ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ФИЗИКА

ЗА ЂАКЕ ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

ОД
Ђ. М. СТАНОЈЕВИЋА
ПРОФ. ВЕЛ. ШК.

КЊИГА ДРУГА

НАУКА О ЕНЕРГИЈИ ТЕЛА

МЕХАНИКА — ДИНАМИКА

СА 545 СЛИКА

ИЗДАЊЕ КР. СРП. ДРЖ. ШТАМПАРИЈЕ

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1904.

ПОГРЕШКЕ

СТРАНА:	РЕД:	СТОЈИ:	ТРЕБА:
14	26	$P_2 \cos \alpha$	$P_2 \cos \alpha_2$
14	26	$P_2 \cos \alpha_2$	$P_2 \cos \beta_2$
48	4	$P_2 l_2 P_3 l_3$	$P_2 l_2 + P_3 l_3$
57	18	збиру момената	збиру статичких момената
142	12	у једној линији	у правој линији
146	12	основица и висина тежишта остала	основица остала
156	30	ногама	штакзма
163	7	обично сила	увек сила
169	30	$R_2 l_3$	$Q_2 l_3$
183	26	$\mathrm{tang}\, \alpha = \frac{pl}{pl'}$	$\mathrm{taug}\, \alpha = \frac{pl}{ql'}$
227	1	$\mu = 0$	$\alpha = 0$
308	последњи	$y = \mathrm{tang}\, \alpha - \ldots$	$y = x\, \mathrm{tang}\, \alpha - \ldots$
309	5	$y = \mathrm{tang}\, \alpha - \ldots$	$y = x\, \mathrm{tang}\, \alpha - \ldots$
331	19	$\cos \varphi$	$\cos^2 \varphi$
362	слика 275 изврнута је штампана		
365	7	$\frac{R^3}{r^3}$	$\frac{r^3}{R^3}$
371	37	свако место	свако такво место
381	7	$t_1^2 \sqrt{g_1}$	$t_1 \sqrt{g_1}$
390	27	које се	чија се убрзања
407	19	дужини	ширини
483	33	A	B
488	25	течности	ноде
489	27	ређе	гушће
506	слика 369 изврнута је штампана.		
536	15	K_r	R_r
699	9	права	прва

ПРЕДГОВОР

После прилично дуге паузе, (којој потписани није узрок) јавља се ова књига Експерименталне Физике, која се може у ствари сматрати као почетак дела, кад се узме, да прва књига, у којој је изведена општа класификација енергије и природних наука, има значај једног општег увода у све природне науке. Низ наведених дела у првој књизи, која су и овом приликом употребљена нарочито допуњујем још и делима које су израдили: J. Weisbach - G. Herrmann, Poynting and Thomson, Ed. Riecke, Ad. Wernickes, A. v. Obermayer, O. Tumlirz, L. Dressel и др. По Дреселу је, између осталога, изведен завршни део: Енергетика у Механици.

При сваком писању уџбеника главна улога писца своди се да известан, у науку примљени научни материјал распореди и по специјалном методу и систему изложи. Избегавајући, у колико је било могуће, непотпуности које многим иначе ваљаним уџбеницима толико сметају, старао сам се, уношењем метеријала неопходно потребног за модерно схватање физичких појава, да књига добије тип, који јој према садашњем стању науке одговара. Читаоци, познати страном литературом уџбеничком, оцениће не само правац и план по коме је ова књига израђена већ и с коликим је успехом то изведено.

Бићу особито благодаран читаоцима ако ми скрену пажњу на могуће недостатке, којих бих се могао сачувати у осталим књигама овога дела. —

Извесне су погрешке засебно поправљене; за остале молим читаоце да их сами поправе.

Ђ. М. Ст.

Од истога писца;

Sur l'origine du réseau photosphérique solaire — Communication à l' Académie des Sciences de Paris 1886.

Sur la photographie directe de l' état barométrique dé l'atmosphére solaire — Commun. à l'Acad. des Siences. Paris 1887.

Васионска енергија и модерна физика 1887.

L'éclipse totale du Soleil du 19 août 1887, observée en Russie (Pétrowsk) — Commun. à l'Acad. des Sciences. Paris 1888.

Апсолутно мерење. 1888.

L'état actuel de la photographie du Soleil — Conférence au Congrès international de Physique Céleste 1889.

Етар и електрицитет у модерној физици 1893.

Никола Тесла и његова открића, 1894.

Из науке о светлости 1895.

Експериментална физика; I књига Наука о Енергији 1897.

Les lignes de forces et les surfaces équipotentielles dans la natures — Commnnic. à l'Académie des Sciences de Paris 1898.

Les lignes de forces dans les plantes — Canférence au Congrès international d'Electricité 1900.

Photomètre physiologique — Communic. à l'Académie des Sciences, Paris 1901.

Електрична индустрија у Србији 1901.

Methode électro-sonore pour combatre la grèle — Communic. à l'Académie des Scienca, Paris 1901.

Photomètre physiologique. — II. Commun. à l'Acad. des Sc. Paris 1902.

Потенцијални елементи у природи (у штампи).

САДРЖАЈ

МЕХАНИКА ЧВРСТИХ ТЕЛА.

Део први: Равнотежа чврстих тела.

МЕХАНИКА ГАСОВА.

Део пети: Равнотежа гасова.

Део шести: Кретање гасова.

Део седми: Енергетика у Механици.

НАУКА О ЕНЕРГИЈИ ТЕЛА

МЕХАНИКА — ДИНАМИКА

297. Према општој класификацији енергије и природних наука, *Механика* би била наука која проучава *енергију тела*. Другим речима, задатак механике своди се на проучавање погодаба и закона по којима се тела крећу и по којима се та кретања с једног тела преносе на друго.

Раније је утврђено да сва кретања изазивају, одржавају, мењају и преносе *силе*, те према томе би задатак механике био да проучава законе о дејству сила̂. Зато се врло често и дефинише механика као наука о силама и назива се *Динамика* (од грчке речи *δύναμις*, сила).

298. Усвојено је, да се механика или динамика ради лакшега прегледа, дели на три одсека, према трима агрегатним стањима пондерабилне материје. На тај начин добивамо у механици ове главне одељке:

1. *Механику чврстих тела или геомеханику;*
2. *Механику течности или хидромеханику*; и
3. *Механику гасова или аеромеханику.*

299. Из искуства се дознало, да је много лакше проучити законе који владају у механици, дакле међу силама, кад се замисли да су силе у *равнотежи*, бар за оно време док их посматрамо. Пошто се одреде погодбе од којих та равнотежа зависи, као и закони који код тела у равнотежи владају, онда се лакше могу проучавати тела у *кретању*. Са тог разлога горњи главни одељци механике распадају се сваки на по два пододељка: на један, који изучава погодбе за *равнотежу тела*

и који се назива и *статика тела*, и на одељак који изучава само *кретање тела* или на *кинетику тела*.

На тај начин добивамо ове делове у механици:

I. *Статику чврстих тела или геостатику*;
II. *Кинетику чврстих тела или геокинетику*;
III. *Статику течности или хидростатику*;
IV. *Кинетику течности или хидрокинетику*;
V. *Статику гасова или аеростатику*;
VI. *Кинетику гасова или аерокинетику*.

МЕХАНИКА ЧВРСТИХ ТЕЛА

(ГЕОМЕХАНИКА)

ДЕО ПРВИ

Равнотежа чврстих тела.

(Геостатика)

300. Свака промена у кретању некога тела зависи од промене његова убрзања, које опет стоји у нераздвојној вези с количином материје или масом, на којој је та промена извршена. Другим речима: величина промене кретања зависи једино од количине убрзања *ma*, која се количина, као што знамо, назива силом и коју смо обележили писменом *P*.

I.

Сила.

301. *Силом се назива сваки онај познати или непознати узрок, који је у стању да измени неко кретање.* Сила је представљена увек по бројној својој вредности количином убрзања т. ј.

$$P = ma.$$

Силе могу бити *тренутне* или *моментане*, ако дејствују на тело врло кратко време, или *трајне* или *континуирне*, ако њихово дејство траје. Трајне силе могу даље бити *сталне*, *постојане* или *константне* и *променљиве*, према природи свога дејства.

Силе још могу бити *положне, радне, покретне* или *убрзавајуће*, ако својим дејством повећавају брзину тела; иначе су силе *одречне, отпорне* или *успорне*, ако својим дејством смањују брзину тела.

Свака сила мора имати: 1) *нападну тачку*, 2) *правац*, 3) *смисао* и 4) *интензитет, јачину* или *величину* своју.

Свака је сила потпуно одређена било описно било графички, кад су све горње одлике њене представљене.

Кад најмање две или више сила дејствују у исти мах на неко тело, али тако да се оне узајамно потиру, те да се дакле њиховим дејством стање тела не измени, онда су те силе у равнотежи, или то је тело *у равнотежи*.

302. Резултанта и компоненте — Кад две или више сила дејствују у исти мах на неко тело или на неку тачку, онда се у највише случајева може наћи само једна сила која је у стању да замени све остале. Лако је схватити да се тело, кад на њега дејствује више сила у исти мах, мора кренути извесним правцем, и смислом и са извесном брзином, а да га тим истим правцем и смислом као и истом брзином може кретати и само једна сила. И она једина сила, којом смо у стању постићи исти резултат као и с више сила у један пут, зове се *средња сила* или *резултанта*; оне поједине силе, из којих је резултанта састављена или које она замењује, зову се *саставнице* или *компоненте.*

Одређивање резултанте из компонената зове се *слагање сила*, а замењивање резултанте компонентама зове се *разлагање сила.*

303. Слагање и разлагање сила. — Кад говоримо о слагању и разлагању сила уопште, ваља да водимо рачуна о томе, да ли све силе имају исту нападну тачку или свака за се има своју засебну нападну тачку. Према томе се и посао око слагања и разлагања сила уопште дели на две групе: *на слагање и разлагање сила са заједничком нападном тачком и на слагање и разлагање сила са разним нападним тачкама.*

А. Слагање и разлагање сила са заједничком нападном тачком.

304. И овде се могу десити два случаја: да ли све силе које имају заједничку нападну тачку леже у *једној истој равни*, или се оне налазе растурене у разним равнима, дакле леже *у простору*. Са сваким се случајем посебице морамо бавити.

а. Слагање и разлагање сила у равни.

Напослетку, две или више сила које имају заједничку нападну тачку и све леже у једној равни, могу ићи једним истим правцем, или могу ићи у истој равни разним правцима, т. ј. могу заклапати разне углове међу собом.

α. Слагање и разлагање сила које иду једним правцем.

305. Кад имамо да сложимо две или више сила које све нападају на једну исту тачку, леже у истој равни и иду истим правцем, може се десити: 1) да све те силе имају исти смисао; онда је резултанта R свију тих сила равна њиховој суми:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot P_n = \Sigma(P)$$

ако с $P_1, P_2, P_3 \cdot \cdot \cdot P_n$ означимо те поједине силе или компоненте.

2.) да једне од тих сила имају један а друге други, сасвим супротан смисао. У том случају резултанта је равна разлици између свију положних и одречних сила, или, другим речима, резултанта је равна алгебарском збиру свију компонената, јер ћемо све силе сабрати, наравно сваку са својим знаком.

$$\pm R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n = \Sigma(P) \cdot \cdot (148)$$

Ако буде резултанта равна нули, онда је тачка или тело на које све те силе дејствују у равнотежи.

Разлагање ових сила видећемо најбоље на примерима, које ћемо доле навести.

306. *Примери.* — 1. У једном правцу дејствују силе $+15+10+37-20$, $-5-3$, -8 кгр.; коју суму ваља њима додати па да буде равнотежа?

$$-R+62-36=0 \quad \text{или} \quad R=36-62=-26.$$

2. Да се разложи сила $R=360$ кгр. на три силе истог смисла с њом и на друге три супротног смисла. Однос положних сила међу собом нека је као $5:4:3$, а однос одречних као $3:2:1$; однос положних према одречним да буде $6:1$? — Положне ћемо силе означити са x, y, z, а одречне са u, v, w; па ћемо имати:

$$(x+y+z)-(u+v+w)=360 \ (=R).$$

Даље према задатку је:

$$x:y:z=5:4:3 \quad \text{и} \quad u:v:w=3:2:1.$$

$$(x+y+z):(u+v+w)=6:1.$$

Из прве и последње једначине можемо одредити суме:

$$(u+v+w)=72 \quad \text{и} \quad x+y+z=432.$$

Према правилу о сразмерама да се збир чланова једне размере има према збиру чланова труге размере, (овде још и треће) као што се имају предњи чланови, или стражњи (овде и средњи)

$$\frac{x+y+z}{5+4+3}=\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}. \quad \text{или} \quad \frac{432}{5+4+3}=\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}.$$

Одавде имамо:

$$x=180, \ y=144, \ z=108.$$

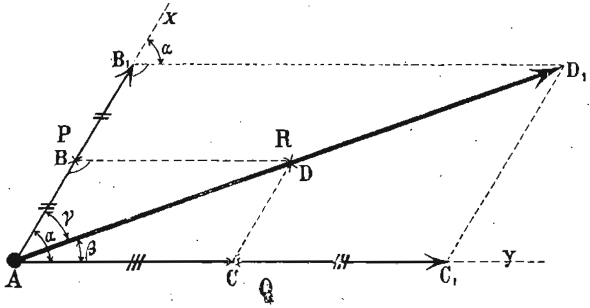
На исти начин налазимо:

$$u=36. \ v=24. \ w=12.$$

β. Слагање и разлагање сила под углом.

На једну тачку могу дејствовати само две или читав систем т. ј. више сила одједанпут. Ми ћемо најпре сложити две силе под углом па онда цео систем.

307. *Графичко слагање двеју сила под углом — паралелограм сила.* — Посмотримо најпре две силе P и Q које нападају на једну тачку A и које међу собом заклапају угао α. (сл. 1.). Место да тражимо путању покретне тачке A кад обе силе једновремено дејствују, ми ћемо тражити место тачке, пустивши да силе дејствују наизменце. По себи се разуме да би тачка ту дошла и онда, кад би обе силе дејствовале у исти мах. Нека најпре дејствује сила P неко време; она ће тачку A довести у B. Ако у том тренутку, кад престане сила P дејствовати, отпочне своје дејство сила Q и исто толико дуго вуче за собом тачку из B, она ће је довести по правцу BD из B у D. У тачку D дошло би тело, кад би из положаја A дејствовала најпре сила Q и довела тачку из A у C, а затим сила P, која би је довела из C у D. У једном и у другом случају је $BD=AC$ и $AB=CD$.



Сл. 1.

Кад би сила P дејствовала два пут онолико дуго колико мало час на тело, она би га из A преко B довела у B_1, и ако сад отпочне своје дејство сила Q опет два пут дуже но у првом случају, она ће то тело довести из B_1 у D_1. Тело би се по свршетку наизменичног дејства сила P и Q нашло у D_1 и онда, кад би најпре сила Q довела тело из A у C_1 па тек онда сила P, из C_1 у D_1; свакако би пак и у овом случају било $B_1D_1=AC_1$ и $AB_1=C_1D_1$.

Из слике имамо ову сразмеру:

$$AB_1 : AB = B_1D_1 : BD \ (= B_1D_1 : AC).$$

Пошто је

$$ABD \sim AB_1D_1 \ \text{као и} \ ACD \sim AC_1D_1$$

и у оба случаја угао α је исти, то следује, да су тачке A, D и D_1 у једној истој правој линији и то на дијагонали AD онога паралелограма, који је одређен странама AB и AC и углом α.

Ми можемо поједине размаке времена у којима силе наизменично дејствују замислити врло мале; тим ћемо добити да ће тачке D, D_1 и т. д. лежати врло близу једна другој и својим трагом дати тражену резултанту. Према томе можемо изрећи закон за слагање таквих сила на овај начин:

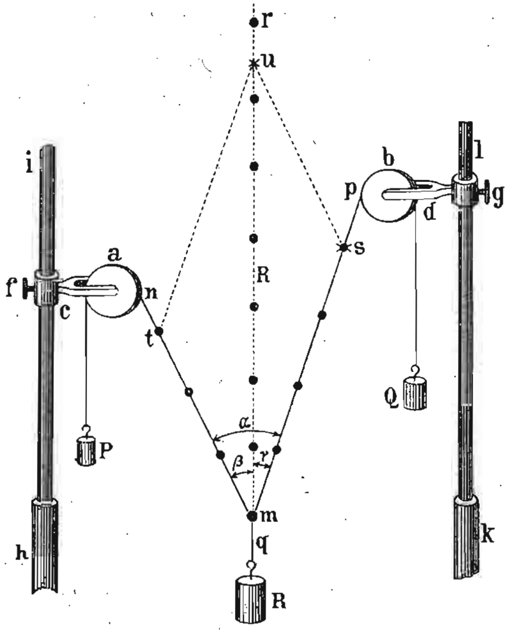
Кад две силе дејствују на једно тело под извесним углом, онда је резултанта њихова и по смислу и по величини равна дијагонали онога паралелограма, који постаје из датих сила под углом. Тај се закон назива закон о *паралелограму сила.*

308. *Експериментално слагање двеју сила под углом.* Кад на једну тачку дејствују две силе под углом и тачка је слободна, она ће се кретати правцем резултанте, која постаје услед те две силе. Али ако ми на ту тачку додамо још једну трећу силу, која ће бити по величини једнака а по смислу супротна резултанти, тачка се неће кренути. Према томе, *кад на једну тачку дејствују три силе под разним угловима, онда ће оне бити у равнотежи кад свака од њих буде по величини једнака а по смислу супротна резултанти која из остале две силе постаје.*

На основу тога правила ево како можемо експериментом одредити резултанту двеју сила под углом.

На сл. 2. имамо два котура о које висе терети, т. ј. силе P и Q које у извесном положају одржавају равнотежу терету или сада резултанти R. На тачку m дејствују дакле три силе: $ms = Q = 4$; $mt = P = 3$ и $mu = R = 6{\cdot}5$. По горњем правилу (за равнотежу) R мора бити по величини равно резултанти из P и Q и по правцу заузети онај правац којим би се нападна тачка m кретала, кад би на њу само P и Q дејствовало.

Ако на засебном листу хартије нацртамо те две силе у датој размери 4 : 3, а под углом који заклапају на горњој слици mt и ms, и над њима довршимо паралелограм, онда ће дијагонала бити $= 6:5$, као што је и сам терет. Тај лист, постављен иза затегнутих конаца, показаће дијагоналом правац mu којим виси резултујући терет R.



Сл. 2.

309. **Рачунско слагање двеју сила.** — Рачунским ћемо путем одредити резултанту двеју сила под углом простим решењем једнога од она два троугла од којих је састављен цео паралелограм. Ако место стране $AC = BD$ ставимо њој одговарајућу силу Q а место $AB = CD$ силу P, онда знамо да је резултанта R дата по Карнотовом ставу обрасцем:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (149)$$

По познатом тригонометријском ставу одредићемо и углове, које резултанта заклапа са својим компонентама овим једначинама:

$$\sin \beta = \frac{Q \sin \alpha}{R} \quad \text{и} \quad \sin \gamma = \frac{P \sin \alpha}{R} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (150)$$

Као што се види и из конструкције и из рачуна, *угао који резултанта заклапа с већом силом мањи је од угла њеног с мањом силом.*

Кад су силе међу собом равне, те паралелограм пређе у ромб, биће:

$$R = \sqrt{2P^2 + 2P^2 \cos \alpha} = \sqrt{2P^2 (1 + \cos \alpha)} =$$

$$= P \sqrt{2 (1 + \cos \alpha)} = 2 P \cos \frac{\alpha}{2}$$

тако исто су углови $\beta = \gamma = \frac{1}{2} \alpha$.

Кад су силе различите по величини али заклапају прав угао, онда је:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tang} \gamma = \frac{P}{Q}.$$

310. Графичко разлагање на две силе. — Неку извесну дату резултанту разложићемо на њене компоненте, кад је ма једној од њих одређена величина, правац и смисао, или обема само правци. Рецимо да нам је дата резултанта AD (сл. 1·) и величина и правац AC којим треба да иде једна компонента. Кад из тачке A и D повучемо паралелне према CD и AC, добићемо тачку R, до које стиже друга компонента AB. Ако су нам пак дати само правци компонената, ми ћемо из D повући паралелне према датим правцима, и тиме одредити и смисао и величине тражених компонената AC и AB.

311. Разлагање сила рачунским путем. — Рачунским ћемо путем разложити једну силу на две саставнице, кад просто одредимо стране троуглова у паралелограму. На тај начин добићемо:

$$P = \frac{R \sin \beta}{\sin (\gamma + \beta)} \quad \text{и} \quad Q = \frac{R \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} \quad \cdot \cdot (151$$

Кад се резултанта разлаже на компоненте, које међу собом заклапају угао од 90°, онда је:

$$P = R \sin \beta = R \cos \gamma \quad \text{и} \quad Q = R \sin \gamma = R \cos \beta \quad \cdot \cdot (151'$$

Ако се место тога буде тражило, да углови β и γ буду једнаки онда би тражене компоненте биле:

$$P = Q = \frac{R \sin \beta}{\sin 2 \beta} = \frac{R}{2 \cos \beta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (151''$$

312. Кад се при разлагању резултанте даду обе компоненте P и Q, па се траже углови њихови с резултантом, онда ћемо се послужити овим обрасцима:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(S - Q)\ (S - R)}{QR}} \quad \text{и} \quad \cdot \cdot (152$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(S - Q)\ (S - R)}{RP}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (152'$$

где је

$$S = \frac{P + Q + R}{2}.$$

313. *Примери.* 1. На једну тачку дејствују под правим углом силе

$$P_1 = \sqrt{8 - 4 \sqrt{3}} \quad \text{и} \quad P_2 = \sqrt{8 + 4 \sqrt{3}}$$

колика је резултанта и углови њени са компонентама? —

$$R = \sqrt{(\sqrt{8 - 4 \sqrt{3}})^2 + (\sqrt{8 + 4 \sqrt{3}})^2} = 4.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\sqrt{8 + 4 \sqrt{3}}}{\sqrt{8 - 4 \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 928}{1 \cdot 0{\cdot}72}}$$

$$\alpha_1 = 74^0\ 59'\ 54{\cdot}76'' \text{ скоро } 75^0.$$

$$\alpha_2 = 15^0\ 0'\ 5{\cdot}24'' \text{ скоро } 15^0.$$

2. Сила $R = 1000$ кгр. ваља да се разложи на две компоненте, P_1 и P_2, које заклапају са датом силом угле $\alpha_1 = 30^0\ 30'$ и

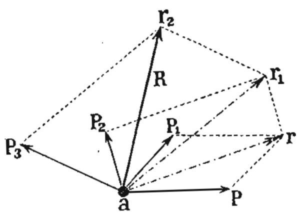
$\alpha_2 = 40^0\,50'$, колике су те компоненте? — Из горњих образаца имамо :

$$P_1 = \frac{R \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1000 \sin 40^0\,50'}{\sin(30^0\,30' + 40^0\,50')} = 690{\cdot}166 \text{ кгр.}$$

$$P_2 = \frac{R \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1000 \sin 30^0\,30'}{\sin(30^0\,30' + 40^0\,50')} = 535{\cdot}72 \text{ кгр.}$$

314. Графичко слагање система сила. — Кад на неку тачку дејствује више од две силе, онда се каже да на ту тачку дејствује један *систем сила*.

Овде могу наступити два случаја: или ће све силе у систему ићи једним истим правцем (а ма којим смислом) или ће правци појединих сила у систему бити разни.



Сл. 3.

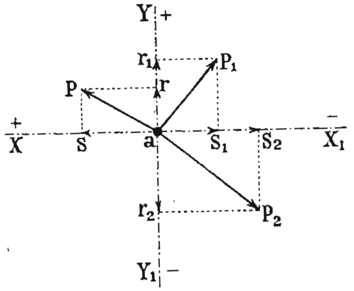
Кад наступи први случај, силе ћемо сложити алгебарским збиром, као што смо већ показали код слагања више сила, кад иду једним правцем (образац 2).

Кад силе у систему иду разним правцима, као што је овде случај, онда их можемо сложити по принципу паралелограма сила, кад две и две поступно слажемо у једну резултанту. Ако су нам, на пример, дате силе $P, P_1\ P_2\ P_3$ (сл. 3) које све дејствују на једну тачку, ми ћемо најпре силу P и P_1 сложити по паралелограму сила у резултанту r, за тим резултанту r са силом P_2 сложити у резултанту r_1, ову пак са силом P_3 у резултанту r_2, која ће у исти мах бити и тражена крајња резултанта R.

315. *Полигон сила.* — Тај систем сила можемо сложити и кад их *геометријски саберемо у полигон сила, и она права линија која спаја крајњу тачку последње сабране силе с нападном тачком свију сила, т. ј. она права линија која полигон затвара јесте и по правцу и по смислу и по величини резултанта целога система сила.*

Тако, на пример, дати систем сила $P, P_1\ P_2\ P_3$ сложићемо и овако: Ми ћемо у крајњој тачци силе P, пренети паралелно са силом P_1 страну Pr, једнаку по величини са P_1. У тачки r наставићемо rr_1 паралелно и једнако са P_2; из r_1 повућићемо $r_1 r_2$ паралелно и једнако с P_3. Пошто смо и последњу дату силу P_3 геометријски сабрали и добили тачку r_2, то ћемо, кад њу саставимо с нападном тачком свију сила, доби резултанту R, чија ће нападна тачка бити онде где и свију осталих, а тиме је смисао резултанте одређен. — Или кад полигон $a\,P\,r\,r_1\,r_2$ затворимо страном ar_2, та ће страна бити тражена резултанта целога система.

316. Напослетку можемо графички сложити систем сила помоћу правоуглог координатног система.

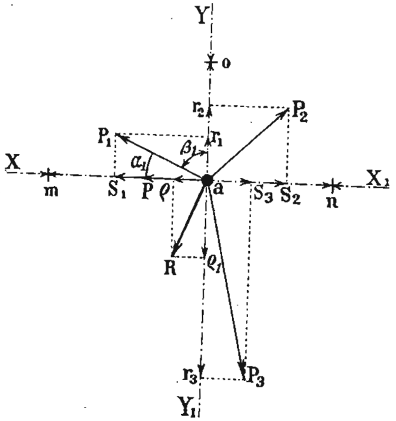


Сл. 4.

Правоугли координат-систем XX_1, YY_1 (сл. 4.) провућићемо кроз нападну тачку система сила тако, да она буде у исти мах и почетак координатног система. Задатак ће бити простији, ако једну осу повучемо правцем ма које силе. За тим разложимо сваку дату силу $P, P_1\ P_2\ P_3 \cdots$ у две компоненте, једну правцем осе X а другу правцем осе Y. Тако ћемо добити од P_1 компоненте aS_1 и ar_1; од P_2, aS_2 и ar_2; од P_3, aS_3 и ar_3 и т. д., кад би било више сила. На тај начин добивамо један систем сила са заједничком нападном тачком, али свега у два правца, и то управна један на други. Силе једнога правца сабраћемо алгебарски у једну резултанту, а тако исто и силе другога правца, алгебарски сабране, даће нам још једну резултанту, која ће с првом заклапати прав угао. Из њих двеју, по паралелограму сила, одређујемо општу резултанту.

317. Рачунско слагање система сила. — Рачунски можемо сложити систем сила по паралелограму, кад сваку делимичну резултанту рачунамо по ранијим обрасцима. То ћемо рачунање онолико пута поновити, колико делимичних резултаната будемо имали. Последња таква резултанта биће тражена општа резултанта целога система.

Али је рачун много простији, кад сведемо цео систем сила на један правоугли координатни систем, као што смо то мало час видели код графичког слагања. Само овде треба да су нам дати углови, које свака од тих сила заклапа са обема координатним осама. Означимо угао силе P_1 (сл. 5.) с осом X са α_1, а угао њен с осом Y са β_1; исто тако ће одговарајући углови силе P_2 бити α_2 и β_2 углови силе P_3 биће α_3 и β_3 и т. д. (Да не би слика била претрпана, означени су само угл. α_1 и β_1). Разложимо као и мало час сваку дату силу на своје две правоугле компоненте; тако ћемо од P_1 добити компоненте $x_1 = aS_1$ и $y_1 = ar_1$; од P_2 добићемо x_2 и y_2; и т. д. од P_n добићемо компоненте x_n и y_n. Бројно ћемо сваку компоненту одредити решавањем одговарајућих правоуглих троуглова. Тако из троугла S_1aP_1 добићемо да је $x_1 = P_1 \cos \alpha_1$ а из P_1ar_1 добићемо $y_1 = P_1 \cos \beta_1$ из троугла P_2S_2a имамо $x_2 = P_2 \cos \alpha$ а из P_2ar_2 опет $y_2 = P_2 \cos \alpha_2$ и т. д. Уопште *свака је компонента равна својој одговарајућој сили, помноженој косинусом угла, који та компонента са силом заклапа.*



Сл. 5.

Таквим радом успећемо да сваку силу заменимо њеним двема правоуглим компонентама. Тако ћемо имати:

$$\text{силу } P_1 \text{ замењену са } \begin{cases} x_1 = P_1 \cos \alpha_1 \\ y_1 = P_1 \cos \beta_1 \end{cases}$$

$$\text{силу } P_2 \text{ замењену са } \begin{cases} x_2 = P_2 \cos \alpha_2 \\ y_2 = P_2 \cos \beta_2 \end{cases}$$

. . . .

. . . .

$$\text{силу } P_n \text{ замењену са } \begin{cases} x_n = P_n \cos \alpha_n \\ y_n = P_n \operatorname{cor} \beta_n. \end{cases}$$

Правцем осе XX у оба смисла имаћемо компоненте $x_1\, x_2\, x_3 \cdot \cdot \cdot \cdot x_n$, а правцем осе YY опет компоненте $y_1\, y_2\, y_3 \cdot \cdot \cdot \cdot y_n$. Кад их алгебарски саберемо добићемо две резултујуће компоненте:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_n = \Sigma\,(x)$$

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot y_n = \Sigma\,(y)$$

које ће бити управне једна на другу. Кад у место компонената ставимо њихове вредности имаћемо:

$$X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \cdot \cdot \cdot P_n \cos \alpha_n =$$

$$= \Sigma\,(P \cos \alpha)$$

$$Y = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \cdot \cdot \cdot P_n \cos \beta_n =$$

$$= \Sigma\,(P \cos \beta).$$

Врло је лак посао сложити такве две правоугле резултујуће компоненте у једну крајњу резултанту R по правилу о паралелограму сила. Она ће бити:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{[\Sigma\,(P \cos \alpha)]^2 + [\Sigma\,(P \cos \beta)]^2} \cdot \cdot \text{(153}$$

На тај смо начин одредили резултанту по величини. А правац који она има према оси X одредићемо из једначине:

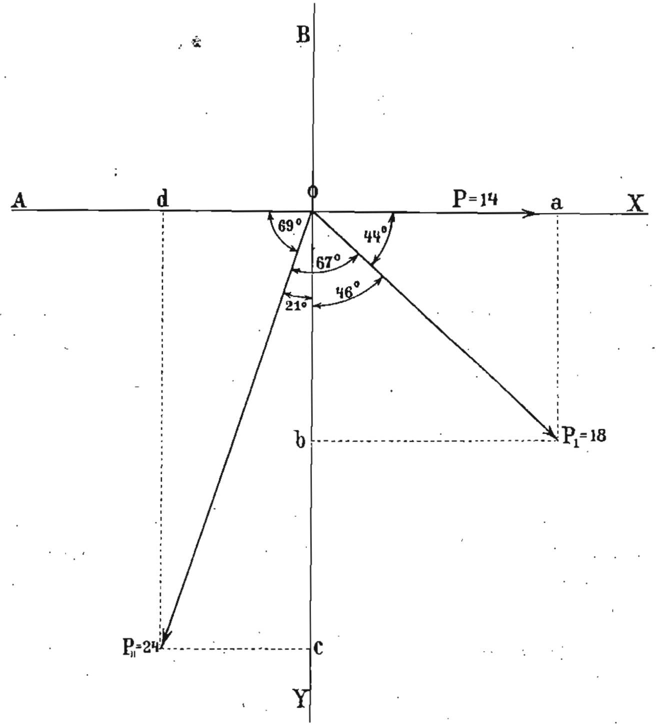
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\Sigma\,(P \cos \beta)}{\Sigma\,(P \cos \alpha)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{(154}$$

Знајући угао φ који резултанта заклапа с X знамо и њен угао са Y на пр. ψ, јер се оба та угла допуњавају до 90°.

По себи се разуме, да приликом одређивања резултујућих компонената X и Y, ваља сваку компоненту $x_1\, x_2\, x_3 \cdot \cdot \cdot y_1\, y_2\, y_3$ а тако исто и њихове углове узети са својим знаком при сабирању. У коме ће квадранту лежати резултанта R_1, т. ј. какав ће бити угао φ (па дакле и ψ) зависи од знака који буде био испред резултујућих компонената X и Y.

Пошто је полагање оса X и Y кроз нападну тачку система сасвим произвољно, ми ћемо га удесити тако, да задатак испадне што простији. Тако на пример једну ћемо осу провући увек тако, да се поклапа са ма којом силом, јер ћемо онда моћи лакше одређивати углове разних сила са осама.

318. *Примери* 1. Три силе $P = 14$ кгр. $P_1 = 18$ кгр. $P_2 = 24$ кгр. (сл. 6) дејствују у једној равни на неку тачку 0. Између прве и друге постоји угао од 44°, а између друге и треће угао 67°. Колика је резултанта по величини и правцу?



Сл. 6.

Повуцимо кроз нападну тачку 0 правоугле осе XX и YY, и то тако да XX пролази кроз силу P_1. Кад остале две силе разложимо на компоненте онда је:

$$x_2 = F_2 \cos 44 = 18 \cos 44 = 12 \cdot 948$$

$$y_2 = P_2 \cos 46 = 18 \cos 46 = 12 \cdot 504$$

$$x_3 = P_3 \cos 69^{\circ} = 24 \cos 69 = 8 \cdot 6$$

$$y_3 = P_3 \cos 21^{\circ} = 24 \cos 21 = 22 \cdot 406.$$

Резултујућа компонента правцем осе XX биће:

$$X = P_1 + x_2 - x_3 = P + oa - od = 14 + 12 \cdot 948 - 8 \cdot 6 = 18 \cdot 348.$$

А резултујућа компонента правцем YY биће такође:

$$Y = y_2 + y_3 = ob + oc = 12 \cdot 504 + 22 \cdot 406 = 34 \cdot 91.$$

Права резултанта ових двеју резултујућих компонената под правим углом јесте:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{18 \cdot 348^2 + 34 \cdot 91^2} = 39 \cdot 437.$$

Да би смо још нашли правац резултанте, означимо са φ угао који она заклапа са X осом т. ј. са силом P_1; онда ће бити:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{34 \cdot 91}{18 \cdot 348}$$

а одавде:

$$\boldsymbol{\varphi = 62^{\circ}\, 16'\, 38''.}$$

Ако означимо угао што га резултанта прави с P_2 са φ_2, имаћемо:

$$\varphi_2 = 62^{\circ}\, 16'\, 38' - 44 = 18^{\circ}\, 16'\, 38''.$$

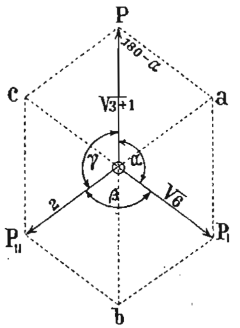
Најзад ако је φ_3 угао резултанте са P_3, имаћемо:

$$\varphi_3 = 111^{\circ} - 62^{\circ}\, 16'\, 38'' = 48^{\circ}\, 33'\, 22''.$$

2. Три силе $P_1\, P_2\, P_3$ дејствују у једној равни и на једну тачку O, и налазе се у равнотежи. Однос између тих сила је овај:

$$(\sqrt{3} + 1) : \sqrt{6} : \sqrt{4}.$$

Пита се под којим су угловима те силе нагнуте међу собом?



Сл. 7.

Нека су тражена три угла α, β и γ. (сл. 7.) По постављеном услову вреди ова једначина:

$$P : P_1 : P_2 = \sqrt{3} + 1) : \sqrt{6} : 2.$$

Пошто су силе у равнотежи, то мора P_3 по величини бити равна резултанти коју добивамо из P_1 и P_2, дакле мора бити $= oa$, мора бити истог правца с њом, само супротног смисла. На тај начин су нам у троуглу $oa\,P_1$ све три стране познате, само треба наћи углове.

Према познатом ставу за решење косих троуглова биће:

$$\cos\ 180 - \alpha = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 4}{2\,(\sqrt{3}+1)\,\sqrt{6}}.$$

Па како је $\cos\ 180 - \alpha = -\cos\alpha$ то је онда:

$$\cos\alpha = \frac{4 - (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2\,(\sqrt{3}+1)\,\sqrt{6}} = \frac{4 - 3 - 2\sqrt{3} - 1 - 6}{2\,(\sqrt{3}+1)\,\sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{2\,(3+\sqrt{3})}{2\,(\sqrt{3}+1)\,\sqrt{6}} = -\frac{3+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)\,\sqrt{6}} =$$

$$= -\frac{(3+\sqrt{3})\,\sqrt{6}}{(\sqrt{3}+1)\,6} = -\frac{3\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6\,(\sqrt{3}+1)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\,(\sqrt{3}+1)} = -\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{2\,(\sqrt{3}+1)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0{\cdot}7071068.$$

Одавде је $\alpha = -45$ то јест:

$$\alpha = 180 - 45 = \mathbf{135^0}.$$

На исти начин налазимо

$$\cos\beta = \frac{P_1{}^2 - P_2{}^2 - P_3{}^2}{2\,P_2\,P_3} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{6})^2 - 4}{2\,\sqrt{6}\cdot 2} =$$

$$= \frac{2\,\sqrt{3} - 6}{4\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\,(1-\sqrt{3})}{2\,\sqrt{6}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\,\sqrt{2}}$$

а одавде је:

$$\beta = 180' - 75 = \mathbf{105^0}.$$

Најзад је:

$$\cos\gamma = \frac{P_2{}^2 - P_1{}^2 - P_3{}^2}{2\,P_1\,P_3} = \frac{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3}+1)^2 - 4}{2\,(\sqrt{3}+1)\,2} =$$

$$= \frac{6 - 3 - 2\sqrt{3} - 1 - 4}{4\,\sqrt{3}+1)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4\,\sqrt{3}+1)} =$$

$$= -\frac{2\,(1+\sqrt{3})}{4\,(1+\sqrt{3})} = -\frac{1}{2}$$

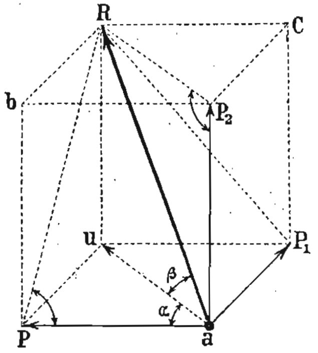
а одатле:

$$\gamma = \mathbf{120^0}.$$

в. Слагање и разлагање сила у простору.

Кад три или више сила дејствују тако на једну тачку, да не леже у једној него у разним равнима, онда се каже да те силе леже у простору. И такве силе можемо сложити у једну резултанту на два начина: графички и рачунски.

319. Графичко слагање сила у простору — паралелопипед и полигон сила. — Узећемо најпре три силе P, P_1 и P_2, које леже у простору и које међу собом заклапају праве углове. Ми ћемо најпре силе P и P_1 (сл. 8) сложити у једну резултанту *au* па затим њу сложити с трећом силом P_2 у општу резултанту R. Кад крајеве свију тих сила и резултаната саставимо правим линијама, добивамо геометријску слику која се зове паралелопипед, те отуда и *паралелопипед сила*, јер три главне његове ивице праве три дате силе у простору. Резултанта иде дијагоналом паралелопипеда.



Сл. 8.

Кад имамо више од три силе у простору, онда је слагање њихово по паралелопипеду веома заметно. Њих је онда много лакше сложити по полигону сила, онако исто као што смо то радили за систем сила у равни. И овде ћемо на крај ма које од датих сила пренети једну силу паралелно њој самој, на њен крај додаћемо другу, затим трећу и т. д., док најпосле не повучемо и последњу. Крајња тачка ове последње пренесене силе, састављена са нападном тачком система, биће тражена резултанта. Или, страна која затвара полигон биће резултанта целога система. Овако добивени полигон разликује се у толико од онога у равни што није раван, већ се његове стране простиру разним правцима у простору.

320. **Рачунско слагање сила у простору.** — Узмимо најпре да сложимо само горње три силе, које не леже у једној равни и које нападају на неку тачку a, тако да стоје управно једна на другу. Ми смо видели мало час да ће резултанта те три силе, како по својој величини тако и по правцу, бити равна дијагонали aR онога паралелопипеда, који будемо конструјисали датим компонентама.

Рачунским путем наћи ћемо величину резултанте на овај начин.

Резултанта $au = r$, која постаје из две правоугле силе P и P_1, одређена је дијагоналом паралелограма $aP_1\, uP$, и то по обрасцу:

$$\overline{au}^2 = r^2 = P^2 + P_1^2.$$

Даље резултанта R која постаје из r и силе P_2 одређена је и по правцу и по величини дијагоналом aR паралелограма $au\, RP_2$; према томе њена је вредност

$$R^2 = r^2 + P_2^2\,;$$

или кад заменимо r^2:

$$R = \sqrt{P^2 + P_1^2 + P_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (155$$

321. Правац резултанте са трима силама одредићемо из углова њених с њима. Ако означимо угао резултанте са силом P, т. ј. угао $PaR = \varphi$; угао њен са

силом P_1, т. ј. угао $RaP_1 = \psi$ и угао њен са силом P_2, т. ј. угао $RaP_2 = \chi$, онда су ти углови одређени обрасцима:

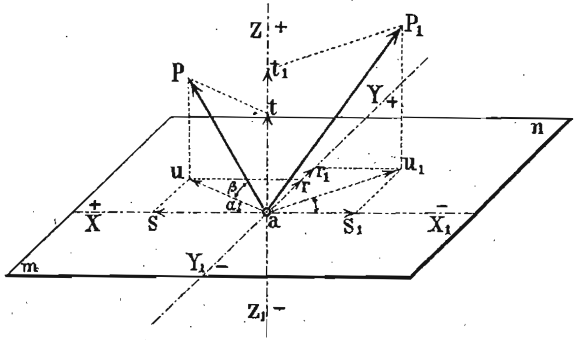
$$\cos\varphi = \frac{P}{R}\,;\quad \cos\psi = \frac{P_1}{R}\,;\quad \cos\chi = \frac{P_2}{R} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (156$$

322. **Разлагање сила у простору.** — Кад је дата једна сила, па се тражи да се она разложи на три компоненте које не леже у једној равни већ иду рецимо правцима P_1 и P_2, послужићемо се паралелопипедом сила, само изврнутим редом. Нека је дата сила R (сл. 8) коју хоћемо да разложимо на поменуте три компоненте. Ми ћемо наћи њену пројекцију au, код које висина $uR = aP_2$ јесте већ једна компонента P^2. Остале две компоненте добићемо разлагањем пројекције au на P и P_1 по паралелограму сила.

323. Узмимо сад сасвим општи случај, да ма колики број сила дејствује у разним правцима на неку тачку и да те силе не леже у истој равни. Онда ћемо резултанту наћи на сасвим сличан начин, као и кад силе леже у једној равни. Сва је разлика у томе, што ћемо сад кроз нападну тачку система повући *три* место две правоугле осе и разложити сваку од датих сила на *три* компоненте, које ће бити једна на другој управне. Тако ћемо добити један низ компонената у три главна правца. Кад на основу правила о слагању сила које у једном правцу дејствују сложимо сваки низ компонената у једну резултујућу компоненту, добићемо три такве компоненте управне једна на другу. Тиме смо свели задатак на овај што смо мало час имали; те дакле кад и те три компоненте сложимо по правилу о паралелопипеду сила, добићемо крајњу резултанту, која ће у исти мах бити резултанта целог система сила.

Дате су нам силе $P, P_1, \cdot \cdot \cdot \cdot$ (сл. 9) на заједничкој тачки a. Пошто кроз тачку a повучемо једну раван mn, повућићемо у њој још и две осе X и Y управне једна на другу а тако исто и осу Z управну на обема поменутим осама. Спустимо из крајње тачке силе P две управне: једну uP на раван mn и другу Pt, на осу ZZ; тиме смо силу P разложили на две правоугле компоненте: $at = Z$, и au.

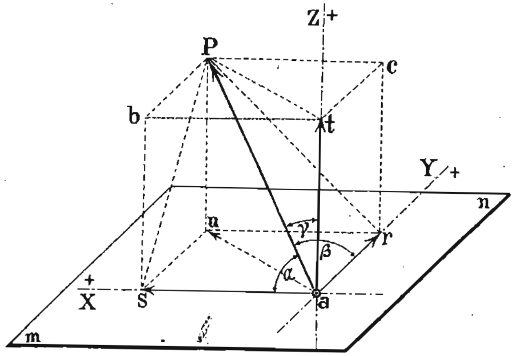
На исти начин добили бисмо од силе P_1 две такве компоненте $at_1 = z_1$ и au_1; од силе неке P_4 на пример имали бисмо $at_4 = z_4$ и au_4 и т. д. Сваку ћемо компоненту из равни mn, т. ј. au, au_1, au_2, au_3, разложити на друге две компоненте, паралелне осама XX и YY, па ћемо добити тачке r и s од au, r_1 и s_1 од au_1 и т. д. На тај начин сваку смо силу разложили на три компоненте as, ar и at, as_1, ar_1 и at_1 и т. д.; $as, as_1 \dots$ биће компоненте правцем осе XX; $ar, ar_1, \dots$ биће компоненте правцем осе YY и $at, at_1, \dots$ биће најзад компоненте правцем осе ZZ.



Сл. 9.

Да бисмо те компоненте могли још рачунски да одредимо, ваља да су нам познати углови, које свака сила заклапа с трима осама XYZ. Ради бољег прегледа извадимо из целог система сила само једну силу, на пр. P (сл. 10), и представимо је за себе према координатним осама. Да бисмо дакле могли одредити њене координате $as = x$, $ar = y$ и $at = z$, ваља да су нам дати углови те силе с трима осама, т. ј. угао силе са X осом или α, угао њен са Y осом т. ј. β и најзад њен угао са Z осом или γ. Слични подаци су нам потребни и за сваку другу силу, т. ј. углови $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ за силу P_1; углови $\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2$ за силу P_2 и т. д.

Као год од силе P, коју смо засебно на сл. 10 представили, исто бисмо тако добили по један паралелопипед од сваке дате силе и из њега бисмо решењем извесних троуглова могли одредити тражене компоненте. Ми ћемо то показати само на овој слици за силу P, а одатле ће се моћи схватити одређивање компонената за сваку другу силу.



Сл. 10.

Из правоуглог троугла Psa имамо $as = x = P \cos \alpha$.

Из правоуглог троугла Pra имамо $ar = y = P \cos \beta$.

Из правоуглог троугла Pta имамо најзад $at = z = P \cos \gamma$.

На исти начин добили бисмо

$$\text{силу } P_2 \text{ замењену компонентама } \left\{ \begin{aligned} x_2 &= P_2 \cos \alpha_2 \\ y_2 &= P_2 \cos \beta_2 \\ z_2 &= P_2 \cos \gamma_2 \end{aligned} \right.$$

. . . .
. . . .

$$\text{силу } P_n \text{ замењену компонентама } \left\{ \begin{aligned} x_n &= P_n \cos \alpha_n \\ y_n &= P_n \cos \beta_n \\ z_n &= P_n \cos \gamma_n. \end{aligned} \right.$$

Правцем осе XX и то у оба смисла имаћемо компоненте $x, x_1\, x_2\, x_3 \cdot \cdot \cdot \cdot x_n$; правцем осе YY компоненте $y, y_1\, y_2\, y_3 \cdot \cdot \cdot \cdot y_n$, а правцем осе ZZ добићемо компоненте $z, z_1\, z_2\, z_3 \cdot \cdot \cdot \cdot z_n$. Пошто све компоненте сваког тог правца за се сложимо по познатом начину, добићемо ове три резултујуће компоненте:

$$X = x + x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot x_n = \Sigma\,(x)$$

$$Y = y + y_1 + y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot y_n = \Sigma\,(y)$$

$$Z = z + z_1 + z_2 + z_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot z_n = \Sigma\,(z).$$

Све те три компоненте биће управне једна на другу. Кад у место компонената ставимо њихове вредности имаћемо:

$$X = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \cdot \cdot \cdot P_n\cos\alpha_n = \Sigma\,(P\cos\alpha)$$

$$Y = P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \cdot \cdot \cdot P_n\cos\beta_n = \Sigma\,(P\cos\beta)$$

$$Z = P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n\cos\gamma_n = \Sigma\,(P\cos\gamma).$$

Сад се задатак своди на онај, где смо имали три силе управне једна на другу, које можемо врло лако сложити у једну резултанту. Дијагонала паралелопипеда, који конструјишемо из тих компонената, биће тражена резултанта целог система. Она је, као што знамо:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

или замењено:

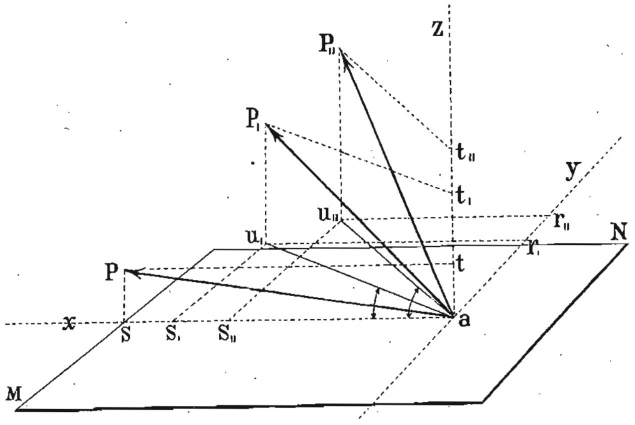
$$R = \sqrt{\left[\Sigma\,(P\cos\alpha)\right]^2 + \left[\Sigma\,(P\cos\beta)\right]^2 + \left[\Sigma\,(P\cos\gamma)\right]^2} \quad (157$$

То је резултанта по величини. По правцу пак одредићемо је, кад одредимо углове које она заклапа с трима осама. Означимо те углове са φ. ψ и χ, па ћемо према оном што смо нашли у почетку овога члана имати:

$$\cos\varphi = \frac{X}{R}; \quad \cos\psi = \frac{Y}{R}; \quad \cos\chi = \frac{Z}{R}.$$

Што се тиче знакова појединих компонената правцем трију оса а тако исто и знакова углова, вреди све оно што смо рекли за рачунско слагање система сила у равни.

324. *Примери.* 1. Три радника вуку снагом од по 80 кгр. на крајевима трију ужета која су утврђена за једну тачку неког тешког тела. Нагиби тих ужета према хоризонту нека су 10°, 20° и 30°, а хоризонтални углови између пројекција прве и друге силе износе 20°, а између прве и треће угао је од 35°. Ваља наћи резултанту и њен правац.



Сл. 11.

Провуцимо кроз нападну тачку a (сл. 11.) правоугли координантни систем и, да би задатак био простији, нровуцимо га тако, да раван XZ пролази кроз силу P. Разложимо силу P на њене две компоненте as и at, јер је компонента правцем осе Y равна нули. Пошто нам је угао Pas дат и $= 10^0$ имаћемо:

$$y = 0.$$

$$x = P\cos Pas = 50\cos 10^0 = 49{\cdot}24.$$

Исто тако је:

$$z = P\cos t\,aP = P\sin P\,as$$

$$= 50\sin 10^0 = 8{\cdot}6824.$$

Пошто смо одредили компоненте силе P, ваља одредити и остале. Разложићемо силу P_1 на две компоненте au_1 и at_1, па ћемо добити паралелограм $P_1\,u_1\,at_1$ у коме је угао $P_1\,au_1 = 20^0$. Отуда имамо:

$$au_1 = P_1\cos P_1\,au_1 = 50\cos 20^0 = 46{\cdot}9846.$$

А исто тако и:

$$z_1 = at_1 = P_1 \sin aP_1\, t_1 = 50 \sin 20^0 = \mathbf{17.101}.$$

Компонента au_1 лежи у самој равни XY и нагнута је према пројекцији силе P под углом од 20^0, т. ј. $s_1\ au_1 = 20^0$. Да бисмо добили њене компоненте правцем осе X и Y које су у исти мах и компоненте силе P_1, ваља au_1 да разложимо на $as_1 = x_1$ и $ar_1 = y_1$; саме пак компоненте биће:

$$as_1 = x_1 = au_1 \cos s_1\, au_1 = 46{\cdot}9846 \cos 20^0 = \mathbf{44.151}.$$

Исто тако:

$$y_1 = au_1 \sin r_1\, u_1\, a = 46{\cdot}9846 \sin 20^0 = \mathbf{16.07}.$$

На исти начин ћемо и силу $P_{,,}$ разложити на две компоненте: једну правцем осе Z и то је $at_{,,} = z_2$ и другу која ће лежати у равни XY и бити њена пројекција $au_{,,}$. Пошто је нагиб силе $P_{,,}$ према хоризонту т. ј. према равни XY па дакле и према пројекцији $au_{,,}$ дат и $= 30^0$, то ће и та пројекција бити:

$$au_{,,} = P_{,,} \cos P_{,,}\, au_{,,} = 50 \cdot \cos 30^0 = \mathbf{43.301}.$$

Друга компонента силе $P_{,,}$ биће:

$$at_{,,} = z_2 = 50 \cdot \sin 30^0 = \mathbf{25}.$$

Да бисмо нашли x_2 и y_2, ваља да разложимо $au_{,,}$ на две компоненте правцем осе X и Y т. ј. на компоненте $as_{,,} = x_2$ и $ar_{,,} = y_2$. Пошто је угао $u_{,,}\, as_{,,}$ дат и $= 35^0$ имаћемо:

$$x_2 = au_{,,} \cos 35^0 = 43{\cdot}301 \cos 35^0 = 35{\cdot}47$$

$$y_2 = au_{,,} \sin 35^0 = 43{\cdot}301 \sin 35^0 = 24{\cdot}837.$$

Према томе, у правцу осе XX дејствују ове три силе:

$$X = x + x_1 + x_2 = 49{\cdot}24 + 44{\cdot}151 + 35{\cdot}47 = 128{\cdot}861.$$

Правцем осе YY пак ове три:

$$Y = y + y_1 + y_2 = 0 + 16{\cdot}07 + 24{\cdot}837 = 40{\cdot}907$$

а у правцу осе ZZ:

$$Z = z + z_1 + z_2 = 8{\cdot}6824 + 17{\cdot}101 + 25 = 50{\cdot}7837.$$

Крајна резултанта свију сила биће резултанта свих трију компонујућих резултаната, која је опет:

$$\mathbf{R} = \sqrt{128{\cdot}86^2 + 40{\cdot}9^2 + 50{\cdot}78^2}$$

$$= \sqrt{20856{\cdot}3080} = \mathbf{144{\cdot}4} \text{ кгр.}$$

Што се тиче правца резултанте према трима осама, ваља се послужити нађеним обрасцима за углове φ, ψ и χ. Тако ћемо добити:

$$\cos \varphi = \frac{X}{R} = \frac{128{\cdot}861}{144{\cdot}4}$$

одакле је:

$$\varphi = 26^0\ 49'\ 30''$$

$$\cos \psi = \frac{Y}{R} = \frac{40{\cdot}907}{144{\cdot}4}$$

одакле:

$$\psi = 73^0\ 32'\ 40''$$

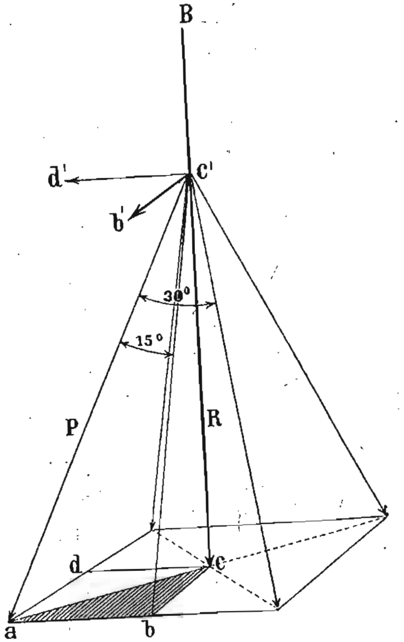
$$\cos \chi = \frac{Z}{R} = \frac{50{\cdot}78}{144{\cdot}4}$$

одакле:

$$\chi = 69^0\ 24'\ 40''.$$

2. За побијање великих кољева, пилота, радници конопцима подижу чекић који се са извесне висине спушта на колац. Како је кад чекић тежак тако је и број радника већи или мањи. Узмимо да четири радника вуку за конопце неког чекића, сваки са просечном снагом од 60 кгр. Радници су тако распоређени да места на којима стоје, кад се саставе правим линијама, праве квадрат. Углови које два и два оближња конопца заклапају једнаки су и сваки је од њих $= 30^0$. Колика је дакле резултанта и њен правац, те да се према томе одреди тежина чекића.

Као год и у прошлом примеру, тако би ваљало и овде сваку дату силу разложити на три компоненте x, y и z. Тако бисмо на пример од силе $P = c'\,a$ (сл. 12.) добили



Сл. 12.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ФИЗИКА

ЗА ЂАКЕ ВЕЛИКЕ ШКОЛЕ

ОД
Ђ. М. СТАНОЈЕВИЋА
ПРОФ. ВЕЛ. ШК.

КЊИГА ДРУГА

НАУКА О ЕНЕРГИЈИ ТЕЛА

МЕХАНИКА — ДИНАМИКА

СА 545 СЛИКА

ИЗДАЊЕ КР. СРП. ДРЖ. ШТАМПАРИЈЕ

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1904.

ПОГРЕШКЕ

СТРАНА:	РЕД:	СТОЈИ:	ТРЕБА:
14	26	$P_2 \cos \alpha$	$P_2 \cos \alpha_2$
14	26	$P_2 \cos \alpha_2$	$P_2 \cos \beta_2$
48	4	$P_2 l_2 P_3 l_3$	$P_2 l_2 + P_3 l_3$
57	18	збиру момената	збиру статичких момената
142	12	у једној линији	у правој линији
146	12	основица и висина тежишта остала	основица остала
156	30	ногама	штакзма
163	7	обично сила	увек сила
169	30	$R_2 l_3$	$Q_2 l_3$
183	26	$\text{tang}\, \alpha = \frac{pl}{pl'}$	$\text{taug}\, \alpha = \frac{pl}{ql'}$
227	1	$\mu = 0$	$\alpha = 0$
308	последњи	$y = \text{tang}\, \alpha - \dots$	$y = x\, \text{tang}\, \alpha - \dots$
309	5	$y = \text{tang}\, \alpha - \dots$	$y = x\, \text{tang}\, \alpha - \dots$
331	19	$\cos \varphi$	$\cos^2 \varphi$
362	слика 275 изврнута је штампана		
365	7	$\frac{R^3}{r^3}$	$\frac{r^3}{R^3}$
371	37	свако место	свако такво место
381	7	$t_1^2 \sqrt{g_1}$	$t_1 \sqrt{g_1}$
390	27	које се	чија се убрзања
407	19	дужини	ширини
483	33	A	B
488	25	течности	ноде
489	27	ређе	гушће
506	слика 369 изврнута је штампана.		
536	15	K_r	R_r
699	9	права	прва

ПРЕДГОВОР

После прилично дуге паузе, (којој потписани није узрок) јавља се ова књига Експерименталне Физике, која се може у ствари сматрати као почетак дела, кад се узме, да прва књига, у којој је изведена општа класификација енергије и природних наука, има значај једног општег увода у све природне науке. Низ наведених дела у првој књизи, која су и овом приликом употребљена нарочито допуњујем још и делима које су израдили: J. Weisbach - G. Herrmann, Poynting and Thomson, Ed. Riecke, Ad. Wernickes, A. v. Obermayer, O. Tumlirz, L. Dressel и др. По Дреселу је, између осталога, изведен завршни део: Енергетика у Механици.

При сваком писању уџбеника главна улога писца своди се да извесан, у науку примљени научни материјал распореди и по специјалном методу и систему изложи. Избегавајући, у колико је било могуће, непотпуности које многим иначе ваљаним уџбеницима толико сметају, старао сам се, уношењем метеријала неопходно потребног за модерно схватање физичких појава, да књига добије тип, који јој према садашњем стању науке одговара. Читаоци, познати страном литературом уџбеничком, оцениће не само правац и план по коме је ова књига израђена већ и с коликим је успехом то изведено.

Бићу особито благодаран читаоцима ако ми скрену пажњу на могуће недостатке, којих бих се могао сачувати у осталим књигама овога дела. —

Извесне су погрешке засебно поправљене; за остале молим читаоце да их сами поправе.

Ђ. М. Ст.

Од истога писца;

Sur l'origine du réseau photosphérique solaire — Communication à l' Académie des Sciences de Paris 1886.
Sur la photographie directe de l' état barométrique dé l'atmosphére solaire — Commun. à l'Acad. des Siences. Paris 1887.
Васионска енергија и модерна физика 1887.
L'éclipse totale du Soleil du 19 août 1887, observée en Russie (Pétrowsk) — Commun. à l'Acad. des Sciences. Paris 1888.
Апсолутно мерење. 1888.
L'état actuel de la photographie du Soleil — Conférence au Congrès international de Physique Céleste 1889.
Етар и електрицитет у модерној физици 1893.
Никола Тесла и његова открића, 1894.
Из науке о светлости 1895.
Експериментална физика; I књига Наука о Енергији 1897.
Les lignes de forces et les surfaces équipotentielles dans la natures — Commnnic. à l'Académie des Sciences de Paris 1898.
Les lignes de forces dans les plantes — Canférence au Congrès international d'Electricité 1900.
Photomètre physiologique — Communic. à l'Académie des Sciences, Paris 1901.
Електрична индустрија у Србији 1901.
Methode électro-sonore pour combatre la grèle — Communic. à l'Académie des Scienca, Paris 1901.
Photomètre physiologique. — II. Commun. à l'Acad. des Sc. Paris 1902.
Потенцијални елементи у природи (у штампи).

САДРЖАЈ

МЕХАНИКА ЧВРСТИХ ТЕЛА.

Део први: Равнотежа чврстих тела.

Део други: Кретање чврстих тела.

МЕХАНИКА ТЕЧНОСТИ.

Део трећи: Равнотежа течности.

Део четврти: Кретање течности.

МЕХАНИКА ГАСОВА.

Део пети: Равнотежа гасова.

Део шести: Кретање гасова.

Део седми: Енергетика у Механици.

НАУКА О ЕНЕРГИЈИ ТЕЛА

МЕХАНИКА — ДИНАМИКА

297. Према општој класификацији енергије и природних наука, *Механика* би била наука која проучава *енергију тела*. Другим речима, задатак механике своди се на проучавање погодаба и закона по којима се тела крећу и по којима се та кретања с једног тела преносе на друго.

Раније је утврђено да сва кретања изазивају, одржавају, мењају и преносе *силе*, те према томе би задатак механике био да проучава законе о дејству силâ. Зато се врло често и дефинише механика као наука о силама и назива се *Динамика* (од грчке речи *δύναμις*, сила).

298. Усвојено је, да се механика или динамика ради лакшега прегледа, дели на три одсека, према трима агрегатним стањима пондерабилне материје. На тај начин добивамо у механици ове главне одељке:

1. *Механику чврстих тела или геомеханику*;
2. *Механику течности или хидромеханику*; и
3. *Механику гасова или аеромеханику*.

299. Из искуства се дознало, да је много лакше проучити законе који владају у механици, дакле међу силама, кад се замисли да су силе у *равнотежи*, бар за оно време док их посматрамо. Пошто се одреде погодбе од којих та равнотежа зависи, као и закони који код тела у равнотежи владају, онда се лакше могу проучавати тела у *кретању*. Са тог разлога горњи главни одељци механике распадају се сваки на по два пододељка: на један, који изучава погодбе за *равнотежу тела*

и који се назива и *статика тела*, и на одељак који изучава само *кретање тела* или на *кинетику тела*.

На тај начин добивамо ове делове у механици:

I. *Статику чврстих тела или геостатику*;
II. *Кинетику чврстих тела или геокинетику*;
III. *Статику течности или хидростатику*;
IV. *Кинетику течности или хидрокинетику*;
V. *Статику гасова или аеростатику*;
VI. *Кинетику гасова или аерокинетику.*

МЕХАНИКА ЧВРСТИХ ТЕЛА

(ГЕОМЕХАНИКА)

ДЕО ПРВИ

Равнотежа чврстих тела.

(Геостатика)

300. Свака промена у кретању некога тела зависи од промене његова убрзања, које опет стоји у нераздвојној вези с количином материје или масом, на којој је та промена извршена. Другим речима: величина промене кретања зависи једино од количине убрзања *ma*, која се количина, као што знамо, назива силом и коју смо обележили писменом *P*.

I.

Сила.

301. *Силом се назива сваки онај познати или непознати узрок, који је у стању да измени неко кретање.* Сила је представљена увек по бројној својој вредности количином убрзања т. ј.

$$P = ma.$$

Силе могу бити *тренутне* или *моментане*, ако дејствују на тело врло кратко време, или *трајне* или *континуирне*, ако њихово дејство траје. Трајне силе могу даље бити *сталне*, *постојане* или *константне* и *променљиве*, према природи свога дејства.

Силе још могу бити *положне, радне, покретне* или *убрзавајуће,* ако својим дејством повећавају брзину тела; иначе су силе *одречне, отпорне* или *успорне,* ако својим дејством смањују брзину тела.

Свака сила мора имати: 1) *нападну тачку,* 2) *правац,* 3) *смисао* и 4) *интензитет, јачину* или *величину* своју.

Свака је сила потпуно одређена било описно било графички, кад су све горње одлике њене представљене.

Кад најмање две или више сила дејствују у исти мах на неко тело, али тако да се оне узајамно потиру, те да се дакле њиховим дејством стање тела не измени, онда су те силе у равнотежи, или то је тело *у равнотежи.*

302. **Резултанта и компоненте** — Кад две или више сила дејствују у исти мах на неко тело или на неку тачку, онда се у највише случајева може наћи само једна сила која је у стању да замени све остале. Лако је схватити да се тело, кад на њега дејствује више сила у исти мах, мора кренути извесним правцем, и смислом и са извесном брзином, а да га тим истим правцем и смислом као и истом брзином може кретати и само једна сила. И она једина сила, којом смо у стању постићи исти резултат као и с више сила у један пут, зове се *средња сила* или *резултанта;* оне поједине силе, из којих је резултанта састављена или које она замењује, зову се *саставнице* или *компоненте.*

Одређивање резултанте из компонената зове се *слагање сила,* а замењивање резултанте компонентама зове се *разлагање сила.*

303. **Слагање и разлагање сила.** — Кад говоримо о слагању и разлагању сила уопште, ваља да водимо рачуна о томе, да ли све силе имају исту нападну тачку или свака за се има своју засебну нападну тачку. Према томе се и посао око слагања и разлагања сила уопште дели на две групе: *на слагање и разлагање сила са заједничком нападном тачком и на слагање и разлагање сила са разним нападним тачкама.*

А. Слагање и разлагање сила са заједничком нападном тачком.

304. И овде се могу десити два случаја: да ли све силе које имају заједничку нападну тачку леже у *једној истој равни,* или се оне налазе растурене у разним равнима, дакле леже *у простору.* Са сваким се случајем посебице морамо бавити.

а. Слагање и разлагање сила у равни.

Напослетку, две или више сила које имају заједничку нападну тачку и све леже у једној равни, могу ићи једним истим правцем, или могу ићи у истој равни разним правцима, т. ј. могу заклапати разне углове међу собом.

α. Слагање и разлагање сила које иду једним правцем.

305. Кад имамо да сложимо две или више сила које све нападају на једну исту тачку, леже у истој равни и иду истим правцем, може се десити: 1) да све те силе имају исти смисао; онда је резултанта R свију тих сила равна њиховој суми:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot P_n = \Sigma(P)$$

ако с $P_1, P_2, P_3 \cdot \cdot \cdot P_n$ означимо те поједине силе или компоненте.

2.) да једне од тих сила имају један а друге други, сасвим супротан смисао. У том случају резултанта је равна разлици између свију положних и одречних сила, или, другим речима, резултанта је равна алгебарском збиру свију компонената, јер ћемо све силе сабрати, наравно сваку са својим знаком.

$$\pm R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n = \Sigma(P) \cdot \cdot (148)$$

Ако буде резултанта равна нули, онда је тачка или тело на које све те силе дејствују у равнотежи.

Разлагање ових сила видећемо најбоље на примерима, које ћемо доле навести.

306. *Примери.* — 1. У једном правцу дејствују силе $+15+10+37-20$, $-5-3$, -8 кгр.; коју суму ваља њима додати па да буде равнотежа?

$$-R+62-36=0 \quad \text{или} \quad R=36-62=-26.$$

2. Да се разложи сила $R=360$ кгр. на три силе истог смисла с њом и на друге три супротног смисла. Однос положних сила међу собом нека је као $5:4:3$, а однос одречних као $3:2:1$; однос положних према одречним да буде $6:1$? — Положне ћемо силе означити са x, y, z, а одречне са u, v, w; па ћемо имати:

$$(x+y+z)-(u+v+w)=360 \ (=R).$$

Даље према задатку је:

$$x:y:z=5:4:3 \quad \text{и} \quad u:v:w=3:2:1.$$

$$(x+y+z):(u+v+w)=6:1.$$

Из прве и последње једначине можемо одредити суме:

$$(u+v+w)=72 \quad \text{и} \quad x+y+z=432.$$

Према правилу о сразмерама да се збир чланова једне размере има према збиру чланова труге размере, (овде још и треће) као што се имају предњи чланови, или стражњи (овде и средњи)

$$\frac{x+y+z}{5+4+3}=\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}. \quad \text{или} \quad \frac{432}{5+4+3}=\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}.$$

Одавде имамо:

$$x=180,\ y=144,\ z=108.$$

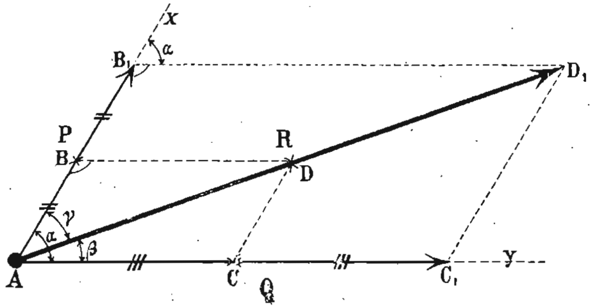
На исти начин налазимо:

$$u=36.\ v=24.\ w=12.$$

β. Слагање и разлагање сила под углом.

На једну тачку могу дејствовати само две или читав систем т. ј. више сила одједанпут. Ми ћемо најпре сложити две силе под углом па онда цео систем.

307. *Графичко слагање двеју сила под углом — паралелограм сила.* — Посмотримо најпре две силе P и Q које нападају на једну тачку A и које међу собом заклапају угао α. (сл. 1.). Место да тражимо путању покретне тачке A кад обе силе једновремено дејствују, ми ћемо тражити место тачке, пустивши да силе дејствују наизменце. По себи се разуме да би тачка ту дошла и онда, кад би обе силе дејствовале у исти мах. Нека најпре дејствује сила P неко време; она ће тачку A довести у B. Ако у том тренутку, кад престане сила P дејствовати, отпочне своје дејство сила Q и исто толико дуго вуче за собом тачку из B, она ће је довести по правцу BD из B у D. У тачку D дошло би тело, кад би из положаја A дејствовала најпре сила Q и довела тачку из A у C, а затим сила P, која би је довела из C у D. У једном и у другом случају је $BD=AC$ и $AB=CD$.



Сл. 1.

Кад би сила P дејствовала два пут онолико дуго колико мало час на тело, она би га из A преко B довела у B_1, и ако сад отпочне своје дејство сила Q опет два пут дуже но у првом случају, она ће то тело довести из B_1 у D_1. Тело би се по свршетку наизменичног дејства сила P и Q нашло у D_1 и онда, кад би најпре сила Q довела тело из A у C_1 па тек онда сила P, из C_1 у D_1; свакако би пак и у овом случају било $B_1D_1=AC_1$ и $AB_1=C_1D_1$.

Из слике имамо ову сразмеру:

$$AB_1:AB=B_1D_1:BD\ (=B_1D_1:AC).$$

Пошто је

$$ABD \backsim AB_1D_1 \quad \text{као и} \quad ACD \backsim AC_1D_1$$

и у оба случаја угао α је исти, то следује, да су тачке A, D и D_1 у једној истој правој линији и то на дијагонали AD онога паралелограма, који је одређен странама AB и AC и углом α.

Ми можемо поједине размаке времена у којима силе наизменично дејствују замислити врло мале; тим ћемо добити да ће тачке D, D_1 и т. д. лежати врло близу једна другој и својим трагом дати тражену резултанту. Према томе можемо изрећи закон за слагање таквих сила на овај начин:

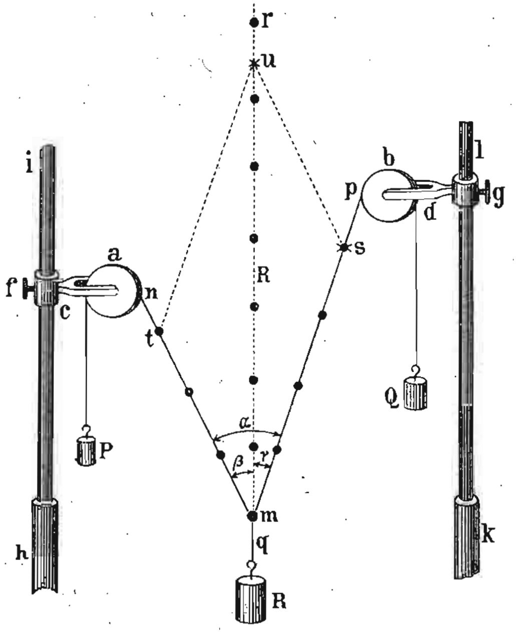
Кад две силе дејствују на једно тело под извесним углом, онда је резултанта њихова и по смислу и по величини равна дијагонали онога паралелограма, који постаје из датих сила под углом. Тај се закон назива закон о *паралелограму сила.*

308. *Експериментално слагање двеју сила под углом.* Кад на једну тачку дејствују две силе под углом и тачка је слободна, она ће се кретати правцем резултанте, која постаје услед те две силе. Али ако ми на ту тачку додамо још једну трећу силу, која ће бити по величини једнака а по смислу супротна резултанти, тачка се неће кренути. Према томе, *кад на једну тачку дејствују три силе под разним угловима, онда ће оне бити у равнотежи кад свака од њих буде по величини једнака а по смислу супротна резултанти која из остале две силе постаје.*

На основу тога правила ево како можемо експериментом одредити резултанту двеју сила под углом.

На сл. 2. имамо два котура о које висе терети, т. ј. силе P и Q које у извесном положају одржавају равнотежу терету или сада резултанти R. На тачку m дејствују дакле три силе: $ms = Q = 4$; $mt = P = 3$ и $mu = R = 6{\cdot}5$. По горњем правилу (за равнотежу) R мора бити по величини равно резултанти из P и Q и по правцу заузети онај правац којим би се нападна тачка m кретала, кад би на њу само P и Q дејствовало.

Ако на засебном листу хартије нацртамо те две силе у датој размери 4 : 3, а под углом који заклапају на горњој слици mt и ms, и над њима довршимо паралелограм, онда ће дијагонала бити $= 6 : 5$, као што је и сам терет. Тај лист, постављен иза затегнутих конаца, показаће дијагоналом правац mu којим виси резултујући терет R.



Сл. 2.

309. **Рачунско слагање двеју сила.** — Рачунским ћемо путем одредити резултанту двеју сила под углом простим решењем једнога од она два троугла од којих је састављен цео паралелограм. Ако место стране $AC = BD$ ставимо њој одговарајућу силу Q а место $AB = CD$ силу P, онда знамо да је резултанта R дата по Карнотовом ставу обрасцем:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \quad \cdots \quad (149)$$

По познатом тригонометријском ставу одредићемо и углове, које резултанта заклапа са својим компонентама овим једначинама:

$$\sin \beta = \frac{Q \sin \alpha}{R} \quad \text{и} \quad \sin \gamma = \frac{P \sin \alpha}{R} \quad \cdots \quad (150)$$

Као што се види и из конструкције и из рачуна, *угао који резултанта заклапа с већом силом мањи је од угла њеног с мањом силом.*

Кад су силе међу собом равне, те паралелограм пређе у ромб, биће:

$$R = \sqrt{2P^2 + 2P^2 \cos \alpha} = \sqrt{2P^2 (1 + \cos \alpha)} =$$

$$= P \sqrt{2 (1 + \cos \alpha)} = 2 P \cos \frac{\alpha}{2}$$

тако исто су углови $\beta = \gamma = \frac{1}{2} \alpha$.

Кад су силе различите по величини али заклапају прав угао, онда је:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{и} \quad \text{tang}\ \gamma = \frac{P}{Q}.$$

310. Графичко разлагање на две силе. — Неку извесну дату резултанту разложићемо на њене компоненте, кад је ма једној од њих одређена величина, правац и смисао, или обема само правци. Рецимо да нам је дата резултанта AD (сл. 1·) и величина и правац AC којим треба да иде једна компонента. Кад из тачке A и D повучемо паралелне према CD и AC, добићемо тачку R, до које стиже друга компонента AB. Ако су нам пак дати само правци компонената, ми ћемо из D повући паралелне према датим правцима, и тиме одредити и смисао и величине тражених компонената AC и AB.

311. Разлагање сила рачунским путем. — Рачунским ћемо путем разложити једну силу на две саставнице, кад просто одредимо стране троуглова у паралелограму. На тај начин добићемо:

$$P = \frac{R \sin \beta}{\sin (\gamma + \beta)} \quad \text{и} \quad Q = \frac{R \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} \quad \cdot \ \cdot (151$$

Кад се резултанта разлаже на компоненте, које међу собом заклапају угао од 90°, онда је:

$$P = R \sin \beta = R \cos \gamma \quad \text{и} \quad Q = R \sin \gamma = R \cos \beta \quad \cdot \ \cdot (151'$$

Ако се место тога буде тражило, да углови β и γ буду једнаки онда би тражене компоненте биле:

$$P = Q = \frac{R \sin \beta}{\sin 2 \beta} = \frac{R}{2 \cos \beta} \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot (151''$$

312. Кад се при разлагању резултанте даду обе компоненте P и Q, па се траже углови њихови с резултантом, онда ћемо се послужити овим обрасцима:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(S - Q)\ (S - R)}{QR}} \quad \text{и} \quad \cdot \ \cdot (152$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(S - Q)\ (S - R)}{RP}} \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot (152'$$

где је

$$S = \frac{P + Q + R}{2}.$$

313. *Примери.* 1. На једну тачку дејствују под правим углом силе

$$P_1 = \sqrt{8 - 4 \sqrt{3}} \quad \text{и} \quad P_2 = \sqrt{8 + 4 \sqrt{3}}$$

колика је резултанта и углови њени са компонентама? —

$$R = \sqrt{(\sqrt{8 - 4 \sqrt{3}})^2 + (\sqrt{8 + 4 \sqrt{3}})^2} = 4.$$

$$\text{tg}\ \alpha_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\sqrt{8 + 4 \sqrt{3}}}{\sqrt{8 - 4 \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 928}{1 \cdot 0{\cdot}72}}$$

$$\alpha_1 = 74^0\ 59'\ 54{\cdot}76'' \ \text{скоро}\ 75^0.$$

$$\alpha_2 = 15^0\ 0'\ 5{\cdot}24'' \ \text{скоро}\ 15^0.$$

2. Сила $R = 1000$ кгр. ваља да се разложи на две компоненте, P_1 и P_2, које заклапају са датом силом угле $\alpha_1 = 30^0\ 30'$ и

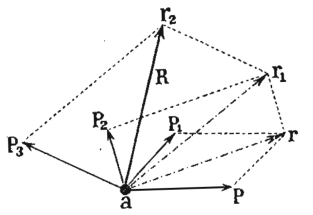
$\alpha_2 = 40^0\,50'$, колике су те компоненте? — Из горњих образаца имамо :

$$P_1 = \frac{R \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1000 \sin 40^0\,50'}{\sin(30^0\,30' + 40^0\,50')} = 690{\cdot}166 \text{ кгр.}$$

$$P_2 = \frac{R \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1000 \sin 30^0\,30'}{\sin(30^0\,30' + 40^0\,50')} = 535{\cdot}72 \text{ кгр.}$$

314. Графичко слагање система сила. — Кад на неку тачку дејствује више од две силе, онда се каже да на ту тачку дејствује један *систем сила.*

Овде могу наступити два случаја: или ће све силе у систему ићи једним истим правцем (а ма којим смислом) или ће правци појединих сила у систему бити разни.



Сл. 3.

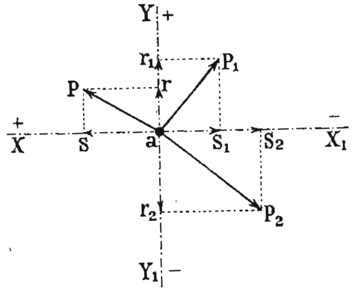
Кад наступи први случај, силе ћемо сложити алгебарским збиром, као што смо већ показали код слагања више сила, кад иду једним правцем (образац 2).

Кад силе у систему иду разним правцима, као што је овде случај, онда их можемо сложити по принципу паралелограма сила, кад две и две поступно слажемо у једну резултанту. Ако су нам, на пример, дате силе $P, P_1\ P_2\ P_3$ (сл. 3) које све дејствују на једну тачку, ми ћемо најпре силу P и P_1 сложити по паралелограму сила у резултанту r, за тим резултанту r са силом P_2 сложити у резултанту r_1, ову пак са силом P_3 у резултанту r_2, која ће у исти мах бити и тражена крајња резултанта R.

315. *Полигон сила.* — Тај систем сила можемо сложити и кад их *геометријски саберемо у полигон сила, и она права линија која спаја крајњу тачку последње сабране силе с нападном тачком свију сила, т. ј. она права линија која полигон затвара јесте и по правцу и по смислу и по величини резултанта целога система сила.*

Тако, на пример, дати систем сила $P, P_1\ P_2\ P_3$ сложићемо и овако: Ми ћемо у крајњој тачци силе P, пренети паралелно са силом P_1 страну Pr, једнаку по величини са P_1. У тачки r наставићемо rr_1 паралелно и једнако са P_2; из r_1 повућићемо r_1r_2 паралелно и једнако с P_3. Пошто смо и последњу дату силу P_3 геометријски сабрали и добили тачку r_2, то ћемо, кад њу саставимо с нападном тачком свију сила, доби резултанту R, чија ће нападна тачка бити онде где и свију осталих, а тиме је смисао резултанте одређен. — Или кад полигон $a\,P\,r\,r_1\,r_2$ затворимо страном ar_2, та ће страна бити тражена резултанта целога система.

316. Напослетку можемо графички сложити систем сила помоћу правоуглог координатног система.

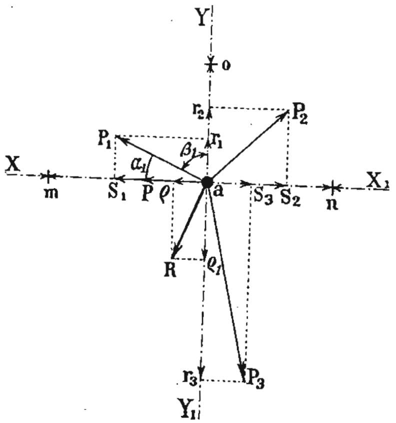


Сл. 4.

Правоугли координатсистем XX_1, YY_1 (сл. 4.) провућићемо кроз нападну тачку система сила тако, да она буде у исти мах и почетак координатног система. Задатак ће бити простији, ако једну осу повучемо правцем ма које силе. Затим разложимо сваку дату силу $P, P_1\ P_2\ P_3 \cdots$ у две компоненте, једну правцем осе X а другу правцем осе Y. Тако ћемо добити од P_1 компоненте aS_1 и ar_1; од P_2, aS_2 и ar_2; од P_3, aS_3 и ar_3 и т. д., кад би било више сила. На тај начин добивамо један систем сила са заједничком нападном тачком, али свега у два правца, и то управна један на други. Силе једнога правца сабраћемо алгебарски у једну резултанту, а тако исто и силе другога правца, алгебарски сабране, даће нам још једну резултанту, која ће с првом заклапати прав угао. Из њих двеју, по паралелограму сила, одређујемо општу резултанту.

317. Рачунско слагање система сила. — Рачунски можемо сложити систем сила по паралелограму, кад сваку делимичну резултанту рачунамо по ранијим обрасцима. То ћемо рачунање онолико пута поновити, колико делимичних резултаната будемо имали. Последња таква резултанта биће тражена општа резултанта целога система.

Али је рачун много простији, кад сведемо цео систем сила на један правоугли координатни систем, као што смо то мало час видели код графичког слагања. Само овде треба да су нам дати углови, које свака од тих сила заклапа са обема координатним осама. Означимо угао силе P_1 (сл. 5.) с осом X са α_1, а угао њен с осом Y са β_1; исто тако ће одговарајући углови силе P_2 бити α_2 и β_2 углови силе P_3 биће α_3 и β_3 и т. д. (Да не би слика била претрпана, означени су само угл. α_1 и β_1). Разложимо као и мало час сваку дату силу на своје две правоугле компоненте; тако ћемо од P_1 добити компоненте $x_1 = aS_1$ и $y_1 = ar_1$; од P_2 добићемо x_2 и y_2; и т. д. од P_n добићемо компоненте x_n и y_n. Бројно ћемо сваку компоненту одредити решавањем одговарајућих правоуглих троуглова. Тако из троугла S_1aP_1 добићемо да је $x_1 = P_1 \cos \alpha_1$ а из P_1ar_1 добићемо $y_1 = P_1 \cos \beta_1$ из троугла P_2S_2a имамо $x_2 = = P_2 \cos \alpha$ а из P_2ar_2 опет $y_2 = P_2 \cos \alpha_2$ и т. д. Уопште *свака је компонента равна својој одговарајућој сили, помноженој косинусом угла, који та компонента са силом заклапа.*



Сл. 5.

Таквим радом успећемо да сваку силу заменимо њеним двема правоуглим компонентама. Тако ћемо имати:

$$\text{силу } P_1 \text{ замењену са } \begin{cases} x_1 = P_1 \cos \alpha_1 \\ y_1 = P_1 \cos \beta_1 \end{cases}$$

$$\text{силу } P_2 \text{ замењену са } \begin{cases} x_2 = P_2 \cos \alpha_2 \\ y_2 = P_2 \cos \beta_2 \end{cases}$$

. . . .

. . . .

$$\text{силу } P_n \text{ замењену са } \begin{cases} x_n = P_n \cos \alpha_n \\ y_n = P_n \operatorname{cor} \beta_n. \end{cases}$$

Правцем осе XX у оба смисла имаћемо компоненте $x_1\, x_2\, x_3 \cdot \cdot \cdot \cdot x_n$, а правцем осе YY опет компоненте $y_1\, y_2\, y_3 \cdot \cdot \cdot \cdot y_n$. Кад их алгебарски саберемо добићемо две резултујуће компоненте:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x_n = \Sigma\,(x)$$

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot y_n = \Sigma\,(y)$$

које ће бити управне једна на другу. Кад у место компонената ставимо њихове вредности имаћемо:

$$X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \cdot \cdot \cdot P_n \cos \alpha_n =$$

$$= \Sigma\,(P \cos \alpha)$$

$$Y = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + \cdot \cdot \cdot P_n \cos \beta_n =$$

$$= \Sigma\,(P \cos \beta).$$

Врло је лак посао сложити такве две правоугле резултујуће компоненте у једну крајњу резултанту R по правилу о паралелограму сила. Она ће бити:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{[\Sigma\,(P \cos \alpha)]^2 + [\Sigma\,(P \cos \beta)]^2} \cdot \cdot (153$$

На тај смо начин одредили резултанту по величини. А правац који она има према оси X одредићемо из једначине:

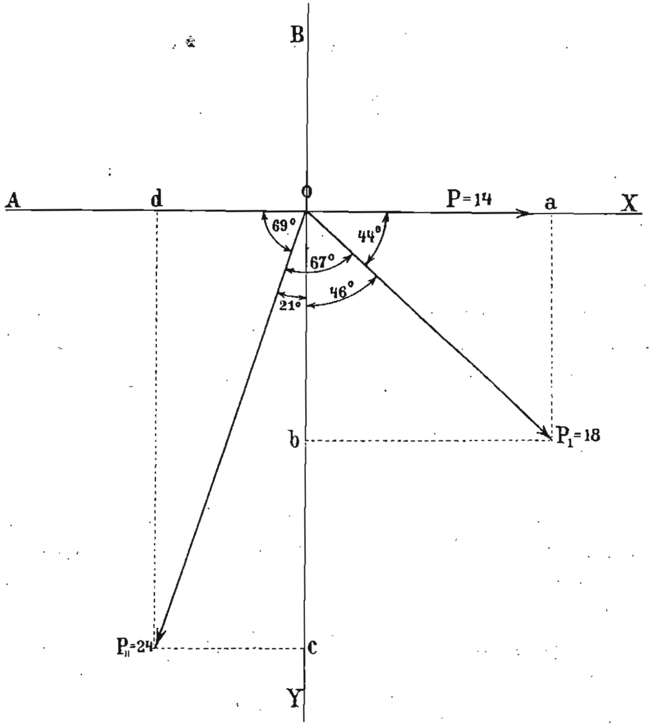
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\Sigma\,(P \cos \beta)}{\Sigma\,(P \cos \alpha)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (154$$

Знајући угао φ који резултанта заклапа с X знамо и њен угао са Y на пр. ψ, јер се оба та угла допуњавају до 90°.

По себи се разуме, да приликом одређивања резултујућих компонената X и Y, ваља сваку компоненту $x_1\, x_2\, x_3 \cdot \cdot \cdot y_1\, y_2\, y_3$ а тако исто и њихове углове узети са својим знаком при сабирању. У коме ће квадранту лежати резултанта R_1, т. ј. какав ће бити угао φ (па дакле и ψ) зависи од знака који буде био испред резултујућих компонената X и Y.

Пошто је полагање оса X и Y кроз нападну тачку система сасвим произвољно, ми ћемо га удесити тако, да задатак испадне што простији. Тако на пример једну ћемо осу провући увек тако, да се поклапа са ма којом силом, јер ћемо онда моћи лакше одређивати углове разних сила са осама.

318. *Примери* 1. Три силе $P = 14$ кгр. $P_1 = 18$ кгр. $P_2 = 24$ кгр. (сл. 6) дејствују у једној равни на неку тачку 0. Између прве и друге постоји угао од 44°, а између друге и треће угао 67°. Колика је резултанта по величини и правцу?



Сл. 6.

Повуцимо кроз нападну тачку 0 правоугле осе XX и YY, и то тако да XX пролази кроз силу P_1. Кад остале две силе разложимо на компоненте онда је:

$$x_2 = F_2 \cos 44 = 18 \cos 44 = 12{\cdot}948$$

$$y_2 = P_2 \cos 46 = 18 \cos 46 = 12{\cdot}504$$

$$x_3 = P_3 \cos 69^0 = 24 \cos 69 = 8{\cdot}6$$

$$y_3 = P_3 \cos 21^0 = 24 \cos 21 = 22{\cdot}406.$$

Резултујућа компонента правцем осе XX биће:

$$X = P_1 + x_2 - x_3 = P + oa - od = 14 + 12{\cdot}948 - 8{\cdot}6 = 18{\cdot}348.$$

А резултујућа компонента правцем YY биће такође:

$$Y = y_2 + y_3 = ob + oc = 12{\cdot}504 + 22{\cdot}406 = 34{\cdot}91.$$

Права резултанта ових двеју резултујућих компонената под правим углом јесте:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{18{\cdot}348^2 + 34{\cdot}91^2} = 39{\cdot}437.$$

Да би смо још нашли правац резултанте, означимо са φ угао који она заклапа са X осом т. ј. са силом P_1; онда ће бити:

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{34{\cdot}91}{18{\cdot}348}$$

а одавде:

$$\varphi = 62^0\ 16'\ 38''.$$

Ако означимо угао што га резултанта прави с P_2 са φ_2, имаћемо:

$$\varphi_2 = 62^0\ 16'\ 38' - 44 = 18^0\ 16'\ 38''.$$

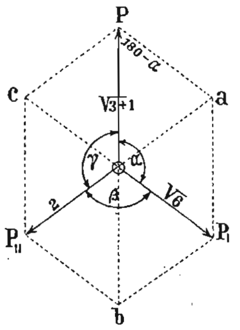
Најзад ако је φ_3 угао резултанте са P_3, имаћемо:

$$\varphi_3 = 111^0 - 62^0\ 16'\ 38'' = 48^0\ 33'\ 22''.$$

2. Три силе $P_1\ P_2\ P_3$ дејствују у једној равни и на једну тачку O, и налазе се у равнотежи. Однос између тих сила је овај:

$$(\sqrt{3} + 1) : \sqrt{6} : \sqrt{4}.$$

Пита се под којим су угловима те силе нагнуте међу собом?



Сл. 7.

Нека су тражена три угла α, β и γ. (сл. 7.) По постављеном условy вреди ова једначина:

$$P : P_1 : P_2 = \sqrt{3} + 1) : \sqrt{6} : 2.$$

Пошто су силе у равнотежи, то мора P_3 по величини бити равна резултанти коју добивамо из P_1 и P_2, дакле мора бити $= oa$, мора бити истог правца с њом, само супротног смисла. На тај начин су нам у троуглу $oa\,P_1$ све три стране познате, само треба наћи углове.

Према познатом ставу за решење косих троуглова биће:

$$\cos\ 180 - \alpha = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 4}{2\,(\sqrt{3} + 1)\,\sqrt{6}}.$$

Па како је $\cos\ 180 - \alpha = - \cos \alpha$ то је онда:

$$\cos \alpha = \frac{4 - (\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{6})^2}{2\,(\sqrt{3} + 1)\,\sqrt{6}} = \frac{4 - 3 - 2\sqrt{3} - 1 - 6}{2\,(\sqrt{3} + 1)\,\sqrt{6}} =$$

$$= - \frac{2\,(3 + \sqrt{3})}{2\,(\sqrt{3} + 1)\,\sqrt{6}} = - \frac{3 + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 1)\,\sqrt{6}} =$$

$$= - \frac{(3 + \sqrt{3})\,\sqrt{6}}{(\sqrt{3} + 1)\,6} = - \frac{3\,(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{6\,(\sqrt{3} + 1)} =$$

$$= - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2\,(\sqrt{3} + 1)} = - \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)}{2\,(\sqrt{3} + 1)} =$$

$$= - \frac{\sqrt{2}}{2} = - \frac{1}{\sqrt{2}} = - \frac{1}{2}\sqrt{2} = - 0{\cdot}7071068.$$

Одавде је $\alpha = - 45$ то јест:

$$\alpha = 180 - 45 = \mathbf{135^\circ}.$$

На исти начин налазимо

$$\cos \beta = \frac{P_1^{\,2} - P_2^{\,2} - P_3^{\,2}}{2\,P_2\,P_3} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{6})^2 - 4}{2\,\sqrt{6} \cdot 2} =$$

$$= \frac{2\,\sqrt{3} - 6}{4\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\,(1 - \sqrt{3})}{2\,\sqrt{6}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\,\sqrt{2}}$$

а одавде је:

$$\beta = 180' - 75 = \mathbf{105^\circ}.$$

Најзад је:

$$\cos \gamma = \frac{P_2^{\,2} - P_1^{\,2} - P_3^{\,2}}{2\,P_1\,P_3} = \frac{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3} + 1)^2 - 4}{2\,(\sqrt{3} + 1)\,2} =$$

$$= \frac{6 - 3 - 2\sqrt{3} - 1 - 4}{4\,\sqrt{3} + 1)} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4\,\sqrt{3} + 1)} =$$

$$= - \frac{2\,(1 + \sqrt{3})}{4\,(1 + \sqrt{3})} = - \frac{1}{2}$$

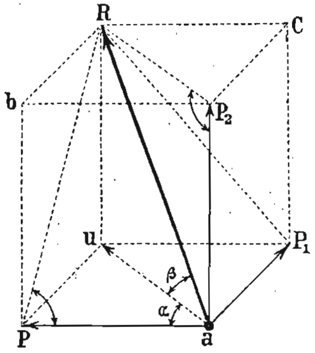
а одатле:

$$\gamma = \mathbf{120^\circ}.$$

в. Слагање и разлагање сила у простору.

Кад три или више сила дејствују тако на једну тачку, да не леже у једној него у разним равнима, онда се каже да те силе леже у простору. И такве силе можемо сложити у једну резултанту на два начина: графички и рачунски.

319. **Графичко слагање сила у простору — паралелопипед и полигон сила.** — Узећемо најпре три силе P, P_1 и P_2, које леже у простору и које међу собом заклапају праве углове. Ми ћемо најпре силе P и P_1 (сл. 8) сложити у једну резултанту *au* па затим њу сложити с трећом силом P_2 у општу резултанту R. Кад крајеве свију тих сила и резултаната саставимо правим линијама, добивамо геометријску слику која се зове паралелопипед, те отуда и *паралелопипед сила*, јер три главне његове ивице праве три дате силе у простору. Резултанта иде дијагоналом паралелопипеда.



Сл. 8.

Кад имамо више од три силе у простору, онда је слагање њихово по паралелопипеду веома заметно. Њих је онда много лакше сложити по полигону сила, онако исто као што смо то радили за систем сила у равни. И овде ћемо на крај ма које од датих сила пренети једну силу паралелно њој самој, на њен крај додаћемо другу, затим трећу и т. д., док најпосле не повучемо и последњу. Крајња тачка ове последње пренесене силе, састављена са нападном тачком система, биће тражена резултанта. Или, страна која затвара полигон биће резултанта целога система. Овако добивени полигон разликује се у толико од онога у равни што није раван, већ се његове стране простиру разним правцима у простору.

320. **Рачунско слагање сила у простору.** — Узмимо најпре да сложимо само горње три силе, које не леже у једној равни и које нападају на неку тачку a, тако да стоје управно једна на другу. Ми смо видели мало час да ће резултанта те три силе, како по својој величини тако и по правцу, бити равна дијагонали aR онога паралелопипеда, који будемо конструјисали датим компонентама.

Рачунским путем наћи ћемо величину резултанте на овај начин.

Резултанта $au = r$, која постаје из две правоугле силе P и P_1, одређена је дијагоналом паралелограма $aP_1\,uP$, и то по обрасцу:

$$\overline{au}^2 = r^2 = P^2 + P_1^2.$$

Даље резултанта R која постаје из r и силе P_2 одређена је и по правцу и по величини дијагоналом aR паралелограма $au\,RP_2$; према томе њена је вредност

$$R^2 = r^2 + P_2^2;$$

или кад заменимо r^2:

$$R = \sqrt{P^2 + P_1^2 + P_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (155$$

321. Правац резултанте са трима силама одредићемо из углова њених с њима. Ако означимо угао резултанте са силом P, т. ј. угао $PaR = \varphi$; угао њен са

силом P_1, т. ј. угао $RaP_1 = \psi$ и угао њен са силом P_2, т. ј. угао $RaP_2 = \chi$, онда су ти углови одређени обрасцима:

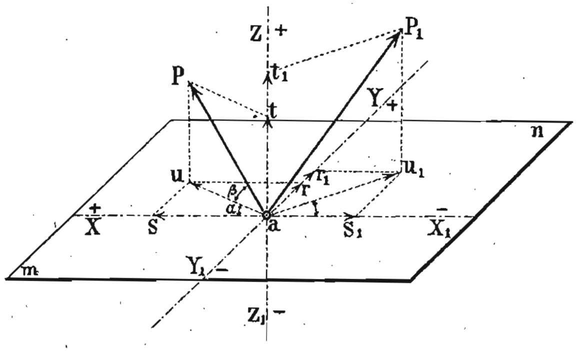
$$\cos\varphi = \frac{P}{R}\,; \quad \cos\psi = \frac{P_1}{R}\,; \quad \cos\chi = \frac{P_2}{R} \cdot \cdot \cdot (156$$

322. **Разлагање сила у простору.** — Кад је дата једна сила, па се тражи да се она разложи на три компоненте које не леже у једној равни већ иду рецимо правцима P_1 и P_2, послужићемо се паралелопипедом сила, само изврнутим редом. Нека је дата сила R (сл. 8) коју хоћемо да разложимо на поменуте три компоненте. Ми ћемо наћи њену пројекцију au, код које висина $uR = aP_2$ јесте већ једна компонента P^2. Остале две компоненте добићемо разлагањем пројекције au на P и P_1 по паралелограму сила.

323. Узмимо сад сасвим општи случај, да ма колики број сила дејствује у разним правцима на неку тачку и да те силе не леже у истој равни. Онда ћемо резултанту наћи на сасвим сличан начин, као и кад силе леже у једној равни. Сва је разлика у томе, што ћемо сад кроз нападну тачку система повући *три* место две правоугле осе и разложити сваку од датих сила на *три* компоненте, које ће бити једна на другој управне. Тако ћемо добити један низ компонената у три главна правца. Кад на основу правила о слагању сила које у једном правцу дејствују сложимо сваки низ компонената у једну резултујућу компоненту, добићемо три такве компоненте управне једна на другу. Тиме смо свели задатак на овај што смо мало час имали; те дакле кад и те три компоненте сложимо по правилу о паралелопипеду сила, добићемо крајњу резултанту, која ће у исти мах бити резултанта целог система сила.

Дате су нам силе $P, P_1, \cdot \cdot \cdot \cdot$ (сл. 9) на заједничкој тачки a. Пошто кроз тачку a повучемо једну раван mn, повућићемо у њој још и две осе X и Y управне једна на другу а тако исто и осу Z управну на обема поменутим осама. Спустимо из крајње тачке силе P две управне: једну uP на раван mn и другу Pt, на осу ZZ; тиме смо силу P разложили на две правоугле компоненте: $at = Z$, и au.

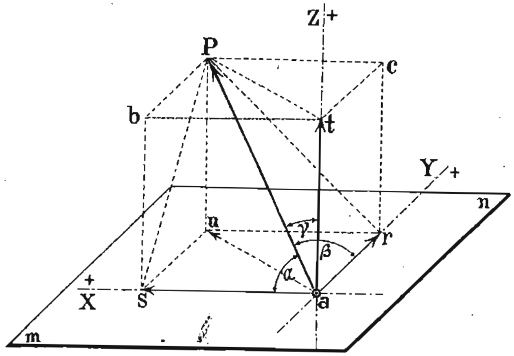
На исти начин добили бисмо од силе P_1 две такве компоненте $at_1 = z_1$ и au_1; од силе неке P_4 на пример имали бисмо $at_4 = z_4$ и au_4 и т. д. Сваку ћемо компоненту из равни mn, т. ј. au, au_1, au_2, au_3, разложити на друге две компоненте, паралелне осама XX и YY, па ћемо добити тачке r и s од au, r_1 и s_1 од au_1 и т. д. На тај начин сваку смо силу разложили на три компоненте as, ar и at, as_1, ar_1 и at_1 и т. д.; $as, as_1 \, . \, . \, . \, .$ биће компоненте правцем осе XX; $ar, ar_1, \, . \, . \, . \, .$ биће компоненте правцем осе YY и $at, at_1, \, . \, . \, . \, .$ биће најзад компоненте правцем осе ZZ.



Сл. 9.

Да бисмо те компоненте могли још рачунски да одредимо, ваља да су нам познати углови, које свака сила заклапа с трима осама XYZ. Ради бољег прегледа извадимо из целог система сила само једну силу, на пр. P (сл. 10), и представимо је за себе према координатним осама. Да бисмо дакле могли одредити њене координате $as = x$, $ar = y$ и $at = z$, ваља да су нам дати углови те силе с трима осама, т. ј. угао силе са X осом или α, угао њен са Y осом т. ј. β и најзад њен угао са Z осом или γ. Слични подаци су нам потребни и за сваку другу силу, т. ј. углови $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ за силу P_1; углови $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ за силу P_2 и т. д.

Као год од силе P, коју смо засебно на сл. 10 представили, исто бисмо тако добили по један паралелопипед од сваке дате силе и из њега бисмо решењем извесних троуглова могли одредити тражене компоненте. Ми ћемо то показати само на овој слици за силу P, а одатле ће се моћи схватити одређивање компонената за сваку другу силу.



Сл. 10.

Из правоуглог троугла Psa имамо $as = x = P \cos \alpha$.

Из правоуглог троугла Pra имамо $ar = y = P \cos \beta$.

Из правоуглог троугла Pta имамо најзад $at = z = P \cos \gamma$.

На исти начин добили бисмо

$$\text{силу } P_2 \text{ замењену компонентама} \left\{ \begin{array}{l} x_2 = P_2 \cos \alpha_2 \\ y_2 = P_2 \cos \beta_2 \\ z_2 = P_2 \cos \gamma_2 \end{array} \right.$$

. . . .

. . . .

$$\text{силу } P_n \text{ замењену компонентама} \left\{ \begin{array}{l} x_n = P_n \cos \alpha_n \\ y_n = P_n \cos \beta_n \\ z_n = P_n \cos \gamma_n . \end{array} \right.$$

Правцем осе XX и то у оба смисла имаћемо компоненте $x, x_1 \, x_2 \, x_3 \cdot \cdot \cdot \cdot x_n$; правцем осе YY компоненте $y, y_1 \, y_2 \, y_3 \cdot \cdot \cdot \cdot y_n$, а правцем осе ZZ добићемо компоненте $z, z_1 \, z_2 \, z_3 \cdot \cdot \cdot \cdot z_n$. Пошто све компоненте свакоғ тог правца за се сложимо по познатом начину, добићемо ове три резултујуће компоненте:

$$X = x + x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot x_n = \Sigma(x)$$

$$Y = y + y_1 + y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot y_n = \Sigma(y)$$

$$Z = z + z_1 + z_2 + z_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot z_n = \Sigma(z).$$

Све те три компоненте биће управне једна на другу. Кад у место компонената ставимо њихове вредности имаћемо:

$$X = P \cos\alpha + P_1 \cos\alpha_1 + \cdot \cdot \cdot P_n \cos\alpha_n = \Sigma(P\cos\alpha)$$

$$Y = P \cos\beta + P_1 \cos\beta_1 + \cdot \cdot \cdot P_n \cos\beta_n = \Sigma(P\cos\beta)$$

$$Z = P \cos\gamma + P_1 \cos\gamma_1 + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n \cos\gamma_n = \Sigma(P\cos\gamma).$$

Сад се задатак своди на онај, где смо имали три силе управне једна на другу, које можемо врло лако сложити у једну резултанту. Дијагонала паралелопипеда, који конструјишемо из тих компонената, биће тражена резултанта целог система. Она је, као што знамо:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

или замењено:

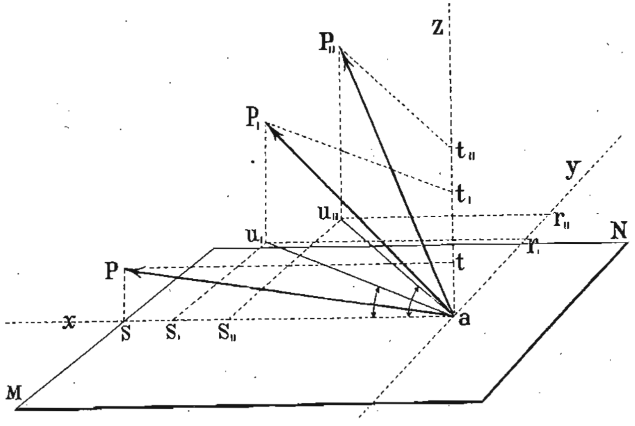
$$R = \sqrt{[\Sigma(P\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(P\cos\beta)]^2 + [\Sigma(P\cos\gamma)]^2} \quad (157$$

То је резултанта по величини. По правцу пак одредићемо је, кад одредимо углове које она заклапа с трима осама. Означимо те углове са φ. ψ и χ, па ћемо према оном што смо нашли у почетку овога члана имати:

$$\cos\varphi = \frac{X}{R}; \quad \cos\psi = \frac{Y}{R}; \quad \cos\chi = \frac{Z}{R}.$$

Што се тиче знакова појединих компонената правцем трију оса а тако исто и знакова углова, вреди све оно што смо рекли за рачунско слагање система сила у равни.

324. *Примери.* 1. Три радника вуку снагом од по 80 кгр. на крајевима трију ужета која су утврђена за једну тачку неког тешког тела. Нагиби тих ужета према хоризонту нека су 10°, 20° и 30°, а хоризонтални углови између пројекција прве и друге силе износе 20°, а између прве и треће угао је од 35°. Ваља наћи резултанту и њен правац.



Сл. 11.

Провуцимо кроз нападну тачку a (сл. 11.) правоугли координантни систем и, да би задатак био простији, нровуцимо га тако, да раван XZ пролази кроз силу P. Разложимо силу P на њене две компоненте as и at, јер је компонента правцем осе Y равна нули. Пошто нам је угао Pas дат и $= 10^0$ имаћемо:

$$y = 0.$$

$$x = P \cos Pas = 50 \cos 10^0 = 49{\cdot}24.$$

Исто тако је:

$$z = P \cos t\, aP = P \sin P\, as$$

$$= 50 \sin 10^0 = 8{\cdot}6824.$$

Пошто смо одредили компоненте силе P, ваља одредити и остале. Разложићемо силу P_1 на две компоненте au_1 и at_1, па ћемо добити паралелограм $P_1\, u_1\, at_1$ у коме је угао $P_1\, au_1 = 20^0$. Отуда имамо:

$$au_1 = P_1 \cos P_1\, au_1 = 50 \cos 20^0 = 46{\cdot}9846.$$

А исто тако и:

$$z_1 = at_1 = P_1 \sin aP_1\, t_1 = 50 \sin 20^0 = \mathbf{17.101.}$$

Компонента au_1 лежи у самој равни XY и нагнута је према пројекцији силе P под углом од 20^0, т. ј. $s_1\ au_1 = 20^0$. Да бисмо добили њене компоненте правцем осе X и Y које су у исти мах и компоненте силе P_1, ваља au_1 да разложимо на $as_1 = x_1$ и $ar_1 = y_1$; саме пак компоненте биће:

$$as_1 = x_1 = au_1 \cos s_1\, au_1 = 46{\cdot}9846 \cos 20^0 = \mathbf{44.151.}$$

Исто тако:

$$y_1 = au_1 \sin r_1\, u_1\, a = 46{\cdot}9846 \sin 20^0 = \mathbf{16.07.}$$

На исти начин ћемо и силу $P_{,,}$ разложити на две компоненте: једну правцем осе Z и то је $at_{,,} = z_2$ и другу која ће лежати у равни XY и бити њена пројекција $au_{,,}$. Пошто је нагиб силе $P_{,,}$ према хоризонту т. ј. према равни XY па дакле и према пројекцији $au_{,,}$ дат и $= 30^0$, то ће и та пројекција бити:

$$au_{,,} = P_{,,} \cos P_{,,}\, au_{,,} = 50 \cdot \cos 30^0 = \mathbf{43.301.}$$

Друга компонента силе $P_{,,}$ биће:

$$at_{,,} = z_2 = 50 \cdot \sin 30^0 = \mathbf{25.}$$

Да бисмо нашли x_2 и y_2, ваља да разложимо $au_{,,}$ на две компоненте правцем осе X и Y т. ј. на компоненте $as_{,,} = x_2$ и $ar_{,,} = y_2$. Пошто је угао $u_{,,}\, as_{,,}$ дат и $= 35^0$ имаћемо:

$$x_2 = au_{,,} \cos 35^0 = 43{\cdot}301 \cos 35^0 = 35{\cdot}47$$

$$y_2 = au_{,,} \sin 35^0 = 43{\cdot}301 \sin 35^0 = 24{\cdot}837.$$

Према томе, у правцу осе XX дејствују ове три силе:

$$X = x + x_1 + x_2 = 49{\cdot}24 + 44{\cdot}151 + 35{\cdot}47 = 128{\cdot}861.$$

Правцем осе YY пак ове три:

$$Y = y + y_1 + y_2 = 0 + 16{\cdot}07 + 24{\cdot}837 = 40{\cdot}907$$

а у правцу осе ZZ:

$$Z = z + z_1 + z_2 = 8{\cdot}6824 + 17{\cdot}101 + 25 = 50{\cdot}7837.$$

Крајна резултанта свију сила биће резултанта свих трију компонујућих резултаната, која је опет:

$$\mathbf{R} = \sqrt{128{\cdot}86^2 + 40{\cdot}9^2 + 50{\cdot}78^2}$$
$$= \sqrt{20856{\cdot}3080} = \mathbf{144{\cdot}4} \text{ кгр.}$$

Што се тиче правца резултанте према трима осама, ваља се послужити нађеним обрасцима за углове φ, ψ и χ. Тако ћемо добити:

$$\cos \varphi = \frac{X}{R} = \frac{128{\cdot}861}{144{\cdot}4}$$

одакле је: $\varphi = 26^0\, 49'\, 30''$

$$\cos \psi = \frac{Y}{R} = \frac{40{\cdot}907}{144{\cdot}4}$$

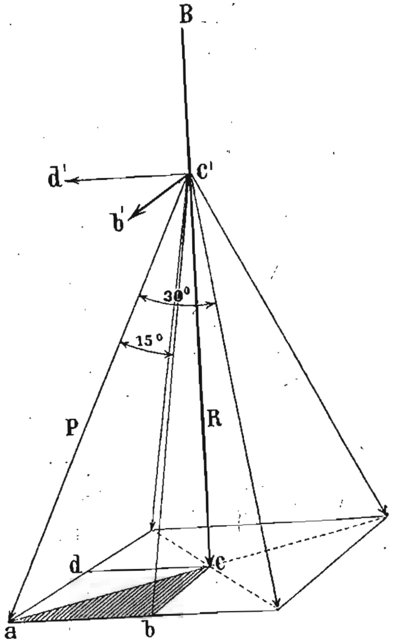
одакле: $\psi = 73^0\, 32'\, 40''$

$$\cos \chi = \frac{Z}{R} = \frac{50{\cdot}78}{144{\cdot}4}$$

одакле: $\chi = 69^0\, 24'\, 40''.$

2. За побијање великих кољева, пилота, радници конопцима подижу чекић који се са извесне висине спушта на колац. Како је кад чекић тежак тако је и број радника већи или мањи. Узмимо да четири радника вуку за конопце неког чекића, сваки са просечном снагом од 60 кгр. Радници су тако распоређени да места на којима стоје, кад се саставе правим линијама, праве квадрат. Углови које два и два оближња конопца заклапају једнаки су и сваки је од њих $= 30^0$. Колика је дакле резултанта и њен правац, те да се према томе одреди тежина чекића.

Као год и у прошлом примеру, тако би ваљало и овде сваку дату силу разложити на три компоненте x, y и z. Тако бисмо на пример од силе $P = c'\, a$ (сл. 12.) добили



Сл. 12.

$c'c$, $c'b$ и $c'd'$. Међутим су овде све дате силе и углови једнаки, и у овом примеру према томе би и све компоненте биле једнаке па, би се стога све хоризонталне компоненте, као једнаке а супротног смисла, потрле, а остале би само вертикалне компоненте; стога задатак постаје врло прост, јер треба само из P и угла α одредити вертикалну компоненту $c'c$; пошто таких сила има четири, резултанта ће бити четири пута $c'c$.

Из правоуглог троугла abc' имамо:

$$ab = P \sin \frac{\alpha}{2} = 60 \sin 15^0$$

одакле опет:

$$ab = bc = 15{\cdot}529.$$

У правоуглом троуглу abc имамо:

$$ac = \sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{bc}^1} = \sqrt{2\ \overline{ab}^2} = \overline{ab}\sqrt{2} =$$

$$= 15{\cdot}529 \sqrt{2} = 21{\cdot}958.$$

Исто тако из правоуглог троугла acc':

$$cc' = \sqrt{\overline{ac,}^2 - \overline{ac}^2} = \sqrt{60^2 - 21{\cdot}958^2} = 55{\cdot}75 = r.$$

Целокупно дејство биће:

$$R = 4\,r = 4 \times 55{\cdot}75 = \mathbf{223} \text{ кгр.}$$

Угао $\varphi =$ који резултанта са ма којом силом P заклапа биће:

$$\sin \varphi = \frac{ac}{P} = \frac{21{\cdot}958}{60}.$$

А одавде:

$$\varphi = 21^0\,28'.$$

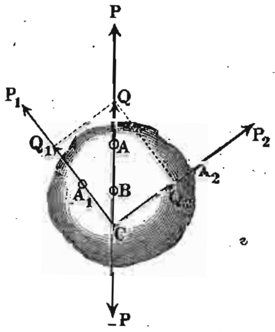
В. Слагање сила с разним нападним тачкама.

325. Врло често наилазимо на силе, које дејствују на разне тачке једнога истога тела или једнога система тела. Овде се може десити, као што смо то и напред видели, да све силе које тако полазе из разних тачака некога тела иду једним истим правцем (ма и супротним смислима), т. ј. све те силе теку међу собом паралелно. Или још може бити да све те силе иду разним правцима, те дакле да се укрштају. И једне и друге силе могу бити и у равни и у простору. Ми ћемо посебице и укратко проучити те случајеве.

а. Слагање укрштених сила.

326. Премештање нападне тачке правцем силе. — Кад једна сила напада у једној тачки некога чврстога тела, њена се нападна тачка може произвољно премештати у истом правцу а без икакве промене њеногa дејства. Другим речима, ако неку силу P_1 заменимо силом P_2 која је с њом једнака по величини, правцу и смислу, само с другом нападном тачком A_2 у продуженом правцу P_1 или силом P_3 с нападном тачком у A_3 и т. д., онда ће та свака нова сила произвести исто дејство као и првобитно дата сила P_1.

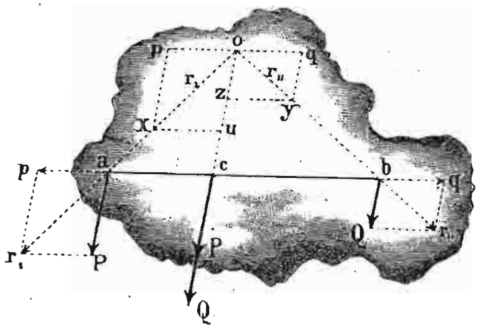
327. Слагање укрштених сила с разним нападним тачкама. — Нека су нам дате две силе P_1 и P_2 (сл. 13.) да дејствују на неко чврсто тело у нападним тачкама A_1 и A_2, и то тако да те силе, нису међу собом паралелне, али да леже у истој равни. Најлакше ћемо их сложити, ако њихове нападне тачке преместимо у ону тачку C, где се њихови продужени правци секу. Јер смо мало час видели да се премештањем нападне тачке неке силе њено дејство не мења. Тако ћемо у место P_1 и P_2 добити силе Q_1 и Q_2, које имају једну исту нападну тачку, и које можемо на обичан начин сложити по паралелограму сила у резултанту Q.



Сл. 13.

в. Слагање паралелних сила.

328. Једносмислене паралелне силе. — Узмимо две једносмислене паралелне силе P и Q (сл. 14.) да сложимо. Ми ћемо у нападним тачкама a и b обеју сила додати две силе p и q, које ће бити сасвим једнако али супротног смисла, тако да се узајамно потру. Онда ће због овог потирања, резултанта од P, Q, p и q бити она иста која и само од сила P и Q.



Сл. 14.

Из силе p и P добивамо резултанту r_1, а из q и Q резултанту r_2. Њихове нападне тачке преместићемо из a и b у o, јер се ту обе те резултанте довољно продужене секу. Тако ћемо имати $ox = r_1$ $oy = r_2$.

Кад сад сваку од тих резултаната разложимо на две, и то на једну паралелну с правцем ab, а другу паралелну с правцима сила P и Q, добићемо oq и oz и op и ou. Сем тога узећемо да је $op = ap$ и $oq = bq$, па дакле и $op = oq$. Зато ће се те две силе потрти и у o, као што су се потирале и у правцу ab.

Остају нам још компоненте $ou = P$ и $oz = Q$, које обе имају исти правац, смисао и нападну тачку. За такве силе већ знамо да је резултанта:

$$R = P + Q.$$

Кад нападну тачку резултантину пренесемо по њеном правцу из o у c, онда ће она и даље остати паралелна датим силама P и Q, а нападна јој тачка лежаће између нападних тачака обеју компонената P и Q, и то ближе већој сили.

Из тога изводимо овај важан став:

Резултанта двеју једносмислених и паралелних сила увек је равна збиру датих сила; по правцу је паралелна с правцима датих сила; по смислу је једнака са смислом датих сила, нападна јој је тачка између нападних тачака датих сила и ближа је нападној тачци веће силе.

Само пак место нападне тачке резултантине одредићемо из сличности троуглова oxu и oac као и троуглова ozy и obc; из тих сличности имамо ове сразмере:

$$\overline{ou} : \overline{ux} = P : p = \overline{oc} : \overline{ac}$$

или:

$$p \cdot \overline{oc} = P \cdot \overline{oc}.$$

Исто тако:

$$\overline{oz} : \overline{zy} = Q : q = \overline{oc} : \overline{bc}$$

$$q \cdot \overline{oc} = Q \cdot \overline{bc}$$

Пошто је $p = q$ биће:

$$P \cdot \overline{ac} = Q \cdot \overline{bc}$$

или:

$$P : Q = \overline{bc} : \overline{ac}.$$

Дакле, *нападна тачка резултантина* **c** *дели спајну линију* **ab** *нападних тачака паралелних сила* **P** *и* **Q** *на два дела:* **ac** *и* **bc,** *који стоје у изврнутој сразмери, према величини датих сила.*

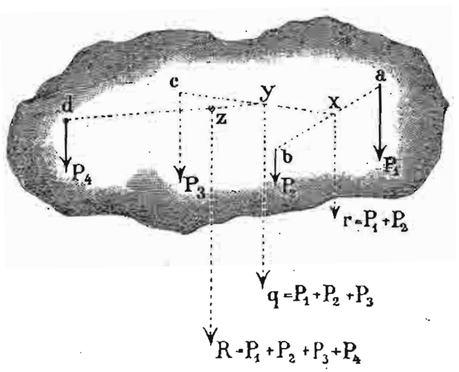
Само остајање ac, резултантине нападне тачке од веће силе добивамо из горње сразмере:

$$\overline{ac} = \frac{Q \cdot \overline{bc}}{P}$$

као и остојање њено bc од мање силе:

$$\overline{bc} = \frac{P \cdot \overline{ac}}{Q}.$$

Према томе ако су обе паралелне силе једнаке, онда нападна тачка резултанте лежи у половини саставне линије нападних тачака појединих сила. Изврнуто томе, сваку силу можемо разложити на две, с њом паралелне и једносмислене силе, које по величини морају бити такве, да њихов збир буде раван датој сили, а њихове поједине величине да буду у изврнутим односу са остојањима њихових нападних тачака од нападне тачке дате силе.



Сл. 15.

329. Кад на неко тело дејствује више паралених једносмислених сила, чије нападне тачке не леже у истој линији, онда ће опет резултанта бити равна збиру њихову а по правцу и паралелна и једносмислена с њима. Њена нападна тачка има своје одређено место, које се овако може наћи:

За силу P_1 и P_2 (сл. 15.) наћи ћемо по познатом начину:

$$\overline{ax} : \overline{bx} = P_2 : P_1$$

$$ax = \frac{P_2\,\overline{bx}}{P_1}$$

или

$$ax : ba = P_2 : r\,; \quad ax = \frac{P_2 \cdot \overline{ab}}{r}.$$

Кад сад сложимо r и P_3 имаћемо:

$$xy : cx = P_3 : q$$

одакле:

$$xy = \frac{cx \cdot P_3}{q}.$$

Најзад слагањем $\mathbf{r}_2$ и P_4 имамо:

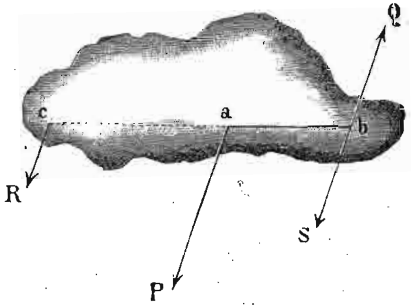
$$R = r^2 + P_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \Sigma\,(P) \cdot \cdot \;(158$$

а нападна тачка:

$$yz : yd = P_4 : R$$

$$yz = \frac{yd \cdot P_4}{R} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \;(159$$

Исто бисмо тако радили и кад би било више од четири силе.



Сл. 16.

330. Антипаралелне силе. — Узмимо сада две паралелне силе али супротног смисла, дакле две антипаралелне силе. Нека су то силе P и Q (сл. 16.) с нападним тачкама a и c. Рецимо да смо већу силу P разложили на друге две паралелне силе и једносмислене с њом, R и S. Пошто величину једне од њих можемо узети колико хоћемо, то рецимо да је $S = Q$ и да напада у истој тачки b са силом Q. Тиме ће сила Q бити потрвена. Остаје нам још дејство силе:

$$R = P - S = P - Q \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \;(160$$

која је у исти мах и резултанта.

Кад две антипаралелне силе дејствују на неко тело у разним тачкама, онда је њихова резултанта равна разлици датих сила, њена нападна тачка не лежи између него изван њих и то на страни веће силе. Смисао резултанте је исти са смислом веће силе.

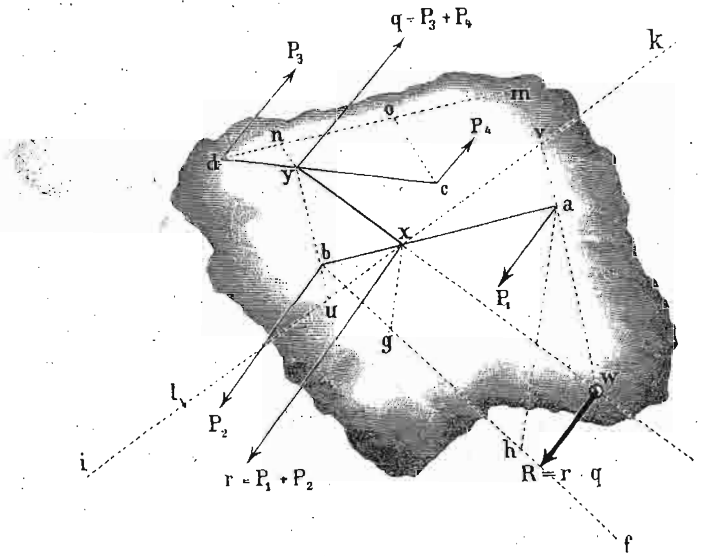
Одстојање нападне тачке резултантине добићемо из оне сразмере, коју добивамо кад резултанту сматрамо као силу:

$$P : Q : R = bc : ac : ab$$

одакле:

$$\overline{ac} = \frac{ab \cdot Q}{R}.$$

331. Кад имамо више од две паралелне силе а супротног смисла, онда ћемо их поступно слагати две и две. На пример дате су нам силе $P_1 P_2 P_3 P_4$ (сл. 17.)



Сл. 17.

с нападним тачкама $a, b, c, d,$ онда ћемо из P_1 и P_2 добити резултанту r за коју вреди:

$$P_1 : r = \overline{bx} : \overline{ba}$$

одакле:

$$bx = \frac{P_1 \overline{ba}}{r}.$$

Из P_3 и P_4 добивамо резултанту $q = P_3 + P_4$ за коју опет имамо:

$$q : P_4 = dc : dy$$

одакле:

$$dy = \frac{P_4 \cdot dc}{q}.$$

Сад смо свели задатак на две паралелне силе супротног смисла q и r, за које као што знамо вреди:

$$q : R = xw : xy$$

одакле:

$$xw = \frac{q \cdot xy}{R}.$$

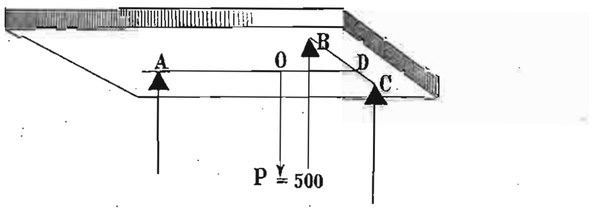
332. *Примери* 1. Једна хоризонтална плоча ослања се у три тачке A, B, C, (сл. 18.) и носи у тачки O терет од *500* кгр. Дужина AD која је у исти мах управна на BC износи 4^m, а $BC = 3^m$. Нека још постоји однос:

$$AO : OD = 3 : 2,$$

$$BD : CD = 4 : 3.$$

Колико терета пада на сваки ослонац?

Пошто постоји однос $AO : OD = 3 : 2$ то је онда:



Сл. 18.

$$A = \frac{2}{5} \cdot 500 = 200 \text{ кгр.}$$

а на тачку D пада 300 кгр.

Тих 200 кгр. подељени су на B и C и то по односу:

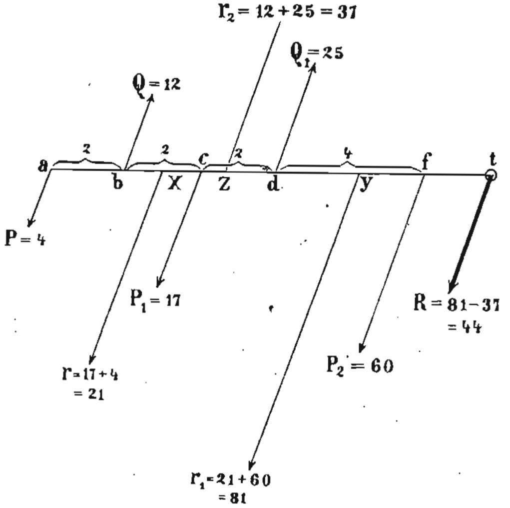
$$BD : CD = 4 : 3$$

те према томе:

$$B = \frac{3}{7} \cdot 300 = 128 \frac{4}{7} \text{ кгр.}$$

$$C = \frac{4}{7} \cdot 300 = 171 \frac{3}{7} \text{ кгр.}$$

2.) На једној линији AB (сл. 19.) од 10 мет. дужине налази се пет нападних тачака паралелних сила супротног смисла и то овако: $P_1 = 4$, $P_2 = 17$, $P_3 = 60$ иду у једном а $Q_1 = 12$, и $Q_2 = 25$ у супротном смислу.



Сл. 19.

Распоред сила види се на слици. Колика је резултанта и где јој је нападна тачка?

Најпре ћемо наћи резултанту:

$$r_1 = P_1 + P_2 = 17 + 4 = 21 \text{ кгр.}$$

$$cx : ca = P_1 : r_1$$

$$cx : 2 + 2 = 4 : 21$$

$$cx = \frac{16}{21} = 0{\cdot}762.$$

За тим је:

$$r_2 = r_1 + P_3 = 21 + 60 = 81$$

$$fy : fx = r_1 : r_2$$

$$fy = 6 + 0{\cdot}762 = 21 : 81$$

$$fy = \frac{6 \cdot 762 \cdot 21}{81} = 1 \cdot 753^m.$$

Исто тако:

$$r_3 = Q_1 + Q_2 = 25 + 12 = 37$$

$$dz : db = Q_1 : r_3$$

$$dz : 4 = 12 : 37$$

$$dz = \frac{4 \cdot 12}{37} = 1 \cdot 3.$$

Најзад резултанта:

$$R = 81 - 37 = 44$$

$$yz : yt = R : r_3,$$

Пошто је $yz = fd + dz - fy = 4 + 1{\cdot}3 - 1{\cdot}753 = 3{\cdot}547,$

онда је:

$$yt = \frac{3{\cdot}547 \cdot 37}{44} = 2{\cdot}98^m.$$

Одавде пак:

$$ft = yt - fy = 2{\cdot}98 - 1{\cdot}753 = 1{\cdot}227^m.$$

Дакле нападна тачка t резултанте $R = 44$ кгр. налази се за $1{\cdot}227^m$ десно од силе P_3 или за $11{\cdot}227$ у десно од силе P_1.

II.

Статички моменти.

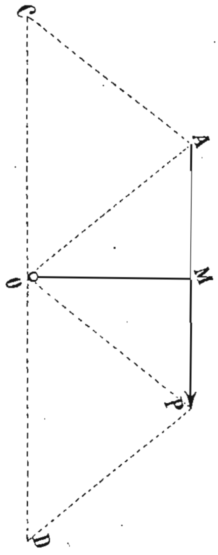
333. Опште одредбе. — До сад смо посматрали дејство сила на тачку, која је могла следовати дејству резултанте тих сила. Међутим сад ћемо узети да је тело на које дејствују силе утврђено, па да нађемо услове за равнотежу.

Нека је O (сл. 20.) тачка у којој је тело утврђено, а A тачка у којој сила P напада; у том случају ваља из O спустити управну OM на правац силе; та се управна $OM = l$ зове *крак силе.* Производ из силе P и њеног крака OM зове се *статички* или *механички моменат силе* или просто *моменат силе.*

Ако тај моменат означимо са $\mathfrak{M}$ онда је:

$$\mathfrak{M} = P \times OM = Pl \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (161$$

Тачка O из које се спушта управна на силу зове се *средиште момента.*



Сл. 20.

Кад правац неке силе пролази кроз средиште момента, онда је моменат те силе раван нули, јер је крак (OM) силе у том случају раван нули. И обратно, кад нађемо да је моменат неке силе раван нули, смемо закључити, да је ту или сама сила равна нули, или ако то није, онда она мора пролазити кроз средиште момента, јер производ $P \cdot OM$ може бити нула само ако је ма који његов чинилац нула.

Саставимо нападну и крајњу тачку силе са средиштем момента O; добићемо један троугао AOP. Површина тога троугла је:

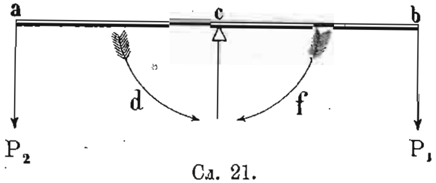
$$= \frac{1}{2} AP \times OM = \frac{1}{2} P \cdot l.$$

Дакле *површина троугла, који постаје из крајњих тачака силе и средишта момента, бројно је равна половини момента силе.*

Међутим ми можемо над силом P и с тачком O направити два паралелограма $APOC$ и $APDO$ који ће сваки бити два пут већи од троугла AOP. Према томе можемо рећи:

Статички моменат сваке силе раван је површини оног паралелограма, који будемо конструисали над том силом а из њеног средишта момента.

334. Кад на једно утврђено тело напада више сила, онда ће свака та сила имати свој моменат. Међутим моменти свију сила чије се нападне тачке налазе с једне стране средишта момента дејствују у једном, а моменти свију сила, чије се нападне тачке налазе са супротне стране средишта момента, дејствују у супротном смислу. Међу свима тим моментима они моменти који теже да окрену тело у истом смислу у ком се окрећу казаљке на сату зову се *положни,* а они моменти који теже да окрену у супротном смислу зову се *одречни.* Према томе моменат $P_1\, bc$ (сл. 21.) био би положан, а моменат $P_2\, ac$ одречан.



Сл. 21.

335. **Равнотежа статичких момената.** — За равнотежу момената није довољно да су само силе једнаке а противно означене, него ваља узети у обзир и одстојања тих сила од средишта момента. Јер сад могу две силе бити у равнотежи и ако нису једнаке, само ако њихова одстајања од средишта т. ј. њихови краци нису једнаки.

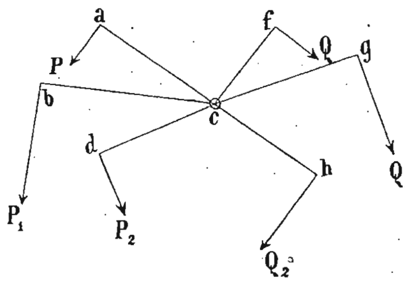
За равнотежу таквих сила у опште вреди овај закон:

Две силе које теже да неко утврђено тело окрену у супротном смислу биће у равнотежи, кад су њихови механички или статички моменти једнаки.

Тако, на пример, ако између сила̂ P_1 и P_2 (сл. 21.) чији су краци l_1 и l_2 постоји равнотежа, онда мора да вреди ова једначина:

$$P_1\, l_1 = P_2\, l_2.$$

Ако у опште дејствује на неко тело више сила, које теже да га у супротним правцима окрећу, онда ће тело бити у равнотежи, кад је дејство свију оних сила што теже да окрену тело у једном смислу равно дејству свију оних, које теже да исто тело окрену у супротном смислу. Другим речима, збир момената свију сила које дејствују у једном смислу мора бити раван збиру момената супротног смисла.



Сл. 22.

И према горњој дефиницији положних и одречних момената, можемо написати ову једначину за равнотежу момената (сл. 22.):

$$P\,\overline{ac} + P_1\,\overline{bc} + P_2\,\overline{cd} = Q\,\overline{cf} + Q_1\,\overline{cg} + Q_2\,\overline{ch}$$

$$P\,\overline{ac} + P_1\,\overline{bc} + P_2\,\overline{cd} - Q\,\overline{cf} - Q_1\,\overline{cg} - Q_2\,\overline{ch} = 0 \quad (162$$

Дакле: *Једно тело, које се може обртати, налази се у равнотежи, кад је алгебарски збир свију момената који на њега дејствују раван нули.*

336. До сад смо посматрали случајеве равнотеже момената, кад је средиште момента било на истом телу на коме су и нападне тачке сила. Међутим да испитамо, какви услови вреде за равнотежу онда, кад је средиште момента изван тела.

Кад силе дејствују у једној равни тела, онда ћемо кроз тело повући једну линију *oo* (сл. 23.) управну на ону раван у којој силе дејствују. Та се линија зове *оса* тела. Кад из тачке *o*, где оса пробија раван у којој су силе, спустимо управне на силе, добићемо њихове краке а с тим и моменте, који морају бити једнаки и супротног смисла, ако равнотежа постоји. Дакле мора бити:

$$P\,\overline{oc} = Q\,\overline{od}.$$

Ако нам не буде познат сам крак силе, него само одстојање нападне тачке силе од осе т. ј. *ao* и угао α

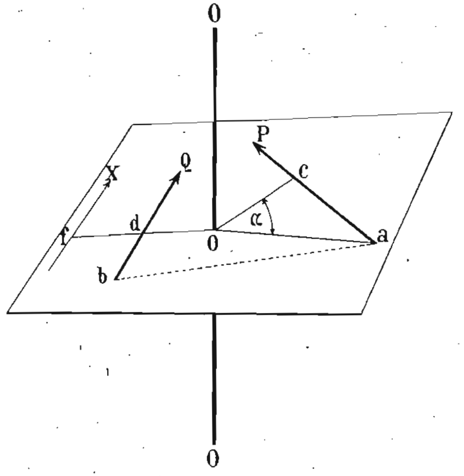
који то остојање заклапа са управном, онда је крак одређен једначином:

$$oc = oa\cos\alpha$$

а тако исто:

$$od = ob\cos\beta.$$

Ако бисмо хтели једну силу заменити неком другом, на пр. силу Q хтели бисмо да заменимо силом X која није на истој даљини од осе као Q, а да исто дејство произведе као и сила Q, онда видимо да та сила X, пошто је њен крак дужи, мора бити мања, па да јој моменат буде исти као и силе Q.



Сл. 23.

Ако знамо крак *of* нове силе X, онда ћемо саму силу одредити из једначине:

$$X \cdot of = Q\,od$$

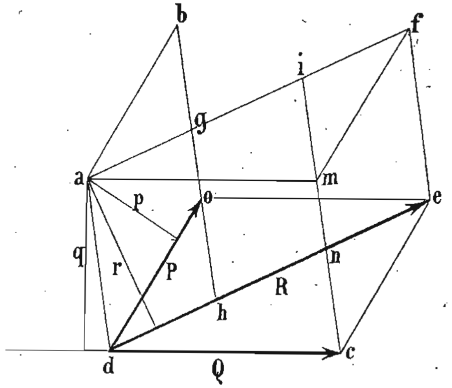
или:

$$X = \frac{Q\,od}{of}.$$

337. Слагање статичких момената у равни. — Као год што смо слагали силе које дејствују на једну тачку, исто тако можемо слагати и статичке моменте тих сила, кад оне све имају исто средиште момента, т. ј. кад из једне исте тачке спустимо управне на све силе. Само овде треба да разликујемо два случаја: да ли ће средиште момента бити изван праваца сила, или ће оно бити између праваца сила чије моменте слажемо.

Ми ћемо проучити оба случаја посебице:

1. Да сложимо статичке моменте таквих сила, које дејствују на једну тачку, а чије средиште момента лежи *изван* сила̑.



Сл. 24.

Нека су P и Q (сл. 24.) силе које дејствују на тачку d под извесним углом, а p и q нека су њихови краци.

Мало час смо видели да је статички моменат неке силе раван површини паралелограма који будемо конструјисали над том силом а из њеног средишта момента. Стога су моменти:

$P_2\, p$ = површини паралелограма $adob$;

$Q\, q$ = површини паралелограма $adcm$;

$R\, r$ = површини паралелограма $adef$.

Међутим, пошто знамо из планиметрије да су паралелограми истих основица и висина једнаки, биће:

$$\begin{array}{ll} & \| \text{ грам } adob = \| \text{ граму } adhg \\ \text{и} & \| \text{ грам } adcm = \| \text{ граму } adni \\ \hline & adob + adcm = adhg + adni. \end{array}$$

Но како је:

$$adhg = ifen$$

то је онда:

$$adob + adcm = ifen + adni = adef$$

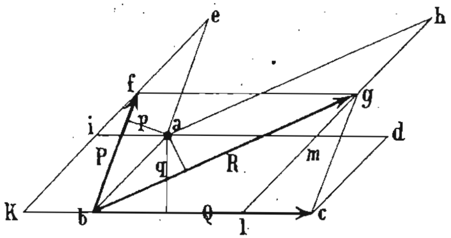
или што је све једно:

$$Pp + Qq = Rr.$$

На тај начин добили смо ово важно правило за слагање статичких момената:

Кад имамо да сложимо статичке моменте двеју сила које дејствују под углом на једну тачку, онда ће статички моменат резултанте бити раван алгебарском збиру статичких момената компонената.

338. 2. Да сложимо сад статичке моменте таквих сила, где средиште момента не лежи изван него *између* самих сила.



Сл. 25.

Нека су опет P и Q (сл. 25.) дате силе а R њихова резултанта; p, q и r су краци сила и резултанте. Као и мало час биће:

$$Pp = abef$$

$$Qq = abcd$$

$$Rr = abgh.$$

Међутим је:

$$abef = aikb$$

$$abgh = ablm$$

$$abef + abgh = aikb + ablm = iklm.$$

Пошто је још:

$$iklm = abcd$$

то је:

$$abef + abgh = abcd$$

или:

$$Pp + Rr = Qq$$

или:

$$Pp - Qq = - Rr.$$

Моменат Qq и Rr имају одречне знаке, јер су према ранијој одредби знакова спрегова заиста одречни.

Дакле и за овај случај, где је средиште момента између самих сила, вреди исти закон за слагање момената:

Статички моменат резултанте раван је алгебарској суми статичких момената компонената.

Стога можемо уопште написати:

$$Rl = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n l_n \cdot = \Sigma (Pl). \cdot \text{(163}$$

339. До сад смо слагали статичке моменте сила, које су имале заједничку нападну тачку. Међутим врло се често сретамо и с таквим моментима, чије силе немају заједничку тачку. И овде могу бити два случаја.

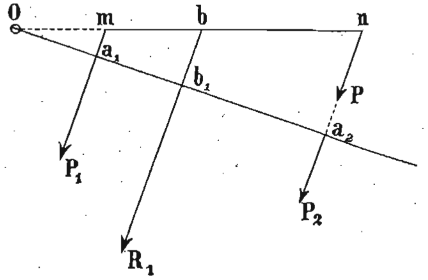
Средиште момента лежи изван сила.

Средиште момента лежи између сила.

Да испитамо оба случаја.

1. Силе имају разне нападне тачке, а средиште момента је изван сила.

Дате су нам паралелне силе P_1 и P_2 (сл. 26.) с нападним тачкама m и n. Њихова је резултанта R_1. Да бисмо нашли краке тих сила, спустимо једну управну из O, па ћемо имати:



Сл. 26.

$$oa_1 = l_1, \; oa_2 = l_2 \text{ и т. д.}$$

$$ob_1 = l.$$

На основу закона о слагању паралелних сила имамо:

$$R = P_1 + P_2 \cdot \cdot \text{(1}$$

Даље имамо:

$$\overline{ob_1} = \overline{oa_1} + a_1 b_1$$

или:

$$l = l_1 + a_1 b_1.$$

Даље знамо да је:

$$\overline{a_1 b_1} : \overline{a_1 a_2} = P_2 : R_1$$

или:

$$\overline{a_1 b_1} = \frac{P_2 \overline{a_1 a_2}}{R_1} = \frac{P_2 \overline{a_1 a_2}}{P_1 + P_2}$$

заменом:

$$l = l_1 + \frac{P_2 \overline{a_1 a_2}}{P_1 + P_2} = l_1 + \frac{P_2 (l_2 - l_1)}{P_1 + P_2} \quad . \; . \; . \; . \text{(2}$$

кад једначине (1 и (2 помножимо, имаћемо:

$$Rl = l_1 (P_1 + P_2) + P_2 (l_2 - l_1) =$$

$$= P_1 l_1 + P_2 l_1 + P_2 l_2 - P_2 l_1 = P_1 l_1 + P_2 l_2 \cdot \cdot \text{(163'}$$

Дакле, и овде је моменат резултанте раван алгебарском збиру момената компонената.

Ово правило, изведено за две силе, можемо раширити на колико год хоћемо сила. Јер рецимо да резултанту R_1 сложимо с неком трећом силом P_3 чији је крак l_3; нова резултанта нека је R_2 и њен крак l'. За те две силе доказали смо да вреди овај став:

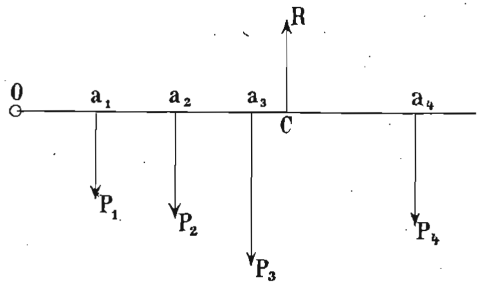
$$R_2 l' = R_1 l + P_3 l_3$$

или кад Rl заменимо:

$$R_2 l' = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3.$$

На тај начин, уводећи по једну силу више, можемо закон раширити на онолико сила, колико хоћемо.

340. Овај се став о слагању статичких момената сила с разним нападним тачкама може употребити за одредбу нападне тачке резултанте паралелних сила путем рачуна. Узмимо више терета $P_1 P_2 P_3 \cdot \cdot \cdot$ (сл. 27.)



Сл. 27.

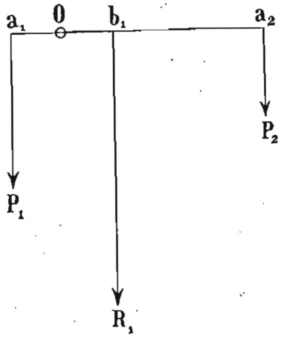
на једној мотци и једну произвољну тачку O изван терета, па из ње одредимо одговарајуће краке $l_1 l_2 l_3 \cdot \cdot \cdot$ за сваку силу. Нека је одстојање нападне тачке резултантине C од O равно x, онда на основу горњег правила мора бити:

$$Rx = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \cdot \cdot \cdot P_n l_n$$

одакле је опет:

$$x = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \cdot \cdot \cdot P_n l_n}{R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdot \cdot \cdot P_n} = \frac{\Sigma (Pl)}{\Sigma (P)} \quad \cdot \cdot (164$$

341. 2. Испитајмо сад случај где средиште момента лежи између сила. На тај начин добивамо два момента супротног смисла, и њих треба да сложимо.



Сл. 28.

Знамо да је (сл. 28.):

$$R_1 = P_1 + P_2$$

и $$l = \overline{ob_1} = \overline{oa_2} - \overline{b_1 a_2}.$$

Пошто је:

$$\overline{b_1 a_2} : \overline{a_1 a_2} = P_1 : R_1$$

$$\overline{b_1 a_2} = \frac{P_1 \overline{a_1 a_2}}{R_1} =$$

$$\frac{P_1 (l_1 + l_2)}{R} = \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{P_1 + P_2}$$

кад то горе заменимо имаћемо:

$$l = l_2 - \frac{P_1 (l_1 + l_2)}{P_1 + P_2}$$

Кад ову једначину помножимо с првом биће:

$$Rl = (P_1 + P_2) l_2 - P_1 (l_1 + l_2 = P_2 l_2 - P_1 l_1.$$

Дакле: *моменат резултанте раван је алгебарском збиру момената компонената.*

Одавде је још:

$$l = \frac{P_2 l_2 - P_1 l_1}{P_1 + P_2}.$$

342. Испитајмо сад случај, да средиште момента лежи између сила, али узмимо више од две силе и нека силе иду у оба смисла. Оне силе које су на пр. десно од средишта момента означимо са $P_1 P_2 P_3 \cdot \cdot \cdot P_n$ а њихове краке са $l_1 l_2 l_3 \cdot \cdot \cdot \cdot l_n$. Оне пак силе с леве стране нека су: $P_1' P_2' P_3' \cdot \cdot \cdot P_n'$ и њихови краци $l_1' l_2' l_3' \cdot \cdot \cdot l_n'$. Овај случај можемо свести на прећашњи.

Јер замислимо за време, да имамо само силе од средишта на десно; онда средиште лежи изван сила и за њих вреди ова једначина:

$$R_1\, l' = P_1\, l + P_2\, l_2\, P_3\, l_4.$$

Исто тако замислимо да нема десних сила него само левих; онда ће средиште бити опет изван сила и за њих ће вредити опет ова једначина:

$$-R_2\, l'' = -(P_1{}'\, P_1{}' + P_2{}'\, l_2{}' + P_3{}'\, l_3{}').$$

Пошто овде имамо силе у оба смисла, ваља нарочито пазити на знаке момената.

Ако сад пустимо обе групе сила, имаћемо свега две резултанте R_1 и R_2 и између њих средиште. Њихова заједничка резултанта биће R с краком l, и за њу ће вредити једначина коју смо мало час нашли:

$$Rl = R_1\, l' - R_2\, l''$$

или замењено:

$$Rl = (P_1\, l_1 + P_2\, l_2 + P_3\, l_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n\, l_n) -$$

$$-(P_1{}'\, l_1{}' + P_2\, l_1{}' + \cdot \cdot \cdot P_n{}'\, l_n{}').$$

Дакле, опет је моменат резултанте раван алгебарском збиру момената компонената.

И према томе, да ли ће резултујућа сума бити положна или одречна, и резултанта ће дејствовати десно од средишта момента или лево. Њен ће крак бити уопште:

$$l = \frac{P_1\, l_1 + P_2\, l_2 + \ldots P_n\, l_n + P_1{}'\, l_{/2} + P_2{}'\, l_2{}' + \ldots P_n{}'\, l_n{}'}{P_1 + P_2 + \ldots P_n + P_1{}' + P_2{}' + \ldots P_n{}'} =$$

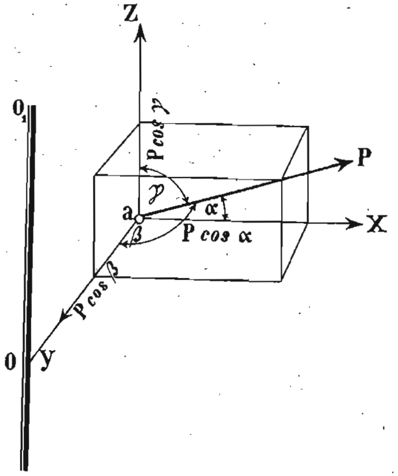
$$= \frac{\Sigma\,(Pl)}{\Sigma\, P} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (164'$$

343. Слагање статичких момената у простору. — Рецимо да на материјалну тачку а (сл. 29.) дејствује један систем сила, од којих нека је једна ова сила P. Тело се може окретати око осе OO' и, као што видимо, нападна тачка силе P је ван осе. Ми ћемо као и код слагања самих сила разложити сваку силу правцем трију правоуглих оса XYZ и добићемо компоненте $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2 \cdot \cdot \cdot x_n y_n z_n$. Од саме силе P коју посматрамо имаћемо:

$$x_1 = P \cos \alpha_1$$

$$y_1 = P \cos \beta_1$$

$$z_1 = \mathrm{P} \cos \gamma_1.$$



Сл. 29.

Пошто можемо бирати правце трију правоуглих оса у простору кроз тачку a, ми ћемо их изабрати тако, да задатак буде што простији. Тако на пример узећемо да оса Z буде паралелна са осом OO', да оса Y буде управна на осу OO_1 а да X оса буде управна на обе прве.

Кад на све три компоненте спустимо управне из средишта момента O, а та ће бити заједничка oa, и с том их управном помножимо добићемо моменте:

$$x_1\, \overline{oa} = P \cos \alpha_1 \cdot \overline{oa}$$

$$y_1\, \overline{oa} = P \cos \beta_1 \cdot \overline{oa}$$

$$z_1\, \overline{oa} = P \cos \gamma_1 \cdot \overline{oa}.$$

Исто тако:

$$x_2\, \overline{oa} = P_2 \cos \alpha_2\, \overline{oa}$$

$$y_2\, \overline{oa} = P_2 \cos \beta_1\, \overline{oa}$$

$$z_2\, \overline{oa} = P_2 \cos \gamma_2\, \overline{oa} \text{ и т. д.}$$

Правцем осе X имаћемо моменте:

$$X \cdot \overline{oa} = (x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot x_n)\,\overline{oa} =$$

$$= \Sigma\,(x)\,\overline{oa} = \Sigma\,(P \cos \alpha)\,\overline{oa}.$$

Исто тако правцем оса Y и Z биће моменти:

$$Y \cdot \overline{oa} = (y_1 + y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot y_n)\,\overline{oa} =$$

$$= \Sigma\,(y)\,\overline{oa} = \Sigma\,(P \cos \beta) \cdot \overline{oa}.$$

$$Z\,\overline{oa} = (z_1 + z_2 + z_3 + \cdot \cdot \cdot z_n)\,\overline{oa} =$$

$$= \Sigma\,(z)\,\overline{oa} = \Sigma\,(P \cos \gamma)\,\overline{oa}.$$

Међутим све компоненте правцем осе Y пролазе кроз средиште момента O, а ми смо напред видели да је онда моменат раван нули. Према томе:

$$Y\,\overline{oa} = \Sigma\,(P \cos \gamma)\,\overline{oa} = o.$$

Резултујућа компонента Y није равна нули (већ само њен крак), зато ће се она јавити као притисак на осу и то правцем aY с нападном тачком у o.

Моменти правцем осе Z теже сви да извуку осу из њених лежишта, и ако је та оса довољно утврђена, ти се моменти сви потиру.

Остају само моменти правцем осе X у пуном свом дејству, и они су у исти мах и резултанта свију осталих момената, т. ј.:

$$X\,\overline{oa} = P_1 \cos \alpha_1 \cdot \overline{oa} + P_2 \cos \alpha_2\,\overline{oa} + \cdot \cdot \cdot \cdot P_n \cos \alpha_n\,\overline{oa}$$

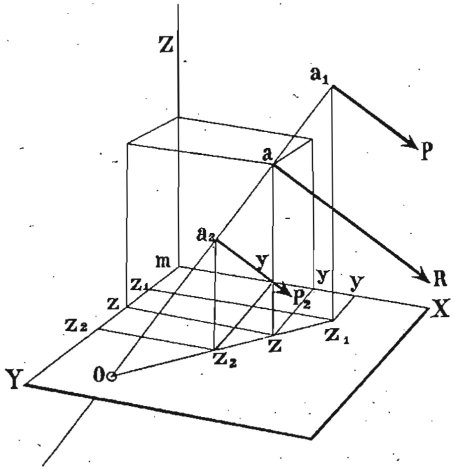
или:

$$\mathfrak{M}_x = (m_{x1} + m_{x2} + m_{x3} + \cdot \cdot \cdot \cdot m_{xn}) = \Sigma\,(m_x).$$

Дакле и овде је *моменат резултанте раван алгебарском збиру момената компонената.*

344. Место да слажемо моменте сила које потичу све из једне тачке, узмимо извесан број паралелних сила с разним нападним тачкама. Све паралелне силе у простору могу се заменити резултантом, која је равна збиру појединих паралелних сила.

Нека су P_1 и P_2 (сл. 30.) паралелне силе и њихова резултанта $R = P_1 + P_2$. Нападне тачке су им a_1 а a_2



Сл. 30.

Продужимо линију нападних тачака, док не пробије раван mXY у тачки O. Овде имамо случај двеју паралелних сила, код којих је средиште момента изван њих, те према томе вреди ова једначина:

$$R\,\overline{ao} = P_1\,\overline{a_1 o} + P_2\,\overline{a_2 o} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1$$

Кад из нападних тачака a_1 а a_2 спустимо управне

$$\overline{a_1 Z_1},\ \overline{aZ},\ \overline{a_2 Z_2}$$

на раван XmY онда из сличности троглова:

$$o\,a_2\,Z_2 \sim oa\,Z \sim oa_1\,Z_1$$

имамо:

$$\overline{aZ} : \overline{ao} = \overline{a_1 Z_1} : \overline{a_1 o} = \overline{a_2 Z_2} : a_2 o.$$

Или, пошто је:

$$\overline{aZ} = z \,;\; \overline{a_1 Z_1} = z_1 ;\; \overline{a_2 Z_2} = z_2$$

биће:

$$z : \overline{ao} = z_1 : \overline{a_1 o} = z_2 : \overline{a_2 o}.$$

Кад у једначини 1) помножимо сваки члан са одговарајућим чланом ове сразмере добићемо:

$$R \cdot ao \cdot \frac{z}{ao} = P_1 \cdot a_1 o \cdot \frac{z_1}{a_1 o} + P_2 \cdot a_2 o \cdot \frac{z_2}{a_2 o}$$

или:

$$Rz = P_1 z_1 + P_2 z_2.$$

Ако буде још које паралелне силе P_3 или у опште P_n с нападним тачкама a_3 или a_n и одстојањима $z_3 \cdot \cdot \cdot z_n$ од равни XmY, онда би била општа једначина:

$$Rz = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \cdot \cdot \cdot P_n z_n = \Sigma (Pz).$$

Кад су нападне тачке паралелних сила: P_1 P_2 $P_3 \cdot \cdot \cdot P_n$ и њихове резултанте удаљене од равни ZmY за $x_1 x_2 x_3 \cdot \cdot \cdot x_n$ онда ће на исти начин бити:

$$Rx = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdot \cdot \cdot P_n x_n = \Sigma (Px).$$

Исто тако за одстојања $y_1 y_2 y_3 \cdot \cdot \cdot y_n$ тих нападних тачака од ZmX биће:

$$Ry = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \cdot \cdot \cdot P_n y_n = \Sigma (Py).$$

Пошто је овде свуда:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdot \cdot \cdot P_n = \Sigma (P)$$

онда су координате нападне тачке резултантине:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\Sigma (Px)}{\Sigma (P)} \\ y &= \frac{\Sigma (Py)}{\Sigma (P)} \\ z &= \frac{\Sigma (Pz)}{\Sigma (P)} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (165$$

т. ј. *остојање нападне тачке резултанте паралелних сила од ма које равни, равно је алгебарској суми статичких момената датих сила, а односно те равни, подељеној алгебарском сумом тих сила.*

345. Нападна тачка резултанте паралелних сила, која се одређује тим једначинама, зове се *средиште паралелних сила.*

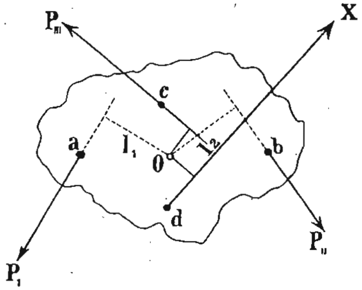
Ако се деси да су све паралелне силе још и међу собом једнаке, онда имамо:

$$x = \frac{P (x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot x_n)}{n\ P} =$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot x_n}{n} = \frac{\Sigma (x)}{n} \\ y &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdot \cdot \cdot y_n}{n} = \frac{\Sigma (y)}{n} \\ z &= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \cdot \cdot \cdot z_n}{n} = \frac{\Sigma (z)}{n}. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (165'$$

А то значи да су у том случају координате средишта паралелних сила равне просто аритметичкој средњој вредности појединих одстојања. У том специјалном случају средиште паралелних сила зове се *средиште средњих одстојања.*

346. *Примери.* У тачкама a, b, c (сл. 31.) некога тела дејствују силе $P_1 = 30$, $P_2 = 50$, $P_3 = 40$ кгр. и то на крацима $l_1 = 5$, $l_2 = 7$, $l_3 = 1$ мет. рачунато од тачке O као средишта око кога све силе теже да тело окрену. Колика треба да је сила X, која ће нападајући у тачки d и с краком $l = 2$ м. потрти дејство датих сила?



Сл. 31.

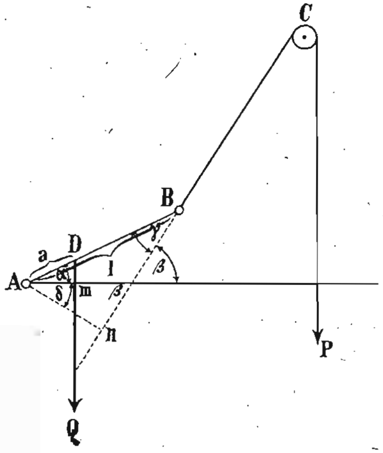
Пошто знамо да је моменат резултанте раван суми момената компонената биће:

$$30 \cdot 5 + 40 \cdot 1 + 2\,X = 50 \cdot 7$$

$$2\,X = 160$$

$$X = 80 \text{ кгр.}$$

2. Један прут дужине $l = 60$ см. може се око тачке A (сл. 32.) окретати. За други крај прута утврђено је уже, пребачено преко котура, а носи терет P. Тражи се услов за равнотежу, кад на даљини $a = 28$ см од утврђеног краја дејствује отпор $Q = 400$ кгр., тако да и P и Q дејствују вертикално.



Сл. 32.

Нека су још углови:

$$\alpha = 25^0 \quad \beta = 60^0.$$

Отпор је Q а његов крак Am; према томе статички моменат:

$$\mathfrak{M}_1 = Q \cdot Am = Q \cdot a \cdot \cos \alpha.$$

Непозната снага је P, њен је крак An а моменат:

$$\mathfrak{M}_2 = P\,An = Pl \sin \gamma.$$

Услови су:

$$\gamma = 90^0 - (\alpha + \delta) = 90^0 - (\alpha + 90 - \beta) = \beta - \alpha.$$

И онда:

$$\mathfrak{M}_2 = P \cdot l \cdot \sin(\beta - \alpha).$$

За равнотежу мора бити:

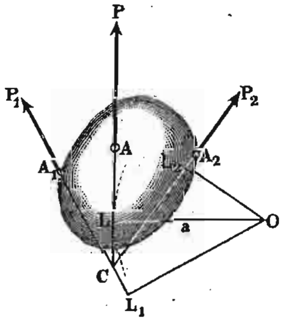
$$P\,l \sin(\beta - \alpha) = Q \cdot a \cos \alpha$$

или:

$$P = \frac{Q \cdot a \cos \alpha}{l \sin(\beta - \alpha)} = \frac{400 \cdot 28 \cdot \cos 25^0}{60 \sin(60 - 25)} = 295 \text{ кграма.}$$

347. Примена статичких момената. — Правила о слагању статичких момената у равни и простору дају се врло згодно применити на одређивање нападне тачке сила с разним нападним тачкама, било у равни било у простору, и која нам је тачка код ранијих примера остала неодређена.

Нека су нам дате две силе P_1 и P_2 (сл. 33.) да дејствују на неко чврсто тело у нападним тачкама A_1 и A_2, и то тако да силе нису међу собом паралелне, али да леже у истој равни. Видели смо напред како ћемо их сложити по паралелограму сила у резултанту P.



Сл. 33.

На тај врло прост начин одређена је резултанта, али само по правцу и величини; њена нападна тачка је непозната. Да бисмо и њу одредили, послужићемо се правилом о слагању статичких момената. Узећемо у истој равни а изван сила тачку O, која ће бити средиште момента и из које ћемо спустити управне на силе и резултанту, т. ј. одредити краке тих сила. Према ранијем имамо:

$$Pl = P_1\,l_1 + P_2\,l_2$$

кад решимо једначину по l, добићемо нападну тачку L резултанте:

$$l = \frac{P_1\,l_1 + P_2\,l_2}{P_1 + P_2}.$$

Другим речима: Нападна тачка резултанте биће она тачка, у којој та резултанта повучена из тачке C

тангира круг, описан полупречником l. Пошто се из тачке C могу повући две тангенте, то ће смисао датих сила одредити, коју ћемо од њих двеју узети за резултанту.

Саму величину резултанте одредићемо по већ познатом обрасцу:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\, P_1\, P_2 \cos\alpha},$$

а тако исто и угао α_1 који резултанта заклапа на пример са силом P_1 из обрасца:

$$\sin\alpha_1 = \frac{P_2 \sin\alpha}{P}.$$

III.

О спреговима.

348. Спрегнуте силе. — Кад смо тражили резултанту двеју паралелних сила које нападају у разним тачкама и у супротном смислу, нашли смо да је та резултанта (в. слику 16):

$$R = P - Q.$$

Одстојање њене нападне тачке c добили смо из сразмере:

$$Q : R = ac : ab$$

$$ac = \frac{Q \cdot ab}{R}.$$

Ако специјалишемо задатак, узевши две *једнаке* паралелне силе супротног смисла, онда је:

$$R = 0$$

и

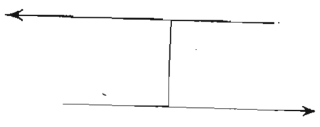
$$ac = \frac{Q\, ab}{o} = \infty.$$

У том случају резултанта је равна нули, а њена нападна тачка је у бескрајности; то ће рећи, да ту нема резултанте.

Сваке две једнаке и антипаралелне силе с разним нападним тачкама зову се *спрегнуте силе* или просто *спрег.*

Дејство једног спрега такво је, да тежи да *обрне* или да *окрене* тело око себе самог, не крећући га у простору.

Најкраће одстојање између такве две спрегнуте силе (сл. 34.) зове се *крак* или *ширина спрега.*



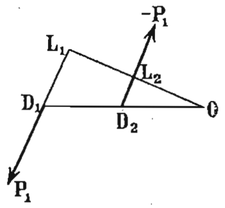
Сл. 34.

Производ једне спрегнуте силе и крака спрега зове се *моменат спрега*, и он служи као мерило дејства спрега. Ако силу означимо с P а крак са a, моменат спрега биће:

$$\mathfrak{M} = Pa \quad \ldots\ldots\ldots \quad (166$$

349. *Моменат спрега раван је алгебарском збиру момената обеју сила које сачињавају спрег*, и то према некој тачки ван самога спрега или у спрегу.

Јер рецимо да смо узели као средиште момената тачку O (сл. 35.) која лежи ван сила спрега $P_1 - P_1$. И онда, ако је моменат једне силе положан, моменат оне друге мора бити одречан. Спустимо из O управну $OL_2\, L_1$ па имамо моменат силе $+ P_1$ да је $P_1 \times L_1 O$ а силе $- P_1$ биће $- P_1 \times L_2\, O$; збир та два момента је:



Сл. 35.

$$P_1 \times L_1 O - P_1 \times L_2\, O = P_1 \times L_1\, L_2 = P_1\, a.$$

Рецимо да смо узели тачку O_1 у самом спрегу, дакле између сила, онда ће оба момента бити истога знака. Вредност једнога спрега биће $P_1 \times L_1\, O_1$ а. другога $P_1 \times L_2\, O_1$. Збир њихов:

$$P_1 \cdot L_1\, O_1 + P_1 \cdot L_2\, O_1 = P_1 \cdot L_1\, L_2 = P_1\, a.$$

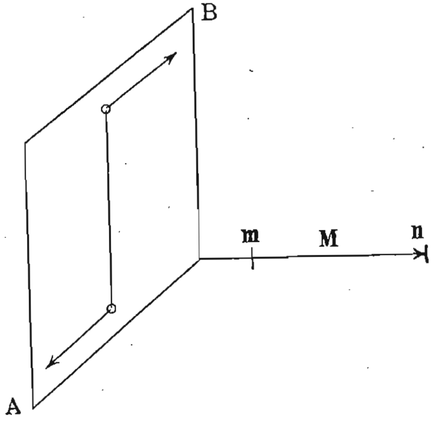
Дакле, у оба случаја збир момената обеју сила у спрегу раван је самом моменту спрега.

350. Према начину, како су спрегнуте две силе, један спрег може обртати у једном или у другом смислу. Стога се сва обртања спрегова деле на положна и одречна. Они спрегови који окрећу у оном смислу у ком иду казаљке на сату зову се *положни* или *десни спрегови*, а они који у супротном смислу окрећу зову се *одречни* или *леви*.

Према томе горњи спрег био би одречан.

Обе силе које сачињавају спрег морају бити у једној равни, и та се раван зове *раван спрега*. Спрег тежи увек да цело тело окрене у тој равни.

Подигнимо једну управну на ту раван, и то на ону страну с које стране тај спрег посматран окреће у положном правцу т. ј. с лева на десно. На пример имамо спрег у равни *AB* (сл. 36.); ми ћемо на ту раван



Сл. 36.

подићи управну и то у правцу према *n*, јер спрег гледан из *n* окреће на десно т. ј. у смислу казаљака на сату. Дужину те управне узећемо толику колики је моменат спрега. Та управна на раван спрега, по дужини равна моменту спрега, зове се *оса* спрега.

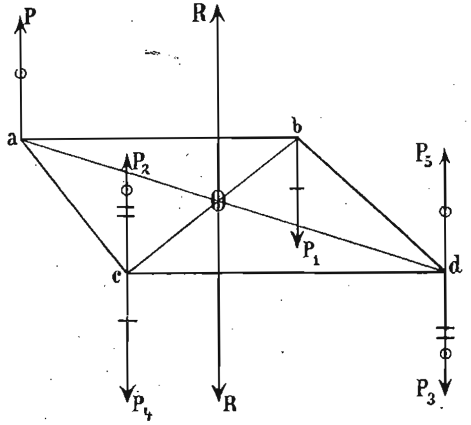
Величина, правац и смисао осе потпуно одређују величину и смисао самога спрега, па зато можемо спрегове представљати линијама као и просте силе.

Уз то још имамо да додамо, да се та управна која се зове оса спрега може подићи ма у којој тачки саме равни, само увек на ону страну с које спрег гледан, окреће положно.

И обратно, кад имамо осу спрега, ми смо у стању наћи и раван и смисао самога спрега. Ми ћемо кроз крајњу тачку осе провући једну раван, управну на њу, и у тој равни узети један спрег који окреће с лева на десно.

351. Премештање спрегова. — Сваки се спрег може без икакве промене у моменту премештати паралелно самом себи, и то како у истој равни тако и ван ње, с претпоставком да се нове нападне тачке спрега налазе на истом чврстом систему или телу.

Нека је *ab* (сл. 37.) крак спрега (P, — P_1), који је у равни хартије. Кад тај спрег паралелно самом себи



Сл. 37.

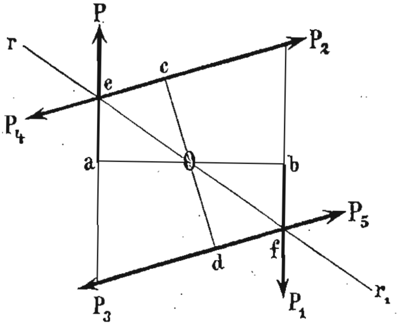
преместимо у истој равни, добићемо на пример (P_2, — P_3) с краком *cd*. Крак *cd* са спрегом (P_2 — P_3) може лежати и изван равни ове хартије, само ако је с том равни у чврстој вези. Додајмо у *c* силу — P_4 а у *d* силу + P_5 по величини једнаке са P_2 и P_3 и с њима паралелне; оне ће образовати нов спрег на истом краку *cd* који ће потрти дејство спрега P_2, — P_3 јер се P_2 и — P_4 а тако исто и P_5 и — P_3 узајамно потиру, те се дакле у целом систему неће ништа изменити.

Међутим је *abcd* паралелограм чије се дијагонале узајамно полове у O; стога можемо обе паралелне силе $+ P$ и $+ P_5$ сложити у резултанту R с нападном тачком у O, а тако исто и P_1 и P_4 сложити у R. И ове се две резултанте узајамно потиру као једнаке и супротно означене.

Остаје нам само спрег $(P_2, - P_3)$ који је по дејству сасвим једнак првобитном спрегу $(P, - P_1)$. Дакле са паралелним премештањем некога спрега, било у истој равни или не, ни у колико се његово дејство не мења.

352. Исто се тако може један спрег без икакве промене свог момента око средине свог крака или око своје осе а у његовој равни окренути за ма колики угао, с поставком да се нове нападне тачке налазе на истом чврстом телу.

Нека нам је дат спрег $(P, - P_1)$ на краку *ab* (сл. 38.) па ми тај крак око средине његове O, окренемо и доведемо у положај *cd*. У *c* повуцимо две једнаке и супротне силе P_2 и P_4 а у *d* друге две исто такве силе P_3 и P_5 а сваку од њих једнаку по величини с P или с P_1. Тачке *c* и *d* остаће у равнотежи. Али пошто се у *e* силе P, и P_4 секу, можемо их сложити у неку резултанту r, а исто тако и оне две силе што се секу у *f* даће нам резултанту r, које су обе једнаке по величини и правцу, али су супротног смисла, јер линија *ef* полови угао *cOa* и *bOd*.



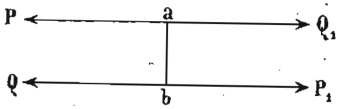
Сл. 38.

Због тога ће се r и r_1 потрти и остати у дејству само спрег $(P_2, - P_3)$ на краку *cd* који ће, ма да је скренут за угао *aOc*, имати исти моменат који и првобитни спрег $(P, - P_1)$.

353. **Равнотежа спрегова који су у истој равни.** — Што се тиче равнотеже два спрега у једној истој равни могу наступити два случаја: или су краци оба спрега једнака или су ти краци неједнаки.

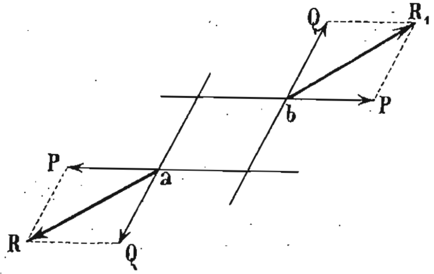
Кад су краци спрегова једнаки, могу наступити ови случајеви:

a. Правци сила појединих спрегова су исти. На пример спрег $(P, - P_1)$ и $(Q, - Q_1)$ (сл. 39.) који имају исти крак $ab = c$ а чије силе иду истим правцима али у супротном смислу. По себи се разуме да ће таква два спрега бити у равнотежи, кад буде $P = Q$, пошто је крак заједнички.



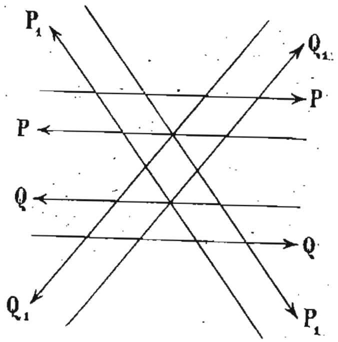
Сл. 39.

b. Кад правци сила у споеговима нису исти, онда ће се оне довољно продужене сећи и кад их у пресечним тачкама сложимо добићемо по један ромб, јер знамо да су силе оба спрега исте величине, па дакле и краци су им исти. Обе силе које дејствују у *a* (сл. 40.) даће резултанту R а оне у b резултанту R_1 и обе ће бити истог правца и једнаке по величини. Пошто се такве две резултанте потиру, то следује да ће се и дејства датих спрегова потирати.



Сл. 40.

c. Нека су оба једнака спрега паралелна, они ће опет бити у равнотежи. Јер ми можемо замислити да је спрег $(Q, - Q)$ (сл. 41.) био истога правца са спрегом $(P, - P)$ као и код *a*, па да смо га паралелно самом себи преместили, пошто знамо да се тиме његово дејство није променило. Или још можемо узети да су оба спрега била укрштена као код *b*, па да смо један од њих толико око средине његовог крака окренули

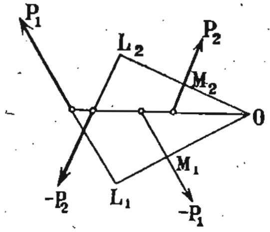


Сл. 41.

док није постао паралелан са оним другим. Ни тиме се дејство његово није ништа променило, па дакле и ова су два једнака а паралелна спрега у равнотежи.

Из свега тога следује *да сам положај два спрега у једној равни ни у колико не утиче на њихово дејство, па дакле да можемо сваки спрег у тој равни премештати како хоћемо.*

354. *Равнотежа спрегова разних кракова.* — Узмимо два ма каква спрега у једној равни, чији су и краци а и силе различне, па потражимо услове за равнотежу. Нека су то спрегови $(P_1, -P_1)$ и $(P_2, -P_2)$ (сл. 42.). Из тачке O спустимо управне OL_2 OL_1 на оба спрега; онда знамо, да за равнотежу мора алгебарска сума статичких момената свију тих сила бити равна нули. Ако краткоће ради ставимо краке спрегова:



Сл. 42.

$$L_1 M_1 = a, \quad \text{и} \quad L_2 M_2 = b$$

онда ћемо имати за равнотежу:

$$P_1 \overline{L_1 O} - P_1 \overline{M_1 O} - P_2 \overline{L_2 O} + P_2 \overline{M_2 O} = O$$

$$P_1 \overline{L_1 O} - P_1 (\overline{L_1 O} - \overline{L_1 M_1}) - P_2 \overline{L_2 O} + P_2 (\overline{L_2 O} - \overline{L_2 M_2}) \;;$$

пошто сведемо:

$$P_1 \overline{L_1 M_1} = P_2 \overline{L_2 M_2} \text{ или } P_1 a = P_2 b. \quad \cdot \quad (167$$

Дакле, ма каква два спрега који су у једној равни биће у равнотежи, кад су им моменти једнаки.

355. **Свођење спрегова.** — На основу мало час нађеног закона за равнотежу два спрега, ми можемо разним спреговима по вољи и по потреби мењати или краке или спрегнуте силе, па да се опет дејство њихово не промени; другим речима, ми можемо сводити спрегове, кад се само држимо правила, да моменат новога спрега буде исти са старим.

Нека нам је дат спрег $(P, -P)$ с краком $= a$, т. ј. с моментом Pa, па смо ради да његове силе пренесемо или сведемо на крак b, а да се дејство његово не промени. На краку b ваља да дејствује нека непозната сила Q, па да с датим спрегом Pa буде истог дејства, и то тако да постоји једначина:

$$Pa = Qb\;;$$

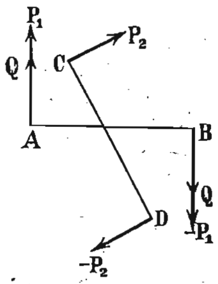
из те једначине можемо одредити непознату силу:

$$Q = \frac{Pa}{b}.$$

Ми смо дакле спрег $(P, -P)$ с крака a *свели* на крак b, спрегом $(Q - Q)$.

356. **Слагање спрегова.** — Према овоме што смо мало час нашли, можемо разне спрегове да сводимо на један исти крак, па да место свију њих нађемо само један, који ће имати дати крак, и који ће по дејству бити једнак с датим спреговима. Другим речима, ми можемо разне спрегове *слагати* у један резултујући спрег.

Дат нам је спрег $(P_1, -P_1)$ (сл. 43.) с краком $AB = a$ и спрег $(P_2, -P_2)$ с краком $CD = b$, па хоћемо да сложимо та два спрега да имају заједнички крак $AB = a$ и да нађемо резултујући спрег.



Сл. 43.

То ћемо слагање да извршимо, кад спрег $(P_2, -P_2)$ с крака b сведемо на крак a. На краку a дејствоваће неки спрег $(Q, -Q)$ и то тако да буде:

$$Qa = P_2 b \quad \text{одакле} \quad Q = \frac{P_2 b}{a}.$$

На краку a имамо сад два спрега, $(P, -P_1)$ и $(Q, -Q)$.

Једна спрегнута сила резултујућега спрега биће очевидно:

$$R = P_1 + Q = P_1 + \frac{P_2 b}{a}$$

а моменат резултујућег спрега:

$$Ra = (P_1 + Q)\,a = P_1\,a + P_2\,b.$$

Исто тако рецимо да имамо још један спрег $(P_3, -P_3)$ с краком c дакле с моментом $P_3\,c$, па и њега хоћемо да сведемо на крак a.

Сад ћемо добити неки нов спрег $(Q_1, -Q_1)$, за који вреди опет закон да:

$$Q_1\,a = P_3\,c,$$

одакле је непозната:

$$Q_1 = \frac{P_3\,c}{a}.$$

Једна спрегнута сила резултујућег спрега биће сад:

$$P_1 + Q + Q_1 = P_1 + \frac{P_2\,b}{a} + \frac{P_3\,c}{a}$$

а моменат његов:

$$(P_1 + Q + Q_1)\,a = P_1\,a + P_2\,b + P_3\,c.$$

Слагањем само та три спрега можемо већ наћи закон за слагање ма колико броја спрегова у једној равни и то:

Моменат резултујућег спрега мора бити раван алгебарском збиру момената датих спрегова.

У опште дакле:

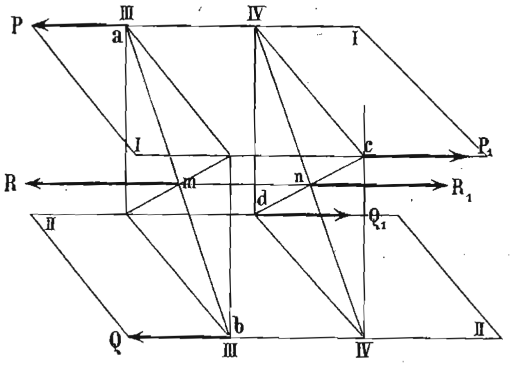
$$(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots P_n)\,a =$$

$$= P_1\,a_1 + P_2\,a_2 + P_3\,a_3 + \cdots P_n\,a_n,$$

или:

$$Ra = a\,\Sigma(P) = \Sigma(Pa) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (168$$

357. Равнотежа спрегова у паралелним равнима. — Рецимо да имамо у двема, чврсто спојеним паралелним равнима I и II (сл. 44.) два спрега $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$.



