Честера 27. децембра 1642. Валису је требало два сата да га дешифрује, постао је вешт у криптологији и све више јој се посвећује..

Тада је избио грађански рат између ројалиста и републиканаца и Валис је користио своје знање криптографије да декодира поруке ројалиста за републиканце. У знак захвалности добио је место поглавара у цркви Светог Габријела у Лондону 1643. Исте године умире му мајка и он постаје власник великог имања у Кенту.Валис постаје секретар свештенства у Вестминстеру 1644.године и искушеник на Квин колеџу у Кембриџу. Његове студије богословије нису дуго трајале јер се оженио Сузаном Гилд 14. марта 1645. Враћа се у Лондон где присуствује недељним састанцима научника који су заинтересовани за природне и експерименталне науке. Ова група ентузијаста основаће Краљевско друштво Лондона и морало је да поштује одређена правила. Валис је писао:

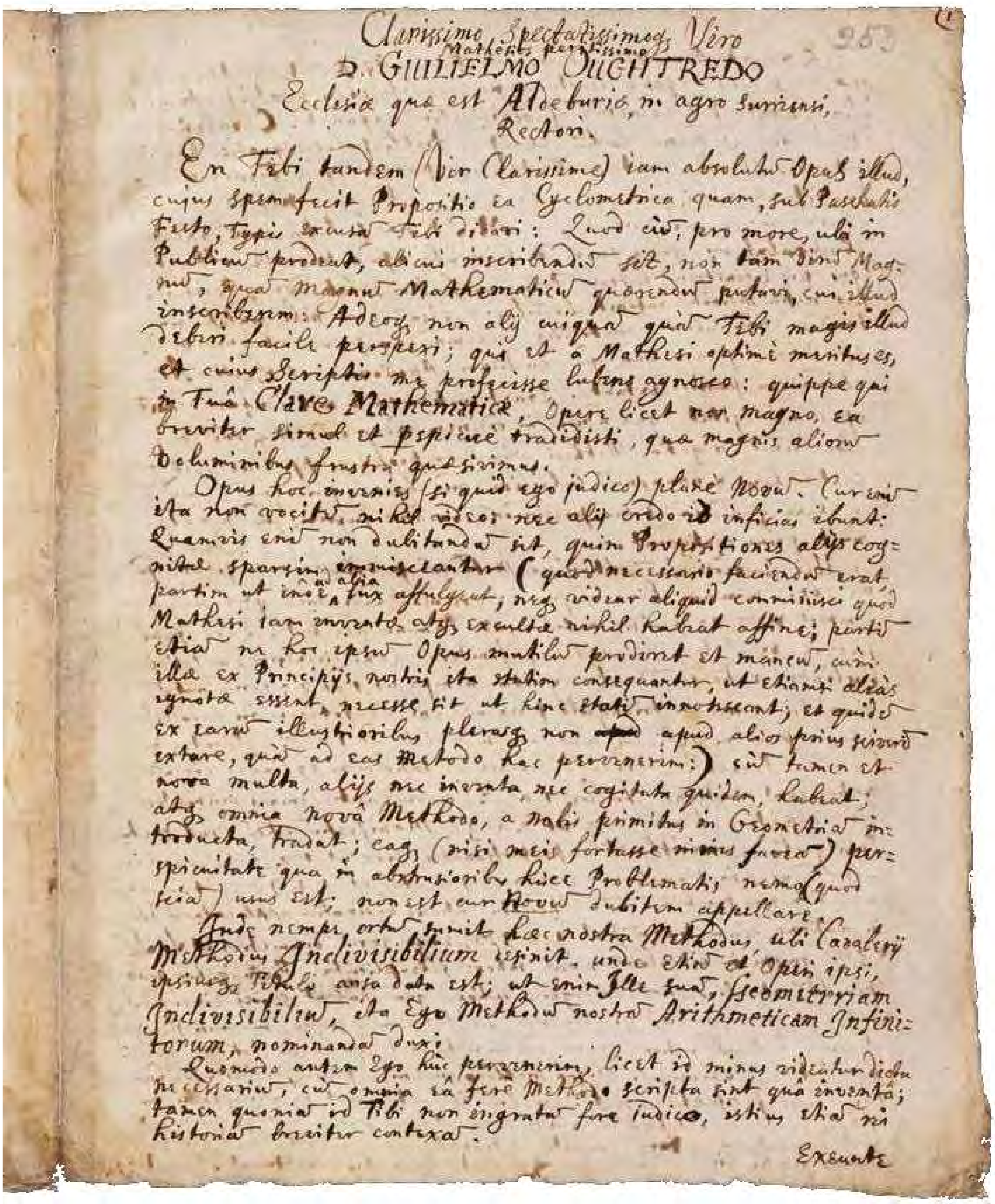
Састајемо се недељно у одређено време, забрањене су дискусије о религији, политици и вестима, посветили смо се темама из разних научних области филозофије, медицине, анатомије, геометрије, астрономије, навигације, статике, механике, и др.

Два догађаја имаће одлучујући утицај на Валисову будућност, први је криптографија, други је повезан са почецима Краљевског друштва. *Oghtedova* књига *Clavis Mathematicae* значајно је утицала на њега. Убрзо је његова љубав према математици, коју је имао још као студент а није имао прилике да је испољи, дошла до пуног изражаја.

Валис је написао књигу *Расправа о угаоним одељцима* која се није објавила наредних 40 година. Открио је методе решавања једначина четвртог степена сличне онима које је Хериот пронашао, али је Валис тврдио да је он заслужан за откриће. Позицију Савилјиан на катедри геометрије на Оксфорду 1649. добио је и због заслуге републиканцима, јер је претходни носилац те позиције био присталица ројалиста. На овој позицији остао је преко 50 година све до смрти, иако можда није био заслужан за именовање, сигурно је са пуним правом заслужио ово место.

За чувара универзитетске архиве одређен је. 1657.године. Било је неспоразума око његовог избора на ово место јер се сматрало да не може држати обе позиције у исто време. Као и код Савилијан катедре, заслужио је позицију јер је и овде показао добре резултате. Био је републиканац али се противио погубљењу Чарлса I и 1648. потписао је документ у коме се противи егзекуцији. Касније се показало да је био у праву. Савилијан позицију потврдио му је краљ који га поставља и за краљевског капелана.

Значајан допринос Валиса је и у настанку рачуна. Проучавао је радове Кеплера, Кавалијерија, Робервала, Торичелија и Декарта и тако проширио идеју о рачуну.


Clarissimo Spectatissimoq; Viro
Matheseos peritissimo
D. GUILIELMO OUGHTREDO
Ecclesiæ quæ est Aldeburio, in agro Surriensi,
Rectori.

En Tibi tandem (Vir Clarissime) iam absolutum Opus illud, cujus spem fecit Propositio ea Cyclometrica quam, sub Paschalis Festo, typis excusam Tibi dedi: Quod cum, pro more, ubi in Publicum prodeat, alicui inscribendum sit, non tam diu Magnum, quam magnum Mathematicum quaerendum putavi, cui illud inscriberem. Adeoq; non alij cuiquam quam Tibi magis illud deberi facile perspexi; qui et a Mathesi optime meritus es, et cuius Scriptis me profecisse lubens agnosco: quippe qui in Tuâ Clave Mathematicæ, Opere licet non magno, ea breviter simul et perspicuè tradidisti, quæ magnis aliorum voluminibus frustra quæsivimus.

