АЦИРАМ Д. ПРЕШИЋ

ЈЕДАН ИТЕРАТИВНИ ПОСТУПАК ЗА ЈЕДНОВРЕМЕНО ОДРЕЂИВАЊЕ k РЕАЛНИХ РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ НА ПОЉУ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Математички весник
10 (25), Св. 4, 1973.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
10 (25), 1973 стр. 299—308.

Марица Д. Прешић

ЈЕДАН ИНТЕРАТИВНИ ПОСТУПАК ЗА ЈЕДНОВРЕМЕНО ОДРЕЂИВАЊЕ k РЕАЛНИХ РЕШЕЊА ЈЕДНАЧИНЕ НА ПОЉУ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

(Саопштено, 14. априла 1972.)

Резиме. У раду се излаже један итеративни поступак дефинисан једнакостима (1), (2) за једновремено одређивање k реалних решења једначине (J) на пољу реалних бројева. (Претпоставка је да је (J) могућа једначина и да има бар k реалних решења). У случају када је $k=1$ поступак се своди на Newton-Raphsonov поступак. Када је $f(x)$ полином поступак се своди на [4]. Посебно, када је $f(x)$ полином, а $k=n$ поступак се своди на [3].

Ознаке и дефиниције.

— *Реална једначина* чија приближна решења одређујемо је:

(J)
$$f(x)=0.$$

Претпостављамо да је она могућа и да има бар k реалних решења.

— $a_1, \ldots, a_k$ су k реалних *решења* једначине (J) чије приближне вредности одређујемо.

— Вектор $A=(a_1, \ldots, a_k)$ зовемо *вектор решења.*

— $X=(x_1, \ldots, x_k)$ је произвољан елемент из R^k.

— Реалну функцију $g(x_1, \ldots, x_k)$ од k промењљивих означавамо са $g(X)$.

— $\frac{\partial}{\partial x_1} g(A)$ је ознака за извод $\frac{\partial}{\partial x_1} g(X)$ у тачки A. Сличне ознаке се користе за вредности парцијалних извода вишег реда у тачки A.

— $[x, x_1, \ldots, x_m]$ је *оператор подељених разлика* [1].

— Нека је $f(x)$ реална функција дефинисана у тачкама $x, x_1, \ldots, x_k$ (међусобно различите тачке). *Оператор подељених разлика* се дефинише:

$$[x]f \overset{\text{def}}{=} f(x), \quad [x, x_1]f \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1},$$

$$[x, x_1, \ldots, x_{m+1}]f \overset{\text{def}}{=} [x, x_{m+1}][x, x_1, \ldots, x_m]f$$

$$(m=1, \ldots, k-1)$$

—$[x, X]f$ је ознака за $[x, x_1, \ldots, x_k]f$. Слично $[X]f$ је ознака за $[x_1, \ldots, x_k]f$.

— α је пермутација $(x_1\, x_2 \ldots x_k)$.

Идеја. Нека је $f(x)$ дефинисана у интервалу I који садржи решења $a_1, \ldots, a_k$ једначине (J) и у коме постоји извод $f'(x)$. На основу дефиниције оператора подељених разлика непосредно се добија идентитет [1]:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} + \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)\,[x, X]\,f \quad .$$

$(x, x_1, \ldots, x_k$ међусобно различити елементи из I)

j-ти сабирак горње сигме је једнак нули, уколико је $x_j = a_j$. Инспирушући се том чињеницом низове $a_1(i), \ldots, a_k(i)$ уводимо тако да важе следеће једнакости, за сваки x из I:

$$f(x) = \big(x - a_1(i+1)\big)\big(x - a_2(i)\big) \ldots \big(x - a_k(i)\big) \cdot [x, A_i] f + \sum_{j \neq 1} f\big(a_j(i)\big) \prod_{l \neq 1} \frac{x - a_l(i)}{a_j(i) - a_l(i)}$$

$$f(x) = \big(x - a_1(i)\big)\big(x - a_2(i+1)\big) \ldots \big(x - a_k(i)\big) \cdot [x, A_i] f + \sum_{j \neq 2} f\big(a_j(i)\big) \prod_{l \neq j} \frac{x - a_l(i)}{a_j(i) - a_l(i)}$$