Сл. 44.

Ако сведемо оба спрега на исту ширину обе равни, онда, пошто су за равнотежу моменти оба спрега једнаки, и поједине спрегнуте силе морају бити међу собом једнаке.

Пресецимо паралелне равни I и II другим двема паралелним равнима III и IV (које ће на првима стајати управно) и то у нападним тачкама појединих спрегнутих сила. Кад у овим последњим равнима повучемо дијагонале, добићемо да на дијагонали ab дејствују две једнаке паралелне силе $-P$ и $-Q$, које сложене дају резултанту:

$$-R = -P - Q = -2\,P.$$

Исто тако на дијагонали cd дају једнаке и паралелне силе P и Q резултанту:

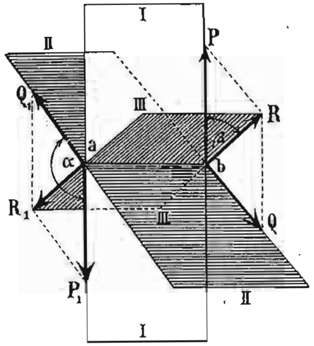
$$R = P + Q = 2\,P.$$

Обе су резултанте једнаке и супротног смисла, па се стога потиру. Пошто су те резултанте постале из датих спрегова, то су очевидно и дата два једнака спрега а у паралелним равнима такође у равнотежи.

Дакле, *два једнака спрега, било да су у једној равни или у паралелним равнима, биће у равнотежи, кад су им моменти једнаки.*

По себи се разуме, да ће све оно, што смо нашли за свођење и слагање спрегова у једној равни, вредети и за свођење и слагање спрегова у паралелним равнима.

358. **Спрегови у непаралелним равнима.** — Дата су два спрега ($P, -P$) и ($Q, -Q$) (сл. 45.) у двема равнима I и II, које се међу собом укрштају под углом α и довољно продужене секу по правој $ab = l$. Тражи се услов за равнотежу таква два укрштена спрега.



Сл. 45.

Ми ћемо пре свега оба та спрега довести на заједнички крак $ab = l$, тако да буде:

$$Pa = P_1\, l \quad \text{и} \quad Qb = Q_1\, l.$$

На тај начин добивамо у a и b по две силе под углом које можемо по паралелограму сложити у резултанте $-R_1$ и R_1, које су међу собом једнаке и паралелне али супротног смисла, те према томе праве резултујући спрег ($R, -R_1$) са осом $l = ab$ чији је моменат:

$$M = Rl.$$

Овај резултујући спрег лежи у равни III, која има заједничку пресечну линију с датим равнима I и II, и која исте углове с тим равнима заклапа, које заклапају и силе P_1 и Q_1 са R_1.

Што се тиче бројне вредности резултанте, она је:

$$R = \sqrt{P_1^{\,2} + Q_1^{\,2} + 2\, P_1\, Q_1 \cos\alpha}$$

а тако исто и њен нагиб:

$$\sin\beta = \frac{Q_1 \sin\alpha}{R}.$$

Кад целу горњу једначину помножимо са заједничким краком спрегова l, онда ћемо имати бројну вредност момента резултујућег спрега:

$$Rl = \sqrt{(P_1\, l)^2 + (Q_1\, l)^2 + 2\, P_1\, l \cdot Q_1\, l \cdot \cos\alpha.}$$

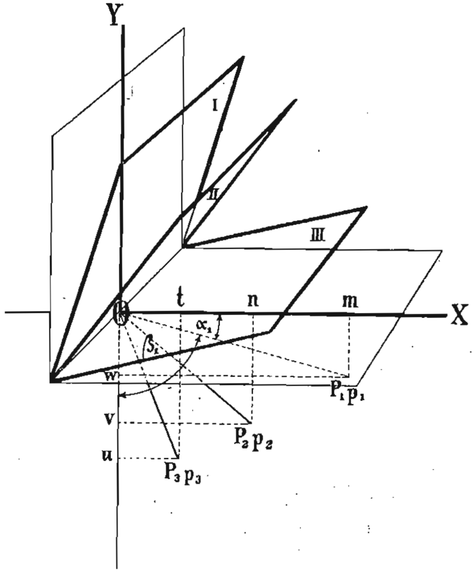
Међутим је $P_1\, l = Pa$ и $Q_1\, l = Qb$, онда ће моменат резултујућег спрега, изражен моментима датих спрегова, бити:

$$Rl = \sqrt{(Pa)^2 + (Qb)^2 + 2\, Pa\, Qb \cos\alpha}$$

а тако исто и угао нагиба резултујућег спрега:

$$\sin\beta = \frac{Qb}{Rl} \sin\alpha.$$

До истог би резултата дошли, и да смо слагали осе спрегова у место самих спрегова.



Сл. 46.

359. Кад имамо више од два спрега у разним непаралелним равнима, најлакше ћемо наћи резултујући

спрег, кад будемо слагали њихове осе (сл. 46). Нека су нам дати спрегови $P_1 p_1$, $P_2 p_2$, $P_3 p_3$, у равнима I, II, III, које се секу по једној линији; ми ћемо ма у којој тачки O те линије подићи управне на сваку раван и у одговарајућем смислу пренети по њима величине момената датих спрегова, те тако добити осе $m_1\, m_2\, m_3$. Све ће те осе лежати у једној равни. Кроз исту ћемо тачку O провући раван координатни систем XY, а у равни у којој се налазе саме осе, па ћемо сваку од тих оса разложити на одговарајуће две компоненте. Ако још са $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_3 \cdot \cdot \cdot$ означимо углове оса спрегова с координатним осама, онда знамо да ће компоненте оса спрегова бити:

$$m_{x1}=m_1 \cos\alpha_1=P_1\, p_1 \cos\alpha_1\,;\;\; m_{y1}=m_1 \cos\beta_1=P_1\, p_1 \cos\beta_1$$

$$m_{x2}=m_2 \cos\alpha_2=P_2\, p_2 \cos\alpha_2\,;\;\; m_{y2}=m_2 \cos\beta_2=P_2\, p_2 \cos\beta_2$$

$$m_{x3}=m_3 \cos\alpha_3=P_3\, p_3 \cos\alpha_3\,;\;\; m_{y3}=m_3 \cos\beta_3=P_3\, p_3 \cos\beta_3.$$

. . . .

. . . .

Збир компонената правцем осе X биће:

$$\mathfrak{M}_x = m_{x1} + m_{x2} + m_{x3} + \cdot \cdot \cdot\, m_{xn} \cdot \cdot \cdot = \Sigma\,(m_x)$$

$$= m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2 + \cdot \cdot \cdot\, m_n \cos\alpha_n = \Sigma\,(m \cos\alpha)$$

$$= P_1 p_1 \cos\alpha_1 + P_2 p_2 \cos\alpha_2 + \cdot \cdot \cdot\, P_n p_n \cos\alpha_n =$$

$$= \Sigma\,(Pp \cos\alpha).$$

Исто тако збир компонената правцем осе Y биће:

$$\mathfrak{M}_y = m_{y1} + m_{y2} + m_{y3} + \cdot \cdot \cdot\, m_{yn} \cdot \cdot \cdot = \Sigma\,(m_y)$$

$$= m_1 \cos\beta_1 + m_2 \cos\beta_2 + \cdot \cdot\, m_n \cos\beta_n = \Sigma\,(m \cos\beta)$$

$$= P_1 p_1 \cos\beta_1 + P_2 p_2 \cos\beta_2 + \cdot \cdot \cdot\, P_n p_n \cos\beta_n =$$

$$= \Sigma\,(Pp \cos\beta).$$

Одавде можемо одредити моменат резултујућег спрега или резултујућу осу спрега:

$$\mathfrak{M} = Rl = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2} =$$

$$= \sqrt{\Sigma\,(Pp \cos\alpha)^2 + \Sigma\,(Pp \cos\beta)^2}.$$

Ако су углови које ова оса заклапа с координатним осама φ и ψ, онда је:

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} \quad \text{и} \quad \cos\psi = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}}.$$

По себи се разуме да се резултујући спрег налази у равни, управној на резултујућу осу. Смисао спрега дат је смислом резултујуће осе.

360. Ако напослетку имамо спрегова у разним равнима у простору, онда ћемо поступити као и код слагања сила у простору, које све потичу из једне тачке. Јер замислимо сваку раван спрега померену паралелно самој себи дотле, док све не прођу кроз једну исту тачку (знајући да се тиме дејство спрега ни у колико не мења), онда ћемо у тој тачки подићи на раван свакога спрега по једну управну. На тај начин добићемо онолико оса спрегова, колико имамо и самих спрегова, и све ће те осе полазити из једне исте тачке у свима могућим правцима. Кроз исту ћемо тачку провући и правоугли координатни систем у простору и сваку ћемо осу разложити на њене три компоненте правцем трију оса.

Ако су $m_1 = P_1\, a_1$, $m_2 = P_2\, a_2$, $m_3 = P_3\, a_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\, m_n = P_n\, a_n$ моменти датих спрегова а у исти мах и њихове осе, и ако те осе с трима координатним осама заклапају углове $\lambda_1\, \mu_1\, \nu_1$, $\lambda_2\, \mu_2\, \nu_2 \cdot \cdot \cdot : \lambda_n\, \mu_n\, \nu_n$, онда ће њихове правоугле компоненте бити:

$$\mathfrak{M}_{x1} = \mathfrak{M}_1 \cos\lambda_1,\;\; \mathfrak{M}_{y1} = \mathfrak{M}_1 \cos\mu_1,\;\; \mathfrak{M}_{z1} = \mathfrak{M}_1 \cos\nu_1$$

$$\mathfrak{M}_{x2} = \mathfrak{M}_2 \cos\lambda_2,\;\; \mathfrak{M}_{y2} = \mathfrak{M}_2 \cos\mu_2,\;\; \mathfrak{M}_{z2} = \mathfrak{M}_2 \cos\nu_2$$

$$\mathfrak{M}_{xn} = \mathfrak{M}_n \cos\lambda_n,\;\; \mathfrak{M}_{yn} = \mathfrak{M}_n \cos\mu_n,\;\; \mathfrak{M}_{zn} = \mathfrak{M}_n \cos\nu_n.$$

Збир компонената правцем трију оса биће:

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma\,(m_x) = \Sigma\,(m \cos \lambda) = \Sigma\,(Pa \cos \lambda)$$

$$\mathfrak{M}_y = \Sigma\,(m_y) = \Sigma\,(m \cos \mu) = \Sigma\,(Pa \cos \mu)$$

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma\,(m_z) = \Sigma\,(m \cos \nu) = \Sigma\,(Pa \cos \nu).$$

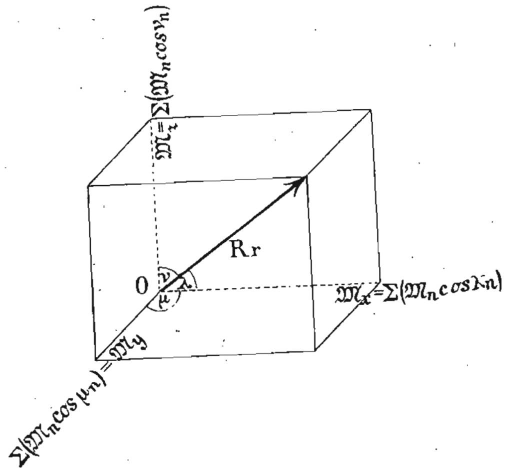
Осу пак резултујућег спрега, $\mathfrak{M} = Rr$ (сл. 47) или његов моменат добивамо или из паралелопипеда оса или из једначине:

$$\mathfrak{M} = Rr = \sqrt{\mathfrak{M}_x^{\,2} + \mathfrak{M}_y^{\,2} + \mathfrak{M}_z^{\,2}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (169$$

а углове резултујуће осе $\mathfrak{M} = Rr$ с трима кординатним осама одредићемо из образаца:

$$\cos \lambda = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}},\ \cos \mu = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}},\ \cos \nu = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}}. \quad \cdot \cdot (170$$

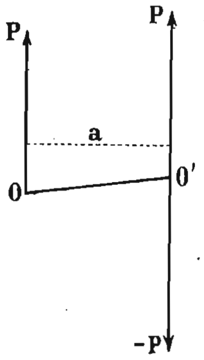
Из свега овога видимо, да спрегове, кад их представимо њиховим осама, можемо слагати и разлагати по свима оним правилима по којима слажемо и разлажемо силе. Сами пак резултујући спрег наћи ћемо,



Сл. 47.

кад на резултујућу осу подигнемо управну раван и у њој повучемо спрег, тако да гледан с врха осе окреће као казаљке на сату.

361. Премештање сила. — Поред тога што ћемо помоћу спрегова моћи врло лако да решавамо многе задатке добили смо још и то врло важно помоћно средство у механици, што опет помоћу спрегова можемо да *премештамо силе* самима себи паралелно по простору. Ево како долазимо до тога.



Сл. 48.

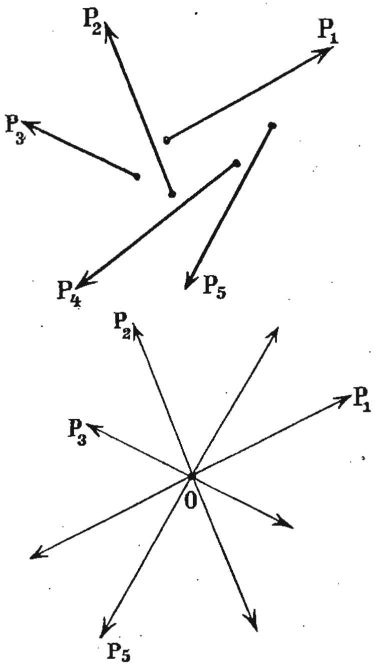
Дата је нека сила P (сл. 48.) с нападном тачком у O, па се тражи да је пренесемо самој себи паралелно у тачку O'.

То ћемо премештање извршити, кад у тачки O' повучемо две силе $+P$ и $-P$, обе једнаке по величини с датом силом, обе паралелне са њом по правцу, али једна истога а друга супротног смисла с датом силом. Тиме није ни уколико измењено стање тачке O', пошто се $+P$ и $-P$ узајамно потиру. Али смо место једне једине силе OP добили свега три, од којих су OP и $-O'P$ спрегнуте међу собом и праве спрег, а само $O'P$ је слободна и тежи да произведе прогресивно кретање, и то онако исто као мало час сама сила OP.

Моменат спрега $(P, -P)$ је Pa, ако са а означимо његов крак, а смисао му је исти који је био моменту силе OP према тачки O' као средишту.

То што вреди за једну силу вредиће и ма за колики број сила, т. ј. ма колики број сила у некоме систему можемо пренети ма у коју тачку простора, самима себи паралелно. Тиме ћемо добити онолико исто нових сила колико нам је дато, али ће оне све имати једну нападну тачку и још онолико исто спрегова, колико је било датих сила.

362. Општи услови за равнотежу сила у простору. — Рецимо да посматрамо један систем сила у простору, који у разним правцима и с разним нападним тачкама дејствује на неко слободно тело. Нека су то силе P_1 P_2 P_3 · · · · P_n. (сл. 49.) Траже се општи услови који треба да буду испуњени, па да цео тај систем сила буде у равнотежи.



Сл. 49.

Узећемо ма где у простору једну тачку O, па ћемо у њу пренети нападне тачке свију датих сила по познатом начину. Тиме ћемо добити n простих сила, које све имају нападну тачку O, и које су по правцу, смислу и величини једнаке са n датих сила, и још n спрегова састављених из толико исто спрегнутих и познатих нам сила. И да бисмо нашли опште услове за равнотежу, треба силе за себе, а спрегове за себе да сложимо у резултујућу силу, односно у резултујући спрег.

Силе ћемо сложити онако, као што смо већ напред видели. На тај начин добићемо резултанту:

$$R = \sqrt{\Sigma\,(P\cos\alpha)^2 + \Sigma\,(P\cos\beta)^2 + \Sigma\,(P\cos\gamma)^2} =$$
$$= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Спрегове који су у разним равнима, сложићемо на начин који смо мало час извели, т. ј. помоћу оса спрегова. Тако ћемо добити осу резултујућег спрега:

$$\mathfrak{M} = Rl = \sqrt{\Sigma\,(Pa\cos\alpha)^2 + \Sigma\,(Pa\cos\beta)^2 + \Sigma\,(Pa\cos\gamma)^2} =$$
$$= \sqrt{\mathfrak{M}_x{}^2 + \mathfrak{M}_y{}^2 + \mathfrak{M}_z{}^2}.$$

По себи се разуме да за општу равнотежу треба да буде:

$$R = O \quad \text{а такође и} \quad \mathfrak{M} = O.$$

Пошто под кореним знацима имамо све квадрате, то, да би се ти услови испунили, ваља сваки члан за се да буде $= O$, т. ј. за општи услов равнотеже сила у простору мора да вреде ових шест једначина:

$$X = \Sigma\,(P\cos\alpha) = 0,\ \ Y = \Sigma\,(P\cos\beta) = 0,$$
$$Z = \Sigma\,(P\cos\gamma) = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (171$$

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma\,(Pa\cos\alpha) = 0,\ \ \mathfrak{M}_y = \Sigma\,(Pa\cos\beta) = 0,$$
$$\mathfrak{M}_z = \Sigma\,(Pa\cos\gamma) = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (172$$

А то ће рећи, да свака од трију резултујућих компонената свију сила а тако исто и свака од трију резултујућих компонената свију оса спрегова мора понаособ бити равна нули. Или још свака од трију ортогоналних пројекција резултанте сила и резултанте оса спрегова мора понаособ бити равна нули.

363. За једно се тело каже да није слободно, кад му извесне везе сметају, да се креће у свима могућим правцима у простору. Такво тело може се обртати или око једне тачке, или око једне осовине.

1. Посматрајмо најпре први случај, где се тело може окретати око једне тачке. Ми ћемо ту тачку узети као тачку редуковања, и у њој ће бити нападна тачка резултанте свију сила R. Та ће резултанта бити потрвена отпором, којим је тело утврђено. Остаје нам само спрег $\mathfrak{M}$ који сâм може окретати тело. И услов за равнотежу јесте тај, да резултујући моменат свију спрегова, или да резултујућа оса спрегова буде равна нули, или још да збирови момената појединих спрегова, узети у правцу трију координатних оса које пролазе кроз утврђену тачку, буде раван нули. Тај је услов изражен у овим једначинама:

$$\mathfrak{M}_x = 0,\ \ \mathfrak{M}_y = 0,\ \ \mathfrak{M}_z = 0.$$

2. Узмимо сад тело које је утврђено у две тачке и које се може окретати само око једне осе, која пролази кроз те две тачке.

Узмимо за почетак координатних оса ма коју тачку те осе, око које се тело може обртати; за осу Z узмимо саму ту осу. Одмах се види, да ће се резултанта R свију сила потрти отпором саме осе. Даље од она три главна збира спрегова (којих осе иду правцима трију координатних оса) из којих је сложен резултујући спрег Rl, онај збир чији спрегови леже у равни YZ (т. ј. чији оса иде правцем осе X) и онај збир чији спрегови леже у равни XZ (т. ј. чија оса иде правцем осе Y) биће потрвен отпором саме осе, и у тим смислима окретање није могуће. Остаје дакле само онај збир, чији спрегови леже у равни XY, т. ј. чија оса иде правцем осе Z, (која није ништа друго до дата оса) који може произвести обртање. И по себи се разуме, да за равнотежу мора тај збир да буде раван нули, т. ј. мора збир оних оса, спрегова које иду правцем осе Z, бити раван нули, дакле мора да буде само:

$$\mathfrak{M}_z = 0.$$

3. Узмимо најзад да је тело утврђено у три тачке које не леже у правој линији; у том је случају свих шест условних једначина испуњено и тело нити се може кретати прогресивно нити се ма око које осе може обртати.

364. Степени слободе и везаности тела. — Сасвим слободно тело може се у три разна правца (који не падају у једну раван) кретати и око три разне осе (које такође не падају у једну раван) обртати.

Систем тачака или тела, чија једна тачка мора остати у једној површини, има пет степена слободе и то два за кретање у тангенцијалној равни на површину и три за обртање око оса које пролазе кроз ту тачку.

Систем, чија једна тачка мора на некој кривој линији остати има само четири степена слободе.

Ако је ма која тачка система утврђена, онда остају само три обртања око оса, које пролазе кроз ту тачку.

Нарочито је важан систем, чије се све тачке паралелно с неком равни могу кретати; такав систем има три степена слободе два за кретање и један за

обртање (око осе која на горњу раван стоји управно). Такав се систем зове *раван систем*.

Систем који се дуж једне осе може кретати има само два степена слободе, а систем с једном утврђеном осовином, као на пр. обична полуга, има само један степен слободе.

Степени слободе одређују број једначина за равнотежу система. Раван систем има само три једначине.

IV.

О тежишту.

А. О тежишту у опште.

365. На сваки молекил једнога тела дејствује земљина провлачна снага и то увек вертикално на ниже, т. ј. према средишту земљином; па како растојања појединих молекила међу собом према врло великој даљини средишта земљиног ишчезавају, сме се узети, да су правци свију привлачења појединих молекила међу собом паралелни. Према томе можемо сваки молекил некога тела замислити као нападну тачку једне силе, чија је величина представљена тежином самога молекила; и пошто правац а и смисао сваке те силе иде вертикално ка средишту земљином, то се по себи разуме да ће сви молекили некога тела бити нападне тачке једног извесног броја паралелних сила.

Означимо величину сваке те поједине паралелне силе, која је у исти мах и тежина самога молекила, са p. Све те силе имају исти смисао, па зато резултанта свију тих молекилских тежина није ништа друго до *тежина* целога тела $= Q$. Међутим по теорији о слагању паралелних сила знамо да је резултанта равна просто суми свију компонената, па зато ће и тежина целога тела Q бити равна суми свију молекилских тежина (p) тога тела, т. ј.:

$$Q = \boldsymbol{\Sigma}(p) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (173$$

Ова резултанта, као и свака друга, мора имати своју нападну тачку. *И нападна тачка резултанте Q,* *т, ј. нападна тачка саме тежине тела, зове се тачка тежишта или просто* **тежиште** *тела. Пошто је свако тело тешко, то свако тело мора имати своју тачку тежишта.*

366. Кад на неко тело дејствује нека сила, која је по величини једнака резултанти молекилских тежина, т. ј. тежини самога тела, једнаког је правца с њом али супротног смисла, онда ће дејство резултанте бити потрвено том силом, и онда се каже да је тело у равнотежи. (То ће бити кад је тело ма на кој начин подупрто). Такво тело не може се кретати прогресивно, нити се може окретати, него ће само моћи притискивати на подлогу снагом једнаком његовој тежини.

Кад тачка тежишта није подупрта, онда ће се она кретати и то увек тако, да ће тежити да заузме најнижи положај према средишту земљином. И такво је снижавање тачке тежишта увек једна врста падања, па ма да се оно не јавља сасвим онако као код слободног падања тела.

Пошто је тежина тела представљена једном јединном силом, чија је нападна тачка у тежишту, то се може замислити, да је тежина целога тела концентрисана у његову тежишту, па место целога тела узимати у рачун само његово тежиште са силом којој је оно нападна тачка.

Кад се једно тело обрне, онда се узајамни положај његових мелекила ни у колико не мења, него само правци елементарних сила (који увек остају вертикални) према извесним спојним линијама које ми замишљамо међу молекилима. Па како место нападне тачке резултанте паралелних сила зависи једино од самих тих сила и од узајамног положаја њихових нападних тачака, а међутим се обртањем тела не мења ни једно ни друго, то следује, да се обртањем тела положај његовог тежишта не мења.

Према свему томе је *тежиште некога тела једна сасвим одређена и непроменљива тачка*, која има врло важну улогу у механици, па зато је потребно да се што подробније упознамо с начинима, на који се она у разним телима одређује.

367. Ми смо већ видели, како се одређује нападна тачка паралелних сила у простору, која се тачка назива *средиште паралелних сила.* И према ономе што смо до сад рекли за тачку тежишта, видимо, да је тежиште некога тела и средиште паралелних молекилских сила тога тела једно и исто, па зато можемо за одређивање тежишта употребити оне исте обрасце, који су нам служили за одређивање средишта паралелних сила. Тамо смо нашли да је *одстојање нападне тачке резултанте паралелних сила ма од које координатне равни равно алгебарском збиру статичких момената датих сила а односно те равни, подељеном алгебарским збиром тих сила (т. ј. резултантом).*

Ако молекилске силе у некоме телу кога тежиште хоћемо одредити, означимо са $p_1\, p_2\, p_3 \cdot \cdot \cdot \cdot p_n$; њихова одстојања од сваке координатне равни правоуглог координатног система у простору означимо са $x_1\, y_1\, z_1,\ x_2\, y_2\, z_2, \cdot \cdot \cdot x_n\, y_n\, z_n$; одстојање тражене тачке тежишта од истих равни са $\xi_0\, \eta_0$ и ξ_0, онда је на основу горњег правила:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3 + \cdot \cdot \cdot\, p_n\, x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdot \cdot \cdot\, p_n} = \frac{\Sigma\,(px)}{\Sigma\,(p)} \\
\eta_0 &= \frac{p_1\, y_1 + p_2\, y_2 + p_3\, y_3 + \cdot \cdot \cdot\, p_n\, y_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdot \cdot \cdot\, p_n} = \frac{\Sigma\,(py)}{\Sigma\,(p)} \\
\xi_0 &= \frac{p_1\, z_1 + p_2\, z_2 + p_3\, z_3 + \cdot \cdot \cdot\, p_n\, z_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdot \cdot \cdot} = \frac{\Sigma\,(pz)}{\Sigma\,(p)}
\end{aligned}\right\} \cdot \cdot (174$$

368. Може се десити, да су нам место елементарних т. ј. молекилских сила $p_1\, p_2 \cdot \cdot \cdot p_3$ познате елементарне масе $m_1\, m_2 \cdot \cdot \cdot m_n$, па се тражи да помоћу њих одредимо нападну тачку резултантину, т. ј. тежиште*).

Ми ћемо замислити да се цело тело прогресивно креће; сваки молекил тела кретаће се истим убрзањем

---

*) Ове масе $m_1\, m_2 \cdot \cdot \cdot m_n$ не морају увек означавати масе молекила, него и масе извесних група молекила, које за се праве целину. Тако на пример неко се тело даје поделити на делове простих геометријских облика којима се тежиште зна. Онда ћемо тежиште целог тела наћи, кад сматрамо те поједине делове као елементарне масе и њихове вредности заменимо у једначинама за координате тежишта. То исто вреди и за елементарне тежине, запремине и т. д. о којима се мало даље говори.

= a, којим се и цело тело т. ј. његово тежиште креће, па како знамо да између силе и убрзања постоји известан сталан однос, то ћемо добити:

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \frac{p_3}{m_3} = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \frac{p_n}{m_n} = a$$

а одавде:

$$p_1 = am_1 \quad p_2 = am_2 \quad p_3 = am_3, \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ p_n = am_n,$$

кад те вредности заменимо у горње једначине:

$$\xi_0 = \frac{am_1 x_1 + am_2 x_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ am_n x_n}{am_1 + am_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ am_n}$$

$$\eta_0 = \frac{am_1 y_1 + am_2 y_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ am_n y_n'}{am_1 + am_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ am_n}$$

$$\zeta_0 = \frac{am_1 z_1 + am_2 z_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ am_n z_n}{am_1 + am_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ am_n}.$$

Или пошто скратимо:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n} = \frac{\Sigma\,(mx)}{\Sigma\,(m)} \\
\eta_0 &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n} = \frac{\Sigma\,(my)}{\Sigma\,(m)} \\
\zeta_0 &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n} = \frac{\Sigma\,(mz)}{\Sigma\,(m)}
\end{aligned}\right\} \cdot\ (175$$

За овај случај где су поједине молекилске силе замењене масама молекила, средиште паралелних сила зове се *средиште масе* самога тела. На основу тога ћемо у будуће, говорећи о маси некога тела, замишљати, да је цела његова маса концентрисана у самом тежишту тога тела.

369. Место паралелних сила, које дејствују на сваки молекил тела, можемо узети у рачун саме тежине свакога молекила $q_1\ q_2\ q_3 \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n$, па тражити координате *средишта тежина*, т. ј. тежишта тела. Масе ћемо заменити тежинама, кад се сетимо да је:

$$m_1 = \frac{q_1}{g}, \quad m_2 = \frac{q_2}{g} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n = \frac{q_n}{g}.$$

Кад те вредности за $m_1\ m_2 \cdot\ \cdot\ \cdot\ m_n$ заменимо, и скратимо, имаћемо координате тачке тежишта:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n x_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n} = \frac{\Sigma\,(qx)}{\Sigma\,(q)} \\
\eta_0 &= \frac{q_1 y_1 + q_2 x_2 + q_3 y_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n y_n}{q_1 + q_2 + q_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n} = \frac{\Sigma\,(qy)}{\Sigma\,(q)} \\
\zeta_0 &= \frac{q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_n z_n + \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n z_n}{q_1 + q_2 + q_3 \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n} = \frac{\Sigma\,(qz)}{\Sigma\,(q)}
\end{aligned}\right\} \cdot\ \cdot\ (176$$

370. Десиће се случај, да су нам познате елементарне запремине $v_1\ v_2\ v_3 \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n$ појединих делова из којих је тело састављено, па се из њих траже координате тежишта. За тај случај преобразићемо горње једначине на овај начин.

Знамо да је тежина некога тела q равна његовој запремини v, помноженој са специфичком тежином σ; онда на основу тога биће:

$$q_1 = v_1\,\sigma, \; q_2 = v_2\,\sigma, \; q_3 = v_3\,\sigma \cdot\ \cdot\ \cdot\ q_n = v_n\,\sigma.$$

Кад елементарне тежине заменимо тим производима из елементарних запремина и спец. тежина, добићемо, после скраћења:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_0 &= \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n x_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n} = \frac{\Sigma\,(vx)}{\Sigma\,(v)} \\
\eta_0 &= \frac{v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n y_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n} = \frac{\Sigma\,(vy)}{\Sigma\,(v)} \\
\zeta_0 &= \frac{v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n z_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ v_n} = \frac{\Sigma\,(vz)}{\Sigma\,(v)}
\end{aligned}\right\} \cdot\ \cdot\ (177$$

371. Често ћемо имати да одредимо тежиште некој површини, коју смо у стању разложити на поједине површине којих тежишта знамо. И за тај посао послужићемо се сличним обрасцима као и за запремине. Јер ако дебљину површине (дебљину замишљамо свуда једнаку) означимо са d, и целу површину S поделимо на елементарне површине $s_1\, s_2\, s_3 \cdot \cdot \cdot s_n$, онда из геометрије знамо да је:

$$v_1 = s_1\, d,\ v_2 = s_2\, d,\ v_3 = s_3\, d \cdot \cdot \cdot v_n = s_n\, d.$$

И кад место запремина уведемо површине помножене с дебљином, имаћемо после скраћења:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{s_1\, x_1 + s_2\, x_2 + s_3\, x_3 + \cdot \cdot \cdot s_n x_n}{s_1 + s_2 + s_3 + \cdot \cdot \cdot s_n} = \frac{\Sigma\,(sx)}{\Sigma\,(s)} \\ \eta_0 &= \frac{s_1\, y_1 + s_2\, y_2 + s_3\, y_3 + \cdot \cdot \cdot s_n y_n}{s_1 + s_2 + s_3 + \cdot \cdot \cdot s_n} = \frac{\Sigma\,(sy)}{\Sigma\,(s)} \\ \zeta_0 &= \frac{s_1\, z_1 + s_2\, z_2 + s_3\, z_3 + \cdot \cdot \cdot s_n\, z_n}{s_1 + s_2 + s_3 + \cdot \cdot \cdot s_n} = \frac{\Sigma\,(sz)}{\Sigma\,(s)} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \ (178$$

372. Напослетку неком линеалном телу можемо одредити тежиште, кад га поделимо на елементарне линијске делове, чија тежишта знамо. И позивајући се на познати однос који постоји између запремине v, дужине l и пресека f, имаћемо:

$$v_1 = fl_1,\ v_2 = fl_2,\ v_3 = fl_3 \cdot \cdot \cdot v_n = fl_n.$$

Кад то заменимо у једначине за запремину, добивамо координате тежишта линијских тела:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{l_1\, x_1 + l_2\, x_2 + l_3\, x_3 + \cdot \cdot \cdot l_n\, x_n}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdot \cdot \cdot l_n} = \frac{\Sigma\,(lx)}{\Sigma\,(l)} \\ \eta_0 &= \frac{l_1\, y_1 + l_2\, y_2 + l_3\, y_3 + \cdot \cdot \cdot l_n\, y_n}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdot \cdot \cdot l_n} = \frac{\Sigma\,(ly)}{\Sigma\,(l)} \\ \zeta_0 &= \frac{l_1\, z_1 + l_2\, z_2 + l_3\, z_3 + \cdot \cdot \cdot l_n\, z_n}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdot \cdot \cdot l_n} = \frac{\Sigma\,(lz)}{\Sigma\,(l)} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \ (179$$

373. Збир свију елементарних сила јесте резултанта паралелних сила, т. ј. $\Sigma\,(p) = P$; збир елементарних маса јесте маса целог тела т. ј. $\Sigma\,(m) = M$; збир елементарних тежина јесте тежина целога тела, т. ј. $\Sigma\,(q) = Q$; збир појединих запремина јесте запремина целог тела $\Sigma\,(v) = V$; збир појединих површина јесте површина целога тела $\Sigma\,(s) = S$; збир појединих дужина износи дужину целога тела, т. ј. $\Sigma\,(l) = L$. На основу тога можемо горње једначине и овако написати:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{\Sigma\,(px)}{P},\ \eta_0 = \frac{\Sigma\,(py)}{P},\ \zeta_0 = \frac{\Sigma\,(pz)}{P} \\ \xi_0 &= \frac{\Sigma\,(mx)}{M},\ \eta_0 = \frac{\Sigma\,(my)}{M},\ \zeta_0 = \frac{\Sigma\,(mz)}{M} \\ \xi_0 &= \frac{\Sigma\,(qx)}{Q},\ \eta_0 = \frac{\Sigma\,(qy)}{Q},\ \zeta_0 = \frac{\Sigma\,(qz)}{Q} \\ \xi_0 &= \frac{\Sigma\,(vx)}{V},\ \eta_0 = \frac{\Sigma\,(vy)}{V},\ \zeta_0 = \frac{\Sigma\,(vz)}{V} \\ \xi_0 &= \frac{\Sigma\,(sx)}{S},\ \eta_0 = \frac{\Sigma\,(sy)}{S},\ \zeta_0 = \frac{\Sigma\,(sz)}{S} \\ \xi_0 &= \frac{\Sigma\,(lx)}{L},\ \eta_0 = \frac{\Sigma\,(ly)}{L},\ \zeta_0 = \frac{\Sigma\,(lz)}{L} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (180$$

Ако дакле хоћемо да одредимо координате тежишта у односу на три правоугле осе некога тела, које се да̂ разложити на мање делове чија тежишта знамо, онда треба помножити масу, или тежину, или запремину, или површину, или дужину, тих појединих делова са одстојањима њихових тежишта од трију координатних равни, па збир сваког тог производа понаособ поделити с целокупном масом, тежином, запремином, површином или дужином тога тела.

374. Ми нисмо ничим ограничили бирање почетка оног координатног система, према коме одређујемо координате тежишта. Па зато ћемо у извесним приликама моћи тај почетак тако да изаберемо, да нам горње једначине испадну што простије.

На пример можемо почетак координатног система изабрати тако, да нам ма која од трију координата буде равна нули. Рецимо да је $\xi_0 = 0$. т. ј. да је:

$$\frac{v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + \cdots v_n z_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdots v_n} = \frac{\Sigma(vz)}{\Sigma(v)} = 0$$

што ће бити онда равно нули кад буде:

$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + \cdots v_n z_n = \Sigma(vz) = 0.$$

Тежиште се онда налази у равни XY, и његово место у тој равни одредићемо из остале две једначине:

$$\xi_0 = \frac{\Sigma(vx)}{\Sigma(v)} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{\Sigma(vy)}{\Sigma(v)}.$$

Таква раван, која пролази кроз тежиште или раван у којој је тежиште, зове се *тешка раван*.

Или можемо наш координатни систем тако изабрати, да нам две координате тежишта буду равне нули, на пример η_0 и ξ_0, т. ј. да буде:

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \cdots v_n y_n = \Sigma(vy) = 0$$

и:

$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + \cdots v_n z_n = \Sigma(vz) = 0$$

онда нам за изналажење тежишта остаје само једна координата:

$$\xi_0 = \frac{\Sigma(vx)}{\Sigma(v)}.$$

Пошто ова једначина представља просто линијску вредност апсцисе тежишта, то значи да се тежиште налази у оној правој, у којој се секу равни XZ и XY, т. ј. у самој оси X а на одстојању ξ_0 од почетка.

Таква линија, која пролази кроз тежиште или линија у којој је тежиште, зове се *тешка линија*.

Напослетку, ако почетак координатног система изберемо тако, да нам све три координате буду равне нули, т. ј. да буде:

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + \cdots v_n x_n = \Sigma(vx) = 0$$

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \cdots v_n y_n = \Sigma(vy) = 0$$

$$v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 + \cdots v_n z_n = \Sigma(vz) = 0$$

онда се тежиште налази у самом почетку координатног система.

Према овоме можемо поставити ова правила:

Кад нађемо да је сума статичких момената односно неке равни равна нули, онда је то **тешка раван.**

Кад је сума статичких момената односно неке линије равна нули, онда је то **тешка линија.**

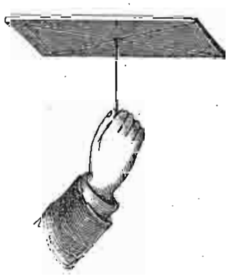
Кад је сума статичких момената односно неке тачке равна нули, онда је то **тачка тежишта тела.**

1. Одређивање тачке тежишта експериментом.

375. Кад какво линијско тело, металну шипку, писаљку, штап и т. д. наслонимо од прилике у средини на оштрицу каквог ножа, после малог огледања моћи ћемо то тело да поставимо у равнотежу; оно ће бити наслоњено у једној тачки и заузеће хоризонталан положај.

На том месту, где се штап или шипка наслања на оштрицу ножа, налази се тачка тежишта целога тела, и ако је тело једне дебљине у целој дужини и свуда једне густине, онда ће тежиште лежати управо у средини.

Према томе *тежиште једне праве линије или хомогеног прута, који је свуда једне дебљине, лежи у средини.*

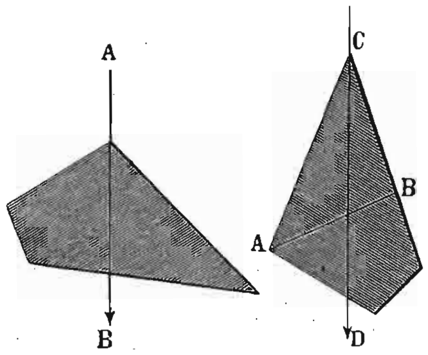


Сл. 50.

Кад наслонимо какву кружну или четвртасту површину на врх игле, (сл. 50.) после кратког огледања моћи ћемо је држати хоризонтално на врху игле. Тачка, у којој су те површине наслоњене на иглу, јесте тачка тежишта тих површина, и биће опет у средини сваке те површине. И тако тежиште једног круга биће у његовом средишту, тежиште паралелограма у пресечној тачки његових дијагонала и т. д., а тако исто тежиште једног паралелопипеда биће у пресечној тачки његових дијагонала, тежиште ваљка у половини његове осе.

То све вреди, ако су линије, површине и тела хомогена.

376. Ако ли пак треба одредити тежиште неправилних површина или таквих чија густина није свуда једнака, дакле нехомогених, онда ваља овако радити. То тело ваља обесити ма о коју његову тачку *A* (сл. 51.) о конац, тако да може слободно да виси; оно ће заузети извесан равнотежни положај. Пошто тежа напада својом нападном тачком у тежишту, то, ако тело не пада, тежина снага биће потрвена отпором конца, чији правац мора ићи правцем теже *AB*, те дакле и кроз тежиште. Према томе, линија која иде у продужењу конца кроз тело, није ништа друго до једна тешка линија.



Сл. 51.

Кад то површинасто тело обесимо о конац у некој другој тачки, на пр. *C* онда ће оно опет заузети извесан равнотежни положај, и правац конца *CD* даће нам сад другу тешку линију. Пошто тачка тежишта мора лежати и у једној и у другој тешкој линији, онда се по себи разуме, да ће бити онде где се те две тешке линије секу.

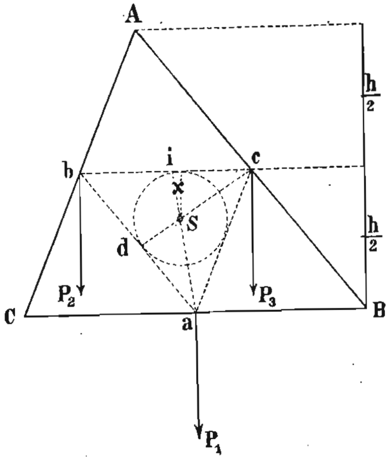
Овде имамо још да додамо, да тежиште код хомогених тела не зависи од масе тела, него једино од његовог геометријског облика. Стога се таква тела могу посматрати с чисто геометријског гледишта, те се може одређивати тежиште геометријских тела, геометријских површина и геометријских линија.

2. Одређивање тежишта рачуном и конструкцијом.

а. Тежиште линија.

377. Тежиште праве линије. — Као што смо мало час видели, тежиште једне праве, хомогене линије пада у средину њену. Јер за сваке две и две материјалне тачке те линије, које подједнако одстоје од средине, тежиште пада, на основу теорије о паралелним силама, у средину. Па како са обе стране средине има подједнак број таквих тачака, то је очевидно, да ће тежиште целе линије пасти у њену средину.

378. Тежиште линијског троугла. — Кад имамо хомогену линију савијену у троугао, онда ћемо тежиште тог обима троугла наћи на овај начин. Тражићемо тежиште сваке стране понаособ, сматрајући их као праве линије; њихова ће тежишта лежати у њиховим срединама: *a*, *b* и *c* (сл. 52.). У тим тачкама су нападне тачке резултаната P_1 P_2 и P_3 сваке те поједине стране. Да би нашли општу резултанту *R* из тих појединих, саставимо на пр. *b* и *c* правом, па ће нападна тачка *i* резултанте под P_2 и P_3 бити:



Сл. 52.

$$bi : ic = P_3 : P_2.$$

Али пошто је:

$$P_3 : P_2 = AB : AC$$

и још:

$$cB = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ као и } bC = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

то је:

$$bi : ic = cB : bC.$$

Пошто је још:

$$\overline{ba} = \overline{cB} \quad \text{и} \quad \overline{ac} = \overline{bC}$$

онда је:

$$bi : ic = P_3 : P_2 = \overline{ba} : \overline{ac}.$$

Кад саставимо *i* са *a*, онда ће линија *ia* преполовити угао *bac*. Пошто је тачка *i* нападна тачка за резултанте сила P_2 и P_3, а тачка *a* нападна тачка силе P_1, то ће очевидно тежиште целе троугласте линије лежати у линији *ia*, пошто она спаја те две нападне тачке.

Као год што смо силе P_2 и P_3 склопили у једну резултанту с нападном тачком у *i*, исто смо тако могли сложити силе P_1 и P_2 у једну резултанту, чија би нападна тачка пала у *d*; онда би из истог разлога као и мало час тежиште целе троугласте линије пало у линију *dc* која полови угао *bca*. Па пошто су *ca* као и *cd* тешке линије, то ће очевидно тежиште тражене троугласте линије пасти у пресек те две тешке линије, т. ј. у тачку *S*, која опет није ништа друго до средиште у троуглу *abc* уписанога круга. Јер из планиметрије знамо, да средиште једног у троуглу уписаног круга пада онде, где се секу линије што полове углове тога троугла.

Одстојање тежишта једне троугласте линије можемо још и на овај начин изразити:

Спустимо из *S* управне *x*, на сваку страну троугла *abc*. Па пошто знамо чему је равна површина свакога троугла *baS*, *bcS* и *acS*, то је цела површина троугла:

$$abc = \frac{1}{2}\, x\, \overline{ab} + \frac{1}{2}\, x\, \overline{ac} + \frac{1}{2}\, x\, \overline{bc}.$$

Међутим знамо да је:

$$\overline{ab} = \frac{1}{2}\, \overline{AB}, \quad \overline{ac} = \frac{1}{2}\, \overline{AC}, \quad \overline{bc} = \frac{1}{2}\, \overline{BC}$$

онда је горња површина троугла:

$$abc = \frac{1}{2}\, x \cdot \frac{1}{2}\, \overline{AB} + \frac{1}{2}\, x \cdot \frac{1}{2}\, \overline{AC} + \frac{1}{2}\, x \cdot \frac{1}{2}\, \overline{BC} =$$

$$= \frac{1}{4}\, x \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}).$$

Садржина површине великог троугла:

$$ABC = BC \cdot \frac{h}{2}$$

и пошто је:

$$\triangle\, ABC = 4\, \triangle\, abc$$

онда је:

$$\triangle\, ABC = 4 \cdot \frac{1}{4}\, x \cdot (\overline{AB} + \overline{Ac} + \overline{Bc}) =$$

$$= x\, (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{Bc}).$$

Означимо обим троугла *ABC* са *O* а садржину површине му са *P*, онда је:

$$P = x \cdot O$$

одакле је одстојање тежишта:

$$x = \frac{P}{O} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (181.$$

379. Тежиште линијског паралелограма. — Како за троугао тако исто можемо одредити и тежиште четири линија које праве паралелограм, јер је тежиште обима једног паралелограма у пресеку оних двеју тешких линија, које везују тежишта две и две паралелне стране паралелограма.

ако за суму појединих страна полигона ставимо његов обим *o*.

Нанадна тачка резултанте R је у S, а њен ћемо моменат наћи помноживши је с краком $OS = Z$ дакле:

$$\mathfrak{M}_1 = RZ = \gamma o \cdot Z$$

за равнотежу тај резултујући моменат мора бити једнак моментима појединих сила, дакле мора бити:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$$

или:

$$\gamma rt = \gamma oz$$

па дакле:

$$rt = oz$$

одакле:

$$z = r\frac{t}{o} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (182$$

Према томе, тежиште једног симетричног дела неког полигона лежи у оси симетрије. Одстојање тачке тежишта од тетиве која спаја крајеве тог дела полигона налазимо, кад полупречник уписаног круга тог полигона помножимо с дужином те тетиве, па тај производ поделимо са обимом тог комада линијског полигона.

382. До истога бисмо резултата дошли, да смо се одмах позвали на општу једначину за одређивање тежишта линеалних тела. И место трију једначина нама овде треба само једна, јер се задатак своди да тражимо у оси симетрије OY одстојање $OS = Z$ те према томе имамо за одредбу тачке тежишта:

$$Z = \frac{l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3 + \cdot \cdot \cdot}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdot \cdot \cdot}$$

$l_1\, l_2\, l_3 \cdot \cdot \cdot$ јесу поједине стране полигона AB, BC, $CD \cdot \cdot \cdot$; $z_1\, z_2\, z_3 \cdot \cdot \cdot$ јесу одстојања тежишта сваке те

стране од осе XX, т. ј. $z_1 = s_1\, p_1$; $z_2 = s_2\, p_2 \cdot \cdot \cdot$ Из сличности троуглова имамо:

$$\frac{l_1}{A'B'} = \frac{r}{z_1}; \ \frac{l_2}{B'C'} = \frac{r}{z_2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

или:

$$l_1\, z_1 = r\,\overline{A_1\, B_1}, \ l_2\, z_2 = r\,\overline{B_1\, C_1} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

па зато ће горња једначина овако изгледати:

$$Z = \frac{r\,\overline{A_1\, B_1} + r\,\overline{B_1\, C_1} + \cdot \cdot \cdot \cdot}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot} =$$

$$= \frac{r\left(\overline{A_1\, B_1} + \overline{B_1\, C_1} + \cdot \cdot \cdot\right)}{l_1 + l_2 + l_3 + \cdot \cdot \cdot} = \frac{r \cdot AG}{\boldsymbol{\Sigma}(l)} = \frac{r \cdot t}{o} \quad \cdot \cdot \quad (182'$$

383. **Тежиште кружног лука.** — Пошто из геометрије знамо да је круг полигон од бескрајно много страна, то ћемо очевидно на један део кружне линије, дакле на кружни лук, моћи применити исти закон за одређивање тежишта, који смо нашли за један симетрични део неког линијског полигона. Ако дакле r значи полупречник датог кружног лука, t дужина тетиве његове, o обим његов или његова дужина, онда је одстојање тежишта од средишта целе кружне линије четврта сразмерна између полупречника r, тетиве t и лука l т. ј.:

$$z : r = t : o$$

или:

$$z = \frac{r \cdot t}{l}$$

где је у место обима o из горњег обрасца дошла дужина лука l.

Ако датом кружном луку одговара средишни угао $= 2\,\varphi$, онда је дужина лука изражена средишним углом:

$$l = r \cdot 2\,\varphi$$

тетива пак:

$$t = 2\, r \sin\varphi$$

те према томе је:

$$z = \frac{r \cdot 2\, r \sin\varphi}{r \cdot 2\,\varphi} = \frac{r \sin\varphi}{\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (183$$

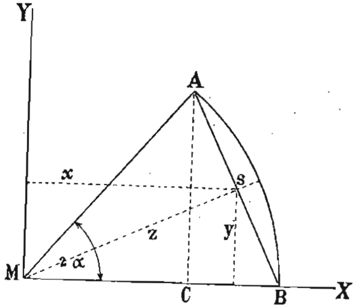
Ако лук износи половину круга, онда је:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

те према томе одстојање тежишта од средишта лука износи:

$$z = \frac{2\, r}{\pi}.$$

Ако би осим одређеног одстојања z тежишта кружног лука од средишта ваљало одредити још и одстојања x и y (сл. 54.) тежишта од координатних оса MX и MY, онда из слике имамо:



Сл. 54.

$$x = z \cos\alpha$$

$$y = z \sin\alpha.$$

Ако заменимо z нађеном вредношћу, имаћемо:

$$x = \frac{r \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\alpha} = \frac{r \sin 2\,\alpha}{2\,\alpha}$$

$$y = \frac{r \sin\alpha \sin\alpha}{\alpha} = \frac{r \sin^2\alpha}{\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (184$$

За полукруг, т. ј. за $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или за $\sin\alpha = 1$ имаћемо:

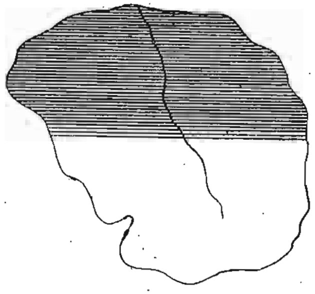
$$z = \frac{2\, r}{\pi}. \quad x = o. \quad y = \frac{2\, r}{\pi}.$$

за четврт круга, т. ј. за $\alpha = \frac{\pi}{4}$. или за $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ биће:

$$x = \frac{2\, r}{\pi}, \quad z = \frac{2\, r \sqrt{2}}{\pi}. \quad y = \frac{2\, r}{\pi}.$$

в. Тежиште површина.

384. Ма каква била површина (сл. 55) којој хоћемо да одредимо тежиште, ми ћемо увек бити у стању да је разложимо ма у ком правцу на све саме паралелне линије. Свакој тој линији, на које смо површину разложили, моћи ћемо према досадањем одредити тежиште; *сљед* тежишта свију тих линија биће опет једна извесна линија, која ће у исти мах бити тешка линија целе површине; њено тежиште биће и тежиште површине.



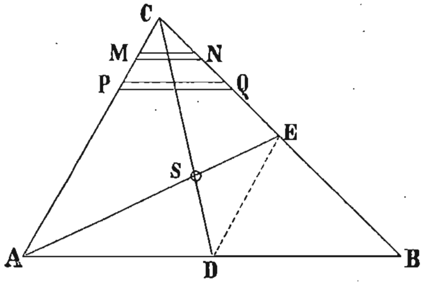
Сл. 55.

Из тог општег посматрања видимо да смо одређивање тежишта површина свели на одређивање тежишта линија.

α. Тежиште равних површина.

385. Тежиште паралелограма. — Тежиште површине у облику паралелограма наћи ћемо, у половини ма које његове тешке линије, коју ћемо лако добити, разложивши паралелограм ма у ком правцу на све саме паралелне линије. Пошто међу свима другим лунијама његове дијагонале могу бити исто тако тешке линије, то је очевидно да ће тежиште паралелограма бити у пресечној тачки његових дијагонала јер из планиметрије знамо да се дијагонале у паралелограму узајамно полове.

386. Тежиште троугласте површине. — Тежиште троугласте површине одредићемо, кад на пример према основици AB (сл. 56.) разложимо троугао на све саме паралелне линије као што су PQ, MN и т. д. и њима одредимо свакој посебице тежиште. Тако ћемо добити тешку линију CD. Кад то исто урадимо према страни BC, добићемо тешку линију AE. Онде где се оне пресеку, т. ј. у S биће тежиште целе површине. Према томе: *Тежиште троугласте површине налази се у пресеку трансверзала, које повучемо из темена до половине наспрамних страна.*



Сл. 56.

Што се тиче места где пада тежиште троугласте површине, одредићемо га на овај прост начин:

Знамо да је $AD = DB = \frac{1}{2} AB$, исто тако:

$$BE = CE = \frac{1}{2} BC$$

онда је и:

$$DE = \frac{1}{2} AC.$$

Из сличности троуглова DSE и ACS имамо:

$$DS : DE = CS : AC \text{ или заменом } 2\,DS = CS$$

кад обема странама ове једначине додамо по DS биће:

$$3\,DS = CS + DS = CD$$

одакле:

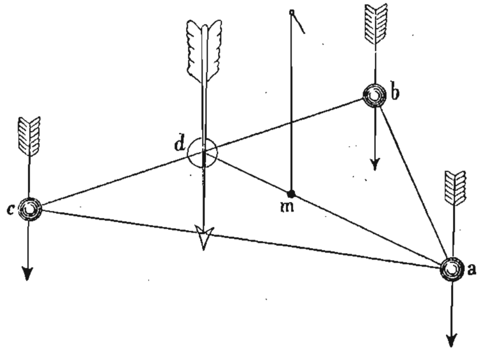
$$DS = \frac{1}{3} CD \qquad \cdots\cdots\cdot (185$$

Пошто је CD једна од трансверзала, т. ј. једна од тешких линија троугла које знамо како можемо повући, онда излази да *тежиште троугла лежи у трећини ма које његове тешке линије, рачунато од основице.*

Повуцимо из C управну на основицу AB, добићемо висину троугла. Исто тако управна спуштена из S на основицу даће нам висину тежишта. Пошто је ова последња управна равна трећини оне прве, то се и *тежиште троугласте површине налази на трећини висине, рачунато од основице.*

387. Тежиште једне троугласте површине пада на исто место, где и тежиште *једног система трију једнаких маса, везаних међу собом, којима засебна тежишта падају у три темена троугла.*

Тога ради замислимо три кугле једнаких тежина Q чија тежишта падају у темена троугла abc (сл. 57.)



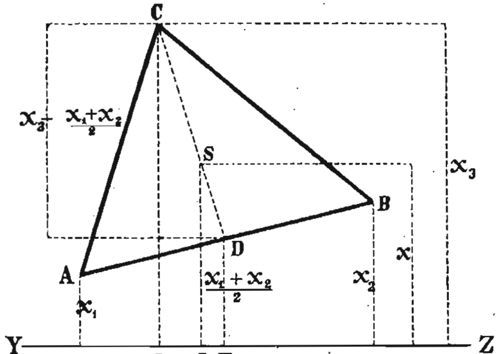
Сл. 57.

Одређујући тежиште за кугле c и b, наћи ћемо их у половини линије што их спаја, т. ј. у d; кад између новодобијеног тежишта d и треће кугле a тражимо тежиште, слажући двогубу масу b и c са a, добићемо га на трећини линије ad, рачунајући од d, дакле у m.

Силе које дејствују у три темена троугла су једнаке, према томе тежиште троугласте површине је у исти мах *средиште средњих одстојања* та три темена од ма које равни.

388. До сад смо тежиште троугласте површине одређивали према основици њеној. Нађимо општи израз за одстојање тежишта троугла, рачунато ма од које ли-

није ZY (сл. 58.) или од неке равни која се с троугловом равни сече по правој YZ.



Сл. 58.

Према ранијем доказу имамо да је:

$$DS : CD = 1 : 3$$

или:

$$(SJ - DE) : (CO - DE) = 1 : 3$$

пошто је:

$$DE = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

онда је:

$$\frac{SJ - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{CO - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = \frac{1}{3}$$

или:

$$\frac{x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)} = \frac{1}{3}$$

или још:

$$3\left[x - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right] = x_3 - \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

кад свршимо означено множење:

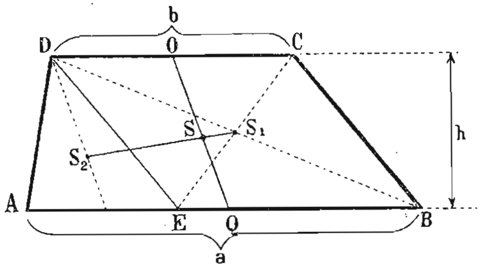
$$3\,x = x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{3}{2}(x_1 + x_2) = x_3 + (x_1 + x_2)$$

одакле је најзад одстојање тежишта:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{. . . . . . . (186}$$

Према томе, *одстојање тежишта троугласте површине ма од које линије у равни те површине* налази се у аритметичкој средини *одстојања* темена троуглових, рачуната од *исте те линије*, или се налази у трећини збира одстојања његових трију темена, рачуната од исте линије.

389. **Тежиште трапеза.** — Најлакше ћемо одредити тежиште трапезне површине, кад је разложимо на површине чија су нам већ тежишта позната и то на троугао ADE и паралелограм $DE\,BC$ (сл. 59.). Тежиште паралелограма добићемо половићењем његових дијагонала у S_1 и оно ће, као што знамо, бити у половини висине $\left(\frac{h}{2}\right)$ рачунато од основице a. Исто тако тежиште троугла пашће у трећину висине $\left(\frac{1}{3}h\right)$ рачунато од основице, дакле у S_2. Састављањем S_1 и S_2 добивамо једну тешку линију трапеза.



Сл. 59.

Другу тешку линију добићемо половљењем паралелних страна, јер можемо трапез разложити према странама *AB* и *CD* на све саме паралелне линије чија тежишта знамо одредити. Та друга тешка линија биће *OQ*. По себи се разуме, да ће у пресечној тачки *S* тих двеју тешких линија лежати тежиште целог трапеза.

Да бисмо рачунским путем нашли место тежишту, послужићемо се општом једначином за површине:

$$\xi_0 = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + \cdot \cdot \cdot s_n x_n}{s_1 + s_2 + s_3 + \cdot \cdot \cdot s_n}$$

јер нам је овде непозната само једна координата, и то одстојање тежишта од основице трапеза. Треба дакле да из површина на које смо трапез разложили и одстојања њихових тежишта од основице направимо суму статичких момената, да ту суму поделимо сумом појединих површина, па ћемо добити место тежишта целе слике.

Ми смо трапез разложили на троугао и паралелограм. Површина троугла је $(a - b)\,\frac{h}{2} = s_1$, одстојање његовог тежишта $\frac{h}{3} = x_1$, према томе је статички моменат његов:

$$\mathfrak{M}_1 = s_1\, x_1 = (a - b)\,\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} = (a - b)\,\frac{h^2}{6}.$$

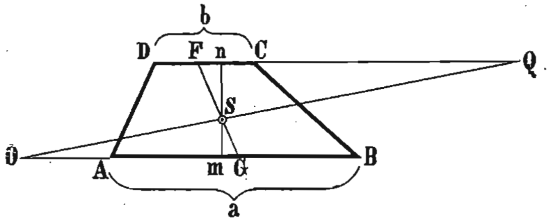
Површина паралелограма $s_2 = b \cdot h$, а одстојање тежишта $x_2 = \frac{h}{2}$; његов дакле моменат биће:

$$\mathfrak{M}_2 = s_2\, x_2 = b \cdot h \cdot \frac{h}{2} \cdot = \frac{1}{2}\, b\, h^2.$$

Пошто смо трапез разложили свега на троугао и паралелограм, то ћемо из горње опште једначине задржати, само прва два члана и у бројиоцу и у имениоцу па ћемо за остојање тежишта трапеза имати:

$$\xi_0 = \frac{(a - b)\,\frac{h^2}{6} + \frac{1}{2}\, b \cdot h^2}{(a - b)\,\frac{h}{2} + b \cdot h} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (187$$

390. Најлакше се графичким путем одређује тежиште трапезне површине на овај начин: Паралелну страну *CD* (сл. 60.) продужићемо једним правцем, тако да буде *CQ* = *AB*. Страну *AB* продужићемо супротним правцем да буде *AO* = *CD*. И тачка *S*, у којој линија *FG* пресеца тешку линију *OQ*, биће тачка тежишта целе површине.



Сл. 60.

Ево доказа томе:

Пошто смо повукли $mn \perp AB$ из троуглова *FSn* и *mSG* имамо:

$$Sm : Sn = GS : SF$$

као и из троуглова *SGO* и *SQF* што имамо:

$$SG : SF = OG : FQ.$$

Па како је:

$$Sn = h - Sm$$

и

$$OG = OA + AG = b + \frac{a}{2}$$

као и

$$FQ = FC + CQ = a + \frac{b}{2}$$

онда се из обеју горњих сразмера може и ова написати:

$$Sm : (h - Sm) = b + \frac{a}{2} : a + \frac{b}{2} = 2\,b + a : 2\,a + b$$

кад један спољашњи и један унутрашњи слан сразмере саберемо имаћемо:

$$Sm + h - Sm : Sm = 2\,b + a + 2\,a + b : 2\,b + a$$

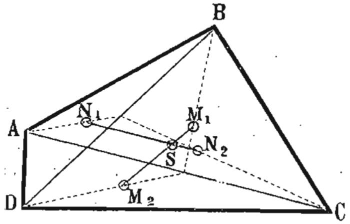
или:

$$h : Sm = 3\,b + 3\,a : 2\,b + a$$

а одавде најзад за одстојање тежишта:

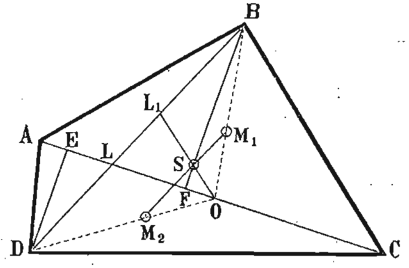
$$Sm = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2\,b}{a + b}$$

391. Тежиште ма каквог четвороугла. — Тежиште ма каквог четвороугла може се на више начина одредити. На пример:



Сл. 61.

a. Дат је четвороугао *ABCD*. (Сл. 61.) Разложићемо га дијагоналом *AC* у два троугла, којима ћемо тежиште одредити по познатом начину у M_1 и M_2. $M_1 M_2$ је тешка линија целог четвороугла. Затим ћемо исти четвороугао поделити дијагоналом *BD* у друга два троугла и њима наћи тежишта N_1 и N_2, тако да ће $N_1 N_2$ бити друга тешка линија четвороугла. Пресек обеју тешких линија *S* биће тражено тежиште целог четвороугла.



Сл. 62.

b. Место да тражимо другу тешку линију, можемо тежиште и овако да одредимо. Тежиште лежи ма где у тешкој линији $M_1 M_2$ (сл. 62.) и шта више оно мора њу тако поделити да се ти делови имају обрнуто као одговарајуће површине троуглова, т. ј. тако да је:

$$M_1\,S : M_2\,S = ADC : ABC.$$

Међутим ти су троугли сразмерни својим висинама *DE* и *BF* (пошто је основица иста), те дакле:

$$M_1\,S : M_2\,S = DE : BF.$$

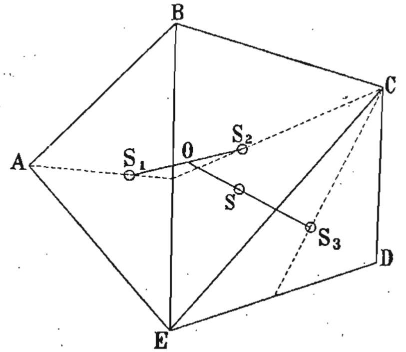
Из правоуглих троуглова *DEL* и *BFL* имамо:

$$DE : BF = DL : BL.$$

Ако из тачке *B* а по дијагонали *BD* одсечемо комад $BL' = DL$ и саставимо L_1 са *O*, онда излази да права OL_1 сече дијагоналу *BD* у истој размери у којој стоје одсеци $M_1\,S$ и $M_2\,S$ саме тешке линије.

Кад се ова сразмера коју мало час нађосмо речима искаже, онда овако ваља практички одредити тежиште једне четвороугаоне површине. Ваља повући дијагоналу *AC* и преполовити је у тачки *O*. Затим треба по оној другој дијагонали *BD* одсећи почев од *B* комад $BL_1 = DL$, и тачку L_1 саставити са *O*. На првој трећини линије OL_1 рачунајући од *O*, налази се тежиште четвороугла *S*.

392. Тежиште многоугла. — Тежиште каквог било многоугла, можемо одредити на два начина.



Сл. 63.

1.) Пре свега можемо дати многоугао разложити на све саме троугле и сваком посебице одредити тежиште. Затим ваља замислити да у тежишту сваког тог троугла дејствује по једна паралелна сила сразмерна површини троугла. Нападна тачка резултанте тих појединих сила, (коју одређујемо на познат начин слагањем паралелних сила) биће у исти мах тежиште целе слике. (сл. 63.).

Нека је дат петоугао *ABCDE* који смо разложили на три троугла *ABE*, *BCE*, *CDE* са тежиштима у $S_1\,S_2$ и S_3. Саставимо S_1 са S_2 и поделимо ту линију $S_1\,S_2$ у *O*, тако да буде:

$$S_1\,O : S_2\,O = \triangle\,BCE : \triangle\,ABE$$

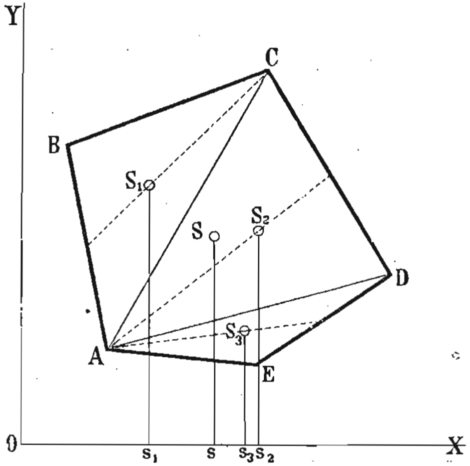
затим саставимо *O* са S_3 и поделимо линију OS_3 у *S* тако да буде:

$$OS : SS_3 = \triangle\,CDE : \triangle\,ABE + \triangle\,BCE$$

S је тражена тачка тежишта.

2.) На показани се начин може одредити тежиште неког полигона онда, кад број троуглова на које смо га разложили није велики. Међутим често је такав начин тражења тежишта заметан, зато ћемо простије и брже наћи тежиште таквог полигона, кад га поделимо у све саме троугле, сваком том троуглу израчунамо површину и одредимо одстојања њихових тежишта од две правоугле кординатне осе. У том случају можемо изнаћи статичке моменте свакога троугла и по општим једначинама за тај случај одредити тражено тежиште полигонске површине.

Примера ради одредимо тежиште овом петоуглу. (сл. 64.). Пошто смо га поделили на три троугла, одредили смо на познат начин њихова тежишта S_1 S_2 и S_3. Тежиште целога полигона нека је у S_1 координате појединих тежишта нека су:



Сл. 64.

$$S_1 s_1 = y_1, \; S_2 s_2 = y_2, \; S_3 z_3 = y_3$$

и

$$Os_1 = x_1, \; Os_2 = x_2, \; Os_3 = x_3$$

координате траженог тежишта S нека су:

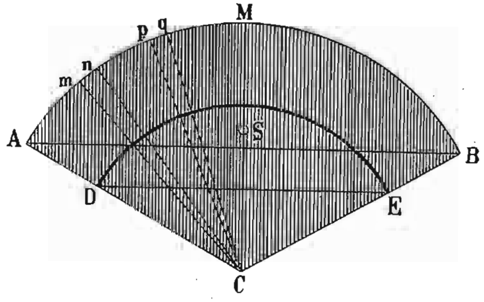
$$\eta_0 = Ss \text{ и } \xi_0 = Os.$$

Ако су површине троуглова $ABC = f_1$; $ACD = f_2$ $ADE = f_3$, онда знамо да је:

$$\xi_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

$$\eta_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3}{f_1 + f_2 + f_3}.$$

393. Тежиште кружног исечка. — Да бисмо на што појмљивији начин одредили тежиште кружног исечка, замислимо га подељена на све саме елементарне троуглове, као што је на пр. pqC, и mnC и т. д. (сл. 65.).



Сл. 65.

Сваком том троуглу можемо одредити тежиште посебице, и низ свију тих тежишта даће нам на ${}^2/_3$ AC рачунајући од средишта C, тешки кружни лук DE. И онда тежиште које будемо одредили томе тешком луку биће у исти мах и тежиште целог исечка.

Напред смо видели како се одређује тежиште кружном луку. Оно се налазило у оси симетрије и на одстојању од средишта:

$$y_s = \frac{r' \cdot t'}{l'}$$

где r' значи полупречник DC тог лука, t' дужину тетиве DE а l' дужину лука DE.

Да би овај образац вредео за цео исечак, ваља да се сетимо да је $DC = {}^2/_3 AC$; према томе и лук $DE = {}^2/_3$ лука AB као и тетива $DE = {}^2/_3$ тетиве AB. С тога ће, ако ставимо $AC = r$, лук $AB = l$, тетиву $AB = t$ бити одстојање тежишта кружног исечка од средишта C а у оси симетрије:

$$y_s = \frac{{}^2/_3 r \cdot {}^2/_3 t}{{}^2/_3 l} = \frac{2\,rt}{3\,l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (188$$

Ако је величина кружног исечка одређена поред полупречника не дужином тетиве и лука већ захваћеним углом 2φ, онда имамо према ранијему да је одстојање тежишта од средишта:

$$y_s = {}^2/_3\, r \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (188'$$

Ако је $\varphi = \frac{\pi}{2}$ дакле кад тражимо тежиште полукружне површине, налазимо да је оно:

$$y_s = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0{\cdot}424\; r.$$

За $\varphi = \frac{\pi}{4}$ т. ј. тежиште квадранта лежи од средишта удаљено за

$$y_s = {}^2/_3\, r \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\,\pi} = 0{\cdot}6002\; r.$$

За површину секстанта биће тежиште:

$$y_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}\, r}{\frac{1}{3}\,\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot r = 0{\cdot}6366\; r.$$

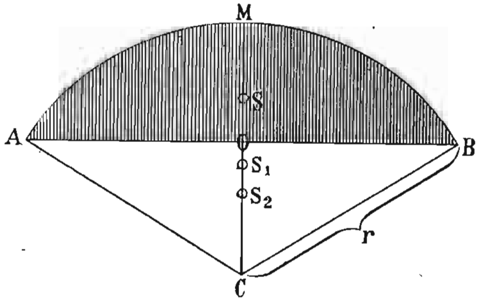
394. Тежиште кружног одсечка. — Да би кружном одсечку *AMBO* (сл. 66.) одредили тежиште, послужићемо се општом једначином за тежишта. Јер можемо узети да је кружни одсечак коме тежиште тражимо постао, кад смо од кружног исечка *AMBC* одузели троугао *ABC*. Тога ради означимо са S_1 тежиште целог кружног исечка *AMBC* а са F_1 његову површину; са S_2 тежиште а са F_2 површину троугла *ABC*; са S тежиште а са F површину кружног одсечка *AMBO*. Па пошто знамо да је статички моменат целе слике раван суми статичких момената појединих делова, то је

$$F_1\, y_1 = F y + F_2\, y_2$$

где y, y_1 и y_2 значе одстојања тежишта од средишта C. Пошто тражимо y, то ће бити одстојање тежишта кружног одсечка од средишта C, дато једначином:

$$y = \frac{F_1\, y_1 - F_2\, y_2}{F}.$$

Међутим је површина кружног исечка $F_1 = \frac{1}{2}\, rl$ где l значи лук AB, јер се површина тог исечка може сматрати као површина троугла основице AMB и висине r.



Сл. 66.

Површина троугла $F_2 = \frac{1}{2}\, \overline{AB} \cdot \overline{OC}.$

Ако тетиву AB означимо са t, имаћемо:

$$F_2 = \frac{1}{2}\, t \cdot OC.$$

Пошто је:

$$\overline{OC} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\, t^2}$$

онда је:

$$F_2 = \frac{1}{2}\, t \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\, t^2}.$$

Даље знамо да је одстојање тежишта кружног исечка:

$$y_1 = \frac{2}{3} \frac{r \cdot t}{l}$$

а одстојање тежишта троугла:

$$y_2 = \frac{2}{3}\,\overline{CO} = \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}t^2}$$

па кад те све вредности заменимо у општу једначину, имаћемо:

$$Fy = \left[\frac{1}{2}rl \cdot \frac{2}{3}\frac{rt}{l}\right] - \left[\frac{1}{2}t\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}t^2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}t^2}\right]$$

$$= \frac{r^2 t}{3} - \frac{1}{2}t\frac{2}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}t^2\right)$$

$$= \frac{r^2 t}{3} - \frac{t}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}t^2\right) = \frac{t^3}{12}.$$

Одакле је најзад:

$$y = \frac{t^3}{12\,F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (189$$

где је $F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2}rl - \frac{1}{2}t\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}t^2}.$

Ако величина кружног одсечка није изражена тетивом и луком већ средишним углом $2\,\varphi$, онда је, као што знамо:

$$l = 2\,r\,\varphi,\quad t = 2\,r\sin\varphi$$

и онда је:

$$F_1 = \frac{1}{2}r\,l = \frac{1}{2}r\,2\,r\,\varphi = r^2\,\varphi.$$

Затим је:

$$y_1 = \frac{2}{3}r\frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

те и моменат кружног исечка:

$$E_1\,y_1 = r^2\,\varphi \cdot \frac{2}{3}r\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{2}{3}r^3\sin\varphi.$$

Површина троугла је сад:

$$F_2 = \frac{1}{2}r^2\sin 2\,\varphi;$$

а одстојање тежишта му:

$$y_2 = \frac{2}{3}\,\overline{OC} = \frac{2}{3}r\cos\varphi$$

па дакле и моменат:

$$F_2\,y_2 = \frac{1}{2}r^2\sin 2\,\varphi \cdot \frac{2}{3}r\cos\varphi.$$

Заменивши те вредности у општој једначини:

$$Fy = r^2\,\varphi\,\frac{2}{3}r\frac{\sin\varphi}{\varphi} - \frac{1}{2}r^2\sin 2\,\varphi\,\frac{2}{3}r\cos\varphi.$$

Пошто је још:

$$F = r^2\,\varphi - \frac{1}{2}r^2\sin 2\,\varphi$$

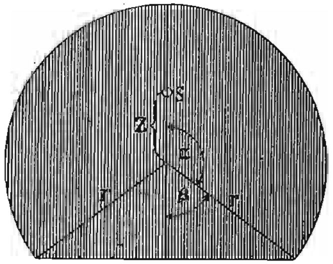
то је најзад одстојање тежишта неког кружног одсечка од отвора $2\,\varphi$ дато:

$$y = \frac{r^2\frac{2}{3}r\frac{\sin\varphi}{\varphi} - \frac{1}{2}r^2\sin 2\,\varphi\,\frac{2}{3}r\cos\varphi}{r^2\,\varphi - \frac{1}{2}r^2\sin 2\,\varphi}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}r^3\sin\varphi - \frac{1}{2}r^2\,2\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{2}{3}r\cos\varphi}{r^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\,2\sin\varphi\cos\varphi\right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}r^3\sin\varphi - \frac{2}{3}r^3\sin\varphi\cos\varphi}{r^2(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)} \quad \ldots\ldots (189'$$

Ако је површина кружног одсечка већа од полукруга, онда је површина кружног одсечка равна збиру од кружног исечка и троугла (сл. 67.). Стога би други члан у бројиоцу с десне стране дошао са знаком више. Али прављењем момента троугла, његов крак, сравњен са краком кружног исечка, иде на супротну страну, па зато ће опет моменат троугла остати одречан. Зато ће образац



Сл. 67.

за тежиште такве површине, ако са β означимо суплементни угао од $\varphi = \alpha$, овако изгледати:

$$y = \frac{r^2 \varphi \frac{2}{3} r \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2 \beta \frac{2}{3} r \cos \beta}{r^2 \varphi + \frac{1}{2} r^2 \sin \beta}.$$

Кад ставимо:

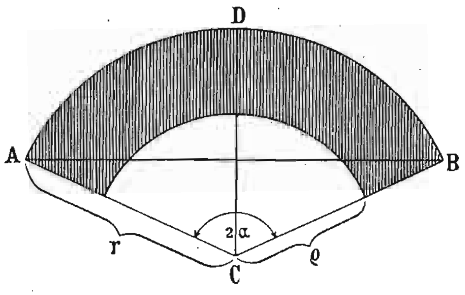
$$2 \beta = 4 R - 2 \varphi$$

$$\sin 2 \beta = - \sin 2 \varphi$$

$$\cos \beta = - \cos \varphi$$

налазимо горњи образац за одсечак мањи од полукруга.

395. Тежиште прстенасте површине. — Као мало час код кружног одсечка, тако ћемо и овде сматрати прстенасту површину као разлику два кружна исечка разних полупречника. И ако је F (сл. 68.) површина прстена, F_1 површина већег а F_2 мањег исечка, исто тако ако су y, y_1 и y_2 одговарајућа одстојања тежишта тих површина од средишта, онда мора бити:



Сл. 68.

$$Fy = F_1 y_1 - F_2 y_2.$$

Према ранијем знамо да је:

$$F_1 = R^2 \varphi ; \; F_2 = r^2 \varphi$$

$$y_1 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \varphi}{\varphi} ; \; y_2 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

па дакле и:

$$F_1 y_1 = \frac{2}{3} R^3 \sin \varphi$$

$$F_2 y_2 = \frac{2}{3} r^3 \sin \varphi.$$

Стога је:

$$Fy = \frac{2}{3} R^3 \sin \varphi - \frac{2}{3} r^3 \sin \varphi = \frac{2}{3} \sin \varphi \, (R^3 - r^3).$$

Пошто је још $F = R^2 \varphi - r^2 \varphi = \varphi (R^2 - r^2)$, то је најзад:

$$y = \frac{\frac{2}{3} \sin \varphi \, (R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)} = \frac{2}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \right) \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad \ldots . (190$$

Но пошто је:

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} = \frac{t}{l}$$

онда ћемо имати образац за тежиште прстена:

$$y = \frac{2}{3} \left(\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \right) \frac{t}{l} \quad \ldots\ldots\ldots (190'$$

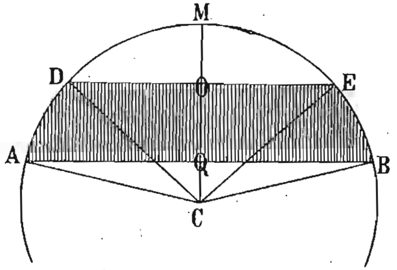
кад буде прстенаста површина дата тетивом $AB = t$ луком $ADB = l$ и полупречницима R и r.

396. Тежиште једног комада кружне површине, ограничене двема паралелним тетивама. — Тежиште такве површине наћи ћемо, кад је сматрамо као разлику два кружна одсечка. Означимо површину кружног одсечка AMB са F_1 а површину DME са F_2 (сл. 69.), онда је тражена површина:

$$F = F_1 - F_2.$$

Напред смо нашли да је моменат већег одсечка:

$$F_1 y_1 = \frac{t^3}{12}$$



Сл. 69.

а мањег, коме је тетива $DE = \tau$

$$F_2 y_2 = \frac{\tau^3}{12}$$

према томе:

$$Fy = \frac{t^3 - \tau^3}{12}$$

одакле најзад:

$$y = \frac{t^3 - \tau^3}{12(F_1 - F_2)}.$$

Ако је горња површина дата поред полупречника r још и са оба средишна угла:

$$ACB = \varphi$$

$$DCE = \psi$$

онда је према пређашњем моменат већег одсечка:

$$F_1 y_1 = {}^2/_3\, r^3 \sin\varphi$$

а моменат мањега:

$$F_2 y_2 = {}^2/_3\, r^3 \sin\psi$$

па дакле:

$$Fy = {}^2/_3\, r^3 (\sin\varphi - \sin\psi).$$

Исто тако имамо за површину већег одсечка:

$$F_1 = r^2 (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi)$$

а за површину мањега:

$$F_2 = r^2 (\psi - \sin\psi \cos\psi)$$

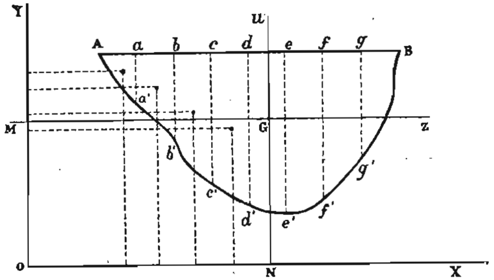
те стога је:

$$F = r^2 (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi) - r^2 (\psi - \sin\psi \cos\psi)$$

одакле најзад:

$$y = \frac{{}^2/_3\, r^3 (\sin\varphi - \sin\varphi)}{r^2 (\varphi - \sin\varphi \cos\varphi) - r^2 (\psi - \sin\psi \cos\psi)} \quad \cdot \cdot \cdot (191$$

397. Тежиште равне површине ограничене једном правом и ма каквом кривом линијом. — Дата нам је површина ограничена правом AB и кривом $Ae'B$ (сл. 70.). Нека се та површина налази у равни координатних оса X и Y, којима је почетак у O. Поделимо праву AB на паран број једнаких делова, тако да се ординатама aa' bb' cc', dd' подели цела површина на елементарне површине f_1 f_2 f_3 $f_4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ које се могу сматрати, као троугли, правоугаоници и трапези. Означимо са x_1 x_2 $x_3 \cdot \cdot \cdot \cdot$ и са y_1 y_2 $y_3 \cdot \cdot \cdot$ координате тежишта тих елемената. Ако су x_0 и y_0 координате тежишта целе површине, онда знамо да је:



Сл. 70.

$$Fx_0 = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n x_n$$

$$Fy_0 = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n y_n$$

одавде је:

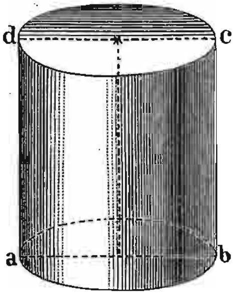
$$x_0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n}$$

$$y_0 = \frac{f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n y_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot f_n}$$

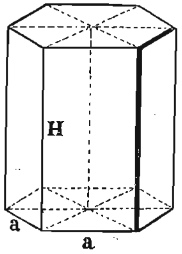
кад површину F одредимо по методи Симпсоновој, можемо наћи координате тежишта x_0 и y_0. тражене површине.

β. Тежиште кривих површина.

398. Тежиште ваљкасте (цилиндричне) и призматичне површине. — Тежиште криве цилиндарске површине, као и тежиште призматичне површине (сл. 71. и 72.)

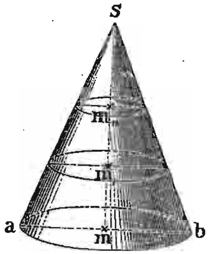


Сл. 71.



Сл. 72.

лежи у средини њихових оса, т. ј. у средини оних правих које везују средишта обеју граничних равних површина. Јер ако обе те површине замислимо подељене хоризонталним пресецима на поједине кружне или полигоналне елементе, онда ће, као што знамо, сваком том елементу тежиште бити у средини. След свију тих тежишта даће тешку линију, која је у исти мах и уздужна оса тих површина. Према томе тежиште те тешке линије т. ј. осе биће тежиште и целе криве површине, дакле оно пада у средину осе.

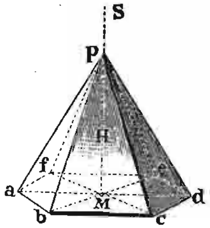


Сл. 73.

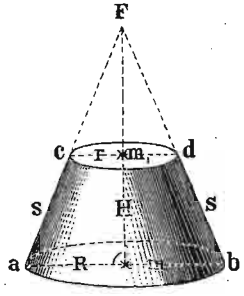
399. Тежиште праве купасте (конусне) површине. — Тежиште такве површине налази се у оси купе и то у трећини рачунајући од основице. Јер се купаста површина може замислити разложена на све саме елементарне троугле чија тежишта леже на трећини висине од основице. След свију тих тачака даће једну тешку кружну линију на $^1/_3$ висине од основице. Тежиште те кружне линије биће у њеном средишту m_1 (сл. 73.), дакле у оси и то на трећини висине од основице.

400. Тежиште праве пирамидне површине. — И код те површине тежиште се из истог разлога као и мало час налази у оси и то опет у $^1/_3$ висине, рачунајући од основице (сл. 74.).

401. Тежиште зарубљене купасте или пирамидне површине. — Такву једну зарубљену купасту или пирамидну површину можемо замислити разложену на све саме трапезе, којих на пр. може бити свуда у наоколо свега n, (сл. 75.). Ако полупречник горњег круга означимо



Сл. 74.



Сл. 75.

са r а доњега са R ако је h висина а d ивица купе, најзад ако су a и b дужине паралелних страна свакога трапеза, онда је очевидно, пошто их има n у наоколо, да ће бити:

$$a = \frac{2 R \pi}{n}$$

$$b = \frac{2 r \pi}{n}.$$

Тежишта свију тих трапеза биће у једном кругу паралелном са основицом, чије ће одстојање, рачунато од основице, бити:

$$y = \frac{1}{3} h \frac{a + 2 b}{a + b}$$

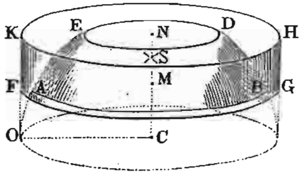
или:

$$y = \frac{1}{3} h \frac{R + 2 r}{R + r} \quad \cdots\cdots\cdot (192$$

Пошто се тежиште тога тешког круга па и целе површине налази у његовом средишту, онда горњи образац даје одстојање тежишта целе површине у оси њеној, рачунато од основице.

402. Тежиште куглина појаса или кугласте капе. — Тежиште тих површина лежи у половини њихових оса, тако да тежиште једне полукугласте површине пада у половини полупречника.

Тежиште куглина појаса *ABDE* (сл. 76.) лежи у половини (*S*) висине *MN*; јер се из геометрије зна, да је тај појас исте површине са оним цилиндром *FGKH* који има исту висину *MN* с њим и чији је полупречник раван куглину полупречнику *CO*. Према томе тежиште тога појаса пада на исто место с тежиштем цилиндра.



Сл. 76.

Исто то вреди и за куглину капу.

403. Тежиште сложених површина. — Кад имамо да одредимо тежиште површинском облику, сложену из више равних или кривих површина, онда ћемо по општем обрасцу за одређивање тежишта површинама ту сложену површину разложити на оне саставне делове, из којих је она сложена, сваком том делу одредити моменат и из њихова збира на познати начин наћи тежиште целе слике.

Примера ради да одредимо тежиште *једне задниvene качасте површине*, коју, као што знамо, можемо разложити на горње и доње дно и на саму криву качасту (т. ј. купасту) површину. Означимо полупречник једнога дна са *r* (сл. 75.) а другога са *R*; дужину стране са a и рачунајмо тежиште од доњега дна. За одредбу тежишта употребићемо познати образац:

$$y_s = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Нека је F_1 површина купасте површине; она је, као што знамо из геометрије:

$$F_1 = \pi \, a \, (R + r).$$

За y_1 нашли смо мало час:

$$y_1 = \frac{R + 2\,r}{R + r} \cdot \frac{h}{3}$$

према томе:

$$F_1 \, y_1 = \pi \, a \, (R + r) \cdot \frac{R + 2\,r}{R + r} \cdot \frac{h}{3} = \frac{\pi \, a \, h}{3} \, (P + 2\,r).$$

F_2 нека је површина доњега дна; онда је:

$$F_2 = R_2 \, \pi.$$

Моменат тога дна је раван нули, јер тежиште рачунамо од самога дна, дакле је $y_2 = 0$, па дакле и

$$F_2 \, y_2 = 0.$$

Најзад кад површину горњега дна означимо са F_3 и одстојање њена тежишта са $y_3 = h$ биће моменат:

$$F_3 \, y_3 = \pi \, r^2 \cdot h.$$

Целокупна површина износи:

$$F_1 + F_2 + F_3 = \pi \, a \, (R + r) + \pi \, R^2 + \pi \, r^2.$$

С тога је:

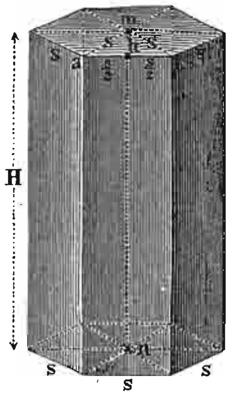
$$y_s = \frac{{}^1\!/_3 \, a \, h \, (R + 2\,r) + 0 + r^2 \, h}{a \, (R + r_2) + R^2 + r^2} =$$

$$= \frac{{}^1\!/_3 \, a \, (R + 2\,r) + r^2}{a \, (R + r) + R^2 + r^2} \cdot h. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (193$$

Ако је суд цилиндричан, ако је дакле $a = h$ и $R = r$, онда је $y_s = \frac{h}{2}$.

Примедба. Ако нам у том примеру не буде позната висина h већ само угао α, под којим су дуге нагнуте према основици, онда ваља свуда у место висине ставити $h = a \sin \alpha$. За цилиндричан суд је $\sin \alpha = 1$.

С. Тежиште тела.

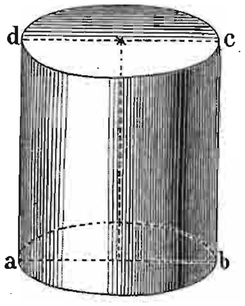


Сл. 77.

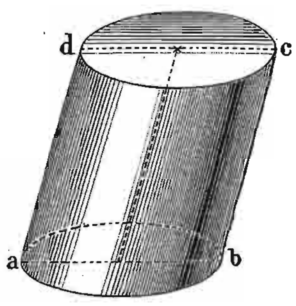
Пошто свако правилно геометријско тело можемо сматрати да је сложено из све самих паралелних равни, то ћемо најлакше таквим телима одредити тежиште, кад тим равнима свакој посебице одредимо тежишта, онда тим тешким линијама које тим путем добивамо, одредимо тежиште, које ће у исти мах бити тежиште и целога тела. Ово неколико примера показаће нам најочигледније начин, како се код тела тежиште одређује.

404. Тежиште призме. — Није потребно да понављамо што смо рекли код одређивања тежишта шупљих призмастих површина, па да видимо да ће тежиште сваке призме, ма од колико страна, бити, у половини оне тешке линије, која спаја тежишта основних површина (сл. 77.).

405. Тежиште цилиндра. — Тежиште ће ма каквог цилиндра, био он прав или нагнут, бити такође у средини осе његове (сл. 78, 79.).

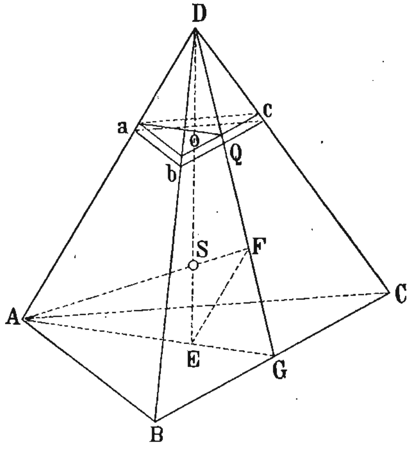


Сл. 78.



Сл. 79.

406. Тежиште тростране пирамиде. — Да бисмо тространој пирамиди одредили тежиште, замислимо је подељену паралелним равнима према основици *ABC* (сл. 80) на све саме троугласте површине *abc* и свакој таквој површини одредимо тежиште посебице. Тако на пр. основици *ABC* пашће тежиште, као што знамо, у *E*; тежиште површини *abc* пашће у *o* и т. д. Слêд свију тих тежишта, даће тешку линију *ED*, у којој мора лежати и тежиште целе пирамиде. Исто тако поделимо пирамиду паралелним равнима према *BDC* на троугласте површине и свакој таквој површини нађимо тежиште посебице. Слêд тих тежишта даће тешку линију *AF*. Пресечна тачка *S* прве тешке линије са овом другом биће тежиште целе пирамиде. Да нађемо, где ће пасти то тежиште.



Сл. 80.

Кад саставимо *F* са *E*, добивамо два слична троугла *FES* ∼ *ASD*, а из те сличности имамо ову сразмеру:

$$\overline{SE} : \overline{DS} = \overline{EF} : \overline{AD}.$$

Пошто знамо из закона за тежиште тространих површина, да је:

$$\overline{GF} = {}^1/_3\, \overline{GD}, \quad \text{и} \quad \overline{GE} = {}^1/_3\, \overline{AG}$$

то следује да је и:

$$\overline{EF} = {}^1/_3\, \overline{AD}$$

и кад то заменимо у горњој сразмери:

$$\overline{SE} : \overline{DS} = \overline{EF} : 3\, \overline{EF} = 1 : 3$$

одакле:

$$3\, SE = DS.$$

Кад обема странама додамо по SE, имаћемо:

$$4\,SE = DS + SE = DE$$

а одавде:

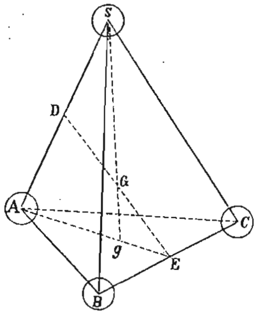
$$SE = \frac{1}{4}\,DE \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \; (194$$

Дакле тежиште се тростране пирамиде налази у првој четвртини оне линије, која ма који рогаљ пирамидин (D) спаја с тежиштем наспрамне основице (ABC), рачунатим од те основице.

Да би закон за одређивање тежишта тростране пирамиде био општији, спустимо управне из темена D и тежишта S на основицу, другим речима обележимо висине темена и тежишта пирамиде. И онда се тежиште једне тростране пирамиде налази у равни која је у четвртини висине, рачунајући од основице.

Тежиште тростране пирамиде јесте у исти мах и тежиште четири једнаке масе чија тежишта падају у четири рогља тростране пирамиде.

Рецимо да су на четири рогља пирамидина S, A, B, C, (сл. 81.) утврђене четири једнаке кугле тежине Q, чија тежишта падају у четири пирамидина рогља. Ако тражимо тежиште трију кугала ABC на основици, њихово ће тежиште лежати у тежишту саме основице. Слажући снагу од $3\,Q$ која дејствује у g с тежином Q која је на темену пирамиде S, ново тежиште G, полеће праву Sg на два дела у размери $1:3$. Дакле Gg биће трећина дужине SG или четвртина целе дужине Sg, дакле тежиште целог система пада у тежиште пирамиде.

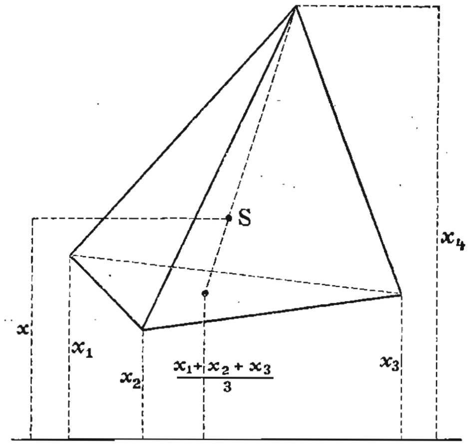


Сл. 81.

Ма којим редом слагали тежине, које дејствују на рогљевима пирамиде, увек ћемо доћи до истог резултата. Према томе, ако сложимо тежине у S и A, добићемо њихову резултанту у половини линије AS т. j. у D. Исто тако, резултанта тежина B и C пашће у E.

Најзад, општа резултанта, пашће у половину G линије DE, пошто су обе делимичне резултанте у D и E једнаке. Дакле онда, *тежиште једне тростране пирамиде пада у половину оне праве, која веже средине ма које две наспрамне ивице.*

407. Кад бисмо хтели да одредимо тежиште какве тростране пирамиде X_s ма од какве равни (сл. 82.), ваља да се сетимо онога правила за такво одређивање тежишта какве тростране површине. Напред смо нашли да је тежиште тростране основице пирамидине а од исте равни удаљено за:



Сл. 82.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Овоме имамо да додамо још одстојање тежишта пирамиде од основице, па ће онда целокупно одстојање тежишта пирамидина бити ово:

$$X_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{1}{4}\left[x_4 - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right] = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Исто тако, ако бисмо хтели да одредимо тежиште такве пирамиде у простору, т. j. његово одстојање од трију правоуглих координатних равни, онда би ваљало поновити исти рачун за сваку раван посебице. Ако дакле означимо одстојање сваког рогља од трију координатних равни са:

$$x_1\,y_1\,z_1\,;\; x_2\,y_2\,z_2\,;\; x_3\,y_3\,z_3\,;\; x_4\,y_4\,z_4$$

аодстојање тежишта од истих равни са:

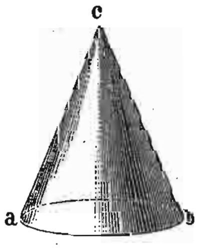
$$\xi_s \; \eta_s \; \zeta_s$$

имали бисмо:

$$\left.\begin{aligned} \xi_s &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\ \eta_s &= \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \\ \zeta_s &= \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(195}$$

Ако почетак координатног система изберемо тако, да падне ма у који рогаљ пирамидин, онда ће одговарајуће координате, у горњим једначннама бити равне нули, и једначине ће бити простије.

Ако пирамида има више страна, она се може дијагоналним равнима поделити у све саме тростране пирамиде, којима тежиште знамо одредити. Сва ова тежишта леже очевидно у једној равни, која је паралелна са основицом и од ње удаљена за $^1/_4$ висине. Према томе ће и тежиште тих тежишта т. ј. тежиште целе пирамиде лежати у тој истој равни. Саму тачку тежишта у тој тешкој равни наћи ћемо, кад тежиште основице саставимо с наспрамним рогљем, јер на тај начин добивамо једну тешку линију. И онде где та тешка линија пробија ону тешку раван, биће тежиште целе пирамиде.



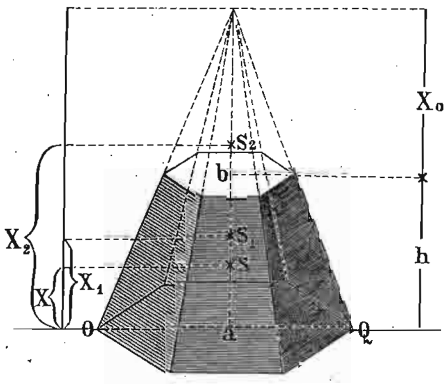
Сл. 83.

408. Тежиште конуса. — Пошто се конус може сматрати као пирамида од бескрајно много страна, то за тежиште конуса вреди исти закон, који смо мало час извели, т. ј. да се његово тежиште налази на четвртини оне линије, која спаја његов врх с тежиштем основице. (сл. 83.).

409. Тежиште зарубљене пирамиде. — Знајући да можемо зарубљену пирамиду сматрати као пирамиду, од које је врх одузет (сл. 84.), то јој можемо одредити тежиште одузимањем статичких момената целе пирамиде и врха, дакле по познатом обрасцу:

$$X = \frac{v_1 x_1 - v_2 x_2}{V}$$

где је v_1 запремина целе пирамиде а x_1 одстојање њеног тежишта од основице; v_2 запремина одузетог врха а x_2 одстојање његова тежишта, V запремина зарубљене пирамиде а X тражено одстојање тежишта, такође од основице.



Сл. 84.

Из стереометрије знамо, да је запремина пирамиде равна трећини производа из основице и висине. Ако је основица дате пирамиде $= F$ а висина $(h + x_0)$ (види сл.), онда је:

$$v_1 = \frac{F\,(h + x_0)}{3}.$$

Мало час смо нашли, да је тежиште пирамиде на четвртини висине од основице, онда је:

$$x_1 = \frac{h + x_0}{4}$$

те према томе моменат целе пирамиде:

$$v_1 x_1 = \frac{1}{12} F\,(h + x_0)^2.$$

Ако површину заруба означимо са f, онда јс из истог разлога:

$$v_2 x_2 = \frac{1}{3} f x_0 \left(h + \frac{1}{4} x_0 \right) = \frac{1}{3} f x_0 \frac{4\,h + x_0}{4}.$$

Треба још да одредимо x_0 из познатих димензија зарубљене пирамиде. Површине f и F имају се као квадрати њихових одстојања од темена целе пирамиде, па стога је:

$$\frac{F}{f} = \frac{(h + x)^2}{{x_0}^2} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{F}{f}} = 1 + \frac{h}{x_0}$$

а кад ту једначину решимо по x_0, добићемо:

$$x_0 = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F - f}}.$$

Кад све те вредности заменимо, добићемо:

$$VX = V_1 x_1 - V_2 x_2 = \frac{1}{12}\left[F(h + x_0)^2 - fx(4h + x_0)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[Fh^2 + \frac{2Fh^2\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}} + F\left(\frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}\right)^2 - \frac{4fh^2\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}} - f\left(\frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{h^2}{12}\left[F + \frac{2F\sqrt{f}}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})} + \frac{Ff}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2} - \frac{4f\sqrt{F}}{\sqrt{F}-\sqrt{f}} - \frac{3f^2}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}\right]$$

$$= \frac{h^2}{12}\left[\frac{F(F-2\sqrt{Ff}+f) + 2F\sqrt{Ff} - 2Ff + Ff - 4f\sqrt{Ff} + 3f^2}{(\sqrt{F}-\sqrt{f})^2}\right]$$

$$= \frac{h^2}{12}\left[\frac{F^2 - 4f\sqrt{Ff} + 3f^2}{F - 2\sqrt{Ff} + f}\right]$$

$$= \frac{h^2}{12}(F + 2\sqrt{Ff} + 3f).$$

Међутим је запремина V зарубљене пирамиде:

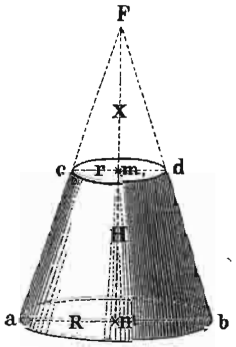
$$V = \frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)$$

према томе тражено одстојање тежишта:

$$X = \frac{\frac{h^2}{12}(F + 2\sqrt{Ff} + 3f)}{\frac{h}{3}(F + \sqrt{Ff} + f)} = \frac{h}{4} \cdot \frac{F + 2\sqrt{Ff} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f} \quad \ldots\ldots (196$$

То је дакле одстојање тежишта зарубљене пирамиде од основице, и то наравно у тешкој линији ab, која спаја тежишта обеју површина F и f.

410. Тежиште зарубљене купе. — За тежиште зарубљене купе вреди исти образац с једном само изменом. Ако полупречник површине F означимо са R (сл. 85.) а полупречник површине f са r, онда је очевидно:



Сл. 85.

$$F = R^2\pi$$

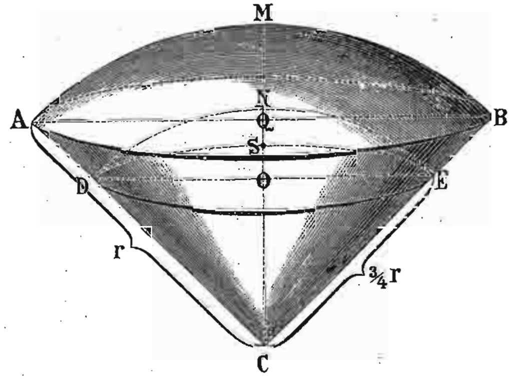
$$f = r^2\pi$$

па према томе одстојање тежишта зарубљене купе од основице а у тешкој линији mn биће:

$$X = \frac{h}{4}\,\frac{R^2\pi + 2\sqrt{R^2\pi\, r^2\pi} + 3r^2\pi}{R^2\pi + \sqrt{R^2\pi\, r^2\pi} + r^2\pi}$$

$$= \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad \ldots\ldots\ldots (196'$$

411. Тежиште куглина исечка. — Замислимо, да је такав један куглин исечак $AMBC$ (сл. 86.) састављен из све самих



Сл. 86.

пирамида, чије основице леже по кружној површини AMB а темена свију њих у средишту куглину C. Висина сваке такве елементарне пирамиде равна је очевидно полупречнику куглину $MC = AC = BC = r$. Па како знамо, да се тежиште сваке такве пирамиде налази на $^1/_4$ висине од основице, или овде на $^3/_4$ висине од средишта куглина C, то ће слēд тежишта свију тих елементарних површина дати једну тешку кугласту површину или капу *DNE* чији је полупречник $= {}^3/_4\, r$. Тежиште *S* те кугласте тешке површине биће у исти мах и тежиште целог куглина исечка *AMBC*.

Напред смо нашли да тежиште куглине капе *DNE* пада у половину њене висине *NO* и, пошто је:

$$NO = {}^3/_4\, \overline{MQ} = {}^3/_4\, h$$

онда је одстојање тежишта куглиног исечка:

$$x = {}^3/_4\, r - \frac{1}{2} \cdot {}^3/_4\, h$$

$$= {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, h$$

$$= {}^3/_8\, (2\, r - h).$$

Кад ставимо $h = r$, т. ј. кад тражимо тежиште на масивној полукугли, онда се то тежиште налази на одстојању од средишта:

$$x = {}^3/_8\, r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (197$$

412. Тежиште кугле. — Кад у једначину за куглин исечак ставимо $h = 2\, r$, добивамо $x = 0$, т. ј. тежиште се кугле налази у самом средишту њену.

413. Тежиште куглина одсечка. — Дато нам је на пример да одредимо тежиште куглину одсечку *AMB* (слика 86.). Овде ћемо се послужити општом једначином за одређивање тежишта помоћу момената, јер можемо сматрати да је тај одсечак постао, кад смо од целог куглиног исечка *AMBC* одузели изврнуту купу *ABC*. Ако дакле означимо са V_1 и x_1 запремину и одстојање тежишта целог исечка, са V_2 и x_2 запремину и одстојање тежишта (увек од средишта *C*) купе, а са *V* и *X* одговарајуће вредности за одсечак куглин, онда знамо да је:

$$Vx = V_1\, x_1 - V_2\, x_2.$$

Међутим се из стереометрије зна, да је:

$$V_1 = {}^2/_3\, r^2 \pi\, h \text{ и } V_2 = \frac{1}{3} \pi\, h\, (2\, r - h)\, (r - h)$$

а мало час смо нашли да је:

$$x_1 = {}^3/_8\, (2\, r - h) \text{ и } x_2 = {}^3/_4\, (r - h)$$

онда је:

$$V_1\, x_1 = {}^2/_3\, r^2 \pi\, h \cdot {}^3/_8\, (2\, r - h) = \frac{1}{4}\, r^2 \pi\, h\, (2\, r - h)$$

и

$$V_2\, x_2 = \frac{1}{3} \pi\, h\, (2\, r - h)\, (r - h) \cdot {}^3/_4\, (r - h) = \frac{1}{4} \pi\, h\, (2\, r - h)^2$$

а према томе:

$$Vx = \frac{1}{4}\, r^2 \pi\, h\, (2 - h) - \frac{1}{4} \pi\, h\, (2\, r - h)^2 = \frac{1}{4} \pi\, h^2\, (2\, r - h)^2.$$

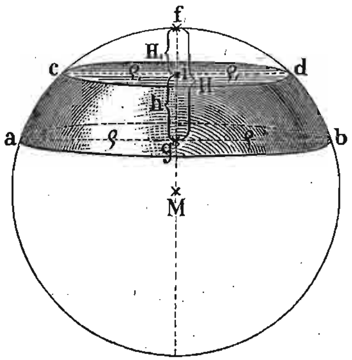
Па како још запремина целог исечка:

$$V = \frac{1}{3} \pi\, h^2\, (3\, r - h)$$

то ће најзад одстојање тежишта кружног одсечка бити:

$$x = \frac{\frac{1}{4} \pi\, h^2\, (2\, r - h)^2}{\frac{1}{3} \pi\, h^2\, (3\, r - h)} = \frac{3}{4}\, \frac{(2\, r - h)^2}{3\, r - h} \quad \ldots\ldots (198$$

414. Тежиште телесног кружног појаса или кружне плоче одредићемо истим путем, као што смо одредили тежиште куглина исечка. Јер ћемо сматрати, да је такав појас *agbdic* (сл. 87.) постао, кад смо од куглиног одсечка *abf* одузели одсечак *cdf*. И ако је v_1 и x_1 запремина и тежиште (рачунато од *g*) куглиног одсечка *abf*; v_2 и x_2 одговарајуће вредности куглина одсечка *cdf*, онда је опет:



Сл. 87.

$$vx = v_1\, x_1 - v_2\, x_2.$$

Означимо висине $fg = H$; $ig = h$, $fi = H_1$ исто тако $ag = \varrho$: $ci = \varrho_1$, $Mf = R$, онда знамо да је:

$$v_1 = \frac{1}{3} \pi\, H^2\, (3\, R - H)$$

и

$$v_2 = \frac{1}{3} \pi\, H_,^2\, (3\, R - H_,).$$

Исто тако се налази да је:

$$v = \frac{1}{6} \pi\, h\, (3\, \varrho^2 + 3\, \varrho_,^2 + h^2).$$

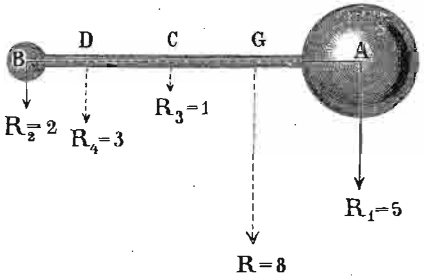
Најзад пошто је:

$$x_1 = \frac{1}{2} H\left(\frac{2\,\varrho^2 + H^2}{3\,\varrho^2 + H^2}\right) \text{ и } x_2 = h + \frac{1}{2} H_{,}\left(\frac{2\,\varrho_{,}^2 + H_{,}^2}{3\,\varrho_{,}^2 + H_{,}^2}\right)$$

излази да се тежиште кружног појаса налази на одстојању:

$$x = \frac{1}{2}\, h\, \frac{2\,\varrho^2 + 4\,\varrho_{,}^2 + h^2}{3\,\varrho^2 + 3\,\varrho_{,}^2 + h^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (199$$

415. Тежиште сложених тела. — Кад нам је дато да одредимо тежиште телима која су у разним својим деловима сложена из маса разних густина, или кад имамо да одредимо тежиште скупу неколико тела разних тежина и маса, онда се може тежиште најлакше одредити, кад то сложено тело разложимо на онакве делове, којима посебице знамо одредити тежиште према до сад изложеним законима. Нека су нам дате две разне хомогене кугле A и B (сл. 88.) спојене једним штапом C,



Сл. 88.

па се тражи да целом систему одредимо тежиште. Овде треба да су нам познате тежине сваког тог дела посебице, онда ћемо у тежишту сваког тог дела, пошто напред знамо где је, замислити силе тих величина. Све те силе теку паралелно, и ми имамо сад три разне паралелне силе да сложимо у једну резултанту, којој ћемо нападну тачку G, па дакле и тежиште целог система простим сразмерама моћи одредити.

Овде је систем био сложен из све самих геометарски правилних тела; међутим се може захтевати,

тежиште телима без правилних геометријских облика. Али ма како била неправилна та тела, ипак ћемо их моћи разложити на такве делове, којима ћемо према досадањем моћи посебице одредити тежиште и тежину, запремину, површину или дужину. Тиме ћемо за сваки тај део моћи одредити статички моменат, а кад то имамо, онда ваља да се послужимо ма којом одговарајућом општом једначином облика:

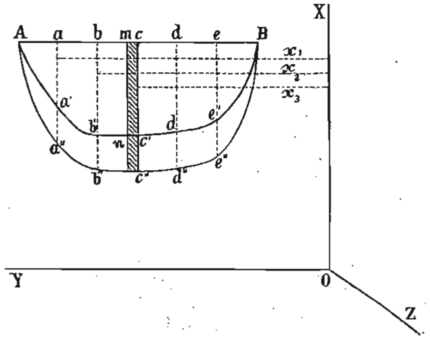
$$\xi_0 = \frac{p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + p_3\, x_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\, p_n\, x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\, p_n}$$

$$\eta_0 = \frac{p_1\, y_1 + p_2\, y_2 + p_3\, y_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\, p_n\, y_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\, p_n}$$

$$\xi_0 = \frac{p_1\, z_1 + p_2\, z_2 + p_3\, z_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\, p_n\, z_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\, p_n}$$

где ће $p_1, p_2, p_3 \cdot\ \cdot\ \cdot$ значити, како кад, тежину, површину, запремину, масу или дужину одговарајућих делова, на које смо дато тело разложили.

416. Тежиште тела, ограничена ма каквом кривом површином. — Врло је често потребно наћи тежиште некога тела, које је ограничено каквом кривом површином, којој се не зна геометријски закон. Онда ћемо цело тело разложити, на врло танке паралелне листове. Пошто је тело хомогено, тежине тих листова, биће сразмерне њиховим запреминама, и довољно ће онда бити да срачунамо тежишта тих листова према трима правоуглим осама. Нека су X, Y и Z (сл. 89.) те три осе које се секу у 0. Означимо са $v_1\, v_2\, v_3 \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\, v_n$ елементарне запремине, чији збир износи целу запремину V; означимо са $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$ $(x_3\, y_3\, z_3) \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (x_n\, y_n\, z_n)$ координате



Сл. 89.

тих разних тежишта, а са $X_0\,Y_0\,Z_0$ координате тежишта целога тела. Онда ћемо имати:

$$VX_0 = v_1\,x_1 + v_2\,x_2 + v_3\,x_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n\,x_n$$

$$VY_0 = v_1\,y_1 + v_2\,y_2 + v_3\,y_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n\,y_n$$

$$VZ_0 = v_1\,z_1 + v_2\,z_2 + v_3\,z_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n\,z_n$$

одакле је:

$$X_0 = \frac{v_1\,x_1 + v_2\,x_2 + v_3\,x_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n\,x_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n}$$

$$Y_0 = \frac{v_1\,y_1 + v_2\,y_2 + v_3\,y_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n\,y_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n}$$

$$Z_0 = \frac{v_1\,z_1 + v_2\,z_2 + v_3\,z_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n\,z_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \cdot\;\cdot\;\cdot\; v_n}$$

Рецимо да су пресеци, којима делимо тело на танке листиће, паралелни с равни XZ а управни на раван YZ. Означимо са $f_1\,f_2\,f_3 \cdot\;\cdot\;\cdot\; f_n$ површине тих листова, а са $x_1{}'\,x_2{}'\,x_3{}' \cdot\;\cdot\;\cdot\; x_n{}'$ њихово одстојање од X. По ординатама тачака $a, b, c \cdot\;\cdot\;\cdot$ пренесимо дужине aa'', $bb''\,cc'' \cdot\;\cdot\;\cdot$ једнаке производима одговарајућих површина $f_1\,f_2\,f_3 \cdot\;\cdot\;\cdot$ са њиховим одстојањима $x_1{}'\,x_2{}'\,x_3{}' \cdot\;\cdot\;\cdot$ од x и кроз њихове крајеве A, $a''\,bb'' \cdot\;\cdot\;\cdot$ провуцимо једну линију $A\,a''\,b''\,c'' \cdot\;\cdot\;\cdot\; B$. Површина, ограничена том кривом линијом није ништа друго до збир:

$$f_1\,x_1{}' + f_2\,x_2{}' + f_3\,x_3{}' + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; f_n\,x_n{}'$$

па дакле и моменат VX_0 запремине тела у односу према X. Јер ако, пошавши од тачке c, узмемо један елеменат cm и повучемо ординату mn, онда се површина $cc''mn$ може сматрати као правоугаоник чија ће површина бити $cc''mn$; али је $cc'' = f_3\,x'_3$ према томе површина $cc''mn = f_3 \cdot x'_3 \cdot mn$ или $f_3 \cdot mnx'_3$. Али пошто је $f_3\,mn$ елементарна запремина између два веома блиска пресека, производ $f_3 \cdot mn\,x_3{}'$ биће моменат те запремине према x. Према томе збир свију површина сличних са $cmnc''$, т. ј. цела површини $A\,a''\,b''\,c'' \cdot\;\cdot\;\cdot\; B$ представљаће збир момената $v_1\,x_1 + v_2\,x_2 + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$ или целокупни моменат VX_0. Ако ту површину, одређену Симпсоновом методом означимо са F, имаћемо:

$$VX_0 = F \text{ одакле } X_0 = \frac{F}{V}.$$

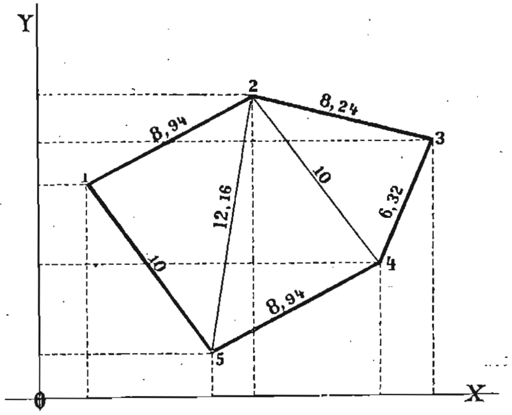
На исти се начин одређују координате Y_0 и Z_0 у односу на равни које пролазе кроз Y и Z.

Овако одређивање тежишта примењено је код конструкције бродова.

417. *Примери.* 1. Одредимо тежиште једном линијском неправилном петоуглу кога су углови одређени овим координатама (сл. 90):

$$a_1 = 2,\ a_2 = 10,\ a_3 = 18,\ a_4 = 16,\ a_5 = 8$$

$$b_1 = 10,\ b_2 = 14,\ b_3 = 12,\ b_4 = 6,\ b_5 = 2$$



Сл. 90.

По себи се разуме да ћемо овде употребити опште једначине за одређивање тежишта линијских слика:

$$X_0 = \frac{l_1\,x_1 + l_2\,x_2 + l_3\,x_3 + l_4\,x_4 + l_5\,x_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}$$

$$Y_0 = \frac{l_1\,y_1 + l_2\,y_2 + l_3\,y_3 + l_4\,y_4 + l_5\,y_5}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}$$

На првом месту ваља да одредимо дужине датих линија l_1 l_2 l_3 $\cdot\ \cdot\ \cdot$ То ћемо најлакше постићи кад сваку од тих линија сматрамо као хипотенузу правоуглог троугла, чије су катете паралелне са коорд. осама и чије су величине дате самим координатама. Ако на пример хоћемо да одредимо линију $1-2=l_1$ онда ће она бити хипотенуза троугла кога је једна катета b_2-b_1 а друга a_2-a_1; т. ј.:

$$b_2-b_1=14-10=4$$

$$a_2-a_1=10-2=8$$

према томе:

$$l_1=\sqrt{4^2+8^2}=8{\cdot}94.$$

На исти начин:

$$\text{линија } \overline{1-5}=l_5=\sqrt{(b_1-b_5)^2+(a_5-a_1)^2}$$

$$=\sqrt{8^2+6^2}=10.$$

$$\text{линија } \overline{2-3}=l_2=8{\cdot}24$$

$$\text{»} \quad \overline{3-4}=l_3=6{\cdot}32$$

$$\text{»} \quad \overline{4-5}=l_4=8{\cdot}94.$$

x_1 x_2 x_3 $\cdot\ \cdot\ \cdot$ у горњој општој једначини као и y_1 y_2 y_3 значе координате тежишта сваке линије посебице и те координате ваља из горњих вредности да одредимо. На тај начин добијамо:

$$x_1=\frac{a_1+a_2}{2}=6;\quad x_2=\frac{a_2+a_3}{2}=14;\quad x_3=\frac{a_3+a_4}{2}=17;$$

$$x_4=\frac{a_4+a_5}{2}=12;\quad x_5=\frac{a_5+a_1}{2}=5$$

$$y_1=\frac{b_1+b_2}{2}=12;\quad y_2=\frac{b_2+b_3}{2}=18;\quad y_3=\frac{b_3+b_4}{2}=9;$$

$$y_4=\frac{b_4+b_6}{2}=4;\quad y_5=\frac{b_5+b_1}{2}=6.$$

Према томе кад горе заменимо те вредности биће:

$$x_0=\frac{8{\cdot}94\cdot 6+8{\cdot}24\cdot 14+6{\cdot}32\cdot 17+8{\cdot}94\cdot 12+10\cdot 5}{8{\cdot}94+8{\cdot}24+6{\cdot}32+8{\cdot}94+10}=10{\cdot}3$$

$$y_0=\frac{8{\cdot}94\cdot 12+8{\cdot}24\cdot 18+6{\cdot}32\cdot 9+8{\cdot}94\cdot 4+10\cdot 6}{8{\cdot}94+8{\cdot}24+6{\cdot}32+8{\cdot}94+10}\,8{\cdot}6.$$

2. Нека горњи петоугао представља петоуглу површину са истим координатама; онда ћемо целој површини овако одредити тежиште.

Поделићемо је на три троугла 1, 2, 5; 2, 5, 4; 2, 4, 3; па ћемо одредити још дужине линија:

$$l_6=\overline{2-5}=12{\cdot}16,\quad \text{и}\quad l_7=\overline{2-4}=10.$$

Пошто су нам стране свију троуглова познате, онда ћемо из њих одредити површине сваког тог троугла по обрасцу:

$$f=\sqrt{\frac{1}{2}s\left(\frac{s}{2}-a\right)\left(\frac{s}{2}-b\right)\left(\frac{s}{2}-c\right)}$$

где као што знамо s значи збир све три стране у сваком троуглу.

Тако на пример у троуглу 1, 2, 5 састављеном из страна l_1, l_6, l_5

$$\frac{s}{2}=\frac{8{\cdot}94+12{\cdot}6+10}{2}=15{\cdot}55.$$

$$\frac{s}{2}-l_1=6{\cdot}61;\quad \frac{s}{2}-l_5=5{\cdot}53;\quad \frac{s}{2}-l_7=3{\cdot}39$$

па дакле:

$$f_1=\sqrt{15{\cdot}55\cdot 6{\cdot}61\cdot 5{\cdot}55\cdot 3{\cdot}39}=43{\cdot}976.$$

Исто тако се налази површина f_2 троугла 2, 4. 5, састављеном из страна l_6 l_4 l_7

$$f_2=43{\cdot}976$$

а такође и површина f_3 троугла 2, 3, 4 састављеном из страна l_2, l_3, l_7,

$$f_3=25{\cdot}933.$$

За тим треба да одредимо ξ_1 ξ_2 ξ_3 и η_1, η_2 η_3 остојања тежишта тих троуглова од координатних оса. Међу тим знамо према ранијем, да ће тежиште троугла 1, 2, 5, т. ј. површине f_1 пасти на остојањима:

$$\xi_1=\frac{a_1+a_5+a_2}{3}\quad \text{и}\quad \eta_1=\frac{b_1+b_5+b_2}{3}$$

$$=6\,{}^2/_3 \qquad\qquad =8\,{}^2/_3$$

Исто тако тежиште троугла 245 или површине f_2 биће на:

$$\xi_2 = \frac{a_2 + a_4 + a_5}{3} = 11\,\frac{1}{3}, \quad \eta_2 = \frac{b_2 + b_4 + b_5}{3} = 7\,\frac{1}{3}.$$

Најзад координате тежишта троугла 2, 3, 4 или f_3 биће:

$$\xi_3 = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} = 14^2/_3, \ \eta_3 = \frac{b_2 + b_3 + b_4}{3} = 10\,^2/_3$$

а цела површина петоугла:

$$f = 43{\cdot}976 + 43{\cdot}976 + 25{\cdot}933 = 113{\cdot}855$$

према томе координате тежишта целог петоугла биће:

$$\xi_0 = \frac{43{\cdot}976 \cdot 6^2/_3 + 43{\cdot}976 \cdot 11\,\frac{1}{3} + 25{\cdot}933 \cdot 14^2/_3}{113{\cdot}885} =$$

$$= \frac{1171{\cdot}865}{113{\cdot}885} = 10{\cdot}2$$

$$\eta_0 = \frac{43{\cdot}976 \cdot 8^2/_3 + 43{\cdot}976 \cdot 7\,\frac{1}{3} + 25{\cdot}933 \cdot 10^2/_3}{113{\cdot}885} =$$

$$= \frac{980{\cdot}20}{113{\cdot}885} = 8{\cdot}6$$

3. Један обелиск квадратног пресека и облика зарубљене пирамиде висок је 22 м.; доња ивица има 2·35 м. а горња 1·68 м. Где му пада тежиште?

Знамо да је тежиште зарубљене пирамиде на одстојању:

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{F + 2\sqrt{Ff} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f}$$

где треба најпре израчунати F и f.

Према датим димензијама излази:

$$F = 2{\cdot}35^2 = 5{\cdot}5225 \text{ квм.}$$

$$f = 1{\cdot}68^2 = 2{\cdot}8224 \text{ квм.}$$

$$x = \frac{22}{4} \cdot \frac{5{\cdot}5225 + 2\sqrt{5{\cdot}5225 \cdot 2{\cdot}8224} + 3 \cdot 2{\cdot}8224}{5{\cdot}5225 + \sqrt{5{\cdot}5225 \cdot 2{\cdot}8224} + 2{\cdot}8224}$$

$$= \frac{11}{2} \cdot \frac{21 \cdot 8857}{12 \cdot 2929} = 9{\cdot}79^m.$$

Дакле тежиште тог обелиска лежи у средишној му оси на висини од $9{\cdot}97^m$ од основице.

В. **О равнотежи и стабилности.**

418. Према ономе шта смо све о тежишту рекли излази, да је тежиште некога тела нападна тачка резултанте свију оних паралелних сила које на тело дејствују услед теже. Пошто знамо да се та резултанта тêжних сила у неком телу зове тежина тела, то је тежиште нападна тачка тежине. И ако тело ма на који начин тако подупремо, да се оно не може кретати правцем којим га његова тежина вуче, онда се каже да је то тело у *равнотежи*. Тело је дакле у равпотежи, кад ма каквом страном силом (подупирањем, утврђивањем, вешањем и т. д.) потремо његову тежину.

Ако на неко тело осим тежине дејствују још какве друге силе, које теже да га у свом правцу покрену, онда ће тело бити у равнотежи кад успемо да исто толиким али супротним силама њихово дејство потремо.

Равнотежа тела може се постићи на три разна начина:

1. Вешањем, подупирањем или утврђивањем тела у једној само тачки.

2. Подупирањем или утврђивањем у двема његовим тачкама.

3. Подупирањем или утврђивањем у више од двеју тачака које нису у правој линији.

У сваком том случају утврђено се тело другојаче понаша.

а. Равнотежа у једној тачки подупртих или утврђених тела.

419. Ако хоћемо да утврђивањем тела само у једној тачки, оно буде у равнотежи, т. ј. кад се тежина тела хоће да потре ма каквом другом силом, онда та сила:

a. мора дејствовати вертикално на више;

b. мора бити најмање исто толико велика колика је и тежина тела;

с. мора њена нападна тачка лежати ма где у вертикалној тешкој линији тога тела.

Из овог трећег услова излази да место тачке у којој ће дејствовати сила што има да потре тежину тела, т. ј. место тачке у којој ћемо тело подупрти није одређена, него може лежати ма где у вертикалној тешкој линији, па дакле њен положај према тежишту може бити разан.

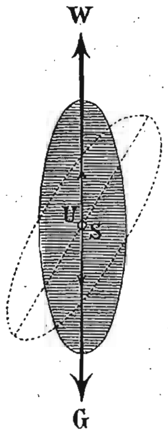
Свега има три разна положаја тачке подупирања или утврђивања тела према тежишту и то:

1., та тачка може пасти у само тежиште тела; за таква се тела обично каже да су утврђена;

2., она може бити у вертикалној тешкој линији али *изнад* тежишта; за таква се тела каже да су обешена;

3., она може лежати у вертикалној тешкој линији *испод* тежишта. Онда се обично каже да су тела подупрта.

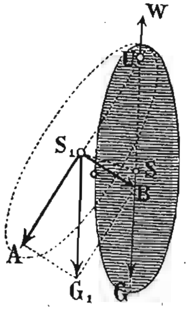
420. Кад ослонац пада заједно са тежиштем т. ј. кад тело утврдимо у тачки где је тежиште (сл. 91.) онда се нападна тачка силе која има да потре тежину тела и нападна тачка тежине налазе на истом месту. Те две тачке остају на истом месту ма како ми тело обртали око ослонца, па с тога ће то тело ма у ком положају бити увек у равнотежи. И онда се каже да се такво тело налази у *немарној* или *индиферентној* равнотежи. У такој се равнотежи налазе точкови код кола, казаљке код великих сатова, као и врата и прозори кад се око вертикалних оса окрећу и т. д.



Сл. 91.

421. Кад се ослонац *U* (сл. 92.) налази изнад тачке тежишта *S*, онда ће тело бити опет у равнотежи или у миру. Ако то тело око тачке ослонца *U* изведемо из равнотежног положаја тако да *S* дође у S_1, онда вертикална тешка линија $S_1\ G_1$ не пролази више кроз ослонац и тело не може бити у равнотежи.

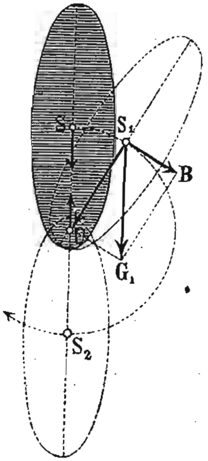
Пошто се тело правцем S_1G_1 не може кретати јер је у *W* утврђено, ми ћемо ту тежину разложити на две компоненте: S_1A и S_1B. Прва пролази кроз ослонац и у њему ће се потрти, а друга S_1B кретаће тело својим правцем и довешће га да тежиште заузме свој првашњи положај *S*. Извођењем тела из равнотежног положаја, т. ј. премештањем тежишта из *S* у S_1 ми смо то тежиште подигли и компонента S_1B тежи да враћањем тела у првашњи положај, спусти тежиште у *S*. И таква равнотежа, код које се неко тело изведено из свог равнотежног положаја и остављено самом себи, враћа у свој првашњи положај зове се *постојана, поуздана* или *стабилна*.



Сл. 92.

Кад нам је дакле стало за тим, да неко тело утврђено у једној тачки задржи за свагда свој положај, т. ј. кад хоћемо да утврђено тело буде у стабилној равнотежи, ми ћемо га обесити т. ј. утврдићемо га увек тако, да му тежиште падне *испод* тачке ослонца. Тако се намештају дуварски сатови, слике и т. д.

422. Кад је тело наслоњено у тачки *U* (сл. 93.) која лежи у тешкој вертикалној линији али *испод* тежишта *S* онда ће као што знамо тело бити опет у равнотежи. Али ако то тело мало изведемо из равнотежног положаја, тако да тежиште из *S* дође у S_1 онда већ S_1G_1 не пролази више кроз ослонац и о равнотежи не може бити говора. Компонента S_1U коју добијамо разлагањем тежине S_1G_1 пролази кроз ослонац *U* и у њему се потире, док на против компонента S_1B вуче тело својим правцем и тежи да га сасвим окрене и доведе тежиште из S_1 у S_2 т. ј. док тежиште дође испод ослонца. Овде видимо да се тело изведено из равнотежног положаја, не враћа више у њ, него прелази у стабилну равнотежу. И таква равнотежа, код које је и најмања сила у стању да тело доведе у сасвим нов равнотежни положај зове се *непо-*

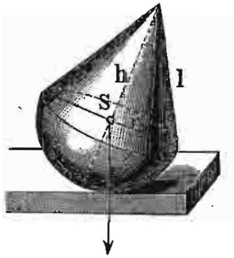


Сл. 93.

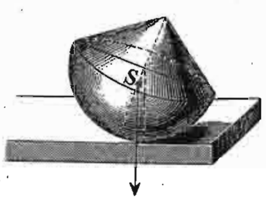
стојана, непоуздана или *лабилна.* Тело је дакле у лабилној равнотежи, кад му је тежиште *изнад* ослонца.

У лабилној се равнотежи налазе гимнастичари на конопцу, велосипедисте на велосипеду са два точка и т. д.

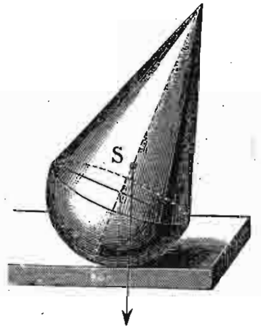
423. Исто се тако може једна полукугла спојена са конусом налазити у свима тим равнотежама просто према томе колика је висина конуса што је с њом спојен. (сл. 94, 95, 96.).



Сл. 94.



Сл. 95.



Сл. 96.

Таква полукугла наслоњена на какву хоризонталну подлогу биће у индиферентној равнотежи кад тежиште целине падне у средиште полукуглине површине. Другим речима, такво ће тело бити у индиферентној равнотежи, кад буде моменат конусне запремине раван моменту полукугле, оба момента рачуната од тачке ослонца.

Према ранијем знамо да је запремина конуса:

$$v_1 = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

и остојање тежишта му:

$$x_1 = \frac{h}{4}$$

па дакле његов моменат:

$$v_1 x_1 = \frac{r^2 \pi h}{3} \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{12} r^2 h^2 \pi$$

запремина полукугле је:

$$v_2 = {}^2/_3 \, r^3 \pi$$

а тежиште:

$$x_2 = {}^3/_8 \, r$$

с тога је моменат њен:

$$v_2 y_2 = {}^2/_3 \, r^3 \pi \cdot {}^3/_8 \, r = \frac{1}{4} r^4 \pi$$

за индиферентну равнотежу мора да буде:

$$v_1 x_1 = v_2 x_2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{12} r^2 h^2 \pi = \frac{1}{4} r^4 \pi$$

или:

$$h^2 = 3 r^2$$

одакле:

$$h = r \sqrt{3}.$$

Дужина конуса рачуната од ивице полукугле па до врха конуса биће за тај случај:

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + 3 r^2} = 2 r.$$

Према томе такво ће тело бити у стабилној равнотежи кад је дужина конуса l мања од $2 r$ а у лабилној, кад је та дужина l већа од $2 r$.

Ако је с полукуглом спојен цилиндар место конуса, онда на исти начин добијамо услов за индиферентну равнотежу:

$$r^2 \pi h \cdot \frac{h}{2} = {}^2/_3 \, r^3 \pi \cdot {}^3/_8 \, r$$

одакле:

$$h = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

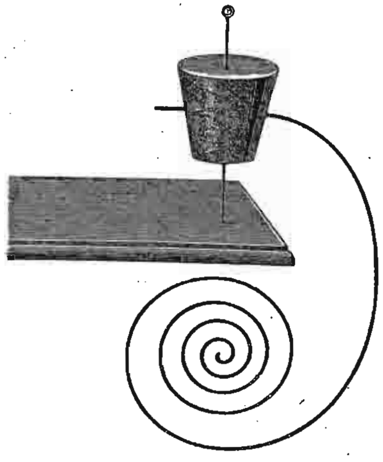
Ако је најзад спојена шупља цилиндарска површина с шупљом полукугластом површином, онда је тело у индиферентној равнотежи, кад буде:

$$2 r \cdot \pi h \cdot \frac{h}{2} = 2 r^2 \pi \cdot \frac{r}{2}$$

т. ј. кад буде $h = r.$

424. Врло је често потребно, да се телима, која се налазе у лабилној равнотежи, повећа стабилност па да се из лабилне равнотеже преведу у стабилну. То се најобичније може постићи, кад се таква тела споје на подесним местима са телима специфички тежим, у след чега ће се тежиште целине толико помаћи, колико је потребно па да тело буде у стабилној равнотежи.

Тако на пример кад кроз парче плуте провучемо чиоду, неће нам никако испасти за руком да то тело о врх чиоде наслонимо. Међу тим ако кроз плуту провучемо још једну спирално увијену металну жицу као што се то на слици 97. види, онда ће тежиште плуте, чиоде и жице скупа пасти испод врха чиоде и такво се тело налази у стабилној равнотежи па за то ће врло лако стојати на врху чиоде. У самој ствари то тело не стоји него виси о врх чиоде.



Сл. 97.

Исто тако никад нећемо моћи наместити један новац да стоји на врху игле. Међу тим ако на новац метемо парче плуте у које су косо забодене две виљушке, новац ће сасвим постојано остати на врху игле.

Кад парче зове спојимо са оловном куглицом, па тако спојене положимо уздуж на сто, зова ће се исправити. Сува зова је врло лака, тако да њена тежина према тежини оловне кугле ишчезава, па ће за то тежиште целине пасти у саму куглу. И кад цилиндар лежи положен на столу, онда ће вертикала из тежишта пролазити кроз неподупрту тачку ван зове, и с тога ће се цилиндар исправити.

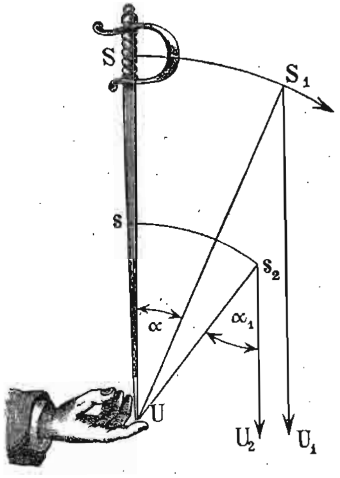
Кад се тај зовин цилиндар буде исправљао он неће на један мах заузети вертикалан положај, него ће се неко време њихати на једну и другу страну док се не заустави. Исто се тако понашају и стабилно обешена тела кад се из свог равнотежног положаја изведу.

Такво њихање тела зове се *осциловање тежишта око ослонца.*

Такво њихање или осциловање тежишта видимо код теразија, код клатна, код неких играчака где се поједини делови (обично главе у лутака) дуго њихају и т. д.

Осциловање тежишта биће у толико краће у колико је тело што се клати теже и у колико се тежиште тела више пење при иначе једнаком путу. Ђермови неосетљивих теразија, код којих тежиште лежи дубоко испод ослонца, врло мало осцилују. Исто се тако и кратка клатна врло брзо зауставе.

425. Много је лакше неко тело, које је у лабилној равнотежи, одржати на дуже време у тој равнотежи, кад је ослонац покретан но кад је сталан. На пример један усправљен штап можемо на прсту дуже време одржати у лабилној равнотежи кад згодним кретањем руке увек прст подмећемо испод тежишта штапа, но кад руку мирно на једном месту држимо. Овако одржавање тела у лабилној равнотежи зове се *балансирање.* (сл. 98.).



Сл. 98.

Потражимо услове од којих зависи успешно балансирање.

Нека се тежиште мача, који на прсту балансирамо измакло за лук SS_1 т. ј. за угао α од вертикалног правца и ако хоћемо да не падне, ваља да му ослонац U преместимо у U_1 те да његово тежиште подупремо.

Кад би тежиште мача било у s и кад би и ово тежиште s прешло исти пут ss_2 који и тежиште SS_1 онда да не би мач пао, ваљало би подметути ослонац у U_2 т. ј. ваљало би измаћи ослонац за угао α_1 па успети задржати мач. Ако SU означимо са R а sU са r онда је пут првога тежишта:

$$SS_1 = \frac{2\,R\,\pi\,\alpha}{360}$$

а другога:

$$ss_1 = \frac{2 r \pi \alpha_1}{360}.$$

Пошто смо рекли да су оба тежишта прешла исте лукове онда је:

због $SS_1 = ss_1$ и $R \alpha = r \alpha_1$

или што је све једно:

$$\alpha : \alpha_1 = r : R$$

дакле углови за које се тело измакло стоје у изврнутој размери са висинама тежишта изнад ослонца. То ће рећи, што је тежиште даље од ослонца, т. ј. што је тело које балансирамо дуже (при иначе једнаким околностима) угао α за који ваља да помакнемо ослонац па да тело задржимо је мањи, па дакле такво је тело лакше балансирати.

Исто тако, што је тело које балансирамо теже у толико га је лакше балансирати, јер се код тешког тела лакше опази промена у тежини (приликом нагињања на једну страну) а тако исто такво тешко тело теже могу споредни утицаји пореметити.

Према томе *једно се тело може у толико лакше балансирати у колико је теже и у колико му је тежиште даље од ослонца.*

b. Равнотежа у две тачке подупртих или утврђених тела.

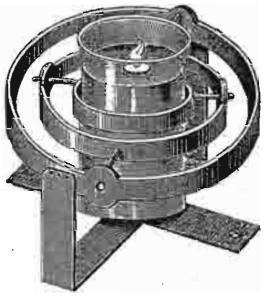
426. Кад се тело утврди у једној тачки онда је истина свако прогресивно кретање немогуће али се тело може у свима могућим правцима око утврђене тачке обртати. На тај начин свакој тачки тела одговара једна кугласта површина по којој се она може окретати али изван које не може никако изаћи.

Ако тело утврдимо у две тачке онда је његово обртање ограниченије. Такво се тело може обртати само око линије која веже обе тачке у којима је тело утврђено, тако да поједине тачке тела могу описивати само кружне паралелне путање, а средишта свију тих путања лежаће у оси која пролази кроз тачке утврђења тела. Та се оса зове *оса обртања* а равни у којима се поједине тачке окрећу и које су све управне на ту осу зову се *равни обртања*.

Пошто су разне тачке тела на разним даљинама од осе обртања то ће и путање па дакле и брзине обртања појединих тачака бити разне. У каквом односу стоје путање и брзине обртања видели смо код централног или кружног кретања (**144**). За сад ћемо још напоменути да је полупречник кружне путање сваке поједине тачке раван нормалном остојању те тачке од осе обртања.

Што се равнотеже овако подупртих тела тиче, вреде у главноме они исти закони који вреде и за тела утврђена или подупрта у једној тачки. Тако на пример равнотежа ће бити индиферентна кад оса обртања пролази кроз тежиште тела; лабилна кад је та оса испод а стабилна кад је она изнад тежишта.

427. Закони о утврђеним телима у две тачке примењени су код тако званог *Кардановог зглоба* (сл. 99.) Кад се једно тело може слободно обртати око једне осе која пролази кроз његову раван али изнад тежишта те се дакле то тело налази у стабилној равнотежи, онда ће то тело остати увек у миру кад се подлога његова креће у правцу управном на осу обртања тела. Ако сад носиоце ослонаца засебно утврдимо у две тачке тако да се тај носилац може за се обртати око једне осе која ће стајати управно на прву осу онда се никакво обртање подлоге неће пренети на тело.



Сл. 99.

На тај се начин утврђују лампе, компаси и т. д. на морским лађама као и многи физички апарати за које се хоће да остану увек у хоризонталном или вертикалном правцу ма да се подлога која их носи различито нагиба. Такве се ствари стабилно обесе о један прстен у двема тачкама тако да се око једне осе могу обртати. За тим се тај прстен за се обеси о други мало већи прстен и у две тачке којих правац стоји управно на правац првих двеју. Другим речима, прстен у коме се тело може слободно обртати око једне осе утврди се у други један прстен у коме се он заједно са телом може обртати око осе која је управна на ону прву.

c. Равнотежа у три или више тачака утврђених или подупртих тела. — Стабилност тела.

428. Кад је неко тело подупрто или утврђено у више од две тачке, које не леже у једној линији онда се то тело налази у потпуној равнотежи, т. ј. оно се не може кретати. Свако тело положено на какву хоризонталну подлогу наслања се на њу најмање у три тачке и такво ће тело онда бити у равнотежи на тој подлози, т. ј. не ће се по њој кретати. По себи се разуме да то вреди и за она тела која су у више од три тачке па дакле и целим површинама наслоњена и подупрта.

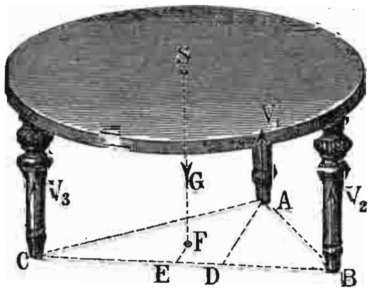
Кад се тела наслањају тачкама, које не леже у правој линији (а то је главни услов за равнотежу) онда се оне могу правим линијама спојити и направити троугао, четвороугао, или ма какав многоугао. Тачке наслањања које би лежале у унутрашњости тих слика не узимају се у рачун пошто оне чисто механичку равнотежу ни у колико не мењају. Тако се налазе подупрта сва чврста тела на земљи, столице, столови, кола, грађевине и т. д. и т. д.

Код прва два начина утврђивања и подупирања видели смо да ће тела само онда бити у стабилној равнотежи, ако је или тачка утврђена, или оса обртања изнад тачке тежиште тела; код утврђивања у три или више тачака, тај услов није потребан. Шта више тела су у стабилној равнотежи и онда кад је тежиште изнад подлоге (столови, столице и т. д.). Само се сад јављају други услови за равнотежу таквих тела, и то:

1. Први услов за равнотежу у три или више тачака подупртих тела јесте тај по коме подлога на коју се тело наслања мора бити довољно јака да потре тежину тела. Овај је услов и сувише јасан да би га ваљало даље објашњавати.

2. За тим, да би тако подупрто тело било у равнотежи, треба да вертикална тешка линија пробија подлогу у таквој тачки, која лежи у унутрашњости оног полигона, који се добија спајањем тачака подупирања. Ако је тело подупрто површином, онда вертикална тешка линија мора за равнотежу, пробијати ма где ту површину.

Узнимо један сто који се својим трима ногама наслања на подлогу. (сл. 100.). На оним местима где ноге додирују подлогу, притискују на подлогу компоненте целокупне тежине стола G чија је нападна тачка у тежишту S. Тим притисцима ногу, опире се подлога исто толиким отпорима V_1 V_2 V_3 али у супротном смислу. Целокупни притисак ногу, представљен је тежином стола G са нападном тачком у S. Резултујући отпор V подлоге био би резултанта отпора V_1 V_2 V_3 са нападном тачком на пр. F. И ако сад, правац тежине тела G, т. ј. ако вертикална тешка линија тела пролази кроз ту тачку F која је у унутрашњости датог троугла и у којој је нападна тачка резултујућег отпора, онда ће се целокупни отпор V и тежина тела G узајамно потрти и тело се тако понаша као да на њега тежа не дејствује.



Сл. 100.

На против, ако вертикална тешка линија пролази мимо троугла који је постао из тачака у којима се цео сто наслања на подлогу, онда се тежина не ће потрти исто толиким отпором, и тело ће се око једне своје ивице претурити тако да заузме положај у коме ће његова вертикална тешка линија пролазити кроз површину ограничену многоуглом, који је постао из тачака наслањања тела на подлогу. И догод се тај услов не испуни, тело не може бити у равнотежи.

Да би нашли отпор V_1 који се противи притиску ноге A послужимо се ставом који смо мало час извели да алгебарски збир момената мора бити раван нули. Сматрајмо линију BC као осу обртања, па онда имамо:

$$G \cdot \overline{FE} - V_1 \cdot \overline{AD} = 0$$

одакле:

$$V_1 = G \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{AD}}.$$

Исто тако можемо одредити и отпоре V_2 и V_3.

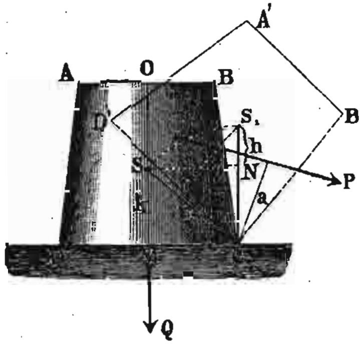
Ако је крак $\overline{EF} = 0$, т. ј. ако вертикална тешка линија стола, пролази кроз саму страну BC троугла ABC, онда мора према горњој једначини бити и

$$V_1 = 0.$$

Кад би $\overline{EF}$ било одречно, т. ј. кад би вертикална тешка линија стола пролазила изван троугла ABC, онда би и V_1 било одречно. То значи, да би у тачки A био потребан још неки споредни притисак па да сто остане у равнотежи, кога кад не би било, сто би се морао претурити око ивице BC.

Кад вертикална тешка линија пролази кроз саму ивицу AB, онда је сто у лабилној равнотежи, и најмања сила у стању је да га претури или исправи. На против кад она пролази кроз сам троугао, онда је сто у стабилној равнотежи и онда је потребна сасвим нова сила, па да сто претури, и моменат те силе узет према ивици око које тежимо сто да претуримо мора најмање бити толики, колики је моменат тежине стола (такође узетог према истој ивици). Величина момента тежине узет према оној ивици троугла око које хоћемо сто да претуримо, служи за мерило стабилности стола, или тела у опште, и назива *моменат стабилности* тела. Само пак опирање тела према страним силама, којим тежи да свој положај на хоризонталној подлози одржи, зове се *стабилност* или *постојаност*.

429. Мерило стабилности. — Да бисмо добили мерило за стабилност, или да бисмо дознали од чега стабилност некога тела зависи, посматрајмо тело трапезног пресека, (сл. 101.) тежине Q, на које дејствује сила P која тежи да га око тачке C претури. Сила дејствује моментом Pa, а њој се опире тежина тела Q, моментом $QMC = Qb$. За равнотежу мора да буде:



Сл. 101.

$$Qb = Pa$$

одакле:

$$P = \frac{b}{a} \cdot Q.$$

Из те једначине читамо све услове од којих стабилност једног тела зависи. Сила P па дакле и стабилност којом се тело тој сили опире биће већа, у колико је:

1., Q веће, т. ј. *у колико је при иначе једнаким околностима тело теже.*

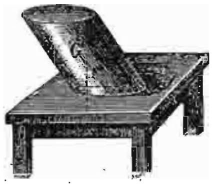
2., b веће, т. ј. *у колико је основица тела већа или шира.*

Из имениоца горње једначине дознајемо, да ће нека сила P у толико лакше претурити неко тело, у колико јој је крак а већи, т. ј. у колико дејствује даље од основице. Али овај услов није мерило за стабилност тела него за дејство силе.

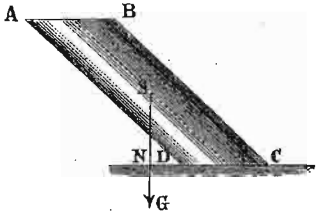
Још један трећи услов за стабилност тела добићемо, ако тело толико померимо да га доведемо у лабилну равнотежу $A'B'CD'$, тако да тешка линија $S_1 C$ пролази кроз ивицу C. Тим померањем тела ми смо преместили тежиште S у S_1, то значи попели смо га за висину h. И очевидна ствар да ћемо теже померити неко тело, у колико је та висина h на коју треба тежиште издићи већа, а она ће бити већа, у колико је тежиште ближе основици. Према томе стабилност некога тела биће већа што је:

3., *тежиште тела ближе основици.*

Код усправљених тела стабилност је већа но код нагнутих, и код ових последњих стабилност је у толико мања, у колико се вертикална тешка линија већма приближује ивици основице. Код мало нагнутог тела (сл. 102.) вертикална тешка линија не пролази кроз средину основице него ближе ивици, али је овде још тело у стабилној равнотежи. И кад та линија падне ван основице (сл. 103.), тело се претура, ма да је и основица и висина тежишта остала иста као и у првом случају.



Сл. 102.



Сл. 103.

430. Статичка и кинетичка (радна) стабилност. — Стабилност о којој смо до сад говорили зове се статичка и мери се моментом:

$$Q \cdot b \cdot = \text{„}St.\text{“} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (200$$

који показује коликим се моментом тежина једног тела опире страним силама.

Међу тим механички рад, који је потребан па да се једно тело претури, зове се *радна стабилност.*

Тело се претура од тренутка кад смо га довели у лабилну равнотежу, т. ј. кад смо његово тежиште довели у такав положај (в. сл. 104.) да му вертикална тешка линија пролази кроз ивицу, око које хоћемо тело да претуримо. И извршени рад до тог тренутка мери се просто висином **h** на коју смо издигли тежиште тела. Према томе мера за кинетичку стабилност биће очевидно:

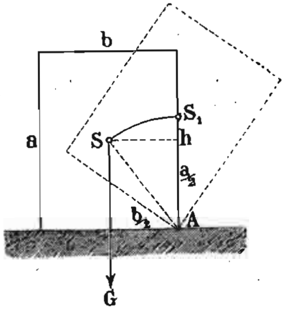
$$R = Q \cdot h \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (201$$

Потпуније обрасце за једну и другу стабилност добићемо, кад посматрамо једно паралелопипедно тело дужине l, висине a, ширине b, и спец. тежине γ. Траже се статичка и динамичка стабилност тога тела за ивицу A.

Према ономе шта смо мало час рекли, статичка стабилност је:

$$St = Q \cdot \frac{b}{2}$$

где је Q тежина а $\frac{b}{2}$ одстојање вертик. тешке линије од ивице.



Сл. 104.

Према датим подацима је запремина тела $a \cdot b \cdot l$, а тежина:

$$Q = a \cdot b \cdot l \cdot \gamma.$$

Одстојање вертикалне тешке линије је од ивице око које хоћемо тело да претуримо $= \frac{b}{2}$, према томе је статичка стабилност датога тела:

$$St = a \cdot c \cdot \gamma \cdot \frac{b^2}{2}.$$

Динамичку или кинетичку стабилност одредићемо овим путем: Имамо:

$$R = Q \cdot h$$

где нам је h неодређено:

$$h = AS' - \frac{a}{2}$$

међутим из $\triangle ASh$

$$AS' = AS = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Статичка стабилност њихова а за ивицу BM износи:

$$M_1 = Hlb\,\sigma\,\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\,Hb\,\sigma\,l^2$$

$$M_2 = bh\,(L - l)\,\sigma \cdot \frac{1}{2}\,(L + l) = \frac{1}{2}\,bh\,(L^2 - l^2)\,\sigma$$

па дакле је стабилност целога тела а за ивицу BM

$$M_{\text{в}} = \frac{1}{2}\,b\,\sigma\,[Hl^2 + h\,(L^2 - l)].$$

Исто тако ће стабилност за ивицу CQ бити:

$$M_1 = Hlb\,\sigma\left(L - \frac{1}{2}\,l\right) = b\,\sigma\,Hl\left(L - \frac{l}{2}\right)$$

$$M_2 = bh\,(L - l)\,\sigma \cdot \frac{1}{2}\,(L - l) = b\,\sigma\,\frac{1}{2}\,h\,(L - l)^2$$

па дакле и цео моменат:

$$M_c = b\,\sigma\left[Hl\left(L - \frac{1}{2}\,l\right) + \frac{1}{2}\,h\,(L - l)^2\right].$$

Ако бисмо хтели да одредимо радну стабилност целога тела на пример за ивицу BM, ваља да нађемо одстојање заједничког тежишта S од те ивице.

Нашли смо да је статичка стабилност целога тела за ту ивицу била:

$$M_{\text{в}} = \frac{1}{2}\,b\,\sigma\,[Hl^2 + h\,(L^2 - l^2)]$$

па кад ту стабилност поделимо тежином, имаћемо крак заједничког тежишта S за BM, т. ј.

$$WV = \frac{\frac{1}{2}\,b\,\sigma\,[Hl^2 + h\,(L^2 - l^2)]}{b\,\sigma\,[Hl + h\,(L - l)]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,[Hl^2 + (h\,L^2 - l^2)]}{[Hl + h\,(L - l)]}.$$

Да бисмо израчунали тешку линију SV, употребићемо општу једначину о статичким моментима:

$$S \cdot \overline{SV} = S_1 \cdot \overline{S_1X} + S_2\,\overline{S_2Y}$$

одакле:

$$\overline{SV} = \frac{S_1\,\overline{S_1X} + S_2\,\overline{S_2Y}}{S}$$

где $S_1\,S_2$ и S тежине значе. Заменом биће:

$$\overline{SV} = \frac{S_1\,\frac{H}{2} + S_2\,\frac{h}{2}}{S} =$$

$$= \frac{Hlb\,\sigma\,\frac{H}{2} + bh\,(L - l)\,\sigma \cdot \frac{1}{2}\,h}{b\,\sigma\,[Hl + h\,(L - l)]} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,[H^2l + h^2\,(L - l)]}{[Hl + h\,(L - l)]}$$

одакле најзад:

$$\overline{WS} = \overline{WU} = \sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2}.$$

Висина пак χ, за коју је тежиште S издигнуто претурањем, биће:

$$\chi = \overline{UT} = \overline{WU} - \overline{WT} = \sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2} - VS$$

па дакле и радна стабилност за ивицу BM:

$$R_{\text{в}} = Q\,\chi = b\,\sigma\,[Hl + h\,(L - l)]\,\left[\sqrt{\overline{WV}^2 + \overline{VS}^2} - \overline{VS}\right].$$

На исти начин нашли бисмо, да је радна стабилност истога тела а за ивицу CQ:

$$R_c = Q\,\chi' = b\,\sigma\,[Hl + h\,(L - l)]\,\left[\sqrt{(L - \overline{WV})^2 + \overline{VS}^2} - \overline{VS}\right].$$

3. Дат је зид или насип пресека трапезног (сл. 106.), чија је горња ширина b и висина h. Задржавајући остале одговарајуће вредности из прошлог задатка, тражи се његова стабилност.

Пошто је сасвим све једно за коју ћемо ивицу рачунати стабилност, то је уопште:

$$St = S_1\,AO + S_2\,\overline{AC} + S_3\,\overline{AQ}.$$

Међутим је:

$$S_1 = \frac{1}{2} h^2 nl \gamma ; \; \overline{AO} = {}^2/_3 \, hn$$

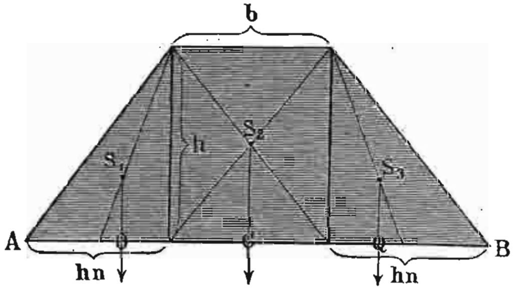
$$S_2 = hbl \gamma ; \overline{AC} = hn + \frac{1}{2} b$$

$$S_3 = \frac{1}{2} h^2 nl \gamma ; AQ = hn + b + \frac{1}{3} hn = \frac{4}{3} hn + b$$

па дакле и:

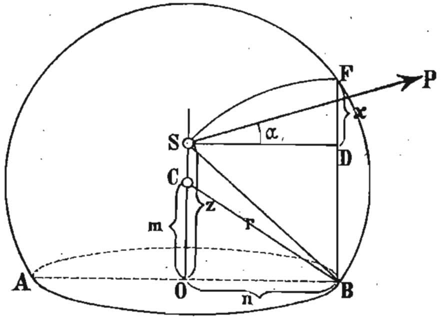
$$St = hl \gamma \left[\frac{1}{3} h^2 n^2 + b \left(hn + \frac{1}{2} b \right) + \frac{1}{2} hn \left({}^4/_3 \, hn + b \right) \right] =$$

$$= hl \gamma \frac{(b + nh)(b + 2 \, nh)}{2}.$$



Сл. 106.

5. Куглин одсечак висине $h = 30$ см. (сл. 107.), одсечен од кугле чији је полупречник $r = 20$ см., лежи на хоризонталној подлози. Нека сила P. дејствује на његово тежиште под углом $\alpha = 15^0$ према хоризонту и тежи да га претури. Спец. тежина кугле је $\gamma = 0{\cdot}7$.



Сл. 107.

Колика треба да буде сила P, па да то тело доведе у лабилну равнотежу?

Да бисмо одредили тежину тог одсечка, ваља да знамо запремину његову. Она је:

$$V = \frac{\pi h^2}{3} (3 \, r - h)$$

према томе тежина је:

$$Q = V \cdot \gamma = \frac{3{\cdot}14 \cdot 30^2}{3} (3{\cdot}20 - 30) \cdot 0{\cdot}7 = 19{\cdot}782 \text{ кгр.}$$

Толика би снага била потребна, кад би сила била хоризонтална, али пошто она дејствује под углом од 15⁰, то је:

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{19{\cdot}782}{\cos 15} = 20{\cdot}48 \text{ кгр.}$$

6. Колика је радна стабилност тог одсечка?

Из слике имамо да је катета $m = h - r$, па стога је и катета:

$$n = \sqrt{r^2 - (h - r)^2} = \sqrt{h (2 \, r - h)}.$$

Напред смо нашли да је одстојање тежишта од средишта C

$$CS = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2 \, r - h)^2}{3 \, r - h}$$

па дакле и одстојање тежишта од основице:

$$SO = CO + CS = h - r + \frac{3}{4} \frac{(2 \, r - h)^2}{3 \, r - h} =$$

$$= \frac{(h - r)(12 \, r - 4 \, h) + 3 (2 \, r - h)}{4 (3 \, r - h)} =$$

$$= \frac{h (4 \, r - h)}{4 (3 \, r - h)} = Z.$$

Заменом тих свију вредности излази:

$$n = 17{\cdot}32 \quad \text{и} \quad z = 12{\cdot}5.$$

Даље је:

$$FB = \sqrt{z^2 + n^2}$$

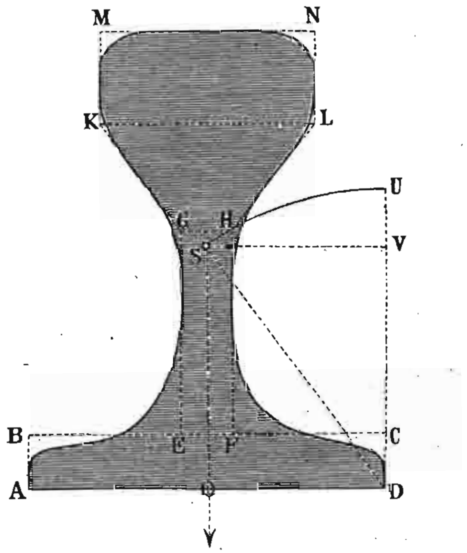
према томе је висина X на коју је тежиште издигнуто:

$$X = \sqrt{z^2 + n^2} - z = 0{\cdot}0886^m.$$

Напослетку радна стабилност:

$$R = QX = 19{\cdot}782 \cdot 0{\cdot}0886 = 1{\cdot}753 \text{ мет. кгр.}$$

7. Колика је статичка и динамичка стабилност једне железничке шине од 1 метра дужине пресека, као што слика 108 показује, кад се при израчунавању замене криве границе означеним праволинијским границама и кад је: $AB = 14^{mm}$, $AD = 93^{mm}$, $EF = 13^{mm}$, $FG = 53^{mm}$, $KL = 54^{mm}$ $KM = 21^{mm}$, висина трапеза $GHKL = 32^{mm}$, и специфичка тежина шине $= 7{\cdot}82$?



Сл. 108.

a. За обе врсте стабилности потребна нам је тежина шине од 1 метра дужине; њу ћемо овако одредити:

Површина $ABCD$ износи $14 \cdot 93 =$ . . . 1302 кв. мм.

» $EFGH$ » $13 \cdot 53 =$ . . . 689 » »

» $GHKL$ » $\frac{54+13}{2} \cdot 32 =$. 1072 » »

» $KLNM$ » $54 \cdot 21 =$ . . . 1124 » »

» целог попречног пресека $=$ 4197 » »

дужина шине 1 метар $=$ 1000 мм.

према томе запремина и тежина целог тела:

$$V = 4197 \text{ куб. см.}; \; Q = 4197 \cdot 7{\cdot}82 = 32{\cdot}82 \text{ кгр.}$$

Статичка стабилност пак износи:

$$St = 32{\cdot}82 \cdot \frac{1}{2}\, 93 = 4{\cdot}526 \text{ мет. кгр.}$$

b. За радну стабилност треба да одредимо висину тежишта S профила. Послужићемо се општим обрасцем. Означимо тежишта појединих горњих површина по реду са S_1, S_2, S_3 и S_4 а тако исто и њихове одговарајуће краке са x_1, x_2, x_3 и x_4, па ћемо имати моменат површине $ABCD$

$$S_1 x_1 = 14 \cdot 93 \cdot 7 = 9114.$$

Тежиште површине $EFGH$ лежи за $\frac{1}{2}\, GE = \frac{1}{2}\, 53$ изнад EF или за:

$$x_2 = \frac{1}{2}\, 53 + 14 = 40{\cdot}5^{mm}$$

изнад основице па дакле је и моменат те површине:

$$S_2\, x_2 = 40{\cdot}5 \cdot 13 \cdot 53 = 27904{\cdot}5.$$

Одстојање тежишта трапеза $GHKL$ од ивице KL износи према ранијем:

$$\frac{KL + 2\, GH}{KL + GH} \cdot \frac{32}{3} = \frac{54 + 26}{54 + 13} \cdot \frac{32}{2} = 12{\cdot}74.$$

Кад одстојање тежишта од KL износи $12{\cdot}74^{mm}$, онда је оно далеко од $\overline{GH}$ за:

$$32 - 12{\cdot}74 = 19{\cdot}26$$

па дакле $x_3 = 19{\cdot}26 + 53 + 14 = 86{\cdot}26$, одакле:

$$S_3\, x_3 = 86{\cdot}26 \cdot \frac{54 + 13}{2} \cdot 32 = 92472{\cdot}06.$$

Напослетку је:

$$S_4\, x_4 = 109\,\frac{1}{2} \cdot 54 \cdot 21 = 124173.$$

Кад те све вредности заменимо, добићемо одстојање тежишта профила од основице:

$$X = \frac{S_1\, x_1 + S_2\, x_2 + S_3\, x_3 + S_4\, x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = \frac{253663{\cdot}56}{4197} = 60{\cdot}44^{mm}.$$

Сад можемо из SO и DO одредити:

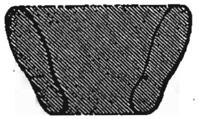
$$SD = \sqrt{60{\cdot}44^2 + 46{\cdot}5^2}$$

па дакле и:

$$VU = DS - OS = \sqrt{60{\cdot}44^2 + 46{\cdot}5^2} - 60{\cdot}44 = 15{\cdot}16^{mm} =$$
$$= 0{\cdot}01516 \text{ мет.}$$

Снага, која би имала да претури тај комад шине од 32·82 кгр. имала би да је издигне на висину од 0·01516 метара, па дакле радна стабилност шине за сваки метар износи:

$$R = 32{\cdot}82 \cdot 0{\cdot}01516 = 0{\cdot}4975 \text{ мет. килогр.}$$



Сл. 109.

432. Стабилност код човека. — На до сад изведеним основама почива и стабилност код животиња па и код човека. Кад човек усправо стоји, онда му је тежиште изнад површине (сл. 109.) на којој стоји. Ако човек стоји на једној нози, онда се тежиште у толико помери, да вертикална тешка линија пада кроз стопалу на којој човек стоји. У опште узев, стабилност је код човека у толико већа, што је већи трапез ограничен његовим стопалама, па зато сви они који се спремају за борбу или напад раздвоје ноге — како би тиме подлогу изнад које стоје па дакле и стабилност увећали. На дрвеним ногама не може нико да стоји, јер је онда површина

изнад које човек стоји и у коју треба да падне вертикална тешка линија врло узана, па с тога та линија свакога тренутка пада ван те површине, услед чега и тело мора да падне.

Кад човек иде, онда премешта тежиште с једне стране на другу, и отуда веће или мање клаћење (величина клаћења зависи од ширине карлице) при ходу. Кад човек трчи, онда има извесних тренутака, кад тежиште није подупрто, при том се тело нагне у напред, како би тежиште пало код прстију, а тиме помогло мишићима који се напрежу да тело помакну у напред. То повијање у напред у толико је јаче, у колико је брзина трчања већа, и ако се услед ма какве непредвиђене препоне нога спречи да истрчи напред те да на себи прими и подупре тежиште, пад је неизбежан.

Кад не бисмо имали зглавка у коленима, онда би ходање било много теже, јер би се тежиште на сваком кораку морало издизати у висину; такво је заморно ходање код људи с дрвеним ногама, јер онда тежиште у ходу описује линију као у сл. 110. Напротив код ходања здравим ногама линија по којој се креће тежиште тела мало се разликује од хоризонталне праве линије (сл. 111.).

Сл. 110.

Сл. 111.

Кад се трчи, вертикална се тешка линија врло мало колеба на једну и другу страну, јер је промена врло брза, те се премештање тежишта на једну или другу страну нема кад извршити; код ходања пак, нарочито кад је ход лаган, то њихање је врло приметно. Стога је потребно да војници, који близу један поред другог марширају, почињу ход једном истом ногом, како не би у супротном случају један другог гурали. То премештање тежишта и нихање при ходу врло се лако види на бајонетима војничким, кад с пушкама на рамену марширају. Исто тако морају у ногу ићи и они који се испод руке држе, да не би један другога раменима гурали.

Положај тежишта у човекову телу мења се с положајем и држањем појединих удова. Кад једну руку пружимо, одмах се тежиште тој страни на коју је рука пружена приближи. Кад ко на једној нози стоји, а другу хоризонтално пружи, онда се мора телом нагнути на супротну страну, како би тежиште остало изнад стопале на којој стоји. Ако се сагнемо да какав предмет са земље дохватимо, онда морамо једну ногу пружити напред, да тежиште подупремо. Неко који седи не може устати а да ноге не повуче мало у назад или да се горњим телом не нагне у напред. Ако се неко који стоји, главом наслони на дувар али тако, да му ноге с патосом, а горњи део тела с дуваром направе прав угао и руке међутим мете назад, онда се никако не може из тог положаја исправити, док се рукама не помогне или док једну ногу не приближи дувару да тежиште које пада ван стопала подупре.

Исто се тако положај појединих делова тела мења кад терете носимо. Ако имамо терет на леђима, или се пењемо уз брдо, увек ће нам предњи део тела бити нагнут напред. Ако што носимо у десној руци, нагињемо се на леву страну и испружимо леву руку и обратно. Уопште сваки се терет лакше носи, при коме се не мора тело више повијати, стога је лакше носити два пут већи терет али згодно распоређен на обе стране, но само половину тога али само на једној страни.

Гимнастичар на конопцу има врло малу површину између својих ногу у коју мора да падне вертикална тешка линија, па зато је врло тешко да стоји мирно на ужету. И вештина одржања на конопцу је у томе, да гимнастичар дугим вежбањем осети, кад му се тежиште премести на једну или другу страну, па да га супротним покретом тела поправи. Па како је тешко извршити те поправке целим горњим телом, зато се гимнастичари служе дугачком доста тешком мотком, амрелом и т. д. у рукама, помоћу којих померајући их на једну или другу страну, напред или натраг могу тежиште тела тако да регулишу, да вертикална тешка линија падне увек између ногу.

С. Консервација тежишта.

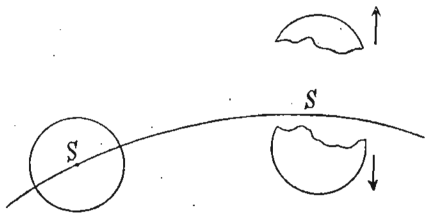
433. Према ономе што је речено о тежишту, знамо да је тежиште нападна тачка оне силе у телу, која се назива његова тежина. Из тога следује, да можемо сматрати увек, кад је то потребно, као да је цела маса тела концентрисана у тежишту. С механичког дакле гледишта, посматрање свакога тела у погледу његових кретања или дејстава може се свести на посматрање кретања или дејстава његовог тежишта.

Свако тело има у свима својим положајима само *једно* тежиште, и место тога тежишта се у телу не мења ни онда, кад се и интензитет теже промени.

Тежиште је једна математичка тачка у телу, и не мора пасти у саму масу тога тела. У металном прстену на пр. тежиште лежи изван његове масе.

Кад се једно тело или систем тела креће, описујући ма какву путању у простору, увек се сматра да је то путања тежишта тела односно система тела. Унутрашње силе које би се у таквом телу или систему јавиле, ма какве и ма колике оне биле, ни у колико не могу утицати нити изменити кретање тежишта. На томе се закону оснива принцип о *консервацији тежишта*.

Згодан пример за консервацију тежишта даће нам кретање једног пројектила избаченог из топа (сл. 112.).



Сл. 112.

Код пројектила док је цео, тежиште описује путању SS. Претпоставимо, да се пројектил на једном извесном месту своје путање разбије (услед експлозије) на два (или више) комада; ма каква била величина или број разбијених комада, и ма какав био смисао њиховог појединачног кретања, тежиште остаје на путањи као да се пројектил није разбио, и то све дотле, док ти делови разбијена пројектила не сретну на свом путу какво страно тело (на пр. падну на земљу и т. д.), које ће њихово кретање, произведено експлозијом, изменити.

Најлепши пример консервације тежишта у астрономији показао се приликом деобе Бијелове комете. Од једног тела те комете појавила су се два и оба су се врло полако удаљавала једно од другога. Међутим тежиште комете (док је била цела), па и ова два одељена комада, кретало се и даље по својој путањи, као да се деоба није ни догодила.

V.

О простим махинама.

434. Никад се готово не могу природне силе употребити корисно у оном облику у коме их у природи налазимо, свуда их треба променити и прилагодити оним циљевима, којима треба да служе. За то прилагођавање служе нарочите направе које се зову *машине*.

Свака је машина више или мање сложен механизам и састављен из делова, који се за се узети не могу даље разлагати на простије делове. Такав најпростији део једне машине зове се *проста махина, механичка потенција* или *механички елеменат*.

На свакој махини, била она сложена или проста, можемо разликовати три дела, који сваки за се врши нарочиту радњу; један део прима на се природну силу у колико је могуће потпуније, зато се према природи силе мора и удешавати; други део мења примљену силу а трећи с тако промењеном и прилагођеном силом врши тражени посао, па се према њему и он мора удешавати.

435. Свака махина приликом претварања механичких сила једних у друге наилази на извесне отпоре, које мора да савлада. У извесној се прилици цео задатак махине своди на савлађивање отпора, и онда су то *корисни отпори;* обично пак поједини делови махине наилазе на извесне отпоре који се не могу избећи и који се развијају самим радом махине (отпори трења нарочито), па зато се и зову *штетни отпори*. Према томе свака махина врши у исти мах два рада: један је рад *користан* и састоји се у савлађивању корисних отпора, други је *споредан* и троши се на савлађивање штетних отпора.

436. Пошто су често разни погрешни појмови везани с појмом „машина“, напоменућемо ове опште законе, које ваља имати на уму код сваке машине:

1. *Једна машина може само онда на једном свом делу неки рад да врши, кад је пре тога на другом свом делу рад примила.* Јер сама машина, као мртва маса, по закону о инерцији, не може сама собом никакав рад да произведе, ако претходно није на себе рад примила.

2. Пошто се примљени рад машине троши на савлађивање и штетних и корисних отпора, то *је корисни рад или корисни ефекат једне машине увек мањи од примљеног рада*. Ма какав био облик прилагођеног и промењеног рада, никад он не може бити ни раван нити већи од примљеног, и из тог се узрока не може никад остварити „perpetuum mobile“, т. ј. никад се неће моћи конструисати једна машина, која ће се, једанпут покренута, моћи вечито кретати без потрошка нових снага.

3. *Рад силе раван је раду отпора*, т. ј. производ из силе и њена пута раван је производу из отпора и његова пута, кад машина ради непромењеном брзином, т. ј. кад је у радној равнотежи. Ако означимо силу са P а отпор са p, пут силе са S а пут отпора са s, онда ће бити увек код машине:

$$Ps = ps$$

одакле излази:

$$P : p = s : S$$

т. ј. да се сила има према отпору, као пут отпора према путу силе.

Одатле се изводи златно правило у механици:

Колико се год једном машином добије у снази, толико се исто изгуби на путу или у времену.

Пошто се и отпор и сила једновремено крећу и своје *разне* путове за *иста* времена прелазе, то се горње правило може и овако изрећи:

Брзине силе и отпора изврнуто су сразмерне својим масама или тежинама.

Да бисмо могли разумети рад ма какве машине, потребно је да знамо најпре законе по којима се рад прилагођава код простих махина. Зато ћемо сад подробније изложити теорију простих махина.

У главноме има свега две просте махине: *озиб*, који се може прекретати или окретати око једне сталне тачке, и *стрма раван*, низ коју може тело, или која може низ тело да клизи. Све остале просте махине, које ћемо у току проучавања видети, изведене су из ових двеју.

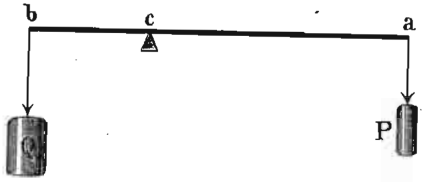
А. **Озиб.**

437. Свако чврсто тело, које се око једне тачке може прекретати или окретати и на које могу на разним његовим тачкама дејствовати силе, зове се *озиб*. Најобичнији облик озиба јесте крута полуга права или крива, наслоњена у једној тачки, и на коју у другим тачкама дејствују силе и отпори.

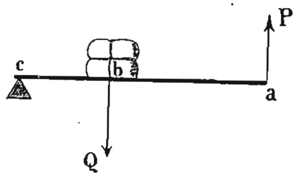
Стварни, т. ј. *материјални* или *физички озиб* може се свести на *математички* т. ј. на озиб без тежине, кад се води рачун о тежини саме полуге, т. ј. кад се већ дејствујућим силама на озибу дода још тежина полуге с нападном тачком у њену тежишту. Ми ћемо свуда онде, где се то нарочито не спомене, занемаривати тежину полуге.

Тачка о коју се полуга наслони или око које се она може прекретати па да постане озиб зове се *прекрет* или *ослонац*. Управне, спуштене из ослонца на силе и отпоре, зову се *краци озиба*.

Према узајамном положају нападних тачака отпора и силе и тачке ослонца, и кад на озиб дејствује једна сила и један отпор, озиб може бити двокрак и једнокрак; кад је тачка ослонца између нападних тачака силе и отпора, озиб се зове *двокрак* (сл. 113.), а кад је ослонац на једном крају а сила и отпор према другом, онда је озиб *једнокрак* (сл. 114.).

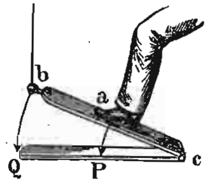


Сл. 113.

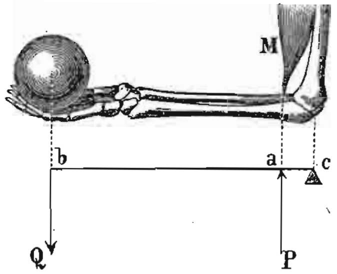


Сл. 114.

Једнокрак озиб може бити од две врсте: Или терет Q дејствује између ослонца и силе, као што је у сл. 114., или сила лежи између ослонца и терета, као што је то случај у сл. 115. и 116. У првом се случају мањом снагом подижу већи терети, а у другом је обично сила већа од отпора, али се отпор креће већом брзином од силе.



Сл. 115.

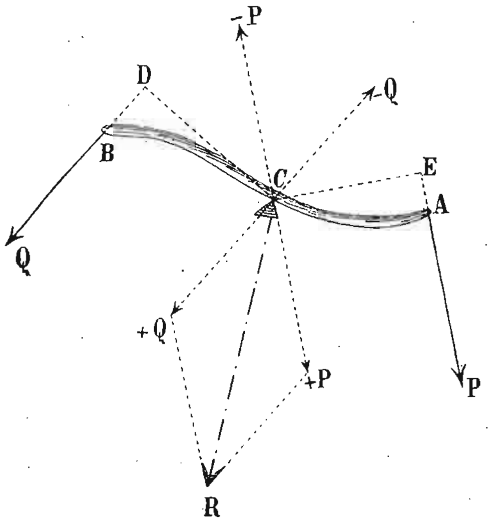


Сл. 116.

Двокраки озиб може бити још равнокрак, кад су му краци једнаки, и разнокрак, кад су му краци различне дужине.

438. Услови за равнотежу код озиба, био он двокрак или једнокрак, једни су исти и то: *сила се има према терету, као што се изврнуто имају одговарајући краци.*

Нека нам је дат двокраки озиб ACB (сл. 117.) ма каквог геометријског облика, са ослонцем у C а са силом и отпором у A и B. Краци тога озиба према горњој дефиницији биће одстојања $CE = a$ и $CD = b$, а услове за равнотежу најпростије ћемо одредити, кад



Сл. 117.

у ослонац C пренесемо и силу и отпор по познатом начину премештања сила. На тај начин добивамо спрегове $(P - P)$ и $(Q - Q)$, и за њихову равнотежу, па дакле и за равнотежу на озибу мора да буде:

$$Pa = Qb \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (202$$

т. ј. *статички моменат силе, мора бити раван статичком моменту отпора.*

Горњу једначину можемо написати и у овом облику:

$$P : Q = b : a$$

а то ће рећи, *да се сила има према терету, као што се имају изврнуто њихови одговарајући краци.*

Поред два спрега, о којима смо дали рачуна, имамо још резултанту R из силе и терета, која није ништа друго, до притисак на сâм ослонац, и ослонац треба да је довољно јак да тај притисак издржи. Тај се пак притисак, као што знамо, одређује из једначине:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos(P, Q)$$

и износи:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos(P, Q)}.$$

Ако су сила и отпор паралелни, онда је угао раван нули, те и:

$$R = \sqrt{(P + Q)^2} = P + Q.$$

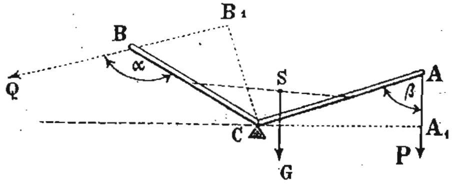
439. Упоређење све три врсте озиба. — Код равнотеже озиба, и у опште код равнотеже ма какве машине, каже се да су услови пробитачнији за силу, кад се неки отпор може довести у равнотежу с мањом силом.

Посмотримо општу једначину за равнотежу $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$ која вреди за сва три случаја.

Да та једначина буде задовољена за случај, кад је сила мања од отпора, мора да буде $b < a$ или $a > b$. Према томе код озиба прве врсте услови ће бити пробитачнији за силу, ако је њен крак дужи од крака отпора.

Код озиба друге врсте, пошто је нападна тачка силе удаљенија од ослонца но нападна тачка отпора, пробитачност ће бити увек на страни силе. Најзад код озиба треће врсте, пошто је ствар сасвим обратна, сила ће бити увек већа од отпора коме треба да држи равнотежу.