Opus hoc invenies (si quid ego judico) plane Novum. Cur enim ita non vocitem, nihil video; nec alij credo id inficias ibunt: Quamvis enim non dubitandum sit, quin Propositiones alijs cognitæ sparsim immisceantur (quod necessario faciendum erat, partim ut inde aliis lux affulgeret, neq; videar aliquid commiscere quod Mathesi iam inventæ atq; excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipsum Opus mutilum prodiret et mancum, cum illa ex Principijs nostris ita statim consequantur, ut etiamsi alias ignota essent, necesse sit ut hinc statim innotescant; et quidem ex earum illustrioribus pleraq; non apud apud alios prius scivi extare, quam ad eas Methodo hac pervenerim:) sunt tamen et nova multa, alijs nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atq; omnia nova Methodo, a nobis primitus in Geometriam introducta, tradat; eaq; (nisi mei fortasse nimius fuero) perspicuitate qua in abstrusioribus hisce Problematis nemo (quod sciam) usus est; non est cur Novum dubitem appellare.

Inde nempe ortum sumit hæc nostra Methodus, ubi Cavalerij Methodus Indivisibilium desinit. unde etiam et Operi ipsi, ipsiusq; Titulus ansa data est; ut enim Ille suam, Geometriam Indivisibilium, ita Ego Methodum nostram Arithmeticam Infinitorum, nominandam duxi.

Quomodo autem Ego huc pervenerim, licet id minus videatur dictu necessarium, cum omnia ea fere Methodo scripta sint qua inventa; tamen quoniam id Tibi non ingratum fore judico, istius etiam rei historiam breviter contexam.

Excusate

Валисов најзначајнији рад је *Аритметика инфиниторум* коју је објавио 1656.

У овом раду дао је формулу

$$\frac{\pi}{2}=\frac{(2.2.4.4.6.6.8.10...)}{(1.3.3.5.5.7.7.9.9...)}$$

која води до исправних нумеричких апроксимација броја π. Валис је дошао до тачног резултата када је израчунавао интеграл

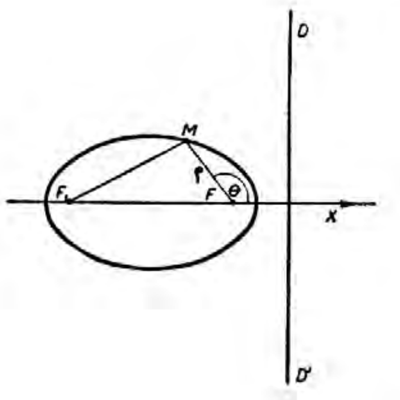
$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

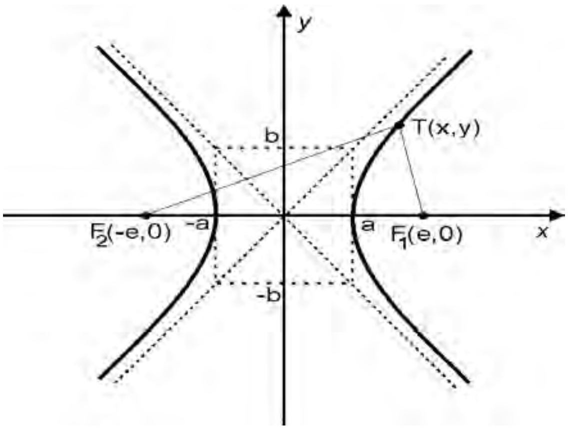
У уводу је рекао :

...није више неопходно... да се парабола посматра као пресак купе са равни паралелној генератриси него да се круг посматра као пресек купе са равни паралелној бази или чак троугао као пресек купе са равни кроз врх.

Валис је развио методе у Декартовом стилу аналитичке примене и био је први енглески математичар који је почео да користи нове методе. Овај рад је познат и по првој примени знака π који је Валис изабрао да представи криву линију која се може неограничено пратити. Користио је овај знак и у свом раду *Аритметика инфиниторум* .

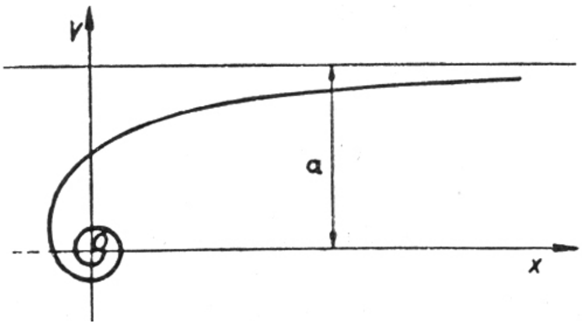
Валис је 1659. године објавио рад који је садржао решења проблема циклоида. Објаснио је како се принципи образложени у *Аритметика инфиниторум* могу користити за ректификацију алгебарских криви. Сви покушаји да се ректификују елипса и хипербола нису били успешни па се сматрало да то није ни могуће урадити.



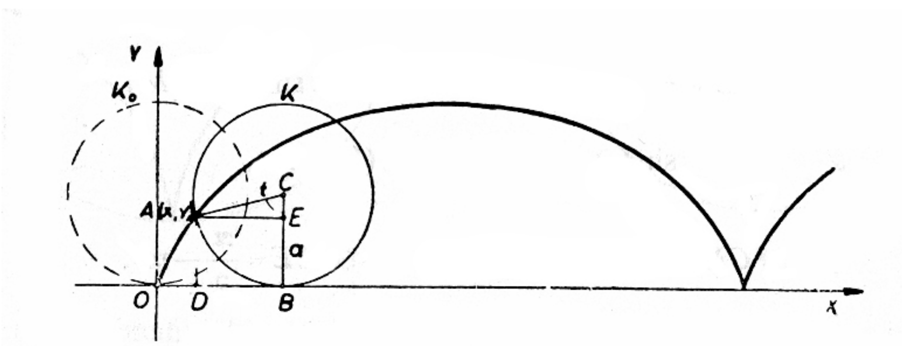


Торичели је ректификовао логаритамску спиралу и то је била прва крива линија (осим круга) чија се дужина могла одредити.

