А. БИЛИМОВИЋ
професор
универзитета у Београду

Т. АНЂЕЛИЋ
професор
II мушке гимназије у Београду

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА

V РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПЛАНИМЕТРИЈА

СА ПРИЛОГОМ
МИХ. ПЕТРОВИЋА

БЕОГРАД — 1940

САДРЖАЈ

УВОД

ГЛАВА I

Основни појмови, неке аксиоме и дефиниције

ГЛАВА II

Дужи и углови

ГЛАВА III

Троугао. Осна симетрија

ГЛАВА IV

Паралелне праве. Централна симетрија

ГЛАВА V

Многоугао. Четвороугао

УВОД

Метода непосредног посматрања. У нижим разредима посматрали смо разне геометриске предмете: тела, површине, линије и тачке. Проучавали смо њихове особине, вршили мерење дужина, углова, површина и запремина и наводили практична правила за та мерења. При тим геометриским проучавањима узимали смо моделе тела или смо цртали слике па, посматрањем, долазили до потребних резултата. Таква метода проучавања зове се *метода непосредног посматрања.*

Иако је за прва проучавања у геометрији, као уосталом и код других наука, ова метода природна и неопходна, она има својих крупних недостатака. Она зависи од посматрача. Међутим, једна иста ствар може изгледати једном посматрачу друкчије него другом. Отуда долази недовољна поузданост резултата до којих се долази непосредним посматрањем. Ти резултати могу бити и погрешни, јер се посматрање врши оком, а око је подложно обманама. Исто се тако не може веровати ни цртежу, јер и он сам може бити погрешан, па се то одмах не примети. Резултати методе непосредног посматрања често зависе још и од прилика под којим се посматрање врши и од средстава којима посматрач располаже.

Поменућемо још један крупан недостатак методе непосредног посматрања. Увек се могу посматрати само поједини стварни предмети. Тако, на пр., ако изводимо неки резултат о особинама троугла, онда нацртамо неки одређени троугао или више одређених троуглова. Непосредно посматрање тих неколико троуглова не даје увек сигуран одговор на питање, да ли те особине припадају свима троугловима.

Из ових разлога још од памтивека тражио је човечији ум други начин — другу методу за утврђивање геометриских истина.

Дедуктивна метода. Овом другом методом нове геометриске истине изводе се из раније постављених или претходно изведених истина. Због латинске речи „deductia“ (извођење) ова метода се зове *дедуктивна метода*.

У дедуктивној методи излагања геометрија почиње од *основних појмова*. До сазнања ових појмова долазимо непосредним посматрањем, али се они у дедуктивном излагању сматрају као унапред дати. Тако, на пр., појмове *тачке*, *праве* и *равни* треба сматрати као основне појмове.

Сем основних појмова геометрија располаже и многим другим *изводним појмовима* који се уводе помоћу *дефиниција*. У дефиницији се неки нов појам објашњава помоћу других раније познатих појмова. Тако је реченица: „Трапез је четвороугао са две паралелне стране“ — дефиниција појма трапеза.

Између појединих геометриских појмова постављају се пре свега основне везе које се зову *аксиоме*. Тако, на пр., реченица: „Кроз две разне тачке увек се може повући само једна права“ — изражава аксиому. Ова реченица: 1) поставља везу између основних појмова праве и тачке и 2) њена садржина је сама по себи јасна и не може се извести или објаснити другим истинама. Она изражава једну основну геометриску истину. Геометриске аксиоме следују из претходних непосредних геометриских посматрања, али се при дедуктивном излагању геометрије аксиоме сматрају као познате истине.

У геометрији се искоришћавају, сем чисто геометриских аксиома, и опште математичке аксиоме. Такве су, на пр.: „Две величине, које су посебно једнаке трећој, једнаке су међу собом“. „Ако једнаким величинама додамо или од њих одузмемо једнаке величине, добићемо опет једнаке величине“.

Сем основних истина — аксиома — све остале геометриске истине изводе се из аксиома или других претходно изведених истина. Такве истине зову се *ставови* или *теореме*, а њихово извођење *доказ*. Доказ може бити *директан* — ако се потврђује оно што се каже, и *индиректан* — кад се доказује да је супротно од онога што се тврди немогуће.

Став, чија истинитост непосредно следује из претходног става тако да се не мора нарочито доказивати, зове се *последица*.

Најзад, предмет геометрије су и *задаци (проблеми)*. Сваки задатак поставља једно или више питања или захтева нешто. Геометриски задатак може бити: *рачунски* — кад треба једну или више геометриских величина израчунати; *конструктивни* — кад се тражи одређивање геометриских облика конструкцијом, углавном помоћу шестара и лењира; и *доказ* — кад треба извести неку истину која раније није била изведена.

Геометрија се, при систематском проучавању, обично дели на два дела: геометрију у равни или *планиметрију* и геометрију у простору или *стереометрију*. У овој књизи је обрађена планиметрија.

Градиво, обавезно само за реалке, означено је у почетку и на крају текста знаком *.

Кратак историски преглед развитка геометриских проучавања. О развијању математичких знања у почетку културе човечанства не располажемо готово никаквим подацима. Први извор математичких знања прастарих времена били су египатски папируси. Један од њих је такозвани *„Папирус Ринд“* из 2000—1700 г. пре Христа. Тај стари математички рукопис написао је египатски писац Ахмес. Овај папирус пронашао је енглески истраживач Ринд и по њему је добио име. У том папирусу набројена су најпростија аритметичка и геометриска правила која су била позната у Халдеји, Индији и Египту. Сва геометриска испитивања сводила су се на слике, уз које је стајало: „види“. Дакле, непосредно посматрање било је *једини* извор геометриских истина.

Дедуктивно извођење почело се први пут примењивати на геометрију код старих Грка. Почеци грчке математике везани су за Јонску школу на чијем је челу био Талес из Милета (око 624—548 г. пре Хр.). Талес је проучавао геометрију, као и Египћани, само због примене и употребљавао углавном методу непосредног посматрања за сазнање нових геометриских истина. Права дедуктивна метода почиње у геометрији тек са школом Питагорејаца, чији је оснивач Питагора из Самоса (око 582—507 г. пре Хр.). За ову школу везан је читав низ математичких открића и у геометрији и у аритметици. Од познатијих математичара ове школе поменућемо Хипократа из Хиоса (око 440 г. пре Хр.) који је први увео геометриски доказ. Његово доба је прелазно доба између школе Питагорејаца и школе Платона из Атине (429—348 г. пре Хр.). Платон је увео строго излагање геометрије са поделом на аксиоме, дефиниције, теореме итд. Њему се приписује и захтев, да се при геометриској конструкцији употребљавају само шестар и лењир. После Платонове школе геометрија се развијала у Александрији у Египту под покровитељством династије Птоломеја. У то време математичар Еуклид (око 300 г. пре Хр.) изнео је у свом делу „Елементи“ све дотадашње знање геометрије у систематском облику. Еуклидови Елементи постали су класично дело и задржали своју вредност као уџбеник геометрије још и у данашње време. Еуклидови Елементи су узор дедуктивног излагања науке.

У току читавог низа столећа Еуклидови Елементи били су главна књига из које се учила геометрија. У доба Римљана и у средњем веку геометриска изучавања стајала су врло ниско. Све до XIX века нису озбиљно критиковани основи Еуклидове геометрије иако они нису савршени. Тек су научници Н. И. Лобачевски (1793—1856) и J. Бољај (1802—1860) усавршили Еуклидово излагање и тиме створили нов период у дедуктивном излагању геометрије. Тај период траје и данас и савремено дедуктивно излагање геометрије, које су дали Д. Хилберт (рођен 1862) и његова школа, много је савршеније од Еуклидовог излагања.

ГЛАВА I

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ, НЕКЕ АКСИОМЕ И ДЕФИНИЦИЈЕ

§ 1. Основни појмови и аксиоме

Основни геометриски појмови јесу: *тачка*, *права* и *раван*. Познато је како се поједини од ових елемената обележавају.

Између тачака, правих и равни постављају се у планиметрији основни односи који се изражавају помоћу *аксиома*. Навешћемо аксиоме које се односе на *везу* између тачака, правих и равни.

Аксиома I. Кроз две разне тачке увек се може повући само једна права (аксиома тачака и праве).

Аксиома II. На свакој правој увек постоје бар две тачке; а постоје бар три тачке у равни које не леже на истој правој (аксиома праве и тачака).

Аксиома III. Три тачке, које нису на истој правој, одређују увек само једну раван (аксиома тачака и равни).

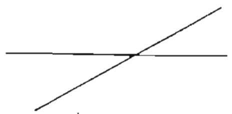
Аксиома IV. Ако права има две заједничке тачке са равни, свака њена тачка је у тој равни (аксиома праве и равни).

Из ових неколико аксиома следује читав низ познатих особина тачака, правих и равни у међусобним везама. Те смо особине сматрали раније као непосредно очигледне — сад се међутим оне могу доказати. Као пример доказаћемо једну, са гледишта непосредног посматрања, очевидну истину.

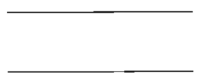
Теорема 1. *Две разне праве не могу имати две тачке заједничке.*

Доказ. Ако би две разне праве имале две заједничке тачке, онда би се, у том случају, кроз две тачке могле повући две разне праве. То је, међутим, према аксиоми I немогуће. Дакле, две разне праве могу имати или само једну тачку заједничку или ниједну.

Кад две праве имају само једну тачку заједничку, оне *се секу* (сл. 1). Кад две праве *леже у истој равни*, а немају



Слика 1



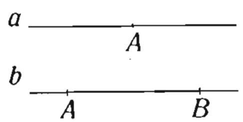
Слика 2

ниједну тачку заједничку — не секу се — оне су *паралелне* (сл. 2). Ознака паралелности је || или ⫽.

Ако бисмо желели да се ослободимо непосредног посматрања и код других простих појмова, на пример о *реду* тачака на датој правој, морале би се увести још неке нарочите аксиоме, али те аксиоме нећемо овде наводити.

§ 2. Права. Полуправа. Дуж

Помоћу аксиома могу се *доказати* све оне особине праве које су нам још од раније познате. Тако се, на пример, може лако доказати оно што се зна већ, да на правој има бескрајно много тачака и томе слично.



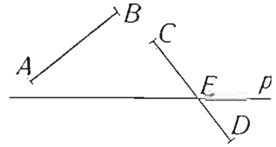
Слика 3

Ако на правој узмемо једну тачку, рецимо A, и све тачке праве *само с једне стране тачке* A, оне заједно чине *полуправу* (сл. 3, *a*). Тачка A је *гранична тачка* или *крај* полуправе. Свака тачка на правој дели је на две полуправе.

Кад се на правој узму две разне тачке, на пр. A и B, део праве између њих чини *дуж* (сл. 3, *b*). Тачке A и B су *граничне тачке* или *крајеви* дужи.

Од појма полуправе треба разликовати појам *зрака*. Зрак је полуправа одређеног смера. Права, полуправа и дуж, саме по себи, међутим немају никакав смер нити су везане са кретањем. Може се и на правој

означити неки смер, али то је онда нов геометриски облик који се обично зове *оса*. Исто тако и дуж одређеног смера је нов појам и зове се *вектор*.

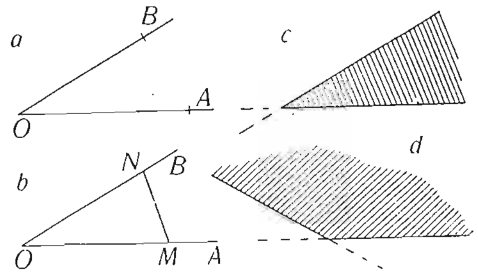


Слика 4

Свака права у равни дели ту раван на две области — две *полуравни*. Ако две тачке равни, A и B, леже са исте стране праве p (сл. 4), дуж AB сва лежи са те стране. Ако су тачке C и D на разним странама, дуж CD сече праву p, тј. права p и дуж CD имају заједничку тачку E.

§ 3. Угао

Две полуправе са заједничком граничном тачком чине *угао*, на пр. $\sphericalangle AOB$ (сл. 5, *a*). Полуправе су *кракови* угла, а заједничка тачка — његово *теме*.

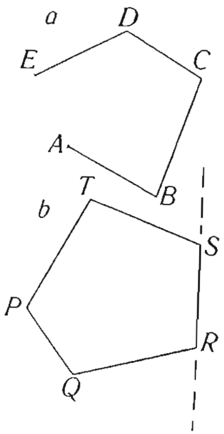


Слика 5

Кракови угла деле раван у две области. Једна од њих је *област угла*. Ми ћемо се прво зауставити на угловима (*удубљеним*) чијој области припада свака дуж, на пр. MN (сл. 5, *b*) која спаја тачке на краковима. Касније ћемо показати како се појам угла може проширити. Област угла зове се такође *унутрашња* област, а друга — *спољашња*. Код удубљених углова (сл. 5, *c* и *d*) продужење сваког крака преко темена је у спољашњој области угла.

§ 4. Изломљена линија. Многоугао

Низ дужи спојених тако, да по две узастопне имају један крај заједнички, зове се *изломљена линија*, на пр. линија $ABCDE$ (сл. 6, *a*). Кад се слободни крајеви прве и последње дужи поклапају, изломљена линија је *затворена* и зове



Слика 6

се *многоугао* или *полигон*, на пр. $PQRST$ (сл. 6, b). Свака дуж многоугла је његова *страна*. Многоугао се зове *испупчени* или *конвексни* (сл. 6, b), ако цео лежи с једне стране од *сваке* његове стране продужене на оба краја. Нећемо нарочито наглашавати да су полигони конвексни, пошто ћемо проучавати само такве полигоне.

Заједничка тачка две стране је *теме* многоугла. Дуж која спаја два неузастопна темена многоугла зове се *дијагонала* многоугла. Код сваког темена полуправе страна чине *угао* многоугла. Према броју углова, а то значи и према истом броју темена или страна, многоугао може бити: *троугао*, *четвороугао*, *петоугао*, *шестоугао* итд.

Део равни ограничен странама многоугла зове се *површина многоугла*. Понекад се и сама реч „многоугао“ употребљава у смислу површине многоугла.

§ 5. Круг

Геометриско место тачака одређених особина је геометриски облик који чине све те тачке.

Круг је геометриско место тачака у равни чија су растојања од неке одређене тачке једнака међу собом. Та одређена тачка равни зове се *центар* или *средиште* круга. Дуж која спаја центар са ма којом тачком на кругу зове се *полупречник*. Сви су полупречници једнаки. Дуж која спаја две ма које тачке круга зове се *тетива*. Тетива, која пролази кроз центар круга, зове се *пречник* круга. И сви пречници истог круга су једнаки.

Део круга између две ма које његове тачке зове се *кружни лук*. Крајеви сваке тетиве деле круг на два кружна лука од којих је већи онај, који је са оне стране тетиве где се налази центар круга. Пречник дели круг на два *полукруга*.

Део равни ограничен кругом зове се *површина круга*. Каткад се и сама реч „круг“ употребљава у смислу површине круга. Део кружне површине између два полупречника

зове се *кружни исечак* или *кружни сектор*. Свака тетива дели површину круга на два *кружна отсечка* или *кружна сегмента*, од којих је већи онај у коме је центар круга.

§ 6. Подударност

Скуп тачака у равни, сматраних као целина, чини *равну слику*. Ове тачке могу бити одвојене или чинити линије и површине. Равне слике су, на пр.: углови, полигони, круг итд.

За две равне слике, које се могу довести до *поклапања* свих тачака, каже се да су *подударне* или *конгруентне*. Подударност се обично обележава са $\cong$.

ГЛАВА II

ДУЖИ И УГЛОВИ

§ 7. Рачунање са дужима. Негативна дуж

Правила за рачунање са дужима могу се извести из аксиома или употребом преношења. Од подударности дужи прелази се на одређивање веће и мање дужи, па затим одређују правила сабирања, одузимања, множења и дељења дужи целим бројем. Сва смо та правила учили раније и пошто су врло проста нећемо их понављати.

Напоменимо само да при одузимању веће дужи од мање добијамо *негативну дуж* коју можемо протумачити као дуж супротног, *негативног*, смера према изабраном позитивном смеру. Без нарочите напомене сваку посебну дуж рачунамо као позитивну.

Пошто је дуж *растојање* својих крајњих тачака, рачунање са дужима служи за мерење растојања. Резултат сваког мерења дужи је *мерни број*, чија бројна вредност показује *величину растојања* или *дужину*, а именовање *јединицу* која је узета за мерење.

Вежбања

1. На некој правој су дате три тачке: A, B, C. Колико се полуправих и дужи може показати на тој слици?

2. Узети две ма које неједнаке дужи, па их сабрати и одузети мању од веће. Потом сабрати њихов збир са разликом и одредити колико пута је тај нови збир већи од веће дужи.

3. Учинити то исто, али само одузети добијену разлику од добијеног збира и утврдити колико пута је нова разлика већа од мање дужи.

4. Показати на сабирању дужи, у чему је комутативни и асоцијативни закон сабирања.

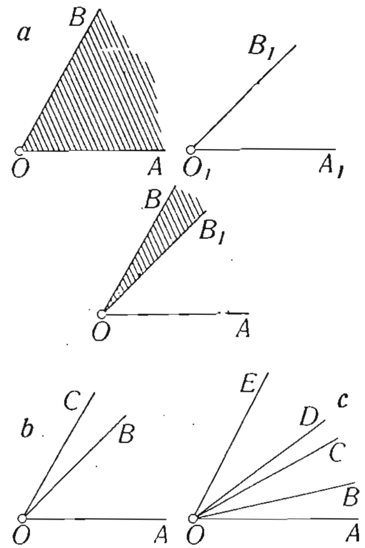
5. Геометриски доказати, да ако између три дужи постоје везе $a > b > c$, онда је $a - c > b - c$.

6. Ако се на правој узму четири тачке A, B, C и D по реду, па је $AB = CD$, доказати да је и $AC = BD$.

§ 8. Сабирање углова. Проширење појма угла

Познато је, како се врши упоређивање два угла преношењем једног угла на други. Темена O и O_1 (сл. 7, a) и краковi O_1A_1 и OA треба да се поклопе, а области углова да буду са исте стране од тих кракова. Према томе, да ли се и други кракови O_1B_1 и OB поклапају или не, углови су једнаки или не. У последњем случају већи је онај угао, чији слободни крак пада ван области другог угла на пр. $\sphericalangle AOB > \sphericalangle A_1O_1B_1$.

Два угла, $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ (сл. 7, b), који имају заједничко теме O и заједнички крак OB а леже са разних страна тог заједничког крака, зову се *суседни* углови. Каже се, да је $\sphericalangle BOC$ *надовезан* на крак OB угла AOB. Слободни кракови суседних углова чине угао који је *збир* оба надовезана угла, тј.



Слика 7

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC.$$

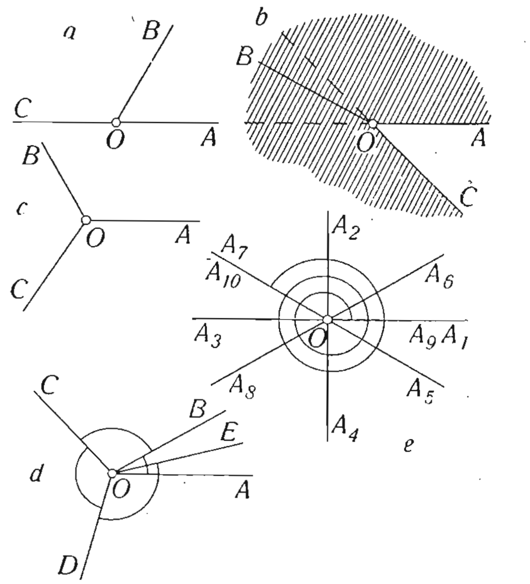
Исти поступак важи и за сабирање више углова надовезаних један на други. Угао, који чине слободни кракови првог и последњег угла, збир је свих датих углова (сл. 7, c):

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE = \sphericalangle AOE.$$

Сабирање углова доводи до проширења појма угла. Раније смо дефинисали угао само за случај кад продужења ма ког крака угла преко темена лежи у спољашњој области. Међутим, ако збир углова треба сматрати увек као угао онда се појам угла мора уопштити.

1. Ако слободни крак OC другог суседног угла BOC (сл. 8, a) пада у продужење крака OA првог угла AOB, онда таква два суседна угла чине у збиру *положени* или *равни* угао.

2. Унутрашњу област збира два или више углова чине области свих углова у збиру. На пр., област збира углова AOB и BOC превучена је цртама (сл. 8, b). То је угао AOC чији су кракови OA и OC. Продужење тих кракова преко темена пада у област угла. Такав угао зове се *испуичени*.



Слика 8

3. Може се догодити, да се слободни крак последњег угла у збиру поклопи са слободним краком првог угла. Тако је, на пр., у случају збира углова (сл. 8, c):

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COA.$$

Унутрашње области тих углова покривају целу раван. Такав угао зове се *йуни* угао.

4. Најзад, може се при сабирању више углова догодити, да унутрашње области сабирака покривају раван више пута. На пр., код збира (сл. 8, d)

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE$$

област угла AOE покривена је двапут областима углова сабирака. Наш збир чини пуни угао и угао AOE. У збиру (сл. 8, e)

$$\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 + \sphericalangle A_4OA_5 + \\ + \sphericalangle A_5OA_6 + \sphericalangle A_6OA_7 + \sphericalangle A_7OA_8 + \sphericalangle A_8OA_9 + \sphericalangle A_9OA_{10}$$

имамо два пуна угла и угао A_1OA_{10}, тј. цела раван је више од двапут прекривена областима сабирака.

Вежбања

1. Колико најмање удубљених углова треба сабрати, па да се добије пуни угао?
2. Како смо раније кретањем тумачили углове веће од удубљеног угла? Зашто сад тумачимо друкчије?

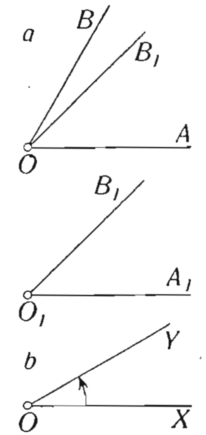
3. Може ли се сваки угао претставити као збир удубљених углова?
4. Конструисати два угла чији је збир положени угао.
5. Конструисати три удубљена угла чији је збир пуни угао.
6. Може ли збир три удубљена угла бити већи од пуног угла? Од којег угла тај збир не може бити већи?
7. Ако је збир два угла пуни угао, какав може бити сваки од њих?
8. Колико најмање удубљених углова треба узети да бисмо добили два пуна угла?

§ 9. Одузимање углова. Оријентисани угао. Негативни угао

Нека од угла AOB (сл. 9, a) треба одузети мањи угао $A_1O_1B_1$. Пренесемо $\sphericalangle A_1O_1B_1$ на $\sphericalangle AOB$ тако, да се поклопе темена O и O_1 и кракови OA и O_1A_1 а области оба угла падају са исте стране заједничког крака. Тада је $\sphericalangle B_1OB$ разлика датих углова, тј.

$$\sphericalangle B_1OB = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOB_1 = \sphericalangle AOB - \sphericalangle A_1O_1B_1,$$

јер су углови $\sphericalangle AOB_1$ и $\sphericalangle A_1O_1B_1$ подударни пошто се поклапају.



Слика 9

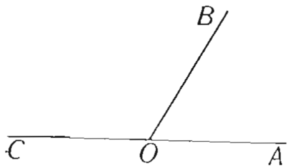
Ако код углова разликујемо ред кракова и сматрамо да област угла почиње од првог крака, а свршава се код другог, онда се такав угао зове *оријенйисани*. Оријентисани угао се на слици показује обично помоћу стрелице стављене на луку између кракова, на пр. $\sphericalangle XOY$ (сл. 9, b). Код оријентисаних углова увек прво слово ознаке угла припада полазном краку угла.

Кад се на неком углу означи смер и тај смер узме за позитиван, угао са истим теменом супротног смера зове се *негаийиван*. Тако (сл. 9, b) ако је $\sphericalangle XOY$ позитиван, онда је $\sphericalangle YOX$ негативан. Увођење негативних углова омогућава одузимање већег угла од мањег.

Вежбања

1. Каква је разлика, ако је умањеник положени угао, а умањилац удубљени угао?
2. Нацртати слику, која показује одузимање угла $A_1O_1B_1$ од угла AOB са сл. 9, a узимајући за заједнички крак OB.
3. Нацртати слику за одузимање већег угла од мањег.
4. Из темена положеног угла повући полуправу и на једном од тако добијена два угла означити позитиван смер, а на другом негативан.

§ 10. Упоредни углови. Прави угао. Нормала. Унакрсни углови



Слика 10

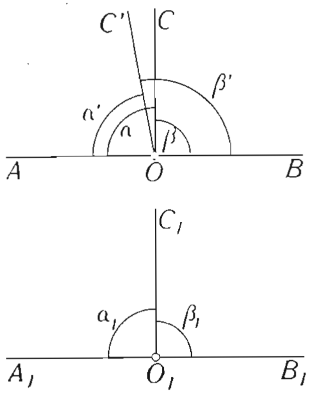
Суседни углови који чине положени угао, зову се *упоредни* углови. На пр.: углови AOB и BOC (сл. 10) су упоредни.

Кад су два упоредна угла подударни, сваки је *прави* угао. Прави угао је удубљени угао. Удубљени углови, мањи од правог угла, зову се *оштри*, а удубљени углови већи од правог угла зову се *тупи* углови. Оштри и тупи углови једним именом зову се *коси* углови.

Теорема 2. *Сви прави углови су подударни.*

Нека на правој AB, код тачке O, имамо два права угла (сл. 11):

$$\alpha = \beta.$$



Слика 11

Нека на другој правој A_1B_1 имамо два друга права угла:

$$\alpha_1 = \beta_1 .$$

Доказаћемо, да је прави угао код тачке O једнак правом углу код тачке O_1, тј., да је

$$\alpha = \alpha_1 .$$

Претпоставимо прво, *супротно*, да α није једнако α_1, тј. $\alpha \neq \alpha_1$. Тада је или $\alpha_1 < \alpha$ или $\alpha_1 > \alpha$. Ако се претпостави, да је $\alpha_1 < \alpha$, онда, кад се код тачке O конструише угао подударан са α_1, полуправа O_1C_1 заузима положај OC' у области угла α. Кад се углови AOC' и BOC' означе са α' и β', онда се може написати:

$$\alpha' < \alpha, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \beta',$$

одакле следује

$$(1) \qquad \alpha' < \beta' .$$

Са друге стране, због подударности слика $A_1B_1O_1C_1$ и $ABOC'$, може се написати:

$$\alpha' = \alpha_1, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \beta_1 = \beta',$$

одакле се изводи

$$(2) \qquad \alpha' = \beta' .$$

Пошто је наша претпоставка $\alpha_1 < \alpha$ довела до противречних резултата (1) и (2), може се тврдити да је учињена претпоставка немогућа. Исто се тако може показати, да је немогуће $\alpha_1 > \alpha$. Према томе закључујемо да је $\alpha = \alpha_1$, што је требало доказати.

При доказивању ове теореме прво смо претпоставили, да је тачно *супротно* оном што се тврди и после показали да таква претпоставка доводи до противречности. Дакле, доказали смо тачност нашег става тиме што смо показали, да су супротни ставови немогући. Ово је пример *индиректног* доказа.

Пошто су сви прави углови подударни, за сваки се може употребити иста ознака. Обично се прави угао означује са d.

За кракове правог угла каже се да су *нормални* један на другом.

Теорема 3. *Збир упоредних углова је $2d$.*

Нека су $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$ (сл. 12, *a*) два упоредна угла. Доказати да је

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 2d .$$

Конструишимо прав угао AOD. Пошто је тада

$$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = \sphericalangle AOC +$$
$$+ \sphericalangle COD + \sphericalangle DOB = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOB = 2d ,$$

теорема је доказана.

Последица I. Збир више углова са истим теменом, који покривају полураван, једнак је $2d$. На пр. (сл. 12, *b*):

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOF = 2d .$$

Последица II. Збир више углова са истим теменом, који покривају целу раван, једнак је $4d$. И ова последица постаје одмах јасна, ако се конструише продужење крака преко темена ма ког од углова збира, на пр., OA_1 (сл. 12, *c*).

Последица III. Од два уйоредна угла који нису једнаки, један је оштри а други тупи.

Две теореме су *обрнуте* једна другој, ако су подаци једне (у потпуности или делимично) закључак друге и обрнуто.

Теорема 4. *(Обрнута теореми 3). Ако збир два суседна угла износи $2d$, њихови слободни кракови су у истој правој.*

Нека је (сл 12, *d*)

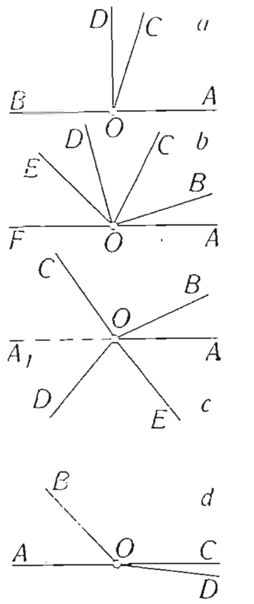
(1) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 2d,$

треба доказати да је AOC права. Ако претпоставимо да то није тако и да је права AOD, онда на основу теореме 3 имамо:

(2) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD = 2d.$

Упоређивањем (1) и (2) закључујемо да је

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD,$$



Слика 12

а то може бити само кад се праве OC и OD поклапају. Према томе је линија AOC права.

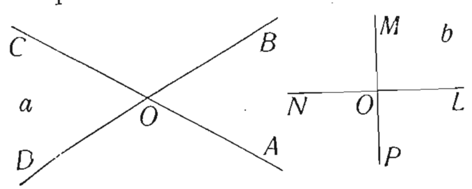
Углови чији је збир $2d$, без обзира на узајамни положај, зову се *суплементни* углови. Упоредни углови су увек суплементни.

Углови чији је збир прави угао зову се *комплементни.*

Два угла су *унакрсни*, ако су кракови једног продужења кракова другог угла преко темена. Такви су углови: $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$ (сл. 13, *a*).

Теорема 5. *Унакрсни углови су једнаки.*

Нека су $\sphericalangle AOB = \alpha$ и $\sphericalangle COD = \beta$ два унакрсна угла.



Слика 13

Ако $\sphericalangle BOC$ означимо са γ, имамо (теорема 3):

$$\alpha + \gamma = 2d,$$
$$\beta + \gamma = 2d,$$

одакле је $\alpha = \beta$, што је требало доказати.

У пресеку две праве имамо два пара унакрсних углова. Ако је један од углова у таквом пресеку прав, сва четири су прави (сл. 13, *b*). Праве су тада нормалне једна на другој. Нормалност правих означавамо скраћено $\perp$. У нашем случају $MP \perp LN$.

Кад две праве нису нормалне, оне су *косе* једна према другој.

Вежбања

1. Ако збир више надовезаних углова износи $4d$, доказати да слободни кракови првог и последњег угла падају у исту полуправу.

2. Изразити у деловима правог угла ове углове: *a*) други упоредни угао, кад један износи $\frac{1}{2}d$; *b*) једну трећину положеног угла; *c*) две петине пуног угла; *d*) збир четвртине положеног угла и осмине пуног угла; *e*) разлику три половине правог угла и једне петине пуног угла.

§ 11. Мерење углова

Прави угао је увек исте величине и зато се са њим могу упоређивати остали углови. Прави угао може послужити, дакле, и за мерење углова. Пошто је он доста велики, за јединицу се узима *деведесети део* правог угла и он се зове *степен.* Степен се дели на 60 *минута,* а *минут* на 60 *секунди.* Овај се систем зове *сексагезимални* (од латинске речи — sexagesimus — шесети). Са овим системом мерења угла упознали смо се раније. Познате су нам и ознаке степена, минута и секунди, на пр. $59^0\ 37'\ 21'',3$ значи: 59 степена, 37 минута и 21,3 секунди.

У једном другом систему мерења угла узима се за јединицу *стоти* део правог угла и зове се *град.* Његова ознака је: ^{g}; на пр., 32^g значи угао од 32 града. Сваки град се дели на 100 минута (*центезималних*), а сваки минут на 100 *секунди* (*центезималних*). Понекад се употребљују и ове ознаке: за центезималне минуте `, за секунде ``. Овај се систем зове *декадни* систем. Рачунање са угловима израженим у декадном систему много је простије него у сексагезималном систему, јер се сваки угао у овом систему лако изражава у облику децималног броја, на пр.:

$$15^g\ 12`\ 47`` = 15^g,1247,$$
$$32^g\ \ 3`\ \ 5`` = 32^g,0305.$$

Како прави угао има 90 степена или 100 гради, може се написати

$$90^0 = 100^g,$$

одакле се добије:

$$1^{0} = \frac{10}{9}^{g}, \quad 1' = \frac{10}{9\,.\,60}^{g} = \frac{1}{54}^{g}, \quad 1'' = \frac{10}{9\,.\,60\,.\,60}^{g} = \frac{1}{3240}^{g};$$

или:

$$1^{g} = \frac{9}{10}^{0} = 0^{0},9 = 54'.$$

Ови резултати омогућују да се сваки угао, изражен у степенима, минутима и секундима, напише у декадном систему и обрнуто.

Касније ћемо се упознати са још једним врло важним начином мерења углова.

Вежбања

1. Изразити у градима ове углове:

$a.\ 180^{0}$, $d.\ 18^{0}$, $g.\ 15^{0}$, $j.\ 23^{0}\,27'$,
$b.\ 360^{0}$, $e.\ 100^{0}$, $h.\ 45^{0}$, $k.\ 17^{0}\,43'\,8''$,
$c.\ 108^{0}$, $f.\ 900^{0}$, $i.\ 44^{0}$, $l.\ 137^{0}\,29'\,53''$.

2. Изразити у степенима, минутима и секундима углове:

$a.\ 200^{g}$, $d.\ 360^{g}$, $g.\ 45^{g}$, $j.\ 44^{g}$,
$b.\ 150^{g}$, $e.\ 40^{g}$, $h.\ 75^{g}$, $k.\ 35^{g}.5$,
$c.\ 180^{g}$, $f.\ 50^{g}$, $i.\ 5^{g}$, $l.\ 27^{g}.2731$.

3. Углови α и β су упоредни. Израчунати угао β, кад је α:

$a.\ 45^{0}$, $c.\ 100^{0}$, $e.\ 53^{0}$, $g.\ 18^{0}\,17'\,27''$,
$b.\ 45^{g}$, $d.\ 90^{g}$, $f.\ 53^{g}$. $h.\ 18^{g}.1727$.

4. Одредити комплементни угао за углове:

$a.\ 30^{0}$, 75^{0}, $23^{0},30'$, $45^{0}\,45'\,45''$,
$b.\ 29^{g}$, 99^{g}, $10^{g}.9$, $49^{g},9629$.

5. Одредити суплементни угао за углове:

$a.\ 15^{0}$, 150^{0}, $127^{0}\,30'$, $49^{0}\,39'\,54''$,
$b.\ 15^{g}$, 150^{g}, $127^{g},3$. $49^{g},3954$.

6. Одредити који је већи од ових углова:

$a.\ 45^{0}$ или 45^{g}? $d.\ 108^{0}\,35'$ или $120^{g}.35$?
$b.\ 54^{0}$ или 60^{g}? $e.\ 131^{g}$ или $117^{0}\,54'$?
$c.\ 27^{0}$ или 29^{g}? $f.\ 126^{0}\,27'\,19''$ или $140^{g},5029$?

7. Израчунати:

$a.\ 127^{0}\,13'27'' + 15^{0}\,18'16''$; $e.\ 17^{0}\,13'19'' \times 7$;
$b.\ 75^{g},1532 + 90^{g},1815$; $f.\ 17^{g},1319 \times 7$;
$c.\ 179^{0}\,43'12'' - 80^{0}\,54'47''$; $g.\ 123^{0}\,15'27'' : 9$;
$d.\ 152^{g},1342 - 24^{g},0369$; $h.\ 75^{g},1321 : 7$.

8. Поставити образац за претварање угла од n степена у граде и обрнуто.

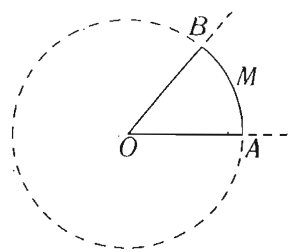
9. Написати примере изражене у градима за углове: *a*) оштри, *b*) тупи, *c*) положени, *d*) испупчени и *e*) пуни.

10. Доказати да, кад се кроз теме правог угла повуче права ван области угла, она гради са краковима правог угла два комплементна угла.

11. Три праве пролазе кроз једну тачку. Оне чине шест надовезаних углова без заједничких области чији је збир $4d$. Доказати да тада збир ма која три неузастопна угла од њих износи $2d$.

§ 12. Угао и лук

Као што знамо, угао са теменом у центру круга, на пр. $\measuredangle AOB$ (сл. 14), зове се *централни* или *средишни* угао. Његови су кракови одређени полупречницима OA и OB. У области тог угла је лук AMB. Правом централном углу одговара лук од четвртине кружног обима. Деведесети део тог лука зове се *лучни степен*. Лучни степен је дужина. На круговима разних полупречника лучни степени су различитих дужина. Лучни степен се дели на 60 *лучних минута*, а лучни минут на 60 *лучних секунди*.



Слика 14

Теорема 6. *Сваки централни угао има исто толико степена и његових делова, колико његов лук има лучних степена и његових делова.*

Заиста, ако на датом централном углу AOB одмеримо степене, па на остатку минуте итд., онда ће на луку AMB тог угла бити одмерени у истом броју и лучни степени и његови делови.

Ова теорема објашњава у ком се смислу може мерење угла заменити мерењем лука између његових кракова на кругу ма ког полупречника.

Вежбања

1. Колико лучних степена садржи лук угла од 60^{g}?

2. Шта је то лучни град, а лучни центезимални минут, а лучни центезимални секунд?

3. Колико лучних гради има у једном лучном степену?

4. Колика је дужина једног лучног минута (морска миља) на кругу Земљиног меридијана чија је дужина око 40 000 km?