. . . .

$$f(x) = \big(x - a_1(i)\big)\big(x - a_2(i)\big) \ldots \big(x - a_k(i+1)\big) \cdot [x, A_i] f + \sum_{j \neq k} f\big(a_j(i)\big) \prod_{l \neq j} \frac{x - a_l(i)}{a_j(i) - a_l(i)}$$

Пуштајући у горњим једнакостима да x тежи редом ка $a_1(i), \ldots, a_k(i)$ и решавајући на тај начин добијене једнакости по $a_1(i+1), \ldots, a_k(i+1)$ долази се до формула:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} a_1(i+1) &= \varphi(A_i) \\ a_2(i+1) &= \varphi(\alpha A_i) \\ a_k(i+1) &= \varphi(\alpha^{k-1} A_i) \end{aligned} \qquad \Big(A_i \overset{\text{def}}{=} \big(a_1(i), \ldots, a_k(i)\big)\Big)$$

где је $\varphi(X)$ функција дефинисана следећом једнакошћу

$$\text{(2)} \qquad \varphi(X) = x_1 - \frac{f(x_1)}{\prod_{i \neq 1} (x_1 - x_i) \dfrac{\partial}{\partial x_1} [X] f} \, .$$

Ради лакшег изражавања уводимо следећу векторску функцију

$$\Phi(X) \overset{\text{def}}{=} \big(\varphi(X),\ \varphi(\alpha X), \ldots, \varphi(\alpha^{k-1} X)\big)$$

Користећи ту функцију формуле (1) и (1) записују се у векторском облику

$$\text{(3)} \qquad A_{i+1} = \Phi(A_i)\, .$$

Конвергенција. Непосредно се закључује да, ако низови $a_1(i), \ldots, a_k(i)$ постоје и конвергирају, тада су

$$\lim_{i \to \infty} a_1(i), \ldots, \lim_{i \to \infty} a_k(i)$$

решења једначине (J).

У следећој теореми доказује се да, под одређеним условим', низови $a_1(i), \ldots, a_k(i)$ конвергирају редом ка решењима $a_1, \ldots, a_k$, уколико су почетне вредности $a_1(0), \ldots, a_k(0)$ довољно близу редом ка $a_1, \ldots, a_k$.

Теорема, *Нека је реална једначина*

$$f(x)=0 \tag{J}$$

могућа и нека има бар $k\,(k\geq 1)$ *реалних решења* $a_1, \ldots, a_k$, *која припадају интервалу* I *у коме је функција* $f(x)$ *дефинисана.*

Претпоставимо, даље, да постоји и да је ограничен извод трећег реда $f'''(x)$ *у околинама тачака* $a_1, \ldots, a_k$ *и да су изводи*

$$f'(a_1), \ldots, f'(a_k)$$

сви различити од нуле. Тада постоји извесна околина V *вектора решења* A *таква да, уколико је* $A_0 \in V$ $(a_1(0), \ldots, a_k(0)$ *међусобно различити), онда:*

(i) *Постоји тачно један низ* A_i *који задовољава услове* (1), (2), (3).

(ii) *Низ* A_i *конвергира ка вектору решења* A *једначине* (J).

(iii) *Конвергенција низа* A_i *је квадратна.*

Доказ. Доказ изводимо у неколико корака.

