D. D. ADAMOVIĆ

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS A CROISSANCE LENTE DE KARAMATA (I)

Математички весник
3 (18), Св. 2, 1966.

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
3 (18), 1966 стр. 123—136

Dušan D. Adamović

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE DE KARAMATA I

(Communiqué le 25 mars 1966)

0. Une fonction reelle $L(x)$ est dite *à croissance lente* si elle est définie et positive pour $x \geqslant 0$ et si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \tag{1}$$

pour tout $\lambda > 0$.

Les fonctions suivantes sont par exemple à croissance lente:

$$L(x) = \log(x+2) \qquad (x \geqslant 0);$$

$$L(x) = (\underbrace{\log\log\ldots\log}_{k \text{ fois}} x)^{\alpha} \qquad (x \text{ suffisamment grand; } \alpha \text{ réel});$$

$$L(x) = \log(x+2) + \sin x + 1 \qquad (x \geqslant 0);$$

$L(x)$ pour $x \geqslant 0$ fonction positive qui tend vers une limite positive finie lorsque $x \to +\infty$;

$$L(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{1 + |\log t|} \qquad (x > 0);$$

$$L(x) = \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right) \log(x+2) + \cos[x] \qquad (x \geqslant 0).$$

Ces exemples montrent qu'une fonction à croissance lente peut être mais n'est pas nécessairement monotone pour x suffisamment grand et qu'elle peut tendre vers l'infini positif, vers zéro ou vers une limite positive et finie, lorsque $x \to +\infty$. Dans se qui suit, nous allons montrer, entre autre. qu'elle peut aussi osciller pour $x \to +\infty$, même avec un intervalle d'oscillation infini.

La notion de fonction à croissance lente a été introduite par *J. Karamata* en 1930 [7] à la suite des travaux de *E. Landau* [9], *G. Polya* [11, 12] et *R. Schmidt* [13]. Les fonctions à croissance lente ont été appliquées depuis dans les généralisations des théorèmes abéliens et taubériens, de même que dans la théorie des séries trigonométriques et dans quelques autres questions particulières. On a obtenu aussi beaucoup de résultats concernant les fonctions à croissance lente elles-même.

Citons tout d'abord les résultats fondamentaux suivants:

0.1. *Soit $L(x)$ une fonction positive pour $x \geqslant 0$ et mesurable sur $[0, +\infty)$. Si l'égalité* (1) *est valable pour tout $\lambda \in E$, l'ensemble $E \subset (0, +\infty)$ étant à mesure positive, alors* (1) *est valable pour tout $\lambda > 0$ et l' on a* $\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1$ $(x \to +\infty)$ *uniformément pour $\lambda \in [a, b]$, où $0 < a < b < +\infty$.*

Ce théorème-là, fondamental pour la théorie et les applications des fonctions à croissance lente, a été démontré par *J. Karamata* [7, 8], mais seulement pour le cas spécial où la fonction $L(x)$ est continue et l'ensemble E est un intervalle. *J. Karamata* a déduit ce résultat de la représentation de fonction à croissance lente (0.2, cas particulier où la fonction $L(x)$ est continue). Le théorème a été démontré directement et pour le cas général de fonction mesurable par *T. van Aarden — Ehrenfest*, *N. G. de Bruijn* et *J. Korevar* [1], qui ont cependant conservé l'hypothèse restrictive sur *E. H. Delange* [6] et *W. Matuscewska* [10] ont donné des démonstrations directes de 0.1 sans aucune restriction.

0.1.1. *Corollaire. Une fonction à croissance lente qui est mesurable sur $[0, +\infty)$ est bornée, pour un $a > 0$ suffisamment grand, sur tout intervalle fini $[a, b]$ $(b > a)$ et par suite elle est intégrable dans le sens de Lebesgue sur chacun de tels intervalles.*

0.2. *(Théorème de représentation). Une foncion $L(x)$ mesurable sur $[0, +\infty)$ est à croissance lente si et seulement si l'on a*

$$L(x) = c(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt} \qquad (x \geqslant 0), \tag{2}$$

où $c(x)$ est une fonction positive et mesurable sur $[0, +\infty)$ qui tend vers une limite finie et positive lorsque $x \to +\infty$ et la fonction $\varepsilon(x)$ est continue pour $x \geqslant 0$ et tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$.

0.3. *Si la fonction $L(x)$ est à croissance lente et la fonction $L^+(x)$ est positive pour $x \geqslant 0$ et telle que $L^+(x) \sim L(x)$ $(x \to +\infty)$, alors la fonctions $L(x)$ est à croissance lente.*

0.4. *Si la fonction $L(x)$ est à croissance lente et mesurable sur $[0, +\infty)$ et si $\alpha > 0$, alors*

$$x^\alpha L(x) \to +\infty, \qquad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

0.5. 1° *Soit la fonction $L(x)$ à croissance lente et mesurable sur $[0, +\infty)$ et soit, pour $\alpha > 0$,*

$$\begin{aligned} \overline{L}_1(x) &= x^{-\alpha} \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^\alpha L(t)\}, & \overline{L}_2(x) &= x^\alpha \sup_{x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \\ \underline{L}_1(x) &= x^\alpha \inf_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, & \underline{L}_2(x) &= x^{-\alpha} \inf_{x \leqslant t < +\infty} \{t^\alpha L(t)\} \end{aligned} \qquad (x \geqslant 0), \tag{3}$$

où l'on attribue à chacune de ces fonctions la valeur 1 pour $x = 0$. Alors toutes les fonctions $\overline{\underline{L}}_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ sont à croissance lente et mesurables sur $[0, +\infty)$ et l'on a

$$\overline{\underline{L}}_\nu(x) \sim L(x) \qquad (x \to \infty;\ \nu = 1, 2).$$

2° *Soit la fonction $L(x)$ positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$. *Alors les relations*

$$\overline{L}_1(x) \sim L(x), \quad \overline{L}_2(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

ou bien les relations

$$\underline{L}_1(x) \sim L(x), \quad \underline{L}_2(x) \sim L(x) \qquad (x \to +\infty),$$

les fonctions $L_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ étant définies par (3), *entraînent que la fonction $L(x)$ est à croissance lente.*

0.5.1. *Soit la fonction $L(x)$ mesurable et positive sur* $[0, +\infty)$. *Pour qu'elle soit à croissance lente il faut et il suffit que pour tout $\alpha > 0$ existent deux fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ telles que l'on ait*

$$\varphi_1(x) \nearrow, \quad \varphi_2(x) \searrow \qquad (x \geqslant 0),$$

$$x^{\alpha} L(x) \sim \varphi_1(x), \quad x^{-\alpha} L(x) \sim \varphi_2(x) \qquad (x \to +\infty).$$

Dans les applications on emploie toujours les fontions à croissance lente mesurables (et par conséquent, d'après 0.1, intégrables sur des intervalles finis et suffisamment éloignés de zéro). Outre cela, dans toutes les applications connues ne sont essentielles que les propriétés des fonctions à croissance lente pour les valeurs de x suffisamment grandes. C'est pourquoi nous acceptons la convention suivante.

Convention. *Dans ce qui suit on va sous-entendre (sans l'énoncer explicitement) que toute fonction à croissance lente est mesurablə sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle* $[0, a]$ $(a > 0)$.

On pourra facilement voir lesquels des résultats à suivre sont valables sans ces hypothèses restrictives, c'est-à-dire pour le cas général de fonction à croissance lente.

Notons ici le fait suivant. Au sujet de 0.4 on pourrait être tenté de poser la question *si les conditions*

$$x^{\alpha} f(x) \to +\infty, \quad x^{-\alpha} f(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty\,;\ \alpha > 0) \tag{4}$$

sont suffisantes pour que la fonction $L(x)$, positive (et, par exemple, continue) pour $x \geqslant 0$, soit à croissance lente. La réponse est négative, comme le montre l'exemple de la fonction

$$f(x) = 2 + \sin x \qquad (x \geqslant 0),$$

qui est positive et continue (infiniment différenciable) pour $x \geqslant 0$ et statisfait à (4) et qui n'est pas cependant à croissance lente, puisque

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{2 + \sin 2x}{2 + \sin x}$$

ne tend pas vers 1 lorsque $x \to +\infty$.

Outre les propositions 0.1—0.5.1, on a obtenu beaucoup d'autres résultats relatifs aux fonctions à croissance lente. Dans les paragraphes suivants nous allons démontrer quelque résultats qui, à notre conuaissance, étaient jusqu'à présent inconnus, complètement ou partiellement, ou étaient connues sous des hypothèses plus restrictives. Les résultats sur les fonctions à croissance lente seront groupés en théorèmes I—VII et les énoncés auxiliares en lemmes I—V.

1. Dans quelques démonstrations nous aurons besoin des variantes suivantes des théoremes de *L'Hospital—Stolz*, analogues à quelques propositions dans le paragraphe 8 du chapitre I de [14].

LEMME I. *Soient les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies et intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini $[a, x]$ $(x>a)$, et soit $g(x)>0$ $(x\geqslant a)$. On a alors*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_a^x f(t)\,dt}{\int\limits_a^x g(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)},\qquad et\ \int\limits_a^{+\infty} g(t)\,dt=+\infty$$

pourvu que la limite au second membre existe, comme nombre fini on comme $\pm\infty$, *et que* $\int\limits_a^x g(t)\,dt\to+\infty$ $(x\to+\infty)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ fini et soit $\varepsilon>0$. Il existe alors un x_0 $(\geqslant a)$ tel que l'on a

$$\int\limits_a^t g(u)\,du>0,\quad L-\varepsilon<\frac{f(t)}{g(t)}<L+\varepsilon\qquad (t\geqslant x_0).$$

L'inégalité double peut être écrite sous la forme

$$(L-\varepsilon)\,g(t)<f(t)<(L+\varepsilon)\,g(t)\qquad (t\geqslant x_0),$$

d'où

$$(L-\varepsilon)\int\limits_{x_0}^x g(t)\,dt<\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt<(L+\varepsilon)\int\limits_{x_0}^x g(t)\,dt,\qquad (x\geqslant x_0).$$

On en déduit

$$(L-\varepsilon)\left[\int\limits_a^x g(t)\,dt-\int\limits_a^{x_0} g(t)\,dt\right]+\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt\leqslant\int\limits_a^x f(t)\,dt\leqslant$$

$$(L+\varepsilon)\left[\int\limits_a^x g(t)\,dt-\int\limits_a^{x_0} g(t)\,dt\right]+\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt,\qquad (x\geqslant x_0),$$

c'est-à-dire, puisque $\int\limits_a^x g(t)\,dt>0$ $\quad(x\geqslant x_0)$,

$$(L-\varepsilon)\left[1-\frac{\int\limits_a^{x_0} g(t)\,dt}{\int\limits_a^x g(t)\,dt}\right]+\frac{\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{\int\limits_a^x g(t)\,dt}\leqslant\frac{\int\limits_a^x f(t)\,dt}{\int\limits_a^x g(t)\,dt}\leqslant$$

$$(L+\varepsilon)\left[1-\frac{\int\limits_a^{x_0} g(t)\,dt}{\int\limits_a^x g(t)\,dt}\right]+\frac{\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt}{\int\limits_a^x g(t)\,dt}\qquad (x\geqslant x_0).$$

Si $x \to +\infty$, on en obtient

$$L-\varepsilon \leqslant \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} \leqslant L+\varepsilon,$$

et puis, faisant tendre ε vers zéro,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^x f(t)\,dt}{\int_a^x g(t)\,dt} = L.$$

La démonstration est semblable pour $L=-\infty$ et pour $L=+\infty$.

LEMME II. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient définies et intégrables dans le sens de Lebesque sur tout intervalle fini $[a, x]$ $(x>a)$, que l'on ait $g(t)>0$ $(t \geqslant a)$ et que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ soient finis. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} g(t)\,dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ soit fini et soit $\varepsilon>0$. Il existe alors un $x_0 \geqslant a$ tel que l'on a

$$L-\varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < L+\varepsilon, \qquad (t \geqslant x_0),$$

d'où l'on obtient successivement:

$$(L-\varepsilon)\, g(t) < f(t) < (L+\varepsilon)\, g(t), \qquad (t \geqslant x_0),$$

$$(L-\varepsilon) \int_x^{+\infty} g(t)\,dt < \int_x^{+\infty} f(t)\,dt < (L+\varepsilon) \int_x^{+\infty} g(t)\,dt \qquad (x \geqslant x_0),$$

$$L-\varepsilon < \frac{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} g(t)\,dt} < L+\varepsilon \qquad (x \geqslant x_0).$$

Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} f(t)\,dt}{\int\limits_x^{+\infty} g(t)\,dt} = L \qquad (x \geqslant x_0).$$

La démonstration est analogue pour $L = -\infty$ et pour $L = +\infty$.

LEMME III. *Soit $b_n > 0$ $(n=1, 2 \dots)$ et soient les series Σa_n et Σb_n convergents. On a alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu}{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} b_\nu} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

La démonstration est analogue à celle du lemme II.

2.

2.1. Quelques assertions du théorème suivant sont connues, mais elles ont été démontrées sous des hypothèses restrictives ou par des méthodes différentes de la nôtre. Plus présisément, les premières relations des assertions 1° et 2° sont citées sans démonstration et sous une forme différente dans [5]. Les assertions 3°—6° sont démontrées dans [14], mais seulement pour la classe de *Zygmund* des fonctions à croissance lente (voir 2.5) et par une méthode qui dépend essentiellement de la monotonie. Nous allons démontrer ici toutes les assertions par une méthode basée sur les lemmes I—III.