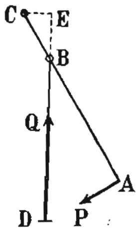
440. Озиб на лакат. — Осим горе описаних врста озиба, има и тако звани озиб на лакат, а то је озиб, код кога су краци полуге спојени у тачки ослонца под извесним углом. (сл. 118.). И овде остају услови за равнотежу исти, јер и ту мора да буде:



Сл. 118.

$$P \cdot \overline{A_1C} = Q \cdot \overline{B_1C}.$$

441. Озиб на зглоб. — И то је једна врста озиба на лакат (сл. 119.) с том само разликом, што се оба крака код озиба на лакат састају под сталним углом, а код озиба на зглоб тај се угао према положају мења. Ослонац или прекрет овде је у C, а на тачку A дејствује сила чије се дејство преноси на отпор Q помоћу зглоба B и полуге BD. Означимо са a крак CA силе P, а са b крак CE отпора Q, онда је за равнотежу:



Сл. 119.

$$Pa = Qb.$$

Крак b одредићемо из познатог дела полуге CB решењем троугла CBE, јер је:

$$CE = b = \overline{CB} \sin \alpha$$

што кад заменимо горе, имамо:

$$Q = \frac{P \cdot a}{\overline{CB} \cdot \sin \alpha}.$$

Овим се озибом могу произвести врло јаки притисци, па се зато употребљава код справа за цеђење мокрих тела или сокова разног воћа.

442. Свођење сила код озиба. — Кад се из једне силе, која дејствује на какву полугу, одређује притисак њен за ма коју тачку озиба, онда се каже, да се дата сила на ту тачку *своди* или *редуцира*.

Ако дејствује у тачки a нека сила P на полугу подупрту у c (сл. 120.), којој одржава отпор Q у тачки b равнотежу тако да вреди једначина:

$$P \cdot \overline{ac} = Q\,\overline{bc}$$

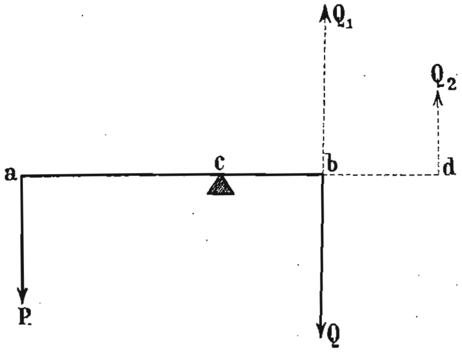
онда ће, чим се Q удали, тачка b притискивати на више снагом Q_1 која је потпуно равна мало пређашњем отпору Q, тако да је:

$$Q_1 = P \cdot \frac{ac}{bc}.$$

Исто тако сила P производи у d притисак Q_2 чија се величина може одредити из обрасца:

$$Q_2 = P \cdot \frac{ac}{cd}.$$

Из овога се види, да је приликом свођења једне силе на неку извесну тачку, притисак у толико већи у колико се та тачка већма приближује ослонцу и обратно.



Сл. 120.

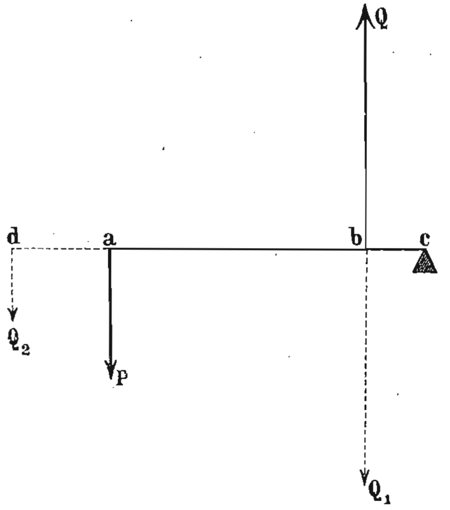
То исто вреди и за једнокраки озиб (сл. 121.); кад сила P дејствује у тачки a једнокраког озиба ac, она ће произвести у тачки b притисак Q_1 величине:

$$Q_1 = P \cdot \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}.$$

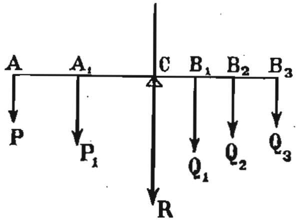
Кад ту силу сведемо на тачку d, добивамо:

$$Q_2 = P \cdot \frac{\overline{ac}}{\overline{cd}}.$$

443. Услови за равнотежу које смо извели кад на озиб дејствује само једна сила и један отпор, вреде и онда, кад на један исти озиб дејствује у исти мах и више сила и више отпора. Исто тако свуда смо до сад ћутке подразумевали да нападне тачке силе и отпора и тачка прекрета леже у једној равни, међутим се услови за равнотежу не мењају, кад нападне тачке сила и отпора леже у разним равнима.



Сл. 121.



Сл. 122.

Рецимо да на озиб AB_3 (сл. 122.) дејствује у исти мах више сила P, P_1 и више отпора Q_1 Q_2 Q_3. Ми их све можемо преместити у ослонац c и добити онолико спрегова једнога смисла колико има сила и онолико спрегова другога смисла колико има отпора. За равнотежу пак мора збир момената сила бити раван збиру момената отпора, тако да је:

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + Q_3 b_3.$$

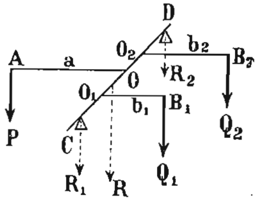
Ову једначину можемо написати и овако:

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 - (Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + Q_3 b_3) = 0 \quad \cdot \quad \cdot (203$$

Дакле за равнотежу код озиба треба да је алгебарски збир момената сила и отпора раван нули.

Притисак на прекрету C наћи ћемо, кад нађемо резултанту свију тих паралелних сила, која је овде:

$$R = P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2 + Q_3.$$



Сл. 123.

444. Кад нападне тачке сила и отпора не леже у једној равни, онда озиб ваља да је подупрт у више од једне тачке (сл. 123.); за равнотежу пак остају исти услови, јер ако све силе преместимо у одговарајуће тачке прекретне осе CD, добићемо спрегове који дејствују у паралелним равнима, а за такве смо спрегове нашли да вреде исти услови за равнотежу као и за оне што су у једној равни. Стога ћемо и у овом случају имати за равнотежу ову општу једначину:

$$P a = Q_1 b_1 + Q_2 b_2.$$

Премештањем сила P, Q_1 Q_2 у тачке O, O_1, O_2 остаје нам у свакој тој тачки по једна сила, које ће све дати резултанту:

$$R = P + Q_1 + Q_2$$

која притискује на прекретну осу у тачкама C и D, разном јачином R_1 и R_2. Те ћемо делимичне притиске одредити, кад са l означимо дужину прекретне осе између прекрета C и D, а са l_1 дужину CO_1 са l_2 дужину CO са l_3 дужину CO_2 и т. д., па скупимо моменте на познат начин:

$$R_2 = \frac{Q_1 l_1 + P l_2 + R_2 l_3}{l}$$

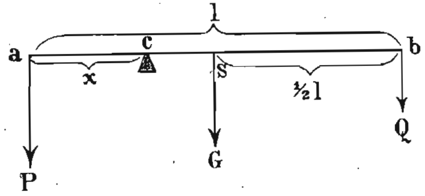
а тако исто и:

$$R_1 = R - R_2 = \frac{Q_1 (l - l_1) + P (l - l_2) + Q_2 (l - l_3)}{l}.$$

445. *Примедба.* — У свима досадашњим случајевима равнотеже сила и отпора на озибу нисмо водили рачуна о тежини самога озиба. Међутим то није тешко учинити, само кад је он познат. Пошто се тежина полуге од које је озиб направљен сматра као отпор, треба га сложити са осталим отпором Q. Ако је Q_1 резултанта њихова, онда се моменат налази на обичан начин као и код озиба без тежине, само сад се тражи услов за равнотежу између P и Q_1 место између P и Q.

Исто тако као нова врста отпора у свима случајевима улази и отпор трења, који ћемо у осталом лако моћи узети у рачун тек кад будемо знали како се он одређује, о чему ће бити речи на другом месту.

446. *Примери.* 1. Снага од 10 кгр. подиже један терет од 24 центе 1 см. високо, колики је пут силе? — 24 центе износе 24 $\times$ 50,= 1200 кгр. и сила се има према терету као 20 : 1200 = = 1 : 60. Пут силе износи дакле 60 см.



Сл. 124.

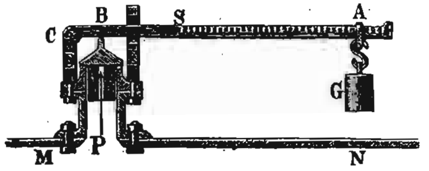
2. Хомогена полуга једнака пресека дугачка је l, тешка q килогр. и носи на својим крајевима тежине P и Q (сл. 124.) Где се налази прекрет рачунајући од нападне тачке силе P, кад је P веће од Q?

Означимо са x тражено одстојање ослонца C од нападне тачке a, силе P. За равнотежу, кад се и тежина q полуге узме у рачун, биће:

$$Px = q\left(\frac{1}{2}l - x\right) + Q\,(l - x).$$

одавде је:

$$x = \frac{l\left(\frac{1}{2}q + Q\right)}{P + Q + q}.$$



Сл. 125.

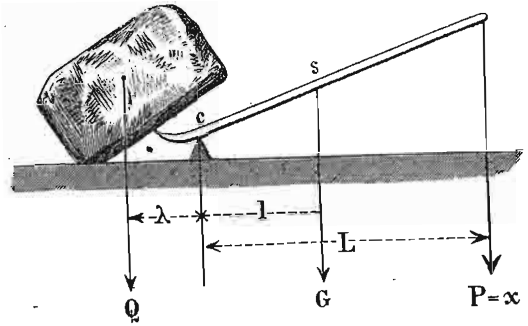
3. Дужина једнокраке полуге код вентила безбедности (сл. 125.) износи 40 см., тежина саме полуге 1·5 кгр., а тежиште на 16 см. од краја C, пречник вентила 4 см., а крак отпора BC износи 6 см.; колики терет G ваља метути на крај полуге, па да се отвори, кад буде притисак 5 атмсофера, т. ј. 5 кгр. на квадр. сантиметар? — Површина вентила износи $2^2.3{\cdot}14 = 12{\cdot}56$ кв. см.

а цео притисак од 5 атмосфера на вентил износи $12{\cdot}56 \cdot 5 = 62{\cdot}80 = Q$. Према томе општа једначина за равнотежу биће:

$$P \cdot 40 + 1{\cdot}5 \cdot 16 = 62{\cdot}80{\cdot}6$$

одакле је:

$$P = \frac{62{\cdot}8 \cdot 6 - 1{\cdot}5 \cdot 16}{40} = 8{\cdot}82 \text{ кгр.}$$



Сл. 126.

4. Ћускија (сл. 126.) тешка је q а тежина терета који има да подигне Q; одстојање вертикалне тешке линије од ослонца $= l$, одстојање терета λ а силе L. Колика је сила P за равнотежу? — Из сл. 126. имамо:

$$PL + ql = Q\,\lambda$$

одавде:

$$P = \frac{Q\,\lambda - ql}{L}.$$

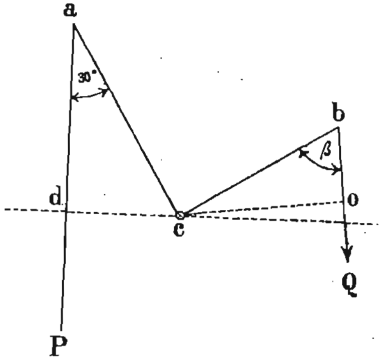
5. На крак $\overline{ac} = 3$ м. једног озиба на лакат acb (сл. 127.) дејствује сила $P = 99$ кгр. заклапајући угао $\alpha = 30^0$ с правцем ac. На другом краку $bc = 1^2/_3$ м. отпор $Q = 100$ кгр. одржава равнотежу сили P. Колики ће бити угао β отпора Q са својим краком?

Из слике имамо $cd = ac \sin\alpha$ и према томе моменат силе P биће:

$$\mathfrak{M}_1 = P \cdot \overline{ac} \sin\alpha.$$

Ако је *co* управна на правац отпора Q, то ће бити $co = bc \sin\beta$ а моменат:

$$\mathfrak{M}_2 = Q \cdot bc \sin\beta.$$



Сл. 127.

За равнотежу мора да буде:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$$

или:

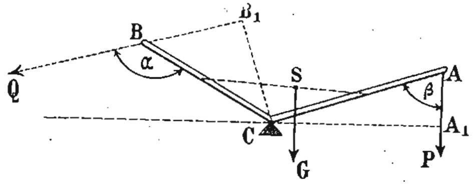
$$P\overline{ac} \sin\alpha = Q\overline{bc} \sin\beta$$

одакле:

$$\sin\beta = \frac{99 \cdot 3 \sin 30^0}{100 \cdot \frac{5}{3}}.$$

$$\beta = 62^0\,59'\,50'' = \text{од прилике } 63^0.$$

6. На озиб на лакат (сл. 128.) дејствује на крак $BC = 60$ см. а под углом $\alpha = 133^0$ терет Q, коме на другом краку $AG = 75$ см., а под углом $\beta = 72^0$ одржава равнотежу сила $P = 35$ кгр.; колики је терет Q, кад је сама полуга тешка $8^1/_2$ кгр. и њена тешка лиииjа SG од ослонца удаљена за $\lambda = 9$ см.?



Сл. 128.

Ваља најпре израчунати моменте силе и отпора. Крак силе биће:

$$CA' = CA \sin\beta$$

па дакле њен моменат:

$$P \cdot \overline{CA} \cdot \sin\beta.$$

Моненат отпора биће:

$$Q \cdot \overline{CB} \sin\alpha.$$

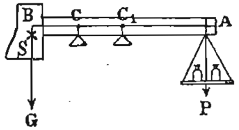
Моменат полуге је $P\lambda$, па према томе:

$$Q = \frac{P \cdot \overline{CA} \cdot \sin\beta + G\lambda}{\overline{GB} \sin\alpha} =$$

$$= \frac{35 \cdot 75 \sin 72 + 8^1/_2 \cdot 9}{60 \sin(180 - 130^0)} = 58{\cdot}6 \text{ кгр.}$$

7. Дато је једно врло тешко тело B (сл. 129.), да му се помоћу озиба одреди тежиште S. — Тога ради утврдићемо дато тело за полугу SA, и наслонивши је најпре у C, помоћу терета P, поставићемо га у равнотежу. Одстојање тешке линије SG па дакле и тежишта од краја A полуге нека је $= x$; тежина тела $= G$; $CA = a$, онда за равнотежу буће:

$$Pa = G(x - a).$$



Сл. 129.

Затим ћемо преместити ослонац у C_1, тако да је $CC_1 = d$; сила која ће бити потребна за равнотежу биће $= P_1$ стога ће за овај случај вредети једначина:

$$P_1(a - d) = G[x - (a - d)]$$

или:

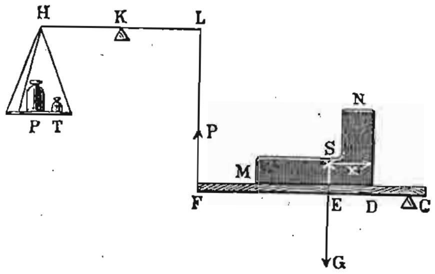
$$P_1 a_1 = G(x - a_1)$$

кад ставимо $a - d = a_1$. Из обеју пак једначина имамо:

$$x = \frac{(P - P_1)\,aa_1}{Pa - P_1 a_1} \text{ а тако исто:}$$

$$G = \frac{Pa - P_1 a_1}{a_1 - a}.$$

Има још један начин да се тако тешком телу, на пример MN, одреди тежиште помоћу озиба. Из слике 130. видимо какав систем озиба треба да употребимо за тај посао. Ако је крак $CF = a$; $CD = b$, где је D крајња тачка тела, одстојање тежишта E од краја тела D нека је $x = DE$, онда је:



Сл. 130.

$$Pa = G(b + x).$$

Сад ћемо тело у истом положају помаћи по истој подлози на друго неко место D_1 које је за b_1 удаљено од C_1 па га опет доведемо у равнотежу теретом P_1, онда је:

$$P_1 a = G(b_1 + x).$$

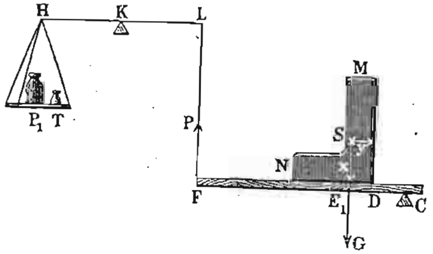
Из ових двеју једначина имамо тежину тела:

$$G = \frac{(P_1 - P) a}{b - b_1}$$

и одстојање тежишта од ивице D

$$x = \frac{Pb_1 - P_1 b}{P_1 - P}.$$

Ако нам то није довољно, већ тражимо саму тачку тежишта S, ми ћемо тело претурити као у слици 131., па онда означимо одстојање $CD = c$, одстојање тежишта од D т. ј. $DE_1 = y$, и ако је терет за равнотежу био P_2 имаћемо:



Сл. 131.

$$P_2 a = G(c + y)$$

одакле:

$$y = \frac{P_2 a}{G} - c.$$

Ако је тело према равни CF симетрично, ове две координате тежишта биће довољне; иначе ћемо тело ставити још у трећи положај и наћи му и трећу координату z.

a. Теразије и кантари.

447. На озибу су основане још многе друге просте махине, које ћемо прегледати, и међу које на прво место долазе теразије и кантари.

Под именом теразија и кантара разумеју се справе, помоћу којих се могу одређивати тежине или масе тела. Код теразија је употребљен равнокраки двокраки озиб; кантари пак основани су на једном једнокраком озибу, или на једном озибу на лакат, а има и таквих кантара, код којих је састављено више озиба.

Према томе овако можемо груписати разне врсте справа за мерење:

равнокраке или обичне теразије;
разнокраки или римски кантар;
кантари с казаљком;
сложени кантари и теразије;
десетни кантари.

α. Теразије.

448. Код обичних теразија главни саставни део јесте равнокрака полуга, ослоњена у својој средини, која на сваком крају носи по један тас; у један се тас мете тело које хоће да се измери, а у други напред градујисани тегови. У средини полуге утврђен је управно на саму полугу један нож од тврда челика или ахата који се својом оштрицом наслања на две ахатске или челичне плочице, углављене у један јак металан стуб који у осталом носи целу справу. На крајеве полуге, углављена су друга два ножа, слична онима у средини, чије су оштрице окренуте на више и на које се наслањају куке о које висе тасови. У средину полуге утврђена је једна дужа или краћа шипка, звана језичац, окренута на више или на ниже, и која служи да покаже на једној подељеној плочици угао окретања теразија. Кад су теразије у равнотежи, језичац треба да стоји вертикално и да на подељеној плочици показује нулу. Ако се у једном тасу налази тело које хоћемо да измеримо, а у другоме тегови, и језичац стоји на нули, то значи да су тегови тешки онолико исто колико и тело и да су теразије у равнотежи. Број грамова који се онда буде нашао у једном тасу, јесте тежина измеренога тела.

449. **Услови које треба да испуне добре теразије.** — Добре теразије морају бити тачне и осетљиве. Да тера-

зије буду тачне, полуга мора да буде хоризонтална, дакле језичац мора бити вертикалан, кад се мету у оба таса једнаке тежине, па ма колика била њихова апсолутна вредност. Исто тако ђерам мора стајати хоризонтално и кад су теразије празне, а то ће рећи: *тасови морају бити једнаки по тежини.*

Означимо са P тежину сваког оптерећеног таса, са l и l' краке ђерма, са q тежину његову, а са r одстојање тежишта од вертикалне линије која пролази кроз ослонац. За равнотежу мора збир свију момената бити раван нули, дакле мора постојати ова једначина:

$$Pl - Pl' + qr = 0 \quad \text{или} \quad P(l - l') + qr = 0.$$

Та ће једначина бити задовољена, кад буде $l = l'$ и $r = 0$. Дакле да теразије буду тачне, треба: 1) *да је дужина оба крака ђермова једнака,* 2) *да вертикална тешка линија ђермова пролази кроз ослонац, а то ће рећи да тежине и оба ђерма и оба таса морају бити једнаке.*

Једном речи, код добрих теразија оба крака ђерма морају у сваком погледу бити једнака.

450. Више пута може да се деси, да су теразије у равнотежи ма да поједини делови ђерма нису у свему једнаки, јер, рецимо, на мало дужи крак ђерма може бити обешен мало лакши тас и обратно, па да равнотежа опет постоји. Да би се та погрешка испитала, ваља скинути тасове па пробати празан ђерам, да ли је у равнотежи. Ако су теразије такве, да се тасови не могу скинути, онда, пошто се теразије са извесним тежинама ставе у равнотежу, тежине се пренесу из једног таса у други, и ако је било какве погрешке, она се мора показати. Јер рецимо да је тежина једнога таса q а другога $q + x$, да је дужина једног крака ђермова l а другога $l + y$, онда ће равнотежа бити кад буде:

$$(q + x)\,l = (l + y)\,q$$

или:

$$l + y = \frac{(q + x)\,l}{q}$$

дакле:

$$y = \frac{lq + lx - lq}{q} = \frac{lx}{q}$$

то јест:

$$y : l = x : q$$

а то значи: за колико је једнак крак ђерма дужи, за толико треба да буде други тас тежи. Ако сад испремештамо тасове, онда на једном краку имамо моменат:

$$M_1 = lq$$

а на другоме:

$$M_2 = (q + x)\,(l + y)$$

и на њему је тежина већа за:

$$(l + y)\,x + qy$$

Ако у тасове нетачних теразија, али које су опет у равнотежи, метнемо тежине P и Q, онда мора бити за равнотежу:

$$Q = P\,\frac{l}{l + y}$$

т. ј. тежина на дужем краку мора бити за толико мања, за колико је тај крак дужи. Пошто измењамо тежине у тасовима, биће моменат у једном тасу:

$$M_1 = P \cdot \frac{l^2}{l + y},$$

а у другом:

$$M_2 = P\,(l + y).$$

Кад оба момента поделимо са $l + y$, имаћемо с једне стране:

$$P \frac{l^2}{(l + y)^2} \text{ а с друге } P$$

то значи равнотежа ће се у толико више пореметити, у колико се $\frac{l^2}{(l + y)^2}$ већма разликује од јединице или у колико је већа вредност y-а.

451. Премештањем тежина из једног таса у други можемо одредити разлику између дужина оба крака. Тога ради измерићемо једно тело у једном тасу; његова је тежина $= q$. Затим пренесемо тело у други тас, и успоставимо равнотежу; сада нађена тежина износи $= q^1$. Ако му је права тежина x, онда је:

$$l : l^1 = q : x$$

$$l : l^1 = x : q^1$$

$$\overline{}$$

$$q : x = x : q^1$$

одакле:

$$x = \sqrt{qq^1}.$$

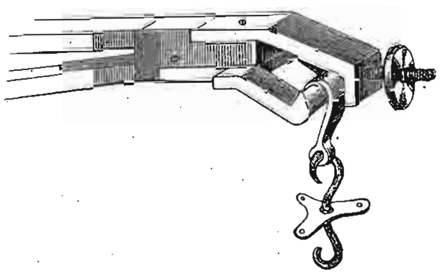
То је у исти мах метода обостранога мерења да се тачно одреди тежина, ма теразије и не биле сасвим тачне. (215).

Ако смо нашли да је $q = 16$ милиграма, а $q^1 = 15$ мгр., онда је:

$$x = \sqrt{16 \cdot 15} = 15 \cdot 49 \text{ мгр.}$$

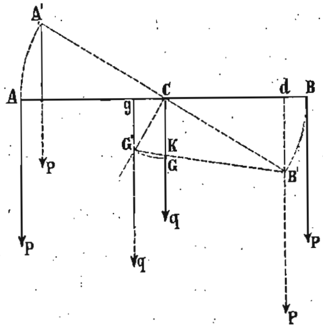
а дужине оба крака имају се као 1600 : 1549 или од прилике као 32 : 31.

Да би се исправиле овакве разлике у дужини кракова које могу нарочито да наступе после дуже употребе теразија, налази се на сваком крају ђерма један завртањ, који се завртањем или одвртањем приближи ослонцу или удали од њега и тиме се исправи разлика у дужини кракова (сл. 132.).



Сл. 132.

452. Да би теразије биле тачне, није све једно какав ће бити положај тачке тежишта према ослонцу. Кад се ђерам помери из свог хоризонталног равнотежног положаја, треба да тежи, да се сâм врати натраг; другим речима, равнотежа мора да буде стабилна. Најзад треба, кад су у тасовима неједнаки терети, да се та неједнакост покаже новим равнотежним положајем, опет сталним који заклапа извесан угао са првим, хоризонталним. Лако се може увидети да ће то бити само онда, кад је тежиште *испод* тачке ослонца.



Сл. 133.

Замислимо да смо у оба таса метнули два једнака терета P, па смо пустили теразије да се клате; тачка вешања A, доћи ће у A' а B у B' (сл. 133.) а тачка тежишта G, коју већ замишљамо испод ослонца C, доћи ће у положај G'. Пошто су оба терета једнака, за све време осциловања, њихова ће резултанта пролазити кроз ослонац, па дакле она није у стању да врати теразије. Напротив, тежиште, које није више у вертикалној линији, што пролази кроз ослонац, моментом $q \times gC$ враћаће теразије натраг, и догод се тежиште не заустави у вертикалној линији која пролази кроз ослонац, моменат тежишта биће различит од нуле и враћаће теразије час из једног и час из другог положаја, док се стабилна равнотежа поново не успостави.

Тако су се понашале теразије, кад су у оба таса били једнаки терети. Али метнимо у тас обешен код B један сувишак терета $= p$, који ће покварити равнотежу. Услед тог сувишка, ђерам ће се накренути у $A'B'$, а тежиште ће доћи у G'. Сад имамо нове услове за равнотежу: моменти који долазе од главних терета P и P једнаки су и одржавају један другоме равнотежу; али сад имамо с једне стране претег p у тасу код B' а с друге тежиште G у положају G'. Моменат претега је $p \times cd$, а моменат тежишта $q \times cg$. У колико се теразије више нагињу, први моменат све већма опада, јер опада cd, а други моменат све више расте, јер расте cg. Зато ће се теразије услед претега нагнути за неки извесан угао и у том положају остати у стабилној равнотежи, а то ће бити кад наступи:

$$p \times cd = q \times cg.$$

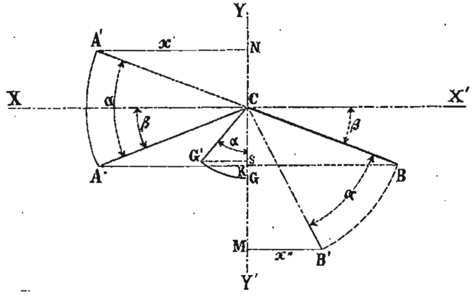
453. Кад је тачка тежишта изнад ослонца, онда имамо лабилну равнотежу, а видели смо напред, да у том случају нови моменат, који долази од тежишта, не враћа ђерам у првашњи положај, као што је то код стабилне равнотеже, него га још више скреће, и такве су теразије неупотребљиве. У том је случају немогуће ни за тренутак одржати ђерам у хоризонталном положају и каже се да су теразије *луде*.

Теразије не могу бити добре ни онда, кад тежиште лежи у самој тачки ослонца, јер ће онда, услед индиферентне равнотежи, остати у равнотежи у свима могућим положајима ђерма. Врло малим претегом пак у једном тасу ђерам би се исправио.

454. Услови осетљивости код теразија. — Сви услови, које смо напред напоменули морају бити испуњени код добрих теразија, али они још нису довољни за прецизна мерења; теразије треба да су осетљиве, т. ј. треба и за најмању неједнакост у тежинама да скрену из равнотежног положаја и да ту неједнакост покажу.

Велика се осетљивост теразија може постићи тек кад се са највећом пажњом израде. Ми смо свуда напред претпоставили, да обе тачке вешања тасова и тачка ослонца леже у једној правој линији; а то је у самој ствари готово немогуће остварити, или, ако се у неком извесном тренутку оствари, то је немогуће сачувати. Дакле, биле теразије ма како тачно израђене, увек ће обе тачке вешања тасова бити испод тачке ослонца, у след повијања ђерма, кад се у тасове метну терети. Испитајмо дакле тај најопштији случај равнотеже код теразија, кад тачке вешања тасова и тачка ослонца нису у једној правој линији, ма да је све остало тачно израђено.

Кад тачке вешања тасова и тачка ослонца нису у једној правој линији, ђерам изгледа као озиб на лакат ACB (сл. 134.). Претпоставимо, да су краци ђермови једнаки и $= l = AC = BC$. Означимо са l' даљину тежишта испод тачке вешања т. ј. $l' = CG$; са q тежину ђерма а са β угао кракова с хоризонталном линијом XX'. Ако у оба таса метнемо једнаке тежине P, теразије ће бити у стабилној равнотежи и вертикала, која пролази кроз ослонац, пролазиће и кроз тежиште ђерма. Кад додамо претег p у тас, обешен о тачку B, ђерам ће скренути за угао α и зауставиће се у $B'C$, т. ј. кад наступи ново равнотежно стање; тежиште ће том приликом описати лук GG'. Из слике се још види, да краци сила P и $P + p$ неће сад бити једнаки, јер за време скретања ђерма тачка вешања B приближила се вертикалној равни YY', док се напротив тачка A од



Сл. 134.

ње удалила. На основу закона о моментима, равнотежа ће сад наступити кад буде:

$$P \times A'N + q \times G's = (P + p) \times B'M.$$

Међутим је:

$$A'N = l \cos(\alpha - \beta)\,;\quad B'M = l \cos(\alpha + \beta)\,;\quad G's = l' \sin \alpha$$

што кад заменимо:

$$Pl \cos(\alpha - \beta) + ql' \sin \alpha = (P + p)\, l \cos(\alpha + \beta)$$

или:

$$Pl (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + ql' \sin \alpha =$$

$$= (P + p)\, l\, (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$Pl (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + ql' \sin \alpha -$$

$$- (P + p)\, l\, (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = 0.$$

$$\mathrm{Cos}\, \alpha\, [Pl \cos \beta - (P + p)\, l \cos \beta] + \sin \alpha\, [Pl \sin \beta +$$

$$+ (P + p)\, l \sin \beta + ql'] = 0.$$

$$\mathrm{Cos}\, \alpha\, (Pl \cos \beta - Pl \cos \beta - pl \cos \beta) + \sin \alpha\, (Pl \sin \beta +$$

$$+ Pl \sin \beta + pl \sin \beta + ql') = 0.$$

Одавде је даље:

$$- \cos \alpha\, pl \cos \beta + \sin \alpha\, (2\, Pl \sin \beta + pl \sin \beta + ql') = 0$$

или:

$$\sin \alpha\, (2\, Pl \sin \beta + pl \sin \beta + ql') = \cos \alpha\, pl \cos \beta.$$

Кад поделимо са $\cos \alpha$ и решимо:

$$\mathrm{tang}\, \alpha = \frac{pl \cos \beta}{2\, Pl \sin \beta + pl \sin \beta + ql'} =$$

$$= \frac{pl \cos \beta}{l \sin \beta\, (2\, P + p) + ql'}$$

или ако поделимо и бројиоца и имениоца са $pl \cos \beta$, имаћемо општу условну једначину за осетљивост теразија:

$$\mathrm{tang}\, \alpha = \frac{1}{\frac{2\, P\, \mathrm{tang}\, \beta}{p} + \mathrm{tang}\, \beta + \frac{ql'}{pl \cos \beta}} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\, \beta \left(\frac{2\, P}{p} + 1\right) + \frac{ql'}{pl \cos \beta}} \quad \ldots\ldots (204$$

Помоћу тога обрасца може се одредити скретање теразија, кад се у један тас налази претег p. Теразије ће бити у толико осетљивије, у колико буде угао α већи за исти претег p. Према томе, $\mathrm{tang}\, \alpha$ може се сматрати као мерило за осетљивост.

Пошто је P, т. ј. тежина тела што се мери, стална количина, осетљивост теразија зависиће од P, т. ј. од терета̂ који се налазе у оба таса и то тако, да ће осетљивост бити мања што су терети у тасовима тежи. И теразије ће товарењем губити осетљивост. Ако се хоће, да осетљивост теразије остане иста, па ма колики био терет у тасовима, треба да величина P испадне из обрасца за $\mathrm{tang}\, \alpha$, а то ће бити тек онда кад $\beta = 0$ т. ј. кад су обе тачке вешања и тачка ослонца у једној правој линији, и кад дакле ђерам није повијен. У том специјалном случају горњи образац добива овај прост облик:

$$\mathrm{tang}\, \alpha = \frac{pl}{pl'} \quad \ldots\ldots\ldots (205$$

Из тог обрасца излази, да ће осетљивост теразија остати иста, па ма колики терети у њима били (наравно до границе која је за сваке теразије одређена). Осим тога, *осетљивост ће бити у толико већа, што су краци ђерма дужи.*

Даље видимо, да је осетљивост изврнуто сразмерна тежини ђерма (q) и одстојању тежишта од ослонца (l'). Дакле *теразије су у толико осетљивије, у колико је ђерам лакши.* И напослетку, *што је тачка тежишта ближа ослонцу, теразије су осетљивије.* Ако је даљина l' велика, теразије нису осетљиве, т. ј. кад се у један тас мете претег p, теразије ће врло мало скренути из равнотежног хоризонталног положаја. За такве се теразије каже да су *лене.*

455. Кад би обе тачке вешања биле *изнад* тачке ослонца, ми бисмо дошли сличним путем до овог обрасца за осетљивост:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{pl\cos\beta}{-\sin\beta\,(2\,P+p)+ql'}.$$

У том случају би бројилац растао, т. ј. осетљивот би била све већа и већа.

456. Из ових теоријских посматрања излазе ова правила, којих треба да се придржава механичар, кад прави добре теразије:

1. *Ђерам да је што дужи и да су оба крака његова једнака.*
2. *Удесити да обе тачке вешања и тачка ослонца буду у једној правој линији.*
3. *Направити ђерам што лакши и дати му такав облик, да његово тежиште буде испод ослонца, али на врло малој даљини, и да никад не падну заједно.*

Овим условима ваља додати још и овај: *трење на ослонцу као и на тачкама вешања тасова треба да је што мање.* Трење ће бити најмање, кад се ослонцу да облик призме, или ножа, који се својом оштрицом наслања на равну што тврђу и што углађенију површину. Угао оштрице ножа треба да је што је могуће мањи, у колико то допуштају терети који се имају мерити. Код теразија које мере веће терете тај угао износи

90°, а код теразија за лаке терете он може опасти на 30°.

457. **Методе тачнога мерења теразијама.** — Раније су изложене разне методе тачнога мерења (212—216). — Овде ћемо само да објаснимо оправданост тих метода.

Двојно мерење. — Биле теразије ма како погрешне, можемо том методом ипак тачно измерити тежине. Ево на чему се оснива та метода:

Нека је X тежина тела коју тражимо, P тежина тегова, а T тежина таре, т. ј. песка, олова и т. д. што смо метнули у други тас. Нека су l и l, дужине кракова ђерма. Онда за прво мерење имамо:

$$Xl = Tl'$$

за друго:

$$Pl = Tl'$$

одакле:

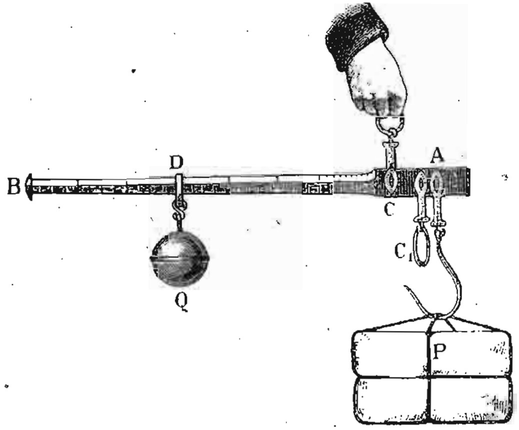
$$X = P.$$

Обострано мерење. — То је она иста метода, коју смо описали напред (449) говорећи о одређивању разлике у дужини кракова ђерма. Ми ћемо дакле измерити на обичан начин тежину тела Q_1, затим ћемо га преместити у други тас и опет, простим мерењем, наћи тежину Q_2. Права тежина биће:

$$Q = \sqrt{Q_1 \cdot Q^2_2}.$$

458. **Римски кантар.** — Обичан или римски кантар, назван још и *кантар брзак*, разликује се од теразија, што је код њега озиб разнокрак а не равнокрак. О краћи крак вешају се терети (сл. 135.), а по дужем се може кретати један сталан тег, све док се равнотежа не постигне, т. ј. док ђерам не буде хоризонталан. Пошто је дужи крак ђерма градујисан, прочитани поделак на краку даће одмах тежину измереног тела. Градујисање пак врши се пробањем. Кад је кантар готов, онда се ђерам доведе у равнотежу кад нема на кантару никаквог терета; то је нулта тачка. Затим се у кантар мете одређен број тегова за који треба ђуле преместити на крај дужега крака да се постигне равнотежа. То

је последња подела. Ако смо том приликом имали на кантару n килограма, ваља цео крак ђерма поделити од прве до последње поделе на n једнаких делова, од којих ће сваки повећавати тежину са по једним килограмом.



Сл. 135.

459. Сваки је кантар брзак удешен да мери лакше и теже терете, т. ј. има *лаку* и *тешку страну*. Кад се кантар окрене „на лаку страну“, онда је тежиште ђерма у тачки ослонца о коју виси кантар т. ј. у C. За тај случај равнотежа ће бити:

$$Q \cdot \overline{CD} = P \cdot \overline{CA}$$

одакле:

$$P = \frac{Q}{CA} \cdot \overline{CD}.$$

Пошто је $\frac{Q}{CA}$ стално код једног кантара, то су тежине P сразмерне дужинама CD.

Кад се кантар обеси о куку C_1 т. ј. кад се изврне на тешку страну, онда тежиште S не пада више заједно са ослонцем C_1 о који виси цео кантар него је прешло на страну дужега крака ђерма, те дакле оно сад помаже ђулету при мерењу. За равнотежу ће сад бити (сл. 136.):

$$P \cdot AC = G \cdot \overline{CS} + Q\,\overline{CD}$$

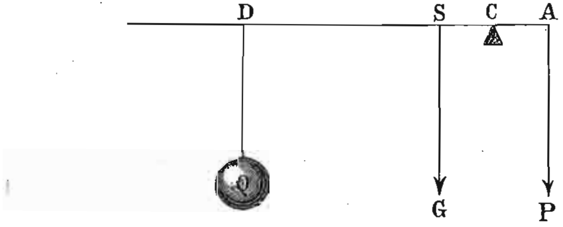
одакле:

$$P = G\frac{CS}{AC} + Q \cdot \frac{CD}{AC}.$$

Кад одавде одредимо дужине подела које одговарају разним тежинама, имамо:

$$\overline{CD} = \frac{P \cdot \overline{AC} - G \cdot \overline{SC}}{Q};$$

С десне је стране све стално осем P те дакле поделе ће бити сразмерне тежинама, т. ј. и тешка ће страна бити подељена на једнаке делове као и лака.



Сл. 136.

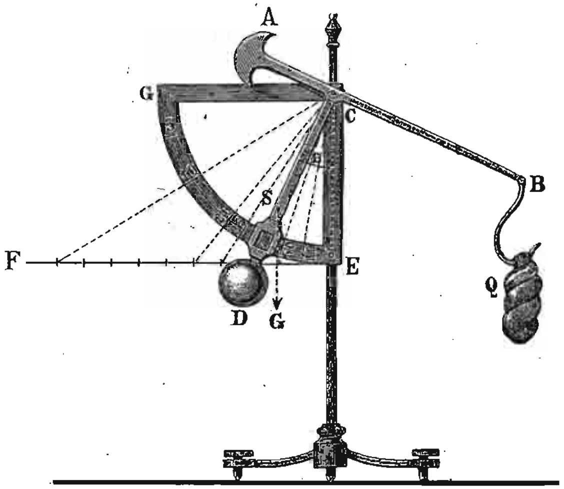
О томе се можемо уверити и на овај начин. За $P = n$ и $P_1 = n + 1$ кгр. рецимо да су одговарајуће вредности за CD биле Xn и $Xn + 1$, онда ће бити:

$$Xn + 1 - Xn = \frac{(n + 1)\ AC - GSC}{Q} - \frac{n\,\overline{AC} - G\,\overline{SC}}{Q} = \frac{AC}{Q}$$

т. ј. стална вредност, која од n не зависи.

И ова се тешка страна кантара градујише пробањем. Она обично почне да мери са оном тежином, с којом је лака страна престала; у том је случају ђуле најближе ослонцу C_1. Осетљивост тих кантара може да буде $\frac{1}{500}$.

460. Кантар с казаљком. — За брзо мерење лаких тежина употребљава се кантар с казаљком, као што је представљен у своме најобичнијем облику у сл. 137. И овде је примењен разнокраки озиб, који се може окретати око тачке C и за коју је утврђена казаљка CD с теретом D, који управо и врши мерење. Разни делови тог кантара треба да су тако удешени, да тежиште ђерма, тежине A и D и куке о коју се вешају тела падне у вертикалну линију, која пролази кроз ослонац, кад је кантар празан и кад је у равнотежи. Тежине се читају на једном подељеном квадранту *EP*, поред кога клизи казаљка *CD*.



Сл. 137.

Кад се о куку или у тас мете извесан терет *Q* онда ће се ђерам спустити за угао *α*, а за толико ће и казаљка скренути из вертикалног свог положаја. Ако је тежиште целог система у *S*, онда очевидно за равнотежу мора да буде:

$$G \cdot \overline{Sm} = Q\,\overline{Bm}.$$

Али је $Sm = SC \sin\alpha$ и $Bm = BC \cos\alpha$. Стога ће бити најзад:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{Qa}{G \cdot b}$$

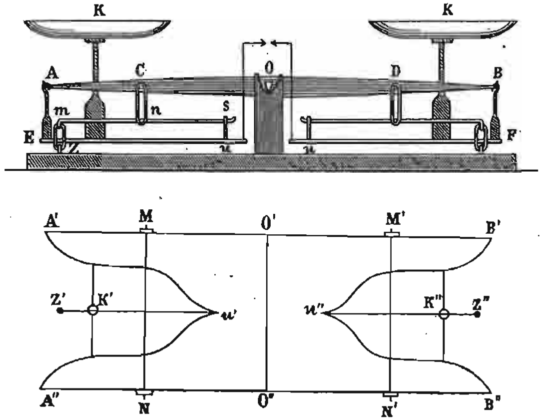
кад ставимо $BC = a$, и $SC = b$.

Пошто је све с десне стране осем *Q* стално, то су тежине сразмерне тангентама углова *α* који се прочитају на квадранту. Да би се такав кантар градујисао, подигне се у *E* једна управна $EF \perp CE$ која се према једној само тежини (на пример од 1 грама) подели на једнаке делове; линије које те поделне тачке спајају са *C*, поделиће квадрант на одговарајуће тежине, које се одмах на њему прочитају при мерењу.

461. Робервалове теразије. — Све досадање справе за мерење тежина имале су само по једну полугу, која је на основу озиба могла да измери тежину тела. Међутим овде имамо по-

сла с теразијама код којих има више полуга и које спадају у сложене теразије и кантаре.

Код Робервалових теразија (сл. 138.) има два хоризонтална ђерма, који се на првој слици виде као један *AB*, а на другој као



Сл. 138.

A'B' и *A''B''*. Оба крака сваког ђерма су у свему једнаки и симетрички према сталној тачки *0*, где се налази ослонац. Тасови *K* и *K* утврђени на две вертикалне шипке, у вези су с виљушкастим полугама *Eu, Fu*, као што се то види у другој слици на *A'* и *A''* и *B'* и *B''*. Крајеви *E* и *F*. као и *u' u''* сваке полуге, везани су како с ђермовима помоћу кука *AE* и *BF*, тако и с полугом *ms*, која се зове *трансмисиона* полуга кариком *su*. Трансмисиона полуга наслања се на тачку *m*, а помоћу карике *nC* она је у вези с ђермом. Најзад две шипке, које су у хоризонталном пресеку означене са *MN* и *M'N'*, служе да очувају паралелност оба крака ђермова, и да за њих утврде карику *nC*. Кад оба паралелна дела ђерма осцилирају око шипке *O'O''* која их спаја, паралелограм *A'A''* *B''B'* се такође креће, и наспрамне стране имају у свему слично кретање. За све пак време осциловања тасови остају хоризонтални. Пошто су обе стране теразија, лево и десно од ослонца *O*, у свему једнаке, ми ћемо објаснити рад само једне стране.

Рецимо да смо у леви тас метнули неки терет *P* и да се крај ђерма *A*, спустио за неку висину $= h$; тачка *E* спустиће се за толико исто.

Ако означимо са *x* спуштање карике *nC*, ми ћемо то спуштање одредити из једначине:

$$\frac{x}{h} = \frac{CO}{AO}, \text{ одакле } x = h\,\frac{CO}{AO}.$$

Исто тако добићемо спуштање карике su или њених крајева помоћу ове сразмере:

$$\frac{y}{x} = \frac{ms}{mn} \text{ одакле је } y = x\frac{ms}{mn}$$

или кад x заменимо:

$$y = h\frac{CO}{AO}\cdot\frac{ms}{mn}.$$

Пошто се тачке A и E спусте за висину h, тас ће остати хоризонталан, ако је:

$$y = h \text{ или } h = h\frac{CO}{AO}\cdot\frac{ms}{mn}$$

одакле следује да је:

$$AO\,mn = CO\cdot ms \text{ или } \frac{AO}{CO} = \frac{ms}{mn}.$$

Терет P који смо метнули у тас, разлаже се на три притиска који дејствују у тачкама A', A'' и u'. Делимични притисци p и p' који дејствују на прве две тачке потпуно се преносе на ђерам. Што се тиче треће компоненте p'' која дејствује на тачку u' и то вертикалним правцем su (вертикалан пресек справе) она се разложи на друге две: једна дејствује на утврђену тачку m полуге ms и у њој се потире, а друга дејствује на тачку n. Ако означимо са x' њен интензитет на том месту, имаћемо:

$$x'mn = p''ms \text{ одакле } x' = p''\frac{ms}{mn}.$$

Тај притисак x' подели се подједнако на тачке M и N, где шипка MN веже трансмисиону полугу за два крака ђерма. Тако дакле притисак у тачки M износи $\frac{p''}{2}\frac{ms}{mn}$, а толики је исти и у тачки N.

Тај притисак $\frac{p''}{2}\frac{ms}{mn}$ преноси се на тачке A' и A'' јачином x'' која се може лако наћи из обрасца:

$$x''A'O' = \frac{p''}{2}\cdot\frac{ms}{mn}\cdot MO'$$

а пошто је $A'O' = AO$ и $MO' = CO$, онда је:

$$x''AO = = \frac{p''}{2}\frac{ms}{mn}\cdot CO \text{ одакле је:}$$

$$x'' = \frac{p''}{2}\cdot\frac{ms}{mn}\cdot\frac{CO}{AO}.$$

Из основне сразмере за конструкцију теразија: $\frac{ms}{mn} = \frac{AO}{CO}$ одредимо вредност за CO

$$CO = \frac{mn\,AO}{ms}$$

што кад заменимо:

$$x'' = \frac{p''}{2}\cdot\frac{ms}{mn}\cdot\frac{mn}{ms}\cdot\frac{AO}{AO} \text{ или } = \frac{p''}{2}.$$

Напослетку, притисак пренесен у тачку A' износи $p + \frac{p''}{2}$ а у тачки A'' он је $= p' + \frac{p''}{2}$.

Међу тим:

$$p + \frac{p''}{2} + p' + \frac{p''}{2} = p + p' + p'' = P.$$

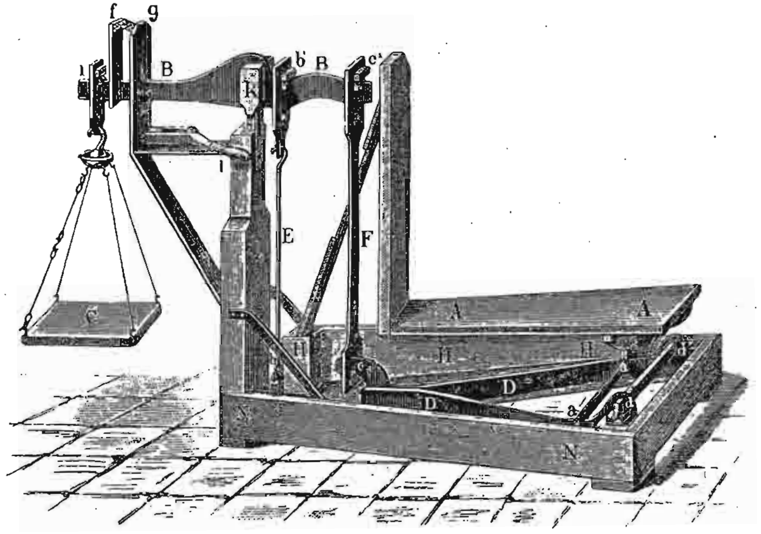
Пошто оба система сила дејствују увек на краке $A'O'$, $A''O''$ и пошто је по конструкцији апарата $A'O' = A''O'' = AO$, то ће сума момената бити увек равна $P\cdot AO$. Ако смо у други тас метнули терет Q који ће са P бити у равнотежи, имаћемо:

$$P\cdot AO = Q\cdot BO$$

и пошто је $AO = BO$, биће увек и $P = Q$.

Из овога видимо, да мерење код ових теразија ни у колико не зависи од места на коме ће се налазити терети у тасовима и да је ђерам и овде у истим околностима као и код обичних теразија.

462. Десетни кантар. — И код тог кантара има више озиба (сл. 139.). Главни је пак разнокраки озиб BB или ђерам са ослонцем у K, на који с једне стране дејствују тегови C, а с друге стране две компоненте b' и c' од терета који се метне на патос AA. Један и то задњи део патоса у вези је с ђермом помоћу једне виљушкасте полуге DD и дејствује у њеној тачки c' полугом F. Предњи пак део притискује непосредно на ђерам у тачки b' а помоћу полуге E.



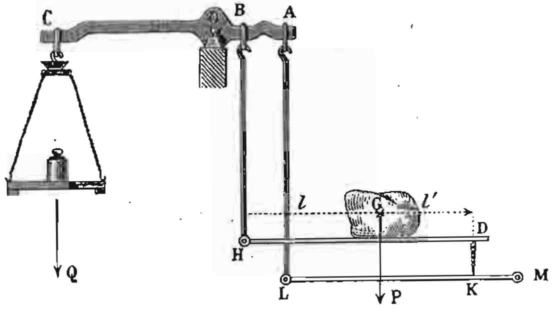
Сл. 139.

Кад на патосу нема никаквих терета, ђерам треба да је хоризонталан а то се познаје по казаљкама f и g које треба да су управо једна спрам друге. Да не би оштрице ножева код ослонаца биле оптерећене и онда кад се не мери, а нарочито да би се избегли потреси на ђерам и оштрице, кад се намештају терети за мерење, помоћу једне ручице l подигне се предњи део ђерма, услед чега се задњи толико спусти да полуге E и F које спајају патос са ђермом не притискују на њ, све дотле док се ручица l не уклони.

Задатак код ове справе своди се на пренос целог терета који хоће да се измери на једну тачку ђерма. Он се пак може испунити тек онда, ако патос остане хоризонталан и кад је натоварен. А то се може лако постићи, кад се поједини делови справе израде у извесној сразмери.

Теорију десетног кантара извешћемо из упрошћене слике 140. где су главни органи представљени геометријским линијама.

Рецимо да смо на патос натоварили терет G, (сл. 140.) тежине P, и да се услед тога спусти крај D за висину h. Пошто се крај D помоћу ослонца K наслања на озиб LM који је утврђен у тачки M, то ће се и тачка K исто тако спустити за h. Крај L једнокраког озиба LM спустиће се за x, и то спуштање одредићемо из:



Сл. 140.

$$\frac{x}{h} = \frac{LM}{KM} \quad \text{одакле} \quad x = h\,\frac{LM}{KM}.$$

Тачка A ђермова, везана полугом AL, спустиће се такође за x, окренувши се око ослонца O. Тачка B ђермова неће се спустити за толико исто, него само за y, и то њено спуштање одредићемо из:

$$\frac{y}{x} = \frac{OB}{OA} \quad \text{одакле} \quad y = x \cdot \frac{OB}{OA}$$

или кад заменимо x

$$y = h\,\frac{LM}{KM}\,\frac{OB}{OA}.$$

Пошто је тачка H везана за тачку B полугом BH, помериће се за исту величину y, за коју и тачка B.

Али главни је услов да патос остане хоризонталан, а то ће бити ако се и H спусти онолико исто колико и D, дакле мора бити $y = h$. Стога је сад:

$$h\frac{LM}{KM}\cdot\frac{OB}{OA} = h \quad \text{или} \quad \frac{LM}{KM}\cdot\frac{OB}{OA} = 1$$

одакле изводимо основну сразмеру за десетни кантар:

$$LM : KM = OA : OB.$$

Терет P дејствујући на патосу подели се на два дела: један X, који дејствује непосредно у тачки B и други Y притискује у K. Означимо одстојања H и D од вертикалне тешке линије са l и l', па ћемо имати:

$$\frac{X}{P} = \frac{l'}{l+l'}, \text{ одакле :} \qquad X = \frac{Pl'}{l+l}$$

$$\frac{Y}{P} = \frac{l}{l+l'}, \text{ одакле опет : } Y = \frac{Pl}{l+l'}$$

или, ако ставимо $l + l' = \lambda$, биће:

$$X = \frac{Pl'}{\lambda} \quad \text{и} \quad Y = \frac{Pl}{\lambda}.$$

Као што смо напоменули, компонента X преноси се сва на ђерам у тачки B. Међутим компонента Y подели се још на две друге, које притискују у тачкама L и M. Она компонента која притискује у M потре се сва, јер је ту озиб наслоњен на земљу; остаје само она на крају L, коју ћемо означити са Z, и која се преноси на ђерам у тачки A помоћу полуге AL. Њу ћемо добити из сразмере:

$$\frac{Z}{Y} = \frac{KM}{LM} \quad \text{одакле} \quad Z = Y\frac{KM}{LM}.$$

Заменом вредности за Y имамо:

$$Z = \frac{Pl}{\lambda}\cdot\frac{KM}{LM}.$$

Да се измери терет P, у тас се метне тег Q. Равнотежа на ђерму биће одређена по овој једначини:

$$Q\cdot CO = X\,OB + Z\,OA$$

или кад заменимо X и Z:

$$Q\cdot CO = \frac{Pl'}{\lambda}\cdot OB + \frac{Pl}{\lambda}\cdot\frac{KM}{LM}\cdot OA.$$

Кад из горње основне једначине нађемо вредност:

$$OB = \frac{KM}{LM}\cdot OA$$

и заменимо, имаћемо:

$$Q\cdot CO = \frac{Pl'}{\lambda}OB + \frac{Pl}{\lambda}\cdot OB$$

$$= P\cdot OB\left(\frac{l'+l}{\lambda}\right)$$

$$= P\cdot OB$$

одакле је најзад:

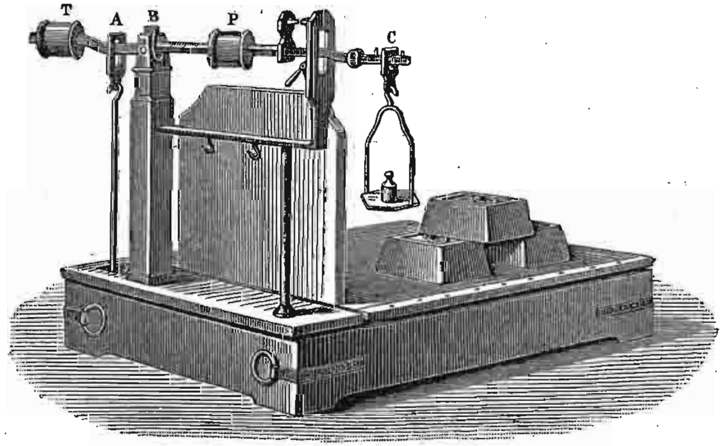
$$Q = P\cdot\frac{OB}{CO} \quad \cdots\cdots\cdots (206$$

Као што видимо, дејство на ђерам је онако исто, као да је цео терет P био обешен у тачку B, У исти мах видимо, да за општу равнотежу код десетног кантара ни у колико не утиче место терета на патосу. Код обичних трговачких кантара направи се да је:

$$\frac{OB}{CO} = {}^1/_{10}$$

и за то се цео кантар зове десетни кантар, јер тегове у тасу ваља помножити са 10 па добити тежину терета. Да би се избегле погрешке у мерењу, у тас се мећу тегови, на којима је означена десетогуба вредност њихове праве тежине.

463. Железнички римски кантар. — У свима железничким станицама и магацинима употребљава се за мерење терета тако звани железнички римски кантар (сл. 141.), за који нису

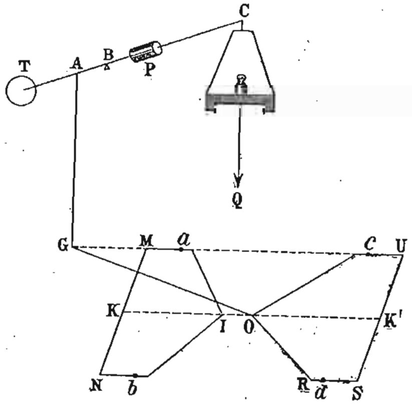


Сл. 141.

потребни нарочити тегови, ако су терети мањи, на пр. до 100 килограма, већ се одмеравају кретањем једног сталног тега P, по градуjисаном ђерму CT. Терет T служи за еквилибрирање целе справе, кад на патосу нема никаквог терета.

Две виљушкасте полуге MIN и UOR (сл. 142.) носе на себи четири ножа a, b, c, d, на које се наслања патос за терете. Полуге су спојене једна изнад друге у тачки O једном централном алком OI, која је у вези, помоћу полуга OG и GA, с ђермом. Најзад, пошто обе рачвасте полуге нису независне једна од друге, обртање се врши око паралелних шипака MN и US.

Означимо са P тежину терета на патосу, а са $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ притиске на четири ножа a, b, c, d. Пошто је MN оса момената, при-



Сл. 142.

тисак p, пренеће се на тачку O, где се полуге спајају са интензитетом x_1, који ћемо одредити из:

$$x_1\, OK = p_1\, Ma \quad \text{одакле} \quad x_1 = p_1 \frac{Ma}{OK}.$$

Исто тако притисак p_2 с тачке b преноси се са интензитетом x_2 на тачку O:

$$x_2 = p_2 \frac{Nb}{OK}.$$

Ако још означимо са x_3 и x_4 притиске пренесене у O с ножева c и d, имаћемо:

$$x_3 = p_3 \frac{cU}{OK'} \quad \text{и} \quad x_4 = p_4 \frac{dS}{OK'},$$

Према томе цео притисак X који ће се пренети на тачку O биће $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ или:

$$X = p_1 \frac{Ma}{OK} + p_2 \frac{Nb}{OK} + p_3 \frac{cU}{OK'} + p_4 \frac{dS}{OK'}.$$

Међутим је:

$$Ma = Nb = cU = dS \text{ и } OK = OK' \text{ онда је:}$$

$$X = \frac{Ma}{OK}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \frac{Ma}{OK} \cdot P.$$

Средишни притисак X може се пренети у тачку G па одатле на ђерам. Пошто се полуга GO окреће око US, то ће пренесени притисак Y у G бити:

$$Y \cdot GU = \frac{Ma}{OK} \cdot P \cdot OK'.$$

Па како је $OK = OK'$ биће и:

$$Y = P\frac{Ma}{GU}.$$

Овај се притисак Y без измене преноси на тачку A ђерма. Па ако се у тас метне тег Q ради равнотеже, онда мора да буде:

$$Q \cdot BC = P\frac{Ma}{GU} \cdot AB \text{ одакле:}$$

$$Q = P\frac{Ma}{GU} \cdot \frac{AB}{BC}.$$

Размере:

$$\frac{Ma}{GU} \text{ и } \frac{AB}{BC} \text{ износе по } \frac{1}{10}, \text{ и онда је:}$$

$$Q = \frac{1}{100} \cdot P.$$

И тако, кад се или у тас метне терет Q или се тег P креће по градуисаном ђерму, увек ће терет бити 100 пута тежи него тег у тасу или тег који се креће. До 100 килограма терети се мере помицањем тега P као и на обичном римском кантару, а преко 100 кгр. ваља у тас метнути тег од 1 кгр. и делове од 100 до 200 измерити помицањем тега. Овакав се кантар зове и *стотични кантар*.

На истом су принципу основани и они велики кантари, на којима се мере читава натоварена кола, железнички вагони и т. д.

464. *Примери* — 1. Имамо једне празне нетачне теразије, па су ипак у равнотежи; нека је један тас с прибором тежак 145 гр. а други 150 гр. и нека је крак првога таса дугачак 20 см.: *a.* колики је крак другога таса? *b.* колико ће један тас претегнути, кад се оба таса преместе? *c.* кад се тасови не промене па се у један тас мете тело од 500 гр., колико ваља метути у други тас?

a. Према ономе што смо раније извели, равнотежа ће бити под условом:

$$(g+x)\,l = (l+y)\,g.$$

Овде је $g = 145$ гр. $g + x = 150$, $l + y = 20$, онда је:

$$150 \cdot l = 20 \cdot 145$$

одакле тражени крак:

$$l = 19{\cdot}3 \text{ см.}$$

b. Кад се тасови измене, биће према ранијем на једноме моменат $M_1 = lg$ а на другоме $M_2 = (g+x)(l+y)$. Или, кад ставимо одговарајуће вредности, биће:

$$M_1 = 19{\cdot}3 \times 145 = 2803{\cdot}3$$

$$M_2 = 150{\cdot}20 = 3000$$

према томе други је моменат већи за 196·7 грам. сант., т. ј. мора се или онај тас што виси о краку од 20 см. направити лакши за:

$$\frac{196{\cdot}7}{20} = 9{\cdot}8 \text{ гр.}$$

или се мора тас на краку од 19·3 см. оптеретити за:

$$\frac{196{\cdot}7}{19{\cdot}3} = 10{\cdot}4 \text{ гр.}$$

c. Ако је при првом положају тасова у један тас метнуто 500 гр., онда се у други тас мора метнути:

$$P = \frac{500\ 20}{19{\cdot}3} = 517{\cdot}2 \text{ гр.}$$

2. Колика је осетљивост једних теразија, које се без квара ђерма могу оптеретити са 1·5 кгр. и при пуном терету скрећу кад се у један тас метне 2·5 мгр? — Према ранијој дефиницији осетљивости биће:

$$O = \frac{2{\cdot}5}{5 \cdot 1{\cdot}5 \cdot 1000 \cdot 1000} = \frac{1}{1{,}200.000}.$$

3. Једне теразије носе највећи терет у сваком тасу од 500 гр. и осетљиве су за $\frac{1}{800000}$. Колики треба да је претег, кад су потпуно оптерећене, па да скрену? — Означимо непознати претег са x; онда као и у прошлом задатку мора да буде:

$$\frac{1}{800000} = \frac{x}{2 \cdot 500 \cdot 1000}$$

одавде је $x = 1{\cdot}25$ милиграма.

b. Котур.

465. Котур је, као што га показује слика 143., округла дрвена или метална плоча, која се у једној виљушци око своје осе може окретати и који је по обиму свом ижљебљен да прими какво витко тело (уже или ланац), о које дејствују и сила и отпор. Према томе, да ли је виљушка у којој се котур окреће стално утврђена или се она може заједно с котуром премештати у простору, и котур може бити сталан или покретан. Има махина, код којих су стални и покретни котурови комбиновани, и онда се оне зову колотуре. Ми ћемо од њих важније прегледати.

Сл. 143.

466. **Сталан котур.** — У овој слици имамо *сталан котур*, преко кога је пребачено уже о које с једне стране виси терет Q, а с друге дејствује сила P. Овакав сталан котур може се сматрати као озиб од бескрајно много кракова, јер ако посматрамо оне тачке у којима се уже од котура одваја, и тачку око које се точак окреће, а то је његова осовина, онда имамо пред собом равнокраки озиб. По себи се разуме, да ће и услови за равнотежу овде бити исти као и код озиба, јер имамо:

$$\overline{AC} \cdot P = \overline{BC} \cdot Q.$$

И како је $AC = BC$, јер су полупречници котура, то је и:

$$P = Q \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (207$$

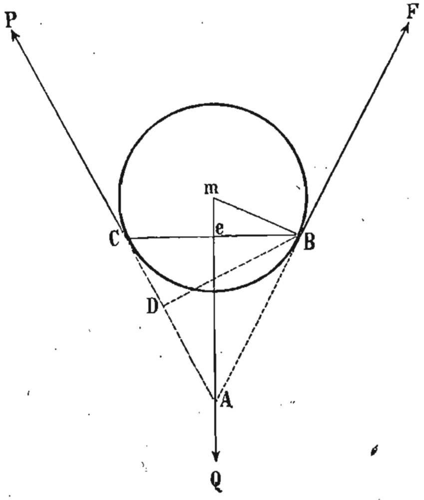
Дакле *код сталног котура снага је равна терету.* Овај услов за равнотежу код сталног котура остаје, па била ужета на котуру паралелна као што је овде случај или не, јер ма на ком се месту уже одвојило од котура, увек су краци озиба, као полупречници, једнаки.

Кад бисмо нападне тачке силе и терета пренели у ослонац с периферије котурове, добили бисмо на познат начин два спрега $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$, чије смо моменте већ горе написали. Осим тога имали бисмо једну резултанту $R = P + Q$ која би се потрла о сâм ослонац котура т. ј. о његову осу, а одатле следује, да оса котурова ваља да буде довољно јака, те да ту резултанту издржи. Од те резултанте постаје велико трење на осовини котуровој, које сила поред терета мора да савлада, и зато је у практици сила увек већа од терета. Резултанта ће бити равна суми $P + Q$, кад су ужета паралелна, иначе бисмо је одредили по паралелограму силе.

Ма да се, као што видимо, код сталног котура на снази ни у колико не добива, ипак је котур често употребљена махина, а то стога што помоћу њега можемо по вољи да мењамо правац силе.

467. **Покретан котур.** — Котур, који се са својом виљушком па дакле и с теретом може премештати у простору, зове се *покретан котур.* Услови за равнотежу код овог котура нису исти као и код сталнога.

Нека је један крај ужета F утврђен (сл. 144.), а на други његов крај нека дејствује сила P или непосредно или преко једног сталног котура, ако бисмо хтели правац да изменимо. У средиште котура e утврђена је виљушка, о коју виси терет Q. Нарочито су важне за нас тачке B и C, у којима се уже одваја од котура; у тачки C напада сила P, а око тачке B тежи и сила P да окрене котур на више, а тако исто и терет Q тежи да око



Сл. 144.

исте тачке спусти котур на ниже. Према томе, тачка *B* може се сматрати као ослонац једнокраког озиба *CB*, на који дејствује сила у *C*, а отпор је у *e*.

Крак силе *P* биће управна *BD* спуштена из *B* на правац ужета *AP*; крак терета *Q* биће *eB*; према томе за равнотежу мора да буде:

$$P \cdot \overline{BD} = Q \cdot \overline{Be}.$$

Троугли *BCD* и *emB* слични су као правоугли а из те сличности следује:

$$BD : BC = Be : Bm$$

или ако тетиву круга *BC* означимо са *s* а полупречник са *r* биће:

$$BD = \frac{s^2}{2\,r}.$$

Кад ту вредност за *BD* заменимо, имаћемо услов за равнотежу:

$$P \cdot \frac{s^2}{2\,r} = Q \cdot \frac{s}{2} \quad \text{или} \quad \frac{P}{Q} = \frac{r}{s}.$$

Дакле сила се има према терету као полупречник према тетиви, на којој се ужета од котура одвајају. Кад су ужета паралелна, онда тетива пређе у пречник, и онда је $s = 2\,r$ према томе:

$$P : Q = r : 2\,r = 1 : 2.$$

Кад су ужета на покретном котуру паралелна, онда је сила равна половини терета.

Кад ужета довољно продужимо она ће се сећи у тачки *A*, и ако угао *CAB* означимо са α, онда је угао *CAE* или $CAB = \frac{\alpha}{2}$ и једнак са углом $CBD = mBe$. Из правоуглог троугла *meB* имамо да је:

$$\frac{s}{2} = r \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad s = 2\,r \cos\frac{\alpha}{2}.$$

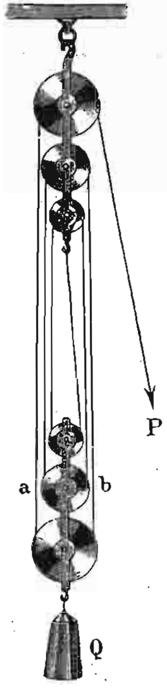
Кад то заменимо у горњој једначини, имаћемо услове за равнотежу код покретног котура изражене углом који заклапају ужета међу собом, т. ј.:

$$P : Q = 1 : 2\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{или:}$$

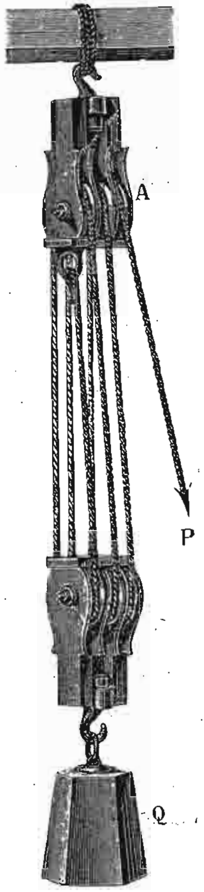
$$P = \frac{Q}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \cdot \quad (208$$

Кад су ужета паралелна, онда је $\alpha = 0$ па и $\frac{\alpha}{2} = 0$, дакле опет горњи услов:

$$P : Q = 1 : 2.$$



Сл. 145.



Сл. 146.

468. Обичне или аритметичне колотуре. — Кад се извесан број сталних котурова споји помоћу ужета са исто толиким бројем покретних котурова, као што се то види у слици 145. и 146., онда се добивају *обичне* или *аритметичне колотуре* Терет се обеси за доњу виљушку, која носи покретне котурове и која се с њима заједно и с теретом премешта у простору. Ако у свакој виљушци има по три котура, дакле свега шест, онда се цео терет *Q* подели на шест ужета и то подједнако, па дакле и на оно уже, на које дејствује сила P. Стога ће сила овде бити $= \frac{1}{6} Q$.

Ако сила P успе да подигне терет за неки пут s, онда да би се терет толико подигао, морало би се свако од шест ужета скратити за s дакле свега $6\,s$, или ако је било n ужета онди ns. Толики пут пак ns морала је прећи сила P, стога је на основу једнакости радова:

$$P = \frac{Qs}{ns} = \frac{Q}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (209$$

Код аритметичних колотура одредићемо силу, кад терет поделимо бројем затегнутих ужета.

Ако водимо рачуна и о тежини доње виљушке и њених котурова G, онда ће бити:

$$P = \frac{Q + G}{n}.$$

469. Диференцијалне колотуре. — Код диференцијалних колотура се с најмањим бројем котурова највише у снази добива, тако да се и с малом снагом могу подизати велики терети. Код њих има свега два стална и један покретан котур (сл. 147.). Оба стална котура су утврђена у једној истој виљушци и окрећу се око једне исте осовине, само су им полупречници различити. Покретан котур, као обично, служи за вешање терета. Оба стална котура имају по периферији својој зупце и жљебове о које се закачи уже или ланац за време намотавања и одмотавања, тако да се не може смакнути. На диференцијалне колотуре се намотава бескрајно уже или ланац.

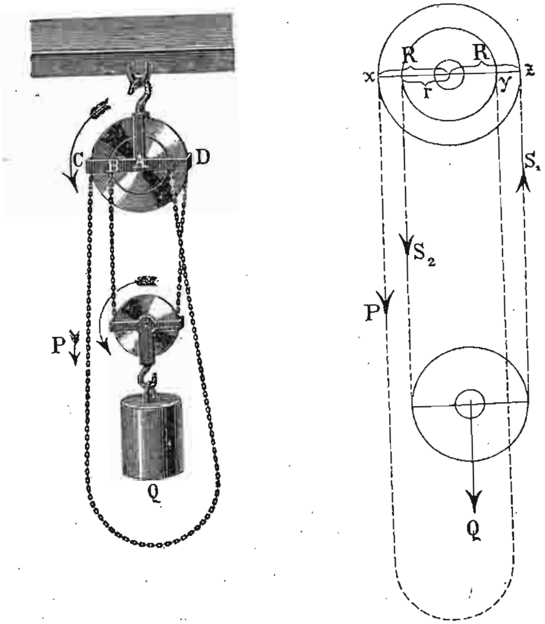
Што се услова за равнотежу тиче, она је овде најповољнија за практику. Терет Q подели се одмах на два дела S_1 и S_2 од којих сваки износи $\frac{Q}{2}$, и онда је:

$$PR + {}^1/_2\, Qr = {}^1/_2\, QR$$

одакле:

$$P = \frac{Q\,(R - r)}{2\,R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (210$$

где R значи полупречник већег а r мањег сталног котура. Због разлике $R - r$ и цела се справа зове диференцијалне колотуре. Обичио је размер полупречника као 11 : 12.



Сл. 147.

Ако сила не дејствује на периферији већег котура т. ј. на x, него на периферији мањега на y, онда је:

$$\frac{1}{2} Qr = Pr + \frac{1}{2} QR$$

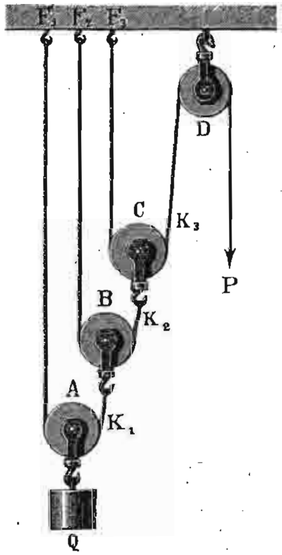
одакле:

$$P = \frac{Q\,(r - R)}{2\,r}.$$

Овде добивамо одречан резултат, јер је $R > r$, а то значи да се терет не пење, него се спушта.

470. Потенцијалне колотуре. — Потенцијалне колотуре представљене су у слици 148. Као што се види, оне су састављене из једног сталног и више покретних котурова, спојених међу собом паралелним ужетима. Стога што су то све покретни котурови, то ће терет на други котур дејствовати половином своје тежине, на трећи четвртином, а с њега ће се на сталан котур пренети само осмина целокупног терета т. ј.:

$$P = \frac{1}{8} Q = \frac{Q}{2^3}.$$



Сл. 148.

Кад би била четири покретна котура, онда би у имениоцу имали 2^4, код пет котурова 2^5 и т. д. за n имали бисмо:

$$P = \frac{Q}{2^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211$$

због чега се и зову потенцијалне колотуре.

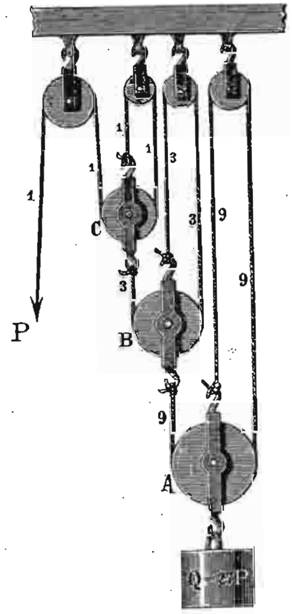
471. Интересантна је још комбинација сталних и покретних котурова она у слици 149., за коју је, као што се на самим ужетима види, услов за равнотежу овај:

$$P = \frac{Q}{3^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212$$

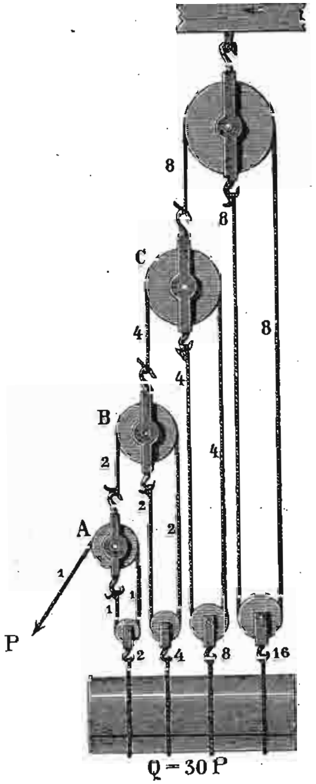
472. Кад су котурови састављени као у сл. 150., онда се зову *збирне потенцијалне колотуре*. Као што се из цифара на самим ужетима види, које показују напоне на њима, услови за равнотежу су ови:

$$P = \frac{Q}{2^1 + 2^2 + 2^3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213$$

473. *Примери* — 1. Један терет од 500 кгр. ваља подићи у висину једним покретним котуром који је сâм тежак 10 кгр., колика ће бити снага, кад се не води рачун о трењу: *a*) кад су ужета паралелна, *b*) кад се секу под правим углом, *c*) кад правци ужета заклапају угао од 70°? Овде је $Q = 510$ кгр.



Сл. 149.



Сл. 150.

a. $P = 255.$

b. Кад се ужета секу под правим углом, онда је:

$$P = \frac{Q}{\sqrt{2}} = 360{\cdot}68.$$

c. $$P = \frac{510}{2 \cos 350} = 310{\cdot}58.$$

2. Тег једног сахата на дувару износи 2 килогр., који би требало навити сваки 12 часова. Треба најпре ланац о који тај терет виси навити преко једног сталног котура, па онда употребити једне колотуре на истој висини на којој је и сахат, па успети да се сахат навија свака три дана. — *а)* какве треба колотуре употребити? *b)* каквом их тежином треба оптеретити? *c)* колико треба да буде дугачак бескрајни ланац? — *а)* Пошто сахат мора сад ићи шест пута дуже но први пут, то треба пут тега скратити на шестину, па дакле треба узети аритметичке колотуре са шест котурова. (т. ј. три стална и три покретна). — *b)* Сразмерно томе и терет мора шест пута већи т. ј. 12 кгр. бити. — *c)* Ланац мора најмање $2 \cdot 3 + 1 = 7$ пута дужи бити но код обичног сахата.

3. На једном диференцијалном котуру један сталан котур има 40 см. а други 36 см. у пречнику. Колика је снага потребна за терет од 2100 кгр? — $P = 105$ кгр.

4. Кад је размера сталних котурова код диференцијалних колотура 11 : 12, па сила која вуче терет престане, колика треба да је снага у y, па да се терет не спусти? — Напред смо нашли за тај случај:

$$P = \frac{Q\,(r - R)}{2\,r} = \frac{Q\,(11 - 12)}{2 \cdot 11} = -\frac{1}{22}\,Q,$$

Пошто је трење на осовинама врло велико, а нарочито на зупцима који по периферији котурова западају у карике ланца, свакако веће од $^1/_{22}$ терета, то код таква колотура може сила слободно у свако доба престати, и терет неће спасти.

5. Кад је код потенцијалних колотура од n покретних котурова сваки котур тежак g, а терет износи Q; колика треба да буде сила P? — За први покретан котур о који виси терет Q и који је тежак g цео терет износи $Q + g$. Од овога се пренесе половина на други котур, и ако се урачуна још и његова тежина g, биће на другом котуру:

$$P_1 = \frac{1}{2}\,(Q + g) + g = \frac{Q}{2} + \frac{3}{2}\,g = \frac{1}{2}\,(Q + 3\,g).$$

Од тога се половина преноси на трећи покретан котур, који је и сâм тежак g, дакле терет на трећем котуру износи:

$$P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Q + 3\,g)\right) + g = \frac{1}{4}\,(Q + 3\,g) + g.$$

Од овога се половина потре о стално уже, а друга се половина преноси на четврти котур т. ј.:

$$P_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\,(Q + 3\,g)\right] = \frac{Q}{8} + \frac{3}{8}\,g + \frac{g}{2} = \frac{1}{8}\,(Q + 7\,g).$$

Оволико ће се пренети на четврти котур; кад и његову тежину урачунамо, изнеће терет који би дејствовао после четири покретна котура:

$$P_4 = \frac{1}{16}\,(Q + 15\,g).$$

После пет котурова:

$$P_5 = \frac{1}{32}\,(Q + 31\,g).$$

После n котурова:

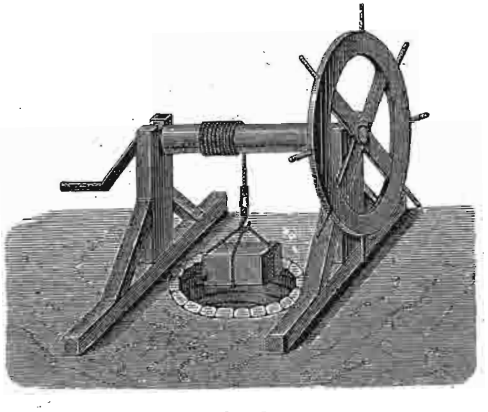
$$P_n = \frac{1}{2^n}\,[Q + (2^n - 1)\,g]$$

$$= \frac{(Q + 2^n\,g - g)}{2^n}$$

$$= \frac{Q - g}{2^n} + g.$$

С. Точак на вратилу.

474. Кад се два стална котура или точка један већи а други мањи споје тако међу собом, да се оба у исти мах и заједно око једне исте осовине окрећу, и на један (већи) дејствује сила а на други (мање) терет, онда се таква комбинација зове *точак на вратилу* (сл. 151.). Већи котур зове се сад точак, а мањи вратило.



Сл. 151.

Ако точак на вратилу представимо у пресеку на сл. 152., онда је услов за равнотежу сасвим очевидан:

$$PR = Qr$$

или:

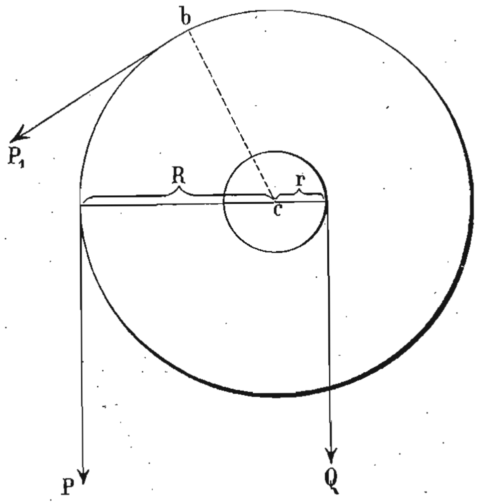
$$P = \frac{Qr}{R}$$

или још:

$$P : Q = r : R$$

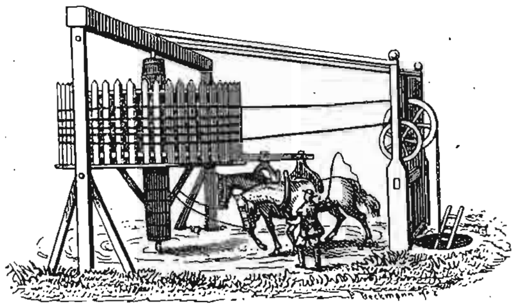
дакле у свему је исти као и код озиба.

И на овој машини има увек да се савлада велико трење на осовини, као и крутост ужета које се на вратило намотава. Стога се обично рачуна, да за једну трећину, а у најбољем случају за $^1/_4$ или $^1/_5$, терета сила мора бити већа од оне која из горњег обрасца излази.



Сл. 152.

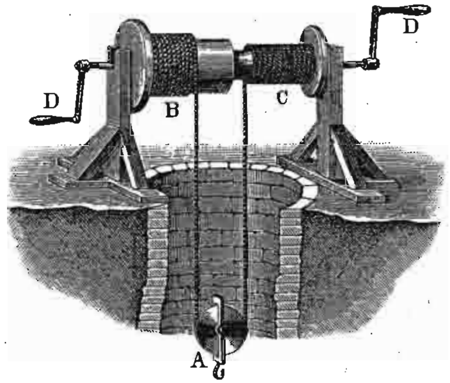
Точак на вратилу је јако примењена махина у практици, и према потреби добио је различите облике. У главном се све те справе деле на две групе: с вертикалном и с хоризонталном осовином, и врло често, према потреби којој служе, имају различита имена. Уопште кад је осовина хоризонтална, део на који дејствује терет зове се *вратило* или *вретено*; ако је осовина вертикална као у сл. 153., онда се справа зове *долап*.



Сл. 153.

Више пута су место точка само две укрштене полуге, а често и само једна као на пример код баштованског долапа.

475. Кад ваља подизати врло велике терете, а покретна је снага мала, онда се прави тако звано *диференцијално вратило* или *хинески точак* сл. 154. и 155. Ако означимо полупречник дебљег вратила са R а та-



Сл. 154.

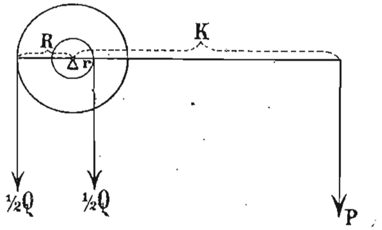
њег са r и дужину ручице D која овде замењује точак са K, онда имамо за равнотежу:

$$\frac{1}{2}\,Qr + PK = \frac{1}{2}\,QR$$

одакле је:

$$P = \frac{\frac{1}{2}\,Q\,(R - r)}{K}.$$

Дакле у колико је мања разлика између дебљина оба вратила $(R - r)$, у толико је мања и сила P која ће терету Q држати равнотежу.



Сл. 155.

476. Често је потребно да се снага с једног вратила пренесе на друго или на више њих; онда се то преношење врши или бескрајним кајишима, или трењем периферије једног вратила о друго, или најзад зупцима. Ми ћемо те случајеве засебно прегледати.

477. **Бескрајни кајиш.** — Кад су два вратила, код којих се хоће кретање да пренесе далеко једно од другог, онда се кретање преноси помоћу бескрајног кајиша, који се омота и затегне између оба точка (сл. 156.). На који ће се начин кајиш намотати око оба вратила зависи од тога, да ли се хоће да се оба вратила окрећу у једном смислу или у супротном. Ако је први случај, онда се употреби тако звани *отворен* кајиш, као на горњој слици, а у другом се случају кајиш *укрсти*.

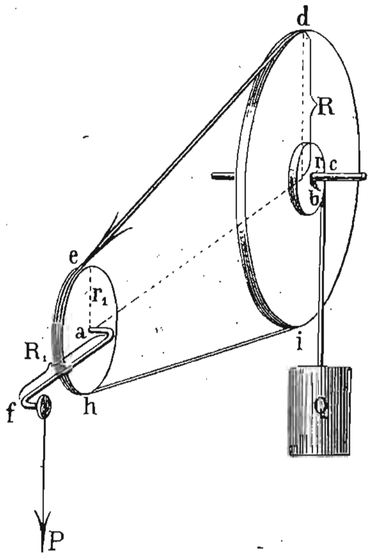
Услове за равнотежу одредићемо на овај начин. Ако полупречник вратила на који дејствује терет Q означимо са r, а полупречник његова точка са R, онда је снага P_1 која затеже кајиш и која се има пренети на друго вратило одређена овим обрасцем:

$$P_1 R = Qr$$

одакле:

$$P_1 = \frac{Qr}{R}.$$

Нека је полупречник другога вратила на које се преноси сила P_1 означен са r_1, а снага која га ручицом R_1 окреће и која хоће да подигне терет Q нека је P. Онда ће равнотежа на другом вратилу бити:



Сл. 156.

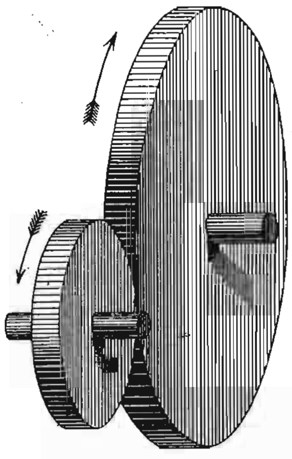
$$P \cdot R_1 = P_1 r_1$$

одакле:

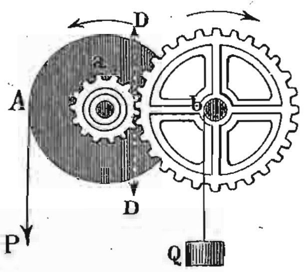
$$P = \frac{r_1}{R_1} \cdot P_1 = \frac{r}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot Q.$$

478. **Фрикциони и зупчасти точкови.** — Као што смо мало час напоменули, кретање се с једног вратила на друго може пренети још и трењем једног точка о други као у сл. 157. и онда се зову *фрикциони точкови*, или помоћу зубаца и онда имамо посла са *зупчастим точковима* сл. 158. Пошто су услови за равнотежу једни исти код обе врсте точкова, ми ћемо их заједно проучити.

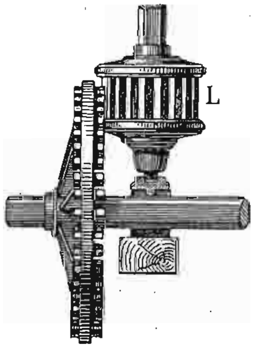
Многих комбинација код фрикционих точкова нема, и уопште се данас ретко употребљавају. Напротив зупчасти точкови по облику зубаца као и по начину спа-



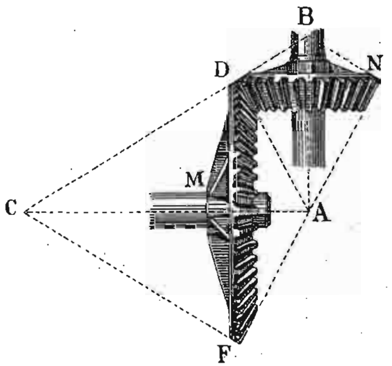
Сл. 157.



Сл. 158.



Сл. 159.

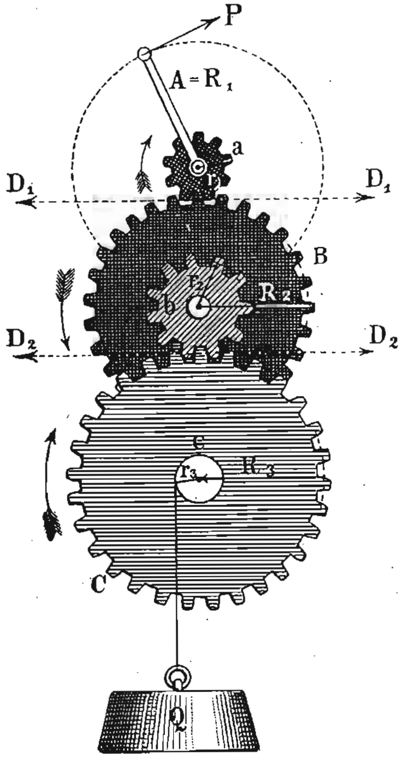


Сл. 160.

јања међу собом, могу бити врло различити. Тако на пример зупци точкова могу ићи у продужењу полупречника, и онда два или више точка леже или у истој равни или у паралелним равнима, као што је случај у слици 157. и 158. Или могу зупци стајати управно на раван тачка и онда обично и равни точкова код којих се кретање преноси стоје једна на другу управно (сл. 159.). Или најзад зупци могу бити нагнути према равни точка под ма којим углом (сл. 160.), а осовине точкова могу бити или управне једна на другу или под ма којим другим углом, према врсти посла које имају да изврше. Али ма какав био облик зубаца и ма како они били утврђени за периферију точка, општи услови за равнотежу су исти, кад се само не води рачун о трењу, које је код разних зубаца различито. Тога ради ми ћемо проучити услове за равнотежу код ова три обична зупчаста точка (слика 161.).

Као што се из слике види, сила P дејствује на ручицу A, а терет се подиже намотавањем ужета око вратила C. Кретање са ручице A преноси се редом најпре на точак B па са овога на точак C помоћу зубаца.

Најпре нам ваља одредити притисак D_2 којим спољашњи зупци точка C притискују на унутрашње зупце точка B, т. ј. на његово вратило — а који притисак долази од терета Q. Пошто су на слици обележени поједини полупречници писменима, то ће и услов за равнотежу код првога точка бити:



Сл. 161.

$$D_2 R_3 = Q r_3$$

одакле је:

$$D_2 = \frac{r_3}{R_3} \cdot Q.$$

Притисак D_2 са унутрашњих зубаца точка B преноси се помоћу његових спољашњих зубаца на зупце точка а снагом D_1, која је опет одређена овим обрасцем:

$$D_1 = \frac{r_2}{R_2} \cdot D_2.$$

Напослетку снага P, која тај притисак има да савлада, износи:

$$P = \frac{r_1}{R_1} D_1.$$

Или кад заменимо D_1 и D_2, биће:

$$P = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot Q$$

или:

$$P : Q = r_1\, r_2\, r_3 : R_1\, R_2\, R_3.$$

Из овог се обрасца види, да ће, ако имамо не само три него n било фрикционих било зупчастих точкова, општи услов за равнотежу бити:

$$P : Q = r_1\, r_2\, r_3 \cdot \cdot \cdot r_n : R_1\, R_2\, R_3 \cdot \cdot \cdot R_n$$

$$P = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{r_n}{R_n} \cdot Q \quad \cdot \quad \cdot \quad (214$$

одавде опет обратно:

$$Q = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{R_n}{r_n} \cdot P.$$

А то значи, 1., *да сила стоји према терету, као производ свију полупречника вратила према производу свију полупречника точкова.*

2., *да се сила може одредити, кад се дати терет помножи са свима полупречницима вратила и подели свима полупречницима точкова.*

3., *да се терет може одредити, кад се позната сила помножи са свима полупречницима точкова и подели свима полупречницима вратила.*

479. Ако хоћемо да пренесемо кретање с једног точка на други помоћу зубаца, онда, да би зупци једни између друге западали,ваља да су у свему потпуно једнаки, па били они на вратилу или на точку. Кад су зупци међу собом једнаки, онда њихов број по периферији било вратила било точка зависи једино од полупречника, пошто саме периферије од њих зависе, и ако број зубаца на два точка полупречника r и R означимо са n и N, имаћемо увек: $r : R = n : N$.

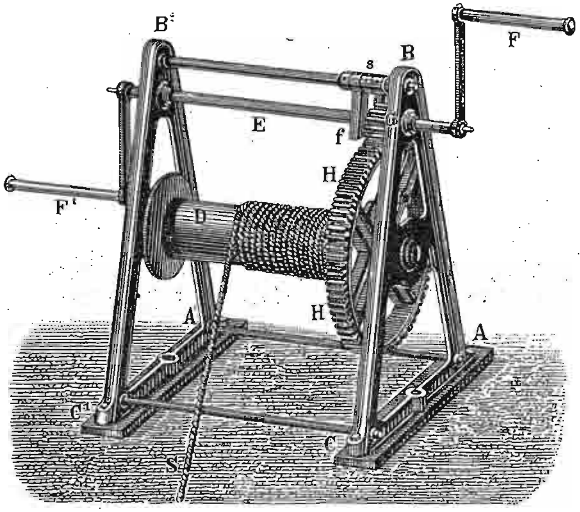
Из тога не следује, да зупци морају бити на свима точковима једнаки. Они морају бити једнаки само на оном точку и оном вратилу, код којих зупци једни међу друге западају. И ако то заменимо у горњим обрасцима, имаћемо однос између силе и терета исказан бројем зубаца на вратилима и точковима:

$$P : Q = n_1\, n_2\, n_3 \cdot \cdot \cdot \cdot n_n : N_1\, N_2\, N_3 \cdot \cdot \cdot \cdot N_n$$

$$P = \frac{n_1\, n_2\, n_3 \cdot \cdot \cdot n_n}{N_1\, N_2\, N_3 \cdot \cdot \cdot N_n} Q \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (215$$

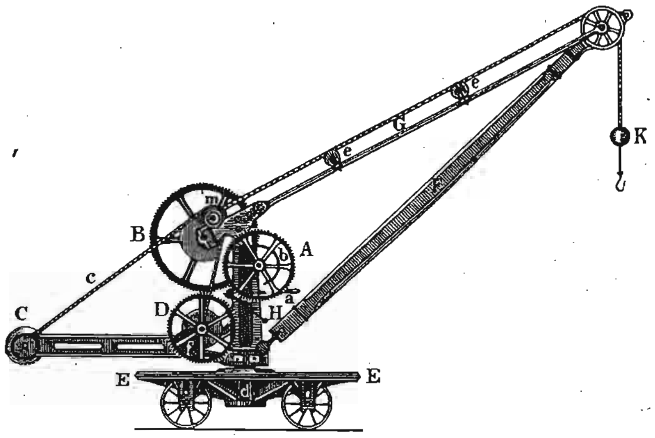
$$Q = \frac{N_1\, N_2\, N_3 \cdot \cdot \cdot N_n}{n_1\, n_2\, n_3 \cdot \cdot \cdot n_n} P.$$

480. Комбинацијом зупчастих точкова могу се највећи терети сразмерно врло слабим снагама издизати и кретати. Свима је познат зупчасти точак на вратилу (сл. 162.), који служи за подизање материјала на гра-

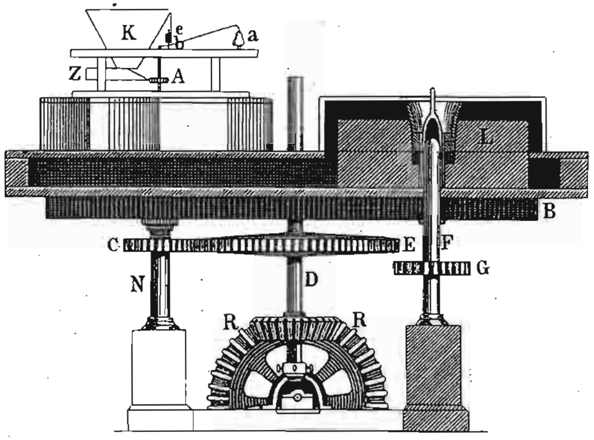


Сл. 162.

ђевинама као и на лађама за претоваривање. Код великих морских лађа њих креће водена пара. Ту спадају и справе тако звани *ждралови* за подизање најтежих терета по великим пристаништима речним и морским. Слика 163. показује једну такву покретну машину, код које ради људска снага. Врло често је пак употребљена снага водене паре или електрицитета.



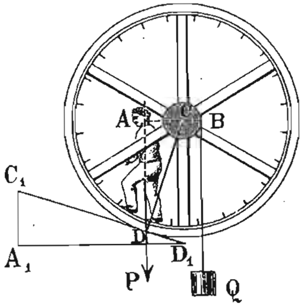
Сл. 163.



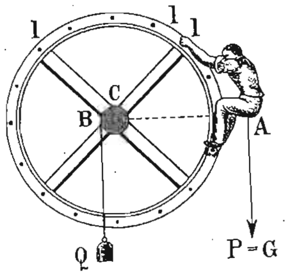
Сл. 164.

У слици 164. види се распоред зупчастих точкова код воденица. Вода окреће један велики точак око хоризонталне осовине, чија периферија улази у воденицу, и ту се помоћу косих зубаца R кретање преноси на једну вертикалну осовину D, на којој је велики зупчаст точак E. С њега се обртање преноси на зупчасте точкове C и G, чија осовина креће камен. Кад се један камен хоће да заустави, на пр. C у слици, онда се само осовина са зупчастим точком спусти толико, да његове зупце не дохвата велики точак E.

481. *Примери.* 1. Колики терет може један човек да подигне; a) кад он по периферији једног точка иде (сл. 165.); b) кад се он по периферији једног точка пење (сл. 166.); кад је полупречник точка у оба случаја 1·5 мет.; полупречник вратила 12 см. а тежина човека 65 кгр., и кад у првом случају полупречник точка с вертикалном тешком линијом човека заклапа угао $\alpha = 35^0$? — a.) Непознати терет Q дејствује на полупречник од 12 см., а сила = 65 кгр. на полупречник CA, који се претходно мора из познатих података израчунати. За равнотежу пак мора да буде:



Сл. 165.



Сл. 166.

$$12 \cdot Q = 65\,\overline{CA}.$$

Међутим је:

$$CA = CD \sin \alpha = 150 \cdot \sin 35$$

према томе је:

$$Q = \frac{65.150}{12} \cdot \sin 35 = 586{\cdot}7 \text{ кгр.}$$

b.) Кад се човек по точку пење, онда је полупречник силе раван полупречнику точка 150 см., те дакле:

$$Q_1 = \frac{65.140}{12} = 812{\cdot}5 \text{ кгр.}$$

2. Један баштовански долап окрећу два коња вукући један спрам другога за полугу од 5 мет. дужине снагом од по 60 килогр. и издижући терет од 1200 кгр., рачунајући и за $^1/_3$ терета отпор трења. Колики је пречник вратила? —

Моменат оба коња од по 60 кгр. и на остојању од 5 мет. износи:

$$2 \cdot 60 \cdot 5 = 600 \text{ мет. кгр.}$$

Терет пак, кад се узме у рачун и отпор, износи:

$$Q = \frac{4}{3}\ 1200 = 1600 \text{ кгр.}$$

и дејствује на полупречнику $\frac{x}{2}$, ако са x означимо тражени пречник вратила. Према томе за равнотежу треба да буде:

$$1600\,\frac{x}{2} = 600.$$

одакле:

$$x = 0{\cdot}75 \text{ мет.}$$

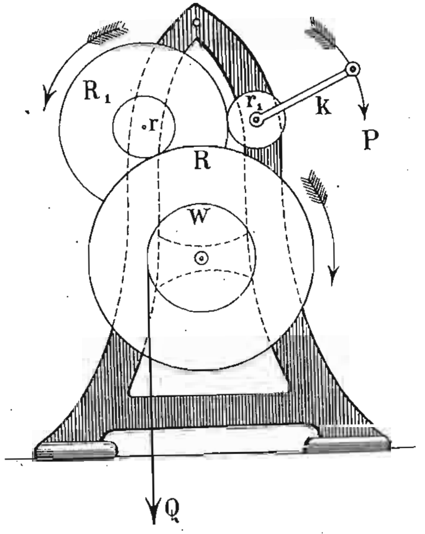
3. Један терет од $Q = 1000$ кгр. ваља да се подигне помоћу бескрајног кајиша неком силом P. Кад је полупречник вратила, на који терет дејствује $r_1 = 6$ см. полупречник његова точка око кога је намотан кајиш $R_1 = 30$ см., ручица на коју сила дејствује $= 60$ см., а полупречник њенога вратила, око кога је такође намотан бескрајни кајиш $= 12$ см. — *a.*) Колика треба да буде сила P, која ће на ручици одржавати горњем терету равнотежу? *b.*) Колики је притисак, који се с првог точка преноси помоћу кајиша на друго вратило, и који затеже бескрајни кајиш? —

a.) Прву снагу наћи ћемо из обрасца:

$$P = Q \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_2} = 1000 \cdot \frac{12}{60} \cdot \frac{6}{30} = 40 \text{ кгр.}$$

b.) $$P_1 = \frac{1000 \cdot 6}{30} = 200 \text{ кгр.}$$

4. На зупчастом точку и вратилу дејствује снага P (сл. 167.) на ручицу од 37·5 см. која је у вези с точком r_1 на коме има 11 зубаца; тај точак запада у други један, полупречника R_1 који по обиму има 74 зубца, а његово вратило 12 зубаца. Најзад зупци тога вратила западају међу зупце точка R, на коме има 60 зубаца и који окреће вратило W од 22·5 см., око кога се намотава уже о које виси терет.



Сл. 167.

a.) У каквом односу стоји сила и терет, не водећи рачуна о трењу?

b.) Колики би требало да су полупречници r, R_1 и R, кад би полупречник точка r_1 био $= 8{\cdot}8$ см.?

c.) Колико се пута мора ручица окренути, док се терет издигне 3 метра високо? —

a.) $P : Q = r_1 . r_2 . r_3 : R_1 R_2 R_3 =$

$= 11 . 12 . 22{\cdot}5 : 37{\cdot}5 . 74 . 60 =$

$= 1 : 56.$

b.) Пошто код оних точкова, чији зупци једни међу друге западају, морају зупци бити једнаки, дакле њихов број сразмеран полупречницима, то ће онда точак од 12 зубаца имати у полупречнику:

$$\frac{12}{11} \cdot 8{\cdot}8 = 9{\cdot}6 \text{ см.}$$

а точак од 74 зубца:

$$\frac{74 \cdot 8{\cdot}8}{11} = 59{\cdot}2 \text{ см.}$$

а точак од 60 зубаца:

$$\frac{60 \cdot 8{\cdot}8}{11} = 48 \text{ см.}$$

c.) Да се подигне терет 3 метра високо, мора сила да пређе пут од:

$$3 \cdot 56 \cdot \frac{2}{33} = 168 \cdot 18 \text{ мет.}$$

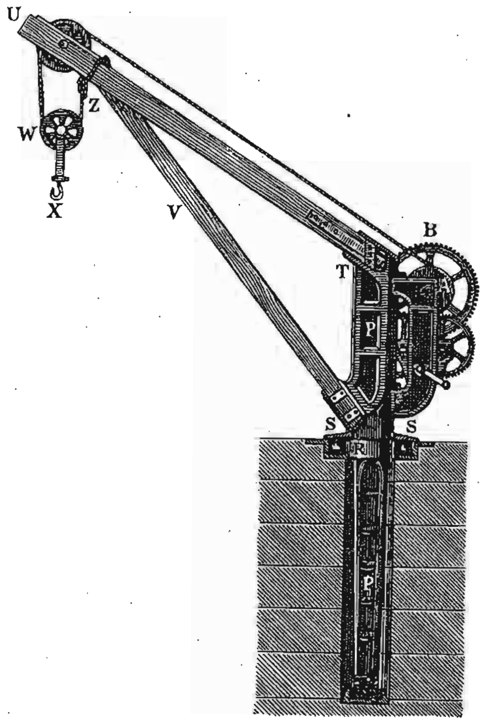
Пошто пут једног обрта ручице износи:

$$2 \cdot 37{\cdot}5 \cdot 3{\cdot}14 = 2{\cdot}355 \text{ мет.}$$

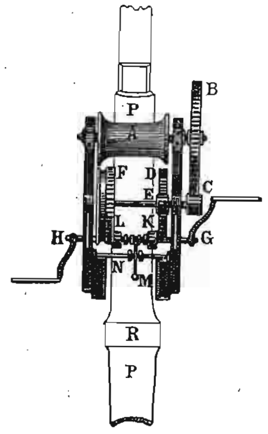
онда је број обрта у горњем случају:

$$\frac{168 \cdot 18}{2 \cdot 355} = \text{од прилике } 72.$$

5. На једноме ждралу (сл. 168. и 169.) виси терет о покретан точак с паралелним ужетима или ланцима; ланац се намотава на једно вратило A полупречника $r_1 = 22 \cdot 5$ см., за које је утврђен зупчаст точак са 86 зуба; зупци тога точка западају међу зупце једнога вратила C, на коме има 11 зубаца и који се око исте осовине окреће једним точком D од 42 зуба. Напослетку зупци точка D западају међу зупце другога једног вратила K са 11 зубаца, а за то су вратило утврђене ручице G и H, полупречника $= 37 \cdot 5$ см. Осим тога има и један точак F са 74 зуба, који је на истој осовини с вратилом E од 11 зубаца, чији зупци западају у зупце вратила L опет са 11 зубаца. У ком односу стоји сила према терету, водећи рачуна и о отпорима:



Сл. 168.



Сл. 169.

a.) Кад ручице покрећу вратило K?

b.) Кад се ручице утврде за вратило L?

c.) Колико се пута у сваком горњем случају окрену ручице, док се терет издигне 4^m високо?

a.) Кад ручица окреће вратило K са 11 зубаца, који западају међу зупце точка D са 42 зупца и остале, имамо однос:

$$P : \frac{Q}{2} = 22 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 : 86 \cdot 42 \cdot 37 \cdot 5$$

или $P : Q = 1 : 100$.

b.) Кад ручица креће вратило L од 11 зубаца, који западају за зупце точка F од 74 зупца и остале, онда имамо:

$$P : \frac{Q}{2} = 22 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 : 74 \cdot 42 \cdot 86 \cdot 37 \cdot 5$$

или:

$$P : Q = 1 : 670.$$

c.) Да се терет издигне 4^m високо, треба у првом случају сила да пређе пут од:

$$100 \cdot 4 = 400 \text{ м.}$$

Кад се ручица један пут окрене, рука радникова пређе пут од:

$$2 \cdot 0 \cdot 375 \cdot 3 \cdot 14 = 2 \cdot 355 \text{ м.}$$

према томе окрене се свега:

$$\frac{400}{2 \cdot 355} = \text{од прилике } 170 \text{ пута.}$$

У другом случају пут је:

$$670 \cdot 4 = 2680 \text{ мет.}$$

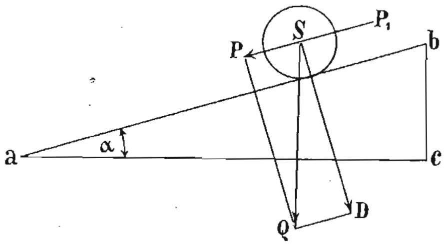
па дакле и број обрта:

$$\frac{2680}{2 \cdot 355} = 1138.$$

B. Стрма раван.

482. Свака према хоризонту нагнута раван зове се *стрма раван*. Код свију случајева равнотеже тела на стрмој равни трење игра врло велику улогу, и уопште много већу него код полуге и оних махина које се на њој оснивају. Стога ћемо ми и овде свуда где год будемо изводили те услове за равнотежу, замислити да трећа нема.

Кад се једно тело, остављено самом себи, налази на једној стрмој равни, оно ће се низ стрму раван кретати, било да склизи било да се низ њу скотрља. Коликом ће се снагом оно низ стрму раван кретати зависи од нагиба стрме равни према хоризонту, или другим речима од висине и дужине њене. Ми ћемо најпре одредити величину те силе, која гони тело да низ стрму раван сиђе. Тога ради замислимо једну куглу S на стрмој равни ab (сл. 170.), на коју дејствује једино привлачна снага земљина т. ј. њена тежина Q, вертикално на ниже. Тим правцем, којим земља куглу привлачи, она се не може кретати, зато ћемо одредити ону компоненту тежине, која куглу низ стрму раван вуче, као и ону, која се о саму раван потире. Тога ради разложићемо тежину Q на једну силу паралелну са стрмом равни P и другу управну на њу $DS = N$, па ће бити:



Сл. 170.

$$P = Q \sin\alpha \text{ и } N = Q \cos\alpha.$$

Дискусијом те две једначине видимо да је, кад буде $\alpha = 90$, $P = Q$, т. ј. тело је слободно тада, а $N = 0$, јер онда нормалног притиска не може ни да буде. Напротив кад је $\alpha = 0$, онда је $P = 0$ и кугла се сама собом по хоризонталној равни не може кретати, а $N = Q$, јер кугла свом својом тежином притискује на своју подлогу.

Из сличности троуглова $PSQ \sim abc$ имамо ову сразмеру:

$$P : Q = h : l$$

ако са h означимо висину стрме равни bc, а са l дужину њену ab. Из те сразмере видимо, да ће тело по стрмој равни, код које је при истој дужини већа висина, брже падати, и обратно оно ће спорије низ њу силазити, ако је при истој висини стрма раван дужа.

Наш је задатак да проучимо услове за равнотежу тела на стрмој равни, т. ј. величину силе која ће тело на стрмој равни задржати да се ни скотрља ни склизи. И ту сад могу наступити разни случајеви.

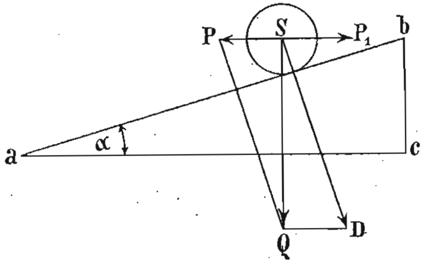
483. — 1. Сила може дејствовати паралелно са стрмом равни као што је то сила P_1, пошто она за равнотежу мора бити равна сили P која тело низ стрму раван вуче, то већ знамо да за равнотежу тела, кад сила дејствује паралелно са стрмом равни, мора да буде:

$$P_1 = P = Q \sin\alpha$$

или:

$$P_1 = P = Q\,\frac{h}{l} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (216$$

484. — 2. Сила која тежи да задржи тело на стрмој равни може дејствовати паралелно са основицом стрме равни $ac = b$ као на сл. 171. У том случају, кад Q разложимо на две компоненте, једну P паралелну с основицом и другу управну на дужину, имаћемо да је:



Сл. 171.

$$P = Q \operatorname{tang}\alpha$$

или из сличности троуглова $PSQ \sim abc$:

$$P : Q = h : b$$

или:

$$P = Q\frac{h}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217$$

Дакле сила P_1 која би могла задржати тело од клизања у овом случају морала би бити равна оној, која тело низ стрму раван вуче, па дакле је:

$$P_1 = P = Q \operatorname{tang} \alpha$$

или:

$$P_1 = P = Q\frac{h}{b}.$$

Што се нормалног притиска на стрму раван $N = SD$ тиче он је сада:

$$N = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

или:

$$N = Q \cdot \frac{l}{b}.$$

Да упоредимо та два резултата међу собом. Пошто је увек $\frac{h}{b}$ веће но $\frac{h}{l}$ или пошто је увек $\operatorname{tg} \alpha > \sin \alpha$, то је и сила која треба да одржи тело на стрмој равни а дејствује паралелно са основицом *већа* од оне која би ишла паралелно са самом дужином стрме равни. Кад је сила паралелна са основицом, онда је $P = Q$ за $\alpha = 45°$, и чим је угао стрме равни већи од 45°, и $P > Q$, тако да кад је $\alpha = 90°$, $P = \infty$.

Што се тиче нормалног притиска на стрму раван N, то, пошто је хипотенуза l увек већа од катете b, следује из обрасца $N = Q\frac{l}{b}$ за случај, кад сила дејствује паралелно са основицом, да је тај притисак увек већи од тежине тела Q. Напротив, кад сила дејствује паралелно са стрмом равни, тај је присисак увек мањи од тежине Q осим за $\mu = 0$, и онда је $N = Q$ али никад већи од Q.

Нашли смо кад је сила паралелна са стрмом равни, да је она:

$$P = Q\frac{h}{l}$$

а кад је паралелна са основицом, онда је:

$$P = Q\frac{h}{b}$$

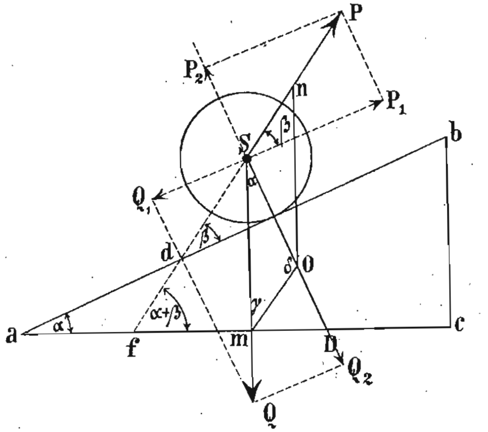
према томе однос између тих сила биће:

$$Q\frac{h}{l} : Q\frac{h}{b} = \frac{1}{l} : \frac{1}{b}$$

или као $b : l$, т. ј. те се силе имају међу собом као основица према дужини.

Кад силе дејствују на неко тело на стрмој равни паралелно са самом равнином или са основицом, онда се те силе имају изврнуто као они делови стрме равни према којима су те силе паралелне.

485. — 3. Најзад да посмотримо најопштији случај, где сила која задржава тело на стрмој равни заклапа са њом ма какав угао β. (сл. 172.). Силу P можемо разложити на две друге силе једну P_1 паралелну са стрмом равни, која тежи да попне



Сл. 172.

тело уз стрму раван и другу P_2 управну на њу. Исто тако терет Q можемо разложити на једну Q_1 паралелно са равнином и која вуче тело на ниже, а другу Q_2 управно на њу. Дакле за равнотежу треба, а и довољно је, да обе компоненте P_1 и Q_1 буду једнаке, т. ј. треба да буде:

$$P\cos\beta = Q\sin\alpha \quad \text{или} \quad P = \frac{Q\sin\alpha}{\cos\beta}$$

Компоненте, управне на равнине јесу $P_2 = P\sin\beta$ и $Q_2 = Q\cos\alpha$. Пошто су супротног смисла, нормални притисак на раван биће:

$$N = Q\cos\alpha - P\sin\beta = \frac{Q\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}.$$

Правац силе P заклапа са стрмом равни угао β, али *изнад* ње, и онда је њена нормална компонента $P\sin\beta$ одречна, јер тежи да тело одвоји од стрме равни. Међутим може се десити да сила P заклапа исти угао β али испод стрме равни, онда би њена нормална компонента пала заједно с компонентом тежине тела $Q\cos\alpha$ и нормални би притисак био:

$$S' = Q\cos\alpha + P\sin\beta.$$

Према томе ако увек означимо са β угао који сила заклапа са стрмом равни, па било, да је тај угао изнад или испод стрме равни, једина промена, коју би имали да учинимо код нормалног притиска била би да $+\beta$ заменимо са $-\beta$, т. ј. горња једначина има општи значај, ако је само у њој угао β положан, кад је изнад, а одречан кад је испод стрме равни.

Из сразмере:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

излази:

$$\cos\beta = \frac{Q\sin\alpha}{P}.$$

Ако је дакле сила P дата, а правац према стрмој равни није познат, лако ће бити да се он одреди, и према ономе што смо напред рекли имаће две вредности $+\beta$ и $-\beta$. Отуда овај закључак:

Једно се тело може одржати у равнотежи на стрмој равни једном истом силом у два симетрична правца, према правцу стрме равни.

Па како косинус некога угла не може бити већи од јединице, треба да буде или:

$$P > Q\sin\alpha \quad \text{или} \quad P = Q\sin\alpha$$

а то значи, да сила која има да одржи тело у равнотежи на стрмој равни мора бити или већа или најмање равна оној компоненти ($P\sin\alpha$) тежине тела која иде паралелно са стрмом равни.

С друге стране, пошто се тело мора одржати на стрмој равни, треба да је нормални притисак N положан, т. ј. треба да је:

$$Q\cos\alpha - P\sin\beta > 0 \quad \text{или} \quad Q\cos\alpha > P\sin\beta.$$

По себи се разуме, да ће тај услов бити у сваком случају испуњен, кад сила дејствује испод стрме равни, јер је у том случају $P\sin\beta$ положно и додаје се компоненти тежине тела. Али то не ће бити увек, кад сила дејствује симетричким правцем, али изнад равни.

Да бисмо ову аналитичку дискусију извели до краја, упоредимо ова два израза:

$$\cos\beta = \frac{Q\sin\alpha}{P} \quad \text{и} \quad Q\cos\alpha - P\sin\beta > 0$$

из њих излази:

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{Q}{P} \quad \text{и} \quad \frac{Q\cos\alpha}{P} - \sin\beta > 0.$$

Заменимо у неједначини $\frac{Q}{P}$ његовом вредношћу $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$, па ћемо имати:

$$\frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\beta > 0$$

или:

$$\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha > 0 \quad \text{или} \quad \cos(\alpha+\beta) > 0.$$

Па како је доња граница за косинус некога угла нула, у ком случају угао је $= 90^0$, очевидно ће бити:

$$\alpha + \beta < 90^0 \quad \text{или} \quad \beta < 90^0 - \alpha.$$

Кад помислимо још, да је $90 - \alpha$ комплеменат углу под којим је стрма раван нагнута, онда излази, да угао β не може бити већи од комплемента угла α, али му може бити раван, а то значи, да кад сила дејствује изнад стрме равни, задатак ће бити могућ догод та сила не изађе из угла који стрма раван чини с вертикалом.

На граници, т. ј. кад буде $\beta = 90^\circ - \alpha$, биће:

$$\cos\beta = \sin\alpha$$

а према томе:

$$P = Q.$$

У том случају, тело само дира стрму раван, али на њу не притискује.

Ако сила P буде већа од тежине Q, тело се може одржати на стрмој равни, само ако сила дејствује испод ње, јер ако дејствује изнад стрме равни она ће одвојити тело од ње. Према томе највећа вредност Q коју може сила да има у извесном случају јесте само релативан максимум.

а. Клин.

486. На теорији стрме равни основана је и употреба клина; строго узевши, клин није ништа друго до покретна стрма раван, па за то клин и долази у групу простих махина, којима је основица стрма раван

Клин је дакле тространа призма, која се једном својом ивицом завлачи између два отпора које хоћемо да савладамо. Ивица којом клин улази између отпора зове се *оштрица ef* (сл. 173.) клина; површине на које отпори притискују зову се *стране bcef* и *adef* клина, а површина на коју сила дејствује зове се *глава* клина *abcd*.

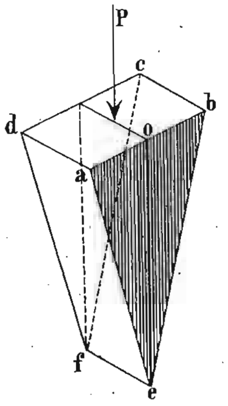
Клин може да буде *симетричан*, кад је основица тростране призме равнострани троугао или несиметричан, кад је та основица ма какав троугао.

Што се тиче дејства отпора на клин, могу бити ови случајеви:

1., отпори дејствују управно на стране клина;

2., отпори дејетвују управно на висину клина.

3., отпори дејствују ма којим правцем.

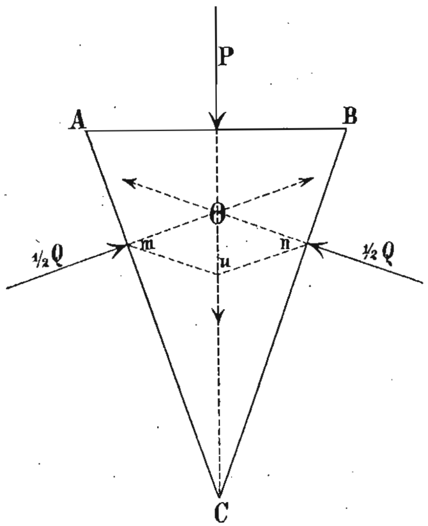


Сл. 173.

Да испитамо укратко сва три случаја.

487. 1, Узећемо симетричан клин ABC (сл. 174.), на који дејствује сила P, а коме се опире целокупан

отпор Q или на сваку страну по $\frac{Q}{2} = q$ и то управно на њих. За равнотежу треба да буде сила P равна



Сл. 174.

резултанти оба отпора; та је резултанта представљена дијагоналом Ou. Из троугла Omu имамо:

$$\frac{P}{Ou} = \frac{q}{Om} = \frac{q}{On}.$$

Пошто оба троугла Omu и ABC имају све стране управне једну на другу, биће слични, а из те сличности имамо;

$$\frac{AB}{Ou} = \frac{AC}{Om} = \frac{BC}{On} \quad \text{одакле:} \quad \frac{P}{AB} = \frac{q}{AC} = \frac{q}{BC}$$

а то ће рећи, да су сила која је управна на главу и отпори који су управни на стране клина сразмерни самој глави и странама.

Одавде имамо:

$$q = \frac{P \cdot AC}{AB}$$

или најзад:

$$\frac{P}{q} = \frac{AB}{AC} = \frac{g}{l}.$$

Сила се дакле има према отпору с једне стране, као што се има глава клина према једној страни његовој. Та се страна онда зове дужина клина, и бележи се са l.

Кад заменимо q, имаћемо израз за отпор с обе стране клина:

$$P : \frac{Q}{2} = g : l$$

одакле је:

$$P = \frac{Q\,g}{2\,l} \quad \text{а тако исто и} \quad Q = \frac{P\,2\,l}{Q} \;.\;.\;.\; (218$$

Ако означимо угао ACB са α, онда је из слике:

$$g = 2\,l \sin\frac{\alpha}{2}$$

те према томе:

$$P = Q \sin\frac{\alpha}{2}.$$

1'. Отпор Q, дејствујући управно на стране клина, може дејствовати и на несиметричан клин, на пример правоугао, који се још зове *прост* клин за разлику од мало пређашњег *двогубог*, пошто се може сматрати, да је овај симетрични клин постао из два проста или правоугла. (сл. 175.). Па како тај прости клин није ништа друго до обична стрма раван, онда ће очевидно и за њега вредети обрасци, које смо код стрме равни извели:

$$\frac{P}{Q} = \frac{g}{l} \quad \text{или} \quad P = Q\,\frac{g}{l}$$

а тако исто и:

$$P = Q \sin\alpha.$$

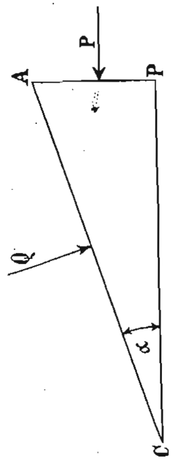
1''. Ако је облик клина ма какав троугао углова α, β, β' (сл. 176.), али отпори дејствују управно на сваку страну и неједнаки су, онда је:

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{s} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{и}$$

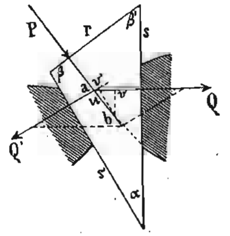
$$\frac{P}{Q'} = \frac{r}{s'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}$$

а тако исто и:

$$P = Q\cos\beta' + Q'\cos\beta.$$



Сл. 175.



Сл. 176.

488. — 2. Посматрајмо сад случај, где на симетричан клин отпори дејствују паралелно с главом, или управно на висину клина $CD = h$ (сл. 177.).

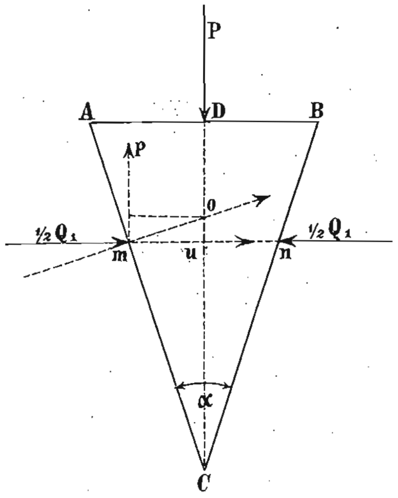
Кад је отпор био управан на стране клина, онда је било:

$$P = \frac{Qg}{2\,l}.$$

То би било, кад би отпор дејствовао правцем mo. Пошто је хипотенуза mo у правоуглом троуглу mou, већа од mu, то ће и отпор Q који дејствује правцем mo бити већи од отпора Q_1 који дејствује правцем mu. Па зато је:

$$Q : Q_1 = \overline{mo} : \overline{mu}$$

Међутим је $\triangle\, mou \sim ADC$, а из те сличности имамо:



Сл. 177.

$$Q : Q_1 = AC : DC = l : h$$

или:

$$Q = \frac{Q_1\, l}{h}.$$

Кад то заменимо у образац за симетричан клин, добићемо:

$$P = \frac{Q_1\, l}{h} \cdot \frac{g}{2\, l} =$$

$$= \frac{Q_1\, g}{2\, h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219$$

Ако силу хоћемо да изразимо углом клина, имаћемо пошто је $\frac{{}^1/_2\, g}{h} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$

$$P = Q_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

2'. Исто би тако имали за прост клин по обрасцима за стрму раван:

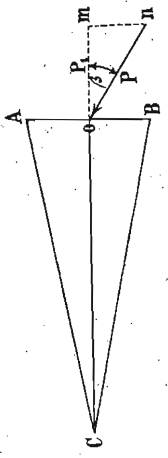
$$P = Q \cdot \frac{g}{h} = Q \operatorname{tang} \alpha.$$

489. — 3. Кад ма која од трију сила не дејствује управно на клин, него под ма којим углом, према одговарајућој страни, онда ваља ту силу редуцирати или свести. Ако је на пример дат клин *ABC* на који дејствује сила *P* косо (сл. 178.), она се може сматрати као дијагонала компонената *om* и *mn*. Последња компонента нема никаквог дејства на клин, а прва је:

$$P_1 = P \cos \beta.$$

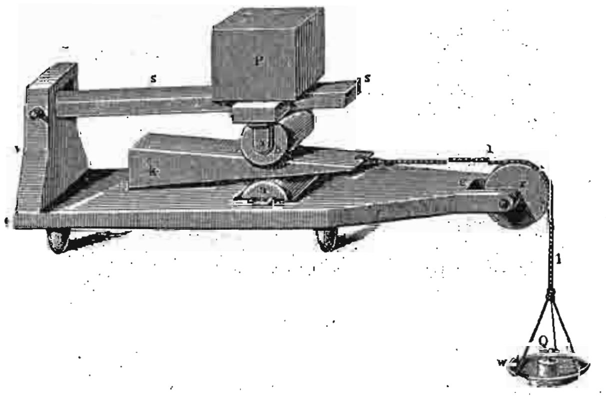
Пошто се дакле при сваком косом ударању клина један део силе губи, то би требало свуда, где је год могуће, дејствовати силом управно на главу клина.

Исто би тако могли свести и отпоре, који би под ма којим познатим углом дејствовали на стране клина. Експериментално се сви ови резултати о односу између силе и отпора код клина могу потврдити инструментом, који је представљен на слици 179.



Сл. 178.

490. Клин је нашао врло велике и разноврсне примене у практици. Тако за подизање врло тешких терета, обично на малу висину, употребљава се клин; за врло јаке притиске код извесних преса, такође се служи клином; алати за цепање нарочито за бодење и за сечење нису ништа друго до клинови. Код ових последњих мора још и оштрица клина да је врло оштра (ножеви, игле и т, д.). Врло велики део алата, као ножеви, маказе, секире, ашови, мотике, сабље, мамузе, бајонети и т. д. јесу све сами клинови у једном или другом облику, зупци код турпија и тестера су клинасти па и наши секутићи и очњаци су клинови. Најзад клин служи и за утврђивање у облику јексера и игала;



Сл. 179.

камење на сводовима мора се тесати у облику зарубљена клина. Па и саме жиле биљне клинасто се заривају у земљу.

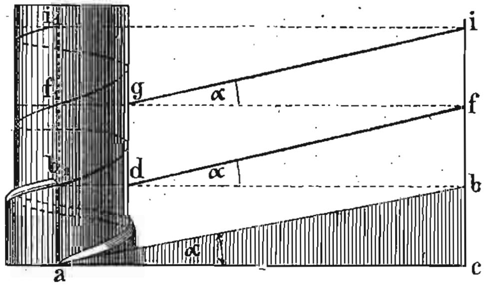
Код многих клинастих алата трење на које они наилазе смета њиховој радњи, код других пак њихова употреба и оснива се на трењу. Код ножева и свију клинова за сечење трење се своди на минимум, напротив јексери и клинови за утврђивање без трења не би имали никакве употребе.

b. Завртањ.

491. Кад се једна стрма раван увије око једног цилиндра онда, дужина стрме равни опише на цилиндру једну завојну или завртањску линију. Кад се завојне линије на цилиндру направе испупчене и такав се цилиндар уврне у рупу, чији су дуварови завојски издубљени, онда добивамо просту махину, која се зове *завртањ* (шраф).

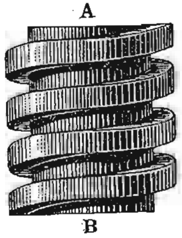
Како завртањ постаје из стрме равни, види се на сл. 180; висина стрме равни bc зове се на завртњу *висина ходника* $b'a$ и по себи се разуме, да ће, што год је нагиб стрме равни α мањи, и успон ходника код завртња бити блажи. Пошто се шипка, на којој је завојна линија обично испупчена, уврће у отвор у коме је та иста линија издубљена, ми ћемо је у будуће звати *увртањ*. Напротив, пошто се каже, да се отвор наврће на шипку кад је она мирна, ми ћемо отвор са завојним издубљеним линијама звати *навртањ* (мутер). Главна је

пак ствар код ове махине, да ходници буду у свему једнаки и код увртња и код његова навртња.

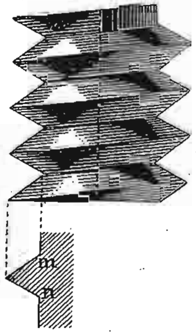


Сл. 180.

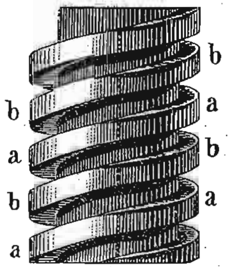
Ходници на увртњу могу бити четвртасти (као на слици 181.) или троугласти (сл. 182.) По себи се разуме да и издубљени ходници у навртњу морају имати исти геометријски облик. Даље и завртањ и увртањ могу бити с једним, с два или више ходника. Увртањ као на сл. 181. јесте с једним ходником, јер је само једна завојна линија око цилиндра намотана; међутим кад се две такве линије, т. ј. кад се две стрме равни намотају независно једна од друге око цилиндра, онда добивамо увртањ с два ходника. Такав је на пример увртањ на сл. 183., где је a једна а b друга завојна линија. Исто тако може бити увртањ с 3, 4 или више ходника.



Сл. 181.



Сл. 182.



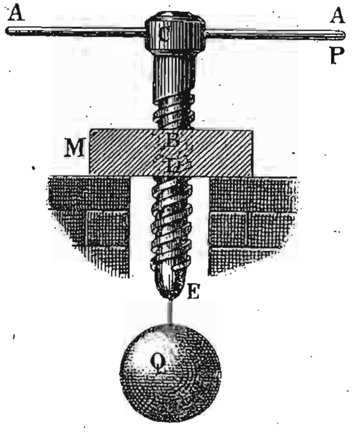
Сл. 183.

492. Што се тиче услова за равнотежу, њих ћемо одредити на овај начин. Терет Q (сл. 184.) који треба завртњем подићи или отпор који треба савладати, дејствује у правцу осе увртањског цилиндра CE, па дакле управно на основицу стрме равни из које је увртањ постао. Сила пак, која тежи да увртањ окрене, дејствује у равни која је управна на осу увртњеву, дакле паралелно са основицом стрме равни, и према томе, кад тај случај из стрме равни применимо овде, имаћемо:

$$P = Q \cdot \frac{h}{b} = Q \operatorname{tang} \alpha.$$

Док се увртањ попне за један цео ходник, сила P описаће целу једну периферију, па дакле и основица стрме равни, из које је увртањ постао, описаће једну периферију око цилиндра увртња. Ако полупречник цилиндра означимо са r, онда је његова периферија $= 2\,r\,\pi$, $=$ основици b стрме равни, која се око цилиндра завила, па стога ће образац за завртањ бити:

$$P = Q \cdot \frac{h}{2\,r\,\pi} \cdot \cdot \quad (220$$



Сл. 184.

Обично сила никад не дејствује непосредно на периферију увртња, него се за увртањ утврди или споји за време увртања дужа или краћа полуга, на коју сила дејствује (полуга ACA на слици 183., кључеви за завртње). По себи се разуме, да ће сила P која дејствује на таквој једној полузи бити у толико мања, у колико је сама полуга већа. Ако дужину те полуге или кључа означимо са R, онда је:

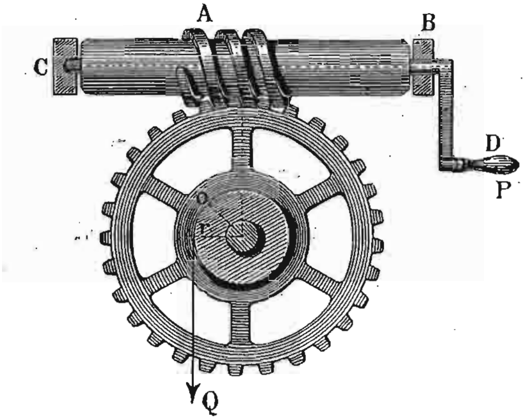
$$P : Q = h : 2\,R\,\pi.$$

За равнотежу код завртња стоји сила према терету као висина ходника према обиму круга који сила описује.

И овде, као и код осталих простих махина, нисмо водили рачуна о трењу, које нарочито овде знатно мења горњи услов за равнотежу.

Кад је завртањ с два или више ходника, онда у горњем обрасцу ваља разумети висину једне исте завојне линије, т. ј. за колико се увртањ помакне, кад се један пут окрене. Код увртања с два ходника биће дакле висина коју треба узети у рачун одстојање између прве и треће завојне линије.

493. **Бескрајни завртањ.** — Завртњи као што смо их до сад описали, т. ј. навртањ и увртањ, служе или за утврђивање у место јексера, или за вршење јаких притисака код извесних справа. Међутим, кад се завртањ употреби као справа за подизање врло тешких терета, он се споји са зупчастим точковима и то под именом бескрајног завртња (сл. 185.). Ако означимо са r полупречник вратила, а са R_1 полупречник зупчастог точка, онда ће притисак који зупци врше на ходнике завртња бити:



Сл. 185.

$$P_1 = \frac{Q\,r}{R_1}.$$

За равнотежу пак на завртњу нашли смо да је:

$$P = \frac{Q\,h}{2\,R\,\pi}$$

ако Q значи терет а R дужину полуге којом се завртањ окреће. Овде пак Q није ништа друго до притисак зубаца на ходнике, т. ј. P_1, па зато је за овај завртањ:

$$P = \frac{P_1\,h}{2\,R\,\pi} = \frac{Q \cdot rh}{2\,R_1\,R\,\pi} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (221$$

Бескрајни завртањ служи не само за подизање великих терета, него и за врло лагано кретање кругова код извесних справа, на пример код микрометарског завртња на микроскопу. За постепено затезање жица на гитару и другим инструментима служимо се такође бескрајним завртњем.

494. *Примери.* 1. На друму чији је нагиб $5^0/_0$ износе сметње $\frac{1}{30}$ терета. Колика је снага потребна да одржи кола од 500 кгр.:

а) без обзира на трење; b) са обзиром на трење; c) која је снага потребна да кола извуче уз брдо?

Кад је нагиб некога пута $5^0/_0$, онда значи, да на дужину од 100 мет. долази висина од 5 м. т. ј. успон је:

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{20}.$$

а). Према задатку је $P = Q\,\frac{h}{l} = 25$ кгр.

b). Сила од 25 кгр. била би потребна, кад би друм гладак као огледало, дакле без икаквог трења. Али пошто имамо да узмемо у рачун трење од $\frac{1}{30}$ целога терета, то ће и сила која ће одржати кола на стрмој равни бити много мања и износи:

$$P = 500 \cdot \frac{1}{20} - 500 \cdot \frac{1}{30} = 8{\cdot}3 \text{ кгр.}$$

c). Да се кола извуку на више, ваља савладати не само успон од $\frac{1}{20}$ него и трење од $\frac{1}{30}$, дакле биће:

$$P = 500\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right) = 31{\cdot}3 \text{ кгр.}$$

2. Један терет од 500 кгр, ваља одржати на стрмој равни чији је нагиб $\alpha = 16^0$. Кад сила заклапа са стрмом равни угао $\beta = 25^0$, колика је сила P и притисак N? Какав би био резултат: а) кад би сила биле паралелна с дужином; b) кад би била паралелна са основицом? — а). Према обрасцима које смо напред нашли:

$$P = Q\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = 500\,\frac{\sin 16^0}{\cos 25^0} = 152{\cdot}066 \text{ кгр.}$$

$$N = Q\,\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = 500\,\frac{\cos 41^0}{\cos 25} = 392{\cdot}562 \text{ кгр.}$$

b). Кад би P било паралелно с дужином:

$$P = Q\sin\alpha = 500\sin 16 = 137{\cdot}819 \text{ кгр.}$$

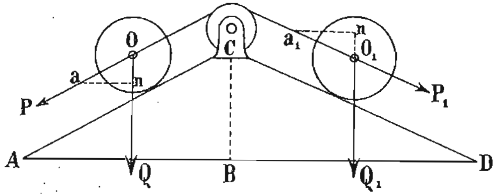
$$N = Q\cos\alpha = 500\cos 16 \doteq 480{\cdot}630 \text{ и}$$

c). Кад је P паралелно са основицом:

$$P = Q\,\mathrm{tang}\,\alpha = 500\,\mathrm{tang}\,16^0 = 143{\cdot}373 \text{ кгр.}$$

$$N = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{500}{\cos 16^0} = 520{\cdot}150 \text{ кгр.}$$

3. На стрмој равни AC (сл. 186.) је успон од $8^0/_0$; она је у вези са стрмом равни CD, чији је успон $5^0/_0$; колики терет могу вући уза стрму раван CD кола од 40 цената, која низ AC силазе: а) без обзира на трење; b) кад кола на обема равнима иду по гвозденим шинама, и кад је трење $= \frac{1}{200}$.



Сл. 186.

а. Према ранијем биће:

$$P = \frac{h}{l}\,Q \quad \text{и} \quad P_1 = \frac{h_1}{l_1}\,Q_1.$$

Пошто је:

$$\frac{h}{l} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} \text{ и } \frac{h_1}{l_1} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

и пошто 40 цената = 2000 кгр., то је:

$$P = \frac{2}{25} \cdot 2000 \quad \text{и} \quad P_1 = \frac{1}{20} \cdot Q_1.$$

Пошто P мора бити равно P_1, биће:

$$Q_1 = 3200 \text{ кгр.}$$

b). Без трења имамо на једној страни:

$$P = \frac{2}{25} \cdot 2000$$

услед трења та ће снага за $\frac{1}{200}$ 2000 бити смањена, па дакле:

$$P = \left(\frac{2}{25} - \frac{1}{200}\right) \cdot 2000 = 150 \text{ кгр.}$$

На другој страни ваља савладати не само $\frac{1}{20}$ него и $\frac{1}{200}$ терета Q, па је онда:

$$P_1 = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{200}\right) Q_1 = \frac{11}{200} Q_1.$$

Пошто мора да буде $P = P_1$, то је и:

$$Q_1 = 2727{\cdot}27 \text{ кгр.}$$

4. — a). У каквом односу стоји сила P према отпору Q на равностраном клину, чији је угао на врху $= 25^0$? — b). Колика би била сила, кад би отпор био 300 кгр. и то: α) да отпор дејствује управно на стране и β) паралелно са главом? — c). Шта ће бити у свима тим случајевима, кад је клин прост али са истим углом $\alpha = 25^0$?

a). Кад у једначини:

$$P = Q \sin\frac{\alpha}{2}$$

ставимо:

$$P = 1$$

биће:

$$Q = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin 12^0\, 30'} = 4{\cdot}62.$$

Дакле онда $P : Q = 1 : 4{\cdot}62$:

b). — α. $\quad P = Q \sin\frac{\alpha}{2} = 64{\cdot}932$

b). — β. $\quad P = Q \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 66{\cdot}508$ кгр.

c). $\quad P = Q \sin\alpha$. Кад ставимо: $P = 1$

биће:

$$Q = \frac{1}{\sin\alpha} = 2{\cdot}366$$

одакле:

$$P : Q = 1 : 2{\cdot}366.$$

Кад дејствује терет $Q = 300$ кгр. управно на стране клина, онда је:

$$P = Q \sin\alpha = 300 \cdot \sin 25^0 = 126{\cdot}78 \text{ кгр.}$$

Ако је Q паралелно с главом, онда је:

$$P = Q \operatorname{tang}\alpha = 300 \operatorname{tang} 25^0 = 139{\cdot}89 \text{ кгр.}$$

5. Да се један терет од 4000 кгр. издигне 5 см. високо снагом од 75 кгр. хоће да се употреби један прост клин; који однос постоји између дужине и ширине тога клина, кад је отпор: a) управан на страну, b) паралелан с главом, и колики је у сваком случају пут силе? —

a). Знамо да је $P : Q = g : l$, одакле за страну излази $53^1/_3$, т. ј. кад терет дејствује управно на страну простога клина, онда је ширина према дужини или глава према страни као $1 : 53^1/_3$.

b). Ако терет дејствује паралелно с главом, онда је:

$$P : Q = g : h, \quad \text{или} \quad 75 : 4000 = 1 : h$$

одакле:

$$h = 53{\cdot}333.$$

Пошто је:

$$l^2 = g^2 + h^2$$

то је онда:

$$l = \sqrt{1^2 + (53{\cdot}3)^2} = 53{\cdot}343.$$

c). Пошто је терет:

$$Q = \frac{160}{3} \cdot P.$$

то је и пут силе:

$$s = \frac{160}{3} \cdot 5 = 266\,{}^2/_3 \text{ см.}$$

6. — a). Висина једног завртањског ходника је 2 см., озиб на који снага дејствује $= 24$ см.; колики терет одговара снази од

40 кгр.? b). Колики би био крак силе, да се том силом отпор од 150 цената савлада?

$$\text{a).}\qquad Q = \frac{P \cdot 2 R \pi}{h} = \frac{40 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 3{\cdot}14159}{2} = 3015{\cdot}9 \text{ кгр.}$$

b). Из истог обрасца имамо крак силе:

$$R = \frac{Q \cdot h}{2 \pi P} = \frac{150 \cdot 50 \cdot 2}{2 \cdot 40 \cdot 3{\cdot}14159} = 59{\cdot}7 \text{ см.}$$

7. Један бескрајни завртањ с ходницима од 13 мм., који се окреће ручицом од 39 см., запада међу зупце једног зупчастог точка од 36·4 см. у полупречнику, који је на истој осовини с једним вратилом од 7·3 см. у полупречнику. Око вратила намотано је уже, о које виси терет Q; колики је тај терет, кад му одржава равнотежу снага од 20 кгр. на ручици?

$$Q = \frac{P \cdot 2 R \pi R'}{hr}$$

$$= \frac{20 \cdot 2 \cdot 390 \cdot 3{\cdot}14159 \cdot 364}{13 \cdot 78} = 17592{\cdot}9 \text{ кгр.}$$

C. Консервација енергије код простих махина.

495. Код врло мало простих махина сила је била равна отпору (само код равнокраког озиба), иначе смо свуда помоћу мањих снага кретали или држали равнотежу много већим отпорима. Изгледа, дакле, да се мањом количином рада и енергије може произвести код простих махина много већи рад, те да према томе просте махине, па дакле и све сложене, које су из њих постале, одступају од општег принципа консервације енергије у природи. Ми ћемо дакле с гледишта једнакости рада силе и рада отпора прегледати просте махине све редом, и уверити се, да и код њих вреди закон о похрани енергије.

Претходно пак упознаћемо се са ставом:

О елементарним радовима и виртуелним брзинама.

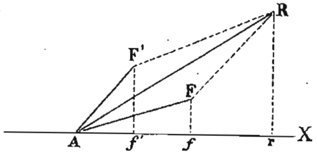
496. Познато нам је још из општега увода у природне науке, да једна сила кад успе да савлада отпор, одмах врши известан рад и да се тај рад мери производом из силе и њена пута. Ако је сила само толико савладала отпор или, другим речима, ако је успела да само толико поквари равнотежу, да њена нападна тачка пређе бескрајно мали пут, онда се тако бескрајно мали рад силе (који добивамо множењем силе с бескрајно малим путем) зове *елементаран рад силе* или *елементарни моменат.*

Елементаран рад силе биће раван производу из силе и елементарног пута онда, кад је правац силе и правац путање један исти; међутим кад правац путање с правцем силе заклапа известан угао, онда ће и елементаран као и обичан рад бити раван производу из силе и пројекције пута на њу или производу из силе и пута, помножену још с косинусом угла, који заклапа правац силе с правцем елементарне путање. Сам пак елементаран пут за се зове се још *виртуелан пут* или *виртуелна брзина,* т. ј. *уображена брзина.* Појам о виртуелној или уображеној брзини нарочито је употребљен у рационалној механици и служи да одвоји бескрајно мало премештање неке мирне материјалне тачке, али премештање идеално, замишљено и чисто хипотетичко од стварног и истинитог бескрајно малог пута, који тачка пређе кад је у кретању. Према томе и виртуелан је рад само рад идеалан и замишљен који се може упоредити са оним истинитим радом неке силе, која би прешла неки бескрајно мали пут за бескрајно кратко време.

Кад на неку материјалну тачку дејствује више сила, па је њихова резултанта равна нули, каже се, као што знамо, да су те силе у равнотежи. Ако је материјална тачка била релативно мирна, кад су на њу почеле дејствовати силе, које се узајамно потиру, онда се њено мирно стање неће покварити, и онда се каже да је таква *равнотежа статичка.* Напротив, ако се тело кретало извесном брзином, кад су горње силе почеле на њ дејствовати, онда је тело у *кинетичкој равнотежи.*

Рецимо да на неку материјалну тачку дејствују две групе сила и да је резултанта сила прве групе равна нули, док међутим резултанта сила друге групе је различна од нуле. Ако је материјална тачка у миру, онда ће се она почети кретати услед резултанте ове друге групе сила. Али ако материјална тачка већ сама собом има неку брзину, онда ће се та њена брзина сложити с брзином која излази из резултанте сила друге групе у једну резултанту, јер ми знамо, да стране силе дејствују на неко тело сасвим једнако, било да је то тело у миру било да је у кретању.

497. Посматрајмо дакле једну материјалну тачку A на коју дејствују силе F и F', (сл. 187,) и теже да је крену правцем и смислом AX. Означимо са σ елементаран пут нападне тачке, а са x_1 x_2 и x пројекције сила F, F' и резултанте њихове R, на правац путање. Међутим код општег слагања сила видели смо, да је пројекција резултанте равна збиру пројекција компонената, па дакле је:



Сл. 187.

$$x = x_1 + x_2$$

или ако обе стране једначине помножимо елементарним путем σ, имаћемо елементарне радове:

$$x\sigma = x_1\sigma + x_2\sigma.$$

Ако на тачку не дејствује само две силе, него читав систем сила, онда, пошто је увек пројекција резултанте, равна збиру пројекција компонената, дакле пошто је:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot x_n$$

биће такође и:

$$x\sigma = x_1\sigma + x_2\sigma + x_3\sigma + \cdot \cdot \cdot \cdot x_n\sigma.$$

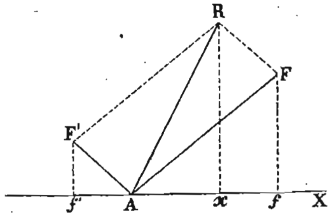
Кад дакле на неку материјалну тачку дејствују две или више сила, које све теже да је крену у истом смислу, онда ће елементаран рад резултанте бити раван збиру елементарних радова компонената.

498. Посматрајмо сада случај, где на једну материјалну тачку дејствују две силе, тежећи да је крену истим правцем али супротним смислом. Ако задржимо исте знаке као и мало час, и силе F и F' (сл. 188.) пројицирамо на заједнички правац кретања $f'X$, добићемо да је пројекција резултанте равна разлици пројекција компонената, т. ј.:

$$x = x_1 - x_2$$

па дакле и:

$$x\sigma = x_1\sigma - x_2\sigma.$$



Сл. 188.

Ако је материјална тачка изложена систему сила, подељену у две групе, тако да силе $P_1 P_2 P_3 \cdot \cdot \cdot P_n$ прве групе теже да крену материјалну тачку извесним правцем и смислом, а силе друге групе $P_1' P_2' P_3' \cdot \cdot \cdot P_n'$ теже да крену тачку истим правцем али супротним смислом, онда ће и резултујући елементаран рад бити раван збиру елементарних радова сила једне групе, смањен збиром елементарних радова сила друге групе; другим речима, елементаран рад резултанте биће раван алгебарској суми елементарних радова компонената:

$$x\sigma = (x_1\sigma + x_2\sigma + x_3\sigma \cdot \cdot \cdot + x_n\sigma) -$$

$$-(x_1'\sigma + x_2'\sigma + x_3'\sigma + \cdot \cdot \cdot x_n'\sigma) = \Sigma(x\sigma) - \Sigma(x'\sigma)$$

или, кад у место пројекција узмемо саме силе и рад резултанте означимо са $R(R)$ а радове компонената са:

$$R(P_1),\ R(P_2) \cdot \cdot \cdot R(P_1'),\ R(P_2') \cdot \cdot \cdot$$

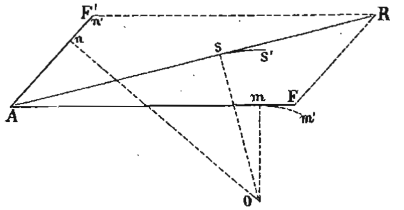
$$R(R) = R(P_1) + R(P_2) + R(P_3) + \cdot \cdot \cdot R(P_n) -$$

$$-[R(P_1') + R(P_2') + \cdot \cdot \cdot R(P_n') = \Sigma[R(P_1)] - \Sigma[R(P_1')].$$

А то значи: *кад на једну тачку дејствују две силе или две групе сила, које теже да је крену истим правцем али супротним смислом, елементаран рад резултанте раван је разлици елементарних радова компонената.*

499. То су били закони о виртуелним радовима код прогресивног кретања. Проучимо сада кружно кретање.

Нека су $F = P_1$ и $F' = P_2$ (сл. 189.) две силе, које теже да окрену раван слике око осе, која је пројецирана у



Сл. 189.

тачки O. Кад из те тачке спустимо управне на силе и на њихову резултанту, знамо да је статички моменат резултанте раван збиру статичких момената компонената т. ј.:

$$Ra = P_1 a_1 + P_2 b_2$$

кад целу једначину помножимо са σ, дужином елементарног пута који опише тачка на јединици одстојања за бескрајно кратко време, онда имамо:

$$Ra \sigma = P_1 a_1 \sigma + P_2 a_2 \sigma.$$

На други начин, ми можемо пренети заједничку нападну тачку A за силу P_1 у m, за силу P_2 у n_1 а за резултанту у s. И ако пустимо да се цео систем бескрајно мало покрене око осе O, нападне тачке m, n, s, описаће за врло кратко време сличне лучне путање mm', nn', ss', с полупречницима Om, On и Os т. ј. с крацима сила. И како правци тих сила остају тангенте на пређене путање, оне дејствују у правцу самих путова, па зато ће елементарни радови бити:

$$P_1 \, mm', \; P_2 \, nn', \; Rss'.$$

Међутим је:

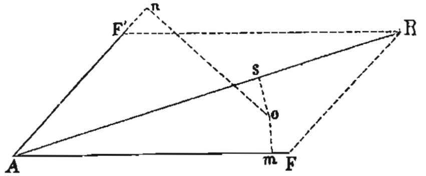
$$mm' = a_1 \sigma, \; nn' = a_2 \sigma, \; ss' = a \sigma$$

па зато ће рад резултанте бити $Ra \sigma$ а радови сила $P_1 a_1 \sigma$ и $P_2 a_2 \sigma$, те опет долазимо до горње једначине.

То исто вреди и кад на материјалну тачку дејствује више сила у равни, јер се сваки систем сила може свести на само две силе, чија резултанта врши елементаран рад, који је увек раван збиру елементарних радова компонената. Према томе:

Кад на неку материјалну тачку дејствују две или више сила и теже да је окрену око неке осе у истом смислу, онда је елементаран рад резултанте раван збиру елементарних радова компонената.

500. Најзад посмотримо случај, где једну материјалну тачку теже две силе да обрну око неке осе у супротном смислу (сл. 190.) Пошто је у том случају



Сл. 190.

пројекција O обртне осе између самих сила, однос између момената биће дат овом једначином:

$$Ra = P_1 a_1 - P_2 a_2$$

и кад помножимо са σ т. ј. с криволинијским путем тачке на одстојању јединици од осе, за бескрајно кратко време, имаћемо:

$$Ra \sigma = P_1 a_1 \sigma - P_2 a_2 \sigma.$$

Овај се закон може да рашири на читав систем сила, који би био подељен на две групе, тако да једна група тежи да окрене неку тачку око неке осе у једном смислу а друга група тежи да окрене исту ту тачку око исте осе али у супротном смислу.

Нека су $P_1\ P_2\ P_3 \cdots P_n$ силе прве групе а $P_1'\ P_2'\ P_3' \cdots P_n'$ силе друге групе. Сложимо најпре радове означене са R, прве две силе из прве групе, па ће бити:

$$R_1(P) = R(P_1) + R(P_2).$$

Означимо са $R_2, R_3 \cdots$ остале парцијалне резултанте сила $P_3, P_4 \cdots P_n$ сложене две и две, а са R рад крајње резултанте, прве групе сила, имаћемо:

$$R_2(P) = R(P_3) + R_1(P) = R(P_1) + R(P_2) + R(P_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R(P) = R(P_1) + R(P_2) + R(P_3) + \cdots R(P_n).$$

Ако означимо са $R(P')$ рад резултанте друге групе сила, биће исто тако:

$$R(P') = R(P_1') + R(P_2') + R(P_3') + \cdots R(P_n').$$

Ако крајњу резултанту означимо са ρ и њен рад са $R(\rho)$, то, пошто обе групе сила теже да окрену у супротним смислу, биће:

$$R(\rho) = R(P) - R(P')$$

или:

$$R(\rho) = R(P_1) + R(P_2) + \cdots + R(P_n) -$$

$$-[R(P_1') + R(P_2') + \cdots R(P_n')] =$$

$$= \Sigma[R(P)] - \Sigma[R(P')].$$

Кад дакле на једну материјалну тачку дејствују две силе или две групе сила у једној равни, па све теже да окрену тачку око неке осе али у супротном смислу, онда ће елементаран рад резултанте бити раван разлици елементарних радова компонената, или ће бити раван алгебарској суми елементарних радова компонената.

501. Све досадашње извођење вреди само за елементарне радове; али како постоји извесан однос између елементарних радова резултанте и одговарајућих елементарних радова компонената, очевидна је ствар, да ће вредети тај однос и за збир елементарних радова опште резултанте као и за збир елементарних радова сваке компоненте, или, другим речима, теорема о елементарним радовима вреди и за тоталан рад извршен у неком извесном времену. Тако дакле, кад имамо пред собом трајан рад некога система сила, довољно је да замислимо да је крива путања подељена на праволинијске елементе и да су силе биле сталне за бескрајно кратко време, које одговара сваком елементарном путу.

Према томе можемо изрећи ово правило:

Кад на неку материјалну тачку дејствују променљиве силе, и кад та тачка услед тих сила описује ма какву криву путању, тоталан рад променљиве резултанте, раван је алгебарском збиру радова компонената.

Све ове теореме вреде за случај кад две или више сила дејствују на једну исту тачку; али оне вреде и кад су силе паралелне. То излази отуда, што ми нисмо чинили никакву претпоставку о правцу сила, и што се и саме паралелне силе подразумевају у општем случају који смо извели.

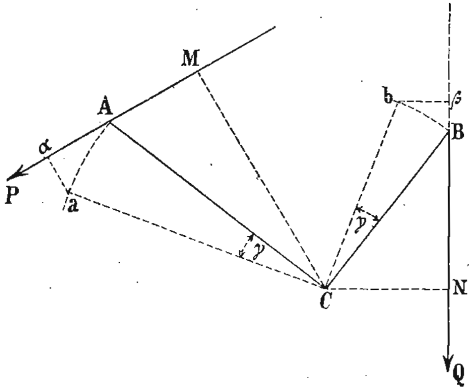
502. Из свега досадашњега видели смо, да ће једна материјална тачка, на коју дејствује више сила, бити само онда у равнотежи, ако је резултанта свију сила равна нули. Из тога следује да и рад резултанте мора бити раван нули за свако бескрајно мало премештање нападне тачке, јер кад је резултанта равна нули, њен рад мора такође бити раван нули, па ма какав био пут што га је прешла нападна тачка. Па пошто је елементаран рад резултанте раван збиру елементарних радова компонената, онда следује, да кад је једна материјална тачка у равнотежи, треба а и довољно је, да је збир елементарних радова сила, који на ту тачку дејствују, раван нули.

Како тај закључак вреди за сва елементарна премештања, збир износи цео пут који је прешла материјална тачка, онда се то може уопште овако изрећи:

Кад на једну материјалну тачку дејствује један систем сила, које су међу собом у равнотежи на свима деловима пута по коме се креће та тачка, онда је збир њихових радова непрестано раван нули.

503. Ако силе не дејствују на једну материјалну тачку, него на читав систем материјалних тачака везаних међу собом, т. ј. на једно материјално тело, то онда, пошто равнотежа целога система може да постоји само тако, ако су поједини делови његови у равнотежи, — збир елементарних радова сила, које дејствују на сваку тачку, мора бити раван нули, па дакле и *збир елементарних радова свију сила које дејствују на све материјалне тачке система мора бити раван нули.*

Да бисмо боље схватили овај важан став, узмимо да су две силе P и Q (сл. 191.) које дејствују на озиб на лакат ACB, који се може окретати око тачке C, међу собом у равнотежи. Онда, ако су CN и CM краци њихови, мора да буде:



Сл. 191.

$$P \cdot CM = Q \cdot CN.$$

Нека се сад полуга бескрајно мало покрене, и нека услед тога дође тачка A и B у тачку a и b при чему ће бескрајно мали углови γ бити међу собом једнаки. Онда су бескрајно мали луци Aa и Bb виртуелне брзине тачака A и B. Ако те луке пројицирамо на одговарајуће им правце сила, онда су пројекције $A\alpha$ и $B\beta$ виртуелне брзине тих тачака, узете у правцу самих сила. (У врло много случајева пројекције падају заједно с виртуелним брзинама самих нападних тачака). При томе је пројекција $A\alpha$, пошто пада у правац силе, *положна*. а пројекција $B\beta$, падајући у супротном смислу силе Q, *одречна*.

Мали лук Aa може се сматрати као права линија; онда ће бити:

$$\triangle\, Aa\,\alpha \sim \triangle\, CAM$$

а одавде имамо:

$$CM : CA = A\alpha : Aa$$

ако ставимо пројекцију $A\alpha = p$, имамо:

$$p = \frac{CM \cdot Aa}{CA}.$$

Исто тако из сличности троуглова $Bb\,\beta \sim BCN$ имамо:

$$CN : CB = B\beta : Bb$$

или кад ставимо $B\beta = q$, биће:

$$q = \frac{CN \cdot Bb}{CB}.$$

Међутим је $Aa = CA \cdot \gamma$, па дакле и:

$$\gamma = \frac{Aa}{CA}$$

а тако исто и:

$$\gamma = \frac{Bb}{CB}.$$

што кад заменимо горе добивамо:

$$p = CM \cdot \gamma \quad \text{и} \quad q = CN \cdot \gamma$$

или:

$$\frac{p}{q} = \frac{CM}{CN}.$$

Пошто из прве горње једначине статичких момената излази:

$$\frac{CM}{CN} = \frac{Q}{P}$$

то је онда и:

$$\frac{p}{q} = \frac{Q}{P}$$

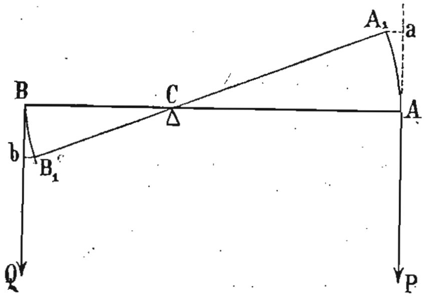
или:

$$Pp = Qq.$$

Међутим споменули смо, да су p и q супротно означени, онда је:

$$Pp + Qq = 0.$$

504. Принцип виртуелних брзина даје се употребити врло згодно за одређивање услова за равнотежу свију простих махина, узевши у рачун њихове виртуелне или замишљене путове и радове. Примера ради посматрајмо разнокрак озиб, на који дејствују управне силе (сл. 192.).



Сл. 192.

Ако покваримо равнотежу у толико, да тачка A дође у A' и B у B', и ако су путови AA' и BB' бескрајно мали, онда су $\overline{Aa}$ и $\overline{Bb}$ виртуелне брзине тачке A и B у правцу сила P и Q, и то прва је положна а друга одречна.

На основу принципа о виртуелним радовима мора да буде:

$$P \cdot Aa = Q\, Bb$$

или:

$$P : Q = Bb : Aa.$$

Због сличности троуглова $AA_1 a$ и $BB_1 b$, јер су AA_1 и BB_1 слични кружни луци, имамо:

$$Bb : Aa = BB_1 : AA_1 = BC : AC$$

па дакле и:

$$P : Q = BC : AC$$

или:

$$P \cdot AC = Q \cdot BC$$

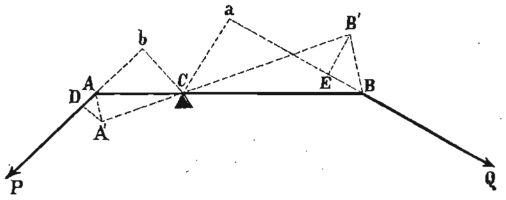
као што смо то и на други начин раније извели.

Међутим ми смо видели код теорема за виртуелне радове, да се они могу применити и на радове извршене за коначна времена. Тога ради замислимо, да се озиб ACB окрене за 360°, т. ј. да тачка A и тачка B опишу по један круг са одговарајућим полупречницима AC и BC. Периферије целих кругова имају се као полупречници, а луци AA' и BB' пошто одговарају једнаким средишним угловима ACA_1 и BCB_1 јесу исти делови целих периферија. Одатле следује, да ако је AC, два три или више пута веће од BC, можемо силом P која на A дејствује, одржати равнотежу два, три или више пута већем терету Q, али да је у исти мах и пут силе P два три или више пута већи од пута отпора Q.

А то значи, *ма да се мањом силом (на дужем краку) може код озиба одржати равнотежа већем терету (на краћем краку), увек ће и њихови виртуелни као и тотални радови остати исти*, па дакле и ако код озиба добивамо на снази, не добивамо ни у колико на раду, јер мања снага мора већи пут да пређе и обратно, т. ј. ма какви услови за равнотежу били код озиба између силе и терета, мора увек да је *рад силе раван раду отпора.*

505. Овде смо посматрали случај где су силе дејствовале управно на озиб. Да видимо вреди ли исти закон о консервацији рада и у оном случају, где силе нису управне на озиб.

Имамо на пример озиб ACB (сл. 193.) и на њему силе P и Q. Кад се озиб за бескрајно мало помери,



Сл. 193.

доћи ће тачка A у A' и B у B' и, да бисмо нашли њихове ементарне радове спустимо управне $A'D$ и $B'E$, па ћемо имати пројекције пута на правце сила. Елементарни радови њихови биће $P\,\overline{AD}$ и $Q\,\overline{BE}$.

Троугли ADA' и ACb су међу собом слични као правоугли; и из те сличности излази:

$$AD : Cb = AA' : AC$$

Из сличних разлога су и троугли $BEB' \sim BCA$, одакле је опет:

$$BE : Ca = BB' : CB.$$

Луци AA' и BB' стоје спрам једнаких углова и сразмерни су својим полупречницима, т. ј.:

$$AA' : BB' = CA : CB$$

$$AA' : AC = BB' : CB.$$

Кад упоредимо ову сразмеру са обема горњим, видећемо да је:

$$AD : Cb = BE : Ca$$

или:

$$AD : BE = Cb : Ca.$$

За равнотежу на озибу мора да буде као што знамо:

$$Q : P = Cb : Ca$$

па дакле и:

$$Q : P = AD : BE$$

или:

$$P \cdot AD = Q \cdot BE.$$

Дакле и кад силе дејствују под косим угловима на озиб, опет су елементарни па дакле и тотални радови једнаки. Или и овде је рад силе раван раду отпора.

506. Кад смо на тај начин видели да принцип о једнакости рада силе и отпора постоји код озиба, па било да су силе управне или косе на озиб, онда можемо закључити, да ће он остати у вредности и за све остале махине које се на озибу оснивају. Али због велике важности тога принципа код простих махина ми ћемо посебице извесне поједине случајеве укратко претрести.

Код сталног се котура ствар сама собом тумачи, јер је снага равна отпору, па и њихови радови. Али узмимо покретан котур с паралелним конопцима, код кога је снага у пола мања од отпора. Рецимо да смо успели да терет подигнемо на неку висину s, онда је његов рад био Qs. Да се терет на ту висину подигне, мора снагом да се скрате конопци с обе стране котура за s, дакле снага има свега да намота дужину од $2\,s$, па дакле толики и пут да пређе, док се терет издигне за s. Њен рад је према томе $P \cdot 2\,s$. Али пошто је $P = \frac{Q}{2}$ биће и $P\,2\,s = Qs$, дакле опет рад силе раван раду отпора.

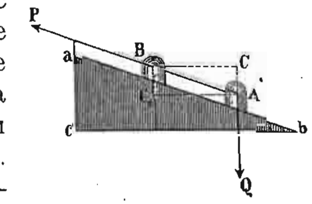
Код аритметичких колотура видели смо у посматраном примеру, да је сила била само јелна шестина од терета; ако се дакле терет попео за један метар, морало се пре тога свих шест ужета скратити за по један метар, дакле сила је морала прећи шест пута већи пут, јер је била шест пута мања. Њен је рад дакле и овде онолики исти као и рад терета.

Код точка на вратилу нашли смо да је снага онолико пута мања од терета, колико је пута полупречник точка већи од полупречника вратила. Међутим, док се точак једанпут окрене, терет се издигне само за обим вратила, па како су периферије и точка и вратила сразмерне њиховим полупречницима, то ће и периферија точка, па дакле и пут силе бити онолико пута већи, колико је пута полупречник точка већи од полупречника вратила. Ако је полупречник точка n пута већи од полупречника вратила, онда ће, истина, сила бити само $\frac{1}{n}$ део терета, али ће и њен пут бити n пута већи од пута терета, тако да је опет производ из силе и њена пута раван производу из терета и његова пута, то јест, рад силе раван је раду терета.

Међу примерима, које смо навели за точак на вратилу и зупчасте точкове, видели смо на примеру четвртом, где је био дат зупчасти точак на вратилу, да је снага била према терету као 1 према 56. Дакле снага је била 56 пута мања од терета. У истом примеру одредили смо, да док се терет подигне за 3 метра, сила је прешла пут од 168·18 метара. Из тога видимо да је и пут силе био $\frac{168{\cdot}18}{3} = 56$ већи од пута отпора, па дакле да су и њихови радови остали исти.

У идућем примеру (у истој групи) код ждрала видели смо да кад сви зупчасти точкови раде, да је сила према терету била као 1 : 670. Међутим, мало ниже нашли смо, да дотле, док се терет подигне за четири метра, сила пређе пут од 2680 метара, дакле пут, који је $\frac{2680}{4} = 670$ пута већи од пута терета. Дакле и код тако сложених машина, као што је ждрал, увек остаје: *рад силе раван раду терета.*

507. Да видимо сада, како стоји ствар код стрме равни и махина које су из ње изведене.



Сл. 194.

Имамо на стрмој равни abc (сл. 194.) једно тело A, које је сила P за бескрајно мало време извукла из A у B. Нападна тачка терета Q прешла је пут AB, који с њим заклапа известан угао BAQ. Кад тај пут пројицирамо на правац терета, добићемо пројекцију AC, за коју се терет уза стрму раван попео. Рад терета је као што видимо $= Q \cdot AC$. Сила је пак за то време прешла пут AB, и то у истом правцу у коме је и дејствовала, те према томе њен рад био је $P \cdot AB$. Да видимо јесу ли ти радови једнаки?

Троугао ABC сличан је с троуглом abc, а из те сличности имамо:

$$AC : AB = ac : ab.$$

Међутим, знамо из услова за равнотежу код стрме равни да је:

$$P : Q = ac : ab$$

одакле следује:

$$P : Q = AC : AB$$

или:

$$P \cdot AB = Q \cdot AC.$$

Дакле и овде је рад силе раван раду отпора.

На једном примеру за клин видели смо да се снагом од 75 килограма може подићи терет од 4000 кгр., дакле терет је $\frac{4000}{75} = 53{\cdot}3$ пута већи од силе. У истом примеру нашли смо, да је клин па дакле и сила прешла пут од 266·6 см., док се терет попео за 5 см., значи дакле да је пут силе $\frac{266{\cdot}6}{5} = 53{\cdot}3$ пута већи од пута терета. И код клина је дакле увек рад силе раван раду отпора.

508. Напослетку посматрајмо бескрајни завртањ, код кога имамо у исти мах и озиб и стрму раван, дакле спојене просте махине обе врсте. За равнотежу код бескрајног завртња нашли смо да постоји:

$$P = \frac{Q \cdot rh}{2 R_1 R \pi}.$$

Нека се равнотежа поквари, и нека се вратило зупчастог точка помери за бескрајно мали пут, за виртуелну брзину $ro = \sigma$ (сл. 185.). Пошто је терет Q тангента на пут, то ће и елементаран рад терета бити просто раван производу из терета и пута, т. ј. $Q\sigma$. За исто време сила P дејствујући на ручици D, прешла је неки пут x, тако да је њен рад Px. Да видимо јесу ли оба та рада једнака?

Треба нам да одредимо пут x. Док се терет издигао за пут σ, дотле се један зубац на периферији зупчастог точка помакао за:

$$\frac{R_1}{r} \cdot ro = \frac{R_1}{r} \sigma.$$

Док се ручица D једанпут окрене, т. ј. док сила пређе пут $2 R \pi$, дотле се зупчасти точак помери за један зубац т. ј. за један ходник завртњев h. Пут пак x, који ће прећи сила P док се зубац померио не за h већ за $\frac{R_1}{r} \sigma$, наћи ћемо из сразмере:

$$h : 2 R \pi = \frac{R_1}{r} \sigma : x$$

одавде је:

$$x = \frac{2 R \pi R_1 \sigma}{hr}.$$

Рад силе дакле биће:

$$Px = \frac{Q\, rh}{2 R \pi R_1} \cdot \frac{2 R \pi R_1 \sigma}{rh} = Q \sigma.$$

Дакле и овде је: *рад силе раван раду отпора*

509. Прегледали смо како основне тако исто и из њих изведене махине, и дошли смо до ових резултата:

1. Равнотежа свију махина зависи од ова три главна услова: 1) од премештања нападних тачака; 2) од слагања и разлагања сила и 3) од статичких момената. Ови услови вреде у целој статици чврстих тела и они нам помажу у практици, да одредимо силе којима су та тела изложена и којима треба отпора да даду. Прости односи које смо нашли да постоје између сила и отпора често су промењени услед трења и других сметња, којих увек у већој или мањој мери има код сваке махине.

2. Даље смо нашли, да је однос између силе и терета на некој простој махини увек одређен и сталан и да зависи од димензија саме махине. Ако имамо сложену махину, састављену из читавог низа простих, мора за равнотежу целе машине да буде *сваки појединu саставни део* у равнотежи.

3. Ако се махина бескрајно мало помери, онда ће нападне тачке силе и отпора прећи елементарне путове, који, мерени у правцу силе и отпора, зависе од димензија махине и увек су тим дејствима изврнуто сразмерни. Производи пак обеју величина и на једној и на другој страни су једнаки, и ако је на једној страни кретање било у смислу силе, на другој страни кретање мора бити у супротном смислу.

4. Тај последњи резултат је само један специјалан случај општег става о виртуелним брзинама, који вреди за равнотежу свакога споја чврстих тела на који силе дејствују. Ако се целина бескрајно мало крене, и ако образујемо производе сваке појединe силе P с бескрајним премештањем или виртуелном брзином σ њене нападне тачке, мерене у правцу силе и узете свака са

својим знаком + или — како је кад премештање било у смислу силе или у супротном смислу, увек ће бити:

$$\Sigma (P \sigma) = 0.$$

Дакле силе, које *између* појединих делова једнога система дејствују, отпадају, јер на основу једнакости између акције и реакције, образују једнаке али супротно означене производе.

5. Производ $P \sigma$ није ништа друго до виртуелан рад, и онда се горњи став даје још овако простије изрећи:

Произведени и утрошени радови свију сила у једноме систему једнаки су; или, још јасније:

Колико се год једном машином добије у снази, толико се исто изгуби на путу или у времену.

Према томе став о консервацији енергије са свима својим последицама вреди и за све машине.

ДЕО ДРУГИ

Кретање чврстих тела

(Геокинетика)

I.

О кретању у опште.

А. Једнако и променљиво кретање.

510. Како кретање материје у опште, тако исто и кретање чврстих тела карактерисано је појмовима о путу и брзини. Према тим елементима, свако се кретање тела може поделити на неколико група. Тако на пример: према путу или путањи кретање тела може бити право или криво линијско. Кад је путања крива линија, онда она може бити равна или просторна. Исто тако и брзина може бити стална или променљива. Ако су промене брзине правилне и једнаке, онда је то једнако променљиво кретање; ако су правилне и неједнаке онда је неједнако променљиво кретање. Ако су најзад промене неправилне, онда се такво кретање назива неправилно променљиво кретање. Сем тога сва променљива кретања могу бити још и убрзана или успорена.

Раније смо видели (164), да једно кретање може бити у целини једнако, а у појединим деловима променљиво, као на пример код клатна. Такво се кретање назива периодично или хармонично.

Задатак је кинетике чврстих тела, да одреди законе по којима се врше сва горе поменута и слична кретања са одговарајућим последицама и узроцима који их прате, а у колико се то односи на чврста тела.

511. Једнако праволинијско кретање. — Ово кретање постаје, кад се неко тело креће сталном или једнаком брзином. Све оно што смо за то кретање нашли приликом посматрања кретања материје у опште, вреди и за једнако кретање чврстих тела. Стога ћемо се ми овде ограничити само на кратко понављање оних закона, које смо тамо извели.

Однос између пута (s), брзине (c) и времена (t) представљен је обрасцима:

$$s = ct,\ c = \frac{s}{t},\ t = \frac{s}{c}.$$

512. Једнако кружно кретање. — Из појединих образаца за периферну брзину изводе се ови односи између периферне брзине (c), угловне брзине (w) и полупречника (r):

$$C = rw \quad \text{или} \quad w = \frac{c}{r}.$$

513. Једнако променљиво кретање без почетне брзине. — Док је код једнаког кретања брзина била стална и непроменљива. она се сада мења сваке секунде и зависи како од времена тако и од убрзања. Однос између брзине код једнако променљивог кретања (v), убрзања или акцелерације (a) и времена (t) дат је за једнако убрзано односно успорено кретање овим изразима:

$$v = at$$

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{v^2}{2\,a}.$$

514. Једнако променљиво кретање с почетном брзином. — Водећи рачуна како о сталној тако и о променљивој брзини, -убрзању и времену добивамо за убрзана односно успорена кретања горње врсте ове односе:

$$v = c + at \quad \text{и} \quad v = c - at$$

$$s = ct + \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad s = ct - \frac{at^2}{2}$$

$$v = \sqrt{c^2 + 2\,as} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{c^2 - 2\,as}.$$

В. Слободно падање.

515. Међу свима кретањима, која можемо у природи посматрати, потребно је да се на првом месту упознамо са онима, која постају на нашој земљи а услед њена привлачења. Јер наша земља, као и сва остала тела у васиони, има ту особину да привлачи, и то је њено привлачење познато под именом *земљине тêже.*

Наша земља привлачи сва тела, која су на њеној површини (јер ћемо се за сад ограничити само на та тела). Али, на основу закона о акцији и реакцији следује, да и сва та тела привлаче земљу. Једно тело, подупрто каквом подлогом, притискује на своју подлогу али и подлога притискује на тело. Кад се подлога уклони, онда се услед узајамног привлачења, тело крене према земљи а и земља према телу. Па како су убрзања, која и код тела и код земље постану, изврнуто сразмерна масама, то је убрзање, које тело саопшти земљи, према несразмерно великој маси земљиној, бескрајно мало. С тога се може узети као да земља и не пада, да је она према телу мирна и да само тело пада. И ако то тело пада према земљи без икакве сметње, онда се каже да оно *слободно пада.*

516. У старо доба, и све до Галилеја, сасвим се нетачно мислило о падању тела. Држало се да тела тежа брже падају од лакших. Међутим, данас се зна, да кад се уклоне све сметње које слободном падању сметају, да онда сва тела и „тешка“ и „лака“ падају једнаком брзином. Најлакше се то доказује, кад се тела разне специфичне тежине, на пр комад олова, плуте и пера затворе у једну мало дужу стаклену цев ($1^1/_2$ до 2 мет. дугачку) и из ње се извуче ваздух. У тој ће цеви сва три тела, и ако врло различита по тежини, падати истом брзином.

Из тога се изводи закључак, да *сва тела падају* (у безваздушном простору) *једнаком брзином*, или, другим речима: *земља привлачи сва тела једнаком снагом*, или још: *привлачна снага земљина саопштава свима телима једнако убрзање.* То је *први закон о слободном падању.*

517. *Други закон о слободном падању* односи се на врсту кретања код тог падања, дакле на брзину и време падања.

Пре него што пређемо на излагање односа, који чине предмет другога закона, ваља да напоменемо да се сва тела, кад слободно падају, крећу правцем вертикалним, т. ј. по правој линији, која довољно продужена пролази кроз средиште земљино. Тај се правац најлакше добива виском.

Привлачна снага земљине или тêжа трајна је сила. Говорећи о силама видели смо, да свака трајна сила изазива промењиво кретање. А пошто се тежа може за једно извесно место сматрати и као стална сила, то она изазива на свима телима, која услед ње слободно падају, *једнако променљиво кретање*. Према томе сви они обрасци, нађени раније за једнако променљиво кретање, могу се применити и за слободно падање тела.

518. У самој ствари привлачна снага земљина, па дакле и убрзање, које она изазива, није стално него се мења висином, т. ј. одстојањем од земљина средишта. Због тога ми за сад, за једно извесно место и за мале разлике висинске, можемо сматрати да је тêжа стална сила и да је убрзање стална величина. Доцније ћемо о промени привлачне силе земљине и убрзања подробније говорити; за сад само напомињемо, да су та сила и њено убрзање изврнуто сразмерни квадрату одстојања и убрзање се може у опште представити овим обрасцем:

$$g = \frac{k}{R^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (222$$

где g значи убрзање, R одстојање од земљина средишта а k извесну константу.

519. Раније нађене обрасце за једнако променљиво кретање изменићемо само у толико, што ћемо свуда у место опште акцелерације a узети убрзање земљине теже, које ћемо означити са g (gravitas). Тако ћемо добити образац за брзину тела које слободно пада под утицајем земљина привлачења:

$$v = gt$$

а за пређени пут или висину:

$$h = s = \frac{gt^2}{2} = \frac{vt}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (223$$

Остале појединости код слободног падања видимо из овог табеларног прегледа:

Трајање падања у секундама	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Крајње брзине	0	1 g	2 g	3 g	4 g	5 g	6 g	7 g	8 g	9 g	10 g
Путови у појединим. секундама	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$
Укупни путови	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$

А то значи:

1. Брзине у појединим секундама сразмерне су целим бројевима.

2. Путеви пређени у свакој појединој секунди сразмерни су непарним целим бројевима.

3. Укупни путеви сразмерни су квадратима целих бројева.

Ове је законе први пут поставио Галилео.

