ЕЛЕМЕНТАРНА

ГЕОМЕТРІЯ.

УСТРОЄНА

ЗА

УПОТРЕБЛЕНІЄ

СЛИШАТЕЛЯ ФІЛОСОФІЄ

У

ЛЂЦЕУМУ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ,

ОДЪ

АТАНАСІЯ НІКОЛИЋА,

Діпломатіческогъ Землѣмѣра, редовногъ Професcора Математіке, Землѣмѣрія и Начертанія и Сеніора у истомъ заведенію.

У БЕОГРАДУ,

ПРИ ТИПОГРАФІИ КНЯЖЕСТВА СЕРБІЄ.

1841.

Неке 6стране фигуре задата є
една страна н. пр. = a = 9' ~~права~~ прва
изнаћи површину.
Некогъ правилног паралелограма задате су две
стране његове н. пр. ос. $b = 7'$ а $p = 5$
да се изнађе површина

ВАША СВѢТЛОСТЬ,

МИЛОСТИВѢЙШІЙ ГОСПОДАРУ!

Щедра укрѣпленія, съ коима є **СВѢТЛОСТЬ ВАША** одма при почетку владѣтельства **СВОГА** при снисходителномъ посѣћенію овогъ школскогъ заведенія учећусе у истомъ младежь Србску къ прилѣжанію ободрити милостивѣйше благоизволила, побуђую у мени найнѣжнія чувства благодарности. Но чиме бы я болѣ благодарности знаке показати могао, него точнымъ испуняванѣмъ свете дужности моє, коє **ВАША СВѢТЛОСТЬ**, као покровитель высоки у отечеству Наука праведно одъ мене очекує. Да бы дакле я томъ очекиваню што совершенніє удовлетворити, и Математическе науке младежи Србской точніе предавати могао, поитіо самь ову Елементарну Геометрію по потребама и обстоятелствама овога школскогъ заведенія сочинити и издати.

Высочайша милость ова, съ коіомъ е ВАША СВѢТЛОСТЬ дозволити благоизволила, да я ову прву на нашемъ езыку Геометрію ВАШОЙ СВѢТЛОСТИ посветити могу, служиће младежи Србской на поощреніе и прилѣжаніе, а мени, као наставнику ньіовомъ на ободреніе точногъ испуняваня дужностій моій; а то ће быти средство, коимъ ће отечество къ пожеланой цѣли приспѣти. Благо отечеству! кое таковогъ Владѣтеля има, коій воспитаніе и наставленіе младежи отечественне, као найважніе и найтврђе народнѣ срећe основе не само уважава, но и щедро укрѣплява, подпомаже, пространява, сва сходна средства къ болѣмъ и лакшемъ набавляню ньіовомъ подае, Біліотеку заведенія умножава, художества подиже, и све што се благостоянія рода и отечества тиче, заводи, узвышава и награђуе само зато, да бы способне отечеству грађане умножіо.

За срећна дакле праведно цѣнимъ себе, што ме е провидѣніе такове славе удостоило, да я ову на нашемъ езыку прву Геометрію именомъ СВѢТЛОСТИ ВАШЕ украсити могу. Нека зна потомство, да Ономе за добыть ове науке на матернѣмъ езыку благодарити има, подъ Когъ е покровителствомъ она тако свесрдно воздѣлавана была; нека зна садашньости и старо и младо, да за такова щедра Владѣтеля и любителя народнѣгъ просвештенія найискренніомъ подчиненія любовію валя да непрестае Бога молити, да ГА као такова, здрава до найдублѣ старости СВОЄ, на утѣху, радость и іошть болю надежду цѣлогъ Србства, у изобилію обштегъ благостоянія славити може.

Подносећи ово дѣло, и препоручуюћисе высочайшой милости и благонаклоности Княжеской, остаємъ съ найдубльимъ страхопочитаніємъ

ВАШЕ СВѢТЛОСТИ

У Крагуєвцу,

1. Септемврія 1840.

покорнѣйшій слуга
Атанасій Николићъ.

НЂГОВОЙ СВѢТЛОСТИ

МИХАИЛУ М. ОБРЕНОВИЋУ,

КНЯЗУ СЕРБІЄ,

Милостивѣйшемъ Господару

съ найдубльимъ страхопочитаніємъ

посвећуе

ИЗДАТЕЛЬ.

ПРЕДГОВОРЪ.

ЛЮБЕЗНЫЙ ЧИТАТЕЛЮ!

Да бы се ова превиспренна наука што точніє у овомъ Княжества Сербіє школскомъ заведенію предавати могла, нуждно ми є было часъ пре такову кньигу за наставленіє сочинити, коя ће слушательима моима доста ясна и понятна, ньіовымъ предуготовленіяма соразмѣрна, а намѣри овога заведенія соотвѣтствуюћа быти; дакле по обстоятелствама овы' очекиваня, морао самь међутымъ по могућству сила моій ова основанія Геометріє сочинити и издати.

При сочиненію овога дѣла моє є главно намѣренѣ было, да оно за моє слушателѣ што понятніє изиђе, а обширность морао самь по обстоятелствама за предаванѣ прописаногъ (полгодишнѣгъ теченія) времена, наблюдавати, и у толико се у єдикоимъ предметима упуштати, колико є за совершено предаванѣ Физике и за практическо Землѣмѣріє нуждно. Далѣ по жельи Высокославногъ Попечител-

ства Просвѣщенія трудіо самь се по возможности сила моій Математическа изражения и разна наименованія на Србски превести. По времену заръ ћу я, или другій кои болѣ и исправніє ову науку моћи издати, но мени ће а и свакомъ другомъ лакше одсадъ быти ову већъ постоећу и као прву на нашемъ матернѣмъ єзику дотеривати и поправляти, него изъ нова безъ сваке помоћи ковати и склапати. Зато, пошто сваку ствaрь можемо добрымъ и злымъ очима гледати, и ты ово дѣло гледай са оныыъ усердіємъ, съ коимъ самь се я трудіо, да по могућству сила моій жельи Высокославногъ Попечителства Просвѣщенія, потребама овога Заведенія, и изображенію миле ми Србске младежи притечемъ и одговоримъ. Тако дакле маленкости Грамматичеcке (коє ми ніє посао) презирући, преводъ Математическы' изражения времену усовершенствованія ради оставляюћи, гледай изложенія и наставленія Математическа (као ствaрь), єсул' уредно, понятно, и цѣли сходно изложена, пакъ ћешъ ми труде моє оправдати.

У Крагуєвцу,

1. Септемврія 1840.

СОЧИНИТЕЛЬ.

СОДРЖАНІЄ.

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

ТРИГОНОМЕТРІЯ ПОВРШНА.

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

УВОДЪ.

РАЗНА ИЗЯСНЕНІЯ ЗЕМЛѢМѢРІЯ И ОСНОВАТЕЛНА ПРАВИЛА.

1.

Геометрія, Землѣмѣріе (γεα земля, и μετρεω мѣримъ), зовесе наука, коя учи количества соединѣна непресѣчна мѣрити.

Слѣдство. Дакле она часть науке количества или Маѳематіке, коя просторна или соединѣна количества т. е. лініе, површности и тѣла испытуе, зовесе *Землѣмѣріе*, *Геометрія*.

2.

Землѣмѣріе се дѣли обично на *Планиметрію* (површно землѣмѣріе, т. е. мѣренѣ површности) и *Стереометрію* (мѣренѣ разны' тѣла), и разумевасе подъ онымъ наука лінія и површностій, а подъ овымъ наука мѣреня тѣла.

Іоштъ се далѣ у предаваню додае къ првой науцы *Тригонометрія* (Триугломѣріе) *површна*, а къ другой *Тригонометрія шарна* (Тригонометрія сферическа). И мы ћемо овде I. *Планиметрію* II. *Тригонометрію површну* и III. *Стереометрію* учити, а Тригонометрію сферическу, као за астрономе нуждну, збогъ краткости у предаваню прописаногъ времена изоставити.

3.

Неизмѣрима шупльина, коя насъ и све ово што мы нашыма чувствама примѣчавамо, окружава, зовесе *просторъ*, (extensio). Просторъ се расширує на разна управленія или размѣре: у дужину, ширину, и высину или дубльину; и то онъ є у свыма овыма трыма управленіяма *неограниченъ*. *И зато є просторъ єдно неограничено цѣло.*

4.

Свака є часть овогъ неограниченогъ простора *тѣло* (corpus). И оно се простире у ширину, дужину и высину, но є са свію страна ограничено. *Тѣло є дакле са свію страна ограниченый просторъ*. Части су тѣла опетъ тѣла. А оно ограничено мѣсто, коє нѣко тѣло у овомъ простору заузима, зовесе *запремина*, (volumen). свитак

5.

Оно, што тѣло одъ прочегъ простора оддѣлює, или оно, гди тѣло нѣко престає, или на

кратко, граница тѣла зовесе *површность, површина* (superficies).

6.

Границе површности зовусе *лініє* (linea). Лінія се само по єдномъ управленію простире, т. є. само у дужину. Лінія као раширенѣ по *єдномъ* управленію помышлѣна, или є ограничена или неограничена. Части лініє опетъ су лініє.

7.

Граница лініє зовесе *точка* (punctum). Точка нема запремине, слѣдователно ни частій. Свака лінія има две граничне точке, *почетну* и *конечну точку*. Какогодъ што се тѣло изъ површностій, а површность изъ лінія несостои, тако исто и лінія несостоисе изъ точкій; но у свакомъ тѣлу можемо површине, у свакой површини лініє, у свакой лініи точке узети, єръ можемо тѣла, површине, лініє свршавающесе помыслити, гди оћемо.

Точка є означеніе, коя частій и тѣла нема. Запремина Маѳематіческе точке равна є нулли, но за учинити ю за наша чувства примѣтителну, морамо се задоволити, да нѣно мѣсто на постоянномъ предмѣту са видимымъ трагомъ назначимо, коя опетъ зато, што є видима, неће быти точка Маѳематіческа, али се за такову узети може, кадъ себи вообразимо, да се границе овога трага све выше и выше сужавају, докъ не изчезну, и у магновенію ньіовы' изчезаваня право мѣсто Маѳематіческе точке у простору назначавамо.

Мы ћемо у напредакъ свагда Маѳематіческу точку разумѣвати.

8.

Да помыслимо да се една точка у простору
фіг. 1. съ єдногъ мѣста *А* на друго *Б* (фіг. 1.) движе, и да трагъ по учинѣномъ путу после себе заоставля, трагъ се овай зове *Маѳематіческа линія.* И будући да Маѳематіческа точка нити има мѣстишта, нити разширине, зато *Маѳематіческа линія ништа друго ніє, него движеніємъ єдне точке у простору написаный путъ.*

9.

Све што се простире, дакле изъ частій состои, или што се представити може, да се изъ частій состои, зовесе *количество.* Тѣла, површности и лініє су дакле количества, но точка ніє количесто. Ова тры просторна количества зовусе *соединѣна*, што су ньіове части точно соединѣне и скопчане, да се међу собомъ разликовати не могу.

10.

Союженый редъ при предаваню наука зовесе *начинъ) наставленія* methodus); а онай наставленія начинъ, кои є при предаваню Маѳематически' наука заведенъ, и кои се употреблявати има, зовесе *Маѳематіческій начинъ предаваня* или *меѳодъ Маѳематіческій* (methodus mathematica), кои ћемо и мы овде узети. А овай се меѳодъ состои изъ слѣдуюћи' частій.

Изясненіє, описаніє (definitio) зовесе ясно и опредѣлено понятіє предмѣта съ речма изражено.

Основателна правила (axioma) єсу такова изреченія, кои' є истина тако ясна по себи, да противорѣчія нетрпи, слѣдователно потврждене изяснѣне истине тако є ясно, да никаквога доказателства нетреба. Н. п. цѣло є веће одъ своє части.

Наставленіє (theorema) зовесе оно изреченіє, коє се безъ доказателства узети не може. Но истина овога изреченія изъ основателны' правила изслѣдити и доказатисе има. Дакле *є наставленіє изслѣдованіє основателны' правила.*

Задатакъ (problema) зовесе оно изреченіє, коимъ се иште, да се нешто изъ задаты' изнаћи, и таковогъ изнађеногъ се точность доказати има. — Основателна правила и наставленія єсу ѳеоретіческа, а задатцы практическа изреченія, коя у Геометріи употребленіє леньира и шестара предпоставляю.

Доказателство (demonstratio) є союзъ выше изреченія, кои' се точность на изясненіяма, на основателнымъ правилама и веѣъ доказанымъ изреченіяма оснива.

Къ управленію Геометрически доказателства често нуждно є начертаніє лінія, фигура и тѣла, она посредствую доказателство, и зовусе *помоѣне лініє*, *помоѣне фігуре* и проч., и дѣло ньіовогъ начертанія, зовесе *сочиненіє* (constructio).

Предпоставляня (hypotheses) зовусе она изреченія, при коима се у смотренію основателности доказателства и прочи истина равнодушно гледи, коимъ се начиномъ она опредѣлити имаю, и коя при доказателствама за основъ узетисе не могу. , и не могу бити [illegible]

Слѣдства (corollaria) содржавају потврждѣнія, кои точность изъ предидуѣій изреченія (изясненія, наставленія, задатка) лакимъ и понятнымъ начиномъ слѣдує.

11.

Основателна правила.

1. Свако є количество себи самомъ равно.

2. Цѣло є веѣе одъ сваке своє части, или свака є часть маня одъ свога цѣлогъ.

3. Цѣло є свыма своима частима совокупныма равно; и тако се могу свагда на мѣсто цѣлога све нѣгове части, а на мѣсто свію частій цѣло поставити. Дакле се равно на мѣсто равны поставити може.

4. Количества, коя су некомъ треѣемъ и ономъ истомъ равна или подобна, она су и међу собомъ равна или подобна, т. є. єдно другомъ.

5. Коя су подобна некомъ треѣемъ количеству, подобна су такођеръ и међу собомъ.

6. Ако су два количества међусобна равна, равне су и све части совокупне єднога количества свыма частима совокупныма другога количества.

7. Равна количества, къ равнымъ додата, одъ равны отузета, са равныма умножена, чрезъ равна раздѣлѣна, даю равне сумме, разлике, производе, количнике.

8. Неравна, остаю неравна, ако се или собраніємъ увеличаю, или отятіємъ умале, или се умноже, или раздѣле.

9. Ако є одъ два количества єдно веѣе одъ другога, и нѣгова є пола веѣа одъ половине другога.

10. Количества, коя се єдно на друго положена слажу, и точно поклапаю, равна су у оныма, у коима се точно поклапаю.

11. Равна се у мѣсто равны поставити могу.

ОДДѢЛЕНІЄ ПРВО.

ПЛАНИМЕТРІЯ.

(Землѣмѣріє површно).

ГЛАВА ПРВА.

О СВОЙСТВАМА ЛІНІЯ, О СВОЙСТВАМА ПРАВЫ' ЛІНІЯ У СМОТРЕНІЮ НЬОВЫ' МЕЂУСОБНЫ' ПОЛОЖЕНІЯ, И О УГЛОВИМА ВООБШТЕ.

12.

Изясненіє. *Лінія* є количество, коя просторъ у дужину има. (§ 6.)

За означеніє лінія употреблююсе велика азбучна писмена, одъ кои' єдно се при почетку, а друго при свршетку нѣномъ поставля; а често гди се двоозначеніє избѣћи може, свободно намъ стои и са єднимъ назначити.

13.

Изяснен. *Права лінія* (linea recta) зове се она, коя све своє части у єдномъ управленію лежеће има, као фіг. 1. лінія *АБ*. ф. 1.

14.

Слѣдства. 1. Будући да се при правымъ лініяма са изятіємъ нѣне дужине, друго свойство, осимъ управленія ньовы' изразити не може, слѣдує: *да су све праве лініє међусобно подобне.*

2. Праве лініє, коє су међусобно равне, слажу се.

3. Одъ єдне задате точке къ другой права се лінія повући може.

15.

Основат. правило. Међу две точке само є єдна єдина права возможна.

16.

Слѣдства. 1. Права лінія є найкраћій путъ међу две точке, а свака крива или скучена лінія међу исте две точке дужа є.

2. Две точке опредѣлюю станѣ, положеніє и управленіє праве лініє.

3. Ако се права лінія преко ове две точке не сматра да се далѣ продужує, то оне опредѣлюю не само нѣно *станѣ*, него и нѣну *величину*.

4. Права лінія точно изражава отстояніє међусобно две точке.

17.

Изяснен. Све оне лініє, коє нису праве, и одъ кои' поєдине части у ономъ истомъ упра-
ф. 2. вленію не стоє, зовусе *криве лініє*, фіг. 2. лінія *ГД*.

Лінія, коя се состои изъ выше у разномъ
ф. 3. управленію правы' лінія *АБ, БВ, ВГ, ГД, ДЕ,* фіг. 3. зовесе *скучена*.

Она лінія, коя се изъ правы', и кривы' сою-
ф. 4. жена состои, зовесе *мешавита лінія*, фіг. 4. *АБ, БВ, ВГ, ГД*.

18.

Изяснен. *Лініє равнотекуће* (parallelae) зовусе оне, коє ма безконечно продужене у непременномъ међусобномъ отстоянію теку, као у фіг.
ф. 5. 5. *АБ* и *АВ*.

Равнотекуће или равноотстоєће положеніє єдне лініє къ другой назначавасе са овымъ међу обема лініяма поставлћнымъ знакомъ (#). Тако се зове у фіг. 5. *АБ # ВГ*, *АБ* равнотекућа са *ВГ*.

19.

Изяснен. Оне праве на єдной површини равной наодећесе лініє, коє нису равнотекуће,

точка гди се удара зове се ~~[illegible]~~ угаот
а точка пресецаня зове се [illegible]

кадъ бы се на обе стране продужиле, одъ оне стране одъ коє бы се составляле, зову се *составляюће се* (convergentes) и точка она, гди бы се удариле и пресекле, *точка пресецаня*; а одъ оне стране, одъ коє бы се све већма и већма разилазиле, *разставляюћесе лініє* (divergentes). Тако су у фіг. 6. лініє *АБ* и *ВГ* одъ *Х* составляюћесе, ф. 6.
и *Х* точка пресѣцаня, а одъ *К* разставляюћесе.

20.

Изяснен. *Окружна лінія* или *окружіє* (periрһегіа) фіг. 7. є єдна у себе саму повраћаюћа- ф. 7.
се крива лінія, тога свойства, да све нѣне точке *АБВГА* одъ єдне унутри наодећесе точке *С* єднако отстоє. Ова важна унутри наодећасе точка *С* зовесе *средоточіє* (centrum).

Полупречникъ, *зрачацъ* (radius) зове се она, одъ ма коє точке окружія до средоточія, повучена права лінія. Тако су полупречници *АС, БС, ВС, ГС*.

Пречникъ или *прекомѣрникъ* (diameter) зовесе свака чрезъ средоточіє повучена и одъ окружне лініє двапутъ ограничена права лінія, као *АВ, БГ*.

Тетивка (chorda) зовесе она одъ єдне точке окружне лініє до друге у ономъ истомъ окружію повучена права лінія. Тако є *АБ* тетивка.

Лукъ (arcus) зовесе свака часть окружне лініє. Тако є *АБ, БВ, ВГ, ГА*, лукъ окружія.

21.

Слѣд. 1. Сви су полупречницы єдногъ и оногъ истогъ окружія или лука међусобно равни.

2. Сви су пречници єдногъ и оногъ истогъ окружія међусобно равни; єръ свакій пречникъ состоисе изъ два полупречника, а они су међу собомъ равни, дакле и они су равни.

22.

Изяснен. Окружна лінія дѣлисе на 360 равны' частій, коє *степене* (gradus) зовемо. Свакій степенъ опеть дѣлисе на 60 равны' частій, коє *мінуте*, а свака мінута опетъ на 60, коє *секунде* зовемо.

Дакле є лукъ одъ 90 степеній єдна	четврть		окружне лініе
„ „ „ „ 180.	„ „	пола	
„ „ „ „ 60.	„ „	шест. часть	
„ „ „ „ 45.	„ „	осма „	
и т. д.			

23.

Слѣд. Ако є дакле число степеній, минута и проч. задато, то само треба намъ 360 чрезъ ово число задато раздѣлити, и сотымъ ћемо дознати, коя є часть окружне лініе задатый лукъ.

Степени се назначаваю са ^{0}, мінуте са $'$, а секунде са $''$. Као 24^{0}, $2'$, $5''$.

Географично [illegible] се: степенъ на [illegible]; [illegible] има у себи 4 минута; свакій има 15 [illegible]

24.

Изяснен. *Површина* (superficies) є количество, коє се простире у дужину и ширину. Површине се дѣле на *равне* и *криве* површине.

Равна површина, или *равница* зовесе она површина, на коіой се на све стране само праве лініе помыслити и повући могу, *крива* на противъ, кадъ су лініе по ньой међу разныма точкама криве, или по некимъ криве а по некимъ праве.

Само є єдна површность равна возможна, а безчисленне криве.

25.

Изяс. Површность или површина произлази, кадъ се єдна лінія попречно движе, и после себе некій трагъ заоставля. Ако права лінія започето движеніє постоянымъ управленіємъ своимъ задржи, то ће она произвести *површность равну* или *праволінейну*; иначе *криву* или *криволінейну*.

Маѳематіческа површина зовесе дакле у простору одъ лініе написаный путъ.

26.

Изясн. Нагибанѣ међусобно две праве лініє фиг. 8. *АБ* и *ВБ*, коє се у єдной точки *Б* ударају, састаю и пресѣцаю, зовесе *угалъ*, *кутъ* ф. 8.

(angulus). Нагибаюћесе лініе зовусе *краци*, *рашлѣ* (crura), а састанка, удараня и пресецаня точка зовесе *връ* или *ошилѣ угла* (vertex anguli).

За означеніе угла три су писмена нуждна, одъ кои' се свагда оно писмо у среди изговара, гди се угалъ наоди; дакле *АБВ*; или се само съ єднымъ писмомъ угалъ изговара н. п. угалъ *Б*, или угалъ *x*.

27.

Изясн. Величина угла зависи одъ нагибаня или одъ разшириваня кракова, а дужина кракова ма каква быти може. — Две праве лініе само се у єдной точки ударити и пресећи могу.

28.

Изясн. Кадъ се єданъ угалъ на другій та-
ф. 9. ко положи, да у фіг. 9. угалъ *Е* на угалъ *Б*, и кракъ *ЕК* на кракъ *БВ* падне, то ће и другій кракъ *ЕД* на другій кракъ угла *Б* пасти, или не. Падне ли *ЕД* на *БА*, то се углови поклапаю, а § 11. число 10.; слѣдователно углови *АБВ* и *ДЕК* равни су. Ако представимо себи, да угалъ *ДЕК* положенъ на *АБВ*, овай угалъ не поклапа, но *ЕК* пада на *БВ*, а *ДЕ* да падне на *ГБ*, то и углови пошто се не поклапаю, не могу равни быти.

29.

Слѣдс. 1. Углови, кои се поклапаю, равни су.

2. Углови, кои су равни, мораю се и поклапати.

30.

Изясн. Кадъ се изъ ошиля угла *Б* фіг. 10. ф. 10.
са повольнымъ одтваранѣмъ шестара *Бн* међу крацыма *АБ* и *БВ*, єданъ лукъ *но* напише, то ће число степеній, колико овай лукъ имао буде, быти *мѣра угла*.

Тако ће угалъ у толико већій или маньій быти, у колико овай повученый лукъ выше или манѣ степеній числіо буде.

31.

Изяснен. *Доугли* или *упоредни углови* (anguli contigui) зовусе они углови, кои обште ошилѣ и єданъ обштый кракъ имаю, и одъ кои' оба друга крака у єдной правой лініи леже, као у фіг. 11. углови *м* и *н*. ф. 11.

Доугли или упоредни углови произлазе, кадъ се єдногъ угла н. п. *АДВ* кракъ *АД* продужи преко ошиля у ономъ истомъ управленію н. п. до *Б*.

32.

Изясн. Кадъ єдна права лінія на другу тако удара, да се ни на єдну, ни на другу страну

ненагиба, но доугле међусобно равне причинява, кажесе: ова линія на ону стои *отвѣсно* (perpendi-
ф. 12. culariter). Тако є у фиг. 12. линія *АБ* на *ВД* *отвѣсна*.

33.

Слѣд. Линія отвѣсна са ономъ, на кою она тако удара, причинява два равна, дакле десна угла. Одтудъ *десанъ* или *правъ* є угалъ *АБВ* съ єдне; а десанъ *АБД* и съ друге стране отвѣсне
ф. 12. *АБ* линіє фиг. 12. угалъ $м = н$.

За означеніе ~~правогъ или~~ десногъ угла употребляваћемо писмо *Д*; дакле $м = Д$, и $н = Д$, значи углови *м* и *н* десни су фиг. 12. И одтудъ десанъ угалъ онай є, кои є своме доуглу раванъ, или кои има за мѣру 90^{0}.

34.

Слѣд. 1. Ако єдна права линія са другомъ сачинява десанъ угалъ, то є она на ову, а ова на ону отвѣсна.

2. Ако се отвѣсна *АБ* фиг. 13. по нѣномъ управленію и на противну праве линіє *ВГ* страну продужи, и продужена *БД* быће такођеръ отвѣсна. Єръ по § 16. ч. 2. пошто две точке *А* и *Б* опредѣлюю станѣ, положеніє и управленіє праве линіє, то ако права *АБ* у отвѣсномъ управленію на *ВГ* буде, она ће и продужена у истомъ упра-

вленію свое положеніє задржати; али по предпоставляню права *АБ* на *ВГ* отвѣсно пада; дакле и продужена отвѣсна быти мора.

35.

Изяснен. Линія, коя на другу праву тако удара, да она са надстояніємъ своимъ неєднаке упоредне углове причинява, кажесе: она стои *коссо* на ову, тако є у фиг. 11. линія *ВД* на *АБ* *косса*, што є угалъ $м > н$.

Они углови, кои су већи или маньи одъ 90^{0}, т. є. већи или маньи одъ *Д*, зовусе *косси углови* (anguli obliqui), и то они, кои су већи одъ *Д*, зовусе *туби* (тупи obtusi), а маньи одъ *Д* *оштри* (acuti) *углови*. Тако є у фиг. 11. угалъ *м* тубъ, ф. 11.
а *н* оштаръ угалъ, єръ є угалъ $м > Д$, а $н < Д$.

36.

Изясн. *Очельни угли* (anguli verticales) зовусе они, кои ошиля своя у єдной и оной истой точки но тако противоположена имаю, да свакій кракъ єднога угла са єдным кракомъ другога угла у истомъ управленію лежи, као у фиг. 14. ф. 14.
м и *н*, или *ю* и *я*.

Постанѣ очельны углова быва продуженіємъ кракова угла изъ точке ударања у истомъ правы линіи управленію.

37.

Наставленіє. *Изъ єдне точке неке праве лініє, само се єдна отвѣсна подићи може*, или
ф. 12. изъ точке *Б* задате праве лініє *ВД* фиг. 12. само се єдна отвѣсна *АБ* подићи може.

Доказат. Ако бы друга отвѣсна *БГ* іоштъ возможна была, то бы и

угалъ *ГБД* = *Д* и
угалъ *АБД* = *Д*.

Дакле бы по § 11. основ. прав. 4. и уг. *ГБД* = уг. *АБД*, коє є противу § 11. основ. прав. 2.; дакле.

38.

Слѣд. Какогодъ што се изъ єдне точке неке праве лініє, само єдна отвѣсна подићи може, тако исто изъ неке точке ванъ лініє наодећесе, на ту исту праву лінію само се єдна єдина отвѣсна спустити може. Тако на задату праву
ф. 15. *ВД* фиг. 15. изъ точке *А* само се єдна отвѣсна *АБ* спустити може. Єръ, да ставимо, да бы се осимъ отвѣсне лініє *АБ* іоштъ єдна *КБ* на лінію *ВД* спустити могла, то бы по предидућемъ доказателству невозможно было; ако бы се друга лінія отвѣсна *АН* осимъ лініє *АБ* наодила, то бы и угалъ *АНД* углу *АНВ* раванъ быти морао, коє є опе[illegible]ожно. Єръ, да представимо себи, д[illegible]*НД* безъ промѣне расширивания кракова помакне, и да угалъ *АНД* раванъ буде углу *КБД*, то кадъ се угалъ *АНД* помакне и постави на угалъ *КБД*, лінія ће *АН* на лінію *КБ*, а угалъ *Н* на угалъ *Б* пасти и совершено се поклопити, и тако ће намъ опетъ невозможность друге лініє отвѣсне по предидућемъ доказателству слѣдовати.

39.

Наставл. *Кадъ є права лінія на другу праву отвѣсна, и кадъ има ма кою точку равноотстоєћу одъ две точке друге праве лініє, све ће точке оне отвѣсне лініє, одъ оне две точке друге праве лініє равно отстояти.* Или у фиг. ф. 16.
16. ако є права лінія *АБ* на праву *ВГ* отвѣсна, и ако има єдну точку *Б* равноотстоєћу одъ две точке *В* и *Г* праве *ВГ* т. є. тако да є *БГ* = *БВ*, то ће равноотстояти све точке ове отвѣсне лініє *АБ*, дакле и точка *А* и *Е* тако, да ће быти *АВ* = *АГ*, и *ЕВ* = *ЕГ*.

Доказат. Да представимо себи, да се угалъ *АБГ* око *АБ* као око своє осе преокрене докъ на угалъ *АБВ* себи раванъ (§ 33.) падне, обща точка *Б* собомъ самомъ соглашаваюћасе, пасти мора *Г* на *В* и онде ће се окончати (збогъ *БВ* = *БГ*), и ону ће исту тамо точку съ ньомъ сочинявати, тако ће се поклопити и сложити такоѣеръ *АВ* и *АГ*, и быће *АВ* = *АГ*, или *ЕВ* = *ЕГ*; дакле.

само є єдна права возможна

Да отстои друга ма коя точка $А$ или $Е$ одъ оне исте две точке $В$ и $Г$ равно тако, да буде $АВ = АГ$, или $ЕВ = ЕГ$; отстояће такођеръ равно $Б$ одъ $В$ и $Г$, т. є. быће $БГ = БВ$.

Доказ. Ако є $БВ = БГ$, то є и $АВ = АГ$, или $ЕВ = ЕГ$ по предидућемъ доказателству; дакле кадъ две точке опредѣлюю станѣ и положеніє праве лініє § 16. ч. 2., кадъ є $АВ = АГ$ или $ЕВ = ЕГ$, быће такођеръ и $БВ = БГ$.

40.

Наставл. *Права линія стоећа на другой правой тако, да ма коє две нѣне точке равноотстоє одъ две точке друге праве лініє, такова*
ф. 16. *є на ову отвѣсна.* Или у фиг. 16. права лінія $АБ$ стоећа на другой правой $ВГ$ тако, да има две точке $А$ и $Е$ равноотстоеће одъ две точке $В$ и $Г$ друге праве лініє $ВГ$, такова є на ову отвѣсна.

Доказ. Две точке опредѣлюю станѣ и положеніє праве лініє § 16. ч. 2., кадъ дакле $А$ и $Е$ (или $А$ и $Б$) праве $АБ$, одъ две точке $В$ и $Г$ друге праве лініє равноотстоє, све ће нѣне точке равноотстояти, и тако цѣла ће она лінія $АБ$ на другу $ВГ$ ударити, да се ни на єдну страну већма ненагиба, али такова є лінія по § 39. отвѣсна; дакле.

Ово знакъ означава се са: ⊥ #ф $АБ \perp ВГ$

41.

Наставл. *Лінія отвѣсна найкраћа є права одъ свію изъ исте точке на исту праву повучены.* Или у фиг. 17. лінія отвѣсна $АБ$ изъ точке ф. 17.
$А$ на праву $ВД$ повучена, найкраћа є права лінія.

Доказ. Да се продужи отвѣсна $АБ$ на противну страну до $Е$ тако, да буде $БЕ = АБ$, после да се союзи точка $В$ са $Е$ правомъ $ВЕ$, быће и $ВЕ = ВА$. Кадъ є права $АЕ$ на $ВД$ отвѣсна, и обратно є $ВД$ на $АЕ$ отвѣсна (§ 34.), и кадъ праве $ВД$ точка $Б$ равноотстои (по сочиненію) одъ $А$ и $Е$, равноотстоіће такође $В$ одъ $А$ и $Е$ (§ 39.), т. є. быће $ВЕ = ВА$. Кадъ то стои, то ће свака друга права $АВ$ (или $АК$, $АД$ и проч.), на исту праву $ВД$ изъ точке $А$ спуштена, дужа быти одъ отвѣсне $АБ$. Єръ $АВ + ВЕ > АБ + БЕ$ (єръ є она у смотренію ове крива лінія § 15 и 16.), дакле є и $\frac{АВ + ВЕ}{2} > \frac{АБ + БЕ}{2}$ (§ 11 ч. 3.), т. є. (кадъ є $АВ = ВЕ$ по доказателству, и $АБ = БЕ$ по сочиненію), дѣленѣ чрезъ 2 свршавајући, быће $АВ > АБ$; дакле є $АБ$ найкраћа.

42.

Слѣд. Ако дакле нека лінія буде найкраћа одъ други' правы' изъ исте точке и на исту праву повучены', она ће быти отвѣсна. Одтудъ за мерень отстоянія єдне точке одъ праве лініє, право се употреблює отвѣсна.

43.

Настав. *Упоредни угли равни су двома деснима, т. є. равнаюсе са два десна угла.* Или
ф. 12. у фіг. 12. ако су углови *ВБГ* и *ГБД* упоредни, то су *ВБГ* и *ГБД* = 2Д.

Доказ. 1. Ако су упоредни угли равни, свакій є одъ нъи' равань єдномъ, оба дакле двома деснима. 2. Ако су неравни, то се доказати дає, да єдань одъ нъи' превозилази десань угаль у толико, колико другоме до десногa оскудѣва, оба дакле равна су двома деснима. Ако представимо себи да є *АБ* на *ВД* у *Б* отвѣсна, то є

$$\begin{array}{l} 1)\ \text{угалъ } ВБА = Д, \\ \quad \text{и угалъ } АБД = Д, \\ \hline \text{дакле } ВБА + АБД = 2Д \text{ по § 11. ч. 7.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2)\ \text{угалъ } ВБГ = Д + АБГ \\ \quad \text{и угалъ } ГБД = Д - АБГ \\ \hline \text{дакле } ВБГ + ГБД = 2Д \text{ по § 11. ч. 7.} \end{array}$$

или

$$АБВ + АБГ + ГБД = 2Д \text{ по § 11. ч. 3.}$$

44.

Слѣд. 1. Сумма дакле свію на єдной страни неке праве лежећи' углова, равна є двома деснима, или сви упоредни углови, кои на єдной

правой лініи бываю, равни су двома деснима или 180°.

2. Сви углови, кои у общой точки своя опиля имаю, имаю за мѣру 4Д или 360°; єрь се изъ обще точке написати може окружіє.

45.

Наставл. *Угли очельни међусобно равни су*, или у фіг. 14. угаль *м* = углу *н*, као и ф. 14.
ю = *я*;

$$\text{Доказ. } \begin{array}{l} \text{уг. } м = 2Д - я \\ \text{уг. } н = 2Д - я \\ \hline \text{дакле } м = н \text{ по § 11. ч. 4.} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} м + я = 2Д \\ н + я = 2Д \end{array}\right\} \text{§ 43.} \\ \hline м + я = н + я. \text{ § 11. ч. 4.} \\ \qquad я = я \\ \hline \qquad м = н. \text{ § 11. ч. 7.} \end{array}$$

Равнымъ начиномъ можесе и за углове *ю* и *я* доказати.

46.

Слѣд. 1. Ако є єдань одъ упоредны' углова познать, изнаћи се може и другій самымъ одузиманѣмъ нѣгове мѣре одъ 180°. 2. Ако єдань одъ упоредны' углова буде десань, то ће и другій быти десань. Ако єдань одъ нъи' буде оштарь, другій мора быти тупь: а ако єдань буде тупь, мора другій быти оштарь.

47.

Задатакъ. *Изъ задате неке точке едне*
ф. 18. *праве лініе, подићи отвѣсну.* Или у фіг. 18. изъ задате праве лініе *АБ*, точке *В* подићи линію отвѣсну.

Разрѣшеніе. 1. Ставляюћи еданъ кракъ шестара у задату точку *В*, другимъ кракомъ повольнымъ отваранѣмъ, да се забележе на задатой правой лініи две точке *Г* и *Е*, обе одъ задате точке *В* равноотстоеће. 2. Поставляюћи еданъ кракъ шестара у *Г*, отворенымъ шестаромъ выше одъ средине надъ лініомъ задатомъ назначивше лукъ, и тай истый лукъ изъ точке *Е*, пошто смо са онымъ истымъ отваранѣмъ шестара пресѣкли, добыћемо точку *К*. 3. Пресецаня точку *К* союжаваюћи са задатомъ *В*; быће *КВ* лінія отвѣсна.

Доказат. Лінія права *КВ*, на другу *АБ* тако удара, да нѣне точке *К* и *В* одъ две точке *Г* и *Е* друге праве *АБ* равноотстое (као што е изъ сочиненія познато), али по § 40. такова е лінія отвѣсна; дакле.—.

48.

Задатакъ: *Изъ задате ванъ лініе праве*
ф. 19. *неке точке, спустити отвѣсну.* Или у фіг. 19. изъ задате точке *В* на лінію *АБ* спустити отвѣсну.

Разрѣшеніе. Изъ задате точке *В* пристойнымъ полупречникомъ да се напише лукъ *ГДЕ*, дату праву лінію *АБ* у точкама *Г* и *Е* пресецаюћій, после изъ исте две точке *Г* и *Е* по полупречникомъ маньимъ (или већимъ, него пре) да се назначе лукови кои ће се у *К* пресећи, ове две точке *В* и *Г* правомъ *ВК* союжаваюћи и продужуюћи до задате праве точке *Д*, ова ће иста *ВД* быти пожелана отвѣсна.

Доказат. Кадъ повучемо праве *ВГ* = *ВЕ*, и *КГ* = *КЕ*, као равне полупречнике (§ 21.), точке *В* и *К* праве *ВД* равноотстое одъ *Г* и *Е* праве *АБ*, али по § 40. такова е отвѣсна; дакле.

49.

Задат. *Задату праву лінію другомъ правомъ отвѣсно и на двое пресећи.* Или у фіг. 20. ф. 20.
задату праву *АБ*, другомъ правомъ *ВГ* отвѣсно и на двое пресећи тако да буде *АЕ* = *ЕБ*.

Разрѣшеніе. Изъ крайнѣи задате праве *АБ* точака *А* и *Б* као изъ средоточія са онымъ истымъ полупречникомъ *АВ* = *АГ* = *БВ* = *БГ* да се забележе лукови пресецаюћисе у *В* и *Г*, ове точке пресецаня да се союзе правомъ *ВГ*; ова ће пресећи задату праву *АБ* у *Е* не само отвѣсно, него и на две равне части тако, да буде *ЕА* = *ЕБ*.

Доказат. Праве *ВГ* две точке *В* и *Г* равноотстое одъ две точке *А* и *Б* задате праве

АБ збогъ еднаки' или равны' полупречника, равна отстоянія показиваюћи' (§ 21.), или по § 40. такова е отвѣсна; дакле права *ВГ* на задату е *АБ* отвѣсна, но права *ВГ* пресеца праву *АБ* у *Е* на две равне части тако, да е *ЕА = ЕБ* по § 39.; дакле права *ВГ* прописанымъ начином повучена, сѣче дату праву *АБ* у *Е* отвѣсно, и на двое.

50.

Изясненіе. *Лініе равнотекуће* зовусе оне, кое (§ 18.) ма безконечно продужене, међусобно равно отстое.

51.

Слѣд. 1. Све лініе отвѣсне, кое се међу двема равнотекућима налазе, равне су. Еръ оваковe лініе отвѣсне изражаваю отстоянія точкій едне лініе равнотекуће одъ друге (§ 42.), али сва су она отстоянія равна (§ 50.); дакле.

52.

Слѣд. 2. Ако дакле напротивъ две лініе отвѣсне, међу двема правима заваћене равне буду, оне ће лініе быти равнотекуће. **2.** *Лініе равнотекуће* нигди се саставити и ударити не могу, ма да се безконечно продуже.

53.

Изясненіе. Ако се две лініе равнотекуће
ф. 21. *АБ* и *ВГ* фіг. 21. одъ неке праве *ДЕ* пресеку,

изродиће се четирь угла *внутрена*, и толико *споляшны'*, разногъ наименованія (мы ћемо найупотребителніе овде навести): тако уголъ *н* зовесе *споляшный*, а *x* *внутреный на едной страни* (исто тако *м* и *θ*): *ю* и *x* (или *я* и *θ*) *два внутрена унакрстна:* *я* и *x* (или *ю* и *θ*) *два внутрена на едной страни.*

54.

Наставл. *Кадъ се лініе равнотекуће одъ неке праве пресецаю, онда е* (фіг. 21.) 1) *Уголъ* ф. 21.
споляшный и внутренный на едной страни међусобно, и 2) *два угла внутрена унакрстна међусобно ревна су;* 3) *два внутрена на едной страни равни су двома деснима или имаю за мѣру* 180°. Или у фіг. 21. кадъ се две равнотекуће *АБ* и *ВГ* одъ неке праве *ДЕ* пресецаю, онда е 1) уголъ *н* споляшный = углу *x* внутреноме на едной страни; 2) два угла внутрена унакрстна *ю* и *x* међусобно равни су: 3) два угла внутрена *я* и *x* на едной страни равни су 2Д или 180°.

Доказат. 1. Да представимо, да се лініа права *ВГ* са угломъ *x* узъ пресѣчицу *ЕД* движеніемъ равнотекућимъ у положеніе *АБ* покрене, уголъ *x* поклопиће уголъ *н*, и съ нъиме ће се сложити, као што е очевидно, а количества коя се слажу § 11. ч. 10; дакле *x = н*.

2. *н* = *ю* по § 45., али
н = *x* по предидућемъ доказателству;

дакле *ю* = *x* по § 11. ч. 4.

3. Углови *н* + *я* = 2Д по § 43;
али *н* = *x* по овога § доказат. 1.

дакле *я* + *x* = 2Д по § 11. ч. 11.

55.

Слѣдства. 1. Ако се дакле две праве трећомъ тако пресецаю, да є 1) угалъ споляшный и внутреный на єдной страни: или 2) да су два внутрена унакрстна међусобно равна; или 3) два внутрена на єдной страни да се равнаю са два десна, такове су лініє равнотекуће.

2. Лініє равнотекуће имаю равно нагибанѣ са лініомъ сѣчицомъ. Нагибанѣ ньіово изражаваю углови *н* и *x* (или *м* и *о* и проч.), али ови су по § 54. међусобно равни, одтудъ

3. Кадъ права нека буде на єдну одъ равнотекућій отвѣсна, она ће и на другу быти отвѣсна (§ 54. ч. 3.), и обратно ако єдна одъ равнотекућій на сѣчицу буде отвѣсна, быће и друга такођеръ отвѣсна.

ф. 5. 4. Међу двема равнотекућима (фіг. 5.) *АБ* и *ВГ* све су отвѣсне *ню* и *яю* (и проч.) равнотекуће. Єръ су углови внутрени међу двема равнотекућима равни двома деснима по § 33.

56.

Задатакъ. *На задату праву лінію, чрезъ назначену точку повући равнотекућу.* Или на задату праву лінію *АБ* фіг. 22. чрезъ назначену точку *В* повући равнотекућу *ВК*. ф. 22.

Разрѣш. 1. Изъ задате точке *В* да се спусти отвѣсна *ВД* на задату праву *АБ* (по § 48.), после изъ задате праве лініє *АБ* неке точке *Е* да се подигне отвѣсна *ЕК* (§ 47.), коя ће равна быти пређашньой *ВД*, затымъ да се повуче чрезъ назначену точку *В* и опредѣлену точку *К* права *ВК*; ова є пожелана равнотекућа.

Или 2. Спуштаюћи изъ задате точке *В* отвѣсну *ВД* на задату праву *АБ* (преко *В* къ *x* продужаваюћи ю), да се изъ исте точке *В* подигне отвѣсна *ВК*, ова є пожелана равнотекућа.

Доказат. 1. Лініє праве *ВД* и *КЕ* по преднаведеномъ разрѣшенію су на праву *АБ* отвѣсне и међусобно равне, али по § 52. такове су равнотекуће; дакле є права *ВК* на *АБ* равнотекућа.