THÉORÈME I. *Soit $L(x)$ une fonction à croissance lente.*

1° *Si $\alpha < 1$, on a*

$$\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} L(x) \sim \int\limits_1^x t^{-\alpha} L(t)\,dt \sim \sum_{\nu\leqslant x} \nu^{-\alpha} L(\nu) \qquad (x\to+\infty),$$

et par conséquent

$$L(x) = o\left(\int\limits_1^x t^{-\alpha} L(t)\,dt\right) \qquad (x\to+\infty).$$

2° *Si $\alpha > 1$, on a*

$$\frac{1}{\alpha-1} x^{1-\alpha} L(x) \sim \int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt \sim \sum_{\nu\geqslant x} \nu^{-\alpha} L(\nu) \qquad (x\to+\infty)$$

et par conséquent

$$\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt = o\,(L(x)) \qquad (x\to+\infty).$$

3° *La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ et l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\,dt$ sont équiconvergentes.*

4° *On a*

$$L(x)=o\left(\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt\right)\qquad (x\to+\infty).$$

5° *Soit*

$$\sum\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}L(n)=+\infty,\quad S(x)\stackrel{\text{def}}{=}\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt,\quad S^*(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{\nu\leqslant x}\nu^{-1}L(\nu).$$

Alors

$$S(x)\sim S^*(x)\qquad (x\to+\infty).$$

6° *Soit*

$$\sum=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}L(n)<+\infty,\quad R(x)\stackrel{\text{def}}{=}\int_x^{+\infty}t^{-1}L(t)\,dt,\quad R^*(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{\nu\geqslant x}\nu^{-1}L(\nu).$$

Alors

$$L(x)=o\,(R(x)),\quad R(x)\sim R^*(x),\qquad (x\to+\infty).$$

DÉMONSTRATION. 1° D'après 0.3, pour $\alpha<1$ l'intégrale $\int_1^{+\infty}t^{-\alpha}L(t)\,dt$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}L(n)$ divergent. C'est pourquoi on obtient tout d'abord, mettant à profit 0.2 et le lemme I,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}L(x)}{\int_1^x t^{-\alpha}L(t)\,dt}=\frac{c}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}e^{\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}{\int_1^x t^{-\alpha}L(t)\,dt}$$

$$=\frac{c}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\alpha)x^{-\alpha}e^{\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}dt}+\varepsilon(x)x^{-\alpha}e^{\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}{x^{-\alpha}c(x)e^{\int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty}[1-\alpha+\varepsilon(x)]=1,$$

et puis, à l'aide du théorème de *Stolz* pour les suites,

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^n t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-\alpha}L(\nu)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{n-1}^{n}t^{-\alpha}L(t)\,dt}{n^{-\alpha}L(n)},$$

l'existence de la limite au second membre étant supposée. Si l'on pose

$$A(n)=\inf_{n-1\leqslant t\leqslant n}L(t),\qquad B(n)=\sup_{n-1\leqslant t\leqslant n}L(t),$$

on a

$$(6)\qquad \frac{A(n)}{L(n)}n^{\alpha}\frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\leqslant\frac{\int\limits_{n-1}^{n} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{n^{-\alpha}L(n)}\leqslant\frac{B(n)}{L(n)}n^{\alpha}\frac{n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Puisque, d'après 0.1,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{L(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{B(n)}{L(n)}=1,$$

on déduit de (6) $(n\to\infty)$

$$(7)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{n-1}^{n} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{n^{-\alpha}L(n)}=1.$$

D'après (5) et (7),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{1}^{n} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^{-\alpha}L(\nu)}=1.$$

Il reste à démontrer la relation asymptotique

$$\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt\sim\int\limits_{1}^{[x]} t^{-\alpha}L(t)\,dt\qquad (x\to+\infty).$$

Cette relation résulte de

$$\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt=\int\limits_{1}^{[x]} t^{-\alpha}L(t)\,dt+\int\limits_{[x]}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt$$

et du fait que l'on a, d'après 0.1 et le lemme I,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\int\limits_{[x]}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_{x-1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\int\limits_{1}^{x-1} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}\right]=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_{1}^{x-1} t^{-\alpha}L(t)\,dt}{\int\limits_{1}^{x} t^{-\alpha}L(t)\,dt}$$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^{-\alpha}L(x-1)}{x^{-\alpha}L(x)}=0.$$

2° D'après 0.3, pour $\alpha>1$ l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt$ et la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-\alpha} L(\nu)$ convergent. C'est pourquoi l'on a, d'après 0.2 et le lemme II,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\frac{1}{\alpha-1} x^{1-\alpha} L(x)} = (\alpha-1)\frac{1}{c}\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{x^{1-\alpha} e^{\int\limits_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}$$

$$=(\alpha-1)\frac{1}{c}\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^{-\alpha} L(x)}{[(1-\alpha)x^{-\alpha}+x^{-\alpha}\varepsilon(x)]\, e^{\int\limits_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}}$$

$$=(1-\alpha)\frac{1}{c}\lim_{x\to+\infty} \frac{c(x)}{1-\alpha+\varepsilon(x)}=1.$$

D'après le leme III,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_n^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,bt}{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-\alpha} L(\nu)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \int\limits_{\nu}^{\nu+1} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} \nu^{-\alpha} L(\nu)}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_n^{n+1} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{n^{-\alpha} L(n)}=1,$$

où la dernière égalité peut être démontrée de la même manière que l'égalité (7). Enfin,

$$\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt = \int\limits_{[x]}^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt - \int\limits_{[x]}^{x} t^{-\alpha} L(t)\,dt$$

et, d'après 0.1 el le lemme II,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\int\limits_{[x]}^{x} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_{x-1}^{x} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\int\limits_{x-1}^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt}{\int\limits_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^{-\alpha} L(x-1)}{x^{-\alpha} L(x)}-1=0;$$

donc,

$$\int_x^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt \sim \int_{[x]}^{+\infty} t^{-\alpha} L(t)\,dt \qquad (x \to +\infty).$$

3° Posons

$$C(x) = \sup_{x \leq t < +\infty} \{t^{-\frac{1}{2}} L(t)\}.$$

On a $C(x) \searrow (x > 0)$ et, par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} C(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} C(t)\,dt$ sont équiconvergentes. Puisque, d'après 0.5,

$$C(x) \sim x^{-\frac{1}{2}} L(x) \qquad (x \to \infty),$$

on peut dire le même des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} C(n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$$

et aussi des intégrales

$$\int_1^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} C(t)\,dt \quad et \quad \int_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\,dt,$$

d'où notre assertion.

4° *Si* $\sum = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = +\infty$, on a, d'après le lemme I,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(x)}{\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt} = c \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}{\int_1^x t^{-1} L(t)\,dt}$$

$$= c \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-1} \varepsilon(x)\, e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt}}{x^{-1} L(x)} = \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Si $\sum < +\infty$, l'assertion résulte immédiatement de 6°.

La démonstration de 5° est semblable à celle de 1° et celle de 6° à celle de 2°.

2.2. Voici quelques résultats élémentaires sur les fonctions à croissance lente, non contenus dans la litterature qui nous est connue et que nous groupons dans le théorème suivant.

THÉORÈME II. 1° *Si les fonctions* $L_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *sont à croissance lente et* $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est une fonctions rationnelle à coefficients positifs, alors la fonction*

$$L(x) = R(L_1(x), L_2(x), \ldots, L_n(x))$$

est à croissance lente.

2° *Si* $L(x)$ *est une fonction à croissance lente et* $r(x)$ *une fonction rationnelle qui tend vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$, *alors la fonction* $L_1(x)$, *définie pour* x *suffisamment grand par*

$$L_1(x) = L(r(x)),$$

devient à croissance lente si l'on la définie pour les autres valeurs de $x \geqslant 0$ *d'une manière convenable.*

3° *Soient* $L_1(x)$ *et* $L_2(x)$ *deux fonctions à croissance lente et soit* $L_1(x)$ *continue et* $\lim\limits_{x\to+\infty} L_2(x) = +\infty$. *Alors la fonction* $L(x) = L_1(L_2(x))$ *est à croissance lente. Donc, l'ensemble de toutes les fonctions à croissance lente et continues qui tendent vers* $+\infty$ *avec* x *est fermé par rapport aux opérations d'addition, de multiplication et de substitution de fonctions.*

4° *Une fonction à croissance lente peut lorsque* $x \to +\infty$ *osciller et cela avec un intervalle d'oscillation fini ou infini.*

5° *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente, alors les fonctions* $L_1(x)$ *et* $L_2(x)$, *positives et mesurables sur* $[0, +\infty)$ *et définies pour* x *suffisamment grand par*

$$L_1(x) = x^{-1}\int_1^x L(t)\,dt, \qquad L_2(x) = \int_1^x t^{-1} L(t)\,dt,$$

sont à croisance lente, de même que la fonction $L_3(x)$ *positive et mesurable sur* $[0, \infty)$ *et définie, sous l'hypothèse* $\int_1^{+\infty} t^{-1} L(t)\,dt < +\infty$, *pour* x *suffisamment grand par*

$$L_3(x) = \int_x^{+\infty} t^{-1} L(t)\,dt$$

6° *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente, alors les fonctions* $K_1(x)$ *et* $K_2(x)$ *définies pour* x *suffisamment grand par*

$$K_1(x) = \int_1^x L(t)\,dt, \qquad K_2(x) = L'(x)$$

ne peuvent pas être à croissance lente.

DÉMONSTRATION. 1° Il est évident que le produit et le quotient de deux fonctions à croissance lente sont fonctions à croissance lente. Or, on peut dire le même de la somme. Soient, en effet, $L_1(x)$ et $L_2(x)$ deux fonctions à croissance lente et soit $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$. On a alors, pour un $\lambda > 0$ fixé,

$$L_\nu(\lambda x) = L_\nu(x) + \varepsilon_\nu(x)\, L_\nu(x) \quad (x \geqslant 0), \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon_\nu(x) = 0 \quad (\nu = 1, 2).$$

En posant $\varepsilon_3(x) = \max\{|\varepsilon_1(x)|, |\varepsilon_2(x)|\}$, on obtient

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 + \frac{\varepsilon_1(x)\, L_2(x) + \varepsilon_2(x)\, L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)} = 1 + \varepsilon(x),$$

avec

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{|\varepsilon_1(x)|\, L_1(x) + |\varepsilon_2(x)|\, L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)} = \varepsilon_3(x) \to 0 \; (x \to +\infty);$$

donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

2° Sous les hypothèses, on a $r(x) \sim ax^n$ $(x \to +\infty;\ a>0,\ n$ nombre naturel), ce qui veut dire

$$r(x)=c(x)\,ax^n,\ \lim_{x\to+\infty} c(x)=1.$$

Nous avons donc, d'après 0.1, pour un $\lambda>0$ fixé et pour x suffisamment grand,

$$\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)}=\frac{L(r(\lambda x))}{L(r(x))}=\frac{L(c(\lambda x)\,a\,\lambda^n x^n)}{L(c(x)\,ax^n)}$$

$$=\frac{L\left(\dfrac{c(\lambda x)}{c(x)}\lambda^n\cdot a\,c(x)\,x^n\right)}{L(ac(x)\,x^n)}\to 1,\quad (x\to+\infty),$$

puisque, pour x suffisamment grand,

$$\frac{1}{2}\lambda^n<\frac{c(\lambda x)}{c(x)}\lambda^n<2\,\lambda^n.$$

3° Sous les conditions formulées, la fonction $L(x)$ est définie, positive et mesurable sur $[0,+\infty)$. Soit $\lambda>0$ fixé. Il existe alors un $x_0\geqslant 0$ tel que l'on a pour $x\geqslant x_0$

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)}\leqslant 2.$$

On a alors, d'après 0.1 et d'après $L_2(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L(\lambda x)}{L\ (x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{L_1\left(\dfrac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)}\cdot L_2(x)\right)}{L_1(L_2(x))}=1.$$

4° L'assertion qu'une fonction à croissance lente peut osciller (ne pas tendre vers une limite finie on infinite) peut être prouvée par l'exemple de la fonction $L(x)$ définie pour $x\geqslant 1$ par

$$L(x)=e^{\int\limits_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}}$$

avec

$$\varepsilon(x)=\frac{\eta(x)}{1+\log x},$$

où la fonction $\eta(x)$ est définie comme il suit. Soit

$$x_1=3,\quad x_{n+1}=e^{e-1}(x_n+1)^e+1\ (n=1,\ 2,\ \ldots);$$

on a $x_n\geqslant x_1=3$ et par suite

(8) $$x_{n+1}-x_n=x_n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\right)>3\cdot(e^{e-1}-1)>3\ (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Posons

$$\eta(x)=\begin{cases} x-x_{2\nu-1} & (x_{2\nu-1}-1<x<x_{2\nu-1}+1), \\ 1 & (x_{2\nu-1}+1\leqslant x\leqslant x_{2\nu}-1), \qquad (\nu=1,2,3,\ldots) \\ -x-x_{2\nu} & (x_{2\nu}-1<x<x_{2\nu}+1), \\ -1 & (x_{2\nu}+1\leqslant x\leqslant x_{2\nu+1}-1 \quad \text{et } 1\leqslant x\leqslant 2) \end{cases}$$

Cette définition est, d'après (8), non contradictoire. La partie de la courbe $z=\eta(x)$ corre pondante à l'intervale $[x_{2\nu-1}-1,\ x_{2\nu+1}+1]$ est présentée par la figure 1. Evidemment, la fonction $\eta(x)$ est continue. La suite

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{|\eta(t)|}{t(1+\log t)}\,dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\int\limits_{x_k+1}^{x_{k+1}-1}\frac{dt}{t(1+\log t)}+\left(\int\limits_{x_k}^{x_k+1}+\int\limits_{x_{k+1}-1}^{x_{k+1}}\right)\frac{|\eta(t)|}{t(1+\log t)}\,dt\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(1+\alpha_k) \qquad (\alpha_k\downarrow 0,\ k\to\infty)$$

oscille: elle a deux points d'accumulation, à savoir α et $1+\alpha$, avec $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\alpha_k$ (>0). Il s'ensuit que la fonction $L(x)$ oscille aussi, avec un intervalle fini d'oscillation. C'est par quelques modifications de cet exemple-là que l'on peut former une fonction à croissanae lente qui oscille avec un intervalle d'oscillation infini.

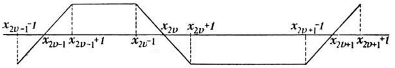

Fig. I

5° Les fonctions $L_\nu(x)$ $(\nu=1,2)$ sont positives sur $[0,+\infty)$. On a, d'après le lemme I et le théorème I,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)}=\frac{1}{\lambda}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_1^{\lambda x}L(t)\,dt}{\int\limits_1^{x}L(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_1^{x}L(\lambda t)\,dt}{\int\limits_1^{x}L(t)\,dt}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=1$$

et pareillement, sous l'hypothèse $\int\limits_1^{+\infty}t^{-1}L(t)\,dt=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{\lambda x} t^{-1}L(t)\,dt}{\int_1^{x} t^{-1}L(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^{x} t^{-1}L(\lambda t)\,dt}{\int_1^{x} t^{-1}L(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{L(\lambda x)}{L(x)}=1.$$

Dans le cas contraire, $\lim_{x\to+\infty} L_2(x)$ est nombre positif et fini, de sorte que $L_2(x)$ est de nouveau à croisance lente.

On démontre de manière analogue, à l'aide du lemme II, que la fonction $L_3(x)$ est à croisance lente.

6° On a, selon 5°,

$$x^{-\frac{1}{2}}K_1(x)=x^{\frac{1}{2}}L_1(x)\to+\infty \qquad (x\to+\infty)$$

et par conséquent la fonction $K_1(x)$, d'après 0.4, ne peut pas être à croissance lente.

Si la fonction $K_2(x)$ était à croissance lente, elle serait pour tout $x\geqslant 0$ finie et intégrable sur tout intetvalle fini contenu dans $[0, +\infty)$. On aurait alors, avec un a>0 suffisamment grand,

$$L(x)=\int_a^x K_2(t)\,dt+L(a) \quad (x>a),$$

où, d'après le résultat précédent, la fonction $\int_a^x K_2(t)\,dt$, positive pour $x>a$, ne serait pas à croissance lente et l'on aurait par conséquent $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x K_2(t)\,dt=+\infty$.

Il en résulterait alors que la fonction $L(x)$ ne soit pas à croissance lente. Centre contradiction prouve l'assertion sur K_2.

2.2.1. On peut remarquer que l'assertion 4° du théorème entraîne le corollaire suivant: *une fonction à croissance lente n'a pas nécessairement le comportement asymptotique d'une fonction monotone.* Ce fait a été démontré dans [7] par un exemple patriculier.