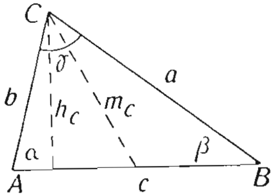
ГЛАВА III

ТРОУГАО. ОСНА СИМЕТРИЈА

§ 13. Троугао. Врсте троуглова

Троугао је затворена изломљена линија од три дужи. Ова изломљена линија ограничава област равни која се зове *површина троугла*. Каткад се реч „троугао“ односи и на површину троугла.

Од раније нам је познато шта су: *стране* троугла (a, b, c), *темена* (A, B, C), *углови* ($\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$), *обим* или *периметар* ($a + b + c = 2s$), *основица* (на пр. c), *висине* (h_a, h_b, h_c), *тежишне линије* (m_a, m_b, m_c) — (сл. 15).



Слика 15

Троуглови се разликују:

а) према странама, на *разностране, равнокраке* и *равностране*.

b) према угловима, на — *косоугле (оштроугли* и *тупоугли)* и *правоугле*.

Вежбања

1. Нацртати троугао LMN и означити његове висине.
2. Дефинисати разнострани, равнокраки и равнострани троугао.
3. Дефинисати косоугли и правоугли троугао.
4. Дефинисати хипотенузу и катету правоуглог троугла.
5. Нацртати три троугла — разнострани, равнокраки и равнострани.
6. Нацртати оштроугли, тупоугли и правоугли троугао.
7. Нацртати све висине у тупоуглом и правоуглом троуглу.

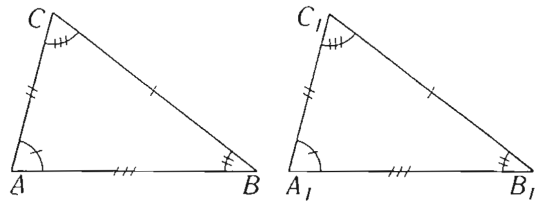
§ 14. Подударност троуглова

Два троугла су *подударни* или *конгруентни*, ако су стране и углови једног троугла једнаки одговарајућим странама и угловима другог троугла. *Одговарајући* или *хомологни* елементи код подударних троуглова то су — стране наспрам једнаких углова и углови наспрам једнаких страна. Подударни троуглови се могу поклопити.

Према томе, ако је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (сл. 16), онда је

$$BC = B_1C_1,\quad CA = C_1A_1,\quad AB = A_1B_1;$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1,\quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1,\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C_1.$$

Теорема 7. (Први став о подударности троуглова). *Два троугла су подударни, ако имају једнаке две стране и угао захваћен тим странама.*



Слика 16

Нека је у троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 16):

$$AB = A_1B_1,\quad AC = A_1C_1,\quad \sphericalangle A = \sphericalangle A_1.$$

Треба доказати да је

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1,\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C_1,\quad BC = B_1C_1.$$

Ако се једнаки углови $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle A_1$ ставе један на други, онда, пошто је $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = AC$, сва три темена A_1, B_1, C_1 поклопе се са теменима A, B, C. Из тог следује једнакост и осталих троуглових елемената, тј.

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B_1,\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C_1,\quad BC = B_1C_1,$$

што је требало доказати.

Пошто се подударност троуглова врло често употребљава, означаваћемо ово правило подударности троуглова на основу подударности стране, угла и друге стране кратко са [СУС]. Чита се: страна, угао, страна.

Последица. Правоугли троуглови су подударни, кад су им катете једнаке.

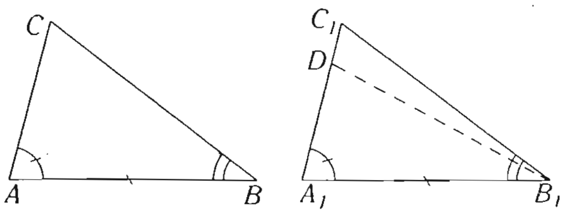
Теорема 8. (Други став о подударности троуглова). *Два троугла су подударни, ако имају једнака по два угла и стране на којима леже ти углови.*

Дато је (сл. 17):

$$AB=A_1B_1, \quad \sphericalangle A=\sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B=\sphericalangle B_1,$$

а треба доказати да је

$$AC=A_1C_1, \quad BC=B_1C_1, \quad \sphericalangle C=\sphericalangle C_1.$$



Слика 17

Узмимо да AC није једнако A_1C_1 и да је $A_1D=AC$. Тада је по правилу [СУС] $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1D$. Отуда следује

$$\sphericalangle B=\sphericalangle A_1B_1D$$

и пошто је по претпоставци $\sphericalangle B=\sphericalangle A_1B_1C_1$, добија се

$$\sphericalangle ABC=\sphericalangle A_1B_1D,$$

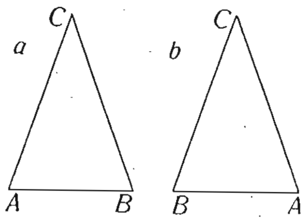
а то је немогуће. Према томе је $AC=A_1C_1$. Сад на наше троуглове са једнаким угловима $\sphericalangle A=\sphericalangle A_1$ и странама $AB=A_1B_1$ и $AC=A_1C_1$ можемо применити правило [СУС], одакле долазимо до подударности осталих елемената: $BC=B_1C_1$ и $\sphericalangle C=C_1$.

Ово правило подударности означаваћемо са [УСУ], што се чита: угао, страна, угао.

Последица: Правоугли троуглови су подударни, ако имају једнаке по једну катету са налеглим оштрим углом.

Теорема 9. *Углови наспрам једнаких страна код равнокраког троугла једнаки су.*

У троуглу ABC (сл. 18, a) дато је: $CA=CB$. Треба доказати: $\sphericalangle A=\sphericalangle B$.



Слика 18

Преврнимо $\triangle ABC$ на другу страну (сл. 18, b), тада је према [СУС] $\triangle ABC\cong\triangle BAC$, одакле је $\sphericalangle A=\sphericalangle B$, а то је требало доказати.

Последица: У равностраном троуглу су сви углови једнаки.

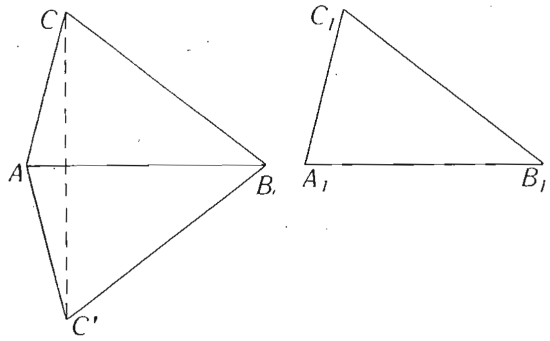
Теорема 10. (Обрнута теореми 9). *Ако су два угла у једном троуглу једнака, троугао је равнокрак.*

У троуглу ABC (сл. 18, a) дато је: $\sphericalangle A=\sphericalangle B$, а треба доказати: $CA=CB$.

Поново посматрамо троуглове ABC (сл. 18, a) и BAC (сл. 18, b). Пошто је сад у тим троугловима: $AB=BA$, $\sphericalangle A=\sphericalangle B$, $\sphericalangle B=\sphericalangle A$, они су по правилу [УСУ] подударни и стога је $AC=BC$, што је требало доказати.

Теорема 11. (Трећи став о подударности троуглова). *Два троугла су подударни, ако су све три стране једног троугла једнаке одговарајућим странама другог троугла.*

Нека је у троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 19): $BC=B_1C_1$, $CA=C_1A_1$, $AB=A_1B_1$. Доказати да је: $\sphericalangle A=\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B=B_1$, $\sphericalangle C=\sphericalangle C_1$.



Слика 19

На AB, са супротне стране од C, конструишемо угао $\sphericalangle BAC'\cong\sphericalangle A_1$, одмеримо $AC'=A_1C_1$ и спојимо C' са B. Пошто је и $AB=A_1B_1$, то је по правилу [СУС] $\triangle ABC'\cong\triangle A_1B_1C_1$.

Стога је: $AC'=A_1C_1=AC$, $BC'=B_1C_1=BC$.

Ако спојимо C и C', троугли $CC'A$ и $CC'B$ су равнокраки и према теореми 9 имамо:

$$\sphericalangle ACC'=\sphericalangle AC'C, \quad \sphericalangle BCC'=\sphericalangle BC'C.$$

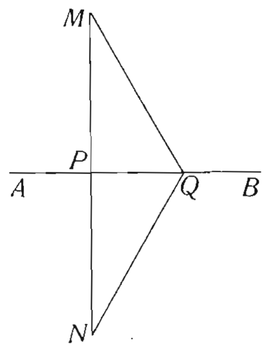
Сабирањем углова са леве и десне стране тих једначина добија се: $\sphericalangle ACB=\sphericalangle AC'B=\sphericalangle A_1C_1B_1$, тј. $\sphericalangle C=C_1$.

Сад је, по правилу [СУС], $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

У случају да је један од углова $\sphericalangle A$ или $\sphericalangle B$ туп доказ се изводи на исти начин само се уместо горњег збира углова узме разлика једнаких углова.

Ово правило подударности означаваћемо [ССС], што се чита: страна, страна, страна.

Теорема 12. *Из тачке ван праве може се повући само једна нормала на ту праву.*



Слика 20

Нека је MP (сл. 20) нормала на праву AB, тј.

$$\sphericalangle MPA=\sphericalangle MPB=d.$$

Доказати да друга нормала из исте тачке не постоји.

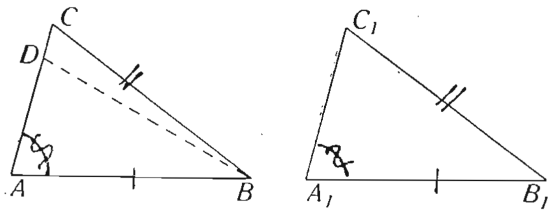
Претпоставимо баш обрнуто, да постоји још и друга нормала MQ, за коју је исто тако

$$\sphericalangle MQA=\sphericalangle MQB=d.$$

Одмеримо на продужењу MP дуж PN једнаку дужи MP и спојимо N са Q. Тада је, по правилу [СУС], $\triangle MPQ\cong\triangle NPQ$ и због тога је $\sphericalangle MQA=\sphericalangle NQA$. Пошто је први угао прав по претпоставци, и други је прав. Њихов збир је $2d$, а како су суседни, то значи (теорема 4) да су упоредни и према томе је MQN права линија. Пошто се између две тачке M и N може повући само једна права, ова друга нормала мора се поклопити са првом.

Теорема 13. (Четврти став о подударности троуглова). *Два троугла су подударни, ако имају једнаке по две стране и кад су углови наспрам једне од њих једнаки, а наспрам друге оба или оштри, или тупи или прави.*

Нека је у троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 21)



Слика 21

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, и поред тога се зна да су углови $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C_1$ оба, на пр., оштри.

Треба доказати, да су троуглови подударни, тј. да је $AC = A_1C_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$.

Ако претпоставимо, да AC није једнако A_1C_1, тада постоји тачка D, на пр., на дужи AC за коју је $AD = A_1C_1$. По правилу [СУС] имали бисмо онда: $\triangle ABD \cong \triangle A_1B_1C_1$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle C_1$, а како је $\sphericalangle C_1$ оштар и $\sphericalangle ADB$ треба да буде оштар. Са друге стране, пошто је $BD = B_1C_1 = BC$, то је $\triangle BDC$ равнокрак, одакле имамо једнакост углова $\sphericalangle BDC = \sphericalangle C$. Пошто је угао C оштар, мора и угао BDC бити оштар, а њихов упоредни угао ADB мора, према теореми 3, последица III, бити туп. Према томе излази да исти угао ADB треба да буде и оштар и туп, а то је немогуће. Тачка D не може да лежи између тачака A и C.

На сличан начин се може показати, да тачка D не може да лежи ни на продужењу AC, тј. она мора да се поклопи са C и тада је $AC = A_1C_1$. После тога по правилу [СУС] доказујемо подударност троуглова.

У случају, да су углови $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C_1$ тупи, доказ се изводи на сличан начин. Кад су углови $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C_1$ прави, тада би равнокраки троугао BDC имао на страни DC два права угла, тј. имали бисмо из тачке B две нормале BD и BC, а то је немогуће. Дакле, и у овом случају тачка D се поклапа са тачком C.

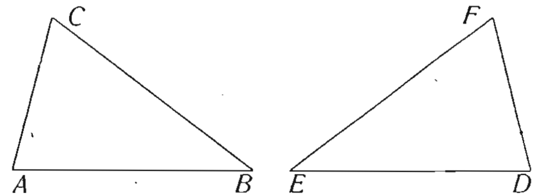
Четврто правило подударности означићемо кратко са [ССУ], што се чита: страна, страна, угао.

Последица: Правоугли троуглови су подударни, ако имају једнаке хипотенузе и по једну катету.

Теореме о подударности троуглова играју врло велику улогу у геометрији, јер се помоћу њих краће утврђује подударност других сложенијих слика, доказују многе теореме и решавају разни задаци.

Вежбања

1. Узети два троугла LMN и PQR и на њима изразити услове за свако од четири правила о подударности троуглова.
2. Доказати правило [С У С], кад су једнаки углови тупи.
3. Доказати правило [У С У], кад је један од једнаких углова туп.
4. Доказати правило [С С С] за троугле ABC и DEF (сл. 22).
5. Доказати правило [С С У], кад су једнаки углови тупи.
6. Написати услове подударности два правоугла троугла LMN и $L_1M_1N_1$ са правим углом код M и M_1 за наведена правила подударности правоуглих троуглова.



Слика 22

7. Доказати теорему: Два троугла су подударни, ако су висина h_a и отсечци a_1 и a_2 (или углови α_1 и α_2) на које та висина дели страну a (или угао α) једног троугла једнаки одговарајућим елементима другог троугла.
8. Доказати теорему: Два троугла су подударни, ако су h_a, b и c једног троугла једнаки одговарајућим величинама другог троугла.
9. Нека су дата два равнокрака троугла са основицама a и a_1, краковима b и b_1, угловима на основицама β и β_1 и угловима при врху α и α_1. Написати услове подударности ових троуглова и изразити одговарајућа правила подударности речима.
10. Доказати да, ако висина полови један угао у троуглу, тај троугао мора бити равнокрак.
11. Доказати да, ако се на странама равностраног троугла, почев ма од ког темена, одмере једнаке дужи у истом смеру, крајеви тих дужи чине опет темена равностраног троугла.
12. Доказати да је тежишна линија у равнокраком троуглу, која одговара основици, у исто време и висина.
13. Доказати да су тежишне линије, које одговарају краковима равнокраког троугла, једнаке.
14. Доказати да су два троугла подударни, ако имају једнаке по две стране и по једну одговарајућу висину.

15. Доказати да су два троугла подударни, ако имају једнаке по једну страну и по две одговарајуће висине.

16. Доказати да су два троугла подударни, ако имају једнаке две стране и тежишну линију према једној од њих.

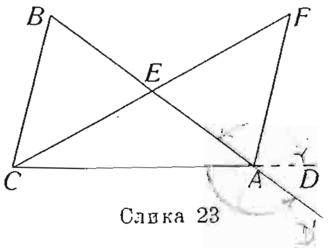
§ 15. Особине троугла

а. Особина спољашњег угла

Упоредни угао ма ког угла у троуглу зове се *спољашњи* угао троугла. Углови у троуглу зову се тада и *унутрашњи* углови.

Теорема 14. *Спољашњи угао је увек већи од сваког унутрашњег несуседног угла.*

Доказати да је у троуглу ABC спољашњи угао, на пр. $\sphericalangle BAD$, већи од унутрашњег угла, рецимо, $\sphericalangle B$ (сл. 23).



Слика 23

Спојимо средину E дужи AB са C и на продужењу CE одмеримо $EF = CE$. Троуглови BEC и AEF на основу правила [СУС] подударни су и према томе је $\sphericalangle B = BAF$. Пошто угао BAF чини само део спољашњег угла BAD, то је угао BAD већи од угла B. Исто тако се може доказати да је тај спољашњи угао већи и од угла C. (Докажи то). (1)

Последица. *У троуглу може бити само један унутрашњи угао туп или прав.* (2)

Спољашњи угао, који одговара овом унутрашњем углу је оштар или прав, према томе остала два унутрашња угла морају бити оштри.

Вежбања

1. Доказати претходну теорему, кад је спољашњи угао оштар.
2. Исто то, кад је спољашњи угао прав.
3. Један угао троугла износи 120^0. Зашто сваки од осталих мора да буде мањи од 60^0?

b. Однос страна и углова у троуглу

Теорема 15. *У сваком троуглу: 1) наспрам једнаких страна и углови су једнаки; 2) наспрам веће стране је и већи угао.*

1. Ако су у троуглу две стране једнаке, он је равнокраки, а према теореми 9 у равнокраком троуглу су наспрам

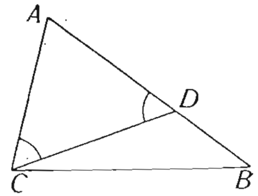
(1) Пошто смо већ доказали да је угао наспрам продужене стране ... од одговарајућег спољашњег то је $\sphericalangle BCD < \sphericalangle CAD'$ а како је

једнаких страна и углови једнаки. Тиме је доказан први део теореме.

2. Нека је код троугла ABC (сл. 24) страна AB већа од стране AC. Доказати да је $\sphericalangle C > \sphericalangle B$.

Одмеримо $AD = AC$. У равнокраком троуглу ACD имамо:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC.$$



Слика 24

Угао C већи је од угла ACD, а угао ADC већи је од угла B као спољашњи угао троугла BCD. Према томе $\sphericalangle ACD$ треба повећати до угла C, а $\sphericalangle ADC$ треба смањити до $\sphericalangle B$, стога је $\sphericalangle C > \sphericalangle B$, што је требало доказати у другом делу теореме.

Тачна је и обрнута теорема:

Теорема 16. *У сваком троуглу: 1) наспрам једнаких углова и стране су једнаке; 2) наспрам већег угла је и већа страна.*

Први део ове теореме доказан је у теореми 10. Други део теореме је врло лако доказати индиректно. Нека је у троуглу ABC (сл. 24): $\sphericalangle C > \sphericalangle B$. Доказати, да је $AB > AC$. Узмимо, прво, супротно, да страна AB није већа од стране AC. Тада мора бити — или $AB = AC$, што повлачи по теореми 9 и $\sphericalangle C = \sphericalangle B$, а то је противречно претпоставци — или $AB < AC$, а то опет по теореми 15 повлачи $\sphericalangle C < \sphericalangle B$, што опет противречи претпоставци. Према томе је $AB > AC$.

Последица I. У правоуглом троуглу је најдужа страна хипотенуза.

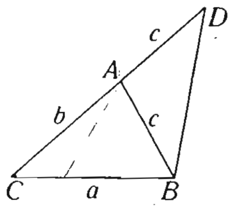
Последица II. У тупоуглом троуглу је најдужа страна наспрам тупог угла.

Последица III. У разностраном троуглу на најдужој страни су оштри углови.

c. Однос између страна у троуглу

Теорема 17. *Свака страна троугла 1) мања је од збира и 2) већа од разлике две остале стране.*

1. За доказ првог дела теореме треба доказати само да је највећа страна троугла мања од збира осталих страна. На пр., ако је у троуглу ABC (сл. 25) $a \geqslant b \geqslant c$, доказати да је $a < b + c$.



Слика 25

У том циљу одмеримо на продужењу стране CA преко A дуж $AD=AB=c$. Спојимо тачку D са тачком B. $\triangle BAD$ је равнокрак и према томе је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD$. Угао CBD већи је од угла ABD, па према томе и од угла ADB Како је у $\triangle BCD$ наспрам већег угла и већа страна, то је $CD > CB$ или пошто је $CD = b + c$, а $CB = a$,

$$a < b + c,$$

што је требало доказати.

2. За доказ другог дела довољно је доказати да су мање стране b и c троугла ABC веће од разлике две остале, тј. $b > a - c$, $c > a - b$. Свака од ових неједнакости непосредно следује из претходне неједнакости $a < b + c$, ако од обе стране одузмемо прво c, а затим b.

Помоћу претходне теореме може се доказати и ова општија теорема.

Теорема 18. *Дуж која спаја две тачке мања је од сваке изломљене линије која спаја те исте тачке.*

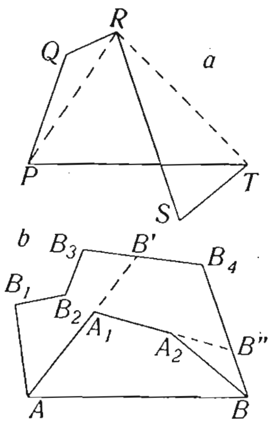
Доказати да је дуж PT краћа од изломљене линије $PQRST$ (сл. 26, a). На основу претходне теореме може се написати:

$$PT < PR + RT,$$
$$PR < PQ + QR,$$
$$RT < RS + ST.$$

Ако саберемо чланове левих и десних страна тих неједнакости, добићемо, кад још од тих збирова одузмемо исте чланове, неједнакост

$$PT < PQ + QR + RS + ST,$$

што потврђује теорему.



Слика 26

Ако имамо две изломљене линије са истим крајевима, на пример, $AB_1B_2B_3B_4B$ и AA_1A_2B (сл. 26, b), онда се каже да линија $AB_1B_2 \ldots B$ обухвата линију AA_1A_2B, ако се линија AA_1A_2B налази у многоуглу који чине изломљена линија $AB_1B_2 \ldots B$ и дуж AB која спаја крајеве.

Теорема 19. *Испупчена изломљена линија увек је мања од изломљене линије која је обухвата.*

Нека је AA_1A_2B испупчена изломљена линија, а $AB_1B_1 \ldots B$ ма која друга изломљена линија истих крајева A и B, која обухвата прву. Докажимо да је изломљена линија AA_1A_2B мања од изломљене линије $AB_1B_2 \ldots B$.

Ако продужимо AA_1 до пресека у B' и A_1A_2 до пресека B'' са другом линијом, онда се на основу теореме 18 може написати:

$$AA_1 + A_1B' < AB_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B'$$
$$A_1A_2 + A_2B'' < A_1B' + B'B_4 + B_4B''$$
$$A_2B < A_2B'' + B''B.$$

Одатле сабирањем чланова левих и десних страна неједнакости и свођењем долазимо до резултата

$$AA_1 + A_1A_2 + A_2B < AB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_4B,$$

што је требало доказати.

Вежбања

1. За троугао са странама p, q, r написати да је свака страна већа од разлике, а мања од збира две остале стране.
2. Доказати да је дуж, која спаја две тачке, краћа од изломљене линије коју чине шест дужи, а спаја исте тачке.
3. Доказати да је дуж, која спаја теме троугла са ма којом тачком супротне стране, увек мања од полуобима троугла.
4. Узети ма коју тачку у троуглу и спојити је са теменима. Доказати да је збир те три дужи мањи од обима троугла, а већи од његовог полуобима.
5. Доказати да је у троуглу свака страна увек мања од полуобима.
6. Доказати да је висина у троуглу увек мања од полузбира оне две стране из чије заједничке тачке, као темена, полази.
7. Доказати да је збир све три висине у троуглу мањи од његовог обима.
8. Доказати да је збир све три тежишне линије у троуглу већи од полуобима троугла.

d. *Промена стране троугла при промени супротног угла*

Теорема 20. *Ако су две стране једног троугла једнаке двема странама другог троугла, а тим странама захваћени углови нису једнаки, онда је наспрам већег угла и већа страна.*

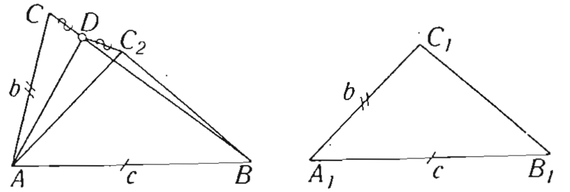
Нека је у троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 27):

$$AB = A_1B_1 = c, \qquad AC = A_1C_1 = b, \qquad \sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1.$$

Доказати да је

$$BC > B_1C_1.$$

Нацртајмо троугао ABC_2 подударан троуглу $A_1B_1C_1$. Права AC_2 пада у област угла BAC. Нека је D у пресеку



Слика 27

стране BC и праве која полови угао CAC_2. Спојимо D и C_2. Троуглови ADC и ADC_2 подударни су по правилу [СУС] и зато је $DC_2 = DC$. Из троугла BDC_2 имамо:

$$BD + DC_2 > C_2B\,.$$

Кад се замени DC_2 са једнаком дужи DC, па затим $BD + DC$ са BC и дуж C_2B са B_1C_1, добија се

$$BC > B_1C_1\,,$$

што је требало доказати.

Последица. Ако се у троуглу две стране не мењају, а од њих захваћени угао расте, онда и супротна, трећа страна расте; ако тај угао опада и супротна страна опада.

Теорема 21. (Обрнута теореми 20). *Ако су две стране једног троугла једнаке двема странама другог троугла, а треће стране нису једнаке, онда је наспрам веће стране и већи угао.*

Нека је у троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 27):

$$AB = A_1B_1 = c\,,\quad AC = A_1C_1 = b\,,\quad BC > B_1C_1\,.$$

Доказати, да је $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$.

Претпоставимо да $\sphericalangle BAC$ није већи од $\sphericalangle B_1A_1C_1$. Тада може бити или 1) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$ или 2) $\sphericalangle BAC < \sphericalangle B_1A_1C_1$. Из прве претпоставке према правилу [СУС] следује $BC = B_1C_1$, а то противречи датом услову. Из друге претпоставке с обзиром на теорему 20 следује $BC < B_1C_1$, што је опет у противречности са датим условом. Према томе мора бити $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B_1A_1C_1$, што потврђује теорему.

Последица: Ако се у троуглу две стране не мењају, а трећа расте, онда и супротни угао расте; ако трећа страна опада и угао наспрам те стране опада.

Вежбања

1. Нека је дат троугао са странама 5 *cm* и 3 *cm* и захваћеним углом од 45°. Показати на том троуглу да кад захваћени угао порасте на 90° и супротна страна порасте. Непосредним мерењем потврдити да се та страна неће удвостручити, иако је угао постао двапут већи.

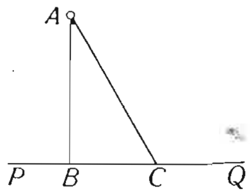
2. Нацртати два равнокрака троугла са једнаким краковима од по 10 *cm*. Нека је основица једног од њих 3 *cm*, а другог 12 *cm*. Показати да је угао наспрам стране од 12 *cm* већи од угла наспрам стране од 3 *cm*, али затим непосредним мерењем утврдити да тај угао неће бити четири пута већи, иако је наспрам четири пута веће стране.

§ 16. Нормала и косе дужи

Сваку дуж што спаја дату тачку ма са којом тачком праве која не пролази кроз ту тачку, а не стоји нормално на тој правој, зваћемо *коса* дуж. Упоредићемо дужину нормале спуштене из тачке на праву са дужинама разних косих дужи из исте тачке.

Теорема 22. *Нормала спуштена из тачке на праву краћа је од сваке косе дужи повучене из исте тачке до праве.*

Нека је AB (сл. 28) нормала, из тачке A на праву PQ, а AC нека коса дуж према тој правој. Доказати да је $AB < AC$.

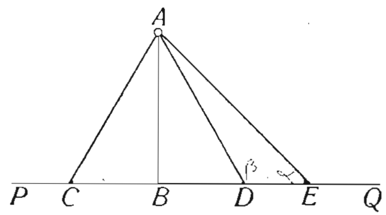


Слика 28

Пошто је $\sphericalangle ABC$ прав, то у правоуглом троуглу ABC мора бити, према теореми 16, последица I, најдужа страна AC, дакле и $AB < AC$, што је требало доказати.

Као што знамо, дужина нормале одређује *растојање тачке од праве*. Тачка B (сл. 28) зове се *подножје* нормале AB. Дуж BC, која спаја подножје нормале са крајем C косе дужи AC на правој, зове се *нормална пројекција* или само *пројекција* косе дужи AC на праву PQ.

Теорема 23. *Ако се из тачке ван праве повуче неколико косих дужи, тада су 1) косе дужи једнаке, ако су им пројекције једнаке и 2) већа је она коса дуж чија је пројекција већа.*



Слика 29

Нека је AB нормала, а AC, AD, AE — косе дужи према правој PQ (сл. 29).

1. Дато је $BC = BD$, доказати да је $AC = AD$. Ово не-

кој пројекцији одговара веће косе дужи, што представља (Т23)

посредно следује из подударности троуглова ABC и ABD на основу правила [СУС].

2. Дато је, на пр., $BE > BD$. Треба доказати да је $AE > AD$. Узмимо у обзир троугао ADE са угловима $\alpha = \sphericalangle AED$ и $\beta = \sphericalangle ADE$. Угао α је оштар, према последици теореме 14, пошто је у $\triangle ABE$ угао ABE прав. Угао β је туп, пошто је, као спољашњи угао $\triangle ABD$, према теореми 14, већи од унутрашњег угла ABD који је прав. Према томе је $\beta > \alpha$, одакле према теореми 16 добијамо

$$AE > AD\,,$$

што је требало доказати.

Теорема 24. (Обрнута теореми 23). *Ако се из тачке ван праве повуче неколико косих дужи, тада су 1) пројекције једнаких косих дужи једнаке и 2) пројекција веће косе дужи већа.*

Доказ ове теореме извести као вежбу.

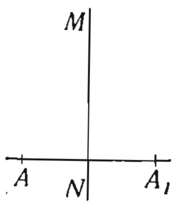
Вежбања

1. Дужина нормале из тачке A на праву PQ износи 5 cm. Колико има косих дужи из исте тачке дужине 4 cm? а дужине 6 cm? а дужине 10 cm? Колико има косих дужи са пројекцијом 1 cm? а са пројекцијом 5 cm?

2. Колика је дужина пројекције нормале из тачке A на праву PQ?

3. Показати на примеру да се коса дуж неће удвостручити, ако се њена пројекција удвостручи.

§ 17. Осна симетрија



Слика 30

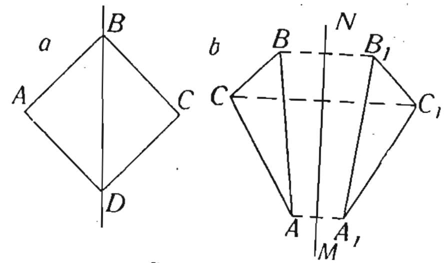
Две тачке A и A_1 *симетричне* су у односу на неку праву MN (сл. 30), ако леже: 1) на истој нормали на праву MN, 2) са разних страна те праве и 3) на истим растојањима од те праве.

Нацртати: *a*) две тачке B и B_1 које задовољавају само први од наведених услова, *b*) две тачке C и C_1 — које задовољавају само други услов, *c*) две тачке D и D_1, које задовољавају само трећи услов, *d*) две тачке E и E_1, које задовољавају 2. и 3. услов, а не задовољавају први услов, *e*) две тачке F и F_1 — које задовољавају само 1. и 3. услов и, најзад, *f*) две тачке G и G_1, које задовољавају само 1. и 2. услов.

Ако *свакој* тачки слике одговара друга тачка исте слике симетрична првој у односу на неку праву, *слика је симетрична у односу на ту праву*. На пр. квадрат $ABCD$ (сл. 31, *a*) симетричан је у односу на дијагоналу BD. Ово важи и за две посебне слике. Оне су симетричне, ако свакој

тачки једне слике одговара симетрична тачка друге слике и обрнуто. На пр., два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (сл. 31, *b*) симетрични су у односу на праву MN.

Права, у односу на коју је нека слика симетрична, зове се *оса симетрије* или *симетрала*. Оваква симетрија слика зове се *осна* или *аксијална симетрија*.



Слика 31

Теорема 25. *Нормала на дуж у њеној средини симетрала је те дужи.*

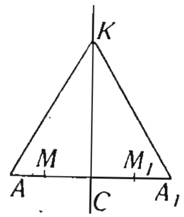
Заиста, нека је

$$CK \perp AA_1 \text{ и } AC = CA_1$$

(сл. 32), тада крају A дужи AA_1 одговара као симетрична тачка у односу на праву CK други крај A_1. Исто тако свакој другој тачки M дужи AA_1 с једне стране од праве CK одговара тачка M_1 симетрична са њом у односу на ту праву.

Теорема 26. *Свака тачка симетрале дужи подједнако је удаљена од крајева те дужи.*

Ако ма коју тачку K симетрале дужи AA_1 (сл. 32) спојимо са крајевима дужи A и A_1, треба доказати да је $AK = A_1K$.

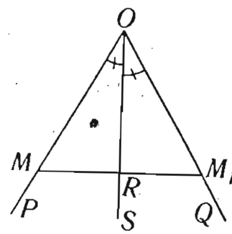


Слика 32

Из подударности правоуглих троуглова ACK и A_1CK, по последици правила [СУС], следује једнакост хипотенуза $AK = A_1K$. То је и требало доказати.

Према томе, *геометриско место тачака подједнако удаљених од две сталне тачке је симетрала дужи што спаја те тачке.*

Теорема 27. *Права која полови угао је симетрала тог угла.*



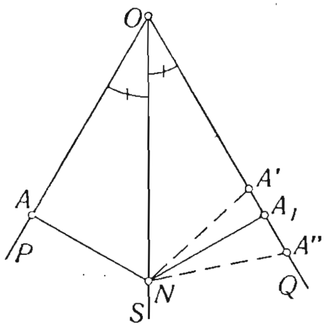
Слика 33

Нека је дат угао POQ (сл. 33) и права OS која полови тај угао, тј. $\sphericalangle POS = \sphericalangle QOS$. Доказати да је OS симетрала угла POQ, тј. показати да свакој тачки M те слике одговара друга тачка M_1 која у односу на OS задовољава наведена три услова за симетричност тачака. Кад се тачка M налази на краку OP, онда ћемо одмерити $OM_1 = OM$ на другом краку. Спојимо M са M_1 и пресек праве MM_1 са OS обележимо са R. Тада су троуглови OMR и OM_1R подударни по правилу [СУС], одакле следује $\sphericalangle MRO = \sphericalangle M_1RO$. Пошто су то упоредни углови и једнаки, морају бити прави, дакле, права OS стоји нормално на MM_1. Даље мора бити и $MR = RM_1$, тј. тачка R је средина дужи MM_1. Тиме је доказано да су тачке M и M_1 симетричне у односу на праву OS, а како је тачка M ма која тачка, цела слика је симетрична и OS је *симетрала угла.*

Последица. *Код равнокраког троугла симетрала угла при врху уједно је висина, симетрала основице и целог троугла.*

Теорема 28. *Свака тачка симетрале угла подједнако је удаљена од кракова тог угла.*

Нека је OS симетрала угла POQ (сл. 34). Доказати да су растојања од кракова ма које тачке N на тој симетрали једнака, тј. $NA = NA_1$.



Слика 34

Ако обрнемо $\sphericalangle ANO$ око OS и положимо га на $\sphericalangle A_1ON$, онда ће OA пасти на OA_1 због једнакости углова AON и NOA_1. Тачка A мора при томе пасти или на A_1 или ма где на краку OQ у A' или A''. Пошто тада код A' или A'' мора бити прави угао имали бисмо из тачке N две нормале на праву OQ, а то је немогуће. Према томе мора бити $OA = OA_1$. Тада је по правилу подударности [СУС] $\triangle AON \cong \triangle NOA_1$ одакле следује

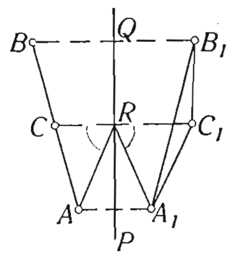
$$AN = NA_1,$$

што је требало доказати.

Дакле, *геометриско место тачака подједнако удаљених од кракова угла је симетрала тог угла.*

§ 18. Подударност симетричних слика

Теорема 29. *Ако су тачке A_1 и B_1 (сл. 35) симетричне тачкама A и B у односу на неку праву PQ, онда је и цела дуж A_1B_1 симетрична и једнака дужи AB.*



Слика 35

Узмимо ма коју тачку C дужи AB и нека је C_1 њој симетрична тачка у односу на праву PQ, а тачка R пресек дужи CC_1 са правом PQ. Спојимо тачку R са тачкама A и A_1. Тада су троуглови APR и A_1PR подударни по последици правила [СУС]. Одатле следује једнакост одговарајућих страна и углова, тј. $AR = A_1R$ и $\sphericalangle ARP = \sphericalangle A_1RP$. Услед тога је $\sphericalangle CRA = \sphericalangle C_1RA_1$ као комплементи једнаких углова $\sphericalangle ARP$ и $\sphericalangle A_1RP$. Сад по правилу [СУС] имамо $\triangle ARC \cong \triangle A_1RC_1$, одакле

$$\sphericalangle ACR = \sphericalangle A_1C_1R.$$

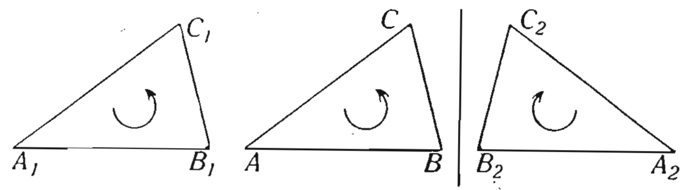
Исто тако, ако спојимо тачку R са тачкама B и B_1, може се доказати да је

$$\sphericalangle BCR = \sphericalangle B_1C_1R.$$

Међутим, $\sphericalangle BCR$ је упоредни углу ACR, па и $\sphericalangle B_1C_1R$ мора бити упоредни углу A_1C_1R, јер једнаки углови имају једнаке упоредне углове. Другим речима, C_1 мора бити на дужи A_1B_1, јер тачке A_1, C_1 и B_1 леже на једној правој. Пошто је C ма која тачка дужи AB, то значи да свакој тачки дужи AB одговара симетрична тачка на дужи A_1B_1, што је требало доказати. У исто време тиме је доказан и други део теореме, тј. да је $AB = A_1B_1$.