Први корак. Доказујемо да важи једнакост

$$\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}[A]f=f'(a_j) \qquad (j=1, \ldots, k). \tag{4}$$

Према својствима оператора подељених разлика важи идентитет [1]:

$$[X]f=\sum_{j=1}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)} \qquad (x_1, \ldots, x_k \text{ различите тачке из } I)$$

Отуда, ако је X у околини тачке A, следи једнакост:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[X]f=\frac{f'(x_1)}{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)}-\frac{f(x_1)}{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)}\cdot\sum_{i\neq 1}\frac{1}{x_1-x_i}+\sum_{j=2}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}$$

Множећи горњу једнакост са $\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)$ који према условима теореме није нула, добијамо еквивалентну једнакост

$$\prod_{i\neq 1}(x_1-x_i)\,\frac{\partial}{\partial x_1}[X]f=f'(x_1)-f(x_1)\sum_{i\neq 1}\frac{1}{x_1-x_i}+ \tag{5}$$

$$+\prod_{i\neq 1}(x_1-x_i)\cdot\sum_{j=2}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}.$$

Пуштајући у последњој једнакости да X тежи редом $A, \alpha A, \ldots, \alpha^{k-1}A$ добијамо (пошто су према условима теореме $a_1, \ldots, a_k$ међусобно различити) да је гранична вредност на десној страни једнакости (5) једнака редом $f'(a_1), \ldots, f'(a_k)$, чиме је једнакост (4) доказана.

На основу једнакости (4) и услова теореме $f'(a_i)\neq 0$ $(i=1, \ldots, k)$ непосредно закључујемо да је A фиксна тачка пресликавања Φ, тј. да важи једнакост: $\Phi(A)=A$.

Други корак. Доказујемо да су сви парцијални изводи првог реда по координатама функције $\Phi(X)$ једнаки нули у тачки A. За то је, према дефиницији те функције, довољно доказати да су сви парцијални изводи првог реда функције $\varphi(X)$ једнаки нули у тој тачки.

Према условима теореме следи да функција $\varphi(X)$ има све парцијалне изводе првог и другог реда у околини тачке A. Одређујемо парцијалне изводе првог реда (у околини тачке A).

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_1} = 1 - \frac{f'(x_1)}{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)\cdot \frac{\partial}{\partial x_1}[X]f} + f(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)\frac{\partial}{\partial x_1}[X]f}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_j} = f(x_1)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)\frac{\partial}{\partial x_1}[X]f}\right) \qquad (j=2, \ldots, k)$$

Користећи изведену једнакост (5), претходне једнакости могу се записати у облику:

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_1} = 1 - \frac{f'(x_1)}{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)\frac{\partial}{\partial x_1}[X]f} - f(x_1)\cdot\frac{f''(x_1)-f'(x_1)\sum\limits_{i\neq 1}\frac{1}{x_1-x_i}+\alpha_1}{[f'(x_1)+\beta]^2}$$

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_j} = f(x_1)\frac{\dfrac{f'(x_j)}{(x_j-x_1)}\dfrac{\prod\limits_{i\neq 1}(x_1-x_i)}{\prod\limits_{i\neq j}(x_j-x_i)}+\alpha_j}{[f'(x_1)+\beta]^2} \qquad (j=2, \ldots, k).$$

Где функције $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ теже нули када X тежи A. Прелазећи у горњим једнакостима на лимес, када $X\to A$, добијамо непосредно, користећи при том и доказану једнакост (4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(A)=0, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(A)=0.$$

Према дефиницији функције $\varphi(X)$ непосредно следи да су њени парцијални изводи првог реда једнаки нули и у тачкама $\alpha A, \ldots, \alpha^{k-1}A$. Према томе сви парцијални изводи првог реда по координатама функције $\Phi(X)$ су једнаки нули у тачки A.

Трећи корак. Према условима теореме парцијални изводи првог реда функције $\varphi(x)$ су диференцијабилни у околини тачке A, а парцијални изводи другог реда су ограничени у околини те тачке. То се лако може доказати користећи једнакост (5).

Како су парцијални изводи првог реда једнаки нули у тачки A, то за $\varphi(X)$ имамо, у околини тачке A, следећи Тајлоров развитак.

$$\varphi(X)=\varphi(A)+0(\|X-A\|^2)$$

а одатле за функцију $\Phi(X)$ добијамо

$$\|\Phi(X)-\Phi(A)\|=0(\|X-A\|^2).$$

Како је A фиксна тачка пресликавања Ф, то у околини тачке A важи:

$$\| \Phi(X) - A \| = 0 (\| X - A \|^2). \tag{6}$$

На основу једнакости (6) непосредно се закључује:

Постоји извесна околина V тачке A таква да низ A_i одређен условима (1), (2), (3) *постоји и да сви чланови тог низа припадају V, уколико је $A_0 \in V$* ($a_1(0), \ldots, a_k(0)$ *међусобно различити*).