(A suivre.)

DUŠAN D. ADAMOVIĆ

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE DE KARAMATA (II)

Математички весник
3 (18) Св. 3, 1966

МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
3 (18), 1966, стр. 161 — 172

Dušan D. Adamović

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE DE KARAMATA II

(Suite)*

(Communiqué le 25. mars 1966)

2.3. Le théorème suivant trouve des applications dans les démonstrations de quelques théorèmes sur les séries trigonométriques (voir [2] et [3]). Pour $L(x) \equiv 1$ il se réduit au lemme de *B. Sz.-Nagy* dans [4]. Son assertion 1° (sous titre de lemme) a été publiée, avec une démonstration un peu plus longue, dans l'article [2] de l'auteur.

THÉORÈME III. *Soit la fonction* $f(x)$ *non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle* $(0, \delta)$ $(\delta > 0)$, *et soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente et* $\alpha > 0$. *Alors*:

1° *La convergence (vers une limite finie) de l'une des intégrales*

$$\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \tag{9}$$

entraîne la convegence de l'autre et que

$$f(x) \int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dt \to 0 \qquad (x \to 0). \tag{10}$$

2° *Sous l'hypothèse*

$$\int_{1}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt < +\infty,$$

la convergence de l'une des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \tag{11}$$

* La première partie de cet article, sous le même titre, a été publiée dans ce Bulletin, t. 3 (18) 1966, pp. 123—136.

entraîne la convergence de l'autre et que

$$R\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

Nous rappelons que $R(x)$ est défini dans 2.1.

DÉMONSTRATION. 1° On peut supposer que $f(x) \geqslant 0$ $(0 < x \leqslant \delta)$, les deux intégrales (9) étant automatiquement finies et la condition (10) satisfaite pour $f(x)$ constant. On a, d'après l'assertion 2° du théorème I,

$$\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} t^{-\alpha-1} L(t)\, dt \sim \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Il en résulte l'équiconvergence des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{\delta}\left[\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] df(x).$$

D'autre part, pour $0 < \varepsilon < \delta$ on obtient, en intégrant par parties,

$$\int_{\varepsilon}^{\delta}\left[\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\,[-f(x)] = -f(\delta)\int_{+0}^{\delta} x^{a-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$+ f(\varepsilon)\int_{+0}^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

$$\leqslant \int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx - \quad f(\delta)\int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

On en déduit l'equiconvergence des intégrales

$$\int_{+0}^{\delta}\left[\int_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d[-f(x)] \quad \text{et} \quad \int_{+0}^{\delta} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

et puis, d'après le résultat précédent, l'équiconvergence des intégrales (9). Il en résulte enfin que la convergence de l'une de ces deux intégrales entraîne

$$0 \leqslant f(\varepsilon) \int_{+0}^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx \leqslant \int_{+0}^{\varepsilon} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0.)$$

2° On peut supposer, par la même raison que sous 1°, que l'on a dans ce cas $f(x) \geqslant 0$ $(0 < x \leqslant \delta)$. Alors, pour $0 < \varepsilon < \delta$,

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) d\ [-f(x)] \quad = R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon) - R\left(\frac{1}{\delta}\right) f(\delta)$$

$$(12) \qquad + \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \geqslant \int_{\varepsilon}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx - R\left(\frac{1}{\delta}\right) f(\delta).$$

On en déduit que la convergence de la première des intégrales (11) entraîne la convergence de la seconde. La convergence de la seconde intégrale (11) entraîne, cependant,

$$0 \leqslant R\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon) = f(\varepsilon) \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt = f(\varepsilon) \int_{+0}^{\varepsilon} t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\leqslant \int_{+0}^{\varepsilon} t^{-1} L\left(\frac{1}{t}\right) f(t)\, dt \to 0 \qquad (\varepsilon \to +0).$$

et par suite, d'après (12), la convergence de la première des intégrales (11).

2.4. Le théorème suivant, entre autre, implique que dans toutes les considérations concernant les propositions dans la théorie des séries trigonometriques où interviennent les fonctions à croissance lente on peut supposer, sans restreindre la généralité, que toute fonction à croissance lente $L(x)$ en question a pour $x \geqslant 0$ autant de dérivées que l'on veut et de même que, dès que l'on introduit une condition de monotonie ou de convexité relative à $L(x)$, il n'importe si l'on y soumet $L(x)$ ou seulement la suite correspondante $L(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

THÉORÈME IV. *Pour toute fonction à croissance lente $L(x)$ il existe une fonction à croissance lente et infiniment différenciable $L_0(x)$ telle que l'on ait:*

1° $L_0(x) \sim L(x)$ $\qquad (x \to +\infty)$.

2° $L_0(n) = L(n)$ $\qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$.

3° *Si la fonction $L(x)$ est monotone, pour $x \geqslant 0$ ou pour x suffisamment grand, alors $L_0(x)$ a la même propriété.*

4° *La proposition correspondante concernant la convexité est aussi vraie,* Pour la démonstration nous avons besoin de deux lemmes:

LEMME IV. *Soit $a<b$, $A<B$. Il existe alors une fonction $F(x)$ qui est:*

1° *partout infiniment différenciable;*

2° *strictement monotone dans $[a, b]$;*

2° *aves la propriété*

$$F(x)=A \quad (x \leqslant a), \qquad F(x)=B \quad (x \geqslant b).$$

(Voir la figure 2.)

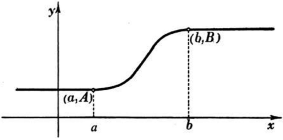

Fig. 2

DÉMONSTRATION. Les propriétés énumérées appartiennent à la fonction

$$F(x)=\begin{cases} A & (x<a) \\ G(x) & (a \leqslant x \leqslant b) \\ B & (x>b), \end{cases}$$

avec

$$G(x)=(B-A)\frac{\int\limits_a^x e^{-\frac{1}{(t-a)(b-t)}}\,dt}{\int\limits_a^b e^{-\frac{1}{(t-a)(b-t)}}\,dt}+A.$$

LEMME V.

Soit

(13) $$a<b, \ \alpha<\frac{B-A}{b-a}<\beta.$$

Il existe une fonction $H(x)$ qui est:

1° *partout infiniment différenciable;*

2° *convexe dans l'intervalle $[a, b]$;*

3° *avec la propriété*

$$H(x)=A+\alpha(x-a) \quad (x \leqslant a), \qquad H(x)=B+\beta(x-b) \quad (x \geqslant b).$$

(Voir la figure 3.)

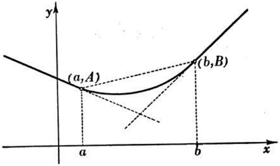

Fig. 3

DÉMONSTRATION. Posons

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}} & (a<x<b) \\ 0 & (x=a,\ x=b), \end{cases}$$

(14) $$f(x)=\gamma\int_a^x dt\int_a^t g(u)\,e^{p(u)}du+\delta(x-a)+\varepsilon \qquad (a\leqslant x\leqslant b),$$

où la fonction $p(u)$ est infiniment différenciable. Cette fonction-là et les constantes γ, δ et ε peuvent être déterminées de manière que l'on ait

(15) $$f(a)=\varepsilon=A,\quad f(b)=\gamma\int_a^b dt\int_a^t g(u)\,e^{p(u)}du+\delta(b-a)+\varepsilon=B,$$

$$f'(a)=\delta=\alpha,\ f'(b)=\gamma\int_a^b g(u)\,e^{p(u)}du+\delta=\beta.$$

Ces équations-là se réduisent à

$$\varepsilon=A,\quad \delta=\alpha,$$

(16) $$\begin{aligned} &\gamma\int_a^b dt\int_a^t g(u)\,e^{p(u)}du=B-A-\alpha(b-a)\ (=M), \\ &\gamma\ (b-a)\int_a^b g(u)\,e^{b(u)}du=(\beta-\alpha)(b-a)\ \ (=N). \end{aligned}$$

D'après (13), on a

$$M>0,\qquad M-N=B-A-\beta\ (b-a)<0;$$

donc,

$$0<M<N.$$

D'après (16), on a alors

$$(17) \qquad \omega(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du}{\int_a^b dt \int_a^b g(u)\, e^{p(u)}\, du} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \in (0,\ 1).$$

La fonctionnelle ω: $P \to (0,\ 1)$ (P espace de toutes les fonctions réelles infiniment differenciables dans $[a,\ b]$) prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0,\ 1)$. En effet, soit tout d'abord $p\,(u)$ une fonction infiniment différenciable dans $[a,\ b]$ et avec la propriété ($0<\mu<b-a$, $0<\eta<b-a-\mu$, $m>0$)

$$p(u) = \begin{cases} 1 & (a \leqslant u \leqslant a+\mu), \\ \text{monotone pour } a+\mu \leqslant u \leqslant a+\mu+\eta \\ -m & (a+\mu+\eta \leqslant u \leqslant b). \end{cases}$$

L'existence d'une telle fonction est assurée par le lemme IV. On a alors

$$\omega(p) = \frac{\int_a^{a+\mu} dt e \int_a^t g(u)\, du + \int_{a+\mu}^{a+\mu+\eta} dt \int_a^t g(u)\, e^{p(u)}\, du + e^{-m} \int_{a+\mu+\eta}^{b} dt \int_a^t g(u)\, du}{\mu e \int_a^b g(u)\, du + \eta \int_a^b g(u)\, e^{p(u)}\, du + e^{-m}(b-a-\mu-\eta) \int_a^b g(u)\, du}.$$

En faisant tendre d'abord η vers zéro et puis m vers $+\infty$, on établit que $\omega\,(p)$ peut être aussi proche que l'on veut de

$$\frac{\int_a^{a+\mu} dt \int_a^t g(u)\, du}{\mu \int_a^b g(u)\, du} \qquad (0<\mu<b-a),$$

c'est-à-dire, puisque

$$\lim_{\mu \to +0} \frac{\int_a^{a+\mu} dt \int_a^t g(u)\, du}{\mu \int_a^b g(u)\, du} = \lim_{\mu \to +0} \frac{\int_a^{a+\mu} g(u)\, du}{\int_a^b g(u)\, du} = 0,$$

que $\omega\,(p)$ peut être aussi proche que l'on veut de 0. On démontre pareillement le même fait pour la valeur 1. Donc, l'espace P étant connexe et la fonctionnelle ω continue, on conclut que $\omega\,(p)$ prend toute valeur entre 0 et 1.

Il résulte du fait qu'on vient de démontrer que (17) est satisfait pour une fonction $p\,(u)$. On obtient alors de la première équation (16) la valeur positive pour γ. La fonction $f\,(x)$ donnée par (14), avec les constantes γ, δ, ε et la fonction $p\,(u)$ ainsi déterminées, remplit alors toutes les conditions (15) et

$$f''(x) = \gamma\, g(x)\, e^{p(x)} > 0 \qquad (a<x<b).$$

On en conclut immédiatement que la fonction

$$H(x)=\begin{cases}\alpha(x-a)+A & (x<a)\\ f(x) & (a\leqslant x\leqslant b)\\ \beta(x-b)+B & (x>b)\end{cases}$$

possède toutes les propriétés demandées.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV. Désignons par $G_n(x)$ la fonction $G(x)$ de la démonstration du lemme IV, avec $a=n$, $b=n+1$, $A=\min\{L(n), L(n+1)\}$, $B=\operatorname{Max}\{L(n),\ L(n+l)\}$, sous la condition $L(n)\neq L(n+l)$, et posons

$$L_0(x)=\begin{cases}G_n(x) & , \quad si\ L(n)<L(n+l)\\ L(n) & , \quad si\ L(n)=L(n+1)\\ G_n(2n+1-x) & , \quad si\ L(n)>L(n+l)\end{cases}\qquad (n\leqslant x\leqslant n+1;\ n=1,\ 2,\dots).$$

La fonction $L_0(x)$ remplit évidemment la condition 2° et croît strictement, reste constante ou décroît strictement dans l'intervalle $[n, n+1]$ suivant que l'on a $L(n)<L(n+1)$, $L(n)=L(n+1)$ ou $L(n)>L(n+1)$. Il en résulte que $L_0(x)$ remplit la condition 3° et que l'on a, pour $x\geqslant 0$,

$$A(x)\overset{\text{def}}{=}\inf_{[x]\leqslant t\leqslant[x]+1} L(t)\leqslant L_0(x)\leqslant \sup_{[x]\leqslant t\leqslant[x]+1} L(t)\overset{\text{def}}{=}B(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{A(x)}{L(x)}\leqslant\frac{L_0(x)}{L(x)}\leqslant\frac{B(x)}{L(x)}.$$

Il s'ensuit, d'après 0.1, que $L_0(x)\sim L(x)$ $(x\to+\infty)$. Enfin, d'après le lemme IV, la fonction $L_0(x)$ est infiniment différenciable.

Si la fonction $L(x)$ est convexe et monotone (la convexité pour x suffisamment grand entraîne la monotonie pour x suffisamment grand) pour $x\geqslant m$ (m nombre naturel ou zéro), alors la fonction $L_0(x)$ sera convexe pour $x\geqslant m$ et possédera toutes les autres propriétés demandées si on la construit, pour $x\geqslant m$, come il suit (voir la figure 4). Supposons qu'il s'agit de la convexité stricte de $L(x)$ pour $x\geqslant m$. Posons $M_\nu=(\nu,\ L(\nu))$ $(\nu=1,\ 2,\dots)$ et traçons la droite p_m située à droite de $x=m$ au dessous de la droite $M_m\ M_{m+1}$ et montant ou descendant avec cette droite-là. Si l'on fixe un point P_m sur p_m entre les droites $x=m$ et $x=m+1$ et suffisamment proche du point P_m, alors les segments $M_m\ M_{m+1}$ et $M_{m+1}\ M_{m+2}$ sont situés du même côté de la droite $P_m\ M_{m+1}$ et montent ou descendent avec elle. En choisissant sur la dernière droite, entre les droites $x=m+1$ et $x=m+2$, un point P_{m+1} suffisamment proche de M_{m+1} on obtient la droite $P_{m+1}\ M_{m+2}$ telle que les segments $M_{m+1}\ M_{m+2}$ et $M_{m+2}\ M_{m+3}$ sont situés du même côté de cette droite et montent ou descendent avec elle. Continuant ainsi, on obtient une ligne polygonale C: $M_m\ P_m\ P_{m+1}\cdots$ qui a pour $x\geqslant m$ l'équation $y=1\ (x)$ avec la fonction $1\ (x)$ possédant les propriétés 1°—4°. En „arrondissant" la ligne C aux voisinages des points P_m, $P_{m+1},\dots$, par les parties curvilignes suffisamment petites, dans le sens du lemme V, on obtiendra la ligne courbe $y=L_0(x)$ $(x\geqslant m)$, où la fonction $L_0(x)$ est infiniment différenciable et possède toutes les propriétés 1°—4°. On peut procéder pareillement dans le cas où la convexité n'est pas stricte.