Логаритамска спирала

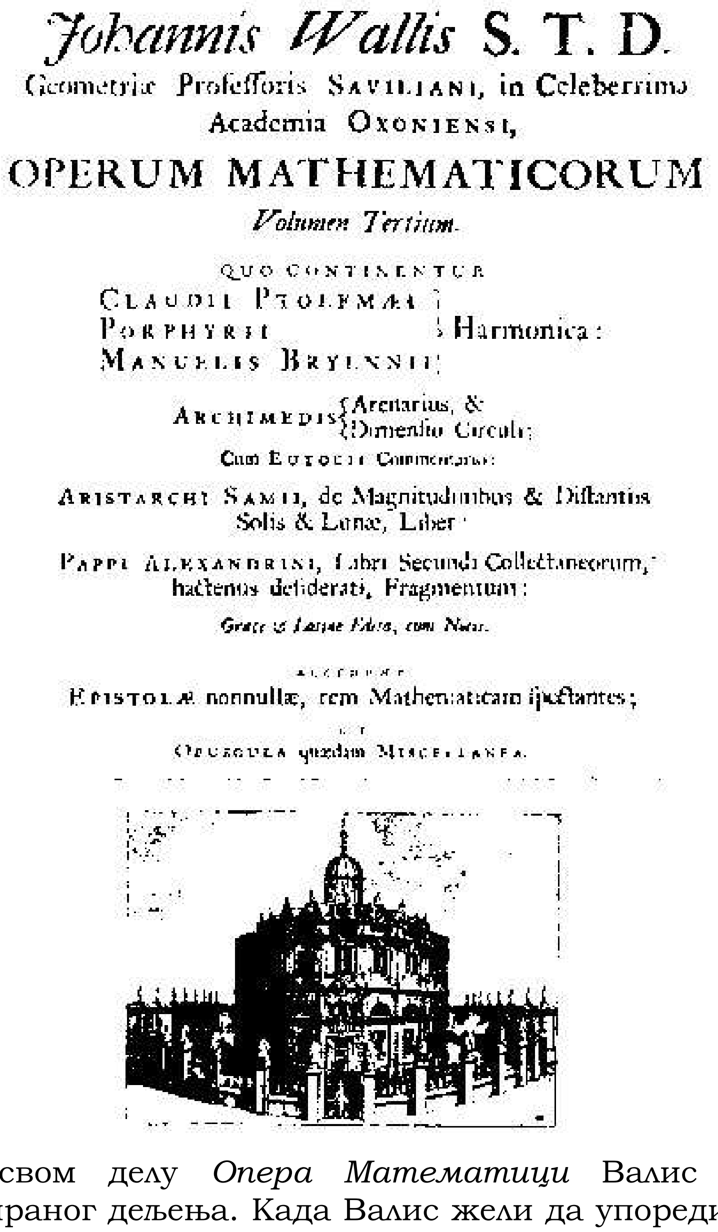


Врен је 1658. године ректификовао циклоиду.



Валис је био познат и као историчар математике и дао је значајан допринос историји математике обнављајући неке давне грчке текстове као Птоломејове *Хармоније,* Аристархове *О магнитудама* и удаљености сунца и месеца и Архимедов рачун сунца.

Његов не-математички рад укључује књиге о религији, о пореклу речи, граматику као и књигу о логици. Његова *Расправа о алгебри* је веома значајна али је најзначајнији онај део његовог рада из 1685. којим је приближио математичарима радове Хериота. Овај рад представљен је први пут од стране некога који је добро разумео његов значај.


Johannis Wallis S. T. D.
Geometriæ Profeſſoris SAVILIANI, in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
OPERUM MATHEMATICORUM
Volumen Tertium.
QUO CONTINENTUR
CLAUDII PTOLEMÆI }
PORPHYRII } Harmonica:
MANUELIS BRYENNII }
ARCHIMEDIS { Arenarius, & Dimenſio Circuli;
Cum EUTOCII Commentario:
ARISTARCHI SAMII, de Magnitudinibus & Diſtantiis Solis & Lunæ, Liber:
PAPPI ALEXANDRINI, Libri Secundi Collectaneorum, hactenus deſiderati, Fragmentum:
Græce & Latine Edita, cum Notis.
ACCEDUNT
EPISTOLÆ nonnullæ, rem Mathematicam ſpectantes;
ET
OPUSCULA quædam MISCELLANEA.

У свом делу *Опера Математици* Валис је увео појам континуираног дељења. Када Валис жели да упореди две дужине он их посматра тако да садрже више јединица дужине.

У *Расправама о алгебри* Валис је прихватио негативне и комплексне корене. Показује да $a^3 - 7a = 6$ има тачно три корена и сви су реални. Критиковао је и Декартова правила знакова и указао је да закон који одређује број позитивних и број негативних корена важи само ако корен једнакости припада скупу реалних бројева. Један крајње контраверзан део његовог рада односи се на тврдње да је Декартово знање алгебре настало директно од Хериота. Валис је за ове тврдње критикован чим је књига објављена, али је ова тема још увек предмет интересовања историчара математике. Тврдње које је Валис изнео о овој теми никад се нису показале погрешним.

Валис се укључио у расправу са Хобом који је био учен човек, али испод Валисовог нивоа знања у математици. Хоб је тврдио да је открио метод квадтратуре круга, али је Валис у својој књизи *Аритметика инфиниторум* одбио Хобове методе. Препирка која је трајала пуних 20 година завршила се Хобовом смрћу.

Један аспект Валисове математичке вештине није поменут а то је била његова способност да рачуна усмено. Слабо је спавао и често рачунаро усмено када би ноћу лежао у кревету. Једне ноћи израчунао је напамет 27-ми корен. То је било невероватно и Олденбург секретар Краљевског друштва послао је колегу да проучи како Валис то ради. То је била и тема дискусије у Филозофском делу Краљевског друштва 1685. године.
Херн је о Валису 1885. записао:

«...био је човек изванредне способности и постао је познат по својој изузетној вештини у математици, тако да је сматран једном од најзначајнијих особа у тој професији».

КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

У пољу R реалних бројева једначина

$$x^2 + 1 = 0$$

нема решење тј. не постоји реалан број x који задовољава једначину $x^2 + 1 = 0$. Ако хоћемо да ова једначина има решење, то поље R морамо проширити до структуре у коме ће то решење бити, при томе проширење мора бити минимално. Решење овог проблема нас доводи до поља C тзв. комплексних бројева.

Конструкцију поља C изводимо тако што решавамо нешто општији проблем, а то је тзв. квадратно проширење произвољног комутативног прстена са јединицом. У специјалном случају овог проширења добијамо поље C комплексних бројева. Наравно, могли смо и директно полазећи од поља реалних бројева R, конструисати проширено поље С комплексних бројева.

Нека је Р комутативан прстен са јединицом.
Дефиниција: Елемент q ∈ Р *зовемо квадрат у Р, ако постоји* x ∈ Р *да је* x^2 *=q. Тај елемент* x *, у том случају, зовемо квадратни корен од_ q у* Р.

Нека *a* и *b* представљају ма које реалне бројеве, формирамо један уређен *пар (a,b).* Овај уређени пар реалних бројева се зове *комплексан број* ако задовољава извесне постулате, од којих ћемо као примере изложити само три:

* «Једнакост» се дефинише као $(a,b)=(c,d)$ тада и само тако ако је $a=c$ и $b=d$.

* Збир $(a,b)+(c,d)$ датог пара комплексних бројева (a,b) и (c,d) се дефинише тако да буде комплексан број $(a+c,b+d)$;

* Множење $(a,b)\cdot(c,d)$ датог пара комплексних бројева (a,b) и (c,d) се дефинише тако да буде комплексан број $(ac-bd,ad+bc)$;

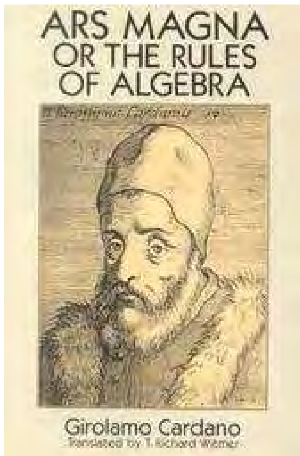
У изразима $a+c$, ac, и тако даље, имају своја уобичајена значења која имају као реални бројеви у аритметици.