Осим тога низ A_i конвергира ка вектору решења A и та је конвергенција квадратна.

Доказ теореме је завршен.

Захваљујем се др Душану Д. Адамовићу за низ корисних сугестија.

Рачунски примери

Пример 1. Нека је $f(x)$ следећи полином седмог степена

$$f(x) = 6x^7 - 107x^6 + 553x^5 - 88x^4 - 5764x^3 + 10929x^2 + 2709x - 13230.$$

Његови корени су -3, -1, 2, 7/3, 3, 7, 15/2. Одређујемо корене 2, 7/3, 3, користећи формуле (1) и (2). У овом случају је $k = 3$.

У „таблицама" које наводимо у првој колони налази се ознака за ред интерације. У првој врсти су почетне вредности a_0, b_0, c_0, у другој врсти су прве израчунате вредности a_1, b_1, c_1 итд. Символ $e+n$ $(n \in N)$ значи да је број који непосредно стоји испред њега помножен са 10^n.

1° Почетне вредности: $a_0 = 1$; $b_0 = 2{,}5$; $c_0 = 2{,}9$.

Вредности итерација:

(0)	0.10000000 e+01	0.25000000 e+01	0.29000000 e+01
(1)	0.23534808 e+01	0.24161684 e+01	0.29776401 e+01
(2)	0.16376929 e+01	0.26699287 e+01	0.30371492 e+01
(3)	0.18819405 e+01	0.24683282 e+01	0.29829280 e+01
(4)	0.19746533 e+01	0.23564455 e+01	0.30022519 e+01
(5)	0.19984392 e+01	0.23349207 e+01	0.29999734 e+01
(6)	0.19999926 e+01	0.23333412 e+01	0.29999989 e+01
(7)	0.20000000 e+01	0.23333341 e+01	0.29999991 e+01

2° Почетне вредности: $a_0 = 1{,}5$; $b_0 = 2{,}3$; $c_0 = 3{,}71$.

Вредности итерација:

(0)	0.15000000 e+01	0.23000000 e+01	0.37100000 e+01
(1)	0.18855122 e+01	0.23068071 e+01	0.31007324 e+01
(2)	0.19991346 e+01	0.23239351 e+01	0.30114682 e+01
(3)	0.20000157 e+01	0.23331593 e+01	0.30001565 e+01
(4)	0.19999999 e+01	0.23333339 e+01	0.29999989 e+01
(5)	0.20000000 e+01	0.23333338 e+01	0.29999988 e+01

3° Почетне вредности: $a_0 = 1{,}23$; $b_0 = 1{,}91$; $c_0 = 4$.

Вредности итерација:

(0)	0.12300000 e+01	0.19100000 e+01	0.40000000 e+01
(1)	0.23042366 e+01	0.18730140 e+01	0.32969047 e+01
(2)	0.23189042 e+01	0.19817669 e+01	0.30253276 e+01
(3)	0.23321036 e+01	0.20003810 e+01	0.30008901 e+01
(4)	0.23333333 e+01	0.19999987 e+01	0.30000001 e+01
(5)	0.23333341 e+01	0.20000000 e+01	0.29999989 e+01

Пример 2. $f(x)$ је следећи полином

$$f(x)=x^6+2x^5+\frac{17}{4}x^4+\frac{21}{4}x^3+\frac{19}{4}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}.$$

Његов једини реалан корен је $-\frac{1}{2}$ и он је двострук. Примењујемо формуле (1) и (2) за случај $k=2$.

1° Почетне вредности: $a_0=-1$; $b_0=0$.