Доказат. 2. Угли су *КВД* и *ЕДВ* десни (по § 33.), дакле заєдно = 2Д или = 180° (§ 33.), али § 55. ч. 3; дакле.

57.

Слѣдство. Чрезъ задату точку на дату праву лінію само се єдна лінія равнотекућа повући може. Да поставимо, да бы се една друга равнотекућа *Вн* повући могла, быле бы отвѣсне *Ен* и *ДВ* равне по § 51., али *ДВ* = *ЕК* (по сочиненію § 56. Разрѣш.); дакле бы была *Ен* = *ЕК* (по § 11. ч. 4.), кое є невозможно по § 11. ч. 2. и 3.

ГЛАВА ДРУГА.

О СВОЙСТВАМА ПРАВЫ' ЛІНІЯ КЪ ОКРУЖІЮ ПРИНАДЛЕЖЕЋИМЪ.

58.

Наставл. *Равне тетивке затежу равне лукове.* Или у фиг. 24. къ равнымъ тетивкама *АБ* и *БВ*, принадлеже и равни лукови *АБ* и *БВ*. ф. 24.

Доказат. По повученымъ полупречницыма *СА*, *СБ*, *СВ*, да се представи, да се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* преокрене и постави на кругоизсѣчникъ *БСА*, тетивке *БВ* и *БА*, као равне, совршено ће се сложити, слѣдователно поклопићесе заедно съ нњима и лукови *АБ* и *БВ* збогъ еднаке кривине (§ 20.), слѣдователно по § 11. ч. 10. быће равне. Одтудъ

59.

Слѣдства. 1. Обратно равни лукови затежу равне тетивке. Али

2. Тетивка већа затеже већій лукъ, маня маньій и обратно.

60.

Примѣчаніе. Изъ Наставленія § 58. слѣдуе начинъ осимъ § 56. како се чрезъ задату точку *К* фиг. 23. равнотекућа на задату праву *БЛ* повући може. Изъ задате точке *К* полупречникомъ повольнымъ *КБ* да се назначи са шестаромъ лукъ неопредѣланъ *БГ*, кои ће дату праву *БЛ* негди у *Б* пресећи; изъ точке *Б*, са задржанымъ преħашньимъ полупречникомъ, да се напише лукъ *КЛ*; тетивка лука *КЛ* да се пренесе изъ точке *Б* на лукъ *БГ*, и точка *Г* да се союзи са задатомъ *К* правомъ лініомъ *ГК*; ова ће быти пожелана равнотекућа на праву *БЛ*. Єръ по повученой правой *БК*, изродићесе углови *м* и *о* равни, збогъ *БГ* и *КЛ* равны' лукова, одъ равны' тетивака (по сочиненію) затегнуты' равны' § 30. 58., али § 55. ч. 2.; дакле. ф. 23.

61.

Изясненіе. При окружію петорогубы' лінія можемо разликовати, то есть: *зрачце* или *полупречнике*, *пречнике*, *тетивке*, *дирке* и *сѣчице*. *Зрачацъ*, *полупречникъ*, зовесе свака права лінія одъ средоточія окружія къ повольной точки нѣкой повучена; *Пречникъ* (діяметеръ) прекомѣрникъ, зовесе свака права лінія, кое крайнѣ точке у окружію леже, и коя крозъ средоточіє прелази; *тетивка* є напротивъ свака права лінія, коє крайнѣ точке у окружной лініи леже, но она крозъ средоточіє непрелази; *дирка*, додирајућа лінія, зовесе свака права лінія, коя ванъ окружія лежи тако, да она са окружномъ лініомъ само *єдну* точку обшту има, у коіой она окружіє исто додира; *сѣчица*, сѣчећа лінія, зовесе свака права лінія, коя окружіє у две точке сѣче.

62.

Слѣдства. 1) Полупречници, пречници и тетивке налазесе у окружію, дирке ванъ окружія, а сѣчице одъ части у окружію, а одъ части ванъ окружія. 2) Полупречници, пречници и тетивке су ограничене, дирке и сѣчице по себи неограничене лініє. 3) Ако се продужи полупречникъ одъ средоточія до окружія, добыће се пречникъ; ако се продужи тетивка или пречникъ на єдну или на обе стране поволно, добыћесе сѣчица. 4) Свако окружіє има безчислене полупречнике, кои су сви међусобомъ равни. 5) Свако окружіє има безчислене и међусобно равне пречнике.

63.

24

Наставл. *Равне тетивке равноотстоє одъ*
ф. 42. *средоточія.* Или у фіг. 24. равне тетивке *АБ* и *БВ* равноотстоє одъ средоточія окружія *С*.

Доказат. § 58.

Доказат. Равны тетивака *АБ* и *БВ* отстояніє одъ средоточія изражавају отвѣсне лініє *нС* и *оС* по § 42. али ове су отвѣсне међусобно равне; єрь ако се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* као око осе преокрене, и положи на кругоизсѣчникъ *БСА*, збогъ *АС* = *СВ* (по § 62. ч. 4.), и збогъ *БВ* = *БА* (по предпоставлянію), точка *Б* собомъ ће се сама поклопити, а *В* пасће на *А* тако, да ће се обе тетивке поклопити, и тако єдну праву лінію сочинявати, а кадъ то буде, то и отвѣсна *Со* на отвѣсну *Сн* пасти мора, и єдну сочинявајући тако, да ће *Со* = *Сн* быти; єрь бы се иначе изъ средоточія на исту тетивку две отвѣсне спустити могле, коє є (по § 38.) невозможно; дакле

64.

Слѣдства. 1. Маня тетивка већма, а већа тетивка манѣ отстои одъ средоточія. Єрь отстояніє веће тетивке *ДЕ* одъ средоточія *С* изражава *Сx*, а отстояніє манѣ тетивке *КГ* (на предидућу равнотекућа) изражава *Ся* (§ 42.), али є *Ся* > *Сx* (§ 11. ч. 2.); дакле.

2. Пречникъ є дакле одъ свію тетивака найвећій. Єрь онъ одъ средоточія ни мало неодстои.

65.

Наставл. *Лінія права пролазећа преко средоточія на тетивку отвѣсна, двопресѣца* точке у окружію леже, и коя крозъ средоточіє прелази; *тетивка* є напротивъ свака права лінія, коє крайнѣ точке у окружной лініи леже, но она крозъ средоточіє непрелази; *дирка*, додираюћа лінія, зовесе свака права лінія, коя ванъ окружія лежи тако, да она са окружномъ лініомъ само *єдну* точку общту има, у коіой она окружіє исто додира; *сѣчица*, сѣчећа лінія, зовесе свака права лінія, коя окружіє у две точке сѣче.

62.

Слѣдства. 1) Полупречници, пречници и тетивке налазесе у окружію, дирке ванъ окружія, а сѣчице одъ части у окружію, а одъ части ванъ окружія. 2) Полупречници, пречници и тетивке су ограничене, дирке и сѣчице по себи неограничене лініє. 3) Ако се продужи полупречникъ одъ средоточія до окружія, добыће се пречникъ; ако се продужи тетивка или пречникъ на єдну или на обе стране повольно, добыћесе сѣчица. 4) Свако окружіє има безчислене полупречнике, кои су сви међусобомъ равни. 5) Свако окружіє има безчислене и међусобно равне пречнике. +

63.

Наставл. *Равне тетивке равноотстоє одъ* ф. 42. *средоточія*. Или у фіг. 24. равне тетивке *АБ* и *БВ* равноотстоє одъ средоточія окружія *С*.

Доказат. Равны тетивака *АБ* и *БВ* отстояніє одъ средоточія изражавају отвѣсне лініє *нС* и *оС* по § 42. али ове су отвѣсне међусобно равне; єръ ако се кругоизсѣчникъ *БСВ* око *БС* као око осе преокрене, и положи на кругоизсѣчникъ *БСА*, збогъ $АС = СВ$ (по § 62. ч. 4.), и збогъ $БВ = БА$ (по предпоставляню), точка *Б* собомъ ће се сама поклопити, а *В* пасћеће на *А* тако, да ће се обе тетивке поклопити, и тако єдну праву лінію сочинявати, а кадъ то буде, то и отвѣсна *Со* на отвѣсну *Сн* пасти мора, и єдну сочинявајући тако, да ће $Со = Сн$ быти; єръ бы се иначе изъ средоточія на исту тетивку две отвѣсне спустити могле, коє є (по § 38.) невозможно; дакле

64.

Слѣдства. 1. Маня тетивка веһма, а већа тетивка манѣ отстои одъ средоточія. Єръ отстояніє веће тетивке *ДЕ* одъ средоточія *С* изражава *Сх*, а отстояніє манѣ тетивке *КГ* (на предидућу равнотекућа) изражава *Ся* (§ 42.), али є $Ся > Сх$ (§ 11. ч. 2.); дакле.

2. Пречникъ є дакле одъ свію тетивака найвећій. Єръ онъ одъ средоточія ни мало неодстои.

65.

Наставл. *Лінія права пролазећа преко средоточія на тетивку отвѣсна, двопресѣца*

1) *исту ону тетивку,* 2) *лукъ одъ исте тетивке затегнутый, као и* 3) *угалъ на две равне части.*
ф. 25. Или у фіг. 25. лінія права *СВ* пролазећа преко средоточія *С*, на тетивку *АБ* отвѣсна, двопресѣца како 1) исту тетивку, да быва $Ax = xБ$, тако 2) лукъ *АВБ* одъ исте тетивке затегнутый, да быва $AB = BБ$, тако и 3) угалъ *АСБ* на две равне части, да угалъ $ACB =$ быва углу *ВСБ*.

Доказателство. Овакове лініє отвѣсне *СВ* точка *С* збогъ $CA = CБ$ (§ 62. ч. 4.) равно отстои одъ крайньи' тетивке *АБ* точака *А* и *Б*, дакле и све нѣне точке, слѣдователно и *х* и *В* одъ исты' *А* и *Б* равно отстоє (§ 39.); дакле є 1) $xA = xБ$. 2) збогъ равны' точке *В* отстоянія *ВА* и *ВБ*, коє су заєдно и тетивке, лукъ є $BA =$ луку *ВБ* (§ 58.), и зато є 3) угалъ $ACB = BCБ$ (§ 30.).

66.

Слѣд. Ако напротивъ лінія права *СВ* или *Сх* тетивку *АБ* отвѣсно двопресѣца на $xA = xБ$, она 1) сѣче и лукъ *АВБ* одъ исте тетивке придржаный (слѣдователно и угалъ *АСБ*), на две равне части, да є лукъ $BA = BБ$ збогъ равны' тетивака *ВА* и *ВБ* (§ 58.), као равны' исте лініє *СВ* точака *В* одъ *А* и *Б* отстоянія *ВА* и *ВБ* (§ 39.): 2) пролази преко средоточія. Єръ ако она не бы пролазила преко средоточія, могла бы се двопресецанѣмъ лініє *АБ* у точки *х*, преко

средоточія *н* (да буде средоточіє у *н*) друга лінія отвѣсна *хн* повући, коє є по § 37. невозможно, коє кадъ є невозможно, невозможно є и то, да лінія *Сх* или *СВ* тетивку *АБ* отвѣсно пресецаюћа, не пређе преко средоточія.

67.

Настав. *Тетивке равнотекуће заваћаю равне лукове.* Или у фіг. 26. тетивке равнотекуће *АБ* и *ВД* заваћаю равне лукове *АВ* и *БД*. ф. 26.

Доказат. По повученой преко средоточія *С* равнотекуће тетивке *АБ* и *ВД* отвѣсной лініи *ЕК* (§ 48.), ова ће двопресѣћи лукове *АКБ* и *ВКД*, одъ равнотекући' тетивака заваћене, или бы'ће

$$AB + BK = БД + ДK, \text{ и}$$
$$\underline{\quad BK = ДK \quad \text{по § 65.};}$$

дакле $AB = БД$ (одузиманѣмъ другога уравненія одъ првога.) Али $AB = БД$, то су лукови одъ равнотекући' тетивака заваћени; дакле.

68.

Слѣд. И напротивъ, ако тетивке заваћаю равне лукове, оне су равнотекуће.

69.

Настав. *Полупречникъ на точку додираня дирке повученъ, стои на дирку отвѣсно.* Или ф. 27. у фіг. 27. полупречникъ *СБ* на точку додираня *Б* повученъ, стои на дирку *ВД* отвѣсно.

Доказ. Пошто се само точка ударанѧ *Б* дирке *ВД* у окружной лініи налази, а све нѣне друге точке ванъ окружія положене су (§ 61.), точке ударанѧ одъ средоточія отстояніе, слѣдователно полупречникъ *СБ* (§ 16.) найкраћа є свію правы' лінія, одъ средоточія *С* на дирку *ВД* (као преко окружія) повучены', али по § 42. такова є отвѣсна; дакле.

70.

Слѣд. 1. Ако дакле полупречникъ (окрайкомъ своимъ) каквой правой лініи отвѣсно надстояо буде, онъ ће быти дирка.

ф. 26. 2. Дирка *ГХ* фіг. 26. са тетивкомъ *ВД* равнотекућа (као две тетивке равнотекуће § 67.) заваћа равне лукове. Єръ полупречникъ *СК* не само є на дирку *ГХ* (§ 69.), него и на тетивку *ВД* отвѣсанъ по § 55. чис. 3.; дакле зрачацъ овде *СК* [illegible]пресѣца лукъ *ВКД*, слѣдователно є *ВК* = [illegible] 65.

З[illegible] ...*чку ударанѧ дир-*
[illegible] ...ити точку ударанѧ
ди[illegible]
[illegible] ...ти [illegible] средоточія *С*

Доказ. Дирке точка *Б*, у коіой се она отвѣсна као зрачацъ окончава, точка є ударанѧ по § 69.; дакле.

72.

Задатакъ. *Преко задате три точке неупоредно стоеће, повући окружіе круга.* Или у фіг. 28. преко задате три точке *А, Б, В* не упоредно стоеће, повући окружіе круга *АБВА*. ф. 28.

Разрѣш. Да се союзи єдна одъ задаты' точака, *Б* са осталимъ двема *А* и *В* правымъ лініяма *БА* и *БВ*; праве ове зато, што оне три точке не леже у єдномъ управленію (по предпоставляню), међусобно нагибаћесе, и быће тетивке повући се имаюћегъ окружія (§ 20.). Тетивке ове *АБ* и *БВ* двопресѣцаюћи отвѣсно правима *ДС* и *ЕС* по § 49.; точка *С*, у коіой се двопресецаюће ударaю, средоточіе є повућисе имаюћегъ окружія, у кои убадаюћи єданъ кракъ шестара, а другій отвараюћи ма до коє точке одъ задаты' *А, Б, В*, и назначуюћи окружіе, то ће оно преко ове три точке прећи.

Доказ. Како *ДС* тако и *ЕС* пролази преко средоточія (§ 66.), дакле, кадъ се две праве лініе само у єдной точки ударити и пресѣћи могу по § 27., а окружіе само єдно средоточіе има, (§ 20.), то ясно слѣдує, да точка *С*, у коіой се ове отвѣсне пресецаю, мора быти средоточіе окружія.

73.

Слѣдства. 1. Ако дакле нека точка у кругу одъ три окружія точке равно отстояла буде, она ће быти средоточіє.

ф. 13. 2. Преко три точке *В,Б,Г* фіг. 13., у правой лініи налазећесе, окружіє круга повућисе неможе.

3. Дакле лінія права не може се у три точке окружія наодити. х

74.

Задатакъ. *Непознато окружія или лука* ф. 28. *средоточіє изнаћи.* Или у фіг. 28. Окружія *АБВА*, или лука *АБВ*, средоточіє *С* изнаћи.

Разрѣш. Да се повуку тетивке *АБ* и *БВ*, коє правима *ДС* и *ЕС* отвѣсно да се двопресѣку по § 49.; обща ударанѣ пресецаюћисе лінія точка *С*, средоточіє є пожелано.

Доказат. Доказателство є § 72.

75.

Задатакъ. *Двопресѣћи окружія лукъ.* Или ф. 29. у фіг. 29. лукъ *АГБ* пресѣћи на двоє тако, да буде *АГ* = *ГБ*.

Разрѣш. Задатый лукъ *АГБ* да се союзи тетивкомъ *АБ*, коюю по § 49. отвѣсно и на двоє пресецаюћи правомъ *ВГ*, истомъ ће се правомъ

двопресѣћи у *Г* и лукъ тако, да ће быти *АГ* = *ГБ*.

76.

Задатакъ. *Угалъ двопресѣћи.* Или у фіг. ф. 30. 30. угалъ *АСГ* двопресѣћи тако, да буде *АСВ* = *ВСБ*.

Разрѣш. Изъ вр'а или ошиля угла *С* међу крацыма нѣговима полупречникомъ повольнымъ *АС* да се напише лукъ *АВБ*, и овай лукъ надлежномъ тетивкомъ *АБ* да се затегне; после ова тетивка по § 49. правомъ *ЕС* да се отвѣсно двопресѣче; ова ће двопресѣћи и задатый угалъ *АСБ* тако, да є *АСВ* = *ВСБ*.

Доказат. Права *ЕС* двопресѣца лукъ *АВБ* на равне лукове *АВ* и *ВБ* по § 65., али су лукови *АВ* и *ВБ* мѣре углова противостоєћи по § 30. и ове су равне; дакле и углови ньіови равни быти мораю; слѣдователно угалъ *АСВ* = углу *ВСБ*. —*н* Х

ГЛАВА ТРЕЋА.

О МѢРАМА УГЛОВА, КОЄ ПРАВЕ ЛІНІЄ КЪ ОКРУЖІЮ ПРИНАДЛЕЖЕЋЕ ПРИЧИНЯВАЮ.

77.

Изясненіє. Углови при окружію или су у окружію т. є. *внутрени*, или ванъ окружія т. є. *споляшньи*; оніи могу быти *средоточни* (у средоточію), или *окружни углови* (у окружной лініи). *Средоточный уголъ* зовесе онай уголъ у окружію, кои ошилѣ своє у средоточію има, а нѣгови крацы полупречници; *Окружный уголъ* зовесе онай уголъ, кои ошилѣ негди у окружной лініи има, а нѣгови су крацы праве лініє у кругу; *споляшньій* уголъ кодъ круга таковый є уголъ, кои ошилѣ ванъ круга има, а нѣгови су крацы дирке или сѣчице.

78.

Наставл. *Уголъ, кои быва у точки додираня одъ дирке и тетивке, има за мѣру полу лука, одъ исте тетивке затегнутогъ.* Или уголъ
ф. 31. *АБВ* у фіг. 31., кои быва одъ дирке *АБ* и тетивке *БВ* у точки додираня, има за мѣру полу лука *БЕВ* одъ исте тетивке затегнутогъ.

Доказат. Да бы ово доказати могли, треба повући 1) Пречникъ *ГХ* на тетивку *БВ* равнотекућій: 2) Пречникъ *ЕК* на исту тетивку *БВ*, а сотымъ и на равнотекућу *ГХ* отвѣсный (§ 55. ч. 3.): 3) полупречникъ *СБ* на точку додираня; быће углови *АБС* и *ЕСГ* десни (по § 33., 69.), слѣдователно равни, или $АБС = ЕСГ$, дакле и маньи углови у овима деснима угловима наоћенисе равни су, или

$$АБВ + ВБС = ЕСБ + БСГ,$$
$$\text{али уголъ } ВБС = БСГ \text{ по § 54. ч. 2.}$$

дакле уголъ $АБВ = ЕСБ$ по § 11. ч. 7. отъ тіємъ, али уголъ *ЕСБ* има за мѣру лукъ *БЕ* по § 30., дакле и уголъ окружный *АБВ* има истый лукъ *БЕ* за мѣру, али $БЕ = ЕВ$, т. є. *БЕ* є половина лука *БЕВ*, одъ тетивке *БВ* затегнутогъ по § 65.; дакле.

79.

Слѣд. Као годъ уголъ *АБВ* што има за мѣру полу лука *БЕВ*, тако и одъ противне стране ове тетивке *БВ* уголъ окружный *ВБД*, кои такођеръ быва одъ тетивке *БВ* и дирке *БД*, има за мѣру полу лука *ВХКГБ*.

80.

Наставл. *Уголъ окружный, кои быва одъ две тетивке, има за мѣру полу лука, коме онъ крацыма своима надстои.* Или у фіг. 32. уголъ ф. 32.

окружный *АБВ (ю)*, кои быва одъ две тетивке *АБ* и *БВ*, има за мѣру полу лука *АВ*, коме онъ крацима своима надстои.

Доказат. Доказателства овога ради да се повуче у помоћь дирка *ДЕ* по ошилю поменутога угла; отудъ изродившисе углови *х* + *ю* + *я* имаю за мѣру полуокружіє или $\frac{1}{2}$ *БА* + $\frac{1}{2}$ *АВ* + $\frac{1}{2}$ *ВБ* по § 44. ч. 1., али *х* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БА*, а равнымъ начиномъ и *я* има $\frac{1}{2}$ *БВ* по § 78.; дакле за *ю* остає $\frac{1}{2}$ *АВ*, коє се доказати имало.

81.

Слѣдства. 1. Угалъ средоточный *АСВ* двоянъ є угла *ю* (т. є. двапутъ толико великій) истоме луку надстоєћегъ. Єръ угалъ средоточный *АСВ* има за мѣру цѣо лукъ *АВ* по § 30., а угалъ окружный *ю* има $\frac{1}{2}$ лука *АВ* по § 80.

ф. 33. 2. Угалъ окружный *АВБ* у фіг. 33., кои крацима своима *АВ* и *ВБ* пречнику *АБ* надстои, десанъ є. Єръ онъ има полуокружіє за мѣру одъ истогъ полупречника затегнуто, или 90° по § 80. и 21.

3. Сви углови окружни *о, ю, х* ошиля у окружію имаюћи, истоме луку надстоєћи међусобно равни су, збогъ єдне полу лука, одъ кракова ньіовы' заваћене, мѣре $\frac{1}{2}$ *ДАВБЕ*.

82.

Задатакъ. *Изъ крайнѣ точке задате праве лініє подићи отвѣсну.* Или у фіг. 34. изъ задате лініє *АБ*, крайнѣ точке *А* подићи отвѣсну *АВ*. ф. 34.

Разрѣш. Забадаюћи єданъ кракъ шестара у повольну точку *С* надъ датомъ правомъ лініомъ, а другій отвараюћи до задате крайнѣ точке *А*, и овымъ отваранѣмъ шестара *АС* да се напише лукъ *ВАД*, кои ће дату праву негди у *Д* пресѣћи. Ову точку пресецаня *Д* союжаваюћи са средоточіємъ *С* и продужуюћи докъ она написаный лукъ непресѣче у *В*, после исту пресецаня точку *В* са *А* правомъ *АВ* союжаваюћи; ова є *АВ* пожелана отвѣсна.

Доказат. Угалъ є *ВАД* десанъ, єръ онъ по § 81. ч. 2. пречнику надстои, али по § 34. ч. 1. ако єдна права лінія са другомъ сачинява десанъ угалъ, то є она на ову, а ова на ону отвѣсна; дакле. +

83.

Задатакъ. *На задату точку окружну повући дирку* или фіг. 35. да буде окружія *ВАНВ* задата точка *А*, на кою да се повуче дирка *АБ*. ф. 35.

Разрѣш. Задата точка *А* да се союзи са средоточіємъ окружія *С* правомъ *АС*, кои ће быти зрачацъ истогъ окружія, затимъ изъ задате точке *А* да се подигне отвѣсна *АБ* по § 82.; ова ће бити пожелана дирка.

Доказат. Доказателство є исто § 82.

84.

Слѣд. Преко задате у окружію точке *А* само се една дирка повући може. Єръ се само една изъ крайнѣ точке *А* праве лініе *АС* подићи може по § 37.

85.

Задат. *Изъ задате ванъ окружія точке,*
ф. 35. *на окружіе повући дирку.* Или фіг. 35. на окружіе *АНВА* изъ задате точке *Б* повући дирку *БА*.

Разрѣш. Задата точка *Б* да се союзи са средоточіемъ окружія *С* правомъ *БС*, и изъ нѣне среднѣ точке *Д* полупречникомъ *ДБ* да се напише окружіе *БАСБ*, точка *А*, у коіой ново окружіе дато окружіе пресеца, да се союзи са задатомъ точкомъ *Б* правомъ *АБ*, ова ће быти пожелана дирка.

Доказат. Кадъ се повуче зрачацъ *АС*, *АБ* є збогъ десногъ угла *БАС* по § 81. ч. 2. отвѣсна лінія по § 34. ч. 1., слѣдователно и дирка по § 70. ч. 1.

86.

Слѣд. Изъ задате ванъ окружія точке *Б* могу се две дирке повући, една изъ задате точке *Б* на *А*, а друга на *Н*. Єръ у двема овима точкама новоназначено окружіе *НБАСН* дато окружіе *АНВА* сѣче.

87.

Наставл. *Угалъ окружный, кои быва одъ тетивке и сѣчице, има за мѣру полусумму лукова одъ тетивке и сѣчице придржаваны'.* Или фіг. 36. угалъ окружный *АБВ*, кои быва одъ те- ф. 36.
тивке *ВБ* и сѣчице *АД*, има за мѣру полусумму лукова *БВ* и *БД* одъ тетивке и сѣчице придржаваны', или $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *БД*.

Доказат. Углови *АБВ* + *ВБД* као упоредни по § 43. имаю за мѣру 2Д или полуокружіе т. е. $\frac{1}{2}$ *ВД* + $\frac{1}{2}$ *ВБ* + $\frac{1}{2}$ *БД*, али угалъ окружный *ВБД* по § 80. има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ВД*, дакле за угалъ *АБВ* остае $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *БД*, а то є оно, што се имало доказати.

88.

Наставл. *Угалъ внутреный, кое се ошилѣ у кругу но ванъ средоточія нѣгова налази, има за мѣру полусумму лукова одъ исты' страна и одъ продужены' кое оне у окружію заваћаю.* Или фіг. 37. Угалъ внутреный *a*, ко- ф. 37.

єгъ се ошилѣ у кругу, но ванъ средоточія налази, има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БД* + $\frac{1}{2}$ *ЕК*.

Доказат. По продуженымъ странама угла *Ба* и *Да* до окружія, бyћe оне *ДЕ* и *БК* тетивке, да се повуче тетивка *ЕГ* равнотекуђа на *КБ*, бyћe угалъ *ю* = углу *а* по § 54., али угалъ *ю* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ГБ* + $\frac{1}{2}$ *БД* по § 80., дакле и угалъ *а* као нѣму раванъ има ту исту мѣру; али є лукъ *ГБ* = *ЕК* по § 67.; дакле равна на мѣсто равны' поставляюћи, угалъ *а* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БД* + $\frac{1}{2}$ *ЕК*.

9

89.

Наставл. *Угалъ споляшный, кои быва одъ две сѣчице, има за мѣру полуразлике лукова, кое обе оне у окружію заваћаю.* Или фiг. 38. ф. 38.
Угалъ споляшный *БАВ*, кои быва одъ две сѣчице, има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ВГ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ*.

Доказат. Изъ *Е* да се повуче тетивка *ЕГ* равнотекуђа на сѣчицу *АБ*; бyћe угалъ окружный *ГЕВ* = углу *БАВ* споляшнѣмъ по § 55., али угалъ окружный *ГЕВ* по § 80. има за мѣру полу лука *ГВ*; дакле и угалъ споляшный *БАВ* као нѣму раванъ, мора имати ту исту мѣру, али *ГВ* = *БВ* — *БГ* (као што є очевидно), а *БГ* = *ДЕ* по § 67. дакле равна на мѣсто равны' поставляюћи, т. є. на мѣсто *БГ*, *ДЕ*, угалъ споляшный *БАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ*.

90.

Наставл. *Угалъ споляшный* 1) *кои быва одъ сѣчице и дирке:* 2) *кои быва одъ две дирке, има за мѣру полуразлике лукова, на коима краци почиваю.* Или фiг. 39. 1) угалъ споляшный *ВАБ*, кои быва одъ дирке *ВА* и сѣчице *АБ*; ф. 39.
2) угалъ *ГАВ*, кои быва одъ две дирке *ГА* и *АВ*, има за мѣру полуразлике лукова, на коима краци почиваю.

Доказат. 1. Угалъ споляшный *БАВ*: овай има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ*. Єръ, кадъ се дирка *АВ* продужи до Е, и изъ точке ударания кадъ се повуче тетивка *ВК* ♯ *АБ*, бyћe угалъ споляшный *БАВ* = углу *КВЕ* окружноме по §. 54. слѣдователно имаће єдну мѣру $\frac{1}{2}$ *ВК*, кою има угалъ окружный *КВЕ* по § 78, али лукъ *ВК* = *ВБ* — *КБ*, као што є очевидно, а *КБ* = *ДВ* по § 67.; дакле угалъ споляшный има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* (поставляюћи равна на мѣсто равны').

2. Угалъ споляшный *ГАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *ГБВ* — $\frac{1}{2}$ *ГДВ*. Єръ каогодъ што угалъ *БАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* (по доказателству), тако и угалъ *ГАБ*, кои такођерь быва одъ дирке *ГА* и сѣчице *АБ*, има $\frac{1}{2}$ *ГБ* — $\frac{1}{2}$ *ГД*, дакле оба угла заєдно *БАВ* + *БАГ*, слѣдователно цео угалъ *ГАВ* има за мѣру $\frac{1}{2}$ *БВ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* + $\frac{1}{2}$ *ГБ* — $\frac{1}{2}$ *ГД*, или скраћиваюћи $\frac{1}{2}$ *БВ* + $\frac{1}{2}$ *ГБ* — $\frac{1}{2}$ *ДВ* — $\frac{1}{2}$ *ГД* = $\frac{1}{2}$ *ГБВ* — $\frac{1}{2}$ *ГДВ*. +

9

91.

Слѣдство. Што годъ далѣ ошилѣ угла одъ
ф. 40. лука или тетивке *АБ* фіг. 40. на коіой онай крацыма своима почива, отстои, сотымъ є све маный угалъ (да тако у безконечно малій отићи може). Да буде средоточіє окружія у *С*, быће $\frac{1}{2}$ лука *АБ* + $\frac{1}{2}$ *КДЕГ* мѣра угла *ю* по § 88: лукъ *АБ* є мѣра угла *С* по § 30: лукъ $\frac{1}{2}$ *АБ* + $\frac{1}{2}$ *ДЕ* угла *о* по § 88: лукъ $\frac{1}{2}$ *АБ* мѣра угла *я* по § 80: $\frac{1}{2}$ *АБ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ* мѣра угла *х* по § 89. али $\frac{1}{2}$ *АБ* — $\frac{1}{2}$ *ДЕ* < $\frac{1}{2}$ *АБ* < $\frac{1}{2}$ *АБ* + $\frac{1}{2}$ *ДЕ* < *АБ* < $\frac{1}{2}$ *АБ* + $\frac{1}{2}$ *КДЕГ*, као што є очевидно.

ГЛАВА ЧЕТВРТА.

О СВОЙСТВАМА ОКРУЖІЯ КРУГОВА МЕЂУСОБНЫМА.

92.

Изясненіє. *Окружія* кругова *сасредоточна* или *равнотекућа* зовусе она, коя обште средото-
ф. 41. чіє *С* фіг. 41. но разне полупречнике имаю. *Сю. Ся.*

93.

Наставл. *Ако се окружія кругова у три обште точке слажу, сложи ћесе у свима, и быће равна.*

Доказат. Ако се по обштимъ точкама повуку тетивке, и ове се отвѣсно двопресѣку по § 49., окружія кругова имаће исто средоточіє и истый полупречникъ (§ 72. 73.), и тако быће равна.

94.

Слѣдства. 1. Окружія два круга дакле у три точке се пресећи не могу, єръ бы се точно поклопила.

2. Ако се два окружія *АяонА* (фіг. 41.) и ф. 41.
БонБ сѣку, само ће се у две точке као *о* и *н* пресѣћи.

3. Окружія два круга само се у єдной точки додирнути могу. Єръ у две точке се пресѣцаю, а у три слажу.

95.

Наставл. *Средоточія и точка додираня окружія два круга на истой површини додирајућисе леже у єдной правой лініи.*

Доказат. Да се додирну окружія два круга изнутра у *х* фіг. 42, ньіови полупречници *Сх* ф. 42.
и *сх* на обшту точку повучени, настоаће дирки отвѣсно по § 69; дакле кадъ се изъ исте точке неке праве лініє само єдна отвѣсна подићи може по § 37., полупречници, дакле и средоточія и точке додираня у истой правой лініи *Ссх* лежати мораю.

Ако се додираю два окружія споля у x, линія CxH, преко точке додираня x прелазећа, као изъ полупречника Cx и Hx, на общту додираня точку x повучены состоећисе, одъ свію є други линія изъ C на H ванъ точке додираня повучены найкраћа, єръ свака друга линія као $CoюH$ осимъ два полупречника Co и $Hю$ (прећашньима равна по § 62. ч. 4.) содржава іоштъ празнину *ою* међу окружіяма споля наодећусе, али є найкраћа свію линія одъ точке до точке повучены, права по § 16.; дакле CxH линія є права; дакле.

96.

Задатакъ. *Точку додираня окружія два круга на истой површини додирающійсе опредѣлити.*

ф. 42. **Доказат.** Средоточія CH или Cc фиг. 42. додирающійсе окружія союжавающи, точка она у окружію, преко коє права линія прелази, точка є додираня. по § 95

ГЛАВА ПЕТА.

О ПОНЯТІЮ ПОЛИГОНА ВООБШТЕ, И О СВОЙСТВАМА ТРИУГЛОВА ПООСОБЪ.

97.

Изясненіє. *Полигонъ* (πολυγωνον) *многоуголникъ*, или фигура *многострана*, вообште зовесе просторъ одъ правы' линія заключеный. Исте оне праве лініє, коє међусобнымъ ударанѣмъ своимъ углове сачиняваю, и запремину заключаваю, зовусе стране полигона: а све заєдно узете, у колико просторъ заключеный оне опредѣлюю, *периметаръ* (περιμετρος) *омѣріє*. Полигонъ по числу страна, и углова зовесе триуголный *тригонъ*, четвероуголный *тетрагонъ*, петоуголный *пентагонъ*, шестоуголный *ексагонъ* и проч. као што се изъ три, четирь, петь, шесть, и. т. д. страна, или углова состои.

98.

Изясненіє. Полигонъ *правиланъ* зовесе, кои све стране међусобно, као и све углове међусобно равне има, иначе *неправиланъ*.

99.

Изясн. Полигона *єдновидна* (ejusdem speciei) она су, коя се изъ равногъ числа страна состоє: иначе су *разновидна.*

100.

Изясн. *Полигона подобна* зовусе она єдновидна полигона, коя углове соотвѣтственне међусобно (првый првомъ, другій другомъ, и т. д.) равне имаю.

101.

Слѣд. Сва полигона правилна єдновидна подобна су. Єръ су у овима сви углови међусобно равни, и соотвѣтственно равни.

102.

Изясн. Найпростіи полигонъ є просторъ са трима лініяма заключенъ (овде є речь о праволінейномъ), кои се поособъ *тригонъ* или *триуголъ* (τρίγονον) зове. Кадъ представимо себи,
ф. 43. да триугалъ *АБВ* фіг. 43. єдной одъ страна свои надстои, т. є. на ньой почива, она страна *БВ* зовесе *основица* (basis): остале две стране *АБ* и *АВ* *краци*, вр' угла *А*, основици противустоећій, *триугла ошилѣ*: лінія отвѣсна *АД*, изъ ошиля триугла на основицу спуштена, *высина* триугла (§ 42).

103.

Изясн. *Триугалъ* у смотренію страна зовесе *равностранъ*, (aequilaterum) кои се изъ страна међусобно равны' состои; *равнокракъ* (aequicrurum), кои има две стране равне; а триугалъ, кои све три стране неравне има, зовесе *неравностранъ* (scalenum). Триугалъ у смотренію углова, зовесе триугалъ *десноуголанъ* (rectangulum), кои има єданъ угалъ десанъ; угалъ десанъ сочиняваюће стране зовусе *катети*, а десномъ углу противостоећа страна, зовесе *ипотенуза*; *тубоуголанъ* (obtusangulum), кои єданъ угалъ тубый; и триугалъ *оштроуголанъ* (acutangulum), кои углове оштре заключує. Последня два триугла іоштъ се именую *косоуголна.**)

104.

Изяснен. Триугли (као вообште полигона), кои се само у смотренію ньіове равне површине међусобно сматраю, чисто *равни* зовусе.

104.

Изяснен. Подобіє триуглова увиђавно є изъ § 100. вообште, поособъ пакъ *триугли по-*

*) Изясненія ради у фіг. 43. △ равнокракъ, видитсе може,
„ 44. △ равностранъ,
„ 47. △ неравностранъ,
„ 45. △ десноуголанъ,
„ 46. △ тубоуголанъ,
„ 43. △ косоуголанъ.

добни зовусе оніи, кои имаю сва три угла соотвѣтственно равна: то єсть првый првоме; другій другоме, а трећій угалъ трећемъ равна. *Супротне стране* међусобно у триуглима подобнима, као вообште у полигонима подобнима, оне су, коє угловима соотвѣтственно равнима противостоє.

106.

Изяснен. Триугли *подобни* и *равни* зовусе оніи, кои и углове и стране соотвѣтственно равне имаю. А тако исто и сва полигона вообште. У таковомъ случаю кажесе, да се триугли или вообште полигона слажу.

107.

Наставл. I. *Два триугла слажусе, кадъ су две стране са обуваћенимъ угломъ међусобно равне.* Или у фіг. 48. кадъ є ф. 48.

$$\left.\begin{array}{l} АБ = аб \\ БВ = бв \\ \quad Б = \; б \end{array}\right\}, \text{ то є и } \triangle\, АБВ \cong \triangle\, абв.$$

Доказат. Да представимо себи, да се $\triangle$ $АБВ$ тако на $\triangle$ $абв$ положи, да $Б$ на $б$, $БВ$ на $бв$ падне, то мора.

1. $В$ на $в$ пасти, збогъ $БВ = бв$, дакле $БВ \cong бв$ по § 11. ч. 10.

2. $БА$ на $ба$, збогъ $АБВ = абв$.

3. $А$ на $а$, збогъ $БА = ба$; дакле $БА \cong ба$.

4. Будући да $В$ на $в$, а $А$ на $а$ пада, то є $АВ \cong ав$; дакле $\triangle\, АБВ \cong \triangle\, абв$.

108.

Слѣд. Два триугла десноуголна слажусе, кадъ су оба катета међусобно равна.

109.

Наставл. *У равнокракомъ триуглу, угли су на основицы наодећисе међусобно равни.* Или у фіг. 43. кадъ є $АБ = АВ$, то є и $АБВ = БВА$. ф. 43.

Доказат. Кадъ се изъ среднѣ точке $Д$ неравне стране $БВ$ на противоположеный угалъ $А$ подигне отвѣсна $ДА$, она ће поделити цео триугалъ на два маня међусобно равна, т. є. на $\triangle$ $ВДА$ и $\triangle$ $БДА$. Єръ кадъ се $\triangle$ $ВДА$ око стране $ДА$ преокренути представи, и на $\triangle$ $БДА$ положи, то ће се они збогъ $БД = ДВ$, $АБ = АВ$ совршено сложити и поклопити по § 107., докле быће $\triangle$ $АДВ \cong АДБ$, слѣдователно и соотвѣтственни углови међусобно равни, дакле и угалъ $Б =$ уг. $В$.

110.

Слѣд. Триугалъ, кои два међусобно равна угла има, равнокракъ є, у таковомъ триуглу равнимъ угловима супротне су стране равне, и обратно. — Равностранъ триугалъ дакле заєдно є и равноуголанъ.

111.

Настав. II. *Два триугла слажусе, кадъ су све три стране пособъ соотвѣтствене међусобно равне.* Или фіг. 48. кадъ є $АБ = аб$, $БВ = бв$, и $АВ = ав$; то є $\triangle АБВ \cong \triangle абв$.

ф. 48.

Доказат. Кадъ се $\triangle абв$ на $\triangle АБВ$ по соотвѣтственимъ странама єданъ на другій положи, т. є. страна $аб$ на $АБ$, и страна $бв$ на $БВ$, то и страна $ва$ не може пасти на другу страну но управъ по страни $ВА$, и тако ће се єве три стране совршено сложити и поклопити, али § 11. ч. 10; дакле.

112.

Слѣд. Кадъ су у два триугла соотвѣтствение стране међусобно равне, и углови соотвѣтствени међусобно равни быти морају.

113.

Настав. III. *Два триугла слажусе, кадъ се у нъима два угла са заваћеномъ страномъ међусобно равна налазе.* Или фіг. 48. кадъ су углови $б$ и $в$ равни угловима $Б$ и $В$, и кадъ є страна међу нъима заваћена $бв =$ страни $БВ$, то и $\triangle абв \cong \triangle АБВ$.

ф. 48.

Доказат. Кадъ се $\triangle абв$ по равной страни $бв$ положи на $\triangle АБВ$, страна ће $бв$ положена на страну $БВ$ као нъой равна, ню совершено

поклопити, угалъ $в$ као углу $В$ равань, пасти мора на угалъ $В$ и нѣга совершено поклопити, а тако исто и угалъ $б$ мора поклопити угалъ $Б$. Но кадъ по § 27. величина углова зависи одъ нагибаня или разширнваня кракова, и кадъ се две лініє само у єдной точки ударити и пресећи могу, то се и стране $ав$ са $АВ$ (збогъ равногъ угла $в$ и $В$), и $аб$ са $АБ$ (збогъ равногъ угла $б$ и $Б$) у точки $А$ ударити и пресећи морају; слѣдователно и угалъ $а =$ углу $А$, али такови су триугли по § 106. подобни и равни; дакле $\triangle абв \cong \triangle АБВ$.

114.

Настав. *У свакомъ триуглу сва три угла скупа равни су двома деснима.* Или у $\triangle АБВ$ фіг. 49. сва три угла $А + Б + В$ имаю за мѣру $2Д$, или $180°$. ф. 49.

Доказат. Кадъ се опише $\triangle АБВ$ окружіємъ (сматраюћи две стране као тетивке по § 72.), угалъ $А$ имаће за мѣру $\frac{1}{2}$ лука $БВ$ по § 80., угалъ $Б$ има $\frac{1}{2}$ лука $АВ$ (изъ истога узрока), угалъ $В$ пакъ $\frac{1}{2}$ лука $АБ$;

Дакле сва три угла $А + Б + В$ имаю за мѣру $\frac{1}{2} БВ + \frac{1}{2} АВ + \frac{1}{2} АБ$ или полуокружіє; слѣдователно по § 22. $2Д$, или $180°$.

115.

Слѣдства. 1. У триуглу само єданъ десанъ или єданъ тубый угалъ быти може. Єрь бы иначе сва три угла выше имала одъ $180°$.

2. Ако у каквомъ триуглу буде єданъ угалъ десанъ или тубъ, остали мораю быти оштри.

3. У триуглу десноуголномъ два угла оштра имаю скупа 90°.

4. Ако у триуглу десноуголномъ єданъ одъ оштры̀ углова познатъ буде, и другій се оштрый изнаћи може, мѣру познатогъ одъ 90° отузимаюћи. Одтудъ, ако єданъ одъ оштры̀ има 45°, толико ће имати и другій.

5. Ако у триуглу єданъ угалъ буде познатъ, отятіємъ овога мѣре одъ 180°, изнаћисе може сумма осталы̀ углова. И напротивъ.

6. Ако сумма два угла у некомъ триуглу позната буде, отятіємъ нїове мѣре одъ 180° изнаћисе може трећій угалъ.

7. Ако су некога триугла два угла поособъ или скупа равни двома угловима поособъ или скупа другога триугла, и трећій угалъ трећемъ равнъ быти мора, и обратно.

116.

Наставл. *Ако се у некомъ триуглу изъ ошиля нѣговогъ на основицу спусти отвѣсна, и углови на основицы буду оштри, она отвѣсна*
ф. 43. *мора пасти на основицу.* Или у фіг. 43. отвѣсна АД изъ ошиля А триугла АБВ на основицу спуштена мора пасти на основицу БВ.