Последица. Кад имамо два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 31, b) симетрична у односу на неку праву, њихове су стране једнаке и по правилу [ССС] *они су подударни.*

Ако посматрамо два подударна троугла $A_1B_1C_1$ и ABC (сл. 36), видимо да је смер (означен на слици стрелицама),



Слика 36

у коме следују темена једног и другог троугла исти. Та се два троугла могу довести до поклапања само кретањем једног од њих у заједничкој равни. Таква подударност зове се *непосредна подударност*. Међутим, кад узмемо $\triangle A_2B_2C_2$ симетричан и подударан троуглу ABC, онда се види да им се темена ређају у супротним смеровима. Кретањем само у заједничкој равни не може се $\triangle A_2B_2C_2$ довести до поклапања са $\triangle ABC$. Да би се поклопили један од њих мора да се обрне на другу страну — да се преврне. Таква подударност слика зове се *симетрична подударност.*

Две симетричне слике су симетрично подударне.

Вежбања

1. Нацртати неколико симетричних слика.
2. Доказати да свака тачка ван симетрале дужи није подједнако удаљена од крајева те дужи, него је ближа оном крају с којим је са исте стране симетрале.
3. Доказати да је свака тачка, која не лежи на симетрали угла, ближа оном краку с којим се налази са исте стране симетрале.
4. Доказати да су симетрале упоредних углова нормалне.
5. Навести неколико геометриских места тачака.
6. Доказати да се две симетричне праве секу на оси симетрије.
7. Доказати да симетрале два унакрсна угла чине исту праву.
8. Ако два равнокрака троугла имају заједничку основицу, доказати да је симетрала те основице права која спаја врхове оба троугла.
9. Доказати да се тежишна линија у равнокраком троуглу, која одговара основици, поклапа са висином.
10. Каква је подударност два троугла на које симетрала основице дели равнокраки троугао?
11. Са исте стране од праве L дате су две тачке A и B. Наћи на правој L тачку C тако, да збир $AC + CB$ буде најмањи.
12. Симетрала основице равнокраког троугла пролази кроз врх и полови угао при врху. Доказати.
13. Нека симетрале једнаких углова $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ у равнокраком троуглу секу кракове у тачкама P и Q. Доказати да је $AP = BQ$.
14. Дате су у углу POQ две тачке M и N. Одредити на краковима угла тачке A и B тако, да збир $MA + AB + BN$ буде најмањи.
15. Ако је дата права XY и две ма које тачке A и B са исте стране те праве, одредити на тој правој тачку C тако, да $\sphericalangle XCA = \sphericalangle YCB$.
16. Доказати да су нормале спуштене из два троуглова темена на тежишну линију кроз треће теме једнаке.
17. Нека је дата дуж AB и нека је C средина те дужи. Ако је P нека тачка ван AB и $PA = PB$, доказати да је $PC \perp AB$.

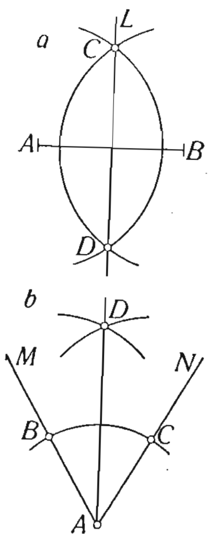
§ 19. Конструктивни задаци

У нижим разредима решавали смо више конструктивних задатака помоћу *шестара* и *лењира* и вежбали се у цртању. Поновићемо сад прво неколико познатих основних конструктивних задатака, па ћемо затим проучити на сложенијим задацима потпуни ток рада при решавању конструктивних задатака.

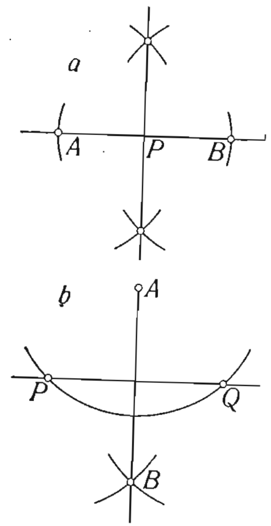
1. *Конструисати симетралу дате дужи.* Полупречником већим од половине дате дужи AB (сл. 37, a) опишемо кружне лукове са центрима у крајевима дужи A и B. Права која спаја пресеке C и D тих лукова симетрала је дужи AB. Правилност конструкције се може врло лако доказати.

2. *Конструисати симетралу датог угла.* Ма којим полупречником, на пр., AB (сл. 37, b), опишемо кружни лук са центром у темену A датог угла MAN. Око пресечних тачака B и C тог лука са краковима угла опишемо кружне лукове једнаких полупречника. Права, која спаја пресек D та два лука са теменом угла A, јесте симетрала угла. Доказати правилност конструкције.

3. *У датој тачки на правој подићи нормалу на ту праву.* Од дате тачке, на пр. P (сл. 38, a), одмеримо шестаром на датој правој две једнаке дужи $PA = PB$, па затим конструишемо симетралу дужи AB. Та симетрала биће тражена нормала. Доказати.



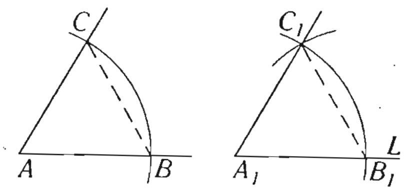
Слика 37



Слика 38

4. *Из дате тачке ван праве спустити нормалу на ту праву.* Из дате тачке A (сл. 38, b) описати кружни лук полупречника већег него растојање те тачке од дате праве. Нека тај лук сече праву у тачкама P и Q. Тада је симетрала AB дужи PQ тражена нормала. Доказати.

5. *Конструисати на датој правој, са теменом у датој тачки и са одређене стране праве, угао једнак датом углу.* Око темена A датог угла и око тачке A_1 (сл. 39) на датој правој L опишемо кружне лукове једнаких полупречника. Затим око тачке B_1, где тај лук сече праву L, као око центра, опишемо лук полупречником BC до пресека C_1 са првим луком. Угао $B_1A_1C_1$ једнак је датом углу BAC. Доказати.

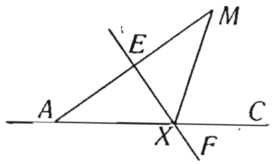


Слика 39

Као пример потпуног начина решавања конструктивних задатака навешћемо ове задатке.

6. *На правој AC наћи тачку тако да је подједнако удаљена од тачке A на тој правој и од дате тачке M.*

I. За проналазак решења прво сматрамо да је задатак решен и слободном руком нацртамо приближну слику (сл. 40). Нека је X тражена тачка. Спојимо X са A и M и тада је $\triangle AXM$ равнокрак са врхом у X. Међутим врх равнокраког троугла лежи на симетрали EF основице AM. Овај део решавања задатка зове се *проучавање* или *анализа* задатка.



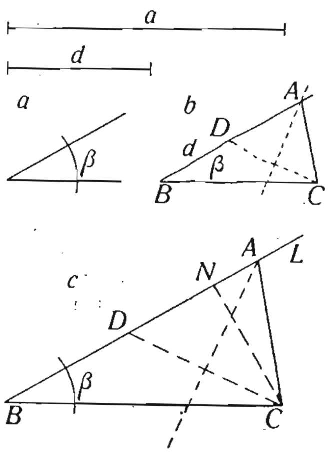
Слика 40

II. Резултати анализе показују нам како треба извршити *конструкцију* задатка. Спојимо, дакле, тачке A и M и конструишемо симетралу дужи AM. Она сече праву AC у траженој тачки X.

III. Сад треба доказати да је конструкција тачна, тј. да одређена тачка X заиста испуњава услове који су постављени. Овај део решавања задатка зове се *доказ*. Према последици правила [СУС] $\triangle AEX \cong MEX$, одакле $AX = XM$, што је требало доказати.

IV. Најзад треба расправити, да ли је задатак могућ у сваком случају и за све вредности података. Тај део решавања задатка зове се *расправљање* или *дискусија* задатка. Наш задатак је *немогућ*, ако тачка M лежи на нормали на правој AC у тачки A. У том случају симетрала дужи AM не сече праву AC, јер би иначе постојале из те пресечне тачке две нормале на праву AM, а то је немогуће. Ако се тачка M поклапа са тачком A, онда је задатак *неодређен*, јер свака тачка праве AC испуњава тада тражене услове. У сваком другом случају задатак је могућ и одређен.

7. *Конструисати троугао, ако је дата страна $a = BC$, угао β на тој страни и разлика $d = c - b$ остале две стране троугла ABC* (сл. 41, *a*).



Слика 41

I. Нацрта се слободном руком приближна слика (сл. 41, *b*). Нека је $\triangle ABC$ тражени троугао, тј. $BC = a$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $AB - AC = d$. На страни AB од темена A одмеримо дуж $AD = AC$ и тада је $BD = d$. Троугао BCD може се конструисати помоћу страна a и d и захваћеног угла β. Троугао ACD је равнокрак и према томе тачка A је на симетрали дужи CD.

II. За конструкцију (сл. 41, *c*) одмеримо $BC = a$ и код тачке B конструишемо $\sphericalangle \beta$ (задатак 5) и на другом краку тог угла одмеримо $BD = d$. Затим конструишемо симетралу дужи CD (задатак 1). Пресечна тачка те симетрале са продужењем стране BD је треће теме A троугла. $\triangle ABC$ је тражени троугао.

III. Извршимо сад доказ да је конструкција тачна, тј. да троугао ABC заиста задовољава постављене услове. Он има страну a и на њој угао β. Разлика две остале стране износи d, јер је тачка A на симетрали дужи CD подједнако удаљена од крајева C и D, па је $AC = AD$ и $AB - AC = AB - AD = BD = d$. Тако смо доказали тачност конструкције.

IV. Решимо сад овде питање, да ли је за све вредности података задатак увек могућ. Страна a може имати ма коју вредност. Угао β мора бити оштар, јер не лежи према највећој страни ($AC < AB$). Што се тиче разлике d и она не може бити ма каква. Ако се страна BA продужи преко A у полуправу BL и из тачке C спусти нормала CN на ту полуправу, онда $d = BD$ мора бити мање од BN, јер угао CDL мора бити оштар. Кад је $BD = BN$ угао CDL је прав, а кад је $BD > BN$ угао CDL је туп. У тим случајевима симетрала дужи CD не може сећи BD на продужењу преко D, јер бисмо добили троугао са два права или са правим и тупим углом, а то је немогуће.

Из ових примера види се, да у решењу конструктивног задатка разликујемо четири дела: *анализу*, *конструкцију*, *доказ* и *дискусију*. Кад је задатак прост, анализа и дискусија могу отпасти, али конструкција и доказ су битни делови сваког конструктивног задатка.

Вежбања

1. Конструисати симетралу тупог угла.
2. Конструисати дуж симетричну датој дужи у односу на дату праву.
3. У датом троуглу конструисати висину из датог темена.
4. Извршити конструкцију сабирања и одузимања два угла.
5. Конструисати троугао помоћу ових података: *a*) a, b, c; *b*) $a, b, \sphericalangle C$; *c*) $a, \sphericalangle B, \sphericalangle C$; *d*) $a, b, \sphericalangle A$ $(a > b)$; *e*) $a, b, \sphericalangle A$ $(a < b)$.
6. Конструисати равнострани троугао дате стране a.
7. Конструисати равнокраки троугао помоћу основице и угла на основици.
8. Конструисати равнокраки троугао, кад је дат крак и угао на основици.
9. Конструисати равнокраки троугао, кад је дат крак и угао при врху.
10. Конструисати прави угао и угао од 45^{0}.
11. Конструисати правоугли троугао помоћу катета.
12. Исто помоћу хипотенузе и катете.
13. Исто помоћу катете и налеглог оштрог угла.
14. Исто помоћу хипотенузе и оштрог угла.
15. Конструисати троугао помоћу једне стране, угла на тој страни и збира друге две стране.
16. Дате су две праве које се секу и једна тачка. Кроз ту тачку повући праву која са датим правима чини једнаке углове.
17. На једној страни троугла наћи тачку која је подједнако удаљена од остале две стране тог троугла.
18. Конструисати троугао помоћу стране a, висине h_a и тежишне линије m_a.
19. Конструисати правоугли троугао помоћу катете и висине што одговара хипотенузи.

20. Конструисати троугао, кад је дата страна a, угао на тој страни β и тежишна линија m_a.

21. Конструисати правоугли троугао помоћу катете и тежишне линије која јој одговара.

22. На једној троугловој страни или њеном продужењу наћи тачку подједнако удаљену од супротног темена и једног краја те стране.

23. Конструисати троугао помоћу стране b, збира остале две стране $a+c$ и висине h_c.

24. Конструисати троугао помоћу разлике две стране $b-c$, висине h_b и угла β.

25. Ако обележимо отсечке BD и DC, на које висина $h_a = AD$ дели страну a троугла, са p и q, конструисати троугао помоћу p, висине h_a и стране b.

ГЛАВА IV

ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ. ЦЕНТРИЧНА СИМЕТРИЈА

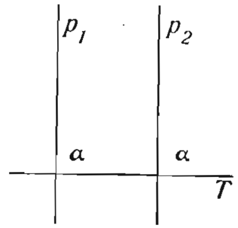
§ 20. Паралелне праве

a. Могућност паралелних правих

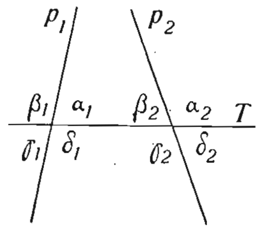
Раније смо дефинисали паралелне праве и навели ознаку паралелности (стр. 6). Сад ћемо доказати да паралелне праве заиста постоје.

Теорема 30. *Две нормале на правој (у истој равни) паралелне су.*

Ако су праве p_1 и p_2 (сл. 42) нормалне на правој T, оне се не могу сећи, јер тада би из те пресечне тачке по-



Слика 42



Слика 43

стојале две нормале на праву T, што је према теореми 12 немогуће. Према томе су праве p_1 и p_2 паралелне.

Кад су нам дате две ма које праве p_1 и p_2 у равни, пресечене трећом T (сл. 43), онда се права T зове *трансверзала.* Означимо углове, које чини трансверзала са правима p_1 и p_2, са α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2. За те углове употребљују се ови називи:

intérieurs de même côté

Унутрашњи углови — то су углови α_1, δ_1, β_2, γ_2 између правих.

Спољашњи углови — то су β_1, γ_1, α_2, δ_2.

1 *Сагласни углови* — спољашњи и унутрашњи угао на истој страни трансверзале, али са разним теменима: α_1 и α_2, β_1 и β_2, γ_1 и γ_2, δ_1 и δ_2.

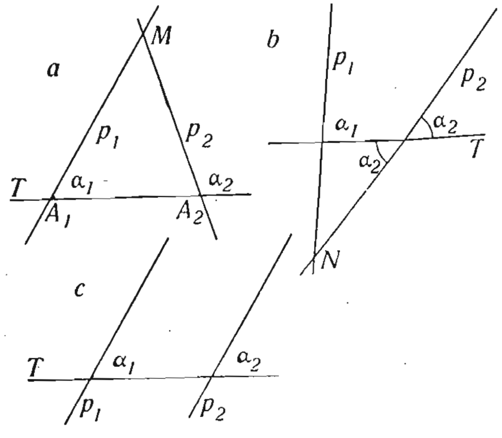
2 *Наизменични углови* — два било спољашња, било унутрашња угла на разним странама трансверзале и са разним теменима: α_1 и γ_2, β_1 и δ_2, γ_1 и α_2, δ_1 и β_2.

3 *Супротни углови* — два унутрашња или два спољашња угла на истој страни трансверзале и са разним теменима: α_1 и β_2, β_1 и α_2, γ_1 и δ_2, δ_1 и γ_2.

Теорема 31. *Ако су у пресеку две праве (p_1 и p_2) са трећом (T) 1) сагласни углови једнаки, или 2) наизменични углови једнаки, или 3) супротни углови суплементни, онда су те две праве (p_1 и p_2) паралелне.*

Претпоставимо, на пр., да су два сагласна угла α_1 и α_2 једнаки. Доказати да су праве p_1 и p_2 паралелне.

Узмимо, да се, супротно тврђењу, праве p_1 и p_2 секу са оне стране трансверзале са које су углови α_1 и α_2 (сл. 44, *a*). Тада је у троуглу MA_1A_2 угао α_2 спољашњи, а угао α_1 унутрашњи њему несуседни угао. Пошто је по теореми 14 увек спољашњи угао код троугла већи од сваког унутрашњег несуседног, мора бити $\alpha_2 > \alpha_1$, а то противречи претпоставци. Исто тако праве p_1 и p_2 не могу се сећи ни са супротне стране трансверзале од оне где су углови, на пр. у тачки N (сл. 44, *b*), јер тада на основу теорема 5 и 14 мора бити $\alpha_1 > \alpha_2$. Дакле праве p_1 и p_2 не могу се сећи ни с које стране трансверзале — оне су паралелне (сл. 44, *c*).

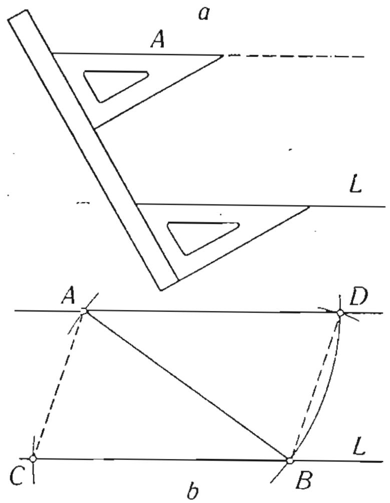


Слика 44

Врло се лако, на сличан начин, може доказати и тачност осталих делова ове теореме.

b. Конструкција паралелне праве датој правој кроз дату тачку

Видели смо у нижим разредима, како се помоћу троугаоника и лењира може паралелним померањем повући паралелна права датој првој L кроз дату тачку A (сл. 45, *a*). Показаћемо сад, како се ова конструкција може извршити само помоћу шестара и лењира.



Слика 45

На датој правој L (сл. 45, *b*) узмемо ма коју тачку B (само да не буде подножје нормале спуштене из тачке A на праву L). Полупречником AB опишемо два кружна лука са центрима у A и B. Кружни лук са центром у B сече праву L, на пр. у тачки C. Полупречником AC око тачке B као центра опишемо лук. Пресечна тачка D овог лука са луком описаним око A је на траженој паралелној правој AD. Доказати тачност конструкције на основу правила подударности [ССС] и теореме 31, сматрајући AB као трансверзалу.

c. Аксиома паралелних

Показали смо да паралелне праве постоје, али је немогуће доказати на основу свих претходних теорема да постоји *само једна* паралелна права која се може повући кроз дату тачку ван дате праве.

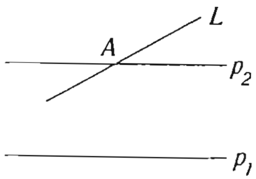
Много векова пре нас још Еуклид је увидео, да се теорија паралелних правих не може извести, ако се ово не уведе као аксиома без доказа. Било је више покушаја, да се то докаже, али су најзад, већ поменути, *Н. И. Лобачевски* и *Ј. Бољај* показали да се то не може доказати.

Како се без тога не може доказати велики број теорема, уводи се *аксиома паралелних*:

Аксиома V. Кроз дату тачку ван дате праве пролази само једна паралелна права.

Теорема 32. *Кад права сече једну од паралелних правих, она сече и другу.*

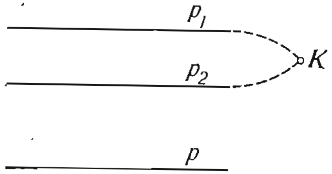
Нека права L сече праву $p_2 \parallel p_1$ у тачки A (сл. 46). Кад она не би секла и праву p_1, онда бисмо кроз тачку A имали две паралелне праве правој p_1, а то је према аксиоми V немогуће. Дакле, права L мора сећи и праву p_1.



Слика 46

Теорема 33. *Две праве паралелне трећој паралелне су и међу собом.*

Нека су праве p_1 и p_2 паралелне правој p, тј. $p_1 \parallel p$ и $p_2 \parallel p$ (сл. 47) и треба доказати да је $p_1 \parallel p_2$. Ако праве p_1 и p_2 не би биле паралелне, морале би се сећи у некој тачки K. Тада би из тачке K постојале две праве p_1 и p_2 паралелне правој p, а то је према аксиоми паралелних немогуће.

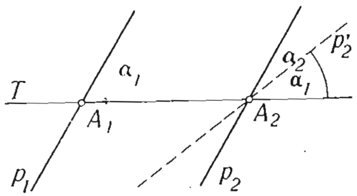


Слика 47

d. Обрнуте теореме теоремама о могућности паралелних правих

Теорема 34. (Обрнута теореми 31). *Ако су две паралелне праве (p_1 и p_2) пресечене трећом (T), тада су: 1) сагласни углови једнаки, 2) наизменични углови једнаки и 3) супротни углови суплементни.*

Нека су две паралелне праве p_1 и p_2 пресечене трећом T (сл. 48). Доказати да су сагласни углови α_1 и α_2 једнаки.



Слика 48

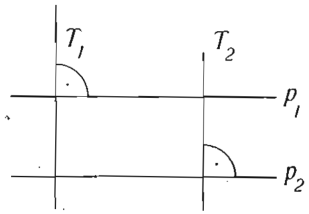
Претпоставимо супротно, да $\alpha_1 \neq \alpha_2$, него да је на пр. $\alpha_2 > \alpha_1$. Тада се код тачке A_2 може конструисати угао α_1 са исте стране трансверзале T као и α_2. Други његов крак нека буде права p_2'. У том случају су за праве p_1 и p_2' сагласни углови једнаки, и према теореми 31 ове две праве паралелне, тј. $p_1 \parallel p_2'$. Дакле, кроз тачку A_2 имали бисмо две праве p_2 и p_2' паралелне правој p_1, а то је немогуће. До истог закључка бисмо дошли, ако претпоставимо, да је $\alpha_2 < \alpha_1$. На тај начин остаје само трећа могућност, да је $\alpha_2 = \alpha_1$, што је требало доказати. На сличан начин могу се доказати и остали делови ове теореме.

Теорема 35. (Обрнута теореми 30). *Ако нека права (T) стоји нормално на једној од паралелних правих (p_1), она је нормална и на другој (p_2).*

Нека је права T (сл. 48) управна на правој p_1, а треба доказати да је управна и на правој p_2. Како су праве p_1 и p_2 паралелне, па сагласни углови морају бити једнаки, то је $\alpha_1 = \alpha_2$. Међутим у случају управности $\alpha_1 = 90^0$, па и угао $\alpha_2 = 90^0$, што је требало доказати.

Теорема 36. *Ако су две праве (p_1 и p_2) паралелне, онда је нормала (T_1) на правој (p_1) паралелна нормали (T_2) на другој правој (p_2).*

Нека су (сл. 49) праве p_1 и p_2 паралелне и нека је $T_1 \perp p_1$ и $T_2 \perp p_2$. Према теореми 35 мора бити $T_1 \perp p_2$, а тада по теореми 30 мора бити $T_1 \parallel T_2$, што је требало доказати.



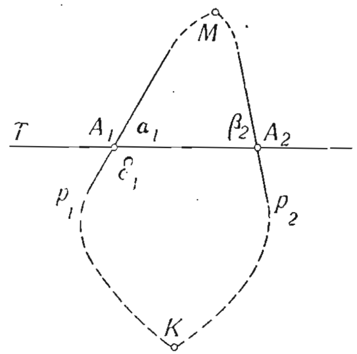
Слика 49

Последица. Две праве, нормалне на двема правима које се секу, морају се сећи, јер не могу бити паралелне.

e. Еуклидов постулат

Теорема 37. *Ако су две праве (p_1 и p_2) пресечене трећом (T), па унутрашњи супротни углови нису суплементни, праве (p_1 и p_2) секу се са оне стране трансверзале, где је збир супротних углова мањи од 2d.*

Нека су праве p_1 и p_2 (сл. 50) пресечене трећом (T) и нека је збир два унутрашња супротна угла, на пр. α_1 и β_2, мањи од $2d$. Тада праве p_1 и p_2 не могу бити паралелне, јер тада би супротни углови α_1 и β_2 морали, по теореми 34, бити суплементни, тј. $\alpha_1 + \beta_2 = 2d$, а то противречи претпоставци. Праве p_1 и p_2 не могу се сећи ни са оне стране трансверзале, где нису углови α_1 и β_2. Ако би се оне секле с те стране у тачки K, онда би у троуглу A_1A_2K, по теореми 14, морало бити $\beta_2 > \delta_1$. Како је $\alpha_1 + \delta_1 = 2d$, имали бисмо $\alpha_1 + \beta_2 > 2d$, а то противречи претпоставци $\alpha_1 + \beta_2 < 2d$. Према томе праве p_1 и p_2 морају се сећи у једној тачки M која је са стране трансверзале где су углови α_1 и β_2.



Слика 50

Доказали смо ову теорему на основу аксиоме паралелних, како се то обично чини у данашње време. Међутим, може се, обрнуто ова теорема узети као аксиома, па наша аксиома паралелних доказати као теорема. У поменутим Еуклидовим „Елементима“ ова теорема је узета као аксиома и стога се зове *Еуклидов йостулат*.

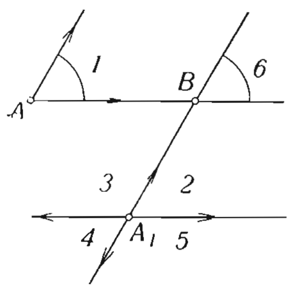
Вежбања

1. Повући две праве L и M и њихову трансверзалу N, означити све углове са 1, 2, 3 итд. до 8 и написати све врсте углова.
2. Набројити све теореме о паралелним правима које су доказане пре аксиоме о паралелним правима, и оне које су доказане после.
3. Ако у пресеку две праве са трећом сагласни углови нису једнаки, праве нису паралелне. Доказати.
4. Ако у пресеку две праве са трећом наизменични углови нису једнаки, праве нису паралелне. Доказати.
5. Дата је права L и тачка A ван те праве. Конструисати кроз тачку A 1) нормалу на L и 2) паралелну праву са L.
6. Кроз теме троугла супротно основици конструисати праву паралелну са основицом.
7. Исто то урадити код равностраног троугла једним отвором шестара.
8. На кругу са центром у O дате су две тачке A и B. Кроз те тачке повући праве паралелне симетрали угла AOB.

§ 21. Углови са паралелним и нормалним краковима

Теорема 38. *Углови са йаралелним краковима су или једнаки или суйлеменшни.*

Нека $\sphericalangle 1$ (сл. 51) код тачке A и углови $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5$ код тачке A_1 имају паралелне кракове. Обележимо на краковима свих углова смер од темена стрелицом и тада су оба пара кракова код углова $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 2$ истог смера, а код углова $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 4$ супротног смера. Код углова $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 3$ и код углова $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 5$ један пар кракова има исти смер, а други пар супротни смер.



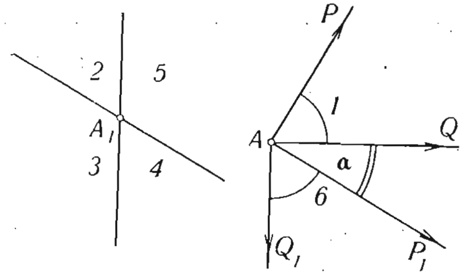
Слика 51

Продужимо заједнички крак углова $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3$ до пресека B са непаралелним краком $\sphericalangle 1$ и посматрамо угао означен на слици са 6.

Међутим је $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 6$ и $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 6$ као сагласни углови, па према томе и $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$. Исто тако је и $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$, јер су углови $\sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 4$ унакрсни. Тиме смо доказали да су углови са паралелним краковима *једнаки,* ако су им *оба йара кракова или исшог или суйрошног смера.* Врло лако је доказати, да је $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 = 2d$ и $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 5 = 2d$, што значи: да су углови са паралелним краковима *суйлеменшни,* ако им је *један йар кракова исшог смера, а други йар суйрошног смера.*

Теорема 39. *Углови са нормалним краковима су или једнаки или суйлеменшни.*

Нека $\sphericalangle 1 = \sphericalangle PAQ$ код тачке A (сл. 52) и углови $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$, $\sphericalangle 5$ код тачке A_1 имају нормалне кракове. Конструишемо кад тачке A угао $P_1AQ_1 = \sphericalangle 6$ чији су кракови AP_1 и AQ_1 нормални на кракове $\sphericalangle 1$. За кракове $\sphericalangle 6$ узећемо оне полуправе од нормала које се добијају обртањем кракова $\sphericalangle 1$ за прави угао у истом смеру. Ако угао P_1AQ означимо са α, онда је $\sphericalangle 1 + \alpha = d$ и $\sphericalangle 6 + \alpha = d$, и према томе $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 6$. Угао 6 и углови кад тачке A_1 имају паралелне кракове на основу теореме 30, па је $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$, одакле се добија с обзиром да је $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 6$ најзад $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1$. На сличан начин се може доказати да је: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 1$, $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 1 = 2d$, $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 1 = 2d$. Тиме је теорема доказана.



Слика 52

Вежбања

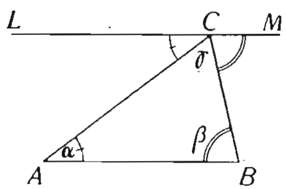
1. Нацртати две косе праве. Оне деле раван на четири области. У свакој области нацртати по два угла са паралелним краковима, али тако да, у првој области оба пара кракова буду истосмерни, у другој области оба пара кракова разносмерни, у трећој и четвртој један пар истосмеран, а други супротносмеран само на разне начине.
2. У области тупог угла узети две тачке за темена углова који ће имати нормалне кракове са првим углом. Код једног темена нацртати тупи угао, а код другог оштри.

§ 22. Збир углова у троуглу

Теорема 40. *Збир углова у шроуглу износи два йрава угла.*

Нека је ABC (сл. 53) ма који троугао чији су углови α, β и γ. Треба доказати да је

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\,d.$$



Слика 53

Кроз теме C повуче се права LM паралелна основици AB. Тада је

$$\sphericalangle LCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCM = 2\,d,$$

према последици I теореме 3. Како је $\sphericalangle LCA = \alpha$ (зашто?), $\sphericalangle ACB = \gamma$ и

$\sphericalangle BCM = \beta$ (зашто?), то имамо

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\,d = 180^{0},$$

што је требало доказати.

Последица I. Два угла у троуглу одређују трећи угао и према томе, ако су два угла једног троугла једнаки са два угла другог троугла, онда су и трећи углови међу собом једнаки.

Последица II. Збир оштрих углова у правоуглом троуглу износи прави угао или 90⁰.

Последица III. Збир оштрих углова у тупоуглом троуглу мањи је од правог угла.

Последица IV. У равнокрако правоуглом троуглу сваки оштри угао износи $^1/_2\ d$ или 45⁰.

Последица V. У равностраном троуглу је сваки угао $^2/_3\ d$ или 60⁰.

Теорема 41. (Уопштење теореме 8 о подударности троуглова). *Два троугла су подударни, ако имају једнаке по једну страну и два ма која угла.*

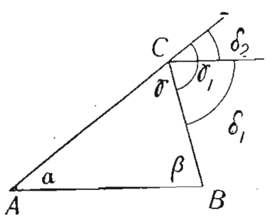
Нека су, на пр., једнаки два угла који нису оба налегли, него је један наспрам дате стране. Тада према последици I теореме 40 и они други налегли углови у једном и другом троуглу морају бити једнаки, а то значи да су троугли подударни по правилу [УСУ].

Ово правило о подударности означаваћемо кратко [СУУ], што се чита: страна, угао, угао.

Последица I. Правоугли троуглови су подударни, ако имају једнаке хипотенузе и по један оштри угао.

Последица II. Правоугли троуглови су подударни, ако имају једнаке по једну катету и по један ма који оштри угао.

Теорема 42. *Сваки спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња несуседна угла.*



Слика 54

У троуглу ABC повуче се, на пр., кроз теме C паралела са основицом AB (сл. 54). Тада је спољашњи угао $\gamma_1 = \delta_1 + \delta_2$. Међутим је $\delta_1 = \beta$ и $\delta_2 = \alpha$ (зашто?), па је према томе

$$\gamma_1 = \alpha + \beta,$$

што је требало доказати.

Ова теорема се може сматрати и као последица теореме 40.

Вежбања

1. Написати обрасце за одређивање: 1) трећег угла у троуглу, ако су дата два угла, 2) угла на основици равнокраког троугла, ако је дат угао при врху, 3) угла при врху равнокраког троугла, ако је дат угао на основици.

2. У троуглу су дата два угла. Наћи угао између симетрала тих углова.

3. У троуглу су дата два угла. Наћи углове које гради симетрала трећег угла са супротном страном.

4. У троуглу су дата два угла. Наћи угао који чини симетрала једног од тих углова са симетралом трећег угла.

5. Доказати да симетрала угла у троуглу чини са супротном страном два угла чија је разлика једнака разлици углова троугла на тој страни.

6. Угао између симетрале једног угла у троуглу и висине из темена тог угла једнак је полуразлици она друга два угла у троуглу. Доказати.

7. Доказати да је симетрала спољашњег угла при врху равнокраког троугла паралелна основици.

8. Доказати (обрнуто задатку 7) да је права, повучена кроз врх равнокраког троугла паралелно основици, симетрала спољашњег угла при врху.

9. Доказати да је код правоуглог троугла са једним оштрим углом од 30⁰ хипотенуза двапут већа од мање катете.

10. Доказати да симетрале оштрих углова у правоуглом троуглу чине углове од 135⁰ и 45⁰.

11. Доказати да хипотенузина висина у правоуглом троуглу дели прави угао на два угла једнака оштрим угловима троугла.

12. Доказати да је хипотенузина висина у равнокрако правоуглом троуглу једнака катети.

13. Доказати да симетрала унутрашњег угла у разностраном троуглу дели супротну страну на два неједнака дела тако да је већи део уз већу страну.

14. Конструисати шестаром и лењиром ове углове: 1) 60⁰, 2) 30⁰, 3) 15⁰, 4) 75⁰, 5) 120⁰, 6) 150⁰, 7) 45⁰, 8) 135⁰, 9) 67⁰30′, 10) 112⁰30′, 11) 22⁰30′, 12) 157⁰30′.

15. Неко је на овај начин извео, да је у троуглу збир углова $2\,d$. Нека је збир углова у троуглу x. Ако се споји нека тачка у унутрашњости троугла са теменима, добију се три троугла чији је збир углова $3x$. Збир углова код тачке је $4\,d$, па према томе

$$3x - 4\,d = x, \qquad \text{одакле} \qquad x = 2\,d.$$

При овом доказу није употребљена аксиома паралелних, а како смо рекли без ње се овај став не може доказати. Где је грешка?

16. Доказати да је у равнокраком троуглу угао између основице и висине, која одговара краку, половина угла при врху.

17. Конструисати троугао помоћу: 1) a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$; 2) h_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$; 3) b, h_a, $\sphericalangle B$.

18. На нормали из тачке B на дуж AB наћи тачку M под условом да је $MA = 2\,MB$.

19. Конструисати равнокраки троугао помоћу висине h_a која одговара основици и $\sphericalangle B$ на основици.

20. Конструисати равнострани троугао помоћу висине.

21. Конструисати равнокраки троугао помоћу висине што одговара краку и угла на основици.

22. Конструисати правоугли троугао, кад се зна: 1) оштри угао и висина која одговара хипотенузи; 2) оштри угао и хипотенуза; 3) оштри угао и наспрамна катета; 4) оштри угао и збир катете и хипотенузе.

23. Конструисати симетралу угла две праве које се секу ван хартије цртања.

24. Конструисати равнокрако правоугли троугао кад се зна збир катете и хипотенузе.

25. Конструисати троугао помоћу стране a и збира $s = b + c$ и разлике $d = b - c$ две остале стране.

26. Конструисати троугао помоћу стране a, збира и разлике углова на тој страни.

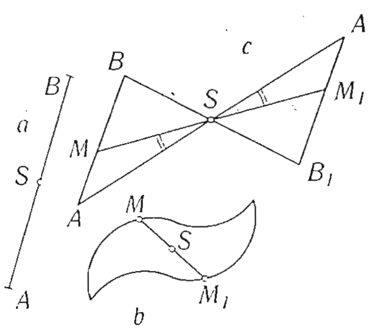
27. Конструисати праву кроз дату тачку A тако, да од две дате тачке B и C има једнака растојања, али да тачке B и C леже са разних страна те праве.

28. Конструисати троугао, кад се зна његов обим и два ма која угла.

29. Конструисати троугао, кад се зна збир две стране $a + b$, висина h_a и угао α.

30. Конструисати троугао, кад се зна обим $a + b + c$, висина h_c и угао α.

§ 23. Центрична симетрија



Слика 55

Две тачке A и B су *симетричне у односу на тачку* S (сл. 55, a), ако леже: 1) на истој правој са S, 2) са разних страна од те тачке и 3) на истим растојањима од S.

Нацртати две тачке које не задовољавају први услов, а задовољавају остала два услова; па затим две тачке које задовољавају први услов, а не задовољавају остала два услова; и најзад две тачке које задовољавају и први и други услов, али не задовољавају трећи услов.

Тачка S зове се *центар симетрије*, а сама симетрија ове врсте *центрична симетрија*.