Вредности итерација:

(0)	0.10000000 $e+01$	0.00000000 $e+00$
(1)	0.81250000 $e+00$	0.18181818 $e+00$
(2)	0.67780114 $e+00$	0.31952808 $e+00$
(3)	0.59394077 $e+00$	0.40563064 $e+00$
(4)	0.54777879 $e+00$	0.45219403 $e+00$
(5)	0.52399168 $e+00$	0.47600707 $e+00$
(6)	0.51200839 $e+00$	0.48799154 $e+00$
(7)	0.50600577 $e+00$	0.49399424 $e+00$
(8)	0.50300312 $e+00$	0.49699702 $e+00$
(9)	0.50150177 $e+00$	0.49849870 $e+00$
(10)	0.50075082 $e+00$	0.49924919 $e+00$
(11)	0.50037349 $e+00$	0.49962383 $e+00$
(12)	0.50018874 $e+00$	0.49981306 $e+00$
(13)	0.50009326 $e+00$	0.49990561 $e+00$

2° Почетне вредности: $a_0=0$; $b_0=10$.

Вредности итерација:

(0)	0.00000000 $e+00$	0.10000000 $e+02$
(1)	0.40056886 $e-05$	0.78980285 $e+01$
(2)	0.16209000 $e-04$	0.62103889 $e+01$
(3)	0.53349507 $e-04$	0.48523439 $e+01$
(4)	0.16621939 $e-03$	0.37553974 $e+01$
(5)	0.50855919 $e-03$	0.28636883 $e+01$
(6)	0.15450246 $e-02$	0.21208405 $e+01$
(7)	0.46875438 $e-02$	0.15168655 $e+01$
(8)	0.14371131 $e-01$	0.98409902 $e+00$
(9)	0.46496614 $e-01$	0.48743230 $e+00$
(10)	0.19812175 $e+00$	$-$0.95341521 $e-01$
(11)	$-$0.42188259 $e+00$	0.11300744 $e+00$
(12)	$-$0.41425580 $e+00$	$-$0.26918951 $e+00$
(13)	$-$0.36546672 $e+00$	$-$0.59960748 $e+00$
(14)	$-$0.44142784 $e+00$	$-$0.55741170 $e+00$
(15)	$-$0.47084257 $e+00$	$-$0.52914289 $e+00$
(16)	$-$0.48540298 $e+00$	$-$0.51459685 $e+00$
(17)	$-$0.49269870 $e+00$	$-$0.50730128 $e+00$
(18)	$-$0.49634911 $e+00$	$-$0.50365098 $e+00$
(19)	$-$0.49817421 $e+00$	$-$0.50182545 $e+00$
(20)	$-$0.49906745 $e+00$	$-$0.50091338 $e+00$
(21)	$-$0.49954373 $e+00$	$-$0.50045567 $e+00$
(22)	$-$0.49977193 $e+00$	$-$0.50027756 $e+00$
(23)	$-$0.49988702 $e+00$	$-$0.50011734 $e+00$
(24)	$-$0.49993734 $e+00$	$-$0.50005744 $e+00$

3° Почетне вредности: $a_0 = -13$; $b_0 = 7$.

Вредности итерација:

(0)	$-0.13000000\,e+02$	$0.70000000\,e+01$
(1)	$-0.10637227\,e+02$	$0.65090854\,e+01$
(2)	$-0.87316079\,e+01$	$0.58234919\,e+01$
(3)	$-0.71903747\,e+01$	$0.50594989\,e+01$
(4)	$-0.59392110\,e+01$	$0.43057384\,e+01$
(5)	$-0.49192002\,e+01$	$0.36062323\,e+01$
(6)	$-0.40837854\,e+01$	$0.29772655\,e+01$
(7)	$-0.33961634\,e+01$	$0.24207740\,e+01$
(8)	$-0.28271918\,e+01$	$0.19317197\,e+01$
(9)	$-0.23537480\,e+01$	$0.15019420\,e+01$
(10)	$-0.19574735\,e-01$	$0.11222517\,e+01$
(11)	$-0.16238686\,e+01$	$0.78381364\,e+00$
(12)	$-0.13417988\,e+01$	$0.47955582\,e+00$
(13)	$-0.11036161\,e+01$	$0.20621244\,e+00$
(14)	$-0.90608401\,e+00$	$-0.32695649\,e-01$
(15)	$-0.75101165\,e+00$	$-0.22430539\,e+00$
(16)	$-0.64152123\,e+00$	$-0.35347525\,e+00$
(17)	$-0.57416049\,e+00$	$-0.42545067\,e+00$
(18)	$-0.53752424\,e+00$	$-0.46246288\,e+00$
(19)	$-0.51881179\,e+00$	$-0.48118773\,e+00$
(20)	$-0.50941191\,e+00$	$-0.49058809\,e+00$
(21)	$-0.50470671\,e+00$	$-0.49529325\,e+00$
(22)	$-0.50235326\,e+00$	$-0.49764646\,e+00$
(23)	$-0.50117646\,e+00$	$-0.46882991\,e+00$
(24)	$-0.50058889\,e+00$	$-0.49941157\,e+00$
(25)	$-0.50029411\,e+00$	$-0.49970744\,e+00$
(26)	$-0.50014644\,e+00$	$-0.49985159\,e+00$
(27)	$-0.50007349\,e+00$	$-0.49992808\,e+00$

Пример 3. Нека је $f(x)$ следећа функција:

$$f(x) = e^x + x^2 - 2,$$

Она има две реалне нуле. Њихове приближне вредности су: $a \approx -1{,}3159$; $b \approx 0{,}5372$. Одређујемо те нуле помоћу формула (1) и (2); дакле, у овом случају је $k = 2$. Извод је одређиван по формули:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x = 0{,}001. \tag{7}$$

1° Почетне вредности: $a_0 = -1{,}5$; $b_0 = 0{,}5$.

Вредности итерација:

(0)	$-0.1500000\,e+01$	$0.5000000\,e+00$
(1)	$-0.1310064\,e+01$	$0.5344544\,e+00$
(2)	$-0.1315979\,e+01$	$0.5372795\,e+00$
(3)	$-0.1315981\,e+01$	$0.5372810\,e+00$

2° Почетне вредности: $a_0 = -1$; $b_0 = 0$.

Вредности итерација:

(0)	−0.1000000 e+01	0.0000000 e+00
(1)	−0.1499970 e+01	0.7309931 e+00
(2)	−0.1333347 e+01	0.5551524 e+00
(3)	−0.1316151 e+01	0.5374563 e+00
(4)	−0.1315974 e+01	0.5372475 e+00

3° Почетне вредности: $a_0 = -0{,}2$; $b_0 = 1$.

Вредности интерација:

(0)	−0.2000000 e+00	0.1000000 e+01
(1)	−0.7809612 e−00	0.2643520 e+01
(2)	−0.1448932 e+00	0.6718178 e+01
(3)	−0.1325077 e+00	0.5465687 e+01
(4)	−0.1316023 e+00	0.5373248 e+01

4° Почетне вредности: $a_0 = -10$; $b_0 = 12$.

Вредности итерације:

(0)	−0.1000000 e+02	0.1200000 e+02
(1)	−0.9986972 e+01	0.1095207 e+02
(2)	−0.9951209 e+01	0.9900541 e+01
(3)	−0.9856492 e+01	0.8844026 e+01
(4)	−0.9612180 e+01	0.7779442 e+01
(5)	−0.9028601 e+01	0.6701260 e+01
(6)	−0.7849633 e+01	0.5600254 e+01
(7)	−0.6073271 e+01	0.4464255 e+01
(8)	−0.4215428 e+01	0.3289340 e+01
(9)	−0.2788590 e+01	0.2130802 e+01
(10)	−0.1898367 e+01	0.1189426 e+01
(11)	−0.1454221 e+01	0.6835636 e+01
(12)	−0.1326419 e+01	0.5480287 e+01
(13)	−0.1316039 e+01	0.5373412 e+01

5° Почетне вредности: $a_0 = 10$; $b_0 = 15$.