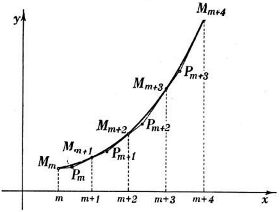

Fig. 4

2.5. Désignons par $\mathcal{K}$ la classe de toutes les fonctions à croissance lente. C'est à la classe suivante de fonctions réelles, définie et appliquée par *A. Zygmund* dans [14] (page 299 et plus loin), que nous donnons, de même que *R. Bojanić* et *J. Karamata* dans [5], le nom de *classe de Zygmund de fonctions à croissance lente.*

DÉFINITION. *On dit qu'une fonction* $K(x)$, *positive et mesurable sur* $[0+\infty]$ *et bornée sur tout intervalle fini à droite de* $x=0$, *appartient à la classe de Zygmund de fonctions à croissance lente si, pour tout* $\delta>0$,

$$x^{\delta}\, K(x) \nearrow, \quad x^{-\delta} K(x) \searrow \quad (x \textit{ suffisamment grand}).$$

Nous désignons cette classe par $\mathcal{K}_0$.

2.5.1. On peut démontrer sans difficulté l'inclusion $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, ce qui justifie le nom de la classe $\mathcal{K}_0$. On a démontré aussi dans [5], par un exemple, que $\mathcal{K}_0$ *est un vrai sous-ensemble de* $\mathcal{K}$. Nous allons démontrer cependant les assertions suivantes plus précises:

THÉORÈME V. 1° *Il existe une fonction à croissance lente* $L(x)$ *telle que pour aucun* $\delta>0$ *on n'a ni*

(18) $$x^{\delta}\, L(x) \nearrow \quad (x \textit{ suffisamment grand}),$$

ni

(19) $$x^{-\delta}\, L(x) \searrow \quad (x \textit{ suffisamment grand}).$$

2° *Il existe une fonction à croissance lente et croissante telle que (19) n'est valable pour aucun* $\delta>0$.

3° *Il y a des fonctions à croissance lente telles que (18) ou (19) est valable pour quelques valeurs de* δ *et pour quelque'unes ne l'est pas.*

DÉMONSTRATION. 1° Toutes les fonctions de la forme

$$L(x)=\left(1+\frac{\sin x^2}{x}\right)e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt} \qquad (x>0),$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction continue et tendant vers zéro quand $x\to+\infty$, possèdent la propriété en question. En effet, pour aucun $\alpha\neq 0$ la dérivée

$$[x^\alpha L(x)]'=\left[(x^\alpha+x^{\alpha-1}\sin x^2)\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}\right]'$$

$$=x^{\alpha-1}[\alpha+2x\cos x^2+o(1)]\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt}$$

n'a un signe constant pour x suffisamment grand.

2° Posons

$$\eta(x)=\begin{cases} n^{\frac{1}{2}} & (n^2\leqslant x\leqslant n^2+1)\\ 0 & (n^2+1<x<(n+1)^2)\end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\dots),$$

$$c(x)=e^{\int_1^x \frac{\eta(t)}{t}dt} \qquad (x\geqslant 1),\ L(x)=c(x)\log x \quad (x\geqslant 1).$$

La fonction $L(x)$ est évidemment positive et strictement croissante pour $x>1$ et comme l'on a

$$c(x)=e^{\sum\limits_{\nu^2\leqslant x-1}\sqrt{\nu}\int_{\nu^2}^{\nu^2+1}\frac{dt}{t}}<e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{\nu}\log\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)}<+\infty \quad (x\geqslant 1),$$

ce qui entraîne que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}c(x)$ est positive et finie, on conclut que la fonction $L(x)$ est à croissance lente. D'autre part, avec tout $\delta>0$ fixé,

$$[x^{-\delta}L(x)]'=-\delta\, x^{-\delta-1}L(x)+x^{-\delta}\frac{\eta(x)}{x}L(x)+x^{-\delta-1}c(x)$$

$$=x^{-\delta-1}L(x)\left[\eta(x)-\delta+\frac{1}{\log x}\right]$$

prend les deux signes pour les valeurs de x arbitrairement grandes.

3° L'assertion peut être prouvée par la fonction à croissance lente

$$L(x)=(a+x^{-1}\sin x)\,e^{\int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}dt} \qquad (x \text{ suffisamment grand; } a>0).$$

Si $\delta > a^{-1}$, on a pour x suffisamment grand

$$x^{-\delta} L(x) \searrow \quad \text{et} \quad x^{\delta} L(x) \nearrow .$$

Si $\delta < a^{-1}$, aucune des deux relations précédentes n'est valable pour x suffisamment grand.

2.5.2. Citons la caractérisation suivante de la classe $\mathcal{K}_0$, démontrée dans [5]:

2.5.2.1. Une fonction $L(x)$, définie, positive et mesurable sur $[0, +\infty]$ et finie sur tout intervalle fini, appartient à $\mathcal{K}_0$ si et seulement si

$$-\infty < D_+ L(x) \leqslant D^+ L(x) < +\infty \quad (x \text{ suffisamment grand})$$

et

$$x D_+ L(x) = o\,(L(x)),\ x D^+ L(x) = o\,(L(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

Ici $D_+ L(x)$ et $D^+ L(x)$ désignent respectivement la dérivée droite intérieure et la dérivée droite supérieure de $L(x)$.

En s'appuyant sur ce résultat-là, on va démontrer le théorème suivant.

2.5.2.2. THÉORÈME VI. *Toute fonction à croissance lente et convexe ou concave (non nécessairement dans le sens strict) pour x suffisamment grand appartient à la classe $\mathcal{K}_0$ de Zygmund.*

DÉMONSTRATION. Soit $L(x)$ une fonction à croisance lente qui est convexe pour $x > x_0$. On a alors ($L'_+(x)$ désigne la dérivée droite de $L(x)$)

$$-\infty < L'_+(x) < \infty \quad (x > x_0),$$

$$(20) \qquad L'_+(x) \leqslant \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \leqslant L'_+(x+h) \qquad (x > x_o,\ h > 0),$$

ce qui entraîne en particulier que $L'_+(x)$ est à signe constant pour x suffisamment grand.

D'autre part, si $\lambda > 1$ est fixé, il existe, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, un $x_\varepsilon \geqslant x_o$ tel que l'on ait

$$(21) \qquad |L(\lambda x) - L(x)| < \varepsilon L(x) \qquad (x > x_\varepsilon).$$

Si $L'_+(x) \geqslant 0$ pour x suffisamment grand, alors (21), d'après (20), entraîne

$$|L'_+(x)| \leqslant \left| \frac{L(\lambda x) - L(x)}{\lambda x - x} \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{x} \qquad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{x\,|L'+(x)|}{L(x)} < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \qquad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}).$$

Si $L'_+(x) < 0$ pour x suffisamment grand, on obtient, d'après (20) et (21),

$$|L'+(\lambda x)| \leqslant \left| \frac{L(\lambda x) - L(x)}{\lambda x - x} \right| < \frac{\varepsilon}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{x} \quad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda x\,|L'+(\lambda x)|}{L(\lambda x)} < \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{L(x)}{L(\lambda x)} \quad (x > x_\varepsilon \text{ et suffisamment grand}).$$

On obtient dans le premier cas

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \frac{x\,|L'_+(x)|}{L(x)} \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda-1}$$

et dans le second cas

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \frac{x\,|L'_+(x)|}{L(x)} = \overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \frac{\lambda x\,|L'_+(\lambda x)|}{L(\lambda x)} \leqslant \varepsilon\,\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on aboutit, dans les deux cas, au résultat

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\,|L'+(x)|}{L(x)} = 0.$$

Donc, d'après 2. 5. 2. 1, on a

$$L(x) \in \mathcal{K}_o.$$

La démonstration est semblable si la fonction $L(x)$ est concave.

2.6. Dans les énoncés de quelques théorèmes de notre travail [2] figurait la condition suivante concernant une fonction à croissance lente

$$A\,L(x)\log x \leqslant \int_1^x t^{-1}L(t)\,dt \leqslant BL(x)\log x \tag{22}$$

($x>1$; A, B constantes positives et finies),

de même que les conditions qui ne comprenaient que l'une ou l'autre des inégalités (22), c'est-à-dire les conditions

$$L(x)\log x = 0\left(\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt\right) \qquad (x\to+\infty)$$

et

$$\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt = 0\,(L(x)\log x) \qquad (x\to+\infty)$$

C'est à propos des conditions précédentes et des conditions

$$L(x)\log x = \mathrm{o}\left(\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt\right) \qquad (x\to+\infty) \tag{23}$$

et

$$\int_1^x t^{-1}L(t)\,dt = \mathrm{o}\,(L(x)\log x) \qquad (x\to+\infty) \tag{24}$$

que l'on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME VII. *Soient $\mathcal{K}_\nu$ $(\nu=1,\ldots,5)$ respectivement les classes des fonctions à croissance lente qui: remplissent la condition (22); ne satisfont que la première inégalité (22); ne satisfont que la seconde inégalité (22); remplissent la condition (23); remplissent la condition (24). Aucune des classes $\mathcal{K}_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,5)$ n'est vide. En particulier: toutes les fonctions à croissance lente définies pour x suffisamment grand par*

$$L(x) = (\underbrace{\log\log\ldots\log}_{k\ \text{fois}} x)^\alpha \qquad (k\geqslant 2;\ \alpha\ \textit{réel}) \tag{25}$$

ou par

$$L_\alpha(x) = (\log x)^\alpha \qquad (\alpha>-1) \tag{26}$$

appartiennent à $\mathcal{K}_1$; *toutes les fonctions à croissance lente définies pour* x *suffisamment grand par*

$$L(x) = \frac{(\log_k x)^\alpha}{\log x \ldots \log_{k-1} x}$$

$$(\log_k x \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\log\log\ldots\log}_{K \text{ fois}} x; \; k \geqslant 2; \; \alpha \text{ } \mathit{r\acute{e}l})$$

appartiennent à $\mathcal{K}_4 (\subset \mathcal{K}_2)$ *et toutes celles définies pour* x *suffisamment grand par*

$$L(x) = e^{(\log x)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

à la classe $\mathcal{K}_5 (\subset \mathcal{K}_3)$.

Les assertions générales résultent immédiatement de celles particulières. Les dernières peuvent être démontrées sans difficulté à l'aide du lemme I.

On peut ajouter que l'on a pour les fonctions (25), plus précisément,

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt \sim L(x) \log x \qquad (x \to +\infty)$$

et pour les fonctions (26)

$$\int_1^x t^{-1} L_\alpha(t)\, dt \sim \frac{1}{\alpha + 1} L_\alpha(x) \log x \qquad (x \to +\infty).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. van Aarden — Ehrenfest, N. G. de Bruijn, J. Korevar, *A note on slowly oscillating functions*, Nieuw Archief vor Wiskunde 23 (1949), 77-86.

[2] D. Adamović, *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund – B. Sz. — Nagy* Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences t. XII (1958), 81-100

[3] D. Adamović, *Généralisations de quelques résultats de Zygmund, B. Sz. — Nagy et Boas relatifs aux séries trigonometriques* (en préparation).

[4] Bela Sz. — Nagy, *Séries et intégrales de Fourier des functions non bornées*, Acta. sc. matematicarum (Szeged), XIII (1949), 118-135.

[5] R. Bojanić and J. Karamata, *On slowly oscillating function and asymptotic relations*, Technical Summary Report 432, Math. Research Center (1963).

[6] H. Delange, *Sur un théorème de Karamata*, Bull. Sci. Math. (2) 79 (1955), 9-12.

[7] J. Karamata, *Sur mode de croissance régulier des fonctions*, Matematica (Cluj) 4 (1930), 38-53.

[8] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière, théorème fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France 61 (1953), 55-62.

[9] E. Landau, *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques*, Bull. Acad. Royale de Belgique (1911), 443-472.

[10] W. Matuszewska, *Regulary increasing functions in connection with the theory of L — spaces*, Studia Mathematica 21 (1962), 317-344.

[11] G. Polya, *Über eine neue Weise bestimte Integrale in der analytischen Zahlteorie zu gebrauchen*, Göttingen, Nachr. (1917, 149-159.

[12] G. Polya, *Bemerkung über unendliche Folgen und ganze Funktionen*, Math. Ann. 88 (1923), 169-183.

[13] R. Schmidt, *Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen*, Mathematische Zeitschrift 22 (1925), 89-152.

[14] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Москва 1965.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

D. D. ADAMOVIĆ

GENERALISATIONS DE QUELQUES THEOREMES DE A ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (I)

Extrait

des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE T. 7 (21), 1967

BEOGRAD
1967

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, 7 (21) 1967, p. 123–138

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (I)

Dušan Adamović

(Communiqué le 17 juin 1966)

0. Tous les résultats de cet article sont liés à la notion de *fonction à croissance lente* dans le sens de *Karamata* (J. Karamata, 1930 [12, 13]), c'est-à-dire d'une fonction réelle $L(x)$ définie et positive pour $x \geqslant 0$ et possédant la propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \qquad (\lambda > 0).$$

On démontre qu'une fonction à croissance lente et mesurable sur $[0, +\infty)$ est bornée, pour un a suffisammant grand, sur tout intervalle fini $[a, b]$ $(b > a)$ et par suite intégrable dans le sens de Lebesque sur chacun de tels intervalles. C'est pourquoi, dans les applications connues n'étant essentielles que les propriétés des fonctions à croissance lente pour les valeurs de x suffisamment grandes, nous allons supposer (sans l'énoncer explicitement) que *toute fonction à croissance lente qu'on mentionne est mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle* $[0, a]$ $(a > 0)$.

Dans le présent article nous donnons, au moyen de fonctions à croissance lente, les généralisations et les compléments d'un groupe de théorèmes de *A. Zygmund*, *B. Sz.-Nagy* et *R. P. Boas* [7-9, 14] concernant le comportement asymptotique et la connexion entre intégrabilité et convergence des séries trigonométriques. Quelques unes de ces généralisations, ne se limitant pas à l'introduction des fonctions à croissance lente, sont faites dans d'autres directions aussi. Nos résultats sont contenus dans les théorèmes I-XIII, avec un lemme auxiliaire. Notons que les théorèmes III-V et VIII ont été démontrés dans notre article [1] (où ils sont nommés théorèmes $1-3$ et 6, respectivement). Nous les citons ici pour compléter notre exposé et pour corriger ou simplifier quelques détails de leurs démonstrations.

0.1. Dans les démonstrations de nos théorèmes nous allons profiter des résultats suivants qui se rapportent tous sauf (VI) aux propriétés des fonctions à croissance lente. Les propositions (I)-(V) et (X) sont bien connues, les propositions (VI)-(IX) sont démontrées dans notre travail [2] et la proposition (XI) dans l'article [4] de *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić*.

(I) *Si $L(x)$ est une fonction à croissance lente, on a*

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1 \quad (x \to +\infty)$$

uniformément pour $\lambda \in [a, b]$, *où* $0 < a < b < +\infty$.