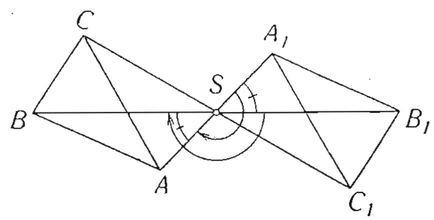
Ако се за *сваку* тачку слике може наћи друга тачка те исте слике симетрична у односу на неку одређену тачку, *слика* је *симетрична у односу на ту тачку*. На пр., нацртана крива линија (сл. 55, b) симетрична је у односу на тачку S, јер свакој тачки M одговара симетрична тачка M_1 у односу на тачку S. Исто то важи и за две различите слике симетричне у односу на дату тачку. На пр., две дужи AB и A_1B_1 симетричне су у односу на тачку S (сл. 55, c) како то следује из ове теореме:

Теорема 43. *Дужи које спајају два пара тачака, симетричних у односу на исту тачку, су: 1) једнаке, 2) паралелне и 3) центрично симетричне.*

Нека су A_1 и B_1 две тачке симетричне тачкама A и B у односу на тачку S (сл. 55, c). $\triangle SAB \cong \triangle SA_1B_1$ према правилу [СУС], одакле следује $AB = A_1B_1$, тј. једнакост дужи. Осим тога мора бити $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, а како су то наизменични углови код правих AB и A_1B_1 и трансверзале AA_1, то по теореми 31 морају бити праве AB и A_1B_1 паралелне. Најзад, да се докаже још и да је AB симетрично A_1B_1 у односу на тачку S. Узмимо за то ма коју тачку M на првој дужи, спојимо је са тачком S и продужимо праву MS до пресека M_1 са дужи A_1B_1. Тада из подударности троуглова MAS и M_1A_1S на основу правила [УСУ] имамо $SM = SM_1$, што потврђује симетричност тачака M и M_1. Пошто је тачка M ма која тачка, дужи AB и A_1B_1 симетричне су у односу на тачку S.

Теорема 44. *Два центрично симетрична троугла непосредно су подударни.*

Нека су два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 56) симетрични у односу на тачку S. Треба доказати да су непосредно подударни. На основу теореме 43 све стране једног троугла једнаке су странама другог троугла и према правилу [ССС] троугли су подударни. Да су троугли непосредно подударни види се, што се обртањем троугла $A_1B_1C_1$ око тачке S за 180° у равни слике троуглови поклапају. Заиста после таквог обртања



Слика 56

тачка A_1 долази у положај тачке A, а тачка B_1 због једнакости углова A_1SB_1 и ASB и једнакости $SB_1=SB$ долази у положај тачке B. Исто тако долази и тачка C_1 у положај тачке C. Пошто при таквом обртању троугао остаје у равни слике, подударност је непосредна.

На сличан начин се може показати да су непосредно подударне уопште све слике симетричне у односу на дату тачку.

Вежбања

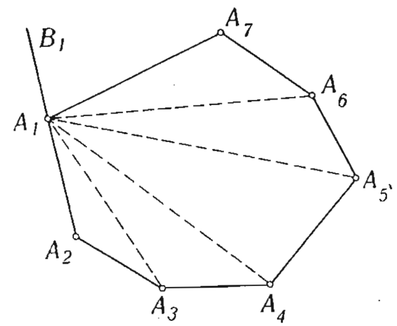
1. Нацртати две слике са центром симетрије — једну, која има осу симетрије, и другу која није осно симетрична.
2. Навести пример слике која има више оса симетрије, а нема центра симетрије.
3. Доказати да центар симетрије мора лежати на оси симетрије, ако је слика осно симетрична.
4. Доказати да, ако слика има центар симетрије и једну осу симетрије, она има и другу осу симетрије.
5. Где се налази центар симетрије два једнака круга који се не секу?
6. Зашто троугао не може бити централно симетрична слика? (Искористити теорему о симетричности дужи).
7. Шта је симетрична слика за праву у односу на тачку: 1) на тој правој и 2) ван те праве?
8. Колико центара симетрије има слика од две паралелне праве?
9. Нацртати неки четвороугао и њему симетричан у односу ма на које његово теме. Доказати да су ти четвороуглови непосредно подударни.

ГЛАВА V

МНОГОУГАО. ЧЕТВОРОУГАО

§ 24. Многоугао. Дијагонале и углови у многоуглу

Раније смо дефинисали многоугао као затворену изломљену линију, на пр., многоугао $A_1A_2 \ldots A_7A_1$ (сл. 57). Многоугао дели раван на две области *унутрашњу* и *спољашњу*. Унутрашња област чини *површину многоугла*. Реч „многоугао“, како смо навели, означује некад и површину многоугла, и тада се сама изломљена линија зове *контура* многоугла. Казали смо и шта је угао многоугла. Угао многоугла зове се и *унутрашњи угао* многоугла за разлику од *спољашњег угла* многоугла који чини страна многоугла са продужењем суседне стране. Спољашњи угао је упоредни угао унутрашњег угла. Код темена A_1 (сл. 57) $\sphericalangle A_2A_1A_7$ је унутрашњи угао, а $\sphericalangle A_7A_1B_1$ је спољашњи угао.



Слика 57

Теорема 45. *Број свих дијагонала у многоуглу са n страна износи $\frac{1}{2}n(n-3)$.*

Ако многоугао има n темена, из сваког темена могу се повући n — 3 дијагонале, јер само то теме и два суседна не улазе у рачун. Из n темена може се према томе, изгледа, повући n пута толико дијагонала, тј. $n(n-3)$. Како се при томе свака дијагонала двапут рачуна, на пр. дијагонала A_1A_4 (сл. 57) рачуна се од темена A_1 и од темена A_4, то нађени број треба поделити са два. Тиме смо доказали, да је број свих дијагонала у многоуглу одређен обрасцем $\frac{1}{2}n\,(n-3)$.

Последица. Сваки четвороугао има две дијагонале.

Сваки се многоугао може поделити на троуглове на више начина (извршити неколико таквих подела). Кад се многоугао са n страна подели дијагоналама из једног темена на троуглове, добиће се $n-2$ троугла (зашто?).

Теорема 46. *Збир углова у многоуглу са n страна износи* $(n-2)\,2d$.

Дијагоналама из једног темена може се многоугао поделити на $n-2$ троугла тако, да сви углови троуглова чине само све углове многоугла (сл. 57). Како је збир углова у троуглу $2d$, то је збир S свих углова у многоуглу

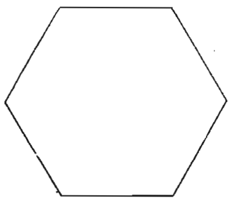
$$S=(n-2)\,2d \quad \text{или} \quad S=(n-2)\,180^0.$$

Последица. Збир углова у четвороуглу износи 4d или 360⁰.

Теорема 47. *Збир спољашњих углова у сваком многоуглу износи 4d или 360⁰.*

Збир спољашњег и унутрашњег угла код сваког темена износи $2d$, а код свих n темена $2nd$. Пошто је (теорема 46) збир унутрашњих углова једнак $(n-2)\,2d$, за спољашње углове остаје разлика, тј.

$$2nd-(n-2)\,2d=4d,$$



Слика 58

а то је требало доказати. Види се, да је збир спољашњих углова у многоуглу независан од броја страна.

Многоугао чије су све стране међу собом једнаке и сви углови међу собом једнаки зове се *правилан* (сл. 58).

Теорема 48. *Сваки угао правилног многоугла износи* $2d-\frac{4d}{n}$.

Пошто су код правилног многоугла сви унутрашњи углови једнаки, за израчунавање сваког угла треба збир свих углова $(n-2)\,2d$ поделити бројем углова n, тј.

$$\frac{(n-2)\,2d}{n}=2d-\frac{4d}{n},$$

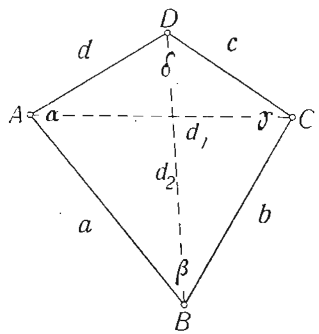
што је требало доказати.

Вежбања

1. Колико дијагонала има шестоугао? а десетоугао?
2. Који многоугао има збир углова 900⁰?
3. Постоји ли многоугао са збиром углова 2340⁰? а 4700⁰?
4. Постоји ли многоугао чији је збир спољашњих углова већи од збира унутрашњих углова?
5. Колико највише може бити тупих спољашњих углова? а колико највише правих? и код којих многоуглова?
6. Доказати да је четвороугао једини многоугао код кога је збир спољашњих углова једнак збиру унутрашњих углова.
7. Узети неку тачку у унутрашњој области многоугла и спојити је са теменима. Ако је број страна многоугла n, колико се троуглова добије на тај начин? Колики је збир углова свих тих троуглова? Како се може наћи збир свих углова многоугла помоћу такве поделе многоугла на троуглове?
8. Спојити неку тачку на једној страни са свим теменима многоугла од n страна и помоћу такве поделе на троуглове наћи збир углова многоугла.
9. Наћи угао правилног петоугла, шестоугла, десетоугла и дванаестоугла.
10. Израчунати спољашњи угао правилног петоугла и шестоугла.

§ 25. Врсте четвороуглова

Четвороугао ограничава област равни која се зове *површина четвороугла*. Каткада реч „четвороугао“ означава и површину четвороугла. Познато је, шта су: *стране* четвороугла (a, b, c, d), *темена* (A, B, C, D), *углови* $(\sphericalangle A=\alpha,\ \sphericalangle B=\beta,\ \sphericalangle C=\gamma,\ \sphericalangle D=\delta)$, *обим* или *периметар* $(a+b+c+d)$, *дијагонале* $(AC=d_1,\ BD=d_2)$ — (сл. 59).



Слика 59

Четвороуглови се могу разликовати према паралелности страна. Четвороугао може да:

a) нема уопште паралелних страна *(трапезоид)*;

b) има један пар паралелних страна *(трапез)*;

c) има два пара паралелних наспрамних страна (*паралелограм*).

Према дужини страна паралелограм може бити разнострани (зове се и *ромбоид*) или једнакострани (*ромб*).

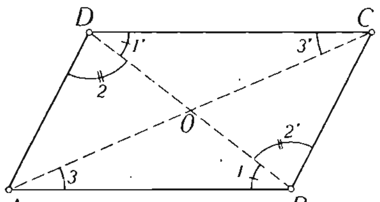
Према угловима паралелограми су косоугли и правоугли или *правоугаоници.*

Једнакострани правоугаоник или, што је исто, правоугли ромб је *квадрат*.

Од свих четвороуглова засебно се издваја *делтоид* са два пара једнаких суседних страна.

§ 26. Паралелограм

Теорема 49. *У сваком паралелограму: 1) наспрамне стране су једнаке, 2) наспрамни углови су једнаки, 3) дијагонале се полове и 4) углови на свакој страни су суплементни.*



Слика 60

Нека је четвороугао $ABCD$ (сл. 60) паралелограм, тј. $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$.

1. Доказати да је $AB = DC$ и $AD = BC$. Повуцимо дијагоналу BD. Троуглови ABD и BDC, према правилу [УСУ], подударни су, јер су им углови на заједничкој страни BD једнаки као наизменични ($\measuredangle 1 = \measuredangle 1'$, $\measuredangle 2 = 2'$). Из подударности следује $AB = DC$ и $AD = BC$, што је требало доказати.

2. Једнакост наспрамних углова $\measuredangle A$ и $\measuredangle C$ непосредно следује из подударности уочених троуглова. Наспрамни углови код B и D једнаки су, јер су састављени од једнаких делова.

3. У првом делу ове теореме доказали смо да је $AB = DC$, па како је $\measuredangle 1 = \measuredangle 1'$ и $\measuredangle 3 = \measuredangle 3'$ као наизменични, то су троуглови ABO и CDO подударни по правилу [УСУ]. Одатле следује $AO = OC$ и $BO = OD$, што је требало доказати.

4. Како су углови на свакој страни паралелограма супротни, а како су код паралелограма наспрамне стране паралелне, они морају бити суплементни.

Последица I. Ако је у паралелограму један угао прав, сви су прави; а ако је један кос, сви су коси.

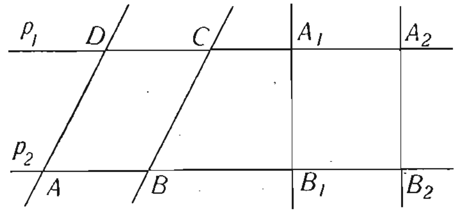
Последица II. Ако су код паралелограма две суседне стране једнаке, онда су све стране једнаке.

Пошто се паралелограм може добити пресеком једног пара паралелних правих другим паром, први део теореме 49 може се и овако изразити:

Теорема 50. *Отсечци паралелних правих између паралелних једнаки су.*

Последица. Растојање између две паралелне праве свуда је исто.

Заиста, ако из две, ма које, тачке A_1 и A_2 праве p_1 (сл. 61) спустимо нормале A_1B_1 и A_2B_2 на паралелну праву p_2, ове нормале су према теореми 30 паралелне. Како је $A_1A_2B_2B_1$ паралелограм, то је $A_1B_1 = A_2B_2$, што је требало доказати.



Слика 61

Теорема 51. (Обрнута теореми 49). *Ако су у једном четвороуглу: 1) две и две наспрамне стране једнаке, или 2) само две стране једнаке и паралелне, или 3) наспрамни углови једнаки, или се 4) дијагонале полове, четвороугао је паралелограм.*

1. У четвороуглу $ABCD$ (сл. 60) дато је: $AB = DC$ и $AD = BC$. Доказати да је $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$. Ако се повуче дијагонала BD, онда су троуглови ABD и BDC према правилу [ССС] подударни. Из подударности тих троуглова следује једнакост наизменичних углова $\measuredangle 1 = \measuredangle 1'$ и $\measuredangle 2 = \measuredangle 2'$. Одатле на основу теореме 31 добијамо $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$, што је требало доказати.

2. Нека је $AB = DC$ и $AB \parallel DC$. Тада су троуглови ABD и BDC подударни на основу правила [СУС], јер имају једнаке стране $AB = DC$, страну BD заједничку и $\measuredangle 1 = \measuredangle 1'$ као наизменичне. Одатле следује да су и наизменични углови $\measuredangle 2$ и $\measuredangle 2'$ једнаки. Тада је опет на основу теореме 31 и $AD \parallel BC$.

3. Нека су у четвороуглу $ABCD$ (сл. 60) наспрамни углови једнаки, тј., $\measuredangle A = \measuredangle C$ и $\measuredangle B = \measuredangle D$. Треба доказати да је тај четвороугао паралелограм, тј., да је $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$.

Пошто је код сваког четвороугла

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 4\,d,$$

онда с обзиром на претпоставку имамо

$$2 \cdot \measuredangle A + 2 \cdot \measuredangle B = 4d \quad \text{или} \quad \measuredangle A + \measuredangle B = 2d.$$

Како су супротни углови $\measuredangle A$ и $\measuredangle B$ суплементни, мора, према теореми 31, бити $AD \parallel BC$. Исто тако се доказује да је $AB \parallel DC$.

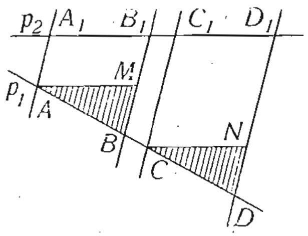
4. Нека је најзад дато $AO = OC$ и $BO = OD$.

Тада су троуглови ABO и CDO подударни према правилу [СУС], јер су унакрсни углови код O једнаки. Из те подударности следује да су наизменични углови $\sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 1'$ једнаки, а то значи $AB \parallel DC$. Осим тога је $AB = DC$, па је према већ доказаном другом делу ове теореме четвороугао паралелограм.

Теорема 52. *Паралелограм је централно симетрична слика чији је центар симетрије у пресеку дијагонала.*

Тачке A и C као и тачка B и D (сл. 60) су централно симетричне у односу на тачку O, јер она полови дијагонале. Према теореми 43 је тада страна AD централно симетрична страни CB и страна AB — страни CD, што је требало доказати.

Теорема 53. *Ако на једној правој p_1 (сл. 62) имамо две једнаке дужи ($AB = CD$), па кроз крајеве тих дужи повучемо паралелне праве ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) до пресека са другом правом (p_2), тада ће одговарајуће дужи (A_1B_1 и C_1D_1) на другој правој бити такође једнаке међу собом ($A_1B_1 = C_1D_1$).*



Слика 62

Ради доказа повучемо кроз тачке A и C паралелне праве са p_2. Тада су троуглови ABM и CDN подударни по правилу [УСУ], јер имају једнаке по једну страну $AB = CD$ и налегле углове на тим странама, тј.

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle NCD \text{ и } \sphericalangle ABM = \sphericalangle CDN,$$

као сагласне. На тај начин је $AM = CN$, па како су четвороуглови AMB_1A_1 и CND_1C_1 паралелограми, то је

$$AM = A_1B_1 \quad \text{и} \quad CN = C_1D_1, \text{ одакле}$$

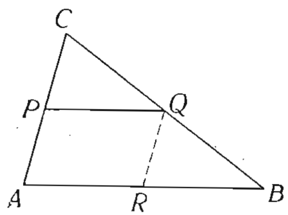
$$A_1B_1 = C_1D_1,$$

што је требало доказати.

Тачке B и C могу се поклапати и тада на правој p_1 имамо две надовезане једнаке дужи. Њима одговарају две такође надовезане и међу собом једнаке дужи на правој p_2 (нацртати такву слику). Осим тога тачка A се може налазити у пресеку правих p_1 и p_2. Тада једнаким дужима одмереним на једном краку одговарају међу собом једнаке дужи на другом краку (нацртати и такву слику). Најзад, ако се на једној правој узме више једнаких дужи, и на другој правој добиће се исто толико међу собом једнаких дужи.

Теорема 54. *Права која пролази кроз средину једне стране троугла, а паралелна је другој страни, 1) полови трећу страну и 2) њен отсечак између троуглових страна једнак је половини паралелне стране.*

1. Први део теореме је последица претходне теореме.
2. Нека је (сл. 63) $AP = PC$ и $PQ \parallel AB$. Треба доказати да је $PQ = \frac{1}{2} AB$. Кроз тачку Q повуче се права $QR \parallel AC$.



Слика 63

На основу првог дела ове теореме мора бити $AR = RB$, тј. $AR = \frac{1}{2} AB$. Са друге стране је међутим $AR = PQ$, пошто је $APQR$ паралелограм, дакле

$$PQ = \frac{1}{2} AB,$$

што је требало доказати.

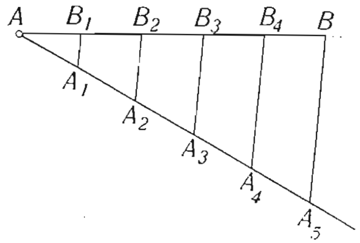
Дуж која спаја средине две троуглове стране зове се *средња линија* троугла.

Теорема 55. (Обрнута теореми 54). *Средња линија у троуглу паралелна је трећој страни и једнака њеној половини.* Доказати.

Помоћу теореме 53 можемо решити овај конструктивни задатак:

Поделити дату дуж ма на који број једнаких делова.

Нека дуж AB (сл. 64) треба поделити, на пр., на пет једнаких делова. Тада из једног ма којег краја дате дужи AB, на пр. A, повучемо ма коју полуправу и на њој почев од тачке A одмеримо пет једнаких дужи $AA_1 = A_1A_2 = \ldots$ Крај A_5 последње дужи спојимо са другим крајем B дате дужи и кроз тачке A_1, A_2, A_3 и A_4 повучемо паралеле са том правом. Те паралеле секу дату дуж у тачкама B_1, B_2, B_3 и B_4 и деле је на пет једнаких делова $AB_1 = B_1B_2 = \ldots$



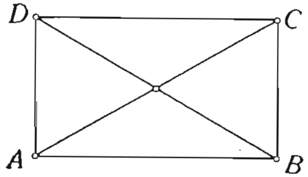
Слика 64

§ 27. Правоугаоник. Ромб. Квадрат

Правоугаоник има све особине паралелограма, а осим тога и своје нарочите особине.

Теорема 56. *Дијагонале правоугаоника једнаке су.*

Нека су у правоугаонику $ABCD$ (сл. 65) повучене дијагонале AC и BD. Тада су правоугли троуглови ABD и ABC подударни по правилу [СУС], последица теореме 7. Према томе је $AC=BD$, што је требало доказати.



Слика 65

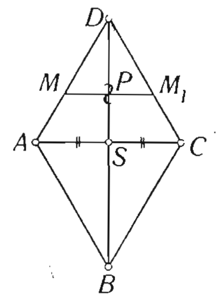
Лако је доказати да сваки правоугаоник, осим центра симетрије, као сваки паралелограм, има и две осе симетрије. Према томе правоугаоник је осно симетрична слика.

Поред особина, које имају сви паралелограми, ромб има и неких нарочитих особина.

Теорема 57. *Дијагонале ромба 1) нормалне су једна на другој, 2) полове углове чија темена спајају и 3) његове су осе симетрије.*

Нека је паралелограм $ABCD$ (сл. 66) ромб, тј. $AB=BC$ $(=CD=DA)$.

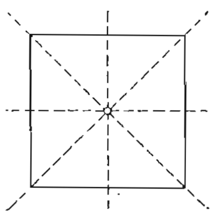
1. Троуглови ASD и CSD подударни су по правилу [ССС], при чему је $AS=SC$ (дијагонале сваког паралелограма се полове). Према томе је $\measuredangle ASD=\measuredangle CSD$, а пошто су ти углови упоредни, сваки мора бити прав тј. $AC \perp BD$, што је требало доказати.



Слика 66

2. Из подударности истих троуглова ASD и CSD следује и $\measuredangle ADS=\measuredangle CDS$, другим речима дијагонале ромба су симетрале углова чија темена спајају.

3. Да бисмо доказали трећи део теореме, тј. да је, на пр., дијагонала BD симетрала ромба, повучемо ма коју нормалу на BD која сече стране ромба у тачкама M и M_1. Пошто је $MM_1 \perp BD$, а углови $\measuredangle MDP = \measuredangle M_1DP$, то су правоугли троуглови MDP и M_1DP подударни по последици теореме 8. Одатле следује да је $MP = PM_1$, што је требало доказати.



Слика 67

Квадрат (сл. 67) има све особине паралелограма, правоугаоника и ромба. Квадрат је централно симетрична и осно симетрична слика са четири осе симетрије.

§ 28. Трапез. Делтоид

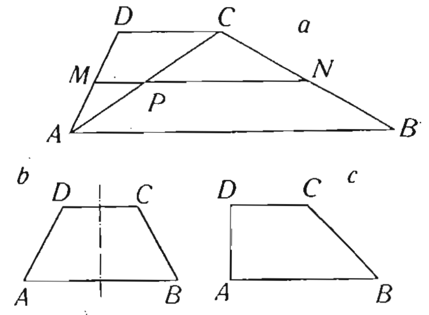
Паралелне стране су *основице* трапеза, а непаралелне — *кракови* трапеза. Растојање између основица је *висина* трапеза.

Теорема 58. *Ако се кроз средину једног крака трапеза повуче права паралелна основицама, она полови други крак и њен отсечак између кракова једнак је полузбиру основица.*

Нека је у трапезу $ABCD$ (слика 68, *a*) $AM=MD$ и $MN \parallel AB \parallel DC$. Према теореми 53 мора бити и $BN=NC$. Ако повучемо дијагоналу AC и пресечну тачку те дијагонале са MN означимо са P, онда је, према теореми 54, $MP=\frac{1}{2}DC$ и $PN=\frac{1}{2}AB$, одакле сабирањем добијамо

$$MN=\frac{1}{2}(AB+DC),$$

што је требало доказати.



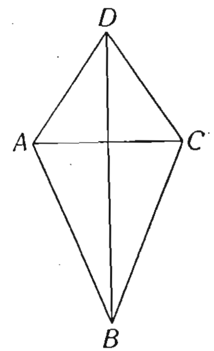
Слика 68

Дуж, која спаја средине кракова трапеза, зове се *средња линија* трапеза.

Врло се лако може доказати и овој теореми обрнута:

Теорема 59. *Средња линија у трапезу је паралелна основицама и једнака полузбиру основица.* Доказати. (*)

Ако су кракови трапеза једнаки трапез се зове *равнокрак* (сл. 68, *b*).



Слика 69

Теорема 60. *Равнокраки трапез је осно симетрична слика.* Доказати.

Последица. У сваком равнокраком трапезу су: 1) углови на свакој основици једнаки и 2) дијагонале једнаке.

Кад је у трапезу један угао прав (сл. 68, *c*) и други угао код тог крака је такође прав (зашто?). Такав трапез зове се *правоугли*.

Делтоид (сл. 69) има два пара једнаких суседних страна. Доказати ове теореме о делтоиду.

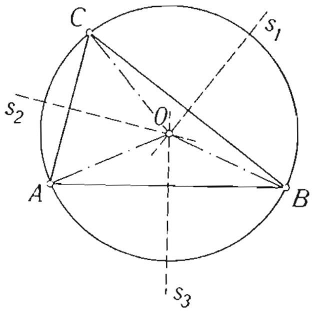
(*) Према теореми 53 [illegible]

Теорема 61. *Делтоид је осно симетрична слика.*

Теорема 62. *Дијагонале делтоида су нормалне једна на другој.*

§ 29. Значајне тачке троугла

Теорема 63. *Све три симетрале троуглових страна секу се у једној тачки која је подједнако удаљена од сва три темена.*

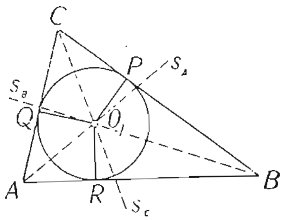


Слика 70

Нека се у троуглу ABC (сл. 70) симетрале s_1 и s_2 страна BC и AC секу у тачки O. Тада је (теорема 26) $OB = OC$ и $OA = OC$, одакле је $OA = OB$, а одавде закључујемо да и симетрала s_3 треће стране AB пролази кроз тачку O. Пошто је $OA = OB = OC$, тачка O је подједнако удаљена од сва три темена. Круг са центром у O, који пролази кроз тачке A, B, C, зове се *описани круг* око троугла.

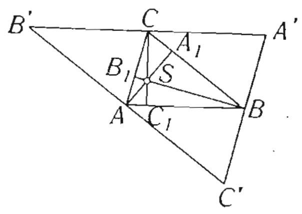
Теорема 64. *Све три симетрале унутрашњих углова у троуглу секу се у једној тачки која је подједнако удаљена од све три стране.*

Нека се у троуглу ABC (сл. 71) симетрале s_A и s_B углова $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ секу у тачки O_1. Означимо растојања те тачке од троуглових страна са O_1P, O_1Q, O_1R, тада је (теорема 28) $O_1Q = O_1R$ и $O_1P = O_1R$, одакле је $O_1Q = O_1P$, тј. и симетрала s_C трећег угла пролази кроз тачку O_1. Пошто је $O_1P = O_1Q = O_1R$, тачка O_1 је подједнако удаљена од троуглових страна. Тачке P, Q, R леже на кругу са центром у O_1. Такав круг зове се *уписани круг* у троуглу.



Слика 71

Теорема 65. *Све висине троугла секу се у једној тачки.*



Слика 72

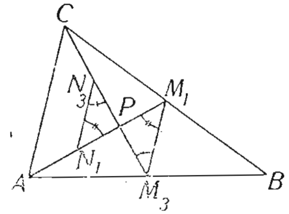
Нека је дат троугао ABC (сл. 72) са висинама AA_1, BB_1, CC_1. Кроз темена овог троугла повучемо паралелне праве са супротним странама и добијамо троугао $A'B'C'$. Тада су четвороуглови $ABCB'$ и $ABA'C$ паралелограми и стога је: $B'C = AB$ и $CA' = AB$, дакле $B'C = CA'$ или тачка C је средина стране $A'B'$. Пошто висина из C стоји управно и

на $A'B'$ (теорема 35), она је симетрала стране $A'B'$. И остале две висине су симетрале страна помоћног троугла $A'B'C'$. Симетрале страна помоћног троугла $A'B'C'$ по теореми 63 секу се у истој тачки, а пошто су то висине троугла ABC и висине се секу у једној тачки.

Пресек висина троугла зове се *ортоцентар*.

Теорема 66. *Све тежишне линије троугла секу се у једној тачки која сваку тежишну линију дели на два дела тако, да је део до темена двапут већи од другог дела.*

Нека су AM_1 и CM_3 (сл. 73) тежишне линије троугла ABC и P њихов пресек. У троуглу APC повучемо средњу линију N_1N_3 која је паралелна са AC и тада је $N_1N_3 = \frac{1}{2} AC$. Осим тога имамо $M_1M_3 = \frac{1}{2} AC$ и такође паралелно са AC. Према томе $N_1N_3 = M_1M_3$ и $N_1N_3 \parallel M_1M_3$ и углови код M_1 и N_1, M_3 и N_3 једнаки су као наизменични. Отуда су троуглови N_1PN_3 и M_1PM_3 подударни по правилу [УСУ], одакле следује $N_1P = PM_1$. На тај начин тачке N_1 и P деле тежишну линију AM_1 на три једнака дела тако да је $AP = 2\,PM_1$. Исто тако $CP = 2\,PM_3$. Тиме смо доказали други део теореме.



Слика 73

Тежишна линија из темена B мора ићи кроз тачку P такође, пошто и она дели, на пр., тежишну линију AM_1 тако да је $AP = 2\,PM_1$, а постоји само једна тачка P која тако дели дуж AM_1.

Пресек тежишних линија зове се *тежиште*.

Четири тачке — центар описаног и центар уписаног круга, ортоцентар и тежиште — зову се *значајне тачке* троугла.

Вежбања

Доказати теореме:

1. Збир дијагонала четвороугла мањи је од његовог обима, а већи од полуобима.
2. Четвороугао код кога су углови на свакој страни суплементни мора бити паралелограм.
3. Паралелограм са једнаким дијагоналама је правоугаоник.
4. Паралелограм са управним дијагоналама је ромб.
5. Паралелограм, чија је дијагонала оса симетрије, је ромб.

6. Кад се споје средине узастопних страна ма у којем четвороуглу, добија се паралелограм.

7. Кад се споје средине узастопних страна равнокраког трапеза, добија се ромб.

8. Ако су дијагонале четвороугла управне и једнаке, средине његових страна су темена квадрата.

9. Делтоид са једним паром паралелних страна је ромб.

10. Трапез са једнаким дијагоналама мора бити равнокрак.

11. Симетрале углова ма којег правоугаоника чине у пресеку квадрат.

12. Ако стране једног паралелограма пролазе кроз темена другог паралелограма, онда се њихове дијагонале секу у истој тачки.

13. Кад се у трапезу повуку симетрале два угла ма на којем краку, оне се секу на средњој линији под правим углом.

14. Паралелограми који имају једнаке по две стране са захваћеним углом подударни су.

15. У правоуглом троуглу је симетрала правог угла истовремено и симетрала угла између висине и тежишне линије.

16. Доказати да се симетрала унутрашњег угла троугла сече са симетралама два несуседна спољашња угла у једној тачки, подједнако удаљеној од свих страна.

17. Доказати да је збир две тежишне линије троугла увек већи од треће тежишне линије и да је разлика две тежишне линије увек мања од треће.

18. Ако се из сваког темена троугла и његовог тежишта спусте нормале ма на коју праву која не сече његове стране, онда је збир нормала из темена три пута већи од нормале из тежишта. Доказати.

Конструктивни задаци:

19. Конструисати четвороугао, кад су познате четири стране и једна дијагонала.

20. Конструисати четвороугао, кад су позната три угла и две стране које чине четврти угао.

21. Конструисати четвороугао, кад су познате стране a, b, c, угао α и дијагонала d_1.

22. Конструисати паралелограм помоћу дијагонала и угла који оне чине.

23. Конструисати паралелограм, кад су познате две стране и разлика углова на једној од њих.

24. Конструисати датој правој p паралелу кроз тачку A на тај начин, да се на правој p узме једна ма која дуж као страна, а тачка A као теме паралелограма. Тражена паралела биће супротна страна паралелограма.

25. Конструисати троугао, кад су познате две стране и тежишна линија према трећој страни.

26. Конструисати троугао, кад је позната страна c, висина h_c и тежишна линија m_a.

27. Конструисати трапез, кад је дата разлика основица, кракови и средња линија.

28. Конструисати трапез, кад је дата већа основица, висина и углови на већој основици.

29. Конструисати трапез, кад је дат збир основица, висина и углови на већој основици.

30. Конструисати трапез, кад су дате обе основице и обе дијагонале.

31. Конструисати равнокраки трапез, кад је позната већа основица, угао на њој и крак.

32. Конструисати правоугаоник, ако је дата дијагонала и разлика димензија.

33. Конструисати правоугаоник, ако је дата дијагонала и збир димензија.

34. Конструисати правоугаоник, ако је дат положај два супротна темена и угао између дијагонала.

35. Конструисати ромб, ако је дат збир дијагонала и већи угао.

36. Конструисати ромб, ако је дата разлика дијагонала и мањи угао.

37. Конструисати квадрат, кад је дата: *a*) дијагонала, *b*) збир дијагонале и стране, *c*) разлика дијагонале и стране.

38. Конструисати делтоид, ако је дата она дијагонала која је симетрала делтоида, угао између ње и стране и збир две неједнаке стране.

ГЛАВА VI

КРУГ

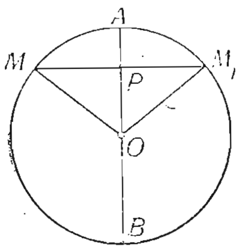
§ 30. Круг. Тетиве круга

Раније смо навели дефиницију круга, полупречника, тетиве, пречника, кружних лукова, исечка (сектора) и отсечка (сегмента).

Теорема 67. *Круг је централно и осно симетрична слика.*

1. Пошто свакој тачки круга одговара друга тачка, на другом крају пречника прве тачке, центар круга је његов центар симетрије.

2. Повуцимо ма који пречник AB круга (сл. 74) и докажимо да је он оса симетрије круга. Из ма које тачке M круга спустимо нормалу MP на AB и продужимо је до пресека са кругом у тачки M_1. Пошто су троуглови OMP и OM_1P по правилу [ССУ] подударни, $PM=PM_1$, а то доказује симетричност тачака M и M_1. Сваки пречник је оса симетрије и према томе круг има безброј оса симетрије.



Слика 74

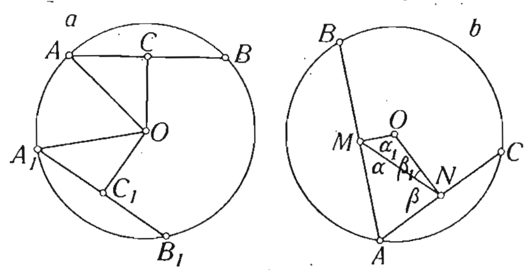
Последица. Круг са једном тетивом или са две или више паралелних тетива је осно симетрична слика.

У кругу се могу повући тетиве разне дужине. Њихово растојање од центра зове се *централно или средишно* растојање.

Теорема 68. *У кругу или у круговима једнаких полупречника: 1) једнаке тетиве имају једнака централна растојања и обрнуто, и 2) од неједнаких тетива већој одговара мање централно растојање и обрнуто — мањем централном растојању већа тетива.*

1. Ако је $AB=A_1B_1$ (сл. 75, *a*), $OC \perp AB$ и $OC_1 \perp A_1B_1$, онда и $AC=A_1C_1$ као половине једнаких тетива. Тада су правоугли троуглови AOC и A_1OC_1 подударни по правилу [ССУ], па према томе $OC=OC_1$.

Обрнуто, на основу ове једнакости, а из подударности истих троуглова следује $AC=A_1C_1$, што повлачи и једнакост целих тетива $AB=A_1B_1$.

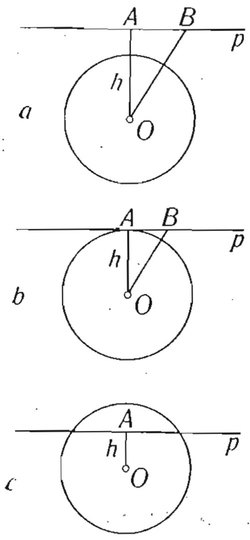


Слика 75

2. Нека је $AB>AC$ (сл. 75, *b*), $OM \perp AB$ и $ON \perp AC$. Тада је и $AM>AN$, па је према томе, у троуглу AMN, на основу теореме 15, $\beta>\alpha$. Како је $\alpha_1=90^0-\alpha$ и $\beta_1=90^0-\beta$, то мора бити $\alpha_1>\beta_1$, па из троугла OMN, на основу теореме 16, следује $ON>OM$, што је требало доказати. Обрнуто из ове неједнакости лако се на исти начин изводи неједнакост $AM>AN$, па после $AB>AC$.

Последица. Пречник је највећа тетива.

§ 31. Положај тачке и праве према кругу



Слика 76

Кад се централно растојање тачке означи са *d*, а полупречник круга са *r*, онда је тачка

ван круга, кад је $d>r$,
на кругу, „ „ $d=r$,
у кругу „ „ $d<r$.

Ако са h означимо растојање праве од центра круга полупречника r, онда се за релативни положај праве и круга може поставити ова теорема:

Теорема 69. *Према томе, да ли је $h>r$, $h=r$, $h<r$ права лежи ван круга, додирује га или га сече.*

1. Кад је растојање $h > r$ (сл. 76, *a*), подножје тог растојања на правој *p*, тачка *A*, лежи ван круга. Свака друга тачка те праве, на пр. *B*, лежи такође ван круга, јер је $OB > h$ као коса дуж, и према томе је и $OB > r$. Права лежи ван круга.

2. Кад је $h = r$ (сл. 76, *b*), тачка *A*, подножје нормале из центра на праву *p*, лежи на кругу, али све остале тачке леже ван круга. Њихова централна растојања већа су од *h*, па и од *r*. Права *p* у овом случају има само једну заједничку тачку са кругом и стоји управно на полупречнику те тачке. Таква права зове се *тангента* или *дирка*. Заједничка тачка праве и круга је *додирна тачка*. Каже се да права додирује круг или круг додирује праву.

3. Кад је $h < r$ (сл. 76, *c*), подножје нормале $OA = h$, тачка *A*, мора бити у кругу. Права *p* има једну тачку у кругу и стога мора да сече круг. Она има са њим две заједничке тачке и зове се *сечица* или *секанта*.

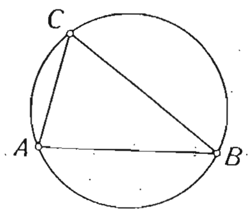
Како тангента стоји нормално на полупречнику у додирној тачки, лако се могу решити ови конструктивни задаци:

1. *Конструисати тангенту у датој тачки на кругу.*
2. *Конструисати тангенту на круг паралелно (или нормално) датој правој.*

§ 32. Одређивање круга

Теорема 70. *Три тачке, које не леже на истој правој, одређују један једини круг.*

Три тачке A, B, C, које нису на истој правој, одређују троугао ABC (сл. 77). По теореми 63 око сваког троугла се може описати само један круг.