Овим дефиницијама «сабирања», «множења» и «једнакости» може се једноставно потврдити да класа свих комплексних бројева (a,b), (c,d), ... задовољава све постулате поља.

Поље комплексних бројева садрже «потпоље» поља комплексних бројева. Код «прстена» и «група» имамо «потпрстене» и «подгрупе» који се налазе у специјалним прстенима и групама. У раздобљу између 1900. и 1940. године овакви феномени су сугерисали проучавање датог алгебарског «варијетеа» - као што је већ описано поље, затим прстен, група - у односу на његове «варијетете» као што су потпоља, потпрстени и подгрупе.

Један велики део модерне алгебре се бави односима између подваријетета. Тај део алгебре је био још 1831. имплицитно садржан у делу Галоа, а готово експлицитно изложен у алгебри логике коју је између 1847. и 1854. покренуо Џорџ Бул. Ове гране математике деветнаестог века уз друге, као што је пројективна геометрија, довеле су до развоја «структура» или «мрежа».

Djirolamo Kardano (1501-1576)



Италијански Математичар *Ђироламо Кардано* први је увео комплексне бројеве као решење квадратних и кубних једначина. Постоји познати *Тартаљин* (*Никола Фонтана звани Тартаља*) стих који гласи:

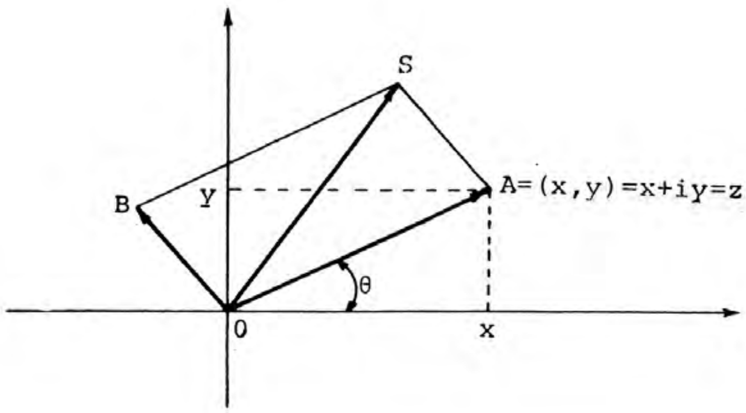
Ако је куб броја са додатком једнак неком броју, нађи два друга броја чија је разлика њему једнака.

Другим речима, ако је $x^3 + p \cdot x = q$ пронађи x тако да је $x = u - v$. Кардано је успео да пронађе формулу и објављује је у својој књизи *Ars Magna, sive de regulis algebraics* 1545. године. Од тада формула постаје позната под именом Карданова формула.

Револуционарна идеја да се комплексни бројеви могу геометријски представити тачкама у равни први је визуелно представио британски математичар *Џон Валис* у својој *Алгебри* (1673) и даље су је развили *Абрахам Де Моавр* 1722 и *Леонард Ојлер* 1748.

Концепт комплексних бројева представљених као тачке у равни реализовао је норвешки истраживач *Каспар Весел* 1799, касније *Жан Роберт Арганд* 1806. *Карл Фридрих Гаус* показао је да се комплексни бројеви могу приказати као уређени парови реалних бројева за које су операције сабирања и одузимања дефинисани у смислу саставних делова пара.

Комплексне бројеве можемо разматрати као уређене двојке (a,b) реалних бројева. У том случају свакој тачки равни (тачке равни идентификујемо са елементима скупа R^2) можемо придружити комплексан број $z = (x, y) = x + iy$ и обратно. Овим успостављамо бијекцију између скупа C комплексних бројева и скупа тачака равни. За x-осу узимамо бројеве $(x,0) = x$ и зовемо је реална оса. За y-осу узимамо бројеве $(0,a)=yi$ и зовемо је имагинарна оса.



Ова "геометријска интерпретација» комплексних бројева (дата на слици) доводи до интерпретације збира два комплексна броја: Нека су A и B две тачке равни којима одговарају редом комплексни бројеви z и z_1. Тада тачки S одговара комплексан број z + z_1 дат помоћу збира два вектора

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

Нека је тачки A кореснодентан комплексан број $z=x+iy$. Тада је

$$N(z)=z\cdot\vec{z}=x^2+y^2$$

реалан број, па на основу Питагорине теореме имамо

$$N(z)=OA^2$$

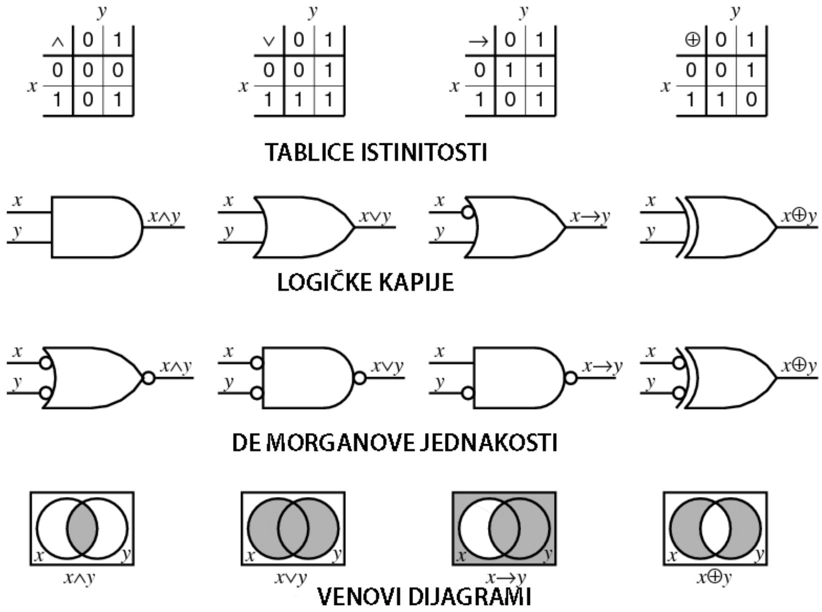
што представља квадрат растојања од тачке O до тачке A. Растојање између тих тачака је

$$OA=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{N(z)}=\sqrt{z\cdot\vec{z}}$$

и то растојање зовемо модуо или апсолутна вредност комплексног броја z и означавамо

$$|z|=\sqrt{z\cdot\vec{z}}$$

Алгебра комплексних бројева показала се корисном у описивању ротација у равни и нашла је бројне примере употребе нарочито у теорији наизменичних струја и изражавању формулом квантне механике.



У току следећег века, теорију функција комплексне промењиве највише су развили *Augustin-Louis Cauchi(1825) и Bernhard Riman(1854)*, тако да она сада чини једну од најлепших грана математике.