(II) *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente et si pour la fonction* $L^+(x)$, *positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *et bornée sur tout intervalle fini, on a* $L^+(x) \sim L(x)\ (x \to +\infty)$, *alors la fonction* $L^+(x)$ *est à croissance lente.*

(III) (*Théorème de représentation.*) *Une fonction* $L(x)$ *mesurable sur* $[0, +\infty)$ *est à croissance lente si et seulement si l'on a*

$$L(x) = c(x)\, e^{\int\limits_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt} \qquad (x \geqslant 0),$$

où $c(x)$ *est une fonction positive et mesurable sur* $[0, +\infty)$ *qui tend vers une limite finie et positive lorsque* $x \to +\infty$ *et la fonction* $\varepsilon(x)$ *est continue pour* $x \geqslant 0$ *et tend vers zéro lorsque* $x \to +\infty$.

(IV) *Si la fonction* $L(x)$ *est à croissance lente et si* $\alpha > 0$, *alors*

$$x^\alpha L(x) \to +\infty, \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0 \qquad (x \to +\infty).$$

(V) *Soit la fonction* $L(x)$ *à croissance lente et soit, pour* $\alpha > 0$,

$$\left.\begin{aligned} &\overline{L}_1(x) = x^{-\alpha} \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^\alpha L(t)\}, && \overline{L}_2(x) = x^\alpha \sup_{t \geqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \\ &\underline{L}_1(x) = x^\alpha \inf_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, && \underline{L}_2(x) = x^{-\alpha} \inf_{t \geqslant x} \{t^\alpha L(t)\} \end{aligned}\right\} (x \geqslant 0),$$

où l'on attribue à chacune de ces fonctions la valeur 1 pour $x = 0$. *Alors toutes les fonctions* $\overline{\underline{L}}_\nu(x)\ (\nu = 1,2)$ *sont à croissance lente (les deux dernières pour x suffisamment grand) et l'on a* $\overline{\underline{L}}_\nu(x) \sim L(x)\ (x \to +\infty;\ \nu = 1,2)$.

(VI) 1° *Supposons que les fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *soient définies et intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini* $[a, x]\ (x > a)$, *que l'on ait* $g(t) > 0$ $(t \geqslant a)$ *et que les intégrales* $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\, dt$ *et* $\int\limits_a^{+\infty} g(t)\, dt$ *soient finies. Alors*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_x^{+\infty} f(t)\, dt}{\int\limits_x^{+\infty} g(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous la condition que la limite au second membre existe, comme valeur finie ou comme $\pm\infty$.

2° *Supposons que les fonctions* $f(t)$ *et* $g(t)$ *soient intégrables dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle fini* $[a, x]\ (x > a)$ *et que l'on ait* $g(t) > 0$ $(t \geqslant a)$ *et*

$$\int\limits_a^x g(t)\, dt \to +\infty \qquad (x \to +\infty).$$

Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int\limits_a^x f(t)\, dt}{\int\limits_a^x g(t)\, dt} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

sous l'hypothèse que la limite au second membre existe, comme valeur fini ou comme $\pm\infty$.

(VII) *Soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente. Alors*:

1° *La série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ *et l'intégrale* $\int\limits_{1}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt$ *sont équiconvergentes.*

2° *On a*

$$L(x) = o\left(\int\limits_{1}^{x} t^{-1} L(t)\, dt\right) \qquad (x \to +\infty).$$

3° *Soit*

$$(D_1) \qquad \sum \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n),\ S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{1}^{x} t^{-1} L(t)\, dt,\ S^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \leqslant x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Si $\sum = +\infty$, *on a* $S(x) \sim S^*(x)$ $(x \to +\infty)$ *et ces deux fonctions sont à croissance lente.*

4° *Soit*

$$(D_2) \qquad R(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{x}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt,\ R^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu \geqslant x} \nu^{-1} L(\nu).$$

Si $\sum < +\infty$, *on a* $L(x) = o(R(x))$, $R^*(x) \sim R(x)$ $(x \to +\infty)$ *et ces deux fonctions sont à croissance lente.*

Dans ce qui suit on va employer les symbôles $\sum$, $S(x)$, $S^*(x)$, $R(x)$ et $R^*(x)$ avec les significations définies par (D_1) et (D_2).

(VIII) *Soit la fonction* $f(x)$ *non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle* $(0, \delta)$ $(\delta > 0)$ *et soit* $L(x)$ *une fonction à croissance lente. Alors*:

1° *La convergence (vers une limite finie) de l'une des intégrales*

$$\int\limits_{+0}^{\delta} x^{\alpha} L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \qquad \text{et} \qquad \int\limits_{+0}^{\infty} x^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx \qquad (\alpha > 0)$$

entraîne la convergence de l'autre et que

$$f(x) \int\limits_{+0}^{x} t^{\alpha-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \to 0 \qquad (x \to +0).$$

2° *Sous l'hypothèse*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} t^{-1} L(t)\, dt < +\infty,$$

la convergence de l'une des intégrales

$$\int\limits_{+0}^{\delta} R\left(\frac{1}{x}\right) df(x) \qquad \text{et} \qquad \int\limits_{+0}^{\delta} x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x)\, dx$$

entraîne la convergence de l'autre et que

$$R\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \to 0 \qquad (x \to +0).$$

(IX) *Pour toute fonction à croissance lente $L(x)$ il existe une fonction à croissance lente et infiniment différentiable $L_0(x)$ telle que l'on ait:*

1° $L_0(x) \sim L(x) \qquad (x \to \infty).$

2° $L_0(n) = L(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$

3° *Si la fonction $L(x)$ est monotone, pour $x \geqslant 0$ ou pour x suffisamment grand, alors $L_0(x)$ a la même propriété.*

4° *L'énoncé correspondant au précédent qui concerne la convexité est aussi vrai.*

Le théorème précédent implique que *dans les énoncés de nos théorèmes* I-XIII, *de même que dans ceux des autres théorèmes abeliens et tauberiens ou de la théorie trigonométrique où interviennent les fonctions à croissance lente* (exemples: les résul ats dans [3], [4], [5] et [6]) *on peut supposer, sans restreindre la généralité, que toute fonction à croissance lente $L(x)$ en question a pour $x \geqslant 0$ autant de dérivées que l'on veut et de même que, dès que l'on introduit une condition de monotonie ou de convexité relative à $L(x)$, il n'importe si l'on y soumet $L(x)$ ou seulement la suite correspondante $L(n)\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$.*

(X) *Soit $\mathcal{K}$ la classe de toutes les fonctions à croissance lente et $\mathcal{K}_0$ la classe de Zygmund* ([15], tome I, p. 299) *de toutes les fonctions $K(x)$ positives et mesurables sur $[0, +\infty)$ et bornées sur tout intervalle fini $[0, a]\,(a > 0)$ pour lesquelles*

$$x^{\delta} K(x) \nearrow, \quad x^{-\delta} K(x) \searrow {}^{1)} \; (x \textit{ suffisamment grand}; \; \delta > 0).$$

Alors $\mathcal{K}_0$ est un vrai sous-ensemble de $\mathcal{K}$.

(XI) *Si $L(x)$ est le produit de deux fonctions à croissance lente monotones $L^{(1)}(x)$ et $L^{(2)}(x)$ (ou bien de deux fonctions à croissance lente telles que $L^{(1)}(n) \nearrow$, $L^{(2)}(n) \searrow$) et $\alpha > 0$, alors*

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |\nu^{-\alpha} L(\nu) - (\nu+1)^{-\alpha} L(\nu+1)| \leqslant M(\alpha)\, n^{-\alpha} L(n) \; (= 1, 2, \ldots),$$

$M(\alpha)$ étant indépendant de n.

0.2. Dans la démonstration du théorème I on va profiter du lemme suivant.

Lemme. *Soit la fonction $h(x)$ intégrable dans le sens de Lebesgue sur tout intervalle $[\varepsilon, \pi]\,(0 < \varepsilon < \pi)$ et soit $L(x)$ une fonction à croissance lente et $\gamma > 0$. Alors la relation asymptotique*

$$h(x) \sim x^{\gamma - 1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0) \tag{1}$$

entraîne

$$\int_0^x h(t)\, dt \sim \frac{1}{\gamma} x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

---

¹) Le symbôle $f(x) \nearrow$ désigne que l'on a $f(x) \geqslant f(y)$ pour $x > y$. On admet la signification correspondante de $f(x) \searrow$ et des même symbôles pour les suites.

En particulier, pour $\gamma > 0$

$$\int_0^x t^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \sim \frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

Démonstration. (1) entraîne

$$h(x) = \alpha(x) x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $\lim\limits_{x \to +0} \alpha(x) = 1$ et la fonction $\alpha(x)$ est intégrable sur $[\varepsilon, \pi]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$. On obtient alors, d'après (III) et (VI) (assertion 1°),

$$\lim_{x \to +0} \frac{\int_0^x t^{\gamma-1} \alpha(t) L\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} t^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{t}\right) L(t)\, dt}{\frac{1}{\gamma} x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\int_y^{+\infty} t^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{t}\right) L(t)\, dt}{\frac{1}{\gamma} y^{-\gamma} L(y)}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{-y^{-\gamma-1} \alpha\left(\frac{1}{y}\right) L(y)}{-y^{-\gamma-1} L(y) + \frac{1}{\gamma} y^{-\gamma-1} c(y) \varepsilon(y) \exp\left(\int_1^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right)}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \alpha\left(\frac{1}{y}\right) = 1.$$

1. Le comportement asymptotique des séries trigonométriques de sinus et de cosinus pour $x \to +0$.

A partir d'ici, on va sous-entendre que toute fonction désignée par $L(x)$ est à croissance lente sans l'énoncer explicitement. Comme nous l'avons déjà dit, on peut supposer partout que $L(x)$ a autant de dérivées que l'on veut. L'intégrabilité de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $(0, \pi)$ sera partout désignée par $f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi)$.

Les considérations dans ce paragraphe se rapportent au comportement asymptotique des séries

(2). $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

et

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{3}$$

pour $x\to+0$, sous l'hypothèse que $a_n\searrow 0$, $b_n\searrow 0\,(n\to\infty)$, ou sous quelque autre hypothèse qui assure la convergence de ces séries pour $x\in(0,\pi)$.

Comme résultat initial dans ce domaine, on peut considérer les formules

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\gamma}\cos nx &\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\sin\frac{\pi\gamma}{2}\\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{-\gamma}\sin nx &\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\end{aligned}\right\}\ (x\to+0;\ 0<\gamma<1). \tag{4}$$

Pour la démonstration voir, par exemple, [15] (I, pp. 298—299).

Quant aux séries de sinus (2), *Hardy* [10] a démontré en 1928 que, sous l'hypothèse $b_n\searrow 0\,(n\to\infty)$, la relation

$$b_n\sim n^{-\gamma}\quad(n\to\infty\,;\ 0<\gamma<1) \tag{5}$$

entraîne

$$g(x)\sim x^{\gamma-1}\,\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\qquad(x\to+0). \tag{6}$$

En 1931 *Hardy* a établi que, inversement, sous la même condition, (6) entraîne (5). Plus tard ce résultat-là a été étendu à l'intervalle $0<\gamma<2$ tout entier [11]. On a obtenu des résultats analogues pour la série de cosinus.

Dans [4] et [6] *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić* ont généralisé le résultat cité relatif à la série de sinus, par la proposition suivante:

Soit $0<\gamma<2$, $b_n\searrow 0$. *Alors*

$$b_n\sim n^{-\gamma}L(n)\qquad(n\to\infty) \tag{7}$$

entraîne

$$g(x)\sim x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2}\qquad(x\to+0) \tag{8}$$

et inversement, (8) *entraîne* (7). *Pour* $1<\gamma<2$ (8) *est valable dès que*

$$b_n=n^{-\gamma}L(n), \tag{9}$$

sans la condition $b_n\searrow$, *et pour* $0<\gamma\leqslant 1$ (8) *est aussi valable si l'on a* (9) *où* $L(x)$ *est produit de deux fonctions monotones à croissance lente.*

Ici nous ne nous intéressons qu'à la partie directe de ce théorème-là, c'est-à-dire à l'énoncé des conditions suffisantes pour (8).

On a des propositions analogues sur la série de cosinus (3) avec

$$a_n=n^{-\gamma}L(n)\quad(0<\gamma<1).$$

Dans [4] et [6] *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić* ont aussi étendu, au moyen de fonctions à croissance lente, l'énoncé direct et l'énoncé inverse de leur théorème cité au cas de la série de sinus avec $\gamma=0$. La partie directe de ce résultat est formulée comme il suit:

Soit $L(x)$ *une fonction à croissance lente et convexe qui tend vers zéro lorsque* $x\to+\infty$. *Alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\sin nx \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0).$$

Dans sa monographie [15], *A. Zygmund*, employant la notion plus étroite de fonction à croissance lente, à savoir la notion de fonction appartenant à la classe $\mathcal{K}_0$ de *Zygmund* ((*X*) dans 0.1), étend les propositions de type considéré pour les séries de sinus et pour celles de cosinus aux cas $\gamma=0$ et $\gamma=1$ et puis, par „l'intégration", qu'il omet d'expliquer de plus près, à quelques autres intervalles et valeurs entiers de γ ([15], tome I, pp. 298—305 et page 366, problèmes 11 et 12). Nous remarquons cependant que l'on peut, en modifiant et complétant les démonstrations correspondantes contenues dans les travaux des auteurs cités, formuler tous les résultats de *Zygmund* avec la notion générale de fonction à croissance lente et aussi avec les variantes de conditions dans les résultats de *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić*. En outre, on peut donner, à l'aide de l'induction mathématique, une forme fermée à l'extension des énoncés à toutes les valeurs entières non négatives de γ et a tous les intervalles entre ces valeurs—là.

1.1. Tous les résultats et toutes les remarques qui précèdent (concernant les énoncés directs) sont contenus dans le

Théorème I. *Avec les désignations*

$$f_\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\cos nx,\quad g_\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\sin nx, \tag{10}$$

les assertions suivantes sont valables:

1° *Si la fonction* $L(x)$ *est convexe et tend vers zéro lorsque* $x\to+\infty$, *alors*

$$g_0(x)\sim x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0);$$

si en outre la fonction $x[L(x)-L(x+1)]$ *est à croissance lente, alors*

$$f_0(x)\sim \frac{\pi}{2}x^{-2}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)-L\left(\frac{1}{x}+1\right)\right] \qquad (x\to+0)$$

$\left[\sim -\frac{\pi}{2}x^{-2}L'\left(\frac{1}{x}\right)(x\to+0),\right.$ *si la fonction* $-xL'(x)$ *est à croissance lente*$\left.\right]$.