Слика 77

§ 33. Међусобни положај два круга

Нека су нам дата два круга *различитих* полупречника R и r. Њихово централно растојање обележићемо са δ. Права, која пролази кроз центре оба круга, зове се *централа*.

Теорема 71. *Два круга чине осно симетричну слику чија је оса симетрије централа.* (Нацртати слику).

Сваки пречник је оса симетрије круга, а како се на централи налазе пречници оба круга, то је она њихова заједничка оса симетрије.

Последица. Централа је симетрала сваке тетиве која стоји нормално на централи.

Теорема 72. *Кад два круга имају једну заједничку тачку ван централе, они морају имати још једну, овој симетричну тачку заједничку.*

Тачност ове теореме непосредно следује као последица претходне теореме 71. Централа стоји нормално на заједничкој тетиви и полови је. За два круга, који имају две тачке заједничке, каже се да *се секу.*

Ако два круга имају само једну тачку заједничку, за њих се каже да *се додирују.*

Теорема 73. *Кад два круга имају заједничку тачку на централи, они се додирују и у тачки додира имају заједничку тангенту.*

Треба доказати, да у овом случају кругови немају ни једну другу тачку заједничку. Наиме, кад бисмо имали и другу тачку заједничку, она би морала лежати или ван централе или на централи. У првом случају постојала би према теореми 72 и трећа заједничка тачка, а кроз три тачке не могу пролазити два различита круга ($R \neq r$). Ако бисмо имали још једну тачку на централи, онда бисмо имали заједничку тетиву која пролази кроз центре оба круга, тј. заједнички пречник, па би се опет поклапали.

Да имају заједничку тангенту у додирној тачки јасно је отуда, што права управна на полупречнику једног од кругова у тачки додира на централи стоји управно и на полупречнику другог круга на истој правој.

Проучимо промену положаја два круга, кад се мења њихово централно растојање. Та промена може се изразити овако:

Теорема 74. *Два круга са полупречницима* R и r ($R>r$)

1. *су један ван другог,*	*ако је*	$\delta > R+r$,
2. *додирују се споља,*	„ „	$\delta = R+r$,
3. *секу се,*	„ „	$R+r > \delta > R-r$,
4. *додирују се изнутра,*	„ „	$\delta = R-r$,
5. *налазе се један у другом,*	„ „	$\delta < R-r$,
6. *концентрични су,*	„ „	$\delta = 0$.

Нацртати слику за сваки од ових случајева и доказати сваки део теореме.

§ 34. Круг и углови

а) Централни угао. Угао чије је теме у центру круга, зове се *централни* или *средишни* угао. Он има исто толико угловних степена и његових делова, колико кружни лук, који је у области тог угла, има лучних степена и његових делова. За кружни лук, који је у области угла, каже се да је *захваћен*, а за сам угао, да је *над* тим *луком*. У овом смислу се може рећи да се централни угао мери захваћеним луком и обрнуто.

b) Периферискн угао. Угао чије се теме налази на кругу, а кракови су му тетиве, зове се *периферискu* или *уписани* угао. И овде се за кружни лук између кракова каже да је захваћен, а за сам угао да је над луком.

Теорема 75. *Периферискн угао је једнак половини централног угла над истим луком.*

1. Нека је један крак периферискоr угла BAC (сл. 78, *а*) пречник круга. Спојимо B са O. Пошто је $OA = OB$, мора бити $\sphericalangle A = \sphericalangle B$. Централни угао BOC над истим луком спољашњи је угао троугла ABO, па према томе $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle BOC$, одакле

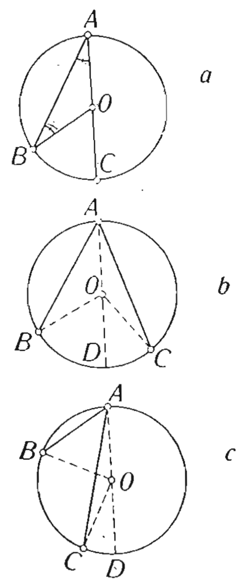
$$\sphericalangle A = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$

2. Кад се центар круга налази у области угла (сл. 78, *b*), онда се повуче пречник AD. Тада је према претходном случају $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BOD$ и $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \sphericalangle DOC$, одакле се сабирањем добија

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$

3. Ако се центар круга налази ван области угла (сл. 78, *c*), повуче се пречник AD. Сада је опет према првом случају $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle BOD$ и $\sphericalangle CAD = \frac{1}{2} \sphericalangle COD$, одакле се одузимањем добија

$$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC.$$



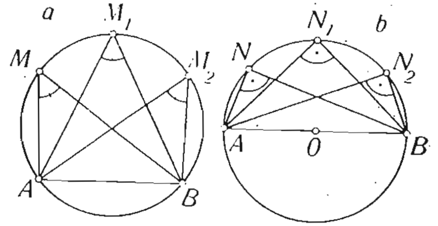
Слика 78

Пошто се сваки централни угао мери захваћеним луком, то се ова теорема може и овако изразити:

Периферискн угао се мери половином захваћеног лука.

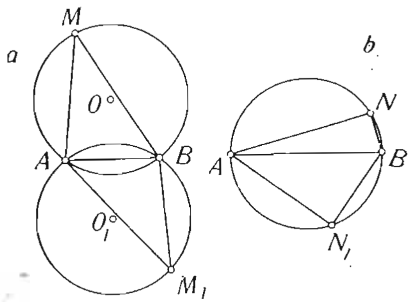
Последица I. Сви периферискн углови над истим луком или над једнаким луковима једнаких полупречника једнаки су. $\sphericalangle M = \sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_2$ (сл. 79, *а*).

Последица II. Сви периферискн углови над полукругом једнаки су правом углу. $\sphericalangle N = \sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2 = d$ (сл. 79, *b*). Уместо над полукругом каже се и над пречником.

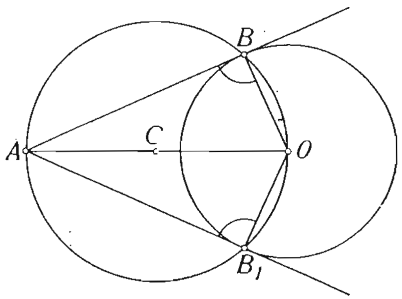


Слика 79

Последица III. Геометриско место тачака у равни, из којих се дата дуж види под датим углом, јесу два симетрична кружна лука (сл. 80, *а*). *Они се претварају у круг, ако је дати угао прав* (сл. 80, *b*).



Слика 80



Слика 81

Помоћу овог геометриског места може се решити важан конструктивни задатак:

Из тачке ван круга повући тангенту на круг.

Нека је дат круг са центром у O и тачка A ван круга (слика 81).

Анализа. Ако је, на пр., права AB тангента, онда је угао ABO прав. Стога тачка B мора бити на кругу чији је пречник AO према последици III претходне теореме.

Конструкција. Спојимо A са O и одредимо средину C дужи AO, па полупречником CO са центром у C нацртамо круг. Пресечне тачке B и B_1 овог круга са датим кругом су додирне тачке, а праве AB и AB_1 тражене тангенте.

Доказ. Како су тачке B и B_1 на кругу пречника AO, морају углови ABO и AB_1O бити прави. То значи, да су праве AB и AB_1 нормалне на полупречнике датог круга и према томе су тангенте.

Дискусија. Пошто се два круга секу само у две тачке, из тачке ван круга могу се повући само две тангенте.

Отсечак тангенте од спољне тачке до тачке додира зове се кратко *дужина тангенте.*

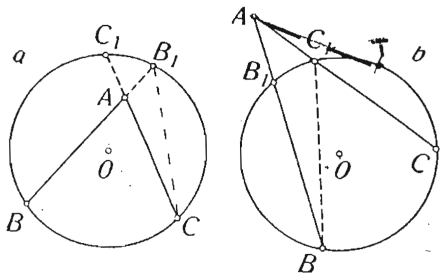
Теорема 76. *Дужине обе тангенте повучене из исте спољне тачке на круг једнаке су.*

Нека су праве AB и AB_1 тангенте круга са центром O (сл. 81). Тада су троуглови AOB и AOB_1 подударни по правилу [ССУ], јер су правоугли, а имају једнаке стране $OB=OB_1$ и хипотенузу AO заједничку. Одатле следује $AB==AB_1$, што је требало доказати.

c) Углови чије се теме налази у кругу и ван круга.

Теорема 77. *Угао чије се теме налази у кругу мери се полузбиром лукова захваћених његовим краковима и њиховим продужењима; а угао чије се теме налази ван круга одређен је полуразликом захваћених лукова.*

1. Кад је теме угла A у кругу, тада је (сл. 82, a):



Слика 82

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB_1 + \sphericalangle AB_1C,$$

као спољашњи угао троугла ACB_1. Како су углови $\sphericalangle ACB_1$ и $\sphericalangle AB_1C$ периферискн, то је по теореми 75:

$$\sphericalangle ACB_1 = {}^1/_2 \sphericalangle C_1OB_1 \quad \text{и}$$

$$\sphericalangle AB_1C = {}^1/_2 \sphericalangle BOC,$$

одакле се сабирањем добија

$$\sphericalangle BAC = {}^1/_2 (\sphericalangle C_1OB_1 + \sphericalangle BOC),$$

што доказује први део теореме.

2. За угао са теменом ван круга (сл. 82, b) биће, опет зато што је $\sphericalangle BC_1C$ спољашњи угао троугла ABC_1:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BC_1C - \sphericalangle B_1BC_1,$$

одакле, слично као у претходном случају,

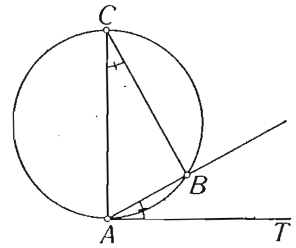
$$\sphericalangle BAC = {}^1/_2 (\sphericalangle BOC - \sphericalangle B_1OC_1),$$

што је требало доказати.

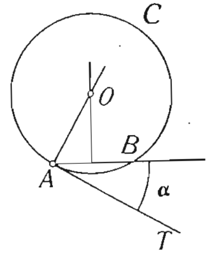
d) Угао који чине тангента и тетива.

Теорема 78. *Угао који чине тангента и тетива круга мери се половином кружног лука у области тог угла.*

Нека је AT (сл. 83) тангента круга и AB тетива. Угао BAT је тада угао између тангенте и тетиве. Повуче се пречник AC и тетива BC. Како је $AC \perp AT$ и $BC \perp AB$ (зашто?), $\sphericalangle BAT = \sphericalangle ACB$ као углови са нормалним краковима, а $\sphericalangle ACB$ се мери половином лука AB, то је теорема доказана.



Слика 83



Слика 84

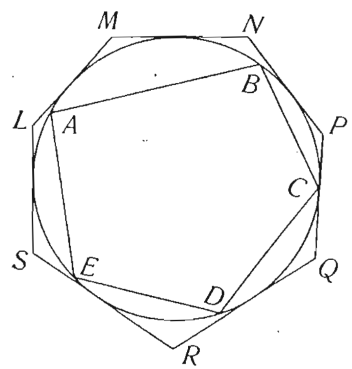
Помоћу ове теореме може се конструисати раније поменуто геометриско место тачака из којих се дата дуж види под датим углом.

Нека је дата дуж AB и угао α (сл. 84). Треба конструисати кружни лук ACB (а по потреби и њему симетричан) из чијих се тачака дуж AB види под углом α.

Како AT треба да буде тангента круга чији лук долази у обзир, то центар тог круга свакако лежи на нормали на AT у тачки A која треба да је додирна тачка. Са друге стране, пошто је AB тетива, то центар траженог кружног лука мора бити и на симетрали тетиве AB, према томе лежи у пресечној тачки O ове две праве. Из ове анализе је конструкција јасна.

§ 35. Круг и многоугао

Многоугао, чија сва темена леже на кругу (његове стране су тетиве), зове се *тетивни* многоугао или се каже да је *уписан* у кругу (сл. 85, $ABCDE$). Многоугао чије су све стране тангенте круга зове се *тангентни* многоугао или се каже да је *описан* око круга (на пр. $LMNPQRS$, сл. 85).



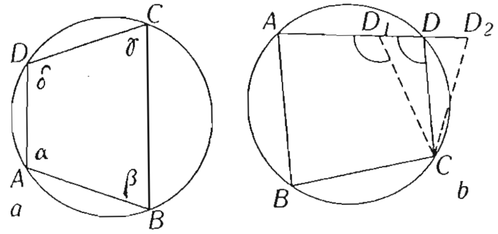
Слика 85

Знамо (теореме 63 и 64), да се око сваког троугла може описати круг и у сваки троугао уписати круг и то само један.

За четвороугао можемо доказати ове теореме:

Теорема 79. *У сваком тетивном четвороуглу насрамни углови су суплементни.*

Нека је $ABCD$ (сл. 86, a) четвороугао уписан у кругу. Треба доказати да је, на пр., $\alpha+\gamma=2d$.



Слика 86

Пошто се угао α мери половином лука BCD и угао γ половином лука BAD, а збир тих лукова чини цео круг, онда се збир углова $\alpha+\gamma$ мери половином круга или једнак је $2d$. Исто тако се може доказати да је $\beta+\delta=2d$.

Теорема 80. (Обрнута теореми 79). *Кад су у четвороуглу насрамни углови суплементни, око њега се може описати круг.*

Нека је дат четвороугао $ABCD$ (сл. 86, b), у коме је $\sphericalangle A+\sphericalangle C=2d$ и $\sphericalangle B+\sphericalangle D=2d$. Кроз три темена, на пр. A, B, C, може се повући круг. Тај круг или пролази и кроз четврто теме четвороугла D или сече страну AD у D_1 између A и D или продужење те стране у тачки D_2. Узмимо да наш круг не пролази кроз четврто теме, него да иде кроз тачку D_1. Тада би на основу теореме 79 морало бити $\sphericalangle B+\sphericalangle D_1=2d$, тј. $\sphericalangle D_1=\sphericalangle D$, а то је немогуће, пошто је $\sphericalangle D_1$ као спољашњи угао троугла CDD_1 већи од $\sphericalangle D$. Исто тако је немогуће да наш круг сече продужење стране AD, па према томе мора пролазити и кроз четврто теме D, што је требало доказати.

Теорема 81. *Код тангентног четвороугла збирови насрамних страна су једнаки.*

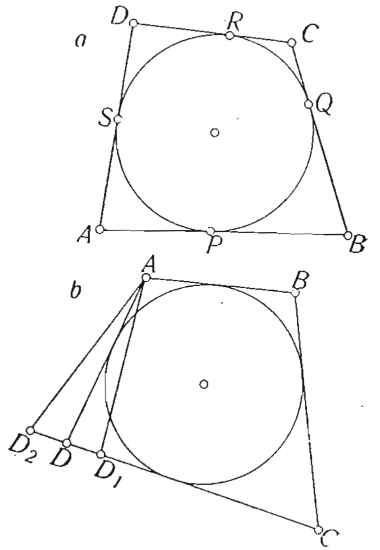
Како су дужине обе тангенте из спољне тачке на круг једнаке, може се (сл. 87, a) написати:

$$AP=AS$$
$$PB=BQ$$
$$CR=QC$$
$$RD=SD$$

одакле се сабирањем левих и десних страна добија

$$AB+CD=BC+DA,$$

што је требало доказати.



Слика 87

Теорема 82. (Обрнута теореми 81). *У сваком четвороуглу, код кога су збирови насрамних страна једнаки, може се уписати круг.*

Нека је у четвороуглу $ABCD$ (сл. 87, b)

$$AB+CD=BC+DA.$$

Увек се може нацртати круг који додирује три стране, на пр. AB, BC и CD, четвороугла $ABCD$. Центар тог круга налази се у пресеку симетрала углова ABC и BCD. Ако се на тај круг повуче тангента из тачке A, она може пролазити кроз тачку D или сећи страну CD у тачки D_1 између C и D или на продужењу у тачки D_2. Ако би та тангента секла страну CD у тачки D_1, онда би морало бити

по претпоставци: $\quad AB+CD=BC+DA$,

по теореми 81: $\quad AB+CD_1=BC+D_1A$,

одакле одузимањем $\quad CD-CD_1=DA-D_1A$ или

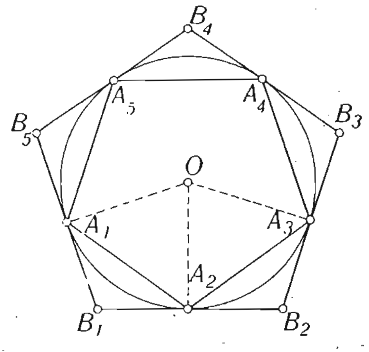
$$DD_1=DA-D_1A,$$

а то је у троуглу ADD_1 по теореми 17 немогуће.

На сличан се начин доказује да тангента не може сећи CD ни на продужењу у D_2, него према томе мора ићи кроз D, што је требало доказати.

Теорема 83. *Ако се круг подели на n ($n>2$) једнаких делова и 1) деоне тачке споје узастопце тетивама, добија се уписани правилни многоугао са n страна и 2) кроз деоне тачке повуку тангенте на круг, добија се описани правилни многоугао са n страна.*

Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_5$ (сл. 88) тачке круга које га деле, на пр., на пет једнаких делова. 1. Доказати да је $A_1A_2A_3A_4A_5A_1$ правилни петоугао. Прво, сви углови су једнаки, јер су периферски углови над једнаким луковима (теорема 75). Са друге стране, централни углови A_1OA_2 и A_2OA_3 итд. једнаки су, пошто се централни угао мери захваћеним луком, а сви захваћени лукови су једнаки. Тада је по правилу [СУС]: $\triangle A_1OA_2\cong\triangle A_2OA_3\cong\ldots$ одакле следује



Слика 88

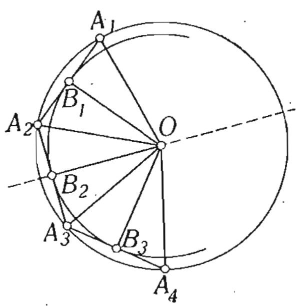
$$A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_5A_1,$$

тј. да су и све стране једнаке. Пошто су углови једнаки и стране једнаке, многоугао је правилан. Тиме смо доказали први део теореме.

2. Кроз тачке $A_1, A_2, \ldots, A$ повучене су тангенте B_5B_1, $B_1B_2, \ldots$ Доказати да је добијени описани многоугао $B_1B_2 \ldots B_5B_1$ (сл. 88) правилан. Троуглови $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3, \ldots$ итд. имају сви по једну страну једнаку, јер је према претходном $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$ Сви углови $B_1A_1A_2$, $A_1A_2B_1$, $B_2A_2A_3$, $A_2A_3B_2$. итд. једнаки су по теореми 78, јер су углови између тангенте и тетиве, а одговарају им једнаки лукови. Према томе су сви троуглови $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, итд. по правилу [УСУ] подударни. Отуда се закључује да је $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2 = \cdots = \sphericalangle B_5$ и да је $B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 \cdots$ или $B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_5B_1$. Пошто су у нашем многоуглу све стране и углови једнаки, он је правилан.

Теорема 84. *Око сваког правилног многоугла може се описати круг и у њега уписати круг.*

1. Опишимо круг који пролази кроз три тачке A_1, A_2, A_3 и докажимо да ће он проћи и кроз четврто теме A_4 многоугла (сл. 89), а према томе и кроз свако наредно теме. За то је довољно узети нормалу OB_2 на страну A_2A_3 за осу симетрије. Тачка A_4 је симетрична са тачком A_1, а како A_1 лежи на кругу, то и тачка A_4 мора лежати на истом кругу.



Слика 89

2. Пошто су A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ једнаке тетиве, оне су подједнако удаљене од центра круга O и према томе се тачке B_1, $B_2, \ldots$ налазе на кругу који додирује стране A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$

Центар описаног и уписаног круга код правилног многоугла зове се *центар многоугла*. Угао, који чине полупречници описаног круга повучени до краја једне стране многоугла, зове се *централни* угао многоугла. Он је једнак $\frac{4}{n}d$.

За симетричност правилних многоуглова можемо навести ове теореме (њихов доказ може послужити као вежба):

Теорема 85. *Сваки правилни многоугао са n страна има n оса симетрије.*

Теорема 86. *Правилни многоугао са парним бројем страна је централно симетрична слика. Центар симетрије је тада центар многоугла. Правилни многоугао са непарним бројем страна није централно симетрична слика.*

Вежбања

1. Дат је круг. Одредити му центар.

2. Доказати да су паралелне тетиве повучене из крајева једног пречника једнаке.

3. Доказати да две тетиве, које се узајамно полове, морају бити пречници.

4. Доказати да је од свих тетива, које иду кроз исту тачку у кругу, најмања она која стоји нормално на пречнику кроз ту тачку.

5. Дат је круг и ван њега права. Доказати да најближа и најдаља тачка круга од те праве леже у пресечним тачкама круга са правом која иде кроз центар круга, а нормална је на датој правој.

6. Доказати да сваки у кругу уписани паралелограм мора бити правоугаоник.

7. Нацртати круг полупречника 4 *cm* и повући ма који пречник. Паралелно са пречником с једне стране повући неколико тетива, па измерити њихове дужине и њихова централна растојања. Саставити таблицу од тих вредности и показати да, ако се централно растојање повећа двапут, тетива се неће двапут умањити и обрнуто.

8. Наћи геометриско место средина једнаких тетива у кругу.

9. Наћи геометриско место центара кругова који пролазе кроз две дате тачке.

10. Наћи геометриско место центара кругова који додирују дату праву у датој тачки.

11. Наћи геометриско место центара кругова који додирују две праве које се секу.

12. Из тачке A на кругу повучена је полуправа која сече круг и чини угао од 60^0 са пречником из тачке A. Навести услове које мора задовољавати тачка те полуправе да би се налазила: *a*) у кругу *b*) на кругу, *c*) ван круга.

13. Дат је круг и ван њега тачка A. Доказати да су крајеви P и Q пречника, на чијем се продужењу налази тачка A, најближа и најудаљенија тачка круга од тачке A.

14. На трансверзали паралелних правих наћи центар круга који додирује обе паралелне праве.

15. Кад слика од два круга има само две осе симетрије, а кад има бескрајно много?

16. Кад су кругови подударни? а кад су кружни лукови подударни? Под којим су условима лукови, који одговарају једнаким тетивама, подударни?

17. Наћи геометриско место центара кругова једнаких полупречника који додирују дату праву.

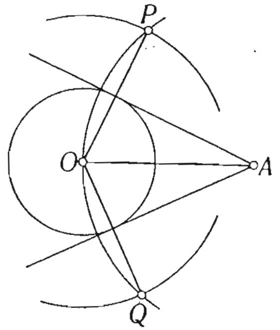
18. Наћи геометриско место центара кругова једнаких полупречника који у пресеку са датом правом граде тетиве исте дужине.

19. Два круга имају полупречнике 5 *cm* и 2 *cm*. Одредити границе њиховог централног растојања за сваки од могућих положаја та два круга.

20. Наћи геометриско место центара кругова једнаких полупречника који 1) додирују споља дати круг, 2) додирују изнутра дати круг и 3) у пресеку са датим кругом чине заједничке тетиве исте дужине.

21. Дата су два круга од којих један лежи у другом. Нацртати највећи и најмањи круг који додирује оба дата круга.

22. Тангента из спољне тачке на круг може се и овако конструисати (сл. 90). Полупречником OA нацртати круг са центром у тачки A. Затим нацртати круг концентричан са датим кругом, само са двапут већим полупречником. Пресечне тачке тих кругова нека су P и Q. Симетрале дужи OP и OQ су тада тражене тангенте. Доказати тачност конструкције.



Слика 90

23. Доказати да су отсечци тетиве између два концентрична круга једнаки.

24. Израчунати перифериски угао чији захваћени лук износи $^3/_5$ обима круга.

25. Који је део круга лук захваћен периферискиm углом од 15^0?

26. Угао између тангенте и тетиве, која дели круг на два лука, износи 30^0? Колико пута се мањи лук садржи у већем?

27. Угао између две тангенте повучене из спољне тачке на круг износи 45^0. Колико лучних степена имају лукови на које додирне тачке деле круг?

28. У једном тетивном четвороуглу два угла на једној страни износе 152^0 и 134^0. Колики су остали углови?

29. Доказати да симетрале унутрашњих углова четвороугла чине тетивни четвороугао.

30. У тангентном четвороуглу три узастопне стране износе: $5\,cm$, $9\,cm$, $15\,cm$. Колика је четврта страна?

31. Угао чије је теме у кругу има 39^0. Лук између продужења његових кракова има 17 лучних степена. Колико лучних степена има лук захваћен датим углом?

32. Ако у тетивном многоуглу са парним бројем страна означимо по реду углове са α_1, α_2, α_3, ..., онда је

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots$$

Доказати.

33. Ако се у тангентном многоуглу са парним бројем страна означе по реду стране са a_1, a_2, a_3, ..., онда је

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$$

Доказати.

34. Доказати да су висине троугла симетрале углова у троуглу чија су темена у подножјима тих висина.

35. Доказати да се симетрала унутрашњег угла у троуглу и симетрале спољашњих углова код остала два темена секу у једној тачки подједнако удаљеној од све три троуглове стране (центар споља уписаног круга).

36. У који се трапез може уписати круг? Зашто?

37. У који се паралелограм може уписати круг? Зашто?

38. Око којег трапеза се може описати круг? Зашто?

39. Конструисати круг који пролази кроз две тачке и чији се центар налази на датој правој.

40. Конструисати круг који пролази кроз дату тачку и додирује дату праву у датој тачки.

41. Из тачке ван круга повући секанту датог круга тако, да тетива коју на њој исеца круг има дату дужину.

42. Конструисати круг који додирује дати круг и дату праву у датој тачки.

43. Конструисати круг датог полупречника који додирује дати круг и дату праву.

44. Конструисати круг који додирује дату праву и дати круг у датој тачки.

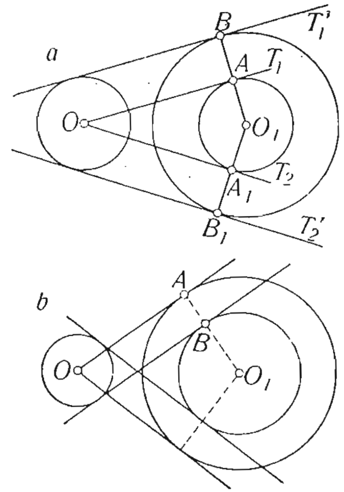
45. Тачке A и B су темена два прамена правих. Наћи геометриско место пресечних тачака нормалних полуправих прамена.

46. Одредити у троуглу тачку из које се свака страна види под истим углом.

47. Конструисати заједничку тангенту два круга.

Упут. Означимо полупречнике датих кругова са центрима у O и O_1 са r и R (сл. 91, a). За конструисање спољашњих тангената око тачке O_1 као центра нацрта се помоћни круг полупречника $R—r$. На тај помоћни круг повуку се тангенте T_1 и T_2 из тачке O чије су додирне тачке A и A_1. Полупречници тих тачака, продужени, одређују додирне тачке B и B_1 заједничких спољашњих тангената на већем кругу. Праве T'_1 и T'_2, паралелне са T_1 и T_2 кроз B и B_1, су тражене спољашње тангенте.

За унутрашње тангенте (сл. 91, b) црта се помоћни круг полупречника $R + r$, иначе понавља претходна конструкција.



Слика 91

48. Дате су две тачке у равни. Повући праву тако, да растојања тих тачака од праве имају унапред дате дужине.

49. Показати да два круга могу 1) немати ниједне заједничке тангенте, 2) имати само једну, 3) две, 4) три и 5) четири заједничке тангенте.

50. Ако се на два круга, који се додирују споља у тачки A, повуче заједничка тангента са додирним тачкама B и C, онда је угао BAC прав. Доказати.

51. Конструисати троугао помоћу стране, супротног угла и висине која одговара датој страни.

52. Конструисати троугао помоћу стране, супротног угла и тежишне линије која одговара датој страни.

53. Конструисати равнокраки троугао, кад је дата основица и угао при врху.

54. Конструисати троугао помоћу два угла и полупречника описаног круга.

55. Конструисати троугао помоћу два угла и полупречника уписаног круга.

56. Конструисати троугао помоћу стране, супротног угла и збира (или разлике) остале две стране.

57. Конструисати троугао помоћу стране и две тежишне линије повучене од крајева дате стране.

58. Конструисати троугао, кад је дата страна, полупречник описаног круга и пресечна тачка дате стране и симетрале супротног угла.

59. Доказати 1) да је сваки уписани равнострани многоугао правилан, и 2) да је сваки уписани многоугао са једнаким угловима правилан, ако је број страна непаран, а може бити и неправилан (разностран), кад је број страна паран.

60. Доказати 1) да је сваки описани многоугао са једнаким угловима правилан и 2) да је сваки описани равнострани многоугао правилан, ако је број страна непаран, иначе може бити и неправилан (са неједнаким угловима), кад је број страна паран.

61. Доказати да је тангентни многоугао са странама, које су паралелне странама тетивног правилног многоугла истог круга, правилан.

62. Доказати да је спољашњи угао код сваког правилног многоугла једнак његовом централном углу.

63. Колико страна има правилни многоугао чија четири угла износе $7d$?

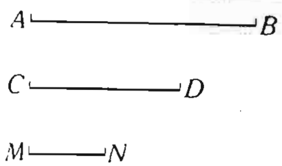
64. Доказати да дијагонале правилног петоугла чине нов правилни петоугао.

ГЛАВА VII

СЛИЧНОСТ

§ 36. Мерење величина

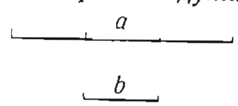
За упоређивање две дужи потребно је наћи њихову *заједничку меру,* тј. дуж која се садржи *цео* број пута (без остатка) у обе дужи. Ако се дуж MN садржи у дужи AB три пута, а у дужи CD два пута, она је заједничка мера тих дужи (сл. 92). Кад две дужи имају заједничку меру, оне имају више заједничких мера, јер ако поделимо заједничку меру на више једнаких делова, сваки такав део је такође заједничка мера тих дужи. Од свих заједничких мера једна је највећа — она се зове *највећа заједничка мера.*



Слика 92

Теорема 87. *Кад се мања од две дужи садржи цео број пута у већој, онда је она највећа заједничка мера тих дужи.*

Заиста, ако се дуж b (сл. 93) садржи тачно три пута без остатака у дужи a, онда је она заједничка мера. Са друге стране, она мора бити највећа заједничка мера, јер не постоји дуж већа од b која би се садржавала у b.



Слика 93

Ако се мања дуж не садржи цео број пута у већој, одређивање највеће заједничке мере тих дужи врши се тада на овај начин.

Теорема 88. *Ако се мања дуж (b) садржи у већој (a) са остатком (r), највећа заједничка мера тих дужи (a и b) је једнака са највећом заједничком мером мање дужи и остатка (b и r).*

Кад се са n означи цео број пута колико је мања дуж одмерена на већој, онда се може написати

$$a = nb + r\,,$$

на пр.

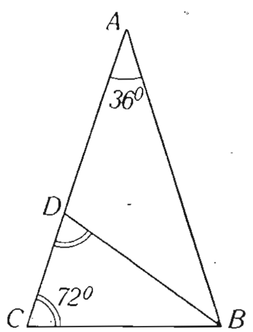
$$34\,cm = 5 \cdot 6\,cm + 4\,cm\,.$$

Из ове једнакости је јасно, да су све заједничке мере дужи a и b ($34\,cm$ и $6\,cm$) истовремено и заједничке мере дужи b и r ($6\,cm$ и $4\,cm$) и обрнуто. Та два пара дужи, према томе, имају заједничку и највећу меру.

Према овој теореми одређивање највеће заједничке мере две дужи своди се на одређивање такве мере за мању дуж и остатак. Ако се сад тај остатак садржи у мањој дужи цео број пута, онда је он тражена највећа заједничка мера за две дате дужи. Кад се остатак не садржи у мањој дужи цео број пута потпуно, него се добија нов остатак r_1, онда се цео поступак понавља. Овај поступак тражења највеће заједничке мере зове се *Еуклидов поступак.*

Продужењем овог поступка могу се догодити два случаја: 1) На крају ћемо добити последњи остатак који ће се садржати цео број пута потпуно у претходном остатку. Тај последњи остатак је највећа заједничка мера две дате дужи од којих смо пошли. 2) Ма колико продужили одмеравање (у мислима, јер практички се не може радити са сувише малим дужима) никако се не добија највећа заједничка мера. Дужи тада уопште немају заједничке мере.

Кад две дужи (или неке друге величине) имају заједничку меру, зову се *самерљиве*, а кад немају, оне су *несамерљиве*.



Слика 94

Може се наравно тражити заједничка мера и за више од две дужи.

Показаћемо, да несамерљиве дужи заиста постоје.

Теорема 89. *У равнокраком троуглу са углом од 36° при врху крак и основица су несамерљиви.*

Нека је у равнокраком троуглу ABC (сл. 94) $\sphericalangle A = 36^0$. Доказати да су крак $AB = AC = b$ и основица $BC = a$ несамерљиви.

Углови на основици су: $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72^0$. Ако се повуче симетрала, на пр. угла B, она сече крак AC у тачки D. Тада су троуглови ABD и BCD равнокраки тако, да је $BC = BD = DA = a$. Другим речима, ако се CD означи са r, имамо

$$b = a + r\,,$$

тј. одмеравањем основице на краку b остаје остатак r. Ако сад даље потражимо заједничку меру за a и остатак r, онда преношењем r на a опет мора остати неки остатак. $\triangle BCD$ је исто, као претходни, равнокрак са углом од 36° при врху. Ма докле наставили одмеравање нећемо доћи до заједничке мере и према томе су крак и основица нашег троугла несамерљиви.

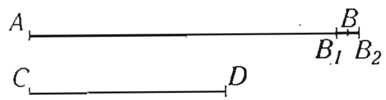
На овај начин може се говорити о мерењу једне дужине (важи и за друге величине) другом која се узима за *јединицу*.

1. *Измерити дужину самерљиву са јединицом значи одредити колико се пута у тој дужини садржи јединица или неки њен део који је заједничка мера.*

Ако је дужина b самерљива са јединицом a, и само a је заједничка мера и садржи се k пута у b, може се написати $b = ka$. Кад је заједничка мера за дужине b и a неки q-ти део дужине a и нека се он садржи p пута у b, онда се може написати $b = \frac{p}{q}\,a$. У првом случају цео број k, а у другом разломак $\frac{p}{q}$ са именовањем јединице a (на пр. $7\,cm$ или $\frac{3}{4}cm$) зову се *мерни бројеви* дужине b. Сами бројеви k и $\frac{p}{q}$ без именовања су *бројне вредности* мерних бројева.

Пошто су и цели и разломљени бројеви *рационални*, то је резултат мерења дужине самерљиве са јединицом увек рационални мерни број.

2. Нека је дужина $b = AB$ (сл. 95) несамерљива са јединицом $a = CD$. Тада се уместо дужине b може мерити или дужина $b_1 = AB_1$ или дужина $b_2 = AB_2$, од којих је једна мања од b, а друга већа, тј.



Слика 95

$$b_1 < b < b_2\,.$$

Дужине b_1 и b_2 могу се тако изабрати, да разлика $b_2 - b_1$ буде унапред позната и колико хоћемо мала. То значи да се b_1 (или b_2) колико желимо мало разликује од b. Ако, на пр., желимо да та разлика не буде већа од $\frac{1}{10}\,a$, узећемо тај део јединице a и пренети га на b. Ако се може на b пренети 16 пута, а не може 17 пута, онда је $b_1 = \frac{16}{10}\,a = 1{,}6\,a$ и $b_2 = 1{,}7\,a$. Према томе је

$$1{,}6\,a < b < 1{,}7\,a.$$

$1{,}6\,a$ и $1{,}7\,a$ су два *приближна мерна броја* дужине b и то први $(1{,}6\,a)$ *приближно мањи*, а други $(1{,}7\,a)$ *приближно већи*, а сваки са тачношћу до 0,1 јединице a.

Кад желимо, да дужину b измеримо већом тачношћу, на пр. до $0{,}01\,a$, онда треба поделити јединицу a на 100 једнаких делова. Ако се тај део наше јединице може пренети, на пр., 165 пута, а не може 166 пута, онда ћемо добити:

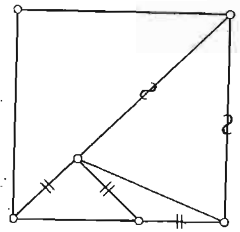
$$1{,}65\,a < b < 1{,}66\,a\,.$$

Уопште, ако се јединица подели на n једнаких делова и тај део стане m пута у b, а не може да стане $m+1$ пута, онда је

$$\frac{m}{n}a < b < \frac{m+1}{n}a$$

$\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ су две приближне бројне вредности мерних бројева који изражавају дужину b приближно са тачношћу до $\frac{1}{n}$ дужине јединице a, прва мања, друга већа.

За одређивање *тачног* мерног броја дужине b, несамерљиве са a, требало би поступак мерења дужине b све мањим и мањим деловима дужине a наставити без краја. Бројна вредност тачног мерног броја тежиће децималном разломку са бескрајно много цифара. Тај децимални разломак не може бити периодичан, јер би се могао претворити у обичан и дужине биле самерљиве. Непериодичан децимални разломак са бескрајно много цифара одређује број који се зове *ирационалан*. Тачна вредност мерног броја величине несамерљиве са јединицом изражава се ирационалним бројем.



Слика 96

Вежбања

1. Доказати самерљивост хипотенузе и мање катете правоуглог троугла са углом од 30°.
2. Доказати (сл. 96) несамерљивост дијагонале и стране квадрата.

§ 37. Размере и сразмере. Пропорционалне величине

Размера или *однос* две истоимене величине је бројна вредност једне величине, кад је друга узета за јединицу. То је *неименовани* или *апстрактни* број.