ВИЛИЈАМ РОУАН ХАМИЛТОН

Један од најзначајнијих енглеских математичара 19. века који је дао свој огроман допринос у развоју алгебре био је Вилијам Рован Хамилтон.


Вилијам Роуан Хамилтон (1805.-1865.)

Отац Вилијама Хамилтона, Арчибалд Хамилтон није имао времена да га подучава јер је често пословно путовао. Сматрало се да је Хамилтон надарен на мајку и већ са пет година научио је грчки, латински и хебрејски. Подучавао га је ујак Џејмс. Вилијам је касније учио и друге језике али је одлучујући тренутак у његовом животу био сусрет са Американцем *Зераром Колбурном*, који је имао способност извођења неверованих менталних аритметичких операција. Хамилтона је веома подстицало такмичење са њим.

Са математиком се сусрео у 13. години а знање француског језика олакшавало му је проучавање *Клерове Алгебре*. Са 15 година проучавао је радове *Њутна* и *Лапласа* а 1822. године, пронашао је грешку у *Лапласовом* раду *Mecanique celeste* и тиме изазвао пажњу *Бринклија*, краљевског астронома Ирске који је рекао:

"Овај млади човек, не могу рећи да ће бити, али је сада водећи математичар његових година".

Хамилтон је са 18 година уписао Тринити колеџ у Даблину и на првој години добио је признање *«Оптиме»* које се додељивало једном у двадесет година.У августу 1824.године ујак Џејмс је водио Хамилтона у Самерхил где упознаје породицу Дизни. Тада је Вилијам упознао Катарину и одмах се заљубио. Нажалост, пошто су му преостале још три године на Тринити колеџу, није могао да јој понуди брак. Имао је запажен успех као студент и 1824. године подноси свој први рад Краљевској Ирској академији под називом.

Следећег фебруара Катаринина мајка га је обавестила да ће се њена кћерка удати за утицајног човека који јој је могао више пружити у животу. Вилијам је наредне испите положио са "bene" уместо уобичајених "valda bene" јер је био ометен Катарининим удајом. Разболео се и у једном тренутку чак је помишљао и о самоубиству. Посветио се поезији којој се и касније враћао у периодима разочарења.

Хамилтон је 1826.године освојио *«Оптиме»* у природним и класичним наукама што је било незамисливо.На последњој години студија Краљевској Ирској академији представио је *Теорију система зрака.*.У овом раду изнео је основе оптике. Хамилтонов професор Бојтон наговарао га је да се пријави за место краљевског астронома у Дансинк опсерваторији, иако је било већ шесторо пријављених, а међу њима и Џорџ Бидел Ејри. Касније 1827. Хамилтон постаје Ендрјус професор астрономије на Тринити колеџу иако није дипломирао. Професура је носила и хонорарну титулу Краљевског астронома Ирске и могућност боравка у Дансинк опсерваторији. Ово наименовање наишло је на бројне расправе, јер Хамилтон није имао много искуства. Његов претходник, професор Бринкли, сматрао је да није коректно од Хамилтона што је прихватио дужност. Хамилтон постепено губи интересовање за астрономију и посвећује се све више математици.

Пре почетка рада на овој престижној позицији Хамилтон је обилазио Енглеску и Шкотску (одакле је потицала Хамилтонова породица). Среo је песника Вордсворта и постали су пријатељи. Једна од Хамилтонових сестара Елиза писала је песме. Хамилтон је волео да упоређује математику и поезију говорећи да је математички језик такође поетичан. Вордсворта се није слагао са њим:

Наука примењена само на материјалан начин живота узроковала је ратове и желела да уништи маштовитост.

Вордсворта је рекао Хамилтону да је талентованији за науку него за поезију:

Шаљеш ми прегршт стихова које са задовољством примам.... али страхујем да те то може одвући од науке... Волео бих да размотриш да ли је поетска страна твоје личности можда прихватљивија за прозу, за коју си можда талентованији.

Хамилтон је почео да учи свог ђака Адареа,међутим Адареов вид слаби.Због тога одлучују да се одморе и отпутовали су у посету код астронома Робинсона. Тада је Хамилтон срео Леди Кембел која ће имати велики утицај на њега а посетио је и Катарину која је живела близу. Био је веома нервозан у њеном присуству и сломио је део телескопа који је желео да јој покаже. Тај сусрет га поново враћа поезији.

У јулу 1830. Хамилтон и његова сестра Елиза посетили су Вордсфорта и тада је озбиљније почео да размишља о женидби. Размишљао је о Елен де Вере и рекао је Вордсфорту:

...дивим се њеном уму....

Није спомињао љубав. Стално јој је слао песме и спремао се да је запроси, али му је она једном приликом рекла да не би била срећна нигде осим у Курагу. Хамилтон је сматрао да је ово био начин да га обесхрабри и одустао је. Међутим, погрешио је јер се она следеће године удала и отишла да живи ван Курага. Једна добра ствар проистекла из тог пријатељства била је да се Хамилтон спријатељио са Елиним братом али их је расправа о религији 1851. године потпуно удаљила. Хамилтон је сматрао да када се већ није оженио са Катарином, онда више није важно с ким ће се оженити, и оженио се са *Хеленом Маријом Бејли* коју није сматрао баш интелигентном. На меденом месецу који су провели на Бејли имању Хамилтон је радио на трећем прилогу своје *Теорије система зрака.* Хелен није знала да води домаћинство, често је била болесна и дезорганизована. Касније је све више времена проводила негујући болесну мајку.

Хамилтон 1832.године објављује трећи прилог о *Теорији система зрака* који је у основи рад о карактеристичним функцијама оптике. Брињантном применом свога варијационог принципа у оптици, Хамилтон је предвидео потпуно неочекивану оптичку појаву и поред тога унапред исказао њену бројну величину пре експеримената који су потврдили предвиђање. Применио је карактеристичну функцију да би проучио Френелову површину таласа. Од тога је настала конична рефракција и замолио је професора физике Лојда на Тринити колеџу да му то експериментално докаже. Лојд је то и урадио и показало се да је Хамилтон био у праву. Међутим ово откриће довело га је до несугласица са Мек Калом који је и сам био близу проналаска али га је Хамилтон претекао.Хамилтон 1833.године представља свој рад Краљевској Ирској Академији изражавајући комплексне бројеве као алгебарске парове или уређен пар реалних бројева. Користио је алгебру у изражавању динамике у *Оп штим методама динамике.*

Посебно треба да се задржимо на двема творевинама Уједињеног краљевства: на Хамилтоновим кватернионима и Клифордовим бикватернионима. Хамилтон је био краљевски астроном Ирске и пошто је завршио своје радове из механике и оптике, посветио се алгебри. У његовој *Теорији алгебарских парова* (Theory of Algebraic Couples, 1835) алгебра се дефинише као наука о чистом времену.Ту је дата строга конструкција алгебре комплексних бројева на основу представљања комплексног броја као пара бројева. То је, вероватно, учињено независно од Гауса, који је у својој теорији биквадратних резидуума (1831) такође дао строгу конструкцију алгебре комплексних бројева, али на основу геометрије комплексне равни. Сада су оба прилаза подједнако прихваћена. После тога Хамилтон је покушао да проникне у алгебру бројевних тројака, бројевних четворака итд. Он је био сав озарен (како радо о томе причају његову поклоници) када је једног октобарског дана 1843. године, прелазећи преко моста у Даблину открио кватернионе. Његова истраживања кватерниона изложена су у две велике књиге: *Предавања о кватернионима* (Lectures of Quaternions, 1853), *и Основи теорије кватерниона* (Elements of Quaternions, 1866). Та друга књига је објављена после његове смрти. Најпознатији део тога кватернионског рачуна је теорија вектора (овај термин потиче од Хамилтона), која улази као један део и у Гарсманову теорију проширења. Због тога се, углавном, сада често ослањају на Хамилтона и Грасмана. У Хамилтоново време а и много касније, кватерниони су били предмет неизмерног дивљења.