2° *Pour* $\gamma\in(2k,\ 2k+1)\,U\,(2k+1,\ 2k+2)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *on a*

$$g_\gamma(x)-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!}x^{2\nu-1}f_{\gamma+1-2\nu}(0)$$

$$\sim x^{\gamma-1}L\left(\frac{1}{x}\right)\Gamma(1-\gamma)\cos\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x\to+0), \tag{11}$$

où l'on n'écrit pas la somme si $k=0$; *pour* $\gamma \in (0,1)$

$$(12)\qquad f_\gamma(x) \sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0);$$

pour $\gamma \in (2k-1,\ 2k)\, U(2k\ 2k+1)\quad (k=1, 2, 3, \ldots)$

$$(13)\qquad f_\gamma(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{\gamma-2\nu}(0)$$

$$\sim x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \sin\frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0);$$

les relations (11) *avec* $\gamma \in (2k+1,\ 2k+2)\,(k=0, 1, 2, \ldots)$ *et les relations* (13) *avec* $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\,(k=1, 2, 3, \ldots)$ *ont lieu dès que* $L(x)$ *est une fonction à croissance lente et les relations* (11) *avec* $\gamma \in (2k,\ 2k+1)\,(k=0, 1, 2, \ldots)$, *les relations* (12) *et les relations* (13) *avec* $\gamma \in (2k-1,\ 2k)\,(k=1, 2, 3, \ldots)$ *si une des conditions suivantes est encore remplie*

(C_1) $$x^{|\gamma|-\gamma} L(x) \searrow;$$

(C_2) $L(x)$ *est produit de deux fonctions à croissance lente monotones.*

3° *En supposant une des conditions* (C_2) *ou*

(C_1') $$x^{-1} L(x) \searrow$$

remplie, on a

$$(14)\qquad g_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{\pi}{2} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} L\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$(15)\qquad f_{2k}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} L\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} &(16)\ g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} S\left(\frac{1}{x}\right), \\ &(17)\ f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-2} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} S\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}\right\} \left(\sum = +\infty\right)$$

$$(x \to +0;\ k=1, 2, 3, \ldots).$$

Si $\sum < +\infty$,

$$(18)\qquad g_{2k}(x) - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)!} x^{2\nu-1} f_{2k+1-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} R\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(19)\qquad f_{2k-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu} f_{2k-1-2\nu}(0) \sim (-1)^k \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} R\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(x \to +0;\ k=1, 2, 3, \ldots)$$

Pour $k=1$ *on n'écrit pas les sommes* (14), (16) *et* (17).

4° *Sous la condition* (C_2) *les séries* (2) *et* (3) *avec* $0<\gamma\leqslant 1$ *convergent uniformément pour* $x \in [\delta,\ 2\pi-\delta]\ (0<\delta<\pi)$.

Notons que la condition particulière de la seconde assertion sous 1° est remplie si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente.

Dans les résultats précédemment cités de *Aljančić-Bojanić-Tomić* sont contenus la première assertion 1°, la relation (11) pour $\gamma \in (0, 1) \cup (1, 2)$ et la relation (14) pour $k=1$, tout cela sous les conditions correspondantes citées dans l'énoncé de notre théorème. La seconde assertion 1° et les relations: (12); (13) avec $\gamma \in (1, 2)$; (15)—(19) pour $k=1$ sont démontrées dans le livre de *Zygmund*, mais sous des hypothèses plus restrictives que dans notre théorème. Il faut remarquer que les hypothèses de la seconde assertion 1° chez *Zygmund* ne sont pas plus restrictives en raison de la plus large notion de fonction à croissance lente dans notre énoncé, la convexité de la fonction $L(x)$ à croissance lente entraînant $L(x) \in \mathcal{K}_0$ (théorème VI dans notre travail [2]), mais parce que la fonction $-xL'(x)$ est remplacée dans le théorème I par la fonction $x[L(x)-L(x+1)]$, supposée à croissance lente (dans le sens plus large) et que, d'autre part, si la fonction $-xL'(x)$ est à croissance lente dans le sens de *Zygmund*, la fonction $L(x)$ est convexe: en effet, alors $-L'(x) = x^{-1}[-xL'(x)]\searrow$.

Démonstration. Ce que nous avons à prouver encore, nous allons le faire dans l'orde suivant:

a) l'assertion 4°;

b) la seconde assertion 1°;

c) la relation (12);

d) la relation (11) avec $k=1, 2, 3, \ldots$ et les relations (13);

e) les relations (17) et (19) avec $k=1$;

f) les autres cas des relations (14)—(19).—

a) En supposant la condition (C_2) remplie et avec un $\gamma \in (0,1)$ fixé, on obtient, d'après (XI), pour $x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$,

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^{p} \nu^{-\gamma} L(\nu) \sin \nu x \right|$$

$$= \left| \sum_{\nu=m+1}^{p-1} [\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)]^{-\gamma} L(\nu+1)] \cdot \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right.$$

$$\left. + p^{-\gamma} L(p) \frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \left[\sum_{\nu=m+1}^{p-1} |\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-\gamma} L(\nu+1)| + p^{-\alpha} L(p) \right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} [M(\gamma)(m+1)^{-\gamma} L(m+1) + p^{-\gamma} L(p)].$$

On obtient la même majorante, d'une manière tout-à-fait semblable, dans le cas de la série des cosinus. Cette majorante-là ne dépend pas de x et tend vers zéro lorsque $m,\ p\to\infty$.

b) Il résulte des hypothèses sur $L(x)$ que cette fonction est non croissante pour x suffisamment grand et tend vers zéro quand $x\to+\infty$. Par conséquent, pour un nombre naturel n_0 on a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}|L(n)-L(n+1)|=\sum_{n=n_0}^{\infty}[L(n)-L(n+1)]<+\infty. \tag{20}$$

On obtient alors, en appliquant la sommation partielle $(0<x<\pi)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(n)\cos nx=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}L(n)\cos nx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m-1}[L(n)-L(n+1)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}+L(m)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)]\left(\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}+\cos nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)]\sin nx+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)](\cos nx-1)$$

$$=\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}n[L(n)-L(n+1)]\sin nx+O(1), \tag{21}$$

puisque, d'après (20),

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[L(n)-L(n+1)](\cos nx-1)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|L(n)-L(n+1)|<+\infty.$$

D'après l'hypothèse, $x[L(x)-L(x+1)]$ est une fonction à croissance lente et

$$n^{-1}n[L(n)-L(n+1)]=L(n)-L(n+1)\searrow,$$

de sorte que, d'après (14) avec $k=1$, la dernière somme dans (21) a le comportement asymptotique de la fonction $x^{-1}\left[L\left(\frac{1}{x}\right)-L\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]\frac{\pi}{2}$. (21) entraîne alors l'assertion en question.

c) La première des formules (4) peut être écrite sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} \cos nx = x^{\gamma-1} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2} \gamma + o(x^{\gamma-1}) \quad (x \to +0; \quad 0<\gamma<1),$$

d'où, pour $0<\gamma<1$,

$$\frac{x^{1-\gamma}}{L\left(\frac{1}{x}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx - \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2} \gamma$$

$$= x^{1-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1\right] n^{-\gamma} \cos nx + o(1) = T(x) + o(1) \quad (x \to +0).$$

Il suffit, donc, d'établir que $T(x) \to 0$ $(x \to +0)$.

On a, avec $0<\delta<1<\Delta<+\infty$,

$$|T(x)| = \left| x^{1-\gamma} \left(\sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} + \sum_{\frac{\delta}{x} < n \leqslant \frac{\Delta}{x}} + \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} \right) \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1\right] n^{-\gamma} \cos nx \right|$$

$$\leqslant \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx \right| + x^{1-\gamma} \left| \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} n^{-\gamma} \cos nx \right|$$

$$+ x^{1-\gamma} \left| \sum_{\frac{\delta}{x} < n \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left[\frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1\right] n^{-\gamma} \cos nx \right| + \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx \right|$$

$$+ x^{1-\gamma} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma} \cos nx \right| = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \tag{22}$$

On a ensuite, avec $\gamma<\beta<1$ et en désignant par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 M_1', M_4' des constantes positives, d'après (V),

$$T_1 \leqslant \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} L(n)\, n^{\beta-\gamma} \cdot n^{-\beta} |\cos nx|$$

$$\leqslant \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \sup_{0 \leqslant t \leqslant \frac{\delta}{x}} \{t^{\beta-\gamma} L(t)\} \sum_{n \leqslant \frac{\delta}{x}} n^{-\beta}$$

$$\leqslant M_1' \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left(\frac{\delta}{x}\right)^{\beta-\gamma} L\left(\frac{\delta}{x}\right) \int_0^{\delta/x} t^{-\beta}\, dt$$

$$\leqslant M_1 \delta^{1-\gamma} \frac{L(\delta x^{-1})}{L(x^{-1})} \tag{23}$$

et, comme cas particulier,

$$T_2 \leqslant M_2\,\delta^{1-\gamma}. \tag{24}$$

On obtient

$$T_3 \leqslant x^{1-\gamma} \sum_{\frac{\delta}{x} \leqslant n \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(n)}{L(x^{-1})} - 1 \right| n^{-\gamma} \left| \cos nx \right|$$

$$\leqslant x^{1-\gamma} \operatorname*{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right| \sum_{\frac{\delta}{x} \leqslant n \leqslant \frac{\Delta}{x}} n^{-\gamma} \leqslant x^{1-\gamma} \operatorname*{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right| \int_{\frac{\delta}{x}-1}^{\frac{\Delta}{x}} t^{-\gamma}\,dt$$

$$\leqslant M_3 \frac{\Delta^{1-\gamma} - \delta^{1-\gamma}}{1-\gamma} \operatorname*{Sup}_{\frac{\delta}{x} \leqslant t \leqslant \frac{\Delta}{x}} \left| \frac{L(t)}{L(x^{-1})} - 1 \right|. \tag{25}$$

D'après la majoration que nous avons déjà fait dans a) (le cas des cosinus, comme nous l'avons dit, est tout-à-fait analogue à celui des sinus) et d'après (I), nous avons

$$T_4 = \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} \left| \sum_{n > \frac{\Delta}{x}} L(n)\, n^{-\gamma} \cos nx \right| \leqslant \frac{M_4'}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{1-\gamma}}{L(x^{-1})} L([\Delta x^{-1}] + 1)([\Delta x^{-1}] + 1)^{-\gamma}$$

$$\leqslant M_4 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{x^{-\gamma}}{L(x^{-1})} \cdot L(\Delta x^{-1})(\Delta x^{-1})^{-\gamma} = M_4 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma} \frac{L(\Delta x^{-1})}{L(x^{-1})} \tag{26}$$

et, comme cas particulier,

$$T_5 \leqslant M_5 \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \Delta^{-\gamma}. \tag{27}$$

D'après les inégalités (23)—(27) et les propriétés correspondantes des fonctions à croissance lente, on obtient, faisant dans (22) $x \to +0$,

$$\overline{\lim_{x \to +0}} \left| T(x) \right| \leqslant (M_1 + M_2)\,\delta^{1-\gamma} + (M_4 + M_5)\,\Delta^{-\gamma},$$

d'où ($\delta \to +0$, $\Delta \to +\infty$)

$$\lim_{x \to +0} T(x) = 0.$$

d) D'après le résultat de *Aljančić*, *Bojanić* et *Tomić*, la relation (11) est valable pour $k=0$ et cela sous une des conditions (C_i) $(i=1, 2)$ si $\gamma \in (0,1)$ et sans condition particulière si $\gamma \in (1, 2)$. On en déduit, pour $\gamma \in (0, 1) \cup (1, 2)$ et sous les mêmes conditions pour chacun des deux intervalles, par l'integration de 0 à $x \in (0, 2\pi)$, ce procédé étant justifié par le lemme de 0.2,

$$f_{\gamma+1}(x) - f_{\gamma+1}(0) \sim -\frac{x^\gamma}{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) \Gamma(1-\gamma) \cos \frac{\pi}{2}\gamma \qquad (x \to +0),$$

c'est-à-dire, pour $\gamma \in (1, 2) \cup (2, 3)$,

$$f_\gamma(x) - f_\gamma(0) \sim -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1} \Gamma(1+1-\gamma) \cos \frac{\pi}{2}(\gamma-1) \cdot L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{x^{\gamma-1}}{\gamma-1}(1-\gamma)\Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2}\gamma \cdot L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^{\gamma-1}\Gamma(1-\gamma) L\left(\frac{1}{x}\right) \sin \frac{\pi}{2}\gamma,$$

cette égalité étant valable sous chacune des conditions $(C_i)(i=1, 2)$ si $\gamma \in (1, 2)$ et sans elles si $\gamma \in (2, 3)$. Les assertions (11) et (13) sont donc valables pour $k=0$ et pour $k=2$ respectivement. Si on les suppose valables pour un nombre naturel k, on établit, de la même manière que là-dessus, en intégrant de 0 à x et en profitant du lemme, leur validité pour le nombre naturel $k+1$ et cela sous les conditions correspondantes. C'est donc par induction mathématique que l'on vient d'achever la démonstration de toutes les assertions 2°.

e) Supposons une des conditions (C_i) $(i=1, 2)$ remplie. Si $\sum = +\infty$, on a, d'après (IV) et VII),

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \cos nx$$

$$= \sum_{n \leq \frac{1}{x}} n^{-1} L(n) - \sum_{n \leq \frac{1}{x}} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)$$

$$+ \sum_{n > \frac{1}{x}} n^{-1} L(n) \cos nx = S^*\left(\frac{1}{x}\right) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

$$= S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2. \tag{28}$$

Comme (P_1, P_2 constantes positives), d'après (V) et (VII),

$$\left|\sum\nolimits_1\right| = \left|\sum_{n \leq \frac{1}{x}} n^{-1} L(n)(1-\cos nx)\right| < \frac{1}{2} x^2 \sum_{n \leq \frac{1}{x}} n L(n)$$

$$< \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{x}} \{t L(t)\} < P_1 L\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et, d'après la majoration dans a),

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \frac{P_2}{\sin \frac{x}{2}} \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(S\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

on déduit de (28) l'assertion (17) pour $k=1$.

Si l'on a $\sum < +\infty$ (sans autre condition) la série $f_1(x)$ est convergente et

$$f_1(0)-f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)=\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}} n^{-1}L(n)(1-\cos nx)+R^*\left(\frac{1}{x}\right)$$

(29) $$-\sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-1}L(n)\cos nx=R\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\sum\nolimits_3-\sum\nolimits_4.$$

On obtient de nouveau, de la même manière que plus haut,

$$\left|\sum\nolimits_3\right|=O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \left|\sum\nolimits_4\right|=O\left(L\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et par suite, d'après (VII),

(30) $$\left|\sum\nolimits_3\right|=o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \left|\sum\nolimits_4\right|=o\left(R\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Les égalités (29) et (30) entraînent l'assertion (19) avec $k=1$.

f) D'après ce qui précède, les relations (14), (17) et (19) sont valables pour $k=1$ sous les conditions correspondantes. En intégrant, dans le sens du lemme, la relation (14) de 0 à x, on aboutit à

$$f_2(x)-f_2(0)=-\frac{\pi}{2}\,xL\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (x\to+0),$$

c'est-à-dire à la relation (15) pour $k=1$. En intégrant les relations (17) et (19), sous les conditions correspondantes, on aboutit respectivement aux relations

$$g_2(x)\sim xS\left(\frac{1}{x}\right)\qquad \left(x\to+0;\ \sum=+\infty\right),$$

$$g_2(x)-xf_1(0)\sim -xR\left(\frac{1}{x}\right)\qquad \left(x\to+0;\ \sum<+\infty\right),$$

c'est-à-dire aux relations (16) et (18) pour $k=1$. On a ainsi prouvé toutes les relations (14)—(19) pour $k=1$. Pareillement, en intégrant de 0 à x selon le lemme, de l'hypothèse que toutes les assertions (14)—(19) sont vraies pour le nombre naturel k on déduit leur validité pour $k+1$. C'est donc par induction mathématique que l'on prouve toutes les assertions (14)—(19).