Доказат. Да предпоставимо, да она не пада на основицу триугла, но да пада ванъ нѣ

н. п. на точку Е, быо бы у триуглу АВЕ угалъ Е десанъ § 33. а угалъ АВЕ тубый є (што є овога доугалъ по предпоставляню оштаръ), дакле бы у єдномъ и ономъ истомъ триуглу быо єданъ десанъ, и єданъ тубъ угалъ, коє є по § 115. ч. 2. невозможно; дакле.

117.

Наставл. *Ако се у триуглу тубоуголномъ изъ ошиля нѣговогъ на основицу спусти отвѣсна, она мора пасти ванъ основице.* Или у фіг. 46. ф. 46.
отвѣсна ВД изъ ошиля В триугла АБВ на основицу спуштена, мора пасти ванъ основице АБ.

Доказат. Да представимо, да отвѣсна ВД не бы ванъ основице, но на основицу АБ н. п. на точку Е пала, то бы у △ АВЕ угалъ Е десанъ быо, а угалъ є на основици А тубъ, слѣдовало бы дакле, да у єдномъ и ономъ истомъ триуглу єданъ угалъ буде десанъ, и єданъ тубъ, коє є по § 115. ч. 2. невозможно; дакле.

118.

Наставл. *У свакомъ триуглу већемъ углу противостои већа, а манѣмъ маня страна; и* обратно. Или у △ АБВ фіг. 49. већемъ углу А ф. 49.
противостои већа страна БВ, а манѣмъ углу В маня страна АБ.

Доказат. 1. Предпоставляюћи да є угалъ $А > В$, быће и нѣгова мѣра већа одъ мѣре овога, или када се истый тріугалъ опаше окружіємъ, бы'ће $\frac{1}{2}$ лука *БВ* мѣра угла *А*, коя є $> \frac{1}{2}$ лука *АБ* (§ 80.), дакле бы'ће и цѣо лукъ *БВ* већій одъ лука *АБ* по § 11. ч. 9, али већій лукъ затеже већу тетивку, а маньій маню по § 59. чис. 2; дакле и тетивка, или већемъ углу *А* супротна страна *БВ* већа є одъ стране *АБ*.

2. Предпоставляюћи да є страна *БВ* $>$ стране *АБ*, бы'ће и цѣо лукъ *БВ* $>$ лука *АБ*, по § 59.; дакле и $\frac{1}{2}$ лука *БВ* $> \frac{1}{2}$ лука *АБ* (по § 11. ч. 9.), али є $\frac{1}{2}$ лука *БВ* мѣра угла *А*, и $\frac{1}{2}$ лука *АБ* мѣра угла *В*; дакле угалъ *А* $>$ *В*; дакле.

119.

Слѣдства. 1. У свакомъ тріуглу дакле равнымъ угловима противустоє равне стране, и обратно. Зато

2. Ако у тріуглу два угла буду равна, тріугалъ є равнокракъ по § 110.

3. Ако су у тріуглу сва три угла међусобно равна, тріугалъ є равностранъ, и свакій угалъ има за мѣру 60°, и напротивъ у △ равностраномъ сва три угла међусобно равна су.

4. Ако два тріугла равнокрака єданъ угалъ раванъ буду имала, равна ће быти и остала два међусобно, дакле тріугли бы'ће подобни (§ 105). Єръ угалъ онай међусобно равный или се находи међу двема равнима странама, или се єдной одъ овы' двею противуположенъ налази: у првомъ случаю онай само одузети валя одъ 180°; остала два угла међусобно скупа и поособъ равна ће быти (по § 115. ч. 5, и 119 ч. 1): у другомъ случаю удвоєну нѣгову мѣру одузети валя одъ 180°; (§ 119. ч. 1.); трећій раванъ ће быти трећемъ (по § 115. ч. 6).

5. Тріугалъ равностранъ є тріугалъ правиланъ. Єръ осимъ равны' страна и углови су у нѣму међусобно равни.

120.

Изясн. Ако се у △ *АБВ* фіг. 50. єдна страна *ВБ* продужи до *Д*, изродићесе ванъ тріугла угалъ *АБД*, кои се у смотренію тріугла *АБВ* зове *угалъ споляшньій*. ф. 50.

121.

Наставл. *Ако се у тріуглу некомъ страна нека нѣгова продужи, угалъ споляшньій раванъ є двома внутренима супротнима скупа узетима.* Или ако се у △ *АБВ* фіг. 50. страна *ВБ* продужи, угалъ споляшньій *АБД* $= А + В$. ф. 50.

Доказ. Угли $АБД + АБВ = 2Д$ по § 43;
али и угли $АБВ + А + В = 2Д$ по § 114.
дакле угли $АБД + АБВ = АБВ + А + В$ по § 11. ч. 4.
али угалъ $АБВ = АБВ$ по § 11. ч. 1.
дакле угалъ $АБД = А + В$ по § 11. ч. 7.
а то є оно што се има доказати.

122.

Настав. *Ако се одъ два неравна но подобна триугла маньій на веѣій по соотвѣтственнимъ двема странама и по равномъ углу положи, треѣа страна быѣе са треѣомъ равнотекуѣа.* Или фіг. 51. ако се $\triangle$ *абв* на $\triangle$ *АБВ* по равномъ углу *А* и *а* положи, треѣа страна *бв* быѣе са треѣомъ *БВ* равнотекуѣа.

ф. 51.

Доказат. Єръ ако се $\triangle$ *абв* на $\triangle$ *АБВ* положи, збогъ подобности ньіове угалъ *абв* или *Абв*, као споляшньій, равань є углу *АБВ* као внутреномъ на єдной страни, али по § 55. такове су лініє равнотекуѣе;

123.

Слѣд. Дакле и обратно; ако нека лінія *бв* тако сѣче две стране *АБ* и *АВ* єднога триугла *АБВ*, да є она $\#$ на треѣу страну *БВ*, два ѣе она триугла, коя се таковомъ лініомъ сѣчицомъ производе, быти подобна.

124.

Настав. *Ако се у $\triangle$ десноуголномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спусти отвѣсна, она ѣе цѣо $\triangle$ на два маня цѣломъ и себи подобна подѣлити.* Или ако се у $\triangle$ десноуголномъ *АБВ* фіг. 52. изъ десногъ угла *А* спусти отвѣсна *АД* на ипотенузу *БВ*, она ѣе подѣлити цѣо триугалъ на два маня, цѣломъ и себи подобна.

ф. 52.

Доказат. Кадъ се спусти отвѣсна *АД* на ипотенузу *БВ*, она ѣе проузроковати

1. Два $\triangle$ *АБВ* и *АБД* подобна збогъ сва три угла соотвѣтственно равна (§ 105.). Єръ є угалъ *Б* обштій, слѣдователно раванъ, угалъ *Д* у манѣмъ триуглу збогъ отвѣсне *АД* десанъ є, дакле раванъ углу *А* по предпоставляню опетъ десномъ у $\triangle$ десноуголномъ *БАВ*, и треѣій мора быти раванъ треѣемъ по § 115. ч. 7.

2. Подобни су триугли *АБВ* и маньій *АДВ*: єръ є угалъ *Д* у маломъ триуглу збогъ отвѣсне *АД* десанъ, слѣдователно раванъ десноме *А* у великомъ триуглу: угалъ *В* обштій є у оба триугла, и треѣій угалъ раванъ є треѣемъ.

3. Подобна су два триугла *АБД* и *АВД*, коє се такоѣеръ по предидуѣемъ начину збогъ соотвѣтственны' равны' углова доказати може, или слѣдствомъ овога доказателства подъ

числомъ 1) $\triangle АБВ \sim \triangle АБД$, и по

числу 2) $\triangle АБВ \sim \triangle АВД$

дакле $\triangle АБД \sim \triangle АВД$ по § 11. ч. 4.

125.

Задатакъ. *Задатый угалъ начертати*, или фіг. 53. задатый угалъ *БАВ* сочинити. ф. 53.

Разрѣш. Пошто смо праву лінію *ав* повукли, треба у задатомъ углу *БАВ* изъ ошиля угла *А* написати лукъ *БВ* полупречникомъ *АБ*, и овымъ истымъ отваранѣмъ шестара изъ крайнѣ точке *а* повучене лініє *ав* пресецаюћи исту лінію написати лукъ *бв*, затимъ међу краке шестара узети тетивку *БВ*, и овомъ тетивкомъ пресѣћи лукъ *бв* у *б*, точку *а* са *б* соєдинявяюћи, добићемо угалъ *бав*, кои ће задатомъ *БАВ* совршено равань быти.

Доказат. По повученимъ тетивкама *БВ* и *бв*, добыћемо два триугла *АБВ* и *абв*, у коима су и стране и углови међусобно равни, али по § 106. такови су триугли подобни и равни; дакле.

126.

Задатакъ. *Надъ задатомъ правомъ лініомъ АБ* фіг. 54. *сочинити △ АБВ равностранъ.*

ф. 54.

Разрѣш. Забадаюћи єданъ кракъ шестара у крайню точку *А* задате праве *АБ*, другій кракъ да се отвори до друге крайнѣ точке *Б* исте праве *АБ*, и са овимъ отваранѣмъ шестара полупречникомъ *АБ* да се напишу надъ правомъ датомъ лініомъ изъ точке *А* и *Б* пресецаюћисе лукови, тако ћемо добыти точку *В*; ову *В* са точкомъ *А* и *Б* правима *ВА* и *ВБ* соєдинявяюћи, добићемо △ равностранъ.

Доказ. Задата страна *АБ* = *АВ* = *БВ*, єръ су то полупречници єдногъ и оногъ истогъ окружія, али таковый є △ по § 103. равностранъ; дакле.

127.

Задатакъ. *Сочинити триугалъ равнокракъ ВДЕ* фіг. 55. *кадъ є основица А и єданъ кракъ Б задатъ.* ф. 55.

Разрѣш. Повући треба праву лінію *ВД* = *А*, затимъ написати треба изъ *В* полупречникомъ равнымъ *Б* лукъ надъ истомъ повученомъ лініомъ *ВД*, и изъ точке *Д* овай лукъ пресећи истымъ полупречникомъ = *Б*, точку пресецаня лукова *Е* союзити правимъ лініяма *ЕВ* и *ЕД*, тако ћемо добыти пожеланый △ *ЕВД* равнокракъ.

Доказ. По сочиненію *ЕД* = *Б*, а и *ЕВ* = *Б*; слѣдователно △ у коима су две стране равне, али таковый є по § 103. равнокракъ; дакле.

128.

Задат. *Задатоме АБВ триуглу* фіг. 56. *другій абв подобанъ и равань начертати.* ф. 56.

Разрѣш. Пошто смо праву *бв* = *БВ* основицы повукли, треба међу краке шестара узети лінію *БА*, и сотимъ истимъ отваранѣмъ шестара изъ точке *б* надъ лініомъ *бв* назначити лукъ неопредѣленый, затымъ узети међу краке шестара лінію *АВ* и изъ точке *в* пре назначеный лукъ пресећи, тако ћемо добыти точку *а*, ову точку *а* правима *аб* и *ав* са точкомъ *б* и *в* соєдинявяюћи, добыћемо △ *абв* ≅ △ *АБВ*.

Доказ. Пошто су соотвѣтственне стране а и углови по сочиненію међусобно равни, ясно слѣдуе, да су овакови △ подобни и равни.

ГЛАВА ШЕСТА.

О СВОЙСТВАМА ТЕТРАГОНА.

129.

Изясненіе. *Тетрагонъ*, иначе *четвороуголникъ*, или *фігура четворострана* зовесе одъ четиръ праве лініе заключеный просторъ (§ 97.).

130.

Изясненіе. 1. Тетрагонъ вообште на параллелограммъ и на трапезіюмъ право поделитисе може. *Параллелограммъ* е вообште такова фігура четворострана, у коіой су две и две супротне стране равнотекуће фіг. 57. ф. 57.

2. Параллелограммъ поособъ зовесе *квадратъ* (Геометрическій), у коме су све четири стране фіг. 58. $АБ = БГ = ГВ = ВА$ међусобно равне, и сва четирь угла равна т. е. десна, слѣдователно кадъ е четвороуголникъ правиланъ (§ 98.). ф. 58.

3. Ако су сви углови равни дакле десни, но ако су стране две и две равнотекуће равне, зовесе параллелограммъ *десноуголанъ* као у фіг. 57. ф. 57.

4. *Ромбъ* е параллелограммъ, у коме су све четирь стране међусобно равне, но углови два и два супротна равна као у фіг. 59. ф. 59.

Ромбоідъ зовесе таковый параллелограммъ, у коме су две и две супротне стране равнотекуће равне, а тако два и два супротна угла равна, као у фіг. 60. ф. 60.

6. *Трапезій* вообште зовесе свака фігура четворострана, у коме су две стране супротне равнотекуће (но и неравне быти могу), а остале две неравнотекуће, као у фіг. 61. ф. 61.

7. *Трапезоідъ* зовесе она четворострана фігура, у коіой никакве стране равнотекуће неналазесе, као у фіг. 62. ф. 62.

131.

Изяснен. *Двоуголна* (diagonalis, діягонална διαγωνιοσ) зовесе она изъ едногъ угла на другій супротный повучена права лінія, као $АВ$ у фіг. 57. Но (премда погрешно, али краткости ради) подъ унакрстномъ разумеваю сваку праву изъ едногъ угла у каквомъ многоуголнику на другій противположеный повучену, т. е. коя два угла соединава, и ньи дѣли на двое. ф. 57.

132.

Настав. *Сва четирь угла у свакомъ тетрагону скупа имаю за мѣру* 4Д *или* 360°. Или у фіг. 57. и 59. сва четирь угла $А + Б + В + Д$, скупа имаю за мѣру 4Д или 360°. ф. 57. 59.

Доказат. По повученой двоуголной *АВ* цео се параллелограммъ дѣли истомъ правомъ на два триугла *АВБ* и *АВД*, у коима су свакомъ пособъ сва три угла = 2Д или 180° (§ 114.); дакле у оба триугла скупа или цѣломе тетрагону сва четирь угла имаю за мѣру два путъ толико, т. є. 4Д, или 360°.

133.

Слѣдства. Ако задата буду 1) єдна страна четвороуголника: 2) две додираюћесе стране параллелограмма десноуголногъ: 3) єдна страна са єднымъ угломъ ромба: 4) две додираюћесе стране рамбоіда са єднымъ угломъ или заваћенымъ или приклюученымъ, цео се тетрагонъ опредѣлити и сочинити може (§ 56.).

134.

Наставл. *Свакій се параллелограммъ дѣли двоуголномъ на два триугла АВБ и АВД*
ф. 57. фіг. 57. *међусобно подобна и равна.*

Доказат. Єръ пошто є страна *АБ* ⋕ *ДВ*, угалъ *м* = *н*, и *х* = *о* по § 54.; дакле триугли *АВБ* и *АВД* имаю два угла равна *м*, *н*, и *х*, *о* са заваћеномъ страномъ *АВ*, али такови су триугли по § 113. подобни и равни; дакле △ *АВБ* ≅ △ *АВД*, а то є оно што се доказати имало.

135.

Слѣдства. 1. *У параллелограмму сваке су две стране супротне не само равнотекуће, него и равне.* Єръ кадъ се △ *АВД* помисли да се положи на △ *ВАБ*, по соотвѣтственнимъ странама, слажусе стране како *БВ* и *ДА*, тако *АБ* и *ВД*.

2. Ако дакле у каквомъ тетрагону две супротне стране буду равне и равнотекуће, и остале ће две стране быти међусобно равне и равнотекуће, слѣдователно таковый ће тетрагонъ быти параллелограммъ.

3. Две (или выше) лініє равнотекуће, одъ двею равнотекући заваћене, равне су, быле ове на оне отвѣсне или коссе.

4. Кадъ двоуголна дѣли параллелограммъ на два триугла подобна и равна (§ 134.) равне основе *АБ* = *ВД* (по овога § ч. 1.), и равне высине *ВБ* = *АД* са параллелограммомъ имаюће (по § 51., 102.), свакій се триугалъ сматрати може као половина параллелограмма єднаке основице и высине. Одтудъ

5. Два триугла подобна као половине два параллелограмма подобна право сматратисе могу.

136.

Задатакъ. *Надъ задатомъ правомъ А*
фіг. 63. *начертати квадратъ.* ф. 63.

Разрѣшен. Начертати треба десанъ угалъ *БВД*, сочинити *ВК* = *ВЕ* = *А*, и повући *КГ* ⌗ *ВД* и *ЕГ* ⌗ *ВБ*, тако ћемо пожеланый квадратъ *КВЕГ* добыти.

Доказател. Ова є фігура збогъ *ЕГ* ⌗ *ВБ* и *ВЕ* ⌗ *КГ* параллелограммъ, а збогъ *ВЕ* = *ЕГ* = *ГК* = *КВ* = *А* равнострана фігура четвероуголна, и збогъ десногъ угла *КВЕ* = *ВЕГ* = *ЕГК* = *ГКВ* квадратъ или тетрагонъ правиланъ (§ 130.), кое су свойства нѣгова.

137.

Задатакъ. *Начертати квадратъ, у коме є*
ф. 64. *двоуголна задатой правой лініи А равна* фіг. 64.

Разрѣш. Повући треба праву *БК*, и изъ крайнѣ нѣне точке *Б* подићи отвѣсну *БН*, тако ћемо добыти угалъ *НБК* десанъ; овай по § 30. двопресећи, точку пресецаня *Д* са *Б* соединяваюћи неопредѣленомъ дужиномъ правомъ *БД*; на ову праву пренети задату лінію двоуголну *А* = *БД*; изъ точке *Д* на повучену праву *БК* спустити отвѣсну (по § 48.) *ДВ* = *БВ*, коя ће быти иста *ДВ* ⌗ *БН*; тако исто изъ точке *Д* повући *ЕД* ⌗ *БВ*, тако ћемо добыти пожеланый квадратъ.

Доказат. Доказателство слѣдуе изъ самогъ сочиненія.

138.

Задатакъ. *Начертати параллелограммъ АБГВ десноуголанъ, коега ће две стране равне быти задатымъ двема странама а и б* фіг. 65. ф. 65.

Разрѣш. Неопредѣлене дужине повући треба праву *АД*, и изъ крайнѣ точке *А* подићи отвѣсну *АН*, затимъ дату лінію *а* пренети на *АД* до *АБ* = *а*, а лінію *б* пренети на подигнуту отвѣсну тако да буде *б* = *АВ*; изъ точке *В* повући лінію *ВГ* ⌗ *АБ*, а изъ точке *Б* лінію *БГ* ⌗ *АН*, тако ћемо добыти квадратъ, кои ће пожеланимъ условіяма соотвѣтствовати.

Доказат. Доказателство є изъ сочиненія увићавно.

139.

Задатакъ. *Начертати ромбъ, у коме бы стране задатой лініи а,* фіг. 66. *равне быле.* ф. 66.

Разрѣш. Повући треба поволне дуживе праву *Вх*, и на ню пренети задату праву *а* = *ВД*, подићи изъ поволне точке ове праве лініє н. п. изъ *Д* отвѣсну *ДЕ* = *б*, повући *ФГ* ⌗ *Вх*, написати изъ *В* са полупречникомъ *А* лукъ *мн*, коій ће праву *ФГ* у *Н* пресећи, и повући *ДК* ⌗ *ВН*, добыћемо пожеланый *ВДКН* ромбъ.

Доказ. Доказателство є изъ сочиненія увићавно.

140.

Задатакъ. *Начертати ромбоідъ, у коме бы две разне стране двема задатимъ странама а и б, и одъ ньи заключеный угалъ, задатомъ*
ф. 67. *углу Д раванъ было,* фіг. 67.

Разрѣш. Начертати треба △ *АДВ*, у коме бы обе задате праве двема странама т. є. *а* = *ДВ*, а *б* = *ДА* было, тако да угалъ *АДВ* = углу *Д* буде, затимъ изъ овога триугла допунити валя параллелограмъ, тако ће ово пожеланый ромбоідъ быти.

Примѣчаніе. По основаніяма досадъ изложеныма моћиће ученикъ свакій задатакъ разрѣшити.

ГЛАВА СЕДМА.

О СВОЙСТВАМА ПОЛИГОНА ВООБШТЕ ОСТАЛЫ.

141.

ф. 68. Настав*л*. *Свакій се полигонъ АБВДЕ* фіг. 68. *може правымъ лініяма, изъ неке унутри наодећесе точке 0 къ свакомъ углу полигона повученимъ, на толико триуглова подѣлити, колико полигонъ страна има.*

Доказат. Доказателство є очевидно, кадъ се изброє како стране полигона, тако и триугли, на коє се по наставленію полигонъ дѣли.

142.

Наставл. *Сви углови свакога полигона имаю за мѣру толико пута* 2Д *(или* 180"*), колико у полигону страна има, манѣ* 4Д.

Доказат. Свакій се полигонъ може правима фіг. 68. изъ поволне неке унутрашнѣ точке къ свима угловима нѣговимъ повученымъ (§ 141.) на толико триуглова подѣлити, колико є у полигону страна, али свакога овога триугла сва три угла скупа имаю за мѣру 2Д по § 114.; дакле свію овы' триуглова угли скупа имаю за мѣру толико пута 2Д, колико є страна у полигону, али угли, кои се око унутрашнѣ поволне точке *о* наоде, непринадлеже къ угловима полигона (єръ се овога угли при омѣрію налазе); дакле овы мѣра (по § 44. ч. 2.) 4Д одъ мѣре свію углова одузетисе мора, да бы се мѣра свію углова полигона придобити могла; дакле. ф. 68.

143.

Слѣд. Ако бы дакле имали полигонъ правиланъ (у коме су сви углови међусобно равни) и хотели бы знати обштій угалъ нѣговъ, то треба сумму степена свію углова нѣговы' раздѣлити чрезъ число углова или страна нѣговы' (§ 23).

144.

Настав. *У полигону правилномъ наоди-се точка, коя одъ ошиля свiю углова полигона*
ф. 69. *равноотстои.* Или у фiг. 69. точка *С* равноотстои одъ ошиля свiю углова *АБВДЕК*.

Доказат. Да се двопресѣку (§ 76.) два найближа угла *А* и *Б* полигона правима *АС* и *БС*; точка *С*, у коiой се лiнiє, углове двопресецаюће, пресецаю, точка є пожелана. Єръ кадъ се изъ пресецаня точке *С* на све углове полигона повуку праве *СВ*, *СД*, *СЕ*, *СК*, оне, као отстоянiє точке *С* одъ ошиля углова по § 42. мѣреће, све су равне. Єръ полигонъ овымъ правымъ лiнiяма дѣлисе на триуглове међусобно равне и подобне, и нъiове су стране равне отстоянiю точке *С* одъ углова полигона. Тако є △ *АСБ* ≅ △ *БСВ* збогъ обште стране *БС*, и стране *АБ* = *ВБ* (§ 68.), и збогъ угла *x* = *ю* (као половине угла *Б*); дакле страна *СА* = *СВ*, и пошто є угалъ *о* (као половина двопресѣченогъ угла *А*) раванъ углу *x*, то є и *СА* = *СБ* по § 119. ч. 1; тако и о осталима; дакле *СА* = *СБ* = *СВ* и проч.

145.

Слѣдства. 1. Свакiй се полигонъ правиланъ описати може окружiємъ, прелазећимъ преко ошиля углова полигона, єръ и све окружiя точке одъ средоточiя равноотстоє.

2. И у свако се окружiє може полигонъ правиланъ сочинити.

3. Кадъ се изъ полигона правилногъ среднѣ точке или средоточiя повуку праве лiнiє на углове полигона, оне дѣле 1) углове полигона правилногъ на двоє: 2) дѣле цѣо полигонъ на толико подобны' и равны', и равнокраки' триуглова, колико є страна у полигону.

4. Обратно кадъ се углови некогъ полигона правилногъ правыма на двоє дѣле, оне пролазе преко средоточiя нѣгова, или преко средоточiя уписаногъ окружiя.

146.

Изяснен. Средня точка полигона правилногъ, коя одъ ошиля триуглова полигона правилногъ равноотстои, и коя се са средоточiємъ описаногъ окружiя слаже, краткости ради зовесе *средоточiє полигона правилногъ.*

147.

Задатакъ. *Полигонъ правиланъ опасати окружiємъ.* Или фiг. 69. Полигонъ *АБВДЕК* ф. 69.
опасати окружiємъ.

Разрѣшенiє. Да се двопресѣку два найближа угла *А* и *Б* по § 144. правыма *АС* и *БС*, точка *С*, у коiй се оне удараю, определюю средоточiє *С*, и зрачацъ *СА* повућисе имаюћегъ окружiя. (Средоточiє и зрачацъ овога повућисе имаюћегъ окружія добытисе може такођеръ, кадъ се две додираюћесе стране, као тетивке сматраю, и двопресѣку, као што смо кодъ триугла видили § 72. и 114. доказателствомъ.

148.

Слѣдства. 1. Свака страна полигона правилногъ затеже у окружію круга описаногъ равань лукъ, т. є. опредѣлително лукъ одъ толико степеній, колико показуе количникъ рѣшителный, произлазеćій изъ дѣленія 360 степеній чрезъ число страна. Дакле.

2. Страна ексагона (шестоугла) правилногъ затеже лукъ одъ 60 степеній. Одтудъ страна *АБ* ексагона правилногъ равна є полупреч-

ф. 69. нику *СА* фіг. 69. Єръ у $\triangle$ *АСБ* угалъ $C = 60^{0}$; дакле $o + x = 120^{0}$ (§ 115. ч. 5.), и збогъ $CA = CB$ угалъ $o = x = 60^{0}$; дакле и $AB = CA$ по § 119. ч. 1.

149.

Задатакъ. *У окружіє начертати триугалъ, четвороугалъ и шестоугалъ правилный.*

Разрѣшеніє. Страна шестоугла правилногъ равна є полупречнику по § 148. ч. 2; да-

ф. 70. кле узети треба полупречникъ фіг. 70. и по окружію пренети га, бележећи краковима шестара свакога пренешеногъ полупречника точке, коє кадъ се соєдине правима, добыћемо 1) пожела-

ный шестоугалъ правилный; ако ли пакъ по єдну точку изоставимо, па другу соєдинимо, т. є. *АВЕ*, добыћемо 2) триугалъ правилный (§ 58. 59). 3) Да бы смо у окружіє начертати могли четвороугалъ правилный, треба поставити пречникъ єданъ на другій отвѣсно, и ньове крайнѣ точке правима фіг. 71. *АБ, БВ, ВД, ДА* союжа- ф. 71.

ваюћи, добыћемо тетрагонъ правилный.

150.

Слѣд. Двопресецанѣмъ лукова одъ страна полигона правилногъ затегнуты' можесе число полигона правилногъ свагда удвоити; тако ако се страна тетрагона правилногъ двопресѣче, добыћемо фігуру осмострану, после ако се и те стране двопресѣку, фігуру одъ 16 страна, после 32 стране и т. д.

151.

Задатакъ. *У полигонъ правилный написати окружіє. Или у полигонъ* фіг. 72. *АБВДЕ* ф. 72.

написати окружіє.

Разрѣш. Двопресецанѣмъ двею найближи' полигона правилногъ страна *АБ* и *АЕ* отвѣсно и на двоє по § 49.; точка у коіой се двопресецаюће лініє ударају, опредѣлює средоточіє и зрачацъ уписатисе имаюћегъ окружія (§ 66. ч. 2).

152.

Задатакъ. *У триугалъ задатый АБВ* фіг. ф. 73.

73. *уписати окружіє.*

Разрѣш. Двопресећи треба два угла триуголника задатога н. п. *Б* и *В*, тако ће се двопресецајуће лініе у некой точки *С* пресѣћи. Изъ ове точке *С* повући на єдну страну триугла н. п. *БВ* отвѣсну *СЕ;* ова ће быти зрачацъ, а точка *С* средоточіе пожеланогъ окружія.

Доказателство є изъ предидући увиђавно.

153.

Задатакъ. *У задатый квадратъ АБВД*
ф. 74. фіг. 74. *уписати окружіе.*

Разрѣш. Треба повући двоуголне *АВ* и *ДБ*, кое ће се у єдной точки *С* ударити и пресећи. Изъ ове точке *С* на єдну страну квадрата спустити отвѣсну н. п. *СЕ*, ова ће *СЕ* быти зрачацъ, и точка *С* средоточіе уписатисе имајућегъ окружія.

154.

Настав. *Ако се у полигонима подобнима изъ углова соотвѣтственны' равны' на супротне повуку двоуголне, оне ће полигона раздѣлити на триуглове подобне.*

Разрѣш. Да буду полигона *АБВДЕ* и *абвде*
ф. 75. фіг. 75. подобна; збогъ соотвѣтственны' углова *А* и *а*, *Б* и *б*, *В* и *в*, *Д* и *д*, *Е* и *е*, равны', и све стране соотвѣтственне имаю оно исто међусобно нагибанѣ; тако страна *ДЕ* има оно исто нагибанѣ на *ДВ*, кое има страна *де* на *дв*, равнымъ начиномъ *АЕ* има оно исто нагибанѣ на *ЕД* и

ДБ, кое има *ае* на *ед* и на *дб* и. т. д; ако се дакле изъ соотвѣтственны' равны' углова као *Д* и *д* повуку двоуголне на супротне углове, стране соотвѣтственне полигона у смотренію сосѣдны' двоуголны' равнымъ начиномъ єдно или равно нагибанѣ имати мораю, али стране *АЕ* нагибанѣ са двоуголномъ *ДА* изражава угалъ *ЕАД*, а стране *ае* нагибанѣ са двоуголномъ *да* изражава угалъ *еад;* тако стране *ЕД* нагибанѣ са двоуголномъ *ДА* изражава угалъ *ЕДА*, стране *ед* нагибанѣ са *да* представля угалъ *еда;* дакле углови *ЕАД* и *еад*, као *ЕДА* и *еда* осимъ углова *Е* и *е* (и онако равны' као полигона подобны' соотвѣтственны') равни су; слѣдователно $\triangle АДЕ \sim аде$ по § 100. Тако исто и $\triangle АБД \sim абд$ и тако далѣ у свакимъ полигонима подобнима.

155.

Слѣд. Дакле полигона (обратно), коя се діягоналнима, изъ углова соотвѣтственно равны' на супротне повученыма, на триугле раздѣлюю, међусобно подобна су.

156.

Настав. *Ако се одъ два подобна неравна полигона манѣй на већій по соотвѣтственнимъ двема странама и по заваћеномъ равномъ углу сложно положи, остале стране бы'ће међусобно равнотекуће.*

ф. 76. **Доказат.** Да представимо себи фіг. 76. да се полигонъ маньій *абвдек* на веһій *АБВДЕК* по соотвѣтственнимъ двема странама *АБ* и *АК* на раванъ угалъ *БАК*, и изъ истога угла *А* да се на супротне повуку двоуголне *АВ, АД, АЕ*, быһе тругли *АБВ* и *абв*, а такођеръ *ВАД* и *вад* и проч. подобни; дакле соотвѣтственни углови *АВД* и *авд* и проч. кои су спољашньи и унутарньи на єдной страни, међусобно равни, слѣдователно и стране *бв* # *БВ*, *вд* # *ВД*, и проч.

ГЛАВА ОСМА.

О СОРАЗМѢРНОСТИМА ЛІНІЯ.

157.

Наставл. *Ако се у триуглу на неку страну повуче равнотекуһа, остале две стране пресецаюһа, быһе одсѣчія изъ ошиля узета, цѣлимъ*
ф. 77. *странама соразмѣрна.* Или фіг. 77. Ако се у △ *АБВ* повуче *ДЕ*, остале две стране пресецаюһа, быһе *АД* : *АБ* = *АЕ* : *АВ*.

Доказат. По повученимъ двоуголнима *ДВ* и *ЕБ*, быһе △ *ДЕБ* = △ *ЕДВ* збогъ єдне основице *ДЕ* међу равнотекуһима наодеһесе, на коіой они почиваю. Ако се свакоме одъ овы' триуглова дода △ *АДЕ*, быһе опетъ △ *АДВ* = △ *АЕБ*

(§ 11. ч. 7.). Тругли пакъ *АЕД* и *АЕБ* имаю єдну высину; єръ имаю ошиля у оной истой точки *Е*, и основице ону исту праву *АБ* (§ 38. 102.); Равнымъ начиномъ △ *АДЕ* = △ *АДВ* зато, што ошиля у обштой точки *Д* имаю, а основице исту праву *АВ*, имаю єдну высину, дакле быһе соразмѣрность △ *АЕД* : △ *АЕБ* = *АД* : *АБ*,
и △ *АДЕ* : △ *АДВ* = *АЕ* : *АВ*; но будуһи да су у овима двема соразмѣрностима предидуһа два отношенія међусобно равна; дакле и послѣдуюһа равна быти мораю, или *АД* : *АБ* = *АЕ* : *АВ*, а то є оно што се имало доказати.

158.

Слѣдства. I. Но и одсѣчія, међу равнотекуһима наодеһасе, соразмѣрна су као 1) цѣлимъ странама, тако 2) одсѣчіяма, изъ ошиля узетимъ. Єръ 1) постоєһа соразмѣрность *АД* : *АБ* = *АЕ* : *АВ* преобраһуєсе у ову *АБ* — *АД* : *АБ* = *АВ* — *АЕ* : *АВ*, али *АБ* — *АД* = *ДБ*, и *АВ* — *АЕ* = *ЕВ* (као што се изъ фігуре види), дакле (равна на мѣсто равны' поставлююһи) быва *ДБ* : *АБ* = *ЕВ* : *АВ*. 2) Постоєһа соразмѣрность *АД* : *АБ* = *АЕ* : *АВ* променюєсе и на ову *АБ* — *АД* : *АД* = *АВ* — *АЕ* : *АЕ*, али *АБ* — *АД* = *ДБ*, а *АВ* — *АЕ* = *ЕВ*; дакле *БД* : *АД* = *ЕВ* : *АЕ*.

II. Ако се дакле у триуглу некомъ на неку страну *БВ* фіг. 78. повуку ма колико равно- ф. 78.
текуһій линія, свака одсѣчія међу двема равноте-

кућима наодећасе, соразмѣрна су одсѣчіяма међу другима равнотекућима наодећимсе, као $ДБ : КБ = ЕВ : ГВ$, или $ДК : КБ = ЕГ : ГВ$ и проч.

159.

Слѣд. И обратно, ако дакле лінія права две стране триугла тако сѣче, да су одсѣчія или сама себи или цѣлимъ странама соразмѣрна, права она на трећу є триугла страну равнотекућа.

160.

ф. 78. **Задатакъ.** *Линію АБ* (фіг. 78.) *на толико частій, колико друга задата права АВ показує, соразмѣрно сѣћи.*

Разрѣш. Да се союзе дате две праве $АБ$, $АВ$ подъ поволнимъ угломъ $А$, и ньіове крайнѣ точке $Б$ и $В$ да се союзе правомъ $БВ$, на кою изъ задате праве $АВ$, на нѣне части поделѣне, точака дѣленя $Е, Г$ и проч. да се повуку равнотекуће $ЕД$, $ГК$ и проч.; ове ће сѣћи дату праву $АБ$ на пожелане части. Єръ є $АД : АЕ = ДК : ЕГ$ или $= КБ : ГВ$ (§ 158.).

161.

Настав. *Кадъ у некомъ триуглу права угалъ некій двопресѣца, она ће иста сѣћи страну противуположену на два одсѣчія, другимъ*
ф. 79. *двема странама соразмѣрна.* Или фіг. 79.

Кадъ у $\triangle$ $АБВ$ права $АГ$ угалъ $БАВ$ двопресѣца, она ће сѣћи и страну противуположену $БВ$ тако да буде $БГ : ГВ = БА : АВ$.

Доказат. Да се продужи страна $БА$ неопредѣлено, и на ту да се пренесе страна $АВ$ тако, да буде $АД = АВ$, и точка $Д$ да се союзи са точкомъ $В$ правомъ $ДВ$; быће права $АГ$ на $ДВ$ равнотекућа; єръ є угалъ x као споляшный (у смотренію $АГ$ и $ДВ$) $= м$ внутреномъ на єдной страни; а угалъ $БАВ$ (као споляшный у смотренію $\triangle$ $ДАВ$) $= м + н$ по § 121., или кадъ є збогъ стране $АД$ (по сочиненію) $= АВ$, быва и угалъ $м = н$ (§ 119. ч. 1.), то $БАВ = м + м$ (равна на мѣсто равны' поставляюћи) $= 2м$, слѣдователно оба члена уравненія чрезъ 2 дѣлећи, быва $\frac{1}{2}$ $БАВ = м$, али $\frac{1}{2}$ $БАВ = x$ (по предпоставляню права $АГ$ двопресѣца угалъ $БАВ$), дакле $x = м$. Одтудъ дакле, кадъ є у $\triangle$ $БВД$ права $ГА \# ВД$, то є онда $БГ : ГВ = БА : АД$, или на мѣсто $АД$ поставляюћи $АВ$, быва $БГ : ГВ = БА : АВ$.

162.

Настав. *Триуглова подобны' стране су соотвѣтственне соразмѣрне.* Или фіг. 51 у $\triangle\triangle$ ф. 51.
$АБВ$ и $абв$ стране су соотвѣтственне соразмѣрне.

Доказат. Кадъ се $\triangle$ $абв$ на $\triangle$ $АБВ$ по равномъ углу и по соотвѣтственнимъ странама положи, быће трећа страна $бв \# БВ$ § 122.; дакле быће $АБ : Аб = АВ : Ав$ § 156., али $АБ = аб$, и $AB = aв$, дакле $AБ : aб = AB : aв$, или променюючи $AБ : AB = aб : aв$. А тако исто и $AБ : aб = БB : бв$, и $БB : бв = AB : aв$.

163.

Слѣд. Кадъ су дакле у триуглима подобнима сваке две стране око равны' углова соразмѣрне, и обратно триугли, кои око равны' углова имаю две стране соразмѣрне, подобни су.

164.

ф. 80. **Задатакъ.** *Къ датимъ трима лініяма, четврту соразмѣрну изнаћи.* Или фіг. 80. да буду дате три лініє $Aб$, $Aв$, $Aг$, четврту соразмѣрну $AД$ изнаћи. Раз.

~~Доказат.~~ Да се союзе неке две неопредѣлене дужине лініє подъ поволнимъ угломъ A, и на єдну овы' страна да се пренесу прве две лініє н. п. $Aв$ на AB и $Aб$ на $AБ$, на другу страну оны' повучены' лінія да се пренесе трећа задата лінія $Aг$ на $AГ$, и изъ B на $БГ$ да се повуче $\#$ $BД$; быће $AД$ пожелана четврта соразмѣрна.

Доказ. Єръ є збогъ $БГ \# BД$ осимъ обштегъ угла A, угалъ $AБГ = AВД$, а сотымъ и трећій трећемъ раванъ т. є. $AГБ = AДB$, слѣдователно $\triangle AБГ \sim \triangle AВД$, али у подобнима триуглима стране су соотвѣтственне соразмѣрне (§ 162.); дакле $AБ : AB = AГ : AД$. кое се имало доказати.

165.

Слѣд. Равнимъ начиномъ и трећа на задате две праве соразмѣрна изнаћисе може, кадъ се друга, пошто є већъ на єданъ кракъ назначеногa угла пренешена, и на другій іоштъ єданпутъ пренесе, и проча по предидућемъ разрѣшенію сочинесе.

166.

Задатакъ. *Дату праву* $ДE$ фіг. 81. *на* ф. 81. *неколико н. п. на три равне части подѣлити.*

Разрѣш. Да се повуче права нека $AБ$ поволне дужине, и на ню да се пренесу три (или толико, на колико се частій права подѣлити има) равне части, поволне величине. Ове три части $AБ$ скупа узимаюћи међу краке шестара да се нѣоме сочини $\triangle$ равностранъ $AБB$, па онда узети треба задату праву $ДE$ међу краке шестара и ню на оба крака сочинѣногa триугла изъ опшиля пренети, да $BД = BE = ДE$, после изъ опшиля угла B да се повуку на точке дѣленя K и $Г$, праве BK, $BГ$; лінія задата $ДE$ у сочинѣноме триуглу $BДE$ дѣлисе или сѣчесе правима BK, $BГ$ у x и $ю$ на пожеланe три равне части тако да є $Дx = xю = юE$.

Доказ. 1. Триугалъ $BДE$ збогъ $BД = BE$ (по сочиненію) равнокракъ є, и збогъ обштегъ угла B подобанъ $\triangle BAБ$ (§ 119. ч. 4.), слѣдователно угалъ $ВДЕ = А$, и угалъ $ВЕД = Б$ (§ 122.), али у $\triangle$ $ВАБ$ равностраномъ (по сочиненію) угалъ $А = Б = В$ (§ 119. ч. 1. ч. 3.); дакле и у $\triangle$ $ВДЕ$ угалъ $Д = Е = В$; слѣдователно и $\triangle$ $ВДЕ$ равностранъ є, и тако $ДЕ = ДВ = ВЕ$.

2. Тругли $ВКА$ и $ВхД$ подобни су; єръ є угалъ $В$ у оба обштій, а $Д = А$ (по предидуђемъ доказат.), дакле и трећій трећемъ $Е = Б$ (§ 115. ч. 7.); одтудъ $АК : АВ = Дх : ДВ$ (§ 162.), али $АК = \frac{1}{3}$ $АБ = \frac{1}{3}$ $АВ$ (по сочиненію); дакле и $Дх = \frac{1}{3}$ $ДЕ = \frac{1}{3}$ $ДВ$. Равнимъ начиномъ у $\triangle$ $ВГА$ и $\triangle$ $ВюД$ подобнима $АГ : АВ = Дю : ДВ$, али $АГ = \frac{2}{3}$ $АБ = \frac{2}{3}$ $АВ$; дакле и $Дю = \frac{2}{3}$ $ДЕ = \frac{2}{3}$ $ДВ$ и проч. дакле $Дх = хю = юЕ$.

167.

Наставл. *Кадъ се у триуглу десноуголномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спусти отвѣсна, она ће быти средня соразмѣрна међу*
ф. 82. *ипотенузе одсѣчіяма.* Или фіг. 82. у $\triangle$ $БАВ$ десноуголномъ отвѣсна $АГ$ средня є соразмѣрна. т. є. $ГБ : АГ = АГ : ГВ$.

Доказат. Речена лінія отвѣсна дѣли цѣо триугалъ $АБВ$ на два маня триугла $АГБ$ и $АГВ$ подобна (§ 124.), дакле (у $\triangle$ $АГБ$) є $БГ : АГ =$ (у $\triangle$ $АГВ$) $АГ : ГВ$. (§ 162.) коє се имало доказати.

168.

Слѣд. Ако се дакле ма изъ коє окружія точке $А$. фіг. 83. спусти на пречникъ $БВ$ ф. 83.
отвѣсна $АД$, она є средня соразмѣрна међу пречника одсѣчіяма $ДБ$ и $ДВ$. Єръ, кадъ се она окружія точка $А$ тетивкама $АБ$, $АВ$ са краєвима пречника союзи, быће $\triangle$ $БАВ$ десноуголанъ (по § 81. ч. 2.) са отвѣсномъ изъ десногъ угла на ипотенузу спуштеномъ (§ 124.).

169.

Задатакъ. *Међу двема датимъ правимъ лініяма средню геометрически соразмѣрну изнаћи.* Или фіг. 83. међу задатимъ двема пра- ф. 83.
вимъ лініяма $КГ$ и $ХК$ средню геометр. соразмѣрну изнаћи.

Разрѣш. Задате оне две праве да се пренесу на єдну тако, да буде $КГ + ХК = БВ$, и надъ овомъ као пречникомъ изъ среднѣ нѣне $С$ као средоточія круга, да се напише окружіє, после изъ точке међусобногъ союжаваня $Д$ да се подигне отвѣсна $ДА$, коя ће окружіє пресећи: она є пожелана средня соразмѣрна, или $БД : АД = АД : ДВ$ (§ 167. 168.).

170.

Наставл. *Ако се изъ точке неке на окружіє повуче єдна дирка, друга сѣчица, быће*

дирка средня геометрически соразмѣрна међу цѣломъ сѣчицомъ и нѣнымъ одсѣчіемъ ванъ
ф. 84. *окружія наодећимсе.* Или фіг. 84. Ако се повуче изъ точке *А* на окружіе дирка *АВ* и сѣчица *АБ*, быће *АБ : АВ = АВ : АГ.*

Доказат. По повученимъ тетивкама *ГВ* и *ВБ*, △ *АВГ* ∼ △ *АБВ*; єръ осимъ обштегъ угла *А*, углови су *АВГ = АБВ* (§ 80. збогъ єдне $\frac{1}{2}$ лука *ВГ* мѣре), слѣдователно и трећій трећемъ мора быти равань; дакле су ово триугли подобни, а у подобнима триуглима стране су соотвѣтственне соразмѣрне (§ 162.), дакле постављаюћи соразмѣрность, быће *АБ : АВ = АВ : АГ*, кое се доказати имало.