Хамилтонов приступ је био потпуно другачији од дотадашњих приказаних у уџбеницима. У својим есејима о динамици Хамилтон је применио карактеристичну функцију V у динамици као што је у оптици карактеристична функција била промена система у кретању од почетне до крајње тачке у конфигурацији простора. По његовом закону променљиве акције направио је почетку и крајњу координату као независне промењиве карактеристичне функције. За конзервативне системе тотална енергија H је константна дуж сваке праве линије али се мења ако се почетна и крајња тачка мењају и тако карактеристична функција у динамици постаје функција од координатне почетне и крајње позиције (за n делова) и Хамилтонов H.

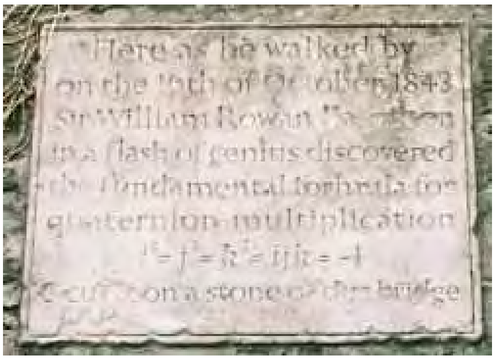
Хамилтон и Хелена 1834.године добијају сина, Вилијама Едвина. Хелен а је тада напустила Дансинк и оставила је усамљеног Хамилтона који се потпуно посветио раду. Хамилтон 1835.године објављује *Алгебру и науку чистог времена* која је била инспирисана његовим пручавањем Канта. Алгебарске парове поистоветио је са корацима у времену и тако их је разматрао. Одликован је 1835. године и тада му је рођен и други син Арчибалд Хенри. Наредне године неће му донети много среће. После открића алгебарских парова покушао је да прошири теорију триплета (групе од три пара) и ово му је постала опсесија. Следеће јесени отишао је на састанак Британске асоцијације а Хелена је одвела децу на Бејли имање. Вилијам тада постаје депресиван и одаје се алкохолу. Због тога је његова сестра дошла да живи код њега. Хелен се вратила 1842. године када је Хамилтон био толико преокупиран триплетима да су га и деца питала :

Па тата можеш ли да помножиш триплете?

Морао је да призна да само може да их сабира и одузима. Одредио је формулу за *кватернионе:*

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

исписао их је и на камену поред кога су пролазили Брум и Бриџ.



Хамилтон је осећао да ће ово откриће имати пресудан значај за развој физике и остатак свог живота провео је проучавајући кватернионе:

Моје је мишљење да је ово откриће веома значајно за 19. век као што је откриће диференцијалног рачуна кључно за 17. век.

После посете Томаса Дизнија и Катарине 1845. године Хамилтон се осетио погођеним и још више се одао алкохолу. На састанку Геолошког друштва следећег фебруара имао је испад услед пијанства :

...на вечери научног друштва у Даблину изгубио је контролу био је потпуно пијан и по савету пријатеља одлучио је да остави алкохол. Тога се придржавао две године али се касније опет одао алкохолу.

Страшно су га узнемириле смрти ујака Џејмса и Вилеја и самоубиство пријатеља са Тринити колеџа Џејмса Меккалана.Убрзо после тога Катарина почиње да му шаље писма која га одводе у још већу депресију. Одаје се поново алкохолу али се посвећује и раду. Објавио је *Предавања о кватернионима* 1853. године, али је схватио да ова књига није баш добар уџбеник из кога се може научити о кватернионима.

Катарининим сину Џејмсу помогао је око припреме испита о кватернионима. У знак захвалности Катарина му је послала налив перо са посветом.

Од оне коју никад не смеш заборавити, нити мислити лоше и која би умрла задовољнија да смо се још једном срели.

Две недеље после Хамилтонове посете у којој јој је предао копију *Предавања о кватернионима* Катарина је умрла.

Упоран у жељи да напише дело трајног квалитета почео је да пише нову књигу *Елементи кватерниона* за коју му је требало седам година. Последње поглавље није успео да заврши јер га је смрт претекла али је његов син Вилијам Едвин Хамилтон написао предговор за њу.

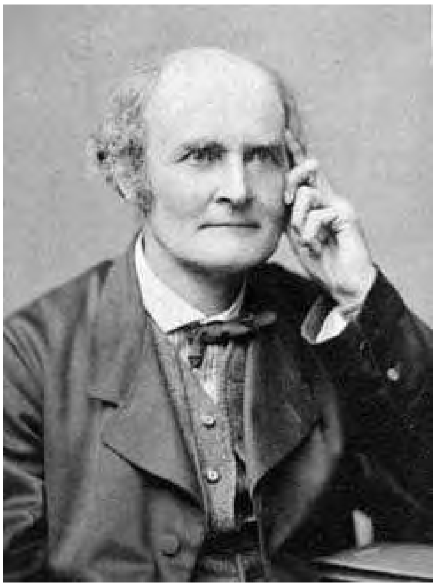
О Хамилтоновим кватернионима многи су расправљали и сматрали су да се у овој књизи не могу наћи одговори на сва питања. Кејли је на пример поредио кватернионе са џепном мапом:

...која све садржи али мора да се открије у другој форми да би могла да се користи....

Неки британски математичари видели су у кватернионском рачуну нешто слично Лајбницовој «универзалној аритметици», што је, наравно, изазвало опозицију (Хевисајд против Тета), после чега је слава кватерниона умногоме потамнела. Теорија хиперкомплексних бројева коју су разрадили Пирс, Штуди, Фробенијус и Картан, указала је на легитимно место кватерниона као простог асоцијативног система бројева са више од две јединице. Култ кватерниона у време његовог апогеја довео је до стварања «Међународног удружења за координацију у проучавању кватерниона и сродних математичких система». Ово удружење се распало поставши једна од жртава првог светског рата. У вези са кватернионима појавио се још један конфликт, односно борба између присталица Хамилтона и Грасмана када је, захваљујући Гибсовим напорима у Америци и Хевисајдовим у Енглеској, векторска анализа постала засебна грана математике. Ти жестоки спорови водили су се између 1890. године и првог светског рата. Коначно решење је нађено захваљујући теорији група, која је свакој од тих метода одредила оно што им припада у одговарајућим областима примене 1.