Из горњих се образаца могу добити још и ови:

$$t = \frac{v}{g}, \quad s = h = \frac{v^2}{2\,g}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}, \quad v = \sqrt{2\,gh}.$$

520. Може се десити да слободно падање отпочне са извесном почетном брзином c. Онда горњи обрасци добивају ове облике:

$$\left.\begin{aligned} v &= c + gt = \sqrt{c^2 + 2\,gh} = \sqrt{2\,g\left(\frac{c^2}{2\,g} + h\right)} \\ s &= h = ct + \frac{g\,t^2}{2} = \frac{v^2 - c^2}{2\,g} = \frac{(v+c)\ (v-c)}{2\,g} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \quad (224$$

521. Није све једно, да ли ће неко тело слободно падати у простору који је *изнад* површине земљине

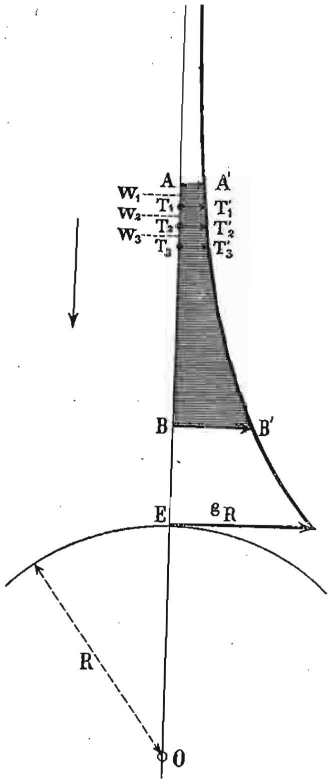
или ће падати кроз земљину масу, на пр. у каквом бунару, прокопу и т. д. Јер док се привлачна снага земљина и убрзање изнад њене површине мења изврнуто квадрату одстојања, дотле се та снага, па дакле и убрзање које она изазива, мења кроз њену масу, управо сразмерно одстојању.

Према томе ако означимо са g_r убрзање земљино на неком месту на површини где је полупречник R, а са g_ρ било изнад или испод површине на одстојању ϱ од средишта, онда је за ϱ веће од R, т. ј. за тачке изнад површине:

$$g_\varrho = \frac{R^2}{\varrho^2} . \; g_r \cdot \cdot \cdot \quad (225$$

а за ϱ мање од R, т. ј. за тачке у унутрашњости земљиној:

$$g_\varrho = \frac{\varrho}{R} g_r . \cdot \cdot \cdot \quad (226$$



Сл. 195.

522. Посматрајмо најпре први случај. Нека тело падне од A (сл. 195) дакле од одстојања ϱ_0 где му је брзина V_0 до B, т. ј. до одстојања ϱ где је брзина V, онда је:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{2} V_0 = \text{површини } AA'BB'.$$

У тачки A убрзање износи:

$$g_{\varrho_0} = R^2 g_r \frac{1}{\varrho^2_0}$$

а у тачки B биће:

$$g_\varrho = R^2 g_r \frac{1}{\varrho^2} .$$

Површина $AA'BB'$, кад се аналитичким путем одреди, износи:

$$F = R^2 g_r \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)$$

те према томе је и брзина у тачки B:

$$V = \sqrt{V^2_0 + 2 R^2 g_r \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)}$$

Ако дакле неко тело падне с висине h изнад земљине површине без почетне брзине до на земљину површину, онда је $V_0 = O$, $\varrho = R$, $\varrho_0 = R + h$. Према томе је брзина:

$$V = \sqrt{2 R^2 g_r \frac{h}{R(R+h)}} = \sqrt{2 g_r h \frac{R}{R+h}}$$

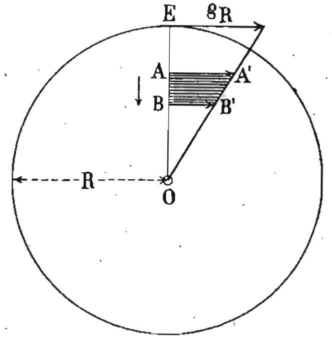
За обична падања на земљиној површини, где висинске разлике нису велике, h се према R може занемарити, те и разломак $\frac{R}{R+h}$ постаје раван јединици, па се за те случајеве горњи образац своди на раније одређени израз:

$$V = \sqrt{2 g_r h}$$

523. Посматрајмо сада падање у унутрашњости земљине масе, за који случај вреди образац $g_\varrho = \frac{\varrho}{R} g_r$. Неко тело пада из тачке A (сл. 196), где је полупречник ϱ_0 и где има брзину V_0 до тачке B, полупречника ϱ, с брзином V. Опет ћемо имати:

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{2} V^2_0 = \text{површини } AA'BB' =$$

$$= \frac{AA' + BB'}{2} . \; AB.$$



Сл. 196.

За $OA = \varrho_0$ и $BO = \varrho$, биће $AB = \varrho_0 - \varrho$. Исто тако је $AA' = \frac{\varrho_0}{R} g_r$ и $BB' = \frac{\varrho}{R} g_r$, те према томе:

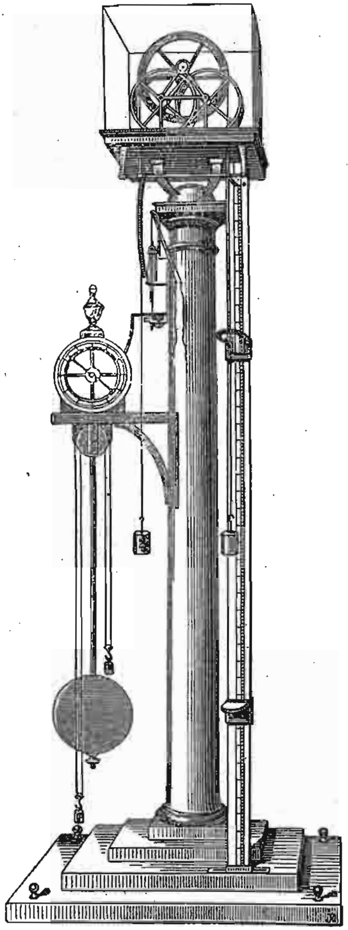
$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{\frac{\varrho_0}{R} g_r + \frac{\varrho}{R} g_r}{2} (\varrho_0 - \varrho)$$

одакле је

$$V = \sqrt{V_0^2 + (\varrho_0^2 - \varrho^2) \frac{g_r}{R}} .$$

C. **Експериментално падање.**

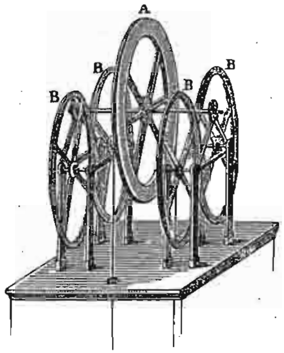
524. Основни обрасци за слободно падање, које смо напред теоријски извели, могу се и експерименталним путем потврдити. За то се служимо нарочитим справама, које се у главноме деле на две групе. У прву групу долазе оне справе, које велику брзину сасвим слободног падања успоравају, те на тај начин можемо лакше да меримо и пређене путове као и времена на те путове утрошена. Представник тих справа је *Атвудова* (Atwood) машина, пронађена још крајем претпрошлога века (1784), дакле, у оно доба, кад се нису могли прецизно мерити мали интервали времена. У другу групу долазе модерније справе, које мере слободно падање онако како се дешава. Њих има више врста и међу њима спомињемо справе које су конструјисали *Морен* (Morin), *Лаборд* (Laborde), *Липих* (Lippich), *Рабс* (Rabs) и др.



Сл. 197.

525. **Атвудова машина.** Као што смо споменули, брзина слободног падања је сувише велика и помоћу Атвудове се машине та брзина па дакле и убрзање може свести на ону меру, која нам је најзгоднија за посматрање. Убрзање је код слободног падања велико, јер свака тежина има да крене само своју масу. Ако удесимо да нека тежина сем своје масе има да креће и још неку другу већу или мању масу, онда ће се убрзање те тежине, према величини те друге масе, више или мање смањити.

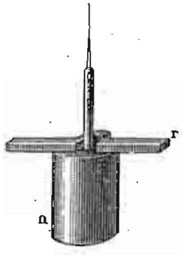
Атвудова машина у свом најсавршенијем облику представљена је на сл. 197. На врху једнога стуба од 2 до 3 метара дужине, намештен је један врло лак точак, ижљебљен по својој периферији, да може примити један сасвим гибак конац, о који висе два једнако тешка тега. Да би се трење на осовини горњега точка свело на најмању меру, та осовина не лежи на обичним лежиштима, него се наслања на периферије друга четири фрикциона точка, као што се то детаљније види на сл. 198.



Сл. 198.

Поред стуба утврђено је тачно подељено мерило, и на њему се може на разна места утврдити један прстен као и један заустављач. Прстен мора бити толики, да један од она два обешена тега може слободно кроза њ проћи. Једно клатно, које јасно избија секунде, допуњује саму справу.

На слици 199. и 200. представљен је онај тег n, што пролози кроз прстен. На сл. 199 видимо на тегу намештену плочицу или претег v, који има да крене оба обешена тега и да изазове падање једнога а пењање другога. Кад оптерећен тег наиђе на прстен, он ће са̂м кроз-а њ проћи и претег ће се на њему зауставити, и од тог момента тегови се сами крећу с оним убрзањем, које им је саопштио претег у тренутку кад се на прстену зауставио. Ево колико је то убрзање.



Сл. 199.

Сл. 200.

Нека је тежина свакога тега $= P$, а тежина претега p, то ће тежина претега сем своје масе $\frac{p}{g}$ имати да крене и масе оба тега т. ј. $\frac{2\,P}{g}$. Сила која креће очевидно је p, а маса која се креће биће према горњем

$\frac{2P+p}{g}$. Сем тога, претег или сила p има да крене још и точак. Ако су му спице врло танке и лаке, може се узети да му је сва тежина концентрисана на периферији. Та се дакле тежина креће с теговима и концем заједно. Означимо тежину точка и конца с π, а с ϱ означимо трење на осовини које се опире кретању, те стога долази са знаком minus. Према свему томе, убрзање које ће претег p саопштити целом покретном систему износи:

$$\gamma = \frac{p}{\frac{1}{g}(2P + p + \pi - \varrho)}$$

$$= g\frac{p}{2P + p + \pi - \varrho} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (227$$

526. При експериментисању се тегови тако удесе, да с претегом од 1 грама пређу за прву секунду 5 или 10^{cm}. Кад претег на крају те прве секунде остане на прстену, тегови ће сами продужити кретање, и прећи ће у првом случају 10^{cm} а у другом 20^{cm} и то једнаком брзином, јер од тренутка, кад претег спадне, кретање тегова је једнако. Останимо код пута од 10^{cm}, и тражимо, премештањем заустављача, колики ће пут тегови, ослобођени претега на крају прве секунде, прелазити у другој, трећој, четвртој и т. д. секунди. Тако ћемо наћи:

ВРЕМЕ	ПРЕЂЕНИ ПУТ	ПУТЕВИ ЈЕДНАКОГ КРЕТАЊА
1 сек.	10 см.	см. 1·20
2 »	30 »	» 2·20
3 »	50 »	» 3·20
4 »	70 »	» 4·20
5 »	90 »	

То значи, да су се тегови, пошто је претег остао на прстену на крају прве секунде, кретали у идућим секундима једнаком брзином, прелазећи у свакој секунди по 20^{cm}, а то ће рећи да су се кретали по обрасцу:

$$s = ct.$$

где t значи време, које је протекло пошто се претег зауставио на прстену, а c брзина у том времену.

527. У горњем примеру стална брзина c износила је 20^{cm}, јер је претег дејствовао само једну секунду. Међутим, ако га пустимо да остане две, три или више секунада, и брзине, које ће тегови добити биће два, три или више пута веће. Премештајући прстен све ниже и ниже, налазимо да кад је:

ПРЕТЕГ ДЕЈСТВОВАО	БРЗИНА ЈЕ БИЛА
1 сек.	20 см. = 1·20
2 »	40 » = 2·20
3 »	60 » = 3·20
4 «	80 » = 4.20

Кад поделимо те стечене брзине са одговарајућим временом, добивамо:

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{60}{3} = \frac{80}{4} = 20 = \gamma$$

А то значи, да су брзине, које производе сталан претег или притисак (дејствујући дуже или краће време), просто сразмерне временима, т. ј. да је:

$$v = \gamma t.$$

528. Напослетку сасвим ћемо уклонити прстен који је заустављао претег, и пустићемо да тегови непрестано падају с претегом заједно. Сад ћемо одређивати места на којима ваља наместити заустављач, па да до њега стигне тег с претегом на крају прве, друге, треће и т. д. секунде. Другим речима, то ће бити путеви које ће тег с претегом прећи на крају тих секунада. Тако ћемо добити:

НА КРАЈУ	ПРЕЂЕНИ ПУТ
1 сек.	$10 = \frac{20}{2}\,1^2$
2 »	$40 = \frac{20}{2}\,2^2$

НА КРАЈУ	ПРЕЂЕНИ ПУТ
3 сек.	$90 = \frac{20}{2} 3^2$
4 »	$160 = \frac{20}{2} 4^2$

или уопште:

$$s = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Дакле, под сталним дејством претега, или, другим речима: под утицајем сталне силе, кретање је једнако убрзано.

529. Затим ћемо оставити тегове који висе о конац непромењене, али ћемо место једнога претега p узети два пут, три пут и т. д. већи претег, т. ј. два пут, три пут и т. д. већу силу. Ако убрзање које изазове један претег означимо са γ, добићемо:

ПОД УТИЦАЈЕМ ПРЕТЕГА	УБРЗАЊЕ
p	γ
$2\,p$	$2\,\gamma$
$3\,p$	$3\,\gamma$
$4\,p$	$4\,\gamma$

а то значи, да је убрзање уопште сразмерно претегу или сили, која цео систем покреће.

530. Напослетку задржимо један извесан претег p, а променимо тежину целога покретног система на тај начин, што ћемо поред обешених тегова $2\,P$ додати још један пут, два пут и т. д. толику тежину. Онда ћемо наћи да ће исти претег p на два пут или три пут већој тежини или маси изазвати само половину или трећину првога убрзања. То значи да ће једна иста сила, у толико мање убрзање произвести, у колико је већа маса на коју за исто време дејствује.

531. Ако повећавањем тежине целога система у истој размери повећавамо и претеге, т. ј. ако удвојимо или утројимо и тежину система и претег, онда ће убрзање остати исто, које смо имали код првобитне тежине система и претега. Из тога следује, да убрзање не зависи само од величине покретне силе или само од величине покренуте тежине него од односа оба та чиниоца. Другим речима убрзање је управо сразмерно величини тога односа. Означимо са k оно убрзање које јединица силе изазове на јединици тежине, онда ће убрзање γ, које изазове сила p на тежини Q, бити:

$$\gamma = k \frac{p}{Q}.$$

а то значи да је уопште убрзање управо сразмерно сили, а изврнуто сразмерно тежини тела.

Из тога обрасца добивамо још и ове:

$$\left.\begin{aligned} v &= \gamma t = k \frac{p}{Q} t. \\ s &= \gamma \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} k \frac{p}{Q} t^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (228$$

У овим обрасцима имамо оно што утиче на кретање једнога тела под утицајем какве сталне силе, а то је: величина силе која дејствује *(p)*, величина тежине на коју сила дејствује *(Q)* и време за које се то дејство врши *(t)*. Четврти члан *(k)* јесте извесан број, који није ништа друго до убрзање земљине теже, које смо ми свуда до сад означавали са g. Јер ако у тим обрасцима ставимо $p = Q$, т. ј. ако пустимо да тела не падају на Атвудовој махини под утицајем претега или силе p, него их пустимо да сасвим слободно падају под утицајем целе њихове тежине Q, онда добивамо раније нађене обрасце за слободно падање:

$$v = gt \text{ и } s = g \frac{t^2}{2}.$$

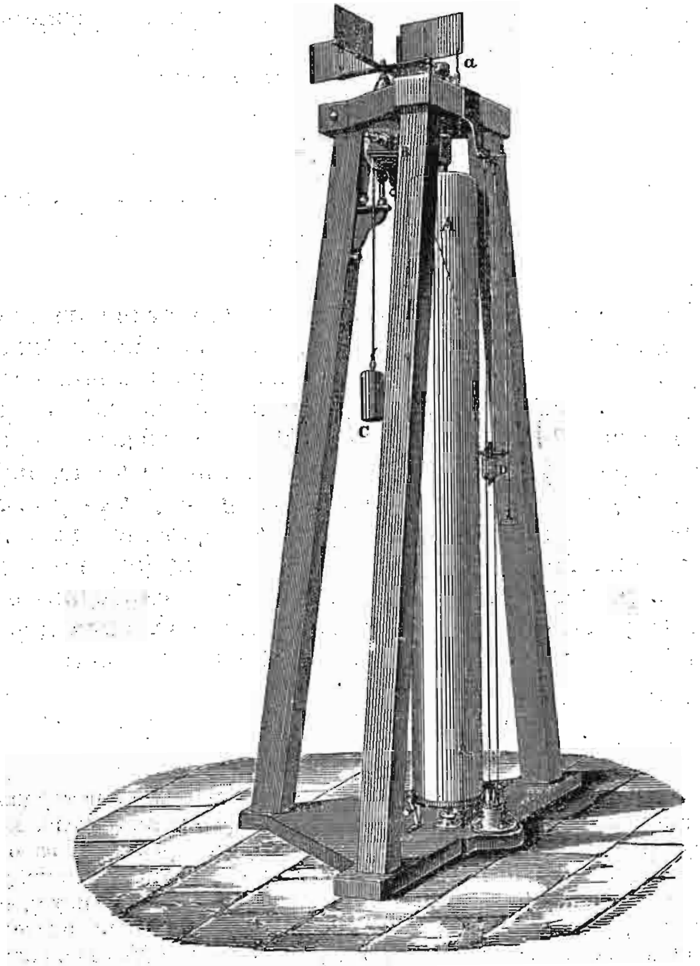
532. Поред тога што смо Атвудовом машином потврдили експерименталним путем све основне законе о кретању тела, можемо ту справу, изврнувши експеримент, употребити и за одређивање убрзања земљине теже g (и ако не с великом тачношћу). Да бисмо се ослободили трења ϱ за које овде не можемо поуздано знати колико је, ми ћемо при истој тежини покретног система употребити два разна претега p_1 и p_2, те тако одредити два разна убрзања γ_1 и γ_2. Наши основни обрасци изгледаће сад овако:

$$\gamma_1 = g \frac{p_1}{2\,P + p_1 + \pi - \varrho} \quad \text{и} \quad \gamma_2 = g \frac{p_2}{2\,P + p_2 + \pi - \varrho}$$

елеминацијом $2P + \pi - \varrho$ добиавмо:

$$g = \frac{(p_2 - p_1)\gamma_1\gamma_2}{p_2\gamma_1 - p_1\gamma_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (229$$

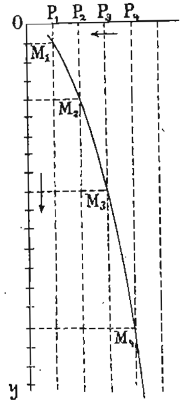
О тачном одређивању g, биће говора на другом месту (в. примене клатна).



Сл. 201.

533. Моренова машина. Док је код Атвудове машине слободно падање више или мање успорено, код Моренове машине тело пада скоро слободно. Сем тога ова је машина важна и с тог гледишта, што је код ње први пут (1838. год.) за проучавање слободног падања употребљена графичка метода, јер код ње тело, које пада, само исписује на једном листу хартије своју путању коју ми после можемо проучавати како и кад хоћемо. Та је справа представљена на сл. 201.

Као што се на слици види, ту имамо један велики древни цилиндар AA, који стоји усправно и који се може дејством тега C обртати око своје вертикалне осовине. Да би то обртање ишло једнако, служе на горњем крају намештена ветренична крила. Поред цилиндра слободно клизи тело D, које носи једну писаљку и њоме исписује своју путању на цилиндру, омотану листом хартије. Пошто тело пада вертикално на ниже и пошто се цилиндар по коме писаљка пише окреће око вертикалне осовине, линија, која ће на хартији бити исписана, биће парабола, као што се то у осталом види на сл. 202. Обично се удеси, да се цилиндар окрене један пут око себе за секунду. Деобом периферије цилиндра, која може имати један метар) на једнаке делове (тачке P_1 P_2 P_3 P_4 на сл. 202) могу се врло кратки делови времена сасвим тачно одређивати.

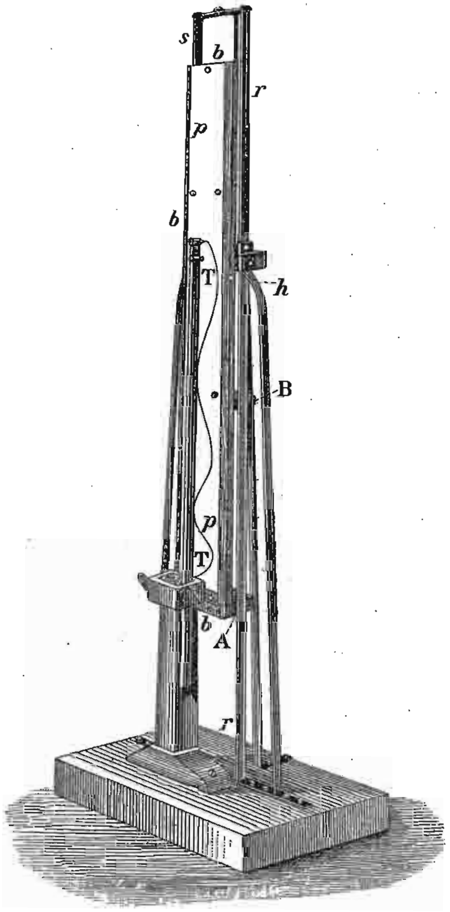


Сл. 202.

534. Машина од Лаборда, Липиха, Милера и Рапса. И код ових је справа употребљена графичка метода, али не на исти начин као код Морена. Место да тело које пада има писаљку за бележење свога пута (као код Морена), овде слободно клизи једна плоча, која у исти мах служи као површина за писање. Исписивање се врши једном писаљком која на једној еластичној шипци трепери извесном брзином. Услед падања плоче и треперења писаљке, путања коју ће она на плочи исписати биће таласаста, и то у почетку с кратким па онда с дужим таласима. Што се одредбе времена тиче, потребно је да се тачно зна брзина треперења еластичне шипке.

На сл. 203. представљен је Милеров апарат, од кога се они други много не разликују и који нам показује како се на падајућој дасци b, писаљком утврђеном на еластичнојшипци T T, исписује таласаста линија по хартији p.

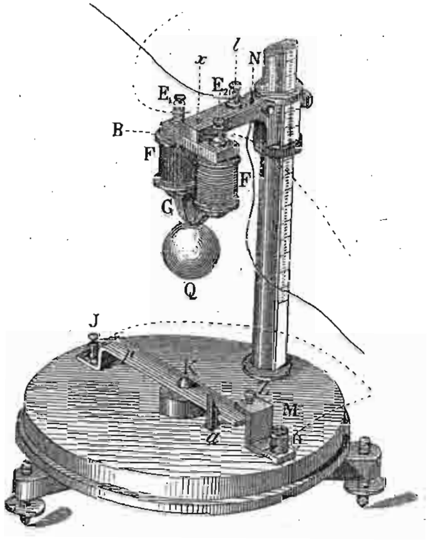
535. Еделманов апарат. Како код Моренова тако и код оних других апарата тело не пада савршено слободно већ, као што смо горе напоменули, слободно клизи. И ако је погрешка, која од тог, не сасвим слободног падања, долази, врло мала, ипак је Еделман направио један апарат, код кога тело сасвим слободно пада. Тај је апарат представљен на сл. 204.



Сл. 203.

Као што се већ и на слици види, овде је узета у помоћ електрична струја и за пуштање тела да пада и за обележавање тренутка кад тело доврши падање. Овде пада гвоздена кугла *Q*, која виси на електромагнету *F G F*. Кад се струја електромагнета прекине,

кугла почне слободно падати и кад падне на брадавицу *k* споји другу једну струју која долази у *J* и *O*. И једна и друга струја пролазе кроз хронограф или хроноскоп, који служе за мерење времена, и док прва забележи (својим прекидањем) тренутак кад је кугла почела падати, ова друга исто тако забележи моменат кад је кугла свој пад завршила. Времена се на тај начин одређују на $\frac{3}{500}$ до $\frac{4}{500}$ дела једне секунде тачно. На стубу *N*, који носи електромагнет, одређује се тачно висина с које је кугла пала.



Сл. 204.

Да наведемо овде неколико цифара, које је добио *В. Елшлегер* (W. Oelschläger) Еделмановим апаратом и Хиповим хроноскопом.

ВИСИНА ПАДАЊА У МИЛИМЕТРИМА	ВРЕМЕ ПАДАЊА У $\frac{1}{500}$ ДЕЛ. СЕКУНДЕ
1500	278·7
1000	230·0
500	160·2
100	69·7
20	29·5

Овим се цифрама врло тачно потврђује закон о једнако убрзаном кретању код слободног падања тела.

536. *Примери.* — *1.)* С неког места пада један камен и тек после 25 секунада чује се да се зауставио. a) Колико је дубоко пао, кад се брзина звука рачуна на 330 мет.? b) после ког времена и с каквом је брзином пао? — a) Нека је непозната дубина x и пошто звук прелази m метара у секунди, то звуку треба $\frac{x}{m}$ секун., да из дубине до посматрача стигне. Исти пут треба да пређе и камен а за време $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ т. ј. овде $\sqrt{\frac{2x}{g}}$. И једно и друго време чине оно време од како је камен почео падати па док се звук чуо, т. ј,:

$$t_0 = \frac{x}{m} + \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Ту једначину можемо довести на овај облик:

$$x^2 - 2x\left(tm + \frac{m^2}{g}\right) = -t^2m^2$$

одакле добијамо најзад:

$$x = \frac{m}{g}[tg + m \pm \sqrt{m(2gt + m)}]$$

Кад заменимо десно дате вредности задржавши пред кореном знак minus, јер дубина x мора бити мања од mt, онда добивамо:

$$X = \frac{330}{9{\cdot}81}[25 \cdot 9{\cdot}81 + 330 - \sqrt{330(9{\cdot}62 \cdot 25 + 330)}]$$

$$= 1845{\cdot}8 \text{ мет.} = \text{приближно } 1846 \text{ мет.}$$

b). $t = \frac{1846}{330} = 5{\cdot}6$ сек. Према томе треба камену $25 - 5{\cdot}6 = 19{\cdot}4$ сек док падне.

c). За то време од 19·4 сек. крајња брзина износи на обрасцу $v = gt = 9{\cdot}81 \cdot 19{\cdot}4 = 190{\cdot}3$ мет.

2. Тело A налази се на висини $H = 1000$ мет., а тело B на висини $h = 700$ мет. Тело A почне падати а тело B за $n = 6$ секунада доцније отпочне такође падати. Пита се: *a*) после колико ће се секунада тело A приближити телу B до на даљину $e = 5{\cdot}7$ мет.? *b*). Кад ће оба тела бити на истој висини? c). Кад ће свако то тело стићи на површину земљину? *d*). С које би висине требало пустити тело B да пада, па да заједно са A стигне на земљу?

— a. Тело A приближиће се телу B до на даљину e метара за x секунада, онда је тело A прешло пут $s_1 = \frac{1}{2} g x^2$. Док је A падало x секунада, тело B падало је $x - n$ секун. и прешло пут $s_2 = \frac{1}{2} g (x - n)^2$. Кад путу s_1 додамо разлику e, добићемо исту величину као кад би путу s_2 додали разлику $H - h = d$ почетних висина, т. ј. имамо $s_1 + e = s_2 + d$. или:

$$\frac{1}{2} g x^2 + e = \frac{1}{2} g (x - n)^2 + d$$

откуда је:

$$x = \frac{1}{2} n + \frac{d - e}{g n} = \frac{1}{2} 6 + \frac{300 - 5{\cdot}7}{9{\cdot}81 \cdot 6} = 2 \text{ сек.}$$

т. ј. 8 сек. од почетка падања првога тела, или 2 сек. од почетка падања другога тела; разлика ће између њих износити 5·7 мет. и тело A биће за толико изнад тела B.

b. Кад је A и B у истој висини, онда је $e = o$. Из горњег обрасца имамо:

$$x = \frac{1}{2} n + \frac{d}{g n} = \frac{1}{2} 6 + \frac{300}{9{\cdot}81 \cdot 6} = 8{\cdot}097 \text{ сек.}$$

c. По обрасцу $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ време за које ће прво тело пасти на земљу износи:

$$t_1 = 0{\cdot}4515 \sqrt{1000} = 14{\cdot}276 \text{ сек.}$$

исто тако:

$$t_2 = 0{\cdot}4515 \sqrt{700} = 11{\cdot}947 \text{ сек.}$$

Пошто A почне своје кретање 6 сек. пре тела B, т. ј. оно од почетка кретања B још $14{\cdot}276 - 6 = 8{\cdot}276$ сек. пада, а телу B треба 11·947 сек. док сврши свој пад, то значи да ће A стићи на земљу 3·671 сек. пре тела B.

d. Ако хоћемо да оба тела у исти мах падну на земљу, то би морало B падати са такве висине која одговара времену $15{\cdot}276 - 6 = 8{\cdot}276$ сек. т. ј. са висине:

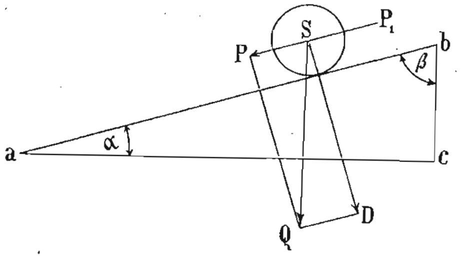
$$s = \frac{1}{2} gt^2 = 4{\cdot}905 \cdot 8{\cdot}276^2$$

$$= 336 \text{ мет.}$$

D. Падање по нагнутом путу

537. Падање тела, које смо до сад проучавали, било са редуцираним убрзањем (као на Атвудовој машини) било сасвим слободно, вршило се у вертикалном правцу. Дешава се врло често, да је такво вертикално падање спречено и да се тела морају кретати под утицајем земљине теже по више или мање нагнутим путевима.

Неко тело S налази се на нагнутој или стрмој равни ab (сл. 205), која с хоризонтом заклапа угао α или с вертикалом bc угао β. На тело дејствује само његова тежина Q, и оно ће низа стрму раван падати под утицајем компоненте P, за коју знамо да постоји однос:



Сл. 205.

$$P = \frac{Q\,h}{l} = Q \sin \alpha.$$

где је h висина а l дужина стрме равни. Очевидно је, да се сад тело неће кретати убрзањем g као у слободном падању него неким другим убрзањем γ, које ће свакако бити мање од g, и то у толико мање у колико је угао α мањи. Ако је m маса тела, онда је:

$$P = m\gamma \quad \text{и} \quad Q = m g$$

те према томе:

$$m\gamma = \frac{m g h}{l} = m g \sin \alpha$$

или најзад:

$$\gamma = \frac{h}{l}\, g = g \sin \alpha. \quad \cdots\cdots\cdot (230$$

дакле, *убрзање некога тела на стрмој равни има се према убрзању тога тела при слободном* (вертикалном) *падању као висина стрме равни према њеној дужини или као sinus нагибног угла стрме равни према јединици.* Јер горње једначине можемо и овако написати:

$$\gamma : g = h : l$$

и

$$\gamma : g = \sin \alpha : 1.$$

Галилео је проучавао падање тела низа стрму раван и нашао основне законе једнако убрзаног кретања у след привлачне снаге земљине.

Као што се из горњих образаца види, сила P услед које тело пада по стрмој равни мања је од тежине тела Q, али је она опет остала стална, све док се нагиб стрме равни не мења. Из тога следује, да ће и падање по стрмој равни бити једнако убрзано само са убрзањем мањим од g. Према томе, сви раније изведени обрасци за слободно падање вреде уопште и за падање по нагнутој путањи, само што ће свуда место убрзања g доћи редуцирано убрзање γ. Дакле, имаћемо:

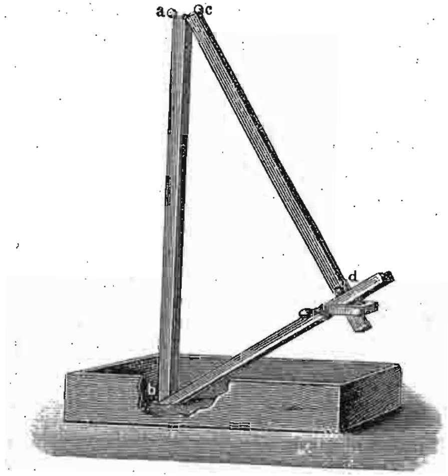
$$\left.\begin{aligned} v &= \gamma t = g t \sin \alpha \\ s &= \frac{\gamma t^2}{2} = \frac{g t^2}{2} \sin \alpha \\ s &= \frac{v^2}{2\gamma} = \frac{v^2}{2 g \sin \alpha} \\ v &= \sqrt{2 \gamma s} = \sqrt{2 g s \sin \alpha} \text{ итд.} \end{aligned}\right\} \cdots (231$$

При свима овим кретањима низа стрму раван претпостављамо, да је трење равно нули, иначе ће горњи обрасци бити више или мање нетачни, према величини трења.

538. Нека једно тело пређе целу дужину $l = s$ стрме равни; пошто знамо да је $\gamma = g \sin \alpha$, то ће онда образац за брзину бити:

$$v = \sqrt{2 \gamma s} = \sqrt{2 \gamma l} = \sqrt{2 g l \sin \alpha} = \sqrt{2 g h}$$

јер је код стрме равни $h = l \sin \alpha$



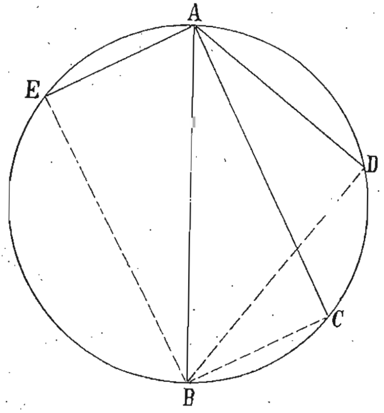
Сл. 206.

а то значи, *крајња брзина којом тело падне низ стрму раван равна је брзини коју би тело имало, падајући слободно за висину стрме равни.*

Експериментално се то правило потврђује справом представљеном на сл. 206.

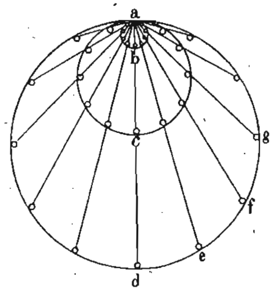
539. Важна последица нађених закона о падању по стрмој равни јесте правило о „*падању по тетиви*“, које је још Галилео утврдио.

Повуцимо из највише тачке једнога вертикалнога круга вертикални пречник AB (сл. 207) и из тачке C, D или E тетиве AC, BC, AD и т. д. Сваки тако добивени троугао на пр. ACB, и т. д. јесте правоугао. Ако на пр. у троуглу ADB означимо угао који заклапа BD са пречником с x, то и AD заклапа с хоризонталом коју бисмо кроз A повукли исти угао x. Међутим је $AD = AB \sin x$, а то значи, да ће тетиву неко тело које по њој пада прећи за исто време за које би слободно падајући прешло пречник AB. И то вреди не само за тетиву AD него ма за коју, коју би из тачке A као највише повукли на периферију круга, дакле и за тетиве AC, AE и т. д.



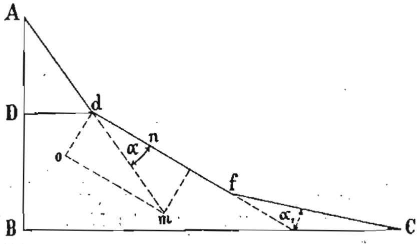
Сл. 207.

540. Још једно исто тако важно правило нашао је Галилео о падању по нагнутим путевима. Ако из тачке a (сл. 208) као највише на периферији некога круга пустимо на разне стране, а по стрмим равнима ae, af, ag и т. д. кугле да падају, све ће те кугле бити увек у току пада на периферији једнога круга који пролази кроз почетну тачку a. На слици имамо три круга, који одговарају временима падања 1, 2 и 2. Пречници тих кругова имају се као квадрати а површине као четврти степени времена падања.



Сл. 208.

541. Сматрајмо сада падање тела по преломљеној путањи $A\,d\,f\,c$ као што је показује сл 209; тело ће доћи у тачку d брзином:



Сл. 209.

$$v_1 = \sqrt{2\,g\,A\,D}.$$

Прелазећи на путању dn која положеније лежи од прве, нешто ће се од брзине v_1 изгубити и тело ће се кретати другом брзином v_2, коју ћемо одредити по паралелограму:

$$v_2 = d\,n = v_1 \cos \alpha$$

губитак износи:

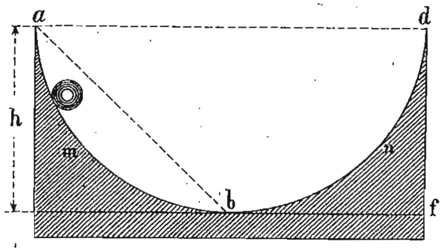
$$v = v_1 - v_1 \cos \alpha. = v_1 (1 - \cos \alpha) = 2\,v_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \sqrt{2\,g\,A\,D.}\ \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Кад тело у тачки f пређе на трећи комад путање, изгубиће од брзине v_2 ову вредност:

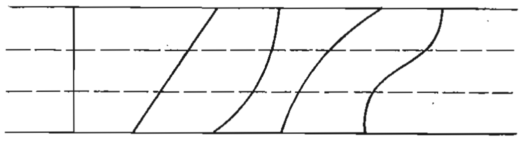
$$v^1 = 2\,v_2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}.$$

Губитак је раван нули, кад је $\alpha = \alpha_1 = 0$, т. ј. кад изломљена линија $A\,d\,f\,c$ пређе у праву. Губитак је бескрајно мали кад су и углови α бескрајном мали, т. ј. кад тело пада по шупљој кривој линији сл. 210, услед чега ће тело доћи на најнижу тачку b те линије истом брзином коју би имало у истој тачки кад би падало по стрмој равни ab, или коју би имало на подножју висине h.



Сл. 210.

542. Најзад сматрајмо да неко тело пређе из једног вишег нивоа (или висине) у други нижи ниво (или висину) по ма каквој путањи, правој или кривој (сл. 211). Пошто се свака крива линија може сматрати као сложена из све самих ситних стрмих равни разнога нагиба, то се правило, добивено за стрму раван, може и на ове ситне стрме равни применити и овако изрећи: *Ма какав био пут по коме ће неко тело пасти из једног* (вишег) *нивоа у други* (нижи); *ма из које тачке првога нивоа оно пошло и у ма коју тачку другога нивоа дошло, одговарајућа брзина коју ће ма у коме висинском слоју имати, па дакле и којом ће у најнижи слој пасти остаје увек иста*



Сл. 211.

543. *Пример.* Две стрме равни на својим најнижим тачкама прелазе поступно једна у другу. Дужина прве је 70 мет. и нагнута је под углом $\alpha = 53^0\ 17'\ 30''$, а угао нагнућа оне друге равни износи $\beta = 20^0$. Кад неко тело падне низ прву раван продужиће своје кретање уз другу раван. До које ће се висине уз ту другу раван попети? — Пут низ прву раван је:

$$s_1 = \frac{v^2}{3\ g \sin \alpha}$$

а уз другу:

$$s_2 = \frac{v^2}{2\ g \sin \beta}.$$

одавде ја њихов однос:

$$s_1 : s_2 = \frac{v^2}{2\ g \sin \alpha} = \frac{v}{2\ g \sin \beta}$$

Којом брзином тело сиђе с прве равни истом се пење уз другу дакле $v = v$, те је онда:

$$s_2 = s_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{70 \cdot \sin 53^0\ 17'\ 20''}{\sin 20^0} = 164{\cdot}06 \text{ мет.}$$

Е. **Бацање у висину.**

544. Кад се неко тело баци вертикално у висину, оно ће се, услед успоравајућег дејства земљине теже, попети само до извесне висине, ту ће се зауставити и, ако није ничим спречено, одмах пасти натраг по закону о слободном падању. Према томе за пењање тела у висину вреде обрасци успоренога кретања с почетном брзином. Најважније је у овом случају да дознамо време за које ће се тело пењати и висину до које ће се попети.

За прво решење употребићемо образац $v = c - gt$, кад ставимо $v = 0$, јер је то моменат кад се тело у пењању заустави. Одатле је:

$$t = \frac{c}{g}. \quad \cdots\cdots\cdots (232$$

Висину успона одређујемо из обрасца за пут, кад t заменимо овом нађеном вредношћу:

$$s = c\,t - \frac{gt^2}{2} = \frac{c^2}{g} - \frac{gc^2}{2g^2} = \frac{c^2}{2\,g} = h \quad \cdot\ \cdot (233$$

Овај се израз $\frac{c^2}{2\,g} = h$ назива и *брзна висина* и представља висину, на којој је брзина неког баченог тела равна нули.

Ми смо код једнако убрзаног кретања нашли такав исти израз, где је место почетне брзине c ушла крајња брзина v, а то значи висину са које тело треба да падне па да стече брзину v. Означимо ту висину:

$$\frac{v^2}{2\,g} = \chi$$

Сада се извесни обрасци, које смо раније нашли, могу изразити овим брзним висинама на пр. обрасци за пут код убрзаног и успореног кретања с почетном брзином (520) могу се и овако написати:

$$s = h - \chi \quad \text{и} \quad s = \chi - h.$$

Из једначине $s = \frac{gt^2}{2}$ имамо:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}\, s} \text{ време које телу треба да пређе пут } s.$$

Време пак које треба горњем телу да са висине h падне натраг биће:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{c^2}{2\,g}} = \frac{c}{g}.$$

Дакле за исто ће време тело пасти са висине h за које се и попело на ту висину.

Да одредимо још брзину с којом ће се тело вратити са висине h.

$$v = \sqrt{2\,g\,s} = \sqrt{2\,g\,h} = \sqrt{2\,g\,\frac{c^2}{2\,g}} = c.$$

брзина је дакле она иста са којом је и бачено.

Из овога што смо до сад дознали изводи се овај важан закључак: Кад се неко тело вертикално баци у вис, у свакој тачки свога пута имаће исту брзину па било да се пење или да пада. Исто тако време које телу треба да се из ма које тачке тога пута испне на највећу висину исто је онолико, колико и време да са највеће висине падне до те тачке.

543. *Пример*. Једна ракетла баци се у висину брзином 50 мет.; 3 секунде доцније избаци се друга са истог места и истом брзином. Кад ће се те две ракетле срести, рачунајући од поласка прве ракетле.

Ова се два тела могу срести тек кад се прво почне враћати. Пошто сваком од њих треба за пењање времена $\frac{c}{g}$ и друго тело 3 сек. $= t_1$ доцније достигне највишу тачку, то ће се оба тела срести после:

$$x = \frac{c}{g} + \frac{t_1}{2} \text{ секун.}$$

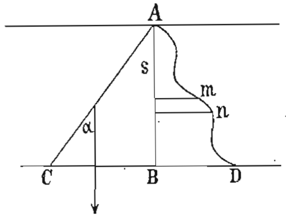
$$= \frac{50}{9{\cdot}81} + 1{\cdot}5 = 6{\cdot}6 \text{ сек.}$$

F. Гравитациони потенцијал.

546. Гравитационо поље. Утврдили смо раније, кад једно тело под утицајем земљине теже слободно пада, да оно онда ради и да ће тај рад у толико бити већи, у колико је већа висина с које тело пада. Неко се тело A (сл. 212) налази на хоризонталној равни или нивоу, који показује линија повучена кроз A, и с тог нивоа доспе у хоризонталну раван или ниво CBD, који је ближи површини земљиној од првога. Из првога нивоа може тело доспети у други падајући слободно по вертикали $AB = s$ и, ако је тежина посматранога тела Q, произведени ће рад очевидно бити $= Qs$.

Узмимо сад да тело пређе из горњега нивоа у доњи падајући по стрмој равни AC, која са вертикалом заклапа угао α. Сада је рад тога истога тела изражен обрасцем:

$$Q.\ AC \cos \alpha$$



Сл. 112.

али пошто је $AC \cos \alpha = s$, то је и у овом случају вредност извршенога рада $= Qs$ као и мало час.

Нека најзад тело падне из првога нивоа у други по кривој путањи AD. Зауставимо се код елемента mn те криве путање; рад на том елементу пута добићемо, кад тај елеменат на правац силе (AB) пројецирамо и с том пројекцијом тежину тела помножимо, дакле тај елементаран рад биће:

$$\varrho = Q.\ mn \cos (AB,\ mn)$$

Ми можемо путању AD разложити на n таких елементарних путања $m'n'$, $m''n''$, и т. д. и за сваки елеменат добићемо сличан израз за елементаран рад. Цео пак рад на тој кривој путањи добићемо, кад све те елементарне радове скупимо:

$$\Sigma\ [Q\, mn \cos (AB, mn)] = Q\, \Sigma\ (mn \cos (AB, mn)]$$

дакле кад Q помножимо са скупом свију пројекција елемената, као што је mn на вертикалу AB, т. ј. помножимо с том вертикалом AB т. ј.:

$$Q\, \Sigma\ [mn \cos (AB, mn)] = Qs.$$

Рад, који једно тело изврши прешав из једне хоризонталне равни у другу, ма каквим путем, раван је раду који то тело изврши, кад из једне равни пређе у другу најкраћим путем (упореди 239.)

Обадве посматране равни су управне на правац теже, т. ј. на вертикалу. Ако их замислимо довољно продужене, али да увек остану управне на правац теже, добићемо од њих две затворене површине, које омотавају земљу са свију страна и свака има приближан облик лопте. Те се површине називају *површине нивоа* или *нивоске површине*, јер у свему наличе на површину или ниво мирне воде.

Али нису само горње две површине које имају такве особине. Ми можемо око земље и на разним одстојањима замислити безброј таквих лоптастих површина које имају једно заједничко средиште у средишту земљину. И ако се ма на коју од тих површина налази једна слободна материјална тешка тачка, она ће под утицајем теже падати из виших површина у ниже. И рад који посматрана тачка том приликом изврши, кад пређе из једне више површине у другу нижу, увек је исти, па ма којим путем се тај прелаз десио.

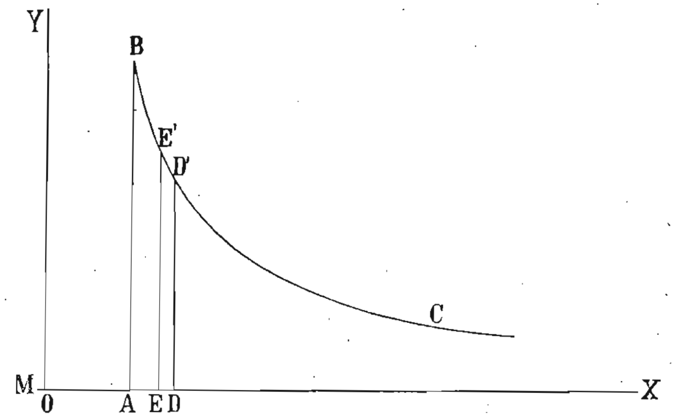
Да би ствар била простија, претпоставићемо да је земља потпуна лопта, па да су дакле и њене нивоске површине такве исте. Правци по којима ће тела слободно падати према земљину средишту биће вертикални правци и биће увек управни на нивоским површинама. Ти правци називају се *тежним линијама* или *линијама сила* и то у овом случају *земљиним* или *гравитационим линијама сила*.

Простор до кога свуда у наоколо око земље допире привлачна снага земљина назива се **гравитационо поље.** То се поље, према ономе што смо горе видели, замишља испресецано гравитационим нивоским површинама и таквим истим линијама сила.

Гравитационо поље може бити *хомогено* или *хетерогено*. У првом случају линије сила теку кроз поље паралелно а у другом оне су непаралелне. Земљине линије сила, пролазећи све кроз њено средиште, теку дивергентно на све стране, и показују да је гравитационо поље земљино, узето као целина, хетерогено. Међутим, врло далеко од средишта земљина, на пр. на земљиној површини и на малим просторима, може се узети да те линије теку паралелно и да је ту поље хомогено. За то се обично и каже, да су вертикални правци на земљиној површини и на неком извесном простору паралелни.

Број линија сила на јединицу површине одређује *интензитет гравитационога поља*.

547. Гравитациони потенцијал. — На основу онога што смо раније извели, ми бисмо могли наћи величину рада, који одговара појединим нивоским површинама. Да би ствар била простија, посматраћемо је графички. Нека тачка O представља средиште земљино (сл. 213), OA њен полупречник, а линија XO нека је једна линија силе која



Сл. 213.

се пружа до бескрајности. По њој се креће или, другим речима, слободно пада нека маса m прелазећи кроз тачке D, E, A и т. д. Привлачење земљино на ту масу биће у разним тим тачкама разно, и у толико јаче у колико маса m долази земљи ближе. Ако разна одстојања те масе од средишта земљина означимо са r_1 r_2 и т. д. r_n а масу земљину са M, онда ће привлачна снага земљина на тим одстојањима бити одређена обрасцима:

$$P_1 = \frac{Mm}{r_1^{\,2}};\; P_2 = \frac{Mm}{r_2^{\,2}} \cdot \cdot \cdot P_n = \frac{Mm}{r_n^{\,2}}.$$

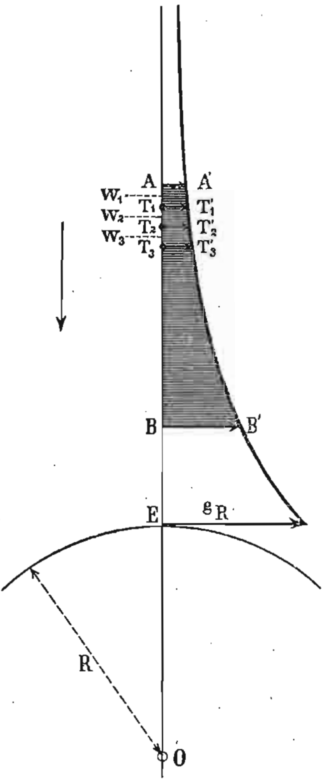
Ми ћемо на разним тим одстојањима на пр. у тачкама D, E, и т. д. представити величину тога привлачења ординатална DD', EE', итд. Кад саставимо крајње тачке тих ордината, добићемо једну криву линију $B\ E'\ D' \ldots$ која се асимптотски приближује оси X и чије ординате представљају јачину теже у оним нивŏским површинама, које у тим тачкама секу линију сила OX. Одстојања DE, AE и т. д. представљају путове, које је маса m између појединих нивŏских површина прешла; а површина ограничена линијом сила OX, ординатом AB и кривом линијом BC представља рад, који је извршила маса m падајући из бескрајности до површине земљине. Тај је рад, као што смо већ рекли, увек исти, па ма којим путем посматрана маса пала на земљу и ма на којој се тачки земљине површине зауставила. Ако маса m не доспе на површину земљину већ само до нивŏске површине која у тачки D пресеца линију силе, дакле, до на даљину OD од средишта земљина, онда је рад представљен површином између линија DX, DD' и $D'C$. То значи, да разним одстојањима од земљиног средишта одговара разна величина рада, или другим речима, кад се нека покретна маса налази на разним нивŏским површинама, онда тим њеним положајима одговарају и разни радови, које је маса под утицајем теже извршила. Извршени је рад у толико већи, у колико је нивŏска површина ближе земљи. У свакој тачки једне исте нивŏске површине имамо исти рад; према томе *нивŏске су површине у исти мах и површине једнакога рада.*

Место да сматрамо кретање масе m, узмимо да се *јединица масе* креће (или да пада) из бескрајности према земљи. И онај рад, који произведе у једну тачку концентрисана јединица масе, долазећи из бескрајности до ма кóје тачке, неке, коначно удаљене нивŏске површине назива се *потенцијал земљин у тој тачки. (Грин.* 270). Пошто потенцијал или рад јединице масе постаје овде услед гравитациóних сила (тêже земљине), то се он уопште назива још и *гравитациони потенцијал.* Па како у свима тачкама једне исте нивŏске површине рад има једну исту вредност, то су и нивŏске површине у исти мах *површине једнаког гравитационог потенцијала.* Површине једнаког потенцијала називају се још и *еквипотенцијалне* као и *изопотенцијалне површине.*

548. Да бисмо одредили математички израз за потенцијал на неком извесном месту, посматрајмо сл. 214. Као што смо мало час казали потенцијал у тачки B представљен је површином између линија BB', BA до бескрајности и криве линије $B'A'$ такође до бескрајности. Потенцијал пак између тачака A и B дат је површином $AB\,A'B'$. Кад ту површину одредимо, имаћемо вредност потенцијала између A и B.

Тога ради ставимо одстојање тачке A од средишта земљина $OA = \varrho_0$, а одстојање тачке B такође од тог средишта $OB = \varrho$. Поделимо дужину AB у тачкама $T_1\,T_2\,T_3 \ldots T_{n-1}$ на n делова као што су $w_1\ w_2\ w_3 \ldots w_n$ и то тако да је OA, OT_1, OT_2, $\ldots\ OT_{n-1}$, OB, геометријски ред с количником q, дакле да је $OA = \varrho_0$, $OT_1 = \varrho_0\,q$, $OT_2 = \varrho_0\,q^2 \ldots.\ OT_{n-1} = \varrho_0\,q^{n-1}$, $OB = \varrho_0\,q^n$. Онда је $OB = OA\,q^n$ одакле:

$$q^n = \frac{OB}{OA} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \text{ или } q = \sqrt[n]{\frac{\varrho}{\varrho_0}}.$$



Сл. 214.

Дужине $AA, TT' \ldots T_{n-1}\, T'_{n-1}$ представљају привлачну снагу земљину на тим местима, а њене су вредности сразмерне са:

$$\frac{1}{\varrho_0^{\,2}},\ \frac{1}{\varrho_0^{\,2}\, q^2},\ \frac{1}{\varrho_0^{\,2}\, q^4} \cdots\cdots \frac{1}{\varrho_0\, q^{2n-2}},\ \frac{1}{\varrho_0^{\,2}\, q^{2n}}.$$

Ако масу земљину означимо са M, а масу тела које према њој пада означимо са m (за потенцијал би m било $= 1$) имаћемо:

$$\frac{Mm}{\varrho_0^{\,2}},\ \frac{Mm}{\varrho_0^{\,2}\, q^2},\ \frac{Mm}{\varrho_0^{\,2}\, q^4} \cdots\cdots \frac{Mm}{\varrho_0^{\,2}\, q^{2n-2}},\ \frac{Mm}{\varrho_0^{\,2}\, q^{2n}}.$$

Да бисмо добили целу површину $AA'BB'$, ваља да прорачунамо елементарне површине $AA'TT$, $T_1T'_1T_2T'_2$ и т. д. и да их скупимо. Ако те елементарне површине изнад $w_1, w_2, \ldots . w_n$ одредимо одговарајућим вредностима AA', $T_1T'_1 \ldots . T_{n-1}T'_{n-1}$ и скупимо, добићемо површину која ће бити мања од $AA'BB'$. Исто тако ако те исте елементарне површине одредимо одговарајућим вредностима $T_1T'_1$, $T_2T'_2$ BB', скуп њихов даће површину већу од $AA'BB'$. Да бисмо добили праву површину $AA'BB'$ прорачунаћемо и ону мању и ону већу вредност, па ћемо од њих узети средњу геометријску вредност.

Сума мањих елементарних површина биће:

$$F_{\min} = w_1\, AA' + w_2\, T_1T'_1 + w_3\, T_2T'_2 + \ldots w_n\, T_{n-1}\, T'_{n-1}$$

$$= \frac{\varrho_0(1-q)}{\varrho_0^{\,2}} + \frac{\varrho_0 q(1-q)}{\varrho_0^{\,2} q^2} + \frac{\varrho_0 q^2(1-q)}{\varrho_0^{\,2} q^4} + \cdots \frac{\varrho_0 q^{n-1}(1-q)}{\varrho_0^{\,2} q^{2n-2}}$$

$$= (1-q)\,\frac{1}{\varrho_0}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^{n-1}}\right]$$

$$= (1-q)\,\frac{1}{\varrho_0}\,\frac{(1-q^n)\,q}{q^n\,(1-q)} = \frac{q}{\varrho_0}\left[\frac{1}{q^n} - 1\right]$$

$$= q\left[\frac{1}{\varrho_0 q^n} - \frac{1}{\varrho_0}\right] = q\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right]$$

На исти начин нашли бисмо да већа сума износи:

$$F_{\max} = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right]$$

Права вредност пак била би:

$$F = \sqrt{F_{\min}\, F_{\max}} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)$$

или за масе M и m

$$F = Mm\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)$$

Да бисмо нашли потенцијал неке масе m а у тачки B, ваља ϱ_0 да буде $= \infty$, и ако тај потенцијал означимо са V имаћемо:

$$V = \frac{Mm}{\varrho}. \quad \cdots\cdots\cdots (234$$

549. До истог израза за потенцијал могли бисмо доћи и овим простијим путем. Нека су опет одстојања покретне тачке ϱ и ϱ_0; разлика њихова или пређени пут између њих (пошто је ϱ_0 веће) биће $\varrho_0 - \varrho$. На одстојању ϱ привлачна снага је $\frac{Mm}{\varrho^2}$ а на ϱ_0 биће $\frac{Mm}{\varrho_0^{\,2}}$. Средња геометријска вредност њена биће:

$$\frac{Mm}{\varrho_0\varrho}.$$

Пошто је рад раван производу из силе $\left(\frac{Mm}{\varrho_0\varrho}\right)$ и пута $(\varrho_0 - \varrho)$, то је очевидно тај рад:

$$Mm\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)$$

или за ϱ_0 као и горе $= \infty$ биће:

$$V = \frac{Mm}{\varrho}.$$

550. Потенцијалска разлика и пад потенцијала. Означимо са V_1 потенцијал извесне тачке на одстојању ϱ_1 а са V_2 одговарајући потенцијал на одстојању ϱ_2. Извршени рад док маса m пређе с даљине ϱ_1 на даљину ϱ_2 представљен је очевидно *разликом потенцијала* $V_1 - V_2$, која је према горњем одређена изразом:

$$V_1 - V_2 = Mm\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (235$$

Потенцијалска разлика двеју нивоских или еквипотенцијалних површина представља механички рад, који ће привлачна снага земљина извршити док јединицу масе $(m = 1)$ преведе из ма које тачке прве ма којим путем и у ма коју тачку друге нивоске површине.

Потенцијалска разлика двеју оближњих тачака, подељена њиховим најкраћим одстојањем, назива се *пад потенцијала* и представља интензитет оне компоненте гравитационе силе, која дејствује између тих тачака. Ако, дакле, то одстојање изначимо са l биће:

$$\triangle = \frac{V_1 - V_2}{l}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (236$$

То у осталом излази и из једначине за рад, пошто је сила равна количнику из рада и пута.

Нека је убрзање земљине теже на некој еквипотенцијалној површини $= g$, вредност потенцијала на њој нека је V. Јединица масе пређе из тачке A те површине у тачку B друге једне оближне површине, у којој је вредност потенцијала V_2. Претпостављамо да су те две еквипотенцијалне површине тако близу, да се може сматрати да је g у обадвема једно исто. Рад те јединице масе представљен је потенцијалском разликом $V_1 - V_2$ и износи:

$$V_1 - V_2 = g\,AB$$

одакле је:

$$g = \frac{V_1 - V_2}{AB}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (237$$

т. ј. интензитет теже земљине или убрзање њено равно је паду потенцијала.

551. Привлачна снага земљина не простире се само на тела, која су на њеној површини и у њеној атмосфери, већ допире и до сунца као и до ближих планета. Пошто је привлачење узајамно, то не само земља привлачи та небеска тела, већ и та тела привлаче њу. Узмимо примера ради земљу и месец. Рецимо да је земља привукла месец из бескрајности и довела га на ту даљину на којој је он сад.

Том је приликом привлачна снага земљина извршила извесан рад који се назива: *потенцијал земљин на месец.* Узмимо да се десило обратно, и да је месец привукао нашу земљу из бескрајности на даљину где је сад. Рад који би том приликом извршила привлачна снага месечева назива се *потенцијал месечев на земљу.* Оба та потенцијала (и ако су пређени путеви једнаки) нису једнаке вредности, јер је у последњем случају маса земљина, коју би месечева снага имала да креће, већа, те и тај потенцијал већи.

552. Потенцијал хомогене пуне и шупље лопте. — Означимо масу пуне лопте са m; у колико се јединица масе више приближује површини, у толико потенцијал већма расте, јер у том случају одстојање те масе од средишта лопте опада, а потенцијал је дат обрасцем:

$$V = \frac{m}{\varrho}.$$

На самој површини њеној ваља масу m заменити њеном вредношћу, т. ј. ако је σ густина лопте, r њен полупречник, биће:

$$V = \frac{4\,\pi r^3}{3\,r}\,\sigma = {}^4/_3\,\pi r^2\,\sigma. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (238$$

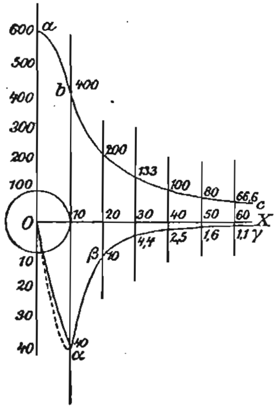
Ако место хомогене пуне лопте узмемо шупљу лопту врло танког дувара или коре, онда ће потенцијал на њеној површини бити представљен овим обрасцем:

$$V = \frac{m}{\varrho} = \frac{4\,\pi r^2\,\sigma}{r} = 4\,r\pi\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (239$$

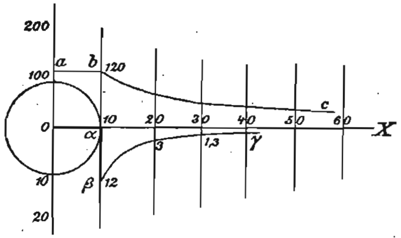
где је r полупречник лопте, а σ густина површине, т.ј. маса јединице површине. Та ће вредност потенцијала остати иста и у унутрашњости лопте. Шупљина једне лопте је дакле простор једнаког потенцијала.

Оба се ова случаја могу представити графички. На сл. 215, имамо пуну лопту, код које су изнад OX вредности потенцијала представљене кривом линијом abc, који расте све до средишта лопте. Крива линија $\alpha\beta\gamma$ испод $O\ X$ представља промену интензитета поља. Полупречник кугле узет је од 10 см., а густина = 1.

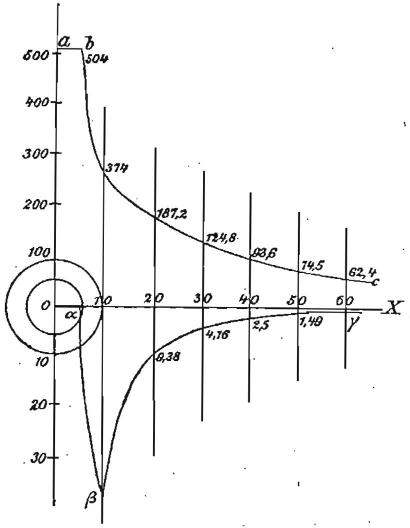
На другом ћемо месту видети, да се земљина лопта не може сматрати као хомогена, већ да њена густина према средишту расте. За тај случај интензитет привлачења не достиже највећу вредност на површини као код хомогене лопте, већ нешто дубље у њеној маси (отприлике за $\frac{1}{6}$ полупречника). Тај би случај на слици био представљен тачкастом линијом $O\ \alpha$.



Сл. 215.



Сл. 216.



Сл. 217.

На сл. 216. имамо потенцијал и интензитет поља једне шупље лопте *танке* коре. Потенцијал расте само до површине и у унутрашњости задржава исту вредност ab. Интензитет поља је највећи на површини, а у унутрашњости је свуда раван нули.

Сл. 217. представља нам случај који чини прелаз између та два, т. ј. случај једне шупље лопте *дебеле* коре. Спољашњи је полупречник 10 а унутрашњи 4 см.

553. Да завршимо овај одељак с неколико примера за гравитациони потенцијал земљин. Том приликом претпостављамо да је земља потпуна лопта с полупречником 637.10^4 метара или $6{\cdot}37.10^8$ см. $= a$ и да убрзање теже или g на свима тачкама њене површине износи 981 см. Јединицу масе или масу једнога грама зваћемо у кратко *грам-маса*, а масу једнога килограма *килограм-маса*.

Кад килограм-маса с површине земљине пређе у другу нивоску површину полупречника ϱ, онда ће привлачна снага изражена килограмима на тој површини изнети:

$$X = \frac{a^2}{\varrho^2}.$$

ако је пак изразимо у динима биће:

$$X = \frac{a^2}{\varrho^2}\ 981.10^3.$$

Нека је $\varrho = 3$ а и $\varrho = 60$ а. Ова последња вредност представља отприлике даљину месеца од земље. Килограм-маса која на земљиној површини износи 981.000 дина, имаће у првом случају:

$$\frac{a^2}{ga^2}\ 981.000 = 109.000 \text{ дина.}$$

а у другом:

$$\frac{a^2}{60^2\, a^2}\ 981.000 = 272 \text{ дина.}$$

Да један килограм спадне на један дин, треба га однети на даљину од 990 земљиних полупречника, јер из обрасца:

$$\frac{a^2}{r^2}\ 981.000 = 1$$

излази да је $r = 990\ a$.

Рецимо да је грам-маса пала из бескрајности до на површину земљину или да је та грам-маса с површине земљине однесена у бескрајност. Пошто је полупречник земљин $6 \cdot 37.10^8$ см. то је и рад који тој маси одговара $6 \cdot 37.10^8$ грам-сантиметара. Па како је гравитациони потенцијал на земљиној површини онај рад, који је потребан за грам-масу однесе у бескрајност, то је и његова вредност очевидно $6 \cdot 37.10^8$ гр. см. или $6 \cdot 37.10^8.981$ ерга. Обично се узима да је вредност потенцијала на земљиној површини равна нули. Према томе ни једна маса на земљиној површини нема потенцијалне енергије. Па како је за пренос једне грам-масе с површине земљине у бескрајност потребно $6 \cdot 37.10^8.981$ ерга, то значи, да је гравитациони потенцијал у некој тачки на бескрајној даљини од земљине површине износи $6 \cdot 37 \times 10^8 \times 981$ ерга или $6 \cdot 37 \times 10^8 \times 981$ јединица *CGS*.

На основу овога можемо наћи ону еквипотенцијалну површину у гравитационом пољу земљину, којој одговара јединица потенцијала *CGS*. Тога ради треба да буде:

$$981 \frac{a^2}{r} = 1$$

ако са r означимо полупречник те тражене површине. Одавде је:

$$r = 981\, a^2 = 981 \cdot 6 \cdot 37^2.10^{16} = 398059389.10^{10} \text{ м.}$$

Исто тако можемо наћи потенцијалску разлику између ма које тачке на земљиној површини и неке тачке, која се у гравитационом пољу земљину налази на месечевој путањи. — Ако је опет a полупречник земљин у метрима а одстојање месечево $= 60$ земљиних полупречника, онда је потенцијалска разлика:

$$\frac{a^2}{a} - \frac{a^2}{60\, a} = \frac{59}{60}\, a = \frac{59}{60}\, 637.10^4$$

$$= 6263833 \text{ кгр. мет. на кгр. маси.}$$

Ако се a изрази сантиметрима онда је:

$$981 \cdot \frac{59}{60}\, a = 981 \frac{59}{60}\, 6 \cdot 37.10^8 = 61448205 \cdot 10^4 \; CGS.$$

554. *Напомена.* — Говорећи о гравитационом пољу, свуда смо претпоставили да се тела међу собом *привлаче*, т. ј. да теже да се једно другом приближе. Али може се десити да се тела *одбијају* и да им је тенденција да се једно од другога удали. И у једном и у другом случају рад односно потенцијал одређује се на исти начин, само им је знак другојачи. Оне силе, које теже да повећају растојање између два тела, сматрају се као *положне*, (на пр. код одбијања), а оне које теже да растојање између два тела смање (на пр. код привлачења), биле би *одречне*.

Мало више видели смо да је гравитациони потенцијал на земљиној површини раван нули и да једно тело у колико је даље од земље у толико има више потенцијалске енергије. Кад дакле неко тело слободно пада, оно прелази из предела вишега у пределе нижега потенцијала. Према горњем знаку за привлачне силе гравитациони потенцијал био би одречан. Али кад тело пада, т. ј. кад прелази с вишега потенцијала на нижи, онда оно ради, т. ј. оно производи рад и тај се рад сматра као положан; међутим, кад хоћемо неко тело да удалимо од површине земљине, онда ми на њ трошимо рад и тај се рад сматра као одречан. С тога се разлога гравитациони потенцијал земљин обично сматра као положан.

G. Слагање и разлагање кретања.

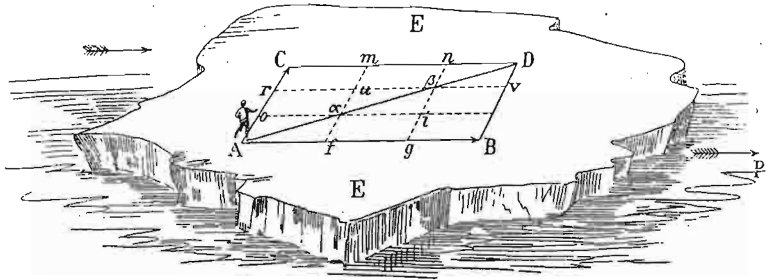
555. У свима досадашњим случајевима сматрали смо да је тело изложено само једном кретању било једнаком или једнако промењљивом. Најчешће се пак дешава, да је тело изложено двама или више кретањима која могу бити различита услед чега је и резултујуће кретање разне природе. Ми ћемо најглавније случајеве таких слагања кретања у кратко проучити.

556. **Слагање и разлагање брзина.** — На првом ћемо се месту задржати код слагања једнаких кретања или, што је једно исто, код слагања једнаких брзина. Ови се поједини случајеви могу десити:

а. Два или више једнака кретања дејствују на неко тело истим правцем. Нека су брзине тих појединих кретања $C_1, C_2, C_3 \ldots . C_n$ свака узета са својим знаком. Резултујућа брзина, слично ономе што смо у своје време извели за силе, биће равна алгебарском збиру брзина дакле:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots . C_n = \Sigma\,(C.) \quad \cdot \; \cdot \; (240$$

b. Два једнака кретања утичу на неко тело разним правцима; (сл. 218.) једно је кретање брзине C_1 управљено правцем AC; подлога пак креће се брзином C_2 у правцу AB, заклапајући с првим кретањем угао $CAB = \alpha$. Као што се и из слике види, резултујућа брзина добиће се по правилу о паралемограму брзина, т. ј.:



Сл. 218.

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2\, C_1\, C_2 \cos\alpha.} \quad . \; . \; . \quad (241$$

Ако је угао који резултујући брзина C заклапа с брзином C_2, $\beta = CAD$, а угао њен с брзином C_2, $\gamma = BAD$, онда се и ти углови на познати нам начин одређују из образаца:

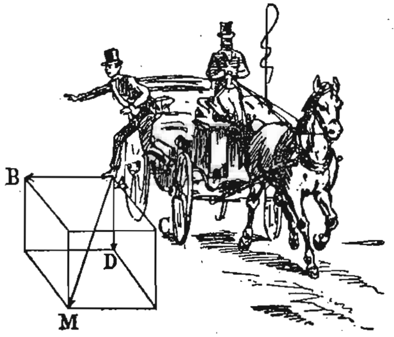
$$\sin\beta = \frac{C_2 \sin\alpha}{C} \quad \text{и} \quad \sin\gamma = \frac{C_1 \sin\alpha}{C.}$$

На исти начин можемо, изврнуто, једну брзину разложити на друге две брзине, које с датом брзином заклапају углове β и γ. Као што смо и код разлагања сила видели, цео се посао своди на решавање троуглова по познатим правилима, те ће и овде тражене компоненте C_1 и C_2 бити:

$$C_1 = \frac{C \sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{C \sin\beta}{\sin\alpha.}$$

c. Кад се једно тело мора кретати под утицајем трију или више једнаких брзина, али све те брзине леже у једној истој равни, онда ћемо резултујућу брзину наћи било графички по полигону брзина било рачунски по обрасцима, које смо у своје време извели за слагање сила у равни.

d. Ако се тело креће с три разне брзине у три разна правца, који не леже у једној равни, и стоје један на другом управно, онда ћемо се за слагање тих брзина и изналажење резултујуће брзине послужити паралелопипедом брзина. На сл. 219. имамо такав случај. Кола се крећу једнаком брзином C_1 правцем AC; путник искаче правцем AB опет једнаком брзином и управно на тај правац C_2. Тело пада услед привлачне снаге земљине, брзином C_3 (коју претпостављамо да је такође једнака и ако у ствари није) правцем AD. Резултујуће кретање извршиће се по дијагонали паралелопипеда AM брзином:



Сл. 219.

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$$

e. Кад бисмо имали да сложимо три или више једнаких брзина које леже у разним равнима или у простору, ми бисмо се послужили методом коју смо употребили за слично слагање сила у простору. Ако бисмо имали брзине $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$, које заклапају углове $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$; $\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2 \ldots \alpha_n\, \beta_n\, \gamma_n$ с три правоугле координатне осе, онда бисмо сваку брзину разложили на три једно на друго управне компоненте $C_{x1}\; C_{y1}\; C_{z1},\; C_{x2}\; C_{y2}\; C_{z2} \ldots .\; C_{xn}\; C_{yn}\; C_{zn}$ облика:

$$C_{x1} = C_1 \cos\alpha_1, \quad C_{y1} = C_1 \cos\beta_1, \quad C_{z1} = C_1 \cos\gamma_1$$

$$C_{x2} = C_2 \cos\alpha_2, \quad C_{y2} = C_2 \cos\beta_2, \quad C_{z2} = C_2 \cos\gamma_2$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$C_{xn} = C_n \cos\alpha_n, \; . \, C_{yn} = C_n \cos\beta_n, \quad C_{zn} = C_n \cos\gamma_n$$

Од свију компонента правцем појединих оса добили бисмо ове три резултујуће компоненте:

$$C_x = C_1 \cos\alpha_1 + C_2 \cos\alpha_2 + \ldots C_n \cos\alpha_n$$
$$= \Sigma\,(C \cos\alpha)$$

$$C_y = C_1 \cos\beta_1 + C_2 \cos\beta_2 + \ldots C_n \cos\beta_n$$
$$= \Sigma\,(C \cos\beta)$$

$$C_z = C_1 \cos\gamma_1 + C_2 \cos\gamma_2 + \ldots C_n \cos\gamma_n$$
$$= \Sigma\,(C \cos\gamma)$$

одакле је најзад резултујућа брзина:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$
$$= \sqrt{\Sigma\,(C\cos\alpha)^2 + \Sigma\,(C\cos\beta)^2 + \Sigma\,(\cos\gamma)^2} \quad \cdot \cdot \text{(242}$$

Ако са $w_1\, w_2\, w_3$ означимо углове, које резултанта C заклапа с појединим осама x, y, z. Онда су ти углови дати обрасцима:

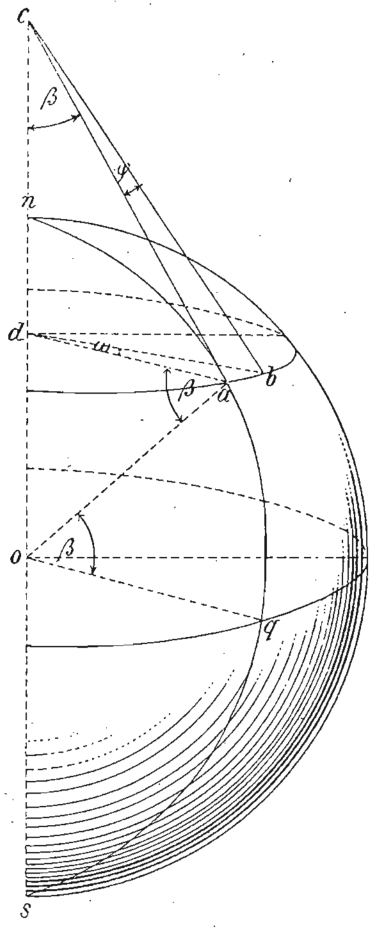
$$\cos w_1 = \frac{C_x}{C}, \; \cos w_2 = \frac{C_y}{C}, \; \cos w_3 = \frac{C_z}{C}.$$

557. Поред тога што смо видели, како се одређују бројне вредности брзина било при слагању било при разлагању њихову, најважнији резултат до кога смо дошли тај је, да се слагањем и разлагањем брзина природа кретања није изменила и да ће резултујуће кретање остати једнако, ако је из једнаких кретања састављено или на једнака кретања растављено. Јер ако је једно кретање дато обрасцем $x_1 = C_1 t$ а друго обрасцем $y = C_2 t$, онда је геометријска природа кретања:

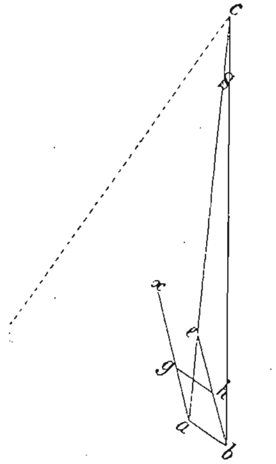
$$y = \frac{C_2}{C_1}\, x \text{ права линија нагнута под тангентом } \frac{C_2}{C_1}.$$

Примера ради посматрајмо утицај обртања земљина око осе на поједина једнака кретања на њеној површини. Неко тело a сл. 220 и 221, креће се слободно по правој линији ax брзином ag. После једне секунде то ће тело услед обртања земљина око осе доћи у b; ab је дакле периферна брзина на географској ширини β тела a. Правац ac је тангента на месту a и после једне секунде долази у положај bc. Тело ће очевидно под утицајем та два кретања стварно доћи у h (по паралелограму кретања).

Пошто се тело својим кретањем креће према полу, дакле из места где је периферна брзина на земљ. површини већа у места где је та брзина мања, то значи да ће тело, дошав у h, прећи меридијан у коме је у почетку кретања било, јер док је угао gae = углу aeb и док је угао $aeb = ecb + ebc$ као спољашњи, то следује из саме слике, да је угао eab као и gae већи од ebc.



Сл. 220.



Сл. 221.

Величина угла $\varphi = acb$, који показује за колико се путања свакога тела за једну секунду премести, одређује се из обрасца:

$$ab = w = \frac{2\pi}{86164}$$

где је 86164 број секунада једног обрта земљина т. ј. дужина једног звезданог дана, пошто се лук ab ради своје маленкости може сматрати да је описан и полупречником ac и ad. Даље из слике имамо:

$$\frac{da}{ca}\sin\beta.$$

Пошто ab припада и троуглу cab и adb и пошто је ab врло мало, то можемо написати:

$$\varphi : w = da : ca$$

или

$$\varphi = w\sin\beta = \frac{2\pi}{86164}\sin\beta.$$

Угао w вреди само за 1 секунду, а за кретање које траје t секунада биће скретање:

$$\varphi = wt\sin\beta$$

и за полупречник = 1.

Ако се, међутим, тело слободно и по правој линији креће по путу $s = ct$, то и величина лука расте растењем пута s и онда ће скретање у десно изнети:

$$l = s\,\varphi = ct^2\,w\sin\beta.$$

558. Слагање и разлагање убрзања. Једно се тело креће по два праволинијска једнако убрзања кретања без почетне брзине. Нека су та два кретања:

$$x = \frac{a_1 t^2}{2} \text{ и } y = \frac{a_2 t^2}{2}$$

нагнута једно према другом под углом α, онда ће бити:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{a_1 t^2}{2}}{\frac{a_2 t^2}{2}} = \frac{a_1}{a_2}$$

или

$$x = \frac{a_1}{a_2}\,y.$$

Резултујуће кретање је такође праволинијско и једнако убрзано, нагнуто под тангентом $\frac{a_1}{a_2}$. Графичким путем добили бисмо сада паралелограм убрзања у коме би резултујуће убрзање одређивала дијагонала паралелограма.

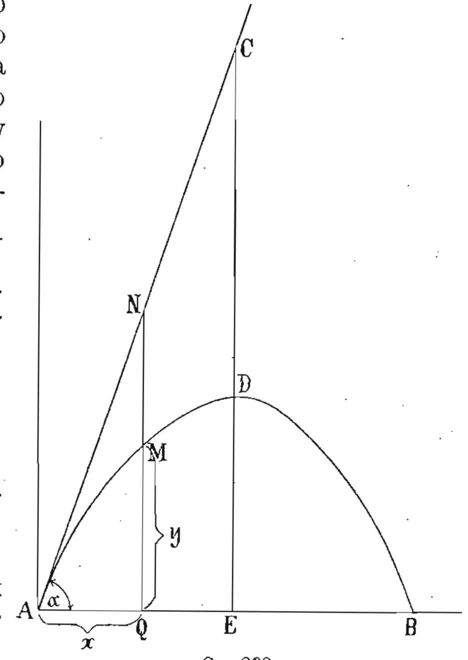
Што се осталих случајева слагања убрзања тиче, који би били слични онима, које смо видели код слагања брзина, ми бисмо имали да применимо сва она, тамо нађена правила, заменивши свуда брзине убрзањима.

559. Слагање брзина и убрзања. — Параболско кретање. — Међу свима случајевима слагања брзина и убрзања, ми ћемо посматрати једно према хоризонту косо бачено тело, које ће се кретати једнаком брзином а на које ће у исти мах дејствовати привлачна снага земљина, која као што знамо изазива једнако променљиво кретање. Ресултат слагања та два кретања даје тако звано *параболско кретање.* Јер ако означимо једнако кретање баченога тела са $y = ct$, а једнако променљиво кретање у след кога то исто тело једном бачено пада према земљи са $x = g\frac{t^2}{2}$, имаћемо избацивањем променљиве t геометријску природу путање:

$$y^2 = \frac{2c^2}{g}x = px$$

а то је једначина параболе.

560. Да бисмо извесне важније појединости тога иначе врло важног кретања проучили, рецимо да је неко тело A (сл. 222) бачено под углом α правцем AN. Угао α назива се *елевациони угао.* Чим је тело бачено, т. ј. остав-



Сл. 222.

љено самоме себи, оно се мора кретати једнаким кретањем и то брзином на пр. c, тако да би после времена t дошло до тачке N прешав очевидно пут $AN = ct$. Али у исто време дејствује на целом том путу привлачна снага земљина, услед које тело пада и место да после времена t буде у N, оно је из те тачке а за исто време пало за висину $MN = \frac{gt^2}{2}$ и налази се у тачки M која је једна тачка криве путање $AMDB$, по којој ће тело у самој ствари извршити цело своје кретање. Ту криву линију треба да одредимо.

Означимо координате тачке M са x и y, и онда из слике имамо:

$$x = ct \cos \alpha$$

$$y = NQ - MN = ct \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Вертикално навише управљена брзина или тако звана *успонска брзина* услед које се тело пење износи:

$$c_y = c \sin \alpha - gt$$

та успонска брзина постепено опада и пошто пређе време:

$$t = \frac{c \sin \alpha}{g}$$

сасвим престане. Да бисмо нашли геометријску путању, треба да избацимо t. Из прве једначине имамо:

$$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$$

и заменом те вредности у другој:

$$y = x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{c \cos \alpha}\right)^2$$

$$= \tan g\, \alpha - \frac{gx^2}{2\,c^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \cdots\cdots \quad (243$$

Ова једначина, која представља параболу, даће нам све појединости које нам код овога кретања буду требале.

Горњу једначину можемо, заменивши косинус тангентом, и на овај начин написати:

$$y = \tan g\, \alpha - \frac{gx^2}{2\,c^2} (1 + \tan g^2\, x). \quad \cdots \quad (244$$

561. Брзина c_0 ма у којој тачки параболске путање мења се непрестано и састављена је из вертикалне или успонске брзине c_y и хоризонталне $c_x = c \cos \alpha$. Пошто обе ове компоненте заклапају прав угао, то је очевидно:

$$c_0^{\,2} = c_x^{\,2} + c_y^{\,2} = c^2 \cos^2 \alpha + (c \sin \alpha - gt)^2$$

кад развијемо добићемо:

$$c_0^{\,2} = c^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha - 2\, gtc \sin \alpha + g^2 t^2$$

одакле је:

$$c_0 = \pm \sqrt{c^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2\, g \left(ct \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{c^2 - 2\, g \left(ct \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}\right)}$$

$$= \pm \sqrt{c^2 - 2\, gy}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (245$$

Брзина c_0 смањује се од своје првобитне вредности c непрестано за време пењања до хоризонталне брзине $c \cos \alpha$, која влада на темену параболе, па онда за време падања понова расте, док на хоризонту не постигне опет вредност c.

562. Да бисмо нашли *даљину бацања* AB, треба да ставимо у горњој једначини $y = o$, т. ј. да буде:

$$o = x \tan g\, \alpha - \frac{gx^2}{2\,c^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

одакле је:

$$\frac{gx}{2\,c^2}\,\frac{1}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tang}\alpha$$

или:

$$x=\operatorname{tang}\alpha\,\frac{2\,c^2\cos\alpha}{g}=\frac{2\,c^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{c^2}{g}\sin 2\,\alpha.$$

За дискусију се обично узима половина те вредности, т. ј. дужина AE, пошто се тачка E налази испод темена параболе D, па ће бити ако ту половину означимо са a:

$$a=\frac{c^2}{2\,g}\sin 2\,\alpha=h\sin 2\,\alpha.\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(246$$

Највећу вредност добива a очевидно кад буде $\sin 2\,\alpha = 1$, т. ј. за $\alpha = 45^0$. У том је случају:

$$\text{полудаљина бацања}=\frac{c^2}{2\,g}$$

дакле равна висини до које доспе тело бачено истом брзином вертикално у вис. (233).

563. Друга је важна ствар код пароболског кретања *висина бацања*, $DE = b$, т. ј. висина темена параболе изнад тачке E. Тога ради ставимо у горњу једначину апсцисну вредност за ту тачку која је наравно $a=\frac{c^2}{2\,g}\sin 2\,\alpha$:

$$y=\frac{c^2}{2\,g}\sin 2\,\alpha\operatorname{tang}\alpha-\frac{g}{2\,c^2\cos^2\alpha}\left(\frac{c^2}{2\,g}\sin 2\,\alpha\right)^2$$

$$=\frac{2\,c^2}{2\,g}\sin^2\alpha-\frac{c^2}{2\,g}\sin\alpha$$

$$=\frac{c^2}{2\,g}\sin^2\alpha=h\sin^2\alpha=b.\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(247$$

Дискусијом те једначине добивамо, да ће b, т. ј. висина бацања бити највећа за $\alpha = 90$, што се уосталом и по себи разуме и да је за тај случај:

$$b=\frac{c^2}{2\,g}=h$$

дакле онолико исто, колико смо раније нашли за слободно бачено тело у вис. Кад је a максимум, онда је $\sin 45=\sqrt{\frac{1}{2}}$ те је дакле за тај случај:

$$b=\frac{1}{2}\,\frac{c^2}{2\,g}=\frac{1}{2}\,\frac{c^2}{g}$$

т. ј. висина параболе износи $\frac{1}{2}$ даљине бацања.

564. Поред даљине и висине бацања трећа је важна ствар *елевациони угао*, под којим ваља један метак да избацимо, па да датом брзином добацимо до мете. За одређивање елевационог угла послужићемо се једначином:

$$y=x\operatorname{tang}\alpha-\frac{gx^2}{2\,c^2}\left(1+tg^2\,\alpha\right)$$

коју треба као нечисту квадратну једначину да решимо по $\operatorname{tang}\,\alpha$.

Из горње једначине имамо:

$$\operatorname{tang}^2\alpha-\frac{2\,c^2}{gx}\operatorname{tang}\alpha=-\left(1+\frac{2\,c^2}{g\,x^2}\right)$$

одакле најзад:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{c^2}{gx}\pm\sqrt{\frac{c^4}{g^2\,x^2}-\left(1+\frac{2\,c^2\,y}{gx^2}\right)}\;\cdot\;\cdot\;(248$$

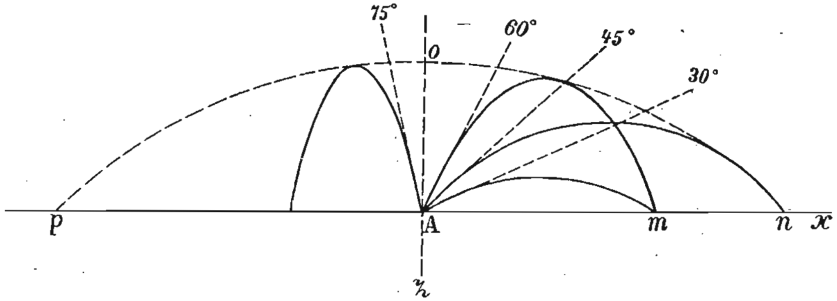
а то значи, за сваку дату даљину x и брзину c добивамо по две вредности за α, изузевши само један случај и то онај кад су дате вредности такве природе, да израз под кореним знаком буде $= o$, т. ј. кад буде:

$$\frac{c^4}{g^2\,x^2} = 1 + \frac{2\,c^2\,y}{gx^2}$$

одакле је:

$$y = \frac{c^2}{2\,g} - \frac{gx^2}{2\,c^2}$$

а то је тако звана *гранична парабола*. Та парабола nop (сл. 223), која обртањем око вертикалне осе даје један параболоид, дели оне тачке које можемо бацањем под



Сл. 223.

разним елевационим угловима, да погодимо од оних које датом брзином никаквим елевационим углом не можемо достићи.

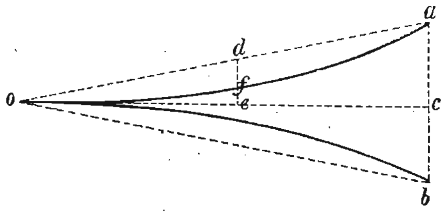
Као што нам та једначина казује, сваку ону тачку на хоризонту, која је ближа од највеће даљине, можемо достићи помоћу две параболе; код једне је елевациони угао исто толико изнад, колико је други испод елевационог угла оне средње параболе, којом бацамо најдаље. До тачке m можемо добацити једном параболом код које тангента заклапа угао 30° као и још једном која је исто толико изнад 45° и чија тангента заклапа угао од 60°. Код пуцања из пушке обично се служимо доњом параболом, и пуцамо под врло малим елевационим углом, јер хоћемо да тане погоди не само онај предмет који се налази на месту где парабола пресеца хоризонат, већ и оне који се још ближе налазе, а то може бити само кад је путања танета положена и кад се

врло мало издиже изнад хоризонта. Онда се каже да је „поље брисања“ велико, а постиже се нарочито великом брзином (односно смањивањем калибра танета), јер је онда и путања танета положена и даљина до које тане достиже велика.

Обрасци које смо напред извели вреде, кад је и почетна и крајња тачка путање баченога тела, т. ј. тачка A и B (сл. 222) на истој висини или у истој равни. Али ако је крајња тачка путање B, т. ј. објекат на који циљамо за угао β изнад или испод почетне тачке, онда би на пр. за највећу даљину бацања елевациони угао био у првом случају:

$$45 + \frac{1}{2}\beta \text{ а у другом } 45 - \frac{1}{2}\beta.$$

565. Сем горњега начина за израчунавање елевационог угла бацања можемо се послужити и овим. Рецимо да смо тело бацили хоризонтално, правцем *oc* (сл. 224) и у *c* се налази мета коју хоћемо на пр. из пушке да погодимо. Тане ће се услед параболског кретања а на даљини мете спустити у *b* за висину *bc*. Кад направимо троугао *ocb* и пренесемо га на горњу страну, правац *oa* односно угао *aoc* даће нам елевациони угао.



Сл. 224.

Ако је време за које тане стигне из *o* до *c* равно *t*, у секундама, онда је $cb = \frac{gt^2}{2}$. Ако је брзина танета 80 мет., и ако пут *oc* пређе за једну секунду, онда је $cb = 4{\cdot}9$ мет., те према томе и елевациони угао $tg\,\alpha = \frac{4{\cdot}9}{80} = 3^0\,30'\,20.$“

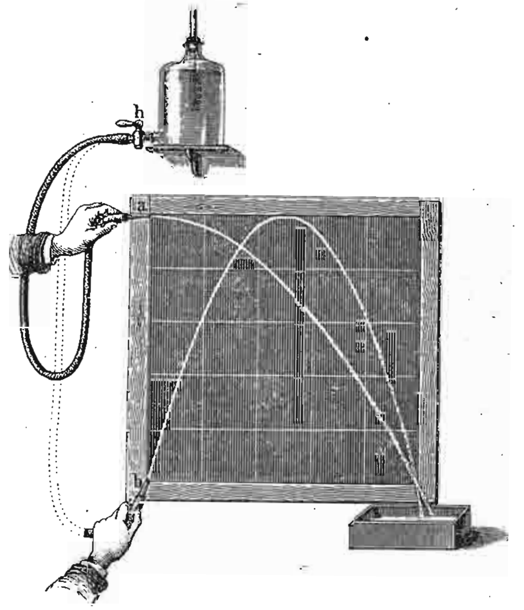
Ако тане пређе за пола секунде до *e*, то би било $te = \left(\frac{1}{2}\right)^2\ 4{\cdot}9 = 1{\cdot}225$ мет. и онда $tg\,\alpha = \frac{1{\cdot}225}{40} = 1^0\,45'\,20.$“

Дакле ако брзина танета остане иста, имали бисмо за мету која је на пола пута од прве елевациони угао од $1^0\,45'\,20.$“

566. Путања баченога тела или избаченог пројектила била би прâва парабола, само кад би била испуњена ова два услова: На првом месту избачено тело треба да буде лоптасто и врло мало, дакле да се приближи материјалној тачки. Ако то није случај, онда изведена правила вреде само за тежиште тела, док је кретање осталих тачака много сложеније и према разним приликама различито. Други услов који би морао бити испуњен па да се кретање врши по горњим, теоријски изведеним обрасцима јесте кретање у безваздушном простору. Пошто се, међутим, сва та кретања дешавају у ваздуху, то ће утицај ваздушни увек у већој или мањој мери горње кретање изменити. Тај пак утицај може бити двојак: први зависи од специфичне тежине тела, јер кроз ваздух могу само специфички тежа тела падати, док друга у њему лебде а нека се кроз ваздух чак и пењу. По себи се разуме, да ће однос специфичких тежина између ваздуха и тела што се кроза њ креће имати знатан утицај на облик путање. Други утицај ваздуха долази отуда, што свако покренуто тело мора извесну количину ваздуха кроз који пролази покренути и са свога га пута уклонити, другим речима, тело мора савладати отпор трења ваздуха. Оба горња утицаја мешају се међу собом на најразличитије начине. Због тога путања баченог тела или избаченог пројектила није пра̂ва парабола. Цела путања је свакако крива линија, али састављена из два несиметрична дела, од којих се први део више приближује параболи а други се знатно од ње одваја и брже и наглије пада. Она линија, коју заиста један пројектил у свом кретању описује, назива се „балистичка линија“ и специјално се проучава у балистици. Балистичка се линија само приближно може теоријски извести, иначе је посматрач упућен на експерименте, односно на таблице изведене из експеримената с разним брзинама, даљинама, висинама и т. д.

По себи се разуме да отпор ваздуха утиче и на тела која вертикално слободно падају као и на она која се вертикално у вис бацају. Код тела бачених вертикално у вис брзна висина је због ваздушног отпора увек мања, а такође је и брзина којом се тело враћа мања од брзине којом је било бачено.

Експериментално се облик путање косо бачених тела, може најзгодније проучавати воденим млазевима, јер се због континуитета кретања цела путања одједном види (сл. 225).



Сл. 225.

567. *Примери.* 1. *a.* Један посматрач чује на обали, на температури од — 8° пуцањ топа избаченог на лађи, после 22 секунде. Лађа лежи северозападно од посматрача. Колико је далеко лађа од обале, кад се при том узме на ум да дува северозападан ветар брзином 3·75 мет. — *b.* Лађа лежи на *WNW*, а ветар дува *OSO* брзином од 5 мет. Температура + 16°, а пуцањ се чује 20 сек. пошто је топ избачен. Колико је удаљена лађа у морским миљама кад једна миља има 1855·1 мет.

a. Ваља одредити пут који пређе нека покретна тачка за 22 сек. и кад на то кретање тачке утичу две брзине и то брзина звука C_1 и брзина ветра C_2. Брзина звука је у мирном ваздуху за O^0 и средњем барометарском стању округло 332 мет. За сваки степен изнад O^0 по Арагу брзина расте 0·63, а толико исто опада за сваки степен испод O^0. Онда је:

$$C_1 = 332 - (8 \times 0{\cdot}63) = 327.96$$

$$C = C_1 + C_2 = 327{\cdot}96 + 3{\cdot}75 = 331{\cdot}71.$$

Према томе је пређени пут, односно даљина лађе од обале у миљама:

$$s = \frac{22.331{\cdot}71}{1855{\cdot}1} = 3{\cdot}95 \text{ мор. миље.}$$

b. У другом је случају брзина ветра супротног смисла с брзином звука:

$$C_1 = 332 + 16 \times 0{\cdot}63 = 342{\cdot}08$$

$$C = C_1 - C_2 = 342{\cdot}08 - 5 = 337{\cdot}08$$

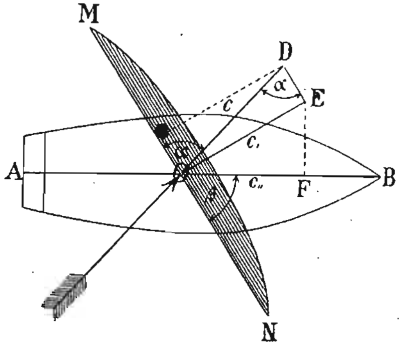
$$s = \frac{20.337{\cdot}08}{1855{\cdot}1} = 3{\cdot}63 \text{ мор. миље.}$$

2. Кроз прозор покретних кола железничких види се како кишне капи косо падају Хоризонтална катета правоуглог троугла (између оквира прозора и нагнутог трага кишне капи) износи 0·6 мет. а вертикална 0·5 мет.; брзина воза 13·5 мет. Колика је брзина којом пада кишна кап, претпостављајући да је њено кретање на тако кратком путу било једнако? — Означимо непознату брзину кишне капи са x. Имаћемо:

$$0{\cdot}6 : 0{\cdot}5 = 155 : x$$

$$x = \frac{0{\cdot}5 \cdot 13{\cdot}5}{0{\cdot}6} = 11{\cdot}25 \text{ мет.}$$

3. На мирној води налази се лађа с разапетим једрилом; и кад би лађа својом уздужном осом лежала правцем OD (сл. 226) којим дува ветар, а једрило разапето управно на тај правац, кретала би се брзином $C = 1$ мет. Али ако једрило MN заклапа с правцем ветра угао $DOM = \alpha = 75^0$, а са осом лађе угао $FON = \beta = 60$, пита се: *a.* Колика је онда брзина лађе? *b.* како се мора наместити једрило па да лађа, задржавајући свој правац према датом правцу и јачини ветра, најбрже плови?



Сл. 226.

a. Разложићемо најпре брзину ветра $OD = C$ у две компоненте OM, која је за лађу изгубљена и $OE = C_1$ која на једрило притискује. Из тог троугла имамо:

$$C_1 = C \sin \alpha.$$

Ову брзину C_1 морамо да разложимо на друге две компоненте, и то на EF која се потире отпором воде о бок лађе и на $OF = C_2$ која ће лађу да тера. Пошто је угао $EON = 90^0$ и угао $FON = 60^0$, биће угао $EOF = 90^0 - 60^0 = 30^0$. Угао $OEF = 60^0$. Сад је:

$$C_2 = C_1 \sin 60.$$

$$= C \sin 75^0 \sin 60_0 = 0{\cdot}83652 \text{ м.}$$

b. Из тригонометрије се зна да је:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

Тај ће израз бити највећи, кад је $\cos (\alpha - \beta) = 1$ т. ј. $\alpha - \beta = o$ или $\alpha = \beta$, т. ј. брзина ће лађе бити највећа, кад једрило с правцем ветра и уздужном осом лађе једнаке углове заклапа. Ако је на пр. тај угао 70^0, онда је:

$$C_2 = \sin 70^0 \sin 70^0 = 0{\cdot}838 \text{ м.}$$

4. На једном месту, које лежи на 50^0 ширине, избаци се топ ма у ком правцу; брзина пројектила је 510 мет., и пројектил после две две секунде удари у мету. Колико је одступање пројектила од мете услед утицаја обртања земљина?

Узећемо образац који смо раније за то скретање нашли:

$$l = ct^2 w \sin \beta$$

где је c брзина пројектила, t време кретања $w = \dfrac{2\pi}{86164}$ а β географска ширина

$$l = \frac{510 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3{\cdot}14159 \cdot \sin 50^0}{86164} = 0{\cdot}1139 \text{ м.}$$

Скретање износи дакле свега 11·4 см. на даљину од $2 \times 510 = 1020$ мет., дакле може се сасвим занемарити.

5. Из Крупова пољска топа од 9·6 см., који је напуњен са 2·65 кгр. барута, избаци се граната од 12 кгр. тежине под елевационим углом од $3^0 45'$ са 444 мет. брзине. Ваља израчунати, не водећи рачуна о отпору трења: *a.* хоризонталан и вертикалан пређени простор за $2\frac{1}{2}$ сек. — *b*, хоризонталну и вертикалну брзину; — *c*, путну брзину коју је пројектом имао после $2\frac{1}{2}$ сек. — *d.* кад је пројектил достигао највишу тачку свога пута? — *e.* где лежи та тачка и *f.* колика је према томе даљина до које је пројектил стигао? — *g.* колико је био пројектил високо над хоризонтом, кад је хоризонтални пређени простор износио 2000 мет.?

a. По обрасцима $x = ct \cos \alpha$ и $y = ct \sin \alpha - \dfrac{gt^2}{2}$

$$x = 444 \cos 3^0 45' \cdot 2{\cdot}5 = 1107{\cdot}6 \text{ мет.}$$

$$y = 444 \sin 3^0 45' \cdot 2{\cdot}5 - 4{\cdot}905 \cdot 2{\cdot}5 \cdot 2{\cdot}5 = 41{\cdot}94 \text{ мет.}$$

b. Хоризонтална је брзина $c_x = c \cos \alpha$

$$c_x = 444 \cos 3^0 45' = 443{\cdot}05$$

Вертикална брзина $c_y = c \sin \alpha - gt$.

$$c_y = 444 \cos 3^0\, 45 - 9{\cdot}81 \cdot 2{\cdot}5 = 4{\cdot}514 \text{ м.}$$

$$= 4{\cdot}514 \text{ мет.}$$

c. Брзина износи $c_0 = \pm \sqrt{c^2 - 2\,gy}$

$$c^0 = \pm \sqrt{444^2 - 19{\cdot}62 \cdot 41{\cdot}94} = 443{\cdot}07.$$

d. Из обрасца $y = ct \operatorname{siu} \alpha - \frac{gt^2}{2}$, добићемо тачку на хоризонту, кад буде $y = o$, т ј. кад буде:

$$t = \frac{2\,c \sin \alpha}{g}.$$

Највишу тачку свога пута достигао је пројектил у половини тога времена дакле:

$$t_1 = \frac{t}{2} = \frac{c \sin \alpha}{g} = \frac{444 \cdot \sin 3^0\, 35'}{9{\cdot}81} = 2{\cdot}96 \text{ сек.}$$

e. Хоризонтални пређени пут после тог времена износи:

$$x = 444 \cdot 2{\cdot}96 \cos 3^0\, 45' = 1311{\cdot}5 \text{ мет.}$$

За то исто време од 2·96 сек. пређени вертикални простор износи:

$$y = 444 \cdot 2{\cdot}96 \sin 3^0\, 45' - 4{\cdot}905 \cdot 2{\cdot}96^2 = 43 \text{ м.}$$

f. Даљина до које је пројектил за то време стигао два пут је већа од израчунатог хоризонталног пређеног простора под *e*, тј.:

$$w = 2623 \text{ мет.}$$

(у самој ствари износи тај пут 2053·6 м.)

g. Кад је $x = 2000$, онда је по основној једначини за параболу:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2c^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$= 2000 \operatorname{tang} 3^0\, 45' - 4{\cdot}905 \frac{2000 \cdot 2000}{442^2 \cos^2 (3^0\, 45')} = 31 \text{ м.}$$

II.

Централно кретање.

568. **Центрипетална, центрифугална и тангенцијална сила.** — Говорећи о слагању брзина и убрзања (на пр. код косо бачених тела), узимали смо да привлачна снага земљина на целој путањи баченога тела остаје сама себи паралелна. Тако је уосталом морало бити према дефиницији хомогеног гравитационог поља земљина на њеној површини, као и према томе, што је путања покретног тела била несравњено мала према одстојању тога тела од средишта земљина. Међутим, кад је путања покретног тела тако велика, да не ишчезава према одстојању оне (централне) силе, која на то тело дејствује, онда морамо водити рачуна и о правцу дејства те силе. У великоме налазимо таква кретања код кретања планета и њихових трабаната, а у маломе код кретања чврсто везаних тела око осовинâ. Таква се кретања уопште зову *централна кретања.*

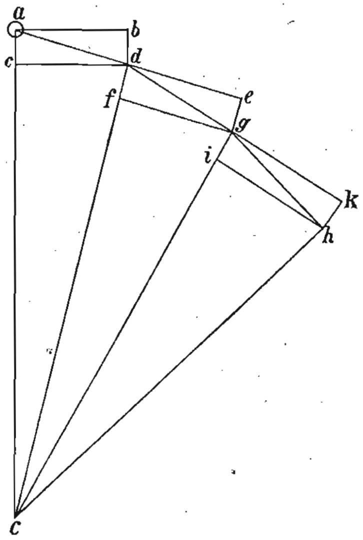
Свако централно кретање је сложено кретање и то најмање из једног једнаког и једног променљивог кретања, која међу собом заклапају извесан угао. Путања централног кретања је отворена (парабола или хипербола) или затворена (круг или елипса). Хоће ли тело описивати отворену или затворену путању, зависи пре свега од правца којим дејствује стална брзина према правцу убрзања као и од односа тих двеју величина. И кретање косо бачених тела на земљиној површини, о којима смо до сад говорили, строго узев спадају у централна кретања, само се она никако не могу кретати по затвореној путањи, јер привлачна снага земљина далеко премаша ма какву почетну брзину коју бисмо ми могли телу саопштити бацањем. Највеће брзине којима бисмо ми могли бацити неко тело једва износе око 700 до 800 метара у сек., а требало би да телу саопштимо најмање 8000 метара брзине, па да око земље описује затворену путању, те да кретање постане у правом смислу централно.

Међу свима централним кретањима небеских тела нема ни једног, чија би путања била хиперболска или кружна; само неке се комете крећу по параболама, а све планете по елипсама. Међутим, кружна кретања налазимо на земљи код свију оних тела, која се окрећу око неке осовине или око неке тачке, т. ј. центра.

569. Код централног кретања дејствују две силе: једна која тело непрестано ка центру привлачи, на пр. код планетских кретања, или која је представљена јачином оне материјалне везе која покретно тело за осу или за центар везује. Та се сила назива *центрипетална, средотежна сила*, која тежи да тело *ка* центру привуче; њој на супрот дејствује *центрифугална* или *средобежна или замајна сила* која покретно тело *од* центра вуче. Обе те силе називају се још и *нормалним силама* и међу собом су једнаке, услед чега тело и остаје на својој путањи. Кад центрипеталне силе нестане, кад се, на пример, код заошијаног тела прекине веза која га држи, тога момента престаје и центрифугална сила и централно кретање, које је дотле постојало, престаје. Раније смо већ казали (229) да кад престане узрок који тело одржава на кривој путањи, да тело продужи своје кретање по тангенти повученој на ону тачку путање у којој криволинијско кретање престаје. Та сила, која тело правцем тангенте одводи, назива се *тангенцијална сила*.

570. Назив „тангенцијална сила“ у неколико није на свом месту. Дејство централне силе је непрекидно, и оно изазива убрзано кретање, дакле центрипетално убрзање. Кад тангенцијалне силе не би било, тело би убрзаним кретањем пало на централно тело. Али кад нестане центрипеталне силе која изазива центрипетално убрзање, тело се креће правцем тангенте *једнаким* кретањем, а таква кретања не изазивају сталне силе, као што се обично дејство силе схваћа. Једнако кретање постаје дејством тренутне силе, која је морала тренутно дејствовати у почетку тога кретања, али те силе у даљем кретању више нема. У самој ствари тангенцијална је сила количина кретања покретнога тела и зато се она увек тако и обележава:

$$\Theta = mc = \frac{2R\pi}{T}m = mR\omega \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (249$$



Сл. 227.

571. На сл. 227. видимо како из центрипеталног убрзаног кретања *ac*, *df*, *gi* и из тангенцијалног једнаког кретања *ab*, *de*, *gk*, постају поједини делови криве путање *a d g h*. Тангенцијално кретање, које ту дејствује, нашли смо мало час; остаје нам још да одредимо центрипетално убрзано кретање карактерисано центрипеталним или нормалним убрзањем *N*. Да би ствар била простија, рецимо да је затворена путања тога централног кретања, круг.

Правцем *a C* тело се креће једнако убрзано и прелази за неко врло мало време τ путању *ac* која износи:

$$ac = \frac{N\tau^2}{2}$$

као код сваког једнако убрзаног кретања. Слагањем тог промењљивог кретања с једнаким тангенцијалним кретањем постаје елеменат *ad* кружне путање, и ако полупречник круга означимо с *R*, време за које тело пређе целу кружну путању са *T*, периферна стална брзина биће:

$$C = \frac{2R\pi}{T}$$

а елеменат пута:

$$ad = C\tau = \frac{2R\pi}{T}\tau.$$

Замислимо да смо полупречник *a C* продужили до на супротну страну путање (те да добијемо пречник) и ту тачку саставили са *d*; добили бисмо на тај начин правоугли троугао над пречником који је сличан троуглу *acd*. Из те сличности имамо:

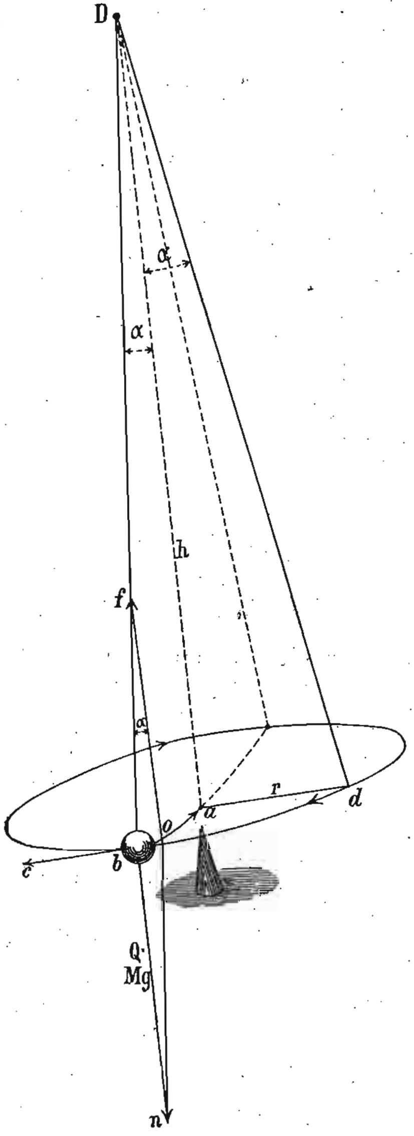
$$ac : ad = ad : 2R$$

или

$$\frac{N\tau^2}{2} : \frac{2R\pi}{T}\tau = \frac{2R\pi}{T}\tau : 2R$$

одакле је тражено центрипетално или нормално убрзање:

$$N = \frac{4 R \pi^2}{T^2} = \omega^2 R = \frac{C^2}{R} \cdots\cdots \quad (250$$



Сл. 228.

Из централног убрзања добивамо силу кад то убрзање помножимо масом m, те ће бити:

$$\varPi = Nm = \frac{4 R \pi^2}{T^2} m =$$

$$= \frac{Q}{g} \frac{4 R \pi^2}{T^2} = \frac{mC^2}{R} \cdot \quad (251$$

Као што видимо центрипетална, па дакле и центрифугална сила управо је сразмерна маси и полупречнику, а изврнуто сразмерна квадрату времена или још: управо је сразмерна маси и квадрату брзине, а изврнуто сразмерна полупречнику.

572. Централно кружно кретање можемо у маломе изазвати на овај начин. Тешко тело b (сл. 228.) обешено је о тачку D. Кад га изведемо из равнотежног положаја Da и саопштимо му сталну (тангенцијалну) брзину c лаким ударом, оно неће више пасти у равнотежну тачку a, већ ће око ње описивати кружну путању. Центрифугална сила постаје из тежине тела $Q = bn$ и затегнутости конца $b\,D$, коју ћемо затегнутост означити са $S{=}bf$. Из та два дејства по паралелограму сила постаје резултантна bo, која није ништа друго до центрипетална сила:

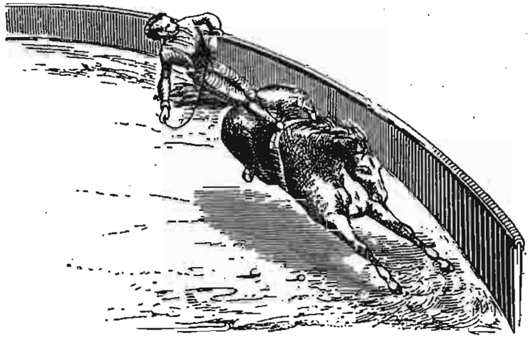
$$\varPi = \frac{MC^2}{r}.$$

Та је центрипетална сила управна или нормална на путању (отуда назив нормална сила) и управљена ка средишту a круга.

Угао α који заклапа затегнут конац с равнотежним правцем Da добива се:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{bo}{fo} = \frac{\varPi}{Q} = \frac{MC^2}{rMg} = \frac{C^2}{rg}$$

Примену овога обрасца налазимо на пр. код јахања у кругу (сл. 229.); угао α, т. ј. нагибање и коња и јахача је у толико веће у колико се већом брзином јаше.



Сл. 229.

Пошто је међутим из троугла $Dad.$:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{r}{h}$$

то је и:

$$h = \frac{gr^2}{C^2}.$$

Величина силе S одређује се из једначине:

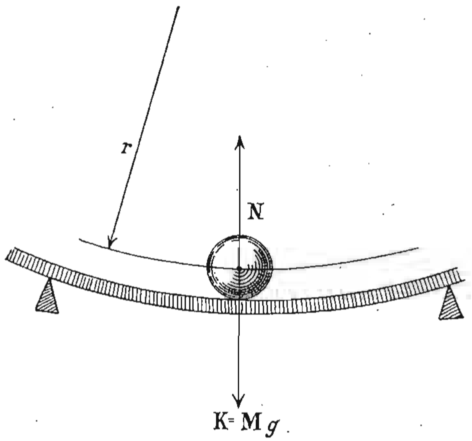
$$S = \sqrt{Q^2 + \varPi^2} = M \sqrt{g^2 + \frac{C^4}{r^2}}$$

време једног обрта:

$$t = \frac{2\,r\,\pi}{C} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

573. Сем кружнога, могућа су још и друга криволинијска једнака кретања, ако ту разумемо и кретања

која нису слободна, на пр. она по нагнутим путањама. Кад се, дакле, неко тело креће по некој чврстој нееластичној кривој путањи, онда отпор или притисак путање на тело, дејствујући увек управно на правац кретања, замењује центрипеталну силу. Кад не би било трења, тај би притисак мењао само правац а не и брзину кретања. То вреди, наравно, не само за кружне него и за ма какве друге криволинијске путање, на пр. елиптичне, спиралне и т. д. И за те се путање центрипетална сила одређује на исти начин као и код кружних путања, с том само разликом што се код сваке тачке такве путање мења полупречник кривине, па према томе и сила или притисак.



Сл. 230.

574. Ако на тело, које се креће по затвореној путањи (рецимо кружној) сем центрипеталне силе дејствује још нека стална сила K истога правца са центрипеталном, а ма каквог смисла, онда је притисак $\boldsymbol{\Pi}$ на путању већи или мањи од $\frac{Mc^2}{R}$, према томе да ли та нова сила K дејствује од средишта (ка периферији путање, K) или ка средишту N. Ако се нека лопта котрља по кривој путањи (сл. 230.) полупречника r неком брзином c, и на њу дејствује још нека сила K, рецимо тежина њена $= Mg$ према периферији, то ће у том случају притисак на путању бити:

$$\boldsymbol{\Pi}_0 = \frac{Mc^2}{r} + K = \frac{Mc^2}{r} + Mg = Mg\left(1 + \frac{c^2}{gr}\right)$$

Нека та кугла дође у супротну тачку путање; сад ће тежина кугле K дејствовати ка центру и притисак на путању биће очевидно:

$$\boldsymbol{\Pi}'_0 = \frac{Mc^2}{r} - K = Mg\left(\frac{c^2}{gr} - 1\right)$$

Обе ове једначине споје се обично у једну:

$$\boldsymbol{\Pi} \pm K = \frac{Mc^2}{r} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (252$$

Пошто је $\boldsymbol{\Pi} \pm K$ резултанта или средња сила оних сила које на покретно тело дејствују, то следује да је *код једнаког кретања по кривој путањи средња сила свију оних сила које на покретно тело дејствују, центрипетална сила* $\frac{Mc^2}{r}$.

Нека је у горњем примеру брзина лопте $c = 14$ мет., а полупречник путање $= 20$ мет., онда је:

$$\frac{\boldsymbol{\Pi}_0}{Mg} = 1 + \frac{14^2}{9{\cdot}81 \cdot 20} = 2.$$

Притисак на путању $\boldsymbol{\Pi}_0$ износи $2\,Mg$, т. ј. два пут је већи од тежине. У горњем (супротном) положају кугле тај притисак износи:

$$\frac{\boldsymbol{\Pi}_0}{Mg} = o.$$

а то ће рећи да кугла нити притискује на путању, нити може пасти услед своје тежине, те би се дакле на том месту кретала по кругу и да нема утврђене путање. Кад би брзина била већа на истој путањи или мањи полупречник путање при истој брзини, онда би и у том (горњем) положају кугла притискивала на путању и по њој се кретала.

575. Ако нова сила K дејствујући у истој равни не дејствује правцем центрипеталне силе, него са правцем путање заклапа неки угао α, онда разлагањем силе K на две компоненте: добивамо компоненту која иде правцем нормалне (ц. петалне) силе,

$$K_1 = K \sin \alpha$$

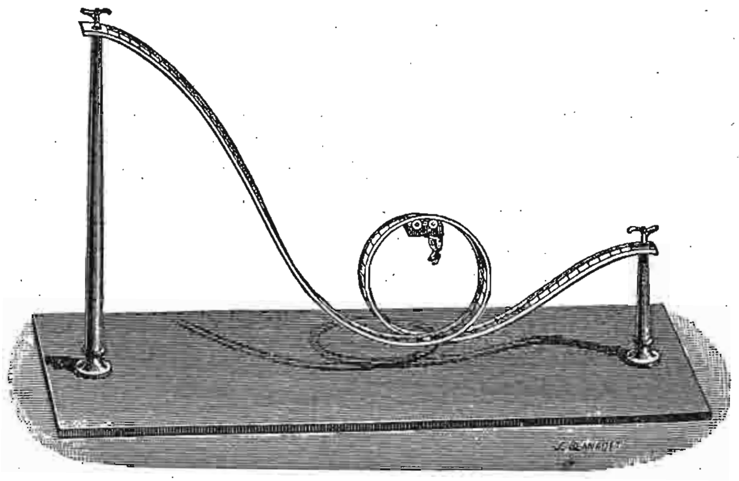
те је и према томе целокупни притисак:

$$\boldsymbol{\Pi}_0 \pm K \sin \alpha = M\frac{c^2}{r}. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (253$$

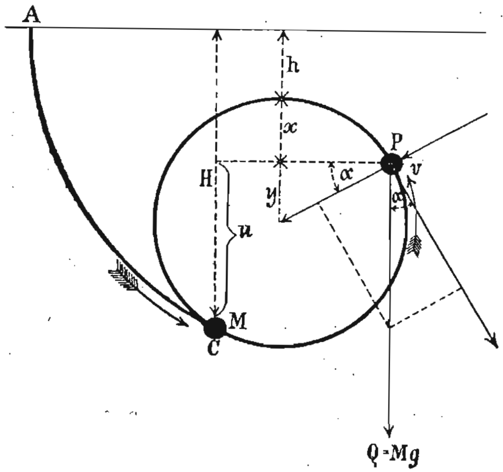
Горњи се случајеви изводе из овога, кад се стави $\alpha = o$ или $\alpha = 90$.

Ова су правила примењена код справе представљене на сл. 231. и која би се могла назвати центрифугалном железницом. Покретно тело полази из тачке A (сл. 232), с почечном брзином 0, и наилази на почетак кружне путање код тачке M, брзином:

$$C = \sqrt{2\,g\,H}.$$



Сл. 231.



Сл. 232.

Кад се тело одавде попне до тачке P, дакле за висину $= u$, онда према обрасцу за успорена кретања с почетном брзином имамо брзину у посматраној тачки:

$$v^2 = c^2 - 2\,gu =$$
$$= c^2 - 2\,g\,[H - (h + x)]$$
$$= 2\,g\,(h + x) = 2\,g\,(H - u)$$

Пошто страна сила $Q = Mg$ заклапа угао α с правцем путање у посматраној тачки P, имаћемо даље:

$$x = r - y =$$
$$= r - r\sin\alpha = r\,(1 - \sin\alpha)$$

те према томе:

$$v^2 = 2\,g\,[h + r\,(1 - \sin\alpha)]$$

одакле се може та брзина v израчунати.

Центрифугални притисак који дејствује на путању или центрипетални притисак управљен ка средишту путање биће сад:

$$\boldsymbol{\Pi}_0 + Mg\sin\alpha = \frac{Mv^2}{r}$$

или заменом:

$$\boldsymbol{\Pi}_0 + Mg\sin\alpha = \frac{2\,Mg}{r}\,[h + r\,(1 - \sin\alpha)]$$

одакле је:

$$\boldsymbol{\Pi}_0 = 2\,Mg\left[\frac{h}{r} + 1\,(1 - \sin\alpha)\right] - Mg\,\mathrm{siu}\,\alpha$$
$$= 2\,Mg\left[\frac{h}{r} + 1 - \frac{3}{2}\sin\alpha\right]$$

Тај је притисак најмањи на највишој тачки путање, т. ј. где је $\sin\alpha = 1$, и износи:

$$\boldsymbol{\Pi}_{0\,\min} = 2\,Mg\left(\frac{h}{r} - \frac{1}{2}\right)$$

Тај је притисак раван нули за:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2}\ \text{т. ј. за}\ h = \frac{1}{2}\,r.$$

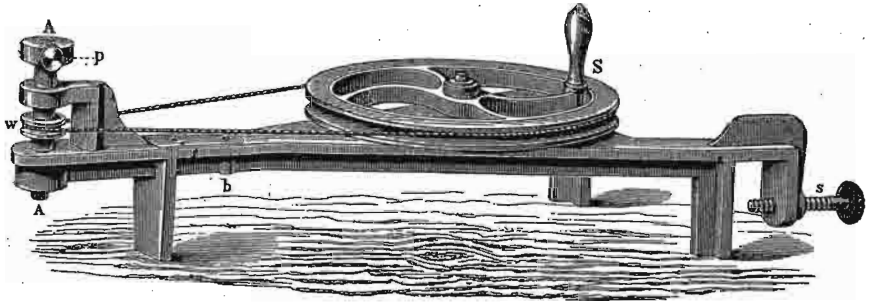
и ако хоћемо да тело на тој тачки путање не падне, треба да буде:

$$h > \frac{1}{2}\,r$$

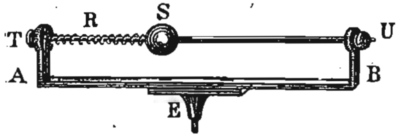
наравно не водећи рачуна о трењу, због кога та неједнакост мора бити још већа.

576. Центрифугална машина. За проучавање дејстава центрифугалног притиска служимо се тако званом *цен-*

трифугалном или замајном машином (сл. 233), која је обично удешена тако, да обртна оса AA може заузети према потреби вертикалан (као на слици) или хоризонталан положај. Поједини апарати на којима се дејство центрифугалног притиска проучава утврђују се у AA, било на више или на ниже. Таква центрифугална машина може бити удешена и да се окреће ногом.

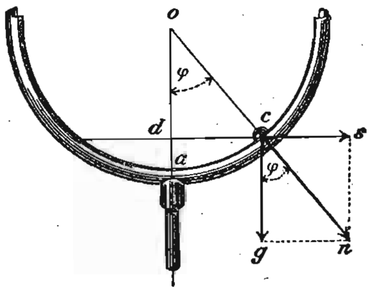


Сл. 233.



Сл. 234.

За непосредно мерење ц.фугалног притиска удешена је справа, коју показује сл. 234. Кад се осовина E те справе утврди у осу AA ц.фугалне машине, онда ће, према слабијем или јачем обртању машине, кугла S потискивати мање или више опругу R и тиме одредити притисак непосредно, ако је шипка по којој кугла клизи претходно градуисана.



Сл. 235.

На други начин може се тај притисак мерити кривим олуком као на слици 235, по коме се може слободно кретати куглица c. Центрифугални притисак представља дужина $cs = \Pi_0$; тежина куглице је $Q = cg$.

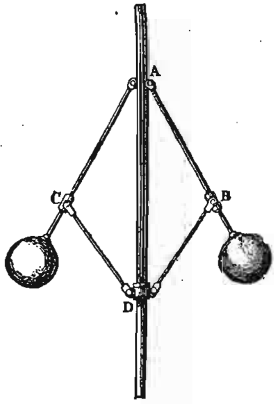
$$\Pi_0 = Q \operatorname{tang} \varphi = \frac{4\,r\,\pi^2}{t^2}\,m = \frac{4\,r\,\pi^2}{t^2}\,\frac{Q}{g}$$

Одавде је:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4\,r\,\pi^2}{g t^2}.$$

Пошто је из слике $r = cd = oc \sin \varphi = \alpha \sin \varphi$ то је и:

$$\cos \varphi = \frac{g t^2}{4\,\pi^2\,\alpha}.$$



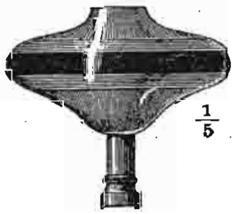
Сл. 236.

Слично је дејство и код центрифугалног клатна (сл. 236).

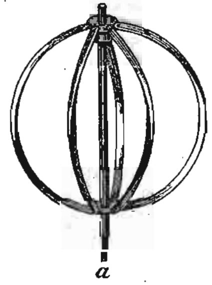
Утицај масе на ц.фугални притисак види се на једном полулоптастом металном суду (сл. 237), у који се метну куглице разне специфичке тежине. При истој брзини обртања најтежа ће куглица отићи најдаље од осе. То се исто види и при обртању стаклена суда (слика 238), у који се сипа на пр. вода и жива.

Кад се еластична тела (239) или пластичне масе (сл. 240) окрећу на ц.фугалној машини, оне ће се спљоштити. Исто се тако спљошти кап зејтина у алкохолисаној води (сл. 241).

Сл. 237.



Сл. 238.



Сл. 239.

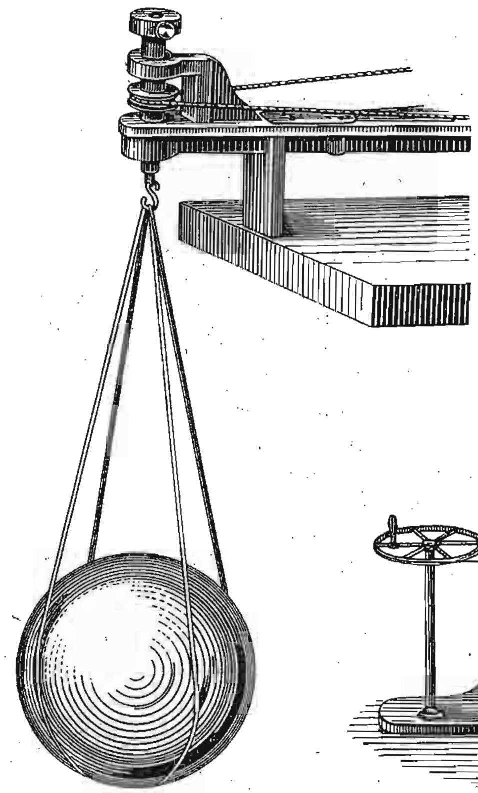
На исти се начин објашњава и постанак спљоштености код наше земље, док је била у течном или пластичном стању.

577. Посматрајмо неку тачку масе M (сл. 242) на површини земљиној, а на географској ширини $= \varphi$. Одстојање те тачке од осе земљине нека буде $MK = \varrho$, и време једног обрта земљина $= t$. Центрифугални притисак те тачке као и свију тачака на истом паралелном кругу биће:

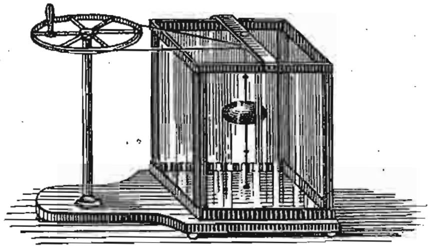
$$\varPi_0 = MC = \frac{4\,\pi^2 \varrho}{t^2}\,M.$$

пошто је $\varrho = R \cos \varphi$, ако са R означимо полупречник земљин, то је још:

$$\varPi_0 = \frac{4\,R\pi^2 M}{t^2} \cos \varphi \,..(254$$



Сл. 240.



Сл. 241.

а то значи: *да је ц.фугални притисак* (или ц.фугална сила) *сразмеран косинусу геогр. ширине.* На екватору где је $\varphi = 0$ тај је притисак највећи, а на полу раван је нули.

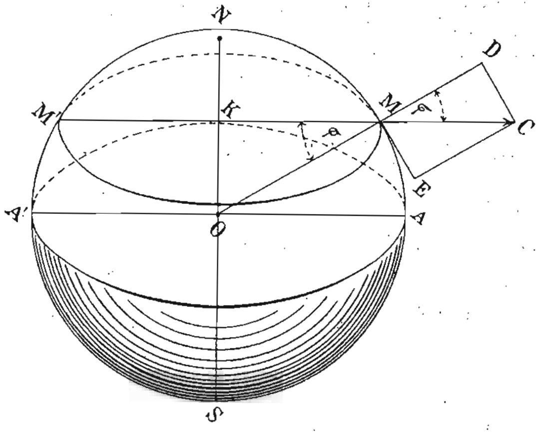
Кад се за екватор стави $R = 6377397$ мет. и $t = 23^c$ 56 мин. 4 сек. $= 86164$ сек звезд. времена, онда је на екватору:

$$\frac{\varPi_0}{M} = \frac{4\,\pi^2 R}{t^2} = \frac{4 \cdot 3{\cdot}14159^2 \cdot 6377397}{86164^2} = 0{\cdot}03391 \text{ мет.}$$

Убрзање земљине теже на екватору износи 9.7807 метара или кад му се дода горње смањивање услед ц.фугалне силе

9·8146. Према томе, убзање земљине теже на екватору смањено је услед ц.фугалне силе за:

$$\frac{0{\cdot}03391}{9{\cdot}8146} \text{ или од прилике за } \frac{1}{289} \text{ део.}$$



Сл. 242.

Другим речима, тело од 289 кгр. тежине тешко је на екватору само 288 кгр. Па како је $\frac{1}{289} = \left(\frac{1}{17}\right)^2$, то значи, да кад би се земља 17 пута брже окретала око осе, т. ј. кад би дан трајао место 24 сах. само 1 сах. 24 мин. 42 сек., онда би центрифугална сила била колико и убрзање земљине теже, т. ј. тела на екватору била би без тежине и неби падала на земљу. Периферна брзина појединих тачака на екватору износи 464 мет. Према томе кад бисмо ми неко тело бацили у хоризонталном правцу брзином $c = 17 \cdot 464 \doteq 7888$ или округло 8000 мет., то се тело више не би на земљу вратило.

Горњи образац $\varPi_0 = \frac{4\,R\pi^2\,M}{t^2} \cos \varphi$ даје нам ц.фугалну силу у правцу полупречника паралелног круга, т. ј. величину MC. Да бисмо добили ону њену компоненту, која иде правцем полупречника земљина R, т. ј. велнчину MD која стварно дејствује супротно тежи, имамо из исте слике:

$$\begin{aligned} MD = \varPi_0^{\,1} &= \varPi_0 \cos \varphi \\ &= \frac{4\,R\pi^2 M}{t^2} \cos \varphi \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\; (255 \end{aligned}$$

578. *Примери.* — 1. Локомотива од 20.000 кгр. тежине, креће се по прузи од $1\frac{9}{16}$ мет. ширине, а тежиште јој лежи $1\frac{1}{3}$ метра изнад шина. Тражи се: *a*. Којом се брзином *c* локомотива најбрже сме кретати, па да на кривини од 32 мет. полупречника услед ц.фугалне силе не искочи? — *b*. Колико се повећава та максимална брзина, кад се спољашња шина толико подигне. да раван обеју шина с хоризонтом заклапа угао $\alpha = 5^0$. ?

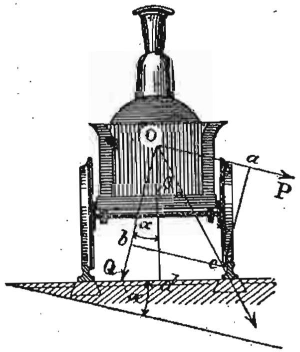
a. Стабилност локомотиве за неку силу *P* која напада у тежишту (дакле на висини *h*) биће, ако са *s* означимо ширину шина и са *Q* тежину локомотиве:

$$P = \frac{Q\,\frac{s}{2}}{h} = \frac{20.000 \cdot 25 \cdot 3}{32 \cdot 4} = 11718{\cdot}75 \text{ кгр.}$$

Из обрасца за ц.фугални притисак имамо:

$$c = \sqrt{\frac{\varPi_0\, r}{M}} = \sqrt{\frac{11718{\cdot}75 \cdot 9{\cdot}81}{20.000}} = 21\frac{4}{9} \text{ м.}$$

т. j. с брзином од $21\frac{4}{9}$ метра машина би дошла у опасност да из хоризонталних шина искочи.



Сл. 243.

b. У другом случају имамо да нађемо најпре величину угла β који заклапа резултанта *Oc* (сл. 243) са управном из тежишта на раван шина. Из слике имамо:

$$\text{tg.}\,\beta = \frac{\frac{s}{2}}{h} = \frac{s}{2k} = \frac{25 \cdot 3}{16 \cdot 2 \cdot 4} = 30^0\,22'\,3''.$$

Узећемо да нам *acb* представља једну полугу на лакат са ослонцем у *c*; за равнотежу мора да буде:

$$bc \cdot Q = ac \cdot P$$

где је *P* ц.фугална сила, коју смо ми до сад бележили са $\varPi_0$ а $ac = h$. Даље имамо да је:

$$bc = h \operatorname{tang}(\alpha + \beta)$$

и још

$$\varPi_0 = P = \frac{Q}{g}\,\frac{c^2}{r}$$

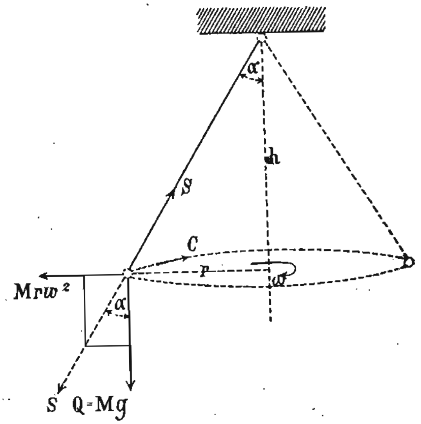
те према томе за равнотежу:

$$h \operatorname{tang}(\alpha + \beta)\, Q = h\,\frac{Qc^2}{gr}$$

одакле је:

$$C = \sqrt{gr.\operatorname{tang}(\alpha + \beta)} = \sqrt{9{\cdot}81 \cdot 80 \operatorname{tang} 35^0\,22'\,3''} = 23{\cdot}6.$$

2. Једна се вертикална осовина окрене у минуту $n = 100$ пута. За исту је осовину обешено о конопац дугачак $l = 1{\cdot}5$ мет. једно тело од 75 кгр.; колики ће бити угао конопца са осом при том обртању и колика је напрезање у конопцу? (сл. 244)



Сл. 244.

a. Кад се тело окрене у минуту *n* пута, биће:

$$c = \frac{2\,nr\pi}{t} =$$

или пошто је $\frac{r}{l} = \sin\,\alpha$ и

$$\frac{2\,n\pi}{l} = \omega$$

$$c = \omega l \sin\alpha.$$

Код ц.фугалног клатна *(572)* имали смо:

$$\text{tg.}\,\alpha = \frac{c^2}{rg} = \frac{4\,\pi n^2\, l \sin\alpha}{gt^2}$$

одакле је:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{gt^2}{4\,l\pi^2\,n^2} = \frac{g}{l}\left(\frac{t}{2\,\pi n}\right)^2$$

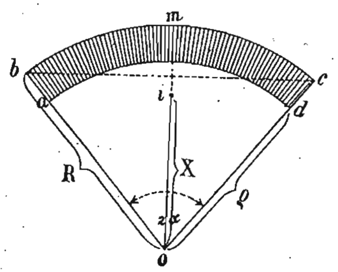
$$= \frac{9{\cdot}81}{1{\cdot}5}\left(\frac{60}{2.3{\cdot}14 \cdot 100}\right)^2$$

$$\alpha = 86^0\,34'\,50''.$$

b. Из слике имамо:

$$S = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{75}{\cos 86^0\,34'\,50''} = 1256{\cdot}3 \text{ кгр.}$$

3. Одсечак *abcd* (сл. 245) је један (на пр. десети) део замајца од 10.000 кгр. тежине, чиј је спољашњи полупречник $R = ob = 1{\cdot}9$ метара, а унутрашњи $\varrho = od = 1{\cdot}6$ мет. и који се трипут у секунди окрене. Којом снагом тежи тај сегменат од 1000 кгр. да се од осе одвоји?



Сл. 245.

Ако је тежиште сегмента у *i*, онда је оно на одстојању:

$$x = \frac{2}{3}\frac{s}{b} \cdot \frac{R^2 + R\varrho + \varrho^2}{R + \varrho}$$

кад је *s* тетива *bc* а *b* комад лука *bmc*. Међутим је:

$$s = 2\,R \sin\alpha = 2{\cdot}1{\cdot}9 \cdot \sin 18^0 = 1{\cdot}1742 \text{ м.}$$

$$b = \frac{2\,R\,2\,\alpha\pi}{360} = \frac{2 \cdot 1{\cdot}9 \cdot 36 \cdot 3{\cdot}14}{360} = 1{\cdot}1932 \text{ м.}$$

Стога је сад заменом:

$$x = \frac{2 \cdot 1{\cdot}174}{3 \cdot 1{\cdot}193}\left(\frac{3.61 + 3{\cdot}04 + 2{\cdot}56}{3{\cdot}5}\right) = \frac{2{\cdot}348 \cdot 9{\cdot}21}{3{\cdot}579 \cdot 3{\cdot}5} = 1{\cdot}726 \text{ м.}$$

Тежина замајца од 1000 кгр. има нападну тачку у тежишту *i*, које се у секунди три пут окрене, те дакле пређе пут за сек.:

$$c = 3 \times 2\,\pi x = 32{\cdot}52 \text{ мет.}$$

Центрифугални притисак или сила која тежи да сегменат од осовине одвоји износи према томе:

$$\boldsymbol{\Pi}_0 = \frac{Mc^2}{x} = \frac{Q}{g}\frac{c^2}{x} = \frac{1000 \cdot 32{\cdot}52^2}{981 \cdot 1{\cdot}726} = 62459 \text{ кгр.}$$

4. У Београду је географска ширина $44^0\,47'\,57''$. *a.* Колика је центрифугална сила у правцу полупречника паралелног круга на тој ширини — *b.*, за колико је смањено убрзање теже услед тога?

a. Нашли смо раније, да је центрифугални притисак сразмеран косинусу ширине φ, т. ј.:

$$\boldsymbol{\Pi}^0 = \frac{4\,R\pi^2 M}{t^2} \cos\varphi$$

$$= \frac{4\,\pi^2 M\,6377397 \cos 44^0\,47'\,57''}{86164^2}$$

$$= 0{\cdot}024063 \text{ мет.} = 24{\cdot}06 \text{ мм.}$$

---

b. Од те целокупне ц.-фугалне снаге, долази у правац полупречника, компонента:

$$\boldsymbol{\Pi}_0{}^1 = \boldsymbol{\Pi}_0 \cos\varphi$$

$$= 0{\cdot}024063 \cos 44^0\,47'\,57''$$

$$= 0{\cdot}017075 = 17{\cdot}1 \text{мм.}$$

5. На коме би одстојању од земље ц.-фугална снага била равна убрзању? (Полупречник земљин $R = 6377500$, $g = 9{\cdot}81$, а *c* на екватору $= 464$ м.

Знамо да је центрипетално (или ц.-фугално) убрзање уопште:

$$N = \alpha = \frac{c^2}{R}.$$

Означимо са *x* ону висину која одговара задатку и са *C* периферну брзину на том месту, па ће на том месту нормално убрзање бити:

$$\alpha = \frac{C^2}{R + x}.$$

По Њутнову су закону убрзања изврнуто сразмерна квадратима одстојања:

$$\alpha : g = R^2 : (R + x)^2$$

стога је:

$$C^2 = \frac{gR^2}{R + x}.$$

Периферне брзине *c* на екватору и *C* на $R + x$ управо су сразмерне одстојањима:

$$C = \frac{c\,(R + x)}{R}$$

кад се то замени:

$$\frac{c^2 (R + x)^2}{R^2} = \frac{gR^2}{R + x}$$

одакле је:

$$x = R\left(\sqrt[3]{\frac{gR}{c^2}} - 1\right)$$

$$= 6377500 \left(\sqrt[3]{\frac{9{\cdot}81 \cdot 6377500}{464^2}} - 1\right) = 5{\cdot}6236R = 35864500 \text{ м.}$$

6. Колико би пута требало да се земља брже окреће него сад, па да у Београду ($\varphi = 44^0\,47'\,57''$) центрифугална сила буде равна привлачној снази земљиној ($g = 9{\cdot}81$)? Узећемо да је полупречник земљин у округлој цифри $R = 6{,}370.000$ м.; $t = 86164$ сек.

Узећемо малопређашњи образац:

$$\Pi_0^1 = \Pi_0 \cos\varphi = \frac{4\,R\pi^2 M}{t^2}\cos^2\varphi.$$

Кад би се земља n пута брже окретала, била би ц.-фугална сила n^2 пута већа, и онда треба да буде она $= g$. Према томе за масу $M = 1$ имаћемо:

$$g = \frac{4\,\pi^2 R\cos^2\varphi\, n^2}{t^2}$$

одакле је:

$$n = \frac{t}{2\,\pi\cos\varphi}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$= \frac{86164}{2.3{\cdot}14159\cos 44^0\,47'\,57''}\sqrt{\frac{9{\cdot}81}{6370000}} = 23{\cdot}98$$

дакле од прилике 24 пута брже.

III.

О моменту инерције.

579. Моменат инерције. — Проучавајући једнако кружно кретање (144 и 145), нашли смо да је периферна брзина неке тачке на одстојању r од обртне осе сразмерна том одстојању и угловној брзини дакле да је уопште:

$$c = \omega r.$$

Ако се тело обрће око осе промењљивом брзином (v), онда морамо водити рачуна о убрзању сваке поједине тачке и то се убрзање а може као и брзина представити *угловним убрзањем* α и одстојањем од осе обртања. По себи се разуме да је и угловно убрзање (слично угловној брзини) убрзање оне тачке која се налази на одстојању $= 1$. Тако ће периферно убрзање појединих тачака бити:

$$a_1 = \alpha r_1,\ a_2 = \alpha r_2,\ a_3 = \alpha r_3 \ldots\ldots a_n = \alpha r_n.$$

Одговарајуће силе, које на тим тачкама дејствују, биће:

$$p_1 = a_1 m_1 = \alpha r_1 m_1,\ p_2 = a_2 m_2 = \\ = \alpha r_2 m_2, \ldots p_n = a_n m_n = \alpha r_n m_n$$

а статички моменти њихови на одговарајућим одстојањима $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$ биће:

$$p_1 r_1 = a_1 m_1 r_1 = \alpha r_1^2 m_1,\ p_2 r_2 = a_2 m_2 r_2 = \\ = \alpha r_2^2 m_2 \ldots p_n r_n = a_n m_n r_n = \alpha r_n^2 m_n.$$

Збир свију тих статичких момената:

$$\mathfrak{M} = \alpha\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots m_n r_n^2) \\ = \alpha\,\Sigma\,(mr^2).$$

Овај израз mr^2 под збирним знаком има специјалан значај код обртних тела и назива се *моменат инерције* или моменат лењивости и бележићемо га уопште знаком J, тако да је:

$$J = mr^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (256$$

Тај моменат инерције представља ону идеалну или замишљену масу, (од $\Sigma\, mr^2$ масених јединица) која би на одстојању 1 од обртне осе, при истој брзини обртања, имала исту кинетичку енергију, као и прâва, на разна одстојања растурена маса некога тела. ($\Sigma\, m$). Из тога је обрасца:

$$r = \sqrt{\frac{J}{M}}.$$

Одстојање r назива се *полупречник инерције*, а тачка на том одстојању *средиште инерције*.

580. Енергију таквог једног обртног система наћи ћемо на овај начин. Нека је уопште перферна брзина $v_1 = \omega r_1$. Енергија ће очевидно бити за сваку поједину тачку:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

за цело пак тело или за збир свију тих маса биће енергија:

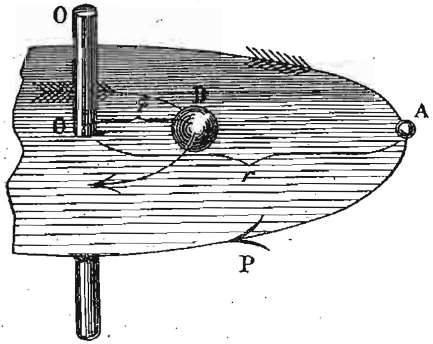
$$E = \Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \, \Sigma (mr^2) = J \frac{1}{2} \omega^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (257$$

Енергија једног обртног тела мери се производом из половине квадрата угловне брзине и момента инерције.

Ако угловна брзина од вредности ω_0 порасте на вредност ω, онда ће прираштај енергије бити одређен:

$$E' = E - E_0 = \frac{1}{2} J (\omega^2 - \omega^2{}_0) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (258$$

581. Редуковање маса. — Свака маса, која се око неке осе а на извесном одстојању од ње обрће, може се другом неком масом и на другом одстојању заменити, само ако су им моменти инерције једнаки. Око осовине OO (сл. 246) окреће се тело A масе m и на одстојању $= r$. Ту масу можемо заменити неком другом M, у тачки B и на одстојању R, ако постоји једначина:



Сл. 246.

$$MR^2 = mr^2 \text{ одакле је } M = \frac{mr^2}{R^2}$$

и обратно, одстојање R на коме би маса M изазвала исто дејство као и mr^2 било би:

$$R = \sqrt{\frac{m\,r^2}{M.}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (259$$

И онда се каже да је нека извесна маса m са полупречника r редукована на полупречник R и обратно.

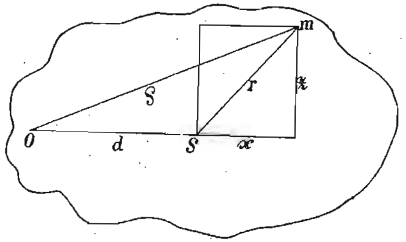
582. Из прве једначине за моменат инерције:

$$\mathfrak{M} = \alpha J$$

може се одредити угловно убрзање.

$$\alpha = \frac{\mathfrak{M}}{J.} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (260$$

583. Једно се тело може обртати око осе која пролази кроз његово тежиште, као и око осе која је с првом паралелна, али је на одстојању d од ње. Пита се какав је однос између момената инерције у ова два случаја. Нека се неко тело обрће око осе, која стоји управно на раван слике (сл. 247) и пролази кроз тежиште S. Моменат инерције појединих његових тачака као што је m биће:



Сл. 247.

$$m_1 r_1^2, \; m_2 r_2^2, \; m_3 r_3^2, \ldots m_n r_n^2$$

или целога тела:

$$J_s = \Sigma (mr^2)$$

За неку осу која пролази кроз O и која је на одстојању d од прве биће исто тако:

$$m_1 \varrho_1^2, \; m_2 \varrho_2^2, \; m_3 \varrho_3^2, \ldots m_n \varrho_n^2$$

или

$$J_d = \Sigma(m\varrho^2).$$

Међутим, из слике се види да је:

$$r^2 = x^2 + z^2 \text{ и}$$

$$\varrho^2 = (x+d)^2 + z^2 = x^2 + d^2 + zdx + z^2$$

$$= r^2 + d^2 + zdx$$

те према томе:

$$J_d = \Sigma mr^2 + d^2\,\Sigma m + 2d\,\Sigma mx$$

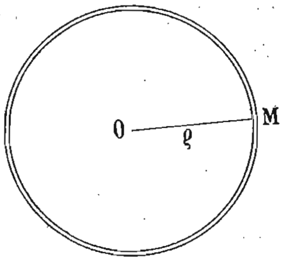
$$= J_s + Md^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (261$$

јер је у трећем десном члану $\Sigma(mx)$, збир статичких момената за осу кроз тежиште, раван нули.

Дакле: *моменат инерције некога тела за осу која пролази ван тежишта раван је моменту инерције тога тела за осу кроз тежиште plus маси тела помноженој квадратом одстојања обеју оса.*

А. Одредба момента инерције рачуном.

584. Кружни прстен. — Да бисмо одредили моменат инерције кружног прстена (или шупљег цилиндра) врло мале дебљине а за осу која пролази кроз његову геометријску осу O (сл. 248), разложићемо цео прстен на све саме материјалне тачке (код цилиндра линије) $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$. Моменат лењивости свију тих маса биће:



Сл. 248.

$$J = m_1\varrho^2 + m_2\varrho^2 + m_3\varrho^2 + \ldots m_n\varrho^2$$

$$= \varrho^2(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n)$$

$$= \varrho^2\,\Sigma(m) = \varrho^2 M \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (262$$

585. Права шипка. — Узећемо да се права хомогена шипка AB (сл. 249) дужине l и масе m окреће

око једног свог краја A. Разложићемо је на n једнаких делова, тако да је маса сваког тог дела $= \dfrac{m}{n}$ а дужина $\dfrac{l}{n}$. Пошто је први делић од краја шипке далеко $\dfrac{l}{n}$, други $\dfrac{2l}{n}$, трећи $\dfrac{3l}{n} \ldots . n,^{\text{та}}\ \dfrac{nl}{n} = l$, имаћемо моменте сваког делића посебице:

Сл. 249.

$$\frac{m}{n}\left(\frac{l}{n}\right)^2;\ \frac{m}{n}\left(\frac{2l}{n}\right)^2;\ \frac{m}{n}\left(\frac{3l}{n}\right)^2 \ldots\ldots \frac{m}{n}\left(\frac{nl}{n}\right)^2$$

и према томе моменат целе шипке:

$$J = \frac{ml^2}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . n^2)$$

Пошто је збир квадрата природних бројева $= \dfrac{n^3}{3}$, то је и моменат шипке:

$$J = \frac{1}{3}ml^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263$$

а то значи да је моменат једне шипке која би се око једног свог краја окретала раван трећини масе те шипке која би се слободно (или везана шипком без тежине) обртала на крају те шипке.

Ако би се та шипка обртала око осе која пролази кроз њену средину, онда би моменат сваке њене половине био:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}l\right)^2$$

дакле за обе половине:

$$J_1 = \frac{2}{3}\frac{1}{2}m\,\frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{12}ml^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (264$$

Ако би још та шипка, која се окреће око осе што пролази кроз њену средину, била нагнута под углом α према оси, онда је моменат:

$$J_2 = \frac{1}{12} ml^2 \sin^2 \alpha \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (265$$

то значи да је моменат највећи за $\alpha = 90^\circ$, т. ј. за горе посматрани случај J_1.

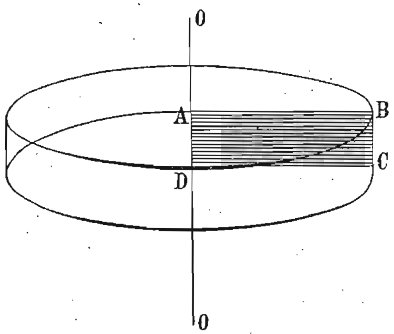
Полупречник инерције за шипку која се окреће око једног свог краја биће:

$$J = \frac{1}{3} ml^2 = mR^2$$

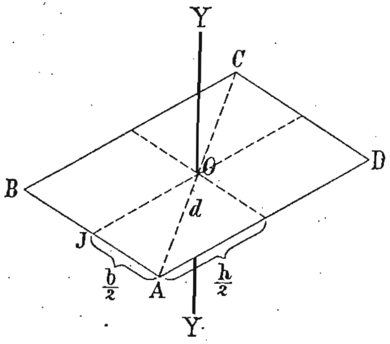
одавде је:

$$R = l \sqrt{0{\cdot}333} = 0{\cdot}577\, l. \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (266$$

586. **Правоугаоник** — као год што је моменат инерције за кружни прстен и цилиндар имао исту вредност, тако исто је и моменат једног усправљеног правоугаоника $ABCD$ (сл. 250) који се окреће око једне своје стране AD једнак с моментом шипке кад се окреће око једног свог краја. Јер се горњи правоугаоник може разложити на n линија масе m, од којих свака има моменат $\frac{1}{3} ml^2$, тако да ће скуп њихов дати моменат целог тела, т. ј.:



Сл. 250.



Сл. 251.

$$J = \frac{1}{3} mnl^2 = \frac{1}{3} Ml^2. \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (267$$

Ако је правоугаоник положен и окреће се око осе YY (сл. 251) која иде кроз његово тежиште и стоји управно на раван његову, онда морамо узети у рачун и одстојање молекила од те осе између страна AD и CD, као и оних између BC и AB. Први ће дати:

$$J_x = \frac{1}{12} Mh^2 \quad \text{а други:} \quad J_z = \frac{1}{12} Mb^2$$

оба заједно даће моменат посматране правоугле врло танке плоче за осу кроз тежиште:

$$J_s = \frac{1}{12} M(h^2 + b^2) = \frac{1}{12} Md^2 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (268$$

А за осу кроз тачку J, имамо:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{12} M(h^2 + b^2) + M\overline{JO}^2 \\ &= \frac{1}{12} M(h^2 + b^2) + M.\frac{1}{4} b^2 \\ &= M\left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{1}{12} b^2\right) \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (269 \end{aligned}$$

Најзад ако обртна оса пролази на пр. кроз тачку A и остаје паралелна са YY, онда је за њу, а на основу обрасца 261.:

$$J_2 = J_s + M\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

или, пошто је:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{4} = \frac{h^2}{4} \end{aligned}$$

и заменивши J_s из обрасца 268, биће:

$$J_2 = \frac{1}{12} M(b^2 + h^2) + \frac{1}{4} M(b^2 + h^2)$$

$$= \frac{1}{3} M(b^2 + h^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (270$$

587. **Паралелопипед.** — Као код цилиндра и усправљеног правоугаоника, тако исто и код паралелопипеда моменат инерције биће раван моменту инерције положеног паралелопипеда дужине h и ширине b, слично обрасцима 268, 269 и 270. За осу кроз тежиште биће према томе:

$$J_s = \frac{1}{12} M(b^2 + h^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (271$$

јер висина не утиче на моменат инерције.

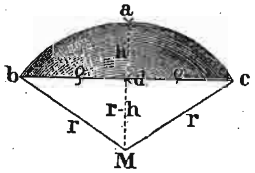
588. **Лопта.** — Моменат инерције лопте, полупречника r и масе M за осу кроз тежиште износи:

$$J_s = {}^2/_5 Mr^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (272$$

а за осу на одстојању d од тежишта:

$$J_d = M\left(d^2 = \frac{2}{5} r^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (273$$

589. **Сочиво код клатна.** — Сочиво код клатна састављено је из два лоптаста одсечка, спојена основицама. Такав један одсечак представљен је на сл. 252. Ако са m означимо масу јединице запремине сочива и ако узмемо да се сочиво окреће око неке осе паралелне с његовом геометријском осом и од ње удаљене за l (онако као што то бива код клатна дужине l), онда је моменат инерције:



Сл. 252.

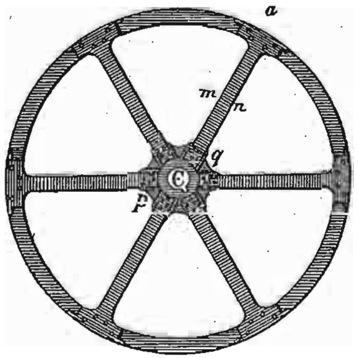
$$J = \frac{\pi}{15} h^3 m (20r^2 — 15hr + 3h^2) + \frac{2}{3} \pi h^2 l^2 m (3r — h). \; (274$$

590. **Замајац.** — Нека је спољашњи (већи) полупречник замајца (сл. 253) R, а унутрашњи (мањи) r, онда је ширина наплата $b = R - r$. Нека је ширина сваке од шест спица $mn = b$ и дужина њихова до средишта $= r$, маса наплата $= M$ а сваке спице $= m$, онда је моменат наплата:

$$J_1 = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$$

а за шест спица:

$$J_2 = 6\, m \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} r^2\right)$$



Сл. 253.

Овде смо изоставили појачања p, q, јер немају великог утицаја на резултат. Исто тако нећемо много погрешити, ако изоставимо $\frac{1}{12} b^2$, и онда остаје $J_2 = 2\, mr^2$. Па пошто је моменат целог замајца:

$$J = J_1 + J_2$$

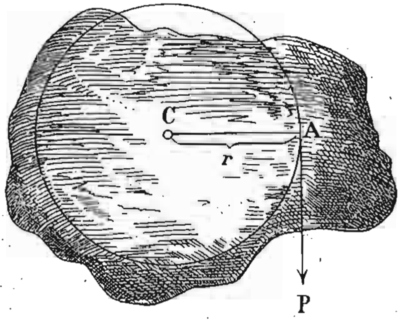
имаћемо кад заменимо:

$$J = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2) + 2\, mr^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (275$$

В. Одредба момента инерције експериментом.

591. Моменат инерције потребан је или за тела која се око неке осе обрћу или за тела која клате. И у једном и у другом случају може се одредити моменат инерције експериментом.

На сл. 254 имамо једно тело, ма каквог геометријског облика, које се окреће око тачке C, услед дејства неке силе P, с нападном тачком у A. Замислимо да је у A, дакле на одстојању r од осе, намештена нека маса M која ће својим дејством исти отпор стављати сили P као и целокупна растурена маса посматрана тела, то ће рећи, која ће имати исти моменат инерције као и дато тело. Кад би та маса била позната, онда би тражени моменат инерције тела био $= Mr^2$. За одредбу те замишљене масе служи нам, при обртању посмотрено убрзање a тачке A, јер онда имамо да је:



Сл. 254.

$$M = \frac{P}{a}.$$

Применимо то правило за одредбу момента инерције покретног точка код Атвудове машине.

Као што знамо, о оба конца на Атвудовој машини виси по један тег P и C једне стране још претег p; све се то, дакле $2P+p$ креће убрзањем γ. Истим се убрзањем креће и свака тачка на периферији точка. Пошто се из закона о убрзаном кретању зна, да ће пређени пут за једну секунду бити $\frac{1}{2}\gamma$, то се цео задатак своди на одређивање тога пута, па да из њега нађемо (удвајањем) γ. Замислимо да је маса M целога точка концентрисана у оној тачки где се конац одваја од периферије његове, онда претег p има да креће масу своју и тегова, т. ј. $2P+p$ као и масу M точка. Пошто се свака сила мери масом коју креће и убрзањем које произведе, то је и сила претега:

$$p = \left(\frac{2P+p}{g} + M\right)\gamma$$

а одавде је непозната маса:

$$M = \frac{p}{\gamma} - \frac{2P+p}{g}.$$

Према томе ако је полупречник точка r, моменат инерције његове биће:

$$J = Mr^2 = \left(\frac{p}{\gamma} - \frac{2P+p}{g}\right)r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (276$$

592. За она тела која клате или осцилују, одређује се моменат инерције посматрањем клаћења. За то се служимо обрасцем за клаћење једнога физичког клатна, који ћемо доцније извести, али који ћемо сада употребити.[1] Тај образац гласи:

$$t = \pi\sqrt{\frac{J}{g\,\mathfrak{M}}} = \pi\sqrt{\frac{\Sigma(mr^2)}{g\,\Sigma(mr)}}$$

где је t време клаћења које можемо експериментом одредити, J моменат инерције који у овој прилици тражимо и $\mathfrak{M}$ статички моменат тела коме моменат инерције тражимо.

Пошто пустимо тело да слободно клати и одредимо време клаћења t посматрањем, додајемо томе телу неку нову масу познатог момента инерције J_0, не мењајући иначе ништа на телу. Сад ће време клаћења бити друго неко и износи:

$$t_0 = \pi\sqrt{\frac{J+J_0}{g\,\mathfrak{M}}}$$

из обадве једначине имамо:

$$J = J_0\,\frac{t^2}{t_0^2 - t^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (277$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi^2}{g}\,\frac{J_0}{t_0^2 - t^2}.$$

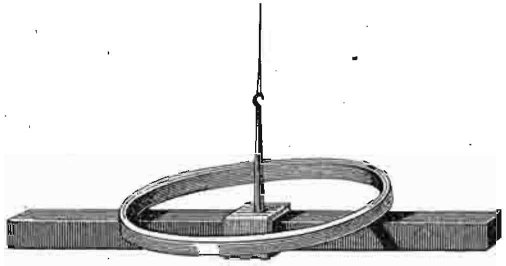
593. Ова се метода одређивања момента инерције клаћењем може употребити не само за тела која клате услед привлачне снаге земљине него и под утицајем ма какве друге сличне силе, чије се дејство, у осталом, може свести на обично мерење. Ова је метода нарочито упетребљена за одредбу момената инерције магнетних шипака.

На пример једна магнетна шипка (сл. 255) од 27 см. дужине изврши једно клаћење за $t = 10$ сек. Да би јој

---

[1] Да не бисмо цело питање о моменту инерције, овде прекидали па га наставили после код физичког клатна, послужићемо се раније обрасцем за клаћење.

се одредио моменат инерције, додат јој је месингени прстен од 130 гр. тежине и 6·6 см. средњег полупречника. Сад је време клаћења изнело $t_0 = 13$ сек. Ако је прстен узан, онда се може узети средњи полупречник, иначе бисмо морали узети потпун образац $J = \frac{m}{2}(r^2 + R^2)$.



Сл. 255.

Моменат инерције прстена је према томе:

$$J_0 = (6{\cdot}6)^2 \cdot 130 = 5662{\cdot}8$$

даље је:

$$J = 5662{\cdot}8 \, \frac{10^2}{13^2 - 10^2} = 8207$$

$$\mathfrak{M} = \frac{5662{\cdot}8}{980{\cdot}9} \cdot \frac{(3{\cdot}14159)^2}{13^2 - 10^2} = 0{\cdot}082.$$

594. *Примери.* — *1.* Гвоздена шипка од 1 мет. дужине и 10 кгр. тежине окреће се око неке осовине која је управна на дужину шипке. Колики је моменат инерције *a*, кад оса пролази кроз један крај шипке, — *b* кад она пролази кроз тежиште шипке, — *c* кад је шипка тако везана са осом, да јој је тежиште 1 мет. далеко од осе — *d* шипка заклапа угао од 45° са осом; одредити моменте инерције за горња три случаја — *e* шипка се окреће паралелно оси на даљини 1 метра. Колики је сад моменат инерције?

a. Моменат инерције за осу на крају шипке биће:

$$J = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 1^2 = 3\,\frac{1}{3} \text{ кгр.}$$

b. За осу кроз тежиште:

$$J_s = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 1^2 = \frac{5}{6} \text{ кгр.}$$

c. За осу 1 мет. удаљену од тежишта:

$$J_1 = \frac{5}{6} \text{ кгр.} + 10 \cdot 1^2 = 10\,\frac{5}{6} \text{ кгр.}$$

То све значи, да би маса од *a*) $3\frac{1}{3}$ кгр. *b*) $^5/_6$ кгр. *c*) $10\frac{5}{6}$ на остојању 1 метра својом инерцијом исти отпор давала као и цела шипка.

d. Кад је шипка нагнута под углом од 45°, онда место *l* у горњим примерима долази:

$$l \sin \alpha = 1 \sin 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}7071$$

те према томе за случајеве:

$$a^1)\quad J^1 = 3\,\frac{1}{3} \cdot 0{\cdot}7071 = 2{\cdot}357 \text{ кгр.}$$

$$b^1)\quad J^1 = \frac{5{\cdot}0{\cdot}7071}{6} = 0{\cdot}589 \text{ кгр.}$$

$$c^1)\quad J_1{}^1 = 0{\cdot}589 + 10 = 10{\cdot}589 \text{ кгр.}$$

e. За обртање шипке паралелно са осом и на даљини 1 мет.:

$$Mr^2 \doteq 10 \text{ кгр.}$$

2. Два лоптаста сегмента од месинга спојена су у једно сочиво за клатно. Висина сваког сегмента $h = 1{\cdot}5$ см., одговарајући полупречник лопте $r = 50$ см., и специфична тежина месинга $= 8{\cdot}4$. Колики је моменат инерције сочива, за осу удаљену $l = 99$ см. и паралелну са геометр. осом сочива?

Према нађену обрасцу за тај случај биће:

$$J = \frac{\pi}{15} \cdot 1{\cdot}5^3 \cdot 8{\cdot}4\,(20 \cdot 50^2 - 15 \cdot 1{\cdot}5 \cdot 50 + 3{\cdot}1{\cdot}5^2) +$$

$$+ \frac{2}{3}\pi \cdot 1{\cdot}5^2 \cdot 99^2 \cdot 8{\cdot}4\,(3{\cdot}50 - 1{\cdot}5)$$

$$= 2{\cdot}25 \cdot 8{\cdot}4\,\pi \left[\frac{1}{10}(50000 - 1125 + 6{\cdot}75) + 6534 \cdot 148{\cdot}5\right]$$

$$= 57902{\cdot}8 \text{ кгр. за осу удаљену 1 см.}$$

$$= \frac{57902{\cdot}8}{100^2} = 5{\cdot}79028 \text{ кгр. за осу удаљену 1 метар}$$

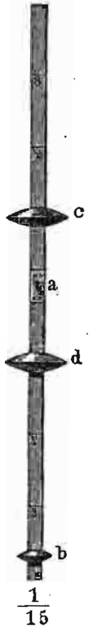
3. Колики је моменат инерције једног замајца са шест спица кад је спољашњи полупречник наплата $R = 3{\cdot}14$ мет., унутрашњи $2{\cdot}98$ мет., ширина паралелопипедне спице $mn = b = 10{\cdot}5$ см , тежина наплата 6000 кгр. и једне спице $m = 125$ кгр.?

Према нађену обрасцу за тај случај имамо:

$$J = \frac{1}{2}\,6000\,(3{\cdot}14^2 + 2{\cdot}98^2) + 2{\cdot}125 \cdot 2{\cdot}98^2$$

$$= 3000 \cdot 18{\cdot}74 + 2220{\cdot}1 = 58440{\cdot}1 \text{ кгр.}$$

т. ј. маса од толико килограма на периферији круга од 1 метра у полупречнику даје при обртању исти отпор као и маса целог замајца.



Сл. 256.

4. Једно клатно (сл. 255) дужине 110 см. пусти се да клати без сочива c и d и нађе се да за минут учини 68 клаћења. Затим се наместе сочива c и d од по 220 грама тежине 20 см. с једне и друге стране ослонца a, док се међутим сочиво b не дира. Сад клатно изврши 48 клаћења у минуту. Колики је моменат инерције клатна?

Време клаћења без сочива износи $t = 0{\cdot}882$ сек., а са сочивима $t_0 = 1{\cdot}25$ сек. Моменат инерције оба сочива је $J_0 = 220 \cdot 20^2 \cdot 2 = 176000$. Статички моменат раван је нули.

Заменом у напред нађену обрасцу:

$$J = J_0\,\frac{t^2}{t_0{}^2 - t^2} = 176000 \cdot \frac{(0{\cdot}882)^2}{(1{\cdot}25)^2 - (0{\cdot}882)^2}$$

$$= 174508.$$

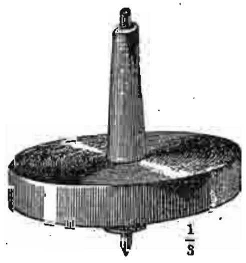
IV.

Слободне осовине.

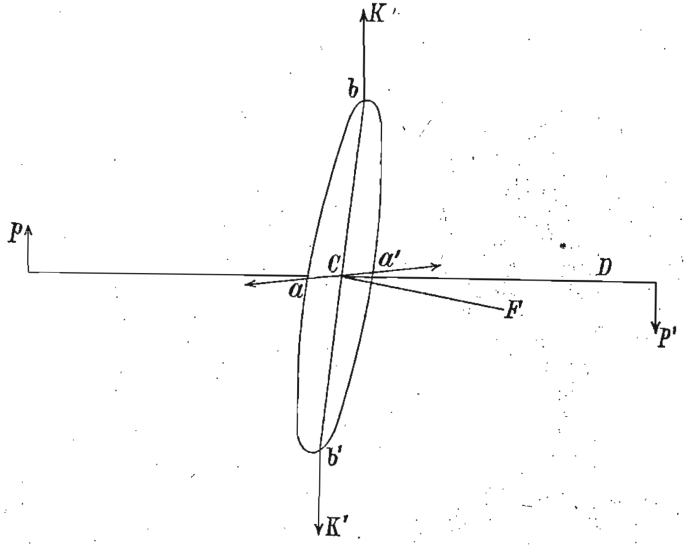
595. Кад се једно тело обрће око извесне осовине или осе и то тако да су његови поједини делови сасвим симетрички положени према њој, онда на ту осовину неће дејствовати ни с које стране никакав центрифугални притисак, који би тежио да је из њенога положаја помери. Јер у колико би центрифугална или замајна сила појединих делова с једне стране могла такав притисак на осу да произведе, у толико ће одговарајући делови с друге, својом замајном силом супротнога смисла горње дејство уништити. Таква осовина или оса на коју не дејствује никаква замајна сила, зове се *слободна осовина* или *слободна оса* и њу налазимо код

обичне вртешке, замајца, чигре и т. д. Исто тако се и сва небеска тела, па дакле и наша земља обрће око слободне осе.

По томе, што је само она осовина слободна, око које су поједини делови материје симетрички распоређени, та осовина мора пролазити кроз тежиште тела. Такав је случај на пример код вртешке (сл. 257). Али из тога не следује, да је свака осовина, која пролази кроз тежиште тела, у исти мах и слободна. Узмимо да се та иста вртешка или неки замајац окреће око осовине која не стоји управно на раван замајца (или вртешке) (сл. 258). Тачке a и a' замајца положене су симетрично спрам осе CD и за то се њихови ц.фугални притисци потиру те је за њих осовина слободна. Али то неће бити и за тачке b и b' истога замајца, јер те две тачке образују спрег KK' који тежи да осовину тела измести у супротном смислу спрега pp'. Ако хоћемо да осовина остане у свом лежишту мораћемо је



Сл. 257.



Сл. 258.

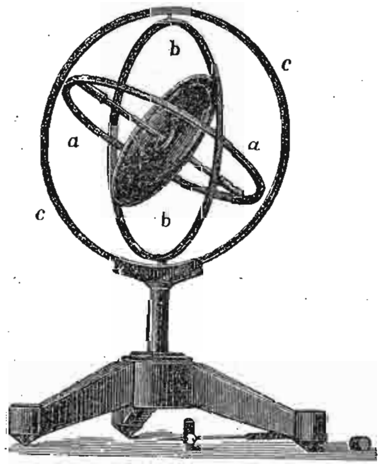
притиснути или подупрети спрегом pp^1. И овде осовина пролази кроз тежиште тела али услед косога положаја осовине, поједини делови тела нису симетрично распоређени према осовини и за то она није слободна.

596. Закони о слободним осовинама. — За слободне осовине вреде у опште ови закони:

I закон. Ако тело које има слободну осовину мирује, осовина се и најмањом снагом може померити из свог положаја; али ако се тело око те своје осовине обрће онда осовина остаје са извесном снагом стално у том свом положају и та снага расте са масом и брзином обртања тога тела.

Сви знамо да ће се вртешка или чигра подупрта својим врхом, кад се не обрће, одмах претурити јер је у лабилној равнотежи. Напротив исто тело заошијано остаје врло дуго у усправљеном положају. Вртешка као што је показује горња слика може се у згодним околностима врло дуго обртати и тек ће онда пасти кад брзина услед трења кроз ваздух сасвим ослаби.

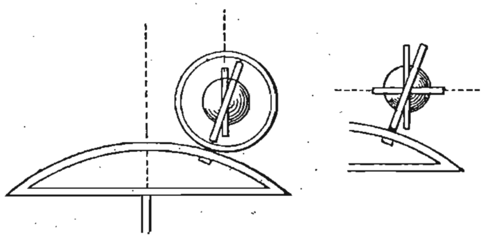
Овако, сасвим различито понашање једног и истог тела у миру и кретању можемо овако објаснити. Једна од општих особина кретања јесте постојаност или инерција, која наравно вреди и за ова кретања. Молекили који се око осовине обрћу описују сви равне кругове, и средиште свију њих је у слободној оси. Па како је сваки молекил у своме кретању инертан т. ј. тежи да одржи своју раван обртања, то значи да и цело тело тежи да своју обртну раван одржи, услед чега и оса око које се то обртање врши, и која је са обртним телом у чврстој вези, остаје у свом правцу постојана.



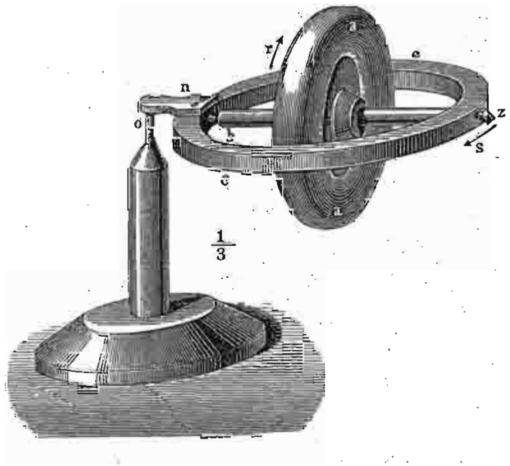
Сл. 259.

То одржавање ротационе равни нарочито се добро види на Боненбергеровом апарату (сл. 259). То је вртешка обешена по Кардановом начину т. ј. око две једно на друго управне осовине. Кад је вртешка мирна, њена се осовина може врло лако кренути како се хоће. Међутим, чим се заошија, може се цео апарат окретати како се хоће, осовина вртешке задржава увек један исти правац.

Боненбергеров се апарат са заошијаном вртешком може утврдити на једну повијену подлогу, намештену на центрифугалној машини (сл. 260). На тај се начин Боненбергеров апарат може наместити ексцентрично и косо према оси ц.фугалне машине. Кад се машина полако окреће, осовина вртешке ставиће се паралелно са осовином машине (сл. 260 *a*), или ће заузети положај паралелан меридијану (сл. 260 *b*), према томе да ли се спољашњи и средњи или средњи и унутрашњи прстен (*b* и *a*) једно на друго управно утврде. Кад су ти положаји заузети, па се ц.фугална машина нагло окрене у супротном смислу, осовина вртешке обрне се за 180° и пређе из лабилне у стабилну равнотежу.



Сл. 260. a и b.

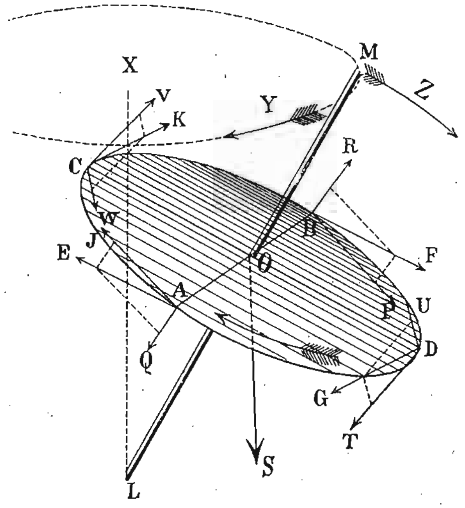


Сл. 261.

Исто то одржавање обртне равни, само још у јачој мери, види се на справи која се назива *гироскоп* и коју показује сл. 261. И ако овде вртешка *аа* са својим прстеном *сс* може бити тежа од једног килограма, ипак, кад се заошија, остаје слободна осовина у хоризонталном положају, ма да је цела справа подупрта далеко изван тежишта у тачки *о*.

597. *II Закон. — Прецесија — Нутација. — Ако на слободну осу око које се тело окреће дејствује каква страна сила, оса ће се кренути управно на правац силе која дејствује.*

Ево како се тај закон по Погендорфу може објаснити: Вртешка се обрће око осе LM (сл. 262.) у смислу казаљака на сахату. Нека сила, на пр. у овом случају привлачна снага земљина OS, тежи да осу измести правцем стрелице Z, тј. да је још више удали од вертикалног правца LX. Пречник AB као и с њим паралелне тангенте CK и DG преместиће се паралелно себи самима, и то тако да ће се тангента CK подићи а DG спустити. У исти мах тангенте у A и B које теку паралелно с пречником CD преместиће се такођер али не паралелно себи самима, већ ће прва из AE прећи у AJ а друга из BF у BP. Кад те тангенте разложимо на две, једна на другу управне компоненте и то AE на AJ и AQ, а BF на BP и BR, то ће прве две и то AJ и BP обртати вртешку у новој равни, а од AQ и BR постаје спрег који тежи да окрене вртешку око пречника CD, услед чега настапа премештање осе, али не у правцу стрелице Z како сила дејствује већ у правцу стрелице Y, т. ј. управно на први правац, описујући један конус

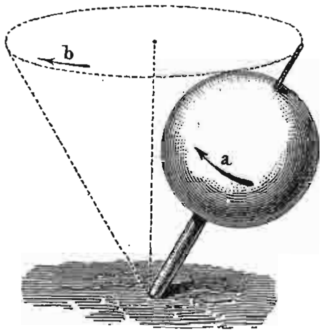


Сл. 262.

око вертикалног правца LX. Такво кретање слободне осе назива се *прецесија*.

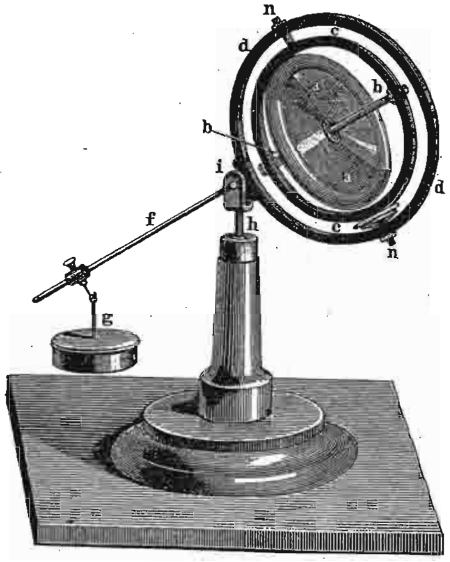
Ако нека страна сила дејствује да слободну осу покрене правцем стрелице Y, оса ће се исправљати, т. ј. приближаваће се вертикалном правцу LX.

Из тога следује да ће слободна оса бити мирна, само док буде тежиште целог покретног система подупрто. Чим то не буде случај, чим на пр. слободна оса вртешке (сл. 263) напусти из ма ког разлога вертикалан правац, одмах ће наступити прецесионо кретање њено. Из истог разлога се гироскоп на сл. 261, подупрт у тачки *о*, окреће у хоризонталној равни правцем стрелице *s*.



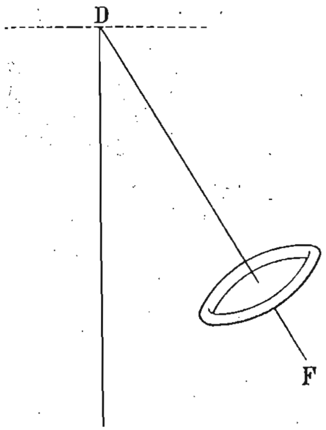
Сл. 263.

За посматрање прецесије слободне осовине под разним околностима служимо се Пликкеровим (Plücker) или Феселовим (Fessel) апаратом (сл. 264). Премештањем терета *g* може се удесити да тежиште целе справе пређе на страну вртешке; сад ће се апарат окретати око вертикале и то супротно обртању највише тачке на вртешки а. Ако се тежиште премести према терету, онда ће се справа окретати у супротном смислу. Кад су обе стране апарата у равнотежи и тежиште пада у осовину *h*, онда нема окретања око вертикале, јер нема ни стране силе, пошто је тежиште подупрто.



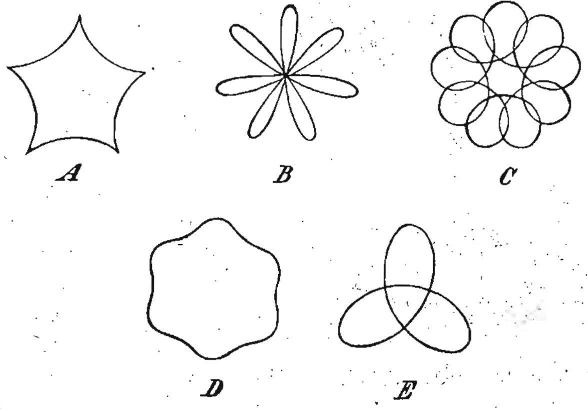
Сл. 264.

598. Сем горе поменутог прецесионог кретања слободне осовине заошијаног тела, та слободна осовина не задржава стално један исти угао нагнућа према вертикали, већ се у већим или мањим размерама истој вертикали приближује, а час се од ње удаљава. То ново кретање слободне осовине или осе назива се *нутација*, и није ништа друго до једна врста осцилирања слободне осовине. Па како се услед прецесије та оса окреће око вертикале, онда та путања неће бити равна већ изупчена или таласаста, према томе како кад буду дејствовале силе које нутацију изазивљу.