171.

Настав. *Кадъ се изъ точке неке ванъ окружія наодећесе, повуку две сѣчице на окружіе, быће ніова одсѣчія ванъ окружія положена, цѣлимъ сѣчицама узаймно узета сораз-*
ф. 85. *мѣрна.* Или фіг. 85. На окружіе *БВДГБ* изъ точке *А* кадъ се повуку две сѣчице *АБ* и *АВ* быће *АБ : АВ = АД : АГ.*

Доказат. По повученимъ тетивкама *ГВ* и *ДБ*, △ *АДБ* ∼ △ *АГВ*; єръ имаю осимъ обштегъ угла *А*, углове *Б* и *В* равне (§ 81. ч. 3.), дакле § 115. ч. 7., а у триуглима подобнима стране су соотвѣтственне соразмѣрне; дакле *АБ : АВ = АД : АГ.*

172.

Настав. *Одсѣчія тетивака пресецаюћіисе узаймно су соразмѣрна.* Или фіг. 86. одсѣчія ф. 86.
ВД и *ДБ* тетивака *АБ* и *ВГ* пресецаюћій се узаймно су соразмѣрна т. є. *АЕ : ВЕ = ДЕ : ЕБ.*

Доказ. По повученимъ тетивкама *ВБ* и *АД* добыћемо два триугла *АДВ* и *ВАД*, кои су подобни; єръ су у нѣима сва три угла међусобно соотвѣтственно равна. Угли су *ВЕБ* и *АЕД* као очелѣни међусобно равни (§ 45.): угаль *Б* = уг. *Д* збогъ єдне мѣре $\frac{1}{2}$ лука *АВ* (по § 81. ч. 3.), и угаль *А* = уг. *В* збогъ єдне $\frac{1}{2}$ лука *БД* мѣре. Ови су дакле триугли подобни, а у подобнима триуглима стране су соотвѣтственне соразмѣрне; дакле *АЕ : ВЕ = ДЕ : ЕБ.*

173.

Изясненіе. Лінію *средньимъ и крайньимъ отношеніемъ сѣћи* зовесе лінію на две неєднаке части сѣћи тако, да нѣна часть већа буде средня соразмѣрна међу цѣломъ лініомъ и нѣномъ частію маньомъ.

174.

Задатакъ. *Дату лінію* *АБ* фіг. 86′. *сред-* ф. 86′.
ньимъ и крайньимъ отношеніемъ сѣћи.

Разрѣш. Подизаюћи изъ крайнѣ ма кое точке н. п. *Б* дате праве лініе *АБ* отвѣсну *БМ*, коя да буде равна половини *АБ*, после са ономъ истомъ отвѣсномъ *БМ* као полупречникомъ изъ *М* као средоточія да се напише окружіе круга *БГВБ*, бы'ће дата права *АБ* дирка (§ 70. ч. 1.). Далѣ изъ друге крайнѣ точке *А* задате праве *АБ* и преко средоточія *М* да се повуче сѣчица *АВ*, и одсѣчіе ове ванъ окружія положено *АГ*, да се пренесе на дату праву изъ *А* до *Д* тако, да буде $АД = АГ$; точка *Д* бы'ће она, у коіой се дата права по исканю сѣче тако, да стои $АБ : АД = АД : ДБ$.

Доказат. По сочиненію фігуре стои

$АВ : АБ = АБ : АГ$. по § 170.

дакле $АВ - АБ : АБ = АБ - АГ : АГ$ (отятіемъ променута)

али $АВ - АБ = АГ$ (по сочиненію $АБ = 2МБ$) $= ГВ$ пречнику.

Али $АВ - ГВ = АГ$;

дакле и $АВ - АБ = АГ$;

такођеръ $АБ - АГ = ДБ$ (єръ є по сочиненію $АГ = АД$),

али $АБ - АД = ДБ$, дакле

и $АБ - АГ = ДБ$:

одтудъ $АГ : АБ = ДБ : АГ$ (поставляюћи равна на мѣсто равны')

или $АБ : АД = АД : ДБ$ (на мѣсто *АГ* поставляюћи *АД*, и соразмѣрность преокретаюћи), а то є оно што се доказати имало.

175.

Наставл. *Кадъ се у триуглу равнокракомъ, кога су оба угла на основицы лежећа, свакій двоянъ угла у вр'у триугла положена, ма кои угалъ при основицы некомъ правомъ двопресѣче, истомъ ће се правомъ сѣћи страна овомъ углу супротна средньимъ и крайньимъ отношеніемъ.*

Или у △ *АБВ* равнокракомъ фіг. 87., у коме є $Б = 2А$, и $В = 2А$, кадъ се угалъ *В* правомъ *ГВ* двопресѣче; страна супротна *АБ* сѣчесе на два одсѣчія *АГ* и *БГ* средньимъ и крайньимъ отношеніемъ тако, да бива $БГ : АГ = АГ : АБ$. ф. 87.

Доказат. Збогъ угла *В* двопресѣченогъ стои сораз:

$БГ : АГ = БВ : АВ$ по § ~~171~~ 161

али $АВ = АБ$, равне стране,

и $БВ = АГ$,

дакле $БГ : АГ = АГ : АБ$, равна на мѣсто равны' поставл: Доказатисе има да є $БВ = АГ$, коє се овако посведочава: у △ *АБВ* по предреченнымъ овога свойствама угалъ є $А = 36''$, $Б = 72''$, $В = 72''$ по § 114. и кадъ се цѣо угалъ $В = 72''$ правомъ *ВГ* двопресѣца, и угалъ є $БВГ = ГВА = 36'' = А$, а тако є и у △ *БВГ* и угалъ $БГВ = 72''$. § 114., 115. ч. 6. слѣдователно $БВ = ГВ = АГ$ § 119. ч. 1.

176.

Задатакъ. *Сочинити триугалъ равнокракъ тога свойства, да свакій уголъ при основицы двоянъ буде угла у вр'у триугла наодећег' се.*

ф. 87. Разрѣшеніе. Да се кракъ *АБ* фіг. 87. триугла *АБВ* сѣче средньимъ и крайньимъ отношеніемъ по § 174. и одсѣчіемъ већимъ *АГ* као полупречникомъ изъ точке пресецаня *Г* и изъ друге одсѣчія манѣгъ *ГБ* крайнѣ точке *Б* да се назначе пресецајућіисе лукови у *В*, ова точка *В* да се союзи правима са *А* и *Б*; △ *АБВ* пожеланогъ свойства сочинѣнъ є.

Доказат. Да се повуче права *ГВ*; добићемо △ *БВГ* равнокракъ (збогъ *ГВ* = *ВБ* као = *АГ*), а скупа и подобанъ △ *БАВ*. Єръ по предидућемъ сочиненію пошто є страна *АБ* средньимъ и крайньимъ отношеніемъ пресѣчена, бива *АБ* : *АГ* = *АГ* : *ГБ* (§ 174.), или збогъ *АГ* = *БВ* бива *АБ* : *БВ* = *БВ* : *ГБ* (§ 11. ч. 4.), то єсть : △ △ *БВГ* и *БАВ* имаю стране око обштегъ дакле равногъ угла *Б* соразмѣрне, али такови су триугли подобни § 163.; дакле △ *БВГ* ∼ △ *АБВ*; слѣдователно уголъ *ВБГ* (као обоима △ обштій) = углу *ВБА*, уголъ *БВГ* (као маный угла *БВА*, у коме се онъ као часть у цѣломе содржава) = углу *БАВ* (§ 105. и 119. ч. 1.), и сотимъ уголъ *ВГБ* = углу *АВБ* (§ 115. ч. 7.); єръ є уголъ *ВГБ* = углу *ВБГ* (збогъ *БВ* = *ГВ*); дакле є и уголъ *АВБ* = углу *АБВ*, слѣдователно страна *АВ* = *АБ*

(§ 119. ч. 1.), и △ *АБВ* равнокракъ є (§ 119. ч. 2.). Далѣ уголъ *АБВ* двоянъ є угла *А*, или = 2*А*; єръ є уголъ *АБВ* или *ГБВ* (§ 27.) = углу *ВГБ*, али уголъ *ВГБ* (као споляшный у смотренію △ *АГВ*) = углу *ГВА* + *А* (§ 121., или *А* на мѣсто равногъ угла *ГВА* збогъ *АГ* = *ГВ* поставляюћи) = *А* + *А* = 2*А*; дакле є и уголъ *АВБ* двоянъ угла *А*, или = 2*А*. Слѣдователно пожеланый триугалъ по предидућемъ разрѣшенію добро є сочинѣнъ.

177.

Задатакъ. *У окружіе уписати* 1) *декагонъ* (десетоугалъ); 2) *пентагонъ* (петоугалъ) *правилный.*

Разрѣш. Зрачацъ *АБ* окружія фіг. 88., да се сѣче средньимъ и крайньимъ отношеніемъ, одсѣчіе веће є страна декагона правилногъ, кою пренашајући десеть пута, точно ће цѣло окружіе заватити. Кадъ се дакле точке поєдине сосѣдне и на окружію назначене правима соедине, добыћесе декагонъ: а ако се по єдна изостави, па се прва съ трећомъ и т. д. союзи правима, добыћемо пентагонъ правилный. ф. 88.

Доказат. Ако се по § 176. сочини триугалъ равнокракъ, коєга є кракъ зрачацъ окружія, уголъ *А* у вр'у триугла наодећійсе, дакле и нѣговъ лукъ *БВ*, кои одсѣчіє веће полупречника затеже средньимъ и крайньимъ отношеніемъ сѣ-.

ченогъ, содржава 36°, као што є изъ свойства овога триугла познато (§ 175.), али толико степенiй затеже и страна декагона правилногъ § 148; дакле полупречника среднымъ и крайнымъ отношенiємъ сѣченога, одсѣчiє веће страна є декагона правилногъ.

178.

Задатакъ. *Полигонъ правилный, когда є*
ф. 89. *страна АБ* фiг. 89. *задата, сочинити* 1) *геометрически,* 2) *механически средствомъ преносителя* (transportatorium).

Разрѣш. 1) Изъ крайны' дате стране $AБ$ точака A и $Б$ полупречникомъ равнымъ истой страни да се назначе пресецаюћисе лукови у M, да се союзи M правима са A и $Б$; бы'ће $AБM$ триугалъ равностранъ, слѣдователно правиланъ § 98.

Кадъ се изъ крайнь' дате праве стране точака A и $Б$ подигну лiнiє отвѣсне AB, и $БД$, датой страни равне, и точке B и $Д$ правомъ $BД$ соєдинесе, добыћемо квадратъ, слѣдователно тетрагонъ правиланъ (129. и 130.).

За остала полигона правилна слѣдуюћiй начинъ служити може: Да се упише или начерта у окружiє повољногъ полупречника полигонъ $aбвдe$
ф. 90. фiг. 90. повољногъ вида, бы'ће триугли у начертаномъ $aмб$, и $AMБ$ начертатисе имаюћемъ полигону (кои се као начертанъ у окружiю међутимъ

представити може) међусобно подобни; слѣдователно $aб : aм = AБ : AM$ (§ 162.), одкуда се наћи може четвртiй членъ или полупречникъ AM онога окружiя, у коме се дата страна точно толико пута пренети може, колико страна пожеланый полигонъ има. Кадъ смо зрачацъ AM изнашли, да се назначе изъ A и $Б$ пресецаюћисе у M лукови, и изъ исте ове точке M да се напише окружiє круга $AБВДЕA$, и на нѣга да се пренесе задата страна. Но овымъ начиномъ само се она полигона правилна, коя се у окружiє геометрiчески уписати могу, надъ задатомъ страномъ геометрически сочинити могу. Зато

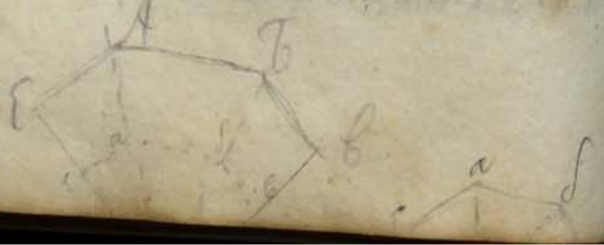
2) Она полигона правилна, коя се у окружiє геометрiчески уписати немогу, механически средствомъ преносителя слѣдуюћимъ начиномъ надъ задатомъ страномъ сочинявающе: да се назначи у крайньима стране $AБ$ фiг. 91. точкама A и $Б$ ф. 91.
средствомъ преносителя угалъ, кои ће раванъ быти половини сочинитисе имаюћегъ полигона углу, и изъ точке M, где се стране сочинѣны' углова ударају (§ 144. ч. 4.), да се напише полупречникомъ AM окружiє, на коє задату страну пренети валя толико пута, колико се зактевало.

Примѣчанiє. Неће излишно быти, ученицыма употребленiє *преносителя* или полуокружiя на степене раздѣленогъ, съ коимъ се на артiи свакiй угалъ сочинити може, изложити. Найпре се опредѣли угалъ сочинитисе имаюћегъ полигона по § 142. и 23. после поставити треба преноситель на задату *АБ* сочинитисе имаюћегъ полигона тако, да се средоточіє преносителя са крайньомъ точкомъ *А*, пречникъ нѣговъ са задатомъ страномъ *АБ* слаже, после изъ пречника окрайности *Е*, на задатой страни наодећегсе, починяюћи да се изчисле на преносителѣвимъ окружіємъ половина толико степеній, колико угалъ сочинитисе имаюћегъ полигона, пре тога опредѣленый, содржава, точка она *Д*, у коіой се полакъ числа степеній опредѣленогъ угла окончава, да се забележи, и преко ове да се повуче изъ *А* неопредѣлена *АДМ*. А то исто да се учини и на другомъ окрайку *Б* задате стране *АБ*. Изъ точке *М*, у коіой се *АМ* и *БМ* пресецаю, полупречникомъ *МА* да се напише окружіє круга, и на то да се пренесе дата страна *АБ* онолико пута, колико се иште, да пожеланый полигонъ сочини.)

179.

Наставл. *Стране соотвѣтственне полигона подобны сразмѣрне су.*

Доказат. Ако се изъ соотвѣтственны' углова равны' на супротне повуку двоуголне, она
ф. 75. се полигона фіг. 75. *АБВДЕ* и *абвде* цепаю на триугле подобне § 154.; дакле у △ *АДЕ*, и △ *аде* бива *ЕД* : *ед* = *АЕ* : *ае* (§ 162.), и *АЕ* : *ае* = *АД* : *ад*, и *АД* : *ад* = *АБ* : *аб*, дакле и *АЕ* : *ае* = *АБ* : *аб*; у △ *БДВ* и △ *бдв* бива *БВ* : *бв* = *ДВ* : *дв*.



180.

Наставл. *Омѣрія полигона подобны' имаюсе као сваке две стране соотвѣтственне.*

Доказат. Предпоставляюћи да су полигона фіг. 75. *АБВДЕ* и *абвде* подобна; бы'ће *АБ* ф. 75.
: *аб* = *БВ* : *бв* = *ВД* : *вд* = *ДЕ* : *де* = *ЕА* : *еа* (§ 179.), дакле и сумма предидући' *АБ* + *БВ* + *БД* *ДЕ* + *ЕА* или омѣріє *О* имасе къ сумми послѣдуюћи' *аб* + *бв* + *вд* + *де* + *еа* или омѣріє *о* = *АБ* : *аб* или = *БВ* : *бв* и. проч.

181.

Наставл. *Омѣрія полигона подобны' имаюсе такођеръ као сваке две двоуголне соотвѣтствителне, изъ равны' углова на супротне повучене.*

Доказ. Омѣріє єднога полигона назначаваюћи са *О*, а другога *о*, бы'ће у фіг. 75. *О* : *о* ф. 75.
АБ : *аб* (§ 180.), но збогъ подобны' триуглова *АДВ* и *адв* бива *АБ* : *аб* = *АД* : *ад* или *БД* : *бд* (§ 162.); дакле и *О* : *о* = *АД* : *ад*, или = *БД* : *бд*.

182.

Наставл. *Омѣрія полигона правилны' подобны' имаюсе као полупречници описаны' окружія.*

Доказат. Да назначимо фіг. 90. омѣріє ве- ф. 90.
ћега полигона са *О*, а манѣга са *о*, бива *О* : *о*

$= AB : a\delta$ по § 180., али кадъ су $\triangle$ *АМБ* и $\triangle$ *амб* равнокраци (по § 21. ч. 1.), и збогъ равны' углова *М* и *м* (§ 148. ч. 1.) подобни (§ 119. ч. 4.), бива *АБ* : *аб* = *МА* : *ма*(§ 162.); дакле *О* : *о* = *МА* : *ма*.

183.

Слѣдства. 1. Окружія дакле кругова имаюсе као полупречници или пречници. Єръ се окружія сматрати могу као полигона правилна подобна, као полигона безчислены' страна неопредѣлено малы', и тако међусобно равны'.

2. Дакле и полуокружія, четверти окружія, и вообште сви *лукови подобни*, кои т. є. у смотренію ньіовы' окружія оно исто число степеній имаю, имаюсе као полупречници. Ако се два окружія назначе са *П* и *п*, ньіови полупречници са *Р* : *р*, бива *П* : *п* = *Р* : *р* (по овога § ч. 1.), одтудъ $\frac{1}{2}$*П* : $\frac{1}{2}$*п* = *Р* : *р*, или $\frac{1}{4}$*П* : $\frac{1}{4}$*п* = *Р* : *р*; и. т. д.

3. Ако дакле буде отношеніє познато, вообште међу пречникомъ и окружіємъ, као међу замѣномъ праве лініє опредѣлене, и ако се на то пособъ зада пречникъ надлежный такођеръ у равноважной лініи правой, и обратно изъ задатогъ окружія надлежный пречникъ безъ сваке теготе наћисе може. Али

Примѣчаніє. Оваково отношеніє у смислу математіческомъ опредѣлити, тегота є непобђена, и непобѣдима. Зато су многи учени мужеви теженя своя на то обратили, да бы оваково отношеніє, у колико є возможно, што ближе и совершеніє изнашли, коє бы се не само у свакой потреби обштой, но и у потреби геометрической безъ знамените рачуна погрешке употребити могло. По рачуну *Архімедовомъ* има се вообште пречникъ на окружіє као **7 : 22**; по рачуну *Лудолфа* (у смотренію само прве три цифре) има се као **100 : 314**. Оно пакъ пречника къ своимъ окружію отношеніє, коє є *Адріянъ Метій* међу списаніяма почившегъ свогъ отца нашао, ово є као **113 : 355**.

На примѣръ, да намъ є задатъ пречникъ $= 14'$, кога се окружіє x тражити има у равноважной правой лініи; быће $7 : 22 = 14' : x$, одтудъ $7x = 22 \times 14' = 308'$, и $x = \frac{308}{7} = 44'$. Или на краће, $7 : 22 = 14 : x$, предидуће чрезъ 7 дѣлећи, бива $1 : 22 = 2 : x$, и одтудъ $x = 2 \times 22 = 44'$.

ГЛАВА ДЕВЕТА.

О ПОВРШИНАМА.

184.

Изяснен. *Мѣрити*, зовесе отношеніє числено изнаћи међу количествомъ, коє се мѣрити има, и међу другимъ количествомъ истога рода, кое се као единица за мѣру узима (т. е. съ којомъ се мѣри). Ова се единица зове *мѣра*. Дакле мѣрити зовесе отношеніе числено изнаћи међу мѣритисе имајућимъ количествомъ и мѣромъ.

185.

Слѣд: Мѣра мора опредѣлено количество быти, слѣдователно непремѣнно, и свагда са количествомъ, кое се мѣри, равноимено. Зато могу лініе лініяма, површине површинама, а тѣла съ тѣлама мѣрити. И одтудъ мѣра, којомъ лініе мѣримо, зовесе *мѣра дужине;* а она, съ којомъ површине мѣримо, *мѣра површности* или *мѣра квадратна;* она пакъ, којомъ тѣла мѣримо, *мѣра кубическа.*

186.

Изяснен. 1. Единица съ којомъ се послужуемо при мѣри дужине, то е една права линія, коя одъ прилике дужину човечіе стопе има, и зато се зове *стопа* (pes).

А за мѣренѣ дужій лінія опредѣлена е единица, коя се зове *хватъ*, кои е 6 стопа дугачакъ. Већа отстоянія мѣресе ланцемъ, коега е дужина 10 хватій. Іоштъ већа отстоянія мѣресе миляма, одъ кои' една има 4000 хватій, или 24000 стопа.

Стопа дѣлисе на 12 равны' частій и свака ова часть зовесе *палацъ*, палацъ на 12 *лінія*, а лінія на 12 точкій.

За назначеніе хвата употреблюесе овай знакъ (0)
" " стопе " " " (′)
" " палца " " " (″)
" " лініе " " " (‴)
и т. д.

Единица за меренѣ површине, та е найправилнія површина или квадратъ, коега е свака страна равна едной стопи, и зато се зове *стопа квадратна* (□′).

Квадратный хватъ (□°) има 36 □′, една квадратна стопа 144 квадратны' палаца (□″), а квадратный палацъ има 144 квадратны' лінія (□‴) и т. д.

Тако исто има квадратна миля 16,000.000 квадратны' хватій.

Едно *ютро* или *данъ ораня* состоисе изъ 1.600 квадратны' хватій, дакле квадратна миля има 10.000 ютара.

187.

Изясн. *Линію неку мѣрити* зовесе изтраживати, колико она хватій, стопа и палаца има, т. е. колико е хватій и т. д. дугачка, и оно е число, кое показуе, колико се пута ова единица хватъ са своимъ подраздѣленіяма у оной лініи садржава, управъ *мѣра* оне лініе.

188.

Слѣд. Права се линія дакле самимъ броянѣмъ, колико се пута единица са своимъ подраздѣленіяма у нѣой садржава, мѣри.

189.

Изясн. Мѣра површине є (§ 186.) стопа квадратна, дакле кадъ бы имали површину какву мѣрити, морали бы єдиницу (стопу квадратну) толико пута єдну до друге меѣати, колико се пута то на мѣритисе имаюѣой површини учинити може. Далѣ на остатакъ задате површине, коя бы маня была одъ єдне стопе, морали бы палацъ квадратный поставляти, да бы дознати могли, колико се пута свакій родъ овы' єдиница у мѣритисе имаюѣой површини содржава, и сотимъ се површине просторъ опредѣлює.

Но будуѣи да се мѣренѣ простора површногъ дѣйствително на другомъ мѣсту и у веѣой обширности (коє є предмѣтъ практіческогъ землѣмѣрія) предавати има, овде у овой части имамо мы онай начинъ геометрическій изложити, коимъ се површный просторъ помоѣію рачуна изнаѣи може.

190.

Наставл. *Преко три точке неуредно наодеѣесе, само се єдна површина равна повуѣи може.*

ф. 92. Или фіг. 92. преко три чочке A, $Б$, $В$ само се єдна површина равна повуѣи може.

Доказат. Изъ A да се повуку праве лініє $AБ$ и $AВ$, после да представимо себи, да се права $AБ$ поредъ праве $AВ$ движе, изродиѣесе вообште површина равна (§ 5.), коя преко задате три

точке прелази. Да се движе далѣ ма колико пута и ма каква лінія права по $AБ$ изъ A къ $В$ пономъ истомъ управленію $AВ$, или по $AВ$ изъ A къ $Б$ по управленію $AБ$; свагда ѣе се изродити површина равна, са преѣашньомъ слагаюѣасе, и ону исту сочиняваюѣа.

191.

Слѣд. Одтудъ три точке, коє положеніє своє у правой лініи немаю, опредѣлюю станѣ, положеніє и управленіє површине праволінейне тако, да се две површине равне, као површине у три точке додирнути не могу, безъ да се небы у єдну сложиле.

Примѣч. Одтудъ се види узрокъ, зашто сацакъ, асталъ или столица тронога и проч. на патосу собномъ свагди и свагда тврдо (макаръ на хоризонтъ не равнотекуѣе) стои, и нелюлясе, коє се са четвороногимъ свагда недогаѣа.

192.

Изяснен. По разлики движенія и управленія лініє производеѣе произлазе равне површине *праволінейне* или *површине равне*, ако движеѣасе лінія предузето движеніє своє постоянымъ управленіємъ задржи, иначе *криве* или *криволінейне*. Ова криволінейна далѣ іоштъ може быти *пупчаста* (convexa), или *дубаста* (concava), т. є. површина изпупчено узвышена, или издублѣна.

193.

ф. 57. **Изяснен.** Параллелограммъ *АБВД* фіг. 57. рађасе, кадъ се лінія права производећа *АБ* по управленію друге неке праве лініє *АД* движеніємъ равнотекућимъ движе, и движеніємъ своимъ трагъ за собомъ непресѣчно заоставля. Ако лінія управителница *АД* фіг. 57. буде отвѣсна на лінію или основицу производећу *АБ*, рађасе параллелограммъ десноуголанъ, ако пакъ управител-
ф. 60. ница *АВ* фіг. 60. на основицу буде косса, произведеный параллелограммъ быће косоуголанъ.

194.

Наставл. *Просторъ површный параллелограмма раванъ є производу изъ основице нѣгове и высине.* или умноженіем од висине

Доказат. Єръ параллелограммъ по постаню нѣговомъ (§. предидућ.) состоисе изъ основа
ф. 57. *АБ* фіг. 57. толико пута по управителницы *АД* узетогъ, колико є у управителницы *АД* точкій, али то значи, основицу толико пута узети, колико у высини нѣговой *АД* точкій има; дакле

И то є свеєдно, или параллелограммъ быо десноуголанъ или коссоуголанъ: єръ коссоуго-
ф. 67. ланъ *АБВД* фіг. 67. раванъ є десноуголномъ *АБНК* збогъ триуглова *АДК* и *БВН* равны. фіг 67

195.

Слѣд. 1. Кадъ є триугалъ половина параллелограмма одъ оне исте основице и высине по § 134. ч. 4. *просторъ површный триугла раванъ є пола производу изъ основице и высине*; то есть: *производу изъ пола основице и высине*, или обратно, *изъ цѣле основице и пола высине.* Или

2. Да назначимо површину єднога триугла $= П$, основицу $= О$, а высину $= В$; слѣдуе

$$П = \frac{О \times В}{2}$$ изъ овога слѣдуе

$$П = \frac{О}{2} \times В = О \times \frac{В}{2}.$$

Ако и другога триугла површину назначимо $= п$, нѣгову основицу $о$, а высину $в$, имасе

$П : п = \frac{1}{2}\, ОВ : \frac{1}{2}\, ов$, или

$П : п = ОВ : ов$;

ако є $О = о$, могусе членови другогъ отношенія чрезъ $О$ и $о$ дѣлити, т. є. предидућій членъ $ОВ$ чрезъ $О$, а послѣдуюћій $ов$, чрезъ $о$, быће

$П : п = В : в$; то есть: ако два триугла єднаке основице буду имала, она ће се међу собомъ имати као высине нѣове. Ако ли пакъ $В = в$, могусе у истой оной пређашньой соразмѣрности $П : п = ОВ : ов$ другога отношенія членови чрезъ $В$ и $в$ дѣлити, тако ћемо добыти

$П : п = О : о$; т. є. ако два триугла єднаке высине буду имала, она ће се међу собомъ имати као нѣиове основице.

3. Ако дакле два триугла имаю равне основице и равне высине, они ће быти у смотренію простора површногъ равни (§ 104.). Єръ є у таковомъ случаю $О = о$, и $В = в$, кадъ се у овой соразмѣрности $П : п = ОВ : ов$ друго отношеніє раздѣли чрезъ $О$ и $о$, пакъ чрезъ $В$ и $в$, слѣдує $П : п = 1 : 1$; дакле $П = п$.

4. Одтудъ ако се два (или выше) триугла налазе међу двема равнотекућима надъ обштомъ основицомъ, они су међусобно равни. Єръ осимъ обште и равне основице имаю и равне высине.

5. Два триугла могу дакле у смотренію површногъ простора равни быти, безъ да бы међусобно подобни были.

196.

Наставленіє. *Површина квадрата правилногъ равна є производу основице и высине нѣгове, или равна є производу єдне стране нѣгове, умножене са собомъ самомъ.*

Доказат. Будући да се параллелограмми међусобно тако имаю, као нѣиови производи изъ основице и высине (§ 195. ч. 2.), дакле ако у
ф. 93. фиг. 93. малый онай квадратъ $Е$ єдиница, съ коіомъ онай великій квадратъ $АБВГ$ измѣрити имамо, то найпре опредѣлити треба мѣру основице

$ГВ$ и высине $ГА$ мѣромъ дужине $аб$, производъ ће ове две мѣре дати просторну површину квадрата $АБВГ$; дакле

$$АБВГ : Е = ГВ \times ГА : гв \times га.$$

Ако є $гв \,.\, га = 1$, т. є. єдиницы мѣре дужине, то є нѣіовъ производъ опетъ єдиница, а $Е$ єдиница мѣре површне, дакле мора быти

$$АБВГ : Е = ГВ \times ГА : 1,$$

или $$АБВГ = ГВ \times ГА \times Е.$$

Тако дакле садржава квадратъ правилный $АБВГ$ у своіой површини $ГВ \times ГА$ пута єдиницу мѣре површне $Е$.

Ако є $Е$ стопа квадратна, то є $аб$ стопа у дужину. Дакле, *површина или просторъ површный квадрата наћи се може, кадъ се нѣгова основица и высина измѣри, и ове се мѣре међусобно умноже.*

197.

Слѣд. Будући да є свакій квадратъ равностраный четвороуголъ правилный, слѣдує: просторъ површный квадрата израчунатисе може, кадъ се мѣра єдне стране собомъ самомъ умножи.

198.

Задатакъ. *Изъ задате површине параллелограмма, и єдне къ нѣговомъ рачуну нуждне стране, другу страну изнаћи.*

Разрѣш. Да назначимо поврншину паралелограмма $= П$, основицу $= О$, а нѣгову высину $= В$, бы'ће по § 194 $П = ОВ$. Ако ово уравненіє за $О$ и $В$ разрѣшимо, наћи ћемо

$$О = \frac{П}{В},\ а\ В = \frac{П}{О}.$$

199.

Задатакъ. *Изъ задате и познате поврншине квадрата, нѣгову страну изнаћи.*

Разрѣш. Ако є $Е$ позната поврншина, а x страна, коя се тражи, бы'ће по § 196. $Е = x^2$, дакле $x = \sqrt{Е}$.

200.

Наставл. *Просторъ површ̓ный трапезія две равнотекуће стране имаюћегъ, равань є производу изъ полусумме страна равнотекућій и ньіовогъ отстоянія међусобногъ.* Или фіг. 94. просторъ поврншный трапезія $АБДВ = (\frac{1}{2}\ АБ + \frac{1}{2}\ ВД) \times АЕ$. ф. 94.

Доказат. Кадъ се двоуголна повуче $АД$, трапезій дѣлисе на $\triangle\ АДБ$, кога є высина $ДК$, на $АБ$ отвѣсна, и на $\triangle\ ВАД$, коєга є высина $АЕ$ на $ВД$ (продужену) отвѣсна, коя скупа изражава међусобно отстояніє равнотекућій страна, али просторъ поврншный $\triangle\ АДБ = \frac{1}{2}\ АБ \times ДК$ (или збогъ $ДК = АЕ$ по § 51) $= \frac{1}{2}\ АБ \times АЕ$, а просторъ поврншный $\triangle\ ВАД = \frac{1}{2}\ ДВ \times АЕ$ (§ 195.); дакле просторъ поврншный трапезія $АВДБ = \frac{1}{2}\ АБ \times АЕ + \frac{1}{2}\ ВД \times АЕ$, (обштегъ чинителя єданпутъ поставляюћи) быва $АВДБ = (\frac{1}{2}\ АБ + \frac{1}{2}\ ВД) \times АЕ$.

201.

Слѣд. Просторъ поврншный трапезія две стране равнотекуће неимаюћегъ, т. є. трапезоіда, изнаћисе може, кадъ се поврншина триуглова оны', на коя се онай двоуголномъ дѣли, поособъ изнађе, и после собере.

202.

Наставл. *Поврншина полигона правилногъ равна є производу изъ полуомѣрія и отвѣсне, изъ средоточія нѣговогъ на ма кою страну нѣгову повучене.*

Доказат. Полигонъ правилный правима, изъ средоточія нѣгова на углове повученимъ, цепасе на триуглове равне подобне равнокраке, слѣдователно равно высоке, колико онъ страна има по § 145. ч. 3. фіг. 68., али поврншине свію овы' ф. 68. триуглова скупа равне су производу изъ полуомѣрія полигона и речене отвѣсне; єръ су равне производу изъ полусумме основица', коє са странама или омѣріємъ полигона судараюсе, и высине обште, коя є реченой отвѣсной равна; дакле поврншина полигона правилногъ равна є истоме производу.

203.

Слѣд. 1. Будући да є кругъ полигонъ правилный по § 183. ч. 1., у коме се отвѣсна, изъ средоточія на страну нѣгову спуштена, судара или слаже са полупречникомъ, *површина кругова равна є производу изъ полуокружія и полупречника нѣговоғъ.* Дакле

2. Површина круга равна є такођеръ производу изъ цѣлогъ окружія и пола зрачца, или четврте части пречника.

3. За изнаћи moћи површину другогъ каквогъ полигона неправилногъ, нуждно є 1) полигонъ чрезъ двоуголне на триугле подѣлити: 2) овы' триуглова површине поособъ изнаћи: 3) ове површине све у сумму собрати.

204.

Задатакъ. *Изнаћи површину круга, кога намъ є пречникъ познатъ.*

Разрѣш. Да се изнађе окружіє, познатомъ пречнику соотвѣтствуюћій, у правой равноважной линіи посредствомъ отношенія међу пречникомъ и окружіємъ постоећегъ (§ 183.), половина оваковогъ исправлѣногъ окружія да се умножи са полупречникомъ, производъ одтудъ добывеный пожелана є површина круга (§ 203. ч. 1.).

Ако бы имали н. п. пречникъ $= 200'$, тражено окружіє да буде $= x$; быће

$100 : 314 = 200' : x$ (§ 183.),

или $1 : 314 = 2 : x$, (предид. дѣлећи чрезъ 100.)

одтудъ $x = 628'$, и одъ овога половина

$x = 314'$;

познатога пречника половина одъ $\frac{200'}{2} = 100'$, слѣдователно изъ овога добивеный производъ или тражена круга површина $=$

$314' \times 100 = 31400'$ □.

205.

Слѣд. 1. Ако бы се дакле површина или просторъ *абвд* фіг. 95. међу два круга, одъ кои' є єданъ у другомъ положенъ, наодећійсе изнаћи имао, површине оба круга поособъ опредѣлити треба, и маню одъ веће одузети. ф. 95.

2. Изъ опредѣлене и изнађене површине круга, може се и површина свакога кругоизсѣчника изнаћи, ако є познато число степеній, кое кругоизсѣчниковъ лукъ има. У таковомъ случаю цѣло окружіє круга или 360° имаюсе на задатый кругоизсѣчника лукъ или овога степене, као што се има изнађена површина круга на пожелану кругоизсѣчника површину, коя се изъ задата три члена лагко изнаћи може.

3. Одтудъ, кадъ се површина △ *АБМ* фіг. 96. коя бива одъ кругоизсѣчника *АМБВА* тетивке *АБ* и зрачаца *МА*, и *МБ*, одъ цѣле кругоизсѣчника површине одузме, добыћесе такођеръ површина кругоодсѣчника *АБВА*. ф. 96.

4. И зато и друга ма каква површине кругова часть *ДЕКГД* или *КГХК* равнымъ начиномъ изнаћи се може, кадъ се површина кругоизсѣчника манѣгъ *ДЕСД* по числу предидућемъ овога §. изнаће, и одъ површине кругоодсѣчника већегъ *ГКЕСДГ* одузме; тако исто кадъ се површина кругоодсѣчника *ГКЕСДГ* одъ површине *ГХКЕСДГ* одузме.

206.

Задатакъ. *У раванъ квадратъ преобратити 1) свакій параллелограммъ: 2) триугалъ: 3) кругъ.*

Разрѣш. 1) Изнаћи треба међу высиномъ и основицомъ датогъ параллелограмма средню геометрическу сразмѣрну; ова є страна пожеланогъ квадрата. 2) тако исто међу высиномъ и полуосновицомъ триугла да се изнађе средня соразмѣрна. 3) да се изнађе међу полупречникомъ и полуокружіємъ исправлѣнимъ (§ 183.) средня соразмѣрна, и надъ изнађеномъ средньомъ соразмѣрномъ да се подигне по § 136. квадратъ; површина овога равна ће быти површини преобратитисе имаюће фігуре.

Доказат. 1) Да назначимо да є высина $= в$, основица $= о$, међу ове две средня соразмѣрна $= м$; бы'ће за параллелограммъ

$$в : м = м : о,$$

$во = м^2$, или $во$ є површина задатога параллелограмма, а $м^2$ є квадратъ, коєга є страна средня соразмѣрна међу высиномъ и основицомъ задатогъ параллелограмма: 2) за триугалъ быва

$$в : м = м : \tfrac{1}{2}о, \text{ одтудъ}$$

$$\tfrac{1}{2}\,ов = м^2;$$

али є $\frac{1}{2}ов$ површина триугла по § 195., а $м^2$ є површина квадрата, кога є $м$ средня соразмѣрна међу высиномъ и половиномъ основице задатога триугла:

3) Да назначимо зрачацъ $= р$, полуокружіє $= \frac{1}{2}п$, среднѣ соразмѣрну $= м$, бы'ће за кругъ

$$р : м = м : \tfrac{1}{2}п,$$

$$\text{одкудъ } \tfrac{1}{2}рп = м^2,$$

или површина круга = квадрату, коєга є страна среднѣ соразмѣрна међу полупречникомъ и полуокружіємъ; дакле.

Примѣчаніє. Кадъ се међу полупречникомъ и полуокружіємъ среднѣ соразмѣрна тражи, мора се найпре полуокружіє у равноважной правой лініи опредѣлити. Али то є познато, да оно пречника къ окружію отношеніє (§ 183.), средствомъ кога се линія права окружію равноважна истражує, строгости математіческой не одговара, дакле неће ни квадратъ, у кои се површина круга преобраћує, точно соотвѣтствовати (т. є. она славна квадратура круга), премда є ово тако мала погрешка, да се при обштемъ употребленію за уравнато узети може.

ГЛАВА ДЕСЕТА.

О МЕЂУСОБНЫМЪ ПОВРШИНА' ОТНОШЕНІЯМА.

207.

Наставл. *Површине триуглова имаюсе у отношенію сложеномъ высине и основице.*

Доказат. Да назначимо высине два триугла са $В$ и $в$: основице са $О$ и $о$: просторе површне $П$ и $п$; быће

$$П = \frac{1}{2}ОВ$$

$$\text{и } п = \frac{1}{2}ов \text{ § 195.}$$

$$\text{дакле } П : п = \frac{1}{2}ОВ : \frac{1}{2}ов,$$

$$\text{и одтудъ } П : п = ОВ : ов,$$

али $ОВ : ов$, то є отношеніе сложено изъ просты' высина $В$ и $в$, и основица' $О$ и $о$ отношенія; дакле.

208.

Слѣдства. 1. Дакле и површине пораллелограмма имаюсе у отношенію сложеномъ высина и основица'. Єръ по задржаномъ предидућемъ наименованію, быва

$$П = ОВ,$$

$$\text{а } п = ов,$$

тако $П : п = ОВ : ов$. Одтудъ

2. Кадъ є у два параллелограмма $В = в$, быва $П : п = О : о$,

а кадъ є $О = о$,

быва $П : п = В : в$;

ако ли є пакъ $ОВ = ов$,

быва $П = п$.

3. Ако су два параллелограмма у смотренію површина' равна, нъіове су высине са основицама обратно соразмѣрне, и напротивъ. У таковомъ є случаю

одтудъ $ОВ = ов$,

$В : в = б : Б$.

Напротивъ, ако є $В : в = б : Б$,

быва $ОВ = ов$.

Исто тако быва са триуглима.

209.

Наставл. *Површине триуглова подобны' имаюсе у отношенію удвоеномъ сваке стране соотвѣтственне.*

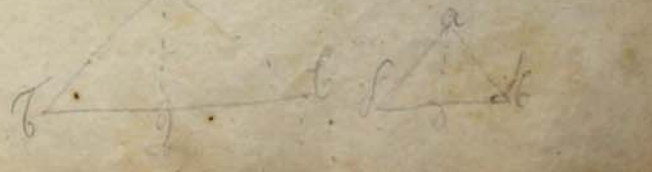
Доказат. Пошто се површине триуглова
у отношенію
имаю у смотренію сложеномъ высина и основица § 207., кадъ се изъ триуглова $АБВ$ и $абв$ фіг. 97. подобны' вр'ова или равны' углова $А$ и $а$ на основице $БВ$ и $бв$ спусти отвѣсна $АД$ и $ад$, быва ф. 97.

$$\triangle АБВ : \triangle абв = АД \times БВ : ад \times бв,$$

али отношеніе $АД : ад = БВ : бв$;

єръ у триуглима подобнима $АБВ$ и $абв$ быва

$АБ : аб = БВ : бв$ по § 162.,



а у $\triangle$ *АДБ* и $\triangle$ *адб* подобнима, бива

$$АБ : аб = АД : ад,$$

дакле и $АД : ад = БВ : бв,$

слѣдователно кадъ се ово отношеніє $БВ : бв$ на мѣсто $АД : ад$ у првой соразмѣрности постави, бива

$$\triangle АБВ : \triangle абв = БВ \times БВ : бв \times бв = БВ^2 : бв^2,$$ и т. д.

210.

Слѣдства. 1. Површине параллелограмма подобны' такођеръ имаюсе у отношенію удвоєномъ сваке стране соотвѣтственне, или имаюсе као квадрати сваке стране соотвѣтственне. Єръ су триуглови подобни као половине параллелограмма подобны', али се цѣла имаю као половине; дакле. И

2. површине полигона подобны' имаюсе у отношенію удвоєномъ (или као квадрати) сваке стране соотвѣтственне. Кадъ се полигона подобна двоуглнима изъ равны' углова на супротне повученыма на триуглове подобне дѣле § 154.
ф. 75. быће у фіг. 75.

$$\triangle ЕАД : \triangle еад = ЕА^2 : еа^2,$$
$$\text{и } \triangle АДБ : \triangle адб = АБ^2 : аб^2,$$
$$\text{и } \triangle БДВ : \triangle бдв = БВ^2 : бв^2 \ (\S\ 208.)$$
$$\text{одтудъ } \overline{\triangle ЕАД + АДБ + БДВ : еад + адб + бдв}$$
$$= ЕА^2 + еа^2, \text{ или } = АБ^2 : аб^2 \text{ и т. д.}$$

3. Површине полигона правилны' подобны' имаюсе у отношенію удвоєномъ (или као квадра-

ти) полупречника или пречника кругова описаны'. Поєдине стране соотвѣтствене оваковы' полигона имаюсе као полупречници или пречници кругова описаны' § 182., али § 210. ч. 2; дакле.

4. Површине кругова, кои такођеръ къ полигонима правилнима, подобнима принадлеже, имаюсе као квадрати полупречника или пречника.

211.

Настав. *Квадратъ ипотенузе равань є сумми квадратной оба катета.*

Доказат. Ако се надъ странама тріугла десноуголногъ *АБВ* фіг. 98. подигну квадрати *ф.* 98.
М, Н, О, быће квадратъ ипотенузе *О* равань оба катета квадратима $М + Н$, или $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$. Єръ у $\triangle$ *АБВ* десноуголномъ по спуштеной отвѣсной *АГ*, быће $\triangle АБВ \sim АБГ$ по § 124., дакле быће $БВ : АБ = АБ : БГ$ по § 162.

и одтудъ $БВ \times БГ = АБ^2$.

Равнимъ начиномъ $\triangle АБВ \sim \triangle АГВ$;

дакле бива $БВ : АВ = АВ : ГВ$,

и одтудъ $БВ \times ГВ = АВ^2$.