Хамилтон умире убрзо након сазнања да је изабран за првог странца члана Националне академије наука САД.

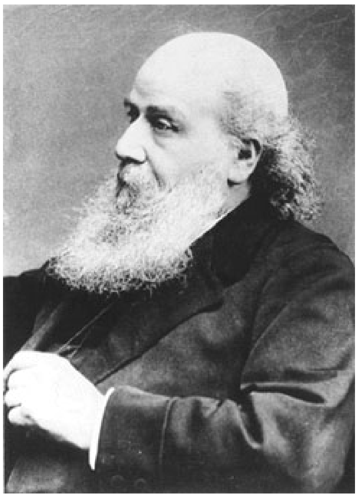
АРТУР КЕЈЛИ



Артур Кејли (1821.-1895.)

Чиста математика 19. века у Енглеској је, пре свега, алгебра са применом на геометрију, а водеће личности у тој области су били: *Кејли, Силвестер и Салмон.*

Отац Артура Кејлија живео је у Петрограду у Русији иако је потицао из породице која је генерацијама живела у Енглеској. Првих осам година живота Артур је провео у Русији а касније у Енглеској. Артур је био веома вешт у математици и када је прешао у Кинг Колеџ 1835.године истицао се својим математичким способностима. Професор математике наговарао га је да настави школовање у овој области али је његов отац желео да се посвети породичном послу трговине. Артур је1838.године започео студије на Тринити колеџу у Кембриџу где је и дипломирао 1842. године. Док је још био студент објавио је три рада у часопису *Кембриџ математички журнал.* Дипломирао је као Старији Вранглер и освојио први Смитову награду. Добио је стипендију и четири године је предавао на Кембриџу. За то време објавио је 28 радова у *Кембриџ математичком журналу.* Стипендија је била ограниченог трајања тако да је Кејли морао да се посвети одређеној професији. Изабрао је права и приступио адвокатској комори 1849. Радио је 14 година као адвокат и ако је био вешт у овој професији сматрао ју је само начином стицања новца да би могао да се посвети математици. Док се припремао за адвоката отишао је у Даблин да би слушао Хамилтонова предавања о кватернионима. Његов пријатељ адвокат Силвестер такође је био посвећен математици тако да су често расправљали о математичким проблемима.



Џемс Џозеф Силвестер (1814.-1897.)

Џемс Џозеф Силвестер није био само математичар већ и песник и добар козер, који је заједно са Лајбницом најистакнутији творац нових термина у целој историји математике. За време другог боравка у САД ушао је у редове оних који су постављали темеље научног рада у области математике на америчким универзитетима. Предавачка делатност Силвестера представљала је почетак процвата математике у Сједињеним Државама.

Код Кејлија и Силвестера појавило се интересовање за «алгебру форме или квантика» како је то називао Кејли. Сарадња између Кејлија и Силвестера означила је почетак стварања теорије алгебарских инваријаната. Та теорија као да је «висила у ваздуху» већ много година, нарочито када су се почеле проучавати детерминанте. Ранији радови Кејлија и Силвестера нису садржавали детерминанте, те је то свестан покушај да се да систематска теорија инваријаната алгебарских форми са сопственом симболиком и правилима операција. То је била теорија коју су касније у Немачкој развијали Аронхолд и Клебш и која представља алгебарски кореспондент Понселеовој пројективној геометрији. За време четрнаестогодишњег рада као адвокат објавио је 250 математичких радова - постављало се питање колико математичара може да се упореди са продуктивношћу овог "аматера". Међу најпознатијим радовима налази се девет *Мемоара о квантикама* (Memoris on Quantics, 1854-1878). Шести рад у тој серији (1859.) садржи пројективну дефиницију метрике у односу на конусни пресек. То откриће је довело Кејлија до пројективне дефиниције еуклидске метрике и то му је омогућило да уведе метричку геометрију у систем пројективне геометрије. Везу између те пројективне метрике и нееуклидске геометрије Кејли није запазио, тако да је њу открио тек касније Феликс Клајн.

Артур Кејли је 1863.године, прихватио предлог да преузме нову математичку катедру у Кембрицу, где је затим предавао тридесет година. Његов приход, у односу на период када је радио као адвокат, знатно се смањио. Без обзира на то Кејли је био срећан јер се посветио математици. Као Савилијан професор чисте математике имао је обавезе да објашњава основе чисте математике и да се посвети напретку ове области.

Објавио је преко 900 радова о скоро свим областима модерне математике. Најзначајнији његов рад је развој алгебре матрица, рад у *нееуклидовој геометрији* и *n-димензионалној геометрији.* Кејлијев рад о пермутацијама повезан је са радом Кошија, а 1854. Кејли је написао два рада која су значајна за сагледавање апстрактних група. У то време једино су биле познате пермутационе групе и то је била нова област али је Кејли дефинисао апстрактне групе и створио таблицу која приказује како се множи у групи. Ово је значајно за упознавање концепта апстрактних група, схватио је да су матрице и кватерниони групе.

Кејли је развио теорију алгебарске инваријанције, његов развој n-димензионалне геометрије примењен је у физици за изучавање бесконачности простора - времена. Његов рад о матрицама послужио је као основ развоја квантне механике коју је развио Хајсенберт 1925.године. Кејли је такође сугерисао да су Еуклидова и нееуклидова геометрија специјалне врсте геометрије. Ујединио је нацртну геометрију и метричку геометрију која зависи од величине углова и дужине линија.

На Џон Хопкинс Универзитету у Америци где је предавао његов пријатељ Силвестер, позван је 1881. да одржи предавања. Од јануара до маја 1882. Кејли је провео на овом универзитету где је предавао о *Абелијан и Тета функцијама.*

ЏОРЏ БУЛ

Џорџ Бул (1815.-1864.)

У 19. веку заслугом великог енглеског математичара Џорџа Була начињене су прве споне алгебре и логике. Булова алгебра је касније у 20. веку постала веома важна јер је то математика која ће се користити за рачунаре и која налази примену у компјутерској конструкцији кружних кола.

Отац Џорџа Була био је обућар и интересовао се за науку а нарочито за примену математике у раду научних инструмената. Породица је била сиромашна, велика љубав Џорџовог оца према науци и математици одвлачила га је од обућарских послова. Џорџ је рођен као прво дете после девет година брака а у следећих пет година родило се још троје деце. Похађао је школу за децу занатлија у Линколну, касније је ишао у трговачку школу. Математици га је рано подучавао отац, од кога је наследио и љубав према оптичким инструментима. Показивао је интересовање за стране језике нарочито за латински и грчки. Школовање наставља у Бејнсбриџ трговачкој академији, која му није пружала образовање које је желео. Али то је било све што су његови родитељи могли да му приуште. Сам је учио француски и немачки и предмете које није имао у школи.