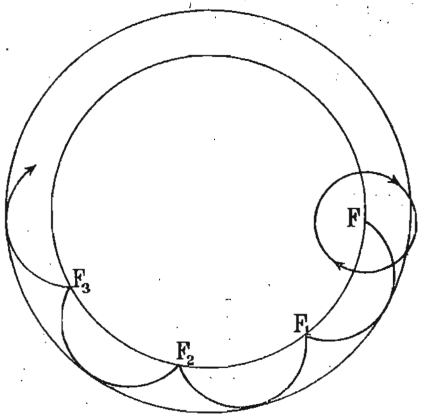
Сл. 265.

Овде се уопште могу разликовати два случаја: или је слободна осовина обешена или је подупрта. У првом случају цео се гироскоп обеси (сл. 265) и кад се изведе из равнотежног положаја, он би се клатио као клатно, кад вртешка не би била заошијана. Али кад се гироскоп, изведен из равнотежног положаја у *DF*, заошија и пусти да клати, онда се комбинује ротационо кретање гироскопа с дејством земљине теже и слободни крај осовине описује извесну изупчену линију с мање или више кракова према брзини ротирања гироскопа (сл. 266 *A*.). Зупци те линије биће окренути у поље. Кад се обешени и заошијани гироскоп не пусти да се слободно клати као мало час, него кад му се још саопшти и какво тангенцијално кретање, да око равнотежног положаја обилази, онда изупчена крива линија од мало час, изгуби оштре зупце и пређе у више или мање испреплетану криву линију, као што показује слика 266 *B, C, D, E*.

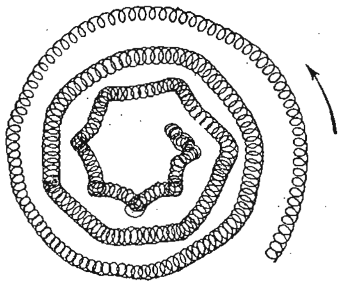


Сл. 266.

Слично осцилирање осе наступа и онда кад се слободна осовина подупре, као на пример код обичне вртешке, чигре и т. д. И сад ће крива линија коју описује подупрти крај слободне осе бити изупчена или испреплетена, само ће зупци бити окренути унутра а не с поља као горе (сл. 267). Кад се вртешки или чигри саопшти још и једно тангенцијално кретање, крива линија и у овом случају постане више или мање испреплетена (сл. 268), према већој или мањој брзини обртања, према разним отпорима и другим утицајима који на то кретање утичу.

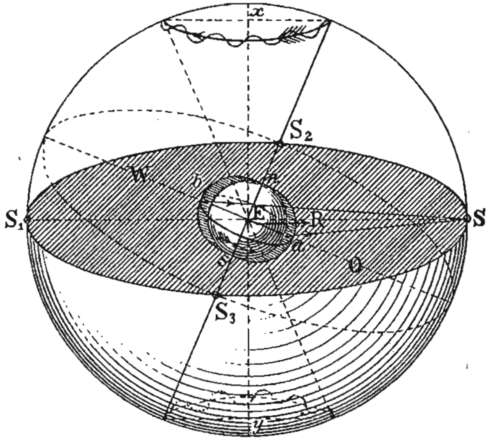


Сл. 267.



Сл. 268.

599. Прецесија и нутација земљине осе. — На сваком обртању некога тела око слободне осе имамо три врсте кретања: ротацију око слободне осе и прецесију и нутацију саме слободне осе. У великом размеру налазимо та кретања и код наше земље, која се у свом дневном обртању обрће око слободне осе. Годишње њено обртање око сунца не узимамо у рачун. Кад би земља била потпуна лопта, њена би слободна оса задржавала увек један исти правац у простору, т. ј. била би увек управљена према истој звезди. Али пошто је земља на половима спљоштена а на екватору испупченија, то сунце, привлачећи засебно ту испупченост, тежи да земљину осу исправи, услед чега се она, као слободна оса, креће управно на тај правац, т. ј. описује око пола еклиптике кружну прецесиону путању.



Сл. 269.

На сл. 269, која представља положај земљин за време летње солстиције, онај набор на екватору представљен је шрафираним површинама у којима су a и b две симетричне тачке. Линија SE везује средиште земљино са средиштем сунчевим које замишљамо да је у S. Привлачење сунца на тачку a је веће него на тачку b, и пошто то вреди и за све тачке у тим површинама, то је опште дејство сунчево на тај набор такво, да тежи да осу земљину исправи, т. ј. да је приближи линији xy. Па како се по другом закону о слободним осовинама кретање врши управно на тај правац, то ће и крај земљине осе описивати кружну путању око тачке x правцем који показује стрелица. Сама пак земљина оса описује један двогуби конус са заједничким теменом у средишту земљину. То се кретање зове: *прецесија земљине осе*.

600. Прецесионо кретање земљине осе иде врло споро и цео се конус односно круг, који описује крај земљине осе, доврши отприлике за 26000 година. То ће рећи да више од девет милијуна земљиних (дневних) ротација дође на један прецесиони обрт.

Обртање земљино (дневно) иде, као што знамо, са запада на исток, а прецесионо кретање иде супротним смислом, т. ј. са истока на запад. Услед овог последњег кретања се пролећна равнодневична тачка у којој екватор сече еклиптику премешта и то према западу дакле на сусрет земљину кретању по еклиптици. То премештање равнодневичне тачке, које износи 50 лучних секунада годишње, јесте главни узрок несталног трајања тропске године **(114).**

Пошто земљина оса услед прецесије описује конус, то и њен правац у простору није сталан, па дакле није управљен непрестано према једној истој звезди. То значи да у току времена једна иста звезда не остаје „северњача“, него се с нагибом земљине осе мења. Сада подужен правац земљине осе пролази близу звезде α у малом медведу, и она је сада „северњача“. Још за 300 година отприлике земљина ће се оса тој звезди приближавати (до на 21′), па ће се онда од ње удаљавати, тако да ће на пр. кроз 12000 година земљина оса пролазити близу *веге* (α у лири), и онда ће *вега* бити северњача.

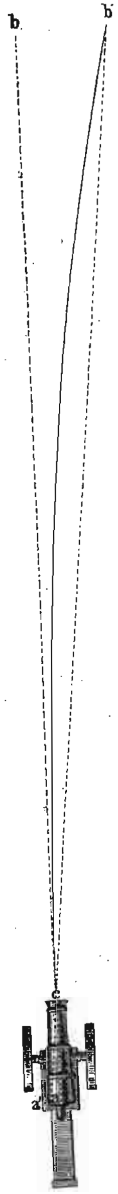
О осталим последицама прецесионог кретања земљине осе нећемо говорити, пошто тај предмет спада специјално у Астрономију.

601. Кружна путања, коју на небу описује крај земљине осе није равна већ таласаста, и долази услед осцилације земљине осе. То је *нутација земљине осе*. Свака таква осцилација траје отприлике 19 година и долази у главноме од месеца. Дуж целе прецесионе путање има отприлике 1450 таквих осцилација.

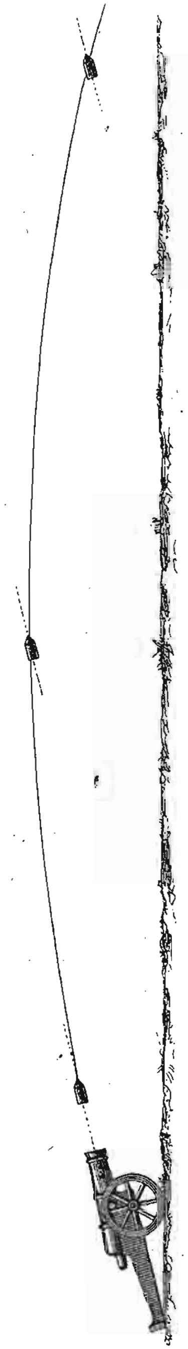
602. Стабилност слободних осовина заошијаних тела нашла је врло важну примену код пројектила олучана огњена оружја. Кугласти пројектили, који су раније били употребљени и код пушака и код топова, данас су замењени дугуљастим, цилиндричним на врху коничним зрнима којима отпор ваздуха мање смета. Кад се још уз то ти пројектили избацују из олучаних цеви, услед чега задобију сем прогресивног кретања још и врло брзо обртање око уздужне слободне осе, онда ти пројектили задобију све особине оних тела која се обрћу око слободних оса и много се јаче, стабилношћу својих оса, опиру разним спољашњим утицајима.

Међутим, опазило се код пројектила из олучаних цеви, сем обичног кретања по балистичкој линији (која је сада правилнија но код пројектила избачених из неолучаних цеви) још и извесно скретање пројектила у десно. Тако ако се на пример избаци пројектил из олучнога топа (сл. 270), он неће отићи правцем cb, већ ће по кривој путањи cb' пасти у b' дакле скренуће у десно. То скретање у десно постаје услед страних утицаја на основу другог закона о слободним осовинама.

То се најбоље види на сл. 271. Пројектил, изашав из олучана топа,



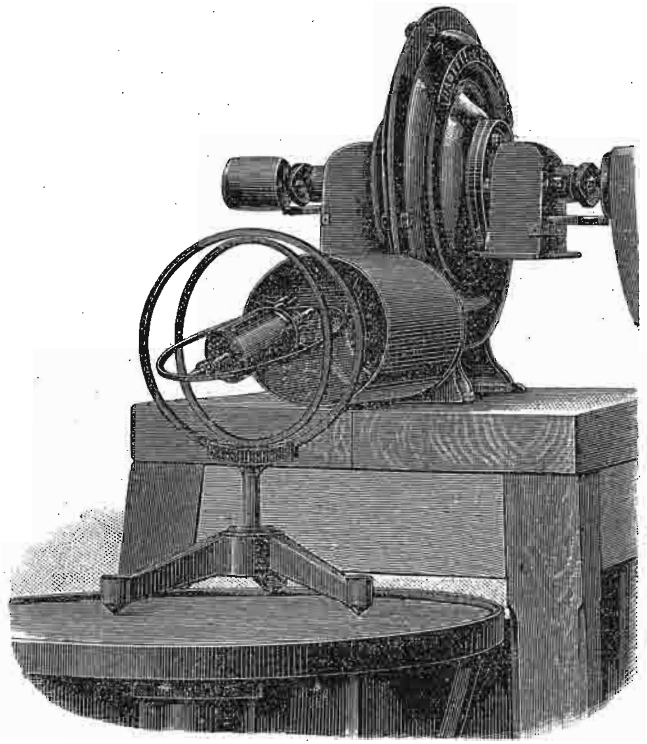
Сл. 270.



Сл. 271.

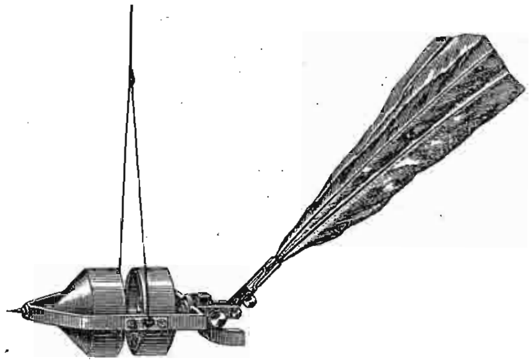
обрће се око своје слободне осе; та слободна оса тежи да остане на целом путу сама себи паралелна, као што се на слици види. Али у колико се пројектил удаљује од топа, у толико отпор ваздуха дејствује јаче на доњу страну пројектила и тежи да осу његову исправи. По другом закону о слободним осовинама, код таквог дејства стране силе, оса се креће управно на правац силе, т. ј. скреће у десно, ако се пројектил око слободне осе обртао у смислу казаљака на сахату, т. ј. с лева на десно, као што то обично бива.

603. Утицај отпора ваздуха на пројектил који се обрће око своје уздужне слободне осе може се и експерименталним путем проучавати Магнусовим апаратом као што га показује сл. 272. Уздужни пројектил, који се као и гироскоп може врло брзо обртати, обешен је по Карданову начину и из једног вентилатора пусти се на њ јака ваздушна струја. Резултат ће бити исти, па било да се пројектил креће према ваздуху, било ваздух према пројектилу. Да ли ће струја ваздуха дохватати горњу или доњу страну пројектила, и да ли ће се пројектил око своје осе обртати на десну или леву страну, скретање ће се увек вршити према другом закону о слободним осовинама.



Сл. 272.

Сличан је апарат и за исти циљ конструјисао проф. Пфаундлер (сл 273). Цео се апарат обеси о конац 5—6 мет. дугачак, и кад се заошија, пусти се са извесне висине да у правцу уздужне осе клати. Перјаница која апарат прати, спуштањем или подизањем повећава у једном или другом смислу отпор, услед чега се и утицаји тога отпора јављају на један или други начин, као и код Магнусова апарата.

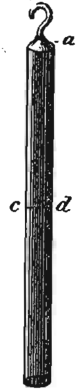


Сл. 273.

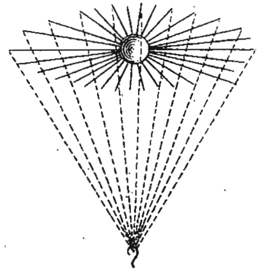
604. **Стабилност слободних осовина.** — Као што знамо, она се осовина или оса некога тела назива слободном, према којој су поједини молекили тога тела симетрично распоређени или која се може сматрати као оса симетрије тога тела. Има тела која немају ни једну осу симетрије, те дакле ни једну слободну осу, док, међутим, има их који имају једну, две или више оса симетрије, па дакле и слободних оса. И кад једно тело има две или више слободних оса, може наступити случај да све те осе немају исту стабилност, т. ј. не опиру се једнаком снагом појединим спољашним утицајима и за то се у таким случајима води рачун о стабилности оса.

Стабилност слободне осовине цени се по моменту инерције који тело има, обрћући се око те осовине. И она оса за коју је моменат инерције најмањи, назива се лабилна, а она за коју тај моменат има највећу вредност јесте стабилна. Ако моменат инерције код некога тела за разне осовине остаје исти, онда је и слободна осовина индиферентна. Такав је случај на пр. код кугле, кад се окреће око разних осовина које пролазе кроз њено средиште.

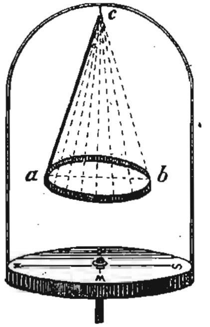
Кад једну цилиндричну металну шипку (сл. 274) обесимо једним крајем о конац и на центрифугалној машини станемо обртати око уздужне осе, она ће врло брзо напустити тај уздужни положај, јер је њен моменат инерције за обртање око уздужне осе minimum, и та је слободна оса лабилна, те ће је свака и најмања страна сила пореметити. При даљем обртању шипка ће заузимати све више и више попречан положај, док не заузме потпуно хоризонталан (попречан) положај (сл. 275), и ако је једним само крајем, и то сада ван тежишта, обешена. Пошто је моменат инерције шипке за обртање око попречне осе највећи, то ће и слободна оса у том положају бити стабилна.



Сл. 274.



Сл. 275.



Сл. 276.

Исто ће то наступити и кад један кружни обруч (или плочу) обесимо ма где на периферији његовој и станемо га обртати. После неколико само обрта његов ће пречник *ab* (сл. 276), који је пре обртања ишао вертикално на ниже, заузети хоризонталан положај, како га слика показује.

V

Гравитациона кретања.

605. Под гравитационим кретањима разумемо она централна кретања, по којима се крећу поједина небеска тела. У том погледу разликују се две групе небеских тела: у једну групу долазе звезде, које су врло далеко од нашег сунчаног система и чији ће утицај на кретања у њему може потпуно занемарити; у другу групу долази наше сунце са својим планетама и сачињава једну засебну целину. Ми ћемо се бавити само кретањима која се врше у нашем сунчаном систему код планета.

Ако поједина тела нашега сунчаног система упоредимо међу собом, видићемо да сунце својом огромном масом и величином заузима најважније место и да јако привлачи све остале планете. Истина је, да се и поједине планете међу собом привлаче, али је то привлачење према привлачењу сунчеву врло слабо и ми га можемо у овим посматрањима занемарити. Ми ћемо дакле сматрати да је сунце једино јако средиште које привлачи, и да се остале планете, услед тог привлачног дејства сунчева сасвим независно једна од друге крећу.

606. Кеплерови закони. — Закони по којима се планете нашега сунчаног система крећу, пронађени су непосредним проучавањем кретања планетских. Њих је пронашао почетком XVII века Словенин астроном *Кеплер*, проучивши дугогодишњи сабрани астрономски материјал својих претходника и допунивши га својим личним посматрањима. Ти се закони називају *Кеплерови закони* и гласе:

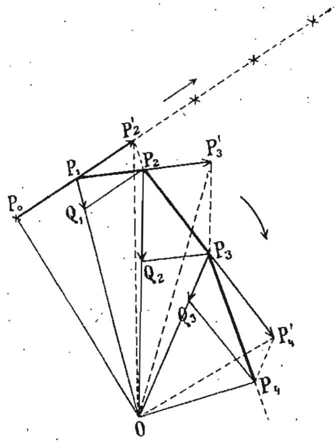
1. *Планете се крећу око сунца по елиптичним путањама; у једној жижи те путање налази се сунце.*

2. *Површине које описује радијус вектор за иста времена једнаке су.*

3. *Квадрати времена обилажења разних планета сразмерни су трећим степенима својих средњих одстојања од сунца.*

607. Како ће из једног центрипеталног кретања и једног једнаког, које с њим заклапа известан угао, постати кретање по затвореној путањи, видели смо говорећи о централним кретањима уопште (567). Да би само други закон Кеплеров био јаснији, објаснићемо га сликом 277. Испреламана (иначе криволинијска) путања $P_0\, P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ . . . постала је услед централнога кретања под дејством једне централне привлачне силе у O и ма каквог тангенцијалног кретања. Дужине $P_1\, Q_1$; $P_2\, Q_2$;

$P_3 Q_3 \ldots$ јесу нормална убрзања која, као што видимо, час расту час опадају. Једини услов, који је потребан да се испуни јесте тај, да су поједине путање $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_4 \ldots$ пређене за исто време τ. Да нема нормалнога убрзања покренута тачка P_0 прелазила би праву путању $P_0 P_1 P'_2 \ldots$ прелазећи за иста времена једнаке путеве $P_0 P_1 = P_1 P'_2$ итд. Међутим троугли $P_0 P_1 O$ и $P_1 P'_2 O$ имају једнаке површине, јер су им основице једнаке $P_0 P_1 = P_1 P'_2$ и имају исту висину. Из истог су разлога и површине ових троуглова једнаке:



Сл. 277.

$$P_1 O P'_2 = P_1 O P_2 = P_2 O P'_3 = \\ = P_2 O P_3 = P_3 O P'_4 = P_3 O P_4$$

А из тога опет следује да су површине:

$$P_0 O P_1 = P_1 O P_2 = P_2 O P_3 = P_3 O P_4 \ldots$$

које радијус вектор описује за иста времена τ једнаке.

608. Трећи Кеплеров закон извешћемо најпростије овим путем. Нека су AC и ac (сл. 278) путање двеју планета за иста времена τ, а на одстојањима R и r од сунца S. Из сличности троуглова $ACD \sim ACS$ имамо за даљу планету:

$$AD = \frac{\overline{AC}^2}{R}$$

а тако исто и за ближу:

$$ad = \frac{\overline{ac}^2}{r^2}$$

Из тих једначина деобом имамо:

$$AD : ad = \frac{\overline{AC}^2}{R} : \frac{\overline{ac}^2}{r}$$

или пошто је према општем закону о привлачењу:

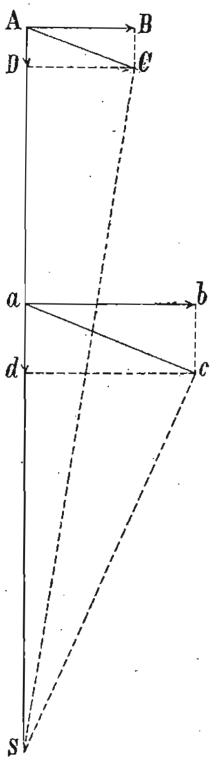
$$AD : ad = r^2 : R^2 \text{ биће:}$$

$$r : R = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$$

$$= \left(\frac{2R\pi}{T}\tau\right)^2 : \left(\frac{2r\pi}{t}\tau\right)^2$$

где је T, време обилажења даље а t ближе планете. Одавде је најзад:

$$\frac{t^2}{T^2} = \frac{R^3}{r^3} \quad \ldots\ldots \quad (278$$



Сл. 278.

Обично се у Астрономији даљина земље од сунца узме за јединицу одстојања, као и њена година за јединицу обилажења, па се у тим јединицама изражавају даљине осталих планета и њихове године. Према томе, кад ставимо $t = 1$ и $r = 1$, онда се из времена обилажења неке планете T, (што се уосталом може с врло великом тачношћу непосредним посматрањем одредити) налази даљина њена од сунца изражена земљиним одстојањима овим простим обрасцем:

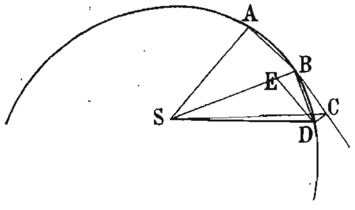
$$R = \sqrt[3]{T^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (279$$

609. **Њутнов закон.** — На основу горњих Кеплерових закона закључио је Њутн (Newton): да између појединих покретних маса постоји нарочита привлачна сила, и да њено дејство зависи и од величине маса које се привлаче као и од одстојања на којима се оне једног извесног тренутка налазе. Тај однос исказан је у нарочитом закону, који се назива *Њутнов закон* и који гласи:

Узајамно привлачење двају маса управо је сразмерно њиховим величинама, а изврнуто сразмерно квадрату њихових одстојања.

Ево на који се начин из Кеплерових закона долази до Њутнова закона.

На слици 279 S је сунце а AB путања коју планета A за врло кратко време τ пређе. BC била би путања исто толика као и AB, коју би планета прешла у другом исто толиком делу времена (τ), кад је нека претпостављена привлачна сила не би довела у D. По другом Кеплеровом закону је троугао $ABS = BDS$, па дакле и троугао $SBC = SBD$. Да то буде морају тачке C и D лежати на једној линији која је паралилна са BS. Путања BD, коју ће планета стварно прећи, јесте резултанта (у паралелограму $BECD$) из линије BC, за коју знамо шта значи и још из линије BE, која пада правцем BS и значи неку силу, која тело вуче ка центру S. Кад се дакле нека планета креће по кривој путањи BD, онда је извесно да њу вуче нека сила, која је према сунцу као центру управљена.



Сл. 279.

Величина пак те силе, према горњем Њутнову закону износи:

$$F = x\frac{M \cdot m}{R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (280$$

Где M значи масу сунца, m масу планете, R одстојање планете од сунца, а x је извесна, тако звана *гравитациона константа*. За $M = m = 1$ и $R = 1$, $F = x$, а то значи да је гравитациона константа она сила с којом се привлаче две јединице масе на одстојању јединици. Ако се послужимо системом CGS, онда x значи привлачење двеју маса од по 1 гр., а на одстојању од 1 см. Из горње се једначине добива гравитациона константа:

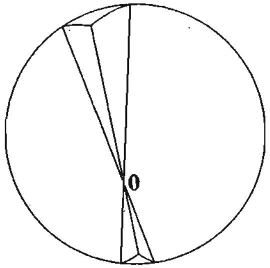
$$x = \frac{FR^2}{M \cdot m}.$$

Димензије пак њене у апсолутном систему према томе су:

$$x = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

Кад год се говори било о привлачењу између планета и сунца или о привлачењу, која опажамо између земље и тела на њеној површини, увек замишљамо да је цела маса тих тела концентрисана у њиховим средиштима (одн. тежиштима) и одговарајућа се одстојања рачунају увек од једног средишта до другог. Уосталом овде ћемо укратко изнети законе привлачења маса у појединим случајевема.

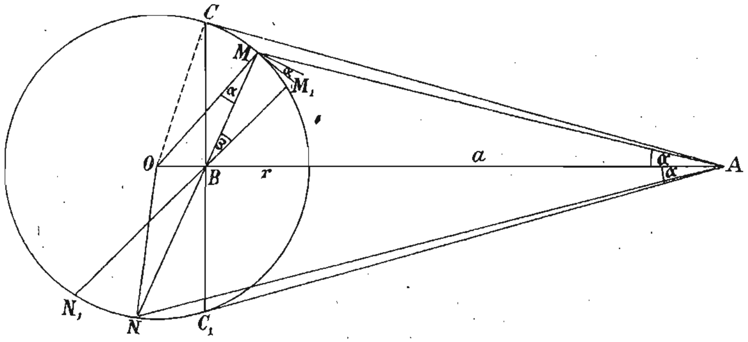
610. Посматрајмо најпре привлачење *једне шупље лопте* (танких дуварова) *на ма коју тачку у њеној унутрашњости*. Нека је O (сл. 280) таква једна тачка. Кад кроз њу повучемо три зрака, добићемо на површини лопте с једне и друге стране одсечена два троугла, чије су површине сразмерне квадратима одстојања од тачке O. Пошто су, с друге стране, привлачења тих површнна на тачку O изврнуто сразмерна квадратима одстојања, то се онда привлачна дејства обеју површина на тачку O потиру. Па како то вреди и за све друге елементе лоптине површине, то онда за то привлачење вреди закон: *Маса једне шупље лопте нема никаквог дејства на тачке у унутрашњости својој.*



Сл. 280.

611. Што се пак тиче *дејства те шупље лопте на тачке изван ње*, налазимо да таква лопта дејствује својом масом на ма коју тачку изван ње онако исто, као да је цела маса лопте концентрисана у њену средишту.

Нека је MM_1 (сл. 281) један површински елеменат лопте и A тачка која својом масом m дејствује на лопту. Кад повучемо



Сл. 281.

тангенте AC и AC' и спојимо средиште лопте с том тачком, линијом AO, добијамо правоугли троугао OCA, у коме је OC $(= OM = r)$ средња геометријска сразмерна између OB и OA $(= a)$. Исто су тако и троугли OMB и OAM као и ONB и OAN међу собом слични. Кад из тачака M и M' а кроз тачку B повучемо тетиве, добићемо две пирамиде с телесним углом ω*. На исти бисмо начин могли поделити целу лопту на известан број двогубих пирамида са истим телесним углом ω.

Телесни је угао, површина ортогоналног пресека пирамиде на одстојању $= 1$, а на одстојању BM биће ортогонални пресек $\overline{BM}^2\omega$. Пошто управна на тангенту заклапа с полупречником угао α, то је ортогонални пресек код тако танке пирамиде раван косом, помноженом косинусом угла α, према томе коси, т. ј. тангенцијални пресек биће раван ортогоналном, подељеном косинусом α, т. ј.:

$$\frac{\overline{BM}^2\omega}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{BN}^2\omega}{\cos\alpha}.$$

Ако означимо са σ масу јединице површине лопте, онда ће привлачење од тачке A на елементе MM_1 и NN_1 према Њутнову закону бити:

$$\frac{\overline{BM}^2\,\omega\sigma m}{\overline{MA}^2\cos\alpha}\,x \quad \text{и} \quad \frac{\overline{BN}^2\omega\sigma m}{\overline{NA}^2\cos\alpha}\,x.$$

Међутим је:

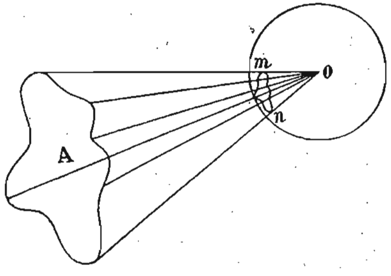
$$\frac{BM}{MA}=\frac{BN}{NA}=\frac{OM}{OA}=\frac{r}{a}$$

услед чега је и привлачење оба елемента MM_1 и NN_1:

$$F=\frac{r^2\,\omega\sigma\, m}{a^2\cos\alpha}.$$

---

* Да бисмо имали прави појам о телесном углу ω, опишимо око тачке o сл. 282, у којој је концентрисана нека маса m, полупречником $= 1$ см. једну лопту. Праве које спајају тачку o с ивицама неке површине A, одсећи ће на реченој лопти сличан комад mn. Тај комад изражен у квадратним сантиметрима представља телесни угао ω. Више пута се тај комад назива *привидном величином* површине A посматране из o.



Сл. 282.

То ће исто вредити и за све елементарне површине. Разложимо све те елементарне силе F у две компоненте, и то једну паралелну а другу управну на OA, то ће се све ове последње узајамно потрти, јер су све две и две једнаке и супротнога смисла. Пошто су њихове вредности $F\cos\alpha$, то ће ефективно привлачење сваког појединог површинског елемента бити:

$$f=\frac{r^2\,\omega\sigma\, m}{a^2}\,x$$

а за све укупно:

$$\boldsymbol{\Sigma}(f)=\frac{r^2\,\sigma\, m}{a^2}\,x\,\boldsymbol{\Sigma}\,(\omega)=\frac{r^2\,\sigma\,.\,m}{a^2}\,x\,4\,\pi=\frac{M\,.\,m}{a^2}$$

ако ставимо да је $4\,r^2\pi\sigma = M$ маси целе лоптасте површине. Међутим, исто ће дејство бити и кад је сва маса шупље лопте или лоптасте површине концентрисана у средишту њену.

Онај део лопте који се види из A, и који је ограничен тетивом CC' привлачи, неку масу $= 1$ у тачки A снагом $\frac{2\pi\sigma r^2}{a^2}\,x$. Према томе и тај видљиви део као и онај невидљиви привлаче истом снагом горњу јединицу масе.

612. То што смо извели за танак дувар једне шупље лопте, вреди и за читав низ концентричких хомогених лоптастих слојева, т. ј. и за *масивну хомогену лопту*. То значи, била лопта шупља или пуна, она ће тако дејствовати на неку тачку која се ван ње налази, као да јој је цела маса концентрисана у средишту. Ако је δ густина хомогене лопте, r њен полупречник, x гравитациона константа, a одстојање материјалне тачке масе 1, онда је привлачење целе лопте на ту тачку:

$$F=\frac{4\,r^3\,\pi\delta}{3\,a^2}\,x=\frac{M}{a^2}\,x.$$

На једну тачку у унутрашњости масивне хомогене лопте не дејствују слојеви који су око ње. Њу ће само привлачити средиште лопте снагом $\frac{4}{3}\delta\pi\varrho x$, ако је она на одстојању ϱ од средишта. У самом средишту је привлачење равно нули.

613. **Идентичност теже и гравитације.** — Ако је тежа или привлачна снага наше земље то исто што и општа гравитација, онда се морају убрзања која земља саопштава телима на њеној површини с једне стране као и месецу с друге владати по Њутнову закону, т. ј. морају бити изврнуто сразмерна квадратима одстојања.

Привлачење које са земље долази до месеца може се израчунати из центрипеталног убрзања месечева

Означимо са T време окретања месечева, са r полупречник месечеве путање, онда је центрипетално убрзање месечево:

$$\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Полупречник месечеве путање је у округлој цифри 60 пута већи од земљина полупречника; ако тај полупречник означимо са R имаћемо:

$$\gamma = \frac{2R\pi \cdot 2.60 \cdot \pi}{T^2}$$

У овој једначини $2R\pi$ је обим земљин, $= 40000000$ мет. Време окретања месечева $T = 27$ дана, 7 сати, 43 мин. $= 39343.60$ секунада. Према томе је сад:

$$\gamma = \frac{40000000\ 2.60 \cdot \pi}{(39343 \cdot 60)^2} = \frac{40000000\ \pi}{(39343)^2 \cdot 30}$$
$$= 0{\cdot}002706 \text{ м.} = 0{\cdot}2706 \text{ см.}$$

Оволико је убрзање јединице масе месечеве од стране земљина привлачења; убрзање пак на земљиној површини износи 981 см. Ако је тежа то исто што и општа гравитација, ова два броја морају бити изврнуто сразмерни квадратима одстојања обеју маса рачунато од средишта земљиног:

$$\frac{g}{\gamma} = \frac{r^2}{R^2}$$

или

$$g = \frac{60^2 R^2}{R^2} \cdot \gamma = 3600 \cdot 0{\cdot}2707$$
$$= 974{\cdot}2.$$

У ствари је $g = 981$. Али према приближним цифрама којима смо се за овај рачун служили, он је довољно тачан да се констатује да је земљина тежа идентична са општом гравитацијом. Ову идентичност констатовао је још *Њутн*.

614. Прилив и одлив. — Непосредно дејство привлачења месечева и сунчева на течну површину наше земље, налазимо у посведневном двогубом растењу и опадању воде у великим морима, т. ј. у приливу и одливу. Ми ћемо ту појаву само укратко објаснити.

Привлачење појединих тачака наше земље од стране месеца различито је према њихову одстојању од месеца. Ако на пр. саставимо у мислима средиште месечево са земљиним једном линијом, то знамо да је средиште месечево од средишта земљина удаљено за 60 полупречника земљиних. Она тачка која се на тој линији налази на површини земљиној, и то на оној страни што је окренута месецу, удаљена је само за 59, док она што је на сутротној страни земљине површине и на истој линији, удаљена је од средишта месечевог за 61 полупречник земљин. Означимо са f привлачење месеца на јединицу масе и на јединицу одстојања; одстојање средишта земљина и месечева са d, и полупречник земљин са R, онда налазимо да је привлачење на горњим трима тачкама:

$$\frac{f}{d^2};\quad \frac{f}{(d-R)^2};\quad \frac{f}{(d+R)^2}.$$

Разлика привлачења између обе последње вредности и прве биће:

$$\pm \frac{2fR}{d^3}$$

пошто чланове с вишим степенима од d^3 изоставимо. За ту су величину оне тачке на земљиној површини, које су према месецу, јаче, а оне на супротној страни слабије привлачене од месеца него средиште земљино.

Кад би земљина површина сва била чврста, не би се ниједна тачка према некој другој због горње разлике у привлачењу могла кретати. Али пошто је велики део земљине површине покривен водом, то ће се та вода услед горње разлике у привлачењу кретати, и то тако да ће се на оним тачкама где горепоменута средишна линија пробија земљину површину вода гомилати, а на побочним тачкама између њих опадати. Гомилање или пењање воде сачињава прилив, и пошто се земља за 24 сахата један пут око себе окрене са запада на исток, то ће прилив за исто време обићи земљу са истока на запад.

У морима, дакле, мора два пут дневно наступити и прилив и одлив, јер свако место има месец свакога дана један пут у зениту и један пут у надиру. Међутим, услед кретања самога месеца, по својој путањи, прелаз месечев кроз меридијан некога места одоцњава свакога дана од прилике за 50 минута; због тога одоцњава и прилив и одлив саакога дана за толико.

615. Као год месец, тако исто и сунце изазива прилив и одлив морске воде на земљи, само у много мањој мери због велике даљине која га одваја од земље. Означимо са M масу сунчеву а са m масу месеца, онда место f, привлачења месечева на одстојању јединици да ставимо $f\frac{M}{m}$ и место d, одстојања месечева од земље треба да дође $d' = 400\,d$, пошто је сунце 400 пута даље од нас него месец. Маса сунчева M је 355000 пута већа од земљине, а земљина 88 пута већа од месечеве. Према томе горња разлика за сунчево привлачење биће:

$$\frac{2fR\,.\,355000\,.\,80}{d^3\,400^3} = 0{\cdot}488\,\frac{2fR}{d^3}$$

дакле отприлике половина разлике месечева привлачења на одговарајуће тачке на земљи. Сунчев прилив и одлив изнеће према томе половину висине месечева прилива и одлива. Узајамним дејством сунца и месеца висина ће прилива бити повећана или смањена. Кад су сунце и месец на истој страни земљиној у време новог месеца или на супротним странама, у време пуног месеца, онда су прилив и одлив највећи. У време квадратура, дакле у време прве и последње четврти, комбинује се на истом месту сунчев прилив с месечевим одливом и обратно. Онда је наравно резултујући прилив и одлив најмањи.

Разним одстојањем земљиним од месеца и сунца, разликом дубина морских и конфигурацијом обала ток прилива и одлива као и закон њихових промена је врло заплетен, али према решењу Лапласову довољно познат, да се за свако место врло тачно и у напред могу одредити све појединости прилива и одлива.

VI

Клатно

616. Свако тешко тело, које се може око неке осе ван свог тежишта да клати назива се клатном. Ђерам осетљивих теразија клати се или осцилира на једну или другу страну. Једно тешко тело обешено о какав конац и изведено из равнотежног положаја исто ће се тако клатити или осцилирати око тог равнотежног положаја. Нарочито нас се на овом месту тиче ова последња врста клатна које ћемо детаљније проучити.

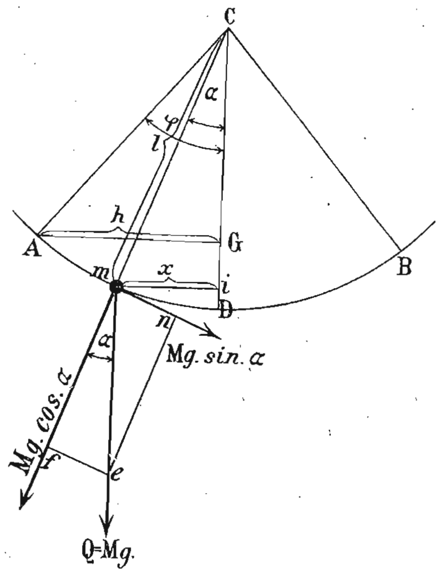
Обично се каже да има две врсте клатна: *математичко* или *просто* и *физичко* или *сложено клатно*. У самој ствари постоји само физичко клатно, а математичко, које се још назива и *идеално клатно*, само је један теоријски појам савршено неостварљив у пракси. Па ипак се основни закони о клатну изводе на математичком, па затим примењују на физичком или стварном клатну.

А. Математичко клатно.

617. Опште одредбе. — Математичко је клатно једна материјална тешка тачка, која се, обешена о конац без истезања и без тежине, може клатити. Кад такво клатно изведемо из равнотежног положаја CD (сл. 283), у положај CA, па га пустимо, оно ће услед своје тежине $Q = mg$ вратити се натраг у равнотежни положај. Кад клатно стигне у равнотежни положај D, значи толико исто као да је пало с висине $GD = \sigma$ и извршило рад $Q\,\overline{DG}$, и с том количином рада у облику кинетичне енергије:

$$Q\sigma = Q\,\overline{DG} = \frac{mv^2}{2}$$

пролази кроз равнотежни положај и пење се на супротну страну до тачке B, док сву горњу еннргију не утроши. Одатле пада поново натраг, на исти начин долази опет до тачке A и т. д., т. ј. клатно клати.



Сл. 283.

На слици се јасно види шта у самој ствари враћа клатно у равнотежни положај, кад је оно један пут из њега изведено: његова тежина $Q = mg$. Ма на ком положају клатна m, удаљену за угао α од равнотежнога, ми ћемо разложити тежину на две компоненте: једну $Q\cos\alpha$, која иде правцем конца и која се потире о конац, и другу $P = Q\sin\alpha$ која дејствује управно на правац конца и враћа клатно натраг. Убрзање клатна на том месту износи;

$$\gamma = g\sin\alpha.$$

Угао φ, за који се клатно највише изведе из равнотежног положаја, назива се *амплитуда* клатна. Угао пак α који клатно ма на ком месту своје путање заклапа с равнотежним положајем назива се *елонгациони угао*. Положај клатна који томе углу одговара назива се *фаза клаћења*. Ако дужину клатна $CD = Cm = CA$ означимо са l, а са x најкраће (управно) одстојање материјалне тачке од равнотежног положаја, онда се горњи обрасци могу и овако написати:

$$P = Q\frac{x}{l} \text{ и } \gamma = g\frac{x}{l}.$$

Овде имамо ове две сразмере:

$$\left.\begin{aligned} P : Q &= x : l \\ \gamma : g &= x : l \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (281$$

а то значи да се сила (P) (односно убрзање γ) која клатно креће има према тежини (Q) (односно према убрзању слободног падања g) као одстојање (x) од равнотежног положаја према дужини клатна (l).

Или уопште:

Код математичког су клатна сила и убрзање сразмерни одстојању тешке тачке од равнотежног положаја.

По себи се разуме, да је и сила и убрзање положно кад клатно пада и да су обе те величине одречне кад се клатно пење.

618. *Брзину* коју клатно има на разним положајима своје путање наћи ћемо на овај начин. Кад се тешка тачка клати по луку AD, који ћемо узети да је врло мали, онда то толико исто значи као да она пада по стрмој равни те дужине, па дакле, да ће у тачку D стићи истом брзином као да је слободно пала с висине GD. То исто вреди и за ма коју тачку путање m; увек ће брзина њена бити:

$$v = \sqrt{2gs}$$

или специјално за тачку m:

$$v = \sqrt{2g\cdot\overline{Gi}}$$

Међутим је $Gi = Ci - CG = l\cos\alpha - l\cos\varphi$, па зато ће брзина клатна у m бити:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\varphi)} \quad \cdots\cdots \quad (282$$

У колико α опада, т. ј. у колико се клатно приближује равнотежном положају, у толико је брзина већа. У том специјалном случају $\alpha = o$ те и:

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = \sqrt{2gl2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{gl}$$

Пошто је v веће од нуле, то ће клатно том брзином односно с горе поменутом количином кинетичке енергије продужити кретање на супротну страну и попети се до оне исте висине, с које је и пало кад је ту брзину стекло.

619. Кад би убрзање земљине теже био једини узрок који успорава клатно кад се оно пење, као што је једини узрок који га убрзава кад пада, клатно би се попело на исту висину с друге стране равнотежног положаја с које је и пало. То тако и бива код замишљеног клатна. Али на свако клатно, које би ми направили приближно математичком клатну, утичу сем убрзања теже још два узрока, који више или мање мењају горње теоријско извођење, а то су *отпор ваздуха* и *трење у тачки вешања*.

620. Кад клатно пређе из највишег свог положаја с једне стране на највиши положај с друге стране, онда се то назива једна *проста осцилација*. Проста би осцилација била и онда, кад клатно пође из равнотежног положаја на једну страну и врати се натраг у равнотежни положај. Две просте осцилације (супротнога смисла) сачињавају једну *периоду* или једну *потпуну осцилацију*. Тако исто и време које је потребно да се изврше горње осцилације назива се *време просте* одн. *потпуне осцилације*.

621. **Основни закони о клатну.** — Како теоријским посматрањем тако исто и експерименталним путем проучавано је клаћење разних врста клатна и дошло се до извесних закона који вреде за поједине случајеве. Ми ћемо те законе сада прегледати.

Први закон. — *Док су амплитуде клатна мале* (испод 3°), *клаћења су исохрона* (т. ј. трају једнако дуго).

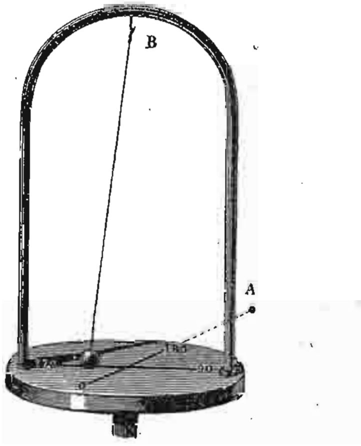
Теоријским разматрањем долазимо до тог закона на тај начин, што смо нашли да су убрзања сразмерна одстојању клатна од равнотежног положаја, односно сразмерна су синусу елонгационог угла; и ако дакле клатно с веће висине пада брже, ипак оно има и већи пут да пређе, те према томе потребно је једно исто време да се једна осцилација изврши, ма колика у самој ствари (наравно у горњим границама) била амплитуда. Јер за мале углове синус је приближно сразмеран углу, па дакле и убрзања су сразмерна путевима. Ове нам цифре показују до ког степена можемо ту сразмерност узети:

УГАО	ЛУК (за $r = 1$)	СИНУС
1°	0·0174533	0·0174524
2°	0·0349066	0·0348995
3°	0·0523599	0·0523360
4°	0·0698132	0·0697565
5°	0·0872665	0·0871558

Као што се види до 3° разлика наступа тек у петој децимали и једва износи $\frac{1}{2000}$ део.

Експериментално се до тог закона долази непосредним опажањем. Кад се пусти клатно да клати неко извесно време, па се бележи време $t_1 - t_2 \ldots$ потребно на пр. за 100 осцилација, налази се да свака осцилација у тим серијама траје $\frac{t_1}{100}, \frac{t_2}{100}, \ldots$ Средње амплитуде тих осцилација биће $\frac{\alpha + \alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \ldots$ Док су амплитуде велике, опадаће и време сваке осцилације и амплитуде, али кад амплитуде дођу испод 3°, оне ће и даље опадати, али време сваке осцилације остаје сад исто.

622. *Други закон.* — *За све време слободнога клаћења клатно клати у истој равни.* На основу онога што смо констатовали говорећи о слободним осовинама да сваки покренути молекил тежи да одржи своју раван кретања, овај се закон по себи разуме. Иначе тај закон можемо и експериментом потврдити кад клатно, представљено на сл. 284, метемо на центрифугалну машину и пошто га пустимо да клати извесним правцем, целу справу окрећемо. И ако се цео систем који носи клатно окрене, клатно неће променити своју првобитну раван клаћења.

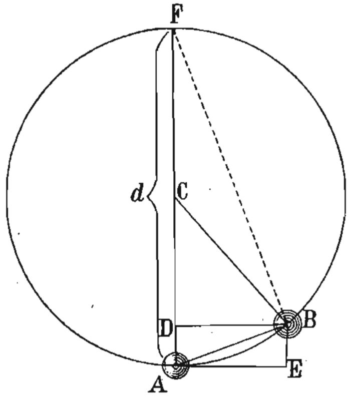


Сл. 284.

623. *Трећи закон.* — *Трајање осцилација (малих амплитуда) некога клатна не зависи од материје од које је клатно начињено.* То ће рећи да клатна, иначе истих особина, направљена од разног материјала, клате подједнако и да материјал клатна не утиче на њихова клаћења.

Овај је закон последица оне истине, по којој сва тела (тешка или лака) падају истом брзином у безваздушном простору. Пошто клаћење није ништа друго до падање и пењање по стрмој равни, изазвано само једном компонентом тежине, то се по себи разуме да ће клатна од разног материјала подједнако клатити, као што подједнако и падају.

Експериментом приближно констатујемо тај факат, кад направимо клатна исте дужине од разног материјала, н. пр. од олова, стаклета, дрвета, воска и т. д. и пустимо их да једно поред другога клате. Свако ће такво клатно за исто време извршити исти број клаћења.



Сл. 285.

624. *Четврти закон.* — *Време клаћења (малих амплитуда) некога клатна сразмерно је квадратном корену из дужине клатна.* Клатно CA (сл. 285); изведено из равнотежног положаја у CB, вратиће се натраг истом брзином, као кад би слободно падало с висине $BE = AD = h$, тј. брзином:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Из сличности правоуглих троуглова ADB и ABF где је $d =$ двогубој дужини клатна, т. ј. $2l$ и $AB =$ амплитуди клатна a, имамо:

$$h : a = a : 2l$$

одакле је:

$$h = \frac{a^2}{2l}$$

те према томе:

$$v = \sqrt{2g\frac{a^2}{2l}} = a\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Да бисмо узели у рачун и време клаћења t, исправимо лук $AB = a$ и над њим као над пречником опишимо круг; по томе кругу нека се креће једнако нека тачка горњом брзином v, тако да док она обиђе периферију круга, да дотле клатно изврши једну потпуну осцилацију. Путања тачке биће периферија круга $a\pi = vt$, ако са t означимо време оптицања или време једнога клаћења. Одатле је:

$$t = \frac{a\pi}{v}$$

или кад се замени:

$$t = \frac{a\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots (283$$

До тога бисмо обрасца дошли и овим путем:

Напред смо нашли да је кинетичка енергија клатна кад пролази кроз равнотежни положај:

$$Q\sigma = mg\sigma = \frac{mv^2}{2}$$

Мало час смо нашли да је $v = \frac{a\pi}{t}$ и $a^2 = 2lh = 2l\sigma$, па ћемо заменом добити:

$$mg\sigma = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\cdot\frac{a^2\pi^2}{t^2} = \frac{m\pi^2}{2t^2}\,2l\sigma$$

одавде је опет:

$$l = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Овако добивен образац за време клаћења представља време једног простог клаћења или просте осцилације. Ако се хоће образац за један период или потпуну осцилацију, ваљало би са амплитудом као полупречником описати мало час посматрани круг. У том случају добивамо

$$l = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

625. Овај образац за трајање клаћења вреди само у том случају, кад су амплитуде клатна врло мале. Ако се амплитуда α не може занемарити, онда тај образац има овај облик:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + k) \quad \ldots\ldots\ldots (284$$

где константа k има ову вредност:

$$k = \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots$$

$$+ \ldots \left(\frac{1.3.5\cdots 2^{n-1}}{2.4.6\cdots 2^n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\Bigg] \ldots\ldots (285$$

Да би се видело колики је утицај те констате k на време клаћења: наводимо ове њене вредности:

α	k
1°	0·000019
2°	0·000080
3°	0·000170
4°	0·000300
5°	0·000476
10°	0·001907
20°	0·007660

Најзад кад амплитуде нису сасвим мале али не и сувише велике, те да се могу занемарити виши степени од квадрата синуса и да се синус може заменити луком, онда горњи образац за време клаћења добива још и овај трећи облик:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\alpha^2}{16}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (286$$

626. Експерименталним се путем овај закон оверава с довољном тачношћу, кад се посматра клаћење клатна̂ чије су дужине као 1 : 4 : 9 и т. д. Онда се налази да ће за исто време прво клатно 3 пут, а друго 2 пут толико клаћења извршити, колико треће клатно и да се према томе времена њихових клаћења имају као бројеви: $1 : 2 : 3 = \sqrt{1} : \sqrt{4} : \sqrt{9}$.

627. **Изведени закони о клатну.** — Горњи закони, од којих је први, трећи и четврти пронашао Галилео, сматрају се као основни закони о клатну, јер за једно извесно место утврђују основне особине клатна. Из тих основних закона изведени су још и ови закони:

628. — 1. *Време клаћења некога клатна изврнуто је сразмерно квадратном корену из убрзања земљине теже.*

Зависност времена клаћења од убрзања g јавља се тек онда, кад се g мења, т. ј. кад једно исто клатно клати на разним географским ширинама или на истој географској ширини али на разним висинама. За два таква места имаћемо:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} \quad \text{и} \quad t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_2}}$$

одакле је $t_1 : t_2 = \sqrt{g_2} : \sqrt{g_1}$

или

$$t_1^2 : t_2^2 = g_2 : g_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (287$$

629. — 2. Оно клатно, чије време клаћења износи једну секунду, назива се *секундно клатно.* Кад дакле у општи образац ставимо $t = 1$, имаћемо:

$$g = l\pi^2.$$

За друго неко место имаћемо:

$$g_1 = l_1\pi_2$$

одакле:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{l}{l_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (288$$

Убрзања на разним местима имају се као дужине секундних клатна̂.

630. — 3. За једно исто клатно, које се клати на разним местима, *производ из квадрата времена клаћења и убрзања теже, стална је количина* или *производ из времена клаћења и квадратног корена из убрзања стална је количина,* јер из горњих сразмера излази:

$$\left.\begin{aligned} t_1^2 g_1 &= t_2^2 g_2 = \text{const.} \\ t_1^2 \sqrt{g_1} &= t_2 \sqrt{g_2} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (289$$

631. — 4. *Енергија клатна у свакој тачки путање је стална количина.* — Клатно нам даје најлепши пример претварања кинетичке енергије у потенцијалну и обратно. Кад је клатно на највећој даљини од равнотежног положаја, у њему је нагомилана највећа количина потенцијалне енергије (јер је на том месту кинетичка енергија равна нули) и она је по својој вредности равна највећој количини кинетичке енергије коју клатно има кад пролази кроз равнотежни положај. На осталим тачкама путање има и кинетичке и потенцијалне енергије у исти мах, али ма колика била количина једне или друге, њихов збир за сваку ту тачку раван је оној максималној вредности било само потенцијалне било само кинетичке. Ево како ћемо ту сталну количину енергије клатна за извесну амплитуду α одредити.

Нашли смо да је кинетичка енергија клатна масе m, кад пролази кроз равнотежни положај:

$$mg\sigma = \frac{mv^2}{2}$$

Брзина клатна је дата амплитудом a из обрасца:

$$v = \frac{2\,a\pi}{t}.$$

Ако амполитуду изразимо елонгационим углом α и не меримо га степенима већ луком, биће $a = \alpha \cdot l$. Према томе стална количина енергије клатна за елонгациони угао α биће:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\,\frac{4\,\mathrm{a}^2\pi^2}{t^2} =$$

$$= \frac{2\,m\alpha^2\,l^2\pi^2}{t^2}$$

$$= \frac{2\,\alpha^2\,\pi^2}{t^2}\,J \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (290$$

где је J моменат инерције масе m на одстојању l. Ако о конац од 99·4 cm. дужине обесимо куглицу од једнога грама, она ће за 2 секунде извршити једну потпуну осцилацију. Енергија тога клатна за елонгациони угао од 1^0 биће:

$$2\pi^2\,1.\,99{\cdot}4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{57}\right)^2=15 \text{ ерга.}$$

632. — 5. *Амплитуда осцилација опада у геометријској размери, кад њихов број расте у аритметичкој.*

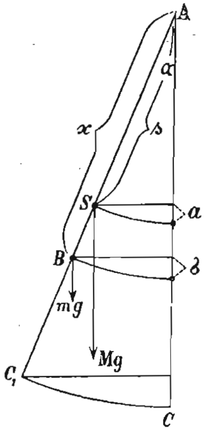
Овај је закон пронашао Борда и доцније га је потврдио Бјот (Biot) и други. Борда је своме клатну дао врло малу почетну амплитуду од $^1/_3$ степена. После 1800 осцилација амплитуда је спала на $^2/_3$ своје првобитне вредности. Бјот је тај закон потврдио и за веће амплитуде. У једном експерименту почетна је амплитуда била већа од 1^0 и после 7000 осцилација спала је на 0·6 своје првобитне вредности.

В. **Физичко клатно.**

633. Свако клатно састављено од пондерабилне материје, дакле свако стварно (не замишљено) клатно јесте *физичко* или *сложено клатно*. Оно се разликује од математичкога у томе што се ту не клати само једна тешка материјална тачка већ читав систем тачака, дакле цело тело, и што то тело није обешено о конац без тежине већ о конац или тело са извесном, већом или мањом тежином.

634. **Средиште клаћења.** — Као што смо напоменули, у физичком клатну имамо читав систем тачака које клате, и то неке тачке ближе а неке даље од тачке вешања. Кад би оне тачке што су ближе биле слободне и клатиле као математичка клатна, оне би се брже клатиле но што се клати цео тај систем. Исто тако има у том систему тачака, које кад би биле слебодне и клатиле се као засебна математичка клатна, клатиле би се спорије но што се клати целокупна маса клатна. Али има у том систему тачака једна тачка, која би се, и кад би била слободна као математичко клатно, исто тако клатила као што се сад клати цело физичко клатно. Та тачка у физичком клатну назива се *средиште клаћења*, „centrum oscilationis“. И кад се говори о „дужини физичког клатна“, онда се увек разуме одстојање тога средишта од тачке вешања; та се дужина назива *редуковано физичко клатно* или *синхронично клатно*, јер значи да је дато физичко клатно редуковано или сведено на оно математичко клатно чија је дужина равна одстојању средишта клаћења од тачке вешања.

635. Цео се задатак о физичком клатну своди на изналажење одстојања средишта клаћења од тачке вешања, т. ј. на одредбу дужине редукованога клатна, јер се онда за свако физичко на математичко редуковано клатно могу применити закони математичкога клатна.



Сл. 286.

Тога ради нека нам линија AC (сл. 286) представља физичко клатно, изведено из равнотежног положаја у AC' за угао α. Тежиште је клатна у S а средиште клаћења у B. Тражи се одстојање $AB = x$.

Нека је J моменат инерције датога клатна масе M, а $J_x = mx^2$ моменат инерције редукованога клатна. Ако хоћемо да редуковано клатно клати као дато физичко клатно, онда оба момента инерције морају бити једнака, т. ј.:

$$J = mx^2$$

одакле је редукована маса:

$$m = \frac{J}{x^2}.$$

Кад се клатно изведе из равнотежног положаја за угао α, онда је његово убрзање на том месту:

$$\gamma = g \sin\alpha$$

а статички моменат за тежину која напада у тежишту:

$$\mathfrak{M} = Qs\sin\alpha = Mgs\sin\alpha$$

Статички моменат оне непознате силе $P = mg$ која напада у средишту клаћења биће:

$$Px \sin \alpha = mgx \sin \alpha$$

као год што оба момента инерције морају бити једнаки, тако исто морају и статички моменти бити једнаки:

$$P = mg = \frac{Mgs}{x}$$

или:

$$\frac{J}{x^2} = \frac{Ms}{x}$$

или најзад:

$$x = \frac{J}{Ms} = \frac{J}{\mathfrak{M}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (291$$

Према томе, *дужина редукованога клатна равна је количнику из момента инерције и статичког момента датог физичког клатна.*

Кад се ова вредност за дужину редукованог физичког клатна стави у образац за време клаћења математичког клатна добивамо образац за време клаћења физичког клатна:

$$t = \pi \sqrt{\frac{x}{g}} = \pi \sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M} g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (292$$

636. Важно је да знамо, какав положај заузима средиште клаћења према тежишту.

Моменат инерције J код датог физичког клатна ваља разумети тако, да вреди за осу која пролази кроз тачку вешања, дакле на одстојању s од тежишта. У том случају знамо да је моменат инерције сложен и раван моменту инерције за осу кроз тежиште J_s plus моменту за то одстојање: Ms^2.

Према томе биће:

$$J = J_s + Ms^2$$

и онда:

$$x = \frac{J_s + Ms^2}{Ms}$$

$$= s + \frac{Ms}{J_s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (293$$

а то значи да је средиште клаћења *испод* тежишта, и то за величину $\frac{J_s}{Ms}$.

637. Мало час смо нашли да је статички моменат датог физичког клатна:

$$\mathfrak{M} = Mgs \sin \alpha.$$

Ако се ограничимо на врло мале елонгационе углове, можемо место синуса узети угао, па ће бити:

$$\mathfrak{M} = Mgs\,\alpha = D\,\alpha.$$

Сачинилац D назива се *дирекциона снага.* За $\alpha = 1$ имамо:

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (294$$

и то је образац за све могуће случајеве клаћења, па ма каква била природа дирекционе снаге, т. ј. ма каква била природа привлачне (или одбојне) силе, која клаћење изазива.

638. Најпростије физичко клатно имали бисмо кад би једну тешку металну куглицу обесили о врло танак конац и пустили да клати (сл. 287). За тај случај имамо, ако са s означимо одстојање тежишта o од тачке вешања c и са r полупречник куглице.

Сл. 287.

$$J = \frac{2}{5} Mr^2 + Ms^2$$

и

$$\mathfrak{M} = Ms$$

према томе дужина $x = CD$ биће:

$$x = \frac{2\,r^2}{5\,s} + s.$$

Одстојање средишта клаћења од тежишта клатна је онда:

$$DO = x - s = \frac{2\,r^2}{5\,s}.$$

За $r = 1$, $s = 40$ см. излази $x - s = 0{\cdot}01$ см., те је приближно тежиште клатна у исти мах и средиште клаћења.

639. Ако је клатно једна проста шипка, дужине l и масе M без икаквих других тегова на њој, обешена о један крај, онда је:

$$J = \frac{1}{3} M l^2 \text{ и } \mathfrak{M} = \frac{1}{2} M l$$

и према томе:

$$x = \frac{\frac{1}{3} M l^2}{\frac{1}{2} M l} = \frac{2}{3}\,l$$

дакле једна хомогена тешка и права линија или шипка дужине l клати онако исто као математичко клатно дужине ${}^2/_3\ l$.

Сем ових општих случајева, физичко се клатно може јавити и у другим специјалним облицима. Ми ћемо главније такве облике у кратко прегледати.

640. **Реверзионо клатно.** — Сем горњега, иначе врло важнога значаја, средиште клаћења има у физичком клатну још једну не мање важну особину. Кад се физичко клатно, коме знамо средиште клаћења, изврне и пусти да се клати око средишта клаћења као тачке вешања, онда ће тако изврнуто или *реверзионо клатно* имати исто време клаћења као и у првом свом положају. Да то буде, мора очевидно дужина изврнутога клатна бити иста, а да је она заиста остала иста видимо из овога разматрања:

Рецимо да та дужина није остала иста (x), већ да је нека друга x_1. Онда мора и за то клатно вредити општи образац:

$$x_1 = s_1 + \frac{J_s}{M s_1}$$

где је s_1 сада одстојање нове тачке вешања од тежишта. Рецимо да смо изврнули физичко клатно на сл. 287 и да смо га пустили да се клати око тачке D. Сад је $DO = s_1 = x - s$, пошто је $CO = s$ и $CD = x$. За клаћење око тачке C имали смо:

$$x = s + \frac{J_s}{Ms}$$

или

$$x - s = \frac{J_s}{Ms}$$

зато ће сада:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x - s) + \frac{J_s}{M(x - s)} \\ &= \frac{J_s}{Ms} + \frac{J_s}{M\frac{J_s}{Ms}} \\ &= s + \frac{J_s}{Ms} = x. \end{aligned}$$

Сл. 288.

дакле дужина изврнутога је клатна остала иста, те према томе и време клаћења у изврнутом положају исто је са временом клаћења у првом положају. Такво једно реверзионо клатно представљено је на сл. 288. Оно се може клатити и око оштрице *a* као и око *b*. Такав облик дао је реверзиону клатну *Катер* (Kater), премда оно може имати и друге облике.

Реверзионим се клатном први служио Боненбергер 1811. г., а предложио га је *Прони* 1792. г. (De Prony).

641. Конично клатно. — Кад обичном физичком клатну саопштимо извесно латерално кретање, онда се оно неће клатити као обично клатно, него ће око свог равнотежног положаја описивати затворену, рецимо кружну путању (сл. 228 на стр. 322). Брзина клатна у хоризонталном кругу је константна. Раније смо за такво кретање нашли **(572)** да је та брзина

$$C = \sqrt{rg \operatorname{tang}\alpha}$$

где је r полупречник путање и одговара амплитуди a обичнога клатна. Време једнога обрта, т. ј. време једнога потпуног клаћења или осцилације биће сада:

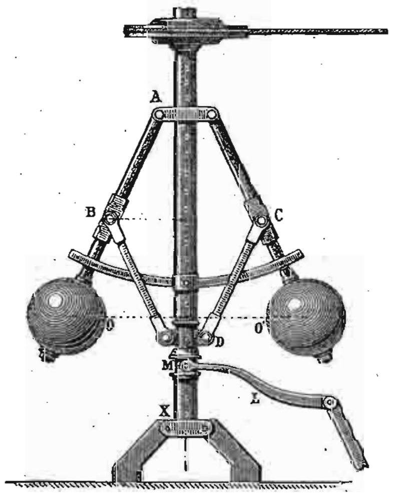
$$T = \frac{2\pi r}{C}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \operatorname{tang}\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{r \operatorname{cotg}\alpha}{g}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (295$$

где h значи висину конуса (или и дужину клатна за врло мале елонгације).

Дакле, време обрта или клаћења коничног клатна равно је времену клаћења обичног клатна кад се сматра време потпуне осцилације. Иначе, упоређено с временом једне просте осцилације клаћење коничног клатна два пут је веће. Ово се клатно назива још и *сферно* као и *хоризонтално клатно.*

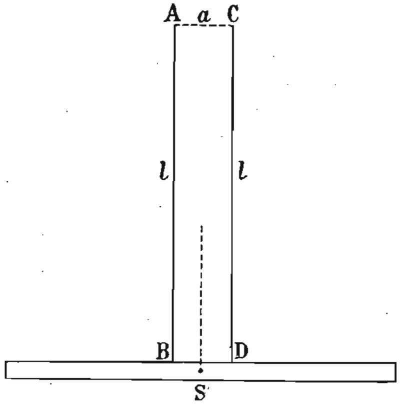


Сл. 289.

642. Центрифугално клатно. То је клатно (сл. 289) употребљено за регулисање притицаја паре код парних машина а тако исто у мало другојачем облику за регулисање периферних брзина уопште. Што се тиче његова времена обилажења или клаћења, оно је онолико исто као и код коничног клатна.

643. Бифиларно клатно. Кад се једно тело (обично шипка) обеси о два паралелна конца, па се раван конаца донекле упреде

и пусти, тело ће се клатити у хоризонталној равни на једну и другу страну. То би било *бифиларно клатно* (сл. 290). Клаћење се и овде дешава услед тежине (шипке) као и код обичног физичког клатна, јер упредањем равни конаца тежиште се S тела подигне, па се при повратку спусти, да се при обртању на супротну страну опет подигне и т. д.



Сл. 290.

Време клаћења тога клатна може се одредити, кад се према обрасцу

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

зна моменат инерције тела око вертикалне обртне осе и дирекциона снага бифиларног вешања. Ове пак вредности одредићемо на овај начин.

Целу тежину тела носе оба конца, у тачкама B и D. Према томе ништа се неће променити, ако једну половину тежине замислимо концентрисану у B а другу у D. Кад би те две тежине биле спојене једном шипком без тежине, имали би ново бифиларно клатно са истом дирекционом силом. Пошто је одстојање те две замишљене масе равно одстојању конаца a, онда ће моменат инерције замишљена клатна за осу кроз тежиште C бити $M\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Према томе је:

$$t = \pi \sqrt{\frac{M \frac{a^2}{4}}{D}}.$$

С друге стране овако замишљено клатно може се сматрати као спој два математичка клатна AB и CD исте дужине, која се увек у супротним смислима једно према другоме клате, тако да се средина спајне линије у вертикалном правцу подиже и спушта. Време клаћења и једног и другог клатна, кад им је дужина l, биће:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Извршеном заменом у тим двема једначинама добивамо дирекциону снагу

$$D = Mg \frac{a^2}{4\,l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (296$$

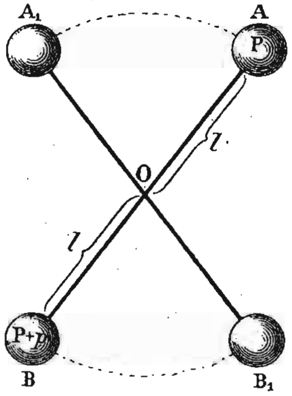
као једину још непознату вредност у обрасцу за време клаћења бифиларног клатна.

644. Торсионо клатно. Ово се клатно разликује од бифиларнога у томе, што је обешено о једну, обично металну жицу и што клаћење такођер у хоризонталној равни не изазива тежина обешенога тела већ упредна или торсиона еластичност жице. Образац по коме ће ово клатно клатити остаје онај исти:

$$t = \pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

само дирекциона снага D има сада други значај и вредност. У самој ствари због лаког одређивања времена клаћења ово се клатно и употребљава само ради одредбе дирекционе снаге онога дејства, које проучавамо.

645. Диференцијално клатно. Тако се назива оно физичко клатно које има две тешке масе P и P^1, и то једну с једне а другу с друге стране тачке вешања (сл. 291). Клаћење овога клатна може се упоредити с падањем на Атвудовој махини, јер је и у једном и у другом случају убрзање знатно редуцирано. Код оба апарата, ако су моменти једнаки, кретања нема, јер су онда у индиферентној равнотежи. Чим је једна маса већа за претег p, онда ће кретање наступити услед тога претега, али с том напоменом, што тај претег нема сад да креће само своју масу већ и оне две масе које се узајамно потиру, те зато ће његово убрзање бити знатно редуцирано. Диференцијално клатно важно је нарочито стога, што се помоћу њега могу добити врло спора клаћења, а само клатно може бити сразмерно врло кратко.



Сл. 291.

Нека је у горњој слици $P^1 = P + p$; клатно клати око тачке O и дужина му је с једне и друге стране $= l$. Према томе моменат инерције биће:

$$J = Pl^2 + (P + p)\,l^2$$

$$= (2P + p)\,l^2$$

а статички моменат:

$$\mathfrak{M} = pl.$$

Замењено у обрасцу за физичко клатно:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l^2 (2P + p)}{plg}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{l(2P + p)}{pg}}$$

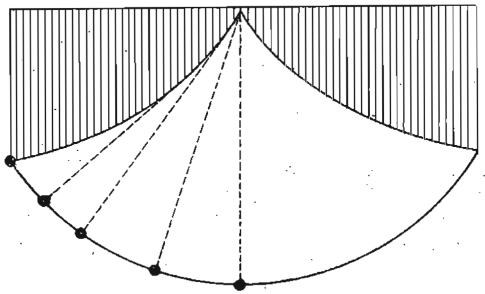
Ако је на пр. тежина једне кугле $= 1$ кгр., а друге редом: $1\frac{2}{3}$ кгр., $1\frac{1}{4}$ кгр., $1\frac{2}{15}$ кгр. онда ће бити:

$$p = \frac{2}{3} \text{ кгр.}, \ \frac{2}{8} \text{ кгр.}, \ \frac{2}{15} \text{ кгр.}$$

те и клаћења тих клатна:

$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad t_2 = 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad t_3 = 4\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

646. Циклоидно клатно. Догод се претпоставља да се конац, о који виси тешка маса код клатна, не повија, дотле тежиште те масе описује кружну путању. Али ако се концу стави на пут каква препона, на пр. каква крива линија по којој се он има повијати, онда путања тешке тачке није више кружна. Кад се на пут конца стави једна циклоидна линија (сл. 292.), те се он мора по њој повијати, онда ће и тежиште тешке масе на клатну описивати циклоиду, откуд и долази горње име томе клатну. Код овога клатна не зависи време клаћења од амплитуде само за мале амплитуде као код обичног (кружног) клатна, већ и за све амплитуде.



Сл. 292.

С. **Примене клатна.**

647. Све примене клатна, ма како оне разноврсне биле, могу се углавноме свести на две групе: на научне и практичне примене. У прву групу долази нарочито важна одредба убрзања земљине теже g, затим одредба густине земље, констатовање обртања земљина око осе као и одредба разне врсте привлачења између маса. Најважнију пак практичну примену нашло је клатно код сахата за одредбу времена, код балистичког клатна и т. д.

648. **Тачно посматрање клатна.** — Пре него што пређемо на проучавање тих примена, потребно је да видимо шта се све код клатна има одредити и како се то врши, а тако исто да познамо важније стране утицаје, који нормални ток клаћења могу више или мање мењати.

За највећи број научних испитивања потребно је да код клатна одредимо *амплитуде* клаћења и *трајање* једног клаћења.

649. *Амплитуда клаћења.* Најпростије се одређује амплитуда клаћења. кад се непосредно иза клатна утврди подељена скала. Ако се клатно клати у хоризонталној равни (бифиларно или торсионо клатно), онда се за то употреби подељена периферија круга, кроз чије средиште пролази вертикална оса клатна и чија је раван управна на тој оси. Приликом читања амплитудног уга на једну и другу страну, ваља пазити да се избегне погрешка услед паралаксе.

Оваквим непосредним одређивањем амплитуде, не може се постићи велика тачност. Зато ћемо где то буде могуће, а нарочито онда, кад амплитуде нису велике, употребити методу помоћу огледала, коју је препоручио Погендорф, а први употребио Гаус. **(79).** За клатно чија се амплитуда тражи утврди се на најзгоднији начин једно врло мало и лако равно огледало, па се дурбином и са извесне даљине посматрају у огледалу одбијени делови једне скале коју носи дурбин. Кад се клатно а с њим и огледало покрене за угао φ, онда се, према законима за одбијање светлости у покретним огледалима, на скали чита угао $2\ \varphi$, па ако је том приликом на скали прочитана подела s, а скала је од огледала удаљена за d, онда је:

$$\operatorname{tg} 2\ \varphi = \frac{s}{d} \text{ дакле } \varphi = \frac{1}{2} \text{ arc. tang } \frac{s}{d}.$$

Кад амплитуде не прелазе 6°, онда се може употребити овај приближни образац:

$$\varphi = \frac{28{\cdot}648^0}{d}\, s \left(1 - \frac{1}{3}\frac{s^2}{d^2}\right)$$

Ако су амплитуде још мање, онда се други члан у загради може занемарити и употребити овај простији образац:

$$\varphi = \frac{28{\cdot}648^0}{d}\, s = \frac{1718{\cdot}9'}{d}\, s = \frac{103132''}{d}\, s.$$

Том се приликом учине оволике погрешке:

1^0	2_0	3^0	4^0	5^0
$0{\cdot}04^0\vert_0$	$0{\cdot}16^0\vert_0$	$0{\cdot}36^0\vert_0$	$0{\cdot}64^0\vert_0$	$1{\cdot}0^0\vert_0$

Овде ваља да учинимо још једну напомену односно нулте тачке, од које се амплитуда рачуна. Најзгодније би било њу одредити кад се клатно заустави. Пошто то више пута не можемо чинити јер би ваљало дуго чекати, онда, ако опадање амплитуде није велико, нулта се тачка одређује на исти начин као и код теразија. **(208).**

Ако је опадање амплитуде велико, онда морамо знати размеру тога опадања k и из две, с једне и с друге стране прочитане амплитуде n_1 и n_2 одредити нулту тачку:

$$n_0 = n_2 + \frac{n_1 - n_2}{1 + k}.$$

650. *Време клаћења.* За одредбу времена клаћења некога клатна ваља да имамо на расположењу добар сахат или хронометар који јасно избија половине или целе секунде. Избијања која се чешће или ређе понављају незгодна су за ову врсту посматрања. За одредбу времена клаћења датога клатна могу се фиксирати или моменти кад је клатно најдаље од равнотежног положаја или моменти кад оно пролази кроз тај положај. Пошто је кретање клатна у првим положијима најспорије и мења знак, те због тога и непоуздано за посматрање, увек је боље посматрати време у оном тренутку кад клатно пролази кроз равнотежни положај.

Најпростији и у исти мах и поузданији начин био би, да посматрамо време за неколико узастопних пролаза клатна кроз равнотежни положај и из њих нађи средњу вредност. Или посмотри се пролаз клатна кроз равнотежни положај кад долази рецимо с лева, па се пропусти његов повратак с десна без посматрања и поново се посмотри кад по други пут опет с лева пролази кроз равнотежни положај. Посмотрено време даје вредност потпуне осцилације; половина тога биће време просте осцилације, као што се то обично и рачуна.

Извежбан посматрач може на тај начин одредити време клаћења до на $\frac{1}{10}$ секунде, а та тачност у највише случајева није довољна. Да се већа тачност постигне, поступа се на овај начин.

Одреди се, као што смо мало час рекли, из два посматрања истога смисла приближно време клаћења, па се остави да се клатно даље клати неколико минута без посматрања. На крају тога времена одреди се опет из два посматрања као и горе време. Кад цело протекло време клаћења поделимо нашим одређеним временима, добићемо, ако су наше одредбе биле сасвим тачне, цео паран број клаћења. У ствари, пошто су наша посматрања приближна, нећемо добити цео паран број, већ једну цифру која ће се врло мало разликовати од таквог броја. Ми ћемо тај цео паран број узети, који је најближе нађену количнику, и кад са њим поделимо цело протекло време између првог и последњег посматрања, имаћемо тачно време клаћења нашега клатна.

Да би тачност била још већа, можемо то исто поновити, или ако немамо довољно времена, онда ћемо, на пример, и у почетку и на крају серије извршити више непосредних посматрања, на пр. по три, па комбиновати први пролаз са шестим, други с петим и трећи с четвртим и из тих комбинација узети средњу вредност. Још тачније се ради кад се у почетку серије изврше шест посматрања, па се комбинује 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4; на крају те серије изврши се то исто и из тих комбинација одреди право трајање.

651. Најпоузданија пак метода за одређивање времена клаћења је свакако „*метода коинциденције*“, коју је пронашао 1785. године *Бошковић*. Она се може извршити слушањем, али је много поузданије посматрање дурбином. За тај циљ ваља удесити експериметат тако, да се у истом пољу и кроз исту кончаницу дурбина добро види и пролаз клатна на сахату којим меримо време као и пролаз датога клатна кроз равнотежни положај. Рецимо да нам је дато клатно k да га упоредимо са сахатом S, чије клатно избија секунде. Увек ће се десити, да дато клатно клати или брже или спорије од сахатног клатна; нека k клати брже. Једног извесног тренутка пролази оба клатна кроз равнотежни положај, јако ће се разликовати, па ће се онда све више и више сустизати, тако да ће једног момента оба клатна у исти мах и са исте стране проћи кроз равнотежни положај. То је прва коинциденција и тај моменат ваља забележити. Сад ће се клатна опет разићи и после извесног времена ће оба клатна поново проћи у исти мах кроз равнотежни положај, али једно с једне а друго с друге стране. Тај моменат можемо опет забележити и добити већ прву одредбу времена клаћења датога клатна. Пошто дато клатно иде брже, то је оно, за време од прве до ове друге коинциденције извршило једно клаћење више, и ако је сахат извршио n клаћења (наравно за n секунди), дато клатно извршило је $n + 1$ клаћење, према томе једно његово клаћење траје:

$$t = \frac{n}{n+1} \text{ сек.}$$

Боље ће, међутим, бити да сачекамо трећу коинциденцију код које ће оба клатна проћи кроз равнотежни положај у исти мах и са исте стране. Ако је од прве до треће коинциденције прошло на сахату n_1 секунада, дато клатно извршило је $n_1 + 2$ клаћења те према томе право време једног клаћења биће:

$$t = \frac{n_1}{n_1 + 2} \text{ сек.}$$

Врло се често дешава да потпуна коинциденција не наступа при првом или другом сусрету клатна него да још међу њима постоји нека и ако врло мала разлика. Онда се тако непотпуне коинциденције пропуштају, док се не дочека једна која ће бити потпуна. Ако је од прве *потпуне* коинциденције до друге опет потпуне прошло n_0 секунада, а непотпуних је коинциденција било $p - 1$, тако да је поновна потпуна коинциденција p-та на реду, онда је дато клатно извршило p клаћења више од сахатног клатна, те је према томе тачно време клаћења датога клатна:

$$t = \frac{n_0}{n_0 + p} \text{ сек.}$$

Ако дато клатно не иде брже већ заостаје од сахатног клатна, онда свуда у имениоцу место положног долази одречан знак. Ову методу, која се врло згодно може употребити за клатна чија времена клаћења трају 1, 2, 3 и т. д. секунди, употребио је Борда, а знатно усавршио Бесел. Метода коинциденције код оређивања времена игра исту улогу какву код дужинских мера игра нонијус.

652. Иначе се време клаћења клатна може одређивати *графички* као код хронографа или *електричним бележењем,* кад се с клатном споје нарочите справе које ће електричном струјом или варницом бележити време клаћења, поред бележења која долазе од нормалног сахата.

653. Време клаћења одређено по горњим методама извршено је за врло различите амплитуде клатна. Стога се то време има да сведе на *бескрајно малу амплитуду.* Кад се приликом одређивања времена клаћења одреде и амплитуде клатна на пример у почетку и на крају посматрања, па се из њих нађе средња вредност амплитуде φ, онда се с те амплитуде своди одређено време клаћења t на оно време клаћења t^0 које одговара бескрајно малим амплитудама обрасцем:

$$t_0 = t\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi}{4} - \frac{5}{64}\sin^4\frac{\varphi}{4}\right) = t\,(1 - k). \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot (297$$

За амплитуде φ мање од 4^0, и ако нам погрешка од $0{\cdot}01^0/_0$ не смета, можемо то свођење сасвим изоставити. Из ове таблице видимо, колико износи горња вредност k за углове од 1^0 до 50^0:

φ	k	φ	k	φ	k	φ	k	φ	k
1	0·00000	11	0·00058	21	0·00210	31	0·00457	41	0·00800
2	02	12	69	22	230	32	487	42	839
3	04	13	80	23	251	33	518	43	879
4	08	14	93	24	274	34	550	44	920
5	12	15	0·00107	25	297	35	583	45	963
6	17	16	122	26	322	36	616	46	0·01007
7	23	17	138	27	347	37	651	47	1052
8	30	18	154	28	373	38	686	48	1097
9	39	19	172	29	400	39	723	49	1143
10	48	20	190	30	428	40	761	50	1189

654. Страни утицаји на клатно. — Остаје нам још да проучимо стране утицаје који могу изменити време клаћења једнога клатна. Ту долазе:

1. *Тачка вешања.* Вешање самога физичког клатна може се извршити на разне начине, према томе да ли се од клатна тражи већа или мања прецизност, да ли се клатно клати у равни или у простору и да ли је тешка маса обешена о конац или утврђена на шипци. Конце и жице можемо прикљештити или завртњем утврдити; за обична клатна могу се само привезати. Код клатна са шипком, као и уопште код тачнијих радова с клатном, клатно се клати о оштрице, као што смо видели код тачних теразија. Још је боље употребити укрштене оштрице по Карданову систему. Сама оштрица је онда обртна оса клатна; бар би тако требало да буде, али у ствари није, јер та оштрица није никад математичка линија, већ увек узани део једне цилиндричне површине врло малога полупречника r. Лаплас и Бесел показали су да о оштрицу обешено клатно испада увек мало дуже l'; права дужина клатна l, кад је s одстојање тежишта износи:

$$l = l'\left(1 - \frac{r}{s}\right). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (298$$

Одређивање r-а је врло тешко и непоуздано. Зато се његов утицај избегне тиме што се једна иста лопта пусти да се клати о исту оштрицу, али обешена о два конца или жице разне дужине. На тај се начин из одређених времена клаћења и измерене дужине конаца одговарајуће дужине израчунају.

655. — 2. *Температура.* — Овде само напомињемо утицај температуре на дужину клатна, да би преглед био потпунији. О продужавању и скраћивању шипке или жице код клатна због температуре биће говора у науци о топлоти.

656. — 3. *Ваздух.* Утицај ваздуха је двојак: *аеростатички* и *аерокинетички,* и утиче на амплитуду и трајање клаћења. Први утицај долази услед тога што клатно у ваздуху губи од своје

тежине онолико колико је тежак истиснут ваздух. И ако је запремина клатна v, његова специфичка тежина δ, а спец. тежина ваздуха σ, онда је $v\delta$ тежина клатна у безваздушном простору а $v \cdot (\delta - \sigma)$ његова тежина у ваздуху. Према томе убрзање земљине теже није g већ:

$$g^0 = g\,\frac{v(\delta - \sigma)}{v\delta}$$

$$= g\,\frac{\delta - \sigma}{\delta}.$$

Због тога ће сад време клаћења бити:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\delta}{\delta - \sigma}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (299$$

т. ј. време клаћења је у ваздуху веће него у безваздушпом простору. —

Аерокинетички утицај долази од отпора ваздуха, који клатно има да савлада као и од тога што клатно повлачи са собом и извесну количину ваздуха час на једну час на другу страну, а тиме се повећава његов моменат инерције. Оба утицаја теже да успоре клатно. Ако је време клаћења клатна у безваздушном простору $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, биће то клаћење у ваздуху повећано услед отпора ваздушног:

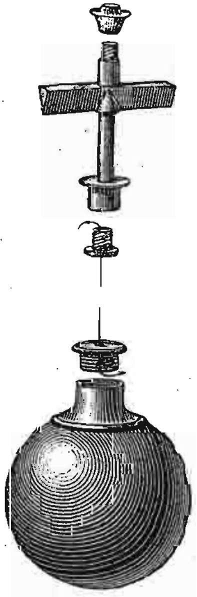
$$t = \frac{1}{\gamma}\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (299^1$$

где је $\frac{1}{\gamma} = 1{\cdot}0000000257.$

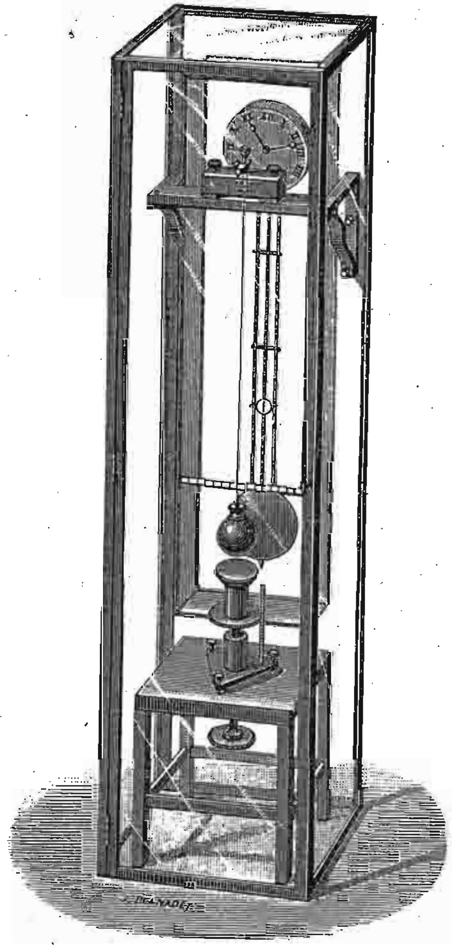
Сметња која долази од ваздуха. који клатно са собом повлачи, у толико је мања, у колико је разлика између специфичке тежине клатна и ваздуха већа. Ако је клатно од платине, тај однос износи 0·000060. Аерокинетички утицај се код обичних клатна смањује тиме, што се клатну даје сочиваст облик, а код реверзионог клатна тај се утицај скоро сасвим елиминира тиме, што се поред једног пуног сочива за клатно утврди још једно шупље сочиво истог облика, тако да су положаји сочива према оштрицама симетрични.

657. Одредба убрзања g. — Најважнија научна примена закона о клаћењу без сумње је одредба убрзања земљине теже, под чијим се дејством обично физичко клатно и клати. За одређивање те величине физичари су се служили углавноме двема методама: *обичним физичким клатном* и *реверзионим клатном*. Прве прецизне експерименте по првој методи извео је 1792. год. *Борда*, а по другој 1818. *Катер*. Доцније су одредбе убрзања по једној и другој методи чешће понављане (Бјот, Араго и т. д.).

За своја мерења узео је Борда једно обично физичко клатно обесивши тешку платинску куглу о танку металну жицу. Горњи крај конца утврђен је у једну челичну оштрицу, која се опет наслања на челичну подлогу. Појединости утврђивања како једног тако и другог краја жице виде се на сл. 293.



Сл. 293.



Сл. 294.

Тако израђено физичко клатно обешено је да се клати испред клатна једног нормалног сахата (сл. 294). Да не би једно клатно утицало на друго покренутим ваздухом, свако је за себе затворено стакленим поклопцем. На тај начин оба су клатна сачувана и од спољашњих утицаја. Посматрање клаћења бива издалека дурбином и то по методи коонциденције. Да не би оштрица о коју клатно виси утицала на клаћење клатна, Борда је удесио да се она сама, као диференцијално клатно клати; премештањем горњега завртња постигао је да оштрица клати готово онако исто као и цело клатно и кад је онда о њу клатно обешено, њено клаћење ни у колико није мењало клаћење клатна. Дужина се клатна одреди катетометром служећи се у исти мах оним малим сточићем што се на слици види који није ништа друго до један микрометарски завртањ.

Узевши да је жица свуда једнаке дебљине и једнаке густине, њено ће тежиште бити у половини њене дужине т. ј. $\frac{\lambda}{2}$ ако са λ означимо дужину жице од тачке вешања до кугле. Тежиште кугле је у њеној средини, дакле од краја жице за r пошто је r полупречник кугле. Жица је, као што се на слици види, утврђена доњим крајем за једну брадавицу која је с друге стране издубљена и може се воском прилепити за куглу. На тај начин утврђујући је за разне делове куглине површине осигуравамо се односно одстојања тежишта т. ј. односно потпуне округлине кугле. Ако је даље q тежина жице а Q тежина кугле, статички је моменат:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} q\lambda + Q(\lambda + r).$$

Означимо са σ тежину јединице дужине жице, онда је њена цела тежина:

$$q = \sigma\lambda$$

и према томе њен моменат инерције:

$$J_1 = \frac{1}{3} q\lambda^2.$$

Моменат инерције кугле за осу кроз тежиште је $^2/_5\,Qr^2 = 0{\cdot}4\,Qr^2$. Но како она клати око осе удаљене за $\lambda + r$ од тежишта, онда је моменат инерције за ту осу:

$$J_2 = 0{\cdot}4\,Qr^2 + Q(\lambda + r)^2$$
$$= Q[0{\cdot}4\,r^2 + (\lambda + r)^2].$$

Према томе моменат инерције целога клатна износи:

$$J = J_1 + J_2$$
$$= \frac{1}{3}q\lambda^2 + Q[0{\cdot}4\,r^2 + (\lambda + r)^2]$$

заменивши то, налазимо дужину редукованога клатна:

$$x = \frac{J}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{1}{3}q\lambda^2 + Q[0{\cdot}4\,r^2 + (\lambda + r)^2]}{\frac{1}{2}q\lambda + Q(\lambda + r)} \quad . \; . \quad (300$$

Пошто се време клаћења, сведено на бескрајно малу амплитуду, непосредним посматрањем одређује, то је у основној једначини остало непознато само g, и оно се онда одређује из једначине:

$$g = \pi^2 \frac{x}{t^2}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (301$$

На тај начин нашао је Борда за g у Паризу под 48° 50' 14'' сев. шир. и сведено на морску површину:

$$g = 980{\cdot}882 \text{ см.}$$

658. Као што смо напред рекли, енглески физичар Катер употребио је реверзионо клатно за одредбу убрзања земљине теже (сл. 288). Ова је метода у толико згоднија од прве, што се време клаћења, па наравно и убрзање, добива независно од момента инерције клатна. Кад се још употреби реверзионо клатно са сочивима симетрички положеним према оштрицама, онда, као што смо напред напоменули, отпада и утицај ваздуха.

Слободно се може рећи, да се обадве оштрице на клатну никад не могу тако удесити да је време клаћења око једне савршено равно времену клаћења око друге оштрице. То уосталом није ни потребно, јер се посматрањем времена клаћења око једне и око друге оштрице право време може израчунати.

Нека је одстојање тежишта од једне оштрице s_1 а од друге s_2, моменат инерције клатна за осу кроз тежиште J_s, онда ће кад се клатно клати око једне оштрице бити време клаћења:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{s_1 + \frac{J_s}{ms_1}}{g}}$$

а кад га изврнемо да се клати око друге оштрице:

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{s_2 + \frac{J_s}{ms_2}}{g}}$$

квадрирањем једне и друге једначине имамо:

$$ms_1\, t_1^2 \frac{g}{\pi^2} = ms_1^2 + J_s$$

$$ms_2\, t_2^2 \frac{g}{\pi^2} = ms_2^2 + J_s$$

одузимањем једне од друге добивамо:

$$\frac{g}{\pi^2}(s_1\, t_1^2 - s_2\, t_2^2) = s_1^2 - s_2^2.$$

Пошто су тачке вешања сталне, то је њихова даљина равна дужини редукованога клатна за време t, дакле:

$$t = \pi \sqrt{\frac{x}{g}} = \pi \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{g}}$$

одакле је:

$$\frac{g}{\pi^2} = \frac{s_1 + s_2}{t^2}$$

замењено то даће нам:

$$\frac{s_1 + s_2}{t^2}(s_1 t_2^2 - s_2 t_2^2) = s_1^2 - s_2^2$$

одакле је:

$$t = \sqrt{\frac{s_1 t_1^2 - s_2 t_2^2}{s_1 - s_2}} \quad \ldots\ldots \quad (302$$

Заменом те вредности у једначини за t_1 имаћемо најзад тражено:

$$g = \pi^2 \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1 t_1^2 - s_2 t_2^2} \quad \ldots\ldots \quad (303$$

које смо уосталом могли добити и пре одредбе t из једначине после свршеног одузимања.

Својим реверзионим клатном добио је Катер за ширину Париза и морску површину:

$$g = 980{\cdot}904 \text{ см.}$$

659. Бордин начин одређивања убрзања поновили су Бјот и Перс (Peirce) и њихова су посматрања, кориговрана од свију утицаја, дала за дужину секундног клатна у Паризу ове вредности:

Борда	$l = 993{\cdot}918$	мет.	на	вис.	67 мет.
Бјот	» 913	»	»	»	74 »
Перс	» 917	»	»	»	74 »

Средња је вредност 993·92 за дужину секундног клатна у безваздушном простору за средњу висину од 72 мет. са сигурношћу од $\frac{1}{100}$ мм.

Према томе убрзање на истом месту износи:

$$g = 980{\cdot}96$$

Дефорж (Defforges) је 1889 год. нашао за Париз 980·96 ;Бесел за Кенигсберг (55° 42') на нивоу источног мора $g = 981{\cdot}44$, за Берлин (52° 30') $g = 981{\cdot}28$.

660. Убрзање g на разним географским ширинама. — Убрзање земљине теже није једно исто на разним географским ширинама. Та промена наступа из два разлога:

1. Због ц.фугалне силе која се јавља због обртања земљина око осе и

2. Због спљоштености земљине на половима.

Она прва промена је много већа и важнија и ево колико она износи на екватору. Ако са g означимо право убрзање на екватору а са f центрифугалну силу, онда је резултујуће убрзање, т. ј. оно које клатно непосредно даје:

$$g_0 = g - f.$$

Међутим је:

$$f = \frac{4 R\pi^2}{T^2} = \frac{2\pi \cdot 40000000}{(86164)^2} = 0{\cdot}0339 \text{ мет.}$$

те дакле:

$$g_0 = g - 0{\cdot}0339.$$

Непосредно нађена вредност g_0 на екватору из посматрања клатна износи:

$$g_0 = 9{\cdot}7807 \text{ мет.}^*$$

Центрифугално дејство на екватору износи дакле:

$$\frac{f}{g} = \frac{0\ 0339}{9{\cdot}7806} = \frac{1}{289} \text{ теже.}$$

---

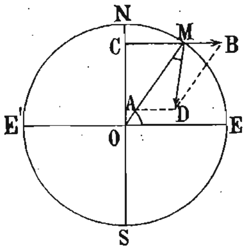
* Ову вредност за g_0 усвојио је Вијол (Violle) у свом уџбенику, према резултатима Broch-а од 1881 год. Иначе је најчешће употребљена вредност за $g = 9{\cdot}7801$, коју је одредио Сабин (Sabine).

Према томе је:

$$g_0 = g\left(1 - \frac{1}{289}\right)$$

Пошто је $289 = 17^2$, то значи да би убрзање на екватору било равно нули кад би се земља 17 пута брже обртала око осе (576).

661. За остала места на земљи можемо одредити дејство ц.фугалне снаге довољно тачно, кад узмемо да је земља потпуна лопта. С том претпоставком би на јединици масе M на геоцентричкој ширини φ дејствовало најпре средиште земљино правцем полупречника MO снагом $MA = g$ (сл. 295.), а затим центрифугална сила $MB = f'$ правцем полупречника CM одговарајућег паралелног круга. Ово последње дејство износи:



Сл. 295

$$f' = \frac{4\,R\pi^2}{T^2} \cdot \cos\varphi = f\cos\varphi = 0{\cdot}0339\cos\varphi$$

Обично се овде тражи она компонента од f' која иде правцем полупречника, наравно у супротном смислу тежи. Та компонента онда износи:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1\cos\varphi \\ &= f\cos^2\varphi \\ &= 0{\cdot}0339\cos^2\varphi. \end{aligned}$$

Међутим, права тежа $MD = g_\varphi$, јесте резултанта из MB и MA и она је прави узрок тежини тела на том месту· Према томе тежина некога тела јесте она сила која долази од стварног и правог убрзања g_φ у којој се већ налази дејство центрифугалне силе, те није потребно да се засебно изводи и рачуна. Вертикала MD за то место не иде ка средишту земљином; али како површина мирне течности стоји управно на ту вертикалу, то је јасно да је кугласт облик равнотежни облик само за мирне масе, али не и за масе које се око осе окрећу.

Из тога се разуме да земља мора имати облик спљоштене лопте или облик елипсоида. Географска ширина тачке M јесте угао φ_1, који заклапа управна MD тога места са екватором EE_1; али како је MB врло мало, то се и тај угао φ_1 врло мало разликује од геоцентричне ширине φ.

Решењем троугла MDB имамо:

$$\begin{aligned} MD = g_\varphi &= \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{MB}^2 - 2\,\overline{BD}\,\overline{MB}\cos(180-\varphi)} \\ &= \sqrt{g^2 + f^2\cos^2\varphi - 2\,gf\cos^2\varphi} \\ &= g\sqrt{1 - 2\frac{f}{g}\cos^2\varphi + \frac{f^2}{g^2}\cos^2\varphi} \end{aligned}$$

или заменом $\frac{f}{g}$ и изостављањем квадрата и виших степена и иначе мале количине $\frac{f}{g} = \frac{1}{289}$ биће:

$$g_\varphi = g\sqrt{1 - \frac{2}{289}\cos^2\varphi}$$

Међутим је:

$$g\left(1 - \frac{1}{289}\right) = g_0$$

стога је најзад:

$$g_\varphi = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\sin^2\varphi\right) = 9{\cdot}7807 + 0{\cdot}003456\sin^2\varphi.$$

Угао α који заклапа вертикала MD с полупречником MO добива се из сразмере:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{AD}{MD} = \frac{f\cos\varphi}{g_\varphi}$$

пошто је α врло мало, можеме написати:

$$\alpha = \frac{f}{g_\varphi}\cos\varphi\sin\varphi$$

или:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{289}\sin 2\varphi = \frac{1}{578}\sin 2\varphi$$

кад место g_φ узмемо g, пошто је и иначе разлика између њих врло мала.

Скретање тежног правца од полупречника је дакле на полу и екватору равно нули, а највећу вредност достиже за $\varphi = 45^0$ и то $0^0\,11'\,30''$. Према томе је геоцентрична ширина $\varphi = 44^0\,48'\,30''$.

662. Сем горе изведене промене теже земљине због центрифугалне силе, тежа се мења на разним местима на земљи и због спљоштености њене, и то у два сасвим супротна смисла. Идући од полова ка екватору свака тачка на земљиној површини све се већма удаљује од средишта земљина, а услед тога опада привлачна снага земљина. С друге стране пак, идући ка екватору, маса која привлачи расте услед набора екваторског, па дакле онда и привлачење расте. Међутим, ово је растење сразмерно маси, а горње опадање изврнуто сразмерно квадрату одстојања, због тога опадање знатно преовлађује и обично се овај прираштај привлачења услед набора занемарује. Математичком анализом налази се, да оба ова утицаја, као и онај због центрифугалне силе, зависе од $\sin^2\varphi$. Па како је резултујућа промена теже алгебарски збир сва три горња утицаја, који зависе сви од $\sin^2\varphi$, то се онда та промена представља овим заједничким обрасцем:

$$g_\varphi = g_0\left(1 + \frac{1}{193}\sin^2\varphi\right)$$

Разломак $\frac{1}{193} = 0{\cdot}00519$ јесте алгебарски збир сва три коефицијента од $\sin^2\varphi$. Најчешће се пак горњи образац пише у овом облику:

$$g_\varphi = 9{\cdot}7807 + 0{\cdot}00508\sin^2\varphi \quad \cdots\cdots \quad (304$$

или ако се употреби Сабинова вредност:

$$g_\varphi = 9{\cdot}7801 + 0{\cdot}00508\sin^2\varphi. \quad \cdots\cdots \quad (305$$

663. Променом убрзања g мења се и дужина секундног клатна:

$$l = \frac{g}{\pi^2}.$$

Према томе ће бити:

$$l_\varphi = l_0\left(1 + \frac{1}{193}\sin^2\varphi\right)$$

или

$$l_\varphi = 0{\cdot}99100 + 0{\cdot}00514\sin^2\varphi.$$

Из овога обрасца излази да се дужина секундног клатна промени од пола до екватора отприлике за пет милиметара.

Вредности за g и l на разним геогр. ширинама:

φ	g	l
0^0	9·7801	0·99093
40^0	9·8011	0·99306
45^0	9·8055	0·99350
50^0	9·8099	0·99395
60^0	9·8182	0·99479
90^0	9·8109	0·99608

664. На географској дужини, на којој се Београд налази, варијација убрзања теже износи 0·0009 мет. или 0·9 м.м. За цео један степен. Стога и није потребно за израчунавање убрзања узети тачну вредност минута и секунада за нашу ширину, већ се без знатне погрешке може за Београд узети вредност за $\varphi = 45^0$, т.ј.:

$$g_{\text{в}} = 9{\cdot}8055 \text{ мет.} = 9{\cdot}806 = 9{\cdot}81 \quad \cdots \quad (306$$

а за дужину секундног клатна:

$$l_{\text{в}} = 0{\cdot}99357 \text{ мет.} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (307$$

Више пута се убрзање теже као и дужина секундног клатна за разне географске ширине упоређују са вредностима за $\varphi = 45^\circ$. За тај случај служе ови обрасци:

$$g_\varphi = g_{45}\left(1 - \frac{1}{386}\cos 2\,\varphi\right)$$

$$= 9{\cdot}806\,(1 - 0{\cdot}00259\cos 2\,\varphi)\ \text{мет.} \cdot \quad (308$$

и за секундно клатно:

$$l_\varphi = 0{\cdot}99357\,(1 - 0{\cdot}00259\cos 2\,\varphi)\ \text{мет.} \cdot \cdot \quad (309$$

665. **Убрзање g на разним висинама.** — Горе одређена вредност за g вреди за морску површину. Међутим се g мења пењањем у висину, и ако вредност за убрзање на некој висини h означимо са g_h и земљу сматрамо као лопту полупречника R, имаћемо:

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

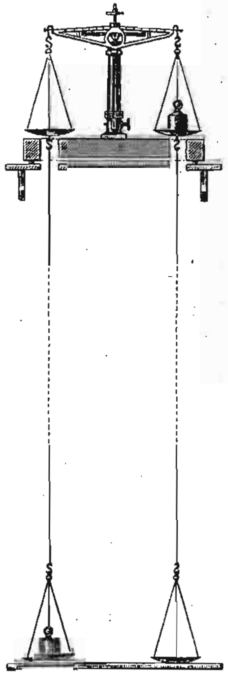
Кад за R узмемо средњу вредност од $R = 6371000$ мет., онда је $\frac{1}{R} = 0{\cdot}000000\,16$, па зато можемо $\frac{h^2}{R^2}$ слободно изоставити и горњи образац написати:

$$\frac{g_h}{g} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{R}}$$

или са истом приближношћу:

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g\,(1 - 0{\cdot}000000\,314h) \cdot \cdot \quad (310$$

666. Опадање теже с висином доказао је Жоли (Jolly) оваквим експериментом. Једне врло осетљиве теразије (сл. 296) намештене су $5^1/_2$ метара високо изнад патоса лабораторије. Постоље теразија је пробушено и о тасове теразија обешена су друга два једнака таса о врло танке жице. Одстојање горњих тасова од доњих било је 5·29 мет. Кад се у оба горња таса метне по један килограм, теразије остају у равнотежи, али кад се с једне стране килограм спусти у доњи тас показало се да је сада горњи килограм за 1·5099 мгр. лакши.

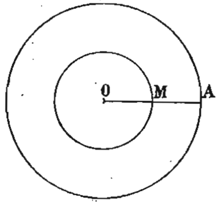


Сл. 296.

667. **Убрзање g у унутрашњости земљиној.** — Рецимо да је земља потпуна лопта и да јој је маса хомогена, па посматрајмо неку тачку M у њеној унутрашњости (сл. 297). Кроз ту тачку M опишимо из средишта o један круг (односно лопту), онда је дејство масе између концентричних кугала A и M на ту тачку M равно нули. Дејство земље на ту тачку M своди се сад на дејство језгра oM, које се опет тако понаша, као да му је сва маса концентрисана у средишту o. Означимо $oM = \varrho$, густину земље са γ и убрзање теже у тачки M са g_1 онда је:

$$g_1 = \frac{f\frac{4}{3}\pi\varrho^3\gamma}{\varrho^2} = \frac{4}{3}f\pi\gamma\varrho \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (311$$

а то значи, да је убрзање сразмерно одстојању посматране тачке од средишта земљина. На слици 298 представљене су промене убрзања g графички како за тачке изнад земљине површине тако и за оне, што су у унутрашњости њеној.

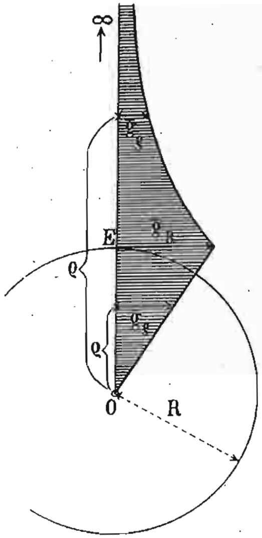


Сл. 297.

668. Међутим земљина лопта није хомогена; дубљи њени слојеви много су гушћи од слојева ближих површини. Узевши да је земља састављена из концентричких хомогених слојева, као што је то отприлике у ствари, и претпоставивши да густина тих слојева од средишта ка површини с

квадратом одстојања од средишта опада, онда је Рош (Roche) нашао да се убрзање у унутрашњости земљиној може представити овим обрасцем:

$$g_1 = g\,1{\cdot}92\,\varrho\left(1 - \frac{12}{25}\varrho^2\right) \cdot \quad (312$$



Сл. 298.

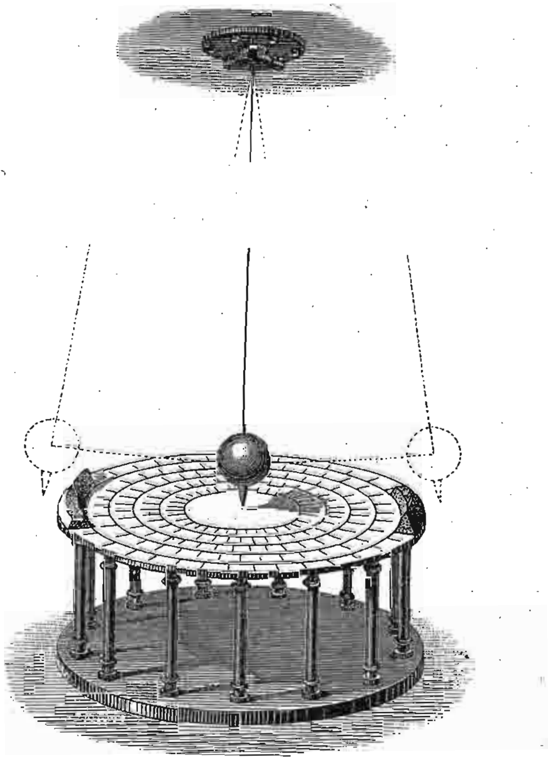
То пак значи, да ће убрзање до на дубину од $^1/_6$ полупречника земљина расти и ту имати вредност $^{16}/_{15}\,g$; одатле ће опет опадати и на даљини $^1/_3$ полупречника имати исту вредност као и на површини.

Најдубљи руднички бунари су једва један километар дубоки, стога се непосредним опажањем горњи образац не може оверити. Међутим је *Ери* (Airy) у једном угљеном мајдану констатовао, да је g порасло за $\frac{1}{19200}$ део у дубини од 384 мет., а та се вредност скоро сасвим слаже с горњим обрасцем.

669. **Доказ земљина обртања.** — По другом основном закону о клатну, видели смо, да док се клатно клати слободно, његова се раван клаћења не мења. Ову особину клатна употребио је француски физичар *Фуко* (Foucault) да помоћу клатна непосредно докаже обртање земљино око осе. Тога ради он је једну тешку бакарну куглу од 28 кгр. тежине обесио о челичну жицу од 67 мет. дужине за таваницу кубета на Пантеону париском и пустио је да слободно клати правцем меридијана. Време једнога клаћења износило је 16·42 сек. На доњој страни кугле утврђен је један шиљак, који је на две наспрамне гомилице влажног песка урезивао бразде оних равни у којима се клатно клати. После извесног времена клаћења видело се да је раван клаћења скренула из првобитног положаја. Распоред експеримента види се у смањеном и скраћеном обиму на сл. 299. Пошто на основу горњег закона клатно није могло напустити своју раван клаћења, то је горње скретање дошло услед обртања подлоге на којој је клатно урезивало бразде,

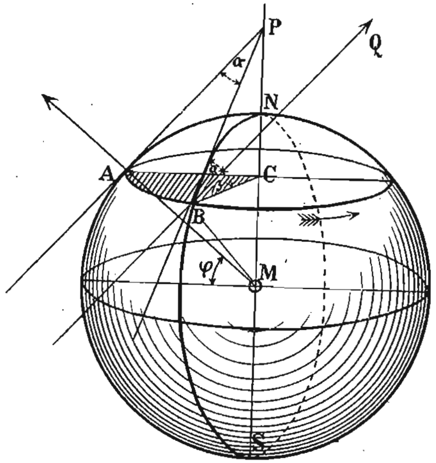
т. ј. услед обртања земљина на којој се та подлога налазила.

Кад би клатно било обешено изнад самога пола земљина, онда би подлога испод клатна, т. ј. земља



Сл. 299.

за 24 сахата скренула за 360°. Напротив на екватору кад се клатно пусти да се клати правцем меридијана, скретања неће бити, јер клатно остаје самом себи паралелно. На другим географским ширинама, међутим, ствар није тако проста. Нека се клатно налази на месту A (сл. 300), чија је геогр. ширина φ и нека се клати правцем меридијана тога места SAN. Овде ће бити MA вертикала, AP хоризонтална тангента у тачки A на меридијану изнад кога клатно почиње да клати, а P тачка у којој та тангента пресеца осу земљину. После извесног времена тачка A долази по свом паралелном кругу (са средиштем у c,) у тачку B, тангента на меридијан иде правцем BP, а раван клаћења клатна, оставши сама себи паралелна, иде правцем BQ, где је $BQ \parallel AP$. Угао за који је сада скренула раван клатна према меридијанској равни јесте $PBQ = APB = \alpha^0$. Угао пак који је постао скретањем полупречника паралелног круга из положаја AC у BC износи $ACB = \beta^0$. Из слике имамо:



Сл. 300.

$$\text{лук } AB = \frac{2\pi \cdot \overline{AP}\alpha}{360}$$

и тако исто:

$$AB = \frac{2\pi\overline{AC}\beta}{360} = \frac{2\pi\beta}{360}\sin\varphi$$

јер је $APC = CAM = \varphi$.

Деобом те две једначине имамо:

$$1 = \frac{2\pi \cdot \overline{AP}\alpha \cdot 360}{2\pi\beta \cdot \overline{AP} \cdot \sin\varphi \cdot 360}$$

одакле најзад:

$$\alpha = \sin\varphi. \quad \dots\dots\dots \quad (313$$

За $\varphi = 90^0$ биће $\alpha = \beta$, т. ј. на половима раван клатна привидно се окреће истом брзином као и земља, т. ј. опише цео круг од 360^0 за 24 сахата. Напротив за $\varphi = o$, т. ј. за екватор, раван клатна не скреће никако, јер су и све меридијанске тангенте на екватору међу собом паралелне:

$$\text{За Београд је } \varphi = 44^0\,48^0$$

према томе:

$$\alpha = \beta \sin 44^0\,48' = 0{\cdot}70463\,\beta.$$

Угао за који ће правац меридијана у Београду скренути од равни клатна у току од једнога сата биће пошто је $\beta = 15^0$:

$$\alpha = 10^0\,34'$$

а за 24 сата, пошто је $\beta = 360^0$:

$$\alpha = 253^0\,40'$$

Време пак, за које би то скретање изнело 360^0, износи за Београд:

34·06 сахати.

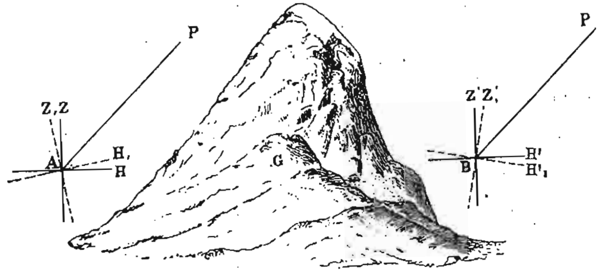
Те исте вредности износе:

МЕСТО	φ	$\sin\varphi$	α		време јед. обрта
			за 24 сах.	за 1 сах.	
пол.	90	1·000	360	15^0	24 сах.
Петроград . . .	$59^0\,56'$	0·865	$311{\cdot}40^0$	$12{\cdot}97^0$	28·05
Берлин	$52^0\,31'$	0·793	$285{\cdot}48^0$	$11{\cdot}89^0$	30·27
Париз	$48^0\,50'$	0·753	$274{\cdot}80^0$	$11{\cdot}45^0$	31·44
Рим	41 54	0·668	$240{\cdot}48^0$	10·16	35·42

Пре кратког времена је Берже (Berget) тако изменио тај Фуколов експеримент, да се обртање земљино може констатовати и у свакој лабаторији.

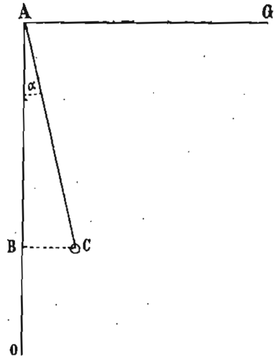
670. Густина земље. — Има више начина да се помоћу клатна одреди средња густина земљина. Ми ћемо главније прегледати.

1. Најпре је употребио клатно за одредбу густине земље *Маскелин* (Maskelyne 1775. и 1778.), одређујући скретање клатна од вертикале, кад се налази у близини каквога брега. Маскелин је посматрао скретање клатна у близини конусног брега Сехалија (Shehalie) у Шкотској (сл. 301). У меридијанској равни која пролази кроз тежиште брега изабрао је Маскелин две станице A и B, које ћемо ми замислити (да би ствар била простија) да су у истој висини с тежиштем брега. Кад не би било брега, онда би разлика полних висина PBH' и PAH одређених на тим станицама била равна разлици њихових географских ширина $\varphi'-\varphi$. Услед привлачења брега обе су вертикале AZ и BZ' нагнуте и заузимају правац AZ_1 и BZ'_1; због тога је полна висина код A смањена на PAH_1 а у B повећана на PBH'_1. Разлика обеју полних висина износи дакле:



Сл. 301.

$$PBH'_1 - PAH_1 = \varphi' - \varphi + \alpha.$$



Сл. 302.

Посматрањем се непосредно одреди PBH'_1 и PAH_1; пошто је још φ' и φ познато, то је и α, тиме дато. (Маскелин је нашао $\alpha = 11{\cdot}66''$.).

Нека правац теже, у једној станици, на пример A, иде по правој AO (сл. 302), а привлачење од стране брега правцем AG; прво привлачење износи $P = \frac{Q \cdot q}{R^2}$ а друго $P' = \frac{Q'q}{r^2}$ где је Q тежина земље, Q' тежина брега и q тежина клатна; R полупречник земљин и r одстојање тежишта брега од клатна. Због заједничког дејства та два привлачења вертикала је скренута правцем AC и онда из слике имамо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P'}{P} = \frac{\frac{Q'q}{r^2}}{\frac{Qq}{R^2}}$$

$$= \frac{Q'R^2}{Qr^2}.$$

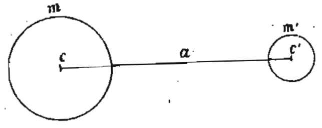
Тежина земље, ако јој је густина $= \gamma_0$ биће, $\,^4/_3 R^3 \pi \gamma_0$; тежина брега која се одреди $v\gamma$, — онда је:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{v\gamma}{^4/_3 R \pi r_1{}^2 \gamma_0}$$

или најзад:

$$\gamma_0 = \frac{v\gamma}{^4/_3 R \pi r^2} \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (314$$

Маскелин је нашао да γ_0 износи у округлој цифри 5. Код ове методе није довољно сигурно v и r.



Сл. 303.

671. 2. Много је поузданија и осетљивија метода коју је употребио *Кевендиш* (Cavendish 1798 г.) и оснива се на непосредном привлачењу маса.

Нека су m и m' (сл. 303), масе двеју кугала на одстојању а. Њихово је привлачење дато обрасцем:

$$P = \frac{kmm'}{a^2}.$$

У исти мах на мању, покретну куглу утиче и привлачна снага земљина снагом:

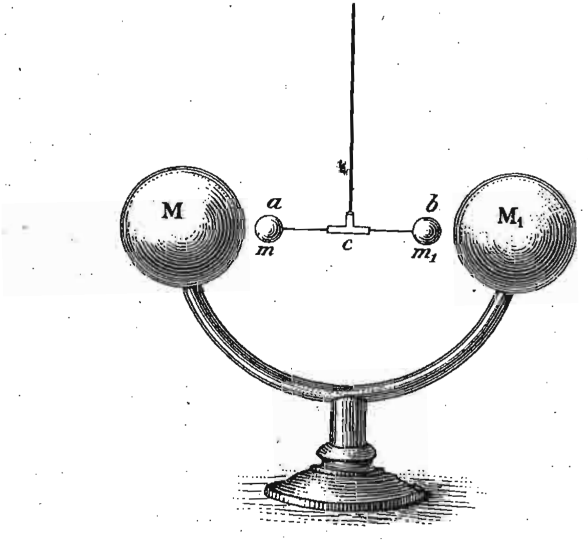
$$m'g = \frac{kMm'}{R^2}$$

где је M маса земљина и R њен полупречник. Из та два привлачења добивамо однос:

$$\frac{P}{m'g} = \frac{mR^2}{Ma^2}$$

из кога можемо израчунати масу земљину M, па дакле и њену густину кад се привлачење P непосредно експериментом одреди.

За одредбу привлачења P употребио је Кевендиш хоризонтално торсионо клатно обешено о танак металан конац, да се клати или да скрене под утицајем привлачења двеју великих и тешких оловних кугала **M** и M_1. Распоред експеримента уопште представљен је на сл. 304. По себи се разуме, да је поред клатна намештена скала за одређивање скретања клатна или времена његова клаћења, и да се те вредности читају и одређују кроз дурбине. Тачан распоред експеримента показује сл. 305. Мале металне кугле на хоризонталном клатну биле су тешке 730 гр., а обе оловне кугле 158 кграма.

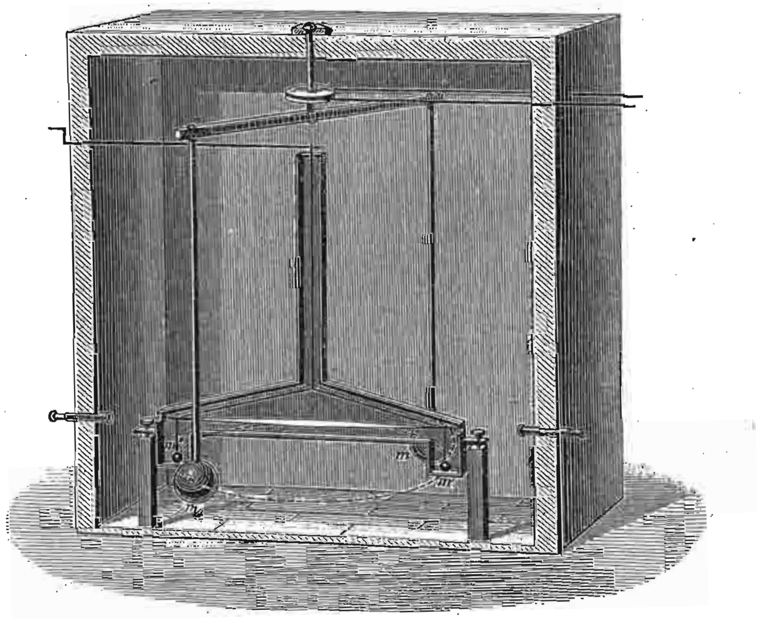


Сл. 304.

Тешке оловне кугле поставе се најпре тако, да линија која спаја њихова средишта стоји управно на линији која спаја куглице клатно. У том положају на хоризонтално клатно не утичу оловне кугле, и кад се клатно пусти да се клати, оно ће се, као што знамо, клатити по обрасцу.

$$t = \pi\sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M}}}$$

Хоризонтална шипка, која на својим крајевима носи куглице клатна, била је од лаког јеловог дрвета и при одредби момента инерције њена се тежина може слободно занемарити. Моменат инерције двеју куглица, сматрајући их као две тешке тачке маса m^1 и на одстојању l од осе, биће $2\,m^1\,l^2$, те према томе:



Сл. 305.

$$t = \pi\sqrt{\frac{2\,m^1\,l^2}{\mathfrak{M}}}$$

одакле је опет

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi^2 m' l^2}{t^2}.$$

Пошто се моменат на тај начин одреди, јер је све с десне стране познато, принесу се велике оловне кугле клатну, до на врло малу даљину, и то тако да сва четири тежишта кугала леже у једној равни. Велике ће кугле привући мале и тиме жицу, о коју ове последње висе, мало упрести. Клатно ће се полако клатити око равнотежног положаја, и тај се равнотежни положај на скали одређује као и код теразија читањем поделака с једне и друге стране тога положаја. Нека је на пр. под утицајем оловних кугала клатно скренуло за n_1 поделака према куглама, рачунајући то очевидно од оног равнотежног положаја, који клатно заузима кад је слободно, (т. ј. кад су оловне кугле с њим биле укрштене). Сад се велике кугле принесу с друге стране куглицама клатна и то симетрично првом положају, па се опет одреди скретање клатна на супротну које ће сада изнети рецимо n_2 поделака на скали. Средња вредност биће $\frac{n_1 + n_2}{2} = n$.

Ако је δ одстојање двеју подела на скали, онда цело скретање клатна износи $n\delta$, а угао за колико је жица клатна упредена $\frac{n\delta}{l}$; моменат терсионог спрега износи $\mathfrak{M}\frac{n\delta}{l}$. Привлачење једне оловне кугле на одговарајућу куглицу клатна $= P$; моменат тога привлачења је Pl. Па како је толико исто дејство и оне друге кугле, то је цео привлачни моменат $2Pl$. За равнотежу мора моменат торсиони бити раван привлачном моменту, т. ј.:

$$2Pl = \mathfrak{M}\frac{n\delta}{l}.$$

ад заменимо $\mathfrak{M}$, имаћемо:

$$P = \frac{\pi^2 m^1 n\delta}{t^2}$$

кад ову вредност за P заменимо у напред нађену једначину за $\frac{P}{m^1 g}$ добивамо однос:

$$\frac{\pi^2 n\delta}{gt^2} = \frac{mR^2}{Ma^2}$$

одакле се однос између масе земљине M према маси m оловне кугле непосредно одређује.

За одредбу густине земљине γ_0 из густине оловних кугала γ заменићемо $M = \frac{4}{3}R^3\pi\gamma_0$ и $m = \frac{4}{3}r^3\pi\gamma$. Горња једначина сада добија овај облик:

$$\frac{\pi^2 n\delta}{gt^2} = \frac{r^3\gamma}{a^2R\gamma_0}$$

одакле је најзад

$$\gamma_0 = \frac{gt^2 r^3\gamma}{\pi^2 n\delta a^2 R} \quad \ldots\ldots\ldots (315$$

Кевендиш је употребио за своје хоризонтално клатно две разне жице, и то једну тању код које је време једнога клаћења $t = 14$ мин. $= 840$ сек., а цело скретање $n\delta = 16$ поделака на скали $= 0{\cdot}766$ енгл. цола, јер је δ било $= 0{\cdot}0479$ цоли. С дебљом жицом било је $t = 7$ мин. $= 420$ сек. и $n\delta = 5{\cdot}7$ $\delta = 0.272$ цоли.

Из 29 посматрања нашао је Кевендиш да је средња вредност густине земљине:

$$\gamma_0 = 5{\cdot}48.$$

672. Пошто је кора земљина састављена од материја (вода камен и т. д.) чија је густина знатно мања, то следује да густина земљина према средишту расте. Ако рачунамо густину γ_1 на одстојању d од средишта земљина (d ваља изразити у јединицама полупречника земљина) онда је *Рош* (Roche) нашао да се за тај случај може употребити образац:

$$\gamma_1 = 10{\cdot}6\left(1 - \frac{4}{5}d^2\right)$$

По том обрасцу, средња густина земљине коре била би 2·1 а у средишту 10·6.

673. Метода Кевендишева је доцније више пута понављана. Најпре се њоме послужио *Рајх* (Reich 1852.); он је читао скретања клатна у огледалу (по Погендорфовој методи), а клатно обесио бифиларно. Апарат је био намештен у једном руднику у Фрајбергу. те је био сачуван од температурских утицаја. Први низ посматрања, извршен 1837. год., показао је $\gamma_0 = 5·49$, а други извршен 1849. год. дао је:

$$\gamma_0 = 5·5$$

Доцније је та мерења поновио Бали (Baily 1843.) по налогу лондонског астрономског друштва и нашао да је средња вредност:

$$\gamma_0 = 5·67.$$

Између 1870. и 1878. одређивали су густину земље *Бај* (Baille) и *Корни* (Cornu) заједнички. Ови се експерименти могу сматрати као најсавршенији те врсте. Полуга клатна направљена је од алуминијумске цеви 50 см. дугачке и на њеним крајевима биле су утврђене две бакарне куглице од по 109 гр. У средини полуге намештено је огледало за читање поделака скале у durбину са даљине 5·60 мет. Жица о коју је полуга обешена била је од сребра и о њу је висила полуга више од једне године пре првог мерења. Место двеју оловних кугала употребљене су сада четири шупље гвоздене лопте од по 12 сантим. у пречнику, па су две и две помоћу шмрка пуњене живом, која је била сад привлачна маса. Тиме је избегнуто кретање тешких кугала и сваки потрес. Једном речи, о свима се утицајима водио најстрожији рачун, те се могу и резултати овим путем добивени сматрати као најпоузданији. Средња вредност густине земље коју су ова мерења дала износи:

$$\gamma_0 = 5·50.$$

674. — 3. По трећој методи одређује се густина земљина на тај начин, што се посматра клаћење клатна на површини земљиној и у дубини њеној, на пр. на дну каквога бунара. Њоме се послужио *Ери* (Airy, 1856).

Кад је клатно на дну бунара, онда га привлачи оно језгро земљино што је између дна бунара до средишта земљина чија је густина γ и полупречник r. Кад је клатно на површини, онда привлачи оно језгро и још онај слој што је између дна бунара и површине земље; дебљина је његова h а густина γ. Из убрзања g на површини и g_1 на дну бунара може се γ одредити, кад се зна (наравно само приближно) густина горњега слоја γ. Запремина језгра је $\frac{4}{3} r^3 \pi$ а целе земље $\frac{4}{3} (r + h)^3 \pi$; запремина слоја пак равна је разлици те две вредности и износи:

$$\frac{4}{3} [(r + h)^3 - r^3] \pi$$

Према томе маса језгра је $\frac{4}{3} r^3 \pi \gamma_0$ а маса слоја $\frac{4}{3} [(r+h)^3 - r^3] \pi\gamma$.

Пошто је убрзање сразмерно маси а изврнуто квадрату одстојања, то ће оно на површини земљиној бити:

$$g = k \frac{\frac{4}{3} \pi \left\{ r^3 \gamma_0 + [(r + h)^3 - r^3] \gamma \right\}}{(r + h)^2}$$

Како је даље, r врло велико према h, то се могу квадрати и виши степени без велике погрешке изоставити, па се добива:

$$g = k \frac{4}{3} \pi \left[\frac{r(\gamma_0 - \gamma)}{\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} + (r+h)\gamma \right]$$

Или кад се још стави:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{r}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{2h}{r}} = 1 - \frac{2h}{r}$$

биће:

$$g = k \frac{4}{3} \pi [(r - 2h)(\gamma_0 - \gamma) + (r + h)\gamma]$$

$$= k \frac{4}{3} \pi [(r - 2h)\gamma_0 + 3h\gamma]$$

На дну бунара биће:

$$g_1 = \frac{k\frac{3}{3}\pi r^3\gamma_0}{r^2} = k\,\frac{4}{3}\pi\, r\,\gamma_0$$

Однос тих двеју вредности даје:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{1}{r}\left[(r - 2\,h) + 3h\frac{\gamma}{\gamma_0}\right]$$

одакле је најзад

$$\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{1}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g_1}\right)\frac{r}{3h}} \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (316$$

Ери је нашао да је средња густина горњега слоја $\gamma = 2{\cdot}75$. Да би се нашао однос $\frac{g}{g_1}$ посматрано је клаћење клатна на дну бунара и на површини; тако је констатовано да се за 24 сахата клатно на доњој станици за $2\frac{1}{4}$ сек. брже клати од онога на горњој станици. Према томе:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{86400}{86402{\cdot}25}$$

или приближно:

$$1 - \frac{g}{g_1} = \frac{2.2{\cdot}25}{86402{\cdot}25} = \frac{1}{19200}$$

Однос $\frac{r}{h}$ био је 16600.

Према свему томе је:

$$\gamma_0 = 6{\cdot}57.$$

675. Сем горе поменутих разних одредаба густине земљине по наведеним методама, извршене су још друге одредбе те величине и ми ћемо их ради потпуности овде изложити:

год. 1775. Маекелин	$\gamma^0 = 4{\cdot}71$
1798. Кевендиш	5·48
1837. Рајх	5·40 и 5·58
1843. Бали (Baily)	5·67 и 5·55
1878. Корни и Бај	5·56 и 5·50
1824. Карлини	4·84
1856. Ери	5·48 и 6·57
1878. Поинтинг (Poynting)	5·493
1880. Жоли	5·692±0·068
1885. Вилсинг (Wilsing)	5·580±0·01
1894. Бојс (Boys)	5·5270±0·002
1896. Рихарц (Richarz)	5.505±0·009

676. Гравитациона константа. — У образац за гравитациона привлачења улази сталан сачинилац k, који се назива гравитациона константа и који представља привлачење двеју јединица масе на одстојању јединици (609); ту константу сада можемо одредити. Ако са M означимо масу наше земље, а са R њен полупречник, онда је убрзање g на површини њеној дато обрасцима:

$$g = k\frac{M}{R^2}.$$

одавде је:

$$k = g\frac{R^2}{M}.$$

$$= g\frac{R^3}{{}^4\!/_3\, R^3\pi\gamma_0} = 0{\cdot}75\, g \cdot \frac{1}{R\pi\gamma_0} \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (317$$

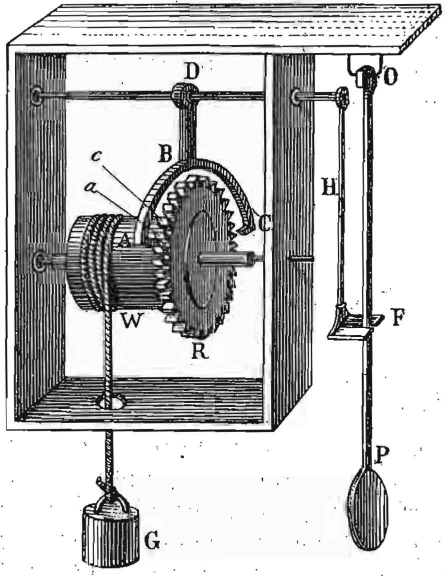
Све ове вредности изразићемо у систему $C.\,G.\,S.$ Пошто се последње, најтачније одредбе γ_0 приближују вредности 5·5, ми ћемо ту цифру усвојити за средњу густину земљину. $R\pi$ је половина земљина обима и у сантиметрима $= 2000.000.000$. За g ставићемо вредност која одговара за $\varphi = 45^0$ т. ј. $g = 980{\cdot}55$. Према томе је

$$k = \frac{0{\cdot}75 \cdot 980{\cdot}55}{2{,}000.000.000 \cdot 5{\cdot}5} = 6{\cdot}70 \cdot 10^{-8}.$$

Две масе од по један грам привлаче се на одстојању од једног сантиметра толико, да кад би једна била утврђена она би друга добила убрзање од $6{\cdot}7 \cdot 10^{-8}$ см.

677. **Сахат.** — Без икакве је сумње да је најважнију и практичну и научну примену нашло клатно код справа за мерење времена или уопште код сахата.

Код свакога сахата, ма какве он природе био, мора бити какве сталне силе која тежи да крене његов механизам. Та је сила код дуварских сахатова обешен терет, а код џепних навијена опруга. Међутим, свака стална сила изазива једнако убрзано кретање и кад би се механизам једнога сахата кретао само под утицајем сталне силе, он би се кретао најпре споро па онда све брже и брже. Да би се то убрзано кретање сахатног механизма спречило, и да би ход сахата био равномеран и једнак, служимо се клатном.



Сл. 306.

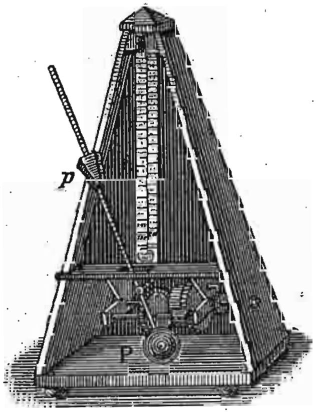
Како се ход једнога сахатног механизма регулише помоћу клатна, види се на сл. 306. На осовини, око које је намотан конац или ланац што носи терет G, утврђен је један зупчаст точак R, чији зупци иду на једну страну. Изнад зупчастог точка налазе се краци полуге ABC, утврђене за осовину D тако, да с клатном P заједно прелазе час на једну час на другу страну и на тај начин западају међу зупце точка час с једне час с друге стране те непрекидно кретање зупчастог точка спречавају. Положај на слици показује, да је крак A зауставио зубац a, па док клатно пређе на другу страну, дотле ће се ослобођен зупчаст точак почети окретати, али ће испод крака A моћи проћи само тај један зубац a, јер ће крак C заићи такође међу зупце и зауставити точак. Кад се клатно врати опет натраг, крак A зауставиће зубац c итд. Док дакле клатно с лева оде на десно и врати се натраг, дотле се зупчаст точак окренуо за један зубац, а док само пређе с једне стране на другу, точак се помакао за половину зупца. Ако точак има 30 зубаца, и ако за његову осовину утврдимо једну казаљку, она ће се у 60 скокова окренути један пут. То би била у исти мах секундна казаљка, ако клатно пређе с једне стране на другу за једну секунду.

Пошто клатно у свом клаћењу има да савлада разне отпоре, оно би се после извесног броја клаћења зауставило. Али кад зубац зупчастог точка наиђе на полугу A или C, која га зауставља, он онда извесном снагом удара о те полуге и на тај начин саопштава клатну извесно врло мало убрзање, које има да потре оне губитке услед отпора, те се тако клатно клати непрекидно.

Код џепног сахата клатно је замењено једним точком замајцем, кога, еластичност једне спиралне опруге, окреће час на једну час на другу страну.

По себи се разуме, да је овако један пут добивено правилно кретање лако пренети одговарајућим зупчастим точковима на друге осовине, за које су утврђене минутне, сахатне или друге казаљке.

678. **Метроном.** — Тако се назива справа представљена на сл. 307., код које је примењено диференцијално клатно и која служи да одреди трајање појединих тактова у музици. Свако поједино клаћење тога клатна, које се разговетно чује, може трајати разно, према већем или мањем одстојању тега p од осовине клаћења. Са те своје особине ова се справа употребљава за означавање музичких тактова најразличнијих трајања, као и за приближна мерења времена у разним експериментима.



Сл. 307.

679. *Задаци.* 1. У каквом односу стоји време клаћења некога металнога клатна специфичке тежине $\gamma = 7 8$ у безваздушном простору према клаћењу тога клатна у ваздуху, кад је на температури $= 0^0$ и 760 mm барометарског притиска његова густина $\frac{1}{770} = \sigma$.

За безваздушан простор имамо:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

а у ваздуху према раније нађеном обрасцу (299.):

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{\delta}{\delta - \sigma}}$$

Однос та два клаћења биће:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta}{\sigma - \delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7 \cdot 8}{7 \cdot 8 - \frac{1}{770}}}} = \frac{1}{1 \cdot 000083}$$

2. За једну шипку без тежине утврђена су на одстојањима $a = 80$ cm и $a_1 = 30$ cm од тачке вешања два терета $p = 3$ кгр. и $p_1 = 2$ кгр.; колика је: *a* дужина редукованога клатна? — *b* време клаћења? — с које су тачке вешања за исте тежине и исто време клаћења, кад се мањи терет намести на $d = 50$ cm *испод* већега?

a. Кад се на клатну налази само једна тешка маса, онда је дужина редукованога клатна, као што знамо, уопште:

$$X = \frac{J}{\mathfrak{M}} = \frac{mr^2}{mr}$$

где је r одстојање тешке масе од тачке вешања. Кад имамо две такве масе као у овом случају, дужина ће бити:

$$X = \frac{J_1 + J_2}{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}.$$

Кад заменимо горње вредности имаћемо:

$$X = \frac{3.80^2 + 2.30^2}{3.80 + 2.30} = \frac{1920 + 1300}{240 + 20} = 70 \text{ см.}$$

b. Према основном обрасцу за клатно имамо:

$$t = \pi \sqrt{\frac{x}{g}} = \sqrt{\frac{70}{981}} = 0 \cdot 8392 \text{ сек.}$$

c. Означимо непознато одстојање већега терета од тачке вешања са y, онда је одстојање мањега $y + 50$. Пошто време клаћења, па дакле и дужина редуцираногa клатна мора остати иста $x = 70$, онда вреди ова једначина:

$$70 = \frac{3y^2 + 2(y + 50)^2}{3y + 2(y + 50)}.$$

Одавде је:

$$x = 15 \pm 25 = +40 \text{ или } -10$$

т. ј. већи се терет мора утврдити или за 40 см испод или за 10 см. изнад тачке и осовине вешања.

VII

О судару

А. О судару уопште

680. Врсте судара. — Кад се два тела тако крећу, да теже да једног извесног момента прођу кроз исту тачку у простору, онда ће се сударити. Том се приликом могу десити врло различите и врло компликоване појаве, али ћемо се ми ограничити само на најважније случајеве.

Пре свега морамо бити начисто са карактеристичким појавама које прате сваки судар. Кад се два тако звана *пластична* или *нееластична* тела сударе, онда се на месту, где се сударе, спљоште и та спљоштеност остане и после свршеног судара. Напротив, кад се сударе *еластична* тела, она се на месту где су се сударила тако исто спљоште, али те спљоштености нестане по свршену судару. Даље, оно време за које траје судар ма какве он природе био, уопште узев, врло је кратко. Ако се на пример сударе две челичне лопте од по 50 гр. с релативном брзином од 50 см, онда ће судар трајати једва $\frac{1}{10000}$ секунде. Притисак који се том приликом између тела дешава, расте до неке извесне вредности, па онда опада. Ако место тог промењљивог притиска узмемо неку извесну средњу вредност, онда се сударна сила јавља као сила извесне коначне вредности, која тако кратко траје, да се за то време положаји сударених тела у простору видљиво не промене. Такве се силе уопште називају тренутним силама; овде се дејство таквих сила специјално назива *импулсом*, а кретања која оне изазову *импулсним кретањима*. За таква кретања постоје ове опште одредбе:

a. Сваки импулс, дејствујући на неку извесну масу, саопштиће јој неку извесну брзину.

b. Производ из масе и саопштене јој брзине раван је производу из силе која импулс производи и трајања импулса.

Ако производ из масе и њене брзине, као што смо то већ раније означили, назовемо *количином кретања*, а производ из тренутне силе и њена трајања назовемо просто *импулсом*, онда се овај други став може овако изрећи:

Количина кретања, коју на неком телу изазове импулс, равна је том импулсу.

Ако на неко тело дејствује какав импулс, на пр. ми неко тело ударимо руком, оно ће стећи неку извесну брзину; ако удвојимо трајање импулса (не мењајући силу), брзина ће бити два пут већа; исто ће се то десити ако трајање импулса не променимо, али силу удвојимо. Напротив, ако један исти импулс дејствује на разна тела, онда ће брзине бити изврнуто сразмерне масама.

680. Што се тиче природе тела, која се могу сударити, сва се тела у том погледу могу поделити на *еластична* и *нееластична* или *пластична*. Према томе могу се сударати тела само еластична или само пластична или еластична и пластична између себе.

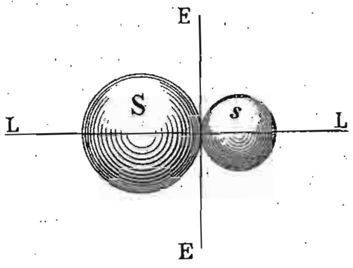
Кад се говори о еластичним и нееластичним телима, онда се прави разлика између *потпуно* и *непотпуно еластичних* и *нееластичних* тела. Ми у природи не налазимо у пондерабилној материји ни потпуно еластичних ни потпуно нееластичних тела у свима границама. У извесним границама пак на пример, кад код еластичних тела силе нису сувише велике, многа се тела могу сматрати као потпуно еластична, као што се код нееластичних тела, кад силе достигне извесну величину, она могу сматрати као потпуно нееластична тела. Уопште и строго узев, сва су пондербилна тела непотпуно еластична односно нееластична.

681. Код сваког судара, био он између еластичних или нееластичних тела, имамо да водимо рачуна:

1) о маси сударених тела, 2) о брзини њиховој, 3) о облику њихову, 4) о правцу кретања и 5) о правцу

судара. Прва четири услова разумеју се по себи; остаје нам да видимо какав може бити правац судара.

Кад се два тела сударе, они морају на ударном месту имати најмање једну додирну тачку. Раван коју би кроз ту додирну тачку повукли била би заједничка додирна или тангенцијална раван; другим речима увек се при судару два тела може у ударној или додирној тачки замислити једна раван *EE* (сл. 308), која ће оба тела у тој тачки додиривати. Управна *LL* на ту раван, а у посматраној додирној тачки, даће нам *правац судара*. У том погледу могу се разликовати ови случајеви:

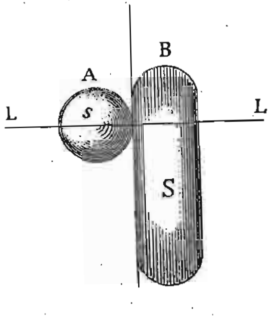


Сл. 308.

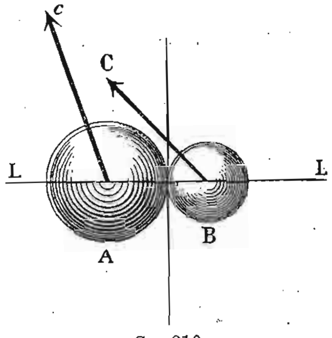
a. Линија, која показује правац судара пролази кроз тежишта сударених тела. Такав се судар назива *централан* (сл. 308).

b. Правац судара не пролази кроз тежишта сударених тела; — *ексцентричан судар* (сл. 309).

Односно правца кретања сударених тела, судар може бити *прав* и *кос*. Код правог судара, крећу се оба тела по линији која показује правац судара (сл. 308).



Сл. 309.



Сл. 310.

Напротив, ако кретање тела не иде правцем судара, онда се каже да је такав судар *кос* (сл. 310).

Најзад може бити да се сударају сасвим слободна тела или да се судар дешава између више или мање неслободних тела.

Према свему овоме судар може бити:

1) *централан или ексцентричан*, 2) *прав или кос*, 3) *између еластичних или нееластичних тела* и 4) *између слободних или неслободних тела*.

682. Прав централан судар нееластичних тела. — Узмимо да се две лопте масе m_1 и m_2 крећу истим правцем и смислом брзинама c_1 и c_2. Кад је брзина задњега тела већа од брзине предњега, онда ће се тела стићи и сударити. Том приликом ће брже тело један део своје брзине пренети на оно спорије и кад им се брзине изједначе продужиће оба тела своје кретање неком средњом брзином c.

Пре судара количина кретања покретних маса била је $m_1 c_1 + m_2 c_2$; после судара та количина износи $m_1 c + m_2 c$. Пошто количине кретања пре и после судара морају остати исте, то је онда:

$$c(m_1 + m_2) = m_1 c_1 + m_2 c_2$$

одакле је:

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (318$$

До истога обрасца можемо доћи и на овај начин:

Губитак бржега тела у брзини биће $c_1 - c$, а добитак споријега: $c - c_2$; према томе кад се те вредности упореде са одговарајућим масама биће:

$$m_1 : m_2 = (c - c_2) : (c_1 - c).$$

Одавде је:

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m' + m_2.}$$

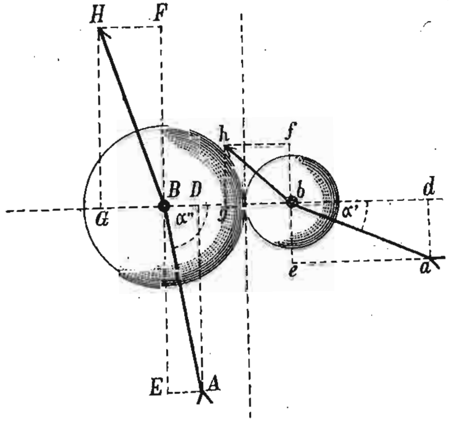
683. Ако је ударено тело било у релативном миру, т. ј. $c_2 = o$, онда отпада члан $m_2 c_2$; брзина покретног тела дели се на оба два тела. — Кад покретно тело удари о нееластичан зид, те кад дакле поред $c_2 = o$ буде још и $m_2 = \infty$, онда је $c = o$ То значи да кад нееластично тело удари о нееластичан зид, оно се по судару заустави. — Кад је поред $c_2 = o$, $m_1 = m_2$, онда је $c = \frac{c_1}{2}$ — Кад је c_1 и c_2 различно од нуле, али је $m_1 = m_2$, онда је $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

— Кад су кретања супротног смисла, онда је c_2 одречно; горњи образац прелази у овај:

$$c = \frac{m_1 c_1 - m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (319$$

За $m_1 = m_2$ и $c_1 = -c_2$ биће $c = o$.

684. Кос централан судар нееластичних тела. — Код косих судара узимају се у рачун само оне компоненте брзина које иду правцем судара; међутим, тангенцијалне компоненте изазивљу било трење на спљоштеним површинама (услед кога настула још и обртање ударених тела), или засебно кретање тим



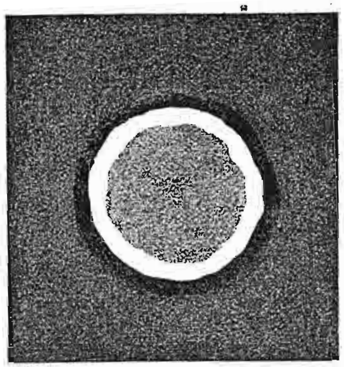
Сл. 311.

тангенцијалним правцем. Нека се две нееластичне лопте B и b
(сл. 311) тако крећу брзинама c_1 и c_2 да њихови правци кретања
заклапају углове α_1 и α_2 с правцем судара (Bb); централне ком-
поненте су сад $bd = c_1 \cos\alpha_1$ и $BD = c_2 \cos\alpha_2$. а тангенцијалне
$be = c_1 \sin\alpha_1$ и $BE = c_2 \sin\alpha_2$. Стога ће сад образац за заједничку
брзину бити:

$$c = \frac{m_1 c_1 \cos\alpha_1 + \text{ɰ}_2 c_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_3} \quad \ldots\ldots \quad (320$$

Ако та заједничка брзина буде $bg = BG$, онда ће се она код оба тела са заосталим тангенцијалним брзинама $be = bf$ и $BE = BF$ комбиновати по паралелограму сила у резултанте bh и BH којима ће се тела после судара кретати.

685. Прав централан судар еластичних тела. — Узимамо да се два еластична тела сударе под истим приликама, као што је то било и код нееластичних тела. Као што смо раније напоменули, и кад се два еластична тела сударе, она се на месту где се сударе спљоште или згњече и због тога ће и овде наступити губитак на брзини бржега тела $C_1 - C$. Да ће се и еластична тела на пр. кугле на сударном месту спљоштити, уверићемо се ако површину једне лопте на месту судара нагаравимо или обојимо. По свршеном судару, показаће се место једне тачке већа или мања кружна површина (сл. 312.) на којој у средини видимо површину која је притискивала и на којој је заиста гар или чађ притиснута била, затим један колут, који показује докле су се површине само додиривале и напослетку један колут (црн) који показује нагомилану чађ, избачену ударом. Код нееластичних се тела цела ствар на томе и свршила, међутим се еластична тела по престанку судара поврате у првобитно стање услед чега се јави реакција на удареним местима, као да су се тела још један пут ударила, те ће и губитак на брзини сада бити два пут већи, т. ј. изнети $2(C_1 - C)$. Пошто је тело пре судара имало брзину C_1 а приликом судара изгубило $2(C_1 - C)$, то ће се по свршену судару кретати брзином:


Сл. 312.

$$C_{01} = C_1 - 2(C_1 - C) = 2C - C_1.$$

На исти начин добивамо да ће добитак ударенога тела бити $2(C - C_2)$ и његова брзина по свршену судару:

$$C_{02} = C_2 + 2(C - C_2) = 2C - C_2.$$

Заменивши вредности за C добивамо:

$$C_{01} = \frac{(m_1 - m_2)C_1 + 2m_2C_2}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \; . \; (321$$

и

$$C_{02} = \frac{(m_2 - m_1)C_2 + 2m_1C_1}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \; . \; (322$$

Ако је $m_1 < m_2$ и једно је тело мирно, онда ће бити:

ако теже тело удара а лакше мирује $(c_1 = o)$: $c_{01} = \frac{2m_2c_2}{m_1 + m_2}$; $c_{02} = \frac{(m_2 - m_1)c_2}{m_1 + m_2}$

ако теже тело мирује $(c_2 = o)$ а лакше удара: $c_{01} = \frac{(m_1 - m_2)c_1}{m_1 + m_2}$; $c_{02} = \frac{2m_1c_1}{m_1 + m_2}$.

Ако у овом последњем случају m_2 буде ∞ велико према m_1, т. ј. ако неко тело m_1 брзином c_1 удари о еластичан зид, онда је:

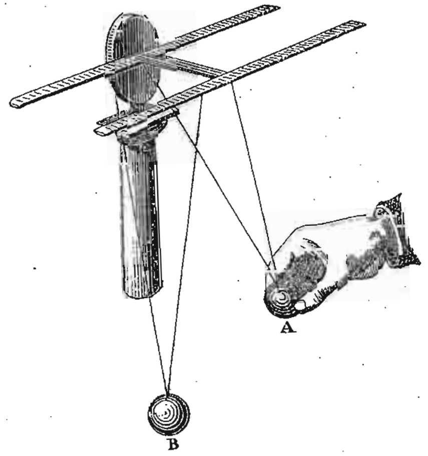
$$c_{01} = \frac{(m_1 - m_2)c_1}{m_1 + m_2} = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)c_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = -c_1$$

а то значи, да ће се тело истом брзином одбити натраг од зида.

Ако се оба тела стигну, а масе су им једнаке, онда је:

$$c_{01} = c_2 \text{ и } c_{02} = c_1$$

т. ј. она су измењала брзине или, како се то још каже, понашају се тако, као да су непромењеним брзинама једно кроз друго прошла. — Кад је поред $m_1 = m_2$, једно тело у миру, онда ће ударено тело продужити кретање онога тела што удара истом брзином, а тело што удара зауставиће се. — Ово се најбоље може оверити апаратом, као што је представљен на слици 313.



Сл. 313.

Кад једна еластична кугла удари о читав низ еластичних кугала, само ће последња лопта у низу одскочити брзином оне што удара, а све ће остале (па и она што је ударила) остати мирне. Исто ће тако одскочити две, три кугле, ако на низ ударе две или три кугле исте величине.

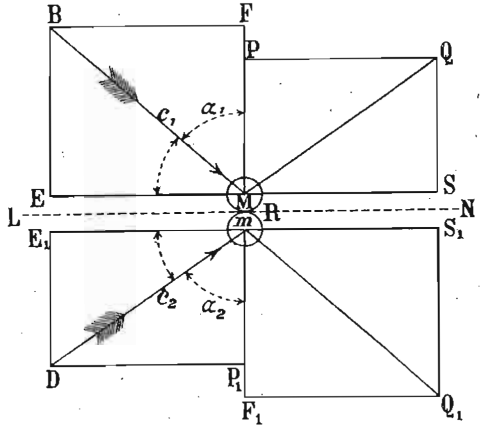
686. Досад смо посматрали сударе еластичних тела кад им је смисао кретања био исти. Ако се таква тела крећу супротним смислом, онда се брзина једнога тела мора узети негативна. Нека то буде брзина c_2; онда горњи обрасци прелазе у ове:

$$C'_{01} = \frac{(m_1 - m_2)\, c_1 - 2\, m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (323$$

$$C'_{02} = \frac{(m_1 - m_2)\, c_2 + 2\, m_1 c_1}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (324$$

За $m_1 = m_2$ биће $C'_{01} = -C_2$ и $C'_{02} = C_1$. Тела ће се одбити изменивши своје брзине.

687. Кос централан судар еластичних тела. — Нека се два тела m и M (сл. 314) сударе под угловима α_1 и α_2 према правцу судара PP_1. Централне ће компоненте брзина бити $c_1 \cos \alpha_1$ и $c_2 \cos \alpha_2$ а тангенцијалне $c_1 \sin \alpha_1$ и $c_2 \sin \alpha_2$. Кад одговарајуће вредности заменимо, једначине за брзину после судара еластичних тела биће:

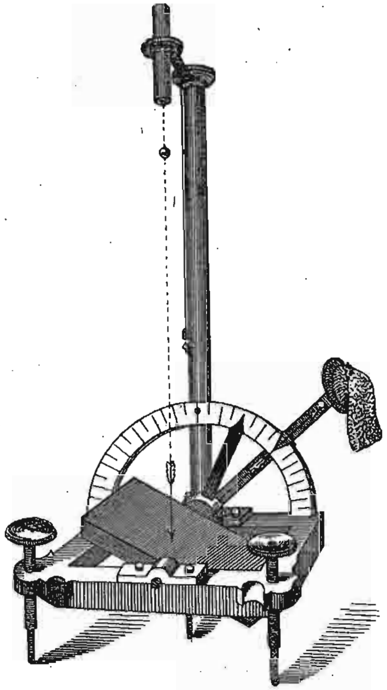


Сл. 314.

$$C_{01} = \frac{(m_1 - m_2)\, c_1 \cos \alpha_1 + 2\, m_2\, c_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots \quad (325$$

$$C_{02} = \frac{(m_2 - m_1)\, c_2 \cos \alpha_2 + 2\, m_1\, c_1 \cos \alpha_1}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots \quad (326$$

Тако добивене централне компоненте брзина слажу се с непромењеним тангенцијалним брзинама у нове резултанте, које су сада MQ и mQ, и које показују у исти мах и правце којим ће се кугле после судара кретати. На случај, да еластична кугла удари косо о еластичан зид, види се да ће угао одбијања бити раван углу упадања. Експериментално се тај случај судара оверава између осталих и апаратом, како га показује сл. 315.



Сл. 315.

В. Енергија при судару.

688. Принцип о конзервацији енергије показаће се друкчије код нееластичних тела а друкчије код еластичних. Код нееластичних тела приликом судара деформација тела остаје стална, те стога се на њу мора утрошити извесна количина енергије, па зато се каже да се судар нееластичних тела врши с губитком енергије. Јер количина енергије пре судара износи $\frac{m_1 C_1{}^2}{2} + \frac{m_2 C_2{}^2}{2}$ а после судара: $\frac{m_1 + m_2}{2} C^2 = \frac{(m_1 C_1 + m_2 C_2)^2}{2\,(m_1 + m_2)}$. Губитак енергије по свршену судару биће:

$$\triangle\, \mathrm{E} = \left(\frac{m_1 C_1{}^2}{2} + \frac{m_2 C_2{}^2}{2}\right) - \frac{(m_1 C_1 + m_2 C_2)^2}{2\,(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \left(C_1 - C_2\right)^2 : \quad \ldots\ldots\ldots \quad (327$$

Количник $\frac{2\, m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$ зове се *„хармонична средина маса“*, па стога вреди овај закон: *Губитак кинетичке*, *енергије (тела), утрошен на деформацију нееластичних тела при судару, раван је производу из половине хармоничне средине маса и половине квадрата разлике брзина.*

Као што се види, тај губитак зависи од масе и брзине сударених тела и може варирати од 0 до 100 процента.*

Ако масе заменимо тежинама, имаћемо:

$$\triangle \mathrm{E} = \frac{Q_1\,Q_2}{2\,(Q_1 + Q_2)g}(C_1 - C_2)^2 \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (328$$

689. Напротив код судара еластичних тела нема никаква губитка енергије. Јер количина енергије пре судара износи $\frac{m_1\,C_1{}^2}{2} + \frac{m_2\,C_2{}^2}{2}$, а после судара $\frac{m_1\,C^0{}_1{}^2}{2} + \frac{m_2\,C_{02}{}^2}{2}$.

Нашли смо напред да је $C_{01} = 2\,C - C_1$ и $C_{02} = 2\,C - C_2$. Према томе биће:

$$C_{01} - C_{02} = C_2 - C_1 \text{ или } C_{01} + C_1 = C_{02} + C_2 \quad \cdot\ \cdot\ (a$$

количине кретања пре и после судара су једнаке:

$$m_1\,C_{01} + m_2\,C_{02} = m_1\,C_1 + m_2 C_2$$

или:

$$m_1\,(C_{01} - C_1) = m_2\,(C_2 - C_{02}) \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ b)$$

Кад помножимо једначину *a* и *b*, имаћемо

$$m_1\,(C_{01}{}^2 - C_1{}^2) = m_2\,(C_2{}^2 - C_{02}{}^2)$$

или:

$$\frac{m_1\,C_{01}{}^2}{2} + \frac{m_2\,C_{02}{}^2}{2} = \frac{m_1\,C_1{}^2}{2} + \frac{m_2\,C_2{}^2}{2}.$$

690. *Примери.* — 1. Два воза од 60000 кгр. и 30000 кгр. тежине сударе се у супротном смислу брзинама $c_1 = 7$ м. и $c_2 = -5$ мет. Колики је рад утрошен на ломљене локомотива и кола, кад се узме да је цео материјал нееластичан?

На основу обрасца 328 имамо:

$$\triangle E = \frac{Q_1\,Q_2}{2\,g\,(Q_1 + Q_2)}(c_1 - c_2)^2 = \frac{60.000 \cdot 80.000\,(7+5)^2}{2.9{\cdot}81\,(60000+80000)}$$

$$= 251640 \text{ мет. кгр.}$$

2. У једном је низу повешано 10 еластичних кугала, тако да су им средишта у једној линији; свака идућа кугла равна је половини тежине оне што је пред њом, и све се кугле додирују.

a. Колику ће брзину имати најлакша, кад најтежа удари ону што је пред њом брзином од 2 метра? — *b.* Којом би брзином требало најтежа кугла да удари, па да најлакша одскочи са 50 мет. брзине? — *c.* Колико је таквих кугала потребно, па да брзина најлакше буде 100 пута већа од брзине најтеже кугле? — *d.* Кад најлакша удари брзином од 2 метра, којом ће брзином најтежа одскочити?

a. Овде ћемо употребити образац за судар два еластична тела, где теже удара а лакше мирује, и то:

$$C_{01} = \frac{2\,m_2\,c_2}{m_1 + m_2}.$$

Ако је однос масе m_2 и m_1 као $1 : r$, т. ј. ако је $m_1 : m_1 = 1 : r$, онда ће $m_1 = m_2 r$; стога је:

$$C_{01} = \frac{(1 + r)\ m_2}{2\,m_2\,c_2}$$

$$= \frac{2}{1 + r}c_2 \text{ или уопште } = \frac{2}{1 + r}c.$$

Кад ова удари другу биће тако исто:

$$C_{02} = \frac{2}{1 + r}c_{01} = \frac{2^2}{(1+r)^2}c$$

$$\text{и уопште } C_{0n} = \frac{2^n}{(1+r)^n}c$$

За наш задатак је $n = 9$, те је онда:

$$C_{0n} = \frac{2^9}{(1 + {}^1/_2)^9}\,2 = \frac{2^{10}}{1{\cdot}5^9} = 26{\cdot}637 \text{ мет.}$$

---

* По себи се разуме, да је та „изгубљена“ енергија тела прешла у друге врсте молекилских енергија, а нарочито у топлоту, звук и т. д.

b. Нека је $c = x$, онда пошто је $C_{0n} = 50$ биће:

$$50 = \frac{2^9\, x}{1{\cdot}5^9}$$

$$x = 50 \cdot (0{\cdot}75)^9 = 3{\cdot}754 \text{ мет.}$$

c. Ако је брзина најлакше лопте q пута већа од брзине најтеже, биће $V_{0n} = qc$ или:

$$Cq = \frac{2^n}{(1+r)^n} \cdot c\,; \quad q = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

одавде је:

$$n = \frac{\log q}{\log {}^4/_3} = \frac{\log 100}{\log 1{\cdot}3333} = 16$$

т. ј. мирних кугала треба да буде $= 16$ или свега 17, па да брзина најлакше буде 100 пута већа од брзине најтеже.

d. Сада је однос изврнут, т. ј. $1 : r = 1 : 2$, те и онда:

$$V_{n0} = \frac{2^9}{(1+2)^9}\; 2 = \left(\frac{2}{3}\right)^9 2 = 0{\cdot}052 \text{ мет.}$$

3. Кад се чекићем од $1^1/_2$ кгр. брзином од 5·6 мет. куца какав јексер од 0·1 кгр. тежине:

a. Колика је енергија чекића? — *b*. Колики је губитак рада? — *c*. Колико се рада троши на укуцавање јексера? — *d*. Кад јексер услед удара 5 м.м. сиђе, колики је отпор дрвета? — *e*. Кад би јексер био пет пута тежи, колики је онда α изгубљени β корисни рад?

a. Енергија чекића је по познатом обрасцу:

$$\frac{mc^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{Q_1 C^2}{g} = \frac{1{\cdot}5 \cdot 5{\cdot}6^2}{2 \cdot 9{\cdot}81} = 2{\cdot}4 \text{ мет. кгр.}$$

b. Губитак рада је:

$$\triangle E = \frac{5{\cdot}6^2\;\; 1{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}1}{2 \cdot 9{\cdot}81 \cdot (1{\cdot}5 + 0{\cdot}1)} = 0{\cdot}15 \text{ мет. кгр.}$$

Овај се рад троши на деформисање јексера као и на произведени звук и топлоту.

c. Остатак 2·4—0·15 = 2·25 м. к. утрошен је на укуцавање јексера, т. ј. на савлађивање отпора дрвета. Он се и овим путем може одредити:

$$R = \frac{1 : 5{\cdot}6^2 \cdot 1{\cdot}5^2}{2 \cdot 9{\cdot}81\,(1{\cdot}5 + 0{\cdot}1} = 2{\cdot}25 \text{ м.к.}$$

d. Кад се тај рад утроши на путу од 5 мм, = 0.005 мет. онда је средњи отпор дрвета:

$$\varrho . 0{\cdot}005 = 2{\cdot}25$$

$$\varrho = 450 \text{ кгр.}$$

e. Кад би тежина јексера била 5 пута већа, дакле = 0·5 кгр., онда би

α штетан рад био:

$$\triangle E = \frac{5{\cdot}6^2 \cdot 1{\cdot}5 \cdot 0{\cdot}5}{2 \cdot 9{\cdot}81\,(1{\cdot}5 + 0{\cdot}5)} = 0{\cdot}6 \text{ м. к.}$$

дакле 4 пута већи но мало час, а

β користан рад:

$$2{\cdot}4 - 0{\cdot}6 = 1{\cdot}8 \text{ м. кгр.}$$

4. Један парни чекић од 8000 кгр. тежине удара брзином од 7 мет. на подметути комад усијана гвожђа. Наковањ с комадом гвожђа што се кује тежак је 56000 кгр.

a. С које висине пада чекић? — *b*. Колика је енергија чекића пре удара? — *c*. Који се део те енергије употреби на сабијање т. ј. на ковање гвоздена комада? — *d*. Који се део њен троши на наковањ, на потресање темеља зграде? — *e*. Кад чекић при удару за 2 см. уђе у гвоздену масу, коликим је то притиском учињено?

a. Висина падања:

$$H = \frac{c^2}{2g} = \frac{7^2}{19{\cdot}62} = 2{\cdot}5 \text{ м.}$$

b. Енергија чекића износи:

$$R = \frac{mc^2}{2} = \frac{QC^2}{2g} = QH = 8000 \times 2{\cdot}5 = 20000 \text{ мет. кгр.}$$

c. Од тога се утроши на ковање:

$$\Delta E = \frac{c^2}{2g} \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)} = H \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)}$$

$$= \frac{2{\cdot}5 \cdot 8000 \cdot 56000}{56000 + 8000} = 17500 \text{ мет. кгр.}$$

d. Према томе на споредне радње утрошено је:

$$R = 20000 - 17500 = 2500 \text{ м. кгр.}$$

e. Кад је упадање чекића у гвоздену масу (2 см.) мало према висини с које чекић пада (2·5 м.), онда се рад који врши тежа на оном малом путу може занемарити, те се и отпор онда одређује као и малочас:

$$\varrho \cdot 0{\cdot}02 = 17500$$

одакле:

$$\varrho = 875000 \text{ кгр.}$$

5. Једно потпуно еластично тело пало је вертикално на једну раван, која с хоризонтом заклапа угао од 15°, и пошто је одскочило пало је 30 метара далеко од тог места. Колика је почетна брзина за параболску путању? — Тело се одбило под истим углом под којим је и пало; пало је, међутим, на нагнуту раван под углом $90 - 15 = 75°$; пошто се одбило под истим углом према нагнутој равни, оно заклапа с хоризонтом угао од 60° при поласку по параболском путу и достиже даљину од 30 мет. Кад се позовемо на одговарајућу једначину код параболског кретања, имамо:

$$a = \frac{c^2}{g} \sin 2\,\alpha$$

одакле је:

$$C = \sqrt{\frac{ga}{\sin 2\,\alpha}} = \sqrt{\frac{9{\cdot}81 \cdot 30}{\sin 120}} = 18{\cdot}43 \text{ мет.}$$

МЕХАНИКА ТЕЧНОСТИ

(ХИДРОМЕХАНИКА)

ДЕО ТРЕЋИ

Равнотежа течности

(Хидростатика)

691. Главну разлику између течних и чврстих тела чини она лака покретљивост течних молекила због врло слабог узајамног привлачења њихова. Па како ту покретљивост молекилску у још већој мери имају и гасови, стога се врло често под именом „течности“ разуму и гасови. Према томе чврста тела представљају тела с међусобно непокретљивим (или тешко покретљивим) молекилима, а течности уопште (заједно с гасовима) била би тела с лако покретљивим молекилима.

Кад покушамо да променимо запремину обичних течности и гасова, наилазимо у том погледу на врло велику разлику између једних и других. И под великим притиском течности тако мало мењају своју запремину, да се дуго држало да се течности не могу сабити, те су и називане *нестишљиве течности*. Врло често се обичне течности називају и *капљичавим течностима*. Код гасова, напротив, и мали притисци изазивају велике промене у запреминама и стога се за разлику од обичних течности називају *стишљиве течности*. Како се с друге стране гасови врло лако шире чим притисак опадне, и могу заузети врло различите запремине, и у томе се понашају у (извесним границама) као потпуно еластична тела, то се гасови називају и раширљиве или још и *еластичне течности*.

Докле се год код једне течности не мења запремина, та се течност услед лаке молекилске покретљивости може без велике тешкоће деформисати. За деформацију чврстих тела потребне су већ силе извесне величине. То значи да при деформацији, унутрашње силе једног чврстог тела врше извесан и знатан рад, док при деформацији течности (без промене запремине) унутрашње силе течности врше незнатан рад. Потпуна би течност била она, код које би рад унутрашњих сила био раван нули.

А. Опште особине течности.

Пре него што пређемо на погодбе за равнотежу течности, да видимо, које су опште односно специјалне особине течности, а које су условљене њиховим агрегатним стањем.

692. — a. *Запремина течности као и запремина чврстих тела јесте стална.* Само услед дејства великих сила могу течности променити своју запремину, и то опет врло мало. Уопште узев, течности много теже мењају своју запремину но врло велики број чврстих тела.

693. — b. *Све течности кад су слободне имају само један облик: лопту. Течности кад нису слободне заузимају облик суда у коме се налазе.* У обичним приликама једна течност заузима облик суда у коме се налази, а то једино услед велике покретљивости течних молекила и дејства страних сила, (нарочито теже) на њих. Али такве течности на које дејствују стране силе, нису слободне; кад би течности биле остављене себи самима, или кад су спољашње силе према унутрашњим молекилским силама врло слабе, општи се облик свију течности, лопта, одмах појави. Јер кад је једна течност слободна, онда на њене молекиле дејствују само унутрашње силе, које теже да све молекиле што ближе један другоме доведу. Међутим је лопта такав облик, да су у њој молекили највише могу међусобно приближити. Па стога свака слободна течност мора заузети лоптаст или сферан облик. Кад се вода проспе на површину коју не кваси, она се распе у ситне лоптице. То исто чини и жива и друге течности. Кап сваке течности је округла. Кад помешамо алкохол и воду, тако да смеша има исту специфичну тежину као и уље, па у њу пажљиво спустимо извесну количину уља, оно ће заузети облик лопте и лебдиће у средини те смеше. Тек кад лопта буде велика, она ће се према величини својој више или мање спљоштити услед разних притисака, који чине те та лопта није више сасвим слободна. Кад би наша земља била од ма какве течности, она би као слободно тело у васиони морала заузети сферан облик. С друге стране, пошто код наше земље већ налазимо тај облик, и ако је она чврста, то значи да је ма у које доба своје прошлости, она морала бити течна. Слободне морске површине, као и све остале површине течности, морају бити сферне, и само се онда могу сматрати као равне, кад су према земљиној површини врло мале.

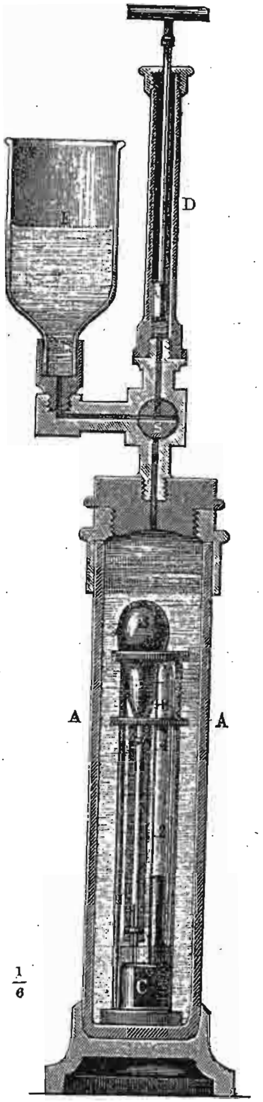
694. — c. *Све су течности стишљиве.* Врло се дуго држало да течности не могу под притиском смањити своју запремину, те им је отуд и дошло име које смо напред видели. Међутим, данас се зна да се течности јаким притисцима могу истина врло мало, али ипак компримирати.

Први покушај компресије течности извршио је Бакон око 1620. год. Он је напунио једну шупљу оловну лопту водом, па је најпре тешким чекићем, а затим једном пресом притискивао, да лопта свој облик промени, јер се зна да је лопта облик највеће садржине. Том се приликом само видело, да се оловна лопта споља оросила јер је вода кроз поре оловне избила напоље.

Педесет година доцније чланови флорентинске академије извршили су исти покушај са сребном лоптом и дошли су до истог резултата.

После горепоменутих покушаја, чињени су још многи други, да се стишљивост воде констатује. Први пак покушај којим је стишљивост течности несумњиво констатована и измерена, извршио је *Ерстед* (Oerstedt) 1822. год. Тода ради конструисао је он нарочиту справу *пијезометар*. Да би се избегле извесне мане и погрешке у експерименту, одређивање стишљивости течности предузимали су врло многи научници, међу које нарочито долазе: *Деспре* (Despretz) 1823., *Коладон* и *Штурм* 1827., *Рењо* (Regnault) 1847., *Кајте* (Cailletet) 1872., *Квинке* (Quincke) 1883., *Рентген* (Roentgen) и *Шнајдер* 1886. до 1888. и многи други.

695. Пијезометар којим се служио Ерстед и који је употребљен и за доцнија одређивања стишљивости са извесним изменама представљен је на сл. 316. То је крушкаст суд *B*, који је извучен у узану термометарску цев; суд се напуни водом и у изврнуту положају његова цев улази у суд *C* напуњен живом. На тај начин је извесна количина, рецимо, воде у суду затворена. Кад се вода у суду мало загреје, она ће кроз живу изаћи на поље, тако да кад се суд охлади, један мали стуб живе попеће се у цев за водом, као што се то уосталом на слици види. Цев пијезометрова подељена је на одељке и пре но што се мерење предузме, мора се тачно одредити запремина цеви између сваке две поделе; другим речима, цев се мора *калибрисати*.

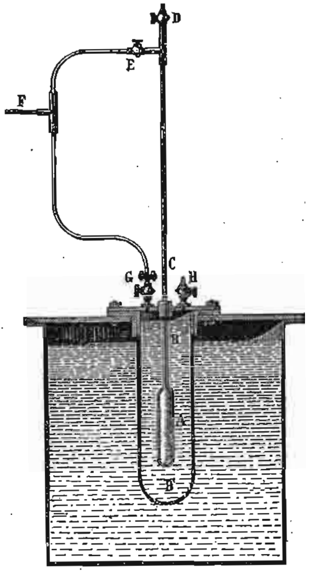


Сл. 316.

У суд *C*, који је пун живе, намештена је својим отвореним крајем још једна цев напуњена ваздухом и подељена на одељке. Та цев није ништа друго до ваздушни манометар и служи да покаже притисак под којим се течност при сабијању налази. Да би се одредила температура на којој се све то ради, обично се дода и један термометар.

Све три справе, пијезометар, манометар и термометар, пошто се међу собом довољно утврде, спусте се у стаклени суд *A* јаких дуварова, који се цео напуни водом и у коме се има извршити притисак помоћу шмрка *D*. На тај начин у пијезометру се произведе притисак и споља и изнутра (кроз живу) те нема опасности, да он под великим притиском прсне.

696. Да би се могла одредити компресија течности под великим притисцима, употребио је Рењо, као и други посматрачи, место стаклених металне судове, и то како за пијезометар тако и за спољашњи суд (*A*) у коме се притисак извршује. По себи се разуме, да онда калибрисана стаклена цев излази напоље да би се промене запремине могле на њој одредити. Рењолов апарат за компресију течности представљен је у пресеку на сл. 317. Комбинованим отварањем и затварањем славина *G*, *E*, *D* и *H* може се на пијезометар извршити притисак 1) само споља; 2) споља и изнутра и 3) само изнутра.



Сл. 317.

Узећемо да је калибрисањем нађено да је запремина сваког поделка $= \varphi$. Ако смо пијезометар, у коме је запремина затворене течности v, изложили притиску P, ми ћемо видити да се запремина течности смањила за m поделака, т. ј. $m\varphi$.

Означимо ли још коефицијенат стишљивости посматране течности са χ, онда мора бити:

$$\chi PV = m\varphi$$

одакле је:

$$\chi = \frac{m\varphi}{P \cdot V} \quad \dots\dots\dots \quad (329$$

Ова једначина за коефицијенат стишљивости течности није тачна јер је у изразу $m\varphi$ помешана стишљивост и течности и суда, пошто се у ствари и дуварови пијезометра под великим притиском спљоште. Па како овде морамо и о томе водити рачуна, то ћемо имати, кад коефицијенат стишљивости чврстих дуварова пијезометра означимо са σ, целокупну компресију самога пијезометра σPV. Према томе $m\varphi$ представља разлику између обеју стишљивости и стога је тек ова једначина тачна:

$$m\varphi = \chi_0 PV - \sigma PV$$

$$= PV(\chi_0 - \sigma)$$

одавде је:

$$\chi_0 - \sigma = \frac{m\varphi}{PV}$$

или:

$$\chi_0 = \sigma + \frac{m\varphi}{PV} = \sigma + \chi \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (330$$

У Рењоловим експериментима пијезометар је био од бакра и његова кубна стишљивост $\sigma = 0001199$ рачунајући један килограм на квадр. милиметар. Ако узмемо притисак од једне атмосфере на квадр. милиметар, онда се та вредност мора помножити са 0·010333. Пошто се нашло да је $\chi = 0{\cdot}00004667$, то је онда:

$$\chi_0 = \sigma + \chi = 0{\cdot}0001199 \times 0{\cdot}010333 + 0{\cdot}00004667 =$$

$$= 0{\cdot}00004791.$$

Промена тога коефицијента с температуром представљена је обрасцем:

$$\chi_\vartheta = 0{\cdot}0000503 + 0{\cdot}0000013185\vartheta - 0{\cdot}00000003734\,\vartheta^2 \,. \quad (331$$

697. По методи Рењоловој одређивао је Граси (Grassi) коефицијенат стишљивости разних течности на разним температурама (ϑ) и притисцима (P). Ево неколико вредности до којих је дошао. Пошто се притисак једне атмосфере мења са g, то је у последњем ступцу изражен коефицијенат стишљивости χ' у систему *CGS* за притисак од једног мегадина на квадратни сантиметар.*

---

* Притисак једне атмосфере у Паризу износи $1{\cdot}0136 \times 10^6$; те онда $\chi' = \frac{\chi}{1{\cdot}0136}$.

течности	ϑ	P	χ_0	χ'
вода	0·0°		0·0000502	$4{\cdot}96 \times 10^{-5}$
»	10·8	3·500	0·0000480	$4{\cdot}73 \times 10^{-5}$
»	34·5	6·600	0·0000453	$4{\cdot}47 \times 10^{-5}$
»	53·0	6·350	0·0000441	$3{\cdot}35 \times 10^{-5}$
етар	0·0	3·408	0·000111	$1{\cdot}09 \times 10^{-4}$
»	0·0	7·820	0·000131	$1{\cdot}29 \times 10^{-4}$
»	14·0	1·580	0·000140	$1{\cdot}38 \times 10^{-4}$
»	13·5	8 362	0·000153	$1{\cdot}51 \times 10^{-4}$
алкохол	7·3	2·302	0·0000828	$8{\cdot}17 \times 10^{-5}$
»	7·3	9·450	0·0000853	$8{\cdot}41 \times 10^{-5}$
»	13·1	1·570	0·0000904	$8{\cdot}92 \times 10^{-5}$
»	13·1	8·970	0·0000991	$9{\cdot}78 \times 10^{-5}$
хлороформ	12·0	1·309	0·0000648	$6{\cdot}40 \times 10^{-5}$
»	12·5	9·200	0·0000763	$7{\cdot}53 \times 10^{-5}$
жива	0·0		0·00000295	$2{\cdot}91 \times 10^{-6}$

698. Кајте је одређивао коефицијенат стишљивости за врло велике притиске. Ево његових вредности:

течности	ϑ	P	χ_0	χ	χ'
вода	8°	705	0·0000451	0·0000469	$7{\cdot}61 \times 10^{-5}$
етар	10°	630	0·0001440	0·0001458	$1{\cdot}44 \times 10^{-4}$
алкохол	9°	305	0·0000701	0·0000745	$7{\cdot}10 \times 10^{-5}$
»	11°	680	0·0000727	0·0000745	$7{\cdot}35 \times 10^{-5}$
сумп. угљен.	8°	607	0·0000980	0·0000998	$9{\cdot}85 \times 10^{-5}$

За воду и етар ове се вредности не разликују од оних које су нађене за ниске притиске. Вредности за алкохол су ниже од оних које је нашао Граси, јер је Кајте употребио алкохол у коме је било прилично воде и чија је спец. тежина била 0·858.

699. Из разних и многобројних одредаба коефицијента стишљивости за разне течности и под разним погодбама могу се извести ови општи закључци:

1.) Стишљивост течности је уопште врло слаба. Кад притисак порасте за једну атмосферу, стишљивост износи тек неколико милијонитих делова запремине (код воде 50 милионитих, а код живе једва 3 милионита дела).

2.) Стишљивост је најмања код живе, а највећа код етра (између свију обичних течности).

3.) Стишљивост водених раствора соли је мања него код воде, и у толико мања у колико је раствор концентрисанији.

4.) Код раствора сумпорне киселине стишљивост опада с растењем концентрације до $78^{0}/_{0}$, па затим расте.

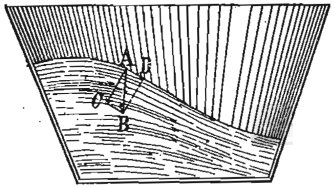
5.) Стишљивост расте готово код свију течности с растењем температуре (између 0° и 100° стишљивост постане 2 до 5 пута већа). Изузетак чине: *a*) вода код које стишљивост опада с растењем температуре (Граси налази да је између 0° и 4° стишљивост највећа, а Паљани (Pagliani) и Вичентини (Vicentini) налазе да је стишљивост између 61° и 66° најмања); *b*) водени раствори, који се углавноме понашају као и вода; *c*) глицерин код кога стишљивост с растењем температуре опада.

6.) Стишљивост течности мења се с притиском. Код етра стишљивост опада с растењем притиска. Ево како та ствар стоји код течне угљене киселине:

прит. у атмосф.	50	60	70	80	90
χ_0	0·00590	0·00174	0·00096	0·00066	0·00044.

7.) Чим притисак престане, течности заузимљу своју првобитну запремину и с тога се сматрају као потпуно еластична тела.

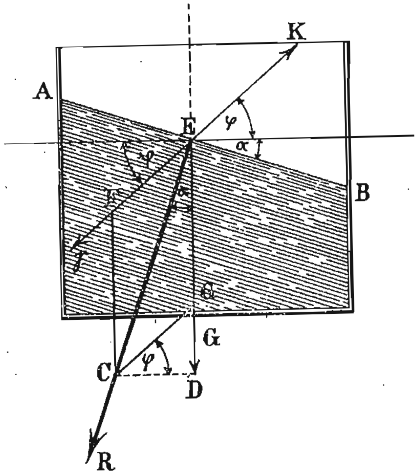
700. — *d. Површина мирне течности мора бити хоризонтална.* Предпоставимо да се у суду налази вода (сл. 318) и да њена површина није хоризонтална већ нагнута. Ма који водени молокил *A* на који дејствује његова тежина *AB* кренуће се правцем компоненте *AD* и дотле ће се кретати догод та компонента постоји.



Сл. 318.

Течност ће бити мирна, т. ј. та ће компонента бити равна нули само онда, кад тежа *AB* буде заклапала прав угао с површином воде, т. ј. кад површина воде буде хоризонтална. Стога се још каже да *слободна површина течности мора стајати управно на силу, која на њу дејствује.* Таква површина течности која стоји управно на дату силу или на цео систем сила назива се *нивоска површина* (546).