1.2. Aux résultats précédents sur le comportement asymptotique des séries (2) et (3) nous ajoutons l'estimation suivante de la série des modules des termes de la série $g_\gamma(x)$.

Théorème II. *Sous une des conditions* (C_2) *et* (C_1') *(l'énoncé du théorème I) on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n)\left|\sin nx\right|\sim\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n)\sin nx\qquad (x\to+0).$$

Si $\sum<+\infty$, *cette relation est valable sans conditions supplémentaires.*

Démonstration. Soit d'abord $\sum=+\infty$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}L(n)\left|\sin nx\right|=\sum_{n\leqslant\frac{1}{x}}+\sum_{n>\frac{1}{x}}$$

$$< x \sum_{n\leqslant\frac{1}{x}} n^{-1} L(n) + \sum_{n>\frac{1}{x}} n^{-\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} L(n)$$

$$< xS^*\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(xL\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= xS^*\left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1)) = xS\left(\frac{1}{x}\right)(1+o(1))$$

et, d'autre part, d'après le thèorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim xS\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to +0);$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \sim xS\left(\frac{1}{x}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \qquad (x\to +0).$$

Si $\sum < +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \leqslant x \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) = x\sum;$$

d'autre part, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x\sum \qquad (x\to +0);$$

donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n)\,|\sin nx| \sim x\sum \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \qquad (x\to +0).$$

1.2.1. De la même façon que les inégalités dans la démonstration précédente, on peut déduire les deux estimations suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\,|\sin nx| \leqslant \frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon} x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \tag{31}$$

($o<\varepsilon<\gamma$; $x>o$ et suffisamment petit; $1<\gamma<2$);

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\,|\sin nx| \leqslant x \sum_{n=1}^{\infty} n^{1-\gamma} L(n) \qquad (\gamma>2),$$

valables sans aucune restriction pour $L(x)$.

(à suivre)

BIBLIOGRAPHIE

1. D. D. Adamović — *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund — B. Sz.-Nagy*, Publ. Ins. Math. Acad. serbe Sci., t. XII (1958), 81—100.

2. D. D. Adamović — *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata*, Matematički vesnik, 2 (17), 1965, sv. 2—3.

3. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publ. Inst. Math, Acad. serbe, Sci., t. VII (1954), 81—94.

4. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova*, Zbornik radova S. A. N., 4 (1955), 15 — 26.

5. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques*, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci. t. VII (1954), 81 — 94.

6. S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur le comportement asymptotiques au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones*, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci. t. X (1958), 101—120,

7. Béla Sz.-Nagy — *Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées*, Acta Sci. math., Szeged, XIII (1949), 118 — 135.

8. R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series*, Tôhoku Math. Journal, 14 (1962), 363 — 368.

9. R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series, II*, Tôhoku Math. Journal, 16 (1964), 358 — 373.

10. G. H. Hardy — *A theorem concerning trigonometric series*, Journal London Math. Society, 3 (1928), 12 — 13

11. P. Heywood — *A note on a theorem of Hardy on trigonometric series*, Journal London Math. Society, 29 (1954), 373 — 378.

12. J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica, (Cluj), 4 (1930), 38 — 53.

13. J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondameutaux*, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 55 —62.

14. A. Zygmund — *Sur les fonctions conjuguées*, Fundamenta Math., 13 (1929), 284 — 303.

15. А. Зигмунд — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1965.

INSTITUT MATHÉMATIQUE

DUŠAN ADAMOVIĆ

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (II)

Extrait
des

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE. T. 8 (22), 1968

BEOGRAD
1968

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 8 (22), 1968, p. 37—50

GÉNÉRALISATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE A. ZYGMUND, B. SZ.-NAGY ET R. P. BOAS (II)

(*Suite*)*

Dušan Adamović

(Communiqué le 17 juin 1966)

2. Généralisations des théorèmes de Zygmund et B. Sz.-Nagy

On suppose dans ce paragraphe que les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ soient non croissantes et inférieurement bornées pour $x \in (0, \pi)$ et que l'on ait

$$xg(x) \in \mathscr{L}(0, \pi), \quad f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

On désigne par $b_n\,(n=1,2,3, \ldots)$ les coefficients de la série de sinus de la fonction $g(x)$ et par $a_n\,(n=0,1,2, \ldots)$ les coefficients de la série de cosinus de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \qquad (n=1,2,3, \ldots),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx \qquad (n=0,1,2, \ldots).$$

Ici les nombres a_n sont les coefficients de *Fourier* de la fonction $f(x)$ et les nombres b_n ne le sont pas nécessairement pour la fonction $g(x)$.

Les deux théorèmes suivants sont dûs à *A. Zygmund* [14] et à *B. Sz.-Nagy* [7]:

(A) *Soit* $0 < \gamma \leqslant 1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

(B) *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n \tag{32}$$

* La première partie de cet article, sous le même titre, a été publiée dans ces „Publications", t. 7 (21), 1967.

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi) \tag{33}$$

ou bien si et seulement si

$$f(x) \log x \in \mathscr{L}(0, \pi), \tag{34}$$

suivant que l'on a $0<\gamma<1$ *ou* $\gamma=1$.

Zygmund a obtenu ces résultats pour le cas $\gamma=1$ et *B. Sz.-Nagy* dans le cas général.

De plus, *B. Sz.-Nagy* a démontré que *déjà la sommabilité* (C, 1) *de la série* (32) *entraîne* (33) *ou* (34), *selon le cas.*

Les résultats précédents peuvent être généralisés par les théorèmes suivants, où intervient la fonction à croissance lente $L(x)$:

Théorème III. *Soit* $0<\gamma\leqslant 1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

Théorème IV. *Soit* $0<\gamma<1$. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, a_n \tag{35}$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi). \tag{36}$$

Théorème V. *Soit* $0<\gamma<1$.

Si $x^{-1-\gamma} L(x) \searrow$ *pour* x *suffisamment grand, de la convergence de la série* (35) *résulte* (36).

Si $x^{-\gamma} L(x) \searrow$ *pour* x *suffisamment grand, de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (35) *résulte* (36).

Théorème VI. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n \tag{37'}$$

converge absolument si et seulement si

$$S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}(0, \pi). \tag{37}$$

Théorème VII. *La relation* (37) *résulte de la convergence ou de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (37') *suivant que l'on a, pour* x *suffisamment grand, seulement* $x^{-2} L(x) \searrow$ *ou déjà* $x^{-1} L(x) \searrow$.

Pour $L(x) \equiv 1$ le théorème III se réduit à (A), les théorèmes IV et VI se réduisent à (B) et les théorèmes V et VII à la remarque supplémentaire de *B. Sz.-Nagy.*

On peut ajouter aux théorèmes précédents le théorème suivant, relatif au cas de la série de sinus et de $\gamma = 0$, non compris dans les résultats de *Zygmund — B. Sz.-Nagy.*

Théorème VIII. *Soit* $L(x)$ *convexe et tel que* $\Sigma < +\infty$. *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n L(n)$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathscr{L}(0, \pi).$$

En 1958 nous avons donné dans [1] une généralisation des théorèmes (A) et (B) différente de la précédente. A savoir, cette généralisation-là contenaient les mêmes énoncés des théorèmes IV, V et VIII et l'énoncé du théorème III avec l'intervalle plus large (0,2) pour γ; les énoncés suivants y figuraient au lieu des théorèmes VI et VII , respectivement:

(VI') *Soit*

$$0 < A\,L(x) \log x < \int_0^x t^{-1} L(t)\, dt < B\,L(x) \log x \quad (x > 1) \tag{38}$$

(*A et B constantes*). *Alors la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)\, a_n \tag{39}$$

converge absolument si et seulement si

$$f(x) L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} \in \mathscr{L}(0, \pi). \tag{40}$$

(VII') *Soit*

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt > A\,L(x) \log x \qquad (x > 1). \tag{41}$$

Alors (40) *résulte de la convergence ou de la sommabilité* (C, 1) *de la série* (39) *suivant que, pour x suffisamment grand, la fonction* $x^{-2} L(x)$ *seulement ou déjà la fonction* $x^{-1} L(x)$ *est non croissante.*

Ici, dans le théorème III nous nous limitons à l'intervalle (0,1] pour γ, en vertu du résultat concernant l'intervalle (1,2) obtenu en 1962 par *R. P. Boas* (théorèmes (C) et (D) dans **3**), qui est, pour $L(x) \equiv 1, 1 < \gamma < 2$, plus générale que l'ancienne variante de notre théorème III et que nous avons, d'ailleurs, réussi à généraliser au moyen de fonctions à croissance lente (théorèmes IX et X). — Les théorèmes VI et VII sont plus généraux que les théorèmes (VI') et (VII'), puisque les premiers ne contiennent pas les conditions restrictives (38) et (41) et puisqu'on a (37) $\Leftrightarrow$ (40) sous la condition (38) et (37) $\Rightarrow$ (40) sous la condition (41).

Pour compléter l'exposé sur notre sujet, nous avons cités tous les théorèmes III — VIII. Les démonstrations des théorèmes III — V étant contenues dans [1], nous nous limitons ici à exposer les démonstrations des théorèmes VI — VIII, celle du dernier puisque sa démonstration dans [1] n'était pas correcte.

2.1 Démonstrations des théorèmes VI—VIII

2.1.1 *Démonstration des théorèmes* VI *et* VII. D'après l'assertion 1° de (VIII), avec $L(x)\equiv 1$, $f(x)\in\mathscr{L}(0,\pi)$ entraîne l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi x\,d f(x)$ et que $x f(x)\to 0$ $(x\to+0)$ et, par conséquent, l'existence de $\int_0^\pi \sin n x\cdot d f(x)$ et que $f(x)\,\sin nx\to 0$ $(x\to+0)$. de sorte qu'une intégration par parties donne

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\left[-\lim_{x\to+0} f(x)\sin nx-\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)\right]$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x);$$

donc,

$$a_n=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin nx\cdot df(x)\qquad (n=1,2,3,\ \ldots). \tag{42}$$

Nous allons démontrer d'abord que (37) entraîne la convergence absolue de la série (39). Nous démontrerons ensuite la seconde, puis la première assertion du théorème VII et, enfin, que la convergence absolue de la série (39) entraîne (37). Toutes les assertions des théorèmes VI et VII étant triviales si $\Sigma<+\infty$, nous allons supposer jusqu'à la fin de la démonstration que l'on ait $\Sigma=+\infty$.

D'après (42) et la majoration effectuée dans la démonstration du théorème II, on a, avec une constante positive M,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)\,|a_n|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{n=1}^\infty n^{-2}L(n)\,|\sin nx|\,d[-f(x)]$$

$$\leqslant M\int_0^\pi x\,S\left(\frac{1}{x}\right)d[-f(x)].$$

On en conclut, d'après (VIII), que (37) entraîne la convergence absolue de la série (39).

Supposons que la série (39) soit sommable (C, 1), c'est-à-dire que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1}L(\nu)\,a_\nu=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)\sin\nu x\cdot df(x)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}P_n(x)\,df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n\to\infty$ et que l'on ait $x^{-1}L(x)\searrow$ pour $x\geqq m$ (m nombre naturel). Soit

$$s_\nu(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1-\cos(2\nu+1)\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\qquad(\nu=1,2,3,\ \ldots).$$

Alors

$$P_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)\sin\nu x$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)\right][s_\nu(x)-s_0(x)]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)\right]s_\nu(x)$$

$$-\left(1-\frac{1}{n}\right)L(1)\,s_0(x)\geqq\sum_{\nu=m}^{n-1}+\left[\sum_{\nu=1}^{m-1}-L(1)\,s_0(x)\right]=P_n^{(1)}(x)+P^{(1)}(x).\tag{43}$$

La suite

$$\omega_{n,\nu}\overset{\text{def}}{=}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-2}L(\nu)-\left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)$$

$$=[\nu^{-2}L(\nu)-(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)]-\frac{1}{n}[\nu^{-1}L(\nu)-(\nu+1)^{-1}L(\nu+1)]\qquad(\nu\leqq n-1)$$

est positive pour $\nu\geqq m$ et, pour un $\nu\geqq m$ fixé, non décroissante par rapport à n; en outre,

$$\omega_{n,\nu}\to\nu^{-2}L(\nu)-(\nu+1)^{-2}L(\nu+1)=\omega_\nu\qquad(n\to\infty).$$

En profitant du fait que $s_\nu(x)\geqq 0$ $(0\leqq x\leqq\pi)$, on en conclut que les fonctions de la suite $P_n^{(1)}(x)$ sont non négatives et que cette suite tend vers

$$P(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=m}^{n-1}\omega_{n,\nu}\,s_\nu(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty}\omega_\nu\,s_\nu(x).$$

(La dernière égalité, d'après ce qui précède, se justifie par le fait suivant, aisé à démontrer: si $0\leqq\alpha_{n,\nu}\nearrow\alpha_\nu$ $(n\to\infty;\ \nu=m,\,m+1,\ \ldots)$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=m}^{\infty}\alpha_{n,\nu}=\sum_{\nu=m}^{\infty}\alpha_\nu.\Big)$$

On obtient de (43)

$$(44)\qquad \int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\,d[-f(x)] \leqslant \left|\int_0^\pi P_n(x)\,df(x)\right| + \left|\int_0^\pi P^{(1)}(x)\,df(x)\right|.$$

Comme, d'après l'hypothèse, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi P_n(x)\,df(x)$ est fini et que la fonction $P^{(1)}(x)$ est, selon (VIII), intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$, on déduit de (44), tenant compte de la non negativité des fonctions $P_n^{(1)}(x)$, que la fonction $P(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$.

Or, comme nous allons le montrer tout de suite,

$$(45)\qquad P(x) \geqslant M_1\, x\, S\left(\frac{1}{x}\right) \quad (M_1 \text{ constante positive}),$$

d'où résulte que l'intégrale $\int_0^\pi x\, S\left(\frac{1}{x}\right) df(x)$ est finie; donc, d'après (VIII),

$$S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L}\ (0, \pi).$$

Pour achever cette partie de la démonstration, il suffit, donc, de démontrer (45).

Pour $\nu + \frac{1}{2} \leqslant \frac{\pi}{x}$ on a

$$s_\nu(\alpha) \geqslant \frac{2}{x}\left(\frac{2\nu+1}{2\pi}x\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}x\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2$$

et, pour x suffisamment petit, d'après (I) et (V),

$$P(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} s_\nu(x)\,[\nu^{-2}L(\nu) - (\nu+1)^{-2}L(\nu+1)]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}x \sum_{m+\frac{1}{2}\leqslant\nu+\frac{1}{2}\leqslant\frac{\pi}{x}} \left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2 [\nu^{-2}L(\nu) - (\nu+1)^{-2}L(\nu+1)]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}x \int_m^{\frac{\pi}{x}-1} \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 d[-t^{-2}L(t)]$$

$$= \frac{2}{\pi^2}x\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 t^{-2}L(t)\Big|_{\frac{\pi}{x}-1}^{m} + 2\int_m^{\frac{\pi}{x}-1}\left(t-\frac{1}{2}\right)t^{-2}L(t)\,dt)\right]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x \left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 m^{-2} L(m) - \left(\frac{\pi}{x} - \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{x} - 1\right)^{-2} L\left(\frac{\pi}{x} - 1\right) \right.$$

$$\left. + M_2 \int_m^{\frac{\pi}{x}-1} t^{-1} L(t)(dt) \right] \geqslant \frac{2}{\pi^2} x \left[M_3 S\left(\frac{1}{x}\right) - M_4 L\left(\frac{1}{x}\right) \right] \geqslant M_5 x S\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec les constantes positives M_2, M_3, M_4, M_5. Ici on a mis à profit la relation 2° de (VII).