Тако ћемо добыти ова два уравненія

$$БВ \times БГ = АБ^2$$
$$\text{и } БВ \times ГВ = АВ^2$$

собраніемъ $БВ \times БГ + БВ \times ГВ = АБ^2 + АВ^2$,

или $БВ \times (БГ + ГВ) = АБ^2 + АВ^2$; (общтегъ чинит.)

али кадъ є $БГ + ГВ = БВ$, на мѣсто равны' поставляюћи, быва $БВ \times БВ = БВ^2$;

дакле $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$.

212.

Слѣд. Квадратъ свакога катета раванъ є квадрату ипотенузе по одузетомъ другога катета квадрату.

213.

Наставл. *Ако се надъ странама триугла*
ф. 99. *десноуголногъ АБВ* фіг. 99. *подигну фігуре подобне, бyће фігура ипотенузе О равна фігурама оба катета М + Н.*

Доказат. Єръ се $О : М + Н = БВ^2 : АБ^2 + АВ^2$ (по § 210. ч. 2.), али $БВ^2 = АБ^2 + АВ^2$ по § 210.; дакле $О = М + Н$.

214.

Наставл. *Ако се надъ странама триугла*
ф. 100′. *десноуголногъ АБВ* фіг. 100′. *назначе полуокружія, бyће мѣсечиħи О и Н Ипократови равни истоме триуглу десноуголномъ.*

Доказат. Єръ полукругъ надъ ипотенузомъ назначенъ $я + \triangle АБВ + ю = о + я + н + ю$ полукруговима оба катета (§ 213.); дакле и $я + ю$ изъ оба члена уравненія одузимаюћи

$$\triangle АБВ = О + Н.$$

ОДДѢЛЕНІЄ ДРУГО.

ТРИГОНОМЕТРІЯ ПОВРШНА.

215.

Изяснен. Триуглъ свакій, као што се на овомъ мѣсту сматра, изъ шестъ частій состоисе, т. є. изъ три стране, и толико углова, одъ кои̓ кадъ се изъ три̓ задаты̓ частій, остале три траже, триуглъ *разрѣшити* зовесе, и часть Землѣмѣрія ова разрѣшенія учеħа, зовесе *Тригонометрія* (Триугломѣріє), и она є *површна* или *шарна* (§ 2.). Мы ħе мо дакле површну овде изложити.

216.

Слѣд. Оне три задате триугла части, изъ кои̓ се остале три тражити имаю, союзъ некій и отношеніє са овыма трима имати мораю.

217.

Наставл. *Стране триугла нису сразмѣрне угловима супротнимъ.*

Доказат. Кадъ бы стране тругла угловима супротнима соразмѣрне быле, стране бы морале у ономъ истомъ отношенію са угловима супротнима растити, но ако стране труглова онда кадъ углови увеличаваюсе и расту, алъ нерасту у равномъ отношенію са угловима супротнимъ. Єръ кадъ бы стране у равномъ отношенію са угловима супротнимъ растле, морале бы се оне, кадъ се уголъ удвои, такођеръ удвоити, и обратно кадъ се страна удвои, морао бы се и уголъ супротный удвоити, али кадъ се страна удвои, уголъ супротный неудвоявасе. Єръ да предпоставимо, да є у △ АБВ фіг. 100., кои да се опише окружіємъ, страна ВА = полупречнику, слѣдователно = страни шестоугла правилногъ, лукъ АВ има ће 60° § 148. ч. 2., и зато уголъ АБВ, коєга є мѣра половина лука АВ (§ 80.) имаће 30 степенiй; ако се дакле увелича страна АВ = полупречнику іоштъ єданпуть т. є. да буде = ВД пречнику, промењуће се уголъ АБВ у уголъ ДБВ, али уголъ овай ДБВ као десанъ (по § 81. ч. 2.), и тако = 90°, страни є ДВ удвоеной супротанъ, па нiє удвоенъ, но утроенъ угла АВВ 30°; дакле кадъ се страна удвои, уголъ супротный не увеличавасе удвоено; дакле стране тругла не расту са угловима равнымъ отношенiемъ; дакле. ф. 100.

218.

Слѣд. Да бы дакле изъ углова стране тругла, и обратно изъ страна углове средствомъ

соразмѣрности изнаћи могли, нуждно є онакова количества или праве лінiє угловима поставити, коє у рачуну углове представляю, и коє ће странама углова супротнимъ соразмѣрне быти.

219.

Изяснен. Оне праве лінiє, коє углове у рачуну представляю, и коє су угловима супротнимъ соразмѣрне, зато, што углове замѣняваю, зовусе *лінiє тригонометрическе* или *дѣйства углова* (functiones). Оваковe су лінiє I. *Нѣдриште* (sinus), II. *Сонѣдриште* (cosinus), III. *Дирка* (tangens), IV. *Судирка* (cotangens), V. *Сѣчица* (secans), VI. *Сусѣчица* (cosecans).

I. НѢДРИШТЕ.

220.

Синусъ

Изясн. *Нѣдриште*, или *нѣдриште право* (sinus rectus) угла ДВА фіг. 101. или лука ДА, угалъ ДВА мѣрећегъ, зове се она лінiя отвѣсна ДЕ изъ ма коє крайнѣ лука АД точке Д (или А) на полупречникъ спуштена. Оно стране или полупречника АВ одсѣчiє ЕА, коє се међу нѣдриштемъ и лукомъ налази, зовесе *нѣдриште обратно* истога лука или угла. ф. 101.

221.

Слѣд. Лукъ дакле *АД* ма каквымъ веһимъ или маньимъ полупречникомъ може быти назначенъ.

222.

Наставл. *Нѣдрипте є половина тетивке удвоеногъ лука.*

ф. 101. Да буде лукъ *АД* фіг. 101. мѣра угла *АВД*, бьһе Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$.

Доказат. Тетивка *ДК* полупречникомъ *ВА* двопресецасе (§ 65.), дакле є $ДЕ = ЕК$, али $ДЕ =$ половини одъ *ДК*; дакле.

223.

Задатци: 1. *Изнаһи нѣдрипте* 30^{o}.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$, али *ДК* овде равно є страни шестоугла правилногъ или полупречнику § 148. ч. 2.; дакле $\frac{1}{2} ДК = \frac{1}{2}$ зрачцу. Поставляюһи зрачацъ $= 1$, бьһе Нѣдр. $30^{o} = \frac{1}{2}$.

2. *Изнаһи Нѣдрипте* 45^{o}.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$, али є садъ *ДК* ипотенуза у $\triangle$ *ДВК*, али по § 211. $ДК^2 = ДВ^2 + ВК^2$;

извлачеһи коренъ $ДК = \sqrt{ДВ^2 + ВК^2}$; али на мѣсто $ДВ^2 + ВК^2$ єръ су зрачци, поставляюһи єдиницу, бьва $ДК = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; дакле *ДК* половина или Нѣдр. $45^{o} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

3. *Изнаһи Нѣдрипте* 18^{o}.

Разрѣш. По § 222. Нѣдр. $ДЕ = \frac{1}{2} ДК$; али садъ є $ДК =$ страни десетоугла правилногъ, а ова є $=$ веһемъ одсѣчію полупречника среднымъ и крайньимъ отношеніемъ сѣченогъ, а полупречникъ среднымъ и крайньимъ отношеніемъ овако се сѣче: Предпоставляюһи да є веһа часть зрачца $= x$,

бьва $1 : x = x : 1 - x$; одтудъ

$x^2 = 1 - x$, у редъ поставляюһи

$x^2 + x = 1$, попуняваюһи другимъ членомъ

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$, извлаченѣмъ корена

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$, скраһиваюһи

$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$, изъ именит. 4 извлачеһи $\sqrt{\ }$

$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{5}$, премештаюһи

$x = \frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} = ДК$;

али Нѣд. $18^{o} = \frac{1}{2} ДК$; дакле Нѣд. $18^{o} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$= \frac{1}{4} \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$.

II. СОНѢДРИШТЕ.

224.

Изяснен. *Сонѣдрипте* (cosinus) зовесе она часть зрачца, коя се налази меһу угла нѣдрипштемъ *ДЕ* фіг. 101., и нѣговымъ ошилѣмъ *В*. Или ф. 101.
фіг. 102. будуһи да є $ДК = ЕС$, то є *ЕС* Сонѣдрипте лука *АД*. Будуһи да є Сонѣдрипте *ЕС* ф. 102
катетъ у $\triangle$ *ЕСД*, може се по § 211. изнаһи:

$ДС^2 = ЕС^2 + ЕД^2$, премештаюћи $ЕД^2$

$ДС^2 - ЕД^2 = ЕС^2$, извлаченѣмъ $\sqrt{}$

$ЕС = \sqrt{ДС^2 - ЕД^2}$, поставляюћи вредность

Сонѣд. угл. $x = \sqrt{1^2 - \text{Сон. } x^2}$.

225.

Задатци. 1. *Изнаћи Сонѣдриште* 30°.

По § 224. Сонѣд. $30^{\circ} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2}$,

подизаюћи на квадратъ Сонѣдр. $30^{\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$,

единицу приводећи у разб. Сонд. $30^{\circ} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}}$,

отятіемъ Сонд. $30^{\circ} = \sqrt{\frac{3}{4}}$,

изъ именителя 4. извлачећи $\sqrt{}$ Сонд. $30^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Сонѣдриште* 45°.

По § 224. Сонѣдриште $45^{\circ} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2}$,

подизаюћи на квадратъ, Сонд. $45^{\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\,2}$,

умноженіе свршиваюћи, Сонд. $45^{\circ} = \sqrt{1 - \frac{2}{4}}$,

единицу у разбіеніе преобраћиваюћи Сонд. 45° $= \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{2}{4}}$,

отятіемъ Сонд. $45^{\circ} = \sqrt{\frac{2}{4}}$,

изъ именителя извлачећи $\sqrt{}$ Сонд. $45^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

3. *Изнаћи Сонѣдриште* 18°.

По § 224. Сонѣдриште

$$18^{\circ} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\right)^2},$$

подизаюћи на квадр. Сонѣд.

$$18^{\circ} = \sqrt{1 - 16\,(6 - 2\sqrt{5})},$$

именителя 16. подписиваюћи, Сонд.

$$18^{\circ} = \sqrt{1 - \frac{(6 - 2\sqrt{5}}{16}},$$

единицу у разбіеніе преобраћив. Сонд.

$$18^{\circ} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{(6 - 2\sqrt{5})}{16}}$$

знаке променюююћи, быва Сонд.

$$18^{\circ} = \sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16}},$$

или свршиваюћи, быва Сонд.

$$18^{\circ} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}},$$

изъ именителя извлачећи $\sqrt{}$ Сонд.

$$18^{\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

III. ДИРКА.

226.

Изяснен. *Дирка* (tangens) зовесе она отвѣсна линія изъ ма кое лука крайнѣ точке подигнута, и до другога полупречника продужена, и у обштой точки ударания окончаваюћасе. Тако е н. п. угла *АВД* ф. 101. или нѣговогъ лука *АД*, ф. 101. дирка *АН*.

Дирка изнаћисе може или

α) по настав. § 211. $НВ^2 = АН^2 + АВ^2$,

пренашаюћи AB^2 быва Дирк. $HB^2 - AB = AH^2$
извлачећи $\sqrt{}$ быва Дир. $\sqrt{HB^2 - AB^2} = AH$
постављаюћи вредн. $\sqrt{\text{сѣч. } x^2 - 1^2} =$ Дирк. угл x.
или β) по подобности триуглова, т. є. $\triangle HAB \sim \triangle ДEB$,

$$EB : AB = ДE : HA, \text{ одтудъ } AH = \frac{AB \,.\, ДE}{EB}$$

постављаюћи вредность Дирк. уг. $x = \dfrac{\text{Нѣдр. } x}{\text{Сонд. } x}$.

227.

Задатци. 1. *Изнаћи Дирку* 30°.

По § 226. β) Дирк. $30^0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$,

числит. и именит. съ 2. умножаваюћи Дирк. $30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

„ „ „ съ $\sqrt{3}$ „ Дирк. $30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

или Дирка $30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

2. *Дирку* 45° *изнаћи.*

По § 226. β) Дирка $45^0 = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$.

3. *Изнаћи Дирку* 18°.

По § 226. β) Дирка $45^0 = \dfrac{\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$;

Числит. и именит. умнож. са 4. $= \dfrac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{5 - \sqrt{5}}$

$$= \frac{\sqrt{20 - 8\sqrt{5}}}{\sqrt{20}}$$

„ „ „ дѣлећи чрезъ $\sqrt{4} = \dfrac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$

„ „ „ множећи са $\sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}$

или Дирка $45^0 = \frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$.

228.

Изяснен. Оштрій угалъ, кои или другоме
додатъ, или одъ другога одузетъ, проузрокуе, да
другій изиђе десанъ, овде се зове *допуна* (com-
plementum) или *уеалъ допуне* (angulus comple-
menti), и то у првомъ случаю зовесе *допуна по
оскудости* (complementum per defectum), а у дру-
гомъ *допуна по изступу* (complementum per ex-
cessum) т. є. у смотренію оногъ другогъ угла,
коій или оскудѣва до десногъ, или десанъ угалъ
превозилази. Тако угалъ $ДCX$ фіг. 102., у смо- ф. 102.
тренію угла $ACД$ као до десногъ допунитисе и-
маюћегъ, зовесе допуна по оскудости; єръ углу
$ACД$ до деснога ACX оскудѣва угалъ (кои га

допунити има) $ДСХ$. Тако є исто угалъ $ДСХ$ у смотренію тубогъ угла $БСД$ допуна по изступу; єръ угалъ $БСД$ превазилази десанъ количествомъ угла $ДСХ$. — Нѣдриште угла допуне $ДСХ$, кое є $ДК$ у смотренію допунитисе имаюћегъ угла $АСД$, зовесе *сонѣдриште;* дирка $ЛХ$ зовесе *судирка;* сѣчица $НС$ *сусѣчица;* а нѣдриште обратно $ХК$ *сонѣдриште обратно.*

IV. СУДИРКА.

229.

Изясн. *Судирка* є дирка угла допуне (§ 228.). Изнаћи се може изъ подобности триуглова, т. є.

ф. 102. α) $\triangle ЛХС \sim \triangle ЕДС$ фиг. 102.

$$ДЕ : ЕС = ХС : ЛХ,$$

поставляюћи Тригонометр. вредности

$$\text{Нѣд. уг. } x : \text{Сонѣд. } x = 1 : \text{Суд. } x;$$

$$\text{и Судирка угл. } x = \frac{\text{Сонѣд. } x}{\text{Нѣд. } x}. \text{ Или}$$

β) Слѣдствомъ § 211. $ЛС^2 = ЛХ^2 + ХС^2$,

премештаюћи $ЛХ^2$ быва, $ЛС^2 - ЛХ^2 = ХС^2$,

извлачећи $\sqrt{\ }$ $\sqrt{ЛС^2 - ЛХ^2} = ХС$,

поставляюћи тригон. вредности. $\sqrt{\text{Сонд. } x^2 - 1^2}$
$= \text{Суд. } x$. Или

γ) изъ подоб. триуглова овы' $\triangle ЛХС \sim \triangle НАС;$

$$АН : ХС = АС : ЛХ,$$

поставл. вред. тригон. $\text{Дирк. } x : 1 = 1 : \text{Суд. } x,$

$$\text{одтудъ Суд. угл. } x = \frac{1^2}{\text{Дир. } x}.$$

230.

Задатци. 1. *Изнаћи Судирку* 30^0.

По § 229. α) $\text{Судирка } 30^0 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}};$

числит. и именит. множећи са 2 быва $= \sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Судирку* 45^0.

По § 229. α) $\text{Судирка } 45^0 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1.$

3. *Изнаћи Судирку* 18^0.

По § 229. α) $\text{Судирка } 18^0 = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}};$

Числ. и именит. са 4 множ. и

„ „ „ чрезъ $\sqrt{2}$ дѣлећи $= \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}},$

„ „ „ са суммомъ $= \frac{\sqrt{20 + 8\sqrt{5}}}{\sqrt{4}}$

$$\text{или} = \frac{\sqrt{20 + 8\sqrt{5}}}{2};$$

разправляюћи на чинит. быва $= \frac{\sqrt{4 . 5 + 2 . 4\sqrt{5}}}{2}$

$$= \frac{2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}.$$

и чрезъ 2 дѣлећи $= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$

V. СѢЧИЦА.

231.

Изяснен. *Сѣчица* є полупречникъ, кои продуженъ са диркомъ ударасе и у обштой удараня
ф. 102. точки окончавасе. Тако є лука *АД* фіг. 102. сѣчица *НС*. — Изнаћисе може или

α) по § 211. т. є. $HC^2 = AC^2 + AH^2$;

$$HC = \sqrt{AC^2 + AH^2},$$

поставляюћи тригоном. вредности Сѣчица уг. x

$$= \sqrt{\text{Дир. } x^2 + 1^2}.$$ Или

β) изъ подобн. триуглова, т. є. $\triangle HAC \sim \triangle ДЕС$,

$$ЕС : СД = АС : СН,$$

постав. триг. вред. Сонѣд. $x : 1 = 1 :$ Сѣч. x, одтудъ

$$\text{Сѣчица угл. } x = \frac{1^2}{\text{Сонѣд. } x}$$

232.

Задатци. 1. *Изнаћи Сѣчицу угл.* 30°.

По пред. § β) Сѣчица $30^\circ = \frac{1^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$;

Числ. и имен. множ. са $2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

„ „ „ „ са $\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2. *Изнаћи Сѣчицу* 45°.

По § 231. β) Сѣчица $45^\circ = \frac{1^2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$;

Числ. и именит. множ. са $2 = \frac{2}{\sqrt{2}}$,

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

3. *Изнаћи Сѣчицу* 18°.

По § 231. β) Сѣчица угла $18^\circ = \frac{1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$;

Числителя и имен. множећ.

са 4, быва $= \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

са разликомъ $= \frac{4\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$,

чрезъ $\sqrt{2}$ дѣлећи $= \frac{4\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{40}}$,

са $\sqrt{40} = \frac{4\sqrt{200 - 40\sqrt{5}}}{40}$,

чрезъ 4 дѣлећи $= \frac{\sqrt{200 - 40\sqrt{5}}}{10}$

разправляюћи на чинителѣ $= \frac{\sqrt{4 \cdot 50 - 4 \cdot 10\sqrt{5}}}{10}$,

$$= \frac{2\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{10}.$$

числ. и имен. чрезъ 2 дѣлећи $= \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5}$

$= \frac{1}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$.

VI. СУСѢЧИЦА.

233.

Изяснен. *Сусѣчица* є угла допуне, сѣчица § 228. изнаћисе може α) по § 211 $ЛС^2 = ХС^2 + ХЛ^2$;

$ЛС = \sqrt{ХС^2 + ХЛ^2}$,

поставляюћи тригон. вредности Сонѣд. угл. x $= \sqrt{\text{Суд. } x^2 + 1^2}$; или

β) Изъ подоб. триуглова овы' $ЛХС \sim НЛС$;

$АН : НС = ХЛ : ЛС$,

поставляюћи тригонометрическу вредность быва;

Дирк. X : Сѣч. $X = 1$: Сус. X; одтудъ Сусѣчица $X = \frac{\text{Сѣч. } X}{\text{Дирк. } X}$. или

γ) Изъ подоб. триуглова овы' $ЛХС \sim ДЕС$.

$ДЕ : ДС = ХС : ЛС$,

постав. триг. вред. Нѣд. $X : 1 = 1$: Сусѣч. X,

одтудъ Сусѣчица $X = \frac{1^2}{\text{Нѣд. } x}$.

234.

Задатци. 1. *Изнаћи Сусѣчицу* 30".

По предид. § γ) $= \frac{1^2}{\frac{1}{2}} = 2$.

2. *Изнаћи Сусѣчицу* 45".

По предид. § γ) $= \sqrt{2}$.

3. *Изнаћи Сусѣчицу* 18".

По предид. § γ. Сусѣчица 18" $= \frac{1^2}{\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$;

$= \frac{4}{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$,

множећи са суммомъ $= \frac{4\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{16}}$,

$= \frac{4\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{4}$,

и $= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

235.

Наставл. *Колико годъ є већій уголъ оштрій или лукъ одъ* 1 *до* 90 *степеній, сотымъ су већа нѣгова дѣйства: а штогодъ већій буде уголъ тубый или лукъ одъ* 90" *до* 180", *сотимъ су маня нѣгова дѣйства.*

Доказат. *БФ* фіг. 103. нѣдруште є угла *АМН*, или лука *БН*, а тако є *СГ* нѣдриште оштрогъ угла манѣгъ *СМН*, али є *БФ* веће одъ *СГ* и то количествомъ *Бо*, єръ, ако се преко *С* повуче равнотекућа *СІ* на *НМ*, у параллелограмму *СоФГ* быће *СГ* = *оФ* (§ 51.); тако исто дирка *НЛ* > *НК* (као оне часть), и сѣчица *МЛ* > *МК* (єръ ф. 103.

є *МЛ* страна найдужа у △ *МЛК*, као супротна углу *ЛКМ* тубомъ збогъ нѣговогъ доугла *МКН* оштрогъ, у △ *КМН* десноуголномъ положеногъ § 56. 118.); и тако є дакле прва часть ясна. Да бы и другу часть овога наставленія доказали, узимамо два угла туба *ЕМБ* и *ЕМС*, и за израженіє ньіовы дѣйствія, изъ двею крайньи' точкій лукова *ЕАБ*, и *ЕАБС* изабрали смо точку *Е*. Кадъ се изъ лука *БАЕ*, мѣре угла тубогъ *ЕМБ*, крайнѣ точке *Е* спусти лінія отвѣсна *ЕП* на страну *БМ* (кои на противну страну продужитисе мора до *Ж*), бы'ће *ЕП* истога лука *ЕАБ*, или угла *ЕМБ* нѣдриште; ако се изъ *Е* подигне отвѣсна *ЕЖ*, бы'ће *ЕЖ* дирка, а *МЖ* сѣчица; а тако исто веһега угла тубогъ *ЕМС* или нѣговогъ лука *ЕАБС*, нѣдриште є *Ен*, дирка є *ЕР*, а сѣчица *МР*, али є *Ен* < *ЕП*, *ЕР* < *ЕЖ*, а *МР* < *МЖ* (збогъ угла *МРЕ* оштрогъ у △ *МЕР* кодъ *Е* десноуголногъ нѣковъ є доугалъ *МРЖ* тубый, дакле у △ *МРЖ* страна є *МЖ* > *МР*); дакле.

236.

Слѣд. Нѣдриште право *АМ* угла десногъ *АМН* равно є полупречнику, и одъ свію нѣдришта правы' є найвеће. Єръ лінія отвѣсна, изъ лука *АБСН* крайнѣ точке *А* на страну *МН* спуштена, слажесе са полупречникомъ *АМ*, и тако нѣму равна; но и већа є количествомъ *АХ*, одъ найближегъ нѣдришта *БФ*, слѣдователно веће

одъ свію остали', кое се види, кадъ се на *НМ* преко *Б* (и преко *С*) повуче ♯ *БХ*. Тако исто нѣдриште обратно *МН* угла десногъ равно є полупречнику, а дирка и сѣчица, као равнотекуће, нигди се не састаю, ма безконечно да се продуже, и одтудъ се као безконечне сматраю.

237.

Наставл. *Упоредни угли имаю равна тригонометрическа дѣйства.*

Доказат. Да узмемо два упоредна угла *БМН* и *БМЕ*. Нѣдриште угла *БМН* бы'ће *БФ*, *НЛ* є дирка, а *МЛ* сѣчица, али ако се изъ лука *БАЕ* крайнѣ точке *Б* (обоимъ луковима обште) спусти на страну *ЕМ* (продужену) отвѣсна *БФ*, бы'ће *БФ* и угла *БМЕ* нѣдриште, као што є очевидно, слѣдователно упоредны' углова нѣдришта су равна. Ако ли се пакъ изъ истога лука *БАЕ* друге крайнѣ точке *Е* на страну супротну *БМ* до *Ж* продужену, спусти отвѣсна *ЕП*, а друга изъ точке *Е* отвѣсна *ЕЖ* на *ЕМ*, бы'ће *ЕП* нѣдришта, *ЕЖ* дирка, *МЖ* сѣчица угла *БМЕ*, али *ЕП* = *БФ*, *ЕЖ* = *НЛ*, а *МЖ* = *МЛ*. Єръ △ *ЕПМ* ≅ △ *БФМ* збогъ равны' углова очельны' при *М*, при *П* и *Ф* десны', и збогъ стране *МЕ* = *МБ*; и △ *ЕЖМ* ≅ △ *НЛМ* такођеръ збогъ равны' углова очелны' *М*, збогъ *Е* и *Н* десны', и збогъ стране *МЕ* = *МН*; дакле соотвѣтствене овы' триуглова, слѣдователно и изложена упоредны' углова дѣйства међусобно равна су.

фи.

238.

Слѣдства. 1. Два лука кои одъ 90° равноотстоє, єданъ по изступу, а другій по оскудости, имаю она иста нѣдришта.

2. Лукъ, кои 180° превозилази, има оно исто нѣдриште, коє има лукъ онай, коимъ оне 180° превазилази.

3. Лукови, кои одъ 180° равноотстоє, имаю нѣдришта равна.

4. Лукъ, кои одъ 360° оскудѣва, има оно исто нѣдриште, коє има лукъ онай, коимъ одъ 360° оскудѣва.

ф. 103. 5. Кадъ лукъ *НБ* фіг. 103 расте, увеличавасе нѣдриште (§ 235). Лука 90° нѣдриште равно є полупречнику или *АМ*. Кадъ лукъ преко 90° расте, нѣдриште опада; нѣдриште лука 180° $= 0$. У трећемъ четврту растећимъ луковима, расте и нѣдриште, докъ опетъ лукъ 270° раванъ буде полупречнику. Напоследку у четвртомъ четврту растећимъ луковима, нѣдришта опадаю, докъ опетъ лука 360° нѣдриште равно буде *О*. Будући да нѣдришта у трећемъ и четвртомъ четврту подъ пречникъ *ЕД* падаю, слѣдователно на противну страну, зато, ако нѣдришта у првомъ и другомъ четврту узмемо положителна, быће у трећемъ и четвртомъ отрицателна. н. п. лукъ 30° и 210° имаю єдно нѣдриште $= \frac{1}{2}$, али Нѣдр. 30° $= + \frac{1}{2}$, а Нѣдр. 210° $= - \frac{1}{2}$.

6. Кадъ лукъ расте, сонѣдриште опада: Сонѣдриште 90° $= 0$; Сонѣдр. 180° $= 1$; Сонѣдр. 270° $= 0$; Сонѣдр. 360 $= 1$. Сонѣдришта су у првомъ и четвртомъ четврту положителна, а у другомъ и трећемъ отрицателна. Одтудъ лукови, кои одъ 90° ровно оскудѣваю, єданъ по оскудости, а другій по изступу имаю она иста т. є. равна сонѣдришта по величини, но разна по знацыма. Одтудъ и лукъ, кои одъ 180° оскудѣва, има оно исто сонѣдриште, коє има лукъ, коимъ одъ 180° оскудѣва, и то како по величини, тако и по знаку, то єсть отрицателно. Дакле Сонѣд. 90° $= 0$; Сонѣдр. 180° $= -1$; Сонд. 270° $= 0$; Сонд. 360° $= +1$.

7. Дирка и судирка., сѣчица и сусѣчица у првомъ и трећемъ су четврту положителне, а у другомъ и четвртомъ отрицателне. Дирка и Сѣчица 90° $= \infty$; Дирка и Сѣчица 180° $= 0$; Дирка и Сѣч. 270° $= \infty$; Дирка, и Сѣч. 360° $= 0$. А кодъ Судирке и Сусѣчице обратно є.

239.

Настав. *Лініє Тригонометріческе лукова подобны имаюсе као полупречници* фіг. 104. ф. 104.

Доказат. Лукъ $AX \sim$ луку и $\alpha\eta$ дакле и

$\triangle ДЕС \sim \triangle \delta \varepsilon C$, слѣдователно

$СД : С\delta = ДЕ\ \delta\varepsilon$,

$= ЕС : \varepsilon C$;

и $\triangle$ *ГАС* $\sim$ $\triangle$ *γα С*, слѣдователно бива

$$СД : Сδ = АГ : αγ$$
$$= ГС : γС;$$

и $\triangle$ *ЛХС* $\sim$ $\triangle$ *λη С*, слѣдователно бива

$$СД : Сδ = ЛХ : λη$$
$$= ЛС : λ\ С;$$ дакле.

240.

Слѣдства. 1. Ако се оба полупречника *Сα* и *СА* на оно исто число частій подѣли (кое у већемъ полупречнику слѣдователно само ће веће быти, а у манѣмъ, манѣ величиномъ, али числомъ равне), свака ће лінія Трогонометрическа къ луку *αδ* принадлежећа толико имати частій одъ свогъ полупречника *δС*, колико лінія равноимена къ луку *АД* принадлежећа одъ свога полупречника *ДС*.

2. Отношеніе сваке лініе Тригонометрическе къ полупречнику зависи само одъ величине угла *АСД* (§ 27.), совршена пакъ величина ньіова зависи одъ величине полупречника. Ако се дакле полупречникъ, быо онъ великій или малый, на исто число частій подѣли, свака ће лінія Тригонометрическа извѣсно неко оваково число частій имати, кое число само одъ угла зависи, и кое свагда и при продуженомъ полупречнику оно исто остае, н. п. ако се свакій полупречникъ или великій или малый числомъ 100 назначи, быће угла 30° Нѣдрише = 50.

241.

ПРАКТІЧЕСКО ОСНОВОПОЛОЖЕНІЕ.

Ако се полупречнику извѣстно число частій припише, изнаћи, колико таковы частій свакой одъ горе изложены лінія тригонометрически за свакій лукъ припадаю.

Ово се опредѣлити може помоћію Маөематіке вышше, и наша ће дужность быти опредѣлене и сочинѣне већъ одъ паметны мужева таблице, научити употребляватн. Оваковe таблице съ великимъ трудомъ сочинѣне издали су на светъ неки паметни мужеви, као Неперъ; Бриггъ; Іоахімъ Рети, Францъ Карлъ Шулцъ, и Георгій Вега. У овима таблицама полупречникъ = 10.000,000.000 частій, а нѣговъ Логаритамъ = 10 быти мора. У простимъ изданіяма последнѣ су три цыфре изоставлѣне, и тако е зрачацъ = 10,000.000. а логаритми непремѣнни оставлѣни су, као што е при концу овога дѣла такова таблица приключена.

242.

Слѣд: У таблицы овой приключеной изнаћи можемо свакога угла 1 до 90° надлежно число оны частій, одъ кои се 10,000.000 полупречнику приписую, колико одъ овы свакой лініи Тригонометрической принадлеже. Одъ 1 до 90°

зато, што после 90° степени она се дѣйства повраћаю (§ 237.). У овой таблицы у првомъ разреду налазесе степени и минута углова: у другой истимъ угловима припадаюћа нѣдришта: у трећой дирке: у четвртой логаритми диркій: у петой логаритми нѣдришта. Логаритми сѣчица изоставлѣни су (што се безъ нъи словати може). Таблица є ова тако уређена, да на првой т. є. левой страни наодесе углови оштри са ньіовима дѣйствіяма, и овыма припадаюћи логаритми, а на десной страни налазесе углова допуне т. є. тубогъ угла степени, са ньіовыма дѣйствіяма, и овима припадаюћи логаритми. Какогодъ што на левой страни углови одъ 0 до 90° редомъ расту, тако на десной страни одъ 90° — 45° опадаю тако, да се међусобно до десногъ угла допуняваю.

243.

Задатакъ. *Пожелано дѣйство задатогъ угла у таблицы изнаћи.*

Разрѣшеніе. 1. Ако задатъ угалъ десанъ не превозилази, треба тражити задатъ угалъ (т. є. нѣгове степене у првомъ разреду леве или десне стране, као што већій или маньій буде одъ 45°, соотвѣтствоваће нѣму у сосѣдномъ другомъ разреду нѣдришта: у трећой дирка: у четвртой и петой слѣдую логаритми дѣйствія; са стране пакъ противне у истой линіи соотвѣтствуе у првомъ разреду допуна истога угла, после нѣдришта, дирка и логаритми.

2. Ако є задатъ угалъ одъ десногa већій или тубый, тай одузети валя одъ 180°, да бы нѣговъ доугалъ добыти могли, кои ако по предидућемъ начину у таблицы потражимо, наћи ћемо задатога угла дѣйствія. (§ 237.). Ако се тражи н. п. Нѣдр. угл. 125°: одузимаюћи 125° одъ 180°, и остатку 55°, или 54° 60′ да се истражи принадлежеће Нѣдришта = 8191521, кое заєдно и задатомъ углу 125° припада (§ 237.).

3. Будући дасе у нашой овде при концу овога дѣла приключеной таблицы само свакій десетый минутъ изложенъ налази, па да бы и она изоставлѣны минута дѣйствія изнаћи могли, слѣдуюћимъ начиномъ поступати треба: изнаћи треба у таблицы найближій већій и найближій маньій угалъ (одъ задатога), одузети треба како найближій маньій одъ найближегъ већегъ угла, тако и нѣдришта найближегъ маньегъ угла одъ нѣдришта найближегъ већегъ угла и да се назначе ове две разлике; после да се одузме найближій маньій угалъ табличный и одъ задатогъ угла, и да се сочини сооразмѣрность ова: Као што се има прва разлика на другу, тако се има трећа на ону разлику, коіомъ нѣдришта датогъ угла превазилази нѣдришта найближегъ угла табличногъ. И кадъ се четврта изнађена разлика дода къ нѣдришту угла найближегъ маньегъ табличногъ, добыћесе пожелано нѣдришта.

Н. пр. Нѣдриште угла $60^{\circ}\ 24'$ изнаћи, кои се у нашой таблицы неналази. Зато 1) одузети треба найближій табличный угалъ $60^{\circ}\ 20'$ одъ найближегъ већегъ табличногъ угла $60^{\circ}\ 30'$; быће прва разлика $= 10$. 2) одузети треба и найближегъ мањегъ угла нѣдриште $= 86891.96$ одъ найближегъ већегъ угла нѣдришта $= 87035.57$. быће друга разлика $= 14361$. 3) Одузети треба найближій маньій угалъ табличный $60^{\circ}\ 20'$ и одъ задатогъ угла $60^{\circ}\ 24'$, добыћесе разлика трећа. Одтудъ 4) да се сочини соразмѣрность

$$10 : 14371 = 4 : x$$

$$x = 5744\tfrac{4}{16}.$$

кадъ ову изнађену четврту разлику $= 5744$ (пренебрегавајући разбіеніе) къ угла найближегъ мањегъ нѣдришту $= 86891.96$ додамо. т. є

$$\begin{array}{r} 86891.96 \\ +\quad 5744 \\ \hline \end{array}$$

добыћемо $8694940 =$ Нѣд. $60^{\circ}\ 24'$.

244.

Слѣд. Равнымъ начиномъ, као § пред. ч. 3. и логаритамъ надлежный нѣдришту или дирки изнаћисе може.

245.

Задатакъ. *Задатомъ дѣйствію надлежный угалъ у таблици наћи.*

Разрѣшеніе. 1. Задато дѣйство изнаћи треба у таблицы у надлежномъ разреду, одговараће му у првомъ разреду пожеланый угалъ, као и остала дѣйства у истой правой ліній у своима разредима.

2. Ако се небы задато дѣйство са свима своима цыфрама у тиблицы налазило, быо бы знакъ да угалъ осимъ степеный іоштъ и мінутій има. Да бы дакле и у овомъ случаю угалъ изнаћи могли, сочинити треба соразмѣрность као у § 243.

Н. п. Да се изнађе соотвѣтственный угалъ задатомъ нѣдришту 62615.03, кои се у таблицы нашой неналази. Зато изнаћи треба

нѣдр. найближе веће таблично $= 62705.71$
нѣдр. „ мањѣ „ $= 62478.85$

кадъ се одузме $=$ 22686 остат.;

равнымъ начиномъ одузети угалъ $38^{\circ}\ 40'$ найближомъ мањѣмъ табличномъ дѣйству соотвѣтственный, одъ угла $38^{\circ}\ 50'$, найближемъ већемъ дѣйству или нѣдришту соотвѣтствујући, и остатакъ $= 10'$ да се забележи. Да се одузме далѣ

одъ задатогъ нѣдришта . . $= 62615.03$
найближ. мањѣ таблично нѣдриште $= 62478.85$

$= 136.18$,

быће соразмѣность, $22686 : 10 = 13618 : x$

одтудъ $x = 6'$ (разбіеніе пренебрегавајући) кадъ се изнађены $6'$ къ найближемъ мањѣмъ углу $38^{\circ}\ 40$ додаду, добыћесе пожеланый угалъ $= 38^{\circ}\ 46$.

3. Равнымъ начиномъ можесе изъ задатогъ логаритма, кои се у таблицы дѣйства са свима цыфрама точно небы налазіо, надлежно, дѣйство, и угалъ изнаћи.

О ТРИУГЛИМА ДЕСНОУГОЛНЫМЪ

246.

Задат. *Изъ задате ипотенузе и єдногъ*
ф. 105. *катета углове изнаћи.* Или фіг. 105. изъ задате ипотенузе *ВД* и катета *ДЕ* углове изнаћи.

Разрѣш. Будући да є тругалъ десноуголанъ тога свойства, да кадъ се узме єданъ катетъ за полупречникъ, другій катетъ быва дирка, а ипотенуза сѣчица, а кадъ се узме ипотенуза за полупречникъ, єданъ катетъ быва нѣдриште, а другій сонѣдриште као што є очевидно изъ фігуре. Зато по § 239.

$$\text{ВД} : \text{р}^{*}) = \text{Нѣд. ДЕ} : \text{Нѣд. ДВЕ}.$$

Одтудъ $\text{ДВЕ} = \frac{\text{ДЕ}}{\text{ВД}}$. ×р

А угалъ $\text{ЕДВ} = 90^{\circ} - \text{ДВЕ}$.

РАЗРѢШЕНІЕ ТРИУГЛА РАВНОКРАКОГЪ.

247.

Задатакъ. *У триуглу равнокракомъ изъ задаты изнаћи непознате части.*

*) Подъ ‚р‘ разумеваћемо свагда полупречникъ.

Разрѣшеніє. Кадъ се у △ *ЛМН* равнокра- ф. 106.
комъ фіг. 106. изъ вр'а нѣговогъ *М* на основицу *ЛН* спусти отвѣсна *МР*, быће по § 222.

$$\text{ЛР} = \tfrac{1}{2}\,\text{ЛН} = \tfrac{1}{2}\,\text{С};$$

дакле по § 246. $\text{ЛМ} : \text{ЛР} = 1 : \text{Нѣд. ЛМР}$,

или $\text{б} : \tfrac{1}{2}\,\text{С} = 1 : \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,\text{и}$; одтудъ

$$\text{I. Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,\text{и} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{С}}{\text{б}} = \frac{\text{С}}{2\text{б}}.$$

$$\text{II. б} = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{С}}{\text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,\text{и}} = \frac{\text{С}}{2\ \text{Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,\text{и}}.$$

$$\text{III. } \tfrac{1}{2}\,\text{С} = \frac{\text{б Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,\text{и}}{1}.$$

$$\text{IV. С} = 2\text{б. Нѣд. } \tfrac{1}{2}\,\text{и}.$$

ГЛАВНА РАЗРѢШЕНІЯ ТРИУГЛОВА.

248.

Наставл. *У свакомъ триуглу стране су у ономъ отношенію, у комъ су нѣдришта углова истимъ странама супротна.* Или у △ *АБВ*
фіг. 107. стране имаюсе као нѣдришта углова ф. 107.
супротны.

Доказат. $\text{БВ} : \tfrac{1}{2}\,\text{БВ} = \text{АВ} : \tfrac{1}{2}\,\text{АВ}$. Али $\tfrac{1}{2}\,\text{БВ} = \text{Нѣд. уг. А}$ (по § 222.), али $\tfrac{1}{2}\,\text{АВ} = \text{Нѣд. уг. Б}$, дакле равна на мѣсто равны у горньой соразмѣрности поставляюћи, быва $\text{БВ} : \text{Нѣд. А} = \text{АВ} : \text{Нѣд. Б}$.

249.

Слѣдство. Овымъ се начиномъ може свакій тругалъ разрѣшити; противуставляюћи странама нѣдришта, а нѣдриштама стране, коій се начинъ у тригонометріи зове *разрѣшеніе по противупоставляню.*

250.

Задат. *Изъ задаты' страна АБ и БВ и изъ задатогъ угла едной одъ задаты' страна супрот-*
ф. 108. *ногъ А, изнаћи угалъ В,* фіг. 108.

Разрѣш. По § 248. *БВ* : Нѣд. *А* = *АБ* : Нѣд. *В*. Но ако е страна *БВ* маня одъ стране *АБ*, изродићесе сумня, оће ли изнађеный угалъ *В* быти оштаръ као *АВБ*, или тубый као *АвБ*; еръ су како у △ *АБВ* тако и у △ *АБв* она иста условія, т. е. *АБ* страна обшта, а угалъ *А* обштій, далѣ страна *БВ* = страни *Бв*. Но у оваковомъ случаю съ друге стране познато быти мора, оће ли угалъ пожеланый *В* оштаръ или тубый быти.

251.

ф. 109. **Слѣд.** Ако ли е пакъ страна *АБ* фіг. 109. задатомъ углу прилежећа маня одъ стране *БВ* задатомъ углу *А* супротне, свака сумня изчезава; еръ подъ овымъ предпоставлянѣмъ △ *БвА* нема иста условія она, коя △ *АБВ* има.

252.

Задатакъ. *Изъ задате сумме С, разлике Р два количества непозната х и ю, и сама количества изнаћи.*

Разрѣш. Да назначимо Сумму = *С*, разлику = *Р*, она два непозната количества *х* и *ю*, т. е. веће количество = *х*, а манѣ = *ю*.

дакле $C = x + \text{ю}$,

а $P = x - \text{ю}$

одтудъ $C + P = 2x$; и $x = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}P$.

Садъ намъ остае изнаћи количество манѣ или *ю*;

$$C = x + \text{ю};$$

пренашанѣмъ $C - x = \text{ю}$

поставляюћи одъ *х* вредность $C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}P = \text{ю}$,

назначено отятіе свршив. $\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}P = \text{ю}$.

Ово се речма овако изговорити дае; *ако се къ полусумми дода полуразлика, добыћесе количество веће; а ако се одъ полусумме одузме полуразлика, добыћесе количество манѣ.*

253.

Наставлен. *Ако се у триуглу некомъ на страну найдужу спусти отвѣсна изъ угла супротногъ, има ће се найдужа страна къ сумми прочій двею страна, као што се има истій оны страна разлика, къ разлики одсѣчія найдуже стране.* Или фіг. 110.

БВ : *АБ* + *АВ* = *АБ* − *АВ* : *ХБ*. ф. 110.

Доказат. Ако се изъ ошиля угла *А* спусти на найдужу страну *БВ* отвѣсна *АХ*, и изъ *А* као средоточія найманьомъ страномъ △ *АВВ*, *АВ* као полупречникомъ напише окружіє круга, а друга се страна продужи до *Ф*, быће *БВ* : *БФ* = *БМ* : *БН* (§ 171.), али ова соразмѣрность садржава у себи предидућу доказатисе имаюћу; єръ *БВ* є страна найдужа : *БФ* є сумма двею страна *АБ* + *АВ* збогъ *АВ* = *АФ*; *БМ* є ньіова разлика, єръ є ньіова разлика *АБ* — *АВ*, али є *АВ* = *АФ*; дакле є разлика *АБ* — *АФ* = *БМ*; *БН* є разлика одсѣчія найдуже стране, єръ є разлика *БХ* — *ХВ*, али *ХВ* = *ХН*; дакле є иста разлика и *БХ* — *ХН* = *БН*; дакле.

Примѣчаніє. По овомъ наставленію разрѣшаваюсе триугли, у коима су све три стране познате а ни єданъ угалъ, по соразмѣрности изнаћесе *БН*, и кадъ се ово одузме одъ стране *БВ*, изнаћесе *ВН*, а кадъ се ово чрезъ 2 раздѣли, добыесе *ВХ*, коє ће кадъ се за полупречникъ узме *АВ*, быти Сонѣдриште угла *В*, тако се изнаће угалъ *В*, па онда и остали.

254.