701. Овај закон, да слободна површина течности мора стајати управно на силу, вреди не само за привлачну снагу земљину већ и за сваку другу силу која ће или сама за се или у друштву с другим силама на течност дејствовати. На течни молекил *E* (сл. 319) дејствује сем тежине *EG*, која изазива убрзање *g*, још нека друга сила, која производи убрзање γ и иде правцем *FK*, тако да с хоризонтом заклапа угао φ. Кад те две силе, односно њихова убрзања, сложимо по паралелограму сила, добићемо да је резултанта:



Сл. 319.

$$R = \sqrt{g^2 + \gamma^2 + 2\gamma g \sin\varphi}$$

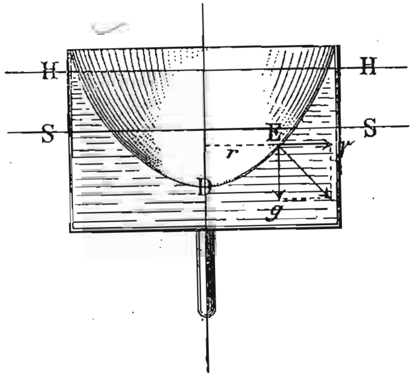
а правац њен према вертикали биће:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CD}{EG + GD}$$

Међутим је $CD = \gamma\cos\varphi$; $EG = g$; $DG = \gamma\sin\varphi$, те према томе:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\gamma\cos\varphi}{g + \gamma\sin\varphi}.$$

Пошто правац резултанте заклапа угао α с вертикалом, то ће и површина течности заклапати тај исти угао с хоризонтом, т. ј. површина течности мора имати правац *AB*, па да буде у равнотежи.



Сл. 320.

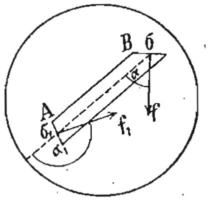
Ако се течност налази у суду који се око вертикалне осовине обрће (сл. 320), онда ће на пр. на молекил *E* дејствовати центрифугално убрзање γ и убрзање теже *g*; површина течности на том месту стајаће управно на резултанти која се по паралелограму убрзања добива из γ и *g*. Пошто се ц.фугално убрзање мења са одстојањем молекила од осе, то се налази да је слободна површина такве течности, која се у суду обрће, ротациони параболоид.

702. — е. *Течности преносе притисак на све стране.* Према ономе што је досад речено о општим особинама течности, а нарочито о лакој покретљивости течних молекила и потпуној еластичности њиховој, излази да једна течност само онда може остати у равнотежи, кад сваки део њен са *свију страна* трпи исти притисак и кад сваки такав делић на све стране исто тако притискује, као што је ма с које стране и са̂м притиснут. Из овога се види, да се цела статика течности оснива на овој важној особини течности и стога ћемо законе о разним притисцима и њихову преношењу специјално проучити.

Уопште узев имамо овде да разликујемо *спољашњи* и *унутрашњи* притисак. Под спољашњим притиском разумемо онај, који на масу неке са свију страна затворене течности с поља долази. Унутрашњи притисак (који се јавља и кад течност није са свију страна затворена) долази од саме тежине течности; он се назива још и *хидростатички притисак.* И један и други притисак задржавају општу особину: да се преносе на све стране.

I. Спољашњи притисак.

703. Паскалов закон. — *(1650). Притисак ма на ком месту неке, са свију страна затворене течности, преноси се на све стране потпуно једнако и сразмеран је величини оне површине за коју се притисак тражи.*



Сл. 321.

Да бисмо увидили тачност овога закона, применићемо правила која смо нашли у статици чврстих тела. Нека се у неком суду, који је са свију страна затворен, налази нека течност и у тој течности замислимо ма на ком месту један танак чврст цилиндар *AB* (сл. 321) с разним крајњим површинама σ и σ_1. Засад претпостављамо да на течност не дејствује привлачна снага земљина, т. ј. не водимо рачуна о унутрашњем притиску. За равнотежу морају сви притисци који на тај цилиндар долазе бити у равнотежи, т. ј. мора збир пројекција свију притисака на осу цилиндра бити раван нули. Али пошто се пројекције радијалних притисака на цилиндарски омотач međусобно потиру, т. ј. не дају никаквих компонената правцем осе цилиндра, то остају само притисци f и f_1 на косим пресецима цилиндра. Збир оних компонената тих притисака, које иду правцем осе, мора за равнотежу бити раван нули, т. ј.:

$$f\sigma\cos\alpha - f_1\sigma_1\cos\alpha_1 = o$$

или:

$$f\sigma\cos\alpha = f_1\sigma_1\cos\alpha_1.$$

Међутим је цилиндар по целој својој дужини једнаког пресека $= q$, и онда следује да је и

$$\sigma\cos\alpha = \sigma_1\cos\alpha_1 = q$$

те према томе:

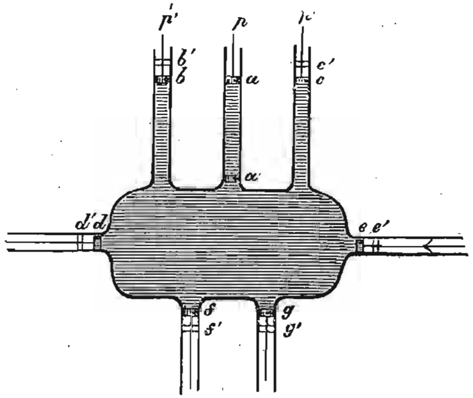
$$fq = f_1 q \text{ или } f = f_1$$

а то значи да су притисци на истим површинама или пресецима једнаки. Па како је горњи цилиндар узет сасвим произвољно, то се он може замислити продужен до самих дуварова суда, те онда тај закон вреди и за њих. Према томе, ако ма на коју површину σ дејствује притисак f снагом $f\sigma$, он се преноси на сваку исто толику површину истом јачином, било да је та површине ма где у самој течности или ма где на дувару суда.

Ово преношење притисака не вреди само за течности (и гасове) већ и за чврста тела, кад су у течностима. Јер ако се у некој течности налази један комад стаклета, па се на течност споља притисне, онда ће и у стакленој маси владати исти притисак као и у течности, и правац тога присиска је увек нормалан на притиснуту површину.

704. До истинитости Паскалова закона можемо доћи и на овај начин:

Рецимо да је суд ма каквога облика (сл. 322) напуњен водом и да на томе суду имамо извесан број цеви $(n+1)$ једнаких пресека q, затворених малим клиповима. Нека на цев *a* дејствује извесан притисак *p* и нека се под њим клип спусти од a до a'. Пошто се вода за тако слаб притисак може сматрати као нестишљива, онда ће се, истерана из цеви, aa' растурати у осталим цевима, и то свуда подједнако јер су све те цеви истога пресека и затворене клиповима, на које дејствују силе исте јачине $= p^1$. Због тога ће се ти клипови померити, тако да b дође у b', c у c' и т. д.



Сл. 322.

Пошто тих цеви сем цеви aa' има n, то ће помицање њихово бити $bb' = cc' = \ldots\ldots = \frac{1}{n} aa' = \frac{s}{n}$, ако aa' означимо са s. Рад који је сила p извршила на путу s биће очевидно ps; рад који је на сваком осталом клипу извршен промештањем из a у a', b у b' и т. д. износи $p' \frac{s}{n}$. По принципу једнакости тих радова мора бити:

$$sn = np' \frac{s}{n}$$

одакле је:

$$p = p'$$

а то значи да на истим пресецима владају исти притисци.

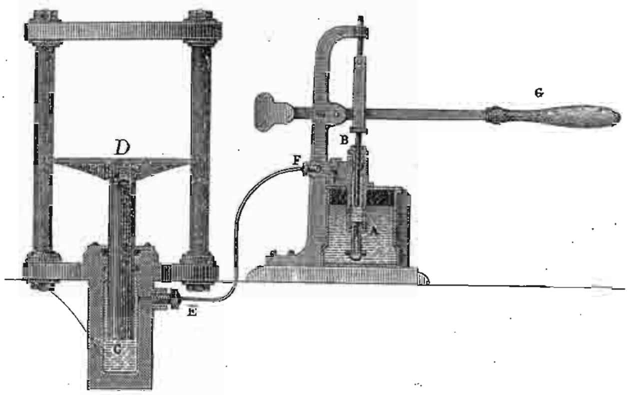
705. Хидраулична преса. Стевен (Stevin) 1600., Брама (Bramah) 1797. — Из Паскалова закона следује да је притисак, пренесен на све стране, сразмеран пресеку или површини на коју се преноси, те дакле неки притисак p извршен на површину величине s биће n пута већи или мањи, ако се пренесе на другу неку површину n пута већу или мању. Ако уопште означимо пресеке са q и Q а одговарајуће притиске са p и P, онда имамо:

$$P : p := Q : q$$

или:

$$P = \frac{Q}{q} \cdot p.$$

На основу тога се може ма какав притисак, извршен на воду, по вољи повећати, кад се само удеси да та иста вода пренесе добивени притисак на већу површину. На томе се оснива хидраулична или Брамова преса или тисак (сл. 323). Притисак се врши помоћу полуге G узаним клипом B, па се кроз цев EF пренесе на цилиндар C, који тај притисак, сразмерно своме пресеку, има да прими на себе. По себи се разуме да је и цев у којој притискује клип B, као и FE и суд у коме је клип C напуњен течношћу (обично водом, глицерином, и т. д.), и та течност по горњим законима преноси притисак на цилиндар C, односно на притискивач D.



Сл. 323.

Ако је полупречник узаног цилиндра r, а великога R; дужина дужега крака полуге L, а краћега l, притисак, који узани цилиндар на течност врши p и притисак којим преса код D притискује P_0, онда ће бити:

$$P \cdot L = p \cdot l \text{ или } p = \frac{P \cdot L}{l}.$$

Затим:

$$p : P_0 = r^2 : R^2 \text{ или } P_0 = \frac{R^2}{r^2} \cdot p$$

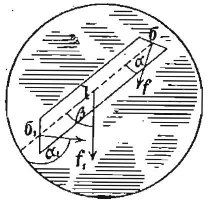
или најзад:

$$P_0 = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{L}{l} \cdot P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (332$$

Ако је $\frac{L}{l} = 10$, $\frac{R}{r} = 10$, и $P = 50$ кгр. онда је $P_0 = 50000$ кгр.

II Унутрашњи или хидростатички притисак.

706. Као што смо раније напоменули, унутрашњи притисак долази од тежине течности. На један делић у некој течности притискује тежина свију оних делића што су над њим и тај се притисак означава као *притисак на дно.* Али пошто се сваки притисак па и тај преноси на све стране, то његовим преношењем постаје још и *притисак на бокове суда* као и *притисак на више* или *потисак.*



Сл. 324.

707. Хидростатички притисак уопште. Да бисмо дали потпуна рачуна о односима притисака у некој мирној течности, морамо спољашњим притисцима који на ту течност дејствују додати још и унутрашњи притисак. Тај пак притисак зависи најпре од висине течности у суду. И да бисмо ту зависност уопште одредили, посматрајмо опет узан цилиндар с крајњим површинама σ и σ_1 (сл. 324) пресека q, и дужине l. Тежина јединице запремине тога цилиндра нека је s, то ће онда целокупна његова тежина бити lqs. Ако оса цилиндра заклапа с вертикалом угао β, онда за равнотежу уопште мора бити:

$$fs\cos\alpha + f_1\sigma_1\cos\alpha_1 + lqs\cos\beta = 0$$

где је члан $l_1\sigma_1\cos\alpha_1$ негативан. Као и код спољашњег притиска биће и сада:

$$f_1 q = fq + lqs\cos\beta.$$

Међутим је $l\cos\beta$ вертикално одстојање h средишта обеју крајњих површина σ и σ_1 па зато можемо још написати:

$$f_1 = f + hs \text{ или } f_1\sigma = \sigma hs + f\sigma$$
$$f_1\sigma - f\sigma = \sigma hs.$$

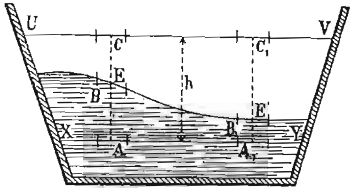
а то значи да је *разлика хидростатичких притисака између двају ма колико али једнаких површинских елемената равна тежини онога стуба течности, коме је основица ма који од тих елемената, а висина вертикално одстојање датих површинских елемената.*

Из тога следује. да је притисак на ма ком површинском елементу независан од његова правца. Јер ако положимо кроз исту тачку два једнака, један према другом нагнута површинска елемента, онда ће бити $h = 0$ и $f_1\sigma = f\sigma$.

Два површинска елемента, који леже у истој хоризонталној равни, имају исти притисак. Површина у којој влада свуда исти притисак и у којој онда нема никаква кретања, а то значи да стоји управно на силу која дејствује назива се, као што смо и раније видели, нивôска површина. Слободна површина течности је увек нивôска површина и то површина, најмањег притиска; испод ње су површине с притисцима који расту. Ако притисак долази само услед теже, онда су нивоске површине све саме равни, које теку паралелно са слободном површином.

708. *Две течности.* — Ако се у једном суду налазе две (или више) течности, које се не мешају, онда додирна површина те две течности мора бити равна и хоризонтална, ако су течности у равнотежи.

Нека је EE (сл. 325) додирна површина две течности. Повуцимо у доњој течности једну хоризонталну раван XY и у горњој UV; нека је h растојање њихово Уочимо у равни XY један елеменат A, њему ће одговарати у додирној равни елеменат B а у горњој равни C. Узмимо у истим равнима али на другом неком месту такве исте елементе A_1, B_1 и C_1; површине свију тих елемената једнаке су и $= s$. Једнаки елементи C и C_1, налазећи се у истој хоризонталној равни и у истој течности, имају исти притисак P. Елеменат B, који је за z испод C има притисак $P + sz\sigma$, ако је σ специфична тежина горње течности. Елеменат A које за $(h - z)$ испод B трпи притисак који ће за $s(h - z)\sigma^1$ већи од притиска у B, ако са σ^1 означимо спец. тежину доње течности. Цео притисак на елементу A биће:



Сл. 325.

$$P + sz\sigma + s(h - z)\sigma^1$$

Из истих разлога, ако само са z^1 означимо вертикално одстојање C_1B_1, биће притисак у A^1:

$$P + sz^1\sigma + s(h - z^1)\sigma^1$$

Пошто је и A и A^1 у истој хоризонталној равни, то мора да буде:

$$P + sz\sigma + s(h - z)\sigma^1 = P + sz^1\sigma + s(h - z^1)\sigma^1$$

или:

$$z(\sigma - \sigma^1) = z_1(\sigma - \sigma^1)$$

Пошто σ и σ^1 није једно исто, јер су то разне течности, онда је:

$$z = z_1$$

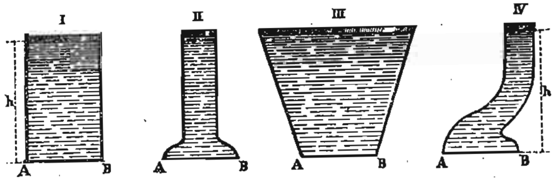
а то значи да су све тачке додирне равни на истој даљини испод горње хоризонталне равни, т. ј. додирна је

раван такође хоризонтална; другим речима: *свака додирна раван двеју течности јесте нивоска површина.*

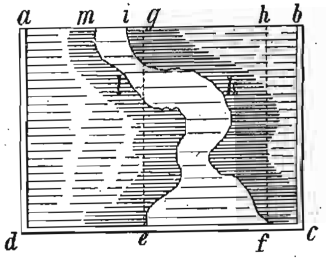
709. Притисак на дно. — Према оном што је напред речено о хидростатичком притиску уопште, притисак на дно P зависи од величине дна q, од висине течног стуба h и од специфичне тежине течности σ, т. ј.

$$P = q h \sigma \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (333$$

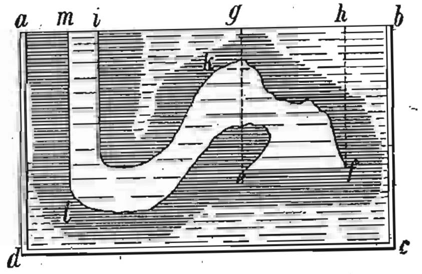
Као што се види, при одредби хидростатичког притиска на дно, облик суда не утиче ни уколико, то значи, облик суда, па дакле и количина, т. ј. тежина течности може бити ма каква, притисак ће зависити само од величине дна и висине течног стуба (ако имамо посла с једном истом течношћу у разним судовима). Ако водом напунимо разне судове I до IV (сл. 326), притисак на дно биће у свима тим судовима исти, ако је само величина дна AB и висина воденог стуба h код свију тих судова иста. Или ако је облик суда $miklef$ (сл. 327 и 328) притисак на дно ef раван је величини тога дна умноженој висином ge (узевши да је и у једном и у дру-



Сл. 326.



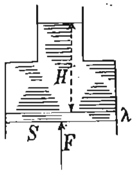
Сл. 327.



Сл. 328.

гом суду вода) без обзира којим ће путем вода доћи до тога дна.

Ево како можемо објаснити ту појаву на пр. за суд представљен на сл. 329. Подигнимо силом F дно суда S за врло малу висину λ; тиме смо извршили рад $F\lambda$. Али кад то урадимо, ми ћемо воду тежине $S\lambda\sigma$ издићи изнад слободне површине течности, т. ј. издићи ћемо је за висину H; та на висину H издигнута вода има у себи рада $HS\lambda\sigma$, услед чега је:



Сл. 329.

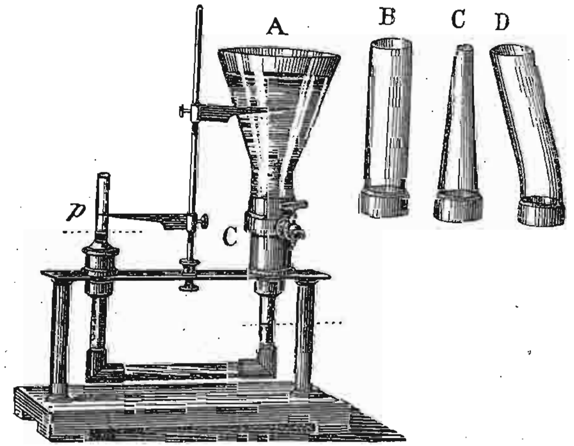
$$F\lambda = HS\lambda\sigma$$

$$F = SH \cdot \sigma.$$

дакле притисак је на дно раван величини дна помноженој висином и спец. тежином.

Та је појава позната под именом: „хидростатичког парадокса“.

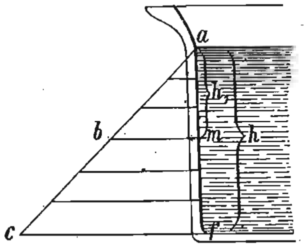
Експерименталним се путем закон о притиску на дно суда може оверити апаратима разне врсте. Један такав апарат представљен је на сл. 330. Ако се код C утврде судови разног облика A, B, C, али истога дна, водени стубови одржаваће равнотежу истом терету S, само ако су они исте висине.



Сл. 330.

710. Притисак на бокове. — Услед једнаког преношења хидростатичког притиска на све стране, течност нека у суду притискиваће и на бокове или дуварове тога суда. По себи се разуме, да ће тај притисак бити у толико већи, у колико је већа површина на коју течност притискује и у колико та површина лежи дубље испод нивоа; та се дубина рачуна од слободне површине течности па до *тежишта површине* за коју се притисак тражи. Очевидна је ствар да за разне течности ваља водити рачуна и о спец. тежини. Из тога излази да образац за хидростатички притисак за бокове суда остаје исти као и за дно, само се висина овде другчије рачуна.

Промену притиска на бок неког суда, почев од површине па до дна суда, можемо и графички представити. На површини течности је тај притисак $= o$, јер је и $h = o$; на некој дубини am (сл. 331) он износи на пример $mb = am = h_1$; на дну је $cf = af = h$. Промену притиска на појединим тачкама представља нагнута линија ac. Целокупан пак притисак на тај дувар представљен је површином троугла acf или, пошто је та површина $F = \frac{1}{2} af \cdot cf = \frac{1}{2} h^2$, то је и притисак на бочној линији $af = \frac{1}{2} h^2$.



Сл. 331.

Узмимо место линије извесну ширину b на боку суда, онда је притисак:

$$P = \frac{1}{2} h^2 b.$$

Међутим је bh површина дужине h и ширине b, стога, ако ту површину означимо са F, биће:

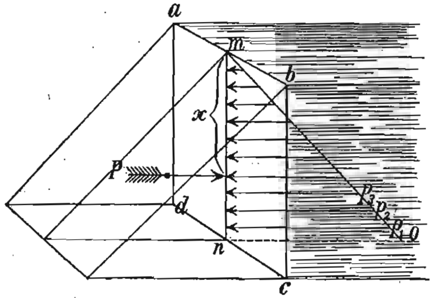
$$P = \frac{1}{2} hF.$$

Вредност $\frac{1}{2}h$ за посматрану површину није ништа друго до одстојање тежишта h_s, стога ће притисак на бок суда, ако водимо рачуна и о специф. тежини σ, бити најзад:

$$P = Fh_s\sigma \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; (334$$

711. *Средиште хидростатичког притиска.* — Тежиште притиснутога бока суда потребно нам је да одредимо висину којом ваља да помножимо величину површине за коју притисак тражимо. Нападна тачка пак тога притиска није у тежишту већ испод њега, јер ни притисци на разним тачкама посматране површине нису једнаки, већ према дну расту. Ми ћемо сад да одредимо *нападну тачку* или *средиште хидростатичког притиска*.

Поједини елементарни притисци су $p_1 p_2 p_3 \ldots$ (сл. 332), рачунајући од дна па на више. Ако су дубине тежишта елементарних површина за које ти притисци вреде h_1, h_2, h_3 ... а величине њихове $f_1\, f_2\, f_3 \ldots$ онда је очевидно за течност спец. тежине σ.



Сл. 332.

$$p_1 = f_1 h_1 \sigma;\; p_2 = f_2 h_2 \sigma;\; p_3 = f_3 h_3 \sigma \ldots\; p_n = f_n h_n \sigma.$$

Тенденција свију тих притисака је да целу површину ac око осе ab окрену и сваки тај притисак дејствује на одговарајућим одстојањима као на крацима момената чије су вредности:

$$m_1 = f_1 h_1^2 \sigma;\; m_2 = f_2 h_2^2 \sigma;\; m_3 = f_3 h_3^2 \sigma \ldots\; m_n = f_n h_n^2 \sigma.$$

Целокупни је, дакле, моменат воденог притиска:

$$M = \sigma\,(f_1 h_1^2 + f_2 h_2^2 + f_3 h_3^2 + \ldots\; f_n h_n^2)$$

или ако узмемо да је $f_1 = f_2 = f_3 \ldots = f_n = f$.

$$M = \sigma f\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^3 + \ldots\; h_n^2) = \sigma f \frac{h^3}{3}$$

Цео пак хидростатички притисак P износи:

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\; p_n \\ &= f_1 h_1 \sigma + f_2 h_2 \sigma + f_3 h_3 \sigma + \ldots\; f_n h_n \sigma \end{aligned}$$

или, пошто је као и горе $f_1 = f_2 = f_3 \ldots = f_n = f$:

$$P = f\sigma\,(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\; h_n) = f\sigma \frac{h^2}{2}$$

Његова нападна тачка или средиште хидростатичког притиска је непознато и $= x$; онда је његов моменат Px. Према томе је за равнотежу:

$$Px = M$$

или

$$x = \frac{M}{P} = \frac{\sigma f \frac{h^3}{3}}{\sigma f \frac{h^2}{2}} = {}^2\!/_3\, h \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; (335$$

Средиште хидростатичког притиска за једну правоуглу површину лежи на $^2/_3$ *испод нивоа.*

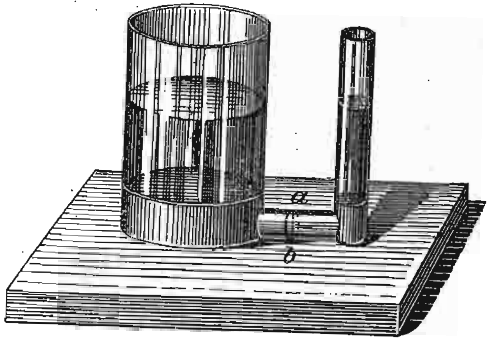
712. Општи образац за средиште хидростатичког притиска добићемо на овај начин:

$$x = \frac{M}{P} = \frac{\sigma\,(f_1 h_1^2 + f_2 h_2^2 + f_3 h_3^2 + \ldots\; f_n h_n^2)}{\sigma\,(f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 + \ldots\; f_n h_n)}$$

$$= \frac{\Sigma\,(fh^2)}{\Sigma\,(fh)} \underbrace{= \frac{J}{\mathfrak{M}} =}_{} \frac{\text{мом. инерције}}{\text{статички мом.}} \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; (336$$

а то је исти образац као и за средиште клаћења (обр. 291).

713. Спојени судови. — Закон о хидростатичком притиску на бокове суда нашао је непосредну примену код тако званих спојених судова, т. ј. код оних отворених судова ма каквога облика и величине, који су међу собом ма на који начин спојени, да течност из једнога у други слободно може циркулисати. Таква два спојена суда имамо на сл. 333.



Сл. 333.

Наш је задатак да нађемо висине течности у једном и другом спојеном суду 1) кад се у њима налази једна иста течност, и 2) кад су у њима разне течности.

За први случај посматрајмо горњу слику, и одредимо притисак ма на који пресек *ab* спојне цеви. Ако је величина тога пресека *q*, висина течности у левој широј цеви *h*, а у десној, ужој *h'*, специф. тежина течности *σ*, онда ће притисак који долази с десна бити $qh''\sigma$ а с лева $qh\sigma$. Пошто, за равнотежу, оба притиска морају бити једнака, то је онда:

$$qh\sigma = qh'\sigma$$

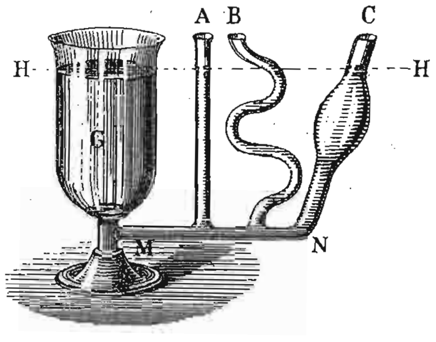
одакле је:

$$h = h'$$

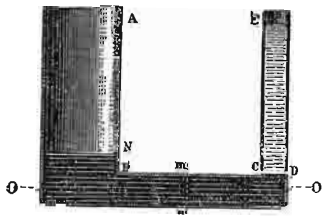
а то значи: *кад се у спојеним судовима налази једна иста течност, она ће се у њима испети до исте висине,* ма какав иначе био облик појединих спојених судова (сл. 334).

714. Нека су сада два спојена суда напуњена разним течностима *σ* и *σ'* које се не мешају. Оне ће се

наслагати једна на другу, као што показује сл. 335. Притисак на неки пресек *mn* спајне цеви биће с лева $q\sigma\,\overline{NO}$ а с десна $q\sigma\,\overline{DO} + q\sigma'\,\overline{CE}$. За равнотежу мора да буде:



Сл. 334.



Сл. 335.

$$q\sigma\,\overline{NO} = q\sigma\,\overline{DO} + q\sigma'\,\overline{CE}$$

$$\sigma\,(\overline{NO} - \overline{DO}) = \sigma'\,\overline{CE}$$

$$\sigma\,\overline{BN} = \sigma'\,\overline{CE}$$

или ако ставимо $BN = h$ а $\overline{CE} = h'$

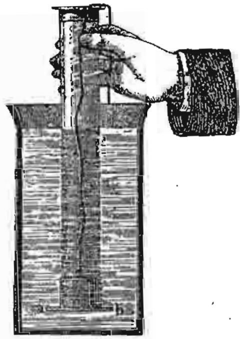
$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{h'}{h} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (337$$

Висине двеју (или више) *течности разних специф. тежина у спојеним судовима* (рачунато изнад додирне површине) *имају се изврнуто њиховим специф. тежинама*

Закон о изравнавању висине воденог стуба у спојеним судовима нашао је врло важну примену код водовода, водоскока, артеских бунара и т. д.

715. Потисак. — Сваки слој неке течности која је у равнотежи има да издржи, као што смо видели, извесан притисак озго на ниже, али и исто толики притисак оздо на више, који се назива *хидростатички потисак*. На хоризонтални слој *ab* (сл. 336) притискује на пр. водени стуб *abfg*, али до тог истог слоја допире на основу закона о преношењу притиска на свестране кроз воду и супротан исто толики притисак од неког исто толиког суседног воденог стуба. Шта више, тај

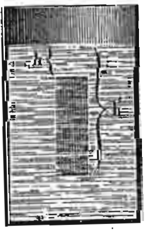
Сл. 336.



Сл. 337.

потисак постоји не само за поједине слојеве течности, него се он нарочито може да докаже и на чврстим телима која у воду потопимо. (сл. 337).

716. **Архимедов закон.** Пошто смо хидростатички потисак констатовали, остаје нам да одредимо његову величину. Тога ради замислимо да се у води налази једна призма (сл. 338), чија је горња површина за h а доња за h^1 дубоко испод нивоа. Ако пресек те призме означимо са q а спец. тежину течности са σ, притисак на горњу површину биће $qh\sigma$ а на доњу $qh^1\sigma$ Разлика та два притиска или потисак биће:



Сл. 338.

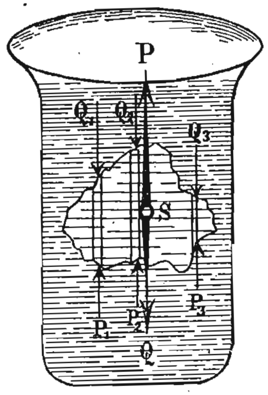
$$\boldsymbol{\Pi} = qh^1\sigma - qh\sigma$$

$$= q\sigma(h^1 - h) = q\sigma l \cdot \cdot (338$$

ако са l означимо висину или дужину призме. Међутим, $q\sigma l$ није ништа друго до тежина једне водене призме исто толико велике као и оне посматране, или, другим речима, тежина воде коју је потопљена призма (или уопште тело) истисла. Према томе *хидростатички потисак раван је тежини истиснуте течности*. Или, пошто услед тог потиска свако потопљено тело у течности постаје лакше, *свако тело потопљено у неку течност, губи од своје тежине онолико колико је тешка течност, коју је то тело истисло*. То је *Архимедов закон*.

717. Али Архимедов Закон не вреди само за призматично тело, већ и за свако друго тело ма каквог облика. Јер се може замислити да је свако тело састављено из самих врло ситних елементарних призама, па како тај закон вреди за сваку од њих, мора вредити и за њихов збир, т. ј. за цело тело.

Нека нам је дато такво једно тело неправилног геометријског облика (сл. 339). На сваку елементарну призму на које то тело у мислима разлажемо дејствују притисци озго Q_1, Q_2, Q_3 . . . и оздо P_1, P_2, P_3 . . . Ако су притиску изложене горње површине тих призама f_1, f_2, f_3 . . . ., дубине тих површина h_1. h_2, h_3 . . . . а висине призама l_1, l_2, l_3 . . . онда је:



Сл. 339.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots . Q_n$$

$$= f_1h_1\sigma + f_2h_2\sigma + \ldots . f_nh_n\sigma$$

$$= \sigma(f_1h_1 + f_2h_2 + \ldots . f_nh_n)$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots . P_n$$

$$= \sigma[f_1(h_1 + l_1) + f_2(h_3 + l_2) + \ldots . f_n(h_n + l_n)]$$

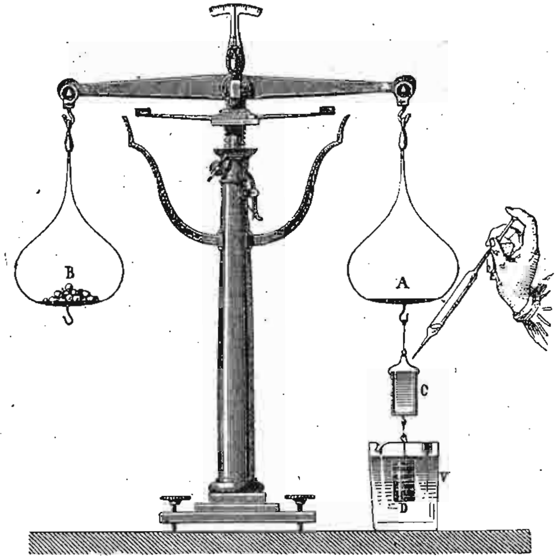
$$\boldsymbol{\Pi} = P - Q = f_1l_1\sigma + f_2l_2\sigma + f_3l_3\sigma + \ldots f_nl_n\sigma$$

$$= \sigma(f_1l_1 + f_2l_2 + \ldots . f_nl_n) = \sigma V \cdot \cdot (339$$

ако збир елементарних запремина f_1l_1, f_2l_2 . . . појединих призама означимо запремином V целога тела.

718. Експерименталним се путем може Архимедов закон доказати хидостатичким теразијама (сл. 340). О један тас теразија, обеси се један пун D и један шупаљ цилиндар C, који су тако израђени, да је унутрашња запремина шупљег цилиндра сасвим равна запремини пунога цилиндра. Пошто се теговима на тасу B постави равнотежа, док су оба цилиндра у ваздуху, спусте се теразије дотле, да пун цилиндар потоне у воду; равно-

тежа ће се одмах покварити, јер је пун цилиндар изгубио од своје тежине онолико, колико је тешка вода



Сл. 340.

коју је он истиснуо. Кад шупаљ цилиндар напунимо водом, равнотежа ће се повратити.

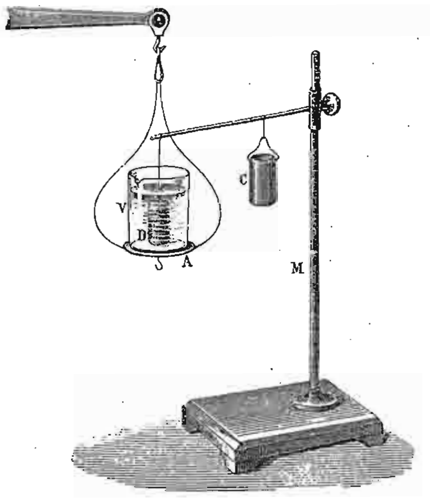
Експеримент се може изврнути. У један тас теразија метнућемо суд с водом *V* (сл. 341) и довешћемо теразије у равнотежу. Кад обешен пун цилиндар спустимо у воду, тас ће спасти, јер се потапањем цилиндра, ниво воде попео и притисак на дно суда постао већи. Ако из суда одузмемо онолико воде, колико је потопљени цилиндар истиснуо, т. ј. онолико колико треба да се шупаљ цилиндар напуни, равнотежа ће се повратити.

719. *Примери.* — 1. Кад је спец. тежина морске воде $\sigma = 1{\cdot}03$. и коефицијенат стишљивости $\chi = 0{\cdot}000044$, колика је густина воде у дубини: а) од 5000 метара и b) од 10000 мет.?

Означимо са σ_0 густину воде на површини са h дубину воде у метрима, са σ густину воде у дубини h са χ_0 коефицијенат стишљивости у дубини од 1 метра, т. ј. број који показује, за колико се јединица запремине у дубини од 1 метра смањила; онда ће се у дубини од h метра, јединица запремине воде

смањити на запремину $1 - h\chi_0$. Пошто се густине имају изврнуто запреминама, имаћемо:

$$\sigma : \sigma_0 = 1 : 1 - h\chi_0 \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{1 - h\chi_0}$$



Сл. 341.

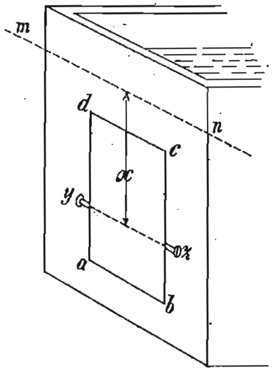
Горњи коефицијенат $\chi = 0{\cdot}000044$ значи смањивање под притиском једне атмосвере, која се равна са висином воденога стуба од 10 метара; стога је $\chi_0 = \frac{1}{10}\chi = 0{\cdot}0000044$. Према томе је:

$$\text{a)} \quad \sigma = \frac{1{\cdot}03}{1 - 5000 \cdot 0{\cdot}0000044} = \frac{1{\cdot}03}{0\ 978} = 1{\cdot}053$$

$$\text{b)} \quad \sigma_1 = \frac{1{\cdot}03}{1 - 10000 \cdot 0{\cdot}0000044} = \frac{1{\cdot}03}{0{\cdot}956} = 1\ 077$$

2). У дувару једнога суда, који је до *mn* (сл. 342) напуњен водом, налази се један правоугли отвор *abcd*, чије су стране *ab* и *cd* хоризонталне; тај отвор ваља затворити вратима која се око осовине *yz* могу отварати, тако да *ab* иде унутра у суд, а *cd* споља. Пита се, на коме месту ваља утврдити осовину *yz*, кад та врата треба да отвори сâм притисак воде, и то онда кад се ниво воде попне више *mn*. Висина отвора $ad = h = 135$ см., а одстојање горње ивице *cd* од нивоа *mn*, нека је $d = 25$ см.

По себи се разуме да осовина ваља да прође кроз средиште хидростатичког притиска за површину $abcd$, и за висину воде до mn. Раније смо нашли да је средиште хидр. притиска дато уопште обрасцем:



Сл. 342.

$$x = \frac{J}{\mathfrak{M}}.$$

Међутим је моменат инерције таквих врата ширине $ab = b$, висине $bc = h$ и одстојања тежишта њихова од површине воде a, за осу кроз тежиште $= \frac{1}{12} bh^3$ а за осу која иде кроз mn, т. ј. на одстојању a биће:

$$J = \frac{1}{12} bh^3 + bha^2$$

Статички моменат површине $F = b \cdot h$ биће bha, према томе је одстојање средишта притиска од mn:

$$x = \frac{{}^1/_{12}\, bh^3 + bha^2}{bha} = a \left(1 + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \right)$$

Тежиште је у половини висине врата, због тога је:

$$a = d + \frac{1}{2} h = 25 + \frac{1}{2} 135 = 92{\cdot}5$$

и онда:

$$x = 92{\cdot}5 \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{135^2}{92{\cdot}5^2} \right) = 109 \text{ см.}$$

Кад се вода попне изнад mn, онда постаје a, односно d веће, а x мање, и онда би ваљало осовину yz преместити на више, ако хоћемо да се врата не отворе. Остане ли та осовина на даљини од 109 см. као што је одређено, онда ће, кад се вода попне изнад mn, превладати притисак на горњем делу врата и она ће се отворити са ивицом cd напоље.

3). У једној на лакат савијеној цеви налази се на превоју вода; с једне стране 15 см. изнад воде високи стуб петролеума а с друге 10 см. високи стуб уља. Под уљем стоји вода за 3 см. више него под петролеумом. Кад се дода још 5 см. уља, онда вода испод уља стоји за 1·5 см. ниже него испод петролеума. Колико је тежак куб. сантим. уља а колико петролеума?

Означимо тежине једног кубног сантиметра петролеума са P, воде са W и уља са O, онда је према првој половини задатка, где је петролеума било 15 см., уља 10 см. и воде 3 см., равнотежа дата обрасцем:

$$15\, P = 10\, O + 3\, W$$

према другој половини пак:

$$15\, P + 1\frac{1}{2}\, W = 15\, O \text{ или } 15P = 15O - 1\frac{1}{2}\, W$$

из обадве те једначине излази:

$$10\, O + 3\, W = 15\, O - 1\frac{1}{2} W \text{ или } 5O = 4{\cdot}5\, W$$

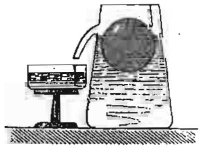
т. ј. 5 куб. см. уља тешки су колики 4·5 куб. см. воде = 4·5 гр. Према томе један к. см. уља тежак је 0·9 гр.

Заменимо ову вредност у првој једначини, имаћемо:

$$15\, P = 9 + 3 = 12\, W \text{ или } P = \frac{12}{15} = 0{\cdot}8 \text{ гр.}$$

720. Пливање. Архимедов је закон нашао најважнију практичну примену код пливања чврстих тела на течностима. Ако дакле неко тело запремине v и специфичне тежине σ потопимо на пр. у воду, оно ће, ако је специфички теже од воде, потонути на дно суда; ако би специфичка тежина тела била сасвим равна специфичној тежини воде, тело би лебдело ма на коме месту водене масе. Најзад, ако би специфична тежина тела била мања од спец. тежине воде, тело ће само донекле потонути у воду и остаће на њеној површини; тело плива на води.

Кад је тело специфички лакше од воде, онда тежина истиснуте воде може да буде равна тежини тела и тело ће онда пливати. (Сл. 343). Том приликом тело не тоне целом својом запремином већ само једним делом, и ако ту запремину означимо са v_0 а спец. тежину воде са σ_0, онда ће тежина истиснуте воде (иначе равна тежини тела) бити $v_0 \sigma_0$. Пошто тело на води плива, мора да буде:



Сл. 343.

$$V\sigma = V_0 \sigma_0$$

одакле:

$$\frac{V_0}{V}=\frac{\sigma}{\sigma_0} \quad \text{или} \quad V_0=\frac{\sigma}{\sigma_0}V \cdot \cdot \cdot \cdot \ (340$$

Потонула запремина пловнога тела сразмерна је односу спец. тежина тела и течности.

721. Једно исто тело, потопљено у разне течности $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3 \ldots$ тонуће запреминама $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ али увек тако да буде:

$$v\sigma = v_1\sigma_1 = v_2\sigma_2 = v_3\sigma_3 \ldots = v_n\sigma_n.$$

Ма који пар тих вредности даје нам однос:

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (341$$

а то значи да су *потонуле запремине некога тела изврнуто сразмерне специфичким тежинама течности.*

722. Више је пута потребно, да се неко од воде специфички теже тело направи пловним. Онда га ваља спојити с телима специфички лакшим од воде, а запремина ових тела према датом тежем телу одређује се на овај начин.

Нека је v_1 и σ_1 запремина и спец. тежина тежега тела, v_2 и σ_2 одговарајуће вредности лакшега, спец. тежина воде (или ма које друге течности) σ_0. Онда за равнотежу мора бити:

$$v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 = (v_1 + v_2)\sigma_0$$

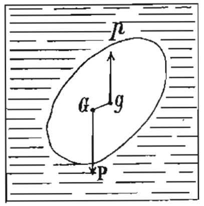
одавде је непозната запремина лакшега тела:

$$v_2 = v_1\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (342$$

723. *Равнотежа пловних тела.* На свако тело, које на течности плива или у њој лебди, дејствују две силе: *тежина* P с нападном тачком у тежишту тела G (сл. 344.) и *потисак* p с нападном тачком у тежишту истиснуте течности g. Нападна тачка потиска назива се још

и *средиште воденог потиска.* Те две силе дају уопште један спрег $(p, -p)$ и једну резултанту $P - p = R$.

О резултанти смо дали рачуна: због ње ће тело или потонути на дно (кад је $P > p$) или лебдити у течности $(P = p)$ или испливати на површину $(P < p)$. Што се тиче спрега, он ће изазвати обртање тела све докле крак спрега не буде раван нули, т. ј. докле оба тежишта не дођу у вертикални правац.

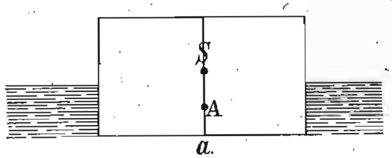


Сл. 344.

Овде сада могу наступити три случаја: 1. тежиште тела је изнад нападне тачке потиска, тело плива или лебди *лабилно*; најмања сила са стране изврнуће га. 2. тежиште тела пада заједно с нападном тачком потиска; тело плива или лебди *индиферентно*. 3. Тежиште је испод нападне тачке потиска; тело плива или лебди *стабилно*.

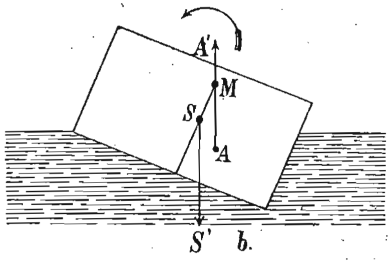
Линија која пролази кроз тежиште тела и кроз нападну тачку потиска назива се *пловна оса*, а раван која просеца тело у продужењу површине течности назива се *пловна раван*.

724. *Метацентар.* И ако на први поглед изгледа да су услови за разне врсте равнотеже пловних тела једнаки с тим условима чврстих, у једној тачки утврђених тела, ипак има између тих услова извесне разлике. Тамо је на пример за стабилну равнотежу био потребан и довољан услов, да тежиште дође испод тачке вешања; овде је такав услов истина довољан, али није потребан. Истина је, да је равнотежа пловљења стабилна, кад је тежиште тела испод нападне тачке потиска; али има случајева где прва тачка лежи изнад друге, па је опет пловна равнотежа стабилна. То долази отуда, што се нагибом пловног тела мења облик његова потонула дела, па, дакле, мења се и нападна тачка потиска. Тело паралелопипедног облика има своје тежиште у тачки S (сл. 345.), а нападна тачка потиска је у A, дакле испод тежишта, па ипак тело плива стабилно. Кад тело мало изврнемо као у сл. 346., нападна тачка потиска се преместила



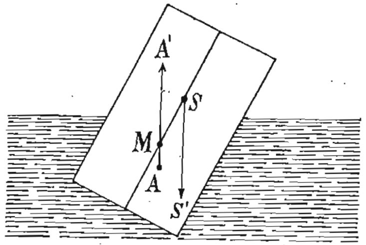
Сл. 345.

али силе које сада полазе из S и A, праве спрег који тело враћа натраг. Напротив, то исто тело у нагнутом положају, као што га показује сл. 347., добива спрег који га не враћа већ изврће.



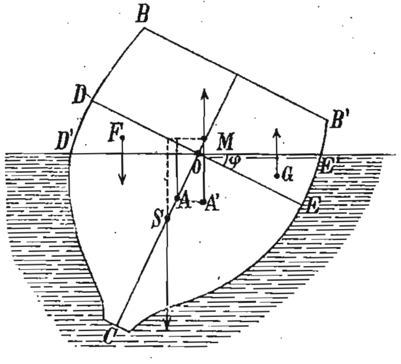
Сл. 346.

Да би се о свима тим случајевима дао рачун, уведена је код пловних тела место нападне тачке потиска друга једна тачка која се зове *метацентар* и која постаје пресеком вертикале која пролази кроз тачку потиска с пловном осом. То је тачка M на горњим сликама; и онда се каже: равнотежа пловних тела је стабилна, кад је тежиште испод метацентра; она је лабилна, кад је тежиште изнад метацентра, а индиферентна, кад обе тачке падну заједно.



Сл. 347.

725. У практици се не води рачун само о стабилној равнотежи пловних тела, него нарочито о степену стабилности њихове, што отприлике одговара стабилности чврстих тела. Степен стабилности пловних тела зависи од многих узрока, а нарочито од облика њихова, распореда масе у њима, дубине тоњења и т. д. Образац за ту стабилност је простији код тела са извесним одређеним пресеком, на пр. код бродова. Ако је $BB'C$ (сл. 348.) цео, а OEE' при нагибу брода за угао φ, потонули пресек; ако су даље S, F, G, одговарајућа тежишта; $e = SA$ одстојање између тежишта и првобитног положаја нападне тачке потиска, а хоризонтално одстојање између F и G, затим A' нови положај нападне тачке потиска, M метацентар, F пресек потонулог дела брода кад је усправљен, а f кад је нагнут, Q целокупна тежина брода, онда је стабилност његова дата обрасцем:



Сл. 348.

$$\Sigma = Q \cdot SM \sin\varphi = Q\left(\frac{fa}{F} + e\sin\varphi\right) \quad . \quad . \quad . \quad (343$$

За мале нагибе образац је простији, ако са b означимо ширину брода у нивоу водену:

$$\Sigma = Q\varphi\left(\frac{b^3}{12F} + e\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (344$$

а то значи да је један брод стабилнији, у колико је тежи, у колико је шири, и у колико му је дубље тежиште при истој дубини тоњења. Кад дође S изнад A, онда је e одречно и стабилност постоји још до граничне вредности $e = \frac{b^3}{12F}$.

726. *Примери.* Апсолутна тежина неке легуре M од два метала, износи Q_m, а спец. тежина те легуре је σ_m; тежина једнога

метала A износи Q_a и његова спец. тежина σ_a, исто тако за други метал B те су вредности Q_b и σ_b. — *a.*) Којом је једначином одређен однос свију тих величина? — *b.* Како се може из потиска у води легуре M као и из апсолутне тежине Q_m тежина оба метала у легури одредити, кад су њихове спец. тежине σ_b и σ_a познате? — *c.* Хијерова је круна, направљена од легуре злата ($\sigma_a = 20$) и сребра ($\sigma_b = 10$) и тешка 10 кгр., изгубила у води 625 гр., колико је било у њој сребра а колико злата.

a. Губитак тела A у води износи $V_a = \frac{Q_a}{\sigma_a}$; тела B, $V_b = \frac{Q_b}{\sigma_b}$ а легуре M, $V_m = \frac{Q_m}{\sigma_m}$, те према томе постоји једначина:

$$\frac{Q_m}{\sigma_m} = \frac{Q_a}{\sigma_a} + \frac{Q_b}{\sigma_b}.$$

b. Ако је сад $V_m = \frac{Q_m}{\sigma_m}$ као и Q_m, σ_a и σ_b дато, то је онда, ако тежину метала A означимо са x, апсолутна тежина метала $B = Q_m — x$; губитак тела A је $\frac{x}{\sigma_a}$ а тела B, $\frac{Q_m — x}{\sigma_b}$ те према томе је:

$$\frac{x}{\sigma_a} + \frac{Q_m — x}{\sigma_b} = v_m$$

одавде је:

$$x = \frac{\sigma_a (Q_m — v_m \sigma_b)}{\sigma_a — \sigma_b}$$

$$c)\ \frac{x}{20} + \frac{10 — x}{10} = 0·625$$

$$x + 20 — 2\,x = 20 \cdot 0·625 = 12·5$$

$$x = 20 — 12·5 = 7·5 \text{ кгр.}$$

дакле у круни је било 7·5 кгр. злата и 2·5 кгр. сребра.

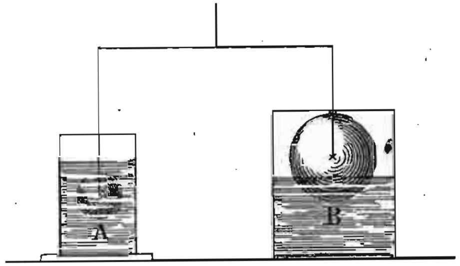
2. Једна оловна кугла и једна кугла од слонове кости, које у безваздушном простору и на теразијама држе једна другој равнотежу, спусте се у воду тако, да оловна кугла сва потоне, а она од слонове кости само толико (сл. 349) да равнотежа на теразијама остане. Колики је део коштане кугле потонуо а колики је остао у ваздуху, кад је спец. тежина воде $\sigma_0 = 1$, олова $\sigma_1 = 11·35$, слонове кости $\sigma_2 = 1·92$, а ваздуха $\sigma_3 = 0·0013$?

Означимо запремину оловне кугле са v_1 а слонове кости са v_2; за безваздушан простор мора бити:

$$v_1\,\sigma_1 = v_2\,\sigma_2.$$

Губитак оловне кугле у води мора бити раван губитку коштане кугле у води и ваздуху. Потонули део озоачимо са x, онда је потисак од воде $x v_2 \sigma_0$; остали део је $v_2 (1 — x)$ и губитак у ваздуху $v_2 (1 — x) \sigma_3$ за нову равнотежу мора да буде:

$$v_1\,\sigma_0 = x v_2\,\sigma_0 + v_2 (1 — x)\,\sigma_3$$



Сл. 349.

заменивши вредност за v_1 из горње једначине имамо најзад:

$$x = \frac{\sigma_0\,\sigma_2 — \sigma_1\,\sigma_3}{\sigma_1 (\sigma_0 — \sigma_3)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1·92 — 11·85 \cdot 0·0013}{11·35\,(1 — 0·0013)} = 0·168.$$

Дакле, од целе кугле од слонове кости потонуће 0·168 делова, или $\frac{12}{125}$ или приближно $^1/_6$ у воду, а остатак од 0·832 или отприлике $^5/_6$ остаће у ваздуху.

В **Одредба специфичне тежине.**

727. Као што је раније изведено (217.), специфична је тежина σ, тежина запреминске јединице тела и одређује се кад се апсолутна тежина или проста тежина тела Q подели запремином његовом V; другим речима:

$$\sigma = \frac{Q}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (345$$

Познато нам је да се тежина Q може разним методама одредити теразијама до врло велике тачности. Архимедов закон служи нам да тачно одредимо запремину тела, и говорећи сада о одредби специфичне тежине, цела се ствар своди на излагање метода за одредбу запремине појединих тела и све на основу Архимедова закона.

728. Пре него што пређемо на преглед тих појединих метода, задржаћемо се код одредбе густине воде, т. ј. масе једног кубног сантиметра воде на температури од 4° Целз. То се најлакше постиже опет Архимедовим законом, и то на овај начин:

Узме се један прав металан цилиндар кружнога пресека, израђен што је могуће тачније, и тачним мерењем одреди му се пречник и висина, па дакле и запремина у кубним сантиметрима.

Мерење димензија цилиндра врши се на обичној температури ϑ, те и нађена запремина $V\vartheta$ вреди за ту температуру. Нама треба запремина цилиндра на температури 0^0, а то се из познате запремине $V\vartheta$ израчунава обрасцем:

$$V_0' = \frac{V\vartheta}{1+\alpha\vartheta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (345^1$$

где је α кубни коефицијенат ширења метала од кога је цилиндар направљен.

Тај се цилиндар веома танком металном жицом обеси о један тас хидростатичких прецизних теразија и теразије се доведу у равнотежу. Затим се цилиндар потопи у дестилисану воду од 0^0, која је пре тога била прокувана (да сав ваздух из ње изађе): овде ваља мало дуже причекати, да цилиндар заузме температуру воде од 0^0. Цилиндар ће сад бити у води лакши и ми ћемо додати тегова q грама, да се равнотежа успостави. Али, пошто је цилиндар потопљен у воду а тегови се налазе у ваздуху, то горња тежина q није тачна већ место ње морамо узети:

$$q\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

где је разломак $\frac{\delta}{\gamma}$ однос релативних специфичких тежина ваздуха и метала од кога су тегови направљени.

Запремина цилиндра на температури 0^0 јесте V_0, губитак његов у води од 0^0 биће $V_0\sigma_0$, ако са σ_0 означимо апсолутну специф. тежину воде на 0^0 коју уосталом и тражимо. Губитак цилиндра у ваздуху биће $V\vartheta d$ ако, са d означимо апсолутну спец. тежину ваздуха са $V\vartheta$ запремину цилиндра на температури ϑ; па како је $V\vartheta = V_0\,(1+\alpha\vartheta)$, то ћемо за равнотежу имати:

$$q\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right) = V_0\left[\sigma_0 - d\,(1-\alpha\vartheta)\right]$$

$$= V_0\sigma_0\left[1-\frac{d}{\sigma_0}(1+\alpha\vartheta)\right]$$

Међутим се без икакве велике погрешке може однос $\frac{d}{\sigma_0}$ апсолутних специфичких тежина између ваздуха и воде заменити односом $\frac{\delta}{\triangle_0}$ релативних вредности које су уосталом познате, па имамо:

$$\delta_0 = \frac{q}{v_0}\,\frac{1-\frac{\delta}{\gamma}}{1-\frac{\delta}{\triangle_0}(1-\alpha\vartheta)} \quad \cdots\cdots\cdots (346$$

Ако у овом обрасцу q значи место тежине масу у грамовима и σ_0 значиће масу у грамовима јддног кубног сантиметра дестилисане воде на 0^0.

Најновији експерименти дали су:

$$\sigma_0 = 0{\cdot}999884.$$

Означимо са V_0 и V_4 запремине и са σ_0 и σ_4 густину исте масе воде на 0^0 и 4^0, имаћемо:

$$V_0\sigma_0 = V_4\sigma_4 \quad \text{одакле} \quad \sigma_4 = \sigma_0\frac{V_0}{V_4}.$$

Одређујући експериментом ширење воде на разним температурама одређује се и однос $\frac{V_0}{V_4}$, па је нађено да је:

$$\frac{V_0}{V_4} = \frac{1}{0{\cdot}999871} = 1{\cdot}000129$$

те према томе густина воде σ_4 на температури од 4^0 биће:

$$\sigma_4 = 0{\cdot}999884 \times 1{\cdot}000129$$

$$= 1{\cdot}000013 \text{ (в. обр. 115).}$$

Специфична тежина чврстих тела.

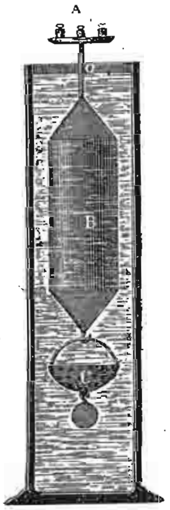
729. У главноме се за специфичну тежину чврстих тела могу употребити;

1. хидростатичне теразије,
2. ареометар (по тежини),
3. пикнометар.

1. **Хидростатичне теразије.** — Пошто нам је σ_0 познато, можемо место оног металног цилиндра, који нам је служио за одредбу те вредности, узети ма које друго чврсто тело које се у води не раствара и коме специфичку тежину не знамо. Служећи се истом једначином, ми ћемо имати помоћу хидростатичних теразија одређену запремину тога тела:

$$V_0 = \frac{q}{\sigma_0} \frac{1-\frac{\delta}{\gamma}}{1-\frac{\delta}{\triangle_0}(1+\alpha\vartheta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (347$$

730. — 2. **Ареометар по тежини.** Ова друга метода разликује се од прве само употребом друге справе за мерење и тежине тела и губитка његова у води, и то *ареометра Нихолсонова*. Уопште узев, то је шупаљ металан (или стаклен) цилиндар, као што га показује сл. 350, који се потапа у дестилисану воду од 4° Ц.



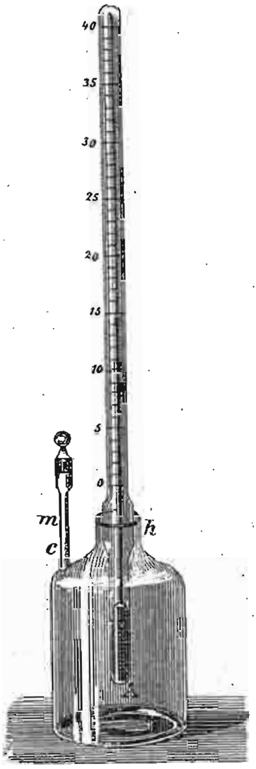
Сл. 350.

На дршци која носи горњи тас има једна белега *o* до које ареометар сме да тоне. Празан ареометар не тоне до те белеге већ далеко испод ње. Тело коме хоћемо да одредимо спец. тежину овом справом може највише толико бити тешко, да, кад се метне на горњи тас, справа потоне до белеге; свакако је боље да под тежином тела на тасу справа не достигне белегу *o*. У том се случају ситним зрневљем, које се меће на тас поред тела, справа натера да потоне до белеге. Кад тело с таса скинемо и место њега метнемо тегове, док опет справа не потоне до белеге, ми смо одредили тежину у ваздуху *Q*.

Сад се тегови из таса изваде и тело метне на доњи тас *C*, па се са справом заједно спусти у воду; очевидно је да сад справа, због губитка тела у води, неће потонути до белеге. Додатком тегова *q* у горњи тас натераћемо је да опет потоне до белеге. Ово *q* није ништа друго до тражена запремина тела.

Уопште узев, ова је метода мање тачна од прве.

731. — 3. **Пикнометар.** На трећи начин одређује се спец. тежина нарочито прашкова пикнометром, а то је обично стаклен суд разног облика, али с том важном особином да се на лак начин и увек до исте запремине може пунити водом или другим течностима. Такву једну справицу показује сл. 351. која носи и свој термометар за одредбу температуре течности у њој. На узаном краку *c* има једна белега *m* и пикнометар се увек пуни до те белеге. Обично се сипа течности мало више, па се упијачом хартијом испразни до означене белеге.



Сл. 351.

Одређивање спец. тежине пикнометром бива на овај начин:

Пиконометар се напуни водом и метне у лед (који се крави). Кад вода у њему заузме температуру *0°*, а то се познаје по томе што се ниво воде у узаној цеви не мења, доведе се ниво воде (одузимањем сувишне воде хартијом) до белеге. Сад се пикнометар извади из леда, обрише се добро и остави да заузе температуру собе. Кад то буде, онда се пикнометар метне на један тас прецизних теразија, а поред њега метне се и тело чију спец. тежину тражимо; теразије се ма каквом даром на другом тасу доведу у равнотежу. (Прво мерење). Тело се сад дигне с таса (а пикнометар остане) и место њега међу тегови, док се равнотежа не поврати; тиме је одређена тежина тела *Q*, (друго мерење). Тегови се дигну с таса и тело се сипа у пикнометар, који се опет затвори, и метне поново у лед, а ниво воде, док је пикнометар у леду, доведе опет до белеге. Кад је справа заузела температуру *0°*, извади се и обрише, па се поново остави да заузме температуру ваздуха у соби. Кад се затим метне на тас од теразија, приметиће се да је пикнометар с телом у његовој води, лакши него кад је тело било поред њега на тасу. Тај се губитак q одреди (треће мерење) и специфичка је тежина тела и сада $\sigma = \frac{Q}{q}$.

Добра страна ове методе у томе је што се њоме може одређивати спец. тежина ситним телима (нарочито прашковима) која се не могу вешати на хидростатичким теразијама, али које можемо сипати у пикнометар. Нарочито се ваља чувати код ове методе, да не остане ваздуха око појединих зрнаца, кад се сипају у пикнометар. Тога ради ваља пикнометар, кад је тело у њему, прокувати или га метнути под звоно ваздушна шмрка и извући ваздух или, најзад, употребити оба ова средства. Тога се ваздуха ваља чувати и код прве две методе.

732. Специјални случајеви. Горе описане методе одређивања специфичке тежине не могу се тако просто извести у овим специјалним случајевима:

a. Тело је лакше од воде. — У том случају тело се веже с неким тежим телом, чији се губитак q_2 у води засебно одреди. Ако је сад губитак оба тела q_1 онда је:

$$\sigma = \frac{Q}{q_1 - q_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (348$$

b. Тело се у води раствара. — Место воде употреби се друга течност специфичне тежине σ_1 па се одреди спец. тежина тела σ_2 према тој течности. Спец. тежина тела према води биће:

$$\sigma = \sigma_1 \, \sigma_2.$$

На пример за шећер, који се у води раствара одредићемо спец. тежину у апсолутном алкохолу. Тако нађени број (2·020) помножићемо са спец. тежином алкохола (0·795), па ћемо добити спец. тежину шећера према води (1·606).

c. Шупљикава тела. — Код шупљикавих тела може се спец. тежина на два начина одређивати: или се може одредити спец. тежина са шупљикама заједно или саме масе која тело сачињава без шупљика. У првом случају тело се превуче танким слојем воска или друге какве непробојне материје те се спречи улазак воде у шупљике и одреди се спец. тежина на обичан начин. У другом случају тело се спраши, па му се онда одређује спец. тежина.

d. Саојена тела. — Кад имамо два или више спојених или везаних тела између себе (на пр. металан чекић с дрвеном дршком и т. д.), онда је средња спец. тежина споја сразмерна збиру спец. тежина појединих делова. Овде се поступа као код одређивања тежишта у сличним приликама, па зато ако спец. тежине појединих делова означимо са $\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_3 \ldots \sigma_n$ а њихове запремине са $v_1, \; v_2, \; v_3 \ldots . \; v_n$ и ако је спец. тежина течности $= \gamma$, имаћемо спец. тежину целога коплекса:

$$\sigma = \frac{v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3 + \ldots . \, v_n\sigma_n}{\gamma(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots . \, v_n)} \quad . \quad . \quad . \quad (349$$

Специфичка тежина течности.

Све три методе које смо употребили за одредбу спец. тежине чврстих тела могу се употребити и за течности. Сем тога за течности постоје још и друге специјалне методе.

733. — 1. Хидростатичке теразије. — О један тас хидростатичких теразија обеси се једна платинска или стаклена лопта (сл. 352), па јој се одреди губитак најпре у води q_0, а затим у оној течности q, којој спец. тежину тражимо. Тражена спец. тежина биће:

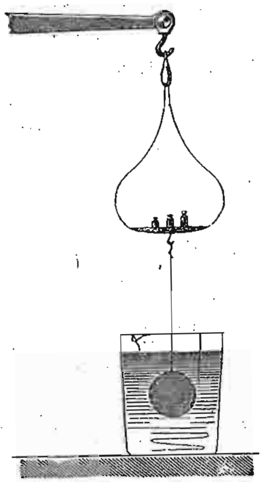
$$\sigma = \frac{q}{q_0}.$$

Место стаклене лопте најчешће се употребљава стаклена цев, као што показује сл. 353., која се донекле напуни живом, да би могла у течности (лакше од живе) потонути.

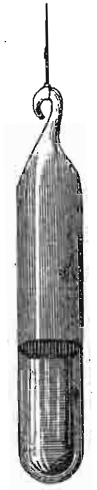
734. — 2. Ареометар сталне запремине (Николсонов). — Ареометар, као што смо га видели напред, само сада (с нешто промењеним изгледом) израђен од стаклета, да га киселине не нагризају, потапа се до белеге у воду па затим у течности којима се спец. тежина тражи. Ако тежина ареометра Q и ако смо морали додати тегова q_0, да потоне до белеге у воду а q за другу течност, онда ће спец. тежина те течности бити:

$$\sigma = \frac{P + q}{P + q_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (350$$

Као што се види, код овог ареометра потребна је час једна $(P + q)$ а час друга тежина $(P + q_0)$, да у разним течностима потоне до *исте запремине*. То би, дакле, био ареометар с променљивом тежином течности а сталном запремином.



Сл. 352.



Сл. 353.

735. — 3. **Пикнометар.** — Пикнометар се на показани већ начин напуни најпре водом и измери, пошто му је претходно одређена дара q. Тежина пикнометра с водом нека је Q_0. Сад се пикнометар испразни и осуши, па се напуни течношћу којој спец. тежину тражимо и измери се; нека је та тежина Q. По себи се разуме да ће спец. тежина тражене течности бити:

$$\sigma_3^3 = \frac{Q - q}{Q_0 - q}.$$

Као што се види, код свију ових метода упоређујемо тежине истих запремина разних течности.

736. — 4. **Ареометар сталне тежине.** — Основни тип таквог ареометра представљен је на сл. 354. и направљен је од стаклета. Горњи му је део извучен у танку цев подељену на једнаке или неједнаке делове; због тога се назива још и *ареометар са скалом*. Доњи део код D оптерећен је обично живом, да би у течности пливао стабилно и стајао вертикално. Пошто му се тежина не мења, он ће у разним течностима разно тонути и степен тоњења одређује спец. тежину течности.

Означимо са σ спец. тежину течности у којој ареометар плива са v запремену потонулог дела, са Q тежину целе справе. Ако занемаримо онај незнатни потисак, који непотонули део цеви има у ваздуху, имаћемо:

$$Q = v\sigma.$$

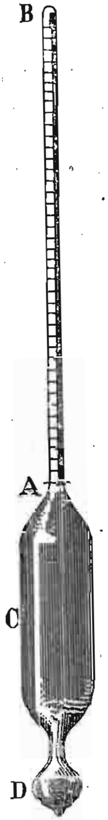
Ако исту справу потопимо у другу неку течност спец. тежине σ_1, он ће потонути до запремине, v_1 те ће опет бити:

$$Q = v_1\sigma_1.$$

Према томе је:

$$v\sigma = v_1\sigma_1 \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{v}{v_1} \quad . \; . \; . \quad (351$$

Специфичке тежине две течности изврнуто су сразмерне потонулим запреминама ареометра.



Сл. 354.

737. Једна иста справа може служити и за течности лакше од воде; само онда подељена цев мора бити сувише дугачка. Стога се најобичније праве засебни ареометри за теже, а засебни за течности лакше од воде. Код првих, ареометар највише потоне у води (до почетка скале A). Да би се ареометар за једне или друге течности градуисао ради се на овај начин:

Најпре се одреди тачка до које справа тоне у чистој дестилисаној води; запремина потонулог дела нека је v_0. Сад се ареометар потопи у неку течност познате спец. тежине γ, рецимо у алкохол, и нађе се запремина v; пошто је спец. тежина воде $= 1$, биће:

$$\gamma = \frac{v_0}{v}.$$

Ако ону запремину за колико је ареометар потонуо више у алкохолу (или мање у некој течности тежој од воде) означимо са w, онда ће бити $v = v_0 + w$ за ређе, а $v = v_0 - w$ за гушће течности од воде. Због тога је:

$$\gamma = \frac{v_0}{v_0 \pm w}.$$

Одавде је:

$$w = \mp v_0\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right).$$

Ту запремину w, за коју је ареометар потонуо у алкохолу, поделићемо на m једнаких делова или степена и ту поделу изведемо по целој цеви. Онда је простор φ између сваке такве две поделе:

$$\varphi = \frac{1}{m} w$$

или:

$$\varphi = \pm \frac{v_0}{\varphi} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

Сад се тако степенован или градуисан ареометар спусти у ма коју течност, којој спец. тежину σ тражимо, и он ће потонути за n степени. Запремина до које је потонуо биће:

$$v = v_0 \pm n\varphi.$$

за лакше односно теже течности; тражена специфична тежина течности биће:

$$\sigma = \frac{v_0}{v_0 \pm n\varphi}$$

или кад заменимо вредност за φ, добивамо образац и за једне и за друге течности:

$$\sigma = \frac{v_0}{v_0 - \frac{n}{m} v_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{n}{m} \frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Пошто је за лакше течности γ мање од 1, то је за тај случај образац згоднији у овом облику:

$$\sigma = \frac{1}{1 + \frac{n}{m} \frac{1 - \gamma}{\gamma}} \quad \ldots\ldots \quad (352$$

Сви се ареометри ове врсте деле у главноме на две групе: на ареометре с *рационалном* и *произвољном скалом*. У првој групи разликују се даље: *волумметри, дензиметри* и *процентни ареометри.*

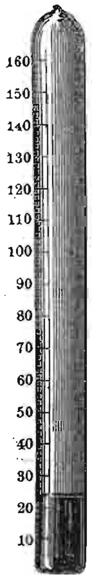
738. *Волумметар.* — Најпростији апарат те врсте конструисао је *Геј-Лисак* (Gay-Lussac). То је обична цилиндрична цев (премда може имати и друге облике), затворена на оба краја, у којој се налази нешто живе, да би усправно пливала. (сл. 355). Оно место до кога справа потоне у чистој води обележи се са *100*, па се цела потопљена дужина цеви подели на 100 једнаких делова и деоба се продужи на исти начин и на више. Кад се справа спусти у неку течност и у њој потоне рецимо до 80, онда је спец. тежина њена:

$$\sigma : 1 = 100 : 80 \text{ или } \sigma = \frac{100}{80} = 1{\cdot}25.$$

Ако у другој некој течности цев потоне до 120 онда је:

$$\sigma = \frac{100}{120} = 0{\cdot}833.$$

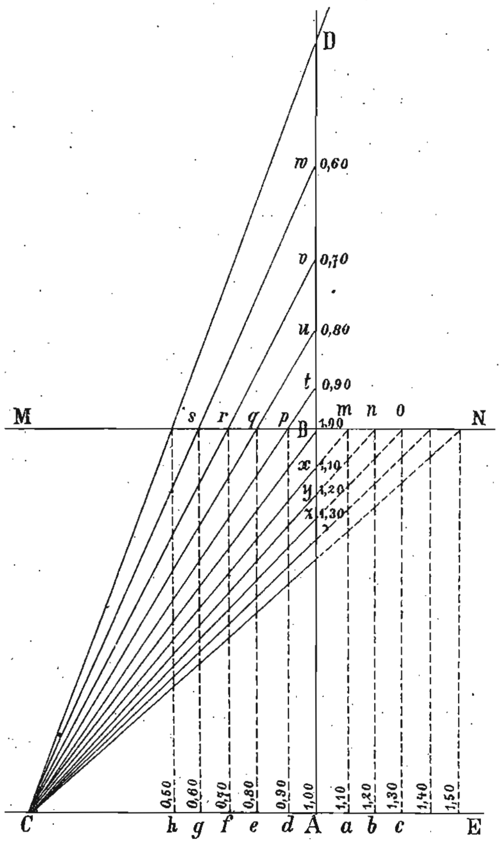
Према томе: код Геј-Лисакова волумметра дели се 100 с прочитаним бројем скале.



Сл. 355.

739. *Дензиметар.* — Дензиметар или универзални ареометар даје непосредно спец. тежину посматране течности. Овде поделе више нису једнаке, већ су ка доњем крају скале збијеније

Дензиметар има општи облик ареометра и скала му се одређује на овај начин. Најпре се одреди запремина суда (потапањем у воду) за себе а цеви за себе; затим се из познате запремине суда одреди дужина цеви коју би ареометар имао, кад би био свуда једнаког пречника. Тако нађена дужина пренесе се од A до B (сл. 356). Кроз тачку A повуче се управна CE произвољне дужине управно па AB, па се од A лево и десно пренесу ма колики велики, али једнаки делови до тачака a, b, c, d, e... Из тих се тачака повуку паралелне са AB, које ће на линији MN, повученој кроз B и управно на AB, проћи кроз тачке m, n, o, p, q . . . Састављајући ове тачке с тачком C, добићемо пресечне тачке t, u, v, x, y . . . Делови линије CE су спец. тежине и то код C је нула а код A један. Ch на пр. $= 0·50$, $Cg = 0·60$ и т. д. $Aa = 1·10$, Ab 1·20. По линији AB исписане цифре показују одговарајуће спец. тежине, кад справа до тог места потоне.



Сл. 356.

Ево како се једна волумметарска скала може претворити у дензиметарску. Нека је цев неког волумметра подељена на једнаке делове и нека је a стална разлика у густини, која одговара одстојању двеју подела. Једна извесна густина нека је σ и њој одговара подела n, а друга нека је $\sigma_1 = \sigma + a$ која одговара скали n_1; онда је:

$$n = \frac{100}{\sigma} \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{100}{\sigma + a}$$

према томе:

$$n - n_1 = 100\,\frac{a}{\sigma(\sigma + a)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (353$$

Разлике $n - n_1$ у толико су мање, т. ј. дензиметарска је скала у толико збијенија, у колико је веће σ, т. ј. у колико је већа спец. тежина.

740. *Процентни ареометри.* — За практику су нарочито важни ареометри, који показују у процентима садржину или течних смеша или сoних раствора. Јер је један сoни раствор у толико гушћи, у колико у њему има врше соли; алкохолске смеше на пр. с водом у толико су лакше или ређе, у колико у њима има више алкохола и т. д. Ради лакшега рада обично се праве нарочити ареометри за сваку течност, и ти ареометри у извесним границама одређују густину, па дакле и садржину раствореног тела или помешане течности у процентима. То су *процентни ареометри.* Тако на пр. алкохолометар даје садржину алкохола у некој алкохолској течности; алкалиметар садржину алкалија у цеђу; сахариметар проценат шећера у неком раствору; аргентометар садржину нитрата сребра у одговарајућем раствору и т. д. Ту спадају и ареометри за пиво, млеко (лактометри), киселине итд.

Све се ове справе градуишу емпирички, т. ј. пробом у растворима којима се зна процентна садржина дотичног тела.

741. На први поглед могло би се мислити да би се спец. тежина из познатих количина помешаних течности могла израчунати. Јер кад се помешају 50 запремина алкохола и 50 запремина воде и добије се 100 запремина смеше, требало би да спец. тежина те смеше буде средња вредност између спец. тежине алкохола од 0·794 и воде на 15°, од 0·9991 дакле 0·8866.

Али у ствари није тако. Услед молекилског дејства обеју течности, наступа промена запремине смеше. јер кад се помешају једнаке запремине воде и алкохола неће смеше дати два пут већу запремину већ мању, услед контракције која у тим случајевима наступа. Спец. тежина је у ствари већа, но што би је горњи рачун показао.

По најновијим истраживањима од Баумхауера излази да је:

Смеша од запремина:		Специфичке тежине:
воде	алкохола	
100	0	0·9991
90	10	0·9857
80	20	0·9750

Смеша од запремина:		Специфичке тежине:
воде	алкохола	
70	30	0·9645
60	40	0·9511
50	50	0·9338
40	60	0·9131
30	70	0·8897
20	80	0·8635
10	90	0·8338
0	100	0·7941

Према томе, ако један ареометар код кога је тоњење у воду означено са 0, код спец. тежине 0·9857, 0·9750 и т. д. обележимо са 10, 20 итд. имали бисмо алкохолометар који би у процентима давао садржину алкохола у испитаној течности.

742. *Саецијални ареометри.* — Овде ћемо да поменемо ареометре, који одређују спец. тежину течности врло малих количина, тако да у њих не можемо потопити целу справу. Такав ареометар имамо на сл. 357, а конструисао га је Русо (Rousseau). Оснива се у неколико на истом принципу као и Нихолсонов, само место горњега таса имамо мали судић за сипање оне течности коју испитујемо; на судићу је забележена запремина једног кубног сантиметра једном белегом. Цев ареометарска се на овај начин градуише. Место до кога справа потоне у чистој води кад је и горњи судић празан обележи се са *o*; сад се у судић метне 1 грам. течности и место до кога справа потоне обележи се са 100; цео простор од 0 до 100 подељен је на сто једнаких делова, и та се подела продужи и изнад 100, за течности теже од воде. Ако у судић наспемо један кубни сантиметар оне течности којој спец. теж. тражимо, и ако справа потоне до n тог дела скале, онда је њена спец. тежина $\frac{100}{n}$.

Сл. 357.

Паке (Pâquet) је тај исти апарат у неколико изменио за брзо одређивање спец. тежине сасвим ситних чврстих тела. У горњи судић се наспу два кубна сантиметра воде и место до кога вода допре обележи се са *o*. Горњи се део судића (изнад површине те воде) подели на целе и десетине кубног сантиметра. Сад се справа са она два грама воде у судићу спусти у чисту воду, па докле потоне обележи се са *o*. Затим се оптерети тежином од *5* гр. $= 50$ десиграма и то се место обележи са *50*. Сад је апарат градуисан, и спец. тежина неког малог комада чврстог тела одређује се на овај начин:

У горњи се судић сипају она два грама воде до нулте тачке поделе, па се цела справа потопи у воду; потонуће до *o*. Тело чију спец. тежину тражимо, баци се у судић; вода ће се у њему издићи на пример за 2·3 дела, а ареометар ће због тога потонути рецимо до 45 поделе. Тежина тела је дакле 45 десиграма, а спец. тежина $\frac{4\cdot5}{2\cdot3} = 1\cdot95$.

743. *Ареометри с ароизвољном скалом.* — Скале ових ареометра не показују ни специфичку тежину нити размеру смеше посматране течности, јер су сасвим произвољно изведене. Степени тих скала обично су једнаки, и кад справа потоне за извесан број степена онда то не значи да се у истој мери променила густина течности.

Међу справама ове врсте најпознатији је *Боме-ов* (Baumé) ареометар. Ево како је код њега изведена скала:

Справа је тако израђена (у облику обичних ареометара) и оптерећена, да за течности теже од воде потоне скоро до врха у чистој води; та је тачка обележена са *o*. Затим се справа спусти у раствор од 15 делова морске соли и 85 д. воде: то је место обележено са 15, и цео простор од 0 до 15 подељен је на 15 једнаких делова и подела је продужена и даље по целој цеви. Бомеов ареометар је најчешће употребљен за киселине, и поједине смеше киселина с водом обично су дате у Бомеовим степенима. Бомеов ареометар тоне до поделе:

66 у концентрисаној сумп. киселини,
36 у обичној азотној киселини,
22 у обичној хлороводоничној кис.

За лакше течности од воде Боме је извео другу скалу Нултом тачком обележио је место до кога справа (при дну цеви потоне у раствору од 10 дел. морске соли и 90 д. воде, а с 10 обележио је место до кога потоне ареометар у чистој води. Тај простор од 0 до 10 подељен је на 10 делова и деоба је продужена до врха цеви. Као што се види, првих 10 подела неупотребљиве су за течности ређе од воде, јер подела 10 показује чисту воду. Обични етар показује на Бомеовој скали 56 степена, а може се дотерати ректификацијом да покаже и 65 степена. У амонијаку Бомеов ареометар тоне до 22—25 степ.

Бомеовим се ареометром могу одређивати и специф. тежине. Рецимо да је справа, одређена за гушће течности, потонула у некој течности непознате спец. тежине σ до n тог степена. v_0 је запремина справе до нулте тачке (то је и тежина воде коју ареометар истисне, кад потоне до 0); v је запремина између сваке две поделе на скали, а σ_0 спец. тежина раствора морске соли у коме справа показује 15 степ. Пошто је овде тежина истиснуте течности увек иста, имамо:

$$v_0 = (v_0 - 15\,v)\,\sigma_0$$

за дату течност, биће:

$$v_0 = (v_0 - n\,v)\,\sigma$$

Обе ове једначине само су приближно тачне, јер густина воде на обичној температури (12—13°) није 1 већ 0·9995, а тако исто не водимо рачуна о губитку цеви у ваздуху. Међутим се обе ове погрешке могу занемарити. У тим једначинама имамо две непознате: $\frac{v^0}{v}$ и σ. Из прве једначине имамо:

$$\frac{v_0}{v}=\frac{15\,\sigma_0}{\sigma_0-1}=A.$$

Ова вредност A назива се *модуо* тога ареометра. Заменом добивамо:

$$\sigma=\frac{A}{A-n}.$$

За течности ређе од воде имали бисмо:

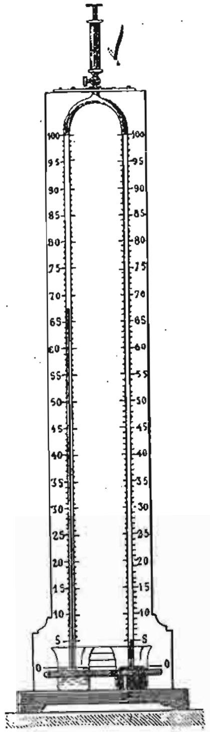
$$\sigma=\frac{B}{B+(n-10)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(354$$

Вредности за A и B су разне и код Бомеова и холандског ареометра износе по 144. Код *Бекова* (Beck) ареометра имамо: $\sigma=\frac{170}{170\pm n}$; код *Тведлова* (Twaddle je $\sigma=\frac{200}{200+n}$; код *Бриксова* (Brix) je $\sigma=\frac{400}{400+n}$. Знак + вреди за лакше, а — за теже течности од воде.

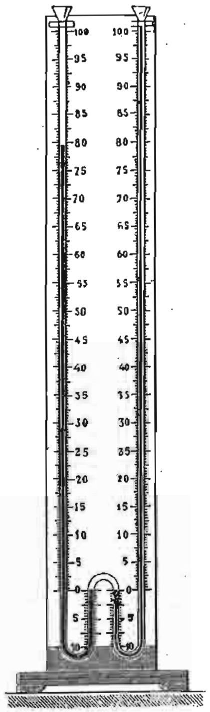
744. *Тачност ареометара.* — За све специфичке тежине течности, одређене ареометрима, може се казати да су само приближно одређене, јер се с хидростатичким потиском мешају и капиларна дејства између течности и стаклене цеви ареометра. Извесни ареометри, на пр. Геј Лисаков алкохолометар, код кога се скала емпирички изводи, дају спец. тежине, које се по течности својој могу равнати са онима, које се одређују добрим теразијама.

745. — 5. **Специфична тежина течности помоћу спојених судова.** — На завршетку овога одељка да напоменемо, да се спец. тежина течности може одредити према правилу, које смо раније нашли за две разне течности у спојеним судовима (721.) Пошто се висине течних стубова у спојеним судовима имају изврнуто специфичким тежинама (обр. 337.), то се одређивањем тих висина спец. тежине непосредно одређују. Апарати који се за тај циљ могу употребити представљени су на сл. 358.

и 359. Код првога се једним малим ваздушним шмрком, који се на врху види, сишу течности у једну и другу цев.



Сл. 358.



Сл. 359.

Специфична тежина гасова

746. Специфичну тежину гасова одређујемо упоређењем тежине извесне запремине некога гаса, на пр. ваздуха, с тежином исте запремине воде. Тога ради узме се један стаклени балон на пр. од 20 лит. запремине (сл. 360), па му се одреди тежина q_1, кад се из њега извуче ваздух; затим се балон напуни сувим ваздухом и одреди тежина q_2. Тежина самога ваздуха биће: $q_2-q_1=q$. Тај исти балон напуњен водом и измерен даће тежину q_3; тежина саме воде је $q_3-q_1=q_0$. Специфична тежина ваздуха биће очевидно:

$$\sigma=\frac{q}{q_0}.$$

За остале је гасове лакше да се спец. тежина одређује према ваздуху.

Сл. 360.

Овако одређена спец. тежина гасова није довољно тачна. О тачнијим методама за одређивање спец. тежине гасова и пара биће говора у науци о топлоти.

Засад само дајемо образац за тачну одредбу спец. тежине ваздуха извесне апсолутне влажности f, на притиску p, температури ϑ, на геогр. ширини φ, висини над морем H, и полупречнику земљином R:

$$\sigma = 0{\cdot}001292743\,\frac{p - 0{\cdot}354\,(1+0{\cdot}00367\,\vartheta)\,f}{(1+0{\cdot}00367\,\vartheta)\,760}\times$$

$$\times\,(1-0{\cdot}00265\cos 2\,\varphi)\left(1-2\frac{H}{R}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (355$$

Поједине вредности за разне притиске p и температуре ϑ изложене су у овој таблици:

ϑ	$p = 730$	$p = 740$	$p = 750$	$p = 760$	$p = 770$
0	0·001242	0·001259	0·001276	0·001293	0·001310
2	233	250	267	284	301
4	224	241	258	275	291
6	216	232	249	266	282
8	207	223	240	257	273
10	108	215	231	248	264
12	190	206	223	239	255
14	182	198	214	230	246
16	174	190	206	222	238
18	165	181	197	213	229
20	157	173	189	205	221
22	150	165	181	197	213
24	142	158	273	189	204
26	134	150	165	181	196
28	127	142	158	173	188
30	119	135	150	165	181

747. *Пример.* Један ареометар са скалом тежак је 75 гр.; кад се његова тежина смањи за 31 гр., онда његова цев искочи из воде за 144 мм. Кад се успостави првобитна тежина и потопи у неки сôни раствор, искочиће за 58 мм.; колика је спец. тежина тог раствора?

Ако са v означимо запремину до које тоне ареометар од 75 гр., имаћемо његову тежину по Архимедову закону:

$$q = v\sigma_0 = 75$$

где је $v_0 = 1$ спец. тежина воде. Нека је сталан пресек цеви $= f$; олакшан за 31 гр., испливала је цев за 144 мм. $= 14{\cdot}4$ см.; према томе та запремина износи: $v_1 = 14{\cdot}4\,f = 31$.

По Архимедову је закону опет:

$$v\sigma_0 - 14{\cdot}4\,f\sigma_0 = 75 - 31$$

или:

$$\sigma_0\,(v - 14{\cdot}4\,f) = 44.$$

Према томе:

$$v\sigma_0 : (v - 14{\cdot}4\,f)\,\sigma_0 = 75 : 44;\ \frac{f}{v} = 0{\cdot}0287.$$

Ако је спец. тежина раствора σ, онда је уопште:

$$v_0\sigma = v\sigma \text{ или } \sigma : \sigma_0 = v_0 : v$$

или:

$$\sigma : \sigma_0 = 1 : \left(1 - \frac{f}{v}\,5{\cdot}8\right)$$

или пошто је $\sigma_0 = 1$:

$$\sigma = \frac{1}{1 - 0{\cdot}0287\cdot 5{\cdot}8} = 1{\cdot}2.$$

ДЕО ЧЕТВРТИ

Кретање течности.

(Хидрокинетика — Хидраулика).

Опште одредбе.

748. Због веома велике покретљивости течних делића, кретања течности су много разноврснија но кретања чврстих тела. Кад се какво чврсто тело не обрће и кад на њега никакве спољашње силе не дејствују, онда се оно може кретати само на један једини начин: по правој линији и сталном брзином. Напротив течност која се не обрће и на коју никакве силе са стране не дејствују може се још на врло много начина кретати. Јер трење о дуварове суда, као и између појединих делића течности, изазива непрекидну промену кретања у појединим слојевима течности. С друге стране, стишљивост, и ако је мала, производи промене у густини покренуте течности, које се промене тешко могу потпуно сазнати. Да бисмо дакле дошли до општих закона о кретању течности, ми ћемо занемарити утицаје које производи стишљивост и унутрашње трење и сматраћемо кретање једне *идеалне течности*, т. ј. такве која никако није стишљива и код које не постоји унутрашње трење.

749. Теоријско проучавање закона о кретању течности оснива се још на друге две претпоставке или принципа. Први је принцип: *паралелност слојева*, по коме се претпоставља, да се течности крећу или теку у паралелним слојевима или, што је све једно, да сви слојеви једне течности у једном пресеку имају исту брзину. Кад би идеалне течности могле тако тећи, да не пролазе поред дуварова разних судова у коме се налазе, онда би тај принцип био тачан; али пошто се у ствари све течности крећу у судовима, цевима, коритима или кроз ваздух (који са свију страна омотава течност као каква цев), онда и тај принцип може вредети само за теоријска посматрања.

Други је принцип: *непрекидност* или *континуитет течности*. Због преношења притиска на све стране и због велике покретљивости течних делића, сваки могући простор у некој течности мора бити испуњен течношћу и у њој самој не сме бити празнина, т. ј. течност мора бити непрекидна па ма како испуњавала суд у коме се креће. Узмимо да течност протиче кроз неку цев чији се полупречник, т. ј. пресек с места на место мења, са извесним, на сваком пресеку другим, брзинама. Уочимо два таква пресека F_1 и F_2 у којима се течност креће брзинама v_1 и v_2. Спец. тежина течности нека је σ. За извесно ће време, на пр. за једну секунду кроз први пресек протећи извесна количина течности тежине $F_1 v_1 \sigma$ а кроз други $F_2 v_2 \sigma$. Пошто течност тече, не стационира, онда мора кроз оба пресека да протече за исто време иста количина течности; јер ако кроз други пресек протече више него што први пропусти, наступио би прекид течности који у ствари не постоји, а ако би кроз други пресек прошло мање него кроз први, наступило би пред другим пресеком гомилање и сабијање течности, које тако исто не постоји. Према томе мора да буде:

$$F_1 v_1 \sigma = F_2 v_2 \sigma$$

или

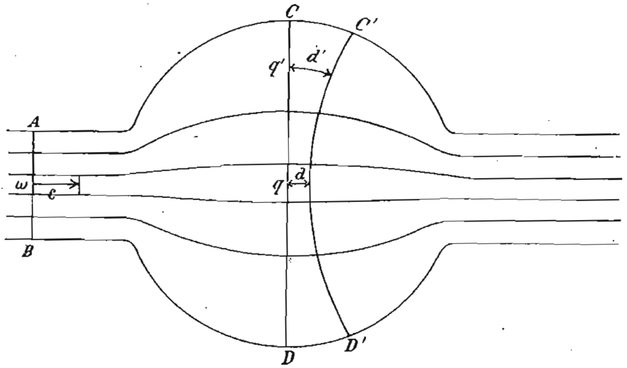
$$F_1 v_1 = F_2 v_2 = \text{const.} \quad \cdots\cdots\cdots (356$$

или још:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

а то значи да је *производ из пресека и брзине течности у том пресеку стална количина* или *брзине неке течности у два разна пресека изврнуто су сразмерне тим пресецима.*

Тога ради посматрајмо протицање течности кроз неку цев, која се ма где наједанпут рашири (сл. 361). У цилиндричном делу цеви слојеви су течности паралелни и ако занемаримо трење о дуварове суда, ти су



Сл. 361.

слојеви и једнаке дебљине. Ако пресек таквог једног слоја на месту AB означимо са ω, а сталну брзину у том слоју са c, онда је запремина протекле течност $= \omega c$ и једнака у свима слојевима тога места. Кад се цев рашири, слојеви се искриве, те и пресеци појединих слојева постану већи; један је на пример на месту CD у оси цеви q, а други q'. Брзине течности у тим пресецима су v и v_1 али је опет $vq = v_1 q_1 = c\omega$. Повуцимо један пресек $C'D'$ кроз проширење, и то близу до CD. Између оба пресека леже комади висине d и d' и те су висине такве да увек постоји однос: $q : q' = d : d'$. Међутим су брзине у тим пресецима изврнуто сразмерне тим пресецима, па дакле изврнуто су сразмерне и висинама тих пресека. Према томе: *брзине течности у просторијама ограниченим двама пресецима на разним местима изврнуто су сразмерне одстојањима тих пресека.*

Ово правило, са оним које смо напред извели, потпуно карактерише брзне односе у некој покренутој течности.

750. *Струјање.* — Кад се нека течност тако креће, да је брзина у свакој њеној тачки по правцу и по величини стална, онда се такво кретање течности назива *стационарно протицање* или *струјање;* сви делићи течности пролазе једно за другим кроз исто место, истим

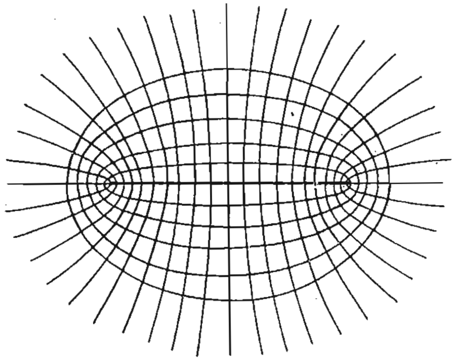
правцем и истом брзином. Из тога следује, да се поједини делићи течности крећу по извесним линијама, које се називају *струјним линијама* или *линијама протицања.* Струјне линије нису то исто што и *путне линије* течних делића; те две врсте линија овако ћемо најлакше разликовати: Путна линија представља путању једног истог делића течности у разним временима, а струјна линија представља геометријска места разних делића у једном одређеном тренутку. Обадве ће ове линије бити идентичне само у том случају, где кретање не буде зависило од времена. То су она кретања течности, која приближно налазимо у рекама, водопадима, водоскоцима итд. и која смо горе назвали стационарним протицањем или струјањем. Та су кретања још и тиме карактерисана, што су код других кретања, материјални течни делићи у исти мах и носиоци неке појаве, док код стационарног кретања делићи у појави не играју никакву улогу; појава је везана за извесно место и делићи, који једно за другим кроз то место пролазе, примају на се онакво кретање какво на том месту нађу, услед чега и пролазе кроз то место сви истим правцем и истом брзином.

751. *Потенцијално и вијорно кретање.* — Кад у некој течности све оне тачке, које једног извесног тренутка имају исту брзину, спојимо међу собом, добићемо једну површину, која ће бити површина једнаких брзина; таква се површина назива *површина једнаког брзног потенцијала* и може се још по аналогији назвати *брзна нивоска површина.* Та површина стоји управно на струјним линијама. Ограничимо на таквој једној површини један површински елеменат и уочимо оне струјне линије које пролазе ободом елемента, ми ћемо тако добити једну цев, у којој течност тече или струји, као да су дуварови те цеви чврсти. Та се цев назива *струјна цев,* а течност у њој *струјни конац.* Запремина течности, која кроз струјну цев или, што је свеједно, кроз пресек струјног конца прође у једној секунди назива се *струјна јачина* или *интензитет конца.* По себи се разуме да је код стационарног кретања струјна јачина у једноме концу свуда једнака. Па како је струјна јачина равна производу из пресека и брзине, то онда: *брзине*

на разним местима једног струјног конца изврнуто су сразмерне пресецима.

Струјање или, што је свеједно, кретање течности у облику струјних цеви, које стоје управно на брзним потенцијалним површинама, назива се у опште: *потенцијално кретање течности* (Хелмхолц).

752. — Брзне потенцијалне површине могу бити равне, а тако исто могу бити и криве, простије или сложеније површине. На горњој се слици (361) види, како је та површина била у положају *AB* равна, па је прошав кроз разне кривине постала опет равна у *CD*, затим се као у *C' D'* поново искривила тако да у продужењу цилиндричне цеви буде опет равна. Биле међутим те површине ма какве, увек ће струјне линије бити на њима управне. Замислимо у некој течности једну површину ограничену елипсом, код које на две стране тачност истиче или се течност сише, онда су струјне линије пресечне линије, конфокалних параболоида. Изглед струјних линија и брзних потенцијалних површина представљен је у том случају на сл. 362.



Сл. 362.

753. Специјалан случај потенцијалнога кретања течности налазимо код тако зване *циркулације течности*. У једној течној маси, која ништа на поље не издаје нити што са стране у себе прима, морају се струјни конци у себе враћати или морају бити затворени. Кретање течности по затвореним струјним концима назива се *циркулација*. Приближну слику циркулације добићемо, кад воду у једној чаши загревамо тако да се греје само средина дна чаше; онда ће се течност с тог места пењати у висину, на површини ће се ширити према дуваровима и поред дуварова сићи ће на ниже, да се опет у средини суда попне у висину. Циркулација у великом размеру постоји у морским струјама и земљиној атмосфери.

754. Док се течност креће у облику струјних цеви или, другим речима, док се течност креће потенцијално, поједини водени делићи немају никакво ротаторно или обртно кретање. Међутим се може десити, да се поједини делићи обрћу, и онда је то засебно кретање течности. У овом случају, брзине појединих делића биће у толико веће, у колико су ти делићи даље од осе обртања, онако исто као што смо то нашли код кружног кретања уопште; т. ј. ако са ω означимо угловну брзину, а са r и r_1 одстојање два делића од осе, њихове линијске или периферне брзине биће, као што знамо, ωr и ωr_1. Док су, дакле, код потенцијалног кретања брзине у простору *између два пресека изврнуто* сразмерне одстојањима тих пресека, дотле су код обртног кретања те брзине *управо* сразмерне одстојањима. Тиме је карактерисана основна разлика та два кретања течности. Ово ротаторно кретање назива се кретање у вртлогу или *вијорно кретање течности.*

755. На основу свега што је до сад речено о кретању течности можемо извести закључак: да код течности постоје свега две врсте кретања, и то:

1. Потенцијално кретање течности,
2. Вијорно кретање течности.

Строго узев, ни једно од та два кретања не постоји чисто и одвојено једно од другога, већ се обично и једно и друго јавља у исти мах, само једно од њих преовлађује. Ми ћемо их међутим свако за се одвојено проучити.

А. Потенцијално кретање течности.

756. Најважнија потенцијална кретања, која у пракtици налазимо, могу се овако груписати:

I *Прогресивно кретање: струјање или протицање:*

1. Протицање или струјање у цевима; (око течности чврст дувар).
2. Протицање или струјање у рекама, каналима, морима; (течност се креће између чврстих и других течних или гасовитих дуварова).
3. Протицање или струјање у млазевима; (без икаквих чврстих дуварова).

4. Истицање; (прелаз прве две врсте кретања у трећу).

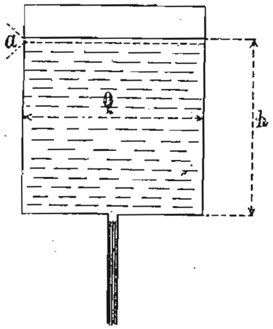
II Наизменично или таласно кретање:

5. Привидно прогресивно кретање, т. ј. прогресивно таласање.
6. Стојеће таласање.

При проучавању горњих врста прогресивних кретања нећемо се придржавати означенога реда. О таласању течности биће говора у теорији таласања.

Истицање течности под сталним притиском.

757. **Брзина истицања.** — Посматраћемо истицање кроз кружан отвор у дну некога суда, напуњеног до висине h неком течношћу, рецимо водом. Вода ће истицати под утицајем теже, а под притиском који одговара висини воденога стуба h. Пресек суда Q (сл. 363) узећемо тако велики, према отвору, да се за време посматрања ниво воде у суду незнатно спусти, те се може узети да вода истиче под сталним притиском.



Сл. 363.

Та незнатна висина, за коју ће ниво воде у суду спасти, нека је a; ако је m маса истекле течности, онда ће потенцијална енергија нивоа опасти за mgh, јер кад та количина течности висине a истече кроз отвор, то толико значи као да је она пала с висине h. С друге стране енергија истекле течности, која истиче брзином v, износи $\frac{mv^2}{2}$, те пошто се ништа том приликом не губи, мора бити:

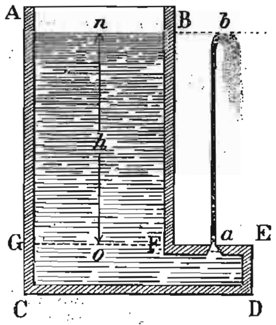
$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

одатле је:

$$v = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (357$$

Брзина истицања неке течности независна је од спец. тежине и равна је брзини с којом слободно пада свако чврсто тело с оне висине која је равна висини водена стуба у суду. То се правило за истицање течности назива *Торичелијева теорема*, а горњи образац, *Торичелијев образац*.

758. Образац за брзину који смо нашли за истицање течности остаје исти не само за отвор у дну суда, већ и за сваки други отвор. Рецимо да је отвор тако намештен, да течност истиче у висину (сл. 364), као код водоскока. Кад не би било трења воденог млаза кроз отвор и кроз ваздух, он би се попео до оне висине до које се налази вода у суду. Овај је случај међутим истоветан са оним, где смо посматрали бацање некога чврстог тела у висину, и где смо нашли да ће се неко тело, бачено у висину оном брзином с којом оно падне с неке висине h, испети до исте висине. Почетна брзина баченога тела, да достигне висину h, мора бити:



Сл. 364.

$$v = \sqrt{2gh}$$

те онда, да водени млаз достигне висину течности у суду, мора имати исту брзину истицања код отвора a.

759. Ако течност истиче из отвора који се налази на боку суда она ће се кретати по свима оним законима о параболском кретању, које смо ми код чврстих тела проучили (560).

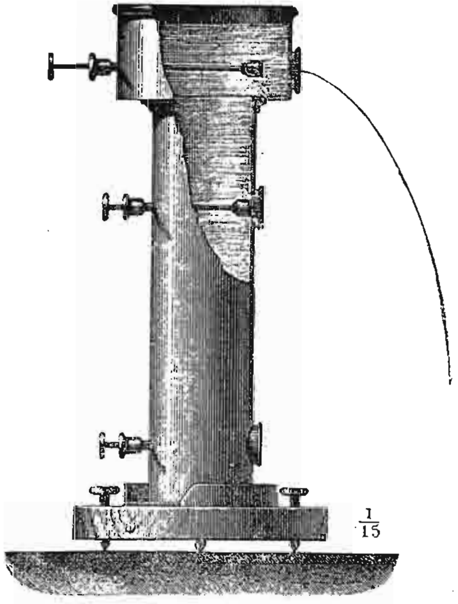
Тамо смо нашли да је образац на коме ће се неко тело бачено под углом α према хоризонту кретати овакав:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2c^2} \, \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

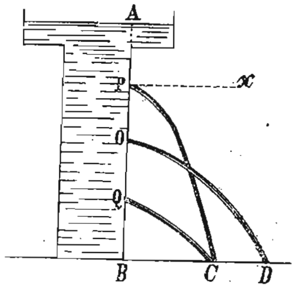
и ако у овој једначини заменимо брзину оном вредношћу из Торичелијевог обрасца, имаћемо дефинитиван образац, по коме ће се кретати водени млаз, који истиче из отвора за висину h испод површине, а под истим углом α према хоризонту:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4\,h}\,\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (358$$

Помоћу тога обрасца можемо експериментално потврдити Торичелијев образац. За експериментално проучавање закона о истицању воде из отвора на боковима суда служи Вајсбахов апарат (сл. 365). Парабола коју прави млаз биће у толико равнија, у колико је отвор из кога течност истиче ближе дну, т. ј. у колико је брзина истицања већа. Ако је један отвор исто толико испод нивоа, колико је други изнад дна, њихове ће се параболе сећи у истој тачки на хоризонту. (сл. 366).

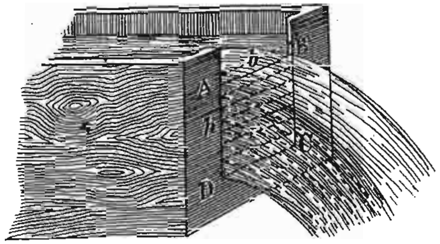


Сл. 365.



Сл. 366.

760. *Напомене.* — 1. Ако је отвор из кога вода истиче у хоризонталној равни, дакле на пр. на дну суда, и ако отвор према облику и величини суда нема особите димензије, тада сви струјни конци имају исту брзину. Напротив, ако је отвор на боку, онда дубљи конци имају већу брзину од плићих. Ако је отвор врло мали, онда се за одредбу брзине узме дубина тежишта отвора као код хидростатичког притиска на бок; за веће отворе, и ако они имају још иначе специјалне облике, онда тако одређена брзина није више тачна. Код отвора за пресипање, т. ј. код правоуглог отвора без горње ивице, (сл. 367), средња брзина износи $^2/_3$ оне брзине коју имају конци на доњој ивици.



Сл. 367.

2. Ако се суд из чијега дна течност истиче креће једнаком брзином на више или па ниже, брзина истицања саме течности остаје иста. Ако се суд креће убрзањем γ, онда је:

$$v = \sqrt{2\,(g \pm \gamma)\,h} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (359$$

Кад суд слободно на ниже пада, $v = o$, т. ј. вода из суда неће истицати. Исти је случај и код истицања из бока и одговарајућег хоризонталног кретања суда.

3. Акс се изнад течности која истиче налази друга нека течност, онда се о њену притиску такођер мора водити рачун. Стога кад прве течности нестане, па друга течност почне истицати, онда се услед њеног другојачег притиска промени брзина истицања и изгледа на први поглед као да та брзина зависи од спец. тежине.

4. Ако течност истиче из једног суда али из више отвора у разним висинама, брзине истицања постају врло компликоване, и брзина за један извесан отвор биће отприлике у средини између обе екстремне вредности које се добивају кад се најпре узме цео течни стуб над отвором, а затим стуб између тог отвора и најближег вишег.

5. Уопште узев, у свима тим и сличним случајевима образац за брзину не остаје онако прост, као што смо га горе извели, већ добива облик:

$$v = \zeta \sqrt{2 g h}$$

где је ζ *брзни коефицијенат*, који се не разликује много од јединице, (у средњу руку $= 0{\cdot}975$).

761. Торичелијев образац за истицање воде вреди кад вода истиче за висину h испод нивоа. Ако та висина буде h_1, онда ће и брзина истицања бити:

$$v_1 = \sqrt{2\,g h_1}\,.$$

Однос тих двеју брзина биће:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_1}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(360}$$

а то значи: *брзине истицања једне исте течности сразмерне су квадратном корену из одговарајућих брзина.*

762. Контракција млаза. — Досадање посматрање истицања течности одговара слободном падању чврстих тела без почетне брзине. Међутим, у суд из кога течност истиче, може она притицати са извесном брзином c. У том случају сваки делић течности масе m има на површини енергију $\frac{mc^2}{2}$, а при изласку из отвора на дну суда брзином v имаће енергију $\frac{mv^2}{2}$; стечена енергија или рад тога делића, док с површине течности стигне до отвора, износи:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

одакле:

$$v = \sqrt{2gh + c^2} = \sqrt{2g(h + h_1)}.$$

Означимо са F_0 пресек суда у површини течности где је брзина c, а са F пресек отвора где је брзина v; на основу једначине о континуитету течности биће:

$$F_0C = Fv$$

одакле је $c = \frac{F}{F_0} v$. Кад заменимо ту вредност добићемо:

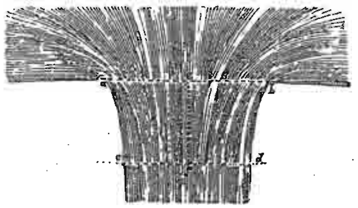
$$v = \sqrt{2gh + \left(\frac{F}{F_0} v\right)^2}$$

а одавде:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(361}$$

Према овоме обрасцу, брзина истицања течности из некога отвора на дну суда биће најмања, и износиће $v = \sqrt{2gh}$ (као и у Торичелијеву обрасцу), кад буде пресек отвора кроз који течност истиче F врло мали према пресеку суда у нивоу F_0, јер се онда може $\left(\frac{F}{F_0}\right)^2$ занемарити. Та ће брзина v бити у толико веће у колико се оба отвора по величини буду више изједначавали тако да кад буде $F = F_0$, онда је $v = \infty$, а то значи да у том случају мора брзина течности која притиче и која отиче бити бескрајно велика, па да водени млаз испуни неки суд без дна. Пошто у ствари вода и притиче и отиче извесном коначном брзином, то водени млаз не може испунити цео суд него је на изласку ужи но на уласку; та се појава назива *контракција млаза* (contractio venae) и млаз је код ab (сл. 368) шири него код cd.

Контракција млаза постаје услед тога што на отвор не наилазе поједини конци паралелно већ се стичу са свију страна и с разним латералним брзинама, због чега се млаз мора сузити.



Сл. 368.

763. Величину контракције или пресек контрахираног млаза одредићемо, кад једначину о континуитету решимо по $v = \frac{F_0 c}{F}$ и заменимо у једначини за v, те ћемо имати:

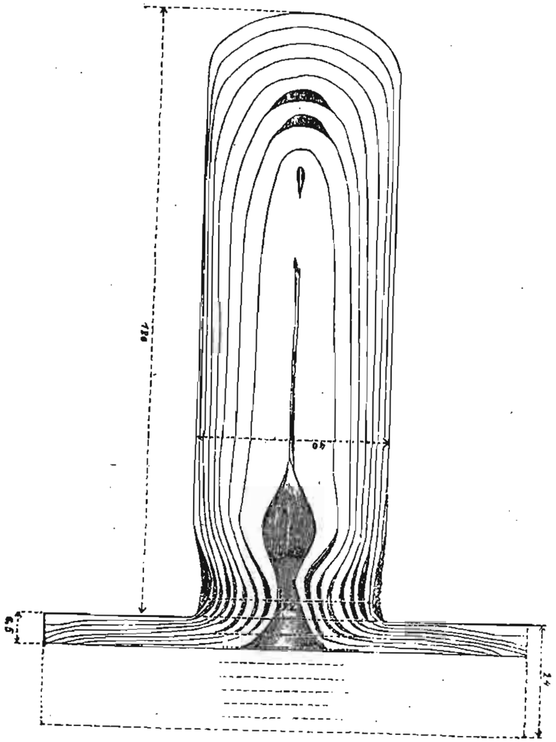
$$\frac{F_0}{F} c = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}$$

одакле је:

$$F = \frac{F_0}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(362}$$

И ова једначина показује контракцију млаза, јер је F за коначну брзину c увек мање од F_0.

764. Путање појединих водених конаца, док се крећу кроз суд као и ван суда, до контрахираног пресека могу се посматрати кад се у течност сипа ситан прашак (на пр. од локоподијума), који у води лебди и с њом се заједно креће. Још згоднији и интереснији су експерименти те врсте, које је извршио Треска (Tresca) с пластичним и чврстим телима, која под врло великим притисцима истичу као и течности. Кад се у један суд, који на дну има отвор за истицање, наслажу паралелни слојеви таквих тела (сл. 369), па се пресом јако притисну (на пр. са 10.000 кгр. за иловачу а са 100.000 кгр. и више за метале) онда ће маса истицати из отвора и имати облик обичног контрахираног течног млаза. Кад се такав млаз уздужно пресече, на њему се виде границе појединих слојева, који су у суду пре притиска били паралелни. Кад се тако лед притисне, на млазу се, због његове прозрачности и без пресецања ти слојеви врло лепо виде. Оваки експерименти су још и иначе важни, јер се њима могу лако објаснити исвесне појаве код глечера, код извлачења, ковања и ваљања метала и т. д.



Сл. 369.

765. Многобројна. нарочито Вајсбахова мерења контрахиранога млаза показала су, да је контракција млаза највећа на одстојању које је код кружних отвора равно полупречнику отвора и на том је месту пречник млаза отприлике 0·8 пречника на самом отвору. Ако са F означимо пресек отвора а са f пресек контрахованога млаза, онда се однос

$$\frac{f}{F}=\alpha$$

назива *коефицијенат контракције* и износи у средњу руку 0·64, пошто је:

$$f=(0{\cdot}8)^2\,F=0{\cdot}64\;F,$$

766. Хидраулични притисак. Видели смо, да ће брзина неког течног делића (због закона о континуитету течности) бити мања, кад он из неког ужег пресека дође у шири пресек. Мора дакле бити неке силе која ту брзину смањује. Пошто ми сматрамо протицање течности без икаквих утицаја страних сила, онда се та брзина може само тако смањити, ако у ширем пресеку притисак течности, који покретни делић има да савлада, буде већи. По принципу о консервацији енергије, мора опадање енергије (због опадања брзине) бити равно раду који покретни делић врши савлађујући притисак. Из тога следује, да је збир из енергије јединице запремине и притиска на свима местима течности стална колнчина. Ако масу јединице запремине (густину) означимо са γ, брзину њену са v а са p пратисак у посматраном делу течности, онда је

$$\gamma\frac{v^2}{2}+p=\gamma\frac{v_1^{\,2}}{2}+p_1=\text{const.}\quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad(363$$

Рецимо да је на извесном месту пресек толики да је v_1 скоро равно нули, те се и тај члан за енергију може занемарити, онда p_1 узима значај хидростатичког притиска p_0, те је према томе:

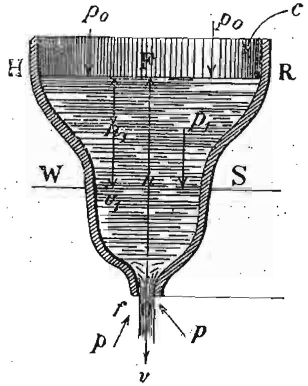
$$\frac{1}{2}\gamma v^2+p=p_0.$$

Притисак p покренуте течности назива се *хидраулични* или *хидрокинетички притисак*. Из горње једначине имамо уопште:

$$p=p_0-\frac{1}{2}\gamma v^2\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(364$$

Хидраулични притисак је раван хидростатичком притиску, смањену за енергију покренуте течности на том месту.

767. Посматрајмо истицање течности из отвора некога суда разних пресека (сл. 370). Пресек суда у нивоу течности нека је F_0. На тај ниво притискује атмосферски притисак, који ћемо означити са p_0 на јединицу површине; висина воденог стуба, која том притиску одговара биће $\frac{p_0}{\gamma}$. Пресек отвора нека је F и он је за h испод нивоа; ту влада неки притисак p, коме одговара водени стуб висине $\frac{p}{\gamma}$. Кад о овим новим притисцима $p_0 - p$, т. ј. о њиховим воденим вредностима $\frac{p_0 - p}{\gamma}$, водимо рачуна, раније нађена једначина за брзину биће:



Сл. 370.

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2}}$$

или:

$$h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \frac{v}{2g}\left[1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2\right].$$

с претпоставком да се ниво течности стално одржава на истој висини, притицањем течности брзином c која се одређује из једначине $F_0 c = Fv$.

Тражимо хидраулични притисак p_1 који влада на пример на пресеку F_1 (код места *WS*), који је за h_1 испод нивоа и на коме је брзина v_1. Сасвим слично горњој једначини имаћемо сад:

$$(h - h_1) + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \frac{v^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{F}{F_1}\right)^2\right]$$

Разлика та два обрасца даће нам тражени притисак:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right) - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{F}{F_0}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

или на основу једначине $F_0 c = Fv = F_1 v_1$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right) - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (365$$

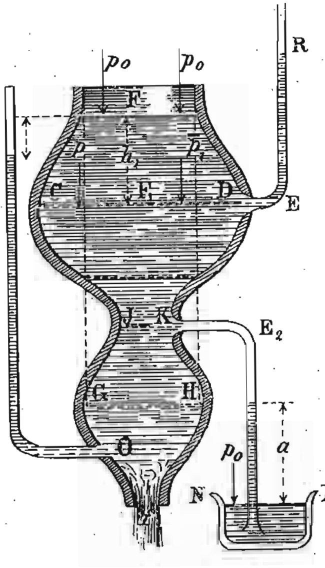
а то значи, да је *хидраулични притисак ма на ком месту некога суда раван хидростатичком притиску* $\left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right)$ *на том месту, смањеном за разлику брзних висина течности на том месту и на површини.*

Ако буде пресек површине течности врло велики, те дакле c врло мало, може се други члан занемарити и онда је хидраулични притисак

$$\frac{p_1}{\gamma} = \left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right) - \frac{v_1^2}{2g} \cdot \quad (364$$

а то значи, да је *хидраулични притисак за брзну висину (на том месту) мањи од хидростатичког.* У колико, дакле, брже протиче течност кроз неки суд, у толико ће бити мањи притисак на дуварове тога суда. Стога разлога извесне цеви, кроз које вода протиче, попуцаће пре кад се вода заустави но док је у току.

768. Хидраулични притисак у односу према хидростатичком и атмосферском може имати разне вредности. То се најбоље види на суду разних пресека, како га показује сл. 371. На неком месту *CE*



Сл. 371.

тога суда где је $F_1 > F_0$, те дакле $v_1 < c$ израз у загради постаје положан и онда је:

$$\frac{p_1}{\gamma} > h_1 + \frac{p_0}{\gamma}$$

а то значи да је хидраулични притисак већи од хидростатичког. Цев *ER* која би се на том месту суда налазила, која служи за мерење хидрауличног притиска и која се назива *пијезометар*, имала би воду изнад висине нивоа у суду.

На исти начин показаће пијезометар код *O* мањи х.улични притисак од х.статичког, јер је на том месту пресек $F_1 < F_0$ те дакле и $v_1 > c$, услед чега је:

$$\frac{p_1}{\gamma} < h + \frac{p_0}{\gamma}.$$

На месту *GH*, где је пресек раван пресеку суда у нивоу, биће х.улични притисак раван х.статичком.

Ако је на неком извесном месту *JK*, пресек F_1 тако мали, те онда и брзина v_1 тако велика да буде:

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} > h_1$$

т. ј. да буде:

$$h_1 - \left[\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right] = -a$$

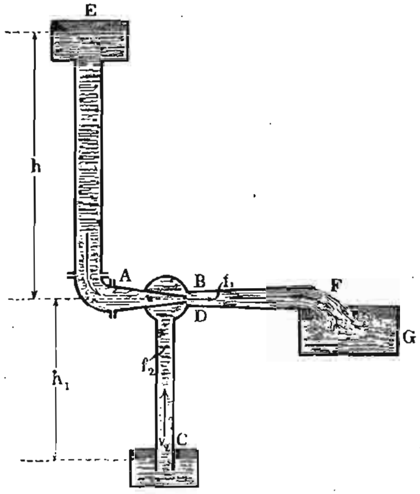
онда ће бити:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - a \text{ или } p_1 = p_0 - a\gamma \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (366$$

а то значи да је на том месту *хидраулични притисак мањи од атмосферског.* Кад би се на том месту суд пробушио, не само да вода кроз тај отвор не би истицала, већ би кроза њ атмосферски ваздух био усисаван у суд и у пијезометру, намештену на том месту, попео би се из суда *MN* водени стуб висине *a*. Кад би пијезометарска цев била краћа од *a*, онда би кроз њу вода из суда *MN* утицала у главни суд, што би се нарочито могло констатовати кад се вода у суду *MN* обоји.

На томе основу што хидраулични притисак може бити мањи од атмосферског оснивају се: *хидрауличне сисалице* (црпке или шмркови) за воду и ваздух и *хидрауличне дуваљке.*

769. *Хидрауличне сисалице.* Да се произведе јако смањиване х.уличног притиска вода се пропусти кроз узан коничан отвор, кроз који мора, нарочито кад је већ под извесним притиском, протицати врло великом брзином. Распоред такве једне сисалице, напр. за воду, види се на слици 372. Вода из резервоара *E*, протиче великом брзином кроз узани коничан отвор и услед врло малог х.уличног притиска, у лоптастом се суду сише вода из резервора *c*, која ће заједно с горњом водом истицати код *F*. Ако притисак воденога стуба висине *h* заједно са атмосферским означимо са *p*, притисак који влада у лоптастом суду са p_x, онда је брзина истицања према ранијем обрасцу:



Сл. 372.

$$v = \sqrt{2g\frac{p - p_x}{\gamma}}$$

или:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p - p_x}{\gamma} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (367$$

Означимо са *q* атмосферски притисак, који има да одржи водени стуб висине h_1 и тежине $h_1\gamma$, онда ће брзина усисане воде v_2 бити дата:

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{q - (\gamma h_1 + p_x)}{\gamma} = \frac{p - p_x - (p - q) - \gamma h_1}{\gamma} =$$

$$= \frac{p - p_x}{\gamma} - (h + h_1) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (368$$

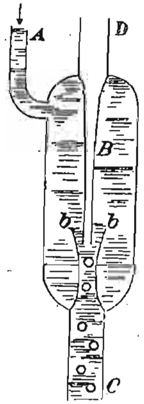
Да би усисана вода висине h_1 могла имати брзину v_2 као и да би из горњега резервоара протицала вода брзином v мора кроз узани конични отвор тећи вода брзином v_0 за коју такођер вреди однос:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{q - (\gamma h_1 + p_x)}{\gamma}$$

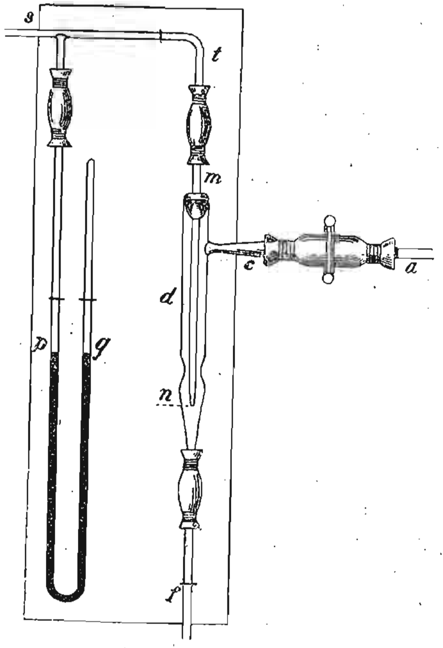
одакле је:

$$\frac{q}{\gamma} = \frac{v_0^2}{2g} + h_1 + \frac{p_x}{\gamma} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad (369$$

а то значи да атмосферски притисак који искључиво воду подиже на висину h_1 мора бити раван брзној висини (од које постаје брзина v_0) повећаној за висину издигнутог стуба воденог (h_1) и за притисак у лоптаном суду.



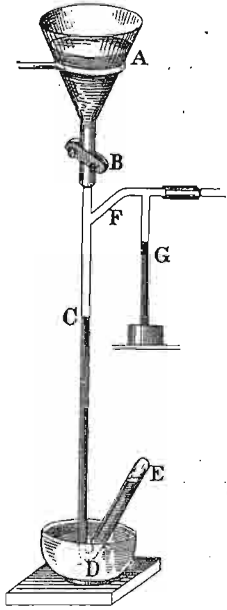
Сл. 373.



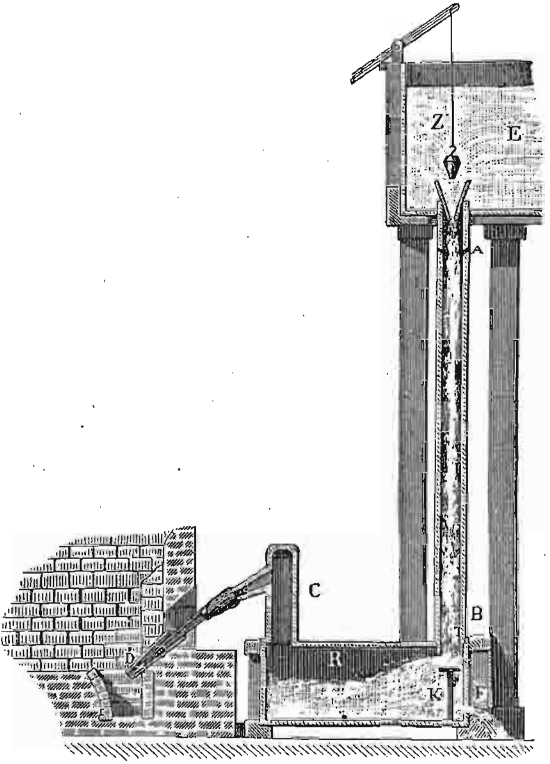
Сл. 374.

770. Иста справа за сисање или разређивање ваздуха има у главноме облик представљен на сл. 373. Вода под извесним

притиском долази кроз цев A и пролазећи великом брзином кроз узан грлић $b\,b$ отиче кроз цев c. У пролазу свом кроз b сише ваздух из цеви D, која је обично у вези са судом у коме се ваздух разређује. Потпуно уређење хидрауличне сисалице за ваздух, како се то у лабораторијама употребљава, представљено



Сл. 375.



Сл. 376.

је на сл. 374. Вода долази кроз $a\,c$, а отиче кроз f; ваздух се сише и разређује кроз $s\,t\,m\,n$, а на лакат савијена цев $p\,q$, у којој је жива, служи да покаже степен разређења ваздуха.

На истом принципу основана је *Шаренгелова ваздушна сисалица* или шмрк, где је место воде узета жива. Жива се налази у левку A (сл. 375) и пада у цев C сишући кроз F ваздух или какав други гас, који се, ако треба, може накупити у цеви E.

771. Хидрауличне дуваљке. Ваздух који се на горњи начин сише, може се у извесном делу апарата скупљати, тако да ће његов притисак бити већи од атмосферскога, и онда он истиче из апарата као из какве дуваљке. Такву дуваљку имамо на сл. 376. Вода ће из резервоара

E падати кроз цев AB и сисати кроз косе отворе A ваздух. Дошав на дно цеви B, вода се разбија о клупицу K и ваздух се из ње одваја и гомила у простору R. Кад његов притисак услед непрестаног нагомилавања буде већи од атмосферског, он ће кроз дуваљку C дувати у огњиште O.

772. Количина истекле течности. — Кад се зна брзина истицања v, онда се *теоријска количина* истекле течности добива множењем брзине пресеком f отвора кроз који течност истиче. Према томе та би количина била:

$$Q = f \cdot v = f \sqrt{2\,gh}.$$

У истини пак истекла количина течности није никад равна оној количини коју овим обрасцем налазимо, већ је увек мања. И да би се дошло до обрасца, који ће нам дати стварну количину истекле течности, ваља горњу теоријску вредност да помножимо са такозваним *коефицијентом истицања* k, па ћемо имати:

$$Q = kfv = kf \sqrt{2\,gh} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (370$$

Коефицијенат истицања састављен је из два друга коефицијента и то из коефицијента контракције α и брзног коефицијента ξ, тако да је:

$$k = \alpha\xi \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (371$$

Коефицијенат истицања мења се с притиском под којим вода истиче, с обликом и величином отвора, с обликом и величином суда, дебљином дуварова и начином како су дуварови отвора изведени. Приближна средња вредност тога коефицијента износи од прилике 0·64.

773. *Примери.* — 1. Водени млаз избија брзином од 20 мет. хоризонтално из дувара некога суда. — *a*. После ког времена ће млаз стићи до једне хоризонталне равни која је 10 мет. нижа? — *b*. Колика је за то време постигнута највећа хоризонтална даљина од отвора у тој истој равни? — *c*. Колико је високо стална површина воде у суду изнад отвора?

a. Пошто млаз истиче по закону о слободном падању, то је висина или пут тога падања $s = \frac{gt^2}{2}$, одакле је:

$$t = \sqrt{\frac{2\,s}{g}} = \sqrt{\frac{2.10}{9{\cdot}81}} = 1{\cdot}428 \text{ сек.}$$

b. За то време постигнуто хоризонтално одстојање износи:

$$x = 20 \cdot 1{\cdot}428 = 28{\cdot}56 \text{ мет.}$$

c. Из обрасца $x = vt = t\sqrt{2gh}$ и $s = \frac{gt^2}{2} = \frac{gx^2}{2v^2}$ имамо:

$$h = \frac{x^2}{4\,s} = \frac{28{\cdot}56^2}{4.10} = 20{\cdot}39 \text{ м.}$$

2. У пожарном шмрку, чији је цилиндар 30 см. широк, притискује се на клип са 2000 кгр. снаге. — *a*. Којом ће брзином шибати вода из цеви? — *b*. До које би теоријске висине она стигла вертикално на више?

a. Површина клипа за $r = 15$, износи $r^2\pi = 706{\cdot}5$ □ см.; притисак на јединицу површине биће $\frac{2000}{706{\cdot}5} = 2{\cdot}830$ кгр. Ваздушни је притисак ва кв. см. 1·033 кгр. и одговара воденом стубу од 10·33 мет. Према томе нритисак од 2·831 кгр. одговара водеиом стубу од:

$$h = 2{\cdot}831\,\frac{10{\cdot}33}{1{\cdot}033} = 28{\cdot}31 \text{ мет.}$$

те ће брзина истицања бити:

$$v = \sqrt{2.9{\cdot}81 \cdot 28{\cdot}31} = 23{\cdot}56 \text{ мет.}$$

b. Не водећи рачуна ни о каквим отпорима вертикална, висина била би:

$$h = 28{\cdot}31 \text{ мет.}$$

3. Колики су хидраулични притисци на пресецима CD, JK и GH суда на сл. 377, као и брзина истицања v, кад пресек површине воде има $F_0 = 2000$ □ см., пресек $CD = 2400$ □ см., $JK = 300$ □ см., $GH = 1500$ □ см. и отвора $F = 250$ □ см., кад се узме на ум да је висина притиска $h = 1{\cdot}25$ мет., да пресек CD лежи за 25 см. испод површине, JK за 40 и GH за 90 см. До које ће се висине попети вода у трима цевима на тим местима?

Пошто растојање између површине и дна суда није велико, занемарићемо разлику атмосферског притиска на тим местима:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8} \text{ дакле } \left(\frac{F}{F_0}\right)^2 = \frac{1}{64} \text{ и најзад}$$

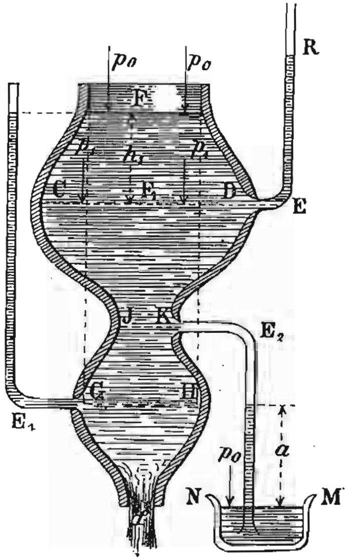
$$1 - \left(\frac{F}{F_9}\right)^2 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

Према томе биће брзина:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 - \left(\frac{F}{F_0}\right)}} = 4{\cdot}429 \sqrt{\frac{1{\cdot}25.64}{63}} = 5 \text{ мет. (прибл.)}$$

Онда је из обрасца $F_0 C = F v$:

$$c = \frac{5.250}{2000} = 0{\cdot}625.$$



Сл. 377.

Даље, брзина v_1 у слоју CD износи:

$$v_1 = \frac{5.250}{2400} = 0{\cdot}521 \text{ м.}$$

а хидраулични притисак на том месту:

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_1 + \frac{p_0}{\gamma} - \left(\frac{v_1{}^2}{2\,g} - \frac{c^2}{2\,g}\right) = 0{\cdot}25 + 10{\cdot}33 - \left(\frac{0{\cdot}521^2 - 0{\cdot}625^2}{19{\cdot}62}\right)$$
$$= 10{\cdot}586.$$

Па како атмосферски притисак сам износи 10·33 м., то је разлика у притиску $10{\cdot}586 - 10{\cdot}33 = 0{\cdot}256$ мет. Међутим је тај

слој испод нивоа за 25 см., онда вода у цеви за 6 милим. стоји више но у суду.

У слоју JK који је за 40 см. испод нивоа и кога је пресек 300 кв. см. биће $v_2 = \frac{5{\cdot}250}{300} = 4\,\frac{1}{6}$ мет., те према томе:

$$\frac{p_2}{\gamma} = 0{\cdot}40 + 10{\cdot}33 - \left(\frac{(4^1/_6)^2 - 0{\cdot}625^2}{19{\cdot}62}\right) = 9{\cdot}865 \text{ мет.}$$

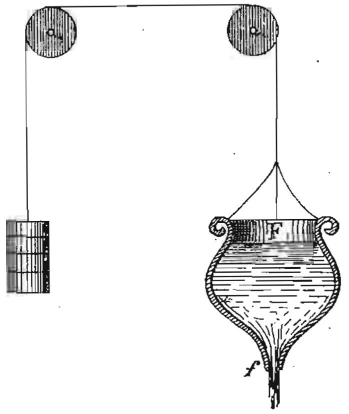
Разлика у притисцима износи сад $9{\cdot}865 - 10{\cdot}33 = -\,0{\cdot}465$ м. Пошто је та разлика одречна, висина a аспирирање воде износи такођер 0·465 м.

На исти начин налазимо да је у слоју GH, који је за 90 см. испод површине и чији пресек износи 1500 □ см., брзина $v_3 = \frac{5{\cdot}250}{1500} = {}^5/_6$ мет., те према томе:

$$\frac{p_3}{\gamma} = 0{\cdot}90 + 10{\cdot}33 - \left(\frac{(^5/_6)^2 - 0{\cdot}625^2}{19{\cdot}62}\right) = 11{\cdot}214 \text{ м.}$$

Разлика у притисцима биће $11{\cdot}214 - 10{\cdot}33 = 0{\cdot}884$ мет., а то је у исти мах и висина воде у цеви E_1 тако да ту вода за 16 м. м. стоји ниже но у суду.

4. Суд облика сл. 378, напуњен је један метар високо водом и тежи 70 кгр.; кад се с друге стране тегом од 90 кгр. може на више повући, пита се: *a*. Колика је онда брзина истицања v? — *b*. Колика би била брзина истицања, кад би суд био тежак 90 а тег само 70 кгр?



Сл. 378.

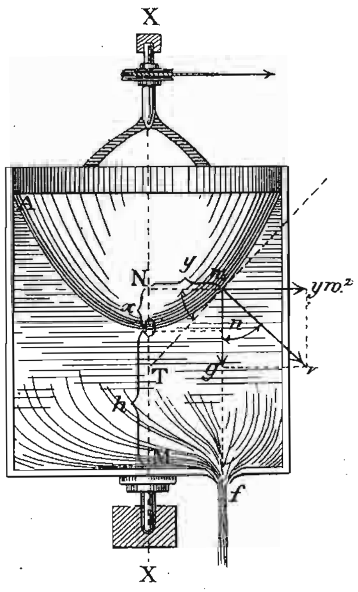
a. У првом ће случају снага од $90 - 70 = 20$ кгр. вући суд на више; оба ће терета, дакле: $90 + 70 = 160$ кгр. услед тога вишка од 20 кгр. добити извесно убрзање a, које ће тако стајати према g као претег према целокупном терету, т. ј. $a : g = 20 : 160 = 1 : 8$ или $a = {}^1/_8\, g$. Суд се креће у супротром смислу истицања течности; онда поједини делићи масе m не притискују само тежином својом mg већ и инерцијом ma, те је и сила сваког делића $m(g + a)$, те место обичног убрзања g сада долази $(g + a)$. Стога ће сада брзина бити:

$$v = \sqrt{2\,h\,(g + a)} = \sqrt{2.1 \cdot (9{\cdot}81 + {}^1/_8\, 9{\cdot}81)}$$
$$= \sqrt{2\,{}^9/_8 \cdot 9{\cdot}81} = 4{\cdot}698.$$

b. У обрнутом случају биће:

$$v = \sqrt{2\cdot1 \cdot (9\cdot81 - {}^1/_8\, 9\cdot81} = \sqrt{{}^7/_4 \cdot 9\cdot81} = 4\cdot145 \text{ м.}$$

5. *а*. Којом брзином истиче вода из отвора *f* на дну неког цилиндричног суда *AB* (сл. 379.) од 60 см. у пречнику, који се окреће једнаком брзином око вертикалне осовине XX_1 кад је стална висина мерена, код осе, $h = 4$ мет., кад је средина отвора за $y = 20$ см. удаљена од осе и кад се суд 80 пута у минуту окрене? — *b*. Колика је количина истекле воде у секунди, кад је $f = 100$ кв. см. и кад се не води рачун о контракцији и трењу? — *c*. За колико извесан молекил *m*, који се налази управо изнад отвора *f*, стоји више него *o*, т. ј. колико је *x*? — *d*. Колика је центрифугална снага молекила *m*? — *e*. Колика је ту резултанта *r*? — *f*. Колики угао φ заклапа та резултанта са тежом? — *g*. Колика би била брзина па дакле и секундна количина истекле течности, кад би отвор био у средини дна?



Сл. 379.

а. Брзина истицања састављена је сад из обичне брзине и периферне брзине *u*, тако да је

$$v = \sqrt{2gh + u^2}.$$

При сваком обрту опише отвор *f*, периферију $2r\pi = 2 \cdot 0\cdot2 \cdot 3\cdot14 = 1\cdot256$ и пошто се суд 80 пута окрене у минуту, пут за секунду износи:

$$u = \frac{1\cdot256 \cdot 80}{60} = 1\cdot675 \text{ мет.}$$

те према томе:

$$v = \sqrt{19\cdot62 \cdot 4 + 1\cdot675^2} = \sqrt{81\cdot2866} = 9\cdot01.$$

b. Секундна количина истицања је:

$$Q = 0\cdot01 \cdot 9\cdot01 = 0\cdot09 \text{ куб. м. или 90 лит.}$$

c. Кад је периферна брзина на 0·2 мет. одстојања $u = 1\cdot675$ мет., тада је брзина на 1 мет., од осе, т. ј. угловна брзина

$\omega = \frac{1\cdot675}{0\cdot2} = 8\cdot375$ мет. Из слике имамо: $X = \frac{1}{2} NT = \frac{1}{2} y \operatorname{tg}\varphi$. Пошто је даље $\varphi = n$, те онда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y\omega^2}{g}$, то је и

$$X = \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{8\cdot375^2 \cdot 0\cdot2^2}{19 \cdot 62} = 0\cdot143 \text{ м.} = 14\cdot3 \text{ см.}$$

т. ј. молекил *m* је 14·3 см. изнад средишта водене површине *O*.

d. Центрифугална сила пак изазваће

$$y\omega^2 = 0\cdot2 \cdot 8\cdot375^2 = 14\cdot03 \text{ мет.}$$

брзине у хоризонталном правцу. Према томе:

e. Резултанта

$$r = \sqrt{9\cdot81^2 + 14\cdot03^2} = 17\cdot12 \text{ мет.}$$

f. Угао који та резултанта заклапа са вертикалом биће:

$$\text{tang}\varphi = \frac{y\omega^2}{g} = \frac{2x}{y} = \frac{0\cdot2 \cdot 8\cdot375^2}{9\cdot81} = 55^\circ 2'$$

g. $v = \sqrt{2gh} = 4.429 \cdot 2 = 8\,858$ мет.

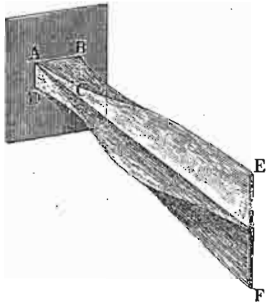
$$Q = fv = 0\cdot01 \cdot 8\cdot858 = 0\cdot08858 = 88\cdot58 \text{ лит.}$$

774. **Извртање млаза.** — До сада смо ћутке претпостављали да течност истиче из округог отвора и да млаз, од места најјаче контракције остане цилиндричан. Пре свега и млаз који из округлог отвора истиче не остаје цилиндрнчан, већ се на извесној даљини од отвора рашири, па се опет сузи поново рашири итд., тако да цео млаз изгледа таласаст (сл. 380). Такво исто наизменично ширење и сужавање млаза опажа се кад течност истиче из отвора који нису округли већ тространи, четвртасти, крстати итд., с тим додатком да се такав млаз у путу свом изврће. Ако на пр. пустимо да вода истиче из четвртастог отвора *ABCD* (сл. 381.), код кога је ширина *AB* већа од *AD*, млаз ће се на кратком одстојању од отвора изврнути, тако да му узана страна неће бити положена као код отвора, већ усправљена у *EF*. На сл. 382 *a* видимо цео такав млаз који истиче из четвртастог отвора, коме је дужа страна 25 мм. а краћа 2·6 мм. у

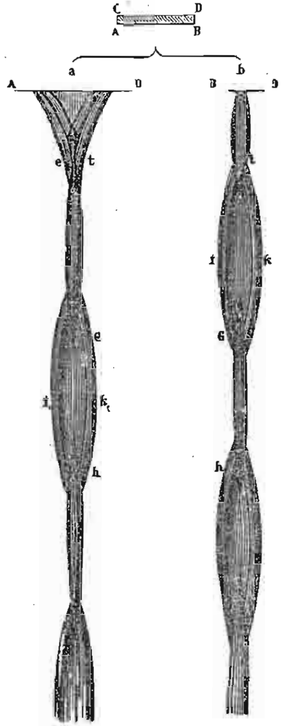
правцу управном на дужу, а на сл. 382 *b* у правцу управном на краћу страну.

Ако је отвор троугласт, облика *ABC* сл. 383, млаз ће се мало даље од твора извრнути и заузети облик *DEF*. Из квадратног отвора *ABCD* (сл. 384.) изврнуће се и заузети положај *EFGH*.

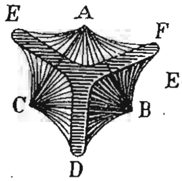
Сл. 380.



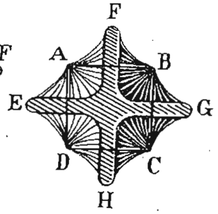
Сл. 381.



Сл. 382. *a*. Сл. 382. *b*



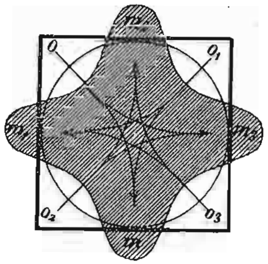
Сл. 383.



Сл. 384.

Ретко се кад млаз изврне више од двапут; најчешће се у другом извртању млаз распе.

775. Овакво извртање млаза из угластих отвора долази од латералних брзина појединих течних делића и од узајамног молекилског привлачења тих делића. Код таквих отвора наваљује већи део делића на већим димензијама и на тај начин постаје јачи притисак са стране на млаз него у правцу мањих димензија У последњем ће се смислу делићи одвајати један од другог, а у оном другом они ће се скупљати. Даље промене на млазу су једна врста трептања покретних делића и површине око средњег равнотежиог положаја час у једном час у другом смислу. Замислимо на пр. један округао отвор развучен у квадрат (сл. 385.); на четири угла o, o_1, o_2, o_3 јаве се нови притисци са хоризонталним компонентама у дијагоналним правцима квадрата, који се сложе у четири средње силе m, m_1, m_2, m_3, те онда даду млазу облик представљен у површини извученој цртама. Промене, које се за тим на продуженом кретању млаза виде, постају услед инерције појединих делића којом теже да задрже првобитни правац кретања као и услед молекилског узајамног привлачења и еластичности при купљењу и ширењу саме течности.



Сл. 385.

Извртање млазева проучавали су Магнус (Magnus) и Бидон (Bidone), а тачна мерења на њима извели су Понсле (Poncelet) и Лебро (Lesbros).

776. **Конституција млаза.** — Као што смо већ раније напоменули, кад млаз истиче из округлих отвора, онда се он таласасто шири и скупља. Скупљени део изгледа миран и прозрачан, а раширени је узнемирен и мутан (провидан). Савар (Savart) је назвао раширени део: „трбухом“ а скупљени „чвором“. То ширење и скупљање млаза није исте природе са извртањем његовим кад истиче из угластих отвора.

Пре свега може се лако распознати да млаз на доњим својим деловима није више континуиран, већ састављен из појединих одвојених капљица. Кад један лист дебеле хартије брзо провучемо хоризонтално кроз раширени или трбушасти део млаза, видићемо да хартија неће показати поквашену непрекидну линију, него одвојена мокра, места што значи да су до ње долазиле одвојене капи. Савар је посматрао млаз од живе, који је имао исти облик као и водени млаз, па је нашао да је средина његовог трбуха прозрачна, тако да је кроз зрак могао читати. На скупљеним местима пак кроз зрак се ништа не види. Ако једну жицу или једну металну плочицу тако са стране унесемо у млаз, да дохватимо цилиндарски његов део, осетићемо извесан сталан притисак. Напротив, ако ту жицу или плочицу унесемо у трбушасти део млаза, осетићемо треперење као кад кап по кап врло брзо пада. То значи да је континуиран изглед млаза само једна оптичка обмана, јер не видимо сваку кап за се већ непрекидну слику, услед њихова врло брзог кретања, отприлике на исти начин, као што видимо затворен светао круг као варницу врло брзо у кругу окрећемо.

777. Да бисмо могли констатовати да млаз није континуиран и да је састављен из све самих капљица, ваља посматрати млаз за врло кратко време, тако да се за то време кап не помери с места. За то има више начина, али је најсигурнија Магнусова стробоскопска метода. Близу периферије неке кружне плоче, од 25 см. у пречнику, изреже се један отвор од 1 мм ширине у правцу полупречника. Сад се плоча утврди у своме средишту на једну осовину и стави у врло брзо окретање, тако да се 20 до 25 пута у секунди обрне. Плоча и око тако се наместе, да се млаз види кад буде паралелан са отвором Кад се плоча стане обртати, зрак се види само онда кад отвор испред њега прође. Пошто је отвор широк само један милиметар, те износи само $\frac{1}{780}$ део кружне периферије и пошто се плоча 20 до 25 пута окрене у секунди, то виђење млаза кроз отвор траје само $\frac{1}{15600}$ до $\frac{1}{19500}$ једне секунде. За тако кратко време поједине се капи готво не помере с места и зато их видимо појединце као да се не крећу. Пошто отвор испред нашег ока прође 20 до 25 пута у секунди, и нама се чини као да непрекидно гледамо.

У место ове методе може се млаз осветљавати електричном варницом, која врло кратко траје, тако да нам млаз изгледа непокретан, те се и на тај начин може његова конституција испитивати. Ова је метода нарочито згодна, кад се вода црно обоји и посматра спрам белог заклона.

Ма која се метода употребила, види се да водени млаз није непровидан, већ да је састављен из све самих капи, тако да млаз изгледа у ствари као на сл. 386., т. ј. састављен из све самих капи, од којих су једне мале и округле а друге веће и разног облика, и то час уздужно дугуљасте (*a*), затим се мало скрате (*b*), па прошав кроз округао облик (*c*) постану попречно дугуљасте (*d*), прођу поново кроз округао облик (*e*), поново се издуже (*f*, *g*) итд

778. Капљичаста конституција млаза је последица убрзанога кретања течности која истиче; један део течности који из суда истече креће се убрзано и брзина му је већа од брзине којом течност пролази кроз отвор. Стога се она кида и одваја, правећи округле или дугуљасте капи. Да је то тако, можемо се уверити кад посматрамо како кроз какву славину вода капље. Најпре се на крају славине вода скупља и продужује се у кап, па се тако издужена у кап откине; то кидање бива обично тако нагло, да се поред главне капи одвоји и по која ситна капљица. Откинута главна кап тежи да заузме округао облик, али прелазећи из издуженог облика у кружни она га пређе и спљошти се, па се опет врати, тако да та кап непрестано осцилира око кружног облика, који тежи да заузме и који ће најзад заузети врло далеко од отвора кад осцилације ослабе.

Сл. 386.

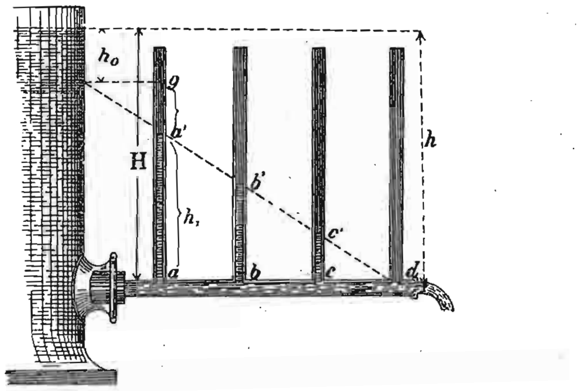
Протицање кроз цеви

(хидраулично трење)

779. Кад се говори о протицању течности кроз цеви, онда се у главноме могу разликовати ови случајеви: *a*, цеви су кратке и служе само да даду нарочити облик отвору кроз који течност истиче; *b*. цеви су дугачке и широке; *c*, цеви су дугачке и врло узане (косасте, капиларне). Ми ћемо се у кратко задржати код два последња случаја.

780. — 1. Дугачке и широке цеви. — Говорећи о истицању течности, нисмо водили рачуна о трењу на које наилази течни млаз у свом кретању кроз ваздух. Али кад течност, на пр. вода, протиче кроз цеви, тако да она испуни цев потпунце, онда је трење воде о дуварове цеви велико и не може се више занемарити. То се трење назива *хидраулично трење*. По себи се разуме да раније нађен Торичелијев образац за брзину течности која истиче сада више не може вредити.

Пустимо да вода из некога суда истиче кроз дугачку цев (сл. 387) код *d*. На разним местима намештене пробне цеви *a b c d* стањем течности у њима, показаће притиске који на тим местима владају. На пример у цеви *a* висина течности износи h_1; притисак тог воденог стуба одржава равнотежу ономе отпору трења на који наилази вода у свом кретању на путу од *a* до *d*; та се висина h_1 назива *висина трења* или *отпорна висина*. Отпорне су висине у толико мање, у колико се приближујемо отвору кроз који вода истиче, и кад све те разне висине вежемо једном линијом, видићемо да ће то бити права $d\,c^1\,b^1\,a^1$, а то значи да отпорна висина расте или опада с дужином цеви. Код цеви разних пречника отпорна је висина изврнуто сразмерна пречнику, тако да се хидраулично трење може у



Сл. 387.

опште представити овим простим односом, кад је брзина истицања стална:

$$\frac{l}{d}$$

где је *l* дужинина а *d* пречник цеви. Код разних брзина истицања хидраулично трење је веће код већих брзина, и расте од прилике с квадратом брзине *v*. Ако са χ означимо коефицијенат хидрауличног трења за јединицу дужине и ширине цеви, онда је отпорна висина која представља хидраулично трење дата овим обрасцем:

$$h_1 = \chi \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

или пошто је пресек цеви $f = \frac{d^2\pi}{4}$ и количина течности (теоријска) $fv = Q$, то је и:

$$h_1 = \chi \frac{1}{d} \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{d^2\pi}\right)^2$$

$$= \chi \frac{1}{2g} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{lQ^2}{d^5} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (372$$

781. *Брзину истицања* наћи ћемо, кад поред брзне висине $h = \frac{v^2}{2g}$ узмемо у рачун и отпорну висину h_1. Брзну висину *h* рачунамо од површине нивоа до тежишта отвора цеви кроз коју вода истиче. Пошто отпорна висина дејствује у супротном смислу брзне висине, имаћемо:

$$h - h_1 = \frac{v^2}{2g}$$

или:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \chi \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$= \frac{v^2}{2g} \left(1 + \chi \frac{l}{d}\right)$$

одакле је најзад тражена брзина:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\chi\frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{2ghd}{d+\chi l}} \quad \ldots\ldots (373$$

Коефицијенат хидрауличног трења, који се у осталом мења с брзином, одредио је Вајсбах на основу својих и других мерења овим обрасцем:

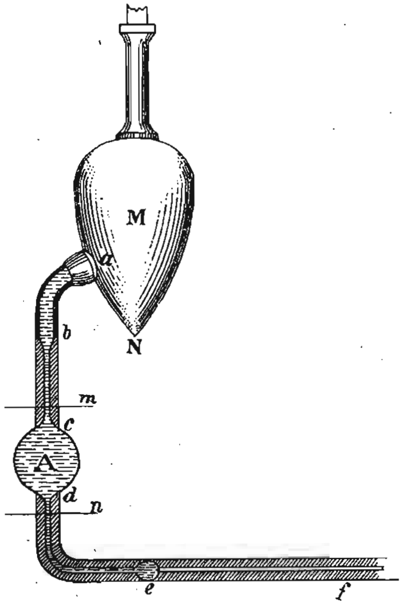
$$\chi = 0{\cdot}01439 + \frac{0{\cdot}009471}{\sqrt{v}} \quad \ldots\ldots (374$$

Горњи образац за брзину истицања вреди за цеви прилично праве и једнаког пречника по целој дужини, и нарочито кад течност не савлађује никакав нарочити отпор при прелазу из суда у цев.

782. *Количина истекле течности* биће сада:

$$Q = fv = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2ghd}{d+\chi l}} = 3{\cdot}4787\sqrt{\frac{hd^5}{d+\chi l}} \quad \ldots (375$$

783. — 2. **Косасте или капиларне цеви.** — Кад течност протиче кроз капиларне цеви, онда она не истиче из њих у непрекидном млазу као код широких цеви, већ у капима, јер је отпор трења сада много већи. Законе тога протицања проучавао је Поасељ (Poisseuille) апаратом који је представљен на сл. 388. Уопште узев, да би течности могле проћи кроз капиларну цев, морају бити под знатним притиском, и за то служи суд *M* у који се сабије ваздух, те онда он натера течност да кроз капиларну цев протиче. Сам пак експеримент састоји се у томе, што се посматра време, које је потребно да извесна количина течности између граница *m* и *n* истече. То ће се време мењати с дужином капиларне цеви, која се дужина ради лакшега мерења рачуна од проширења *e* до краја, за тим са ширином њеном, температуром и т. д. Тако се нашло да је време истицања извесне количине течности изврнуто сразмерно притиску, а управо сразмерно дужини капиларне цеви. Ако са *Q* означимо количину течности, *H* притисак изражен живиним стубом температуре 0°, *D* пречник цеви и *L* њену дужину, онда је:



Сл. 388.

$$Q = k\frac{HD^4}{L} \quad \ldots\ldots\ldots (376$$

где је *k* извесна константа која зависи од температуре и природе течности. Ако је *v* средња брзина истицања онда је:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v$$

одакле је:

$$v = \frac{4\,Q}{\pi D^2} = \frac{4\,k}{\pi}\frac{HD^2}{L} \quad \ldots\ldots (377$$

Поасељ је дужим испитивањем тражио зависност константе *k* од температуре ϑ и дошао до овог дефинитивног обрасца за количину истекле воде између 5° и 45°:

$$Q = 1836{\cdot}724\,(1 + 0{\cdot}0336793\,\vartheta + 0{\cdot}0002209936\,\vartheta^2)\,\frac{HD^2}{L} \quad (378$$

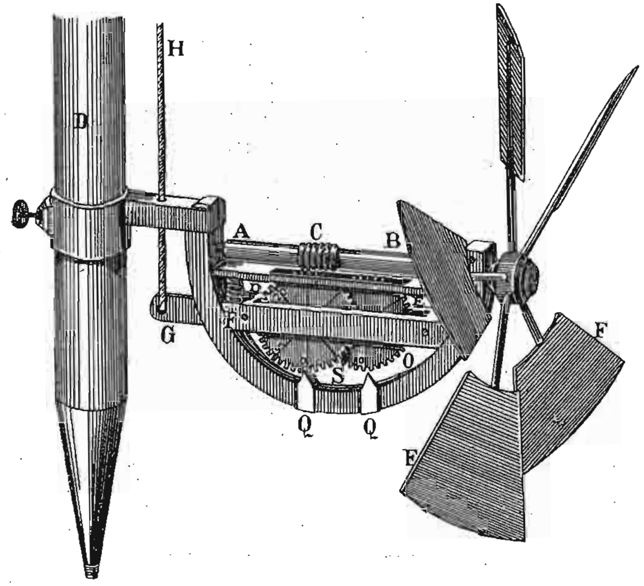
Као што се види количина истицања расте врло брзо с температуром и за $\vartheta = 40°$ та је количина два пут (и нешто више) већа него на температури 0°.

Ток воде у рекама и каналима.

784. Код овога питања, које спада специјално у практичну хидротехнику, ми ћемо се само толико задржати, колико се извесни општи научни принципи могу поставити.

Корито реке или канала састоје се из дна и обе обале; вертикалан пресек управно на правац тока воде назива се *попречан пресек*, обим тога пресека јесте *попречан или ширински профил*, код кога опет разликујемо *водени* и *ваздушни профил*, према томе да ли водимо рачун само о ономе профилу који је у води или и о ономе који је ван воде. Вертикалан пресек, али у правцу тока воде и кроз средину корита, назива се *уздужни пресек*. *Нагиб* текуће воде зове се угао који заклапа површина воде с хоризонтом. Вертикално одстојање две тачке у површини воде и уздужном пресеку и на извесном одстојању сведено на јединицу дужине (1 метар или 1 км.) назива се *пад* реке или канала. Тај је пад код река и потока врло разан на разним местима; канали се пак обично тако изводе, да им је пад сталан.

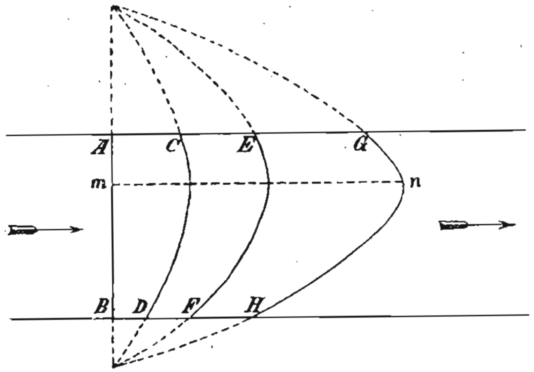
Најважнија ствар и код протицања воде у рекама и каналима, као и досад, јесте без сумње одредба брзине воде. Та је брзина разна у разним пресецима и одређује се разним справама и методама, од којих ћемо споменути као најбољу хидрометарско крило од Волтмана (сл. 389.). Крила *FF* окрећу се у води око осовине *AB* разном брзином, према разној брзини воде, и то се обртање бескрајним завртњем *C* преноси на зупчасте точкове *S* и *O*, који ће нам показати број обрта осовина *AB* за извесно време. Тај број обртања, умножен нарочитом константом за сваки апарат, даће нам брзину воде на посматраном месту. Апарат се може утврђивати на разним местима мотке *D*, те тако се могу мерити брзине воде у разним дубинама. Савршеније справе те врсте, после извесног броја обртања дају електричним звоном сигнал, те се не морају при сваком читању вадити из воде.



Сл. 389.

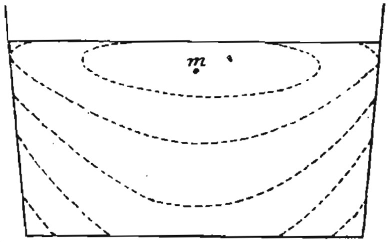
785. Што се тиче брзине река уопште, та је брзина обично највећа при извору, и у колико се река више приближује ушћу она је све мања. То успоравање тока воде у једној реци долази од трења и од препрека на које воде у своме току наилази. На пр. Рајна има од Констанца до Штрасбурга пад $\frac{h}{l} = 0{\cdot}0011$, а од Штрасбурга до Ретердама 0·00045. Дунав од извора до Беча $\frac{h}{l} = 0{\cdot}00049$, а од Беча до ушћа $= 0{\cdot}000090$. Линија, која се добива уздужним пресеком с површином реке није права већ, ако река слободно отиче, испупчена; ако се река на неком месту ма каквом препреком успори или заустави, та је линија издубљена. Даље кад вода у реци расте, вода је у средини реке виша него на обалама, и обратно кад вода опада, онда је средина површине воде нижа; тела која су била на обали (али која не достижу дно) отпловиће са обала у средину реке.

Посматрајући брзину воде у једној реци почев од површине па према дну, налази се да та брзина није једнака на свима дубинама; најмања је брзина на дну па донекле расте према површини да затим опет почне опадати, тако да највећа брзина није на површини воде (услед трења воде о ваздух) него мало дубље (сл. 390.).



Сл. 390.

Један течни конац *A* који би на пр. код *AB* био прав у даљем току ће се параболасто искривити и добити облике *CD*, *EF*, *GH* итд. Кад се узме на ум да је у једном хоризонталном пресеку, на пр. у површини воде, брзина најмања на обалама а највећа у средини, онда кад се обадве те промене брзина узму у рачун, па се оне тачке, које у једном попречном пресеку имају исту брзину саставе, добива се нов систем кривих линија које се према приликама мењају и које имајући уопште облик ланчаница висе са обала према средини реке и називају се изотахе (сл. 391.). Темена оних параболастих линија, која у исти мах представљају највећу брзину једне реке, и која леже на једној линији *mn* која се зове *оса брзине*, налазе се у разним случајевима разно дубоко. Код реке Мисисипи највећа је брзина на 0·317 дубине (рачунато од површине). Оно место у површини реке, где је вода најбржа назива се *матица*, и она се при савијању корита приближује издубљеној обали.



Сл. 391.

786. Међу свима разним брзинама које може једна река или канал имати, за практику је најважнија тако звана *средња брзина*, а то је она брзина у једном попречном пресеку, с којом би сваки водени делић текао, па да за исто време протече иста количина течности, која кроз тај пресек протече постојећим разним брзинама. Та се средња брзина добива кад се протекла количина течности за једну секунду *Q* подели садржином пресека *F* т. ј.:

$$C = \frac{Q}{F} = \frac{\text{секундна колич. течности}}{\text{садржина попреч. пресека}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (379$$

Ако се зна пад реке α, и ако са ϱ означимо средњи полупречник профила, т. ј. садржину попречног пресека *F* подељену поквашеним обимом *l*, онда се средња брзина река може израчунати из овог обрасца који је поставио Хаген:

$$c = 3{\cdot}34 \sqrt{\varrho} \sqrt[5]{\alpha} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (380$$

За канале је тај образац простији:

$$c = 4{\cdot}9\, \varrho \sqrt[5]{\alpha} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (381$$

По себи се разуме да се са тако одређеном средњом брзином може одредити количина воде.

Судар течности.

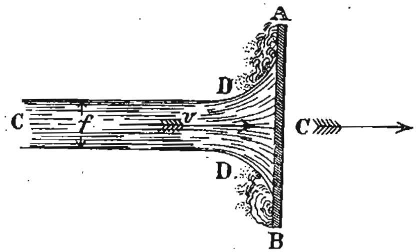
787. Као год што чврста тела могу ударати једно о друго, кад се једно другом на путу нађу, тако се исто могу десити судари течности о чврста тела као и судари између две течности. Кад се два чврста тела сударе, онда се дејство судара изврши у врло кратком времену, док код судара течности (било о чврста тела или између себе), то је дејство трајно пошто једне делиће течности, који су судар извршили, замењују одмах други који за њима долазе.

Ми ћемо проучити најпре судар течности о чврста тела а затим судар између две течности. У оба случаја, посматраћемо сударе изолованих водених млазева.

A. Судар течности о чврста тела.

Овде можемо разликовати два случаја: или правац млаза заклапа прав угао с равнином чврстог тела о које удара и такав се судар зове *прав*, или се тај угао разликује од правог, и онда је судар *кос*.

788. **Прав судар воденог млаза о чврсто тело.** — На равнину *AB* (сл. 392) удара водени млаз *CD* под правим углом; пресек млаза нека буде f а брзина му v. Због судара кретаће се горња раван брзином c и да би се судар у опште могао десити мора да буде $c < v$. Кад би равнина била мирна, количина течности која би свако секунде ударала о њу била би $M = fv$, а пошто равнина измиче брзином c, то ће и водена маса која удара бити:



Сл. 392.

$$M_1 = f(v-c)$$

њена пак тежина, ако је γ тежина јединице запремине, биће очевидно:

$$Q = f\gamma(v-c)$$

Рад те воде која удара биће:

$$R = \frac{Qv^2}{2g} = f\gamma(v-c)\frac{v^2}{2g.}$$

Вода долази брзином v, а креће се по свршеном судару брзином c, те је губитак у раду:

$$G = \frac{Q(v-c)^2}{2g} = f\gamma(v-c)\frac{(v-c)^2}{2g}$$

а рад течности по свршеном судару, кад се она креће брзином c, биће очевидно:

$$R_1 = \frac{Qc^2}{2g} = f\gamma(v-c)\frac{c^2}{2g}.$$

Заостали рад, који се на ударено тело преноси биће:

$$\begin{aligned} R_0 &= R-(G+R_1) \\ &= f\gamma(v-c)\frac{v^2}{2g} - \left[f\gamma(v-c)\frac{(v-c)^2}{2g} + f\gamma(v-c)\frac{c^2}{2g}\right] \\ &= f\gamma(v-c)\left[\frac{v^2-(v-c)^2-c^2}{2g}\right] \\ &= f\gamma(v-c)^2\frac{c}{g}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (382 \end{aligned}$$

Означимо са P хидраулички притисак воде на ударену површину, то пошто се и сам тај притисак креће брзином c, његов рад биће:

$$R_0 = Pc = f\gamma(v-c)^2\frac{c}{g}.$$

одакле је:

$$P = \frac{f\gamma(v-c)^2}{g} = \frac{Q(v-c)}{g} \quad \cdots\cdots (383$$

Ако се ударено тело не креће, т. ј. ако је $c = o$, онда имамо:

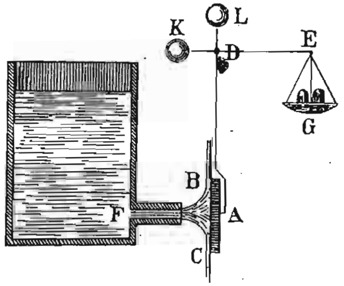
$$P_0 = \frac{f\gamma v^2}{g} = \frac{Qv}{g}$$

заменом $v^2 = 2gh$ имамо најзад:

$$P_0 = 2f\gamma h \quad \cdots\cdots\cdots (384$$

а то значи да је *хидраулични притисак изолованог воденог млаза који удара о какво мирно чврсто тело, раван тежини оног воденог стуба коме је пресек раван пресеку воденог млаза који удара, а висина равна двогубој брзној висини (2 h) тога млаза.*

789. Величину удара таквог изолованог млаза можемо експериментално одредити на начин, као што је представљен на сл. 393. У том случају мора само да буде ударена површина *A*, најмање шест пута већа од пресека млаза, и да је најмање за двогубу дебљину млаза удаљена од отвора. Вајсбах је нашао опитом, да судар изолованог воденог млаза износи 92 до 96% оне вредности која се теоријски налази $\left(\frac{Qv}{g} = P_0\right)$.

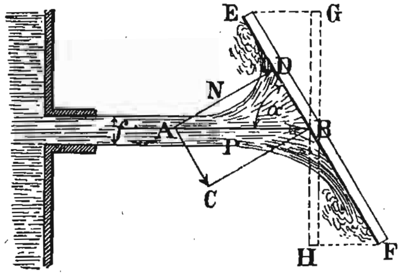


Сл. 393.

Из горњега обрасца $P_0 = \frac{Qv}{g}$ излази да снага воденог судара о чврсто тело зависи:

а) од количине воде *Q* која у секунди о тело удара, и
b) од брзине *v*, којом вода удара.

790. Кос судар воденог млаза о чврсто тело. — Кад водени млаз пресека *f* удара снагом *P* косо на чврсто тело (сл. 394.), онда се та снага *P* разлаже по паралелограму сила на једну нормалну компоненту N = *AD* која дејствује и на другу *AC* = *DB*, која иде паралелно са удареном површином. Прва компонента, или тако звани *нормални удар*, биће:

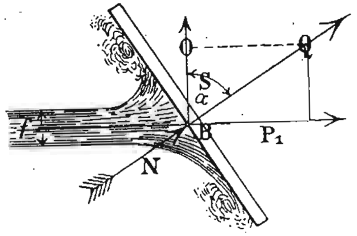


Сл. 394.

$$N = P\sin\alpha = \frac{Qv}{g}\sin\alpha$$

$$= \frac{f\gamma v^2}{g}\sin\alpha \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (385$$

Ако се ударена површина не може кретати правцем нормалне компоненте N већ правцем којим вода тече или удара, онда се та компонента *N* мора разложити још једанпут и наћи компонента P_1 (сл. 395.) или *паралелни удар*:



Сл. 395.

$$P_1 = N\sin\alpha = \frac{Qv}{g}\sin^2\alpha$$

$$= \frac{f\gamma v^2}{g}\sin^2\alpha. \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (386$$

Најзад, *бочни удар* добива се:

$$S = N\cos\alpha = \frac{Qv}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{Qv}{g}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{f\gamma v^2}{2g}\sin 2\alpha \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (387$$

А то значи да *нормални удар зависи од синуса, паралелни удар од квадрата синуса, а бочни удар од двогубог синуса угла, под којим вода удара.*

Ако се косо ударена површина може кретати правцем паралелног удара, т. ј. правцем млаза, брзином *c*, онда је према ранијем рад ударене површине:

$$R_0 = P_1 c = \frac{Q(v-c)\,c}{g}\sin^2\alpha$$

$$= \frac{f\gamma(v-c)^2 c}{g}\sin^2\alpha. \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ (388$$

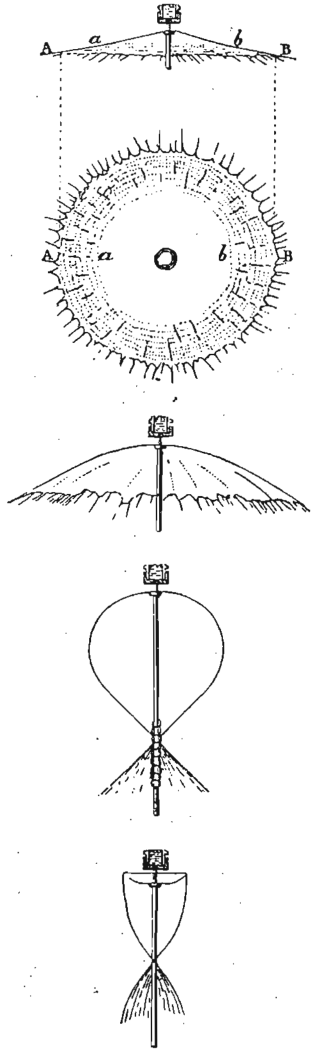
791. *Корисност.* — Због разних сметња, које покренуто чврсто тело има да савлада, никад се на њ не пренесе цео рад или енергија воде $\frac{mv^2}{2}$ који она у себи има, већ само један већи или мањи део, који се назива користан рад R_k. Тај корисни рад добићемо из обрасца за хидраулични притисак, кад га помножимо брзином c покренутог тела, т. ј.:

$$R_k = \frac{Q(v-c)}{g}c$$

Корисност машине k, коју вода креће, одређује се количником из целокупног рада воде који она у себи има $k_\tau = \frac{mv^2}{2}$ и корисног рада R_k (246). Према томе:

$$k = \frac{Q(v-c)c}{g} : \frac{mv^2}{2}$$

$$= \frac{2}{v^2}(v-c)c. \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (389$$



Сл. 396.

792. До сад смо посматрали само кинетичко дејство ударнога воденог млаза о чврсто тело; да видимо сада какав је *облик* тога млаза по свршеном судару.

Ову је ствар најпре проучавао Савар (1833) и пустио да један водени млаз под разним притисцима удара о заокругљену равну металну плочу. Та је плоча имала 27 мм. у пречнику и била 20 мм. далеко од кружног отвора од 12 мм. пречника једне цеви, из које је избијао водени млаз и ударао о горњу плочу. Чим ударање отпочне,

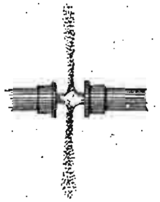
млаз се по судару растури на све стране и образује једну непрекидну површину *AB* (сл. 396.), од 60 см. у пречнику од прилике. Средњи део те површине *ab* је танак и прозрачан, обод је дебљи и мутан. Прва слика показује изглед те површине са стране а друга озго. Кад притисак под којим вода истиче опадне (дође до 60—62 см.), мутног дела нестане и обод је површине повијен на ниже (трећа слика). Ако притисак још више опадне, (32—33 см.) обод се још више спусти и цела се површина тако повије, да дохвати саму цев, те изгледа као заокругљена чигра (четврта слика), од 40 см. пречника и 45 см. висине. Од тог момента површина поступно опада и њен се профил све више приближује изгледу лемнискате, али кад притисак не прелази 10 до 12 см., онда се горњи део површине наједанпут издуби (пета слика), поново се испупчи и то се понови шест до седам пута, док најзад површине сасвим нестане.

Облик млаза који косо удара много је заплетенији и разноврснији, од горе посматраног правог судара.

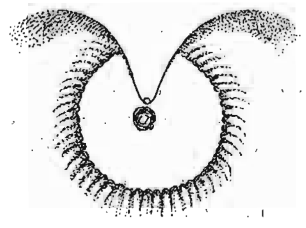
В. **Судар две течности.**

Сударање два водена млаза нема никакве кинетичке важности, и цела се ствар своди на испитивање облика резултујућег млаза после судара. И овде, ради боље прегледности, можемо разликовати два случаја: прав и кос судар два млаза.

793. Прав судар два млаза. — Кад се два водена млаза истога пресека и под истим притиском али супротним смислом тако сударе, да имају једну заједничку осу, онда од та два млаза после судара постане једна округла водена равнина, управна на ту заједничку осу (сл. 397.). То латерално кретање течности после судара,



Сл. 397.

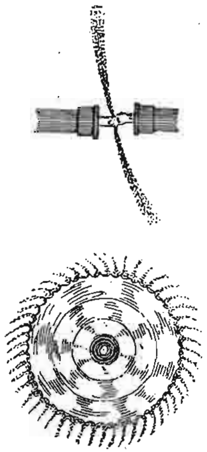


Сл. 398.

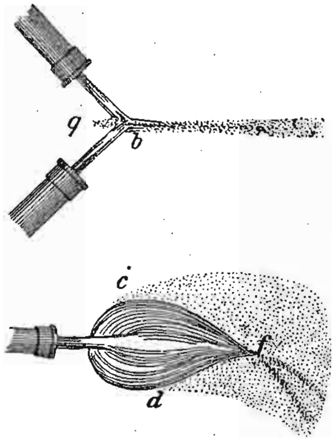
услед кога постаје горња водена плоча, долази од супротних притисака на течност и на ударном месту.

Ако се на који начин прекине континуитет горње водене плоче, на пр. тиме што се у њу спусти једна метална жица до близу средишта, онда се више раздвојени делићи водени не састају (сл. 398.), већ продужују кретање оним правцем, како га добију на површини тела које континуитет квари.

Ако се сударе два млаза под истим околностима као и горе, само су један према другоме паралелно померени, онда водена плоча која после судара постане није више ни равна ни управна на заједничку осу, већ је мало искривљена и нагнута (сл. 399.); шта више та плоча није више ни округла већ развучена.



Сл. 399.



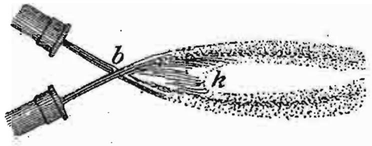
Сл. 400.

794. *Кос судар два млаза.* — Кад се два водена млаза истога пресека и са истом брзином косо и централно сударе, онда на удареном месту постане једна већа или мања водена плоча, која стоји управно на раван која пролази кроз обе осе млазева и полови угао који млазеви међу собом заклапају (сл. 400.). Та плоча није више округла већ развучена на ону страну на коју се млазеви крећу. У колико је угао под којим се судар врши оштрији, у толико је мања ширина *cd* водене плоче и у толико је краћи онај део њен *bq*, што залази у тај угао. Ако су млазеви по 3 мм. дебели и ако се

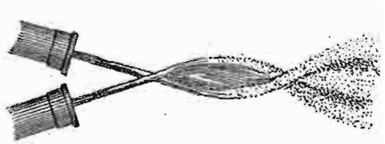
у хоризонталној равни сударе под углом од 90°, онда резултујући млаз изгледа као на горњој слици посматран са стране и озго.

Према ономе, што смо горе казали за прав судар два млаза, овакав се облик млаза код косог судара може лако објаснити.

Узмимо да се два млаза једнаког пресека и брзине сударе под углом, али тако да њихове осе не леже у једној равни, т. ј. да се млазеви сударају само једним делом; то би био ексцентричан судар. Резултат ће бити различит према томе којим се делом својих пресека млазеви сударају. Ако се ударе само ободом, т. ј. ако се само додирују, после додира неће продужити првобитним правцем своје кретање, већ се један према другоме повити (сл. 401.), а између њих образује се водена плоча *bk* која се код *k* неправилно сврши.

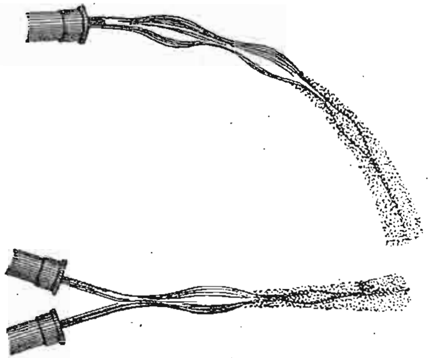


Сл. 401.



Сл. 402.

Кад млазеви при судару дубље западну, онда се по свршеном судару јаче приближе један другоме и укрсте се (сл. 402.), а простор се између њих испуни



Сл. 403.

танком воденом плочом. Том приликом онај млаз који је при судару био рецимо озго, доћи ће при укрштању оздо. Кад је угао под којим се таква два млаза сударају мали, на пр. 30°, онда се млазеви могу два или три пут укрстити.

Кад се два млаза сударе централно и косо, али под врло малим углом и с малом брзином, онда резултујући млаз изгледа таласаст (сл. 403.).

Ако млазеви који се косо сударају нису истога пресека, онда се горе нађени резултати више или мање мењају према разлици пресека сударених млазева.

Рад воде.

795. Вода у своме току, т. ј. падајући с виших места на нижа, врши извесан рад, и он се врло често може корисно употребити. Па како вода може на разне начине с виших места доћи на нижа, то се и начини корисне примене воденога рада међу собом разликују.

У главноме вода може произвести рад на три начина: *притиском или тежином* (потенцијалном енергијом), *ударом* (актуалном енергијом) и *реакцијом*. Притисак воде, па дакле и рад који вода притиском може да изврши зависи од тежине воде која на покретни део машине дејствује и услед које тежине тај део заједно с водом неко извесно време пада. По себи се разуме да се рад одређује количином или тежином воде Q и путем или висином h, с које је вода пала, према томе овде ће бити:

$$R = Qh.$$

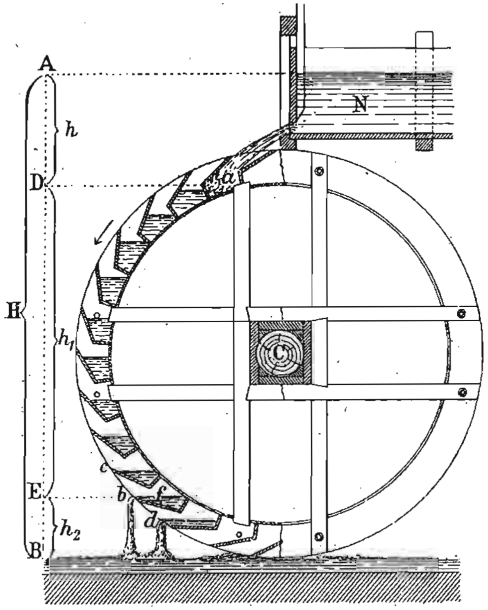
На други начин дејствује вода ударом о покретни део машине, и дејство тога удара зависи поред масе водене нарочито од брзине. У опште је рад воде ударом одређен обрасцем:

$$R = \frac{mv^2}{2}.$$

Реакционо је дејство воде само једна модификација њеног ударног дејства и наступа онда, кад првобитног, симетрички распоређеног притиска (који је због тога био без икаквог дејства) на једном или више места покретног дела машине, наједанпут нестане, због чега се симетрија поквари и кретање појави. И у овом случају вода улази, односно излази, из покретног дела машине знатном брзином, те због тога оштре границе између реакционог и ударног дејства воде нема.

Машине или справе које креће вода називају се *хидраулични мотори*. Они мотори, које креће вода својом тежином, називају се у опште *воденична кола*, а они код којих вода дејствује ударом или брзином (било непосредно или реакцијом), називају се у опште *турбине*. Код воденичних кола дејствује вода до извесне границе и брзином, само је та брзина у опште врло слаба.

796. — *Воденична кола*. — Тип воденичног кола представљен је на сл. 404. Вода долази с горње стране и пуни поједина корита на периферији кола, те се она под тежином воде спуштају и на тај начин крећу само коло извесном брзином која у опште није врло велика. Преношењем кретања главног кола помоћу његових периферних зубаца на друге зупчасте точкове може бр-



Сл. 404.

зина појединих особина бити онаква, каква је за одређени посао потребна.

Код таквог воденичног кола цела се висинска разлика H дели на три дела: на висину $h = AD$ за коју вода пада из резервоара у корито a, на висину $h_1 = DE$ на којој дејствује сва вода пре но што се почне просипати и на висину $h_2 = ED$, на којој не дејствује сва вода већ један део који се у осталом непрестаним просипањем мења. Према томе је: $H = h + h_1 + h_2$.

Исто тако и рад, који то коло прима, састављен је из три дела. Ако вода пада брзином v у корито a, које се с колом заједно окреће брзином c, онда је рад од удара воде:

$$R_1 = \frac{Q\,(v-c)\,c}{g}$$

За максимално дејство треба да буде $c = {}^1/_2\, v$, онда је:

$$R_1 = \frac{1}{2}\,Q\,\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}\,Q\,h.$$

Други део рада је:

$$R_2 = Q\,h_1$$

За трећи део рада морамо узети у рачун непрестано пражњење, те тако не падне с висине h_2, Q килограма воде већ ξQ где је ξ коефицијенат и зависи од облика корита на колу. Стога је:

$$R_3 = \xi\,Q\,h_2.$$

Целокупни рад биће:

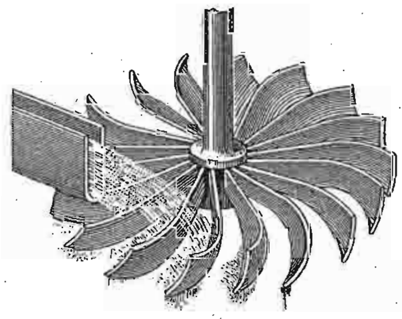
$$R = R_1 + R_2 + R_3 = Q\left(\frac{h}{2} + h_1 + \xi h_2\right)$$

Ово је теоријска вредност. За практику ваља то помножити извесним коефицијентом η, тако да је стварна вредност рада:

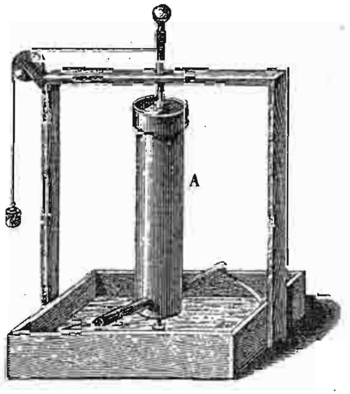
$$R_0 = \eta\,Q\left(\frac{h}{2} + h_1 + \xi\,h_2\right)u = Q\left[\frac{v-c}{g}\,c + h_1 + \xi\,h_2\ \right] \quad (390$$

797. У практичној хидраулици разликује се више врста воденичних кола, према томе да ли је пад воде већи или од прилике раван пречнику кола, као у горњем случају, или је он раван или већи или је најзад мањи од полупречника кола. Исто се тако та кола разликују према облику њихових корита. Највећу корисност дају кола прве категорије, и она износи за падове од 3 до 5 метара 50 до 60%, а за падове веће од 5 мет. од 60 до 80%. Сва остала воденична кола имају у опште мању корисност и она се креће између 30% до 60%.