Бул је учио са пуно љубави .Посао његовог оца је пропао и морао је финансијски да помаже родитеље, браћу и сестру.Био је принуђен да са 16 година ради као асистент школског учитеља у Хајграм школи у Донкастеру.И даље су га интересовали страни језици, почео је озбиљно да проучава математику и одустао је од идеје да се придружи цркви. Прва важнија математичка књига коју је прочитао била је Лакроаова *„Диференцијали и интегрални рачун".* Касније је схватио да је скоро пет година изгубио покушавајући да сам научи предмет уместо да га подучава школовани предавач. У Ливерпулу је 1833. године провео шест месеци подучавајући а после је прешао у Хол Академију у Вадингтону, близу Ливерпула. Иако му је било само 19 година, 1834. отворио је своју школу у Линколну.

Роберт Хол који је водио Хол Академију у Вадингтону умро је и Бул је добио позив да преузме школу. Његови родитељи, браћа и сестра селе се у Вадингтон и заједно су водили школу која је имала и интернат. У то време Бул је проучавао радове Лапласа и Лагранжа вадећи тезе које ће му касније послужити за први математички часопис. Подржавао га је и Данкан Грегори који је у то време у Кембриџу био уредник новооснованог *Кембриџ математичког часописа.* Бул није могао да слуша курсеве на Кембриџу јер му је био неопходан приход који му је школа доносила. У лето 1840. отворио је интернат у Линколну и опет се цела породица преселила. Редовно је издавао Кембриџ математички часопис и под утицајем Данкана Грегорија почео је да проучава алгебру. Џорџ Бул се 1842. дописује са *Де Морганом* и следеће године настао је чланак *„О општим методама анализе коришћењем алгебарских метода у решавању диференцијалних једначина".* Овај чаланак такође шаље *Де Моргану.* Његов математички рад штампан је у *Делу краљевског друштва* 1844. и за овај рад освојио је краљевску медаљу друштва. Пре одлуке о добијању катедре, у децембру 1848. Булов отац умире.

Бул је именован за управника математичке катедре на Квин колеџу у Корку 1849. где постаје први професор математике. Пријавио се за све катедре у сваком од Квин колеџа у Ирској 1846. а у септембру Де Морган, Келанд, Кејл и Томсон су му пружили подршку. Де Морган је рекао:

„Са сигурношћу могу да потврдим да је он не само упућен у највише области математике, већ да поседује снажну способност да то прошири што му обезбеђује висок положај међу енглеским предавачима".

Келанд је написао:

„Оригиналност његове мисли, ширина и тачност његовог знања...., мислим да је мало таквих у Европи“...

На Квин колеџу предавао је до краја живота, уживао је углед истакнутог и посвећеног професора али је имао и тешкоће изазване религијским расправама. Тада је Бул написао Де Моргану 17. октобра 1850.

„Ако чујеш о некој позицији која би ми одговарала.... обавести ме. Нисам уплашен верском нетрпељивошћу која бесни сада овде. Нисам незадовољан својим обавезама и могу рећи да сам у добрим односима са својим колегама и студентима. Али не могу да не осетим да су недавни догађаји на овом колеџу довели до неповерења између нас“...

У мају 1851. Бул је изабран за декана природних наука и овај задатак обављао је врло пожртвовано. У то време упознао је Мери Еверест чији је ујак предавао грчки на Корку и био му је пријатељ. Бул је почео да Мери објашњава математику а нарочито диференцијални рачун и када јој је умро отац, остављајући је без прихода Бул је одлучио да је запроси и венчали су се 1855.године. Био је то срећан брак са пет кћерки.
Најзначајнији Булов рад је *«Истраживање закона мисли»* на којима се заснива математичка теорија логике и вероватноће, који је објављен 1854. године. Бул је приступио логици на нови начин сводећи је на једноставну алгебру, укључујући логику у математику. Указао је на аналогију између алгебарских симбола и оних које се користе у логици. Писао је Томсону:

„Сада радим на припреми теорије логике и вероватноће коју у овом тренутку сматрам као свој најзначајнији допринос науци и по којој бих желео да ме памте“

Де Морган је хвалио његов рад:

Булов систем логике је један од доказа да су генијалност и стрпљење повезани... Није се веровало да ће симболички процеси алгебре, пронађени као средства нумеричког бројања бити компетентни да изразе сваку мисао и да опреме основу и речник садржајног система логике док то није доказано.

Бул је такође радио на диференцијалним једначинама, значајан је *„Спис о диференцијалним једначинама“* који се појавио 1859. затим *„Спис о одређеном диференцијалном рачуну“* 1860. и опште методе вероватноће. Објавио је око 50 радова и био један од првих који је истраживао основне особине бројева, као што су дистрибутивне особине које подлежу законима алгебре. Булу су одата многа признања, добио је почасна звања на универзитетима у Даблину и

Оксфорду и био је изабран за члана Краљевског друштва 1857. Његова каријера која је прилично касно почела, неочекивано је рано завршена смрћу у 49. години. Мекфарлан је записао о околностима под којима је умро.

Једног дана 1864. ишао је од куће до колеџа, раздаљине од две миље, кретао је по јакој киши и после је држао предавања у мокрој одећи. Добио је грозницу која је прешла на упалу плућа и тако је окончана његова каријера....

Булова жена верујући да се клин клином избија поливала је Була кофама хладне воде.

Џорџ Бул је творац алгебре са логичким истинosним вредностима T-"тачно" и ⊥-"нетачно" и основним логичким операцијама. То је судбински корак у развоју математичке логике. Једна од најважнијих математичких структура која је настала од његове алгебре, названа је *Булова алгебра.* Био је то систем који је садржао тачне и нетачне констатације, у коме 1 означава тачно а 0 нетачно. Булова алгебра има широку примену у телефонским прекидачима и дизајну модерних компјутера. Булов рад је основа развоја компјутерске револуције.

Сваки од наведених покушаја да се математика дефинише допринео је осветљавању појединих детаља целе слике. Ови покушаји као и остали који нису поменути, показују безнадежност покушаја да се блиставо рађање сунца наслика у једној јединој боји. Покушај да се слободан дух модерне математике сабије на неколико сантиметара у неком речнику, исто тако је узалудан као и настојање да се облак пун електрицитета који стално тежи за експанзијом смести у малу боцу.

Ерик Темпл Бел

ЛИТЕРАТУРА

- Др Александар Липковски, Скрипта са специјалистичким предавањима Елементарне алгебре, Математички факултет
- Др Ђуро Курепа, Виша алгебра I, Београдски издавачки завод, 1971. год.
- Др Гојко В. Калајџић, Алгебра, Веста-Математички факултет, 1998. год.
- Др Боривоје Н. Рашајски, Аналитичка геометрија, Грађевинска књига Београд, 1968. год.
- Синиша Црвенковић, 450 година велике вештине – почетак алгебре, Мала математичка библиотека, Привредни преглед Београд
- Др Гојко В. Калајџић, , Математички факултет, 1994. год.
- Др Душан Аднађевић, др Зоран Каделбург, Математичка анализа, Студенски трг, Београд 1994. год.
- Др Веселин Перић, Алгебра I део, Прстени и модули линеарне алгебре, ''Свјетлост'' ООУР Завод за уџбенике Сарајево, 1980. год.
- http://www.history.mcs.st/and.ac.uk
- http://www.wikipedia.com
- Ерик Темпл Бел, Математика, краљица и ропкиња науке
- Дир Ј. Стројк, Кратак преглед историје математике

САДРЖАЈ