Наставл. *У свакомъ триуглу имасе сумма даты и познаты двею страна къ ньіовой разлики, каогодъ што се има дирка полусумме углова, истима странама супротны, къ дирки по-*
ф. 111. *луразлике углова ньіовы.* Или фіг. 111. у △ *АБВ*.

$$АБ + АВ : АБ = \text{Дир. угл. } \frac{Б + В}{2} : \text{Дир. угл. } \frac{Б - В}{2}.$$

Доказат. Изъ *А* страномъ маньомъ *АВ* да се напише окружіє круга, а страна *БА* да се продужи до *К*, изъ *К* преко *В* да се повуче неопредѣлена *КЕ*, да се повуче далѣ изъ *Д* до *В* тетивка *ДВ*, на кою да се повуче $\#$ *БЕ*; быће како угалъ *ДВК* тако и *БЕК* (§ 81. ч. 2.) десанъ, слѣдователно △ *ДВК* и △ *БЕК* десноугли. Ово кадъ быва збогъ *ДВ* $\#$ *БЕ* у △ *КБЕ* соразмѣрность

$$БК : БД = ЕК : ЕВ \ (\S\ 157.),$$ али

1. *БК* є сумма даты и познаты двею страна *АБ* + *АВ*, збогъ *АВ* = *АК*;

2. *БД* є исты страна разлика; єръ збогъ *АВ* = *АД* разлика є *АБ* — *АВ* = *АБ* — *АД* = *БД*.

3. *ЕК* є дирка полусумме углова *Б* + *В* (у датомъ △ *АБВ*) задатыма двема странама супротны; єръ угалъ *КАВ* као споляшный у смотренію △ *АБВ* равань є сумми углова супротны *Б* + *В* (§ 121.), али угалъ $КДВ = \frac{1}{2} КАВ$ (§ 81. ч. 1.), дакле угалъ $КДВ = \frac{А + Б}{2}$, али угалъ *КДВ* = углу *КБЕ*, дакле и угалъ *КБЕ* = полусумми углова *Б* + *В* у датомъ △ *АБВ*, али (кадъ се у △ *КБЕ* катетъ *БЕ* узме за полупречникъ) *ЕК* є дирка угла *КБЕ*; дакле *ЕК* є дирка углова $\frac{А + Б}{2}$, датимъ двема странама супротны.

4. *ЕВ* є дирка полуразлике исты углова *Б* и *В*; єръ кадъ се у датомъ △ *АБВ* угалъ маньій *Б* или *КБВ* одузме одъ *КБЕ*, коій има полусумму углова *Б* и *В* (по доказателству), добыћесе угалъ *ВБЕ*

(као што є очевидно); дакле є угалъ *ВБЕ* полуразлика углова *Б* и *В*, али (узимаюћи катетъ *БЕ* за полупречникъ) бы'ће *ЕВ* дирка угла *ВБЕ*; дакле є *ЕВ* дирка волуразлике углова *Б* + *В*; слѣдователно.

Примѣчаніє. По овомъ наставленію могу се триугли разрѣшити у ономъ случаю, кадъ намъ буду две стране са обуваћенымъ угломъ познате, тако се могу и остали углови изнаћи. Єръ кадъ се наће дирка полуразлике углова, изнаћесе и угалъ полуразлике у таблицы, коій кадъ се наће и къ углу познатомъ полусумме дода (§ 252.), добыєсе угалъ већій *А*, а одтудъ и трећій *В*, и т. д.

УПОТРЕБЛЕНІЄ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКО-ЛОГАРИТМИЧЕСКЕ ТАБЛИЦЕ.

255.

Задатакъ. *Триугалъ десноуголанъ АБВ, у комъ є н. п. страна АБ, и угалъ В* (а угалъ *Б* као десанъ познатъ є, и трећій *А* одма ће се
ф. 112. изнаћи) *задатъ, разрѣшити.* фіг. 112.

Разрѣш. Начинъ разрѣшенія увидитисе може у § 246, но да бы ученицы и употребленіє тригонометрическо-логаритмическе таблице познали, наводимо овде примѣръ съ конечнымъ рѣшеніємъ. По задатку тражисе страна *БВ*, коя ће се изъ слѣдуюће соразмѣрности изнаћи; *В* : *АБ* = Нѣд. *А* : *БВ* по § 248; ако є страна

АБ = 124° (хватій), а укалъ *В* = $50^\circ\,40'$; бы'ће *А* = $39^\circ\,20'$ (по § 115. ч. 4), и предидућа соразмѣрность прелази у ову

Нѣд. $50^\circ\,40' : 124^\circ =$ Нѣд. $39^\circ\,20'$: *БВ*.

Садъ, кадъ изъ таблице угловима принадлежећа нѣдришта изтражимо, и у предидућу соразмѣрность на ньіово мѣсто поставимо, быва

$7734716 : 124^\circ = 6338309$: *БВ*.

Одтудъ се обичнымъ начиномъ *БВ* као четвртый членъ изъ соразмѣрности изнаћи може, но за избећи при многомъ множеню и дѣленю погрешке, употреблююсе логаритми. Ако се дакле надлежни логаритми изъ таблица ньіовы' (за нѣдришта у таблицы дѣйствія при концу овога дѣла приключеной по § 243, а за стране у таблицы логаритма' числама наравныма надлежеће, као што су у Алгебри приключени), изнађу и у наведеной соразмѣрности на надлежна ій мѣста поставимо, она'ће се дакле у ову обратити

$9{,}8884444 : 2{,}0934217 = 9{,}8019735$: *БВ*;

одкудъ сумма споляшньі' членова = сумми средньі' членова, быва

БВ $+ 9{,}8884444 = (2{,}0934217 + 9{,}8019735) = 11{,}8953952$,

и тако *БВ* $= 11{,}8953952 - 9{,}8019735 = 2{,}0069508$ (Алгебра § 191.).

И кадъ се садъ овай последньій логаритамъ, страни *БВ* соотвѣтствуюћій, изъ таблице логаритама изнађе, изнађесе и сама страна *БВ*, т. є мѣра нѣна дужине. Но будући да се овай логаритамъ међу табличнима логаритмама са свима своима крайньима цифрама не налази, но налазе-се одъ нѣга већій и маньй; кое є знакъ, да ова иста страна *БВ* осимъ цѣлы' хватова има іоштъ и частій хвата. Дабы дакле іоштъ и оне части изнаћи могли, кое є разбіеніе, наблюдавати треба начинъ прописани у Алгебри § 181, кое кадъ учинимо, изнаћићемо разбіеніе десетно $= 0{,}614$ (остале цифре, кое части тисуће превозилазе, изостављаюћи), кое къ числу, манѣмъ логаритму табличномъ соотвѣтствуюћемъ $= 101$, додаваюћи, быће дужина стране $БВ = 101{,}614°$.

Или ако бы управъ знати хотели іоштъ и ово десетно разбіеніе 614 хвата, колико чине стопа, може се по § 62 у Алгебри изложеномъ начину изнаћи.

256.

Задатакъ. *Површину триугла тригонометрически изнаћи.* Или просторъ површный △ *АБЕ* фіг. 113. изнаћи.

ф. 113.

Разрѣшен. По § 194. 195. површина △ $АБЕ = \frac{1}{2}\,cx$ (то єсть спуштаюћи изъ вр'а △ *Е* на основицу отвѣсну *ЕК*, и назначаваюћи ню са x, а основицу *АБ* са c), дакле како c, тако и x тригонометрически израчунати треба, и изнађене вредности на ньіово мѣсто поставити.

1. Али c (по § 247.) $= 2a$. Нѣд. $\frac{1}{2}\,u$.
2. У △ десноуголномъ *АЕК* изнаћисе може

x или кадъ се узме *АЕ* за полупречникъ изъ сразмѣрности назначаваюћи полупречникъ са p

$$p : АЕ = \text{Сонд.}\ \tfrac{1}{2}\,u : \text{Сонд.}\ ЕК,$$

или $p : a = \text{Сон.}\ \frac{1}{2}\,u : x$,

одтудъ $x = a.\ \text{Сон.}\ \frac{1}{2}\,u$;

или се x изнаћи може изъ △ *АЕК*, узимаюћи *АК* за полупречникъ, быће *ЕК* дирка угла *А* или Судирка $\frac{1}{2}\,u$ (§ 246), и обстаће слѣдуюћа сразмѣрность;

$$p : АК = \text{Суд.}\ \tfrac{1}{2}\,u : \text{Судр.}\ ЕК,$$

или $p : \frac{1}{2}\,c = \text{Суд.}\ \frac{1}{2}\,u : \text{Суд.}\ x$;

одтудъ $x = \frac{1}{2}\,c.\ \text{Суд.}\ \frac{1}{2}\,u$.

Но мы ћемо првый образацъ задржати; дакле на мѣсто $\frac{1}{2}\,xc$ поставляюћи изнађене вредности назначаваюћи површину триугла са T, быће

Површина триугла $T = \frac{1}{2}\,a.\ \text{Сон.}\ \frac{1}{2}\,u.\ 2a$ Нѣд. $\frac{1}{2}\,u$. Коій образацъ збогъ обширности свое овако се скратити може

у △ *АЕБ* има се $c : a = \text{Нѣд.}\ u : \text{Сонд.}\ \frac{1}{2}\,u$,

а у △ *АЕК* има се $a : \frac{1}{2}\,c = 1 : \text{Нѣд.}\ \frac{1}{2}\,u$

Ове две соразм. умножав. $ac : \frac{1}{2}\,ac = \text{Нѣд.}\ u : \text{Нѣд.}\ \frac{1}{2}\,u.\ \text{Сонд.}\ \frac{1}{2}\,u$,

првый и другій членъ дѣлећ. $1 : \frac{1}{2} = \text{Нѣд.}\ u : \text{Нѣд.}\ \frac{1}{2}\,u.\ \text{Сонд.}\ \frac{1}{2}\,u$,

производъ спољаш. и унут. чл. $\text{Нѣд.}\ \frac{1}{2}\,u.\ \text{Сонд.}\ \frac{1}{2}\,u = \frac{1}{2}\ \text{Нѣд.}\ u$,

одтудъ тражећи Нѣд. u; $\text{Нѣд.}\ u = 2\ \text{Нѣд.}\ \frac{1}{2}\,u.\ \text{Сонд.}\ \frac{1}{2}\,u$.

Садъ у првомъ триугла образцу $\frac{1}{2}\,a.\ \text{Сонд.}\ \frac{1}{2}\,u\,.\,2a$

Нѣд. $\frac{1}{2}$ u, общтегъ чинителя узимаюћи, быва

$$T = \tfrac{1}{2}a^2 \left(2\ \text{Нѣд.}\ \tfrac{1}{2}u.\ \text{Сон.}\ \tfrac{1}{2}u\right),$$

на мѣсто 2 Нѣд. $\frac{1}{2}$ u. Сон. $\frac{1}{2}$ u поставляюћи Нѣдр. u

быће $T = \frac{1}{2}a^2.\ \text{Нѣд.}\ u.$

УПОТРЕБЛЕНІЕ АЛГЕБРЕ ПРИ ТРАЖЕНЮ ГЛАВНЫ' ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ' НАСТАВЛЕНІЯ.

257.

I. *Изъ задатогъ лука АД* $= \gamma$, *нѣговогъ Нѣдришта и Сонѣдришта, и изъ задатогъ лука АБ* $= \alpha$, *нѣговогъ Нѣдришта и Сонѣдришта; изнаћи Нѣдриште и Сонѣдриште разлике ДГ и ГС*
ф. 114. фіг. 114.

Разрѣш. 1. Тругли *СБЕ, СІК, ДІГ* подобни су (§ 239.), одтудъ

$$СБ : ДІ = СЕ : ДГ.$$

У овой сразмѣрности осимъ четвртога члена и другій е *ДІ* непознатъ, коій се овако наћи може:

$$ДІ = ДК - ІК,$$

а *ІК* овако се пронаћи може;

$$СЕ : СК = ЕБ : ІК$$

$$ІК = \frac{ЕБ . СК}{СЕ},$$

а кадъ се изнађе *ІК* изнаћи е лако *ДІ*.

Кадъ се на мѣсто овы' израженія тригонометрическе лініе поставе, быва

$$ДІ = ДК - ІК$$

$$\text{т. е.} = \text{Нѣд.}\ \gamma - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha . \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha};$$

$$\text{а}\ ДГ = \frac{ЕС . ДІ}{БС} = \frac{\text{Сон.}\ \alpha}{1}\left(\text{Нѣд.}\ \gamma - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha . \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}\right);$$

назнач. множ. сврш. $\text{Нѣд.}\ (\gamma - \alpha) = \text{Нѣд.}\ \gamma\ \text{Сон.}\ \alpha$

$$- \text{Сон.}\ \gamma.\ \text{Нѣд.}\ \alpha.$$

Разрѣш. 2. $\text{Сон.}\ (\gamma - \alpha) = ГС = ГІ + ІС$; дакле свакій членъ изтраживаюћи и собраніе свршиваюћи добыћемо пожелано. Да тражимо *ІС* изъ

$$СЕ : СК = СБ : ІС,$$

одтудъ $ІС = \frac{СК}{СЕ} = \frac{\text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}.$

А ІГ изнаћисе може изъ сразмѣрности ове

$$СБ : ДІ = БЕ : ІГ;$$

$$ІГ = \frac{БЕ . ДІ}{СБ};$$

поставляюћи вредность $ІГ = \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha}{1}$

$$\left(\text{Нѣд.}\ \gamma - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha . \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha}\right),$$

умноженіе свршиваюћи $ІГ = \text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \gamma$

$$- \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha^2 . \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha};$$

дакле $ІС + ІГ = \frac{\text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha} + \text{Нѣд.}\ \gamma\ .\ \text{Нѣд.}\ \alpha$

$$- \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha^2 . \text{Сон.}\ \gamma}{\text{Сон.}\ \alpha};$$

ова два разбіенія разправляюћи на чинителѣ;

$$= \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} . (1 - \text{Нѣд. } \alpha^2) + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha,$$

на мѣсто $(1 - \text{Нѣд. } \alpha^2)$ поставлаюћ. Сон. α^2

$$= \frac{\text{Сон. } \gamma}{\text{Сон. } \alpha} . \text{Сон. } \alpha^2 \ 4 \ \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha,$$

множеніе соверш. $= \text{Сон. } \gamma . \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha.$

дакле $\text{Сон. } (\gamma - \alpha) = \text{Сон. } \gamma . \text{Сон. } \alpha + \text{Нѣд. } \gamma . \text{Нѣд. } \alpha.$

258.

Слѣд. Ако су лукови α, γ, маньи одъ четвртака, принадлежаће већемъ луку веће нѣдрище, манѣмъ манѣ; са свимъ противно є кодъ Сонѣдрища ньіовы. Одтудъ другій производъ у образцу нѣдрища очевидно маньій є одъ првога. Слѣдователно лагко се увидити може, треба ли производъ одъ другога одузети.

259.

II. *Изъ задатоѓъ лука АБ* $= \alpha$, *нѣговоѓъ Нѣдришта и Сонѣдришта; изъ задатоѓъ лука БД* $= \gamma$, *нѣговоѓъ Нѣдр. и Сонд. изнаћи Нѣд. ДК и Сон. КС, сумме ова два лука* $(\alpha + \beta)$.

Разрѣш. 1. Нѣдрище сумме $ДК$, кое се тражи, саставлясе изъ частій $ДI$ и $IК$, кое пособъ изнаћи и собрати валя. И тако

$$СЕ : ДГ = СБ : ДI,$$

$$ДI = \frac{СБ . ДГ}{СЕ} = \frac{\text{Нѣд} . \beta}{\text{Сон. } \alpha};$$

а да бы $IК$ изнаћи могли, морамо изъ $\triangle IКС$ будући да су намъ све стране непознате $СI$ изтражити,

$$\text{а} \quad СI = СГ - IГ,$$

али $IГ$ овако се налази $ЕС : ДГ = ЕБ : IГ$

$$IГ = \frac{ЕБ . ДГ}{ЕС} = \frac{\text{Нѣд. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha};$$

$$\text{дакле } СI = \text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}.$$

По познатой страни $СI$, да тражимо изъ $\triangle СIК$ страну $IК$, коя се къ $ДI$ додати има, овымъ начиномъ;

$$СБ : СI = БЕ : IК,$$

$$IК = \frac{БЕ . СI}{СБ} = \text{Нѣд. } \alpha \left(\text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}\right)$$

$$= \text{Нѣд. } \alpha . \text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}.$$

$$\text{И } ДI + IК = \text{Нѣд. } \alpha \ \text{Сон. } \beta - \frac{\text{Нѣд. } \alpha^2 . \text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} + \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha}$$

Ова два разбіенія разправляюћи на чинителѣ, быва:

$$= \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} (1 - \text{Нѣд. } \alpha^2),$$

$$= \text{Нѣд. } \alpha . \text{Сон. } \beta + \frac{\text{Нѣд. } \beta}{\text{Сон. } \alpha} (\text{Сон. } \alpha^2); \text{ дакле}$$

$$\text{Нѣд. } (\alpha + \beta) = \text{Нѣд. } \alpha . \text{Сон. } \beta + \text{Сон. } \alpha . \text{Нѣд. } \beta.$$

Разрѣш. 2. Сонѣдрище сумме $(\alpha + \beta)$ овако се тражи:

$$СБ : CI = CE : CK,$$

$$CK = \frac{CE \cdot CI}{СБ} = \text{Сон.}\ \alpha\ \left(\text{Сон.}\ \beta - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha \cdot \text{Сон.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha}\right),$$

дакле Сон. $(\alpha + \beta) =$ Сон. α . Сон. β — Сон. α . Нѣд. β.

260.

III. *Изнаћи дирку разлике два лука или Дир.* $(\gamma - \alpha)$.

$$\text{Дир.}\ (\gamma - \alpha) = \frac{\text{Нѣд.}\ (\gamma - \alpha)}{\text{Сон.}\ (\gamma - \alpha)};$$

$$= \frac{\text{Нѣд.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha - \text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Нѣд.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha + \text{Нѣд.}\ \gamma\ .\ \text{Нѣд.}\ \alpha},$$

Кадъ се садъ и числитель и именитель чрезъ Сон. γ . Сон. α дѣли:

$$= \frac{\frac{\text{Нѣд.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha} - \frac{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Нѣд.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha}}{\frac{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha} + \frac{\text{Нѣд.}\ \gamma\ .\ \text{Нѣд.}\ \alpha}{\text{Сон.}\ \gamma\ .\ \text{Сон.}\ \alpha}};$$

одтудъ Дир. $(\gamma - \alpha) = \dfrac{\text{Дир.}\ \gamma - \text{Дир}\ \alpha}{1 + \text{Дир.}\ \gamma\ .\ \text{Дир}\ \alpha}$.

261.

IV. *Изнаћи Дирку сумме два лука, или Дир.* $(\alpha + \beta)$.

$$\text{Дир.}\ (\alpha + \beta) = \frac{\text{Нѣд.}\ (\alpha + \beta)}{\text{Сон.}\ (\alpha + \beta)};$$

$$= \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta + \text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta - \text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta},$$

са Сон. α . Сон. β и

числ. и именит. дѣлећи бывa $= \dfrac{\frac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta} + \frac{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}}{\frac{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta} - \frac{\text{Нѣд.}\ \alpha\ .\ \text{Нѣд.}\ \beta}{\text{Сон.}\ \alpha\ .\ \text{Сон.}\ \beta}}$

$$= \frac{\text{Дир.}\ \alpha + \text{Дир.}\ \beta}{1 - \text{Дир.}\ \alpha\ .\ \text{Дир.}\ \beta}.$$

262.

V. *Изъ Нѣдришта и Сонѣдришта единственногъ угла, Нѣдриште и Сонѣдриште угла удвоеногъ изнаћи.*

Разрѣш. 1. Да назначимо единственный угалъ са φ, а удвоеный са 2φ, бyћe

$$\text{Нѣд.}\ 2\varphi = \text{Нѣд.}\ (\varphi + \varphi);$$

$$= \text{Нѣд.}\ \varphi\ .\ \text{Сон.}\ \varphi + \text{Сон.}\ \varphi\ .\ \text{Нѣд.}\ \varphi,$$

собраніе свршив. $= 2$ Нѣд. φ . Сон. φ.

Разрѣш. 2. Сон. $2\varphi =$ Сон. $(\varphi + \varphi)$;

$$= \text{Сон.}\ \varphi\ .\ \text{Сон.}\ \varphi - \text{Нѣд.}\ \varphi\ .\ \text{Нѣд.}\ \varphi,$$

$$= \text{Сон.}\ \varphi^2 - \text{Нѣд.}\ \varphi^2.$$

У овомъ изражeнію поставлюћи на мѣсто Сон. φ^2 равноважно 1^2 — Нѣд. φ^2, бывa

$$\text{Сон.}\ 2\varphi = 1 - 2\ \text{Нѣд.}\ \varphi^2.$$

И у овомъ изражeнію на мѣсто Нѣд. φ^2 поставлюћи 1 — Сон. φ^2 бывa

$$\text{Сон.}\ 2\varphi = 2\text{Сон.}\ \varphi^2 - 1.$$

И тако ово су образци:

1) $\text{Нѣд. } 2\varphi = 2\text{Нѣд. } \varphi \,.\, \text{Сон. } \varphi.$

2) $\text{Сон. } 2\varphi = \text{Сон. } \varphi^2 - \text{Нѣд. } \varphi^2.$

3) $\text{Сон. } 2\varphi = 1 - 2\,\text{Нѣд. } \varphi^2.$

4) $\text{Сон. } 2\varphi = 2\,\text{Сон. } \varphi^2 - 1.$

263.

VI. *Изнаћи Дирку удвоеногъ угла.*

$$\text{Дирка } 2\varphi = \text{Дир. } (\varphi + \varphi);$$

али Дир. $(\varphi + \varphi)$ (по § 261. IV.) $=$

$$= \frac{\text{Дир. } \varphi + \text{Дир. } \varphi}{1 - \text{Дир. } \varphi \,.\, \text{Дир. } \varphi} = \frac{2\,\text{Дир. } \varphi}{1 - \text{Дир. } \varphi^2}$$

264.

VII. *Изъ Сонѣдришта удвоеногъ лука, изнаћи Нѣдриште и Сонѣдриште єдинственно.*

Разрѣш. 1. Изъ § 262. V. Образца 3,

$$\text{Сон. } 2\varphi = 1 - 2\,\text{Нѣд. } \varphi^2 \text{ быва}$$

премештанѣмъ $2\,\text{Нѣд. } \varphi^2 = 1 - \text{Сон. } 2\varphi,$

и одтудъ $\text{Нѣд. } \varphi = \sqrt{\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{2}}.$

Разрѣш. 2. Изъ § 262. V. Образца 4

$$\text{Сон. } 2\varphi = 2\,\text{Сон. } \varphi^2 - 1 \text{ быва}$$

премештанѣмъ $\text{Сон. } 2\varphi^2 = \text{Сон. } 2\varphi + 1,$

и одтудъ $\text{Сон. } 2\varphi = \sqrt{\frac{\text{Сон. } 2\varphi + 1}{2}}.$

265.

VIII. *Изнаћи дирку єдинственногъ угла.*

Разрѣш. $\text{Дир. } \varphi = \frac{\text{Нѣд. } \varphi}{\text{Сон. } \varphi}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{\text{Сон. } 2\varphi}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Сон. } 2\varphi}{1 + \text{Сон. } 2\varphi}\right)};$$

Числит. и именит. чрезъ Сон. 2φ дѣлећи $= \sqrt{\frac{\frac{1}{\text{Сон. } 2\varphi} - 1}{\frac{1}{\text{Сон. } 2\varphi} + 1}}.$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{Сѣч. } 2\varphi - 1}{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}\right)},$$

Числит. и именит. са (Сѣч. $2\varphi + 1$) множећ. $= \sqrt{\left(\frac{\text{Сѣч. } 2\varphi^2 - 1^2}{(\text{Сѣч. } 2\varphi + 1)^2}\right)}$

$$= \frac{\text{Дир. } 2\varphi}{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}.$$

А кадъ се іоштъ числит. и именит. са (Сѣч. $2\varphi - 1$) умножи, изишло бы $= \sqrt{\frac{(\text{Сѣч. } 2\varphi + 1)^2}{(\text{Сѣч. } 2\varphi - 1)^2}}$

$$= \frac{\text{Сѣч. } 2\varphi + 1}{\text{Дир. } 2\varphi}.$$

266.

Слѣдства. 1. Изъ овога є видити, да є

$$\text{Нѣд.}\,(\alpha+\beta)=\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta+\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta\ \S\,259,$$
$$\text{Нѣд.}\,(\alpha-\beta)=\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta-\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta$$
$$\text{Сумма}\ =2\ \text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta.$$
$$\text{Разлика}=2\ \text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta.$$

2. $$\text{Сон.}\,(\alpha+\beta)=\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta-\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta$$
$$\text{Сон.}\,(\alpha-\beta)=\text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta+\text{Нѣд.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta$$
$$\text{Сумма}\ =2\ \text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Сон.}\,\beta.$$
$$\text{Разлика}=2\ \text{Сон.}\,\alpha\,.\,\text{Нѣд.}\,\beta.$$

Изъ овога се ясно види, коимъ се начиномъ сумме и разлике Нѣдришта и Сонѣдришта у производе обратити могу, или производи у сумме и разлике.

267.

Изнаћи отношеніе међу странама триугла и єднимъ угломъ.

1. Да се назначе углови великимъ писменима, а стране оньимъ истымъ писменима коима су и супротни углови назначени но малыма, бы́ће

2. $$a:б=\text{Нѣд.}\,A:\text{Нѣд.}\,Б,\ \text{и Нѣд.}\,Б=\frac{б\,.\,\text{Нѣд.}\,A}{a}$$
$$a:c=\text{Нѣд.}\,A:\text{Нѣд.}\,C,\ \text{и Нѣд.}\,C=\frac{c\,.\,\text{Нѣд.}\,A}{a}.$$

3. Будући да свакій угалъ триугла са осталымъ двома раванъ є двома деснима или 180°, тако се као нъіовъ доугалъ сматра, а такови угли равна нѣдришта имаю, бы́ће

$$\text{Нѣд.}\ C=\text{Нѣд.}\ (A+Б),$$

али Нѣд. $(A + Б)$, то є нѣдриште сумме: бы́ће

$$\text{Нѣд.}\,C=\text{Нѣд.}\ A\,.\,\text{Сон.}\ Б+\text{Сон.}\ A\,.\,\text{Нѣд.}\ Б.$$

4. Кадъ се овде на мѣсто нѣдришта C и нѣд. $Б$ изнаћене вредности подъ числомъ 2. поставе, и уравненіе се чрезъ нѣд. A, а после умножи са a, бива

$$c=a\,.\,\text{Сон.}\ Б+б\,.\,\text{Сон.}\ A.$$

5. *То єсть, да се умноже две стране триугла, свака са сонѣдриштемъ долежећегъ угла; бы́ће сумма оба производа равна страни трећой.*

6. По числу 4. є $c=a\,.\,\text{Сон.}\,Б+б\,.\,\text{Сон.}\,A$, пренашанѣмъ $б\,.\,\text{Сон.}\,A$, бива $c-б\,.\,\text{Сон.}\ A=a\,.\,\text{Сон.}\ Б$, оба члена подизаюћи на квадратъ; $C^2-2бc\,.\,\text{Сон.}\ A+б^2\,.\,\text{Сон.}\ A^2=a^2\,.\,\text{Сон.}\ Б^2$, но будући да є $\text{Сон.}\ A^2=(1-\text{Нѣд.}\ A^2)$ а $\text{Сон.}\ Б^2=(1-\text{Нѣд.}\ Б^2)$, ова изражения поставляюћи на мѣсто оны́, бива

$$c^2-2бc\,.\,\text{Сон.}\ A+б^2\,(1-\text{Нѣд.}\ A^2)=a^2\,(1-\text{Нѣд.}\,Б^2).$$

У првомъ члену уравненія умноженіе назначено свршиваюћи, а у другомъ на мѣсто Нѣд. $Б^2$ равноважно израженіе подъ числомъ 2 изнаћено но найпре на квадратъ узвышено поставляюћи, и такођеръ назначено умноженіе свршиваюћи, бива:

$$с^2 - 2бс \,.\, \text{Сон.}\ А + б^2 - б^2 \,.\, \text{Нѣд.}\ А = а^2 - б^2 \,.\, \text{Нѣд.}\ А,$$

но будући да се $- б^2$ Нѣд. $А$ у оба члена уравненія наоди, таково се може изоставити, и бы'ће

$$с^2 - 2бс \,.\, \text{Сон.}\ А + б^2 = а^2,$$

одтудъ $б^2 + с^2 - а^2 = 2бс \,.\, \text{Сон.}\ А,$

и $\dfrac{б^2 + с^2 - а^2}{2бс} = \text{Сон.}\ А$. т. є.

Сонѣдриште угла изъ задаты' трію страна налазисе, кадъ се квадратне стране траженый угалъ заклюгаваюће соберу, одтудъ се квадратъ треће стране одузме, и разликасе грезъ удвоеный производъ страна, кое угалъ пожеланый заклюгавају, раздѣли.

7. Да бы изъ предидућегъ образца нѣдриште истога угла изнаћи могли, треба да се опомемо, да є

$$\text{Нѣд.}\ А^2 = (1 - \text{Сон.}\ А^2) = (1 + \text{Сон.}\ А)(1 - \text{Сон.}\ А).$$

8. Али $(1 + \text{Сон.}\ А) = \dfrac{2бс + б^2 + с^2 - а^2}{2бс},$

$$= \frac{(б + с + а)(б + с - а)}{2бс}.$$

9. Тако исто є $(1 - \text{Сон.}\ А) = \dfrac{2бс - б^2 - с^2 + а^2}{2бс},$

$$= \frac{(а + с - б)(а + б - с)}{2бс}.$$

10. Одтудъ израженія подъ чис. 8 и 9 međусобно уважаваюћи бива

$$\text{Нѣд.}\ А^2 = \frac{(а+б+с)(б+с-а)(а+с-б)(а+б-с)}{4\, б^2\, с^2},$$

11. Извлаченѣмъ $\sqrt{\ }$ бива Нѣд. $А$

$$= \frac{\sqrt{(а+б+с)(б+с-а)(а+с-б)(а+б-с)}}{2бс}$$

$$= \frac{и}{2бс}$$

12. Ово се наставленіе речма овако изговара: *Да се угини сумма свію страна; далѣ одъ сумме двею да се одузме трећа, тако ће се добыти три разлике. Она сумма и ове три разлике да се међусобно умноже, коренъ извуге, и грезъ удвоеный производъ страна, кое пожеланый угалъ заклюгавају, раздѣли.*

268.

Изнаћи полупрегникъ оногъ окружія, кое преко ошиля триугла, коега су стране задате, прелази.

Разрѣш. Да назначимо пожеланый полупречникъ са $р$; бы'ће $р = БГ$,

бы'ће по разрѣшенію триугла равнокракогъ $БГС$

$$а = 2БГ \,.\, \text{Нѣд.}\ \tfrac{1}{2}\, Г = 2р : \text{Нѣд.}\ А;$$

$$\text{дакле}\ р = \frac{а}{2\text{Нѣд.}\ А};$$

но будући да є по предид. § ч. 11.

$$\text{Нѣд. } A = \frac{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}{2бc};$$

быће такођеръ

$$p = \frac{aбc}{\sqrt{(a+б+c)(б+c-a)(a+c-б)(a+б-c)}}.$$

269.

Изъ задаты' трію страна триугла, површину нѣгову изнаћи.

Разрѣш. 1. Кадъ се изъ угла $Б$ спуштена отвѣсна назначи $БД = x$. а површина триугла са T, быће по § 195.

$$T = \frac{xб}{2},$$

2. Али по Тригонометрическимъ основима

$$x = c. \text{ Нѣд. } A;$$

дакле $T = \frac{1}{2}\, бc. \text{ Нѣд. } A = \frac{1}{4}\, u.$

3. Изъ задате површине T и изъ задаты двею страна $б, c$, наћисе може Нѣд. A изъ уравненія овога § чсл. 2.

$$T = \frac{1}{2}\, бc. \text{ Нѣд. } A,$$

$$\text{Нѣд. } A = \frac{2T}{бc},$$

4. Изъ задате површине, єдне стране, и угла, изнаћисе може друга страна овай уголъ съ другомъ заваћаюћа, изъ истогъ уравненія.

$T = \frac{1}{2}\, бc$ Нѣд. A, тражећи c, быће

$$c = \frac{2T}{б \text{ Нѣд. } A}.$$

Примѣчаніє. Кои се са разрѣшеніяма овыма добро позна, тай ће моћи и многе друге задатке безъ сваке теготе разрѣшити.

ОДДѢЛЕНІЄ ТРЕЋЕ.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ГЛАВА ПРВА.

О ПОНЯТІЮ, ПОВРШИНАМА, И ЗАПРЕМИНАМА ТѢЛА.

270.

Изясненіє. *Сталность* или *Тѣло* у Математики зовесе количество просторно, (§ 4.), кое се на три управленія разширує. Дуж. висина, ширина

271.

Изясн. *Запремина* тѣла зовесе онай просторъ, кое тѣло у овой неизмѣримой шупльини заузима, то есть у смотренію нѣговогъ простираня.

272.

Изясн. *Површина* тѣла, зовесе крайнѣ тѣла простиранѣ, сталность нѣгову опредѣлявајуће,

и са свію страна окончавајућесе. *Основъ* тѣла є она површина, на коіой тѣло почива, или се да почива, представля. Изъ ошиля нѣговогъ, т. є. изъ найвышше тѣла точке на нѣговъ основъ спуштена отвѣсна, представля *высину* нѣгову.

273.

Изяснен. Выше углова површны као фиг. 115. *АнБ*, *АнВ* и *ВнБ* у обштемъ ошилю *и* стицајућійсе, међусобно нагибајућійсе, са своима странама узайимно додирајућійсе, сачиняваю *угалъ сталный* или *тѣлесный*. ф. 115.

274.

Слѣд. За сочиненіе угла тѣлесногъ наймањѣ три угла површна быти мораю. Єръ два угла површна са обадвема странама додиратисе не могу (§ 191.), али три и выше њи могусе додирнути, и угалъ тѣлесный сочинити.

275.

Настав. *Сви углови површни, угалъ тѣлесный сачинявајући, имаю манѣ одъ 360 степеній.*

Доказат. Сви углови површни на равной површини око обштегъ ошиля положены, слѣдователно међусобно не нагнути, скупа имаю 360° (§ 44. ч. 2.); дакле сви углови површни, угалъ тѣлесный сачиняваюћи, и тако међусобно нагнути, манѣ одъ 360° имати мораю (§ 273.).

276.

Изяснен. Она тѣла, коя се многимъ површинама равнымъ покриваю, и опредѣляваю, вобште зовусе *полиєдра*, а поособъ по числу површина, коима се покриваю, зовесе *тетраєдронъ*, са четирь површине: *пентаєдронъ*, са петъ: *ексаєдронъ*, са шестъ површина равны' опредѣлѣно и проч. Полиєдра друга су *правилна*, а друга *неправилна*; она се окончаваю површинама равнымъ правилныма, међусобно равныма, као и угловима тѣлеснымъ међусобно равныма; а ова неправилныма.

277.

Изяснен. Полиєдра *подобна* зовусе међусобно она, коя се равнымъ числомъ површина равны', међусобно подобны', толико углова тѣлесны', међусобно равны', сочиняваюћій, опредѣляваю. Ако су оне површине іоштъ соотвѣтственно равне, полиєдра *подобна* и *равна* зовусе.

278.

Слѣд. Оваковы' полиєдра правилны' има слѣдуюћіи видова: *тетраєдронъ* са четирь тригонима правилныма међусобно равныма опредѣ-

ленъ фіг. 116: *октаєдронъ* са осамъ равнымъ ф. 116.
тригонима правилнымъ као фіг. 117: *ікосаєдронъ*, ф. 117.
са двадесетъ тригонима правилныма међусобно
равныма опредѣленъ, као фіг. 118: *ексаєдронъ* ф. 118.
са шестъ тетрагонима правылнима међусобно равныма или квадратима опредѣленъ, као фіг. 119; ф. 119.
додекаєдронъ, са дванайстъ пентагонима правилныма међусобно равныма опредѣленъ, као фіг. 120. ф. 120.

279.

Изяснен. Ако представимо, да се некій полигонъ *АБВДЕ* фіг. 121. изъ положенія свогъ ф. 121.
по повученой некой правой лініи, кою мы *управителницомъ* зовемо, непресѣчно и себи равнотекући движе и трагъ свой после себе да заоставля, докъ негди одъ движенія свога престане, изродиѣсе тѣло, коє вообште *призма* зовемо. Ако є полигонъ производећій квадратъ, и высина призматова равна страни квадрата, призма оваковый, кои є ексаєдронъ правилный, поособъ зовесе *кубусъ* (Геометрическій) фіг. 119: ако є ос- ф. 119.
новъ производећій параллелограммъ, изродиѣсе оваковимъ движеніємъ поособъ *параллелепипедонъ*, као у фіг. 122: ако є основъ производећій ф. 122.
кругъ, рађасе призма, нарочито *валякъ* (цылиндеръ) названый као у фіг. 123. ф. 123.

280.

Слѣдства. Призматова површина, по одузетомъ горнѣмъ и долнѣмъ основу, опредѣлюєсе са толико параллелограмма равно високи' еднаку са призматомъ висину имающій, колико е страна у полигону производећемъ. Свака страна полигона производећегъ непресѣчнымъ, и равнотекућимъ движенiемъ рађа параллелограммъ еднаке са призматомъ висине.

2. Призма рађасе изъ основа производећегъ, толико пута узетогъ, колико е точкiй у висини нѣговой.

281.

Изяснен. Призма по виду и по основу производећемъ зовесе *триуголный*, *четвороуголный*, и проч. као што буде основъ производећiй, триуголный, четвоространый и проч. *Призма правъ* зовесе, кадъ е нѣгова управителница на основъ
ф. 121. отвѣсна, као фiг. 121. 124, *коссъ* (косовитъ):
ф. 124. кадъ е управителница косса на основицу, као у
ф. 125. фiг. 125.

282.

Изяснен. Кадъ вообразимо себи, да се
ф. 126. некiй полигонъ *АБВД* фiг. 126. изъ положенiя свогъ трагомъ неке праве лiнiе управителнице тако непресѣчно и равнотекући движе, и трагъ свой после себе да заоставля, да се свакогъ магновенiя движенiя нѣговогъ неке частице страна нѣговы' губе и умаляваю, докъ се напоследку таковымъ умаляванѣмъ у едну точку неслiе, изродићесе *пирамида*, коя е по виду фiгуре основа производећегъ *триуголна* или *тригона*, *четвороуголна* или *тетрагона*, *петоуголна* или *пентагона*, *ексагона* и проч. Пирамида *права* зовесе, кадъ нѣнъ връ точки цѣлогъ основа средньой надстои, или кадъ лiнiя отвѣсна, изъ вр'а нѣногъ на основицу спуштена, пада на точку цѣлогъ основа средню: иначе е *косса*.

283.

Слѣд. 1. Пирамида, по одузетомъ основу, заключавасе толикимъ триуглима, колико е страна у нѣговомъ основу производећемъ. Сви ови триугли имаю у пирамиди правой равну висину, коя е отвѣсна, изъ вр'а пирамиде на ма кою основа страну спуштена.

2. Пирамида состоисе изъ толико фiгура или полигона, основу подобны', колико е точкiй у висини нѣной (§ 272). Стране овы' полигона изъ вр'а пирамиде къ основу, расту непресѣчно неопредѣленомъ частiю, слѣдователно, кадъ се неопредѣлене точке у нѣной висини налазе, стране, па тако и полигона она сачиняваю безконечный редъ чисала наравны' (Алгебра § 168).

284.

Изяснен. Ако е основъ производећiй пирамиде кругъ, пирамида овакова поособъ зовесе *ошилякъ* (conus).

285.

Слѣдства. 1. Ошилякъ такођеръ или є *правъ*, или *коссъ*, као и пирамида (§ 281.).

2. Ошилька правогъ пупчаста површина (по одузетомъ основу, кои се поособъ изнађи има) равна є производу изъ полуокружія круга про-
ф. 127. изводеђегъ и ошилька стране *АБ* фіг. 127., съ коіомъ се отвѣсна, изъ вр'а на ма кою основа страну спуштена, поклапа.

Примѣчаніє. Опредѣленіє дубасте површине ошилька оставлясе Математики вышшой.

286.

Изяснен. Ако се основъ производеђій у движенію свомъ пре заустави, него што се у
ф. 128. точку сманя, изродиђесе пирамида *одбієна* фіг. 128.
кao, ако є основъ производеђій кругъ, ошилякъ
ф. 129. *одбієный*, фіг. 129.

287.

Слѣд. Пирамида одбієна (са изключеніємъ основа) опредѣлюєсе са толикимъ трапезіяма равно высокима, две супротне стране равнотекуђе имаюђима, колико є страна у основу производеђемъ.

I. ПРИЗМА.

288.

Настав. *Површина призмата правогъ, (по изключенимъ основима) равна є производу изъ омѣрія основа производеђегъ и высине призматове,*

Доказат. Површина призматова, (по изключенымъ основима) опредѣлюєсе толикимъ параллелограммовима, ону исту са призматомъ высину имаюђима, колико є страна у основу производеђемъ (§ 279.); али свакога таковогъ параллелограмма површина равна є производу изъ основа нѣговогъ и высине призматове (као высине обште) § 194; дакле свію овы' параллелограмма, слѣдователно и сама призматова површина пострана равна є производу изъ основа свію овы' параллелограмма и высине призматове, али основи свію овы параллелограмма сачиняваю омѣріє основа производеђегъ; дакле.

289.

Слѣдства. 1. Површина валька правогъ, као призмата округлогъ, осимъ основа, равна є производу изъ окружія круга производеђегъ и высине. Одтудъ.

2. Ако є высина валька равна своме пречнику, пострана или пупчаста нѣгова површина бы'-

ће учетворена основа производеђегъ. Єръ пупчаста валька површина равна є нѣноме производу изъ окружія круга производеђегъ и высине валька, или пречника высини (по представляню) равногъ, а површина основа, или круга производеђегъ равна є само єдной четвртой части истога производа (§ 203. ч. 2.).

3. Ако се површине основа' призматовы пособъ опредѣле, и къ пострaной нѣговой површини додаду, добыћесе цѣла површина призматова (као и валькова).

290.

Наставл. *Сталность (или запремина) призматова равна є производу изъ основа производеђегъ и высине нѣгове.*

Доказат. Призма ніє ништа друго, него основъ производеђій, толико пута узетъ, колико є точкій у высини, али то є производъ изъ основа производеђегъ и высине; дакле

291.

Слѣдства. Дакле и валькова сталность равна є производу изъ круга производеђегъ и высине.

2. Да бысмо запремину валька шуплѣгъ или цеви изнаћи могли, опредѣлити треба найпре запремину валька, као изъ тѣла сталногъ, па после пособъ изражити треба шупльину валька као сталность, и ову одузети одъ запремине, пре опредѣлене.

Примѣчаніе. Сталности є мѣра найспособнія кубусъ, збогъ постояне, удобне, и уредне запремине своє: имено хватъ кубическій, стопа кубическа, палацъ кубическій, и проч. *Мѣрити* тѣло нѣко, зовесе изражавати, колико оно оваковы' кубически' хватій, стопа, палаца кубически' и проч. у запремини своіой садржава. Найудеснія є мѣра, стопа кубическа, коя у ширину, дужину и высину по єдну стопу дужине за мѣру има, кою дакле са свію страна окружава равна површина квадратна; дакле стопа кубическа є коцка, имаюћа са свію страна површину равну єдной стопи квадратной. Свака стопа кубичечка има 1728 кубически' палаца, свакій палацъ 1728 куб. лінія и. т. д. Збиръ одъ 216 кубически' стопа сачинява хватъ кубическій. Знакъ, коимъ се кубусъ означава єсть *c*, или квадратъ ⊠, двема двоуголнима назначенъ, коме се знаку іоштъ додає съ леве стране обичный знакъ хвата, стопе и палца, Тако 3^{oc}, $7'^{c}$, или $3^{o\boxtimes}$, $7'^{\boxtimes}$ значи 3 хвата кубическа, седамъ стопа кубическій.

II. ПИРАМИДА.

292.