798. *Турбине.* Код хидрауличних мотора ове врсте дејствује вода поглавито ударом или брзином. Најпримитивнији представник те врсте мотора јесу наше кашикаре (сл. 405.), које раде с врло слабом корисношћу (једва 20 до 25%) и зато се у модерној хидраулици нигде не употребљавају.



Сл. 405.



Сл. 406.

Турбина има врло многих и разних система. У главноме се пак могу разликовати ове врсте турбина:

a. *Акционе турбине.* — Код ових турбина извесан део спроводи воду из резервоара до покретног дела турбине, те вода свом својом брзином из спроводног непокретног дела удара у покретни део и са истом се отприлике брзином креће дуж лопатица које су на покретном делу. (сл. 405).

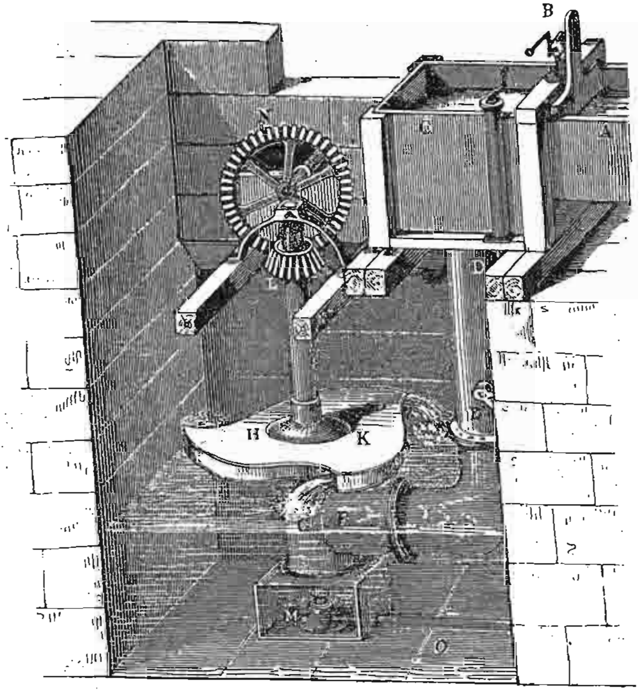
b. *Реакционе турбине.*—Овде воду спроводи онај део турбине који се креће, и вода, дошав до најниже тачке не истиче свом својом брзином (која одговара висини воденог стуба), јер се један део њене брзине употреби на кретање тог покретног дела турбине.

Најпростији представник реакционих турбина јесте тако звано *Сегнерово коло* (сл. 406.). Суд A напуњен је водом, која, истичући кроз доње две цеви, реакцијом тера тај суд да се окреће.

За ову се турбину може употребити образац за судар воде који смо раније извели и који гласи:

$$P_0 = 2 f \gamma h.$$

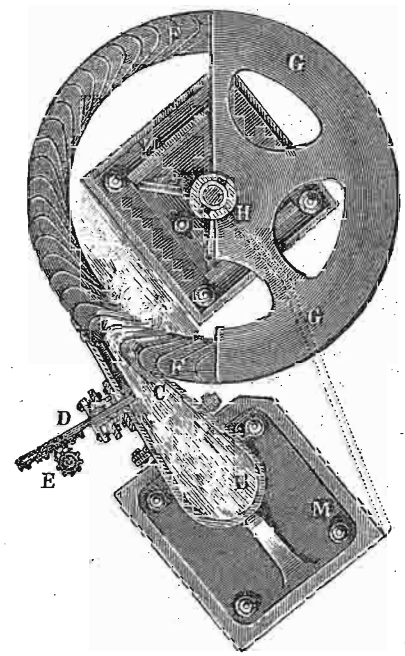
Замислимо један суд напуњен водом до висине h и на боку тога суда направимо отвор пресека f; хидростатички притисак на отвору биће $f\gamma h$. Горе наведени хидраулични притисак при судару воде о какво тело износи $2 f\gamma h$, а то значи, [illegible] је *хидраулични притисак воде која истиче, и која удара о какво непокретно тело два пут већи од хидростатичког за исти отвор и исту висину.* Из тога следује, да онај део бока тога суда који је на супротној страни од отвора и који је истог пресека као и отвор, док вода кроз отвор истиче, трпи притисак који је два пут већи од хидростатичког, те, ако је суд згодно намештен, може га тај притисак кретати. И суд ће се у горњем случају окретати, и то супротно правцу истицања воде.



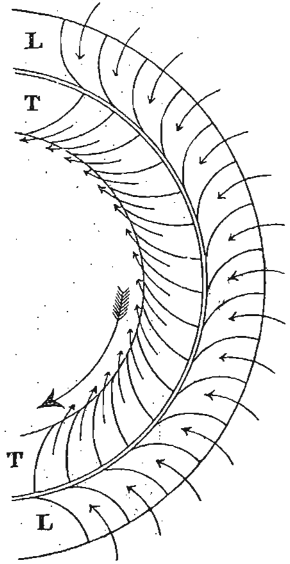
Сл. 407.

Сегнерово коло важно је више с теоријског гледишта; од турбина у правом смислу речи, основаних на реакцији воде, споменућемо само тако звану шкотску турбину (сл. 407.), у коју вода улази из резервоара C, кроз цеви D, E, F, G, с доње стране и кроз отворе на кутији KH истиче.

799. Код акционих турбина вода истиче из непокретног дела машине и свом својом брзином, која одговара брзној висини с које пада или под чијим се притиском налази, удара о покретни део и ставља га



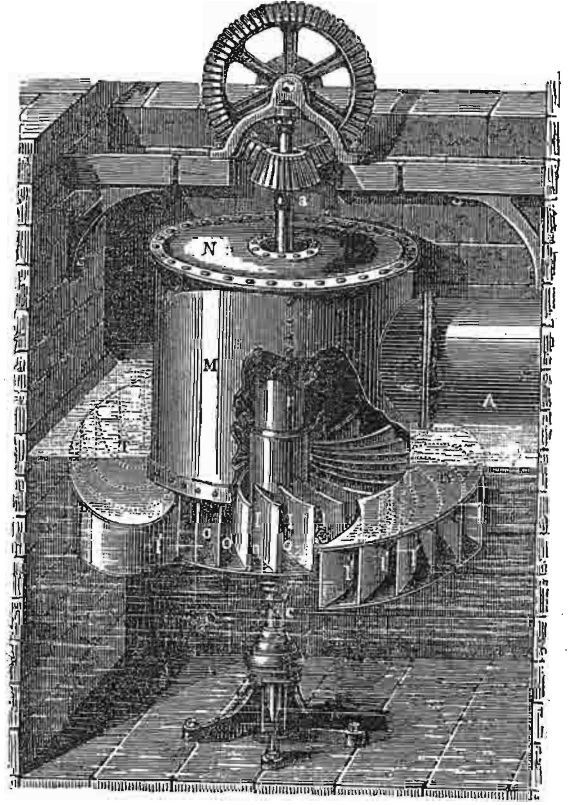
Сл. 408.



Сл. 409.

у кретање. На сл. 408. вода долази из резервоара у цев *BC*, из које скоро тангенцијално удара о лопатице *FF* покретног точка, који се око осовине *H* може обртати. Ова се турбина назива још *тангенцијални точак* (*Понслеов* — Poncelet).

У место да се као горе пусти да вода само на једном месту удара на покретан точак, она се доведе тако, да по целој периферији покретнога точка притискује на његове лопатице, услед чега је дејство правилније и боље. Тако је постала *Францисова* (Francis) турбина (сл. 409.), код које вода долази кроз одељке у спољашњи непокретни точак *L*, па удара о лопатице унутрашњег покретног точка *T*, који се онда под дејством тих удара окреће означеним смислом. Ове турбине, код којих вода улази са спољашње стране покретног точка, па се креће ка осовини, називају се *спољашње* или *центрипеталне турбине.*



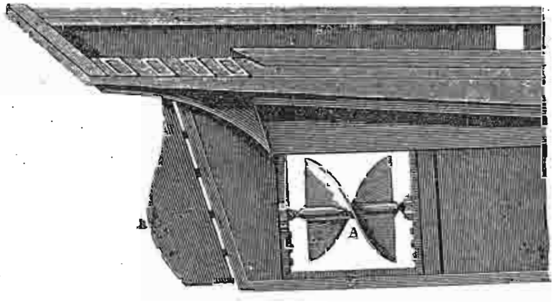
Сл. 410.

Фурнејрон (Fourneyron) је направио турбину која се зове *унутрашња* или *центрифугална,* и која се разликује од горње у томе, што вода улази са унутрашње стране покретног точка и у свом току се дакле удаљава од осовине. Та је турбина представљена на сл. 410. Вода долази кроз цев *A* у камару *M* и одатле подељена преградама *lo* притискује на супротно искривљене лопатице *l'*, *l'*, покретног точка *RT*, који у осталом и креће.

У последње су време највише употребљене ове две врсте акционих турбина (Францисова и Фурнејронова, а нарочито прва врста), које су на разне начине модификоване и под разним другим именима познате, јер им је корисност највећа и према приликама креће се између $75^0/_0$ и $85^0/_0$, а у извесним специјалним случајевима могу достићи и $90^0/_0$.

И ако је рад турбина основан на удару воде о чврсте делове њене, ипак се тај удар извијањем појединих делова турбине, нарочито лопатица које удар имају да приме, толико ублажи, да вода на покретни део турбине у самој ствари не удара, већ га више притискује и гура. Тиме се повећава и дејство и трајност турбинских делова.

Све акционе као и реакционе турбине називају се општим именом *радијалне турбине*; турбине направљене по моделу наших кашикара називају се *аксијалне* или *паралелне турбине.*



Сл. 411.

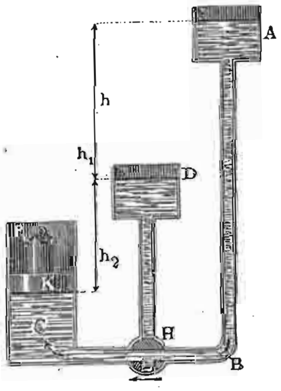
800. Изврнуто дејство воденичних кола и турбина употребљено је код бродова. Место да вода својим

ударом или притиском покреће воденично коло или турбину, овде нека страна снага (нпр. парна) окреће те елементе, и они отпором о воду крећу брод у једном или другом смислу. Код бродова с точковима, точак ударом својим о воду покреће брод, а код бродова на завртањ, притиском кривих површина завртња на воду (услед брзог обртања завртња) постиже се исто дејство. (Сл. 411.).

801. *Водене машине.* — Тим се именом називају машине које креће вода, али не као досад, већ отприлике на онај начин, као што дејствује пара код парних машина. За тај посао ваља да имамо воду под великим притиском.

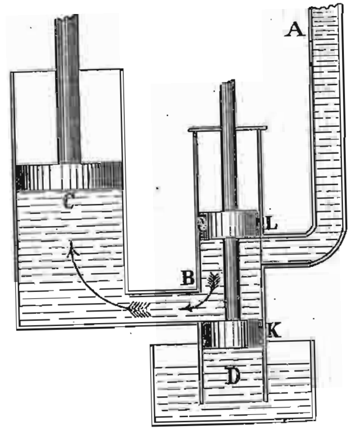
Не упуштајући се у конструктивне појединости ових машина, којих има разних система, ми ћемо у кратко изложити само принцип њихова рада, који се онда код разних система машина разно примењује.

Вода се налази у неком резервоару *A* (сл. 412) на извесној висини и кроз цев *B* доведе се у цилинар *C*, затворен клипом *K*, на коме је терет *P*. На путу између *B* и *C* налази се трокрака славина *H*, којом се може спајати час *A* са *C*, час *C* са *D*. Кад је славина отворена као што слика показује, вода ће потиснути клип *K* заједно с теретом на њему до неке висине. Кад то буде, славина се окрене, тако да се *C* споји са *D*, а долазак се воде из *A* спречи. Вода није више под притиском *h* и зато ће клип под притиском терета спасти и воду истерати у *D* до на висину h_2; из *D* ће вода отицати. Поновним спајањем *A* са *C* клип ће се опет подићи, па затим спустити, и тако даље. Окретањем славине на једну или другу страну у згодним тренутцима добићемо кретање клипа на више и на ниже, и то очевидно под притиском издигнуте воде у *A*.

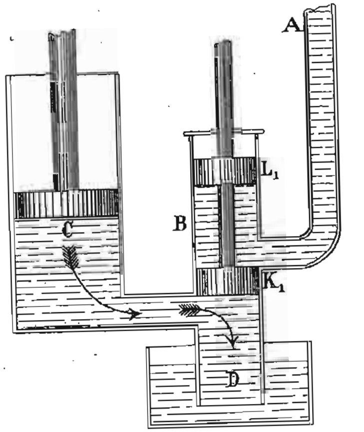


Сл. 412.

802. За практику је незгодно ону славину окретати час на једну час на другу страну. Зато се то распоређивање воде врши само собом, и то на тај начин што се кретање главног клина *K* доведе у везу (зупчастим точковима или иначе) с друга два мања клипа, који врше спајање и прекидање везе између резервоара *A*

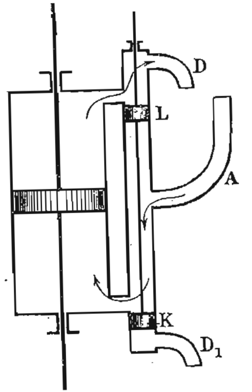


Сл. 413.



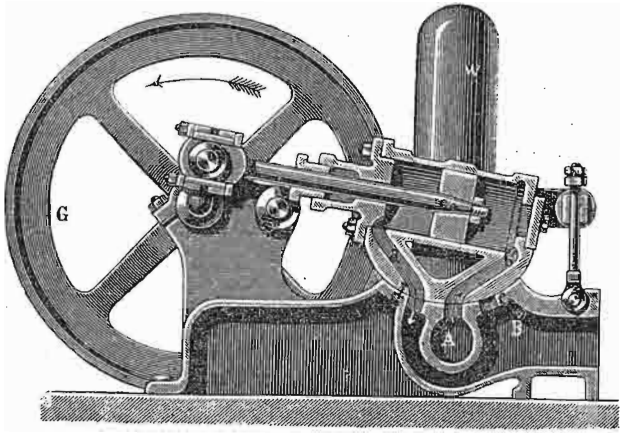
Сл. 414.

и цилиндра *C* аутоматски. То аутоматско распоређивање воде види се на сл. 413. и 414. Слика 413. представља положај малих клипова *K* и *L* тако, да веза постоји између *A* и *C*. Кретањем на више главнога клипа у цилиндру *C* повуку се клипови *K* и *L* на више, тако да, кад главни клип достигне највишу тачку, мали клипови заузму положај представљен на сл. 414. Сад је веза између *A* и *C* прекинута и вода из *C* слободно истиче под притиском главнога клипа који сад силази. Кад достигне најнижу тачку, успостави се положај на сл. 413. и тако је кретање главног клипа на више и на ниже, а под воденим притиском, остварено. Да ли ће се сада то кретање клипа на више и на ниже задржати такво или ће се претворити у обртно кретање, то зависи од посла на који се водена машина има употребити.



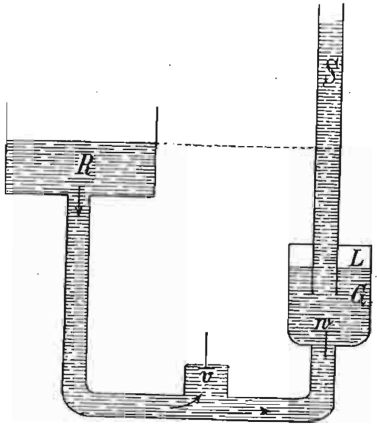
Сл. 415.

Мали клипови, који аутоматски час један а час други део машине спајају с резервоаром *A*, називају се једним именом *аутоматско крмило*. На сл. 415. имамо такво крмило с двогубом радњом и које веже с резервоаром A час једну а час другу страну цилиндра; на тај



Сл. 416.

начин се клип креће и на једну и на другу страну под притиском воде. Целокупна таква водена машина у пресеку види се на сл. 416. Спајање час задње час предње стране цилиндра с водом која кроз A долази из резервоара, врши се осцилирањем цилиндра и спајањем канала a са d и b са A или a са A и b са c. Вода отиче из машине кроз B.



Сл. .417

803. *Хидраулична ступа.* — На завршетку овога одељка о раду воде да споменемо тако зване водене теразије или ступу, код које се рад воде своди на то, да извесну количине једне исте воде с нижега нивоа попне на виши. Распоред такве конструкције види се на сл. 417. Вода, која из резервоара R протиче, по хидростатичким законима попела би се у цеви S највише до исте висине. Кад је вода

мирна, вентил v услед своје тежине спадне, и цев се на том месту отвори. Вода одмах појури из R да кроз тај отвор истиче, али ће у исти мах својим притиском затворити вентил v и стеченом брзином нагло отворити вентил w и појурити у суд G у који силази цев S, тако да изнад површине воде остане известан простор L напуњен ваздухом; на тај начин се ваздух сабије, и он ће својим притиском истерати воду на већу висину. Кад се то сврши, и вода умири, вентил v поново спадне и горње се дејство понови.

Као што се види хидраулична ступа није чисто хидраулична справа, већ због садејства сабијеног ваздуха у исти мах и аерокинетичка или пневматичка.

804. — *Примери.* — 1. Један изоловани водени млаз пресека од 2 кв. см. удара брзином од 7 мет. управно на раван зид. Колики хидраулични притисак дејствује на тај зид: *a*. кад је он непокретан? — *b*. Кад се брзином од 2 метра измиче? — и *c*. Кад се млазу примиче брзином од 3 метра?

a. Кад је $c = o$, имали смо:

$$P_0 = \frac{Q v}{g}$$

или пошто је тежина воде која сваке секунде удара $Q = f\gamma v =$ $= 2.1.700 = 1400$ гр. $= 1{\cdot}4$ кгр., то је:

$$P_0 = \frac{1{\cdot}4 \cdot 7}{9{\cdot}81} = 1{\cdot}0 \text{ кгр.}$$

b. Сад је $c = -2$, дакле $Q = 2\,(700 - 200) = 1$ кгр., и онда:

$$P_0 = \frac{1\,(7 - 2)}{9{\cdot}71} = 0{\cdot}51 \text{ кгр.}$$

c. У овом случају је $Q = 2.1000 = 2$ кгр.

$$P_0 = \frac{2\,(7 + 3)}{9{\cdot}81} = 2{\cdot}04 \text{ кгр.}$$

2. Изолован водени млаз од 14 □ см. пресека под притиском од 120 см., удара под углом од 60° на једну нагнуту површину. Тражи се: *a*. Нормални удар N. — *b*. Паралелни удар P_1 и — *c*. бочни S? — *d*. Кад се због паралелног удара површина креће брзином од 30 см., колики је онда рад, који је та површина примила од воде?

a. Према нађеном обрасцу нормални је удар:

$$N = \frac{f\gamma v^2}{g} \sin\alpha = 2 fh\gamma \sin\alpha$$

пошто је $\gamma = 1$, то је:

$$N = 2 \cdot 14 \cdot 120 \sin 60^0 = 2910 \text{ гр.}$$

b. Према обрасцу:

$$P_1 = 2 fh \sin^2\alpha = 2 \cdot 14 \cdot 120 \sin^2\alpha = 2520 \text{ гр.}$$

c. Најзад:

$$S = fh \sin 2\alpha = 14 \cdot 120 \cdot \sin 120^0 = 1455 \text{ гр.}$$

Ако је рачун тачан, мора да буде:

$$N^2 = P_1{}^2 + S^2.$$

d. Пошто је брзина $c = 0{\cdot}30$ мет. а сила $P_1 = 2{\cdot}52$ кгр., то је рад:

$$R = P_1\, c = 0{\cdot}3 \cdot 2{\cdot}52 = 0{\cdot}756 \text{ кгр. мет.}$$

3. У највише корито једнога воденичног кола пада 200 лит. воде сваке секунде, брзином од $v = 2$ метра, и тако напуњено корито силази периферном брзином $c = {}^1|_4$ метра за висину $h_1 = 3$ метра, кад вода почне 60 см. изнад доњега нивоа да се празни. Колики је користан рад кола, узевши да су коефицијенти $\xi = 0{\cdot}4$ и $\eta = 0{\cdot}63$ одређени из праксе?

Напред смо нашли за тај случај образац:

$$R_0 = \eta\, Q \left(\frac{v - c}{g}\, c + h_1 + \xi\, h_2 \right)$$

и кад заменимо дате вредности, имаћемо:

$$R_0 = 0{\cdot}63 \cdot 200 \left[\frac{(2 - {}^1|_4)\, {}^1|_4}{9{\cdot}81} + 3 + 0{\cdot}4 \cdot 0{\cdot}6 \right]$$

$$= 126\, (0{\cdot}0446 + 3 + 0{\cdot}24)$$

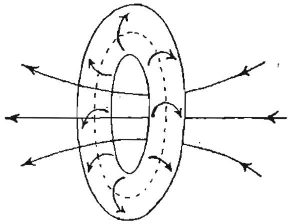
$$= 413{\cdot}8596 \text{ мет. кгр.} = \text{од прил. } 5{\cdot}5 \text{ к.}$$

C. **Вијорно кретање**

805. Као што смо већ раније напоменули, сем прогресивног или потенцијалног кретања течних делића (које смо до сад проучавали) и сем таласког кретања, (које ћемо доцније проучити), постоје у течностима и обртна или ротаторна или тако звана вијорна кретања њихових делића. Кад се ова кретања изближе проуче, налази се да постају у главноме услед трења и да трење водених делића између себе рађа вијорно кретање, као што је трење и узрок који та кретања ништи. У идеалним течностима, у којима нема трења између појединих делића, не могу вијори ни постати, нити пак, ако већ постоје, престати; вијорна кретања морају, ако се у таквој идеалној течности већ налазе, вечито постајати. Али како ми немамо посла са идеалним течностима, то ћемо видити како се у обичним течностима вијорна кретања могу и произвести, као што и једанпут произведена могу престати да постоје. Проучавање ових кретања важно је не само с практичног гледишта, пошто их налазимо код воде у вртлозима и у атмосфери у циклонима итд., већ и са чисто теоријског гледишта, јер се извесни магнетски и електрични феномени могу вијорним кретањима лакше објаснити, као што се и конституција материје тако званим вијорним атомима може згодније представити.

806. **Вијор.** — Кад један суд пун течности метнемо на центрифугалну машину и станемо обртати, цео ће се суд с течношћу која је у њему обртати извесном угловном брзином. Претпоставимо да такво обртно кретање ма из ког разлога постане само у једном делу течности, онда се тај и тако покренути део течности назива *вијор*. Сви делићи течности који се у вијору извесном вијорном брзином обрћу, имају своју осу, и та се оса назива *вијорна оса*.

Вијорне осе оних вијора који се налазе у течностима немају никад слободне крајеве, него се увек у себе враћају. Из тога не следује, да оне морају увек бити престенасте или колутасте, оне могу имати разне облике, више пута се укрштати итд. У ограниченим течностима могу се крајеви вијорне осе свршавати на дуварима суда. За сад ћемо сматрати да тако образован вијор постоји у течности сам за се и да се његово кретање не преноси на околне течне делиће. Такав један вијор, вијорни колут или прстен имамо на сл. 418. Тачкама извучена затворена линија представља вијорну осу, а стрелице представљају обртање појединих делићи око те осе.



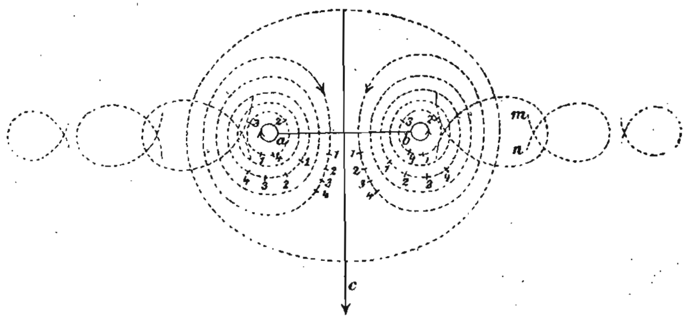
Сл. 418.

Као што смо код потенцијалнога кретања имали струјне линије и струјне конце, тако исто и код вијорног кретања разликујемо *вијорне линије и вијорне конце*. Да бисмо имали јасну слику тих елемената, уочимо један вијор који се прогресивно не креће и посматрајмо на њему једну тачку ван осе. Та тачка при обртању око осе описује једну затворену путању или линију и та се линија назива *вијорна линија*. Њена оса је само мали део вијорне осе. Кад одемо мало даље десно или лево дуж осе и посматрамо другу једну тачку, она ће бити на другој вијорној линији, и њена ће оса бити други један део вијорне осе итд. Скуп свију тих делова осе даће целу вијорну осу. Вијорна је линија један облик који не постоји тренутно већ трајно. Једна вијорна линија остаје увек вијорна линија и састављена је увек из истих делића. Вијорна је линија основни елеменат вијора. Замислимо даље, да смо повукли један пресек кроз целу вијорну осу и одвојмо у пресечној равни један површински елеменат. Вијорне линије које ограничавају тај елеменат представљају једну у се затворену цев, која се назива *вијорна цев*, а течност у њој *вијорни конац*. И вијорни конац је састављен увек из истих делића течности, и то тако, да једни исти делићи стално остају на површини, а други у унутрашњости. Средња вијорна линија у концу назива се *оса конца*. Према томе: *вијор је скуп врло многих око вијорне осе поређаних вијорних конаца*. Вијорна кретања или вијори могу постојати како у течностима тако и у гасовима. Они делићи течности или гаса, који сачињавају један вијор, не одвајају се од вијорне осе догод вијор постоји; својим пак вијорним кретањем они покрећу и околне делиће течности или гаса и принуђавају их да заузму извесно струјно кретање, које се разликује од

вијорног. Јер кад се делићи вијора око своје осе окрећу изнутра с лева на десно, принуђавају известан део околних делића, да око њих струје или циркулишу. При томе се ти делићи крећу у толико спорије, у колико су даље од вијорне осе, тако да један према другоме заостају. Ти околни делићи који око вијора струје или циркулишу, сачињавају са вијорним прстеном једно *вијорно тело*.

Кад се пресек једног вијорног конца било временом било у простору с једног места осе на друго промени, онда се увек мења и његова угловна брзина, али тако, да производ из пресека q и угловне брзине ω остаје сталан. Производ $q\omega$ представља дакле једну непромењљиву и сталну особину вијора и назива се *вијорни интензитет*.

807. Узајамно дејство вијора. — Најпростији случај таквога дејства био би између два вертикална и права вијора, који се у неком хоризонталном течном слоју налазе; узећемо да је течност идеална и да је с по једним хоризонталним слојем, како на више тако и на ниже ограничена. Најмањи кругови a и b (сл. 419.) нека буду спољашњи вијорни конци у равни хартије, која оба вијора пресеца, а стрелице показују смисао обртања. Тачкасто означене линије, које a и b окружују, значе струјне линије течности која око сваког вијора циркулише. Вијор a тежи да вијор b крене у оном смислу у коме циркулише течност што је између њих; такво исто дејство има и вијор b на a. Резултат тога узајамнога дејства биће кретање оба вијора у смислу којим



Сл. 419.

циркулише течност између њих, т. ј правцем и смислом стрелице *c*.

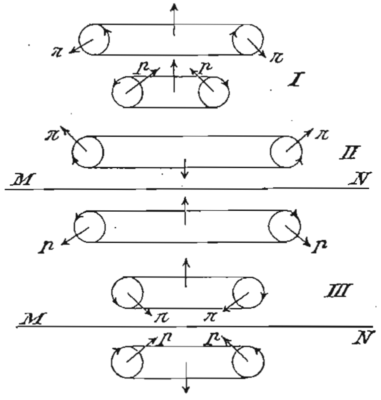
Да би се боље видела разлика у брзинама, на појединим струјним линијама обележени су бројевима на трима таквим линијама положаји оних делића, који у исти мах пролазе кроз спајну линију *ab*. Бројеви 1, 2, 3, 4, означавају положаје које ће одговарајући делићи на тим линијама заузети у првој, другој, трећој и четвртој секунди, пошто су у исти мах прошли кроз *ab*.

Цео систем обадва вијора *a* и *b*, који се сада полако напред помичу заједно с течношћу која око њих циркулише, понаша се као једно вијорно тело, које изгледа као вертикалан цилиндар овалног пресека и који омотава оба вијора. У томе цилиндру, који се са вијорима у исти мах напред креће, циркулише течност око обадва вијора на горе показани начин тако да цилиндар остаје увек испуњен истом течношћу. Па како његова омотачка површина задржава свој облик и не мења га, то се цело вијорно тело понаша у своме кретању кроз течност као чврсто; као чврсто тело дејствује оно својим кретањем кроз течност и на осталу течност. Због тога ће околни течни делићи које оно у свом кретању помери заузети извесно таласко кретање. Сваки се делић креће по путањи која има облик отворене замке. На горњој су слици такве путање за по три таква делића с једне и с друге стране нацртане. Делић, који се, пре него што је вијорно тело наишло налазио у тачки *m*, биће померен у напред, скренуће на десно и продужиће пут тако да дође у тачку *n*.

Ако место два права и засебна вијора посматрамо један вијорни колут или прстен, онда ће се свака два његова, дијаметрално положена пресека понашати на исти начин: т. ј. понашаће се као два паралелна вијора са супротним смислом обртања. То значи, да ће се сваки прстенаст вијор кретати у оном правцу и смислу, којим циркулише течност у његовој унутрашњости.

Кад два кружна или прстенаста вијора са заједничком осом ротирају у истом смислу (сл. 420. I), онда се дуж те осе они крећу такођер на исту страну; задњи ће вијор утицати на онај предњи; тако да ће га силама π ширити, а предњи ће тежити да задњи вијор силама *p* скупи. Предњи ће се вијор ширити, његова ће ротациона брзина расти а прогресивна опадати; код задњега вијора све се то врши у обрнутом смислу и онда ће задњи вијор проћи кроз предњи и њихове ће улоге сада бити измењене, тако да се тај пролаз може више пута поновити.

Ако два прстенаста вијора ротирају у супротном смислу (сл. 420. II) и један се другом приближују, они ће се све више и више ширити, а прогресивне ће им брзине опадати. Напротив, ако се таква два вијора један од другога удаљују (сл. 420. III), они ће се сужавати, а прогресивне им брзине расти. У оба ова последња случаја, у хоризонталној равни *MN*, водени делићи немају никакво кретање које би ишло управно на ту раван; стога, не мењајући процес ни у колико, можемо место равни *MN*, узети чврст дувар. И онда вијор, који би се приближивао каквом чврстом дувару, све већма би се ширио према дувару, а све спорије би њему прилазио.

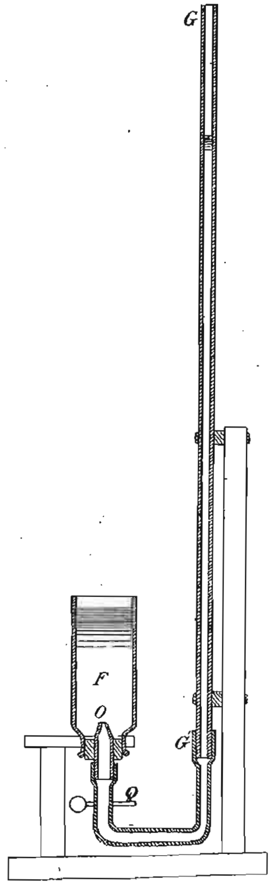


Сл. 420.

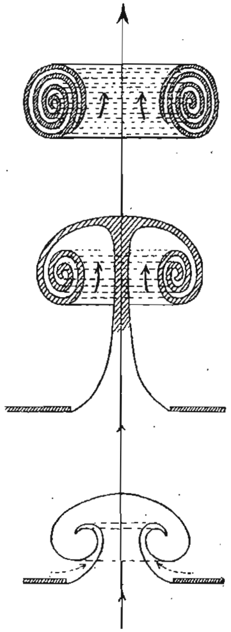
808. Све ове појединости на вијорима, које су теоријским путем изведене, могу се експерименталним путем и код течности и код гасова констатовати. За производење вијора у течностима служи апарат представљен на сл. 421. На лакат савијена цев *GG*, свршава се узаним отвором *O* у суду *F*, који је напуњен чистом водом. Цев *GG*, која се славином *Q* може по вољи отворити и затварати, напуни се до изнад нивоа воде у суду *F*, обојеном водом. Наглим отварањем и затварањем славине *Q* упусти се мала количина обојене воде кроз отвор *O* у воду *F*; обојена ће се вода појавити у чистој води као мала плочица. Услед циркулације чисте воде, плочица ће се у средини испупчити, тако да изгледа као мала печурка, а обод ће се унутра повити, тако да ће обојена вода као први зачетак вијора изгледати у пресеку као на сл. 422. (доња слика). Повијање обода у облику спирале бива све јаче, слој течности у средини

печурке постаје све слабији док се на послетку не процепи, те постане од целе, спирално повијене обојене течности прстенаст вијор (средња и горња слика), који се обрће око своје осе и пење у висину растећи у обиму.

Вијори у течностима могу се произвести и кад се кап мастила пусти да падне у воду са извесне висине.



Сл. 421.

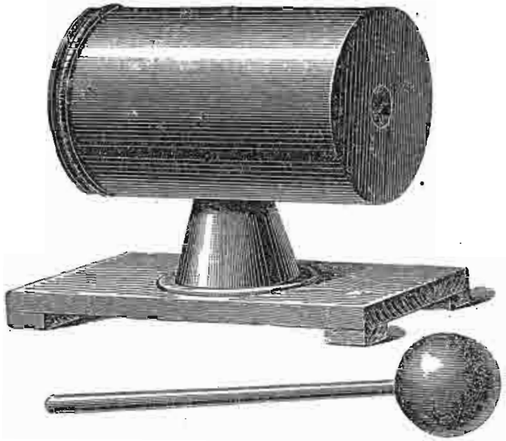


Сл. 422.

Место мастила може се узети да капи од раствора нитрата сребра падају у слану воду.

Иначе вијори у течностима (вртлози) постају, кад протиче вода кроз цеви који своје пресеке мењају, или кад вода у своме току наилази на препоне, или кад вода истиче из несиметричних судова и т. д.

809. Да се не би у кинетици гасова понова враћали на ову ствар, описаћемо начине, како се такви вијори могу у ваздуху производити и њихове особине проучавати. Сваки извежбан пушач може да прави такве вијоре дуванским димом. Пуцањем из прангија и других оруђа барутни гасови излазе у облику вијора. Експериментално се вијори праве апаратом, као што је представљен на сл. 423. То је цилиндарска метална кутија, код које је једна страна затворена каквом еластичном мембраном, а на другој (металом затвореној) страни има округао отвор. Кад се цилиндар напуни димом од дувана или каквим другим, који се добро види, па се једном маљицом удари о еластичну мембрану, излетиће из отвора вијор од дима, чије се кретање у свима горњим појединостима може пратити. Важно је нарочито да напоменемо, да кад на вијор утичу какви страни утицаји, он тежи увек да заузме известан стабилан равнотежни облик. Због тога и кад онај отвор на горњем апарату није кружан, већ троугласт или четврст, вијори ће по пролазу кроза њ заузети кружан облик као настабилнији равнотежни облик. Стабилност кружног вијора види се и отуда, што се он може ножем пресећи, па да ипак непокварен продужи своје кретање.



Сл. 423.

У природи се ваздушни вијори виде у атмосфери код обичних мањих вијора или у врло великим размерама у циклонима.

810. Теорија вијорних атома. — Као што је раније поменуто, вијори и вијорна кретања нашла су извесне примене од појединих аутора у схватању тако званих вијорних атома. По себи се разуме да се ту разумеју вијори идеалних течности, које су без трења и које су нестишљиве. Вијори у таквим течностима имају две врло важне особине: 1) они не могу у тим течностима изнова постајати, а ако већ постоје не могу се уништити, и 2) вијори идеалних течности могу имати најразличитије облике. Другим речима, ти су вијори непроменљиви по количини а на најразличитије начине променљиви по каквоћи. Управо те две особине налазимо и на материји, и то је дало повода В. Томсону (W. Thomson) да уведе у науку појам о вијорним атомима, који су појам други писци још више разрадили. По том појму, материја у свој својој многострукости није у ствари ништа материјално, већ је она са свима својим особинама резултат вијорног кретања другог неког супстрата. Тај супстрат није оно што ми у обичном смислу називамо материјом, већ нека идеална течност (у ширем смислу), и то течност састављена из вијорних елемената најразличитијих облика и врста кретања; тек тим разним облицима и кретањима та идеална течност узима на се све оне особине и многострукости, које ми код обичне материје налазимо. Вијорни елементи те идеалне течности називају се *вијорни атоми* и то с већим правом него атоми, као што их хемија замишља, пошто се недељивост хемијских атома само тврди, док се недељивост вијорних атома собом објашњава и разуме. Очевидна је ствар да се ми не можемо упуштати у дискусују ових хипотеза и остављамо читаоцу да самосталном студијом дотичне литературе своје гледиште у тим питањима заузме.

МЕХАНИКА ГАСОВА

[АЕРОМЕХАНИКА]

ДЕО ПЕТИ

Равнотежа гасова

Аеростатика.

811. Као што је за сва наша посматрања течности вода била главни представник њихов, тако ће исто за гасове сличну улогу имати *ваздух*, који са свију страна и до знатних висина омотава нашу земљу и који се као целина назива *атмосфера*. По своме хемијском саставу ваздух је смеша разних гасова, међу којима су најважнији *кисеоник* и *азот* и с којима су у врло малој размери помешани водена пара, угљена киселина (CO_2), озон и амонијак. У последње време нашло се да у ваздуху има, и то у врло малим количинама, још и нових гасова: аргона, криптона и других. Кад се ваздух ослободи водене паре, које у осталом има у врло разним количинама у ваздуху, дакле кад је ваздух сув, онда у њему има од прилике 0·04 запр. проц. угљене киселине. Ваздух у коме нема угљене киселине садржи у себи 78·27 запр. процената азота и 20·79 запр. проц. кисеоника. Многи научници држе, да се састав ваздуха мења с висином и да је у вишим регионима већа количина лакших гасова. Осим гасова има у атмосфери и чврстих тела у облику прашине, и то у доста знатној количини.

812. Од осталих гасова, којих има и простих и сложених, навешћемо само ове као најважније, са одговарајућим хемијским формулама, теоријском густином, и тежином јединице запремине (1 литра).

ИМЕ ГАСА	молекиласка формула	густина (ваздух = 1)	теж. једн. литра у грамовима (на шир. 45°)
Ацетилен	C_2H_2	0·898	1·161
Амонијак	NH_3	0·589	0·761
Хлор	Cl_2	2·449	3·167
Хлороводоник	HCl	1·259	1·628
Барски гас	CH_4	0·553	0·715
Угљен моноксид	CO	0·967	1·251
Угљена киселина	CO_2	1·51968	1·96503
Кисеоник	O_2	1·10521	1·42908
Сумпордиоксид	SO_2	2·213	2·861
Сумпорводоник	H_2S	1·177	1·522
Азот	N_2	0·97010	1 25440
Азот диоксид	NO	1·038	1·342
Азот монокс.	N_2O	1·523	1·969
Водена пара	H_2O	0·62182	0·80405
Водоник	H_2	0.069234	0·089523
(Ваздух)		1	1·293052

У горњој таблици дат је речи „гас“ најшири појам, т. ј. тако су названа и она тела која се под обичним притисцима и температурама претварају у течност и која се иначе називају *парама*, као што је на пр. водена пара. Тачну разлику између пара и гасова поставићемо у науци о топлоти. У обичном пак говору парама се називају они гасови који се лако кондензују; гасовима она тела, која се под обичним притисцима и температурама не могу кондензовати а перманентним гасовима називано је оно неколико гасова, који се до краја 1877. год. нису никако могли кондензовати. Данас нема перманентних гасова.

Опште особине гасова.

813. — a. *Гасови немају ни сталан облик ни сталну запремину.* — Што се облика тиче, гасови заузимљу облик онога суда у коме се налазе. Али иста количина гаса може заузети врло разне запремине, према притиску под којим се буде налазила. То је битна разлика између гасова с једне и чврстих и течних тела с друге стране. Због тога, ако један гас хоћемо да сачувамо, морамо га затворити са свију страна. Ако су дуварови суда у коме се гас налази попустљиви, гас ће се све више ширити, ако спољашњи притисак (под којим се гас налази) опада, и обратно. Према томе се сваки гас, затворен у каквом суду, налази под извесним *притиском* или *напоном*.

Ова тежња ваздуха или гасова у опште да се све више шире најбоље се види, кад једну затворену и само мало ваздухом напуњену бешику метемо под звоно шмрка за разређивање ваздуха, па из њега извучемо ваздух. У колико буде ваздух под звоном ређи, у толико ће се бешика више надимати. Поновним пуштањем ваздуха под звоно, бешика ће спласнути, као што је и у почетку била. Према томе, у бешици затворен ваздух непрестано притискује на дуварове њене и има тенденцију да се рашири, и то заиста и ради чим спољашњи притисак опадне. Особина гасова због које се они лако шире и сабијају назива се још и *експанзивност*; због тога гасови не могу имати слободне површине као обичне течности. — И сама атмосфера не може имати оштрих граница. Са пењањем у висину опада густина, а с њом и експанзивност ваздуха постепено, и граница атмосфере била би тамо где је експанзивна снага, којом се поједини молекили ваздуха одбијају, равна привлачној снази којом земља те молекиле привлачи. Пошто је у тим регионима ваздух веома разређен, то се не може ни говорити о каквој оштрој граници атмосфере, као што се то обично види на површинама течности.

814. — b. *Гасови су еластични.* — Пошто променом притиска гасови врло лако мењају своју запремину, и то у врло великим размерама, сматрају се они у извесним границама као *потпуно еластична тела*. Горњи експеримена̀т с бешиком потврђује и ову другу особину гасова.

Еластична снага некога гаса назива се притисак његов на јединицу површине; од величине те снаге зависе сва механичка дејства гасова. Бројна вредност еластичне снаге некога гаса изражава се у систему *CGS* динима на квадр. сантиметар.

815. — c. *Гасови преносе притисак на све стране.* — И код гасова постоји спољашњи и унутрашњи притисак као и код течности. Што се спољашњег притиска тиче, гасови га преносе на све стране по истим законима као и течности. О унутрашњем притиску, који се сада, слично ономе код течности, назива *аеростатички притисак*, говорићемо мало ниже засебно.

816. — d. *Гасови су тешки.* — Кад се зна, да гасови нису ништа друго до једно специјално агрегатно стање материје, а материја је у опште узев тешка, не би требало нарочито говорити о тежини гасова као њиховој општој особини. Међутим се врло дуго држало да су гасови, а специјално ваздух, без тежине, све док то није најпре *Галилео* 1640. год. а за тим *Ото Герик* (Otto de Guerique) мерењем доказао. Због тога се још

и данас, кад се говори о гасовима, нарочито напомиње да гасови не чине изузетак у погледу тежине од чврстих и течних тела.

Говорећи о специф. тежини гасова, видели смо да се може и како се може мерити тежина гасова; додаћемо само примера ради да ће балон који хвата један литар, напуњен ваздухом, бити од прилике за 1·3 грама тежи но кад је празан. Према томе један кубни метар ваздуха тежак је 1·3 килограма.

I. Аеростатички притисак.

817. Као хидростатички притисак код течности, тако и аеростатички притисак код гасова долази услед тежине тамо течних, а овде гасних молекила. Према томе и аеростатички се притисак може појавити на три разна начина, и то као притисак на дно, притисак на бокове и потисак. Кад се гасови налазе у малим количинама, онда се унутрашњи притисак њихов у опште, па дакле и ова три облика његова посебице тешко могу одвојити од напона гасног. Али кад се ствар тиче великих маса гасних, као што је то случај на пример код атмосфере, онда се аеростатички притисак јавља у сва три горе поменута облика. У статици атмосферских гасова нарочито важну улогу игра аеростатички притисак на дно и аеростатички потисак.

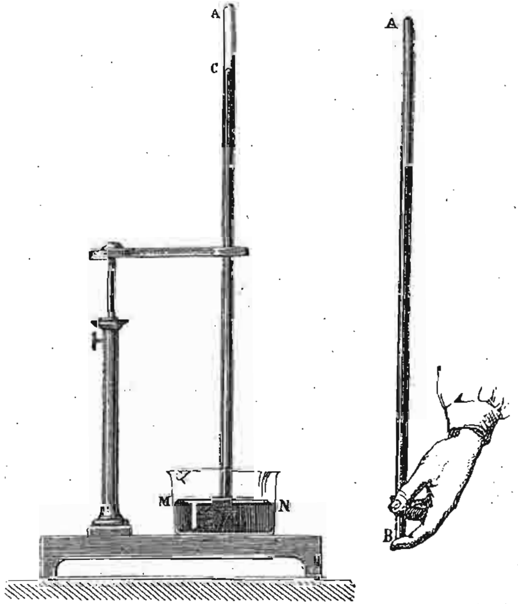
A. Атмосферски притисак.

818. Ваздух или атмосфера притискује на дно суда, дакле на површину земљину, онако исто као и течности, и тај аеростатички притисак атмосфере познат је под именом *атмосферског* или *ваздушног притиска*. Има више експеримената којима се ваздушни притисак може доказати; ми ћемо само напоменути да ће тај притисак моћи да поцепа бешику на стакленом или металном цилиндру, кад испод ње шмрком извучемо ваздух; да исто тако тај притисак одржава воду у изврнутој чаши претходно поклопљеној једним листом хартије; да је он узрок што се вода пење у шмрковима за воду и т. д.

819. **Торичелијев покушај.** — Кад је Галилеу саопштено, да се вода из једног бунара у Флоренцији није могла шмрком попети на већу висину од 18 рифа (око

10 метара) и да према томе пада старо објашњење „horror vacui“ за пењање воде у шмрковима, он је то објаснио кидањем воденог стуба у шмрку и напоменуо „да кад би се место воде узела жива, вино, уље итд., да би се те течности искидале на мањој или већој висини, и то изврнуто сразмерно специфичним тежинама тих течности према води“

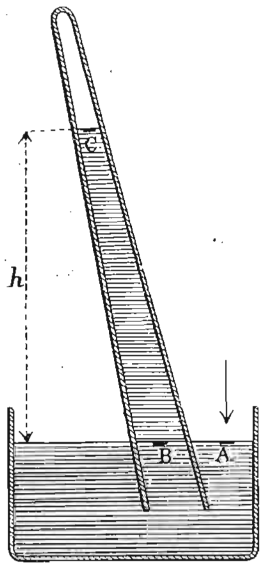
Галилеов ученик *Торичели* (Torricelli), подстакнут овим упоређењем Галилеовим између воде и живе извршио је овај покушај, који од тог доба носи његово име (1643). Напунио је једну стаклену цев *AB* (сл. 424), дугачку око 80 см. и затворену на једном крају, живом, па је онако напуњену, затворивши отворени крај прстом, изврнуо и спустио у један суд *MN*, у коме је била жива. Кад је измакао прст, жива је спала у цеви до *C* али је један стуб живин од прилике 76 см. дугачак остао у цеви изнад површине живе у суду. Изнад *C* у стакленој цеви је безваздушан простор или *вакуум AC*, и он се често назива још и *Торичелијева празнина*.



Сл. 424.

Овим је експериментом Торичели показао, да се може у природи направити празан простор, и да се природа не боји празнине. Он сам пише, у свом писму од 11. јуна 1644. год. упућеном Ричи-у, да је он тај покушај „измислио не само да на прост начин добије безваздушан простор (vacuum), него да направи инструменат који ће показати колебања ваздуха, који је час тежи и гушћи, а час лакши и ређи.“

Доцније је тај експериманат понављан и са живом и с другим течностима, и показало се да је течан стуб у цеви у толико дужи у колико је спец. тежина течности мања.



Сл. 425.

820. Паскал је по наговору Декартову (Descartes), извршио тај експериманат у долини и на врху брега, па је нашао да је живин стуб на висини краћи но у долини. На тај је начин несумњиво доказано да се жива у Торичелијевој цеви пење једино услед атмосферског притиска. Јер у самој ствари Торичелијев експериманат није ништа друго до два спојена суда: стаклена цев и атмосферски простор, и у њима две разне течности: жива и ваздух. Висине течних стубова су разне, али су притисци (с једне стране живин, а с друге ваздушни) једнаки.

Тога ради посмотримо један елеменат A (сл. 425), на слободној живиној површини величине s. Ако је p притисак ваздуха на живу, онда притисак ваздушни на елеменат A биће ps. Посматрајмо један елеменат B исте величине и у истој хоризонталној равни, али у цеви, а тако исто и елеменат c, такођер исте величине s али на слободној површини живе у Торичелијевој празнини. Ако је спец. тежина живе σ, а висина живиног стуба у цеви $= h$, онда хидростатички притисак на елеменат B износи σhs. Пошто постоји равнотежа између притиска ван

цеви ps и притиска у цеви σhs, а у истој хоризонталној равни, то је онда:

$$ps = \sigma hs \quad \text{или} \quad p = h\sigma \cdots \cdots \text{(391}$$

Т. ј. атмосферски је притисак на јединицу површине раван тежини живиног стуба у Торичелијевој цеви пресека јединице. Тај се притисак сада може и да одреди.

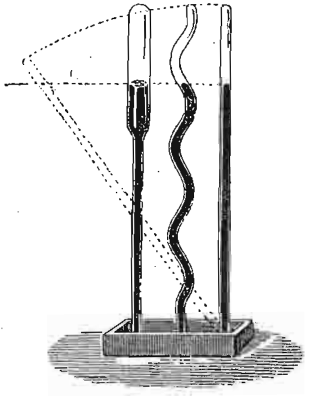
821. Пре свега живин је стуб у Торичелијевој цеви разне висине према висини места изнад морске површине као и према разним атмосферским приликама. Обично се узима живин стуб од 76 см. као средњи атмосферски притисак на морској површини, и ваздушни притисак, који одговара томе живином стубу од 76 см на температури 0° и морској површини, назива се *нормални атмосферски притисак* или, краће, притисак од „једне атмосфере“. Ево колико он износи:

Специфичка тежина живе је 13·5956; ако је пресек Торичелијеве цеви један кв. см. а стуб је при нормалном притиску атмосферском висок 76 см., онда је тежина живе у цеви, која у исти мах притискује на кв. см. $= 13{\cdot}5956 \times 76 = 1033{\cdot}26$ грама или $1033{\cdot}26 \times 981$ дина $= 1{\cdot}01363.10^6$ дина.

Као што се види, при одредби атмосферског притиска у горњим јединицама јавља се и g, т. ј. убрзање земљине теже. Пошто то убрзање није свуда једнако, то и нормални атмосферски притисак није свуда једнак. Он износи на пр. у Берлину $1{\cdot}01388.10^6$, а у Паризу $1{\cdot}0136{\cdot}10^6$ дина. За средњу ширину од 45° и морску површину нормални атмосфер. притисак износи $1{\cdot}01329{\cdot}10^6$ дина. — Највећи до сада посмотрени атмосферски притисак износи 80·75 см. живиног стуба, и посмотрен је 1893. год., у јануару на — 46·3° целз. у Иркуцку у источном Сибиру, на 491 мет. изнад морске површине. — У практичној техници обично се под једном атмосфером рачуна 1 кгр. на 1 кв. см.

822. Из величине атмосф. притиска не може се непосредно изводити *висина атмосфере*. Кад би ваздух био у свима висинама једнаког састава и једнако густ, онда би висина такве атмосфере била $0{\cdot}76 \times 10517 = 7993$ метра пошто је жива 10517 пута тежа од ваздуха. Међу-

тим се поуздано зна да је атмосфера много виша од 8000 мет. Посредним путем из преламања светлости налази се да ваздуха има и до 64 км. висине. Из висине озвездина и висина северне светлости закључује се да се ваздуха простире на висину и од 320 км. Међутим атмосфера мора имати своје границе. Јер само се онај ваздух може сматрати да припада земљиној атмосфери који земља привлачи и који са њом чини једну целину. А да мора бити границе томе привлачном дејству земљину на ваздух, па ма и цела васиона била ваздухом испуњена, то се по себи разуме.



Сл. 426.

823. Облик Торичелијеве цеви ни у колико не утиче на висину живиног стуба у њој. Као год што се у спојеним судовима ма каквог облика течност пење до исте висине, исто ће тако у Торичелијевим цевима ма каквог облика попети се жива увек до исте висине за исти атмосферски притисак. (сл. 426).

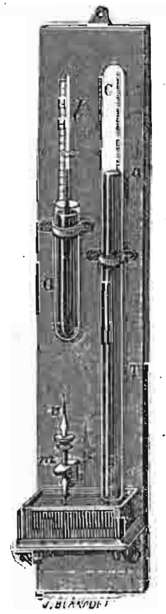
Барометар.

824. Справа којом се може тачно одредити атмосферски притисак назива се *барометар*. Торичелијева цев напуњена живом, са судом као што је то горе описано, јесте основни представник једне врсте барометара, и то оних који носе назив: *живиних барометара*, за разлику од *металних* и других *барометара*.

а. Барометар живин.

825. Барометара живиних има више врста. Али ма које врсте био барометар, жива којом је такав барометар напуњен мора бити хемијски чиста и сува, јер нечиста жива има другу специфичку тежину, а поред тога лепи се за стаклену цев у којој се налази и притисак, који такав барометар с нечистом живом показује, нетачан је. Сем тога нечиста жива прља своју стаклену цев, и читање кроз такву цев непоуздано је. Исти ће резултат бити ако је жива била чиста, али није чиста цев барометарска, која ће после и живу покварити; стога у добром и тачном барометру мора и његова цев бити чиста. Пошто се погрешке прочитанога барометарског притиска, које проистичу из нечистоће живе и цеви не могу поуздано одредити, стога и барометарски притисак, одређен барометрима с нечистом живом или цеви, не могу имати научне вредности.

Напослетку ваља додати, да у Торичелијевој празнини не сме бити ваздуха. Тога ради се једном већ напуњена барометарска цев живом цела толико загреје, да жива у њој прокључа. На тај начин истераће се не само онај ваздух који је био у живи и који је с њом ушао у цев приликом пуњења, већ и онај који је био тако рећи залепљен за унутрашњу страну цеви и који се само тим путем може из цеви и-стерати.



Сл. 427.

826. Барометар са судом. — То је најпростији (по конструкцији) и најсавршенији (по тачности) барометар (сл. 427). Торичелијева цев са својим судом, као што је служила за Торичелијев покушај, била би већ један барометар са судом. Само кад хоћемо да такав барометар служи за прецизна мерења ваздушног притиска, цев мора бити најмање 20 мм. широка, да би се избегла тако звана *„капиларна погрешка“*. Висина живиног стуба одређује се катетометром из далека, и онда није потребно да барометар буде савршено вертикално постављен. Па како не би било згодно, да се дурбином одреди нивô живе у суду, то се утврди један завртањ *m* тако, да се може спуштати и подизати, док његов доњи врх не додирне површину живе у суду, а то се врло лако види, кад се врх завртња са својом сликом у живином огледалу састави. Катетометром се сада визира површина живе у цеви и *горњи* врх завртња (*v*), па се тој дужини дода само дужна завртња, која се одреди једанпут за свагда.

Као што ћемо доцније видети, при свакој одредби ваздушног притиска одређује се и температура, да би се извесна коректура на прочитаном барометарском стању могла извести. Због тога сваки барометар носи и свој термометар. На горњој се слици, с леве стране, види такав термометар, чији је суд, напуњен живом, потопљен у једну епрувету, такођер напуњену живом и толико широку као што је широка и барометарска цев. То је учињено стога, да бисмо били сигурни да барометарска цев и термометарски суд заузму исте температуре, кад се налазе у истим приликама.

Овако изведен барометар са судом назива се још и *нормални барометар*, и служи да се према њему упоређују барометри других система, и одређује им се погрешка, коју би у себи имали.

827. Пошто се ваздушни притисак непрестано мења, то и нивô живе не остаје на истој висини ни у Торичелијевој цеви ни у суду. Кад притисак опадне, спашће и нивô живе у цеви, али ће се за исту запремину живе (колико је у цеви спала) попети нивô њен у суду. Због тога се мора онај завртањ m при сваком читању барометра тако дотерати, да својим доњим врхом додирује површину живе. Јер је права дужина живиног стуба у барометру дата разликом нивôа живе у суду и у цеви. Кад би барометарска цев и суд били истог пресека, онда би се у суду попела жива за онолико исто, за колико би у цеви спала. Овако пак, пошто је суд увек шири, имаће се пењање живе у суду α према спадању живе у цеви β изврнуто пресецима њиховим. Ако са R и r означимо полупречнике суда и цеви, њихови ће пресеци бити $R^2\pi$ и $r^2\pi$, па према томе и:

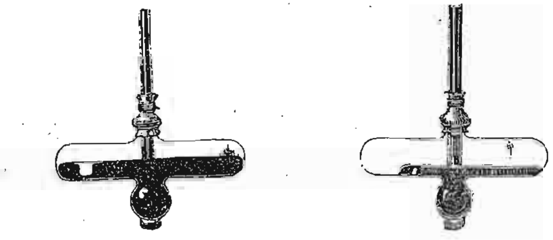
$$\beta r^2\pi = \alpha R^2\pi$$

одакле је:

$$\alpha = \beta\frac{r^2}{R^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (392$$

828. Кад није потребна велика тачност, онда се не води рачун о променама нивоа у суду, али се онда суд узме тако широк, да се промене нивоа у њему могу занемарити. Такав суд за барометар представљен је на

сл. 428. и читање се не врши катетометром, већ је скала утврђена поред саме цеви. Нулта тачка скале налази се на средњем нивоу живину у суду.

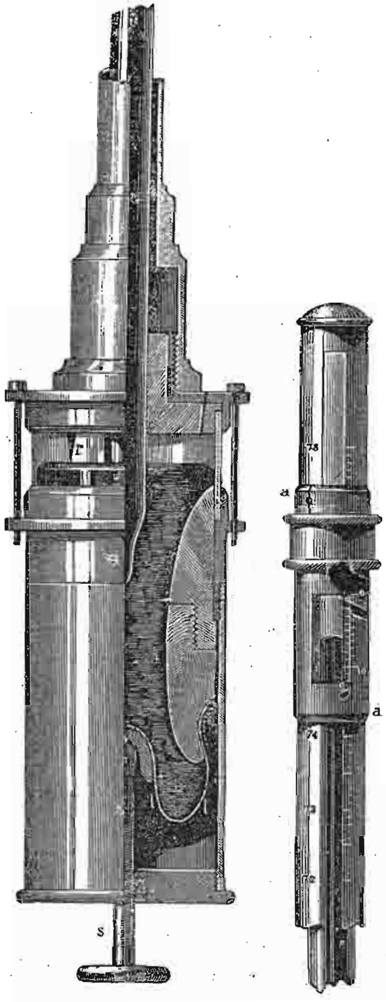


Сл. 428.

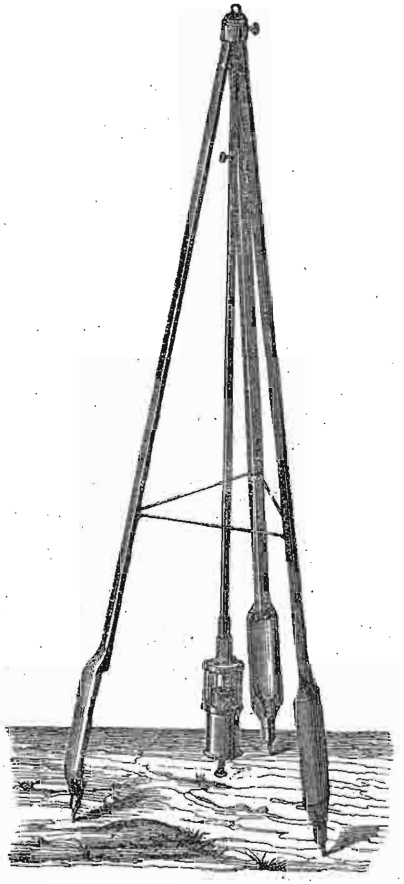
Да се не би морао употребити сувише широк суд, па да се могу занемарити промене нивоа у њему, у извесним се случајевима праве барометри са ужим судом, али се о променама нивоа у њему на тај начин води рачун, што се горња скала (спрам нивоа живе у цеви) при самој деоби коригира за те промене. То су тако звани „*барометри са корегираном скалом*“, и најчешће су употребљени на морским бродовима. Они су згодни, јер се лако могу преносити, а притисак, довољно тачан (и поправљен), добива се само једним читањем.

829. **Фортенов барометар** (Fortin). — Барометри са судом, нарочито тип нормалнога барометра, и ако допуштају најтачнију одредбу ваздушног притиска, имају ту ману, што се не могу преносити; такви се барометри могу употребити само у лабораторијама. Пошто има врло многих задатака који се имају барометром решити на путу, онда, поред маринског барометра који смо горе поменули, направљен је нарочити барометар са судом, који даје скоро исто тако тачне податке као и нормални барометар, али се може згодно преносити. То су барометри са судом, код којих је дно покретно; представник те врсте барометара јесте *Фортенов барометар*.

Барометарска се цев спушта у сразмерно узан суд, чије је дно од коже и може се завртњем s (сл. 429.) подизати и спуштати, тако да ниво живе у суду при свакој одредби притиска додирне врх шиљка r, који је обично од слонове кости. Код врха тога шиљка почиње нулта тачка поделе, која је сада поред саме цеви. При преносу се завртњем s толико попне кожно дно суда, да се цела цев и цео суд испуни живом, у ком случају кожно дно изнад завртња достигне отвор цеви и затвори га. Тако су сад код справе и цев и суд испуњени живом и справа се може преносити. Сл. 430. представља Фортенов барометар у положају кад се њиме на путу одређује ваздушни притисак. На сл. 431. имамо ту исту справу у лабораторији.



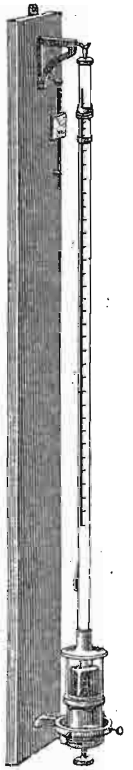
Сл. 429.



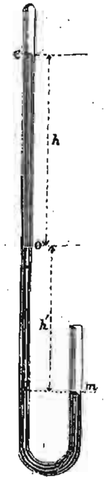
Сл. 430.

---

830. Барометар на лакат. — Према барометрима са судом, барометри на лакат долазе у другу групу живиних барометара, а називају се тако због тога, што је барометарска цев савијена на лакат, као на пр. на сл. 432. Краћи крак је отворен, и ваздушни је притисак представљен дужином живиног стуба између оба нивоа живина *m* и *C*, који се у осталом при свакој промени притиска у исти мах мењају.



Сл. 431.



Сл. 432.

Сл. 433.

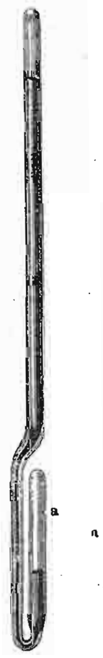
Ових барометара има у главноме три врсте:

1. Цев и скала су непокретни.

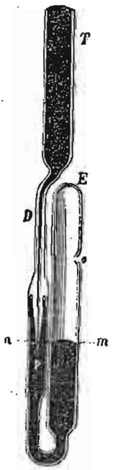
2. Скала је непокретна, а цев се може на више и на ниже покретати.

3. Цев је непокретна, а скала покретна.

Горња слика представља шематично барометар на лакат прве врсте. Нулта је тачка између оба нивоа, на пр. код O. па је одатле подела изведена на више и на ниже. Ваздушни притисак, представљен живиним стубом mC, одређен је збиром прочитаних дужина h и h'.



Сл. 434.

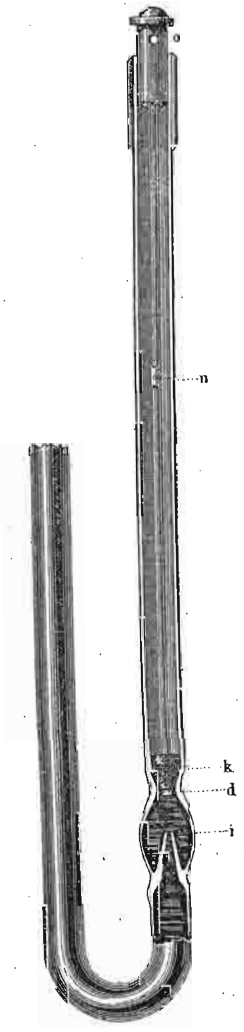


Сл. 435.

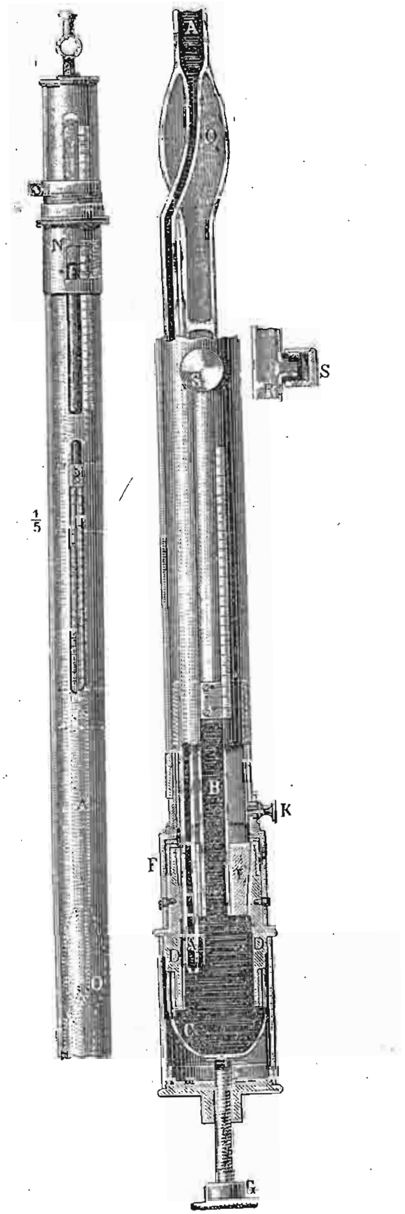
На слици 433. имамо барометар на лакат друге врсте. Барометарска цев, прикопчана за плочицу d, може се цела завртњем s помицати на више и на ниже, удешавајући при том, да ниво живе у краћој цеви дође на нулту поделу a. Барометарско је стање одређено прочитањем поделе која је спрам горњега, затвореног краја цеви.

Трећа врста барометра на лакат добива се, кад се конструкција друге врсте изврне, т. ј. цев се утврди, а скала се помиче на више или на ниже, док њена нулта тачка не дође спрам нивоа живе у краћем отвореном краку.

Нарочита је пажња обраћена при конструкцији барометара на лакат, да се изведу тако, како би се лакше могли преносити. На сл. 434. имамо цев Геј-Лисакова барометра. Отворени крак цеви има код a један врло мали, капиларан отвор, тако да кроза њ може ваздух ући у тај крак, али жива кроз тај отвор не може проћи. Тако се барометар може при преносу изврнути без бојазни да ће жива из њега исцурити. Да не би при поновном исправљању барометра ваздух ушао у Торичелијеву празнину *Бунтен* (Bunten) је на превоју код D (сл. 435.) извукао барометарску цев у капиларну цев са отвором код P, па је затворио у другу ширу цев. Ако ваздух при исправљању барометра уђе у тај део цеви, не може никако кроз врло узани отвор P ући у Торичелијеву празнину, већ ће остати ту, а тиме ни у колико не може бити од штете.



Сл. 436.



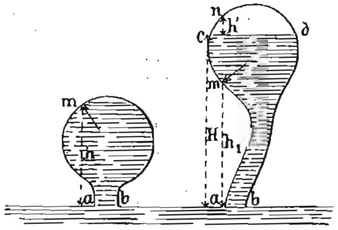
Сл. 437.

Најзад на сл. 436. имамо *Грајнерову* (Greiner) конструкцију барометра на лакат, који је Бунтенову методу употребио на краћем краку. У барометарску се цев сипа управо онолико живе, колико је потребно, да у краћем краку жива дође до d кад се барометар нагне и Торичелијева празнина испуни живом. Сад се запушачем k цев на том месту запуши, и справа се може преносити, а да се не изврнё. Ваздух не може ни у ком случају кроз узани отвор i ући у Торичелијеву празнину.

831. *Барометар на лакат са судом* (*Вилд-Фуесов* — Wild-Fuess). — Овај барометар има суд C (сл. 437.) са покретним дном као и Фортенов, али у тај суд силазе сада две цеви OB и AA, те на тај начин барометар изгледа као на лакат. На слици се види како главна цев A, сужена и искривљена пролази кроз проширену цев OB, па се обе свршују у суду напуњеном живом. Цев OB игра сад улогу краће цеви код обичног барометра на лакат и код S налази се са стране мали отвор, који се може капслом S затворити и кроз који отвор улази ваздух у барометар. Завртњем G доведе се жива да у цеви B дође до нулте тачке пре него што се код N прочита стање барометра. Са овим се барометром постиже иста тачност као и са нормалним, а има ту превагу над њим, што се може преносити.

832. **Статички барометар.** — Ову врсту барометара пронашао је 1670. год. *Морланд* (Moreland) и назвао га *барометар по тежини. Статички барометар*, како се он сада назива, оснива се на томе факту, да кад један суд напунимо на пр. водом и изврнемо га с отвором у воду, (сл. 438.), снага која је потребна да тај суд држи равна

Сл. 438.



Сл. 439.

је тежини самога суда, и још тежини воде која се у суду налази, онако исто као да је суд затворен и у њему се та количина воде налази.

Посматрајмо такав један суд који ће или цео бити испуњен течношћу или као на пр. у барометарској цеви изнад течности се налази безваздушан простор. У првом случају одредимо притисак за један елеменат m (сл. 439.) величине s, која се налази за h изнад површине течности ab. Тај притисак износи $s\sigma(H - h)$, где је σ специфичка тежина течности а H атмосферски притисак. Јер према ономе што смо нашли, одређујући узрок пењању живе у Торичелијевој цеви, на елеменат неки у површини течности ab величине s изнад кога се подигла течност на висину h, излази, да је притисак на такав елеменат у површини течности $sh\sigma$, а атмосферски притисак за тај исти елеменат $sH\sigma$, онда је притисак за елеменат m раван разлици та два притиска у површини, т. ј. $sH\sigma - sh\sigma = s\sigma(H - h)$.

Кад се ово посматрање пренесе на све елементе суда, имаћемо збир таквих вредности и то:

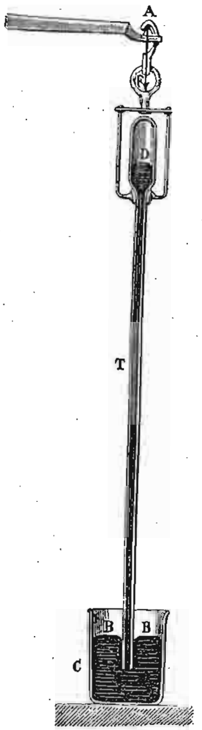
$$\Sigma s\sigma(H - h) = \Sigma s\sigma H - \Sigma s\sigma h.$$

Прва сума представља атмосферски притисак на суд и тај се притисак, дејствујући са свију страна потире. Друга сума није ништа друго до тежина течности Q који испуњава суд од нивоа ab до врха (т. ј. на висини h).

До истога се закључка долази и кад изнад течног стуба у суду остане безваздушан простор, као што је то на пример у Торичелијевој цеви. Према томе снага, која је потребна да држи такав суд с течношћу управо је онолика иста као да је суд код ab затворен.

До тог се закључка може доћи и овим резоновањем: Напунимо чашу водом до врха и поклопимо листом хартије. Држећи чашу право, ми носимо и њену тежину и тежину воде у њој. Изврнимо ту исту чашу; ми знамо да се вода неће просути, јер ће је у чаши држати атмосферски притисак. Изврнута чаша неће бити ни тежа ни лакша, него што је била кад смо је право држали.

На основу тих посматрања ево како је направљен статички барометар. Торичелијева цев обеси се о један крак осетљивих теразија, као што показује сл. 440. Кад ваздушни притисак порасте, жива се у Торичелијевој цеви попне, т. ј. цев је постала тежа, и то ће теразије показати. Обратно ће цев постати лакша, кад жива у цеви спадне услед смањеног притиска. Као што се види, ваздушни се притисак мери теразијама.



Сл. 440.

Према томе сила P, која дејствује на оштрицу A теразијског крака, састављена је из: тежине Q цеви и направе којом је обешена о крак. Та је тежина:

1. повећана тежином живе M, која испуњује цев од нивоа у суду BB, до безваздушног простора

2. смањена за тежину a, коју цео систем губи услед истиснутог ваздуха.

3. смањена за тежину m, колико изгуби онај доњи део цеви, што је потопљен у живи.

833. Мерење атмосферског притиска променом тежине барометарске цеви може се извршити на два начина: или променом тегова на другом краку теразија или разним нагибањем ђерма при сталним теговима на другом краку. Ми ћемо се задржати само на првом случају, јер је онда за равнотежу, ђерам увек хоризонталан, дакле онај део цеви који тоне у живу остаје исти, т. ј. m остаје стално, а тако исто и a, и њихове ћемо промене, због промена атмосферског притиска занемарити. Сада је

$$P = M + \text{const.}$$

а то значи, да се сила P мења само с променом тежине живе, т. ј. с променом ваздушног притиска. Справа ће бити у толико осетљиваја. у колико се при истој промени притиска (на пр. за 1 мм.) већа количина живе у Торичелијеву цев уђе или из ње изађе. Зато треба да је горњи део цеви, D, по могућству, што шири. С друге стране, у том случају знатно се мења

ниво BB у суду C, а то утиче на вредност m. Затоваља суд C узети толико широк, да се промене нивоа у њему могу занемарити.

834. Тачан барометар и тачна одредба ваздушног притиска. — Споменуто је већ раније, да на првом месту мора бити чиста жива и цев барометарска. Први поглед на менискус живин, како у Торичелијевој празнини, тако и на отвореном делу, показаће у колико је барометар тај услов испунио. Ширина цеви и прецизност направе за читање поделе биће нам мерило за тачност која се тим барометром може постићи. Исправност скале или поделе ваља испитати катетометром, обративши пажњу на тачан положај нулте тачке.

Сем ових основних погодаба за исправност једнога живиног барометра, сваки тачан барометар мора испунити још и ове погодбе:

1. *У Торичелијевој празнини не сме бити ни најмањих трагова ваздуха или водене паре.* Приближно се може исправност барометра у том погледу испитати. кад се барометар пажљиво толико нагне, да жива испуни Торичелијеву празнину. Ако се при том чује чист металан звук, значи да у празнини нема ваздуха, а ако је тон потмуо и нејасан, значи да има ваздуха у цеви. Кад је тако цев напуњена, видиће се цео ваздух скупљен у мали мехурић на врху цеви. И по томе се може судити, колико ваздуха има у Торичелијевој празнини. Ако је цев доста широка и ако је тај део њен у коме се јавља празнина доста дугачак, онда је штетно дејство тог ваздуха (ако мехур није велики) слабо, те већ и с тог разлога ваља за барометар бирати широке цеви.

Код барометара на лакат, код којих се досипањем живе у отворени крај може Торичелијева празнина више или мање смањити, као и код барометара на лакат са судом, где се жива у отвореном и затвореном крају може подизати и спуштати, може се по једној методи, коју је *Араго* (Arago) описао, одредити количина ваздуха у Торичелијевој празнини.

Прочита се барометарско стање h на обичном притиску; за тим се или доливањем живе у отвореном краку или подизањем помоћу завртња на дну, сведе Торичелијева празнина на половину и опет прочита ново стање h^1. Ваздух који се унутра налази притискује у првом случају на живу снагом x, а у другом, кад му је запремина сведена на половину, са $2x$ (по Мариотову закону, о коме ћемо мало доцније говорити). Кад не би било ваздуха у Торичелијевој празнини, барометар би показивао и у једном и у другом случају исто стање h_0. Према томе, то право стање h_0 смањено је у првом случају са x, а у другом са $2x$, т. ј.:

$$h = h_0 - x \quad \text{и} \quad h' = h_0 - 2x$$

одакле је:

$$x = h - h'.$$

Та иста метода служи и за водену пару, ако би је било и ако је има тако мало да се при смањивању запремина не кондензује.

По себи се разуме, да није потребно смањивати Торичелијеву празнину баш на половину, већ на ма који део $\frac{1}{n}$ првобитне запремине њене. У том је случају:

$$h = h_0 - x \quad \text{и} \quad h^1 = h_0 - nx$$

одакле:

$$x = \frac{h - h^1}{n - 1} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (393$$

Очевидна је ствар, да барометарска цев мора бити тако удешена, да се горње запремине Торичелијеве празнине могу одредити.

2. *Барометар мора савршено вертикално висити.* Овај услов важи само за оне барометре, код којих је подела поред барометарске цеви, т. ј. код оних који своју поделу носе на себи. Јер ако барометар не би стајао вертикално, већ би био за угао φ нагнут, онда би право стање барометра h_0, према прочитаном h било у размери $h_0 = h \cos \varphi$ мање и за $\varphi = 1^0$ и средњем барометарском стању та погрешка износи већ 0·1 мм. Кад се барометарско стање одређује катетометром, онда барометарска цев може бити и нагнута, али катетометар онда мора бити вертикално намештен.

3. *Пре свакога посматрања ваља живу мало у цеви покренути*, да би се савладала или њена инерција или можда какав други утицај који јој смета да заузме праву висину (на пр. адхезија између живе и стаклета и т. д.). То се врши или завртњем, ако је барометар с покретним дном, или лаким куцањем, да се жива мало покрене. Барометар на лакат обично се нагне за извесан угао, па се при читању врати у вертикални положај и чека док се жива заустави. Опште је правило, да живина површина у отвореном краку, кад се барометар не употребљава, никад не стоји на висини коју ваздушни притисак изазива већ или ниже или више, тако да се онај део цеви на пр. између 730 и 770 мм. не испрља нечистоћом површине живине.

4. *Читање скале мора се тачно извршити и без паралактичне погрешке.* Тачнији барометри већ су тако и удешени, било читањем додира живине купе (менискуса) било читањем у огледалу.

835. — *Поправке* (*корекције*) и *редукције* прочитанога барометра. — И ако је барометар у сваком погледу тачно конструисан и њиме се по горњим правилима служимо, ипак се оно стање које непосредно на њему одредимо не може за научне сврхе употребити. На њему се морају извршити ове поправке или корекције и редукције:

а. Поправке због температуре. Загревањем живе у барометарској цеви до разних температура мења се њена густина, а тако исто, из истог узрока, мења се и дужина скале. Ако хоћемо дакле да имамо тачно одређен ваздушни притисак, морамо наше посматрање барометра свести на извесну и одређену температуру, која је обично нула. Према томе на прочитаном се стању барометарском имају извести ове корекције услед температуре.

1. Најпре ћемо извести корекцију за промену дужине скале или катетометра због загревања до температуре ϑ, кад је тачна подела на њима изведена на температури 0^0. Дужина од 1 мм. на мерилу износи у истини 1 мм. само на температури 0^0; на ма којој другој температури ϑ тај ће милиметар бити дугачак $1 + \alpha \vartheta$, ако са α означимо тако звани кофицијенат истезања (т. ј. продужење јединице дужине загрејане за 1^0). И ако смо на горњој температури ϑ прочитали дужину l, а дужина која одговара температури од 0^0 ако је l_0, онда је:

$$l = l_0 (1 + \alpha \vartheta)$$

одакле је тражена, поправљена дужина мерила за 0^0:

$$l_0 = \frac{l}{1 + \alpha\vartheta} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (394$$

или приближно:

$$l_0 = l\,(1 - \alpha\vartheta).$$

2. Кад би жива била на 0^0, њена би густина била γ_0; на горњој температури ϑ, та густина је γ. Међутим знамо, да се висине h и h_0 двеју течности разних густина имају изврнуто густинама, па ће бити:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_0}$$

С друге стране опет је:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{1 + \beta\vartheta}$$

где је β коефицијенат ширења за живу, према томе је:

$$h_0 = \frac{h}{1 + \beta\vartheta} = h\,(1 - \beta\vartheta) \text{ (приближно)} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (395$$

висина живиног стуба на температури 0^0.

Обадве ове корекције, сведене уједно, даће нам барометарско стање b_0 које одговара температури 0^0, кад је прочитано стање било b на температури ϑ:

$$b_0 = b\,[1-(\alpha-\beta)\,\vartheta]\quad\cdots\cdots\cdots\quad(396$$

Коефицијенат ширења живе $\alpha = 0{\cdot}000180$. Коефицијенат ширења мерила β износи за:

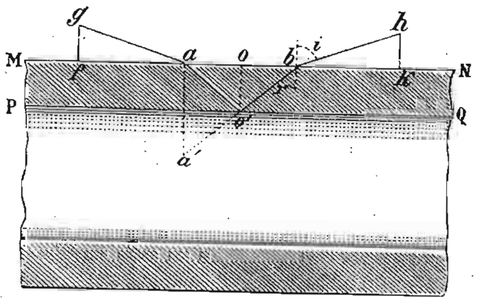
месинг	стакло	платину
$\beta = 0{\cdot}000019$,	$\beta = 0{\cdot}000009$,	$\beta = 0{\cdot}000009$

3. У Торичелијевој празнини има увек више или мање живине паре под разним напоном, који такође, зависи од температуре. Према томе ово би била трећа корекција температурска и она износи по Рењолу на 0°, 0·02; на 10°, 0·027; на 20°, 0·0372; на 30°, 0·053 и т. д. Ову корекцију c ваља додати прочитаном стању.

b. Капиларна депресија. Ова корекција k барометарског стања зависи од ширине цеви и висине живиног менискуса.

Унутрашњи пречник цеви одређује се код цеви које су цилиндричне на тај начин, што се цев напуни живом и измери тежина живе која цев испуњује. Пошто се зна висина живиног стуба у цеви, запремина а из ње пресек и пречник цеви може се лако израчунати. Иначе механичар који прави барометар обично пошље и један комад цеви од кога је он направљен, те се на њему одређује унутрашњи пречник. Ако тога нема, може се пречник цеви одредити с довољном тачношћу, кад се измери спољашњи пречник и дебљина дувара цеви. Та се дебљина одређује на овај начин:

На површини цеви повуку се две танке црте близу једна поред друге и управно на осу цеви. Нека су те две црте a и b (сл. 441), на површини MN; слика црте (на слици тачке) a појавиће се у a', јер се са унутрашње површине цеви PQ, као са огледала одбија светлост. Светлосни зрак, долазећи од o' ка b, прелама се код b и одлази правцем bh. Да би се тај правац одредио, тражи се на цеви место hk, и то тако да се код k наслони усправно парче тврде хартије и премешта дотле, док одбијени и преломљени зрак $o'bh$ не прође ивицом хартије, т. j. док се преко те ивице не угледа слика a'. То се исто ради и с друге стране, док се преко хартије у gf не угледа слика црте b. Одстојања $ab = 2a$, $fk = 2b$, и $kh = gf = h$ измере се. Ако је дебљина цеви $oo' = e$, i и r углови упадања и преламања код b и a, даље n експоненат преламања тога стаклета (који треба да је познат), онда је:

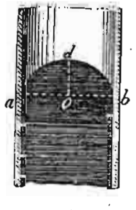


Сл. 441.

$$\sin i = n \sin r$$

$$e = \text{cotg.}\, r$$

$$n = (b-a)\, \text{cotg.}\, i.$$



Сл. 442.

Из тих трију једначина с три непознате количине одреди се дебљина цеви e. Кад се за тим $2e$ одбије од спољашњег пречника цеви, добива се унутрашњи.

Висина менискуса није иста у истој цеви: она се мења према томе да ли је менискус постао крнтањем живе на више или на ниже. Та се висина одређује посматрањем најпре основице менискуса ab (сл. 442), која се врло лако распознаје, па онда врха његовог d.

Кад се те две вредности одреде, онда се капиларна депресија налази по овој таблици коју је саставио *Делкро* (Delcros).

ПРЕЧНИК ЦЕВИ У ММ.	ВИСИНА МЕНИСКУСА У М. М.															
	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0	1·1	1·2	1·3	1·4	1·5	1·6	1·7
4	0·60	0·89	1·16	1·41	1·65	1·86	2·05	2·21	2·35	—	—	—	—	—	—	—
5	0·37	0.55	0·73	0·90	1·06	1·19	1·33	1·45	1·56	1·66	1·74	—	—	—	—	—
6	0·24	0·36	0·48	0·59	0·70	0·80	0·90	0·99	1·07	1·14	1·21	1·27	1·32	1·37	—	—
7	0·17	0·25	0·34	0·41	0·49	0·56	0·64	0·70	0·76	0·82	0·87	0·92	0·96	1·00	1·04	—
8	0·12	0·18	0·24	0·30	0·35	0·40	0·46	0·50	0·55	0·59	0·64	0·67	0·71	0·74	0·77	0·79
9	0·09	0·13	0·18	0·22	0·26	0·30	0·34	0·38	0·42	0·45	0·48	0·50	0·53	0·56	0·58	0·60
10	0·07	0·10	0·13	0·16	0·19	0·22	0·25	0·28	0·31	0·33	0·35	0·38	0·40	0·42	0·44	0·45
11	0·05	0·08	0·10	0·12	0·15	0·17	0·19	0·21	0·23	0·25	0·27	0·29	0·31	0·32	0·34	0·35
12	0·04	0·06	0·07	0·09	0·11	0·13	0·14	0·16	0·18	0·19	0·21	0·22	0·23	0·24	0·25	0·26
13	0·03	0·05	0·06	0·07	0·09	0·10	0·12	0·13	0·14	0·15	0·16	0·17	0·18	0·19	0·20	0·20
14	0·02	0·03	0·04	0·06	0·07	0·08	0·09	0.10	0·11	0·11	0·12	0·13	0·14	0·15	0·15	0·16

Одређивање ових бројева скопчано је с већом или мањом несигурношћу и због тога се за тачна мерења барометарског стања употребљују барометри са широким цевима, па се капиларна корекција занемарује.

c. Висинска корекција. — Кад се барометар пренесе с једне висине на другу, његово ће се стање променити и ако се општи ваздушни притисак није променио. Променом висине на којој се барометар налази, мења се тежа и с тим и тежина па донекле и дужина живиног стуба, којим се ваздушни притисак мери. Због тога да би се поједине вредности ваздушног притиска могле међу собом упоређивати прочитано стање баротетарско b, на некој висини h своди се на морски ниво по обрасцу, који смо у своје време познали код промене убрзања g са висином:

$$b = b_1\,(1—0{\cdot}000000196\,h)$$

d. Корекција за географску ширину. — Свака морска површина, на коју је, по горњој корекцији, сведено барометарско стање, није на истом одстојању од средишта земљиног (пошто земља није округла) услед чега g на свима морским површинама није исто. Због тога ће и барометарско стање зависити од географске ширине φ. Да би се поједини подаци могли и у том смислу међу собом упоређивати, своде се барометарска стања на ширину $\varphi = 45^0$, према обрасцу за g:

$$g_\varphi = g_{45}\,(1 — 0{\cdot}00259 \cos 2\varphi).$$

Кад се узму обе ове поправке заједно, прочитано барометарско стање b, биће поправљено за промене убрзања земљине теже, по обрасцу:

$$b = b_1\,(1—0{\cdot}00259 \cos 2\varphi)\ (1—0{\cdot}000000196\,h)$$

Према овоме општи образац за корекцију барометарског стања био би:

$$b_0 = \{b\,[1— (\alpha—\beta)\,\vartheta] + k + c\}\ \{(1-—0{\cdot}0026 \cos 2\varphi)\,(1 — 0{\cdot}00{,}0000196 h)\}$$

e. Стишљивост живе. — Сем горњих корекција које улазе у образац за тачније одредбе барометарског стања, више пута се води рачун и о контракцији живинога стуба због његове сопствене тежине. Рачуном се одређује да се живин стуб од 760 мм. под својим сопственим теретом скрати за 0·0027 мм. Где је потребно да се са том прецизношћу посматрања изводе, води се рачун и о том скраћивању живиног стуба.

f. Електричне појаве. — Жива у барометарској цеви налази се увек негативно наелектрисана до извесног потенцијала, чија вредност зависи од кретања живе у цеви и од електричног и хигрометријског стања ваздуха. Према томе, околна тела више или мање привлаче или одбијају живу у барометарској цеви, према стању у коме се налазе. Дејство тога привлачења или одбијања мало је познато, али је у опште врло слабо. Једина електрична појава, која се може констатовати ова је: кад се приближи шиљак живиној површини, да се одреди њено стање, жива се подигне, додирне тај шиљак и одмах за тим се спусти. То подизање живе може изнети неколико микрона.

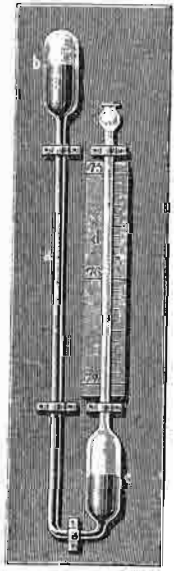
b. Глицерински барометар

836. Кад би се жива заменила ма каквом, специфички лакшом течношћу, онда би истина барометарска цев била знатно дужа, али би и варијиције барометарског стања биле такођер много веће, те би се мале промене у притиску лакше констатовале. Вода се за тај посао не би могла, употребити јер се сразмерно лако мрзне и јер би у Торичелијевој празнини било увек више или мање водене паре према промени температуре. Једина течност која би се могла узети, јесте глицерин, који се ни на врло ниским температурама готово никако не испарава; специфичка тежина му је 1·26. Такав глицерински барометар конструисан је за Опсерваторију у Кју (Kew) у Енглеској (сл. 443.). Суд тога барометра је од бакра (изнутра калаисан) и напуњен је отприлике до половине глицерином, изнад кога се налази један слој петролеума, да би га сачувао од влаге.

Сл. 443.

Барометарска цев, која са стране полази из суда, метална је и на горњем свом крају сврпава се јаком и затвореном стакленом цеви, у којој се виде промене глицеринског стуба. Цев се ваздушним шмрком испразни, те се глицерин попне, па се онда херметички затвори. Горњи нивô глицерина (обојен аналином да се боље види) посматра се на две скале; једна је подељена на палце и његове десетине, а друга даје одговарајуће висине живиног стуба. Средња висина глицеринског стуба износи 8·22 метара, а то значи да је овај барометар више но десет пута осетљивији од живиног.

837. Да би се осетљивост барометра повећала, није потребно да се он цео напуни течношћу лакшом од живе. До истог се резултата долази кад се у отвореном краку живиног барометра сипа каква специфички лакша течност, и цев се отворенога крака у одређеној мери сузи. Такав барометар, представљен на слици 444, конструисао је *Хигенс* (Huyghens). Барометарска цев *a* знатно је раширена код *b*, где се налази Торичелијева празнина као и на отвореном краку код *c*. Одавде се цев сужава и у њу се, а изнад живе наспе, каква лака течност рецимо петролеум.



Сл. 444.

Суд код b и код c има исти пресек, а код d, цев је сведена на n пута мањи пресек. Кад жива код b спада за x мм., исто толико ће се попети код c, а она лака течност попеће се код d за nx мм.; висина стуба те лаке течности порасла је за $(n-1)x$ мм. Стуб те лаке течности, висок $(n-1)x$ мм., притискује исто толико колико и $\frac{(n-1)x}{\sigma}$ мм. висок живин стуб, ако је σ број који показује за колико је та лака течност лакша од живе. Кад дакле код b спадне жива за x мм., онда ће живин стуб, који одговара опадању ваздушног притиска бити:

$$y = 2x + \frac{n-1}{\sigma}x,$$

Одавде је:

$$x = \frac{\sigma y}{2\sigma + n - 1.}$$

Ако је пресек d 20 пута мањи од пресека b и c; ако је лака течност вода код које је $\sigma = 13\cdot6$, онда је $n = 20$, и према томе је:

$$x = \frac{13\cdot6 \cdot y}{2 \cdot 13\cdot6 + 20 - 1} = 0\cdot294\, y = 0\cdot3\, y$$

Кад обичан живин барометар падне за y мм., онда падне жива у b за $0\cdot294\, y$ мм., а лака течност у d попне се за $10 \times 0\cdot204\, y = 5\cdot88\, y$ мм. Кад дакле обичан живин барометар падне за 1 мм., лака ће се течност (ако је вода) попети скоро 6 пута толико.

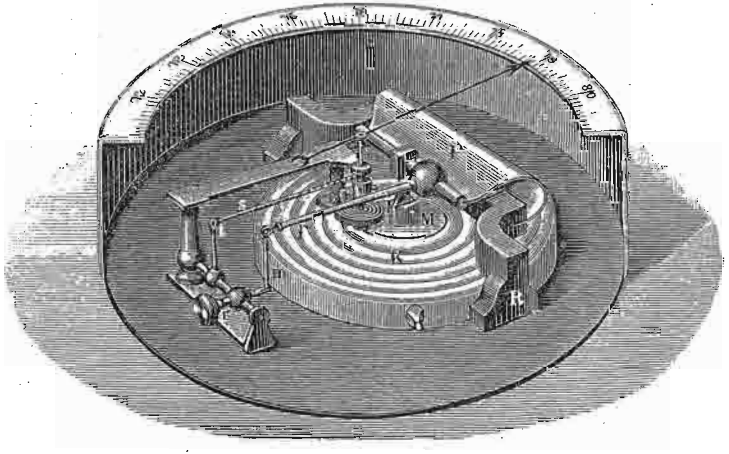
По себи се разуме, да ће нам такав барометар показивати у већем размеру мале промене барометарске, али се он ипак не може употребити за тачне одредбе барометарског стања.

c. Метални барометар (анероид)

838. Металним барометрима називају се барометри без течности, а основани су на еластичности метала. Анероидима се пак називају стога, што се из главног дела тога инструмента извуче ваздух.

У главноме постоје ове две врсте тих барометара:

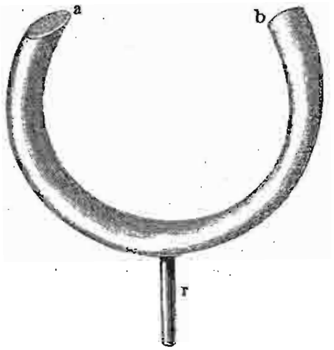
1. *Метални барометар Видијев.* — Основни елеменат металног барометра, који је први пут конструисао Види (Vidi, 1844) и који је он назвао анероидом, јесте једна пљошта и шупља метална кутија, код које је горњи танак поклопац K таласасто извијен (сл. 445.). Из кутије се извуче ваздух и њен ће поклопац променом ваздушног притиска повијати се на више и на ниже; то је повијање највеће у средини поклопца. Са средином поклопца M спојена је једна полуга l тако, да је једним крајем у вези с јаком металном опругом P, а други се крај помоћу разних полуга m, r, t, s, доведе у посредну везу с једном лаком казаљком. Ваздушни притисак тежи



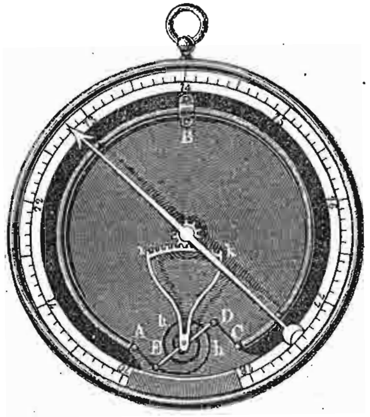
Сл. 445.

да кутију спљошти, т. ј. да поклопац спусти, и то у толико јаче, у колико је притисак већи; опруга P се томе опире. Тако комбинованим дејством поклопца и опруге повећано кретање полуге l преноси се другим крајем преко поменутих полуга на казаљку, која ту промену ваздушног притиска у знатно увећаном размеру показује. Скала таквога барометра мора се одредити упоређењем са живиним барометром.

2. *Метални барометар Бурдонов.* — Место шупље металне кутије са еластичним поклопцем, *Бурдон* (Bourdon 1849) је узео савијену еластичну металну цев за посматрање промена ваздушног притиска. Кад се таква једна цев (сл. 446.), са свију страна затворена, цевчицом r споји са шмрком за извлачење ваздуха, па се ваздух извлачи, одмах ће се крајеви цеви a и b приближавати. Ако би се у цев ваздух сабијао, ти ће се крајеви удаљавати.



Сл. 446.

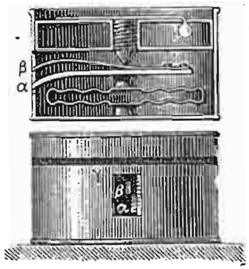


Сл. 447.

За метални барометар употреби се цев сочивастог пресека, савијена у круг, и из ње се извуче ваздух. На сл. 447. имамо такав барометар најпростије конструкције. Цев је само код B (т. ј. у средини) утврђена. Кад на пр. притисак опадне, крајеви се A и C удаље један од другога, и то се њихово кретање згодним распоредом појединих делова механизма пренесе на казаљку, спрам које се налази скала подељена на делове који одговарају милиметрима живинога барометра. Казаљка ће се кренути на супротну страну кад притисак порасте.

839. Метални барометри и једне и друге врсте врло су много употребљени у публици. Међутим, све те врсте барометара, чак и кад су брижљиво израђени, не могу служити за тачна посматрања барометарског стања, и то у главноме из ових разлога: 1. што су еластичне деформације метала (на којима се ти инструменти оснивају) врло сложене и што су врло мало познате; 2, што се топлотна дејства на еластичност не могу узети у рачун и 3, што је само механичко функционисање справе, услед разних трења, скопчано с погрешкама. Такви се барометри морају упоређивати са живиним барометром, и то чешће, јер се њихово стање с временом мења.

840. На горњим основама изведене су разне врсте металних барометара, међу којима се може сматрати као најпоузданији *Голдшмитов* анероид сл. 448. Главна особина тога барометра у томе је, што је избегнут сваки пренос кретања поклопца полугама, него се то кретање види на казаљки α која се непосредно наслања на поклопац. Да би се ипак могле мале промене притиска опазати и измерити, горњи затварач справе удешен је као микрометар, који засебно притискује на полугу β, спрам казаљке α те се милиметри и делови милиметра читају на глави микрометра. Слагање казаљке α и поделе на полузи β чита се лупом (која је на слици изостављена).



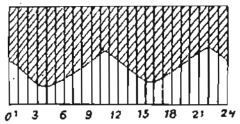
Сл. 448.

Голдшмитов анероид је врло осетљив и згодан за мерење висинских разлика у путовању.

d. Барограф

Тако се називају барометри свију напред описаних типова, код којих се промене ваздушног притиска или с времена на време или непрекидно бележе и пишу. То бележење и писање бива на једном листу хартије, који нарочити сахатни механизам брже или спорије креће, испод једне писаљке, на коју се преносе промене барометарског стања.

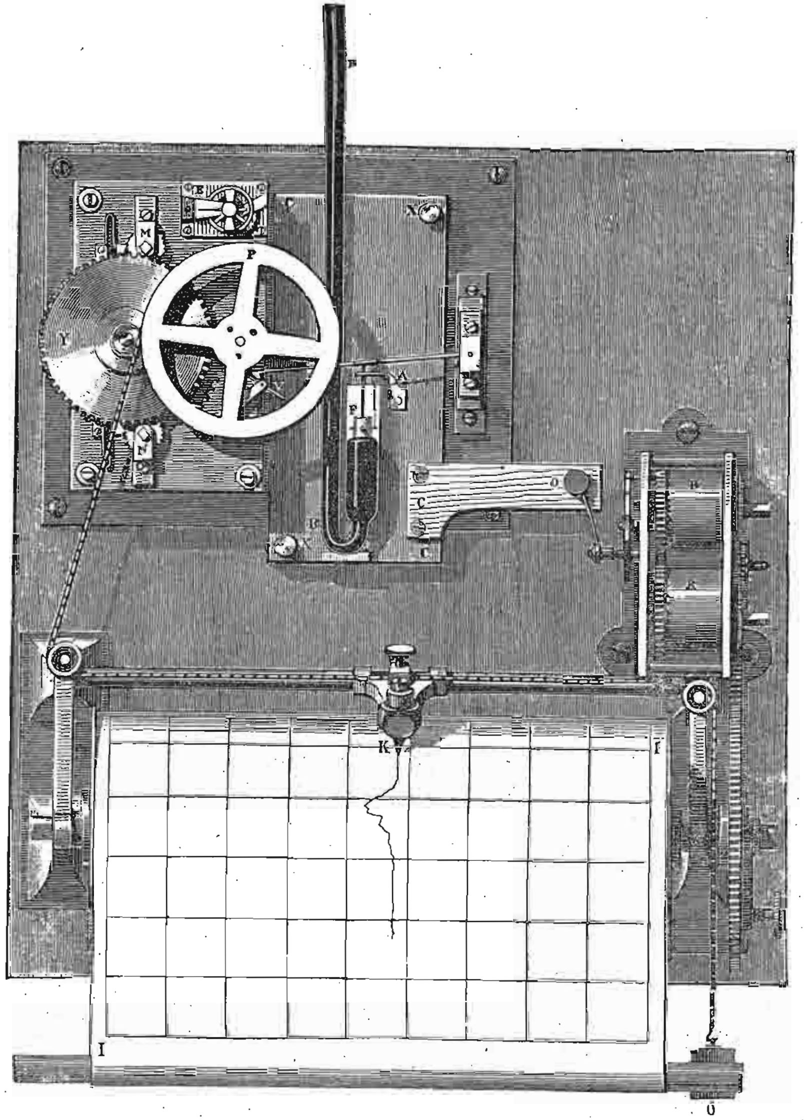
841. Нормални барограф. — На првом месту да напоменемо да се и нормални барометар са широким судом може употребити као барограф; то се обично постиже фотографским путем. Барометар се онда намести у сасвим мрачну собу, па се пламен једне било гасне било петролеумске лампе цилиндарским сочивом концентрише на живин мениску; фотографским се објективом баци слика тако осветљеног менискуса на осетљиву фотографску хартију, коју полако покреће сахатни механизам. На хартији се покажу две зоне, једна црна, на коју је светлост падала и једна бела, коју је заклањао живин стуб од светлрсти. Гранична линија тих двеју зона показује промене живиног менискуса, т. ј. промене барометарског стања (сл. 449.).



Сл. 449.

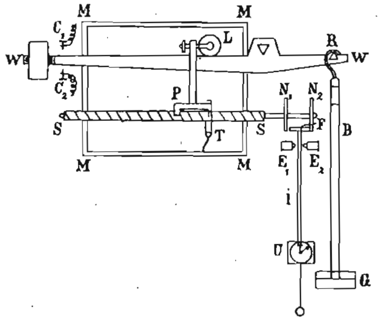
842. Барограф на лакат. — Кад се не жели употребити фотографска метода, онда се прави барограф од живиног барометра на лакат, само што сад постаје инструменат више или мање сложенији. Оваких барографа има разних система и са сваким су скопчане извесне добре или хрђаве стране. Један од најпоузданијих, и ако не најпростијих по конструкцији, јесте барограф на лакат, који је конструисао *Редије* (Redier). (Сл. 450). Не улазећи у детаљан опис механизма (који се у главноме из слике види) обраћамо пажњу на пловак *F* у отвореном краку барометра на лакат, који, падајући, или пењући се са живом заједно, креће једну полугу а с њом читаву серију других механичких елемената, док се најзад то кретање пловка, не пренесе на писаљку *K*. Писаљка се креће на једну или другу страну, према томе да ли жива у отвореном краку барометарском расте или пада. Сахатни механизам *RR* креће хартију испод писаљке. Кад је апарат добро конструисан, његово је бележење прилично независно од температуре.

Фуес је унео пловак у Торичелијеву празнину, и тај је његов пловак један магнет који жива услед промене притиска подиже и спушта. Тај магнетски пловак дејствује сад на други један магнет који је споља и који згодним распоредом механизма креће писаљку за бележење.



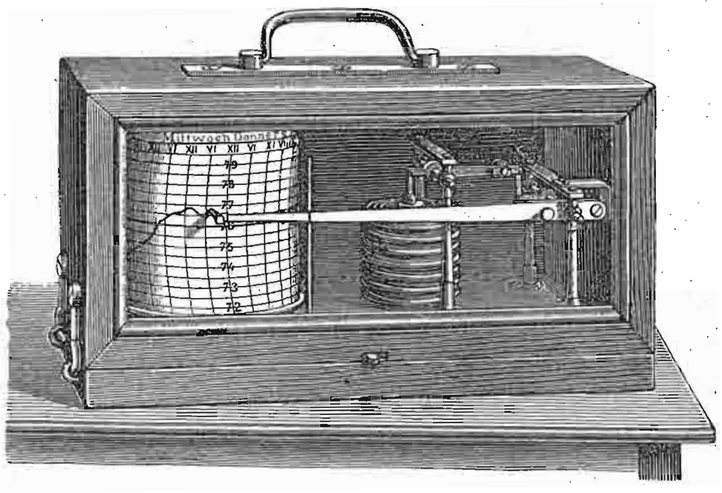
Сл. 450.

843. Статички барограф. — Принцип статичког живиног барометра употребио је између осталих *(Секи,* (Secchi) *Шрајбер* и др.) *Шпрунг* (Sprung) за конструкцију статичког барографа (сл. 451.). Барометарска цев B виси о краћи крак теразијског ђерма WW. Нарочитим механизмом удешено је, да се точак L, а с њим и писаљка T, с падањем и растењем притиска, креће час лево час десно и да се та промена притиска бележи на хартији MM, која се полако спушта на ниже испод писаљке.



Сл. 451.

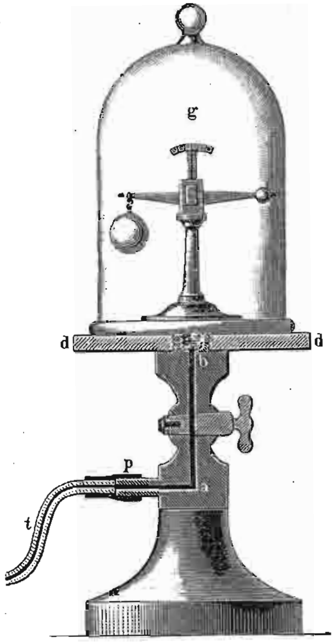
844. Метални барограф. — И металних барографа има разних конструкција. Основни тип тих справа показује нам сл. 452., која представља барограф Браће Ришара (Richard Frères) из Париза. У место једне кутије са еластичним поклопцем, узето је више таквих кутија, код којих је и горњи и доњи поклопац таласасто извијен; кутије су једна изнад друге тако намештене, да се њихове деформације сумирају и преко нарочитог система полуга крећу лаку писаљку од алуминијума, која бележи барометарско стање на хартији савијеној око једнога цилиндра. Цилиндар окреће сахатни механизам обично један пут за недељу дана.



Сл. 452.

В. Атмосферски потисак.

845. Бароскоп. — Да се атмосферски потисак експериментално констатује, служи нам нарочита справа, тако звани бароскоп или дазиметар (сл. 453.). Под звоно шмрка за извлачење ваздуха метну се мале теразије, код којих на једном краку виси мало већа шупља стаклена лопта, а на другом мала метална пуна кугла. Док су теразије у ваздуху под обичним притиском, оне су у равнотежи, али кад се у звону почне шмрком разређивати ваздух, одмах се равнотежа поквари, и то тако да онај крак теразија на коме је стаклена лопта, претегне, и у толико више у колико се ваздух већма разређује. То доказује, да је стварно стаклена шупља лопта тежа од металне пуне куглице, а што су у ваздуху биле у равнотежи, долазило је услед већег губитка стаклене лопте у ваздуху.



Сл. 453.

Величина тога губитка одређује се и овде по Архимедову закону за течности. *Свако тело потопљено у ваздуху губи од своје тежине онолико, колико је тежак ваздух* (или уопште гас) *који је оно истисло.*

Означимо са P тежину, а са V запремину веће лопте; са p и v исте вредности за мању лопту. Ако ваздушни притисак није нормалан (760 мм.) већ H, онда је за равнотежу у обичном ваздуху специфичне тежине s:

$$P - Vs\frac{H}{760} = p - vs\frac{H}{760}$$

одавде је:

$$P - p = (V - v)s\frac{H}{760}$$

За други неки притисак $H + \triangle H$ имаћемо вишак тежине веће лопте:

$$P - p = (V - v)\,s\,\frac{H + \triangle H}{760}.$$

Кад од ове једначине одузмемо горњу, добићемо вишак, који ће покварити равнотежу под промењеним притиском:

$$(V - v)s\frac{\triangle H}{760}$$

који ће вишак нагнути теразије за известан угао α. Према обрасцу за осетљивост теразије биће сада:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l}{dm}\cdot\frac{(V - v)s}{76}\triangle H \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (398$$

Тангента нагибног угла сразмерна је промени притиска $\triangle H$. Бароскоп је данас употребљен у индустрији за брзо одређивање густине појединих гасова који се производе у великим количинама, на пр. угљене киселине, светлећег гаса, ацетилена и т. д.

846. *Свођење тежина на празан простор.* — Врло важну последицу овога закона налазимо код свију мерења теразијама, јер теразијама не дознајемо праву тежину тела, већ само разлику између тежине тела и тежине истиснутог ваздуха. Означимо праву тежину тела у безваздушном или празном простору са X, његову запремину са v и специфичну тежину ваздуха са s, тежина тела у ваздуху биће $X - vs$. Ако је специфична тежина тела σ, онда је:

$v = \frac{X}{\sigma}$, те онда и тежина тела у ваздуху $X\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right)$

За мерење тежине тела теразијама служимо се теговима, на којима поједини бројеви обележавају њихову

тежину у безваздушном простору. Ако смо дакле за равнотежу горњега тела метнули на други тас теразија P грама, онда је тежина тих P гр. у ваздуху, кад са γ означимо спец. тежину материјала тегова:

$$P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right).$$

За равнотежу на теразијама мора да буде:

$$X\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) = P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)$$

одакле је тражена права тежина тела, или тежина у безваздушном простору:

$$X = P\frac{1 - \frac{s}{\gamma}}{1 - \frac{s}{\sigma}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (399$$

Пошто су разломци $\frac{s}{\gamma}$ и $\frac{s}{\sigma}$ врло мали, то се без велике погрешке може ставити:

$$X = P\left(1 - \frac{s}{\gamma}\right)\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right) = P\left[1 + s\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\gamma}\right)\right] \cdot \cdot \quad (400$$

Из тога се види, да права тежина некога тела може бити већа од оне коју смо нашли на теразијама, кад је $\sigma < \gamma$ или мања кад је $\gamma < \sigma$.

Пошто се спец. тежина ваздуха која у овом послу игра главну улогу, знатно мења променом температуре, то ћемо тек у науци о топлоти видети како се још тачније одређује права тежина тела, кад будемо водили рачуна и о температури на којој је мерење тежине извршено.

847. Друга важна последица Архимедова закона за гасове у томе је, што извесна тела, специфички лакша од ваздуха, могу у њему да плове. О овој важној последици, на којој се оснива пловљење по ваздуху ваздушним лоптама, говорићемо доцније.

848. *Пример.* — Кад се једна чаша с равним ободом напуни водом и поклопи листом хартије, стакленом плочом и т. д. може се изврнути а да се вода не проспе. Ако је вода у чаши 13 см. високо и отвор чаше има 50 кв. см., с коликом снагом атм. притисак притискује на поклопац? — Снагом од 50 · 1·033=51·65 кгр., кад се одузме притисак воде = 50 × 13 = 650 гр., остаје 51 кгр., не рачунајући тежину поклопца.

II. Мариотов закон.

849. Кад се извесна запремина некога гаса изложи притиску, она ће се променити. Однос по коме ће се запремина мењати с променом притиска исказан је у тако званом Мариотову закону (Mariotte) који гласи:

На истој температури запремина некога гаса (V) изврнуто је сразмерна притиску (P) Ако је првобитна запремина V_1 прешла у запремину V_2 због промене првобитног притиска P_1 у притисак P_2, онда је по Мариотову закону:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{(401}$$

Овај се образац може и овако написати:

$$P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 \cdot \cdot \cdot \cdot = \text{const}$$

Стога се Мариотов закон може и овако изрећи: *Производ из запремине и притиска некога гаса* (на истој температури) *сталан је.*[1]

Означимо ту сталну вредност са k, па имамо:

$$Pv = k \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{(402}$$

Ставимо $P = 1$; онда је:

$$k = v.$$

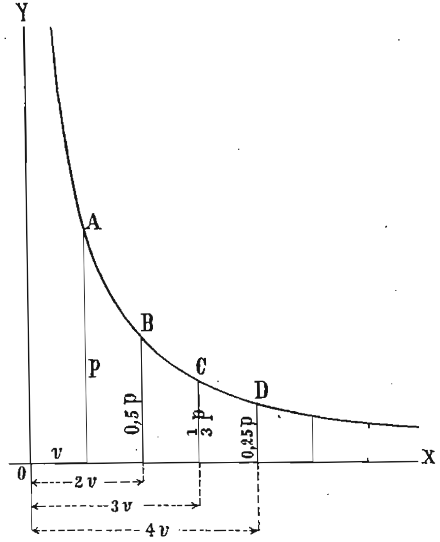
---

[1] Експерименте, који се односе на тај закон прво је извео и објавио енглески физичр Boyle, (1662.) па тек онда Мариот (1676.). Али како је рад енглеског физичара био је недовољно јасан и непотпун, то је тај закон добио своју важност тек после радова француског физичара па зато и носи његово име. Енглези, међутим, тај закон називају *Бојловим*, а неки писци *Бојл-Мариотовим законом.*

Дакле та константа значи ону запремину коју неки гас има под притиском равним јединици. Или ставимо $v = 1$, онда је

$$k = P.$$

Према томе константа представља онај притисак некога гаса коме је запремина равна јединици. На сл. 454. представљен је Мариотов закон графички. Крива линија, која показује однос између притиска и запремине некога гаса по Мариотову закону и на *сталној* температури назива се *изотермична крива линија гасова.*



Сл. 454.

Напред смо нашли да је тежина некога гаса Q одређена запремином v и густином γ, тј.

$$Q = V\gamma.$$

Или ако тој истој тежини променимо запремину промениће се и густина, али ће увек бити:

$$Q = V_1\gamma_1 = V_2\gamma_2 = V_3\gamma_3 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Одавде је сада:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

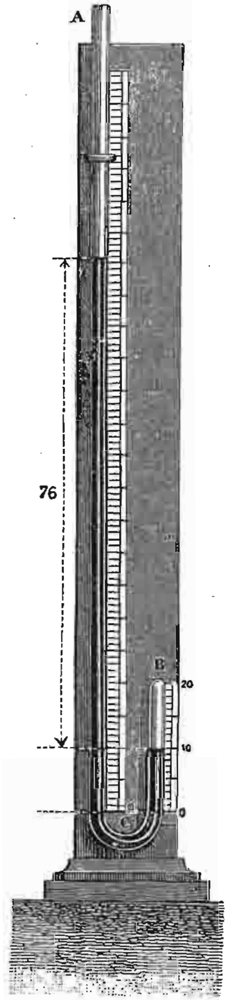
А то значи да *су густине некога гаса изврнуто сразмерне запреминама* (на истој температури).

И обратно:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{P_1}{P_2}$$

т. ј. *густине су управо сразмерне притисцима.*

850. Мариотов закон вреди (у извесним границама) како за притиске веће од једне атмосфере тако и за притиске мање од једне атмосфере. Експерименталним се путем Мариотов закон за притиске веће од једне атмосфере може доказати апаратом представљеним на сл. 455. који није ништа друго до једна на лакат савијена стаклена цев, код које је краћи крак затворен а дужи отворен. Кад се у отворени крак сипа жива, она ће заузети на превоју цеви и у једном и у другом краку исту висину *oo*, затворивши у исти мах у краћем краку извесну запремину ваздуха од *0* до *20*. Једнака висина живе у оба крака цеви значи исти (атмосферски) притисак како у затвореном тако и у отвореном краку. Кад сада у отворени крак наспемо толико више живе, да разлика оба нивоа буде равна притиску још једне атмосфере, онда ће се запремина ваздуха у затвореној цеви смањити на половину, јер је сада притисак два пут већи. Кад се сипањем живе притисак попне на три атмосфере, запремина ваздуха у затвореној цеви свешће се на трећину и т. д.



Сл. 455.

Сл. 456.

851. За притиске мање од једне атмосфере служи апарат представљен на сл. 456., који је у самој ствари једна барометарска цев *B* напуњена донекле гасом (на пр. ваздухом) и изврнута замочена у цеваст суд *C* напуњен живом. Барометарска је цев подељена на једнаке делове, да би се запремина гаса у њој могла лако одредити.

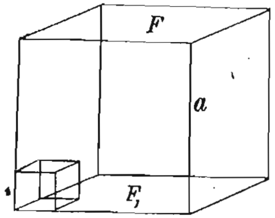
Најпре се цев толико загњури у суд, да жива у цеви и суду буде на истој висини; онда је ваздух у цеви извесне запремине V, под притиском атмосферским H. Сад се цев извлачи из суда, док се мало час прочитана запремина ваздуха (под притиском H) не удвоји $(2\,V)$; живин стуб у цеви биће виши но у суду и то за $\frac{H}{2}$, тако да ће се гас у цеви налазити под притиском у пола мањим него у почетку. Кад се цев толико извуче да се запремина утроји $(3\,V)$, висина живе у цеви биће ${}^2/_3\,H$, и ваздух се у цеви налази под притиском $H - {}^2/_3\,H = \frac{H}{3}$. Уопште кад запремина гаса у цеви буде nV, висина живе у цеви биће $\frac{n-1}{n}H$, а то значи да ће гас бити под притиском:

$$H - \frac{n-1}{n}H = \frac{H}{n}.$$

852. Сем горњега, експерименталнога доказа Мариотова закона, ево како бисмо до тога закона дошли теоријским посматрањем.

По кинетичкој теорији гасова (као што ћемо то извести у науци о топлоти) притисак некога гаса на дуварове суда у коме се налази није ништа друго до скуп кинетичке енергије свију молекила који о дуварове суда ударају. Према томе у колико запремина некога гаса расте, у толико опада број молекила који ударају на јединицу површине суда, т. ј. у толико је притисак мањи и обратно.

Претпоставимо да је суд у коме се гас налази коцкаст (сл. 457.) и да се у њему по једна трећина молекила креће у три једно на друго управна правца и паралелно ивицама коцке. Да бисмо само краћим путем дошли до резултата учинили смо те претпоставке јер кад будемо ту ствар подробније проучавали у науци о топлоти, видећемо да образац за притисак ни у колико не зависи ни од облика суда ни од правца којим се молекили у њему крећу. Претпоставићемо још да су молекили потпуно еластични и да сваки молекил пређе слободно цео пут између једног и другог наспрамног дувара суда. Ако у суду има n молекила, онда се по $\frac{n}{3} = s$ њих креће сваким од она три правца; ако је још дужина ивице коцке a, онда између свака два удара молекила о исти дувар мора молекил прећи пут $2\,a$, а на јединицу површине долази $\frac{s}{a^2}$ удара. Кад коцку којој свака страна има a сантиметара смањимо на коцку од по 1 см, онда на смањену површину коцке пада as удара. Пошто смо казали да број удара, т. ј. њихова кинетичка енергија одређује притисак, онда, кад са P означимо притисак у великој коцки код које удара $\frac{s}{a^2}$ молекила на јединицу површину, а са p, притисак у малој коцки код које на јединицу површине имамо as удара, мора вредети овај однос:



Сл. 457.

$$P : p = \frac{s}{a^2} : as$$

$$= 1 : a^3.$$

Међутим се зна да су запремине обеју коцака:

$$v : V = 1 : a^3$$

$$P : p = v : V.$$

853. Последице Мариотова закона. *1. У једнаким запреминама разних гасова на истој температури и под истим притиском има исти број молекила (Авогадров закон).*

Према ономе што смо мало час извели, ако са c означимо брзину молекила у суду, онда ће сваки молекил, пут од $2\,a$ прећи за једну секунду $\frac{c}{2\,a}$ пута; другим речима молекил ће $\frac{c}{2\,a}$ пута ударити о исти зид за једну секунду. Па како на ту страну пде $\frac{n}{3}$ молекила, то ће свега удара за једну секунду на тај дувар бити $\frac{n}{3}\frac{c}{2\,a}$. Ако са m означимо масу свакога молекила, онда је количина кретања једнога молекила при сваком судару $2\,cm$, а свију оних који о дувар ударе за једну секунду, т. ј. притисак на целу површину дувара биће:

$$p_s = 2\,mc\,\frac{n}{3}\,\frac{c}{2\,a} = \frac{1}{3}\,\frac{nmc^2}{a}$$

Притисак пак на јединицу површине, ако са S означимо површину дувара, биће:

$$p = \frac{p_s}{S} = \frac{1}{3}\,\frac{nmc^2}{Sa} = \frac{1}{3}\,\frac{nmc^2}{v} \quad \text{. . . . . (403}$$

За други неки гас исте запремине v биће притисак:

$$p_1 = \frac{1}{3}\,\frac{n_1 m_1 c_1}{v}$$

Однос пак њихов:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{nmc^2}{n_1 m_1 {c_1}^2}$$

Као што ћемо у науци о топлоти видети, температура гаса зависи од mc^2 или, још тачније, од $\frac{mc^2}{2}$. Пошто смо казали да су оба гаса на истој тепературн, то су и вредности mc^2 и $m_1 {c_1}^2$ једнаке, те према томе:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{n}{n_8}.$$

Ако су још оба гаса под истим притиском, онда мора да буде и $n = n_1$.

2. *Производ Pv представља вредност статичке енергије притиска или „запреминску енергију“* неке гасне масе, које је запремина v и притисак или напон P, и значи рад који је гас морао извршити, док је запремину v заузео. Ако се неки гас раз-

вија из неког чврстог тела, на пример угљена киселина из карбоната креча, у коме му је запремина била врло мала према запремини v коју ће после у слободном стању заузети, и ако се то развијање дешава под притиском атмосферским p, који гас мора да савлађује, док заузме запремину v, онда је pv рад који је угљена киселина извршила док је запремину v заузела; то је њена *запреминска енергија*. Запреминска је енергија некога гаса дакле само један део његове молекилске кинетичке енергије која износи $= \frac{1}{2} nmc^2$.

3. *Напон једне гасне смеше раван је збиру напона појединих гасова који би сваки од њих имао кад би сам у том простору био. (Далтонов закон).*

Кад би се два гаса, сваки за се, налазила у запремини v и имали напоне p и p_1, онда би вредела ова два односа:

$$pv = \frac{1}{3} nmc_2 \quad \text{и} \quad p_1 v = \frac{1}{3} n_1 m_1 c_1{}^2$$

Кад оба та гаса помешамо у истој запремини, а да при том никакав рад не изврше, онда се ни њихове молекилске енергије неће променити:

$$E = \Sigma \left(\frac{mc^2}{2} \right) = n \frac{mc^2}{2} + n_1 \frac{m_1 c_1{}^2}{2}$$

Према томе и напон те смеше гасне биће:

$$p_2 = \frac{2\,E}{3\,v} = \frac{nmc^2}{3\,v} + \frac{n_1 m_1 c_1{}^2}{3\,v} = p_1 + p_2$$

На основу тога, рецимо да имамо запремине v_1, v_2 $v_3 \ldots$. разних гасова помешаних у некој запремини v; сваки ће гас у тој запремини имати притисак:

$$\frac{p_1 v_1}{v}, \quad \frac{p_2 v_2}{v}, \quad \frac{p_3 v_3}{v}, \ldots,$$

а целокупни притисак биће по закону Далтонову:

$$P = \frac{p_1 v_1}{v} + \frac{p_2 v_2}{v} + \frac{p_3 v_3}{v} + \ldots$$

или:

$$Pv = \Sigma (pv) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (404$$

4. *Средње брзине молекила разних гасова имају се при истом напону, изврнуто квадратним коренима из гасних густина.*

Мало више нашли смо општи образац за притисак:

$$p = \frac{nmc^2}{3\,v}.$$

Разломак $\frac{n}{v}$ представља број молекила на јединицу запремине, који ћемо ми означити са N; према томе је:

$$p = \frac{1}{3} mNc^2$$

Међутим је $Nm = \gamma$, т. ј. густина гаса, па је онда

$$p = \frac{1}{3} c^2 \gamma; \quad c = \sqrt{\frac{3\,p}{\gamma}}$$

а за два разна гаса:

$$c_1 : c_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} : \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}} = \sqrt{\gamma_2} : \sqrt{\gamma_1} \quad \ldots \ldots \quad (405$$

5. Помоћу горње једначине за брзину можемо одредити брзину молекила извесног гаса кад му знамо густину и притисак. За ваздух на пример при нормалном атмосферском притиску и температури 0°, $p = 1033{\cdot}3 \times 981$ дина и $\gamma = 0{\cdot}001293$ гр. Према томе брзина ваздушних молекила биће:

$$c = \sqrt{\frac{3.1033{\cdot}3981}{0{\cdot}001293}} = 48500 \text{ см} = 485 \text{ мет.}$$

Ма за који други гас чија је густина према ваздуху d:

$$c_1 = 485 \sqrt{d}.$$

Овде наводимо неколико података о молекилима појединих гасова, који ваља да нам служе као приближна слика о вредности тих величина, о којима ће уосталом бити детаљнијих излагања у науци о топлоти:

	ваздух	водоник	кисеоник	азот	угљ. кис.
c у см.	48500,	184300,	46100,	49200,	39200
средња дужина пута у см	0·000008	0·0000149,	0.0000085,	0·0000079,	0·0000055,
број судара у секунди	6000.10^6	12360.10^6	5500.10^6,	6200.10^6,	7120.10^6,
густина према ваздуху	1	0·0693,	1·1056,	0·9714,	1·5290.

6. Виртуелна висина ваздушног притиска. — По Мариотову закону је однос између притиска и спец. тежине ваздуха сталан. Ако дакле означимо са p притисак и γ спец. тежину ваздуха у систему CGS имаћемо, за морску површину:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1033}{0{\cdot}00129} = 801000.$$

или кад за спец. тежину ваздуха и живе употребимо тачнију вредност биће:

$$\frac{p}{\gamma} = 799000.$$

Према томе притисак у грамовима и на један квадратни см. биће:

$$p = 799000\,\gamma.$$

Сматрајмо број 799000 изражен у сантиметрима као висину ваздушног стуба, онда ће притисак, који стуб врши на квадр. смет., бити раван $799000\,\gamma$ грамова дакле управо онолико колико и иначе износи ваздушни притисак p. Број 799000 значи у сантиметрима изражену висину ваздушног стуба, који својом тежином производи притисак p и који је по целој својој висини исте специфичке тежине као и ваздух под притиском p (тј. 0·00129). Та се висина означава као *виртуелна висина ваздушног притиска*.

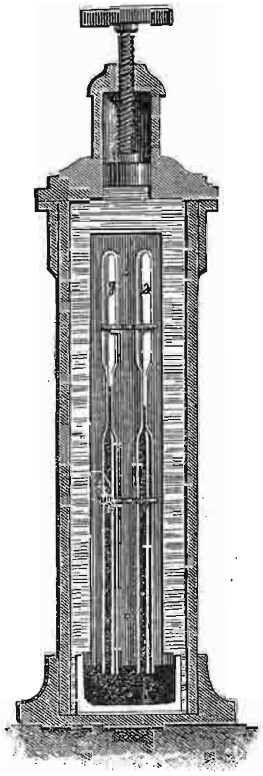
Ова се висина назива још и *привидна висина атмосфере* и она би заиста изнела свега 7·99 километара, кад би ваздух од површине земљине до врха атмосфере имао исту ону спец. тежину, коју има на површини (**822**).

854. Одступања од Мариотова закона. — После Мариота многи су се физичари занимали оверавањем Мариотова закона за разне гасове. И кроз дуги низ година, тај је закон вредео као потпуно тачан.

Године 1826. Ерстед и Свендзен (Oersted, Swendsen), приметише да се сумпораста киселина јаче компримује од ваздуха, а у истим приликама, јер док је густина ваздуха била 3·189, сумпораста киселина имала је **3·319**.

Отприлике у исто доба Депре (Desprets) је проучавао понашање разних гасова на истом притиску служећи се при томе апаратом како га показује сл. 458. и који нас опомиње на пијезометар за проучавање стишљивости течности. Две епрувете *a* и *g* напуне се једна једним а друга другим гасом, изврну и замоче у живу и метну у суд напуњен водом, на коју се с поља (завртњем и

клипом) може произвести јак притисак. Ако је у једној цеви ваздух а у другој какав други гас, видеће се одмах, како се тај гас понаша под истим приликама према ваздуху. На тај начин Депре је нашао, да се на слабијим притисцима оба гаса сабијају једнако али кад су притисци јаки, онда се сумпораста киселина, цијаноген и амонијак компримују јаче, а водоник под врло јаким притисцима, нешто слабије од ваздуха.



Сл. 458.

Ови су експерименти јасно показали: ако се ваздух понаша тачно према Мариотову закону, да они други од њега одступају. Међутим, природно је било помислити да и сам ваздух на свима притисцима не одговара потпуно Мариотову закону, а то се уосталом доцнијим експериментима и констатовало.

855. — Најпотпунији радови на том питању су без сумње они, које је извршио француски физичар Рењо (Regnault). Не упуштајући се у детаље самих експеримената, напоменућемо само принцип који је употребио Рењо, да би само до тачнијих података дошао. Кад се извесна запремина гасна све јаче компримује, онда се на јаким притисцима запремина врло мало мења, те су услед тога и опажања врло несигурна. Зато је Рењо, да би посматрање било на свима притисцима исте тачности поступио, на овај начин. Напуни се најпре цев сувим ваздухом под притиском једне атмосфере, па се онда сабије толико да му запремина спадне на половину. На другој цеви, која служи за мерење притиска, прочита се онда притисак који тој, на пола сведеној запремини, одговара. Сад се прва цев напуни опет сувим ваздухом, али под притиском од две атмосфере (ваздух се сабија у цеви шмрковима), па се опет сада сабије у цеви до на половину запремине. Притисак, који сада одговара тој запремини. одреди се. Затим се цев напуни ваздухом под притиском оним, који је мало час владао у цеви кад је запремина ваздуха у њој била сведена на половину т. ј. отприлике на четири атмосфере па се опет ваздух у њој сабије на половину запремине итд. Уопште узев, у сваком се новом експерименту почињало оним притиском којим се у претходном свршавало и увек запремина сводила на половину.

По себи се разуме, да је при сваком експерименту вођен рачун о температури металних делова, о свођењу живиног стуба на 0°, о компресији живе и т. д. Ево једне серије експеримената с ваздухом, да се види како се понашају притисци и одговарајуће запремине. Цев је најпре била напуњена на обичном, атмосферском притиску и онда запремина ваздуха сведена притиском на половину. Цифре у првом ступцу показују те запремине v_0 и v_1 у почетку експеримента и по свршеном сабијању; у ступцу 2. налазе се одговарајући притисци исказани висинама живиног стуба у милиметрима; у ступцу 3, су температуре; у ступцу 4 однос $\frac{v_0}{v_1}$; у 5, однос $\frac{P_1}{P_0}$ а у ступцу 6 однос $\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$.

Запремине v_0 и v_1	Притисци P_0 и P_1	Температ. C^0	$\frac{v_0}{v_1}$	$\frac{P_1}{P_0}$	$\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$
1939·69 969·26	738·72 1476·25	4·44	2·001215	1·998389	1·001414
1939·69 969·86	738·99 1475·82	4·40	1·999990	1·997076	1·001448
1940·21 970·10	739·07 1476·34	4·40	2·000010	1·997565	1·001224
1939.47 969·39	739·19 1476·80	4·43	2·000701	1·997863	1·001421

Кад би се ваздух потпуно владао по Мариотову закону, онда би хоризонтални редови у ступцу 4 и 5 морали бити потпуно једнаки, јер по Мариотову закону мора да буде:

$$P_0v_0 = P_1v_1$$

или:

$$\frac{P_0v_0}{P_1v_1} = 1.$$

Међутим се види, док је $\frac{v_0}{v_1}$ готово сасвим равно 2, однос $\frac{P_1}{P_0}$ увек је мањи од 2, те према томе је и:

$$\frac{P_0v_0}{P_1v_1} > 1.$$

То значи да ваздух и на обичном притиску одступа од Мариотова закона, а то је Рењо констатовао и за остале гасове.

У следећој су таблици изложени резултати Рењолових посматрања за ваздух, азот, угљену киселину и водоник. За сваки гас имамо по два ступца, у првоме су притисци P_0 у почетку експеримента а у другоме однос $\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$ где је v_1 готово увек било тачно $\frac{1}{2}v_0$ а P_1 притисак који је запремини v_1 одговарао.

ваздух		азот		угљена киселина		водоник	
P_0	$\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$	P_0	$\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$	P_0	$\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$	P_0	$\frac{v_0P_0}{v_1P_4}$
738·72	1·001414	753·62	1·000788	764·03	1·007725	--	—
2112·53	1·002765	1159·26	1·000996	1414·77	1·012313	—	—
4140·82	1·003090	2159·60	1·001381	2164·81	1·018973	2211·18	0·998584
4219·22	1·003495	3030·22	1·001955	3186·13	1·028494	3989·47	0·996961
6770·15	1·004286	4953·92	1·002860	4879·77	1·045625	5845·18	0·996121
6336·41	1·006366	5957·96	1·003271	6820·22	1·066137	7074·96	0·994697
		7297·06	1·003924	8393·68	1·084278	—	—
		8628·54	1·004768	9620·06	1·099830	9175·25	0·993126
		9775·38	1·004881			10361·78	0·992327
		10981·42	1·006454				

Као што се из таблице види, за ваздух, азот и водоник однос $\frac{v_0P_0}{v_1P_1}$ врло се мало разликује од јединице, те стога се може узети да се ти гасови и ако не савршено тачно а оно врло приближно владају по Мариотову закону. Стога ћемо за те и сличне друге гасове сматрати да се они владају по томе закону нарочито за ниже притиске. Што се тиче угљене киселине ту су одступања много јача,

856. Посматрајући пажљивије горњу таблицу, видимо да је код прва три гаса, код ваздуха, азота и угљ. киселине одступање од Мариотова закона у истом смислу, и то тако да је код свију $\frac{v_0P_0}{v_1P_1} > 1$, т. ј. да код њих запремина опада јаче но што притисак расте, или да је посматрана запремина v_1 мања него што би требала да буде по Мариотову закону. Новији експерименти с већим притисцима показали су да је то одступање у толико веће у колико се гас јаче компримује.

Ставимо горњи однос, који се разликује од јединице да буде:

$$\frac{v_0P_0}{v_1P_1} = \alpha$$

и узмимо да је v_1 тачно $= \frac{1}{2}v_0$; онда је:

$$\frac{v_0P_0}{v_1P_1} = \frac{2P_0}{P_1} = \alpha$$

или:

$$\frac{2\,P_0}{\alpha} = P_1$$

За потпуно тачан Мариотов закон морало би бити:

$$\frac{v_0 P_0}{v_1 P_1} = \frac{2\,P_0}{P^1_{\,1}} = 1.$$

или:

$$P^1_{\,1} = 2\,P_0.$$

Разлика између теорије и посматрања износи:

$$P^1_{\,1} - P_1 = 2\,P_0 - 2\,\frac{P_0}{\alpha} = 2\,P_0\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Та се разлика између теорије и посматрања може израчунати, кад се из таблице унесу вредности за P_0 и α; на тај начин добива се разлика у висини живиних стубова, како су они посматрани и какви би они по Мариотову закону морали бити. За ваздух се добива:

P_0	$P^1_{\,1} - P_1$
738·72	2·08 mm
2112·53	11·65
4140·82	25·50
4219·95	29·36
6770·15	57·68
9336·41	118·01

Овако велике и правилне разлике показују јасно да оне не долазе од каквих погрешака у раду, већ показују несумњиво одступање гасова од Мариотова закона, које је, као што смо споменули, под обичним притисцима толико, да се без велике погрешке може занемарити.

У ову групу гасова, који се јаче компримују, но што захтева Мариотов закон, долазе сем горња три гаса још и кисеоник, сумпораста киселина, цијан итд.

Напротив, водоник се понаша сасвим супротно; за њега је однос $\frac{v_0 P_0}{v_1 P_1}$ увек мањи од јединице што значи да с растењем притиска стишљивост водоника опада.

857. Из свега овога следује да је Мариотов закон тачан само приближно, и за ниже притиске, а да сви гасови више или мање од њега одступају на вишим притисцима. Реньо је из својих експеремената поставио место Мариотова други, емпирички образац, који даје тачније односе између притиска и запремине, и то како за ниже тако и за више притиске. Реньолов образац изгледа:

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 \mp A\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + B\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2 \quad \ldots \quad (406$$

где знак minus вреди за оне гасове који се јаче сабијају (ваздух и др.), а plus за водоник.

Ево како тај образац изгледа за поједине гасове:

ваздух
$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - 0{\cdot}0010538\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + 0{\cdot}0000193809\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2$$

азот
$$= 1 - 0{\cdot}00069014\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + 0{\cdot}000070405\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2$$

угљена киселина
$$= 1 - 0{\cdot}00853180\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + 0{\cdot}0000072856\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2$$

водоник
$$= 1 + 0{\cdot}00054723\left(\frac{v_0}{v} - 1\right) + 0{\cdot}0000084155\left(\frac{v_0}{v} - 1\right)^2.$$

Помоћу ових образаца може се саставити таблица, која показује притиске потребне да се један гас, који под притиском живиног стуба од 1 мет. има запремину $= 1$, сабије на запремине $\frac{v}{2}$, $\frac{v}{4}$, $\frac{v}{8}$ итд. (в. таб. стр. 610).

858. Као што смо раније напоменули, одступање гасова од Мариотова закона у толико је јаче у колико су притисци већи. Стишљивост гасова за високе при-

запремина	ваздух		азот		угљ. киселина		водоник	
	P	PV	P	PV	P	PV	P	PV
1	метар. 1·0000	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000	1·0000
$\frac{1}{2}$	1.9978	0·9989	1·9986	0·9993	1·9828	0·9914	2·0011	1·0006
$\frac{1}{4}$	3·9874	0·9969	3·9920	0·9980	3·8974	0·9743	4·0069	1·0017
$\frac{1}{8}$	7·9457	0·9932	7·9641	0·9955	7·5194	0·9399	8·0339	1·0042
$\frac{1}{12}$	11·8822	0·9902	11·9191	0·9933	10·8632	0·9053	12·0845	1·0070
$\frac{1}{16}$	15·8045	0·9878	15·8597	0·9912	13·9261	0·8704	16·1616	1·0101
$\frac{1}{20}$	19·7199	0·9860	19·7886	0·9894	16·7054	0·8353	20·2687	1·0134

тиске испитивали су Натерер (Natterer), Кајте, (Cailletet), а нарочито у последње време Амага (Amagat). Ми ћемо навести резултате које је постигао Амага за азот до 3000 атмосфера притиска:

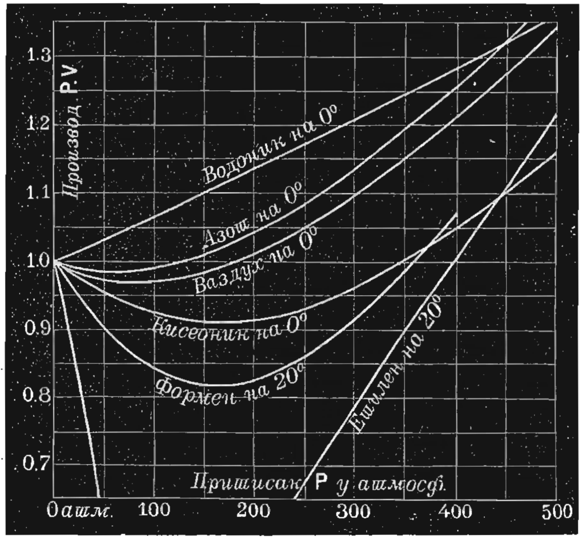
Притис. P у атмосфери	P. V.	P у атм.	P. V.	P у атм.	P. V.	P у атм.	P. V.
1·00	1·0000	65·80	0·9897	168·80	1·0293	500	1·3768
26·32	0·9930	72·37	0·9902	208·63	1·0557	1000	2·0160
32·90	0·9919	78·95	0·9908	251·13	1·0875	1500	2·6258
39·47	0·9908	85·53	0·9913	290·93	1·1254	2000	3·2093
46·05	0·9899	90·97	0·9929	332·04	1·1668	2500	3·7708
52·63	0·9896	109·17	0·9975	373·30	1·2110	3000	4·3138
59·21	0·9895	126·90	1·0248	430·77	1·2740	—	—

Као што се из ове таблице види за азот (а то показују и сви остали гасови), производ PV, који одмах од почетка почне опадати, не опада непрестано, већ отприлике код 60 атмосфера постигне најмању вредност, па онда почне расти и то растење траје непрестано и до 3000 атмосфера. То значи да се азот на притисцима већим од 60 атм. понаша онако као што се водоник понаша још одмах у почетку компресије. То вреди и за друге гасове, као на пример за кисеоник, ваздух, етилен, угљен моноксид, и барски гас, с том разликом што код свију њих тај minimum наступа на разним притисцима. Тако се нашло да тај minimum наступа:

код	азота	на	притиску	од	60 атм.	(отприлике)
„	кисеоника	»	»	»	130	»
»	ваздуха	»	»	»	85	»
»	угљ. моноксида	»	»	»	60	»
„	барског гаса	»	»	»	160	»
»	етилена	»	»	»	85	»

Што се водоника тиче, Вроблевски налази да и тај гас има свој минимум, само се он налази далеко испод 0° на врло ниским температурама.

Кад се промене производа PV на разним притисцима представе графички, добива се сл. 459.



Сл. 459.

859. Многи су се физичари бавили испитивањем вредности Мариотова закона за притиске мање од једне атмосфере, али се добивени резултати не слажу. Мендељејев и Кирпичов налазе да код ваздуха опадањем притиска P и производ PV опада. Ако се за притисак $P = 646$ мм. стави $PV = 1$, онда је по њима за $P = 14·5$ мм. $PV = 0·96551$. Амага напротив налази да се за ниже притиске од једне атмосфере ваздух понаша по Марио-

тову закону и да су одступања тако слаба, да се не могу одвојити од погрешака које ту врсту експеримената прате.

Из целокупног посматрања Мариотова закона излази, да је то један идеалан закон по коме се ни један гас не влада, али од кога на ниским притисцима многи гасови тако мало одступају, да га можемо за сва обична мерења узети да је тачан. То нарочито вреди за гасове који се налазе на обичним температурама и ниским притисцима далеко од кондензационе тачке, као што су на пример: ваздух, азот, кисеоник, водоник и др.

О другим важним последицама Мариотова закона, о његовим корекцијама (Ван дер Ваалсов закон) биће говора у науци о топлоти.

Манометар.

860. Као што је барометар служио да се одреди притисак целе атмосфере, тако се исто манометром одређује и мери притисак ограничених и затворених маса ваздушних, гасних и парних. Манометара има разних врста, али се у главноме могу поделити на две групе: манометри с течностима (обично живом) и манометри метални. Они се први деле још на отворене и затворене манометре.

а. Отворени манометри.

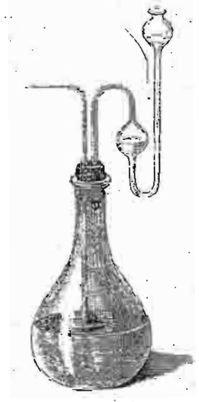
861. Најпростије облике отворених манометара представљају слике 460.—463. То су, на један или други начин, на лакат савијене цеви напуњене до извесне висине обично живом (или водом) и служе да покажу или мале разлике притисака или да констатују да је неки гас у затвореном суду под притиском атмосферским. Кад је течност у оба крака савијене цеви на истој висини, онда ће гас у затвореном суду бити под атмосферским притиском. Издигне ли се течност у једном краку, као што то показује манометар на флаши, онда значи, да је у флаши притисак већи од атмосферског и то за разлику нивоа течности у једном и другом краку.

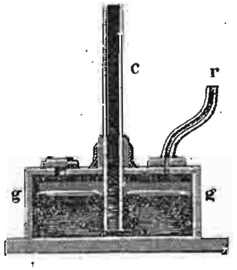
За високе притиске обично се не узима на лакат савијена цев, већ се у јак металан суд gg (сл. 472.)

утврди стаклена или метална цев c, тако да допре скоро до дна суда; у суд се наспе жива. Цев r, која полази са поклопца суда, споји се с оним судом у коме се налази гас, чији притисак у одређујемо. Гас ће притискивати на живу у суду gg, која ће се пењати у отвореној цеви c и својом висином показати под коликим се притиском гас налази.

Сл. 460.

Сл. 461.


Сл. 462.



Сл. 463.

Рењо је за своје експерименте, које смо напред видели, имао такав манометар, код кога је отворена цев била 23 метра дугачка и састављена је била из појединих комада стаклених цеви, спојених међу собом челичним рукавцима. Амага и Кајте имали су такве манометре са челичним цевима од 325 метара дужине, тако да су могли мерити притиске до 430 атмосфера. Кајте је такав један манометар направио 1891 год. на Ајфеловој кули у Паризу са челичном цеви од 300 метара дужине и 4·5 мм унутрашњег пречника. Да би се могло видети, до које се висине попела жива у челичној цеви намештене су на њој на свака 3 метра славине, које се споје једном стакленом цеви мало дужином од 3 метра, те се у њој види ниво живе.

Ево како се у отвореном манометру одређује притисак или напон затвореног гаса. На ниво живе у суду A (сл. 464) дејствује притисак P, који ми хоћемо да одредимо, и који је истерао живу у отвореном краку до B, т. ј. за висину h. На једном елементу површине s на нивоу A притискује дакле Ps; на толико истом елементу на нивоу B притискује атмосферски притисак p снагом ps. На толиком елементу, али на нивоу AC и то код c притискује свега $ps + sh\gamma$ где је h висинска разлика живе а γ специфична тежина њена. Пошто су елементи на нивоу A а C на истој висини, то значи трпе исти притисак, па зато ће бити

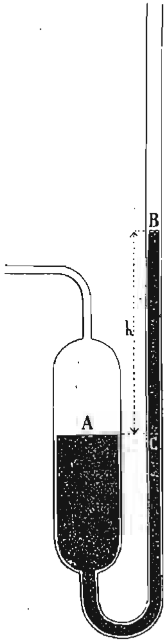
$$Ps = ps + sh\gamma \text{ или } P = p + h\gamma.$$

Да бисмо знали p ваља прочитати барометар; ако је висина барометра H, онда је:

$$p = H\gamma$$

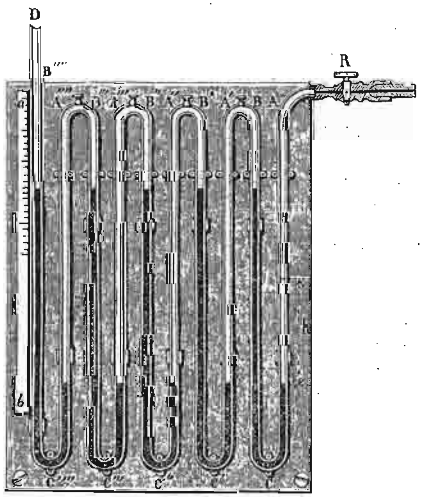
те онда:

$$P = (H + h)\gamma.$$



Сл. 464.

862. Ришаров манометар. — Да би се за извесне мало веће притиске избегла сувише дугачка и вертикална манометарска отворена цев, направио је Ришар (Richard) манометар с више кракова. Један низ на лакат савијених цеви истога пречника ABC, $A'B'C'$ итд. (сл. 465.) спојен је тако међу собом, да представља само једну више пута савијену цев, која се једним крајем R доведе у везу с гасним резервоаром у коме је гас кога притисак тражимо, а други, D је отворен. Свака се превијена цев напуни до пола живом, а горња се половина напуни водом. По себи се разуме, кад је притисак и на једном и на другом крају исти жива ће у свима деловима бити на истој висини. Рецимо да код R дејствује притисак p, онда ће жива у краку AC за извесну висину h спасти, а за толико се исто у краку BC попети; разлика нивоа у цеви ABC биће $2\,h$. У исти мах ће водени стуб висине h прећи из BC у $A'C'$, то значи да ће жива и у том краку за h пасти, а то може да буде, ако се за исту висину h попне у идућем краку $B'C'$, тако да и овде нивоска разлика у цеви $A'C'B'$ буде $2\,h$ итд. до краја. Потиснута вода дејствује супротно живиним стубовима и њено се дејство има одузети. Ако је γ густина воде према живи, онда се притисак за $2\,h$ потиснуте живе смањује са $2\,h\gamma$, тако да ће притисак који одговара живином стубу од $2\,h$ бита $2\,h(1 - \gamma)$. На слици имамо пет издигнутих живиних стубова, а у четири цеви потиснутих водених стубова, те ће и притисак који одговара гасу у резервоару бити:



Сл. 465.

$$p = 5 \cdot 2\,h - 4 \cdot 2\,h\,\gamma.$$

Ако, дакле, имамо n манометарских цеви, притисак ће бити одређен обрасцем:

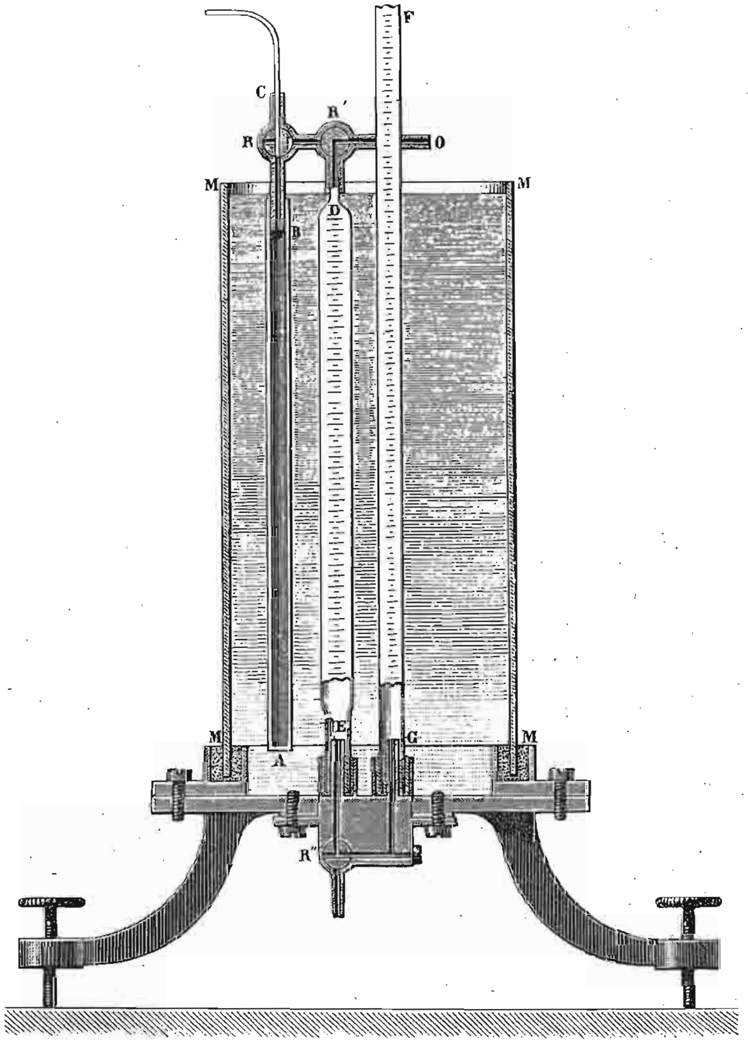
$$p = 2\,h + (n - 1)\,2\,h\,(1 - \gamma).$$

Уопште узев, овај је манометар мање тачан од онога с вертикалном цеви.

863. Манометар Реньолов. — Овим манометром (сл. 466) могу се одређивати притисци до 20 и 30 атмосфера, и ако је отворена цев дугачка 1 до 2 метра. На њему имамо узану (од 5 мм. пречн.) металну цев AB јаких дуварова, која се трокраком славином R може спојити час с наставком C спојеним с резервоаром у коме је гас непознатога притиска, а час кроз такође трокраку славину R', са стакленом широком цеви DE. Ова цев DE на доњем крају може се спојити трокраком славином с другом једном стакленом цеви FG, која може бити дугачка 1 до 2 метра. Обе стаклене цеви DE и FG, градуисане су, а све се три налазе у стакленом цилиндру MM, који се при раду напуни водом, да би све цеви биле на истој температури.

Најпре се кроз отворену цев FG сипа жива толико, да се кроз отворену славину R'' напуни цев DE, те да кроз отвор O почне жива цурити. Сад се отвори славина R тако (као на слици), да се цев AB споји с резервоаром; другим речима, та се цев напуни гасом непознатога притиска x, који се у резервоару налази. За тим се веза с резервоаром прекине и славина R и R' тако окрену, да се цеви AB и ED споје, а у исти мах отвори се доња славина R'' тако да се споје цеви DE и FG и да жива истиче из DE кроз доњи отвор. То значи гасу, који је под притиском x заузимао само запремину v металне цеви AB, повећана је запремина још за запремину W цеви DE, због чега му је по Мариотову закону пао притисак у истој мери, у колико му је запремина порасла. Жива ће се пустити да толико истече, док не буде згодан однос између њене висине у цеви DE и FG, т. ј. док жива у отвореној цеви

FG не буде за *h* виша но у цеви *DE*. Ако је при том владало барометарско стање *H*, онда је по Мариотову закону:



Сл. 466.

$$Vx = (V + W)(H + h)$$

одакле је:

$$x = \frac{V + W}{V}(H + h).$$

По себи се разуме, да цев *DE* мора претходно бити градуисана и калибрисана, т. ј. мора се одредити колика је запремина између сваке две поделе на њој. Тога ради, напуни се она живом до врха, па се славина *R* и *R'* тако окрену, да та цев буде спојена с ваздухом кроз наставак *C*. Кроз славину се *R''* пусти да жива истиче од поделе до поделе и мерењем живе одређује се запремина између сваке две поделе.

Напослетку ваља знати и запремину *V* цеви *AB*. Тога ради напуни се та цев ваздухом на обичном барометарском притиску *H*, па се даље ради као и при одредби непознатога притиска *x*, т. ј. запремина *v* повећа се отварањем горњих славина за *W'* и пусти да жива кроз славину *R''* истече до неке мере као и мало час. Сада ће жива стајати за *h'*, на пр. више у цеви *DE* него у *FG*. По Мариотову закону имаћемо опет:

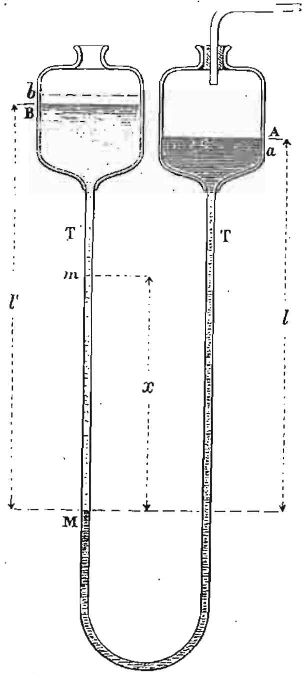
$$HV = (V + W')\ (H - h')$$

одакле је:

$$V = W' \frac{H - h'}{h'}.$$

Код манометра који је Рењо конструисао цеви *AB* и *DE* биле су дугачке по 1 мет., а пречник прве био је 5 мм а друге 20 мм, тако да је пресек ове друге цеви био 16 пута већи. Кад се на пр. цев *AB* напуни гасом под притиском од 32 атмосфере, може се $V + W$ тако удесити, да буде равно 16 *V*, и онда ће висина живиног стуба *h* у цеви *FG* бити равна барометарском стању.

864. Диференцијални манометар. — Тако се назива манометар који је конструисао *Крец* (Kretz) и који не служи толико да одреди неки непознати притисак, колико да покаже и одреди мале промене притиска у некоме гасу. Манометар је направљен од два широка суда *A* и *B* (сл. 467), једнаких пресека *S*, спојена међу собом савијеном узаном цеви *TT'* пресека *s*. Суд *A* и један део савијене цеви *TT'* до *M* напуњен је разблаженим алкохолом, спец. тежине γ, а суд *B* терпентином до *M*. Терпентин као специфички лакши $\gamma' < \gamma$, пливаће на разблаженом алкохолу, и гранична површина *M* обеју течности биће сасвим оштра. Кад је притисак у оба суда један исти H, онда ће, као што знамо, висине течних стубова бити изврнуто сразмерне спец. тежинама, т. ј. биће:



Сл. 467.

$$l\gamma = l'\gamma'.$$

Кад се суд A споји с неким резервоаром у коме је гас под притиском h већим од H, течност ће у суду A спасти за $Aa = y$, а за толико ће се исто $Bb = y$ попети у B; у спајној цеви попеће се M до m, т. ј. за x. Однос између x и y биће дат овом једначином:

$$Sy = sx.$$

За равнотежу мора да буде, кад H и h изразимо висинама водених стубова:

$$H + h + (l - x - y)\gamma = H + \\ + (l' - x + y)\gamma'.$$

Водећи рачуна о горњим двема једначинама за пресеке и спец. тежине имаћемо најзад:

$$x = \frac{h}{\gamma - \gamma' + \frac{s}{S}(\gamma + \gamma')} = Ch$$

дакле x је сразмерно притиску h.

Ако се $\frac{s}{S}$ може занемарити, онда је образац још простији:

$$x = \frac{h}{\gamma - \gamma'}$$

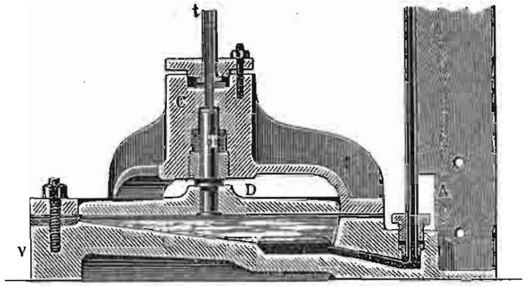
Обично је пречник судова A и B 15 см, а спајне

цеви 7 мм; онда је $\frac{s}{S} = 0{\cdot}00217, \gamma = 0{\cdot}899, \gamma' = 0{\cdot}869$, дакле $\gamma + \gamma' = 1{\cdot}768$. Према томе је:

$$x = \frac{h}{0{\cdot}030 + 0{\cdot}004} = 29\,h.$$

Осетљивост је дакле 29 пута већа но код воденог манометра.

865. Скраћени манометар. — За врло велике притиске конструисао је *Дегоф* (Desgoffe) врло тачан манометар, који се оснива на принципу хидрауличне пресе; овај је манометар у неку руку изврнута хидраулична преса. Слика 468. показује тај манометар у пресеку.



Сл. 468.

Непознати притисак дејствује кроз цев t на челични цилиндар T, који је насађен на велику округлу металну плочу D. Испод плоче је течност, и то на дну суда и у вертикалној цеви жива, а изнад живе, вода. Између плоче D и воде разапета је једна мембрана од каучука, тако да се плоча D не кваси.

Означимо са P непознати велики притисак који дејствује на цилиндар T, пресека s, снагом Ps; тај се притисак кроз широку плочу D, пресека S преноси на течност и на сваку јединицу површине дејствује притисак p, тако да мора да буде:

$$Ps = Sp$$

одакле је:

$$P = \frac{S}{s}p.$$

Манометарска цев мери овај притисак P непосредно, и ако се зна однос $\frac{S}{s}$, има се у исти мах и непознати притисак P измерен скраћеним манометром, јер у колико је однос $\frac{S}{s}$ већи, у толико може бити вертикална манометарска цев краћа. Ако је на пр. пречник плоче D, 10 пута већи од пречника цилиндра T, онда је $P = 0{\cdot}01\,p$. а то значи да ће живин стуб обичне барометарске висине мерити притисак од 100 атмосфера. Та размера за јаке притиске може бити још већа.

866. Барометарски манометар. — Служи за мерење притисака мањих од једне атмосфере (сл. 469.). Реципијенат у коме се налази разређен ваздух споји се с горњим делом цеви и према разређењу, жива ће се више или мање попети у цеви. Нека буде непознати притисак P, а атмосферски p; елеменат површине s на нивоу A притиснут је снагом Ps, а толики исти елеменат s на нивоу c трпи притисак $Ps + sh\gamma$, где је γ спец. тежина живе. На нивоу B и на елементу s притискује атмосфера снагом ps. За равнотежу мора да буде:

$$ps = Ps + sh\gamma$$

одакле је:

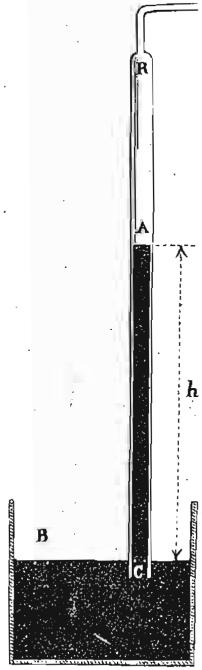
$$P = p - h\gamma.$$

Да бисмо знали p ваља прочитати барометар; ако је његово стање H, онда је

$$p = H\gamma$$

те према томе

$$P = (H - h)\gamma.$$



Сл. 469.

в. Затворени манометар.

867. Ова се врста манометара назива још и манометри са сабијеним ваздухом, јер је у њему главна ствар једна затворена, обично стаклена цев, у којој се по Мариотову закону сабија ваздух и по смањивању запремине тога затвореног ваздуха одређује се притисак. Такав манометар показује у пресеку сл. 470. Гас чији притисак тражимо доћи ће кроз a, да притискује на живу у ширем суду и да натера живу да се у цеви попне до извесне висине. Кад с поља влада атмосферски притисак, онда је жива и у суду и у цеви на истој висини bb. Напротив, ако се под непознатим притиском, запремина затвореног ваздуха у цеви сведе на $\frac{1}{2}$, онда значи да је притисак од две атмосфере; на $\frac{1}{4}$ сведена запремина показује притисак од 4 атмосфере итд

Означимо са h дужину ваздушног стуба у цеви од нивоа bb до врха: $H = 760$ атмосферски притисак а $nH = p$ непознати притисак који ће натерати да се жива попне на висину x изнад нивоа bb. Нека јэ даље r полупречник цеви а R суда. Ако суд није сувише широк, онда ће се жива спустити у суду за y, док се у цеви попне за x. Кад је манометар под атмосферским притиском, онда је запремина ваздуха у цеви:

$$v = r^2\pi h$$

а кад притисак порасте за $n \cdot 760$ и жива се попне за висину x у цев, онда ће запремина сабијеног ваздуха у цеви бити:

$$r' = r^2\pi(h - x).$$

Док се жива попела у цеви за запремину $r^2\pi x$, дотле иста запремина одговара спуштеној живи у суду $R^2\pi y$ тако да је:

$$r^2\pi x = R^2\pi y.$$

Напон или притисак под којим се налази ваздух у цеви раван је спољашњем притиску $n \cdot 760$ смањеном за издигнут живин стуб $x + y$, тако да је тај притисак:

$$p' = n \cdot 760 - (x + y)$$
$$= n \cdot 760 - x\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Сл. 470.

Па како су запремине v и v' изврнуто сразмерне притисцима биће:

$$r^2\pi h : r^2\pi(h - x) = n \cdot 760 - x\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) : 760$$

Ставимо:

$$\frac{1}{760}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)=k$$

имаћемо:

$$h : h - x = n - kx : 1.$$

или:

$$\frac{h}{h-x}=n-kx.$$

одакле је:

$$x=\frac{1}{2\,k}\left\{n+kh\pm\sqrt{(n+kh)^2-4\,kh\,(n-1)}\right\}$$

За $n = 1$, мора бити $x = o$, т. ј.

$$x=\frac{1}{2\,k}\left\{1+kh\pm\sqrt{(1+kh)^2}\right\}$$

Да буде $x = о$, мора пред кореном да остане знак негативан, и за то горњи образац вреди с негативним знаком пред кореном.

Ако је цев врло узана, а суд врло широк, онда је $R = \infty$ према r, $\frac{r^2}{R^2} = о$, $k=\frac{1}{760}$ те према томе:

$$x=\frac{760}{2}\left\{n+\frac{h}{760}-\sqrt{\left(n+\frac{h}{760}\right)^2-4\frac{h}{760}(n-1)}\right\}\cdot \quad (407$$

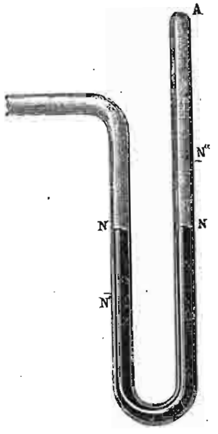
Више пута манометарска је цев савијена на лакат (сл. 471.). Колико се у једном краку жива пење, толико се исто у другом спушта. У горњем обрасцу је сада $r = R$, услед чега је и:

$$k=\frac{2}{760}$$

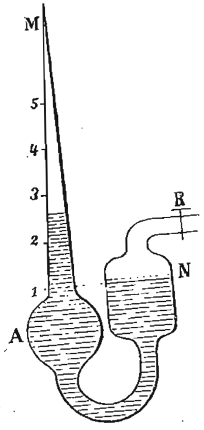
па према томе и:

$$x=\frac{760}{4}\left\{n+\frac{2\,h}{760}-\sqrt{\left(n+\frac{2\,h}{760}\right)^2-8\,\frac{h}{760}(n-1)}\right\}$$

Ова врста манометара има ту незгоду, што су одређивања високих притисака врло несигурна, јер запремине слабо опадају, а и ваздух јако сабијен све јаче одступа од Мариотова закона. Да би се прва незгода у неколико отклонила, праве се манометри с купастом цеви (сл. 472.). Онда се може до извесних граница постићи, да линијско смањивање запремине буде сразмерно притиску.



Сл. 471.

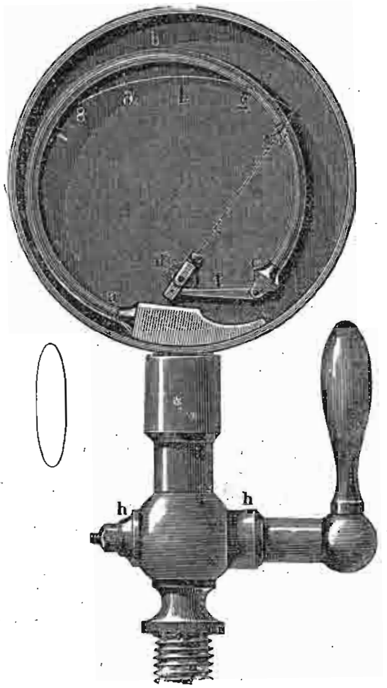


Сл. 472.

Да се код ових инструмената не би притисак сваком приликом израчунавао, они се обично градуишу упоређењем с каквим манометром са отвореном цеви.

с. Метални манометар.

868. Метални манометар (сл. 473.) оснива се на истом принципу као и метални барометар. Згодан је за врло високе притиске и за пренос и највише је употребљен на локомотивама и таквим машинама где се живин манометар због потреса или других узрока не би могао употребити. Има ту



Сл. 473.

махну, што је као и метални барометар непоуздан и мора се чешће упоређивати с каквим отвореним манометром.

Стереометар. Волуменометар.

869. Врло је важну примену нашао Мариотов закон код тако званог стереометра и волуменометра, који служи за одређивање запремина појединих тела, нарочито оних, којима се она другим путем не може одредити. Први такав апарат конструисао је француски физичар *Сеј* (Say) (сл. 474.). Цилиндричан стаклени суд *A* продужује се у неколико десиметара дугачку цев; горњи обод суда потпуно је раван и може се стакленом исто тако равном плочом тако затворити, да ваздух не може проћи. Стаклена је цев градуисана.

Сл. 474.

Док је суд *A* отворен, замочи се цевасти његов део у живу до нулте тачке поделе *o*. Кад се стакленим поклопцем суд затвори, онда је у суду затворена извесна запремина ваздуха *V* под барометарским притиском *H*. Кад се сада суд, овако затворен донекле извуче из живе, остаће живин стуб у цеви изнад спољашњег нивоа живе за висину *h*, јер ће се сада запремина ваздуха повећати напр. за *v*, услед чега ће притисак у затвореном суду опасти. На основу Мариотова закона имамо:

$$VH = (V + v)(H - h).$$

Одавде се може одредити запремина затвореног суда *V* до нулте тачке:

$$V = v\frac{H - h}{h}$$

Сад се у суд *A* метне оно тело коме запремину тражимо, (какав прашак, брашно, вуна, свила и т. д.) па се понови експеримент истим редом. Сад ће под барометарским притиском бити $V - x$ запремина, ако са x означимо непознату запремину тела, а кад поклопимо суд и извучемо га из живе као мало час, жива ће се попети за неку висину h', ако је првобитна запремина $V - x$ повећана за v. Сада ће по Мариотову закону бити:

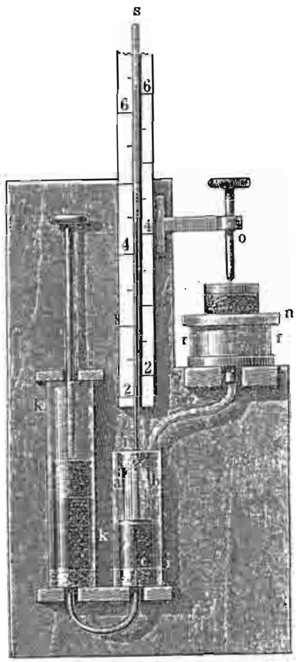
$$(V - x)H = (V - x + v)(H - h').$$

Одавде се x може одредити, јер је V познато из горње једначине:

$$x = V - v\frac{H - h'}{h'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (408$$

870. **Волуменометар Копов.** — Тај је апарат представљен на слици 475. Цилиндричан суд *rr* са својим поклопцем *n* има исту улогу као и суд *A* у горњем апарату. Тај је суд спојен једном цеви са цилиндром *ii*, који је и горе и доле добро затворен; кроз горњи затварач пролази једна цев *s* на оба краја отворена с подељеном скалом, а кроз доњи друга савијена цев, која тај цилиндар спаја са цилинром *kk*, који је затворен једним покретним клипом. У оба се цилиндра до извесне мере наспе жива.

Кад се повуче клип на више, жива ће у цилиндру *i*, спасти тако да дође испод доњег отвора цеви *s*; сад ће и у цилиндру *i* и у суду *r*, владати ваздушни притисак *H*. Клип се потискује на ниже, док жива у цилиндру *i* не достигне отвор цеви *s*; сад је запремина ваздуха у цилиндру и суду *r* нека извесна *V*. Клип се потискује још више; жива ће се сада пењати у цев *s*, и то ћемо радити све дотле, док жива у цилиндру *i* не дође до врха шиљка



Сл. 475.

од слонове кости *a*, који је ту намештен као и код Фортенова барометра. Малопређашња запремина *V* сад је смањена за *v* и жива се у цеви *s* испела до висине *h*. По Мариотову је закону сада:

$$VH = (V - v)(H + h).$$

Затим се у један мали судић од платине, који се налази у суду *r*, наспе *n* грама воде, затвори се поклопцем суд *r* и понови експеримент. Сад ћемо имати:

$$(V - n)H = (V - v - n)(H + h').$$

Из ових двеју једначина имамо *V* и *v*.

Кад оних *n* грама воде заменимо непознатом запремином *x* некога тела добивамо на исти начин:

$$(V - x)H = (V - v - x)(H + h')$$

одакле се *x* може израчунати.

Коп је својим апаратом одредио ове специфичке тежине:

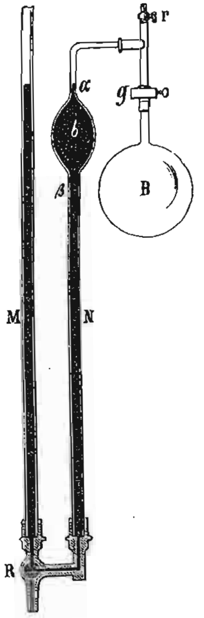
пепео од буковог дрвета	2·85	осушене стру- готине од	липовине	1·13
пшенично брашно	1·49		чамовине	1·16
штирак	1·56		ораховине	1.17
памук	1·27		јабуковине	1·20
вуна (обрађена)	1·29		шљивовине	1·22
конопља	1·45		крушковине	1·23
свила (сирова)	1·56		растовине	1·27
			буковине	1·29

871. Волуменометар Рењолов. — По истом принципу конструисао је Рењо свој волуменометар (сл. 476.). На краћем краку манометра *MN*, који је код *b* проширен, насађена је металним рукавцима стаклена лопта *B*, која сада служи за примање тела којима се запремина хоће да одреди. Пошто се славина *r* отвори да лопта општи са спољашњим ваздухом, сипа се кроз дужи крак манометра *M* живе толико, да дође до белеге *α* изнад проширења *b*. Сад се славина *r* затвори и тиме је ограничена извесна запремина ваздуха у лопти *B* до белеге *α*, а под атмосферским притиском *H*. Затим се отвори трокрака славина *R* и пусти да жива толико истече, да сиђе у краћем краку до *β* испод *b*; жива ће у краку

M стајати за висину *h* ниже, и та се висина измери. Равнотежа је регулисана једначином:

$$VH = (V + v)(H - h),$$

ако са *v* означимо запремину проширења *b* између белега *α* и *β*. Одавде се одређује V пошто се *v* може непосредно живом одредити.



Сл. 476.

Кад сад у лопту *B* унесеме тело непознате запремине *x* и поновимо исти експеримент, имаћемо ову једначину из које одређујемо *x*:

$$(V - x)H = (V - x + v)(H - h')$$

872. Овим смо апаратом одредили непознату запремину *x* разређивањем ваздуха. Међутим, може се рад изврнути.Ваља само почети запремином $V + v - x$ код белеге *β* под атмосфер. притиском, па у цев *M* сипати живе толико, док се у краку *H* не попне до *α*; сада је запремина $(V - x)$ под притиском $H + h'$ јачим од атмосферског. За тај случај имамо:

$$(V + v - x)H = (V - x)(H + h')$$

одакле се опет може *x* одредити и служити као контрола горе нађеној вредности.

873. *Примери.* — 1. Једна цев једнаког пресека, дугачка $L = 98$ см. напуни се при баром. стању од $B = 76$ см, толико живом, да остане ваздушни стуб $l = 30$ см, па се затвори прстом и изврне у суд пун живе, тако да јој отвор дође одмах испод нивоа живе у суду. Пита се: колики ће бити (x) живин стуб у тако изврнутој цеви? — Из једначине: $l : (L - x) = (B - x) : B$ излази: $x^2 - 174x + 5160 = 0$. Одавде је $x = 38$ см. То значи да ваздух сада заузима $98 - 38 = 60$ см, дакле два пут више но у почетку.

2. Једна стаклена цев, на једном крају отворена, дугачка $l = 610$ мм., спусти се (отвореним крајем на ниже) до на дно мора у вертикалном положају.

Кад се вода у цеви попне до $n = 580$ мм., пита се колики је био хидростатички притисак на дну мора, па дакле и колика је дубина мора. Барометар на површини је $b = 768$ мм., а густина живе $s = 13{\cdot}3$ према морској води.

$$\text{Из } \frac{b+x}{b} = \frac{l}{l-n} \text{ излази:}$$

$x = b \cdot \dfrac{n}{l-n} = 14848$ мм. жив. стуба $= 19\frac{1}{3}$ атм. Даље је $y = n + xs = 198{\cdot}06$ мет.

III Примене и последице аеростатичког притиска и Мариотова закона.

Практичне примене и последице аеростатичког притиска уопште, а атмосферског посебице, као и Мариотова закона, разноврсне су и многобројне и ми их не мислимо овде све износити. Ограничићемо се само на најважније.

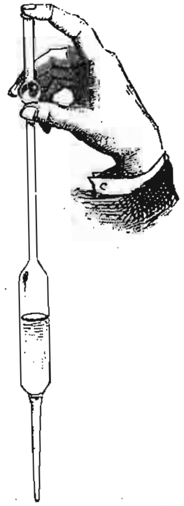
Натеге.

874. Права натега. — На атмосферском притиску основано је пењање течности код праве натеге, у којој с једне стране сисањем разређујемо ваздух. Да бисмо што више течности извукли, горњи је део натеге више или мање проширен.

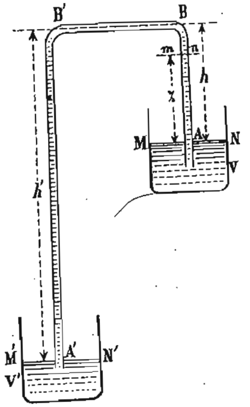
Овде спада и пипета (сл. 477.) којом се мање количине течности ваде из појединих судова. Кад се један крај пипете замочи у течност и горњи отвор остави отворен, пипета ће се напунити течношћу до оне висине, до које је у течност спуштена. Затварањем прстом горњега отвора, пипета ће задржати сву течност која је у њој, и ако је доњи њен крај отворен, само ако је довољно узан.

875. Крива натега. — Тако се зове свака на лакат савијена цев (од стаклета, метала, каучука, итд.), код које је један крак дужи од другога и којом се пресипа течност у непрекидном млазу из неког вишег у други неки нижи суд (сл. 478). Краћи крак мора доћи у суд из кога се течност хоће да испразни.

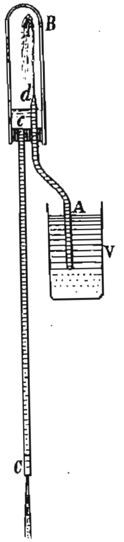
Ма на ком пресеку mn на краћем краку влада и то код A притисак $H - z$, где је H атмосферски притисак а z висина течног стуба изнад нивоа MN. Код B притисак на тај исти елеменат износи $(H - h') + (h - z)$



Сл. 477.



Сл. 478.



Сл. 479.

где су h и h' висине оба крака натеге рачунато од одговарајућих површина MN и $M'N'$. Резултујући притисак биће:

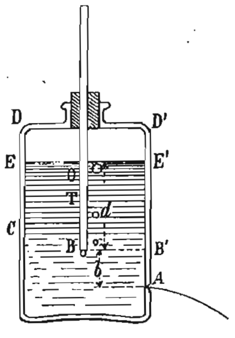
$$h' - h$$

и управљен је од A ка B, B' и A', те ће и течност код A' истицати. Истицање ће трајати све док се течност из суда V не исцрпе, или док се у суду V' толико не попне, да се h' и h изједначе. Брзина истицања биће:

$$v = \sqrt{2\,g\,(h' - h)}$$

На истом се принципу оснива и натега с водоскоком (сл 479.). Судић B у који су углављене две цеви разне дужине A и C, напуни се најпре до половине водом, па се изврне и његов краћи крак замочи у воду у суду V. Из судића B вода ће почети отицати кроз цев C, услед тога ће се у њему ваздух разредити и спољашњи ће притисак из суда V истерати воду у B, која ће даље из њега отицати.

876. Мариотов суд. — Тако се зове сваки суд из кога течност истече сталном брзином. На сл. 480. имамо такав један суд, коме је горњи отвор запушен и кроз запушач пролази стаклена цев, отворена на оба краја и допире до извесне дубине. Кад се из отвора A пусти вода да истиче, њена ће брзина поступно падати, док ваздух кроз поменуту цев у мехурима не почне улазити у суд; од тог момента брзина је истицања стална. Та сталност истицања долази отуда, што је по природи самога апарата и експеримента притисак на доњем крају цеви, т. ј. код B, па дакле и у свакој тачки равни BB, раван атмосферском притиску. Па како тај исти притисак влада и на отвору A кроз који вода истиче, то је очевидно да на брзину истицања утиче само сталан слој течности од A до B' висине b. Стога је брзина истицања стална, док се год слој b не промени, и та брзина износи:

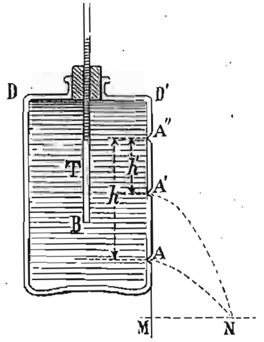


Сл. 480.

$$v = \sqrt{2\,g\,b}$$

Према томе се брзина може мењати већим или мањим спуштањем цеви, т. ј. мењањем дебљине слоја b.

Посматрајмо истицање на Мариотову суду са више отвора A, A' A'' (сл. 481.). У почетку ће сви отвори бити затворени. Кад би отворили само отвор A, течност би истицала као и мало час. Међутим оставивши тај отвор затворен, отворићемо средњи отвор A'. Вода ће истицати док у цеви T' не спадне ниво до висине отвора A', па ће стати, јер ће притисак и споља и изнутра бити исти. Затворимо A' и отворимо A''; кроз тај ће отвор сада улазити ваздух у суд и ниво ће се пењати у цеви T' док не достигне висину отвора A''. Сада ће престати улазак ваздуха јер је равнотежа опет повраћена. Отворимо најзад сва три отвора. Кроз A и A' вода ће истицати а кроз A'' улазиће ваздух у суд, јер тај отвор врши улогу цеви спуштене само до те висине; из оба ће отвора истицати вода сталном брзином, а то се доказује тиме, што ће пресек обеју парабола остати увек на истом месту.