Вредности итерација:

(0)	0.1000000 e+02	0.1500000 e+02
(1)	0.1003526 e+02	0.1375243 e+02
(2)	0.1013771 e+02	0.1239669 e+02
(3)	0.1049679 e+02	0.1073936 e+02
(4)	0.1810933 e+02	0.1801708 e+01
(5)	0.1704476 e+02	0.1801710 e+01
(6)	0.1597489 e+02	0.1801714 e+01
(7)	0.1489950 e+02	0.1801726 e+01
(8)	0.1381727 e+02	0.1801758 e+01
(9)	0.1272660 e+02	0.1801846 e+01
(10)	0.1162599 e+02	0.1802083 e+01
(11)	0.1051186 e+02	0.1802724 e+01
(12)	0.9379663 e+01	0.1804457 e+01
(13)	0.8220382 e+01	0.1809143 e+01
(14)	0.7018341 e+01	0.1821884 e+01
(15)	0.5737311 e+01	0.1857142 e+01
(16)	0.4291198 e+01	0.1960776 e+01
(17)	0.2391464 e+01	0.2341109 e+01
(18)	−0.4324633 e+02	0.4614632 e+02
(19)	−0.4324633 e+02	0.4513531 e+02
(20)	−0.4324633 e+02	0.4412449 e+02

(21)	$-0.4324633\,e+02$	$0.4311347\,e+02$
(22)	$-0.4324633\,e+02$	$0.4210218\,e+02$
(23)	$-0.4324633\,e+02$	$0.4109072\,e+02$
(24)	$-0.4324633\,e+02$	$0.4007969\,e+02$
(25)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3906780\,e+02$
(26)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3803618\,e+02$
(27)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3704428\,e+02$
(28)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3603245\,e+02$
(29)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3501958\,e+02$
(30)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3400717\,e+02$
(31)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3299494\,e+02$
(32)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3198167\,e+02$
(33)	$-0.4324633\,e+02$	$0.3096837\,e+02$
(34)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2995562\,e+02$
(35)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2894250\,e+02$
(36)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2792909\,e+02$
(37)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2691558\,e+02$
(38)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2590182\,e+02$
(39)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2488749\,e+02$
(40)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2387320\,e+02$
(41)	$-0.4324633\,e+02$	$0.2285836\,e+02$
(42)	$-0.4324631\,e+02$	$0.2184353\,e+02$
(43)	$-0.4324627\,e+02$	$0.2082846\,e+02$
(44)	$-0.4324616\,e+02$	$0.1981318\,e+02$
(45)	$-0.4324587\,e+02$	$0.1879775\,e+02$
(46)	$-0.4324508\,e+02$	$0.1778183\,e+02$
(47)	$-0.4324292\,e+02$	$0.1676571\,e+02$
(48)	$-0.4323705\,e+02$	$0.1574926\,e+02$
(49)	$-0.4322113\,e+02$	$0.1473246\,e+02$
(50)	$-0.4317794\,e+02$	$0.1371533\,e+02$
(51)	$-0.4306125\,e+02$	$0.1269788\,e+02$
(52)	$-0.4274837\,e+02$	$0.1167972\,e+02$
(53)	$-0.4192793\,e+02$	$0.1066081\,e+02$
(54)	$-0.3989470\,e+02$	$0.9640482\,e+01$
(55)	$-0.3547768\,e+02$	$0.8617731\,e+01$
(56)	$-0.2806158\,e+02$	$0.7590076\,e+01$
(57)	$-0.1944408\,e+02$	$0.6552096\,e+01$
(58)	$-0.1234218\,e+02$	$0.5492756\,e+01$
(59)	$-0.7563307\,e+01$	$0.4396239\,e+01$
(60)	$-0.4618155\,e+01$	$0.3255848\,e+01$
(61)	$-0.2885084\,e+01$	$0.2124521\,e+01$
(62)	$-0.1920461\,e+01$	$0.1196155\,e+01$
(63)	$-0.1459998\,e+01$	$0.6900934\,e+00$
(64)	$-0.1327085\,e+01$	$0.5487041\,e+00$
(65)	$-0.1316047\,e+01$	$0.5373497\,e+00$

Пример 4. $f(x)$ је функција:

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{4}\,x.$$

Она има две реалне нуле: $a \approx 1{,}4296$, $b \approx 8{,}6131$. Примењујемо формуле (1) и (2) за случај $k=2$. Извод $f'(x)$ одређује се помоћу формуле (7).