Наставл. *Површина пирамиде праве, осимъ основа, равна є производу изъ полуомѣрія* *основа и лініе отвѣсне изъ ошиля пирамиде на ма кою основа страну спущѣне.*

Доказат. Површина она пирамиде состоисе изъ толико триуглова равно високи', колико е страна у основу производеђемъ, али површина оны' триуглова равна е реченоме производу; ѥръ основи ньіови скупа износе омѣріе основа производеђегъ, а површина свакога триугла равна е производу изъ пола основице и высине (§ 195.), коя е овде она иста са предреченомъ отвѣсномъ.

293.

Слѣд. Пошто триугли, коима се косса пирамида покрива, сви нису равно высоки, пообособъ ньіове површине изнаћи валя, и осимъ основа у сумму ій собрати, тако ћемо добыти цѣле пирамиде коссе површину.

294.

Наставл. *Површина пирамиде праве одбіене, основе равнотекуће имаюће (осимъ основа) равна е производу изъ полусумме омѣріа основа' и отвѣсне, међу сваке две супротне основа' стране наодећесе.*

Доказат. Површина оваковe пирамиде одбіене (осимъ основа) состоисе изъ толико трапезіа равно высоки', две супротне стране равнотекуће имаюћи', колико е у основу производе-

ћемъ страна (§ 286), али површина свію овы' трапезіа равна е изложеномъ производу; ѥръ свакога оваковогъ трапезіа површина равна е полусумми двею супротны' равнотекући' страна и отвѣсне међу ньима наодећесе, а све оне стране равнотекуће сочиняваю омѣріе основа.

295.

Слѣдства. 1. Ошилька правогъ одбіеногъ (кои се само округлостію своіомъ одъ пирамиде разликуе) пупчаста површина равна е производу изъ полусумме окружія' основа' и стране истога ошилька одбіеногъ.

2. Пупчаста ошилька одбіеногъ правогъ површина равна е такођеръ страни ошилька и окружія, међу основима окружія' среднѣ аритметически сразмѣрногъ. Ѥръ оваково среднѣ сразмѣрно окружіе равно е полусумми окружія' оба основа. Да назначимо окружіе горнѣгъ основа $= п$, долнѣгъ $= П$, среднѣ међу овима двама $= C$; быће сразмѣрность

$$п : C = C : П,$$

$$\text{одтудъ } C = \frac{п + П}{2}. \text{ (Алгебра § 118.)}$$

296.

Наставл. *Сталность пирамиде праве цѣле равна е єдной трећой части производа изъ основа производећегъ и высине пирамиде.*

Доказат. Пирамида состоисе изъ безчисленны' полигона, основу подобны', неопредѣленомъ частію страна свои' изъ вр'а къ основу непресѣчно растеній (§ 283. ч. 2.), дакле, да бы сталность пирамиде опредѣлити могли, опредѣлитисе има найпре сумма оны' безчислены' полигона, основу подобны', али сумма ньіова равна є єдной треѣой части производа изъ основа произведеѣгъ и высине пирамиде; єръ, кадъ се она полигона, као подобна имаю као квадрати страна соотвѣтственны' (§ 210. ч. 2.), а стране, кое изъ вр'а къ основу неопредѣленомъ частію расту, слѣдую редомъ безконечнымъ чисала наравны', она полигона подобна сачиняваю истый онай редъ безконечный, кои сачиняваю квадрати чисала наравны' али сумма квадрата' чисала наравны', редъ безконечный сачиняваюѣи', равна є єдной треѣой части производа изъ члена последнѣга и числа членова (Алгебра § 175.), дакле и сумма оны' полигона подобны', изъ кои' трагова као кожурица пирамида се состои, равна є истомъ производу, али овде є последный членъ основъ производеній, а чиело членова изражава высина пирамиде; єръ є толико оваковы' полигона у пирамиди, колико є точкій у высини; дакле.

297.

Слѣдства. 1. Одтудъ сталность ошилька правогъ цѣлогъ, кои є округла пирамида, равна

є такоѣеръ єдной треѣой части производа, изъ круга основногъ и высине нѣгове.

2. Ако дакле пирамида нека са призматомъ, и ошилякъ са валькомъ некимъ исту то єсть равну высину и основъ имали буду, быѣе пирамида призмата, а ошилякъ валька треѣа часть (коєсе посредствомъ призмата триуголногъ древногъ, на три усмотренію сталности равне части вешто сѣченогъ, очевидно изразити може.

3. Ако пирамида и ошилякъ имаю исте высине и површине основа равне, равне ѣе быти такоѣеръ и ньіове сталности. Исто є тако са призматомъ и валькомъ.

4. Кадъ се пирамиде одбіене фіг. 128. као ф. 128.
цѣле, и ошилька одбіеногъ фіг. 129. такоѣеръ ф. 129.
као цѣлогъ сталности поособъ, а горньи' допуняваюѣи' частій такоѣеръ поособъ определе, и овы' се сталность одъ цѣлы' сталностій одузму, добыѣесе одбіены' оваковы' тѣла сталности; или ако се меѣу основомъ горньимъ и дольнимъ изнаѣе среднѣ аритметически соразмѣрна, и ова се умножи са высиномъ пирамиде одбіене, или ошилька одбіеногъ.

Примѣчаніє. Равнымъ начиномъ опредѣлитисе може запремина бурета, коя се такоѣеръ состои изъ два ошилька одбіена; кои' се основи веѣи меѣусобно на средини бурета додираю.

III. СФЕРА ИЛИ КРУГЛА (Globus).

298.

ф. 130. Изясн. *Сфера или кругла К* (фіг. 130). таково є тѣло, коєга ограничіє или поєдине сполашнѣ точке, одъ среднѣ точке, коя се средоточіє нѣно зове, равно отстоє. Постанѣ нѣно представитисе може, кадъ се полукругъ око пречника свогъ као око осе окрене, и после себе трагъ свой заостави. Но у таковомъ полукругу производеѣемъ представитисе могу или 1) безчисленне лініє отвѣсне изъ пречника *АБ* у найближымъ меѣусобнымъ отстоянѣіяма на полуокружіє повуче-
ф. 131. не, и тако меѣусобно равнотекуѣе као што фіг. 131. предлаже: или 2) толико окружія сасредоточны', слѣдователно равнотекуѣи', колико є точкій
ф. 132. у полупречнику *ВД* фіг. 132. У првомъ постаня предположеню произлази сфера изъ толико ошилака одбієны', неопредѣлены' малы' высина', колико се две и две лініє равнотекуѣе у полукругу производеѣемъ налазе; єръ лукови, кои се меѣу равнотекуѣима налазе, као неопредѣлено мали, са диркама слѣдователно са странама ошилька судараюсе, за праве лініє узетисе могу. У другомъ сфере постаня пуедпоставляню, произлази она изъ толико сферически' или кора сасредоточны', слѣдователно равнотекуѣи', колико є у полупречанику полукруга производеѣегъ точкій.

299.

Слѣдства. 1. Высине свію оны' ошилака одбієны' изъ кои' се сфера да произлази представля, заєдно узете, износе высину или пречникъ сфере, површине пакъ пупчасте оны' ошилака одбієны' скупа износе површину сфере.

2. Полупречници оны' найтанѣи' кора сасредоточны', изъ кои' се сфера состои, одъ средоточія къ найкрайнѣой точки полупречника сфере расту редомъ безконечнымъ чисала наравны'. Єръ се у полупречнику сфере безконечне точке, слѣдователно и безконечны' оны' кора сасредоточны' полупречници налазе.

300.

Изяснен. Кадъ представимо себи, да се сфера површиномъ некомъ сѣче, одсѣчена частъ свагда ѣе представляти кругъ. Ако прелази површина сѣчеѣа преко средоточія сфере, сѣченіє показаѣе кругъ найвеѣій. Одтудъ лако се разуме, кои є *кругъ найвеѣій* сфере, и кое є *окружіє круга найвеѣега*.

301.

Настави. *Пупчаста површина свакога ошилька одбієногъ одъ оны', изъ кои' се сфера состояти разумева, равна є производу изъ вы-*

сине истога ошилька одбієногъ и окружія найвећега круга сфере.

ф. 133. **Доказат.** Да представимо себи у фиг. 133. сферу; она ће се садржавати у *АБВДЕФГХА* окружію круга найвећега. У *АВЕГ* да представимо онаковый ошилякъ одбієный (изъ кои' се сфера садржавати предпоставля), коєга є горный основъ окружный и овога окружіє у *АГ* (коє са стране сматраюћи нѣговъ пречникъ изражава), а долный основъ окружный и овога окружіє да буде *ВЕ*; међу окружіяма овы' основа окружны среднѣ аритметически соразмѣрно окружіє да се помысли у *БФ*. Сфере высина или пречникъ *ХМД* да буде на ошилька одбієногъ основе отвѣсна; бы'ће *ІЛ* высина ошилька одбієногъ. Окружіє круга найвећега *АВДЕХА*, коєга полупречникъ *БМ* да се къ среднѣ аритметички соразмѣрногъ окружія *БФ* точки *Б* повуче, да назовемо *П*; окружіє, међу ошилька одбієногъ основа окружіяма среднѣ соразмѣрно, коєга є полупречникъ *БК*, да назначимо са *с*. По овомъ предпоставляню, пупчаста ошилька одбієногъ *АВЕГ* површина по познатомъ изложеномъ начину равна є производу изъ стране ошилька и окружія, међу ошилька основыма среднѣ соразмѣрногъ, или равна є производу

$$\text{АВ} \times c,$$

а производъ изъ высине ошилька одбієногъ и окружія круга найвећега сфере бы'ће

$$\text{ІЛ} \times \text{П},$$

$$\text{али } \text{АВ} \times c = \text{ІЛ} \times \text{П},$$

Єръ кадъ се изъ *А* на *ВЕ* спусти отвѣсна *АН*, бы'ће $\triangle \text{НАВ} \sim \triangle \text{КБМ}$, што є осимъ углова *АНВ* и *БКМ* десны', уголъ *АВН* = углу *БМК* збогъ єдне и оне исте мѣре; єръ уголъ *БМК* или *БМХ* за мѣру има лукъ *БХ*, али истій лукъ за мѣру има и уголъ *АВН*, што є уголъ *АВН* или *АВЕ* = углу *АБФ* збогъ *БФ* # *ВЕ*, али уголъ *АБФ* за мѣру има лукъ *БХ* (§ 78.); дакле истій онай лукъ има и уголъ *АВН* за мѣру; трећій уголъ равань є трећемъ (§ 115. ч. 7.); а у триуглима подобнима стране су соотвѣтствене соразмѣрне (§ 161.); дакле

$$\text{АВ} : \text{АН} = \text{БМ} : \text{БК},$$

или збогъ *АН* = *ІЛ* (§ 55. ч. 4.), дакле *ІЛ* мѣсто *АН* поставляюћи, бы'ће

$$\text{АВ} : \text{ІЛ} = \text{БМ} : \text{БК};$$

далѣ, кадъ се окружія имаю као полупречници (§ 183.), на мѣсто овы' поставляюћи, бы'ће

$$\text{АВ} : \text{ІЛ} = \text{П} : c,$$

одкудъ производъ споляшньи' членова равань є производу внутрены' (Алгебра § 120.), бы'ће

$$\text{АВ} \times c = \text{ІЛ} \times \text{П};$$

дакле.

302.

Настав. *Површина сфере равна є производу изъ окружія круга найвећега и пречника или высине сфере.*

Доказат. Пупчаста површина свію оны' ошиляка одбієны' заедно узеты', изъ кои' се сфера состояти разумева, сачинява површину сфере, али пупчаста свію оны' ошиляка одбієны' површина равна є производу изъ окружія круга найвећега и пречника сфере. Єръ свакога оваковогъ ошилька одбієногъ пупчаста површина равна є производу изъ окружія круга найвећега сфере и высине истога ошилька (§ 301.), дакле, кадъ высине свію оны' ошиляка одбієны', скупа узеты', износе пречникъ сфере (§ 299. ч. 1.), површина пупчаста свію оны' ошиляка одбієны' равна є производу изъ окружія круга найвећега и пречника, дакле и површина сфере равна є истоме производу.

303.

Слѣдства. 1. Површина сфере дакле равна є пупчастой површини валька (то єсть осимъ основа'), равну высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ. Єръ ако се равна она высина или пречникъ назначи са P, а окружіє са $П$, быће како сфере, тако и валька површина $= PП$ (§ 302.).

2. Површина є сфере учетворена круга найвећега. Єръ површина сфере равна є цѣломъ производу изъ пречника и окружія круга найвећега (§ 302); а површина круга найвећега равна є єдной четвртой части истога производа (§ 203. ч. 1.).

304.

Настави. *Површине сфера' имаю се као квадрати пречника' и полупречника' исты' сфера'.*

Доказат. Єръ, ако се површина єдне одъ двею сфера' назначи са $П$, а друге са $п$, кругъ найвећій єдне са K, а друге са $к$: овы' полупречници P и p : пречници са $Д$ и $д$, быће

$П = 4K,$

и $п = 4к$ (по § 303. ч. 2.);

одтудъ $П : п = 4K : 4к,$

и одтудъ $П : п = K : к$ (Алгебра § 125. VI.),

али $K : к = P^2 : p^2 = Д^2 : д^2$ (§ 210. ч. 4.);

дакле $П : п = P^2 : p^2 = Д^2 : д^2.$

305.

Настави. *Површина сфере имасе на цѣлу површину валька, равну высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ, као 2 на 3.*

Доказат. Єръ пошто є оваковогъ валька пупчаста површина, као површина сфере равна, (§ 303. ч. 1.), учетворена круга найвећега сфере (§ 303. ч. 2.), кои є са кругомъ производећимъ валька онай истій, цѣла површина валька (скупа са основима) ушесторена є круга найвећега, слѣдователно површина сфере $П$ имасе на цѣлу оваковогъ валька површину $п$, као $4K : 6к$,

или $П : п = 4K : 6к,$

или $П : п = 2 : 3$ (Алгебра § 125. VI.).

306.

Наставл. *Сталность сфере равна є єдной трећой части производа изъ површине нѣне и полупречника.*

Доказат. Найтанѣ оне коре сасредоточне сферическе, изъ кои се сфере сталность состояти разумѣва (§ 298. ч. 2.), имаюсе као квадрати полупречника (§ 304.), дакле, кадъ ньіови полупречници слѣдую редомъ безконечнымъ числа наравны (§ 299. ч. 2.), они исти сачиняваю редъ безконечный квадрата числа наравны; дакле опредѣлити сталность сфере толико є као опредѣлити сумму квадрата числа наравны, редъ безконечный сачиняваюћи, у комъ се число членова полупречникомъ, а последньій членъ последньомъ ономъ коромъ, или површиномъ сфере излаже, али по Алгебри § 175., сумма квадрата реда безконечногъ числа наравны равна є єдной трећини производа изъ квадрата члена последнѣга и числа членова предидући; дакле.

Примѣчаніє. На примѣръ, ако бы было пречникъ или высина сфере $= 14'$, дакле полупречникъ $= 7'$, бы'ће окружіє круга найвећега $= 44'$ (§ 183 и Примѣч.), одтудъ површина сфере $= 14' \times 44' = 616'\square$ (§ 302.), а сталность или запремина сфере $= \frac{616\square' \times 7}{3} = 1437\,\frac{1}{3}\,\text{в}'$.

307.

Слѣдства. 1. Сталность дакле сфере равна є двема трећимъ частима производа изъ круга найвећега и пречника сфере. Да буде кругъ найвећій $= \text{К}$, пречникъ $= \text{Д}$, бы'ће површина сфере $= 4\text{К}$ (§ 303. ч. 2.), и полупречника єдна трећа $= \frac{1}{6}\text{Д}$ (као што є очевидно), дакле сфере сталность $= 4\text{К} \times \frac{1}{6}\text{Д}$ (306.), $= \frac{4}{6}\text{КД} = \frac{2}{3}\text{КД}$. Одтудъ

2. Сталность сфере равна є двема трећимъ частима валька, ону исту высину, и пречникъ са сферомъ имаюћегъ. Єръ сталность сфере равна є $\frac{2}{3}$ частима производа изъ круга найвећега и пречника (по § 307. ч. 1.), а сталность оваковогъ валька равна є цѣломъ оваковомъ производу (§ 291.).

3. Дакле и сталность сфере, или сфера имасе на валякъ исте высине и пречника, као $2 : 3$ (§ 302.). Єръ ако се сталность или запремина сфере назначи са З, а валькова са з; бива $\text{З} = \frac{2}{3}\text{КД}$ (§ 307. ч. 1.), а $\text{з} = \text{КД}$ (§ 291.); дакле $\text{З} : \text{з} = \frac{2}{3}\text{КД} : \text{КД}$, одтудъ, последнѣ отношеніє са 3 множећи, бива $\text{З} : \text{з} = 2\text{КД} : 3\text{КД}$, и исто отношеніє чрезъ КД дѣлећи, бива $\text{З} : \text{з} = 2 : 3$.

Примѣчаніє. По изложенымъ у науцы тѣла основима, могу се изнаћи како површине и запремине правилны тѣла и оны, о коима досадъ спомена ніє было. Опредѣленіє површина, као полигона правилны, съ коима се ова тѣла покривају, никаковой теготи ніє подложно, а запремине ньіове могу се као запремине пирамиде изнаћи, или ако су неправилна, тако се на части раздѣлити, да се ко овима овде изложенима тѣлама причислити, и тако прорачунати могу.

IV. ошилякъ (conus).

308.

Изясненіє. Кадъ представимо себи, да се ошилякъ површиномъ цекомъ, скрозъ пролазећомъ сѣче, сѣченѣ, одтудъ произлазеће, вообште зовесе *сѣченіє ошилька* (sectio coni), тако да сѣченіє ошилька ништа друго ніє него површина, кою єдна или друга поменутымъ начиномъ одсѣчена ошилька часть излаже. Но найвыше у оваковомъ сѣченю само се лінія крива, одсѣчену ошилька површину заключавајућа, у смотреніє узима, и именомъ сѣченя ошильногъ назначуєсе. По разномъ сѣчеће површине положенію у смотренію ошилька сѣченогъ стране, основа, или *осе*, то єсть лініє отвѣсне изъ вр'а ошилька правогъ на средню основа точку спуштене, коя се у ошильку правомъ са нѣговомъ высиномъ слаже, сѣченѣ представля намъ *еллипсу*, *параболу*, *иперболу*.

Примѣчаніє. Постанѣ ошилька, како се нѣгова површина и нѣгова сталность изнаћи мо-

же, изъ узрока тога што є ошилякъ округла пирамида, све што се у овомъ смотренію казати могло, у заглавію подъ пирамидомъ изложено є. Наше є намѣренѣ овде оне криве лініє, коє се сѣченіємъ ошилька рађаю, изложити, и она ньіова свойства представити, коя се у физики изискую.

309.

Изясненіє. *Еллипсісъ* (ἔλλειψις) зовесе оно сѣченіє ошилька, коє се рађа, кадъ површина, коіомъ се ошилякъ сѣћи представля, како на осу, тако и на обе стране ошилька коссо пада, као у фіг. 134'. *КЛМН* или у фіг. 137. *АЕБДА*. ф. 134'. 137.

310.

Изяснен. *Парабола* (παραβολη) зовесе сѣченіє ошилька, коє се рађа, кадъ є површина сѣчећа са страномъ ошилька равнотекућа, (као што є *БАВ* фіг. 135. или *АБВ* фіг. 138.). Она ф. 135.
права лінія *БВ*, кою ово сѣченіє на основу ошиль- ф. 138.
ка правогъ сачинява, зовесе *основъ* параболе.

311.

Изяснен. *Ипербола* (ὑπερβολη) зовесе сѣченіє ошилька, коє се рађа, кадъ є површина сѣчећа равнотекућа са осомъ ошилька, као што є
ІГХ фіг. 136. Но за придобыти право понятіє ф. 136.
иперболе, треба да представимо себи два ошиль-

ка, кои се са своимъ ошилями сучеляваю и до-
ф. 136. дираю, као у фіг. 136. и кадъ су они у овомъ
положенію, онда да вообразимо себи, да се они
површиномъ некомъ *МН* на обшту супротны
ошиляка осу *ую* равнотекуће сѣку, тако да се
две иперболе себи супротне указую као *ХГІ* и
хгі.

Примѣчаніє. Ако површина сѣчећа прелази преко ошиля ошилька правогъ на основъ отвѣсно, сѣченіє є триугалъ; ако є површина сѣчећа равнотекућа на основъ ошилька правогъ, изродићесе таковымъ сѣченіємъ кругъ.

312.

Изяснен. Точка она сѣченія ошилькова, у коіой є найвећа сѣченія кривина, *ошилѣ* нѣгово зовесе.

ф. 137. **Слѣд.** Но пошто еллипсісъ фіг. 137., и
ф. 136. удвоєна иперболa фіг. 136. у две точке *А,Б,* и
ф. 138. *Г,г,* а парабола само у єдной *А* фіг. 138. найве-
ћу кривину има, слѣдує, да еллипсисъ и иперболa има два ошиля *А* и *Б, Г* и *г,* а парабола само єдно.

313.

ф. 137. **Изяснен.** Лінія права *АБ* еллипсе фіг. 137.
ф. 136. и иперболе фіг. 136. *Гг* ошиля союжаваюћа, зо-
весе нѣіова оса *попречна* или *главна*, или *већа*,
одъ коє точка средня *С* средоточіє зовесе: лі-

нія пакъ на главну осу отвѣсна *ЕД*, преко средоточія прелазећа, оса *маня*, и равна є среднѣ соразмѣрной међу осомъ већомъ и параметромъ (о коме ћемо далѣ изясненіє дати).

314.

Изясн. *Оса параболе* зовесе лінія права
Ах фіг. 138. 135. изъ ошиля нѣногъ *А*, на основъ ф. 138.
БВ спуштена отвѣсна. ф. 135.

315.

Изясн. Свака права као *ДЕ, ГХ* фіг. 138. ф. 138.
на осу главну отвѣсна, са обе стране у кривини сѣченія окончавајућасе, зовесе *редовна:* половина нѣна одъ кривине до осе узета, зовесе *полуредовна:* одсѣчіє пакъ осе, међу криве ошилѣмъ и редовномъ, или полуредовномъ, зовесе *одсѣчица.* Тако є редовне *ХГ* соотвѣтствуюћа одсѣчица *АІ:* полуредовне *ЛК* одсѣчица є *АК,* и проч.

Примѣч. О одсѣчицама редовны у еллипси соотвѣтствуюћима, као и о редовнима, и о одсѣчицама осе манѣ, далѣ свойства овде наводити противъ намѣреня є нашегъ.

316.

Изяснен. Она параболе редовна *Пп* фіг.
138., коя є учетворена одсѣчице своє, *параме-* ф. 138.
теръ параболе зовесе: а точка она *О* осе, у

коіой параметеръ осу сѣче, параболе *огнѣточіе* зовесе.

317.

Слѣд. Кадъ се четврта параметра часть изъ ошиля параболе на осу пренесе, опредѣлиђесе параболе огнѣточіе.

318.

Изясн. *Огнѣточіе* еллипсе зовесе она осе ф. 137. главне $AБ$ (фіг. 137.) точка (као што е O и o), коя одъ обе крайнѣ осе манѣ $EД$ точке E и $Д$ одстояніємъ ($OД$ и $oд$) равнымъ полуоси главной AC одстои. Редовна преко огнѣточія o пролазећа $Пп$ *параметеръ* е еллипсе.

319.

Слѣдства. 1. Пошто се еллипса и ипербола стедоточіемъ на две равне части дѣли, точка нѣка веће осе съ обе стране одъ крайныъ манѣ осе точкій отстояніємъ, кое е равно полуоси већой, отстояти мора. Одтудъ еллипса и ипербола два има огнѣточія као O и o, и два параметра.

2. Кадъ се еллипсе главна оса $AБ$ изъ обе крайнѣ осе манѣ точке $Д$ отстояніємъ $ДO$ или $Дo$, кое е равно полуоси већой AC, съ обе стране пресѣче, опредѣлиђесе два огнѣточія O и o.

320.

Изясн. *Огнѣточіе* иперболе зовесе она осе веће продужене $AБ$ фіг. 139. точка O или o, коя ф. 139.
одъ средоточія C отстои отстояніємъ CO равнымъ ошилю A отстоянію $AД$ одъ обе крайнѣ осе манѣ $EД$ точке $Д$; а *параметеръ* зовесе она редовна, коя преко огнѣточія прелази $xю$. Слѣдователно ипербола као и еллипсісъ има два огнѣточія O и o, и два параметра.

321.

Наставл. *Еллипса у себе саму повраћасе.*

Доказат. Єръ се она рађа сѣченіемъ ошилька, кое сѣченіе обе стране ошилька прелази. (§ 309.).

322.

Наставл. *Еллипса сѣчесе свакомъ осомъ своіомъ на две равне части.*

Доказат. Єръ ако се еллипса по повученой оси пресомити, части ће се нѣне сложити и поклопити, али § 11. ч. 10.; дакле. Зато

323.

Слѣдства. 1. Еллипса дѣлисе чрезъ свое две осе на четиръ равне части.

2. Редовне еллипсе, одъ ошиля равноотстоеће, и тако кривине супротне, кое оне редовне опредѣлявају, равне су.

324.

Изяснен. Отстоянiе средоточiя одъ огнѣточiя еллипсе зовесе *вансредоточiе* еллипсе, као
ф. 137. што е *Со* фiг. 137.

325.

Наставл. *Вансредоточiе еллипсе со тымъ е веће, што е маня оса маня у смотренiю попречне.*

Доказат. Єръ огнѣточiя со тымъ се већма одъ средоточiя удалявају.

326.

Слѣд. Еллипсе одвећъ стинѣне весма су вансредоточне. Єръ со тымъ маню имаю осу у смотренiю главне или попречне осе.

327.

Изяснен. Ако се движимо движе у кругу
ф. 137. еллиптическомъ фiг. 137. око ма кога огнѣточiя н. п. око *О*, ошилѣ еллипсе *Б*, ономъ огнѣточiю найближе, зовесе *перихелiонъ*, а оно далѣ или удалѣнiе ошиля *А* зовесе *афелiонъ*, отстоянiе оногъ движимогъ одъ огнѣточiя (као средоточiя

сила, коима се оно движе), или права, движимо оно са огнѣточiемъ, око кога се оно движе, союжавајућа, зовесе *зрачацъ покретный*. Тако, ако е движимо у *А*, зрачацъ покретный е *АО*; ако движимо дође у *Д*, зрачацъ е покретный *ДО*; а ако се движимо налази у *Б*, зрачацъ е покретный *БО*, и проч.

328

Наставл. *Ако се движимо окреће у еллипси око ма кога огнѣточiя О, движимо оно имаће одъ нѣга отстоянiе* 1) *у перихелiону наймањѣ БО:* 2) *у афелiону найвеће АО:* 3) *у осе манѣ ЕД окрайньимъ точкама* Е *и* Д *среднѣ соразмѣрно.*

Доказат. 1) *БО* зрачацъ е наймањый: 2) *АО* е найвећiй, као што е очевидно: 3) *ДО* е среднѣ аритметическо соразмѣранъ међу отстоянiяма *БО* и *АО*; єръ е *ДО* (као = полуоси већой) полусумма одъ *БО* + *АО* (или одъ *АБ*), али полусумма два количества, то е међу нѣима среднѣ соразмѣрна; дакле.

ГЛАВА ДРУГА.

О МЕЂУСОБНЫМЪ ТѢЛА' ОТНОШЕНІЯМА.

329.

Наставлен. *Призмата и вальци имаюсе у отношенію* сложеномъ ~~удвоеномъ~~ *основица и высина.*

Доказат. Запремину єднога да назначимо са $З$; а другога са $з$, высина єднога да буде $В$, а другога $в$, основице $О$ и $о$, бы'ће

$$З = ОВ,$$

а $з = ов$ (§ 289.).

одтудъ $З : з = ОВ : ов$,

али отношеніє ово $ОВ : ов$ сложено є отношеніє изъ $О : о = В : в$; дакле.

330.

Слѣдства. 1. Ако є $В = в$, бы'ће $З : з = О : о$ (т. є. пређашнѣ соразмѣрности друго отношеніє чрезъ $В$ и $в$ дѣлећи); ако ли є $О = о$, бы'ће

$$З : з = В : в,$$

то єсть, овакова тѣла имаюћа равне высине, имаюсе као основи, ако пакъ имаю равне основе, имаюсе као высине.

2. Ако є $З = з$, быва $ОВ = ов$, и одтудъ

$В : в = о : О$, и обратно ако се

$В : в = о : О$,

быва $ОВ = ов$,

то єсть, ако су такова два тѣла међусобно равна, ньіове высине имаюсе обратно са основима соразмѣрно, и обратно.

331.

Наставленіє. *Призмата подобна* I *и* i фіг. 124. *имаюсе у отношенію утроєномъ сваки' страна соотвѣтственны', као* $БВ^2 : бв^2$. ф. 124.

Доказател. По § 329. содржанію и доказателству

$I : i = АБ \times БВД : аб \times бвд$,

или пошто є $АБ : аб = БВ : бв$,

и $I : i = БВ \times БВД : бв \times бвд$;

али $БВД : бвд = БВ^2 : бв^2$ (§ 209.);

дакле $I : i = БВ \times БВ^2 : бв \times бв^2$,

или $I : i = БВ^3 : бв^3$.

332.

Слѣдства 1. Исто тако имаюсе и пирамиде подобне.

2. Вальци подобни имаюсе међусобно као и ошильци подобни у отношенію утроєномъ (или као кубуси) полупречника ньіовы' (окружны') основа производећи'.

333.

Наставленіе. *Сфере имаюсе у отношенію утроеномъ (или као кубуси) полупречника или пречника.*

Доказат. Да назначимо запремину едне сфере $= З$, а друге $= з$, быће

$$З : з = \tfrac{4}{3} КД : \tfrac{4}{3} кд \text{ (§ 307. ч. 1.)},$$

$$З : з = КД : кд \text{ (Алгебра § 126. VI.)},$$

то есть, у отношенію сложеномъ изъ

$$К : к \text{ и } Д : д,$$

$$\text{али } К : к = Д^2 : д^2 \text{ (§ 210. ч. 4.)};$$

$$\text{дакле } З : з = Д \times Д^2 : д \times д^2,$$

$$\text{или } З : з = Д^3 : д^3,$$

или на мѣсто пречника поставляюћи зрачце,

$$З : з = Р^3 : р^3.$$

ТАБЛИЦА

ДѢЙСТВІЯ УГЛОВА

одъ 1 до 90 степеній осимъ поедини десетъ мінута.

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
0		0	0	0	0
	10	290,89	290,89	7,4637255	7,4637273
	20	581,77	581,77	7,7647537	7,7647610
	30	872,65	872,65	7,9408419	7,9408584
	40	1163,53	1163,61	8,0657763	8,0658057
	50	1454,39	1454,54	8,1626808	8,1627267
1		1745,24	1745,51	8,2418553	8,2419215
	10	2036,08	2036,50	8,3087941	8,3088842
	20	2326,90	3327,53	8,3667769	8,3668945
	30	2617,69	2618,59	8,4179190	8,4180679
	40	2908,47	2909,70	8,4636649	8,4638486
	50	3199,22	3200,86	8,5050447	8,5052671
2		3489,95	3492,08	8,5428192	8,5430838
	10	3780,65	3783,35	8,5775660	8,5778766
	20	4071,31	4074,69	9,6097341	8,6100943
	30	4361,94	4366,09	8,6396796	8,6400931
	40	4652,53	4657,57	8,6676893	8,6681598
	50	4943,08	4949,13	8,6938980	8,6945292
3		5233,60	5240,78	8,7188002	8,7193958
	10	5524,06	5532,51	8,7422586	8,7429222
	20	5814,48	5824,34	8,7645111	8,7652465
	30	6104,85	6116,26	8,7856753	8,7864861
	40	6395,17	6408,29	8,8058523	8,8067422
	50	6685,44	6700,43	8,8251299	8,8261026
4		6975,65	6992,68	8,8435845	8,8446437
	10	7265,80	7285,05	8,8612833	8,8624327
	20	7555,89	7577,55	8,8782854	8,8795286
	30	7845,91	7870,17	8,8946433	8,8959842
	40	8135,87	8162,93	8,9104039	8,9118460
	50	8425,76	8455,83	8,9256089	8,9271560
5		8715,57	8748,87	8,9402960	8,9419518
	10	9005,32	9042,06	8,9544991	8,9562672
	20	9294,99	9335,40	8,9682487	8,9701330
	30	9584,58	9628,90	8,9815729	8,9835769
	40	9874,08	9922,57	8,9944968	8,9966243
	50	10163,51	10216,41	9,0070436	9,0092984
6		10452,85	10510,42	9,0192346	9,0216202
	10	10742,10	10804,62	9,0310890	9,0336093
	20	11031,26	11098,99	9,0426249	9,0452836
	30	11320,32	11393,56	9,0538588	9,0566595
	40	11609,29	11688,31	9,0648057	9,0677522
	50	11898,16	11983,28	9,0754799	9,0785760

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
89	60	100000,00	безконечна.	10,0000000	безконечанъ.
	50	99999,58	34377371,00	9,9999982	12,5362727
	40	99998,30	17188540,00	9,9999927	12,2352390
	30	99996,19	11458865,00	9,9999835	12,0591416
	20	99993,23	8593979,10	9,9999706	11,9341943
	10	99989,42	6875008,70	9,9999542	11,8372733
88	60	99984,77	5728996,56	9,9999338	11,7580785
	50	99979,27	4910388,06	9,9999100	11,6911158
	40	99972,92	4296407,73	9,9999824	11,6331055
	30	99965,73	3818845,93	9,9998512	11,5819321
	20	99957,69	3436777,09	5,9998162	11,5341514
	10	99948,81	3124157,67	9,9997776	11,4947329
87	60	99939,08	2863625,33	9,9997354	11,4569162
	50	99928,51	2643159,96	9,9996894	11,4221234
	40	99917,09	2454175,78	9,9996398	11,3899057
	30	99904,82	2290376,55	9,9995865	11,3599059
	20	99891,71	2147040,10	9,9995297	11,3318402
	10	99877,75	2020555,35	9,9994688	11,3054708
86	60	99862,95	1908113,67	9,9994044	11,2806042
	50	99847,31	1807497,74	9,9993364	11,2570778
	40	99830,81	1716933,69	9,9992646	11,2347535
	30	99813,48	1634985,55	9,9991892	11,2135139
	20	99795,29	1560478,41	9,9991101	11,1932578
	10	99776,27	1492441,70	9,9990272	11,1738074
85	60	99756,40	1430066,63	9,9989408	11,1553563
	50	99735,69	1372673,79	9,9988506	11,1375673
	40	99714,13	1319688,30	9,9987567	11,1204714
	30	99691,73	1270620,47	0,9986491	11,1040158
	20	99668,49	1225050,55	9,9985579	11,0881540
	10	99644,40	1182616,67	9,9984529	11,0728440
84	60	99619,47	1143005,23	9,9983442	11,0580482
	50	99593,60	1105943,10	9,9982318	11,0437328
	40	99567,08	1071191,26	9,9981158	11,0293670
	30	99539,62	1038539,71	9,9979960	11,0164231
	20	99511,32	1007803,11	9,9978725	11,0033757
	10	99442,17	978817,32	9,9977453	10,9907016
83	60	99452,18	951436,45	9,9976143	10,9783798
	50	99421,36	925530,35	9,9974797	10,9663907
	40	99489,69	900982,61	9,9993414	10,9547164
	30	99357,18	877688,74	9,9971993	10,9433405
	20	99323,83	855554,68	9,9970535	10,9322478
	10	99289,64	834495,57	9,9969040	10,9214240

Степени.	Минута.	Нѣдрипште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдрипшта.	Логаритамъ дирке.
7		12186,93	12278,46	9,0858945	9,0891438
	10	12475,60	12573,84	9,0960615	9,0994678
	20	12764,16	12869,43	9,1059924	9,1095594
	30	13052,62	13165,25	9,1156977	9,1194291
	40	13340,96	13461,29	9,1251872	9,1290868
	50	13629,19	13757,57	9,1344702	9,1385417
8		13917,31	14054,08	9,1435553	9,1478025
	10	14205,31	14250,84	9,1524507	9,1568773
	20	14493,19	14647,84	9,1611639	9,1657737
	30	14780,94	14945,10	0,1697021	9,1744988
	40	15068,57	15242,61	9,1780721	9,1830595
	50	15356,07	15540,40	9,1862802	9,1914621
9		15643,45	15838,44	9,1943324	9,1997125
	10	15930,69	16136,77	9,2022345	9,2078165
	20	16217,79	16434,37	9,2099917	9,2157795
	30	16504,76	16734,26	9,2176092	9,2236005
	40	16791,59	17033,44	9,2250918	9,2313024
	50	17078,28	17332,92	9,2324440	9,2383717
10		17364,82	17632,70	9,2396702	9,2463188
	10	17651,21	17932,78	9,2467746	9,2536477
	20	17937,46	18233,18	9,2537609	9,2608625
	30	18223,55	18533,90	9,2606330	9,2679669
	40	18509,49	18334,95	9,2673945	9,2749644
	50	18795,26	19136,32	9,2740487	9,2818585
11		19080,90	19438,03	9,2805988	9,2886523
	10	19366,36	19740,08	9,2870480	9,2953489
	20	19651,66	20042,48	9,2933993	9,3019514
	30	19936,79	20345,23	9,2996553	9,3084626
	40	20221,76	20648,34	9,3058189	9,3148851
	50	20506,55	20951,81	9,3118926	9,3212216
12		20791,17	21255,65	9,3178789	9,3274745
	10	21075,61	21559,88	9,3237802	9,3336463
	20	21359,88	21864,48	9,3295988	9,3397391
	30	21643,96	22169,47	9,3353368	9,3457552
	40	21927,86	22474,85	9,3409963	9,3516968
	50	22211,58	22780,63	9,3455794	9,3575658
13		22495,11	23086,82	9,3520880	9,3633641
	10	22778,44	23393,42	9,3575240	9,3690937
	20	23061,59	23700,44	9,3628892	9,3747563
	30	23344,54	24007,87	9,3681853	9,3803537
	40	23627,29	24315,75	9,3734139	9,3858876
	50	23909,84	[illegible],05	9,3785767	9,3913595

Степени.	Минута.	Нѣдрипште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдрипшта.	Логаритамъ дирке.
82	60	99254,62	814434,64	9,9967507	10,9108562
	50	99218,74	795302,24	9,9965937	10,9005322
	40	99182,03	777035,06	9,9964330	10,8904406
	30	99144,49	759575,41	9,9962686	10,8805709
	20	99106,09	742870,64	9,9961004	10,8709132
	10	99066,87	726872,55	9,9959284	10,8614583
81	60	99026,80	711536,97	9,9957528	10,8521975
	50	98985,90	696823,35	9,9955734	10,8431227
	40	98944,16	682694,37	9,9953902	10,8342263
	30	98901,58	669115,62	9,9952033	10,8255012
	20	98858,17	656055,38	9,9950126	10,8169405
	10	98813,92	643484,28	9,9948181	10,8085379
80	60	98763,83	631375,15	9,9946199	10,8002875
	50	98722,91	619702,79	9,9944180	10,7921835
	40	98676,15	608443,81	9,9942122	10,7842205
	30	98628,56	597576,44	9,9940027	10,7763935
	20	98580,12	587080,42	9,9937894	10,7686976
	10	98530,87	576936,88	9,9935723	10,7611283
79	60	98480,77	567128,18	9,9933515	10,7536812
	50	98429,85	557637,86	9,9931268	10,7463523
	40	98378,08	548450,52	9,9928984	10,7391375
	30	98325,49	539551,72	9,9926661	10,7320331
	20	98272,06	530927,93	9,9924301	10,7250356
	10	98217,81	522566,47	9,9921905	10,7181415
78	60	98162,71	514455,40	9,9919466	10,7113477
	50	98106,80	506583,52	9,9916991	10,7046511
	40	98050,05	498940,27	9,9914478	10,6986486
	30	97992,47	491515,70	6,9911927	10,6915374
	20	97934,06	484300,45	9,9909338	10,6851149
	10	97874,83	477585,67	9,9906710	10,6787784
77	60	97814,76	474063,01	9,9904044	10,6725255
	50	97753,86	463824,57	9,9901339	10,6663537
	40	97692,15	457362,87	9,9898597	10,6602609
	30	97629,60	451070,85	9,9895815	10,6542448
	20	97566,23	444941,81	9,9892995	10,6483032
	10	97502,03	438969,40	9,9890137	10,6424342
76	60	97437,01	433147,59	9,9887239	10,6366359
	50	97371,16	427470,66	9,9884303	10,6309063
	40	97304,48	421933,18	9,9881329	10,6252437
	30	97236,99	416529,96	9,9878315	10,6196463
	20	97168,67	411256,14	9,9875263	10,6141124
	01	97099,54	406107,00	9,9872171	10,6086405

Степени.	Минута.	Нѣдрište.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
14		24192.19	24932,80	9,3836752	9,3967711
	10	24474.33	25242,00	9,3887109	9,4021237
	20	24756.27	25551,65	9,3936852	9,4074189
	30	25038.00	25861,76	9,3985996	9,4126581
	40	25319.52	26172,34	9,4034554	9,4178425
	50	25600,82	26483,39	9,4082539	9,4229735
15		25881,90	26794.92	9,4129962	9,4280525
	10	26162,77	27106,93	9,4176837	9,4330804
	20	26443.42	27419.44	9,4223176	9,4380587
	30	26723.84	27732,45	9,4268988	9,4429883
	40	27004.03	28045.97	9,4314286	9,4478704
	50	27284,00	28359,99	9,4359080	9,4527061
16		27563,74	28674,54	9,4403381	9,4574964
	10	27843.24	28989,61	9,4447197	9,4622423
	20	28122.51	29305.21	9,4490540	9,4669448
	30	28401.53	29621,35	9,4533418	9,4716048
	40	28680,32	29938,03	9,4575840	9,4762233
	50	28958.87	30255,27	9,4617816	9,4808011
17		29237,17	30573,07	9,4659353	9,4853390
	10	29515,22	30891.43	9,4700461	9,4898380
	20	29793,03	31210.36	9,4741146	9,4942988
	30	30070.58	31529,88	9,4781418	9,4987223
	40	30347,88	31849,98	9,4821283	9,5031092
	50	30624,92	32170,67	9,4860749	9,5074602
18		30901,70	32491,97	9,4899824	9,5117760
	10	31178.22	32813,87	9,4938513	9,5160572
	20	31454.48	33136,39	9,4976824	9,5203052
	30	31730,47	33459,53	9,5014764	9,5245199
	40	32006,19	33783,30	9,5052339	9,5257021
	50	32281,64	34107,71	9,5089556	9,5328326
19		32556.82	34432,76	9,5126419	9,5269719
	10	32831,72	34758,46	9,5162936	9,5410606
	20	33106.34	35084,83	9,5199112	9,5451193
	30	33380,69	35411,86	9,5234953	9,5491487
	40	33654.75	35739,56	9,5270463	9,5531492
	50	33928.53	36067,95	9,5305650	9,5571214
20		34202,02	36397,02	9,5340517	9,5619659
	10	34475,22	36726,80	9.5375069	9,5649831
	20	34748.13	37057,28	9,5409314	9.5688735
	30	35020,74	37388,47	9,5443253	9,5527377
	40	35293.06	37720,38	9,5476893	9,5765761
	50	35565,08	38053,03	9,5510237	9,5803892