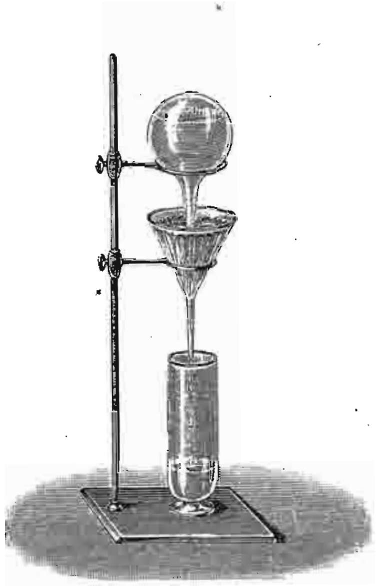


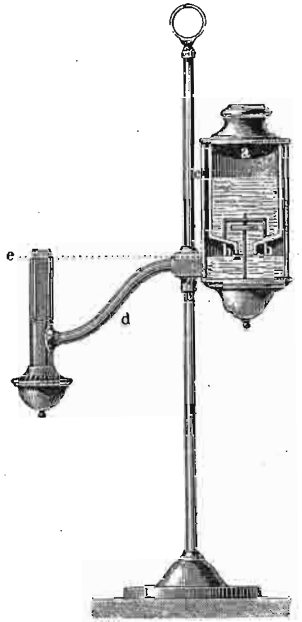
Сл. 481.

На принципу Мариотова суда врше хемичари филтрирање течности, не бринући се да непрестано доливају течност у колико из левка исцури (сл. 482).

На истом се принципу одржава сталан ниво ee (сл. 483.), у стењаку код лампа зејтињача.

877. Херонов суд и кладенац. — Кад грлић неког суда затворимо херметички запушачем, проденувши кроза њ једну на оба краја отворену цев тако, да допре скоро до дна суда, имаћемо тако звани Херонов суд. (Сл. 484.) У суд се наспе вода пре него што ће се запушачем затворити, и то увек толико да доњи отвор цеви дође више или мање под воду. Кад се кроз цев устима или којим другим путем сабије ваздух што је изнад воде у суду, онда ће кроз цев искакати вода на већу или мању висину, према томе до које смо мере ваздух сабили.


Сл. 482.



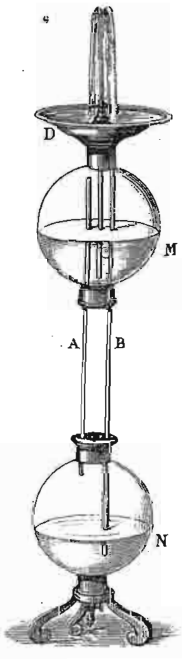
Сл, 483.

На истом је принципу основан и Херонов кладенац или водоскок сл. 485. Судови M и N држе се један изнад другога помоћу цеви A и B, од којих ова последња полази са дна тањира D и свршава се у суду N. У суд M који није ништа друго до горњи Херонов суд, наспе се вода, а тако исто и у тањир D. Вода ће из тог тањира кроз B падати у суд N и сабијати ваздух како у њему тако и у суду M, јер су обадва спојена помоћу цеви A. Сабијен ваздух у суду M натераће воду из M да искаче кроз средњу цев.

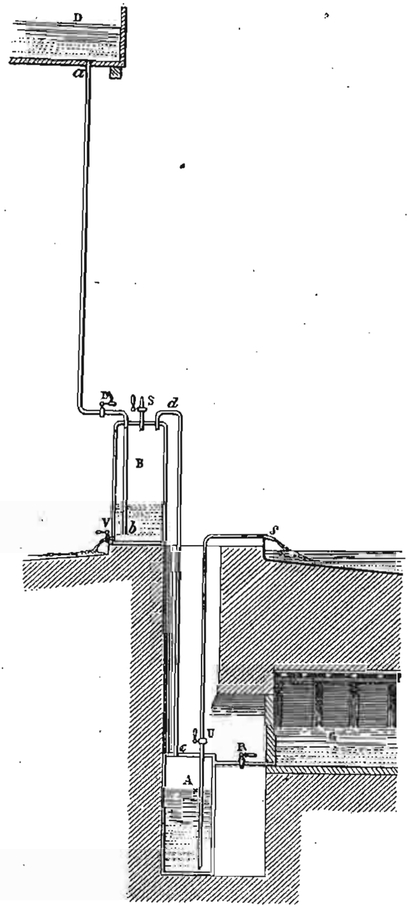
Индустријски је тај принцип употребљен у рудницима у Шемницу за избацивање воде из рудника. У руднику се накупила вода

G (сл. 486.), која се пусти у нижи резервоар A. Помоћу воде накупљене у резервоару D која мора бити на већој висини изнад B него што је дубина рудника, сабија се ваздух у резервоару B, а у исти мах помоћу цеви d и у резервоару A. Под тим притиском, кад се отвори славина U вода ће кроз s истећи из резервоара A. Кад се сва вода из A избаци, поново се отвори славина R, а тако исто ваља испразнити и суд B, и операција се може поновити.

Сл. 484.



Сл. 485.



Сл. 486.

878. Мерење висина барометром. — Пре него што дођемо до обрасца којим се може одредити висинска разлика два места из разлике барометарских стања одређених у исти мах, да видимо по ком закону опада атмосферски притисак с пењањем у висину. Да би ствар била простија, претпоставићемо, да на барометар не утиче ни температура, ни влага, ни промена убрзања са

висином, већ само атмосферски притисак, који по извесном закону опада с висином. Тога ради замислићемо да је атмосфера подељена на врло велики број хоризонталних слојева врло мале дебљине δ, и то таквих, да густина ваздуха у целој дебљини таквог једног слоја остаје иста и промени се само при прелазу из једног слоја у други. На дну првога слоја нека је барометарско стање H, а на врху његову (или на дну другога) H_1; то значи кад смо се попели за један слој горње дебљине δ, барометар је пао за $H - H_1$. Ваздушни стуб дебљине δ тежак је онолико исто колико и живин стуб висине $H - H_1$, и ако спец. тежину ваздуха означимо са σ, а живе са s мора постојати ова једначина:

$$\delta\sigma = (H - H_1)s.$$

Спец. тежина ваздуха σ није стална већ се мења с притиском; ако дакле означимо са c спец. тежину ваздуха под нормалним притиском од 760, онда ће спец. тежина ваздуха на притиску H бити:

$$\sigma = cH.$$

Означимо однос између специфичких тежина ваздуха и живе:

$$\frac{\sigma}{s} = \alpha$$

онда је:

$$\alpha = \frac{cH}{s} = \frac{c}{s}H = \eta H.$$

Према томе се горња једначина може написати:

$$\frac{H - H_1}{\delta} = \frac{\sigma}{s} = \eta H.$$

Одавде је:

$$H_1 = H(1 - \eta\delta).$$

Кад се попнемо за један слој више, т. ј. дођемо на врх другога или на дно трећега слоја, барометар ће показати притисак H_2; ту је спец. тежина ваздуха σ_1 те ће онда бити:

$$\frac{\sigma_1}{s} = \frac{H_1 - H_2}{\delta}$$

Сада ће бити $\sigma' = cH_1$
и:

$$\frac{\sigma'}{s} = \alpha' = \frac{c}{s}H_1 = \eta H_1$$

па за то је:

$$\frac{H_1 - H_2}{\delta} = \frac{\sigma_1}{s} = \eta H_1$$

Одавде пак добићемо, да је барометарско стање, кад се попнемо за два слоја:

$$H_2 = H(1 - \eta\delta)^2.$$

Пењући се за 3, 4 ... n слојева, имаћемо одговарајућа барометарска стања:

$$H_3 = H(1 - \eta\delta)^3$$
$$H_4 = H(1 - \eta\delta)^4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$H_n = H(1 - \eta\delta)^n \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (409$$

а то значи: *кад висине расту аритметички, атмосферски притисак опада геометријски.*

879. На основу овога закона можемо читањем барометра на разним висинама одређивати висинске разлике тих места. Јер ако се налазимо на пример изнад морске површине за m слојева дебљине δ, т. ј. висина је некога места A, $m\delta$, па се онда попнемо на друго место B, високо $n\delta$, онда је висинска разлика та два места A и B:

$$x = n\delta - m\delta = (n - m)\delta.$$

Барометарска стања на тим местима биће:

$$H_m = H(1 - \eta\delta)^m$$
$$H_n = H(1 - \eta\delta)^n$$

одакле је:

$$\frac{H_n}{H_m} = (1 - \eta\delta)^{n-m}$$

или:

$$\log\frac{H_n}{H_m} = n - m\log(1 - \eta).$$

Одавде је:

$$n - m = \frac{1}{\log(1 - \eta\delta)}\log\frac{H_n}{H_m}$$

и кад заменимо биће:

$$x = \frac{\delta}{\log(1 - \eta\delta)} \cdot \log\frac{H_n}{H_m}.$$

Члан $\log(1 - \eta\delta)$ развићемо у ред:

$$\log(1 - \eta\delta) = -\frac{1}{M}\left(\eta\delta + \frac{\eta^2\delta^2}{2} + \frac{\eta^3\delta^3}{3} + \dots\right)$$

кад то заменимо и све чланове помножене са δ као и с вишим степенима од δ изоставимо, јер је δ врло мало, имаћемо најзад:

$$x = \frac{M}{\eta}\log\frac{H_m}{H_n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (410$$

У овоме је обрасцу непознато само η, т. ј. однос између спец. тежина ваздуха на нормалном притиску и живе. Што се прве вредности тиче, она зависи од влаге, а обе заједно од температуре и свију оних утицаја од којих зависи убрзање g. Поједине константе, на које се у овом послу наилази, одређене су потпуније емпиричким путем, поправљајући теоријски образац вредностима добивеним на познатим висинама. Тако се дошло до врло тачног обрасца за мерење висина, од Матије-а (Mathieu), који је усвојен у годишњаку француског бироа за дужине и који гласи:

$$X = \left[18336 \log \frac{H}{h} - 1{\cdot}2843(\Theta - \Theta')\right] \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 = 2\,\dfrac{\vartheta + \vartheta'}{1000}\right) \\ \left(1 + 0{\cdot}00265 \cos 2\,\varphi + \dfrac{X + 15926}{6366198}\right) \\ \left(1 + \dfrac{\chi}{3183099}\right) \end{array} \right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (411$$

У овоме обрасцу значи H барометарски притисак, Θ температуру барометра и ϑ температуру ваздуха на доњој (нижој) станици, а h', Θ' и ϑ' исте те вредности на горњој (вишој) станици. χ је висина доње станице изнад мора.

Пошто се у горњем обрасцу налази непозната X и с десне стране, то се најпре одреди прва приближна вредност њена:

$$a = 18336 \log \frac{H}{h} - 1{\cdot}2843(\Theta - \Theta')$$

Затим друга:

$$A = a + a\,2\,\frac{(\vartheta + \vartheta')}{1000}$$

и најзад:

$$X = A\left(1 + 0{\cdot}00265 \cos 2\,\varphi + \frac{A + 15926}{6366198}\right)\left(1 + \frac{\chi}{3183099}\right)$$

880. Дугом практиком се нашло да ове врсте мерења треба вршити при сасвим мирној атмосфери и једновремено, а тако исто и у оно доба дана, кад је барометар најмање изложен варијацијама, а то бива отприлике у јануару око подне, у фебруару око 10 сах. пре и 4 сах. после подне, у марту у 8 сах. пре и 6 после, априлу и мају 7 пре и 7 после подне, јуну и јулу 6 пре и 9 после, августу 7 пре и 8 после подне, септембру 8 пре и 6 после, октобру 10 пре и 4 после, новембру 11 пре и 2 после, и децембру око 1 сах. после подне. Датуме ваља рачунати по новом календару.

881. Приближна формула, у којој нема логаритма јесте ова Бабине-ова:

$$X = 1600\,\frac{H - h}{H + h}\left(1 + \frac{2\,(\vartheta + \vartheta')}{1000}\right) \quad \ldots\ldots \quad (412$$

која даје до на 1 мет. тачне вредности за висинске разлике мање од 800 мет.

Ниже изложена таблица даје на одређеним висинама одговарајућа барометарска стања:

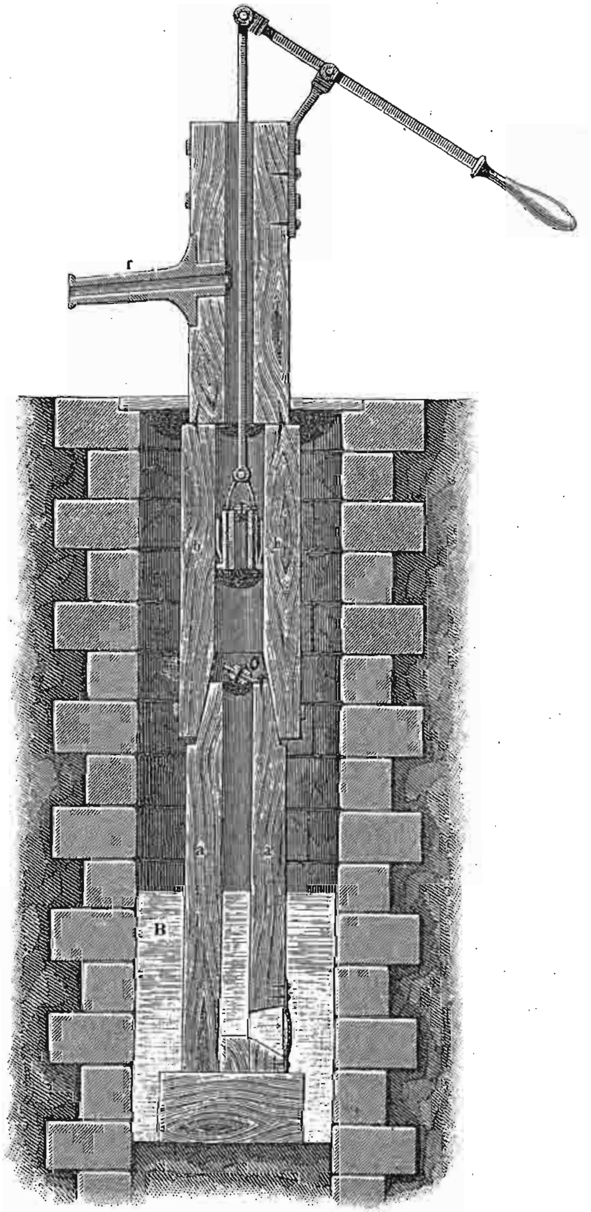
висина у метрима	баромет. ст. H	висина у метрима	баром. H	висина у метрима	баром. H	висина у метрима	баром. H
0	760	800	690	1800	612	3600	492
100	751	900	682	2000	598	4000	470
200	742	1000	674	2200	584	4400	449
300	133	1100	666	2400	570	4800	428
400	724	1200	658	2600	556	7500	307
500	716	1300	650	2800	542	15000	124
600	707	1400	642	3000	529	30009	20
709	699	1600	627	3200	516	55000	1

Следећа таблица показује, која висина у метрима и у разним слојевима атмосфере (који су одређени висином барометарског стања H) одговара притиску од 1 мм., и то на разним температурама ϑ; другим речима, колико се при извесној температури ϑ и притиску H, ваља попети у висину, па да барометар падне за 1 мм.

H	$\vartheta = 28$	24	20	16	12	8	4	0	— 4	— 9	— 12
780	11·4	11·2	11·1	10·9	10·7	10·6	10·4	10·2	10·1	9·9	9·7
760	11·7	11·5	11·4	11·2	11·0	10·9	10·7	10·5	10·4	10·2	10·0
740	12·0	11·8	11·7	11·5	11·3	11·2	11·0	10·8	10·6	10·5	10·3
720	12·4	12·2	12·1	11·8	11·6	11·5	11·3	11·1	10·9	10·8	10·6
700	12·7	12·5	12·3	12·2	12·0	11·8	11·6	11·4	11·2	11·1	10·9
680	13·1	12·9	12·7	12·5	12·3	12·1	11·9	11·8	11·6	11·4	11·2
660	13·4	13·3	13·1	12·9	12·7	12·5	12·3	12·1	11·9	11·7	11·5
640	13·8	13·7	13·5	13·3	13·1	12·9	12·7	12·5	12·3	12·1	11·9
620	14·3	14·1	13·9	13·7	13·5	13·3	13·1	12·9	12·7	12·5	12·1
600	14·7	14·5	14·3	14·1	13·9	13·7	13·5	13·3	13·1	12·9	12·5
580	15·2	15·0	14·8	14·5	14·3	14·1	13·9	13·7	13·5	13·3	13·0
560	15·8	15·6	15·4	15·1	14·8	14·6	14·4	14·2	14·0	13·7	13·4
520	17·2	17·0	16·8	16·5	16·1	15·7	15·3	15·0	14·8	14·5	14·3
480	18·8	18·6	18·4	18·0	17·6	17·2	16·9	16·6	16·3	16·0	15·7
440	20·7	20·5	20·2	19·9	19·5	19·1	18·7	18·4	18·1	17·8	17·6

Шмркови (црпке) за воду.

Говорећи о Торичелијеву покушају, напоменули смо, кад бисмо место живе узели воду, да би водени стуб у цеви, одржаван атмосферским притиском, био преко 10 метара висок. Шмркови за воду основани су на том принципу.



Сл. 487.

882. Шмрк за сисање и издизање воде. — Тај шмрк у пресеку показује сл. 487. До дна бунара *B* спуштена је

метална или (као на слици) дрвена цев *aa*, која на доњем крају са стране има отвор с једном решетком за примање и цеђење воде, а на горњем крају има један вентил *o*. На ту је цев насађена друга, *bb* кроз коју се креће један клип (затварајући га што је могуће боље), на више и на ниже нарочито удешеном полугом. И клип је пробушен и на горњем крају има вентил, који се исто онако отвара као и онај први. Вода истиче кроз цев *r*.

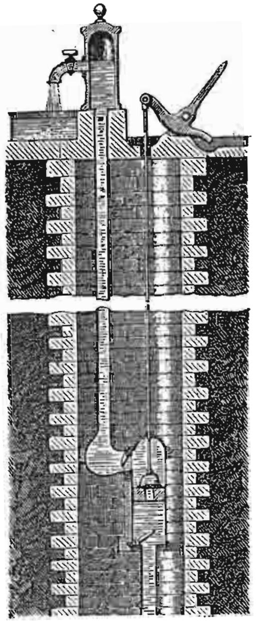
Кад се клип повуче на више, ваздух се под њим разреди; услед тога се доњи вентил *o* подигне, те се разређење пренесе и на ваздух у цеви *a*. Због спољашњег атмосферског притиска вода се донекле попне у цеви *aa*. Кад се клип почиње спуштати, доњи се вентил својом тежином затвори и сабијен ваздух под клипом, отвори вентил на клипу и изађе. Понављајући тај рад више пута, вода ће отворити доњи вентил и ући у цев *b* испод клипа и својом тежином затворити вентил *o*. Спуштен клип ће сада пасти на воду и због притиска на њу, вода ће проћи кроз клип, отворивши његов вентил и изаћи изнад њега. Повлачећи клип на више, та ће вода најзад истицати кроз цев *r*. Од тог момента, кад је ваздух из шмрка сав исцрпен и истеран, почиње шмрк вадити воду. Такав шмрк, од површине воде до доњег вентила *o* *сише* воду, а одатле па до цеви за истицање, ту воду клипом *издиже*.

Кад би вентили, а нарочито клип, добро затварао, могла би се вода на средњем барометарском притиску попети шмрком до на 10 метара висине; пошто се ти шмркови никад не израђују с великом прецизношћу (јер би им иначе цена била сувише велика), стога се доњи вентил *o* намешта на висину од 6 до 8 метара изнад површине воде у бунару.

Више пута је потребно довести воду на већу висину од 6 до 8 метара, колико се она непосредно под атмосферским притиском може исисати. Онда се повећа висина издизања, и такав један шмрк са великом висином из дизања представљен је на сл. 488.

883. Да видимо колики је рад потребан за извлачење воде оваким шмрком. Узећемо да је шмрк пун воде од површине бунара па до цеви за истицање, и да је клип заустављен ма на ком месту у његовој цеви.

На клип дејствује известан притисак p с горње а други неки p' с доње стране.



Сл. 488.

Означимо с d дебљину или висину клипа, а с S његов пресек; стална висина од нивоа воде у бунару, па до отвора којим из шмрка истиче нека је h, а висина клипа изнад воде у бунару (која се (висина) кретањем клипа мења) нека буде z. Атмосферски притисак изражен одговарајућом висином воденог стуба означићемо са H, а спец. тежину воде са γ.

С горње стране клипа имамо притисак:

$$p = SH\gamma + S[h - (d + z)]\gamma$$

а с доње:

$$p_1 = SH\gamma - Sz\gamma.$$

Разлика та два притиска, или притисак који се радом на шмрку савлађује, биће:

$$p_0 = p - p_1 = S\gamma(h - d)$$

или ако дебљину клипа d занемаримо према висини h, биће:

$$p_0 = S\gamma h$$

а то није ништа друго до тежина воденог стуба од површине воде у бунару до отвора за истицање истог пресека колики је и клип.

Рад пак биће:

$$R = p_0 l = S\gamma hl$$

где l значи пут што га прелази клип при кретању свом у цеви. У овоме изразу $S\gamma l$ је тежина воде коју клип издиже, а h је висина на коју се та тежина издиже. Производ $S\gamma lh$ представља рад који би утрошили да исту количину воде колико истече при сваком потезу, подигнемо ма на који начин с површине бунара до места на коме вода из шмрка истиче.

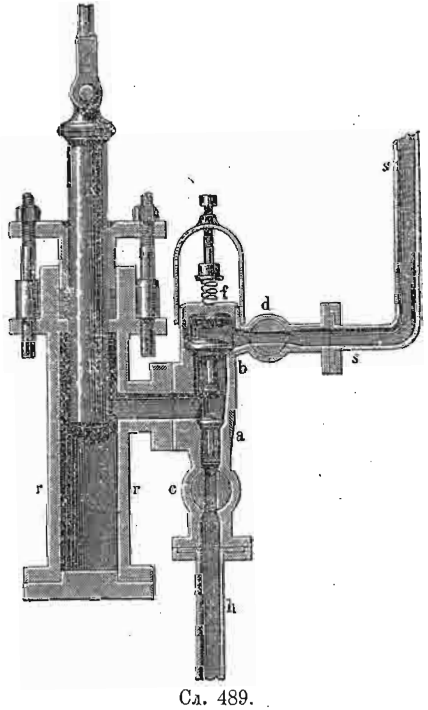
У самој ствари тај је рад код шмрка још већи, јер поред издизања горње количине воде, имамо да савлађујемо разна трења на полузи, као и између клипа и цеви. За то ваља у горњи израз унети једну константу η која је мања од јединице.

Обично се издваја висина сисања од висине издизања воде у горњем шмрку. Ако дакле горњу целокупну висину h поделимо на h_s и h_i и потребан рад изразимо у коњским снагама имаћемо, кад количину воде означимо са $Q (= S\gamma l)$

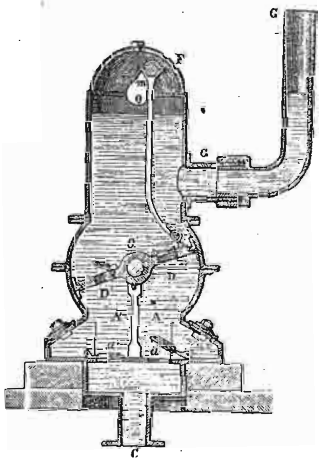
$$R = Q\frac{h_s + h_i}{75 \cdot \eta} \text{ коњ. снага.}$$

Константа η креће се са својим вредностима између 0·85 до 0·95.

884. Шмрк за сисање и притискивање. — У место да се вода *издиже* горњим шмрком на висину, више пута је згодније да се она притисне и тако истера на велике висине. За тај се посао употреби шмрк за сисање



Сл. 489.



Сл. 490.

и притискивање, који је у пресеку представљен на сл. 489. У главноме се овај шмрк разликује од горњега у томе, што му је клип (*k*) пун, т. ј. без вентила и својим кретањем на више сише воду кроз цев *h*, а кретањем на ниже ту воду притискује и избацује кроз цев *s*.

Што се тиче висине до које ће се вода попети, она зависи од притиска који дејствује на клип. Уопште узев, за сваки 10 метара висине потребан је притисак од једне атмосфере.

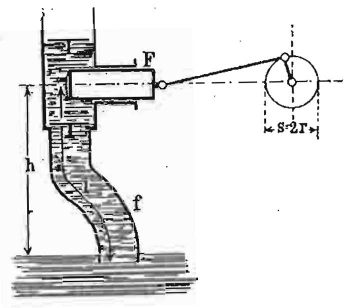
У ову врсту шмркова за сисање и притискивање долази и шмрк представљен у пресеку на сл. 490. Улогу клипа игра овде полуга *DD*, која се око осовине *o'* једним крајем подиже а другим спушта, т. ј клати клизећи по унутрашњој површини самога суда у коме се налази. Тај је суд подељен једном преградом на два дела A и *A'*. У положају, како слика показује, у одељку *A* вода се сише, а у одељку *A'* истерује се кроз вентил *D'* у цев за истицање *G*.

Да би кретање клипа у свима шмрковима било згодније и лакше, више пута се подизање и спуштање клипа или као горе, клаћење покретног дела његовог доведе у везу с каквим обртним кретањем на пр. парне машине, турбине итд. Та веза између једног и другог кретања на пр. код шмрка за сисање и притискивање представљена је у принципу на сл. 491.

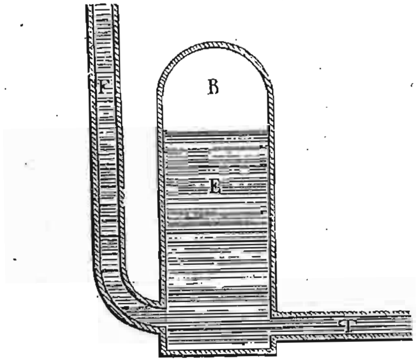
885. Из првога шмрка за сисање и притискивање вода не истиче непрекидно, него престане кад клип сише воду и истиче само кад је клип притисне. Додатком једног резервоара, може се удесити да вода из шмрка непрекидно истиче. Тај резервоар није ништа друго до Херонов суд (сл. 492.). Кроз цев *T* долази вода из шмрка за притискивање и улази у затворени резервоар у коме се налази ваздух и из кога близу дна излази цев *F*. Ако је славина на цеви *F* затворена, вода ће улазити у резервоар, сабијати ваздух све више и више тако, да кад се та славина отвори, вода ће, притиснута сабијеним ваздухом, у непрекидном млазу избијати на већу или мању висину, према притиску који се у шмрку за сабијање употреби.

Шмркови за сабијање с резервоаром или Хероновим судом употребљени су код шмркова за гашење пожара (сл. 493.).

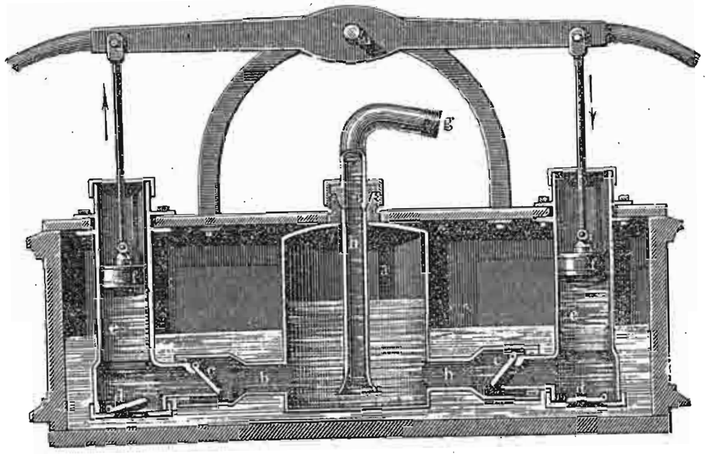
Та непрекидност истицања воде, а у исти мах и већи ефекат шмрка постиже се и двогубим дејством клипа у цилиндру, као што се то види на сл. 494,; кад клип силази, онда сише воду помоћу цеви *C* отварајући вентил *A'*, а истерује ју кроз вентил *B*, а кад се пење, онда сише кроз вентил *A*, а истерује кроз *B'*.



Сл. 491.



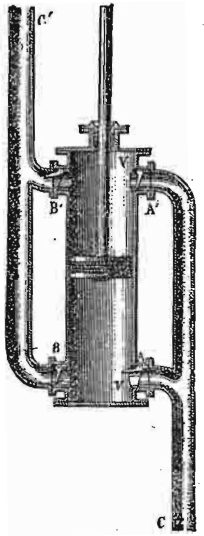
Сл. 492.



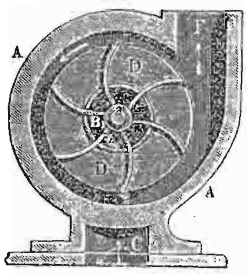
Сл. 493.

886. Центрифугални шмрк. — Овај се шмрк може сматрати као турбина са изврнутим дејством, јер док турбину креће вода, падајући са извесне висине, дотле код центрифугалног шмрка издижемо воду на неку висину, употребивши на то ма какво већ готово кретање (на пример парног, електричног и т. д. мотора).

Такав центрифугални шмрк представљен је у пресеку на слици 495. Око осовине *a* окреће се један низ повијених лопатица, који брзим обртањем разреде за собом ваздух, те тако усишу воду као и обичан клип, а за тим је кроз цев *F* издижу по потреби на већу или мању висину.



Сл. 494.



Сл. 495.

Центрифугални шмрк може сисати воду само с једне или и с две стране, а тако исто лопатице могу бити праве или искривљене напред или натраг. Овакав шмрк истерује воду у непрекидном млазу и нарочито је згодан, кад ваља велике количине воде избацити на мање висине.

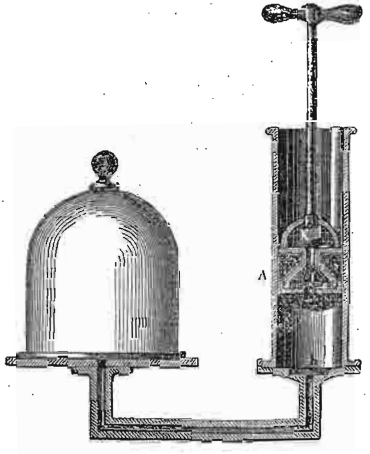
Шмркови за ваздух.

Шмркови за ваздух деле се на две групе: на шмркове за разређивање и на шмркове за сабијање ваздуха (или гасова).

Шмркови за разређивање ваздуха.

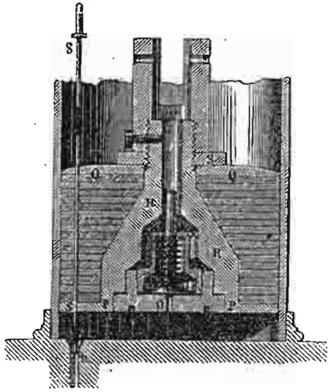
Први шмрк за разређивање ваздуха направио је Ото Герик (Otto Guericke) око 1650. год. После њега многи су се физичари бавили усавршавањем тога инструмента, међу којима ваља нарочито поменути Бојла, и Хука (Hooke, 1658.), Хигенса (Huygens, 1661.), Сенгерда (Senguerd, 1675.), Хуксбиа (Hawksbee, 1705.) итд. Шмркова за разређивање ваздуха има разних система, од којих ћемо ми најважније проучити.

887. Шмрк с једним цилиндром. — Такав шмрк готово у свом најпростијем облику представљен је на слици 496. На њему разликујемо у главноме цилиндар или сару, покретан клип *A*, и звоно или реципијенат испод кога се ваздух разређује. Како на дну цилиндра тако и на клипу имамо по један вентил, који се на више отварају.



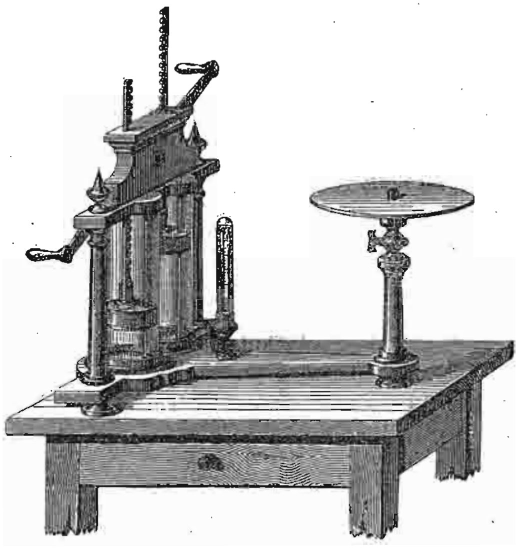
Сл. 496.

Претпоставимо да је клип на дну цилиндра; оба су вентила затворена, и под звоном као и у спојној цеви налази се ваздух под обичним притиском. Кад повучемо клип на више, простор испод њега остаће без ваздуха; ваздух под звоном и у цеви, налазећи се под атмосферским притиском, отвориће вентил *h* на дну цилиндра и ући ће у празнину испод клипа. Другим речима, ваздух под звоном, у цеви и у цилиндру испод клипа биће сада ређи него мало час, јер је заузео већи простор. Стигав с клипом до краја, враћамо се натраг; спуштајући клип, сабијамо ваздух под њим а услед тога затвориће се вентил *h*, и спречити ваздуху враћање под звоно. На тај начин, под звоном је остао ређи ваздух но што је био у почетку. Спуштајући све више клип, ми ћемо сабити ваздух под њим толико, да постане гушћи од спољашњег ваздуха, услед чега ће он овако сабијен, отворити вентил на клипу и изаћи на поље. Стигав с клипом на дно цилиндра, ми смо дошли у исти онај положај из кога смо мало час пошли, т. ј. завршили смо један циклус. Кад ту операцију поновимо ми ћемо још више разредити ваздух под звоном и ако тај посао продужимо више пута, успећемо да ваздух под звоном буде знатно разређен. У томе се и састоји задатак свакога ваздушног шмрка.



Сл. 497.

Разређење, које се шмрком може постићи, зависи нарочито од начина како је клип израђен и како су вентили удешени. Обично се клип не прави из једног комада него од читавог низа кожних котурова наслаганих и добро притиснутих једно на друго сл. 497. У место простог вентила *h* као у првој слици, употреби се коничан кожни чеп *h*, утврђен на шипки *s*, која с трењем пролази кроз клип и горе се свршава цилиндричним чепом који својим прстенастим набором удара о поклопац цилиндра. Кад се клип повуче на више, шипка се врло мало с њим подигне те отвори код *h* пролаз ваздуху, али за цело време пењања клипа остане на истоме месту јер је поклопац цилиндра задржава. Чим се клип почне враћати на ниже, понеће собом и шипку, те ће она одмах чепом *h* спречити враћање ваздуха под реципијенат. Вентил који се налази у самом клипу, затвара челична опруга.



Сл. 498.

888. Шмрк с два цилиндра. — Да би разређење ишло брже, обично се праве шмркови с два цилиндра, те раде наизменце (сл. 498.). Сем тога и кретање клипова је сада лакша. Јер ако је пресек једнога цилиндра 100 кв. см. онда бисмо, приближивши се безваздушном простору испод клипа, имали при извлачењу клипа да савлађујемо притисак од 100 кгр., кад би био само један цилиндар. Овако пак, док нам код једног цилиндра тај притисак смета, код другога нам помаже, и кретање је клипова сразмерно лако.

889. Да бисмо дознали, колико је ваздух разређен, на сваком ваздушном шмрку имамо по један скраћен манометар сл. 499. или тако звану „барометарску пробу“, код које, жива почне падати тек онда, кад је притисак под звоном сведен на половину, четвртину или мање и висинска разлика оба живина стуба показује нам колики још притисак влада под звоном. (На слици на пр. та разлика износи 20 мм.).

Сл. 499.

890. Степен разређења. — Први нам је задатак да нађемо закон по коме опада притисак, т. ј. по коме се разређује ваздух под звоном. Означимо са V запремину реципијента и спајне цеви до вентила h (сл. 333.) на дну цилиндра, а са v ону запремину која се појави у цилиндру, пошто клип повучемо до његове највише тачке. У почетку рада, пошто је запремина V под притиском атмосферским P_0, имаћемо P_0V; кад клип први пут извучемо до највише тачке, ваздух који је мало час заузимао само запремину V, заузеће сада запремину $V + v$, али за то неће бити више под притиском атмосферским већ под неким другим P_1, свакако мањим од атмосферског. По Мариотову закону биће сада:

$$P_0V = P_1(V + v)$$

одакле је непознати нови притисак или разређење после првог извлачења клипа:

$$P_1 = P_0 \frac{V}{V + v}$$

Кад спустимо клип и избацимо кроз његов вентил онај ваздух што је био под њим у цилиндру, имаћемо у реципијенту запремине V ваздуха под притиском P_1. Кад по други пут повучемо клип, тај ваздух притиска P_1 заузеће запремину $V + v$, услед чега ће му спасти притисак на P_2, тако да је опет по Мариотову закону:

$$P_1 V = P_2 (V + v)$$

одакле је:

$$P_2 = P_1 \frac{V}{V + v}$$

$$= P_0 \left(\frac{V}{V + v} \right)^2$$

После трећег повлачења клипа биће на исти начин:

$$P_3 = P_0 \left(\frac{V}{V + v} \right)^3$$

. . . .

$$P_n = P_0 \left(\frac{V}{V + v} \right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{v}{V}} \right)^n \quad . \; . \; . \; . \quad (413$$

То значи, док број повлачења клипа расте аритметички, притисак под звоном опада геометријски; следствено, притисак се код доброг шмрка у теорији асимптотски приближује вредности нуле.

Кад горњу једначину решимо по n, добићемо теоријски број потега клипа, који је потребан да од густине 1, која одговара барометарском стању H, дођемо на густину γ_n, која одговара притиску h_n

$$n = \frac{\log \frac{1}{\gamma_n}}{\log \left(1 + \frac{v}{V} \right)} = \frac{\log \frac{H}{h_n}}{\log \left(1 + \frac{v}{V} \right)}$$

Ако се хоће да постигне разређење од 5 мм или 1 мм живиног стуба, онда се према односу $\frac{v}{V}$ добивају ови бројеви потега клипом:

	v = 3 V	v = 2 V	v = V	$v = \frac{1}{2} V$	$v = \frac{1}{4} V$	$v = \frac{1}{10} V$
$h_n = 5^{mm}$	n = 4	5	8	13	23	52
$h_n = 1^{mm}$	= 5	7	10	17	30	70

891. Међутим, у практици није тако. Поред тога што се не може узети, да клип савршено затвара цилиндар кроз који се креће, нарочито кад опадне притисак испод клипа, да сви спојеви и вентили увек прецизно раде, има нарочито једна сметња која прати сваки и најбољи израђени шмрк, а то је тако звани „шкодљиви простор“ у шмрку.

Рекли смо мало час, кад спустимо клип на дно цилиндра, ми ћемо кроз његов вентил истерати сав ваздух напоље, а то у ствари не бива. Ма како дно цилиндра као и доња страна клипа била израђена, увек ће између те две површине, узев у рачун и оне мале шупљине, које се ту морају наћи, остати једна врло мала количина ваздуха У почетку рада тај простор не смета, али кад се ваздух јако разреди, онда повлачећи клип на више ваздух се из шкодљивог простора под клипом први рашири, и ако се он управо толико рашири кад клип достигне свој највиши положај, да му разређење буде онолико исто као и под звоном, онда испод звона неће изаћи нова количина ваздуха, а то значи, радња шмрка је заустављена. Спуштајући клип, и затворивши вентил који води у реципијенат, ми сабијамо ваздух под клипом; да бисмо тај ваздух избацили, ваља да га сабијемо толико, да његов притисак буде већи од атмосферског, те да може сам отворити вентил на клипу и изаћи напоље. Ако га ми, међутим, толико сабијемо, да он заузевши шкодљиви простор управо достигне притисак атмосферски, он неће моћи отворити вентил нити изаћи напоље и шмрк се зауставио у раду. Почев од тог момента, ми ћемо ваздух из шкодљивог простора разређивати управо до оне мере, до које се налази разређен ваздух у реципијенту, и сабијати га управо до атмосферског притиска; нити може нова количина ваздуха из реципијента изаћи у цилиндар, нити из цилиндра изаћи у ваздух. Ако са v_0 означимо запремину шкодљивог простора, онда је $\frac{v_0}{v}$ граница до које се ваздух датим шмрком може разредити.

892. Утицај шкодљивог простора може се лако израчунати. Запремина тога простора је v_0, и кад се клип спусти, она је пуна ваздуха под атмосферским притиском P_0 (јер не може да отвори вентил на клипу). У реципијенту запремине V, налази се разређен ваздух притиска P, и оба се ваздуха кад клип повучемо на више разреде, на запремину $V + v$ добивши притисак P'. Овај ваздух из шкодљивог простора и онај из реципијента могу се сматрати као две врсте гасова, који се мешају у истој запремини, те ће према Далтонову закону бити **(853)**, 3):

$$VP + v_0P_0 = (V + v)P'$$

Слично ономе напред, имаћемо сада за ове две врсте ваздуха помешаних:

$$P_1 = \frac{V}{V + v} P_0 + \frac{v_0}{V + v} P_0$$

$$P_2 = \frac{V}{V + v} P_1 + \frac{v_0}{V + v} P_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = \frac{V}{V + v} P_{n-1} + \frac{v_0}{V + v} P_0.$$

Из ових једначина ваља да избацимо P_1, $P_2 \ldots . P_{n-1}$; тога ради помножимо последњу једначину са $\left(\frac{V}{V + v}\right)^0$, ону изнад ње са $\left(\frac{V}{V + v}\right)^1$, и т. д., тако да прва буде помножена са $\left(\frac{V}{V + v}\right)^{n-1}$, па саберимо их све. На тај начин добићемо:

$$P_n = \left(\frac{V}{V + v}\right)^n P_0 + \left(\frac{v_0}{V + v}\right) P_0 \left\{ 1 + \frac{V}{V + v} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{V}{V + v}\right)^2 + \ldots \left(\frac{V}{V + v}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= \left(\frac{V}{V + v}\right)^n P_0 + \frac{v_0}{V + v} P_0 \frac{1 - \left(\frac{V}{V + v}\right)^n}{1 - \left(\frac{V}{V + v}\right)}$$

$$= \left(\frac{V}{V + v}\right)^n P_0 + \frac{v_0}{v} P_0 \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V + v}\right)^n \right\}$$

Притисак дакле опада спорије са шкодљивим простором но без њега, и приближује се крајњој граници

$$p = \frac{v_0}{v} P_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (414$$

До овога бисмо израза и другим путем дошли. Рецимо да је гас у реципијенту достигао највиши ступањ разређења и налази се под притиском p и да се клип налази на дну цилиндра испод кога се у шкодљивом простору v_0 налази гас под атмосферским притиском P_0, т. ј. $v_0 P_0$. Кад подигнемо клип, запремина се повећа за v и гас из шкодљивог простора заузме исти притисак као и онај у реципејенту, т. ј. p или vp, јер због те једнакости притиска, гас више не излази из реципијента. Пошто је:

$$vp = v_0 P_0$$

онда је и:

$$p = \frac{v_0}{v} P_0.$$

893. Бабине (Babinet) је успео, да знатно смањи дејство шкодљивог простора, конструкцијом нарочите славине, која се по њему назива „Бабинеова славина“, помоћу које се клипом једнога цилиндра празни шкодљиви простор онога другога. Нека је v_0 шкодљиви простор једнога цилиндра, а v'_0 онога другог, онда се овај други простор може сматрати као реципијенат, јер се из њега првим цилиндром и клипом може сад извући ваздух. Гранична вредност притиска у v'_0 биће $\frac{v_0}{v} P_0$; ако је то у исти мах притисак у шкодљивом простору цилиндра који сам служи као шмрк, онда је гранична вредност притиска у реципијенту $p_1 = \frac{v_0'}{v} p$ одакле је:

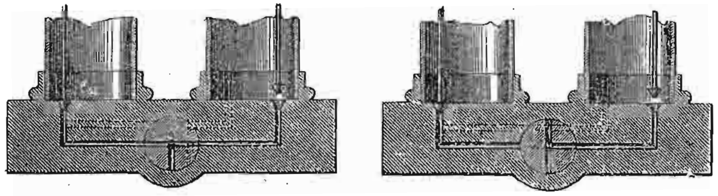
$$p_1 = \frac{v'_0}{v} \frac{v_0}{v} P_0$$

или приближно:

$$p_1 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 P_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (415$$

Према томе може се сад још јаче испразнити већ добивени празан простор („vide du vide“), јер се обична граница вакуума може у истој размери спуштати, у којој се обичним путем смањује притисак атмосферски.

Ево како је удешена Бабинеова славина и каква је измена у конструкцији шмрка извршена. Пре свега оба су цилиндра спојена поред главнога канала једним споредним каналом, који је на сл. 500. *a* и *b* представљен тачкама. Главни канал са овим споредним довео је у везу помоћу своје славине, која се најпре може тако наместити, као у сл. 500 *a*, и на тај начин довести у везу делове главног канала међу собом и с реципијентом, као што се ради при обичном раду са шмрком, или само један цилиндар са реципијентом а у исти мах засебно споредним каналом тај цилиндар с оним другим цилиндром (сл. 500. *b*). Да би се те комбинације могле извршити, славина је пробушена најпре дуж своје осе, затим има три попречна отвора у оној равни, у којој се налазе делови главног канала, и најзад има један коси отвор, који оба дела споредног канала спаја.



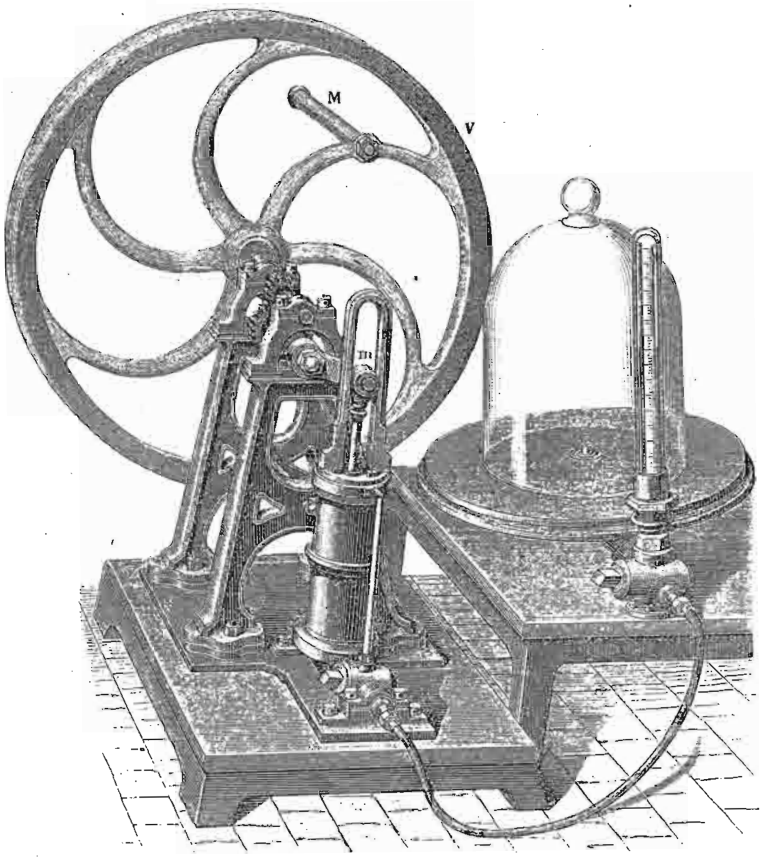
Сл. 500. *a* и *b*

Кад већ манометар покаже да је разређивање заустављено, онда се славина окрене као на сл. 500. *b*; сад је само један цилиндар спојен с реципијентом, а други је цилиндар спојен с првим, споредним каналом. Кад се клип у првом цилиндру попне у вис, онда он црпи ваздух из реципијента, а кад се тај клип почне спуштати, а клип у другом цилиндру пењати, онда овај други клип не сише ваздух из реципијента већ из првог цилиндра, те њега и његов шкодљиви простор празни. —

Помоћу ваздушног шмрка, могу се извести разни занимљиви експерименти, као што су распуцавање бешике, водоскок у разређеном ваздуху, опит с магдебуршким полукуглама, гашење свеће, падање дима као чврстог тела, падање разних тела једнаком брзином у безваздушном простору, живину кишу, излажење апсорбованог ваздуха из воде, кључање воде на нижим температурама од 100° и т. д.

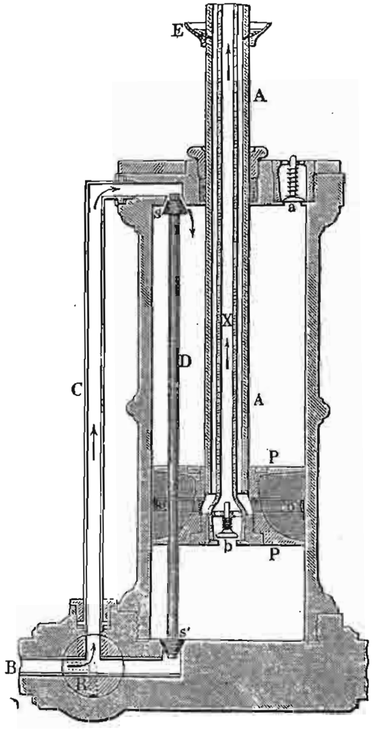
894. Шмрк са двогубим дејством. У место два цилиндра, може се употребити само један, али с двогубим дејством, тако да клип и при пењању и при спуштању сише и разређује ваздух. Такав један шмрк који је конструисао Бјанки у Паризу (Bianchi), представљен је на сл. 501. Овај шмрк има још и ту добру страну, што се обртањем једнога точка креће клип на више и на ниже. Израда самога цилиндра и двогубо дејство клипа у њему види се на сл. 502. Цев *B* у вези је с реципијентом. Кад се клип спушта, онда се кроз канал *C* сише ваздух из реципијента, а раније усисани ваздух истерује кроз

вентил *b* и цев *x* на поље. Напротив, кад се клип пење, онда је долазак кроз отвор *s* затворен и ваздух улази из реципијента у доњи део цилиндра кроз отвор *s'*. Мало пре усисани ваздух у горњем делу цилиндра истерује се сад кроз вентил *a* напоље.

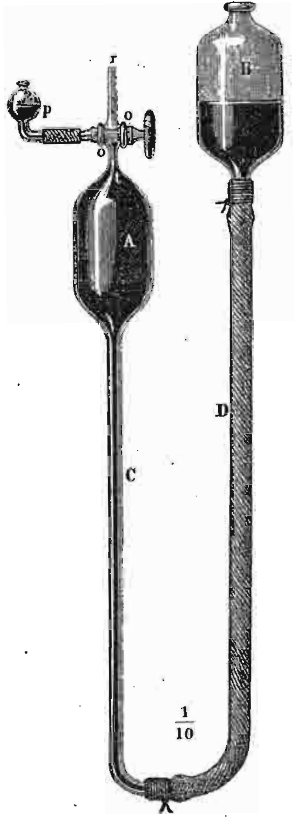


Сл. 501.

895. Хидростатички шмрк за ваздух. — Овакав се шмрк за вадух добива, кад се код барометра на лакат, три измене учине: 1. На затвореном као и на отвореном краку (који је сад исто толико дугачак као и затворени) барометра, цев се знатно рашири у судове *A* и *B* сл. 503.; 2. Оба крака нису направљена од једне пресавијене стаклене цеви, него је отворени крак направљен од дугачке цеви од каучука *D*, која на једном крају носи суд *B*, те се тако тај отворени суд може по вољи подизати и спуштати; 3. Суд *A* није једанпут за свагда затворен, већ се славином *o* може довести у везу час краком *r* с неким реципијентом у коме ваздух разређујемо, час кроз судић *p* са слободним ваздухом, а кад треба можемо га сасвим затворити (сл. 504.). Извлачење или разређивање ваздуха у неком суду, који би код *r* био спојен са шмрком, врши се на овај начин. Најпре се славина тако намести да је суд *A* спојен са спољашњим ваздухом, па се суд *B* толико издигне (као што то слика показује), да жива испуни цео суд *A* до славине, прешав нешто мало и у судић *p*. Затим се славина тако окрене, да се горња веза са слободним ваздухом прекине и суд *A* сасвим затвори, па се суд *B* полако спушта толико, да жива као и у барометарској цеви сиђе сва из суда *A* у суд *B* и остане само у цеви *C* један живин стуб по висини раван атмосферском притиску. Овако испражњен суд *A* није ништа друго до Торичелијева празнина и с њом се сада (славином *o*), споји реципијенат из кога ваздух извлачимо. По себи се разуме, да ће ваздух или гас из реципијента заузети целу запремину суда *A* и тиме се разредити. Веза се с реципејентом прекине, и суд *B* поново се издиже, суд *A* споји се са спољашњим ваздухом и опет напуни живом као и мало час; затим се рад понавља истим редом као и досад, док се ваздух у реципијенту не разреди до потребне мере.



Сл. 502.



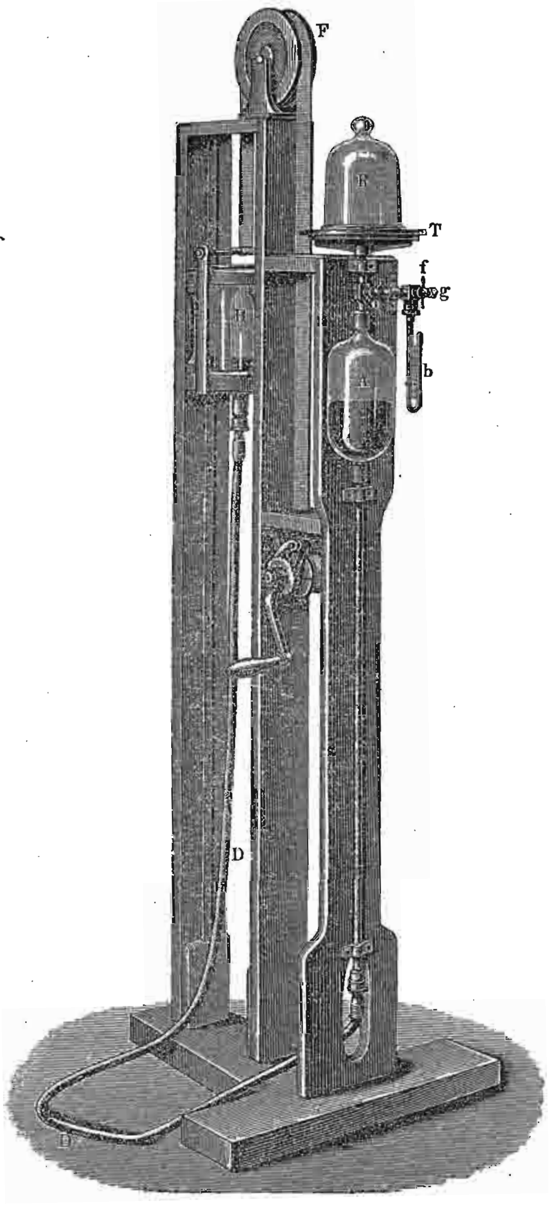
Сл. 503.

Сл. 504.

Потпун такав шмрк који је конструисао *Гајслер* (Geissler) показује сл. 505. Ваздух се извлачи из реципијента *R* а манометар *b* показује ступањ разређења.

896. Врло важну допуну Гајслерову шмрку учинио је *Теплер* (Töpler) тиме, што је направио хидростатички шмрк за ваздух без икаквих славина. Тај Теплеров шмрк са извесним доцнијим изменама у неким појединостима (од Хагена) представљен је на сл. 506. Славина коју смо мало час имали окретати час на једну час на другу или трећу страну замењена је сада једним барометром на лакат *kh*, и спајном цеви *cd* из које се издваја цев *e*, поклопљена озго савијеном цеви *ff*, код које се тањи крај спаја с реципијентом *r*. Мали лопасти судић на доњем превоју те цеви *f* напуни се до пола фосфорном или сумпорном киселином, за сушење ваздуха који се из реципијента извлачи. Сем живе, којом се напуни покретни суд *a* односно непокретни *b* као и код Гајслерова шмрка, жива се налази још у барометру на лакат *h*, и у судићу *l*.

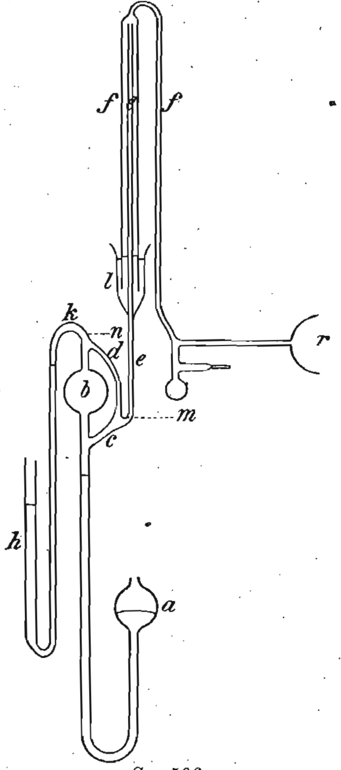
Кад се подигне покретни суд *a*, жива ће напунити суд *b*, а тако истоући и у огранке *cd* и *e*; док жива не уђе у *e*, реципијенат је био спојен са судом *b*, уласком живе у *e* реципијенат је одвојен од њега. Подизањем суда *a* ваздух, који је дотле био у *b*, сабија се и он ће у мехурима кроз барометар *h* изаћи напоље.



Сл. 505.

Кад се жива попне до *k* и пређе у барометарску цев,

суд *a* спусти се, *b*, *c*, *d* и *e* испразниће се и ваздух из *r* може да да дође у *b*. Тиме се ваздух у реципијенту разреди и жива ће се из суда *l* између цеви *f* и *e* пењати, држећи непрестано затворену везу између спољашњег ваздуха и реципијента. По себи се разуме да то пењање живе између *f* и *e* може највише достићи висину барометарског стуба, међутим је тај део цеви скоро један метар дугачак. Понављањем овакога рада на Теплерову шмрку, врло се брзо достигне врло висок ступањ разређења у реципијенту.



Сл. 506.

897. Тај ступањ разређења у реципијенту може се овако одредити:

Подигне се покретни суд *a* толико, да жива дође до *m* и забележи се стање живе на барометру *hk*. Ако запремина од *m* до нивоа живе у бароматру износи v, ваздух који се ту налази, биће под непознатим притиском x. Затим се подигне суд *a* дотле, док жива не дође до *n*; жива ће у барометру спасти за d милиметара. Ако је запремина од *n* па до новога нивоа живе у барометру v_1 онда је ваздух, запремине $V + v$ на запремину v_1 сведен и тај сабијени ваздух притискује снагом $x + d$. V је запремина суда и цеви од *m* до *n*. Између тих вредности постоји овај однос:

$$(V + v)x = v_1(d + x)$$

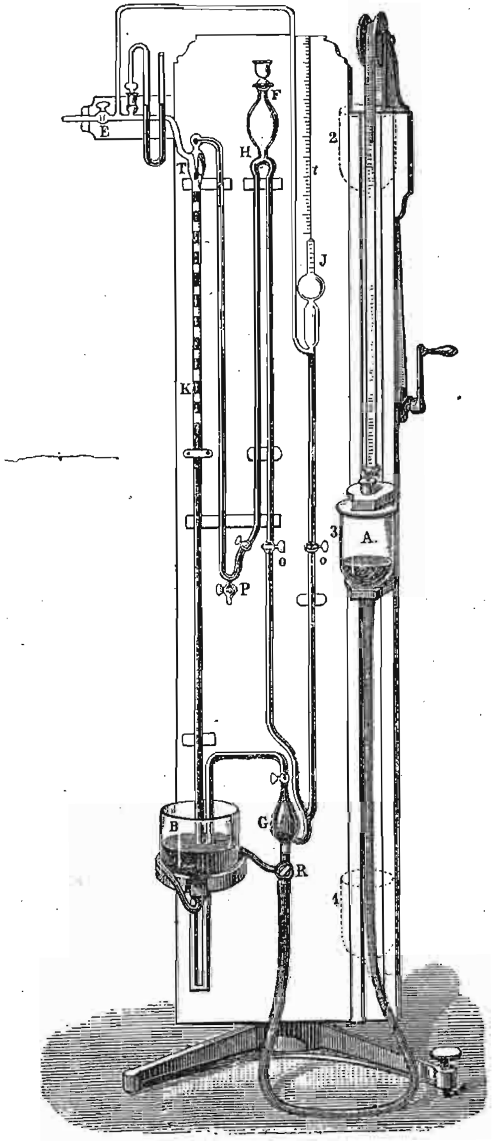
одакле је:

$$x = \frac{v_1}{V + v - v_1} d.$$

Рецимо да је $V = 1500$ куб. см. а v_1 које можемо код јаког разређења без велике погрешке ставити да је равно v нека буде 0·2 куб. см. онда је:

$$x = \frac{1}{7500} d.$$

Кад се d одреди само до на 0·1 мм. тачно, добива се x до на 0·000012 мм., т. ј. до на 57 милионитих делова једне атмосфере тачно. Па како се *d* моше одредити с већом тачношћу и однос $v : V$ може се извести још повољније, то се и мерење са још већом тачношћу може извршити.



Сл. 507.

898. Хидраулични шмрк за ваздух. — Овај је шмрк основан на оном истом принципу хидрауличног притиска, који смо видели у хидраулици примењеног за хидрауличне сисалице и дуваљке. Тамо је већ било говора о делимичном разређивању ваздуха протицањем воде; код ових хидрауличних шмркова за ваздух, употребљено је протицање живе, и на тај начин постигнут је много већи ступањ разређења него с водом. Поред тога, овај се хидраулични шмрк разликује од оних с водом још и у томе, што овде жива не протиче у непрекидном млазу, већ кап по кап, те је и дејство овога шмрка истина спорије, али савршеније, јер се овим шмрком боље може исцрпсти ваздух него у обичној Торичелијевој празнини. Једном речи хидраулични је шмрк најсавршенији инструменат за разређивање ваздуха.

Први хидраулични шмрк за ваздух конструисао је Шпренгел. Доцније је

он у разним појединостима усавршаван и на сл. 507. представљен је у свом најпотпунијем облику.

Право дејство шмрка наступа код *T*, где жива пада кроз цев *k* кап по кап До тога места долази она из покретног суда *A* путем *R*, *o*, *H*, *P*, *T*. Суд из кога се ваздух извлачи, споји се са шмрком славином *E*.

У почетку се суд *A* спусти у положај 1 и славина се *R* тако намести да скоро сва жива пређе из *B* у *A*. Затим се славина *R* тако окрене, да се живи отвори пут у шмрк и подигне се суд *A* до положаја 2. Жива ће сад кроз *R* поћи горе поменутим путем; дошав на превоју код *H*, жива испусти онај ваздух који би у њој био и продужи пут силазећи до *P* и пењући се затим до *T*, где у капима пада у узану цев *k*. Та цев *k* мора бити тако узана, да једна кап живина испуни цео њен пресек. Између сваке две капи, затворен је по један мехур ваздуха који долази из реципијента и који жива својом тежином потискује на ниже и тим начином постепено празни реципијенат.

Покретни суд *A* не оставља се у положају 2., него кад шмрк почне да ради, доведе напр. у положај *3* према томе како буде било потребно. Ту се тај суд утврди и шмрк остави самом себи. Од живиних капи и ваздушних мехурова образује се читав ланац и цев се услед трења јако наелектрише те у мраку светли. Оваквим се шмрком може постићи готово савршен вакуум.

899. Да би се могао оценити ступањ разређења ваздуха у реципијенту, употреби се апарат од Мек Лијода (Mac Leod); то је један стаклени суд *J* спојен с реципијентом у коме влада исти притисак као и у реципијенту. Згодним намештањем славине *o*, и подизањем суда *A*, заостали ваздух сведе се у томе суду на врло малу запремину док не достигне атмосферски притисак. У подељеној цеви над њим, та се запремина одреди. Ако се на пример разређен ваздух из суда *J* сведе на $\frac{1}{1000000}$ своје запремине док достигне атмосф. притисак, онда значи, да разређење ваздуха у реципијенту износи $\frac{1}{1000000}$ једне атмосфере. Или, жива се пење и у суд са узаном цеви која је над њим и у цев *t* (поред суда, која иде у реципијенат. На подељеној цеви изнад суда види се кад је запремина гаса који је у њој затворен сведена рецимо на $\frac{1}{500}$ део. Жива ће у оној цеви *t* стајати више него у цеви изнад суда; разлика та нека буде 5 мм. То значи да је притисак ваздуха или гаса у реципијенту који тражимо био $\frac{1}{100}$ милиметра.

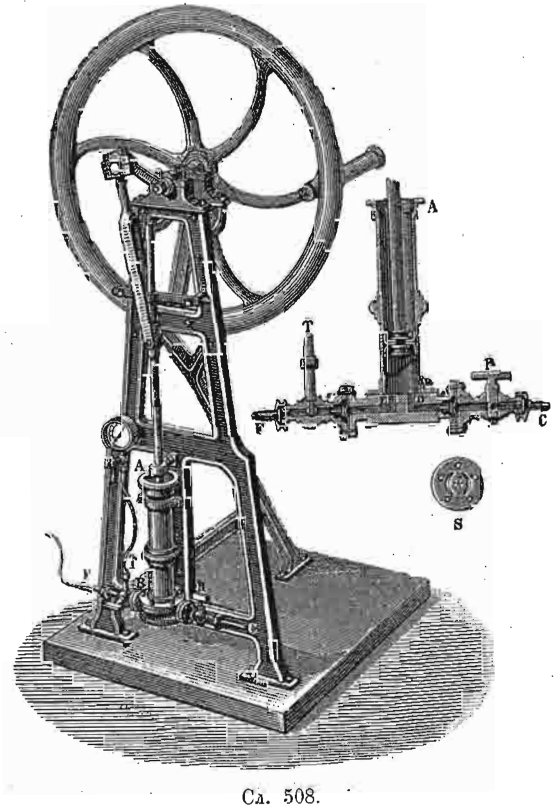
Ниже изложена таблица показује границе разређења постигнуте разним врстама шмркова за разређење ваздуха:

СИСТЕМ ШМРКА	Милионити делови атм.	Притисак у милиметр.
Водена сисалица или шмрк · · ·	14000	10
Обичан шмрк за ваздух (са клипом)	1200	1
Најсавршенији шмрк са клипом ·	150	0·1
Стари Гајслеров шмрк · · · · ·	145	0·1
Новији Гајслеров шмрк · · · ·	12	0·01
Стари Шпренгелов шмрк · · · ·	1	0·0008
Новији Теплер-Хагенов шмрк · ·	0·015	0·000012
Најновији Шпренгел-Руд-ов шмрк	0·005	0·000004

Шмркови за сабијање ваздуха.

900. Шмрк за ниске притиске. — Кад се код обичног шмрка за разређивање ваздуха с клипом, изврну вентили, онда се добива шмрк за сабијање ваздуха. Ови се шмркови праве увек с једним цилиндром, и такав шмрк у потпунијем облику представљен је на сл. 508. Ваздух или други какав гас, који хоћемо да сабијемо, доводи се кроз цев *C* и пушта славином *R*; код *s* се налази вентил, који се отвара према цилиндру. Кад се клип повуче на више, тај се вентил отвори и пусти гас у цилиндар. Спуштајући клип и сабијајући гас под клипом, затвори се вентил *s*, а отвори се вентил *s'*, који се отвара према резервоару у који гас хоћемо да сабијемо и до кога води цев *F*, те тако гас улази у резервоар за сабијање. Огранак *T* води у манометар, који показује ступањ сабијања. Шмрком ове конструкције може се сабити гас до на 20—25 атмосфера.

Означимо са V запремину резервоара за сабијање, а са v запремину цилиндра под клипом; ако је P_0 притисак атмосферски с којим почињемо, онда ће се са сваким потегом клипа повећати притисак у размери $P_0 \frac{v}{V}$.



Сл. 508.

После првог потега клипом, унећемо у резервоар ваздуха под притиском атмосферским P_0 и запремине v, која се количина додаје оној која већ у резервоару под обичним притиском постоји; на тај начин у резервоару порасте притисак на P_1 тако да је:

$$VP_1 = VP_0 + vP_0$$

или:

$$P_1 = P_0 + \frac{v}{V} P_0$$

Пошто клип спустимо по други пут биће у резервоару неки притисак P_2, тако да је:

$$VP_2 = VP_1 + vP_0$$

одакле је заменом:

$$P_2 = P_0 + 2\frac{v}{V} P_0$$

После n потега имаћемо притисак:

$$VP_n = VP_{n-1} + vP_0$$

или:

$$P_n = P_0 + n\frac{v}{V} P_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (416$$

и тај притисак расте у аритметичкој размери као и број потега.

901. И код овога се шмрка јавља дејство шкодљивог простора и за то сваки такав шмрк има своју границу до које може ваздух сабијати. Означимо запремину тога шкодљивог простора са v_0, и он дејствује, као да је запремина резервоара за његову запремину повећана. Према томе биће сада:

$$(V + v_0) P_n = V P_{n-1} + vP_0$$

или:

$$P_n = \frac{V}{V + v_0} P_{n-1} + \frac{v}{V + v_0} P_0$$

и одатле можемо одредити границу сабијања шмрка, јер кад она наступи, онда шмрк више не ради, т. ј. онда је $P_n = P_{n-1}$, те према томе:

$$P_n v_0 = vP_0$$

или:

$$P_n = \frac{v}{v_0} P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 417)$$

Као и код шмрка за разређивање, може се и овде одредити притисак гаса у резервоару после n потега клипа. Исписаћемо једначине које представљају притиске после сваког потега клипа:

$$P_1 = \frac{V}{V + v_0} P_0 + \frac{v}{V + v_0} P_0$$

$$P_2 = \frac{V}{V + v} P_1 + \frac{v}{V + \text{в}_0} P_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n = \frac{V}{V + v} P_{n-1} + \frac{v}{V + v_0} P_0$$

Помножимо прву једначину са $\left(\frac{V}{V + v_0}\right)^{n-1}$, другу са $\left(\frac{V}{V + v_0}\right)^{n-2} \ldots n$-ту са $\left(\frac{V}{V + v_0}\right)^0$, па их саберимо:

$$H_n = \left(\frac{V}{V + v_0}\right)^n P_0 + \frac{v}{v_0}\left[1 - \left(\frac{V}{V + v_0}\right)^n\right] P_0$$

За n бескрајно велико, израз $\left(\frac{V}{V + v_0}\right)^n$ постаје раван нули, и онда гранична вредност за притисак биће као и горе:

$$P_n = \frac{v}{v_0} P_0$$

У осталом то се може схватити и на овај начин. Кад се ваздух под клипом сабије сав у шкодљиви простор, и кад тај тако сабијени ваздух достигне онај притисак који влада већ у резервоару, онда се вентил не може више отворити, и дејство шмрка достигло је границу. Та је граница одређена Мариотовим законом:

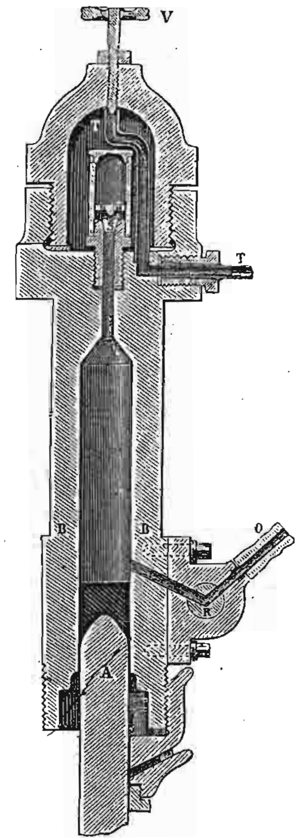
$$v_0 P_n = vP_0.$$

902. Шмрк за високе притиске. — Као што смо видели, горњом конструкцијом шмрка за сабијање може се сабити ваздух до на 20—25 атмосфера. За мало веће притиске може се употребити иста конструкција, али цилиндар треба да буде дугачак и узан, отприлике један сантиметар. За врло велике притиске конструисао је Кајте (Cailletet) шмрк код кога нема шкодљивог простора и којим се може сабити ваздух до 200 атмосфера.

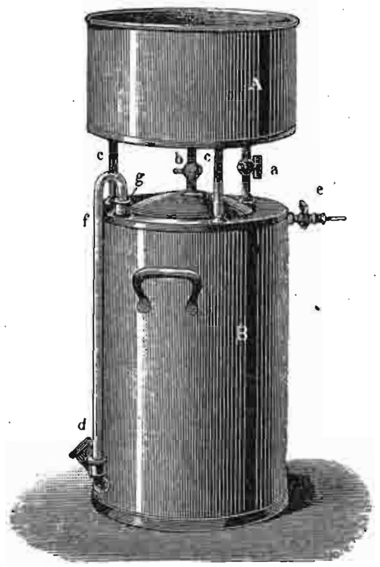
Главни део тога шмрка у пресеку представља сл. 509. Крај клипа је коничан, а тако исто и дно цилиндра, које је окренуто на више. Изнад клипа се налази у цилиндру извесна количина живе, а вентил за пуштање гаса кроз цев o замењен је сада славином R која се отвара и затвара аутоматски нарочитим механизмом; клип се потискује замајцем (који на слици није представљен), који у исти мах креће и механизам славине *R*.

Кад се клип потисне на више, жива испуни горњи узани део цилиндра и отвори конични вентил *S*, те тако сву количину гаса истера пред собом у резервоар.

У последње се време ови шмркови за сабијање гасова употребљавају нарочито за кондензовање гасова. Онда се називају *кондензациони шмркови*.



Сл. 509.



Сл. 510.

Гасометри.

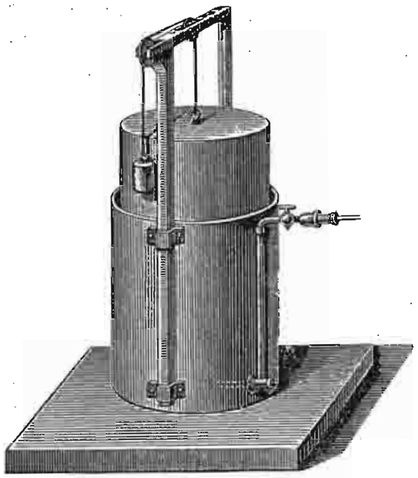
903. Под овим именом познате су обично справе у којима се *чувају* или скупљају гасови, и ако би тај назив приличио справама које *мере* гасове. Згодније би било прву врсту справа, о којима ћемо ми и да говоримо, назвати резервоарима за гасове.

Такав један мали резервоар за гас или гасометар представљен је на сл. 510. Гас се чува у цилиндру *B* који је овде од метала, а може бити и од стаклета. Пуњење суда *B* гасом бива на овај начин. Отвор *d* се затвори, па се сипањем воде у *A* кроз цеви *a* која

силази до дна суда *B*, и *b* која се свршава на поклопцу његовом, напуни водом цео суд *B*. По себи се разуме, да славина *e* треба да буде отворена, да би ваздух из суда *B* изишао. Кад је суд напуњен водом, горње се славине све затворе а отвори се затварач *d* и туда пропусти гас којим хоћемо резервоар да напунимо. Гас ће, улазећи кроз воду у резервоар, заузимати њено место, и она ће кроз исти отвор *d* истицати, све док сва не истече, т. ј. док се резервоар сасвим не напуни. Сад се затварач *d* затвори.

Кад нам је гас из резервоара потребан, отворићемо славину *a*, пошто најпре горњи суд *A* напунимо водом, и вода ће, улазећи у резервоар, потискивати гас, који сад може кроз отворену славину *e* отицати. Стаклена цев *f* показује нам колико још имамо гаса у резервоару.

904. Ова врста гасометра има две незгоде, и то: што гас не истиче под сталним притиском и што се цела количина воде из суда *B* при пуњењу гасом мора испразнити. Стога су згоднији тако звани звонасти гасометри сл. 511., који су нарочито у врло великом размеру употребљени за чување и скупљање светлећег гаса. Спољашњи отворени цилиндарски суд напуни се водом један пут за свагда, и у ту воду се спусти озго, изврнут цилиндарски суд, тј. звоно. Цев која споља носи славину улази унутра и кроз воду се пење до изнад њене површине тако, да ће звоно својим притиском истерати кроз ту цев сав ваздух који је под њим, кад се спусти до површине воде. Гас којим се хоће гасометар (сада ово звоно) да напуни, пушта се кроз исту цев у њега, и тај гас мора имати већ толики напон, да може подићи звоно из воде и купити се у њему. Један пут звоно напуњено, својом ће тежином притискивати на гас који је у њему и натерати га да изађе кроз цев, кад се славина отвори. У великим гасометрима имају нарочите цеви за пуњење и пражњење или отицање гаса.

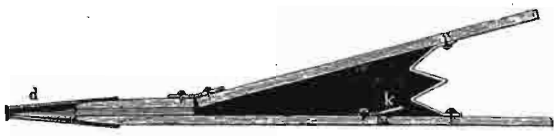


Сл. 511.

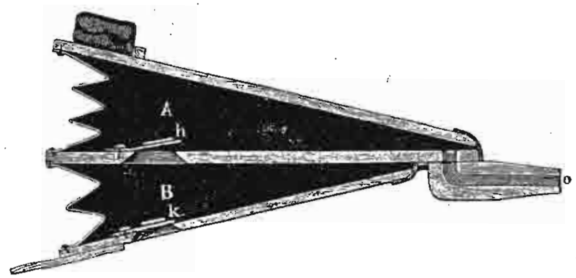
Мехови и вентилатори.

905. Мехови служе да на једно одређено место спроведу јачу или слабију ваздушну струју. Најпростија конструкција мехова је представљена на сл. 512. Кад се поклопац подигне, отвара се вентил *k*, те ваздух уђе у мехове: спуштањем поклопца он се кроз дуваљку *d* истерује.

Оваким се меховима не дува непрекидно, већ се струја при сваком подизању поклопца прекине. За непрекидно дување, мехови имају два одељења *A* и *B* (сл. 513.) с вентилима *k* и *h*. Непосредно се подиже средња преграда на којој је вентил *h* и усисава ваздух споља кроз *k*. При спуштању те преграде ваздух пређе у *A* одакле, нагомилан, а под притиском горњег поклопца и тега на њему, струји непрекидно, и ако се средња преграда подиже и вентил *h* за то време затвори.



Сл. 512.



Сл. 513.

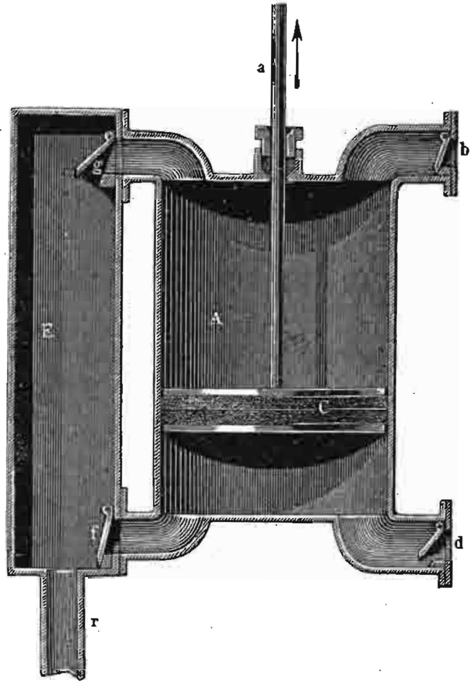
Кад су потребне велике и јаке струје ваздушне, онда су мехови удешени по систему шмркова сл. 514. Као што се из слике види, ваздух споља улази кроз отвор е *b* и *d* а кроз *f* и *g* спроводи се најпре у резервоар *E* па одатле кроз цев *r* на одређено место.

Овде спадају и вентилатори којима је задатак да обнављају ваздух у извесним просторима, у коме се он ма каквим путем квари. У главноме вентилатори су слични по конструкцији са центрифугалним шмрковима за воду (в. сл. 504.), премда их може бити и других система. По дејству своме, вентилатори могу из датога простора сисати покварен ваздух, (тако да чист ваздух улази кроз друге отворе), или могу у тај простор утеривати чист ваздух, те се према томе деле на вентилаторе за сисање и на вентилаторе за дување. — На сличан начин раде и ексхаустори или справе, које издвајају и одводе прашину, отпатке и т. д.

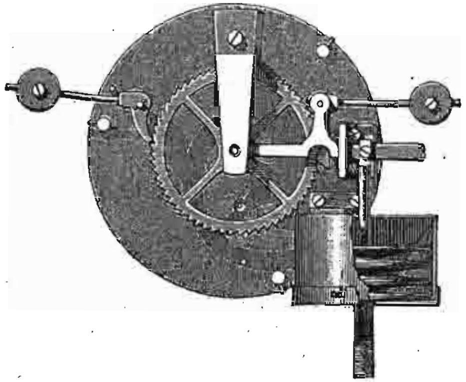
Пневматички сахат, пошта, звоно и т. д.

Све ове справе оснивају се на употреби сабијеног ваздуха у једном или другом облику.

906. Пневматички сахат. — Такви су сатови употребљени у великим варошима, да се с једног централног места, пренесе време на разне крајеве вароши. То се пренашање времена може извршити и електричним путем; међутим, овде ће бити говора о преношењу времена сабијеним ваздухом. Поједини сахатови, растурени по разним деловима вароши, немају у себи сахатног механизма, него су цевима повезани с једним централним сахатом, који с времена на време (обично сваке минуте) пушта у цев сабијен ваздух и тиме креће једновремено њихове казаљке. Механизам који помоћу сабијеног ваздуха креће казаљке пневматичког сахата, представље је на слици 515. Сабијени ваздух улази у једну набрану кесу од каучука, надува је и она потисне једну полугу која опет покрене један зупчаст точак са



Сл. 514.



Сл. 515.

60 зубаца, на чијој је осовини утврђена минутна сказаљка. При сваком надимању кесе, зупчасти се точак помакне за један зубац т. ј. његова се казаљка премести за један минут. Обичном везом помоћу зупчастих точкова) кретање те минутне казаљке преноси се на сахатну казаљку.

907. Пневматична пошта. — За брзо преношење дописних тако званих телеграфских карата у великим варошима постоји читава мрежа цеви, у којима се под притиском сабијеног ваздуха крећу металне кутије, обложене кожом и напуњене горњим картама. Одједанпут се шаље од прилике по десет таквих кутија, које са једним запушачем сачињавају један воз тежак око 4 килограма. У Паризу су цеви широке 6·5 см. у пречнику, премда могу имати и друге пречнике. На полазној се станици воз потисне сабијеним ваздухом или се на долазној станици ваздух разреди, тако да је разлика притиска с једне и друге стране воза од прилике $^3/_4$ атмосфере, и та је разлика довољна да воз пређе један километар за минут. Растојање између две станице обично није веће од два километра, јер у дугачким цевима брзина воза јако опада. Ако је у једној цеви од 1000 метара под притиском једне атмосвере, брзина воза 20 метара у секунди, та ће брзина, под истим притиском спасти, на 6 метара у цеви од 10 километара, а на 4·5 мет. у цеви од 20 км.

908. Пневматичне кочнице. — У новије доба употребљен је сабијен ваздух за пневматичке кочнице система Вестингаус (*Westinghouse*) на железничким возовима. Једна цев, која спаја сва кола у возу, напуњена је сабијеним заздухом и тај ваздух дејствује на кочнице тако, да им смета да зауставе кола. Сваки прекид у цеви било случајан или хотимичан прекине дејство сабијеног ваздуха, кочнице аутоматски укоче точкове и за неколико секунди зауставе воз.

909. Пневматичко звоно. — За извесне радове под водом на дну река, канала и т. д. служило је у прво доба тако звано гњурачко звоно. То је обичан већи или мањи цилиндричан суд, који се изврнут, т. ј. пун ваздуха спусти у воду. Под звоном се налази и радник који одређени посао има да изврши. Међутим се дисањем радника ваздух под звоном брзо поквари и да се тој незгоди доскочи, споји се дно звона једном цеви од каучука са спољашњим ваздухом на површини воде и кроз ту се цев, нарочитим шмрком за сабијање ваздуха, шаље ваздух под звоно, у коме не само радник може дуже времена дисати, већ тај сабијени ваздух истискује воду из звона, те радник ради готово у сувоти. Тако је од гњурачког звона постало пневматично звоно или казан.

На сл. 516 имално тако једно звоно изврнуто, запремине V, у коме је сабијени ваздух сведен на запремину V_1. На основу оних величина које су на слици означене а по Мариотову закону имамо:

$$Vh = V_1(h + h_1 + x)$$

где h значи водени стуб раван атмосферском притиску. Кад са s означимо пресек звона, чија је дужнина l, онда је

$$V = ls \text{ и } V_1 = xs$$

Сада ће бити:

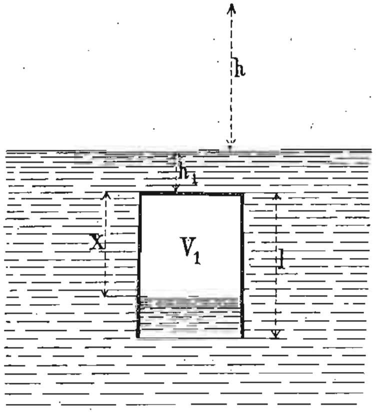
$$V : V_1 = l : x$$

Заменом у горњој једначини имаћемо x, т. ј. висину простора напуњеног ваздухом:

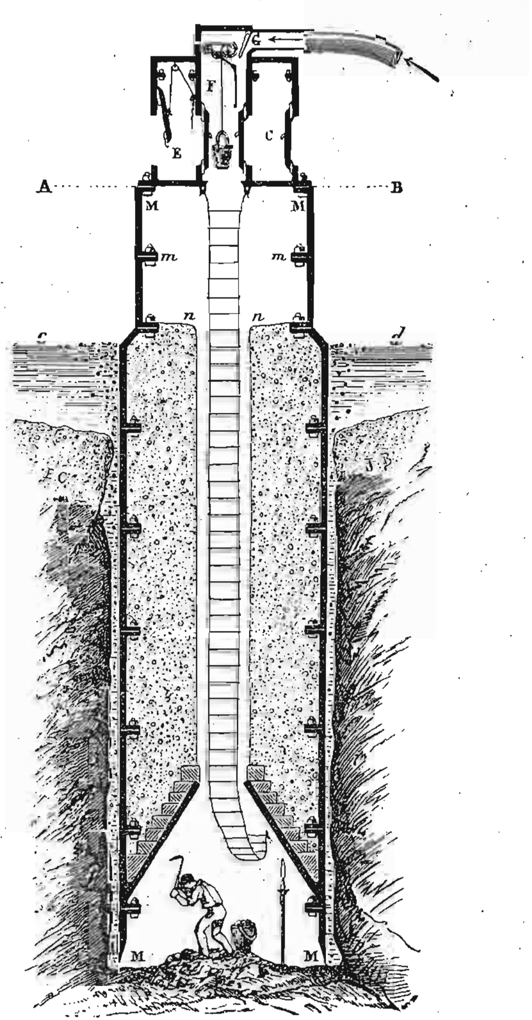
$$h : h + h_1 + x = x : l$$

одавде:

$$x = -\frac{h + h_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2 + hl} \quad \cdots \quad 418)$$



Сл. 516.



Сл. 517.

За веће техничке радове, зидање стубова за мостове и т. д. пневматичко звоно или казан добива облик представљен на сл. 517. Сада тај казан полази с површине до дна и једним делом улази у земљу на дну корита, а вода се из њега истерује, као што је горе речено, сабијањем ваздуха.

За мање радове, као што је испитивање дна река и мора, за скупљање сунђера, шкољака, остатака разбијених бродова и т. д.

служи скафандер (сл. 518.), т. ј. херметички затворен шлем са стакленим прозорима за гледање, спојен једном цеви од каучука са шмрком за сабијање ваздуха на површини воде.

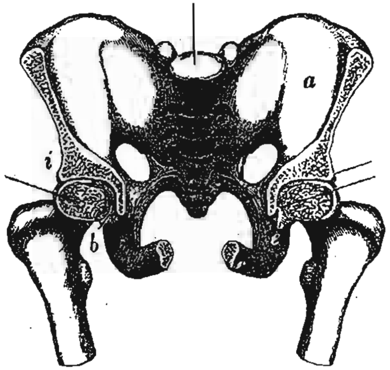
Сл. 518.

Сем горе изложених примена сабијени је ваздух употребљен у моторима са сабијеним ваздухом за трамвај и аутомобиле, код машина за бушење стена у тунелима и т. д.

Атмосферски притисак и човек.

910. Површина човечјега тела износи више од једног квадратног метра, те према томе целокупни притисак атмосферски на човека износи 15000 до 20000 кгр. Могло би се према томе питати, како се човечје тело под толиким притиском не смрви. Међутим, кад знамо, да гасови преносе притисак на све стране, те према томе и тај притисак на човека не дејствује само споља према унутрашњости његова тела, већ су ваздухом или течностима које такођер преносе притисак испуњени сви судови и канали његови, онда се по себи разуме да притисак атмосферски не може имати никаквих штетних последица за човека. Уз то не треба да заборавимо, да је сваки делић човечјег тела постао и развио се на том притиску, који је с малим променама један исти.

Анатомским испитивањем међутим нашло се, да се нпр. глава бутне кости *b* (сл. 519.) у својој чаши *i* одржава само атмосферским притиском, јер кад се сви мишићи који бутну кост за карлицу вежу, скину, бутна се кост не може извадити из своје чаше. Напротив, најмањи отвор кроз карлицу, који би у чашу *i* пустио ваздух, истераће бутну кост из њенога лежишта, и ако су сви мишићи њени неповређени.



Сл. 519.

911. И ако смо горе објаснили, да атмосферски притисак не утиче штетно на човечје тело, ипак ваља да напоменемо да ствар стоји тако само дотле, док се тај притисак мења у малим границама и док се та промена не врши нагло. Ако на пример притисак опадне тако брзо, да нема кад (због јаког трења у узаним судовима) да се изравна у истој мери у свима каналима, нарочито у капиларним судовима човечјег тела, онда унутрашњи јачи притисак у тим судовима може те делове тела да напрегне више или мање, па често и да их разбије. Тиме се објашњава тешкоћа у дисању и зујање ушију на великим висинама, па и онда кад човек мирно седи у ваздушној лопти; пуцање крвних судова и крволиптење у носу и ушима као и несвест путника, кад се ваздушна лопта попне на врло велике висине.

Слично је дејство на човечје тело и сабијеног ваздуха, и зато радници у пнеуматичким казанима, ако у њима влада велики притисак, морају поступно улазити из обична притиска у тај велики. Кад радник улази у такав казан, он најпре уђе у једну одвојену комору *E* (види сл. 517.), затвори је и отвори једну славину која полако доводи сабијен ваздух из *F*. Навикнув се на тај притисак он отвори врата која воде у казан и која раније није ни могао отворити, јер су била притиснута унутрашњим јачим притиском, и иде на посао. Ако је притисак ту знатан, радник не може остати дуго на послу, већ се враћа истим поступним начином као што је и ушао.

Исто дејство притиска на човечје тело вреди и за остале животиње. Имамо само да додамо, да се помоћу ваздушног притиска одржавају муве, гусенице и друге сличне животиње на глатким усправљеним површинама. Оне имају на ногама мале плочице за сисање; кад их, ставши на такву глатку површину, у средини мало повуку, оне између површине и те плочице разреде ваздух.

912. *Примери.* — 1. Запремина цилиндра једног шмрка за разређивање ваздуха има 0·7, а реципијенат с каналом 2·8 куб. десим. Ако је густина ваздуха у почетку била = 1, онда колика је та густина x после осам потега клипа?

$$x = \left(\frac{2·8}{0·7 + 2·8}\right)^8 = 0·8^8 = 0·1678.$$

2. Под звоном шмрка за ваздух налази се крива натега, чија је највиша тачка h см. изнад површине живе у суду. Запремина звона нека буде R, цилиндра S, а баромет. притисак; b после колико потега клипа ће престати натега да дејствује?

$$n = \frac{\log b - \log h}{\log (R + S) - \log R}.$$

3. Код једног шмрка за сисање и притискивање пресек клипа износи 60 кв. см. а висина отвора за истицање 3 мет. изнад површине воде, а) колика је сила потребна за тај шмрк? б) колики је рад потребан кад се клип 15 пута повуче и његов ход буде 0·5 мет? в) колико ће се воде извући за 1 мин., кад се за то време клип 15 пута повуче, и колики је ефекат шмрка?

а) 60·300 = 18000 гр. = 18 кгр. била би сила кад не би било трења и других отпора. Обично се узима код добрих шмркова да се $^1/_5$ теоријског рада троши на те отпоре, те према томе била би сила 18 + 3·6 = 21·6 кгр.

б) Теоријски рад износи 18 · 0·5 · 15 = 135 мет. кгр., дакле стварни рад (према горњем) $= 135 + \frac{1}{5} \cdot 135 + 162$ м. кгр.

в) Количина воде износи $\frac{60.300}{1000000} \cdot 15 = 0 \cdot 27$ куб. мет. Због непотпуног затварања клипа рачуна се 0·1 на губитак, те према томе 0·27 · 0·9 = 0·243 куб. м. Ефекат шмрка је $\frac{162}{60} = 2·7$ мет. кил. у сек.

ДЕО ШЕСТИ

Кретање гасова.

Аерокинетика.

913. Оне опште одредбе, које смо раније извели за кретање течности, вреде и за гасове, ако под течностима обухватимо и њих. Према томе, принцип паралелности слојева и континуитета течности (дакле и гасова) задржава и овде своју вредност. Једну само допуну односно принципа о континуитету гасова имамо да учинимо. Кад се једна течност, рецимо вода, креће у обичним приликама, она на целом свом путу задржава исту спец. тежину или густину, јер ако се притисци које вода у тим приликама трпи и промене, она је за њих нестишљива као што је то у хидростатици образложено. Стога је за континуитет течности био довољан однос само између пресека и брзине, т. ј.:

$$F_1 v_1 = F_2 v_2 = \text{const.}$$

Код гасова, који при најмањој промени притиска мењају своју запремину по Мариотову закону, па дакле и густину, горњи се израз за континуитет у толико мења, односно допуњује, што поред брзине и пресека мора да дође и спец. тежина, која се с тим величинама једновремено мења због велике стишљивости гасова. Према томе, израз за принцип о континуитету гасова биће:

$$F_1 v_1 \sigma_1 = F_2 v_2 \sigma_2 = \text{const.}$$

или, пошто су спец. тежине сразмерне притисцима:

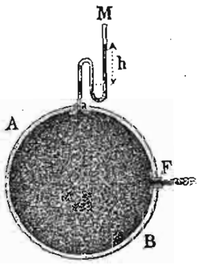
$$F_1 P_1 v_1 = F_2 P_2 v_2 = \text{const}.$$

Што се тиче начина кретања гасова, и за њих вреди она подела на потенцијално и вијорно кретање коју смо извели за течности. О примерима за вијорно кретање гасова било је већ говора приликом проучавања виорног кретања течности (809). Остаје нам још да посебице проучимо само прву врсту кретања код гасова, у колико се она од кретања течности морају одвојити.

Потенцијално кретања може се код гасова (као и код течности) поделити на две групе: на прогресивно (струјање или протицање) и наизменично кретање (таласање). О овом последњем биће говора у науци о таласању. Овде ћемо прегледати само прву врсту потенцијалнога кретања у одговарајућим одељцима као и код течности.

Истицање гасова под сталним притиском.

914. Код истицања течности у опште, течности су истицале у простор напуњен ваздухом, дакле у простор напуњен средином врло мале густине према густини течности која истиче. Из тога разлога истицање течности сматрано је као да оно само постоји, и није вођен рачун о утицајима на брзину истицања који су долазили од ваздуха у коме се то истицање врши, јер су заиста ти утицаји били врло слаби. Кад говоримо сада о истицању гасова, онда морамо да водимо рачуна и о простору у коме се то истицање врши, и за то ћемо разликовати ова два случаја: истицање гасова у безваздушни простор, и истицање једнога гаса у другом.



Сл. 520.

915. **Брзина истицања гасова.** — По себи се разуме, да се гас који истиче, (сл. 520), налази под сталним притиском *h*. Тај се сталан притисак може одржати, ако узнемо као и код течности, да је суд из кога гас истиче врло велики и да је количина гаса која из њега истече врло мала. У том случају, кад гас из суда истиче у безваздушни простор, добијамо за брзину истицања онај исти образац као и код течности, т. ј.:

$$v = \sqrt{2\,g\,H}.$$

Код истицања течности ми смо притисак под којим течност истиче мерили висином стуба *h* те исте течности, међутим као што знамо, притисак гаса не меримо висином гасног већ висином течног стуба, чија се спец. тежина разликује од спец. тежине гаса који истиче. Због тога се *H*, које у горњем обрасцу значи висину гаснога стуба који одговара притиску под којим гас истиче, мора изразити висином оне течности којом у опште меримо притиске код гасова. Ако је дакле спец. тежина гаса према води $= s$, и ако је висина воденога стуба која одговара гасном стубу *H* и притиску под којим гас истиче *h*, онда је:

$$H = \frac{h}{s}$$

те ће због тога горњи израз бити:

$$v = \sqrt{2 g \frac{h}{s}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (419$$

где се притисак мери воденим стубом висине *h*. Ако *h* значи висину *живина* стуба, којим меримо притисак гаса и ако са σ означимо спец. тежину живе, онда ће горњи образац добити овај облик:

$$v = \sqrt{2\,g\,h\frac{\sigma}{s}}$$

Да применимо први образац на ваздух. Под нормалним атмосферским притиском, спец. тежина ваздуха је 0·00129. Ако се ваздух сем атмосферског притиска, који одговара висини воденог стуба од 10·33 мет., налази још под неким притиском воденог стуба од *h* метара, онда је његова спец. тежина:

$$s = 0{\cdot}00129\,\frac{10{\cdot}33 + h}{10{\cdot}33}.$$

Према томе је брзина истицања ваздуха у тим приликама:

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{h \cdot 10{\cdot}33}{0{\cdot}00129\,(10{\cdot}33 + h)}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (420$$

Ако притисак ваздуха меримо живиним стубом, па се он у гасометру из кога истиче налази поред атмосферског притиска b још под притиском од h метара живиног стуба, онда ће спец. тежина ваздуха бити:

$$s = 0{\cdot}00129 \cdot \frac{b + h}{0{\cdot}76}$$

а висина H ваздушног стуба те густине, која би одржавала равнотежу живином стубу од h метара била би:

$$H = h\frac{\sigma}{s}$$

где s значи спец. тежину затвореног ваздуха, а σ спец. тежину живе (обадве према води). Заменивши поједине вредности добивамо:

$$H = h\frac{13{\cdot}6 \cdot 0{\cdot}76}{0{\cdot}00129\,(b + h)}$$

$$= 8012\,\frac{h}{b + h}.$$

Најзад, брзина истицања биће:

$$v = \sqrt{2\,g \cdot 8012\,\frac{h}{b + h}}$$

$$= 396{\cdot}5\sqrt{\frac{h}{b + h}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (421$$

Ова нам једначина даје брзину којом би истицао ваздух из отвора некога суда у коме сем ваздушног притиска влада још притисак од h метра живина стуба; за $b = o$, биће:

$$v = 396{\cdot}5\sqrt{\frac{h}{h}} = 396{\cdot}5 \text{ метара}$$

дакле, брзина истицања у празан простор остаје иста, па ма под каквим притиском h био ваздух.

916. Кад притисак гаса меримо живиним стубом и кад гас истиче у безваздушни простор, нашли смо образац:

$$v = \sqrt{2\,g\,h\frac{\sigma}{s}}$$

Ако би гас истицао у неки простор у коме се налази исти гас под неким притиском h_1 онда ће гас истицати с разликом притисака, т. ј. биће:

$$v = \sqrt{2g\,(h - h_1)\frac{\sigma}{s}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (422$$

Ако истиче неки гас у простор у коме се налази други неки гас, онда ако су им притисци једнаки, за гасове се каже, да се *мешају*, и цела се појава назива *дифузија* гасова; а ако су им притисци разни, онда брзина истицања зависи од разлике притисака.

917. Да видимо још како стоје брзине два разна гаса под једним истим притиском. За њих вреде једначине:

$$v_1 = \sqrt{2g\frac{h}{s_1}} \quad \text{и} \quad v_2 = \sqrt{2g\frac{h}{s_2}}$$

одакле је:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_1}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; (423$$

Брзине два гаса разних спец. тежина, а под једнаким притиском, изврнуто су сразмерне квадратном корену из њихових специфичких тежина.

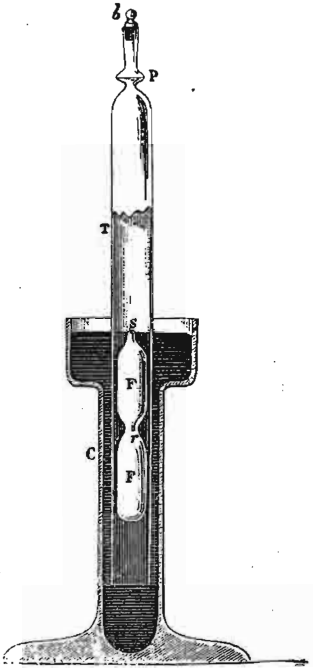
Густина угљене киселине према ваздуху је $= 1{\cdot}5$, а водоника $= 0{\cdot}069$. Према томе брзине истицања та два гаса, према брзини истицања ваздуха, износе:

$$\frac{v}{\sqrt{1{\cdot}5}} = 0{\cdot}816\,v \quad \text{и} \quad \frac{v}{\sqrt{0{\cdot}069}} = 3{\cdot}8\,v.$$

Пошто је *време истицања* изврнуто сразмерно *брзини истицања*, онда следује да су времена истицања двеју једнаких гасних количина, а под једнаким притисцима, управо сразмерне квадратним коренима из специфичких тежина, т. ј.:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{s_1}}{\sqrt{s_2}} \quad \text{и} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (424$$

918. На овоме је закону основао Бунзен (Bunsen) своју методу за одређивање специфичких тежина гасова. Цев *T* сл. 521. замочена у један суд *c* напуњен живом напуниће се гасом чија се спец. тежина тражи. Та је цев на горњем крају сужена и у њој је код места *P* затопљена једна танка платинска плочица, пробушена у средини врло узаним отвором. Крај цеви затворен је запушачем *b*. Кад се цев запушачем затвори, спусти се толико у суд са живом, док врх *s* једнога стакленог пловка *FF* не дође у исту висину с површином живе; за тачније посматрање тога положаја употреби се дурбин. Сад се отвори запушач *b*, гас ће кроз онај узани отвор на платинској плочици истицати. Овако истицање гаса кроз врло узан а кратак отвор назива се *ефузија*. Сад ваља посматрати време t_2, за које ће пловак толико изаћи из живе, да једна белега *r* на њему дође до површине живе. Тај се исти посао понови с ваздухом и одреди се време t_1. Помоћу горњег обрасца, одреди се густина гаса према ваздуху. Бунзен је нашао за праскави гас, добивен разлагањем воде електричном струјом (2 запр. водоника и 1 запр. кисеоника), и ваздух ове вредности:



Сл. 521.

ВАЗДУХ		ПРСКАВИ ГАС
117·9	секун.	75·4
117·0	»	75·5
117·9	»	75·6
117·6	»	75·9
$t_1 = 117·6$		$t_2 = 75·6$

Из тих вредности добива се спец. тежина праскавог гаса према ваздуху:

$$s = \frac{75·6^2}{117·6^2} = 0·413.$$

Кад се спец. тежина израчуна из познатих вредности за *H* и *O*, добива се 0·415.

919. **Количина истеклог гаса.** — Количину гаса, која кроз извесан отвор пресека *f* истече за једну секунду, добили бисмо теоријским путем, кад бисмо тај пресек помножили брзином. Према томе за *t* секунада добили бисмо количину гаса:

$$Q = f t v = f t \, 396·5 \sqrt{\frac{h}{b+h}}$$

Кад се води рачун о температури ϑ гаса и његову коефиц. ширења $\alpha = 0·003665 = 0·004$, онда горњи образац прелази у овај:

$$Q = f t \, 396·5 \sqrt{h \cdot \frac{1+\alpha\vartheta}{b+h}}$$

Међутим, у ствари добивена количина гаса не одговара горњој теоријској вредности, већ је и овде, као и код течности, она увек мања. Стога ваља горњу теоријску вредност помножити извесним коефицијентом η, који је увек мањи од јединице, те ће онда образац бити:

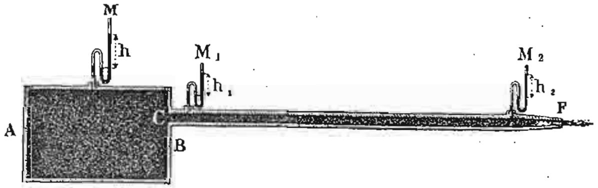
$$Q = \eta f t \, 396·5 \sqrt{\frac{h}{b+h}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (425$$

четку и на крају капилара) довољан, транспирација се врши на исти начин у безваздушан простор или гас. Од кисеоника, азота, угљене киселине, хлора, барског гаса и водоника транспирирају за исто време запремине које стоје у овим односима:

1 : 1·15 : 1·37 : 1·5 : 1·815 : 2·26.

Аерокинетички притисак.

922. Кад гас протиче кроз какву цев истога пресека по целој дужини, онда се намештеним манометрима на разним местима цеви (сл. 522) може видети како се притисак мења и како притисак, који цев има да издржи, све више опада, у колико се више приближујемо отвору цеви. Тај притисак који на извесном месту цеви влада при покретном гасу назива се *аерокинетички притисак*, за разлику од аеростатичког. Промена притиска при истицању гасова, и свему је слична промени коју смо у своје време нашли за истицање течности под истим или сличним приликама.



Сл. 522.

Ако се пресек цеви или у опште суд кроз који један гас протиче мења, онда је аерокинетички притисак регулисан једначином о континуитету гасова, т. ј.:

$$F_1 v_1 \sigma_1 = F_2 v_2 \sigma_2$$

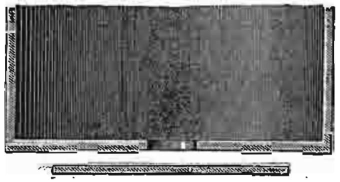
или још боље:

$$F_1 v_1 P_1 = F_2 v_2 P_2$$

а то значи, кад на пр. при сталној брзини гаса пресек порасте, онда притисак опадне, и обратно. Да ли ће у том случају притисак више или мање опасти или порасти зависиће и од промене брзине на том пресеку, пошто се с променом пресека и притиска мења и брзина.

923. Ево неколико важних случајева у којима се аерокинетички притисак може у једном или у другом облику јавити.

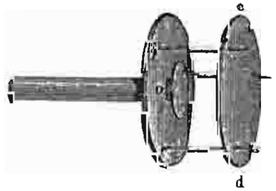
На равном дну једнога великог резервоара (сл. 523) направили су Клеман и Дезорм (Clement, Desormes) један отвор од 2 до 5 сантимет. Кад се пусти да ваздух кроз тај отвор слободно истиче, па се на отвор мете једна дрвена или метална плоча од 20 см. пречника од прилике, онда кад се први отпор савлада и плоча донесе до дна, она више неће отпасти, већ ће близу отвора треперити, приближујући се и удаљујући врло брзо од отвора. Ваздух, међутим истиче с јаким шумом између плоче и дна. Ако би смо хтели плочу да одвојимо од отвора, морали би употребити приличну снагу за то.



Сл. 523.

Ево како се та на први поглед загонетна појава објашњава. Ваздушни млаз, излазећи из отвора, расплине се на великом простору и у врло танкој дебљини између даске и дна. У след тако јаког раширења, његов притисак и ако је при истицању био већи, постаје сад много мањи од атмосферског, те због тога, атмосферски притисак, притискује даску на отвор. Чим даска затвори отвор, њу потисне унутрашњи притисак сабијеног гаса и одвоји је од дна, због чега она мора следујући час једном час другом притиску треперити.

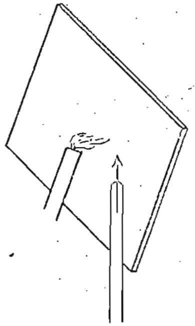
Исти тај експеримерат у мањем размеру представљен је на сл. 524. Пред отвором о хоризонталне цеви утврђена је једна плочица мало већег пречника од отвора, тако да се ваздух, дуван кроз цев, рашири на све стране ка периферији веће плоче утврђене на цеви. Услед разређења ваздуха, покретна плоча cd приближиће се ка отвору и то с даљине и од 4—5 см.



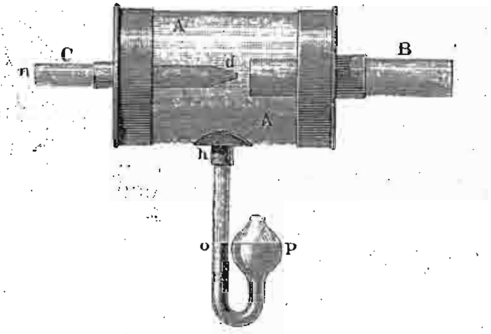
Сл. 524.

И експеримент, представљен на сл. 525, објашњава се на исти начин. Дувајући кроз цев према стакленој плочи, ваздух се не одбија са плоче, него се по њој растури, услед чега наступи мањи притисак од атмосферског и пламен се свеће према плочи повија.

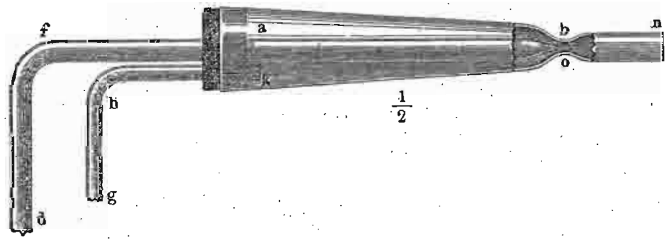
Промена притиска с променом пресека цеви може се посматрати на апарату сл. 526. Широка цев *A* затворена је на оба краја металним поклопцима, кроз које пролази с једне стране шира цев *B* а с друге ужа *C*; код *h* намештен је манометар *P*. Дувајући кроз узану цев ваздух се нагло рашири излазећи, из њеног узаног краја *d*, услед чега ће притисак опасти и течност се у манометру са стране *o* попети, а то значи да ће ваздух из цеви *o* бити усисан. Обратно ће бити, кад се дува кроз цев *B*.



Сл. 525.



Сл. 526.

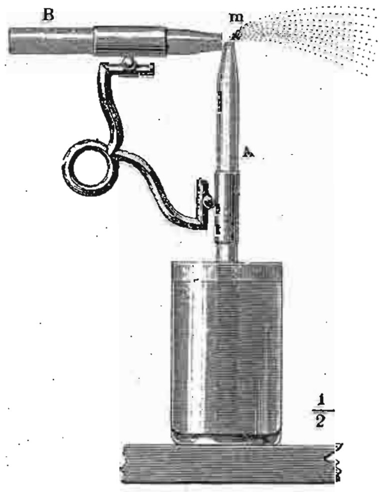


Сл. 527.

Дејство сисања још је јаче код апарата који показује сл. 527 и који је само у неколико измењен горњи апарат. Јака струја ваздушна пролази кроз цев *df* и нагло се шири код *o*, услед чега наступи сисање у цеви *ghk*. Кад се место ваздуха кроз прву цев спроведе водена пара, под мало већим притиском, она ће толико разредити ваздух у цеви *a* да ће се кроз цев *gh*, ако је замочена у воду, попети вода и избијати у јаком млазу код *n*. На тај су начин конструисани тако зване *парне шприцаљке* или *инјектори* за пуњење парних казана водом.

На томе су принципу конструисане разне врсте справа за кретање гасова и ваздуха, као што су дуваљке, вентилатори, ексхаустори, шмркови и т. д., као и за подизање и кретање чврстих ситних тела, зрневља, песка, угљена од костију и т. д.

Најзад да споменемо да истим начином дејствују и разне прскалице, употребљене у модерној козметици (сл. 528), код којих се јаком ваздушном струјом, течности тако распу, да постану једна врста течне прашине. По себи се разуме да се и овде ваздух за друге потребе може заменити паром.



Сл. 528.

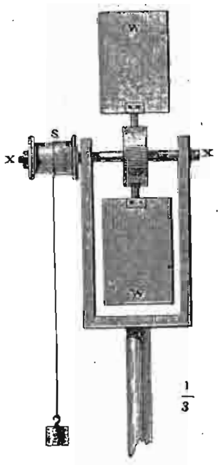
Отпор ваздуха и гасова.

924. Кад се једно тело креће кроз ваздух, онда оно, прелазећи с једног места на друго, мора уклањати све оне ваздушне молекиле, на које буде на свом путу наишло. То уклањање молекила састоји се у томе, што ће покретно тело саопштити тим молекилима извесну брзину, те да се они извесном брзином крену и оду ван путање покретног тела. Али то уклањање молекила покретно тело може вршити само на рачун своје сопствене брзине, а то онда значи, да ће брзина тела, нарочито ако пут траје дуже, т. ј. ако је број молекила које тело има да уклони велики, знатно опасти. За то опадање

брзине покретног тела у ваздуху каже се да долази од отпора ваздуха.

По себи се разуме, да ће опадање брзине покренутог тела, т. ј. отпор ваздуха, зависити од брзине којом се тело кроз ваздух креће. Јер ако тело извесног пресека пређе у секунди само један метар, оно ће уклонити с пута само оне молекиле који се на дужини тога једног метра налазе; напротив, број уклоњених молекила биће десет пута већи, ако тело пређе десет метара у секунди. Овај је пример узет да се само покаже да ће отпор ваздуха зависити од брзине покретног тела, а не да нам у исти мах да закон те зависности. Јер кад се тело креће два или три пут брже, оно не само да уклања са свога пута два или три пут већи број молекила, него и сваком тако уклоњеном молекилу оно саопштава у исти мах и два пут или три пут већу брзину, те ће стога отпор ваздуха зависити од *квадрата брзине* покретног тела. Овај закон по коме отпор ваздуха расте с квадратом брзине поставио је Њутн (Newton).

Доцније се нашло да отпор ваздуха још брже расте, те због тога на пример кишне капи, које са извесне висине почну убрзано падати, падају на земљу готово једнаком брзином, јер после кратког њихова падања, отпор ваздуха толико порасте, да потре свако ново убрзање, и капи се од тог момента крећу скоро једнаком брзином Једна кишна кап, с висине од 1000 метара, морала би пасти на земљу брзином од 140 метара; међутим, у ствари падају кишне капи на земљу ретко кад с већом брзином од 10 метара.



Сл. 529.

Кад се на иструменту сл. 529. пусти да обешени тег слободно пада, он ће почети свој пад убрзаним кретањем. После врло кратког времена, услед повећане брзине обртања крила, отпор ваздуха ће толико нарасти, да ће падање тела прећи у једнако кретање. На томе се принципу оснивају многи регулатори сатних механизама, на пр. оних, који су употребљени за кретање астрономских екватореалних дурбина.

У опште узев, отпор ваздуха који се противи кретању некога тела зависи: 1, од квадрата брзине покретног тела, изражене брзном висином $\frac{v^2}{2g}$; 2, од пресека F нормалне пројекције површине тела, на коју отпор дејствује у квадр. метр.; 3 од тежине s једног кубног метра оне средине која отпор изазива. Према томе је отпор приближно изражен обрасцем:

$$\omega = \varsigma \; sF \frac{v^2}{2g} \cdot \quad \cdots\cdots\cdots \quad (428$$

где је ς једна константа која зависи од облика тела; за равну површину рачуна се отпор у ваздуху по Добијсону (d'Aubuisson).

$$\omega = 0{\cdot}13 \; Fv^2 \text{ кгр.}$$

За равне површине на 13° Целз. и нормалном притиску је $\varsigma = 1{\cdot}85$. Узев за $s = 1{\cdot}29$, добива се притисак ветра

$$P = 0{\cdot}122 \; Fv^2.$$

Ако се ваздух опире или дејствује под углом α, према правцу кретања, биће

$$P = \varsigma sF \frac{v^2}{2g} \sin^3 \alpha \quad \cdots\cdots \quad (429$$

јер је овде узета релативна брзина $v \sin \alpha$ и притисак $P \sin \alpha$ место нормалног.

За криве лоптасте површине и ваздух $\varsigma = 2{\cdot}5$; за воду је по Вајсбаху $\varsigma = 1{\cdot}56$. За лађе, кад се за F узме нормална пројекција потонулог дела, износи $\varsigma = 0{\cdot}2$ до $0{\cdot}5$.

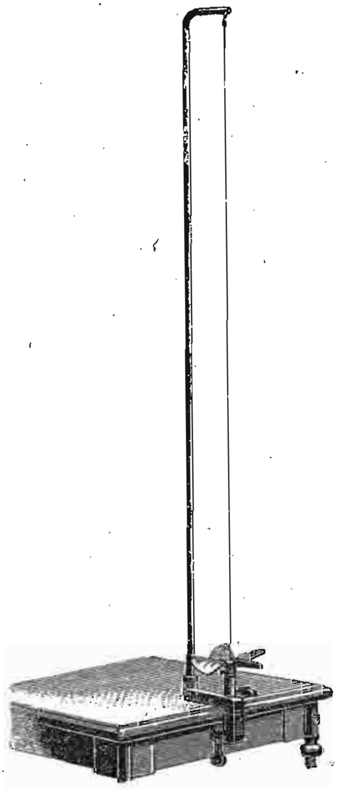
За прелаз убрзанога кретања, на пр. код падања тежине Q у једнако, вреди ова једначина:

$$Q = \varsigma \; sF \frac{v^2}{2g}$$

одавде је та брзина:

$$v = \sqrt{\frac{2gQ}{5 \, Fs}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad 430$$

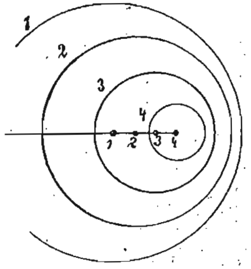
Акционо дејство отпора ваздуха може се експериментално показати апаратом који је представљен на сл. 530. На извесан начин повијена метална крилца ставе се у врло брзо обртање ово вертикално затегнуте жице и отпор ће ваздуха онда толико нарасти, да ће та сразмерно тешка крилца издићи до врха апарата.


Сл. 530.

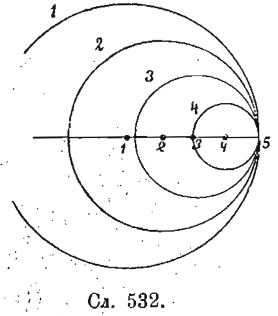
925. Кад се тело крене кроз ваздух, оно ће предњим својим делом згуснути или сабити ваздух, а иза њега остаће разређен ваздух. Ако је кретање споро, као на пример код клатна, онда се те разлике притисака згуснутог и разређеног ваздуха врло брзо изравнају, те стога, на кретање тела не утиче разлика притисака испред и иза њега. Кад је кретање врло брзо, као на пример код пројектила, онда се то изравњавање не може тако брзо извршити и зато, сем горњега отпора, пројектил потискује назад она разлика притиска која сад постоји измеђ згуснутог ваздуха пред њим и разређенога иза њега.

Изравњавање или преношење притиска кроз ваздух врши се оном брзином којом се звук простире кроз ваздух, а то је у округлој цифри 330 метара. Ако се неко цилиндрично тело, на пр. један штап, креће брзо, али мањом брзином од 330 метара у секунди, онда ће, кад врх тела прође кроз тачке 1, 2, 3, 4, сл. 531. поремећен ваздух преносити то ремећење у лоптастим таласима 1, 2, 3 и 4. Ваздух је испред тела нешто мало згуснут, а иза њега разређен, али веће лопте омотавају са свију страна оне мање лоптасте таласе.

Кад брзина покретног тела буде равна брзини звука, т. ј. 330 метара, онда ће доцније произведени таласи додиривати све оне раније произведене у једној тачки 5. Сл. 532.

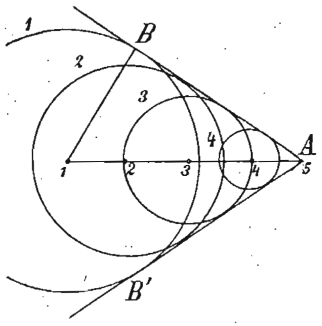


Сл. 531.



Сл. 532.

Ако је најзад брзина тела већа од брзине звука, као што је то случај код пушчаних и топовских пројектила, онда врх тела пробија кроз талас и изазива испред већ изазваних таласа нове таласе, (сл. 533). Онда се с врхом тела креће омотач *BAB'* или анвелопа свију таласа, и ваздух је пред пројектилом знатно згуснут, а за њим разређен. Па пошто се пројектил креће брже но што се та разлика притиска може изравнати, то дејствује непрестано на пројектил сталан притисак с предње стране који га у путу задржава.

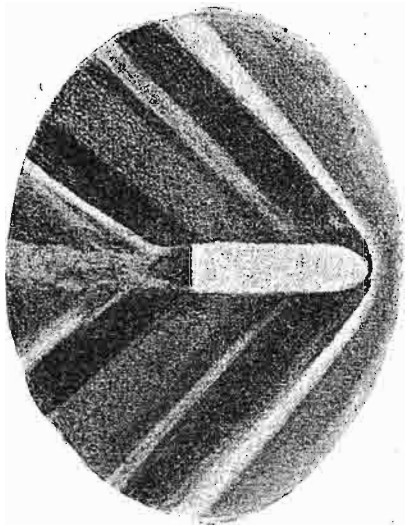


Сл. 533.

Кад се пројектил креће брже од звука, онда ће пројектил стићи до мете пре него што ће се на том месту чути пуцањ. Ни зујање таквог пројектила неће се чути раније, јер се он брже креће и од оних звучних таласа који производе зујање. Кад се пак пројектил креће спорије од звука, онда се код мете чује најпре пуцањ, па за тим зујање и напослетку долази пројектил.

У последње време успели су Мах и Салхер (Mach, Salcher) да непосредно фотографишу облик ваздушног таласног омотача испред пројектила. Таква је фотографиа представљена на сл. 534., и она јасно показује тачност теоријског разлагања, које је горе изведено.

926. Сем брзине, утиче знатно на отпор ваздуха још и површина тела, а нарочито однос између масе и површине тела. Да ће се једно клинасто тело лакше пробијати кроз ваздух као и кроз воду по себи се разуме. Али у колико се једно исто тело више ситни, у толико ће оно и кроз ваздух као и кроз воду спорије падати, јер смањивањем или ситњењем, његова маса, услед које оно пада, брже опада од пресека коме се отпор ваздуха опире. Посматрајмо на пр. лоптицу од креде од 1 мм. у пречнику; она ће извесном брзином падати кроз ваздух. Лоптица од креде, која би имала $\frac{1}{10}$ мм. у пречнику, имала би 1000 пута мању масу од оне горње: сила која је тера да пада, сад је 1000 пута мања него мало час, међутим је пресек на који утиче отпор ваздуха код ове мале лоптице 100 пута мањи него код оне веће. Према томе отпор ваздуха није сада 1000 пута мањи (као што је маса 1000 пута мања) већ само 100 пута, а то значи да је код ове мање лоптице отпор ваздуха према њеној маси 10 пута већи него код оне веће, и зато ће она сада спорије падати, било кроз воду било кроз ваздух. Овим се објашњава оно дуго лебдење извесних ситних делића у течностима као и лебдење прашине у ваздуху, и ако она долази од тела, која су специфички знатно тежа од ваздуха.



Сл. 534.

Струјање ваздуха у атмосфери.

927. У атмосфери нашој постоје кретања разних, већих или мањих маса ваздушних, која постају променом притисака, изазватих разним узроцима. О тим ћемо кретањима или струјама ваздушним рећи неколико речи, пошто детаљније проучавање и излагање закона који њима владају, спада у Метеорологију која се специјално бави механиком и физиком атмосфере.

Главне промене притиска у атмосфери изазива топлота; величину тога притиска у извесно доба и на извесном месту одређујемо барометром. Кад се разна места на земљи, која у једно исто време имају исте барометарске притиске, споје линијама међу собом, добивају се тако зване *изобаре*, т. ј. линије једнаког (ваздушног) притиска. Ваздух ће из места већега притиска струјати ка местима мањега и то би струјање имало ићи управним правцем на изобаре, т. ј. правцем тако званих *градијената*. У самој ствари тако се струјање ваздуха не врши, јер га извесни страни утицаји, као на пр. обртање земље, тежа, разна трења и т. д. мењају. Што се утицаја обртања земље тиче, Шпрунг и Рот, (Sprung, Roth) теоријски су испитивали, како би се на земљи која се обрће, привидно кретала једна тачка изложена само инерцији, кад на њу утиче тежа и отпор трења. Резултат Шпрунгов је овакав: Инертна путања је близу северног пола за 12 сахата на десно (код јужног пола на лево) описани круг, полупречника $\varrho = \frac{v}{2\omega}$, где је v инертна брзина тачке, а ω угловна брзина земље; на ширини φ полупречник круга је $\varrho = \frac{v}{2\omega\sin\varphi}$, али тај круг није затворен, (јер се за време кретања ϱ мења са φ), него се на лево све више и више заплеће у замке. Рот је испитивао општије случајеве и дошао до сложенијех кривих линија: кружних еволвената, спирала и њихових деформисања. У ствари пак, струје ваздушне или ветрови не описују инертне путање, и за то се практична посматрања струја ваздушних не слажу потпунце с теоријским излагањима изведеним на горњим основама. На северној половини земљиној ваздушне струје скрећу десно од градијената и то тим јаче у колико је већа географска ширина и у колико је мање трење. То је тако звани Без - Балотов закон (Buys Ballot). Слагањем две ваздушне струје и њиховим узајамним трењем постају ваздушни вијори, који центрифугалним дејством изазивају разређење ваздуха. Тако се долази до теоријског расматрања циклона, торнада, и т. д. Најпростији је случај код кружних, концентричних изобара с барометарским минимумом или максимумом у средини (прости циклони или антициклони.)

928. За мерење правца и брзине ваздушних струја служе ветренице клинастога облика и анемометри разних система. За непрекидно бележење једне и друге величине употребљавају се анемографи којих такођер има разних система.

За одредбу и мерење притиска ваздушних струја, који је нарочито важан за реакцију ваздуха и моторно дејство његово, служи између осталих Вилдов апарат, код кога ветар подиже више или мање једну металну плочу покретану око хорихонталне осовине. Најновији образац да се из брзине израчуна притисак поставио је Ферел (Ferrel) и он гласи:

$$P = \frac{0 \cdot 002698 v^2 b}{1 + 0 \cdot 04 \vartheta b_0}$$

где b и ϑ значе посмотрени притисак и температуру, а b_0 средњи притисак. Ако се узме да је $b = b_0 = 760$, и $\vartheta = 15^\circ$ биће $P = 0 \cdot 00255 v^2$; међутим се не сматра да је то питање дефинитивно решено, и да је тај образац сасвим поуздан.

Емпиричким путем постављен је за једну плочу Вилдова апарата, од 30 см. дужине, 15 см. ширине и 250 гр. тежине овај однос између брзине ветра и нагибног угла плоче:

Брзина у метр. за секунд.	1.	2.	3.	4.	6.	8.	10.	12.	14.
Нагибни Угао	2·0°	7·0°	14·°0	22·8°	42·3°	62·°0	69·9°	74·°2	77·°0.

Аеронаутика — Пловљење по ваздуху.

929. Кретање или пловљење по ваздуху помоћу специфички лакших тела назива се *аеронаутика*, за разлику од *авијатике*, или летења које се врши кретањем специфички тежих тела од ваздуха — Последња врста кретања по ваздуху, у колико се то односи на човека, тек је у зачетку.

Пловљење по ваздуху помоћу специфички лакших тела од ваздуха основано је на примени Архимедова закона на гасове. О томе је било говора у ареостатици. (845.)

930. **Моноголферији.** — Први покушај у том смислу учинили су браћа Монголфијери 1782. — 1783. год. у Француској, напунивши једну лопту од хартије димом, т. ј. загрејаним (дакле специфички лакшим) ваздухом; тако напуњена и пуштена лопта попела се преко 1000 метара високо и остала је у ваздуху више минута (док се ваздух у њој није охладио). Такве лопте од хартије напуњене загрејаним ваздухом називају се *моноголфијери*.

931. **Ваздушна лопта.** — Професор Шарл (Charls), 1783 год. направи лопту од лаког платна премазаног гумом (тафте), која је имала 4 метра у пречнику и напуни је водоником. Исте године Пилатр де Розије (Pilastre de Rozier) и маркиз Дарланд (D' Arlandes) попеше се први пут 21. окт. по н. у ваздух са једним монголфијером. Месец дана доцније (1. децембра) попне се Шарл најпре са Робером (Robert) а за тим сам на ваздушној лопти до на 3000 метара висине. Од тог доба број путника на ваздушној лопти — аеронаута — знатно је нарастао било ради задовољства било ради научних испитивања. Сем водоника, лопте су у последње време пуњене светлећим гасом. Овакве лопте, начињене од платна и напуњене водоником или светлећим гасом, називају се *ваздушним лоптама*.

Ми ћемо навести неколико важнијих путника, који су ради научних испитивања достигли највеће висине:

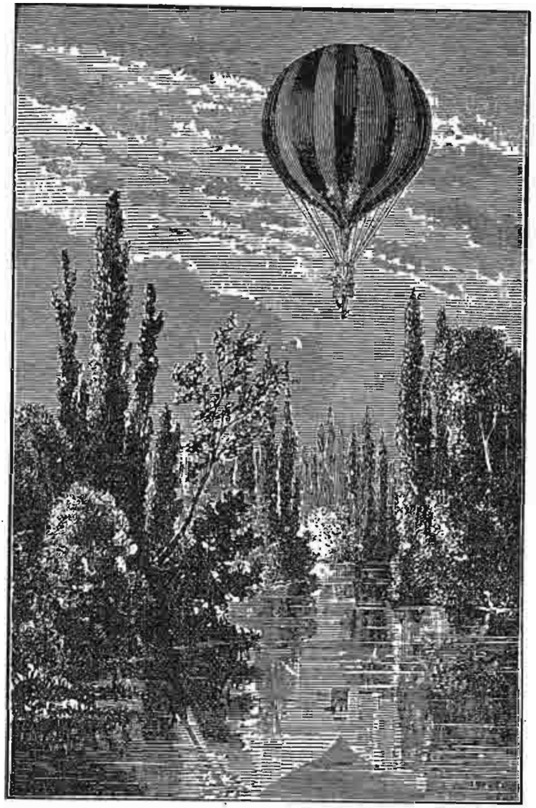
18. јула 1803 Робертсон и Лу̑ст (Robertson, Loost) 7170 мет. 16. септембра 1804 Гej Лисак (Gay Lussac) 7016 мет. 27 јула 1850 Барал и Биксио (Barral, Bixio) 7039 мет. 5. септембра 1862 Глизир (Glaisher) 8838 мет. 15. априла 1875 Тисандије, Сивел и Кроче Спинели (Tissandier, Sivel, Croce Spinelli) 8600 мет. 4. децембра 1894 Берсон (Berson) у Берлину 9150 мет.

По силаску претпоследње лопте последња два путника нађена су мртва, а Тисандије је био онесвешћен. Висина је одређена по Жансеновим барометрометрима. За време опсаде Париза, Жансен (Jansen), директор опсерваторије у Медону (Meudon) изашао је из Париза на ваздушној лопти ради посматрања помрачења сунца.

932. Главна правила за конструкцију ваздушне лопте могу се свести на ове тачке:

1 Доњи отвор лопте не сме се затворити, да не би гас, кад се у горњим слојевима разређеног ваздуха рашири, својом напоном поцепао лопту.

2. На горњој својој страни лопта мора имати вентил, који путници могу по потреби отворити и пустити из лопте гас, ако би се лопта сувише нагло и високо пењала.



Сл. 535.

3. Путници морају понети собом довољно баласта, терета (обично кесе напуњене песком) који ће просипати, ако би лопта

сувише нагло падала, или ако би хтели, да се лопта у паду заустави и даље пење.

4. Лопта мора бити са свију страна омотана кончаном мрежом, тако да се терет (т. ј. корпа с путницима) који се за мрежу с доње стране утврди, подели на целу лопту.

5. Путници треба да носе собом и потребне справе, као барометре, термометре, барографе и т. д.

У прво доба ваздушне лопте имале су заиста лоптаст изглед (сл. 535); сада се лоптама даје више дугуљаст изглед нарочито кад се хоће лопти да да̂ и извесна брзина у хоризонталном правцу.

933. *Моћ ношења ваздушне лопте.* — На основу Архимедова закона, можемо израчунати онај терет, који једна ваздушна лопта запремине V напуњена извесним гасом специфичке тежине σ може собом понети, као и висину, до које се с тим теретом може попети. Тежина гаса, потребна да се напуни горња лопта биће очевидно $V\sigma$; тежина истиснутог ваздуха спец. тежине s биће Vs. Означимо тежину саме лопте, т. ј. тежину материјала од кога је она начињена с мрежом и корпом са Q, а тежину путника и њихових справа, баласта и т. д. са q. Онда за равнотежу мора да буде:

$$Vs = V\sigma + Q + q$$

Одавде је успонска снага ваздушне лопте:

$$P = V(s-\sigma) = Q + q$$

Из ове се једначина може увек одредити она вредност која буде била непозната.

У самој ствари ова једначина не вреди за полазак, јер успонска снага лопте треба да буде већа од свију терета, па да се лопта пење. Према томе за полазак треба да вреди ова неједначина

$$V(s-\sigma) > Q + q \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (431$$

У левом изразу s се мења, јер спец. тежина ваздуха с висином опада, тако да кад то опадање буде толико, да s пређе на пример у s_0 те да се горња јеначина поново успостави, лопта; ће се зауставити. За тај случај имамо:

$$V(s_0-\sigma) = Q + q.$$

Одавде добивамо специфичку тежину s_0 оног слоја ваздушног у коме ће се лопта зауставити:

$$s_0 = \sigma + \frac{Q+q}{V}$$

Висину h на којој се налази ваздух спец. тежине s_0, т. ј. висину до које ће се лопта попети, одредићемо из обрасца:

$$h = 2{\cdot}3026\,\frac{P}{S}\log\frac{S}{s_0}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (432$$

где је S спец. тежина ваздуха на земљи и пред полазак, а P апсолутни притисак ваздуха у килограмима на метар.

934. Ево како ћемо доћи до тог обрасца.

сл. 536.

Посмотримо један ваздушни стуб AE сл. 536. пресека $AB = 1$ и висине $AF = h$. Специф. тежина доњега слоја нека буде S и притисак P, а горњега EF, s_0 и p. За те вредности имамо:

$$\frac{s_0}{S} = \frac{p}{P}.$$

Означимо са δ дебљину EE_1 слоја EF, онда је његова тежина:

$$\gamma = 1.\,\delta.\,s_0 = \frac{pS}{P}.\,\delta.$$

одакле је обратно:

$$\delta = \frac{P}{p}\cdot\frac{\gamma}{S}$$

γ је тежина танког слоја пресека $= 1$ дакле у опште врло мала количина. Због тога се може приближно ставити:

$$\frac{\gamma}{p} = \log\text{ nat. }\left(1 + \frac{\gamma}{p}\right)^1$$

Према томе је:

$$\delta = \frac{P}{S}\log\text{ nat. }\left(1 + \frac{\gamma}{p}\right) = \frac{P}{S}\left[\log\text{ nat. }(p+\gamma) - \log\text{ nat }p\right].$$

---

[1] Пошто је $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^3}{2\cdot3} + \ldots$ то се за врло мало x може ставити:

$$e^x = 1 + x \text{ или } x = \log\text{ nat }(1+x)$$

Стављајмо у ову једначину редом p, $p+\gamma$, $p+2\gamma$, $p+3\gamma$ и т. д. до $p+(n-1)\gamma$ и саберимо одговарајуће дебљине тих слојева, т. ј. вредности за δ, онда ћемо добити висину h целог ваздушног стуба:

$$h = \frac{P}{S}\,(\log.\text{ nat. }P - \log.\text{ nat. }p)$$

$$= \frac{P}{S}\log.\text{ nat }\frac{P}{p} = \frac{P}{S}\log.\text{ nat. }\frac{S}{s_0}$$

Прешав на обичне логаритме биће

$$h = 2{\cdot}3026\,\frac{P}{S}\log.\frac{S}{s_0}$$

S као што је напоменуто, значи спец. тежину ваздуха на земљи и пред полазак и одређује се из барометарског стања и температуре. Пошто тежина једног куб. метра сувог ваздуха на притиску од 0·76 мет., и температури 0°, износи 1·2935 килограма, то је спец. тежина на барометарском стању b и температури ϑ:

$$S = \frac{1{\cdot}2935}{1+0{\cdot}00367\vartheta}\cdot\frac{b}{0{\cdot}76} = \frac{1{\cdot}702\,b}{1+0{\cdot}00367\vartheta}$$

P је апсолутни притисак ваздуха у килограмима на један квадратни метар и одређује се из барометарског стања b^{cm} и спец. тежине живе s_1 овим обрасцем:

$$P = 10000\cdot bs_1$$

За $b = 76^{cm}$ и $s_1 = 13{\cdot}6$. биће $P = 10336$[1]

---

[1] Горњи образац:

$$h = 2{\cdot}3026\,\frac{P}{S}\log\frac{S}{s_0} = 2{\cdot}3026\,\frac{P}{S}\log\frac{B}{b}$$

кад се у њему специфичке тежине S s_0 замене одговарајућим барометарским стањима на површини земљиној и на висини h, може се као приближан образац употребити за мерење висина барометром. Кад ставимо за нормални притисак и температуру 0^0, $S = 1{\cdot}2935$ и $P = 10336$, горњи образац прелази у овај:

$$h = 18399\log\frac{B}{b}.$$

Ово су специфичке тежине оних гасова, којима се ваздушне лопте обично пуне, упоређене према ваздуху и изражене тежином једног кубног метра; тежина једног кубног метра узета је $S = 1{\cdot}29$:

Загрејан ваздух на 90^0 Ц. · · $\sigma =$ 0·86 кгр.
Светлећи гас (према чистоћи) · $= 0{\cdot}64 - 0{\cdot}50$ »
Водоник » » · $= 0{\cdot}30 - 0{\cdot}09$ »

935. Примера ради узмимо једну лопту од 10 метара у пречнику, напуњену гасом $\sigma = 0{\cdot}28$ килогр. Тежина лопте износи $Q = 130$ кгр. а остали терети $q = 120$ кгр. Специфичка тежина ваздуха на оној висини h где се лопта заустави биће:

$$s_0 = \sigma + \frac{Q+q}{v} = 0{\cdot}28 + \frac{250}{\frac{\pi d^3}{6}} = 0{\cdot}758.$$

Барометарски притисак пред полазак забележен је 772^{mm}. а температура $\vartheta = 20^0$, онда је:

$$S = \frac{1{\cdot}702 \cdot 0{\cdot}772}{1 + 0{\cdot}00367 \cdot 20} = 1{\cdot}3$$

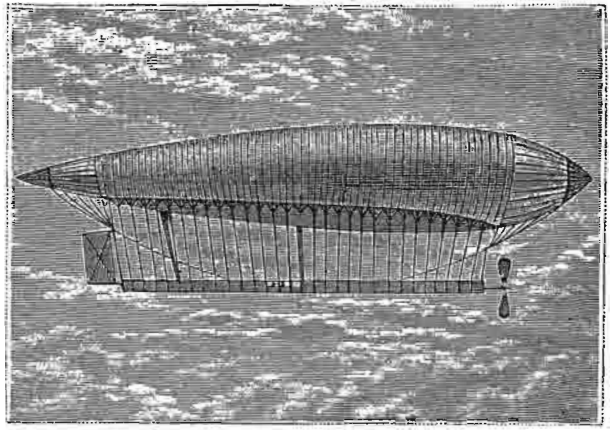
а тако исто и:

$$P = 10000 \cdot 77{\cdot}2 \cdot 13{\cdot}6 = 10500 \text{ кгр.}$$

Према томе:

$$h = 2{\cdot}3026 \frac{10500}{1{\cdot}3} \log \frac{1{\cdot}3}{0{\cdot}758} = 4357 \text{ мет.}$$

936. *Управљање ваздушном лоптом.* — Код обичне ваздушне лопте имамо само брже или спорије пењање у висину и падање; кретање у хоризонталној равни имаће лопта само онда, ако се онај слој ваздуха у коме се она налази у том правцу креће и онда тај слој носи собом и лопту истом својом брзином. Путник не осећа на лопти никакав ветар, ма каквом се брзином кретала лопта у хоризонталној равни. Из тога следује, да путник може унеколико управљати лоптом само при пењању и спуштању њену (као што је то раније напоменуто), али што се тиче њена кретања у хоризонталној равни, путник нема никакву моћ над лоптом. Да би се лоптом могло управљати у правом смислу речи, ваља дати лопти извесно кретање према ваздуху у коме се она налази, а то је у последње време и постигнуто истина у малој мери. Најпре Дипи де Лом (1872.) (Dupuy de Lôme) а за тим су Кребс и Ренар (1883. и 1884.) (Krebs, Renard) успели да даду лопти извесну брзину тиме што су, поневши собом сразмерно лакше електричне елементе и моторе, могли на лопти кретати лака отпорна крила. Облик лопте Кребса и Ренара, која се може сматрати као права лопта којом се могло потпуно управљати (истина при врло мирном ваздуху) представљена је на сл. 545. Облик је лопте веома дугуљаст, да би се смањио отпор трења; на задњем крају дугачке корпе која носи путнике и мотор, намештена су крила која су својим брзим окретањем могла дати лопти брзину од скоро 6 метара у секунди. Доцнијим покушајима у управљању ваздушном лоптом постигнута је средња брзина од 13 мет. у секунди. Пошто обичне брзине ваздуха нарочито у вишим слојевима износе 10 до 15 метара, то значи да питање о управљању ваздушном лоптом није још довољно решено.



Сл. 537.

937. *Отпор ваздуха на лопту.* — Према ономе што је речено о отпору ваздуха у опште, образац за отпор код округле лопте, која се пење у ваздух, може се свести на овај облик:

$$\omega = 0{\cdot}0255\, d^2 v^2 \frac{b}{76} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (433$$

где је b барометарски притисак а d пречник лопте. Одавде се може израчунати брзина из датог отпора. Тако излази, да се код отпора од 100 кгр.. лопта од 10 метара у пречнику креће брзином од 6.26 мет. у секунди.

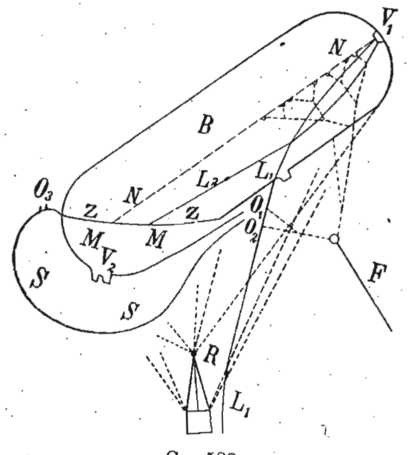
Ако хоћемо да се лопта креће у хоризонталној равни с брзином v, онда је за ту брзину и при датом пречнику лопте потребан мотор у коњским снагама:

$$R = \omega .\, v = 0{\cdot}0255\, \frac{b}{76}\, \frac{d^2 v^3}{75}$$

$$= 0{\cdot}0000447\, b .\, d^2\, v^3$$

За лопту од 10 мет. у пречнику и брзини $v = 10$ мет. кад је $b = 76$ см. потребна је снага од 34 HP; при томе балон савлађује отпор од 255 кгр.

938. *Везана ваздушна лопта* — За ратне циљеве као и за научна испитивања високих ~~региона~~ атмосферских употребљују се лопте везане за земљу. То су обично мање лопте (4 — 6 метара у пречнику), од врло танког, гумираног платна, напуњене водоником. За лопту се привежу разни инструменти који аутматски забележе на разним висинама притисак, температуру влагу, и т. д.



Сл. 538.

Слика 546. представља нам интересантан положај везаног балона, где је поред успонске снаге гаса којим је он напуњен употребљено за пењање његово и дејство ветра као код обичних змајева. Хоризонтална струја ваздушна, ударајући на доњу страну лопте, даће увек једну компоненту, која ће подизати лопту на више. За балон су утврђене две кесе MM и SS, које се на отворима 0_1 и 0_2 пуне ваздухом, и одржавају дуварове лопте у затегнутом стању. Кад лопта доспе на велику висину, те притисак опадне, гас ће у њему потиснути преграду ZZ, за коју је, врпцом L_2, везан вентил v_1 те тако се он отвори и пусти потребну количину јако рашireног гаса напоље.

Ево каква се научна испитивања могу вршити са слободним или везаним лоптама: 1) опадање притиска с висином. 2) опадање теже с висином; 3) ток ваздушних струја на разним висинама; 4) опадање температуре с висином; 5) промена влажности; 6) оптичке појаве; 7) проучавање облака; 8) електрично стање атмосфере; 9) физиолошка дејства разређеног ваздуха на човека и животиње; 10) разна хемијска испитивања атмосфере и т.д.

939. — Уопште узев, цео проблем аеронаутике сведен је на два главна, и сасвим различна и готово супротна принципа. По једноме се држи, да се пловљење по ваздуху може извршити само „*телима лакшим од ваздуха*“, по принципу изложеном напред код ваздушне лопте. По другоме пак држи се, да се рационално решење пловљења по ваздуху може извршити само „*телима тежим од ваздуха*“ по принципу којим тице лете по ваздуху и који се оснива на отпору ваздуха према покренутим телима. Као што се види, други принцип корисно употребљава оно што првоме највише смета. Покушаји су до сад вршени највише у првом правцу али нису постигнути стварно у практици примењљиви резултати. Са чисто механичког и практичног гледишта, свакако је други принцип претежнији од првога и изгледа нам да ће тај принцип, употребљен или сам или у извесној вези с првим, довести најпре до решења овог веома важног проблема.

Рад гасова.

940. Кад гасни или ваздушни молекили у своме кретању брзином v наиђу на неку препону, они ће ударајући преносити један део своје енергије на њу; ако је број удара као и брзина тих гасних молекила довољно велика, они ће најзад успети да ту препону извесном

брзином крену. Онда се каже да такав гас ради, и тај се рад гасова често назива још и *рекција гасова.*

За нас је сада најважнији рад ваздушних струја или ветрова, и ако се рад осталих гасова нарочито пара̂ оснива на истим законима.

Кад површина о коју ударају ваздушни молекили остаје иста, онда ће рад ваздушне струје зависити у главноме од брзине струје или, како се то обично каже, од јачине ветра. У ниже изложеној таблици имамо ветрове разне јачине са одговарајућим брзинама и притисцима на квадр. метар, према обрасцу у који смо нашли код отпора ваздуха:

$$P = 0{\cdot}122\, F v^2$$

НАЗИВ СТРУЈЕ	брзина у метрима за секунд	Притисак у кгр. на 1 кв. метар
0 Тишина или слаба промаја . .	0·0—1·3	0—0·2
1 Промаја	3·6	1·5
2 Поветарац	5·8	4·1
3 Слаб ветар	8·0	7·7
4 Умерен ветар	10·3	12·6
5 Јачи ветар	12·5	18·9
6 Јак ветар	15·2	27·9
7 Буран ветар	17·9	38·7
8 Олујан ветар	21·5	55·6
9 Олуја	25·0	75·6
10 Јака олуја	29·1	102·5
11 Бурна олуја	33·5	135·7
12 Оркан	40·2	195·5

Означимо са c брзину ветра у метрима, γ спец. тежину ваздуха у кгр. на кубни метар, а са V запремину ваздуха у куб. метрима која протиче у секунди.

Рад таквога ветра дат је његовом енергијом:

$$R = \frac{mc^2}{2} = \frac{V\gamma}{g} \cdot \frac{c^2}{2} \text{ мет. кгр. у сек.}$$

Ако је пресек ваздушне струје F, кв. м., онда је $V = Fc$ те онда (узев $\gamma = 1{\cdot}29318$):

$$R = \frac{F\gamma}{g}\,\frac{c^3}{2} = 0{\cdot}0659 F c^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (434$$

941. *Примери.* — 1. Колика је теоријска брзина истицања v топлога ваздуха кроз један димњак висине $H = 20$ мет., кад је темп. спољашњег ваздуха $\vartheta = 15^0$ а унутрашња $\theta = 150^0$?

Димњак се може сматрати као један крак двеју спојених цеви, чији је други крак околни ваздух. Спољашњи ваздух темпер. ϑ, кад би имао температуру димњака θ имао би висину $=$

$\dfrac{H(1+\alpha\theta)}{1+\alpha\vartheta}$ где, је кофиц. ширења ваздуха. Према томе је

$$\frac{H(1+\alpha\theta)}{1+\alpha\vartheta} - H = \frac{H\,\alpha(\theta-\vartheta)}{1+\alpha\vartheta}$$

висина ваздушног стуба, од кога зависи истицање ваздуха из димњака и онда:

$$v = \sqrt{29\frac{H\alpha(\theta-\vartheta}{1+\alpha\vartheta}} = \sqrt{2 \cdot 9{\cdot}81 \frac{20 \cdot 0{\cdot}004 \cdot 135}{1{\cdot}06}} = 14{\cdot}1 \text{ мет.}$$

2. Према резултатима које је добио Гроф Памбур (de Pambour) отпор ваздуха само на један железнички вагон, кад му је брзина 15.000 стопа на сахат износи $1\frac{1}{2}$ фунте. За свака друга кола тај се отпор повећава за $\frac{1}{8}$. Колики је онда отпор ваздуха на једном возу од 10 вагона, кад му је брзина 8 пута већа од горње?

Пошто отпор ваздуха на неку површину расте с квадратом брзине, то би он само за један вагон био $8^2 \cdot 1{\cdot}5$ ф. $= 96$ фун.

За свих 10 вагона било би још $10 \cdot \frac{1}{8} \cdot 96 = 120$ ф., тако да је целокупни отпор $= 96 + 120 = 216$ фун.

3. **Зашто ће пројектил избачен из пушке отићи даље него мала сачма, и ако су им брзине једнаке?** — Отпор ваздуха према обема једнако брзим куглама сразмеран је (приближно) пресецима, т. ј. квадратима полупречника. Напротив, количине кретања сразмерне су масама, т. ј. (при истом материјалу) кубовима полупречника. Из тога следује, да се брзина теже кугле мање смањује отпором ваздуха, услед чега ће даље и отићи.

ДЕО СЕДМИ

Енергетика у Механици

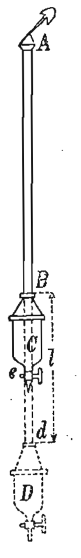
942. И ако су сви закони статике и кинетике тела основани на принципу консервације енергије, услед чега се и механика сматра као наука о енергији тела, ипак је потребно да се на завршетку излагања закона механике задржимо и да упознамо извесне законе о енергији који су нарочито важни за механику. Тиме ћемо успети да још јасније себи представимо извесне законе механике које смо можда на други начин схватили а тако исто и да олакшамо схватање оних појава, које ће доцније доћи и које нам неће бити тако приступачне као појаве механичке.

I. Фактори механичке енергије

943. Познато нам је већ да се енергија може јавити у два главна облика и то као *статичка* или *потенцијална* и као *кинетичка или актуална енергија*. Оба ова облика јављала су се у механици на врло разне начине према томе какви су различити били услови за равнотежу или какве смо разне врсте кретања имали. Међутим, ма како били различити ти начини, ипак се сви они могу представити помоћу три *фактора енергије* који обухватају у себе све појаве енергије тела. На појединим примерима ћемо то најбоље видети.

944. **Потенцијална енергија.** — Нека буде *AB* (сл. 539) комад каучука утврђен горњим крајем а на доњем носи суд *C*. Кад поступно овај суд пунимо водом, он ће напуњен заузети положај *D* прешав известан пут *l*. Истезањем својим, каучук је до-

био енергије, и та енергија износи управо онолико, колики је рад воде који је она извршила док је пут l прешла.



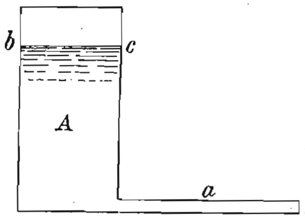
Сл. 539.

На исти се начин може и један гас поставити у стање да врши рад кад се или сабије или рашири. Свакако се та енергија која постаје истезањем (или сабијањем) лакше може представити истезањем каучука и за то смо тај пример и узели.

Количину горње енергије или рада можемо лако израчунати. Ако је напуњен суд тежак био 100 гр. онда је вода поступно притискивала снагом од 0 до 100 гр. Па како је ово дејство притиска расло сразмерио путу, то можемо место променљивог притиска узети један средњи сталан притисак од 50 гр. на целом путу $Bd = l$. Ако је тај пут износио 10 см. онда рад који је вода извршила износи: $R = 50 \cdot 981 \cdot 10 = 490500$ ерга а то је у исти мах и вредност енергије изазвате и нагомилане у каучуку истезањем његовим.

Други пример статичке енергије имамо код воде. Рецимо да само кроз цев a (сл. 540.) издигли у цилиндричном суду A, воду до висине bc. Да се вода у суду до те висине издигне, морао се утрошити рад као и при затезању каучука. И овде је рад поступно растао од нуле до оне вредности која се добија производом из висине воденог стуба и површине на коју издигнута вода притискује. Тај утрошени рад налази се сада нагомилан у води као њена енергија.

Ако је висина нивоа 100 см., а пресек суда 20 кв. см. те према томе количина воде у суду 2000 куб. см. онда је утрошени рад на издизање те воде у суду: $R = 2000 \cdot 981 \cdot 50 = 98100000$ ерга. Јер сваки кубни см. савлађује при подизању 981 дин. а средња висина је 50 см.



Сл. 540.

Као што се из горњих примера види, напонска или статичка енергија постаје на тај начин што се тело или материјални систем потрошњом рада доведе у неко ново стање. То је стање увек неко извесно *напрегнуто стање*. Да се то стање изазове, нека спољашња сила мора савлађивати какав отпор, у првом примеру еластичност у другом привлачење земљино. Тело или материјални систем које то стање савлађивањем отпора или радом изазива, губи у енергији; тело или систем који то стање заузима, добија (толико исто) у енергији. При томе енергија само промени свога носиоца и облик не мењајући при том и своју радну вредност. По својој природи дакле енергија није ништа друго до извесно случајно стање које материја заузме. Али енергија не означава само то стање, које као напонско или напрегнуто стање представља извесну количину енергије, којом то тело може на друга тела да дејствује. Она означава још и известан однос тога стања према неком могућем раду, прелазност тога напрегнутог стања у једну извесну и одређену количину механичког рада.

945. *Квантитетни фактор*. — *У свакој напонској енергији могу се разликовати три засебна елемента који њу потпуно одређују.* На првом месту зависи вредност те енергије на пр. од *величине истезања* онога каучука, т.ј. од продужења његовог, дакле од пута који је његов слободни крај прешао. Величина истезања даје нам могућност да судимо о величини ремећења молекилског, јер збир тог унутрашњег ремећења молекилског представља величину утрошеног рада па дакле и величину изазвате потенцијалне енергије. Пошто дакле изазвата напонска енергија зависи од количине или квантитета утрошеног рада па дакле и од количине или квантитета изазваног молекилског напрезања, а она опет од величине истезања, то се та величина истезања назива по Хелму и Вронском *квантитетни фактор*. Доцније је Хелм за тај појам узео реч „*екстензитет*.“ Други писци узимљу за то израз „*капацитет*“ (Оствалд) или *садржину* (Мајерхофер).

946. *Интензитетни фактор*. — За истезања истих величина потребна су код разног материјала разне силе. Да би дакле истезањем изазвану енергију одредили, морамо водити рачуна и о сили која је то истезање произвела. Очевидно је да ће та сила бити у толико већа у колико је тело мање растегљиво. У јачини или интензитеу истезања имамо други потребни елеменат за одредбу те енергије. С тога се он и назива *интензитетни фактор* енергије. Тај се фактор мери бројем дина потребних да се истезање изазове и одржи.

947. *Капацитетни фактор*. — У ствари би горња два фактора била довољна за одредбу вредности изазвате енергије. У многим пак случајевима показало се да је потребно узети још један трећи фактор, који такође зависи од материјала. То је *капацитетни фактор*. Он представља способност којом се разан материјал подаје напрезању. Јер ако горњи ексеерименат истезања поновимо са разним еластичним телима видећемо де ће према њиховој дужини, дебљини и еластичности за исто истезање од 10 см. бити потребне разне количине рада, та да истим истезањима одговарају разне количине енергије. Јер та количина зависи од природе материјала и од његовог *капацитета*, способности за одговарајуће енергетско стање. Квантитативно се тај фактор одређује бројем који показује вредност квантитетног фактора кад одговарајућа енергија постигне интензитет = 1, т.ј. величином истезања за силу од једнога дина. У нашем примеру био би капацитетни фактор:

$$\frac{10}{100 \cdot 981} = 0{\cdot}0001 \quad . \; . \; .$$

Означимо са l квантитетни фактор, са λ капацитетни а са f интензитетни фактор извесне енергије истезања, онда ће бити:

$$l = \lambda f.$$

И пошто је енергија истезана дата у опште изразом:

$$E = \frac{1}{2} lf.$$

онда се та енергија може и овако изразити:

$$E = \frac{1}{2} lf = \frac{1}{2} \lambda f^2 = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\lambda} \text{ ерга} \quad \dots\dots\dots \quad (435$$

Код другога примера имамо исте факторе. Квантитетни фактор је сада количина воде, која се бројно равна са запремином. Интензитетни фактор ове енергије притиска дат је притиском воде на 1 кв. см. дна. Пошто је тај притисак сразмеран висини воденог стуба, можемо га том висином и мерити. При том ваља да приметимо, да за висину од 1 см. јединица површине дна трпи притисак од 981 дина. Ако дакле хоћемо као и у првом примеру интензитетни фактор да изразимо у динима, онда морамо број сантиметара висине да помножимо са 981 или што је све једно, да висину изражавамо у јединицама од 1/981 см.

С тим је одређен и капацитет за енергију воденог притиска. Капацитетни фактор је слично првом примеру, дат количином воде у суду кад јој буде интензитет = 1. дакле односом $\frac{q}{g} = C$, где је q величина дна суда а $g = 981$.

Према томе горње једначине заузимају овај облик за енергију воденог притиска:

$$v = qh = hg \frac{q}{g} = cp$$

$$E = \frac{1}{2} vp = \frac{1}{2} cp^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c} \text{ ерга.}$$

кад количину односно запремину воде означимо са v, висину са h, интензитетни фактор мерен динама са $p\,(= hg)$ и капацитет са $c\,(= \frac{q}{g})$

948. Кинетичка енергија. — На исти се начин могу овим трима факторима изразити не само све остале врсте потенцијалне енергије, већ и разни облици кинетичке енергије.

Кад једна кугла масе m падне са висине h без икакве сметње на земљу, онда дејствује на куглу на целом њеном путу сила од

mg дина и врши рад од mgh ерга. Кугла ће при том достићи брзину $v = \sqrt{2gh}$ и кинетичку енергију:

$$E = \frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Ако се та кугла брзином v баци вертикално у висину, онда ће се њена кинетичка енергија сва претворити у исто толику количину потенцијалне енергије кад достигне висину h.

Код кинетичке енергије је квантитетни фактор дат тако званом *количином кретања* mv, јер она расте и с масом и с брзином. Фактор v мери интензитетни степен енергије а фактор m капацитет тела за то покретно стање јер при брзини $v = 1$, количина кретања $= m$. Ако дакле ставимо $mv = Q$ измаћемо:

$$E = \frac{1}{2} Qv = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{m} \text{ ерга} \quad \dots \quad (436$$

Кад је кретање периодичко и таласно, онда је енергија оба та кретања дата изразима у којима је маса капацитетни фактор а амплитуда и за време једнога трептаја стечена максимална брзина, интензитетни фактор. Код рада гасова, енергија је дата изразом

$$E = p \cdot v$$

где је p притисак на јединицу површине, интензитетни, а v запремина, квантитетни фактор.

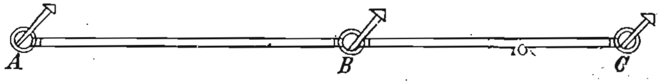
Доцније ћемо видети да то исто вреди и за молекилеку енергију на пр. за топлоту и електрицитет. Сем тога могу се молекилски облици енергије било непосредно било посредно претварати у механичку и на тај начин експериментално доказати сродство и узајамни однос свију облика енергије као и бројне величине разних врстâ енергија које једна другој одговарају; *тако се могу све врсте енергије мерити истим механичким мерама.* У томе лежи главни значај општих закона енергије.

II. Закони о променама енергије.

949. Ма како горњи фактори одређивали вредност енергији, они управљају у исти мах и свима променама енергије. Енергија, ма какав био њен облик, може само тако прећи у рад или другим речима може само тако изазвати механичке и физичке појаве ако је у оном стању и онде, где је дотле била, сасвим или делимично нестане.

Докле год затегнути каучук свој напон, или једно покретно тело своје кретање непромањено задржи, не могу изазивати никакво дејство. И обратно: „кад неко тело један део своје енергије изгуби, оно ће увек изазвати неко извесно дејство и на то ће се дејство онолика количина енергије утрошити колико износи губитак енергије онога тела које је то дејство изазвало.“ Тако захтева закон о консервацији енергије. И начин на који једно тело, а на рачун своје енергије може известан рад или дејство изазвати двојак је. То се може извршити или *премештањем енергије* или *претварањем енергије*. На те две врсте промена енергије могу се свести све могуће појаве у природи. Ако успемо да за обадве врсте промена пронађемо опште законе, онда смо у исти мах успели и да све природне појаве у опште објаснимо.

950. **Премештање енергије.** — Принцип премештања енергије може се најлакше објаснити на овом примеру. Два комада каучука *AB* и *BC* (сл. 541.) спојена су једним прстеном *B* и обадва затегнута између клинаца *A* и *C;* затегнутост обадва комада



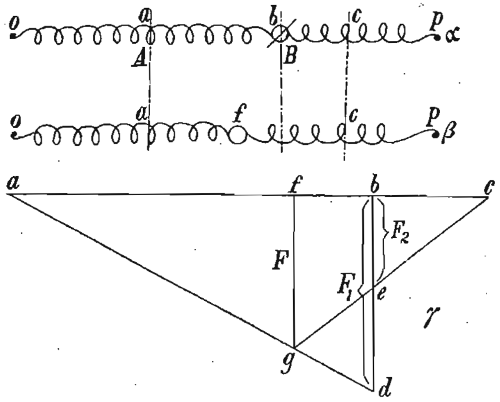
Сл. 541.

потпуно је једнака. Трећим клином код *B* затегнућемо један комад више од другога. На тај начин ми смо у стању да премештамо енергију са јаче затегнутог комада на пр, *AB,* на слабије затегнути комад *BC*. То ће премештање наступити чим ми трећи клинац *B* извадимо. Јер ће сада затегнутост комада *AB* опасти а комада *BC* порасти и то дотле док у оба комада затегнутост не буде иста као и у почетку. *AB* губи енергију а *BC* је добија. Међутим, као што ћемо доцније видети, губитак није раван добитку. Како овде тако је и свуда премештање енергије скопчано са условом*:* да је интензитатни степен енергије, на телима или на системама између којих се премештање дешава, различит. Као овде, тако се и у свима случајевима креће енергија са места вишега интензитетног степена на места нижега интензитета и то све дотле, док интензитет на оба система не постигне исти степен.

951. Да видимо сада по којим се законима врши премештање енергије у разним њеним облицима. Да почнемо са енергијом истезања.

На сл. 542 имамо две различито затегнуте спиралне опруге *A* и *B*, спојене прстеном *b* кроз који је продевен клинац, који ону разлику у затегнутости одржава. Истезање опруге *A* нека

буде *ab* а интензитетни фактор истезања нака је $F_1 = bd$ (сл. γ). Рад потребан за то истезање, па дакле и енергија те затегнутости



Сл. 542.

биће представљена површином *abd*. Истезање спирале *B* нека буде *bc*, одговарајући интензитетни фактор $F_2 = be$ а енергија равна површини *bce*. — Кад се сметња у *b* (т. ј. клинац) уклони, па се прстен полако руком води да се избегну осцилације спирала, онда ће са спирале *A* толико прећи зетегнутости на *B* док обе спирале не достигну напон интензитета $F = fg$ (сл. γ) и не буду у равнотежи (сл. β).

Из слике γ види се да је количина енергије коју је спирала *A* предала представљена површином:

$$fbdg = fb\,\frac{F_1 + F}{2}$$

а количина коју је спирала *B* примила површином:

$$fbeg = fb\,\frac{F_2 + F}{2}.$$

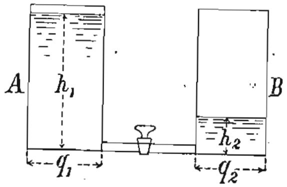
Губитак при том премештању енергије истезања представљен је троуглом:

$$\triangle E_1 - \triangle E_2 = ged = \frac{1}{2}\,fb \cdot ed.$$

Ова количина енергије, која се овде јавља као губитак, за време премештања енергије *претворила* се у другу врсту енергије и може се употребити за какав користан рад. У горњем примеру та је енергија прешла на руку као механички рад гурајући је напред. И кад год има таквог предавања енергије, систем спирала не може се сам собом вратити у првобитно своје стање (сл. α). Овде не оскудева само главни услов: разлика интензитетних фактора већ и за то потребна енергија. Враћање у првобитно стање може се извршити само под утицајем каквог страног рада на пр. кад рука спиралу у кретању помогне и тиме јој онај губитак поврати.

Да нисмо руком водили спиралу за време премештања енергије, онда би се она разлика енергије $\triangle E_1 - \triangle E_2$ претворила у осцилаторску кинетичку енергију, и та би разлика изазвала у систему — ако би он био потпуно еластичан и без икаквих страних утицаја — један бескрајан низ периодских претварања кинетичке у потенцијалну енергију (истезања) и обратно. При томе би се систем после сваке периоде сам собом враћао у оно првобитно стање у коме је био пре почетка премештања енергије. То би био један прост пример периодичног *конзервативног претварања енергије.*

952. До истог резултата долазимо и посматрањем енергије воденог притиска. Кад истече вода из суда A (сл. 543.) у суд B, коме је ниво нижи, то ће први изгубити један део статичке енергије притиска а други ће је добити.



Сл. 543.

Ако су пре истицања воде притисци били $p_1 = h_1 g$ и $p_2 = h_2 g$ и капацитети $c_1 = \frac{q_1}{g}$ и $c_2 = \frac{q_2}{g}$: ако је по изравњању нивоа заједнички притисак p, онда је суд A изгубио енергије:

$$\triangle E_1 = \frac{1}{2} c_1 (p_1 - p)(p_1 + p) = \frac{1}{2} \triangle v (p_1 + p)$$

а суд B добио:

$$\triangle E_2 = \frac{1}{2} c_2 (p - p_2)(p_2 + p) = \frac{1}{2} \triangle v_2 (p_2 + p)$$

И овде је $\triangle v_1 = \triangle v_2$, јер колико воде из суда A истече толико ће прећи у суд B. Исто тако мора увек p_2 бити мање од p_1. Услед тога и овде се јавља губитак:

$$\boldsymbol{\varGamma} = \triangle E_1 - \triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle v_1 (p_1 - p_2)$$

Ако вода при прелазу из A у B не наиђе на отпор трења или друге сметње, да количина енерјије $\triangle E_1 - \triangle E_2$ може изазвати рад, она ће се претворити као и код горњих опруга, у осцилационо кретање.

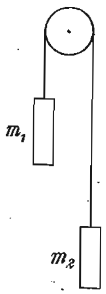
953. Премештање енергије може се код воде јавити још у једном облику. Ако се у A као и у B за време протицања воде, разлика ниво одржава стална (досипањем воде у суду A и испуштањем из суда B) онда се знатно мењају квантитативни односи. Свака јединица запремине воде има у суду A енергије p_1 а у B само p_2; према томе она губи на том путу $(p_1 - p_2)$ ерга од енергије притиска. Ако у једној секунди прође запремина $\triangle v_1$, онда се губи:

$$\boldsymbol{\varGamma} = \triangle E_1 - \triangle E_2 = \triangle v_1 (p_1 - p_2) \text{ ерга}$$

од енергије притиска, дакле управо два пут онолико колико код првог начина протицања. Ова се енергија назива *апсолутни максимум* корисног рада који вода у свом току може произвести.

954. *Премештање тêжне енергије.* — Енергија, која једном тешком телу због његова положаја у ма којој тачки земљиног гравитационог поља припада, зависи од његове масе и од његова удаљења од земље. Напон теже може се упоредити са напоном који постаје еластичним истезањем, јер су тежом поједина тела као неким невидљивим еластичним концима за земљу привезана. Напонска снага, другим речима тежина тела не мења се продужавањем тих конаца и може се у малим границама сматрати као стална; у ствари као што смо видели она опада. Интензитетни фактор тежне енергије је тежина mg, која тела ка земљи вуче и може се узети да је сталан; квантитетни фактор је висина h од земље. Капацитетног фактора овде нема, јер сва тела земља привлачи подједнако.

Нека су m_1 и m_2 (сл. 544.) два обешена тела. Ако су им висине изнад земље h_1 и h_2 онда су њихове тêжне енергије:



Сл. 544.

$$E_1 = m_1 g h_1 \text{ и } E_2 = m_2 g h_2$$

Ако је $m_1 > m_2$, онда ће m_1 падати а m_2 пете се; m_1 губи а m_2 добија на тêжној енергији. Кад са $\triangle h$ означимо промену висина онда је

изгубила маса m_1 . . . . . $\triangle E_1 = m_1 g \triangle h_1$
добила „ m_2 . . . . . $\triangle E_2 = m_2 g \triangle h_1$

разлика у раду износи:

$$\boldsymbol{\varGamma} = \triangle h_1 (m_1 g - m_2 g)$$

Овај се рад налази као кинетичка енергија коју је систем убрзањем стекао и у облику топлоте која је трењем произведена.

955. *Премештање обртне енергије.* — Горњи су примери показивали премештање потенцијалне енергије. Овај ће пример бити за кинетичну енергију. A и B су два гвоздена точка који се без

трења окрећу свако за се око своје осовине, угловним брзинама ω_1 и ω_2 и то тако да је $\omega_1 > \omega_2$. Ма којим путем, на пр. бескрајним каишем механички смо спојили та два точка и са точка A прелазиће енергија на точак B док оба точка не добију исту угловну брзину ω. У овом се случају згодније каже да је енергија са точка A на точак B *пренесена* (а не премештена). Ако су J_1 и J_2 моменти инерције оба точка, онда су њихове појединачне енергије пре спајања биле:

$$E_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1{}^2 \text{ и } E_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2{}^2$$

Овде је ω интензитетни, $J\omega = Q$ квантитетни а J капацитетни фактор. После спајања точак A предаће:

$$\triangle E_1 = \frac{1}{2} \triangle Q_1(\omega_1 + \omega)$$

а точак B примиће:

$$\triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle Q_2 (\omega_2 + \omega)$$

Пошто се количина кретања при преносу кретања не мења, то је и $\triangle Q_1 = \triangle Q_2$ те и разлика енергије која се јавља ма у каквом раду износи:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \triangle E_1 - \triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle Q_1 (\omega_1 - \omega_2)$$

956. *Премештање енергије прогресивног кретања.* — A и B су две потпуно нееластичне лопте које се по једној правој крећу у истом смислу; њихове су масе m_1 и m_2 а брзине v_1 и v_2. Нека буде $v_1 > v_2$. Кад бржа кугла ону спорију стигне, судариће се и по свршеном судару, као што знамо обадве ће кугле имати заједничку брзину v.

Они исти односи, које смо нашли код истезања и воденог притиска вреде и код овога преноса кинетичке енергије код нееластичног судара. Тело A предаће енергије:

$$\triangle E_1 = \frac{1}{2} m_1(v_1 - v)\ (v_1 + v) = \frac{1}{2} \triangle Q_1 (v_1 + v)$$

тело B примиће:

$$\triangle E_2 = \frac{1}{2} m_2 (v - v_2)\ (v + v_2) = \frac{1}{2} \triangle Q_2 (v_2 + v)$$

Као што се зна, количина се кретања (Q или mv) при том судару не мења већ се просто преноси или премешта. И овде је дакле $\triangle Q_1 = \triangle Q_2$ те због тога губитак на кинетичкој енергији:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \triangle E_1 - \triangle E_2 = \frac{4}{2} \triangle Q_1\ (v_1 - v_2).$$

Овај се израз потпуно слаже са оним који смо нашли напред. Јер је:

$$\frac{1}{2} \triangle Q_1 (v_1 - v_2) = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v)\ (v_1 - v_2) = \frac{1}{2}\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

пошто се зна да је

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

957. Код судара *потпуно еластичних* тела, дешава се премештање енергије само за време првога стадијума судара и то до онога момента, до кога се разлике у брзинама изравњају. Од тог тренутка наступа претварање енергије и то на тај начин што се потенцијала енергија, изазвата деформацијом кугала претвара у кинетичку. На тај се начин објашњава како је могуће да једна кугла која удара и поред своје мање брзине, пренесе покретну енергију на ударену куглу. Овај је случај сличан са оним спиралним опругама где једна спирала уз помоћ кинетичке осцилационе енергије може еластично затезање да пренесе на другу јаче затегнуту спиралу.

Примера ради узмимо најпростији случај. Две кугле A и B истих маса m, сударе се тако да кугла A право и централно удари брзином v на куглу B која је у миру.

На крају деформационог стадијума имамо:

$$\triangle Q = (v - \frac{1}{2} v) = \frac{1}{2} mv$$

губитак енергије кугле A биће:

$$\triangle E_1 = \frac{1}{2} \triangle Q\ (v + \frac{1}{2} v) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

добитак кугле B биће:

$$\triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle Q\ (o + \frac{1}{2} v) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

Према томе

$$\boldsymbol{\Gamma} = \triangle E_1 - \triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle Q\ (v - o) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} mv^2.$$

дакле A има још $\frac{1}{4}$ своје првобитне енергије, а и B има $\frac{1}{4}$. Остале $^2/_4$ утрошене су на деформацију кугала.

2. Енергија коју тело B прима:

$$\triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle M (J_2 + J)$$

3. Енергија која се при том преносу претворила:

$$\triangle E_1 - \triangle E_2 = \frac{1}{2} \triangle M (J_1 + J_2)$$

У нашим примерима био је однос тих трију величина у напред тако условљен, да је величина $\triangle Q$, т. ј. промена квантитетног фактора у оба тела A и B иста. Међутим сва премештања енергије не дешавају се по тако простим обрасцима. Кад се капацитет на пр. мења са интензитетом, или кад интензитет не расте у простој сразмери са повећавањем квантитетног фактора, онда горње једначине постају много заплетеније.

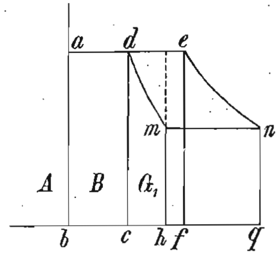
Према данашњем стању енергетике или науке о енергији изгледа као врло вероватно, да вреде горњи односи за премештање не само механичке и већ и других врста енергије.

963. Претварање енергије — Док је премештање енергије значило пренос једног истог облика енергије са једног тела на друго, дотле претварање енергије значи прелаз енергије из једног облика у други ма то било и на једном истом телу. Премештање енергије тражи дакле поред промене носиоца њеног одржање облика, а претварење енергије захтева промену облика па била промена носиоца или не. Док код премештања енергије квантитетни фактор цео или потпун са места вишега интензитета прелази на места нижега, дотле се сада само један део енергије у првобитном свом облику преноси а други се претвара и на други начин предаје. Сада се дакле увек само један део дате енергије стварно премешта, други се део троши на она дејства, која увек премештање енергије прате. Код претварања енергије се све оно што тело од једног облика енергије изгуби, у други облик претвара. Нови облик енергије има исту радну вредност коју је имао и претворени облик. На тој једнакости оснива се могућност експерименталног одређивања *еквивалената разних облика енергије*, т. ј. оних разних стања енергије која истим радним вредностима одговарају.

Један пример чистог претварања енергије имамо кад затегнуту опругу у безваздушном простору отпустимо. Онда се претвара сва напонска енергија најпре у кинетичку осцилациону енергију па затим у топлоту. Исто тако претвара једна избачена пушчана кугла, кад се у гомилу песка зарије, сву своју енергију кретања у топлоту. Кад се једна затворена спирала од бакарне жице окреће у безваздушном простору на известан начин испред полова једнога магнета, онда се механичка енергија претвара у електричну и топлотну енергију. Ово се претварање врши час брзо и од један пут, као код оне кугле, час спет споро и периодички или непериодички. Непериодичко је на пр. претварање запреминске енергије у топлоту код небеских тела, која се у току векова на мање запремине купе; периодичко је претварање кинетичке у потенцијалну гравитациону енергију и обратно код планета и за време њиховог обртања око сунца, јер кад су планете најближе сунцу онда је кинетичка енергија достигла максимум а потенцијална минимум док кад су најдаље од њега, онда бива обратно. Овај последњи начин претварања спада у класу конзервативног претварања, јер сва енергија и ако се из једног облика у други претвара остаје на истом систему и не троши се изван система као на пр. код клатна где она за време клаћења прелази из једног облика у други али се троши и ван клатна на ваздух услед чега клатно поступно и губи од своје осцилационе енергије.

Више пута су претварања енергије праћена појавама најпростије врсте као што је то на пр. случај код поменутог периодичког претварања код планета и клатна. Други пут — и то се најчешће дешава — појаве, које претварање енергије прате, имају веома заплетен карактер јер се један облик енергије при претварању распе у читав низ других облика. који онда опет између себе на разне начине дејствују. Примера ради наводимо удар једног топовског пројектила о гвоздену плочу какве оклопњаче. Са деформационим радом при судару спојено је не само произвођење топлоте и звука, већ се њиме изазове и хемијска енергија праскавог материјала у пројектиму и то све заједно изазове замршен сплет нових појава које се сврше тек кад лађа на морско дно мотоне.

964. *Кружни процеси* енергије. — Као и саме појаве претварања енергије тако су исто и услови претварања веома разнолики. Не упуштајући се у све могуће појединости овога питања, задржаћемо се код једног начина прстварача енергије, с којим ћемо се доцније подробније бавити. То су тако звани *кружни процеси енергије*. Под кружним процесом разуме се у опште један низ претварања енергије, који се на неком телу тако изврше, да по свршетку тога низа оно дође у оно исто првобитно стање у коме је у почетку било. Да би ту ствар боље објаснили послужимо се једним примером. На сл. 545. нека буде $abcd = B$ један правоугли суд с водом. Дувар cd такав је, да се паралелно самом себи и без трења може премештати; у дувару ab налази се горе код a један отвор, којим је наш суд спојен с водом једног врло великог резервоара A. У резервоару је вода увек на истој висп $h_1 = ab$. С водом у суду извршићемо ове промене:



Сл. 545.

I. *Стадијум.* Покретни се дувар полако премести у ef; при томе је суд узео воде тежине $Q = v_1 g$, и та вода врши овај рад:

$$\frac{1}{2} S_1 h_1 g \cdot cf = \frac{1}{2} Q h_1$$

где S_1 значи водом притиснуту површину.

II. *Стадијум.* Сад се затвори отвор код *a* па се дувар помакне до qn. Ниво воде ће у тако проширеном суду спасти на висину h_2. Уз непрестано опадање интензитета притиска вода извршује још рада $= Q\,(h_1—h_2)$ јер тежина воде $= Q$ пада за висинску разлику $h_1—h_2$.

III. *Стадијум.* Суд са споји са неким великим резервоаром C у коме је вода на сталној висини $h_2 = nq$ и дувар се помакне до f. т. ј. дотле, док се онолико исто воде преда резервоару C колико је у првом стадијуму из резервоара A узето. На то ваља утрошити известан рад с поља на премештање дувара који износи:

$$\frac{1}{2} S_2 h_2 g \cdot fq = \frac{1}{2} Q h_2$$

IV. *Стадијум.* Веза са C се прекине и дувар се опет спољашњим радом помакне до првог његовог положаја у cd, услед чега ће вода заузети свој првобитни ниво висине h_1. Ново утрошени рад износи $= \frac{1}{2} Q\,(h_1—h_2)$, јер је тежина воде $= \frac{1}{2} Q$ издигнута на висину $(h_1—h_2)$.

Сад се каже да је свршен један кружни процес, или циклус, јер је вода у B дошла у исто стање у коме је била пре почетка горњих промена. И за време тога процеса, ми смо извесну количину воде узели из резервоара A и пренели је у резервоар C у коме је ниво воде нижи; другим речима ми смо извесну количину воде Q са висине h_1 пренели на висину h_2 дакле вода је изгубила енергије:

$$E_1 - E_2 = Q\;(h - h_2)$$

Толико исто износи и корисни рад R који је раван збиру свију добивених и утрошених радова:

$$R = \frac{1}{2} Q h_1 + Q(h_1—h_2) - \frac{1}{2} Q h_2 - \frac{1}{2} Q(h_1—h_2) = Q(h_1—h_2).$$

965. *Апсолутна корисност* овога процеса цени се по односу који постоји између рада који је корисно употребљен према цедокупном раду којим вода располаже, т. ј. по односу између корисног рада $R = E_1—E_2$ према радној способности воде E_1. Тз је дакле корисност дата обрасцем:

$$K = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{h_1 - h_2}{h_1}.$$

966. Кружни процес као што смо га горе извели назива се *повратан кружни процес*. То ће рећи, кад би изврнули ред наших промена, добили бисмо исте радове само с изврнутим знацима у појединим стадијумима. То ће увек тако бити, кад је збир свију оних претварања енергије, које тај процес прате раван нули, дакле кад се од енергије, у процес унесене, ништа не изгуби. Неповратан би на пр. био процес, кад би ми пустили да вода пада кроз какву цев са висине h_1 на висину h_2 и ту би ми њену кинетичку енергију искористили на какав посао. Јер би при том један део њене енергије био претворен у топлоту и био би за нас изгубљен. *Потпуно повратни процеси се само могу замислити: они у ствари не постоје.* Нашим машинама старамо се да се том идеалном стању повратних процеса што више приближимо старајући се да при премештању и претварању енергије, растурање енергије сведемо на што мању меру. Али без икаквог растурања (или трошења енергије на себе саму) не може ни једна машина да ради. И ово нас разматрање доводи до закључка да је немогуће perpetuum mobile. Растурени део енергије међутим није престао да има све особине енергије. Радна способност тако растурене енергије остаје у латентном стању и не може се због спољашњих околности више у користан рад претворити међутим је енергија растурена само за нас, за нашу корист, она је изгубљена само за корисни рад наше машине. Али тиме није ни у колико поремећен општи став о консервацији енергије.

РЕГИСТАР

Бројеви означују стране.