Кад су две дужи a и b самерљиве са заједничком мером c, па је $a = mc$ и $b = nc$, где су m и n цели бројеви, тада је $a = m\cdot\frac{b}{n} = \frac{m}{n}b$, па је према томе размера тих величина $\frac{m}{n}$.

Одавде се види, да се бројна вредност размере дужи a према дужи b може добити деобом мерних бројева a и b и стога се размера тих дужи може овако означити:

$$a:b \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}\,.$$

Величине a и b су *чланови* размере и то a је *први*, а b *други* члан. Размера је једнака *количнику* бројних вредности мерних бројева. Ако су дужи a и b несамерљиве, тачна вредност њихове размере је ирационални број.

Размера a према b има све особине количника. Кад је $\frac{a}{b} = k$, онда је

$$a = kb,\quad b = \frac{a}{k},\quad \frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{\left(\frac{a}{p}\right)}{\left(\frac{b}{p}\right)}.$$

Објаснити речима те особине.

Размере $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, које имају исте чланове само им је ред промењен, зову се *обрнуте* једна другој. Њихов производ је једнак јединици, јер је $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$.

Две једнаке размере везане знаком једнакости чине *сразмеру* или *пропорцију*.

Две размере се сматрају као једнаке, ако имају једнаке бројне вредности. При томе чланови обе размере могу бити именовани или апстрактни бројеви. На пр., пошто је

$$\frac{10m}{5m} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{8cm}{4cm} = 2\,,$$

то је $\frac{10m}{5m} = \frac{8cm}{4cm}$; и уопште, ако је $a:b=k$ и $c:d=k$, тада је

$$a:b=c:d \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

сразмера или пропорција. Свака пропорција има четири члана. Први (a) и четврти (d) зову се *крајњи* или *спољашњи* чланови, а други (b) и трећи (c) су *средњи* или *унутрашњи*. Последњи члан d зове се и *четврта пропорционала*.

Теорема 90. *Производ крајњих чланова пропорције једнак је производу средњих.*

Ако је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, па леву и десну страну ове једнакости помножимо са bd, добићемо

$$ad=bc,$$

што је требало доказати.

Последица. Ако су у једној пропорцији позната три ма која члана, непознати четврти члан је потпуно одређен.

Наиме, изједначењем производа крајњих и средњих чланова добија се једначина по непознатом члану.

Теорема 91. (Обрнута теореми 90). *Ако је производ нека два броја једнак производу друга два броја, од та четири броја може се начинити пропорција узимајући за крајње чланове чиниоце једног производа, а за средње — чиниоце другог производа.*

Нека је дата једнакост $pq=rs$. Саставимо производе од два броја (узимајући један чинилац из једног производа, а други из другог): pr, ps, qr, qs. Поделимо сваким од тих производа дату једнакост, па ћемо добити четири пропорције:

$$\frac{q}{r}=\frac{s}{p}, \quad \frac{q}{s}=\frac{r}{p}, \quad \frac{p}{r}=\frac{s}{q}, \quad \frac{p}{s}=\frac{r}{q}.$$

То су тражене пропорције. На пр., из једнакости $3a=5b$ следују пропорције: $a:b=5:3$, $a:5=b:3$ итд.

Последица. У свакој се пропорцији могу променити места средњих чланова међу собом, крајњих чланова међу собом, или се ставити крајњи чланови на место средњих и обрнуто.

Такве размене места не мењају производ крајњих и средњих чланова.

Пропорција чији су средњи (или крајњи) чланови једнаки зове се *непрекидна*. На пр., $24:12=12:6$ или $a:x=x:b$. Члан непрекидне пропорције, који се понавља, зове се *средња пропорционала* или *геометриска средина* она друга два члана. Последњи члан непрекидне пропорције (b) зове се и *трећа пропорционала* за остала два (a и x).

Како из пропорције $a:x=x:b$ следује: $x^2=ab$ и $x=\sqrt{ab}$, може се казати:

Геометриска средина два броја једнака је квадратном корену из производа тих бројева.

Низ једнаких размера са бројном вредношћу κ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\kappa$$

чине *продужену пропорцију*. Може се написати и

$$a_1=\kappa b_1,\ a_2=\kappa b_2,\ a_3=\kappa b_3,\ldots$$

одакле се сабирањем добија

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\kappa(b_1+b_2+b_3+\cdots)$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}=\kappa.$$

Према томе наша продужена пропорција се може допунити и написати

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}.$$

Речима изражен овај резултат даје ову теорему.

Теорема 92. *У продуженој пропорцији збир првих чланова свих размера односи се према збиру других чланова као сваки први члан према свом другом.*

Нека ма којим вредностима x_1 и x_2 величине x увек одговарају вредности y_1 и y_2 величине y тако, да важи пропорција

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_1}{x_2} \quad \text{или} \quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2},$$

онда се за такве величине каже, да су *директно пропорционалне* или само *пропорционалне*. (Навести примере пропорционалних величина). Ако се стави

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\kappa$$

може се написати $y_1=\kappa x_1$, $y_1=\kappa x_2,\ldots$ или уопште $y=\kappa x$. Коефицијенат κ се зове *фактор пропорционалности.* Кад се једна од пропорционалних величина (x) повећа или смањи одређени број пута и друга величина (y) повећа се или смањи исти број пута.

У случају да је размера две ма које вредности једне величине $\frac{y_1}{y_2}$ увек једнака обрнутој размери $\frac{x_2}{x_1}$ односних вредности друге величине, тј.

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_2}{x_1} \quad \text{или} \quad \frac{y_1}{\left(\frac{1}{x_1}\right)}=\frac{y_2}{\left(\frac{1}{x_2}\right)},$$

величине су *обрнуто (индиректно) пропорционалне.* (Навести примере обрнуто пропорционалних величина). За њих се може написати $y=\frac{\kappa_1}{x}$, где је κ_1 *фактор обрнуте пропорционалности.*

Ако се једна од обрнуто пропорционалних величина (x) повећа или смањи одређени број пута, друга се величина (y) — обрнуто — смањи или повећа исти број пута.

Вежбања

1. Одредити бројне вредности размера ових дужи: $20\,m$ и $15\,m$, $9\,cm$ и $4\,cm$, $12\,m$ и $6\,cm$ (!), $\frac{3}{4}\,m$ и $\frac{1}{4}\,m$.

2. Написати неколико бројних пропорција.

3. Да ли су тачне ове пропорције: $2\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}:\frac{4}{5}$; $800:1\frac{4}{11}=$ $=14\frac{2}{3}:0{,}25$; $(a^2-b^2):(a-b)=(a+b):1$.

4. Помоћу два једнака производа $3x=5\cdot 6$ саставити пропорцију и написати је у осам различитих облика.

5. Помоћу два једнака производа $3a^2=4x$ саставити пропорцију тако да четврти члан буде:

$$3,\ a^2,\ 4,\ a,\ x,\ 1,\ 3a^2,\ \frac{3}{4}a^2,\ \frac{1}{4}a^2,\ \frac{1}{3}x,\ 2x.$$

6. Израчунати непознати члан x у пропорцијама:

$$x:5=10:50;\quad 1{,}05:1{,}5=1{,}456:x;\quad 10:\frac{1}{18}=x:1\frac{1}{4};$$

$$mp:x=(m+p):\left(1+\frac{m}{p}\right);\quad x:(x+4)=3:4.$$

7. Одредити четврту пропорционалу за 3, 5 и 9.
8. Одредити средњу пропорционалу за 2 и 72.
9. Одредити трећу пропорционалу за 4 и 7.
10. За која два цела броја је 6 средња пропорционала? (више решења).
11. Израчунати размере обрнуте размерама:

$$4:3;\quad 1{,}2:0{,}6;\quad 75:0{,}25.$$

12. Ако је $a:b=c:d$, доказати да је $(a^2+b^2):(c^2+d^2)=a^2:c^2$.
13. Да ли су бројеви у низовима

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	...
y	1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	3	6	...

пропорционални или не? У случају пропорционалности одредити коефицијенат пропорционалности.

14. Написати за бројеве 1, 2, 3, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $3\frac{4}{5}$ низ пропорционалних бројева са фактором пропорционалности 0,1.

15. Да ли су бројеви у низовима

x	1	2	3	4	5	6	8	...
y	12	6	4	3	2,4	2	1,5	...

обрнуто пропорционални или не? У случају пропорционалности одредити фактор обрнуте пропорционалности.

16. Нека је y директно пропорционално x^2, тј. $y=kx^2$ и нека је $y=18$, кад је $x=3$. Одредити y, кад је $x=4$.

17. У неком троуглу важи за углове продужена пропорција: $\alpha:1=\beta:2=\gamma:3$. Наћи те углове.

18. У неком четвороуглу важи за углове продужена пропорција: $\alpha:2=\beta:3=\gamma:4=\delta:7$. Израчунати те углове.

19. Нека је на некој земљописној карти свака дужина смањена у размери 1 : 100 000. Колико је онда стварно растојање између два места чије растојање на карти износи $7{,}6\,cm$.

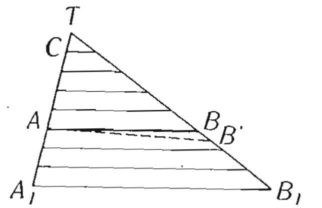
§ 38. Сличност троуглова и многоуглова

Кад два троугла или уопште два многоугла имају једнаке и једнако распоређене углове, онда се за стране, које спајају темена једнаких углова, каже да су *одговарајуће* или *хомологне*.

Два троугла су *слични*, ако имају једнаке углове и хомологне стране пропорционалне.

Теорема 93. *Ако кракове угла пресечемо са две паралелне трансверзале, добијају се два слична троугла.*

Нека је $AB \parallel A_1B_1$ (сл. 97). Доказати да су троуглови TAB и TA_1B_1 слични, тј. да су њихови углови једнаки и стране пропорционалне.



Слика 97

Углови тих троуглова једнаки су, јер је $\sphericalangle T$ заједнички, а остали су једнаки као сагласни. За доказ пропорционалности страна уочимо два случаја.

1. Дужи TA и TA_1 су самерљиве. Нека се заједничка мере TC садржи p пута у TA (на слици 5 пута), а q пута у TA_1 (на слици 8 пута). Тада је

$$\frac{TA}{TA_1}=\frac{p}{q}\left(=\frac{5}{8}\right).$$

Ако се кроз деоне тачке крака TA_1 повуку паралелне праве са трансверзалама, оне ће поделити други крак TB_1 на исти толики број једнаких делова по теореми 53. Тако ће се добити

$$\frac{TB}{TB_1}=\frac{p}{q}\left(=\frac{5}{8}\right).$$

На сличан начин, ако се кроз деоне тачке на TA_1 повуку паралеле са TB_1, оне ће делити AB на p једнаких делова, а A_1B_1 на q истих таквих једнаких делова. Према томе је и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{p}{q}\left(=\frac{5}{8}\right),$$

$$\frac{CA}{AA_1} = \frac{CB}{BB_1}$$

одакле

$$\frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \frac{AB}{A_1B_1},$$

што је требало доказати.

2. Кад су дужи TA и TA_1 несамерљиве, може се израчунати приближна вредност размере $TA:TA_1$ са тачношћу до $\frac{1}{n}$. У том циљу поделимо TA_1 на n једнаких делова и нека се тај део у TA садржи m пута, а не садржи $m+1$ пут. Тада је приближна вредност наше размере $TA:TA_1 \approx \frac{m}{n}$. Ако се опет кроз деоне тачке повуку паралеле трансверзалама, оне ће поделити TB_1 на n једнаких делова. Тај ће се део у TB садржати m пута, али не $m+1$ пут, па је према томе $TB : TB_1 \approx \frac{m}{n}$. Исто тако добићемо да је и $AB:A_1B_1 \approx \frac{m}{n}$. Пошто се бројне вредности наших размера могу израчунати са коликом год желимо тачношћу, а те вредности су увек једнаке, то су и наше размере једнаке, тј.

$$\frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Тиме смо доказали постављену теорему.

За означавање сличности употребљује се ознака $\sim$. Према томе се може написати: $\triangle TAB \sim \triangle TA_1B_1$.

Теорема 94. (Обрнута теореми 93). *Ако две праве секу кракове угла тако да се добију два слична троугла, онда те праве морају бити паралелне.*

Узмимо да дате праве AB' и A_1B_1 (сл. 97) нису паралелне. Кроз тачку A повуче се $AB \parallel A_1B_1$. Тада, како је $\triangle TAB' \sim \triangle TA_1B_1$, мора бити $TA_1:TA = TB_1:TB'$. Са друге стране пошто је $AB \parallel A_1B_1$, мора по теореми 93 бити и $TA_1:TA = TB_1:TB$. Упоређивањем ове две пропорције добија се $TB' = TB$, а то значи да је права AB' идентична са

правом AB која је паралелна са A_1B_1. То је требало доказати.

Теорема 95. *Два троугла су слични,*

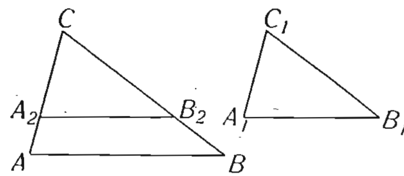
1) ако имају по два угла једнака;

2) ако су две стране једног пропорционалне хомологним странама другог, а од њих захваћени углови једнаки;

3) ако су им све стране пропорционалне;

4) ако су две стране једног пропорционалне хомологним странама другог, углови насрам једног пара ових страна једнаки, а према оном другом пару оба оштри, или оба прави, или оба тупи.

1. Нека су CAB и $C_1A_1B_1$ (сл. 98) два троугла, код којих је: $\measuredangle A = \measuredangle A_1$ и $\measuredangle B = \measuredangle B_1$. Тада је и $\measuredangle C = \measuredangle C_1$ (зашто?). Да бисмо доказали сличност ових троуглова остаје да се докаже још само пропорционалност страна. За то одмеримо од тачке C на CA дуж $CA_2 = C_1A_1$, па из тачке A_2 повучемо $A_2B_2 \parallel AB$. На основу теореме 93 мора бити $\triangle CA_2B_2 \sim \triangle CAB$, а како су троуглови $C_1A_1B_1$ и CA_2B_2 по правилу [УСУ] подударни, мора бити и $\triangle C_1A_1B_1 \sim \triangle CAB$.



Слика 98

2. Нека је у троугловима CAB и $C_1A_1B_1$: $CA:C_1A_1 = CB:C_1B_1$ и $\measuredangle C = \measuredangle C_1$. Опет одмеримо од тачке C на CA дуж $CA_2 = C_1A_1$ и повучемо $A_2B_2 \parallel AB$. Тада је по теореми 93 $\triangle CAB \sim \triangle CA_2B_2$, одакле $CA : CA_2 = CB : CB_2$. Како је $CA_2 = C_1A_1$, то ова пропорција има са датом пропорцијом три прва члана једнака, па су према томе једнаки и четврти чланови, тј. $CB_2 = C_1B_1$. У том случају су троуглови CA_2B_2 и $C_1A_1B_1$ по правилу [СУС] подударни, па је $\triangle C_1A_1B_1 \sim \triangle CAB$.

3. Нека су сад код троуглова CAB и $C_1A_1B_1$ све стране пропорционалне: $CA:C_1A_1 = AB:A_1B_1 = BC:B_1C_1$. Одмеримо, као и досад, $CA_2 = C_1A_1$ и повуцимо $A_2B_2 \parallel AB$. Тада је $\triangle CA_2B_2 \sim \triangle CAB$, одакле: $CA:CA_2 = AB:A_2B_2 = BC:B_2C$. Ако се сад упореде за себе пропорције $CA:C_1A_1 = AB:A_1B_1$ и $CA:CA_2 = AB:A_2B_2$, онда се узев у обзир $CA_2 = C_1A_1$ добија $A_1B_1 = A_2B_2$. На исти начин се упоређивањем пропорција $CA:C_1A_1 = BC:B_1C_1$ и $CA:CA_2 = BC:B_2C$ добија $B_1C_1 = B_2C$. Према томе су троуглови $C_1A_1B_1$ и CA_2B_2 подударни по правилу [ССС], па је $\triangle C_1A_1B_1 \sim \triangle CAB$.

4. Нека је, најзад, код троуглова CAB и $C_1A_1B_1$:

$CA : C_1A_1 = AB : A_1B_1$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$, а за углове $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B_1$ знамо, да су оба или оштри, или прави, или тупи. Одмеримо, као увек $CA_2 = C_1A_1$ и повучемо $A_2B_2 \parallel AB$. Тада из сличности добијених троуглова следује: $CA : CA_2 = AB : A_2B_2$. Кад се ова пропорција упореди са датом, онда се добија $A_1B_1 = A_2B_2$ и према томе $\triangle CA_2B_2 \cong \triangle C_1A_1B_1$ по правилу [ССУ]. Међутим, како је $\triangle CA_2B_2 \sim \triangle CAB$, мора бити и $\triangle C_1A_1B_1 \sim \triangle CAB$.

Последица. Два правоугла троугла су слични,

1) ако имају по један оштри угао једнак,

2) ако су две ма које стране (катете или катета и хипотенуза) једног пропорционалне хомологним странама другог.

Може се врло лако доказати да су код сличних троуглова све одговарајуће дужине (на пр., висине, тежишне линије, полупречници описаних и уписаних кругова итд.) пропорционалне странама. На пр.,

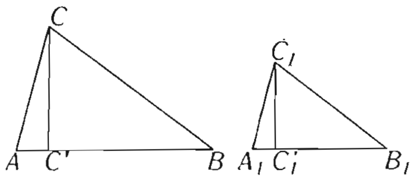
Теорема 96. *У сличним троугловима хомологне висине пропорционалне су хомологним странама.*

Нека су у сличним троугловима ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 99) хомологне висине CC' и C_1C_1'. Како је $\triangle ACC' \sim \triangle A_1C_1C_1'$, као правоугли са једнаким оштрим угловима $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, то је

$$CC' : C_1C'_1 = CA : C_1A_1 =$$

$$= AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 ,$$

што је требало доказати.



Слика 99

Теорема 97. *Ако се две праве пресеку са три паралелне трансверзале, онда су отсечци између паралелних на једној правој пропорционални одговарајућим отсечцима на другој правој.*

Нека су A, B, C (сл. 100, *a*) пресечне тачке трансверзала на једној правој и A_1, B_1, C_1 на другој правој. Доказати да је

$$AB : BC = A_1B_1 ; B_1C_1.$$

Кроз тачке A_1 и B_1 повуче се $A_1B_2 \parallel AC$ и $B_1C_2 \parallel AC$. Тада је $\triangle A_1B_1B_2 \sim \triangle B_1C_1C_2$ (зашто?), одакле је $A_1B_2 : B_1C_2 = A_1B_1 : B_1C_1$.

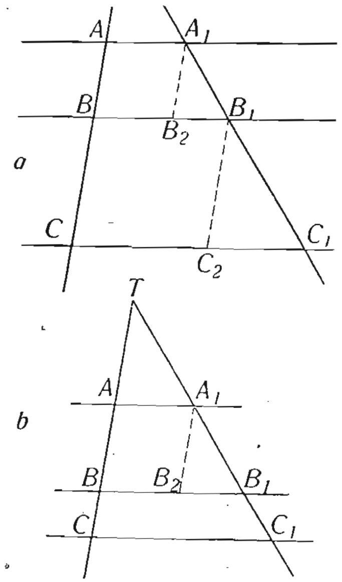
Али, како је $A_1B_2 = AB$ и $B_1C_2 = BC$ као супротне стране паралелограма, добија се најзад после замене

$$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1,$$

што је требало доказати.

Последица. Паралелне праве отсецају на краковима угла пропорционалне дужи.

На слици 100, *b* види се да је $\triangle TAA_1 \sim \triangle A_1B_2B_1$, па је с обзиром на претходну теорему $TA : TA_1 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$.



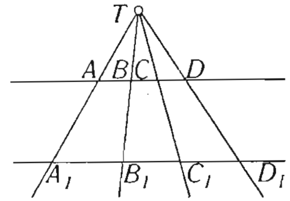
Слика 100

Теорема 98. *Кад се прамен полуправих пресече са две паралелне трансверзале, онда су отсечци између тих полуправих на једној трансверзали пропорционални одговарајућим отсечцима на другој и одговарајућим отсечцима на свакој полуправој, рачунатим од темена.*

Нека је T теме прамена и тачке A, B, $C, \ldots$ и A_1, B_1, $C_1, \ldots$ (сл. 101) пресечне тачке једне и друге трансверзале са полуправима прамена. Доказати да је

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \cdots =$$

$$= \frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1} = \cdots$$



Слика 101

Из сличности троугла TAB и TA_1B_1 имамо пропорције $TA : TA_1 = TB : TB_1$ и $AB : A_1B_1 = TB : TB_1$, а из сличности троуглова TBC и TB_1C_1 пропорцију $BC : B_1C_1 = TB : TB_1$. Према томе је

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{TA}{TA_1} = \frac{TB}{TB_1}.$$

Исто овако се може одмах показати да је

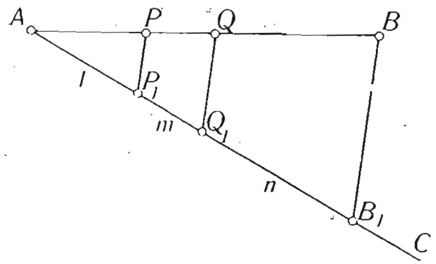
$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \text{итд.},$$

одакле

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\cdots=\frac{TA}{TA_1}=\frac{TB}{TB_1}=\cdots,$$

што је требало доказати.

Помоћу доказаних теорема може се решити овај конструктивни задатак:



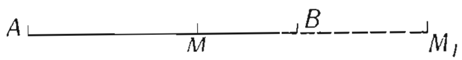
Слика 102

Поделити дату дуж на делове пропорционалне датим дужима (или бројевима).

Нека је дата дуж $AB=a$ (сл. 102) па треба да се подели, на пр., на три дела пропорционална датим дужима l, m и n.

Из једног краја A дате дужи повуче се ма која полуправа AC и на њој од тачке A одмере дужине $AP_1=l$, $P_1Q_1=m$ и $Q_1B_1=n$. Затим се крај B_1 последње дужи споји са крајем B дате дужи AB. Кроз тачке P_1 и Q_1 повуку се праве P_1P и Q_1Q паралелне са B_1B. Добијене тачке P и Q деле дату дуж AB на делове у траженом односу. Доказати.

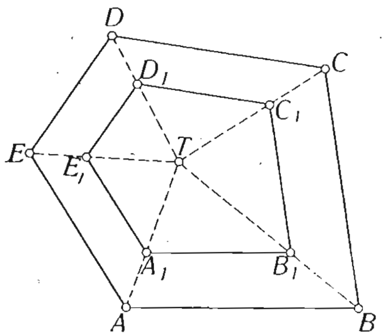
Ако се на датој дужи AB (сл. 103) узме нека тачка M, онда се каже, да је учињена *унутрашња* подела дужи AB у размери $MA:MB$. Ако се узме тачка M_1 на продужењу дужи AB, на пр., преко B, онда је учињена *спољашња* подела те дужи у размери $M_1A:M_1B$. Кад се нарочито не нагласи, онда се увек, кад је реч о подели дужи на два дела, мисли на унутрашњу поделу.



Слика 103

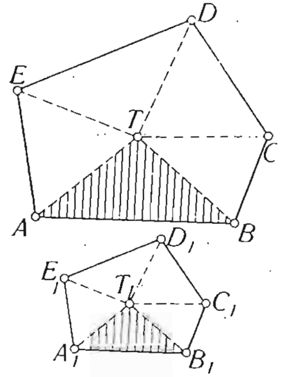
Два многоугла са истим бројем страна слични су, ако су им углови једнаки и једнако распоређени и хомологне стране пропорционалне. Тако су, на пр., многоуглови $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 104) слични, јер су им углови једнаки, као углови са паралелним краковима. Осим тога и стране су пропорционалне:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\cdots=\frac{TA}{TA_1}.$$



Слика 104

Теорема 99. *Слични многоуглови се увек могу раставити на исти број по два и два слична и једнако распоређена троугла.*



Слика 105

Дата су два слична многоугла $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (сл. 105). Узмимо у првом многоуглу ма где тачку T и спојимо је са теменима нашег многоугла. На тај начин смо многоугао $ABCDE$ раставили на пет троуглова. У другом многоуглу код стране A_1B_1 нацртамо $\triangle A_1B_1T_1 \backsim \triangle ABT$. За то је довољно конструисати углове $\sphericalangle T_1A_1B_1$ и $T_1B_1A_1$ једнаке угловима TAB и TBA. Спојимо сад тачку T_1 са осталим теменима многоугла и покажимо да су добијени троуглови са теменима у T_1 слични троугловима са теменима у T. Узмимо два троугла BTC и $B_1T_1C_1$. $\sphericalangle TBC = \sphericalangle T_1B_1C_1$ као остаци од једнаких и подједнако смањених углова многоугла. Из сличности многоуглова следује $BC:B_1C_1 = AB:A_1B_1$, а из сличности троуглова ABT и $A_1B_1T_1$ добија се $BT:B_1T_1 = AB:A_1B_1$. Према томе је $BC:B_1C_1 = BT:B_1T_1$, тј. стране, које захватају једнаке углове, пропорционалне су. Дакле, $\triangle BTC \backsim \triangle B_1T_1C_1$. На исти начин се може доказати и сличност осталих троуглова.

Теорема 100. (Обрнута теорема 99). *Два многоугла, састављена од истог броја по два и два слична и једнако распоређена троугла слични су.*

Из сличности троуглова (сл. 105) непосредно следује једнакост одговарајућих углова тих троуглова, а према томе и углова многоуглова.

Осим тога стране сличних троуглова су пропорционалне, па мора бити

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BT}{B_1T_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CT}{C_1T_1}=\cdots$$

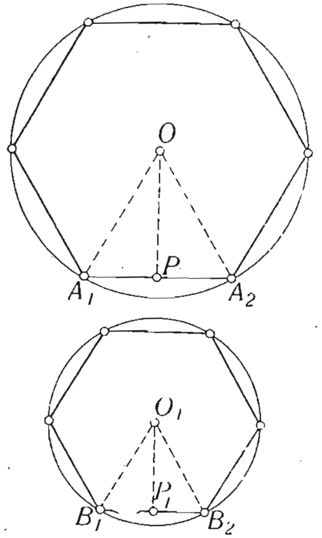
тј.

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\cdots,$$

а тиме смо доказали сличност наших многоуглова.

Теорема 101. *Сви правилни многоуглови са истим бројем страна слични су и њихове стране су пропорционалне са полупречницима описаног и уписаног круга.*

Нека су дата два правилна многоугла са истим бројем страна (сл. 106) и нека су $OA_1 = OA_2 = R$ и $O_1B_1 = O_1B_2 = R_1$ полупречници описаних кругова, а $OP = r$ и $O_1P_1 = r_1$ полупречници уписаних кругова. Пошто су ови многоуглови састављени од истог броја сличних троуглова (теорема 100), они су слични. Како је $\triangle A_1A_2O \backsim \triangle B_1B_2O_1$, имамо



Слика 106

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{R}{R_1} = \frac{r}{r_1},$$

а то је требало доказати у другом делу теореме.

Теорема 102. *Обими сличних многоуглова пропорционални су хомологним странама.*

Означимо стране једног многоугла са $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, а другог са $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Пошто су многоуглови слични, стране су пропорционалне, тј.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Из ове продужене пропорције према теореми 92 може се написати

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n} = \frac{a_1}{b_1},$$

што доказује нашу теорему.

Последица. Обими правилних многоуглова са истим бројем страна односе се као њихове стране, или полупречници описаних кругова, или полупречници уписаних кругова.

Вежбања

1. Изразити правила о сличности равнокраких троуглова.
2. Зашто су сви равнокрако правоугли троуглови увек слични?
3. Изразити правило за сличност правоугаоника.
4. „ „ „ „ паралелограма.
5. „ „ „ „ ромбова.
6. „ правила „ „ трапеза, а нарочито равнокраких.
7. „ правило „ „ делтоида.
8. Дат је троугао са странама $20 cm$, $15 cm$, $10 cm$. Одредити стране и обим сличног троугла, кад је страна, која одговара првој страни, једнака $7 m$.
9. Одредити стране троугла сличног троуглу са странама $12 m$, $13 m$, $10 m$ тако, да нови троугао има обим $7 cm$.
10. Нацртати два четвороугла са једнаким угловима који нису слични.
11. Нацртати два четвороугла са пропорционалним странама који нису слични.
12. Доказати да дијагонале из одговарајућих темена деле два слична многоугла на сличне троуглове.
13. Доказати да су два троугла слична, ако су стране једног паралелне странама другог или нормалне на странама другог.

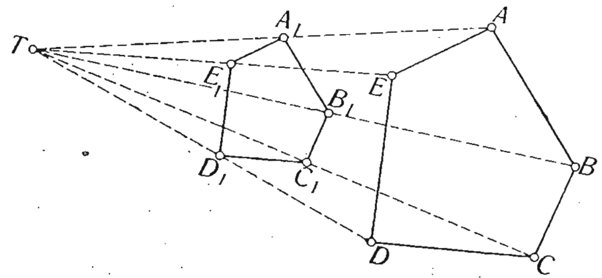
14. Дату дуж $MN = 12 cm$ поделити на два дела пропорционална датим дужима од $4 cm$ и $2 cm$.
15. Три непаралелне праве, које на двема паралелним правима отсецају пропорционалне отсечке, секу се у једној тачки. Доказати.
16. Доказати да се продужени кракови трапеза и права која пролази кроз средине паралелних страна секу у једној тачки.
17. У троуглу ABC наћи средину стране AB, кад су темена A и B неприступачна.
18. Кад се споје средине страна неког троугла, добија се троугао чије се тежиште поклапа са тежиштем првобитног троугла. Доказати.
19. Одредити висину стуба, кад му сенка мери $5{,}6 m$, а истовремено сенка неког вертикалног штапа познате дужине $1{,}5 m$ мери $37{,}5 cm$.

§ 39. Хомотетичне слике

Узмимо ма који многоугао, на пр. петоугао $ABCDE$ (сл. 107) и тачку T ма где у равни тог многоугла. Спојимо ту тачку T са теменима датог многоугла и на свакој од добијених правих одмеримо пропорционалне дужи од T тако, да је

$$\frac{TA_1}{TA} = \frac{TB_1}{TB} = \frac{TC_1}{TC} = \frac{TD_1}{TD} = \frac{TE_1}{TE}.$$

Кад се тачке $A_1, B_1, \ldots$ споје добиће се многоугао

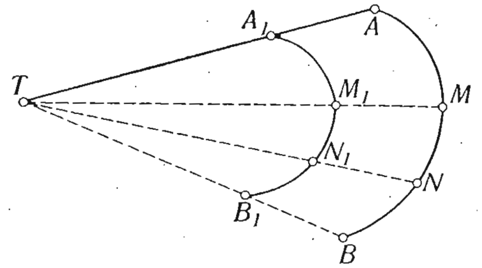


Слика 107

$A_1B_1C_1D_1E_1$ за који се лако може доказати да је сличан датом многоуглу. Доказати.

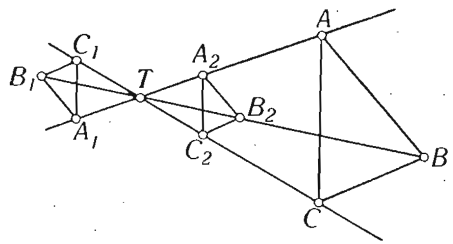
За два многоугла у таквом положају каже се, да су не само *слични* него и сличног положаја или да су *хомотетични*. Тачка T, кроз коју пролазе све праве што спајају хомологна темена, зове се *центар сличности* или *центар хомотетије*. Однос $TA_1 : TA$ је *однос хомотетије* многоугла $A_1B_1 \ldots E_1$ према многоуглу $AB \ldots E$. У истом том односу су и хомологне стране ових многоуглова. Ако је тај однос мањи од јединице, многоугао $A_1B_1 \ldots E_1$ мањи је од датог многоугла, ако је већи од јединице, он је већи; и најзад, ако је једнак јединици, многоуглови су подударни.

Хомотетија постоји и код других слика, а не само код многоуглова. На пр., ако се узме у равни нека крива $AMNB$ (сл. 108) и помоћу неке тачке T изврши за сваку тачку те линије конструкција слична претходној, добиће се крива $A_1M_1N_1B_1$ хомотетична датој кривој $AMNB$. Наравно, да је крива $A_1M_1N_1B_1$ и у сваком другом положају слична кривој $AMNB$. Према томе, помоћу појма хомотетије може се проширити појам сличности и на криволиниске слике.



Слика 108

Код сличних многоуглова на слици 107 центар хомотетије T дели сваку од дужи AA_1, BB_1,... спољашњом поделом у истој размери. Хомотетичне слике су са исте стране центра хомотетије. Међутим, хомотетичне слике се могу налазити и са разних страна центра хомотетије, као на слици 109, где су два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ хомотетични. И овде је сличност врло лако доказати, нарочито ако се конструише $\triangle A_2B_2C_2$ симетричан са $\triangle A_1B_1C_1$ у односу на T као центар симетрије. Центар хомотетије дели сад сваку од дужи AA_1, BB_1,... унутрашњом поделом у истој размери.



Слика 109

Вежбања

1. Нацртати датом троуглу хомотетични троугао са центром хомотетије 1) у темену, 2) у тежишту, 3) у центру описаног круга.

2. Нацртати датом кругу хомотетичне кругове са односом хомотетије $^1/_2$ и са центром хомотетије 1) у центру круга, 2) у тачки на кругу и 3) у тачки ван круга.

3. Дат је квадрат и на продужењу једне дијагонале узета једна тачка за центар хомотетије. Нацртати датом квадрату хомотетични квадрат четири пута веће стране и то један са исте стране од центра хомотетије са које је и дати квадрат, а други са друге стране.

4. Из тачке T ван круга повучена је дуж TM, где је M ма која тачка тог круга. Наћи геометриско место тачака M_1, које деле дужи TM у датој размери, кад тачка M описује круг.

5. По два темена сличних паралелограма леже на једном краку угла, а трећа темена леже на другом краку. Наћи геометриско место четвртих темена.

6. Колико центара хомотетије имају два круга разних полупречника који леже један ван другог? Доказати, зашто су то центри хомотетије.

7. У ком се положају могу налазити две неједнаке дужи, кад су хомотетичне?

8. Два кружна лука полупречника 5 cm и 8 cm од по 60° довести у хомотетични положај са једне стране и са разних страна центра хомотетије, али да се центри хомотетије не поклапају са центрима лукова.

9. Да ли је за хомотетични положај два кружна лука истог броја лучних степена, али различитих полупречника, довољно да њихове тетиве буду паралелне? Где се може налазити центар хомотетије?

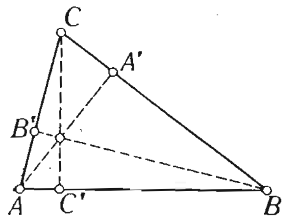
10. Дата су два круга разних полупречника r и r_1 $(r > r_1)$ и њихово централно растојање d. Одредити растојања једног и другог центра хомотетије од центра оба круга.

§ 40. Примена сличности код троугла

a. Однос висина у троуглу

Теорема 102. *У сваком троуглу висине су обрнуто пропорционалне односним странама.*

Нека су, на пр., у оштроуглом троуглу ABC (сл. 110) висине $AA' = h_a$, $BB' = h_b$, $CC' = h_c$.



Слика 110

На основу последице теореме 95 $\triangle ABA' \sim \triangle CBC'$, јер су правоугли, а имају оштри угао код B заједнички. Према томе је

$$h_a : h_c = c : a \quad \text{или} \quad h_a : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{c}.$$

Исто тако је и $h_a : h_b = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ и

$$h_b : h_c = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \text{ дакле}$$

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

што је требало доказати.

Доказати ову теорему и на тупоуглом и правоуглом троуглу.

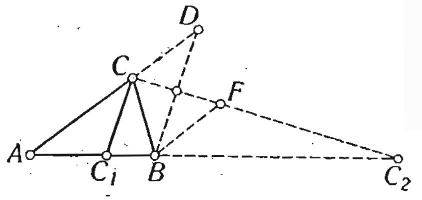
b. Особина симетрале угла у троуглу. Хармоничне тачке

Теорема 103. *У сваком троуглу:*

1) Симетрала унутрашњег угла дели супротну страну унутрашњом поделом у размери страна које чине тај угао.

2) Симетрала спољашњег угла дели супротну страну спољашњом поделом у размери страна које чине одговарајући унутрашњи угао.

1. Нека је CC_1 симетрала угла ACB троугла ABC (сл. 111), тако да је $\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle C_1CA$. Доказати да је $C_1A : C_1B = = CA : CB$.



Слика 111

За доказ повуцимо $BD \parallel C_1C$ до пресека D са продужењем стране AC. Према последици теореме 97 је тада $C_1A : C_1B = CA : CD$. Како је $CD = CB$, јер је $\triangle BCD$ равнокрак (зашто?), добија се после замене најзад

$$C_1A : C_1B = CA : CB,$$

што је требало доказати.

2. Нека је CC_2 симетрала спољашњег угла BCD троугла ABC (сл. 111), тако да је $\sphericalangle C_2CB = \sphericalangle C_2CD$. Доказати да је $C_2A : C_2B = CA : CB$.

За доказ повући $BF \parallel AC$ до пресека F са симетралом. Пошто је $\triangle C_2AC \sim \triangle C_2BF$, имамо пропорцију $C_2A : C_2B = = CA : FB$. Како је $FB = CB$, јер је $\triangle BFC$ равнокрак (зашто?), то и овде после замене долазимо до тражене пропорције

$$C_2A : C_2B = CA : CB,$$

што је требало доказати.

Теорема 104. (Обрнута теореми 103). *Права, која спаја теме троугла и тачку која дели супротну страну унутрашњом или спољашњом поделом у размери остале две стране, симетрала је унутрашњег или спољашњег угла код тог темена.*

Нека је дато, на пр., $C_1A : C_1B = CA : CB$. Треба доказати да је $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle C_1CB$.