1° Почетне вредности: $a_0=1$; $b_0=2$.

Вредности итерација:

(0)	$0.1000000\,e+01$	$0.2000000\,e+01$
(1)	$0.1815227\,e+01$	$0.3000334\,e+01$
(2)	$0.6923690\,e+00$	$0.6483649\,e+01$
(3)	$0.1197244\,e+01$	$0.7782288\,e+01$
(4)	$0.1413845\,e+01$	$0.4864659\,e+01$
(5)	$0.1429615\,e+01$	$0.8610139\,e+01$
(6)	$0.1429612\,e+01$	$0.8613169\,e+01$

2° Почетне вредности: $a_0 = 0{,}25$; $b_0 = 4$.

Вредности итерација:

(0)	0.2500000 $e+00$	0.4000000 $e+01$
(1)	0.6952987 $e+00$	0.4789550 $e+01$
(2)	0.1251405 $e+01$	0.6195332 $e+01$
(3)	0.1437763 $e+01$	0.7891734 $e+01$
(4)	0.1429310 $e+01$	0.8569229 $e+01$
(5)	0.1429612 $e+01$	0.8612997 $e+01$
(6)	0.1429612 $e+01$	0.8613169 $e+01$

3° Почетне вредности: $a_0 = 4$; $b_0 = 10$.

Вредности итерација:

(0)	0.4000000 $e+01$	0.1000000 $e+02$
(1)	0.2860523 $e+01$	0.6254569 $e+01$
(2)	0.1349084 $e+00$	0.6636896 $e+01$
(3)	0.4350256 $e+00$	0.7157410 $e+01$
(4)	0.9356785 $e+00$	0.7803235 $e+01$
(5)	0.1331239 $e+01$	0.8377384 $e+01$
(6)	0.1426561 $e+01$	0.8597537 $e+01$
(7)	0.1426561 $e+01$	0.8597537 $e+01$

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, New York, 1966.

[2] S. B. Prešić, *Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes*, C. R. Acad. Sc. Paris, 262 (1966), 862—863.

[3] С. Б. Прешић, *Један итеративни поступак за факторизацију полинома*, Мат. весник, 5 (20) Св. 2, 1968, 205—216.

[4] M. Prešić, *Un procédé itératif pour déterminer k zéros d'un polynome*, C. R. Acad. Sc. Paris, 273 (1971), 446—449.

EIN ITERATIONSVERFAHREN ZUR GLEICHZEITIGEN BESTIMMUNG k REELLEN NÄHERUNGSLÖSUNGEN DER REELLEN GLEICHUNG

Marica D. Prešić

Zusammenfassung

In der Arbeit wird ein, mit den Gleichungen (1) und (2) definiertes Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Bestimmung der k reelen Näherungslösungen der reellen Gleichung (J) betrachtet. Es wird vorausgesetzt dass die Gleichung (J) mindestens k reelle Lösungen hat. Das Iterationsverfahren ist eine Verallgemeinerung *des Newton-Raphsonschen* (man erhält das von (1), (2) in dem Fall $k=1$), *S. B. Prešićschen* [2] Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Bestimmung aller Näherungslösungen einer algebrischen Gleichung (man erhält dies Verfahren von (1), (2) wenn $k=n$ und $f(x)$ ein reelles Polynom n's Grades ist) und *unseres Verfahren* [4] zur gleichzeitigen Bestimmung k Näherungslösungen einer algebraischen Gleichung die n reelle Lösungen hat.

Die Bedingungen unter welchen das betrachtete Iterationsverfahren konvergiert sind in dem Konvergenzsatz auf der Seite 301 gegeben.

Штампа Београдски-издавачко графички завод