Степени.	Минута.	Нѣдрište.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
75	60	97029,57	401078,09	9,9869041	10,6032289
	50	96958,79	396165,18	9,6865872	10,5978763
	40	96887,18	391364,20	9,9862663	10,5925811
	30	96814,76	386671,31	9,9859416	10,5873419
	20	96741,52	382082,81	9,9856129	10,5821575
	10	96667,46	377595,19	9,9852803	10,5770265
74	60	96592,58	373205,08	9,9849438	10,5719475
	50	96516,88	368909,27	9,9846033	10,5669196
	40	96440,37	364704,67	9,9842589	10,5619417
	30	96363,05	360588,35	9,9839105	10,5570113
	20	96284,90	356557,49	9,9835582	10,5521296
	10	96205,94	352609,38	9,9832019	10,5472939
73	60	96126,17	348741,44	9,9828416	10,5425036
	50	96045,58	344951,20	9,9824774	10,5377577
	40	95964,18	341236,26	9,9821092	10,5330552
	30	95881,97	337594,34	9,9817370	10,5282952
	20	95798,95	334023,26	9,9813608	10,5237767
	10	95715,12	330520,91	9,9809805	10,5191989
72	60	95630,48	327085,26	9,9805963	10,5146610
	50	95545.02	323714,38	9,9802081	10,5101620
	40	95458,76	320406,38	9,9798158	10,5057012
	20	95371,69	317159,48	9,9794195	10,5012777
	20	95283,82	313971,94	9,9790192	10,4968908
	10	95195,14	310842,10	9,9786148	10.4925398
71	60	95105,65	307768,35	9,9782063	10,4882240
	50	95015,36	304749,15	9,9777938	10,4839425
	40	94924.26	301783,01	9,9773772	10,4796948
	30	94832,36	298868,50	9,9769566	10,4754801
	20	94739,66	296004,22	9,9765318	10,4712979
	10	94646,16	293188,85	9,6761030	10,4671474
70	60	94551,85	290421,09	9,9756701	10,4630281
	50	94456,75	287699,70	9,9752330	10,4589394
	40	94360,85	285023,49	9,9747918	10,4548807
	30	94264,15	282391,29	9,9743466	10,4503513
	20	94166,65	279801,98	9,9738971	10,4468508
	10	94068,35	277254,48	9,9734435	10,4428786
69	60	93969,26	274747,47	9,9729858	10,4389341
	50	93869,37	272280,75	9,9725239	10,4350169
	40	93768,69	269852,54	9,9720579	10,4311265
	30	93667,22	267462,15	9,9715876	10,4272623
	20	93564,95	265108,67	9,9711132	10,4234239
	10	93461,89	262791,21	9,9706346	10,4196108

Степени.	Минута.	Нѣдрище.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
21		35836,79	38386,40	9,5543292	9,5841774
	10	36108,21	38720,53	9,5576060	9,5879413
	20	36379,32	39055,41	9,5608546	9,5916812
	30	36650,13	39391,05	9,5640754	9,5953975
	40	36920,62	39727,46	9,5672689	9,5990903
	50	37190,80	40064,65	9,5704355	9,6027613
22		37460,66	40402,62	9,5735754	9,6064096
	10	37730,21	40741,39	9,5766892	9,6100359
	20	37999,44	41080,97	9,5797772	9,6133407
	30	38268,34	41421.36	9,5828397	9,6172243
	40	38536,93	41762,57	9,5858771	9,6207872
	50	38805,18	42104,60	9,5888897	9,6243296
23		39073,11	42447,49	9,5918780	9,6278519
	10	39340,71	42791,20	9,5948422	9,6313545
	20	39607,98	43135,79	9,5977827	9,6348378
	30	39874,91	43481,24	9,6006997	9,6383019
	40	40141,50	43827,56	9,6035936	9,6417473
	50	40407,75	44174,76	9,6064047	9,6451743
24		40973,66	44522,87	9,6093133	9,6485831
	10	40939,23	44871,87	9,6121397	9,6519742
	20	41204,46	45221,79	9,6149441	9,6553477
	30	41469,32	45572,64	9,6177270	9,6587041
	40	41733,85	45924,39	9,6204884	9,6620434
	50	41998,01	46277,09	9,6232287	9,6653662
25		42161,83	46630,77	9,6259483	9,6686725
	10	42525,28	46985,39	9,6289472	9,6719628
	20	42788,38	47340,98	9,6313258	9,6752372
	30	43051,11	47697,55	9,6339844	9,6784961
	40	43313,48	48055,12	9,6366231	9,6817396
	50	43575,48	48413,68	9,6392420	9,6849681
26		43837,12	48773,26	9,6408420	9,6881818
	10	44098,38	49133,86	9,6444226	9,6913809
	20	44359,27	49495,49	9,6469844	9,6945656
	30	44619,78	49858,16	9,6495274	9,6977363
	40	44879,92	50221,89	9,6520521	9,7008930
	50	45139,68	50586,68	9,6545584	9,7040362
27		45399,05	50952,54	9,7570468	9,7071659
	10	45658,04	51319,50	9,6595173	9,7102824
	20	45916,64	51687,55	9,6619701	9,7133859
	30	46174,86	52056,70	9,6644056	9,7164767
	40	46432,69	52426,98	9,6668238	9,7195549
	50	46690,12	52798,39	9,6692250	9,7226207

Степени.	Минута.	Нѣдрище.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
68	60	93358,04	260508,91	9,9701517	10,4158226
	50	93253,40	258260,94	9,9696647	10,4120587
	40	93147,97	256046,49	9,9691734	10,4083188
	30	93041,75	253864,79	9,9686779	10,4046025
	20	92934,75	251715,07	9,9681781	10,4009092
	10	92826,96	249596,61	9,9676741	10,3972387
67	60	92718,39	247508,69	9,9671659	10,3935904
	50	92609,03	245450,61	9,9666533	10,3899641
	40	92498,88	243421,72	9,9661365	10,3863593
	30	92387,95	241421,36	9,9656153	10,3827757
	20	92276,24	239448,89	9,9650899	10,3792128
	10	92163,75	237503,72	9,9645602	10,3756704
66	60	92050,49	235585,24	9,9640261	10,3721481
	50	91936,44	233692,87	9,9634877	10,3686455
	40	91821,61	231826,06	9,9629449	10,3651622
	30	91706,01	229984,25	9,9623978	10,3616981
	20	91589,63	228166,93	9,9618463	10,3582527
	10	91472,47	226373,57	9,9612904	10,3548257
65	60	91354,54	224603,68	9,9607302	10,3514169
	50	91235,84	222856,76	9,9601655	10,3480258
	40	91116,37	221132,34	9,9595964	10,3446523
	30	90996,13	219429,97	9,9590229	10,3412960
	20	90875,11	217749,20	9,9584450	10,3379566
	10	90753,33	216089,58	9,9578626	10,3346338
64	60	90630,78	214450,69	9,9572757	10,3313275
	50	90507,46	212832,13	9,9566844	10,3280372
	40	90383,38	211233,48	9,9560886	10,3247628
	30	90258,53	209654,36	9,9554882	10,3215039
	20	90132,91	208094,38	9,9548834	10,3182604
	10	90006,54	206553,18	9,9542741	10,3150319
63	60	89879,40	205030,38	9,9536602	10,3118182
	50	89751,51	203525,65	9,9530418	10,3086191
	40	89622,85	201038,62	9,9524188	10,3054344
	30	89493,43	200568,97	9,9517912	10,3022637
	20	89363,27	199116,37	9,9511590	10,2991070
	10	89232,33	197680,50	9,9505223	10,2959638
62	60	89106,65	196261,05	9,9498809	10,2928341
	50	88968,21	194857,71	9,9492349	10,2897176
	40	88835,02	193470,20	9,9485842	10,2866141
	30	88701,08	192098,21	9,9479289	10,2835233
	20	88566,39	190741,47	9,9472689	10,2804451
	10	88430,95	189399,71	9,9466043	10,2773793

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
28		46947,16	53170,94	9,6716093	9,7256744
	10	47203,80	53544,65	9,9739769	9,7287161
	20	47460,04	53919,52	9,6763281	9,7317460
	30	47715,88	54295,57	9,6786629	9,7347644
	40	47971,31	54672,81	9,6809816	9,7377714
	50	48226,34	55051,25	9,6832843	9,7407672
29		48480,96	55430,90	9,6855712	3,7437520
	10	48735,17	55811,79	9,6878425	9,7467259
	20	48988,97	56193,91	9,6900983	9,7496892
	30	49242,36	56577,28	9,6923388	9,7526420
	40	49495,33	56961,91	9,6945642	9,7555846
	50	49747,87	57347,83	9,6967745	9,7585170
30		500000,0	57735,03	9,6989700	9,7614394
	10	50251,70	58123,53	9,7011508	9,7643520
	20	50502,99	58513,35	9,7033170	9,7672550
	30	50753,84	58904,50	9,7054689	9,7701485
	40	51004,26	59296,99	9,7076064	9,7730327
	50	51254,25	59690,84	9,7097299	9,7759077
31		51503,81	60086,06	9,7118393	9,7787737
	10	51752,93	60482,66	9,7139349	9,7816309
	20	52001,61	60880,67	9,7160168	9,7844794
	30	52249,86	61280,08	9,7180851	9,7873193
	40	52497,66	61680,92	9,7201399	9,7901508
	50	52745,02	62083,20	9,7221814	9,7929741
32		52991,93	62486,94	9,7242097	9,7957892
	10	53238,39	62892,15	9,7262249	9,7985964
	20	53484,40	63298,83	9,7282271	9,8013957
	30	53729,96	63707,03	9,7302165	9,8041873
	40	53975,07	64116,73	9,7321932	9,8069714
	50	54219,71	64527,97	9,7341572	9,8097480
33		54463,90	64940,76	9,7361088	9,8125174
	10	54707,63	65355,11	9,7380479	9,8152795
	20	54950,90	65771,03	9,7399748	9,8180347
	30	55193,70	66188,56	9,7418895	9,8207829
	40	55436,03	66607,69	9,7437921	9,8235244
	50	55677,90	67028,45	9,7456828	9,8262592
34		55915,29	67450,85	9,7475617	9,8289874
	10	56160,21	67874,92	9,7494287	9,8317093
	20	56400,65	68300,66	9,7512842	9,8344249
	30	56640,62	68728,10	9,7531280	9,8371349
	40	56880,11	69157,24	9,7549604	9,8398377
	50	57119,12	69588,13	9,7567815	9,8425351

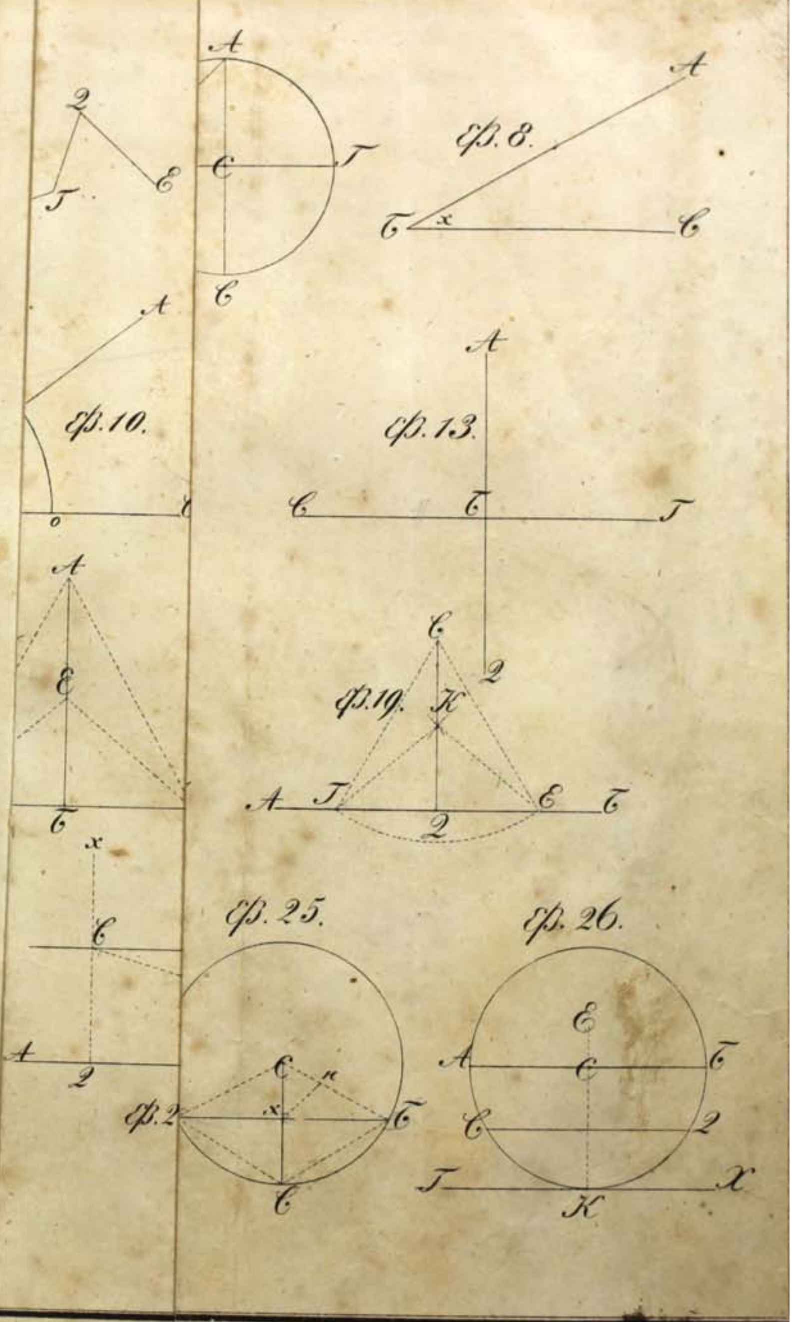
Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
61	60	88294,76	188072,65	9,9459349	10,2743256
	50	88157,82	186760,03	9,9452609	10,2712839
	40	88020,14	185461,59	9,9445821	10,2682540
	30	87881,71	184177,09	9,9438985	10,2652356
	20	87742,54	182906,28	9,9432102	10,2622286
	10	87602,62	181648,92	9,9425171	10,2692328
60	60	87461,97	180404,78	9,9418193	10,2562480
	50	87320,58	174173,73	9,9411166	10,2532741
	40	87178,44	177955,24	9,9404091	10,2503108
	30	87035,57	176749,70	9,9396968	10,2473580
	20	86891,69	175555,90	9,9389796	10,2444154
	10	86747,62	174374,53	9,9382576	10,2414830
59	60	86602,54	173205,08	9,9375306	10,2385606
	50	86456,73	172047,36	9,9367988	10,2356480
	40	86310,12	170901,16	9,9360621	10,2327450
	30	86162,92	169766,31	9,9353204	10,2298515
	20	86014,91	168642,61	9,9345738	10,2269673
	10	85866,18	167529,88	9,9338222	10,2240923
58	60	85716,73	166427,95	9,9330656	10,2212263
	50	85566,55	165336,63	9,9323040	10,2183691
	40	85415,64	164255,76	9,9315374	10,2155206
	30	85264,02	163185,17	9,9307658	10,2126807
	20	85111,66	162124,69	9,9299891	10,2098492
	10	84958,60	161074,17	9,9292073	10,2070259
57	60	84804,81	160033,45	9,9284205	10,2042108
	50	84650,30	159002,38	9,9276285	10,2014036
	40	84495,08	157980,79	9,9268314	10,1983248
	30	84339,14	156968,56	9,9260292	10,1958127
	20	84182,49	155965,52	9,9252218	10,1930286
	10	84025,13	154971,55	9,9244092	10,1902520
56	60	83867,06	153986,50	9,9235914	10,1874826
	50	83708,27	153010,23	9,9227684	10,1847205
	40	83548,78	152042,61	9,9219401	10,1819653
	30	83388,58	151083,52	9,9211066	10,1792171
	20	83227,68	150132,82	9,9202678	10,1764756
	10	83066,07	149190,38	9,9194237	10,1737408
55	60	82903,76	148256,10	9,9185742	10,1710126
	50	82740,74	147329,83	9,9177194	10,1682907
	40	82577,03	146411,47	9,9168593	10,1655751
	30	82412,62	145500,90	9,9159937	10,1628657
	20	82247,51	144598,01	9,9151228	10,1601623
	10	82081,70	143702,68	9,9142464	10,1574649

Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
35		57357,64	70020,75	9,7585913	9,8452268
	10	57595,68	70455,15	9,7603899	9,8479127
	20	57833,23	70891,33	9,7621775	9,8505931
	30	58070,30	71329,31	9,7639540	9,8532680
	40	58306,87	71769,11	9,7657197	9,8559376
	50	58542,94	72210,75	9,7674746	9,8586019
36		58778,53	72654,26	9,7692187	9,8612610
	10	59013,61	73099,63	9,7709522	9,8639152
	20	59248,19	73546,91	9,7726751	9,8665644
	30	59482,28	73996,11	9,7743876	9,8692089
	40	59715,86	74447,24	9,7760897	9,8718486
	50	59948,93	74900,33	9,7777815	9,8744838
37		60181,50	75355,40	9,7794630	9,8771144
	10	60413,56	75812,48	9,7811344	9,8797407
	20	60645,11	76271,57	9,7827958	9,8823627
	30	60875,14	76732,70	9,7844471	9,8849805
	40	61109,66	77195,89	9,7860886	9,8875942
	50	61336,66	77661,17	9,7877202	9,8902040
38		61566,15	78128,56	9,7893420	9,8928098
	10	61795,11	78598,08	9,7909541	9,8954119
	20	62023,55	79069,75	9,7925566	9,8930104
	30	62251,46	79543,59	9,7941496	9,9006052
	40	62478,85	80019,63	9,7957330	9,9031966
	50	62705,71	80497,90	9,7973071	9,9057845
39		62932,04	80978,40	9,7988718	9,9083692
	10	63157,84	81461,18	9,8004272	9,9106507
	20	63383,09	81946,25	9,8019735	9,9135291
	30	63607,82	82433,64	9,8035105	9,9161045
	40	63832,01	82923,37	9,8050385	9,9186769
	50	64055,66	83415,47	9,8065575	9,9212466
40		64278,76	83909,96	9,8080675	9,9238135
	10	64501,32	84406,88	9,8095686	9,9263778
	20	64723,34	84906,24	9,8110609	9,9289396
	30	64944,80	85408,07	9,8125444	9,9314989
	40	65165,72	85912,40	9,8140192	9,9340559
	50	65386,09	86419,26	9,8154854	9,9366105
41		65605,90	86928,68	9,8169429	9,9391631
	10	65825,16	87440,67	9,8183919	9,9417135
	20	66043,86	87955,28	9,8198325	9,9442619
	30	66262,01	88472,53	9,8212646	9,9468084
	40	66479,59	88992,45	9,8226883	9,9493531
	50	66696,61	89515,06	9,8241037	9,9518961

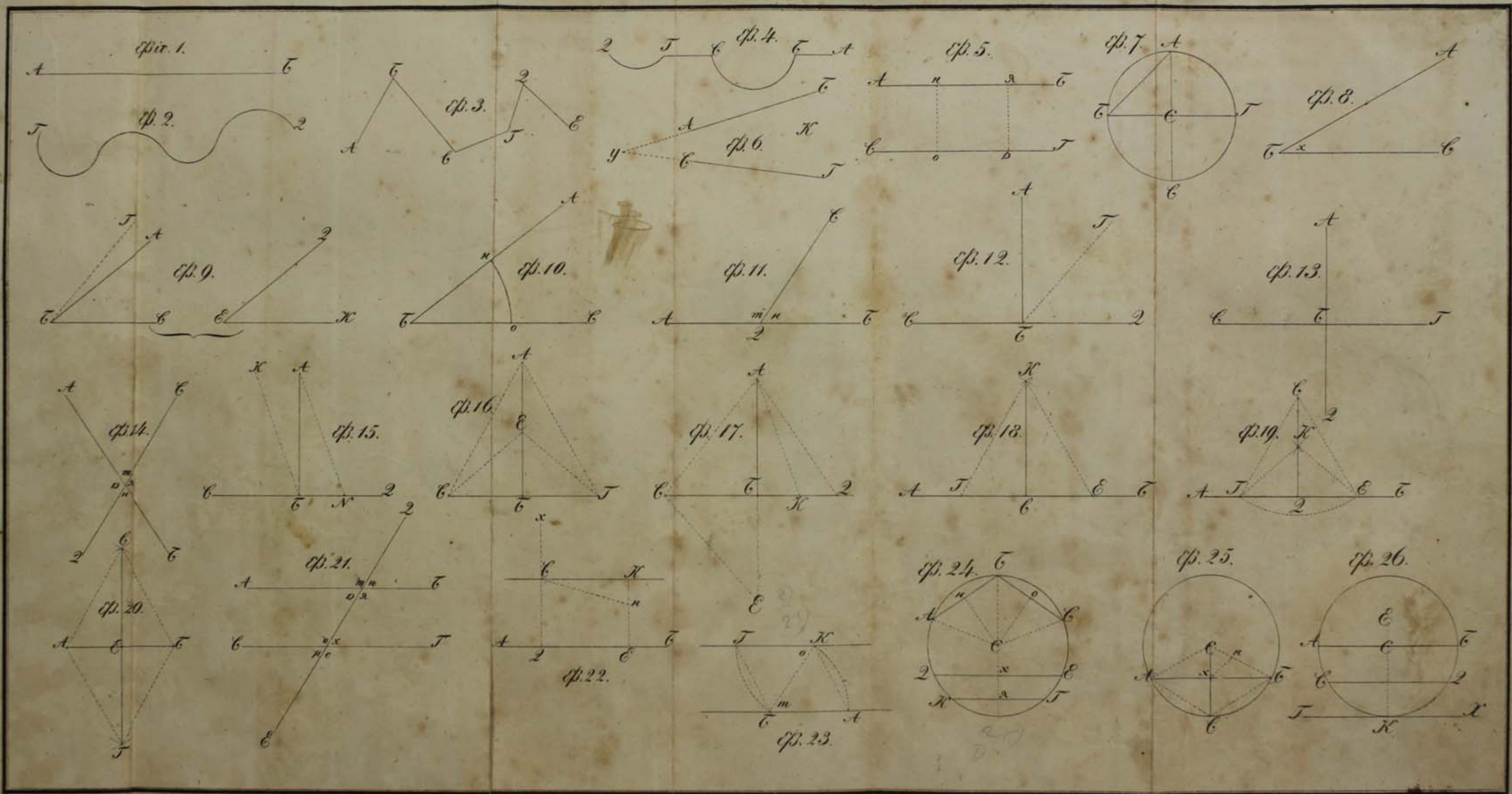
Степени.	Минута.	Нѣдриште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
54	60	81915,21	142814,80	9,9133645	10,1547732
	50	81748,01	141934,27	9,9124772	10,1520873
	40	81580,13	141060,98	9,9115844	10,1494069
	30	81411,55	140194,83	9,9106860	10,1467320
	20	81242,29	139335,71	9,9097821	10,1440624
	10	81072,33	138483,53	9,9088727	10,1413681
53	60	80901,70	137638,19	9,9079576	10,1387390
	50	80730,38	136799,59	9,9070370	10,1360848
	40	80558,37	135967,64	9,9061107	10,1334356
	30	80385,69	135142,24	9,9051787	10,1307911
	20	80212,32	134323,31	9,9042411	10,1281514
	10	80038,27	133510,75	9,9032977	10,1255162
52	60	79869,55	132704,48	9,9023486	10,1228856
	50	79688,15	131904,41	9,9013938	10,1202593
	40	79512,08	131110,46	9,9004331	10,1176373
	30	79335,33	130322,54	9,8994667	10,1150195
	20	79157,92	129540,57	9,8984944	10,1124058
	10	78979,83	128764,47	9,8975162	10,1097960
51	60	78801,07	127994,16	9,8965321	10,1071902
	50	78621,65	127229,57	9,8955422	10,1045881
	40	78441,57	126470,62	9,8945463	10,1019896
	30	78260,82	125717,23	9,8935444	10,0993948
	20	78079,40	124369,33	9,8925365	10,0968034
	10	77897,33	124226,85	9,8915226	10,0942155
50	60	77714,60	123489,72	9,8905026	10,0916308
	50	77531,21	122757,86	9,8894765	10,0890493
	40	77347,16	122031,21	9,8884444	10,0804709
	30	77162,46	121309,70	9,8874061	10,0838955
	20	76977,10	120593,27	9,8863616	10,0813231
	10	76791,10	119881,84	9,8853109	10,0787534
49	60	76604,44	119175,36	9,8842540	10,0761865
	50	76417,14	118473,76	9,8831908	10,0736222
	40	76229,19	117776,98	9,8821213	10,0710604
	30	76040,60	117084,96	9,8810455	10,0685011
	20	75851,36	116397,63	9,8799634	10,0659441
	10	75661,47	115714,95	9,8788748	10,0633895
48	60	75470,96	115036,34	9,8777799	10,0608369
	50	75279,80	114363,26	9,8766785	10,0582865
	40	75088,00	113694,14	9,8755706	10,0557381
	30	74895,57	113029,44	9,8744561	10,0531916
	20	74702,51	112369,09	9,8733352	10,0506469
	10	74508,81	111713,05	9,8722076	10,0481039

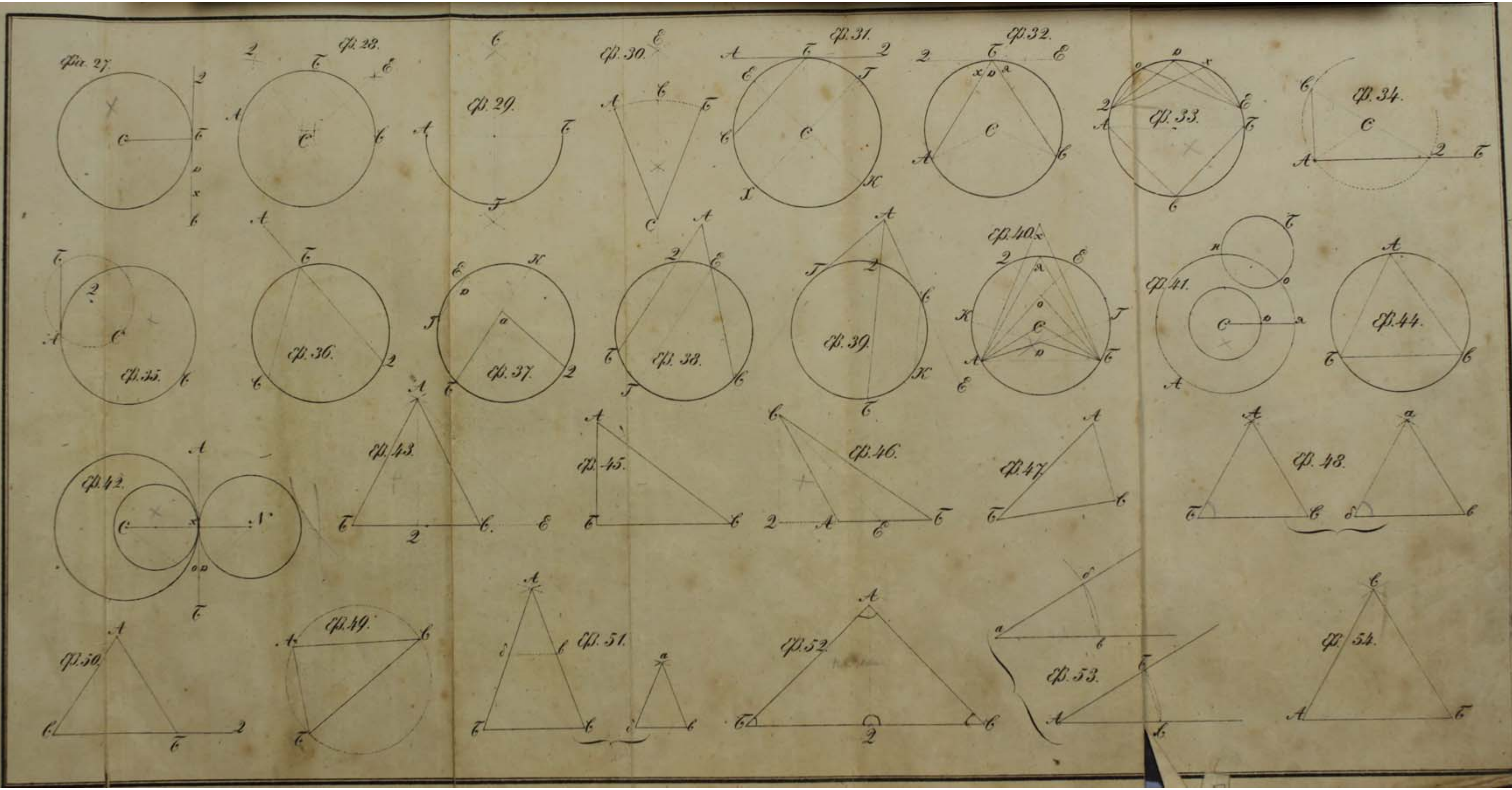
Степени.	Минута.	Нѣдри-ште.	Дирка.	Логари-тамъ нѣ-дришта.	Логари-тамъ дир-ке.
42		66913,06	90040,41	9,8255109	9,9544374
	10	67128,95	90568,51	9,8269098	9,9569772
	20	67344,27	91099,41	9,8283006	9,9595155
	30	67559,02	91633,12	9,8296833	9,9620525
	40	67773,20	92169,68	9,8310580	9,9645881
	50	67986,81	92709,14	9,8324246	9,9671225
43		68199,84	93251,51	9,8337833	9,9696559
	10	68412,29	93796,83	9,8351341	9,9721882
	20	68624,16	94345,13	9,8364771	9,9747195
	30	68835,45	94896,46	9,8378122	9,9772500
	40	69046,17	95450,83	9,8391396	9,9797797
	50	69256,30	96008,29	9,8404593	9,9823087
44		69465,84	96568,88	9,8417713	9,9848372
	10	69674,79	97132,62	9,8430757	9.9873651
	20	69883,15	97699,56	9,8443725	9,9898926
	30	70090,93	98269,73	9,8456610	9,9924197
	40	70298,10	98843,16	9,8469430	9,9949466
	50	70504,69	99419,91	9,8482180	9,9974734
45		70710,68	100000,00	9,8494850	10,0000000

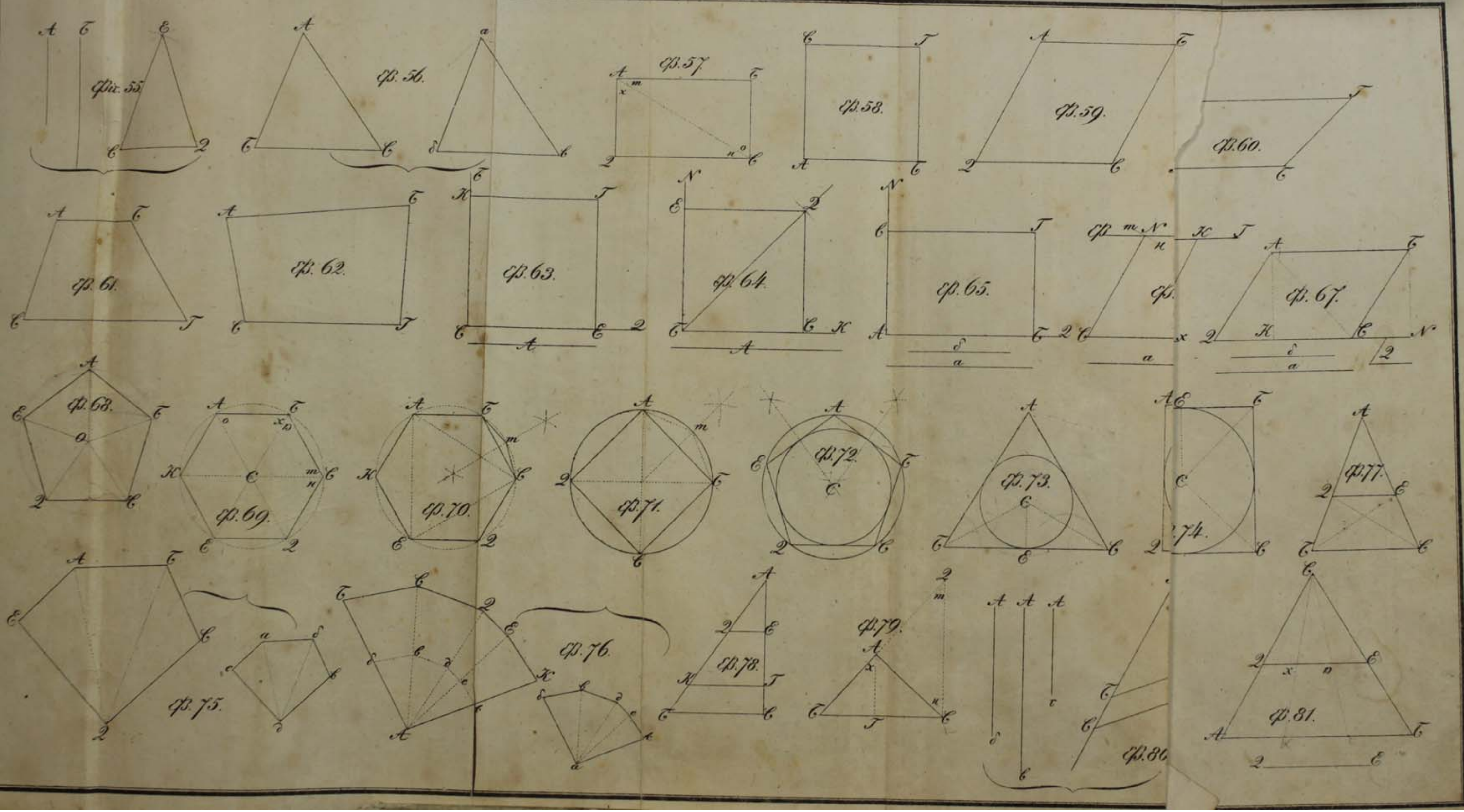
Таб. I.

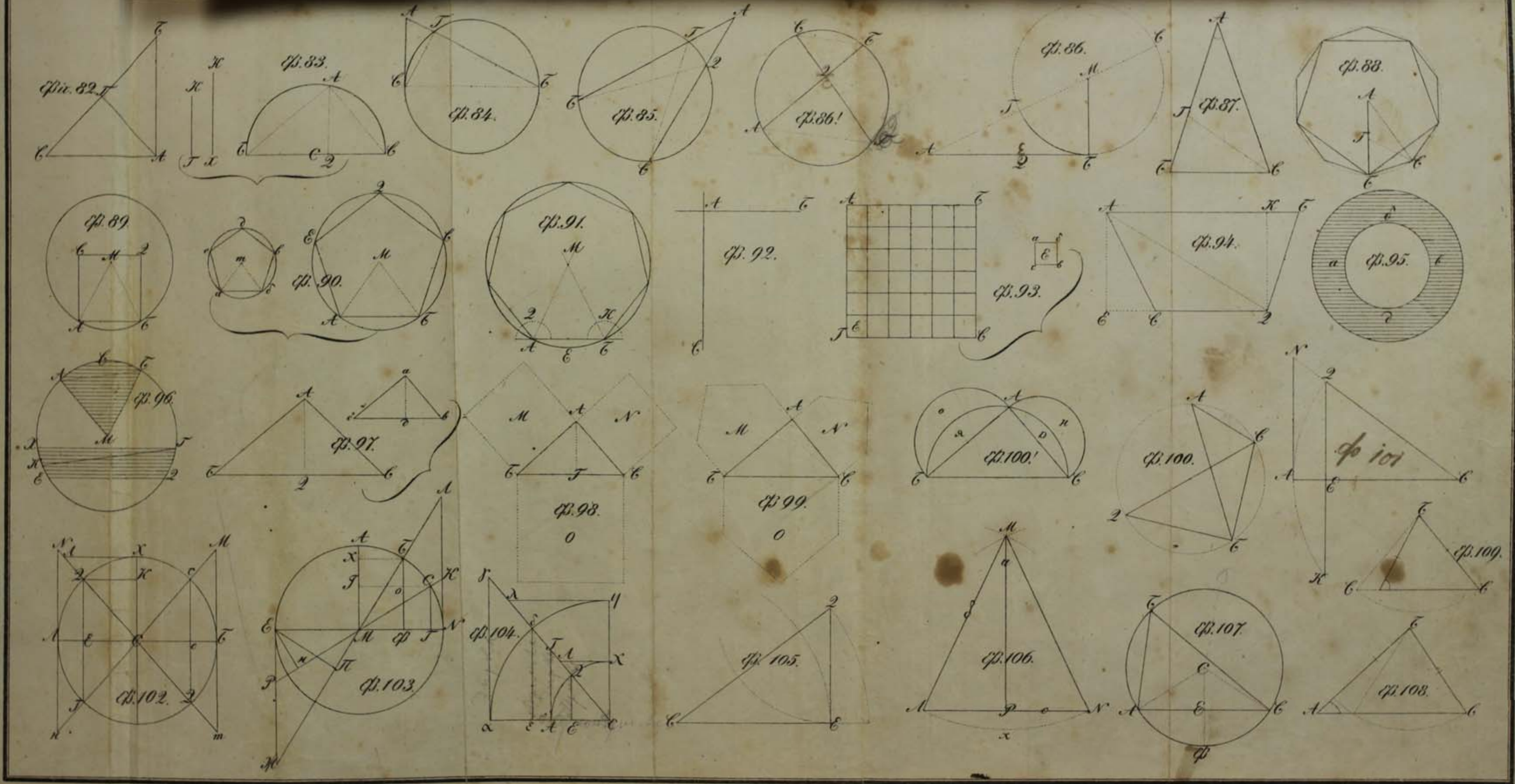


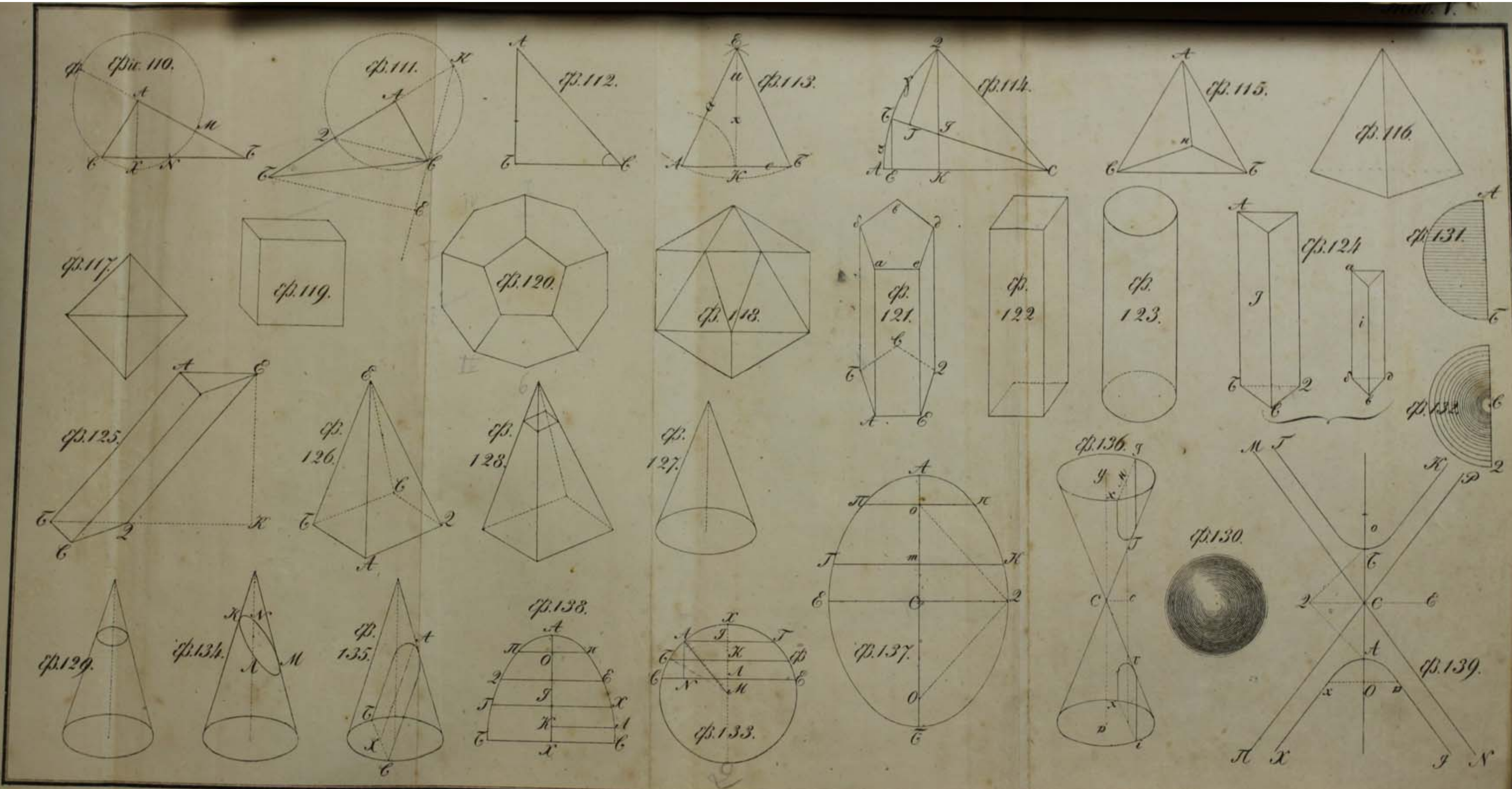
Таб. I.


Фиг. 1.
Ф. 2.
Ф. 3.
Ф. 4.
Ф. 5.
Ф. 6.
Ф. 7.
Ф. 8.
Ф. 9.
Ф. 10.
Ф. 11.
Ф. 12.
Ф. 13.
Ф. 14.
Ф. 15.
Ф. 16.
Ф. 17.
Ф. 18.
Ф. 19.
Ф. 20.
Ф. 21.
Ф. 22.
Ф. 23.
Ф. 24.
Ф. 25.
Ф. 26.


Фиг. 27.
Ф. 28.
Ф. 29.
Ф. 30.
Ф. 31.
Ф. 32.
Ф. 33.
Ф. 34.
Ф. 35.
Ф. 36.
Ф. 37.
Ф. 38.
Ф. 39.
Ф. 40.
Ф. 41.
Ф. 42.
Ф. 43.
Ф. 44.
Ф. 45.
Ф. 46.
Ф. 47.
Ф. 48.
Ф. 49.
Ф. 50.
Ф. 51.
Ф. 52.
Ф. 53.
Ф. 54.


Фиг. 55
Ф. 56.
Ф. 57.
Ф. 58.
Ф. 59.
Ф. 60.
Ф. 61.
Ф. 62.
Ф. 63.
Ф. 64
Ф. 65.
Ф.
Ф. 67.
Ф. 68.
Ф. 69.
Ф. 70.
Ф. 71.
Ф. 72.
Ф. 73.
74.
Ф. 77.
Ф. 75.
Ф. 76.
Ф. 78.
Ф. 79.
Ф. 80
Ф. 81.


Фиг. 82
Ф. 83
Ф. 84
Ф. 85
Ф. 86!
Ф. 86
Ф. 87
Ф. 88
Ф. 89
Ф. 90
Ф. 91
Ф. 92
Ф. 93
Ф. 94
Ф. 95
Ф. 96
Ф. 97
Ф. 98
Ф. 99
Ф. 100!
Ф. 100
Ф 101
Ф. 102
Ф. 103
Ф. 104
Ф. 105
Ф. 106
Ф. 107
Ф. 108
Ф. 109


Фиг. 110.
Ф. 111.
Ф. 112.
Ф. 113.
Ф. 114.
Ф. 115.
Ф. 116.
Ф. 117.
Ф. 119.
Ф. 120.
Ф. 118.
Ф. 121.
Ф. 122
Ф. 123.
Ф. 124
Ф. 131.
Ф. 125.
Ф. 126.
Ф. 128.
Ф. 127.
Ф. 132.
Ф. 136.
Ф. 137.
Ф. 130.
Ф. 139.
Ф. 129.
Ф. 134.
Ф. 135.
Ф. 138.
Ф. 133.

29-XII-70

Степени.	Минута.	НѢдри-ште.	Дирка.	Логаритамъ нѣдришта.	Логаритамъ дирке.
47	60	74314,48	111061,25	9,8710735	10,0455626
	50	74119,53	110413,65	9,8699326	10,0430228
	40	73923,94	109770,20	9,8687851	10,0404845
	30	73727,73	109130,85	9,8676309	10,0379475
	20	73530,90	108495,54	9,8664699	10,0354119
	10	73333,45	107864,23	9,8653021	10,0328775
46	60	73135,37	107236,87	9,8641275	10,0303441
	50	72936,67	106613,41	9,8629466	10,0278118
	40	72737,36	105993,81	9,8617576	10,0252805
	30	72537,44	105378,01	9,8605622	10,0227500
	20	72336,90	104765,98	9,8593599	10,0202203
	10	72135,74	104157,67	9,8581505	10,0176913
45	60	71933,98	103553,03	9,8569341	10,0151628
	50	71731,61	102952,03	9,8557106	10,0126349
	40	71528,63	102354,61	9,8544799	10,0101074
	30	71325,05	101760,74	9,8532421	10,0075803
	20	71120,86	101170,37	9,8519970	10,0050534
	10	70916,07	100583,47	9,8507446	10,0025266
44	60	70710,68	100000,00	9,8494850	10,0000000