На продужењу стране AC преко C одмеримо $CD = CB$ и тада је $C_1A : C_1B = CA : CD$. Према теореми 95 мора бити $\triangle AC_1C \sim \triangle ABD$, јер имају и захваћени $\sphericalangle A$ заједнички. Тада је $C_1C \parallel BD$ по теореми 94, одакле је $\sphericalangle ACC_1 = = \sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle CBD$. Како је троугао BCD равнокрак и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$, мора бити и $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle C_1CB$, што је требало доказати.

Ако је нека дуж унутрашњом и спољашњом поделом подељена у истој размери, за њу се каже да је *хармонично подељена*. Тако, на пр., симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C троугла ABC (сл. 111) деле супротну страну хармонично, јер је $C_1A : C_1B = C_2A : C_2B$. Деоне тачке C_1 и C_2 су *хармонично коњуговане* крајевима дужи AB и обрнуто тачке A и B су хармонично коњуговане тачкама C_1 и C_2 како се види из теореме 105. Тачке A, C_1, B, C_2 чине *хармонични низ тачака*.

Теорема 105. *Ако је нека дуж AB (сл. 111) тачкама C_1 и C_2 хармонично подељена, онда је и дуж C_1C_2 хармонично подељена тачкама A и B.*

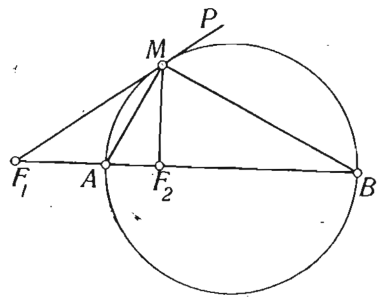
Из пропорције $C_1A : C_1B = C_2A : C_2B$ разменом места унутрашњих чланова добија се $C_1A : C_2A = C_1B : C_2B$ или

$$AC_1 : AC_2 = BC_1 : BC_2,$$

што је требало доказати.

Теорема 106. *Геометриско место тачака, чија су растојања од две сталне тачке (F_1 и F_2) у датом сталном односу ($m : n$), је круг. Крајеви пречника тог круга (A и B) деле дату дуж (F_1F_2) хармонично у датом односу ($m : n$).*

Нека су дате две сталне тачке F_1 и F_2 (сл. 112) и нека је $MF_1 : MF_2 = = m : n$ за тачку M. Треба доказати да је тачка M на кругу са пречником AB, чији крајеви A и B деле дуж F_1F_2 хармонично у односу $m : n$.

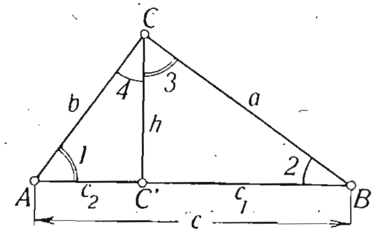


Слика 112

Ако спојимо тачку M са сталним тачкама A и B, праве MA и MB су симетрале (теорема 104) углова F_1MF_2 и F_2MP. Како симетрале унутрашњег и спољашњег угла троугла стоје управно једна на другој, угао AMB је прав. На тај начин геометриско место тачака M је круг, јер се из тих тачака дата дуж AB види под правим углом (последица III теореме 75). Тај круг зове се *Аполонијев круг*.

Грчки математичар Аполоније из Перге живео је у Александрији око 200 г. пре Христа.

c. Однос дужина у правоуглом троуглу. Питагорина теорема



Слика 113

Висина h која одговара хипотенузи c у правоуглом троуглу ABC (сл. 113) зове се *хипотенузина висина*. Она дели хипотенузу на два отсечка c_1 и c_2, од којих је сваки пројекција суседне катете (c_1 катете a и c_2 катете b) на хипотенузу.

Теорема 107. *У сваком правоуглом троуглу:*

1) Хипотенузина висина дели троугао на два друга правоугла троугла слична са њим.

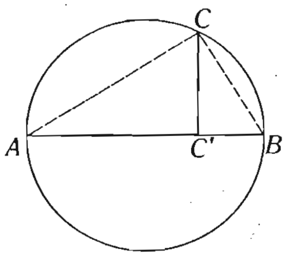
2) Хипотенузина висина је средња пропорционала хипотенузиних отсечака.

3) Свака катета је средња пропорционала хипотенузе и суседног отсечка хипотенузе.

1. $\triangle AC'C \backsim \triangle ABC$, јер су правоугли са заједничким оштрим углом код A. Исто тако је и $\triangle CC'B \backsim ABC$, па су, дакле, и троуглови $AC'C$ и $CC'B$ слични међу собом.

2. Из $\triangle AC'C \backsim \triangle CC'B$ мора бити: $AC' : CC' = CC' : C'B$, тј. $c_2 : h = h : c_1$. Одатле је $h^2 = c_1c_2$ или $h = \sqrt{c_1c_2}$, што је требало доказати.

3. Како је $\triangle AC'C \backsim \triangle ABC$, то је $AC' : AC = AC : AB$, тј. $c_2 : b = b : c$, одакле је $b^2 = cc_2$ или $b = \sqrt{cc_2}$. Исто тако из сличности троуглова $CC'B$ и ABC имамо: $a = \sqrt{cc_1}$.



Слика 114

Перифериски угао чији кракови пролазе кроз крајеве пречника је прав (сл. 114). Према томе се нормала спуштена ма из које тачке круга на пречник може сматрати као хипотенузина висина. Одатле непосредно следује:

Теорема 108. *1) Нормала спуштена из тачке круга на пречник је средња пропорционала отсечака пречника и 2) Свака тетива је средња пропорционала пречника и своје пројекције на пречник који пролази кроз један њен крај.*

Теорема 109. (Питагорина теорема). *Квадрат хипотенузе једнак је збиру квадрата катета.* Овако се ова теорема скраћено изражава, иначе у потпуном облику треба да гласи:

Ако су стране правоуглог троугла измерене истом јединицом, онда је квадрат бројне вредности мерног броја хипотенузе једнак збиру квадрата бројних вредности мерних бројева катета.

У троуглу ABC (сл. 113) имамо по теореми 107: $a^2 = cc_1$ и $b^2 = cc_2$, одакле се сабирањем добија $a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$. Како је $c_1 + c_2 = c$, то је

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

што је требало доказати.

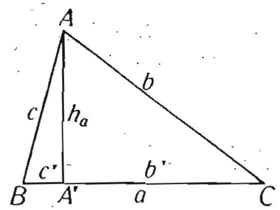
Последица. Квадрат сваке катете једнак је разлици квадрата хипотенузе и квадрата оне друге катете, тј. $a^2 = c^2 - b^2$ и $b^2 = c^2 - a^2$.

d. Однос дужина у косоуглом троуглу

Покажимо сад неке примене Питагорине теореме.

Теореме 110. *Квадрат троуглове стране наспрам оштрог угла једнак је збиру квадрата остале две стране мање двоструки производ једне од њих и пројекције друге на прву.*

Треба доказати да је $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab'$, где је (сл. 115) b' пројекција стране b на страну a.



Слика 115

Из правоуглог троугла ABA' по Питагориној теореми имамо:

$$c^2 = c'^2 + h_a^2, \tag{1}$$

где је c' пројекција стране c на страну a и $h_a = AA'$. Пошто је $c' = a - b'$ и $c'^2 = a^2 + b'^2 - 2ab'$, а $h_a^2 = b^2 - b'^2$ из $\triangle AA'C$, то се после замене ових вредности у једначини (1) добија:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab',$$

што је требало доказати.

Теорема 111. *У тупоуглом троуглу квадрат стране наспрам тупог угла једнак је збиру квадрата две остале стране више двоструки производ једне од њих и пројекције друге на продужење прве.*

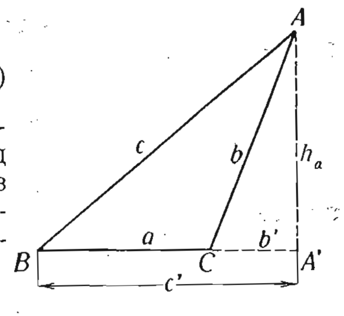
Треба доказати да је $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab'$, где је b' пројекција стране b на продужење стране a (сл. 116).

Из правоуглог троугла ABA' по Питагориној теореми имамо:

$$c^2 = c'^2 + h_a^2, \tag{2}$$

где је c' пројекција стране c на праву стране a и $h_a = AA'$. Како је сад $c' = a + b'$ и $c'^2 = a^2 + b'^2 + 2ab'$, а из $\triangle ACA'$ је $h_a^2 = b^2 - b'^2$, то се сабирањем с обзиром на једначину (2) добија:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab',$$



Слика 116

што је требало доказати.

Теореме 110 и 111 су општије од Питагорине теореме и своде се на Питагорину теорему, кад је троугао правоугли.

Помоћу ове две теореме лако се може доказати ова теорема:

Теорема 112. *Збир квадрата дијагонала у сваком паралелограму једнак је збиру квадрата свих његових страна.* Доказати.

е. Израчунавање висина у троуглу чије су стране познате

Нека су дате стране a, b, c троугла ABC (сл. 115), а треба израчунати висине тог троугла, на пр., висину h_a.

Из правоуглог троугла ACA' по Питагориној теореми имамо

$$h_a^2 = b^2 - b'^2, \qquad (1)$$

где је, као и раније, b' пројекција b на страну a. С друге стране по теореми 110 мора бити $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab'$, одакле је

$$b' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Ако ову вредност за b' заменимо у једначину (1) добијамо:

$$h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Ако се са s означи полуобим троугла, тада је

$$a + b + c = 2s,$$
$$-a + b + c = 2(s-a),$$
$$a - b + c = 2(s-b),$$
$$a + b - c = 2(s-c)$$

и према томе је

$$h_a^2 = \frac{4}{a^2} s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2P}{a},$$

ако се означи

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

На исти начин се за остале висине добија:

$$h_b = \frac{2P}{b}, \qquad h_c = \frac{2P}{c}.$$

Вежбања

1. Нека су стране троугла: $20\,cm$, $15\,cm$ и $10\,cm$. Наћи отсечке на које симетрала сваког угла дели супротну страну.

2. Одредити отсечке на које деле супротне стране симетрале углова у правоуглом троуглу са странама 3, 4, 5 истих јединица (египатски троугао).

3. Доказати да је дужина симетрале угла (од темена до пресека са супротном страном), који чине неједнаке стране троугла, мања од тежишне линије повучене из истог темена.

4. Дата дуж је неком тачком подељена на два неједнака дела. Наћи геометриско место тачака из којих се оба ова дела виде под истим углом.

5. Доказати да је хипотенузина висина четврта пропорционала за хипотенузу и катете.

6. Шта ће бити са Аполонијевим кругом, ако се тражи геометриско место тачака чија су растојања од две сталне тачке у размери 1:1, тј. једнака су? Да ли нам је то геометриско место већ од раније познато?

7. Ако је дат хармонични низ тачака A, P, B, Q, онда је увек:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}\right).$$

Доказати то. Дуж AB зове се *хармонична средина* датих дужи AP и AQ.

8. Дате су три тачке A, B, C које нису на истој правој. Наћи тачке чија се растојања од A и B односе као 3:2, а имају одређено растојање од треће тачке C.

9. Дата су два круга који се додирују споља. Доказати помоћу Питагорине теореме, да је део заједничке тангенте између тачака додира средња пропорционала пречника тих кругова.

10. Доказати да је однос квадрата катета једнак односу хипотенузиних отсечака.

11. Израчунати катете правоуглог троугла, кад су дати отсечци на које хипотенузина висина дели хипотенузу: $2\,cm$ и $18\,cm$.

12. Доказати да је троугао чије су стране изражене бројевима

$$a = 2pq, \quad b = q^2 - p^2, \quad c = q^2 + p^2,$$

где су p и q ($q > p$) ма који цели бројеви, правоугли. Такви троуглови зову се *Питагорини*. Направити таблицу извесног броја вредности за стране a, b, c Питагориних троуглова.

13. Извести образац за висину тупоуглог троугла, кад су познате стране, а подножје висине је на продужењу супротне стране.

14. Доказати да су висине у троуглу обрнуто пропорционалне странама помоћу образаца за израчунавање висина, кад су дате стране.

15. У равнокраком троуглу, чија је основица a и крак b, одредити отсечке на које висина, која одговара краку, дели крак.

16. Показати да образац за израчунавање квадрата троуглове стране доводи до идентичности кад се примени на крак равнокраког троугла.

17. Показати да је збир квадрата растојања тачке M, на већем од два ма која концентрична круга, од крајева ма којег пречника мањег круга исте вредности за сваку тачку M.

18. Показати да је тежишна линија m_a, која одговара страни a троугла са странама a, b, c, одређена једначином:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

(Поступа се слично као при одређивању висине).

19. Доказати да је у правоуглом троуглу $4(m_a^2 + m_b^2) = 5c^2$, ако су a и b катете и c хипотенуза.

20. Показати да се дужина симетрале s_a угла α у троуглу са странама a, b, c одређује обрасцем:

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)},$$

где s, као и раније, означава полуобим троугла.

21. Доказати да је четвороугао паралелограм, ако је збир квадрата страна једнак збиру квадрата дијагонала.

22. У сваком трапезу је збир квадрата дијагонала једнак збиру квадрата кракова трапеза и двоструког производа паралелних страна. Доказати.

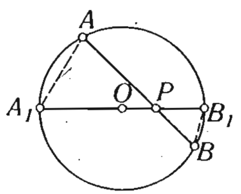
* § 41. Примена сличности код круга

a) Т е т и в е и с е ч и ц е

Теорема 113. *Производ отсечака ма које тетиве круга кроз дату тачку у кругу једнак је производу отсечака пречника тог круга који пролази кроз исту тачку.* Сваки отсечак тетиве рачуна се од дате тачке до круга.

Нека је P дата тачка и AB ма која тетива која пролази кроз њу (сл. 117). Треба доказати, да је

$$PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1.$$



Слика 117.

Спојимо крајеве тетиве са крајевима пречника. Тада је $\triangle PAA_1 \sim \triangle PBB_1$, јер су им углови једнаки (зашто?). Из сличности тих троуглова добија се:

$$PA : PA_1 = PB_1 : PB, \text{ тј.}$$
$$PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1,$$

што је требало доказати.

Теорема 114. *Производ отсечака ма које сечице круга кроз дату тачку ван круга једнак је квадрату дужине тангенте повучене из те тачке на круг.* Сваки отсечак сечице рачуна се од дате тачке до тачке на кругу као и дужина тангенте.

Нека је Q дата тачка ван круга, QB сечица круга са пресечним тачкама A и B и QC дужина тангенте (сл. 118). Доказати да је

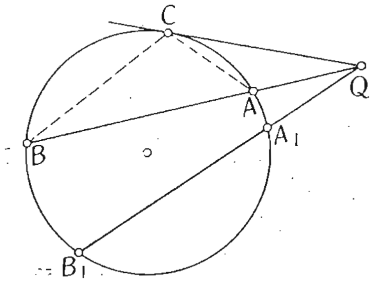
$$QA \cdot QB = QC^2.$$

Спојимо пресечне тачке сечице са додирном тачком тангенте. Тада је

$\triangle QAC \sim \triangle QBC$, јер су им углови једнаки (зашто?). Отуда следује

$$QA : QC = QC : QB, \text{ тј.}$$
$$QA \quad QB = QC^2,$$

што је требало доказати.



Слика 118

Теорема 115. (Обрнута теорема теорема 113 и 114). *Ако се две дужи AB и A_1B_1 секу у тачки P или њихова продужења у тачки Q, па је*

$$PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1,$$

односно

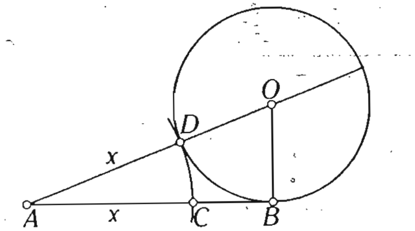
$$QA \cdot QB = QA_1 \cdot QB_1,$$

онда су тачке A, B, A_1 и B_1 на кругу. Доказати.

b) Н е п р е к и д н а п о д е л а (sectio aurea)

За дуж подељену на два дела тако, да је већи део средња пропорционала мањег дела и целе дужи каже се, да је подељена *непрекидно.* Овакву поделу називамо *златни пресек.* Тако, тачка C дели дуж AB (сл. 119) златним пресеком, ако је

$$AB : AC = AC : CB.$$



Слика 119

Дуж се може поделити непрекидно на овај начин. Из краја B (сл. 119) дужи $AB = a$ подигне се нормала и на њој одмери $BO = {}^1/_2\, a$. Око тачке O опише се круг полупречника ${}^1/_2\, a$ и онда споји O са другим крајем A дате дужи. Нека права AO сече наш круг у тачки D. Ако сад опишемо круг полупречника AD са центром у A, он сече дату дуж у тачки C која дели дуж AB непрекидно.

Заиста, означимо AC са x. Тада је (теорема 114) $a^2 = x(a + x)$, одакле је $x^2 = a(a - x)$ или $a : x = x : (a - x)$. Како ову пропорцију можемо написати и овако:

$$AB : AC = AC : CB,$$

наша конструкција је тачна.

Из правоуглог троугла ABO имамо:

$$AO^2 = OB^2 + AB^2$$

или

$$(x + {}^1/_2\, a)^2 = ({}^1/_2\, a)^2 + a^2 = {}^5/_4\, a^2,$$

одакле је

$$x + {}^1/_2\, a = {}^1/_2\, a\sqrt{5}$$

и најзад

$$x = {}^1/_2\, a\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

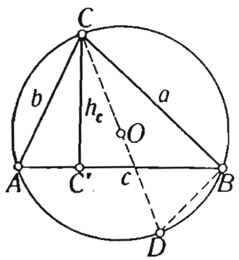
c) Израчунавање полупречника описаног круга око троугла чије су стране познате

Теорема 116. *Производ ма које две стране троугла једнак је производу пречника око тог троугла описаног круга и висине која одговара трећој страни.*

Нека је дат троугао ABC (сл. 120) и нека је $CD = 2R$ пречник описаног круга, а $CC' = h_c$ висина која одговара страни c. Тада је $\triangle AC'C \sim \triangle DBC$, јер су правоугли са једнаким оштрим угловима ($\sphericalangle A = \sphericalangle D$ као периферијски над истим луком). Отуда следује: $b : h_c = 2R : a$ или

$$ab = 2R\,h_c\,,$$

што је требало доказати.



Слика 120

Ако сад у једначини $ab = 2R\,h_c$ заменимо $h_c = \frac{2P}{c}$ по обрасцу § 40, *e*, добија се $ab = \frac{4RP}{c}$,

одакле $$R = \frac{abc}{4P},$$

где је, као и раније, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ и s полуобим троугла.

d) Птоломејева теорема

Теорема 117. *У сваком тетивном четвороуглу је производ дијагонала једнак збиру производа насрамних страна.*

Нека је дат тетивни четвороугао $ABCD$ (сл. 121), чије су стране a, b, c, d и дијагонале AC и BD. Треба доказати да је

$$AC \cdot BD = ac + bd.$$

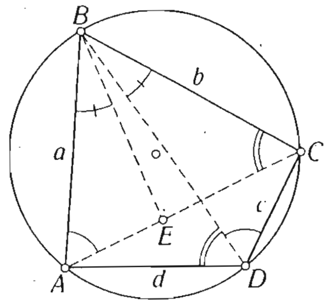
Повучемо BE тако, да је $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD$. Тада је $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (зашто?). Отуда је: $AE : a = c : BD$ или $AE = \frac{ac}{BD}$. Са друге стране је и $\triangle ABD \sim \triangle EBC$. У тим троугловима су једнаки ови углови: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBC$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ECB$ (зашто?). Одавде је: $d : BD = EC : b$ или $EC = \frac{bd}{BD}$. Сабирањем ове и претходне једначине добија се

$$AC = \frac{ac}{BD} + \frac{bd}{BD},$$

пошто је $AE + EC = AC$. И најзад

$$AC \cdot BD = ac + bd,$$

што је требало доказати.



Слика 121

Птоломеј, који је живео око 150 г. по Христу у Александрији, бавио се математиком и другим наукама.

Вежбања

1. Додирна тачка тангенте круга дели онај део те тангенте што се налази између друге две паралелне тангенте на исти круг на отсечке чији је производ једнак квадрату полупречника. Доказати.

2. Кроз тачку у кругу повучен је пречник подељен овом тачком у размери $m : n$. Колика је дужина оне тетиве тог истог круга полупречника R која је том тачком преполовљена?

3. Из спољне тачке повучене су две сечице круга чије су дужине 20 *cm* и 30 *cm*. Ако је тетива која одговара првој 5 *cm* дуга, колика је тетива која одговара другој сечици?

4. Кад је дужина тангенте повучене из спољне тачке на круг двапут већа од спољашњег отсечка неке сечице повучене из исте тачке, онда је тетива ове сечице трипут већа од спољашњег отсечка. Доказати.

5. Израчунати полупречник описаног круга око троугла чије су стране 7 *cm*, 15 *cm*, 20 *cm*.

6. Ако је у равнокраком троуглу основица a једнака висини h, онда је $R = {}^5/_8\,a$, где је R полупречник описаног круга. Доказати.

7. Доказати да је у равнокраком троуглу, чија је основица једнака већем отсечку по златном пресеку подељеног крака, угао при врху 36^0.

8. Доказати да се дијагонале правилног петоугла деле по непрекидној сразмери и да је већи отсечак једнак страни.

9. Доказати да је у сваком четвороуглу, који се не може уписати у круг, збир производа супротних страна већи од производа дијагонала.

10. Доказати да се око четвороугла може описати круг, ако се дијагонале тако секу да је производ отсечака једне једнак производу отсечака друге дијагонале. *

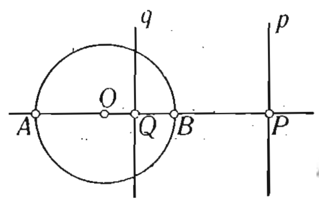
* § 42. Пол и полара

Нека је дат круг полупречника R и тачка P ма где у равни круга, на пр., ван круга (сл. 122). Повучемо праву кроз тачку P и центар круга O и означимо крајеве пречника на тој правој са A и B. Тада се може конструисати четврта хармонична тачка Q коњугована тачки P у односу на дуж AB. Права q кроз ту тачку Q, нормална на пречник AB, зове се *полара* тачке P у односу на дати круг. Тачка P зове се *пол* те праве. Ако се узме тачка унутра у кругу, на пр. тачка Q, па конструише њој коњугована тачка P и кроз ову повуче права p нормална на PQ, онда је пол тачка Q, а права p је полара тачке Q.

Теорема 118. *Производ растојања пола и поларе од центра круга је за сваки пол иста величина, једнака квадрату полупречника тог круга.*

Тачке A, Q, B, P (сл. 122) чине хармонични низ тачака и према томе је $PA : PB = QA : QB$, одакле

$$PA \cdot QB = PB \cdot QA.$$



Слика 122

Како је:

$$PA = OP + R,\quad QB = R - OQ,$$
$$PB = OP - R,\quad QA = OQ + R,$$

то кад се изврши замена и срачуна добија се

$$R^2 - OP \cdot OQ = OP \cdot OQ - R^2$$

и најзад

$$OP \cdot OQ = R^2,$$

што је требало доказати.

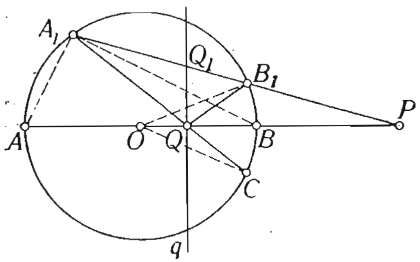
Последица. Растојање поларе од центра круга обрнуто је пропорционално растојању пола од тог центра.

Из претходне једначине је $OQ = \dfrac{R^2}{OP}$.

Кад пол мења положај, онда и полара мења свој положај на овај начин. Кад се пол налази у центру круга ($OP = 0$), OQ је бескрајно велико, полара је у бесконачности. Кад се пол приближује кругу и полара се приближује кругу. За $OP = R$, $OQ = R$, тј. за тачку на кругу полара је тангента у тој тачки. Кад се пол удаљује од круга, полара се приближује центру круга.

Теорема 119. *Свака секанта круга кроз пол сече полару у тачки која је хармонично коњугована полу у односу на пресечне тачке секанте са кругом.*

Нека је (сл. 123), прво, пол P ван круга, а q његова полара. Повуче се ма која сечица кроз тачку P и нека она сече круг у тачкама A_1 и B_1, а полару у тачки Q_1. Доказати да је тачка Q_1 хармонично коњугована тачки P у односу на тачке A_1 и B_1.



Слика 123

Тачке B и A су хармонично коњуговане крајевима P и Q стране PQ у троуглу PQA_1. Према томе, по теореми 104, праве A_1B и A_1A су симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A_1. Отуда је $\sphericalangle BA_1B_1 = \sphericalangle BA_1C$. Како су то периферијски углови, следује и једнакост одговарајућих централних углова, тј. $\sphericalangle BOB_1 = \sphericalangle BOC$. Тада је по правилу [СУС] $\triangle OQB_1 \cong \triangle OQC$, одакле следује једнакост хомологних спољашњих углова, тј. $\sphericalangle BQB_1 = \sphericalangle BQC$. То значи да је права QP симетрала спољашњег угла B_1QC троугла A_1B_1Q. Једнакост тих углова повлачи и једнакост углова A_1QQ_1 и B_1QQ_1 и према томе је права QQ_1 симетрала унутрашњег угла A_1QB_1 истог троугла. На тај начин тачке P и Q_1 су хармонично коњуговане крајевима A_1 и B_1 основице A_1B_1 у троуглу A_1QB_1 према теореми 103, а ово је требало доказати.

На сличан се начин изводи доказ и кад се пол налази у кругу. Доказати.

Теорема 120. *Ако се пол налази ван круга, његова полара пролази кроз додирне тачке тангената повучених из пола на круг.*

Спојимо пресечну тачку Q' (сл. 124) поларе и круга са центром круга O и полом P и покажимо, да је $\triangle OPQ'$ правоугли.

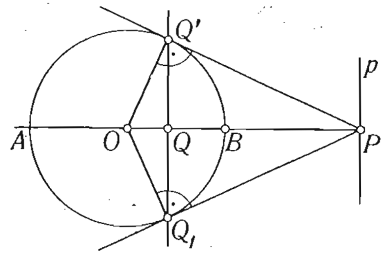
Како је $OP - OQ = PQ$, и по теореми 118, $OP \cdot OQ = R^2$, то се из $(OP - OQ)^2 = PQ^2$ добија $OP^2 + OQ^2 = 2R^2 + PQ^2$. Из правоуглих троуглова OQQ' и PQQ' по Питагориној теореми добија се:

$$OQ^2 = R^2 - QQ'^2,$$
$$PQ^2 = PQ'^2 - QQ'^2.$$

Ако се ове вредности замене у претходној једначини и сведе, добиће се

$$OP^2 = R^2 + PQ'^2,$$

што доказује да је наш троугао правоугли. Како је права PQ' нормална на полупречнику, она је тангента круга.

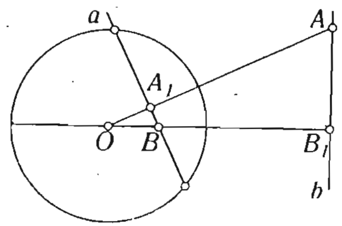


Слика 124

На основу ове особине поларе њена конструкција за пол ван круга може се извршити помоћу конструкције тангената из спољне тачке на круг. Ако је дата тачка Q у кругу, онда је конструкција поларе још једноставнија. Довољно је повући нормалу QQ' на пречник AB кроз тачку Q (сл. 124). Затим из пресечне тачке те нормале Q' са кругом повући $Q'P \perp OQ'$. Пресек P те нормале са правом пречника AB одређује тачку поларе p. Треба само у тачки P подићи нормалу на праву OP.

Теорема 121. *Ако се тачка* A *налази на полари* b *тачке* B, *онда полара* a *тачке* A *пролази кроз тачку* B.

Нека је права b (сл. 125) полара тачке B. Тада је $OB \cdot OB_1 = R^2$. Узмимо ма коју тачку A на правој b, спојимо је са O и из тачке B спустимо нормалу на OA. Доказати да је та нормала BA_1 полара a тачке A.



Слика 125

Пошто је $\triangle OA_1B \sim \triangle OB_1A$ (зашто?), то је $OB : OA_1 = OA : OB_1$, одакле

$$OB \cdot OB_1 = OA \cdot OA_1 = R^2,$$

што потврђује да је права a полара тачке A.

Ова теорема показује, да кад се тачка креће по некој правој, њена полара се обрће око сталне тачке, пола дате праве као поларе. И обрнуто: кад се права обрће око сталне тачке, онда се пол који одговара тој правој креће по правој, полари дате тачке.

Вежбања

1. Узети неколико тачака у кругу и ван круга и за сваку нацртати полару.

2. Узети неколико правих које секу круг или су ван њега и за сваку одредити положај пола.

3. Узети у кругу унутра троугао и показати, да је слика, коју чине хармонично коњуговане тачке у односу на тај круг, такође троугао што обухвата круг. Проучити везу између тих слика.

4. У круг је уписан троугао. Нацртати хармонично коњуговану слику том троуглу у односу на круг и проучити везу између тих слика.

5. Око круга је описан четвороугао. Нацртати хармонично коњуговану слику у односу на тај круг.

6. У круг је уписан квадрат. Нацртати и проучити хармонично коњуговану слику датом квадрату у односу на тај круг. *

§ 43. Конструктивни задаци

Навешћемо неколико основних конструктивних задатака у вези са сличношћу слика. Неки су већ раније решени, а за друге ћемо дати решење.

1. *Поделити дату дуж на делове пропорционалне датим дужима* (решење на стр. 94).

Као нарочити случај може се сматрати овај задатак:

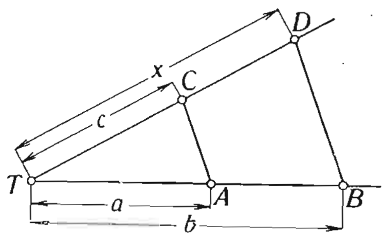
Поделити дату дуж на n једнаких делова (решење на стр. 59).

2. *Наћи аритметичку средину више дужи.*

Ако имамо више дужи $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, онда је њихова аритметичка средина $^1/_n\,(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$. Према томе конструкција захтева поделу збира на n једнаких делова и тиме задатак своди на претходни.

3. *Конструисати четврту пропорционалу x датим дужима a, b и c из пропорције $a:b=c:x$, тј. $x=\dfrac{bc}{a}$* (сл. 126).

Нацрта се ма који угао T и на један његов крак од темена одмере дужи $TA=a$ и $TB=b$, а на други крак дуж $TC=c$. Споји се A и C и кроз тачку B повуче $BD \parallel AC$. Тада је TD тражена четврта пропорционала x. Доказати.



Слика 126

Нарочити случај је овај задатак: *Конструисати трећу пропорционалу x за дате дужи a и b према пропорцији: $a:b=b:x$, тј. $x=\dfrac{b^2}{a}$.*

Треба у претходној конструкцији само ставити $TC=c=b$.

4. *Конструисати дуж*

$$x=\frac{a_1a_2\ldots a_n}{b_1b_2\ldots b_{n-1}},$$

где су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}$ дате дужи.

Конструкција овог израза своди се на низ конструкција према претходном задатку. На пр., за

$$x=\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4}{b_1\,b_2\,b_3}$$

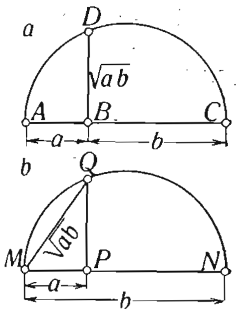
треба прво конструисати $x_1=\dfrac{a_1a_2}{b_1}$, па $x_2=\dfrac{x_1a_3}{b_2}$ и најзад $x=\dfrac{x_2a_4}{b_3}$.

5. *Наћи геометриску средину (средњу пропорционалу) x две дате дужи a и b, тј. $x=\sqrt{ab}$.*

Ова се конструкција може извршити на два начина.

1. На некој правој одмеримо једну за другом дужи $a=AB$ и $b=BC$ (сл. 127, *a*). Узмемо AC за пречник круга и нацртамо полукруг. У тачки B подигнемо нормалу BD до пресека D са кругом. Дуж BD је тражена геометриска средина (теорема 108).

2. Узмемо већу дуж $b=MN$ за пречник круга и нацртамо полукруг (сл. 127, *b*). Од тачке M одмеримо на MN мању дуж $a=MP$. У тачки P подигнемо нормалу PQ на пречник до пресека Q са кругом. Тада је тетива MQ тражена геометриска средина (теорема 108).



Слика 127

6. *Конструисати изразе:*

$$x=\sqrt{\frac{abc}{d}},\quad x=\sqrt{\frac{lmnp}{qr}},$$

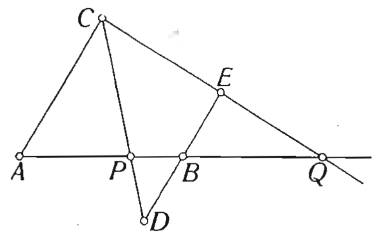
$$x=\sqrt{a^2+b^2},\quad x=\sqrt{p^2-q^2},\quad x=\sqrt{a^2+b^2-p^2},$$

где су a, b, c, l, ... итд. дате дужи.

Прва два израза конструишу се узастопном применом конструкција према 4. и 5. задатку, а за остала три треба искористити Питагорину теорему.

7. *Поделити дату дуж хармонично у датој размери $m:n$.*

Нека дуж AB (сл. 128) треба поделити хармонично у размери $m:n$. Ради тога се повуку кроз тачке A и B две ма које паралелне праве. На једној од њих одмеримо m једнаких дужина од тачке A до тачке C, на другој од тачке B и на једну и на другу страну по n истих једнаких дужина до D и E. Тада права CD сече AB у једној траженој тачки P, а права CE продужење од AB у другој тачки Q.



Слика 128

Доказ је врло прост. $\triangle APC \sim \triangle BPD$ (зашто?). Отуда је $PA:PB = AC:BD = m:n$. Са друге стране је и $\triangle AQC \sim \triangle BQE$ (зашто?). Отуда је $QA:QB=AC:BE=m:n$. Другим речима, тачке P и Q деле дуж AB хармонично у размери $m:n$, што је требало доказати.

8. *Одредити четврту хармоничну тачку за три дате тачке на једној правој.*

Нека су дате три тачке A, P, B (сл. 128), па треба одредити четврту тачку Q, хармонично коњуговану са P у односу на AB. Кроз тачке A и B повући паралелне праве и на оној кроз A, на пр., узети ма коју тачку C. Спојити затим C са P и продужити до пресека са другом паралелом у D. Одмерити $BE = BD$, па повући праву CE. Она сече праву AB у траженој тачки Q.

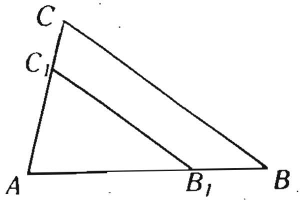
* Четврта хармонична тачка за три дате тачке може се конструисати и на основу конструкције пола и поларе (теорема 120). Показати како се тада изводи конструкција.

9. *Поделити дату дуж непрекидно или златним пресеком* (решење на стр. 107). *

10. *Конструисати троугао сличан датом троуглу са датом страном.*

Нека је дат троугао ABC (сл. 129), а треба конструисати сличан троугао чија страна, која одговара страни AB, има дужину a.

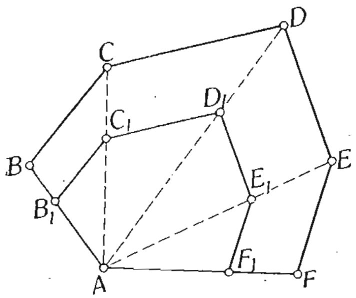
На страни AB датог троугла ABC одмеримо од тачке A дужину a ($AB_1 = a$) и кроз тачку B_1 повучемо праву паралелну са BC. $\triangle AB_1C_1$ је тражени троугао. Доказати и извршити конструкцију за случај $a > AB$.



Слика 129

11. *Конструисати многоугао сличан датом многоуглу са датом страном.*

Нека је дат многоугао $ABCDEF$ (сл. 130), па треба нацртати сличан многоугао са датом страном a која одговара страни AB. Повучемо дијагонале из темена A и одмеримо $AB_1 = a$. Из тачке B_1 повучемо $B_1C_1 \parallel BC$ до пресека са првом дијагоналом, па онда $C_1D_1 \parallel CD$ до пресека са другом дијагоналом итд. Тада је $AB_1C_1D_1E_1F_1$ тражени многоугао.



Слика 130

* 12. *Конструисати полару за дату тачку као пол у односу на дати круг* (решење на стр. 111). *

Вежбања

1. Поделити дуж од 10 *cm* на три једнака дела.

2. Наћи аритметичку средину за две дате дужи.

3. Конструисати аритметичку средину за четири дужи: 2 *cm*, 5 *cm*, 4 *cm* и 3 *cm*.

4. Конструисати четврту пропорционалу за три дате дужи: $a = 3\,cm$, $b = 4\,cm$, $c = 7\,cm$.

5. Конструисати x из пропорције $a : b = x : c$, где су a, b, c дате дужи.

6. Конструисати израз $x = \dfrac{abc}{de}$, ако је $a = 1\,cm$, $b = 3\,cm$, $c = 12\,cm$, $d = 5\,cm$, $e = 2\,cm$.

7. Показати, како се може конструисати трећа пропорционала за две дате дужи на основу теореме 107 односно 108 и извршити конструкцију за дужи $a = 12\,cm$ и $b = 6\,cm$.

8. Конструисати израз $x = a^2 : b$, ако су a и b познате дужи.

9. Конструисати геометриску средину за две дате дужи $a = 3\,cm$ и $b = 5\,cm$.

* 10. Показати, како се на основу теореме 114 може конструисати средња пропорционала две дужи и извршити конструкцију за дужи $a = 16\,cm$ и $b = 8\,cm$. *

11. Нека је a дата дуж. Конструисати геометриску средину дужи: 1) a и $2a$, 2) a и $3a$, 3) a и $^1/_2\,a$.