Si l'on suppose que la série (39) converge, c'est-à-dire que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} L(\nu) a_\nu = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} L(\nu) \sin \nu x \, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n \to \infty$, et que $\nu^{-2} L(\nu) \searrow$ pour $\nu \geqslant l$ (l nombre naturel), on obtient, d'une manière analogue que ci-dessus,

$$Q_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} L(\nu) \sin \nu x$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1} [\nu^{-2} L(\nu) - (\nu+1)^{-2} L(\nu+1)] \, s_\nu(x) - L(1) \, s_0(x) + n^{-2} L(n) \, s_n(x)$$

$$\geqslant \sum_{\nu=l}^{n-1} + \left[\sum_{\nu=1}^{l-1} - L(1) \, s_0(x) \right] = Q_n^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x),$$

où $Q_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives, et l'on en déduit l'intégrabilité de la fonction $P(x)$ par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$. On en obtient de nouveau (37).

Soit enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) |a_n| = K < +\infty.$$

Alors, d'après (V),

$$K \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} L(\nu) |a_\nu| \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Inf}_{0 \leqslant t \leqslant \nu} \{t^{-1} L(t)\} |a_\nu|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} \underline{L_1}(\nu) |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} \underline{L_1}(\nu) \left| \frac{2}{\pi\nu} \int_0^\pi \sin \nu x \cdot d[-f(x)] \right|$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi \left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-2} \underline{L_1}(\nu) \sin \nu x \right] d[-f(x)] \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi R_n(x) \, d[-f(x)] \right|.$$

On a $x^{-1}\underline{L}_1(x)\searrow(x>0)$ et par suite

$$R_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-2}\underline{L}_1(\nu)\sin\nu x$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu^{-2}\underline{L}_1(\nu)-(\nu+1)^{-2}L_1(\nu+1)]s_\nu(x)-\underline{L}_1(1)s_0(x)$$

$$=R_n^{(1)}(x)-\underline{L}_1(1)s_0(x),$$

où $R_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives et la fonction $s_0(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0,\pi)$. Par un procédé semblable à celui employé plus haut, on obtient

$$R_0(x)\geqslant M_6 x\underline{S}_1\left(\frac{1}{x}\right),\ R_0(x)=\lim_{n\to\infty}R_n^{(1)}(x)\ (M_6 \text{ constante positive}), \text{ avec}$$

$$\underline{S}_1(x)\overset{\text{def}}{=}\int_1^x t^{-1}\underline{L}_1(t)\,dt.$$

Etant donné que, d'après l'assertion 3° de (VI), $\underline{S}_1\left(\frac{1}{x}\right)\sim S\left(\frac{1}{x}\right)(x\to+0)$, on en déduit

$$R_0(x)\geqslant M_7\,x\,S\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (M \text{ constante positive}).$$

On en obtient (37) en s'appuyant sur (VIII).

2.1.2. *Démonstration du théorème VIII.*

Il résulte des propriétés supposées de la fonction $L(x)$ que $L(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$ et aussi que, d'après (VII),

$$\int_0^1 t^{-1}L\left(\frac{1}{t}\right)dt=\int_1^{+\infty}t^{-1}L(t)\,dt<+\infty,$$

c'est-à-dire que

$$x^{-1}L\left(\frac{1}{x}\right)\in\mathcal{L}(0,\ \pi).$$

On en conclut que les deux conditions dont le théorème VIII établit l'équivalence sont pour $g(x)=\text{const}$ automatiquement satisfaites, et l'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $g(\pi-0)=0$. Les coefficients b_n sont alors donnés par

$$b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-\cos nx)\,dg(x)\geqslant 0.$$

En effet, d'après l'assertion 1° de (VIII) (avec $L(x)\equiv 1$), $xg(x)\in(0,\ \pi)$ entraîne l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi x^2\,dg(x)$ et que $x^2g(x)\to 0\ (x\to+0)$, et par conséquent l'existence de $\int_0^\pi (1-\cos nx)\, dg(x)$ et que $(1-\cos nx)\cdot g(x)\to 0$ $(x\to+0)$. Donc, en tenant compte de $g(\pi-0)$, une intégration par parties donne

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\Big[-\lim_{x\to+0} g(x)(1-\cos nx)\Big]-\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x)$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,dg(x).$$

Par conséquent, $b_n\geqslant 0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ et, d'après le théorème de *Beppo--Levi*, la série

$$\sum_{n=1}^\infty L(n)\,b_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left[\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\right]dg(x)$$

converge (absolument) si et seulement si l'intégrale au second membre est fini. Or, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\sim R\left(\frac{1}{x}\right)\qquad (x\to+0),$$

de manière que l'application de (VIII) conduit à l'assertion du théorème VIII.

3. Généralisation des théorèmes de Boas

Dans ses travaux [8] et [9], *R. P. Boas* a démontré les théorèmes (*C*)—(*G*), qui étendent le théorème (*A*) à l'intervalle [1, 2], en affaiblissant les conditions pour $1<\gamma\leqslant 2$ et pour l'assertion dans une direction dans le cas $\gamma=1$, et donnent un analogue du théorème (*B*) pour la série de cosinus généralisée, définie par *Boas*, sous l'hypothèse

$$x^2 f(x)\in\mathscr{L}(0,\ \pi),$$

comme la série de cosinus aux coefficients

$$a_n=-2\pi^{-1}\int_0^\pi (1-\cos nx)\,f(x)\,dx\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{46}$$

(pour l'explication voir [8, 9]). On n'y suppose pas la monotonie des fonctions $g(x)$ et $f(x)$.

(C) *Soit* $1<\gamma<2$ *et*

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{47}$$

Alors

$$x^{\gamma-1}g(x)\in\mathscr{L}\quad (0,\ \pi) \tag{48}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} b_n. \tag{49}$$

(D) *Soit* $1<\gamma<2$, $g(x)\geqslant 0$ *pour* $x\in(0,\,\pi)$ *et* (47). *Alors la convergence de* (49) *entraîne* (48).

(E) *Soit* $g(x)\geqslant 0$ *pour* $x\in(0,\,\pi)$ *et* (47). *Alors la convergence de la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} b_n$ *entraîne* $g(x)\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi)$.

(F) *Avec la formule* (47):

1°

$$xg(x)\log\frac{1}{x}\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi) \tag{50}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} b_n. \tag{51}$$

2° *Si* $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, *la convergence de* (51) *entraîne* (50).

(G) *Soit* $1<\gamma<3$, $x^2 f(x)\in\mathscr{L}(0,\,\pi)$, $f(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$ *et les coefficients* a_n *soient donnés par* (46). *Alors la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} a_n$ *converge absolument si et seulement si* $x^{\gamma-1} f(x)\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi)$.

Nous généralisons ici les théorèmes (C)—(G) par les théorèmes suivants, dont le dernier est pour (G) généralisation dans deux directions: introduction de fonction à croissance lente et élargissement de l'intervalle pour γ:

Théorème IX. *Soit* $1<\gamma<2$ *et* (47). *Alors*

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi) \tag{52}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, b_n. \tag{53}$$

Théorème X. *Soit* $1<\gamma<2$, $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, $x\,g(x)\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi)$, (47) *et* $x^{1-\gamma} L(x)\searrow$. *Alors la convergence de la série* (53) *entraîne* (52).

Théorème XI. *Soit* $g(x)\geqslant 0$ $(0<x<\pi)$, (47) *et* $L(x)\searrow$. *Alors la convergence de la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n)$ *entraîne* $L\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi)$.

Théorème XII. *Avec la formule* (47):

1°

$$x\,S\left(\frac{1}{x}\right) g(x)\in\mathscr{L}\,(0,\,\pi) \tag{54}$$

entraîne la convergence absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) b_n. \tag{55}$$

2° *Si* $g(x) \geqq 0$ $(0 < x < \pi)$, $x^{-1} L(x) \searrow$ *et* $\sum = +\infty$, *la convergence de* (55) *entraîne* (54).

Théorème XIII. *Soit* $x^2 f(x) \in \mathscr{L}$ $(0, \pi)$, $f(x) \geqq 0$ $(0 < x < \pi)$ *et* (46). *Alors:*

1° *Pour* $1 < \gamma < 3$ *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) a_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L} \ (0, \pi).$$

2° *Sous une des conditions* (C_2) *et* (C_1') (*l'énoncé du théorème* I) *et sous l'hypothèse* $\Sigma = +\infty$, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) a_n \tag{56}$$

converge absolument si et seulement si

$$x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L} \ (0, \pi).$$

3° *Sous l'hypothèse* $\sum < \infty$: *la série* (56) *converge absolument, et la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) a_n \tag{57}$$

converge absolument si et seulement si

$$R\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathscr{L} \ (0, \pi).$$

3.1. Démonstration des théorèmes IX—XIII

3.1.1. *Démonstration du théorème* IX. D'après le théorème de *Beppo-Levi* et l'estimation (31),

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |b_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \int_0^{\pi} |g(x)| \, |\sin nx| \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) |\sin nx| \, dx \leqq M \int_0^{\pi} x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)| \, dx,$$

avec M constant, d'où le théorème.

3.1.2. *Démonstration du théorème* X. Mettant à profit le fait que toutes les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx$ sont positives pour $0<x<\pi$ (pour la démonstration voir, par exemple, [15], I, p. 106) et l'hypothèse $x^{1-\gamma} L(x) \searrow$, on obtient, au moyen d'une sommation par parties,

$$\sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx > 0 \qquad (0<x<\pi;\ p=1, 2, 3, \ldots). \tag{58}$$

Comme

$$\int_0^\pi g(x) \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \sin nx\, dx = \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n) \int_0^\pi g(x) \sin nx\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n)\, b_n,$$

on obtient, d'après le lemme de *Fatou* et (58),

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-\gamma} L(n)\, b_n < +\infty .$$

Cette inégalité-là et la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \sin nx \sim C x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0;\ C \text{ constante positive})$$

entraînent le théorème,

3.1.3. *Démonstration du théorème* XI. D'après l'hypothèse $L(x)\searrow$, on a (58) avec $\gamma=1$. On en déduit, de la même manière que dans la démonstration précédente,

$$\int_0^\pi g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-1} L(n)\, b_n < +\infty .$$

Cette inégalité-là et la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sin nx \sim \frac{\pi}{2} L\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0)$$

entraînent le théorème.

3.1.4. *Démonstration du théorème* XII. 1° D'après le théorème de *Beppo-Levi* et les théorèmes I et II,

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |b_n| \leqslant \frac{1}{2} \pi \int_0^\pi |g(x)| \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) |\sin nx| \right] dx$$

$$\leqslant M \int_0^\pi x S\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)|\, dx \qquad (M \text{ constante}),$$

ce qui entraîne l'assertion 1°.

2° On a, d'après l'hypothèse sur $L(x)$,

$$\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) \sin nx > 0 \qquad (0 < x < \pi;\ p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Par conséquent, de

$$\int_0^{\pi} g(x) \left[\sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n) \sin nx \right] dx = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n)\, b_n$$

on déduit, d'après le lemme de *Fatou*,

$$(59) \qquad \int_0^{\pi} g(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \right] dx \leqslant \varliminf_{p \to \infty} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{p} n^{-2} L(n)\, b_n.$$

Puisque $\sum = +\infty$, on a (théorème I)

$$(60) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} L(n) \sin nx \sim x S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0).$$

De (59) et (60) résulte l'assertion 2°.

3.1.5. *Démonstration du théorème* XIII. 1° On a, en vertu de $1 - \cos nx \geqslant 0$ et d'après le théorème de *Beppo-Levi*,

$$\frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \left| a_n \right| = \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) (1 - \cos nx) \right] f(x)\, dx.$$

L'assertion 1° résulte de cette égalité et de l'inégalité double

$$A x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) (1 - \cos nx) \leqslant B x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(1 < \gamma < 3;\ A, B \text{ constantes positives}),$$

démontrée dans notre article [1] (p. 88, double inégalité (11)).

2° De même que dans le cas précédent,

$$(61) \qquad \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) \left| a_n \right| = \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \right] f(x)\, dx.$$

Sous les hypothèses correspondantes, on a, d'après le théorème I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 S\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \to +0),$$

d'où l'assertion.

3° La partie de l'assertion relative à la série (56) résulte de (61) et de la relation (théorème I), valable si $\Sigma < +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} L(n) (1 - \cos nx) \sim \frac{1}{2} x^2 \sum \qquad (x \to +0),$$

et celle concernant la série (57) de l'égalité

$$\frac{1}{2}\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}L(n)|a_n|=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\right]f(x)\,dx$$

et de la relation (théorème I)

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}L(n)(1-\cos nx)\sim R\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x\to+0).$$

3.2. On peut remarquer, d'après les démonstrations correspondantes exposées, que la convergence des séries dans les énoncés des théorèmes X et XI et de l'assertion 2° du théorème XII peut être remplacée par la condition que les limites inférieures de leurs suites de sommes partielles sont $<+\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović — *Généralisations de deux théorèmes de Zygmund — B. Sz.-Nagy*, Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. XII (1958), 81—100.

[2] D. D. Adamović — *Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata*, Matematički vesnik, 2 (17), 1965, sv. 2—3.

[3] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. VII (1954), 81—94.

[4] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Dva stava o asimptotskom ponašanju trigonometrijskih redova*, Zbornik radova S. A. N., 4 (1955), 15—26.

[5] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriques*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. VII (1954), 81—94.

[6] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — *Sur le comportement asymptotiques au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences, t. X (1958), 101—120.

[7] Béla Sz.-Nagy — *Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées*, Acta Sci. math., Szeged, XIII (1949), 118—135.

[8] R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series*, Tôhoku Math. Journal, 14 (1962), 363—368.

[9] R. P. Boas — *Integrability of nonnegative trigonometric series, II*, Tôhoku Math. Journal, 16 (1964), 368—373.

[10] G. H. Hardy — *A theorem concerning trigonometric series*, Journal London Math. Society, 3 (1928), 12—13.

[11] P. Heywood — *A note on a theorem of Hardy on trigonometric series*, Journal London Math. Society, 29 (1954), 373—378.

[12] J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica (Cluj), 4 (1930), 38—53.

[13] J. Karamata — *Sur un mode de croissance régulière, théorèmes fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France, 61 (1933), 55—62.

[14] A. Zygmund — *Sur les fonctions conjuguées*, Fundamenta Math., 13, (1929), 284—303.

[15] А. Зигмунд — *Тригонометрические ряды*, Москва, 1965.