12. Одредити конструкцијом $\sqrt{2}\,dm$.

Упут. Тражена дуж може се конструисати или као геометриска средина дужи од $2\,dm$ и $1\,dm$ према $\sqrt{2 \cdot 1}$, или помоћу Питагорине теореме као хипотенуза правоуглог троугла са катетама по $1\,dm$ према $\sqrt{1^2 + 1^2}$.

13. Одредити конструкцијом $\sqrt{5}\,cm$.

14. Ако је a дата дуж, конструисати:

$$a)\ x = a\sqrt{2}, \qquad b)\ x = a\sqrt{3}, \qquad c)\ x = \frac{1}{2}a\sqrt{3},$$

$$d)\ x = \frac{1}{2}a\sqrt{5}, \qquad e)\ x = a\sqrt{6}, \qquad f)\ x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

15. Конструисати $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, кад је $a = 5\,cm$, $b = 4\,cm$, $c = 6\,cm$.

* 16. Дуж од $10\,cm$ поделити златним пресеком и израчунати дужине оба дела. *

17. Наћи четврту хармоничну тачку Q за тачке A, P, B, коњуговану са P у односу на AB, ако је $AP = 6\,cm$ и $PB = 3\,cm$.

18. Конструисати хармоничну средину за дужи $a = 7\,cm$ и $b = 12\,cm$ (види задатак 7. § 40).

19. У равнокраком троуглу је основица $a = 5\,cm$, а угао при врху 30^0. Конструисати троугао сличан датом троуглу са основицом $5\sqrt{2}\,cm$.

20. Нека је нацртан троугао ABC. Нацртати му сличан троугао $A_1B_1C_1$: 1) са датим обимом, 2) са датом висином из тачке A_1, 3) са датим полупречником описаног круга.

21. Ако је дат неки троугао и треба нацртати сличан, који су елементи унапред одређени, а које можемо бирати?

22. Трапезу, чије су основице $8\,cm$ и $5\,cm$, крак $6\,cm$ и угао између тог крака и веће основице 60^0, нацртати сличан са већом основицом од $6\,cm$.

23. Нека је нацртан ма који многоугао. Нацртати њему сличан многоугао са двапут већим странама.

* 24. Одредити поларе за две ма које тачке у односу на дати круг. Шта је пресек обе поларе у односу на праву кроз две дате тачке? Где се секу те поларе, ако обе дате тачке леже на правој пречника?

25. Одредити за две ма које праве полове у односу на дати круг. Шта је права одређена тим половима у односу на пресек датих правих? *

26. Конструисати троугао, кад је познато:

$a)$ α, β, h_c; $b)$ $a:b$, $b:c$, h_c;

$c)$ $a:b$, c, h_c; $d)$ $a:b$, c, R;

$e)$ h_a, h_b, h_c; $f)$ α, β, $b:h_a$.

27. Конструисати троугао, ако је дата висина h_c, угао γ и размера $m:n$ у којој висина h_c дели страну c.

28. Конструисати троугао, ако је дат обим троугла и два угла.

29. Конструисати троугао, кад су позната два угла и збир две стране.

30. Конструисати троугао, кад су дата два угла и тежишна линија која полази из темена трећег угла.

31. Конструисати троугао, ако је позната страна a, угао α и размера отсечака на које дели страну a симетрала угла α.

32. Конструисати троугао, кад је дат угао α, полупречник описаног круга R и размера две стране $b:c$.

33. Конструисати равнокраки троугао чији је врх код C, кад је познато:

$a)$ $a:b$, h_a; $b)$ β, h_c;

$c)$ $a:b$, s_α (симетрала угла на основици); $d)$ β, $a+b$.

34. Конструисати равнострани троугао, кад је позната разлика стране и висине.

35. Конструисати правоугли троугао, кад је познато:

$a)$ $a:b$, h; $b)$ $a:c$, h,

где су a и b катете, c хипотенуза и h хипотенузина висина.

36. Конструисати правоугли троугао, кад је дата мања катета и размера у којој симетрала правог угла дели хипотенузу.

37. Конструисати помоћу сличности равнострани троугао, кад му је позната висина.

38. Конструисати правоугли троугао, кад је позната размера катете и њене пројекције на хипотенузу, на пр., $a:a'$ и пројекција b' друге катете на хипотенузу.

39. Конструисати изразе:

$a)$ $x=\sqrt{a^2+bc}$, $b)$ $x=\sqrt{ab+cd}$,

где су a, b, c, d дате дужи.

40. Узети две ма које дужи a и b па конструисати њихову: аритметичку средину $^1/_2\,(a+b)$, геометриску средину $\sqrt{ab}$ и хармоничну средину $2ab:(a+b)$ и показати да је

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqq\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}.$$

41. Конструисати правоугаоник чија је мања димензија 10 cm тако, да се превијањем око симетрале веће стране напола добије сличан правоугаоник.

42. У дати троугао уписати квадрат тако, да му једна страна лежи на страни троугла, а остала два темена на осталим странама троугла.

43. Дат је троугао ABC. Уписати у њега правоугаоник тако да два његова темена леже на основици AB, треће теме на страни AC и четврто на страни BC. Однос димензија правоугаоника је дат.

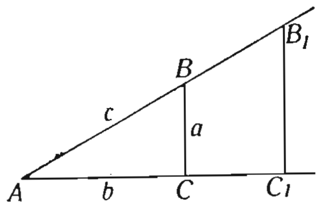
44. Конструисати квадрат, кад је позната разлика дијагонале и стране.

45. Конструисати круг који пролази кроз две дате тачке и додирује дату праву.

46. Конструисати шестаром и лењиром угао од 36^0.

§ 44. Тригонометриске функције

Узмимо оштри угао $A=\alpha$ (сл. 131), па ма из које тачке B једног крака спустимо нормалу BC на други крак. Добиће се правоугли троугао ABC. Хипотенузу тог троугла означимо са c, а катете са a и b, при чему се катета a зове *супротна* углу α, а катета b — *налегла*.



Слика 131

Од три стране a, b, c можемо начинити више односа, на пр. $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ итд.. Ако се на краку AB тог истог угла узме друга тачка B_1 и спусти нормала B_1C_1 на други крак, а стране троугла AB_1C_1 означе са a_1, b_1, c_1, онда је $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ и

$$\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1},\quad \frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}\ \text{итд.}$$

Вредност сваког од тих односа не зависи од положаја тачке B на краку, него само од величине оштрог угла α. Ови односи употребљују се често у математици и стога сваки има свој назив. Лако је увидети, да је могуће образовати шест таквих односа у правоуглом троуглу ABC, али ми ћемо навести називе само за четири односа и то:

1. *Однос (размера) супротне катете и хипотенузе зове се* **синус** *угла* и означава са sin, на пр. $a:c=\sin\alpha$.

2. *Однос налегле катете и хипотенузе зове се* **косинус** *угла* и означава са cos, на пр. $b:c=\cos\alpha$.

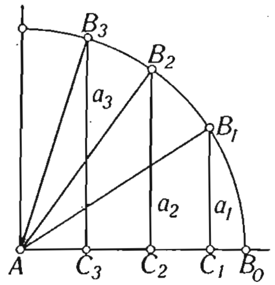
3. *Однос супротне и налегле катете зове се* **тангенс** *угла* и означава са tg, на пр. $a:b=\operatorname{tg}\alpha$.

4. *Однос налегле и супротне катете зове се* **котангенс** *угла* и означава са cotg, на пр. $b:a=\operatorname{cotg}\alpha$.

Нагласимо да наведене дефиниције синуса, косинуса, тангенса и котангенса важе само за углове у правоуглом троуглу.

Свака од ових величина, као однос две дужине, изражава се неименованим (апстрактним) бројем. На пример, $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, јер је у правоуглом троуглу са оштрим углом од 30^0 хипотенуза (c) једнака двострукој вредности мање катете (a). (Показати то полазећи од равностраног троугла). Тако је и $\operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{cotg} 45^0 = 1$, јер је правоугли троугао са углом од 45^0 равнокрак.

Са променом угла мења се и сваки од наших односа. На слици 132 узели смо низ правоуглих троуглова: AB_1C_1, AB_2C_2 итд. Како се сва темена $B_1, B_2, \ldots$ налазе на кругу са центром у тачки A, хипотенузе тих троуглова су једнаке полупречнику r круга. На тај начин је:

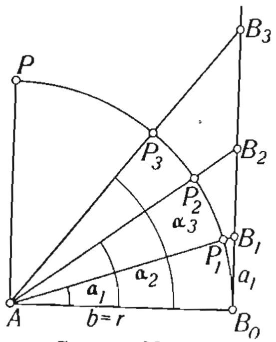


Слика 132

$$\sin\alpha_1 = \frac{a_1}{r}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{a_2}{r} \text{ итд.,}$$

где је $\alpha_1 = \sphericalangle B_0AB_1$, $\alpha_2 = \sphericalangle B_0AB_2$ итд. Пошто катете $a_1, a_2, \ldots$ расту и по величини се приближују хипотенузи, то се може тврдити да, *кад угао расте од 0^0 до 90^0, синус угла расте од 0 до 1.* Из тих истих троуглова види се да, *кад угао расте од 0^0 до 90^0, косинус угла опада од 1 до 0.*

Да бисмо проучили промене тангенса, нацртаћемо правоугле троуглове на други начин. Нека катета $AB_0 = b$ остаје непромењена, а сва темена $B_1, B_2, \ldots$ (сл. 133) нека се налазе на тангенти B_0B_3 круга полупречника $r = b$ у тачки B_0. Са слике је:

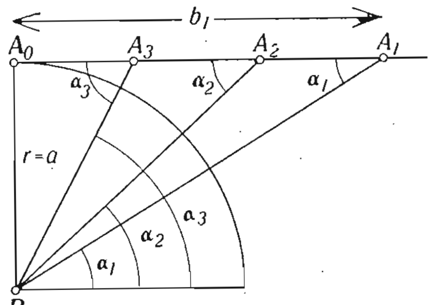


Слика 133

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a_1}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_2}{r} \text{ итд.,}$$

где је $a_1 = B_0B_1$, $a_2 = B_0B_2$ итд. Пошто катете $a_1, a_2, \ldots$ расту, а катета b остаје иста, *тангенс угла расте од 0 до бескрајности (∞), кад угао расте од 0^0 до 90^0.* Наиме, кад се тачке $P_1, P_2, \ldots$ приближују тачки P, тачке $B_1, B_2, \ldots$ удаљују се на правој B_0B_3 у бесконачност.

Ако се повуче тангента на круг полупречника $r = a$ у тачки A_0 (сл. 134), онда се може показати промена котангенса угла. Видимо, да *кад угао расте од 0^0 до 90^0, котангенс опада од ∞ до 0.*



Слика 134

Према томе свака од величина

$$\sin\alpha, \quad \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}\alpha$$

зависи само од угла. Угао је *независно променљива* или *аргуменат,* а свака од тих величина је *функција.* Ове функције зову се *тригонометриске,* јер се помоћу њих проучавају пре свега разне везе између страна и углова у троуглу.

Како ми засада немамо толико знања да бисмо могли израчунати вредност тригонометриских функција за сваки угао, то вредност тригонометриских функција можемо наћи на два начина. Може се нацртати ма који правоугли троугао са датим оштрим углом, па мерењем потребних дужина одредити вредност тригонометриских функција тог угла. Због могућности грешења при цртању и мерењу тако одређене вредности могу бити доста нетачне. На други начин до вредности тригонометриских функција долази се помоћу нарочитих таблица. Математичари су израчунали вредност тригонометриских функција за сваки угао и саставили за њих нарочите таблице. У наредним разредима упознаћемо се опширно са таквим таблицама, а овде наводимо таблицу вредности тригонометриских функција само за углове изражене целим бројем степена. Употреба ове таблице (стр. 121) је врло проста. Да би се одредила вредност тригонометриских функција углова од 0^0 до 45^0 тражи се назив функције горе, а величина угла у степенима с леве стране таблице. После тога у нађеном ступцу и реду читамо вредност функције. За углове од 45^0 до 90^0 назив функције се тражи доле, а величина угла с десне стране таблице.

Може бити позната вредност тригонометриске функције, а тражи се величина угла. Опет се може поступити двојако: цртањем неког правоуглог троугла у коме две стране дају тражени однос или помоћу таблица. У таблицама, у ступцу, који одговара датој функцији, нађе се дата вредност функције или, ако ње нема, њој најприближнија. Потом се прочита величина угла која одговара тој вредности функције и то с леве стране таблице, ако смо назив читали одозго и с десне стране, ако смо назив читали одоздо.

Вежбања

Нека су у правоуглом троуглу катете a и b, а хипотенуза c.

1. Помоћу $a^2+b^2=c^2$ показати тачност једначине $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2. Показати на основу дефиниције да је $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha=1$.

3. Показати деобом бројиоца и имениоца са c у разломку $\frac{a}{b}$ да је $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha:\cos\alpha$.

4. На сличан начин показати да је $\operatorname{cotg}\alpha=\cos\alpha:\sin\alpha$.

5. Израчунати помоћу равнокрако правоуглог троугла вредности тригонометриских функција угла од 45^0.

6. Израчунати помоћу правоуглог троугла са углом од 30^0 (половина равностраног троугла) тригонометриске функције углова од 30^0 и 60^0.

7. Одредити, мерењем са слике, вредности ових тригонометриских функција:

$$\sin 25^0,\quad \cos 40^0,\quad \operatorname{tg} 52^0,\quad \operatorname{cotg} 72^0$$

и упоредити добијене вредности са вредностима из таблице. Постави сам себи сличне задатке.

8. Показати у једном одређеном троуглу да је

$$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}(90^0-\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha,\quad \operatorname{cotg}(90^0-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Помоћу ових образаца објаснити зашто у таблици вредности тригонометриских функција, на пр. за углове 14^0 и 76^0 није наведено осам вредности за четири разне функције два дата угла, него само четири и то у једном реду.

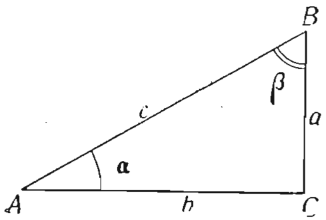
9. Одредити цртањем величину угла, кад је:

$$\sin\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\alpha=0{,}7\left(=\frac{7}{10}\right),\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{cotg}\alpha=\sqrt{2}.$$

10. Одредити помоћу таблице углове у степенима тачно, кад је:

$$\sin\alpha=0{,}37504;\ \cos\alpha=0{,}6824;\ \operatorname{tg}\alpha=2{,}46;\ \operatorname{cotg}\alpha=0{,}65.$$

§ 45. Решавање правоуглог троугла



Слика 135

Код сваког правоуглог троугла ABC (сл. 135) могу се нарочито истаћи пет елемената: три стране — катете a и b и хипотенуза c, затим два оштра угла α и β. Између тих елемената, како смо видели у претходном параграфу, могу се поставити ове везе:

	sin	cos	tg	cotg	
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	cos	sin	cotg	tg	

1) $\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta$, одакле је $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$ или речима:

Теорема 122. *Катета правоуглог троугла једнака је производу хипотенузе и синуса супротног угла или косинуса налеглог угла.*

2) $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$, одакле је $a = b\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{cotg}\beta$ или речима:

Теорема 123. *Катета правоуглог троугла једнака је производу друге катете и тангенса супротног угла или котангенса налеглог угла.*

Осим ових веза у правоуглом троуглу између поменутих пет елемената увек постоје и ове две везе:

3) $\alpha + \beta = 90^0$ и

4) $a^2 + b^2 = c^2$ по Питагориној теореми.

Ако су у правоуглом троуглу позната два елемента, од којих бар један мора бити страна, онда се остала три елемента могу израчунати помоћу постављених веза између тих елемената. Такво одређивање непознатих елемената зове се *решавање правоуглог троугла.*

Примери:

1. Познато је: $c = 15\ m$, $\alpha = 39^0$. Израчунати: β, a, b.
Како је $\alpha+\beta=90^0$, то одмах добијамо $\beta=90^0-39^0=51^0$.
Даље је: $a = c\sin\alpha$, па како је из таблице $\sin 39^0 \approx 0{,}62932$, то имамо $a \approx 0{,}62932 \times 15\ m \approx 9{,}4398\ m \approx 9{,}44\ m$.
Другу катету b одредићемо из везе $b = c\cos\alpha$. Како је $\cos 39^0 \approx 0{,}77715$, добија се $b \approx 0{,}77715 \times 15\ m \approx 11{,}65725\ m \approx 11{,}66\ m$.
Проверавање тачности ових резултата може се извршити помоћу Питагорине теореме $a^2 + b^2 = c^2$. Пошто је у нашем случају $a^2 \approx 89{,}11\ m^2$, $b^2 \approx 135{,}96\ m^2$ и $c^2 = 225\ m^2$, видимо да је

$$a^2 + b^2 \approx 225{,}07\ m^2$$

и да се према томе разликује од c^2 за $0{,}07\ m^2$. То је довољно тачно с обзиром да смо ми уместо тачних вредности a и b узели само приближне вредности.

2. Познато је: $a = 16\ cm$, $c = 19\ cm$. Израчунати: α, β, b.
Како је $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, то се добија $\sin\alpha = \frac{16}{19} \approx 0{,}84211$. Пошто се тај број у таблици синуса не налази, а најближи му је

број 0,83867 коме одговара угао од 57^0, то се може узети $\alpha \approx 57^0$. После тога се израчуна $\beta \approx 33^0$. За одређивање катете b имамо: $b = a\operatorname{cotg}\alpha$, одакле $b \approx 16\ cm \times \operatorname{cotg} 57^0 \approx 0{,}64941 \times 16\ cm \approx 10{,}39056\ cm \approx 10{,}39\ cm$.

Вежбања

1. Одредити непознате елементе правоуглог троугла, ако је дато:

a)	$c = 21\ m$,	$\beta = 15^0$;	b)	$c = 3\ cm$,	$b = 2\ cm$;
c)	$a = 18\ cm$,	$\alpha = 81^0$;	d)	$a = 32\ m$,	$\beta = 34^0$;
e)	$a = 17\ m$,	$b = 13\ m$;	f)	$c = 105\ m$,	$\alpha = 75^0$.

2. Сенка штапа дужине $1{,}2\ m$ износи $1{,}4\ m$. Одредити Сунчеву висину (тако се зове угао који чини зрак према Сунцу са хоризонтом).

3. У кругу је повучена тетива дужине $12\ cm$ са централним растојањем од $5\ cm$. Одредити број лучних степена мањег лука који одговара тој тетиви.

4. У равнокраком троуглу је основица $10\ cm$ и угао при врху 50^0. Одредити крак, висину која одговара основици и угао на основици.

5. Одредити угао између дијагонала правоугаоника са димензијама $7\ cm$ и $9\ cm$.

6. У кругу полупречника $5\ cm$ повучена је тетива дужине $2\ cm$. Одредити оштри периферијски угао над том тетивом.

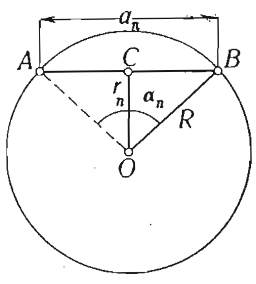
7. Кад имамо на расположењу метар и угломер, како можемо мерењем и рачуном одредити висину неког предмета, на пр. дрвета.

ГЛАВА VIII

ИЗРАЧУНАВАЊА КОД ПРАВИЛНИХ ПОЛИГОНА И ОБИМ КРУГА

§ 46. Израчунавање и конструкција неких правилних многоуглова

Означимо са a_n страну правилног многоугла (полигона) са n страна, са R полупречник описаног круга и са r_n полупречник уписаног круга (сл. 136). Ако је ма која од ове три величине позната (за дато n), остале се могу израчунати — многоугао је потпуно одређен.



Слика 136

1. Нека је дата страна a_n. Пошто је познат и централни угао $\alpha_n = \frac{360^0}{n}$, може се конструисати равнокраки троугао AOB. Узимајући O за центар круга опишемо круг кроз тачке A и B, а остала темена конструишемо преношењем дужи a_n као тетиве.

2. Ако је дат полупречник R, треба поделити круг на n једнаких делова, па спојити деоне тачке.

3. Најзад, ако је дат полупречник уписаног круга r_n, треба поделити круг тог полупречника на n једнаких делова и кроз деоне тачке повући тангенте на круг.

Између a_n, R и r_n из правоуглог троугла BOC постоји по Питагориној теореми веза:

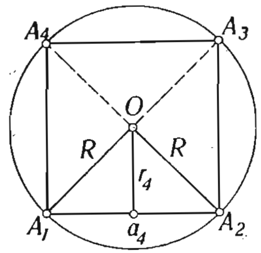
$$R^2 = r_n^2 + \left(\frac{1}{2}\,a_n\right)^2.$$

1. Израчунавање стране уписаног квадрата

Ако у кругу полупречника R повучемо два управна

пречника A_1A_3 и A_2A_4 (сл. 137) па по реду спојимо крајеве, добићемо квадрат као правилни четвороугао. Из троугла A_1OA_2 имамо $a_4^2 = 2R^2$, тј.

$$a_4 = R\sqrt{2}.$$



Слика 137

Показати да је

$$r_4 = \frac{1}{2}\,a_4 = \frac{1}{2}\,R\sqrt{2}.$$

2. Израчунавање стране уписаног правилног шестоугла

Како је централни угао правилног шестоугла 60^0, троугао A_1A_2O (сл 138) је равностран и према томе је

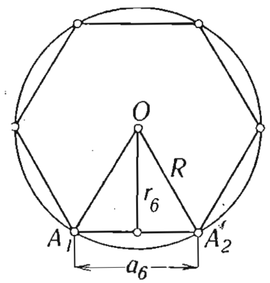
$$a_6 = R.$$

Из ове особине следује начин конструисања правилног шестоугла. Осим тога је

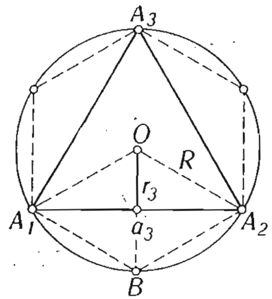
$$r_6 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = \frac{1}{2}\,R\sqrt{3} = \frac{1}{2}\,a_6\sqrt{3}\,.$$

3. Израчунавање стране уписаног равностраног троугла

Ако се споји узастопце свако друго теме правилног уписаног шестоугла, добиће се равнострани троугао као пра-



Слика 138



Слика 139

вилни уписани троугао (сл. 139). Из правоуглог троугла BA_1A_3 по Питагориној теореми је:

$$a_3^2 = (2R)^2 - R^2 \qquad \text{(зашто?)}$$

одакле је

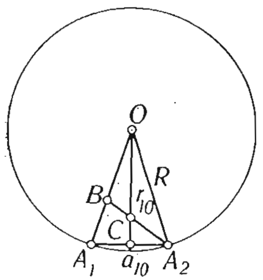
$$a_3 = R\sqrt{3}.$$

Како је A_1BA_2O ромб, то је

$$r_3 = \frac{1}{2}R = \frac{1}{6}a_3\sqrt{3}\,.$$

* 4. Израчунавање стране уписаног правилног десетоугла

Нека је A_1A_2 (сл. 140) страна a_{10} уписаног правилног десетоугла. Како је централни угао таквог многоугла 36°, угао на основици A_1A_2 равнокраког троугла OA_1A_2 износи 72°. Ако се повуче симетрала угла A_1A_2O, онда је $A_1A_2 = A_2B = BO = a_{10}$. Према теореми 103 је



Слика 140

$$OA_2 : A_1A_2 = BO : BA_1 \quad \text{или}$$

$$R : a_{10} = a_{10} : (R - a_{10}),$$

одакле се може извести ова теорема:

Теорема 124. *Страна уписаног правилног десетоугла је већи отсечак полупречника подељеног непрекидно.*

Према томе је (стр. 107)

$$a_{10} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Из △ A_1CO може се израчунати r_{10} по Питагориној теореми

$$r_{10} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_{10}^2} = \frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.$$

Пошто нам је познато како се дуж може поделити непрекидно (стр. 107), може се конструисати страна правилног десетоугла. *

5. Израчунавање стране a_{2n} уписаног правилног многоугла са $2n$ страна помоћу стране a_n уписаног правилног многоугла са n страна

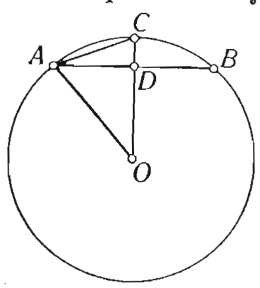
Нека је $AB = a_n$ (сл. 141), $OD \perp AB$ и према томе је $AC = a_{2n}$. По теореми 110 може се написати:

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2\,CO\cdot OD \quad \text{или}$$

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2Rr_n\,.$$

Како је $r_n = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$, може се ставити

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2} \quad \text{и најзад}$$



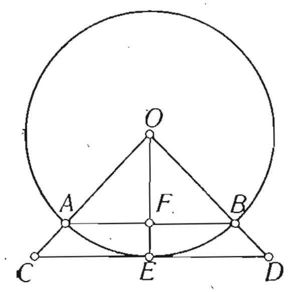
Слика 141

$$a_{2n}^2 = 2R^2\left[1 - \sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2R}\right)^2}\,\right].$$

Помоћу овог обрасца могу са израчунати стране a_8, a_{16}, $a_{32}, \cdots$, кад се пође од стране квадрата $a_4 = R\sqrt{2}$; стране a_{12}, a_{24}, $a_{48}, \cdots$, кад се пође од стране $a_6 = R$; или a_{20}, a_{40}, $a_{80}, \cdots$, кад се пође од стране $a_{10} = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right)$.

6. Израчунавање стране b_n описаног правилног многоугла са n страна помоћу стране a_n уписаног правилног многоугла са истим бројем страна

Нека је $CD = b_n$ страна описаног правилног многоугла и $AB = a_n$ страна уписаног правилног многоугла са истим бројем страна (сл. 142). Како је $\triangle OCD \backsim \triangle OAB$ (зашто?), то имамо



Слика 142

$$CD : AB = OE : OF \quad \text{или}$$

$$b_n : a_n = R : \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}\,,$$

јер је из правоуглог троугла AOF: $OF = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}\,.$

Најзад је

$$b_n = \frac{Ra_n}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}} = \frac{a_n}{\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2R}\right)^2}}\,.$$

Вежбања

1. Израчунати: *a*) a_8 помоћу a_4, *b*) a_{12} помоћу a_6, * *c*) a_{20} помоћу a_{10}, * *d*) a_{24} помоћу a_{12}.
2. Конструисати правилни осмоугао, кад је дата страна a_8.
3. Дат је квадрат стране a_4. Одредити како му треба отсећи углове да се добије правилни осмоугао.
4. Дат је круг полупречника R. Израчунати страну описаног *a*) квадрата, *b*) равностраног троугла, *c*) правилног шестоугла и * *d*) правилног десетоугла. *

* 5. Конструисати правилни десетоугао, кад је дата страна.

6. Поделити круг на пет једнаких делова. *
7. У дати равнострани троугао уписати други равнострани троугао са странама управним на стране првог троугла.

8. Зашто се за одређени број n не може a_n и r_n узети по вољи?

* 9. Конструисати правилни десетоугао, кад је позната дужина најмање дијагонале.

10. Конструисати правилни петоугао, кад је позната дужина дијагонале.

11. Конструисати правилни петнаестоугао, уписан у дати круг, узимајући у обзир да је: a) $^1/_3 - ^1/_5 = ^2/_{15}$, b) $^1/_6 - ^1/_{10} = ^1/_{15}$.

12. Објаснити зашто се помоћу шестара и лењира може поделити круг на:

$$2^n, \quad 3 \cdot 2^n, \quad 5 \cdot 2^n, \quad 15 \cdot 2^n$$

једнаких делова, кад је n ма који цео број. *

13. Доказати да је

$$\frac{1}{b_{2n}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n},$$

где су a_n и b_n стране уписаног односно описаног правилног n - угла, а b_{2n} страна описаног $2n$ - угла.

14. Доказати да је

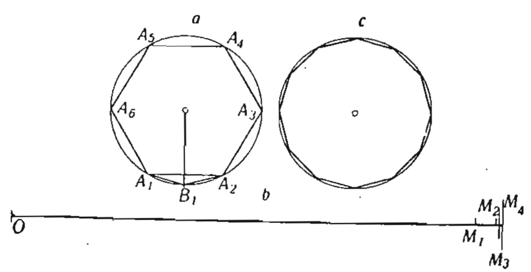
$$2a_{2n}{}^2 = b_{2n}a_n,$$

где су a_{2n} и b_{2n} стране уписаног односно описаног правилног $2n$ - угла, а a_n — страна уписаног правилног n - угла.

15. Израчунати обим a) равностраног троугла, b) квадрата, c) правилног шестоугла, * d) правилног десетоугла * уписаног у кругу полупречника $10\,cm$.

§ 47. Израчунавање обима круга

Да бисмо одредили дужину кружне линије, узмимо круг (сл. 143, a) и упишимо у њега правилни многоугао, на пр. шестоугао $A_1A_2 \ldots A_6$. На једној правој (сл. 143, b) одмеримо од тачке O дужину његовог обима $c_1 = OM_1$. Удвостручимо сад број страна, па ћемо добити правилни 12-угао (сл. 143, c) и његов обим $c_2 = OM_2$ поново одмеримо од тачке O. Јасно је, да мора бити $c_2 > c_1$, јер смо сваку страну шестоугла, на пр. A_1A_2, заменили са две стране дванаестоугла $A_1B_1 + B_1A_2$. Међутим је у троуглу $A_1B_1A_2$ увек $A_1B_1 + B_1A_2 > A_1A_2$. Ако опет удвостручимо број страна, добићемо правилни 24-угао



Слика 143

са обимом $c_3 = OM_3$, при чему је $OM_3 > OM_2$. Ако се овај поступак настави, добиће се низ обима правилних уписаних полигона $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$, којима на правој одговарају тачке M_1, M_2, $M_3, \ldots, M_n, \ldots$, при чему је $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_n < \cdots$ Међутим, ниједан од ових обима не може бити већи од обима ма којег описаног правилног многоугла, на пр. шестоугла, јер конвексна затворена изломљена линија је по теореми 19 увек мања од изломљене линије која је обухвата. Према томе величина обима низа уписаних правилних многоуглова не може расти бескрајно, него мора тежити некој одређеној дужини, коју ћемо означити са C и којој одговара тачка M на нашој правој.

Повећавање броја страна може се увек продужити дотле, док разлика $C - c_n$ не постане мања од ма које унапред изабране, колико желимо мале дужине d. У овом случају се каже, да променљива величина c_n тежи одређеној граници (limes), сталној величини C. Та гранична вредност зове се *дужина кружне линије* или *обим круга.*

До исте граничне вредности дошли бисмо и полазећи од низа описаних правилних многоуглова. Врло је лако утврдити, да њихови обими опадају са повећавањем броја страна. Према томе обим круга се може овако дефинисати:

Обим круга је гранична вредност обима уписаног (или описаног) правилног многоугла, кад му број страна бескрајно расте.

Израчунавање обима круга може се овако извршити. Израчуна се прво обим, на пр., уписаног правилног шестоугла $c_1 = 6a_6 = 6R$. Затим се искористи образац (стр. 126) за одређивање стране уписаног правилног многоугла са двапут већим бројем страна

$$a_{2n} = R\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2R}\right)^2}}$$

и помоћу њега израчуна $c_2 = 12\,a_{12} = R \cdot 6{,}211656\ldots$, па даље редом $c_3 = 24a_{24}$ итд. Са друге стране, израчунају се обими описаних правилних многоуглова $C_1 = 6b_6 = R \cdot 4\sqrt{3}$, $C_2 = 12b_{12}$ итд., и то помоћу обрасца (стр. 127) за одређивање стране описаног правилног многоугла помоћу стране уписаног правилног многоугла

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_n}{2R}\right)^2}}.$$

Како и величине $c_1, c_2, \ldots$ и величине $C_1, C_2, \ldots$ садрже R као чинилац, може се одредити вредност односа $\frac{c_n}{2R}$ и $\frac{C_n}{2R}$ (обима уписаног односно описаног правилног многоугла и пречника круга). Кад се рачун изврши, онда вредности тих односа даје ова таблица:

Број страна	$c_n : 2R$	$C_n : 2R$
6	3	3,464101
12	3,105828	3,215390
24	3,132628	3,159659
48	3,139350	3,146086
96	3,141032	3,142714
192	3,141452	3,141873
384	3,141557	3,141662
768	3,141583	3,141610
1536	3,141590	3,141597

Ова таблица показује да односи $c_n : 2R$ и $C_n : 2R$ теже одређеној граничној вредности која даје $C : 2R$ — однос обима круга и пречника. Тај однос, као што се види, има за све кругове исту вредност. Ако се број, који даје тај однос, означи са π, онда се може написати:

$$\frac{C}{2R} = \pi .$$

Однос обима и пречника круга означио је словом π (*пи*) први пут Џоунз (1706 г.), али је та ознака у општу употребу ушла тек после славног математичара Ојлера (1707—1783 г.). То је прво слово од грчке речи *περιφέρεια* — периферија, обим. Ламберт је доказао 1770 год., да је π ирационалан број, тј. децималан број са бесконачним бројем децимала, али није периодичан, те се стога не може написати тачно у облику обичног разломка.

Како је π ирационалан број, то се за њега могу написати само приближне вредности са већом или мањом тачношћу. Навешћемо неколико важнијих приближних вредности броја π:

Архимедов број (Архимед 287—212 год. пре Хр.),

$$\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,(142857) \approx 3,14 .$$

Вредност 3,14 је довољна за многе практичне потребе.

Меџијев број (Adrian Metius око 1550 год.),

$$\pi \approx \frac{355}{113} \approx 3,1415929 .$$

Ову приближну вредност броја π лако је запамтити из шеме 113|355 коју чине три прва непарна броја по двапут написана.

Лудолфов број (Ludolf van Ceulen 1539—1610 год.) са 35 децимала:

$$\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288 .$$

После Лудолфа су други математичари израчунали број π са много већим бројем децимала. Тако је 1873 год. Виљем Шенкс израчунао број π са 707 децимала.

Од користи је за рачунање обратити пажњу и на број

$$\frac{1}{\pi} = 0,3188098 \ldots$$

са приближном вредношћу $\frac{1}{\pi} \approx 0,32$.

Кад је π познато, онда се из односа $C : 2R = \pi$ добија

$$C = 2\pi R = \pi D ,$$

тј. *обим круга је једнак двоструком производу броја π и полупречника круга или производу броја π и пречника круга.*

§ 48. Израчунавање дужине кружног лука и мерење угла

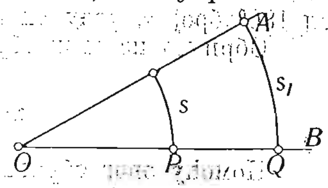
Израчунавање дужине кружног лука који има n степена, n_1 минута и n_2 секунди може се извршити без тешкоће. Дужина лука од 1^0 износи $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, од $1'$ износи $\frac{\pi R}{180 . 60}$ и од $1''$ износи $\frac{\pi R}{180 . 60 . 60}$, па се према томе за лук од n степена може написати

$$s = \frac{\pi R n}{180} ,$$

а за неки лук мерен степенима, минутима и секундима

$$s = \frac{\pi R}{180}\left(n + \frac{n_1}{60} + \frac{n_2}{60 . 60}\right) .$$

Нека је сад дат угао AOB (сл. 144). Полупречником $OP = R$ опишемо око темена угла O кружни лук дужине s између кракова угла. Затим другим полупречником $OQ = R_1$ опишемо кружни лук s_1 концентричан са првим. Пошто су луци s и s_1 хомотетични, може се написати пропорција



Слика 144

$$\frac{s}{R} = \frac{s_1}{R_1}.$$

Уопште, ако се опише ма који број кружних лукова око темена угла између кракова, биће

$$\frac{s}{R} = \frac{s_1}{R_1} = \frac{s_2}{R_2} = \cdots$$

То значи да однос $\frac{s}{R}$ за дати угао не зависи од величине полупречника, јер се са променом полупречника пропорционално мења и величина лука. Тај однос, дакле, зависи само од величине угла и може се узети за меру угла. То је *айсшракшни (неименовани)* број и ако га означимо са α, можемо написати

$$\alpha = \frac{s}{R}.$$

Према томе: *Угао се мери односом (размером) дужине лука и дужине одговарајућег йолуйречника.*

Ако је $\alpha = 1$, имамо $s = R$, тј. угао чији је лук једнак полупречнику (radius) одговара броју 1. Такав угао зове се *радијан.*

Кад се угао мери апстрактним бројем α, онда се из претходног обрасца добија

$$s = R\alpha,$$

тј. *дужина лука је једнака йроизводу йолуйречника и ценшралног угла* (мереног апстрактним бројем).

Пошто се углови могу мерити степенима, градима и апстрактним бројевима, то ћемо показати, како се може од једне мере прећи на другу.

1. Нека је дат угао од n^0. Одредити број α и обрнуто. Пошто је тада $s = \frac{\pi R n}{180}$, добиће се

$$\alpha = \frac{\pi n}{180}.$$

Одатле је јасно, да углу од 90^0 одговара број $\frac{\pi}{2}$, углу од 180^0 број π, углу од 360^0 број 2π итд.

Обрнуто из овог обрасца одмах имамо

$$n^0 = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^0.$$

Помоћу овог обрасца може се, поред осталог, израчу-

нати радијан у степенима, минутима и секундима. За то је потребно само поделити 180^0 са π. Приближна је вредност радијана

$$57^0\,17'\,44'',8.$$

2. Нека је дат угао од m^{gr}. Одредити број α и обрнуто. Лук од m^{gr} полупречника R износи

$$\frac{2\pi Rm}{400} = \frac{\pi Rm}{200}.$$

Стога се добија

$$\alpha = \frac{\pi m}{200}.$$

Обрнуто, из овог обрасца имамо

$$m^{gr} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 200^{gr}.$$

Приближна вредност радијана у градима износи:

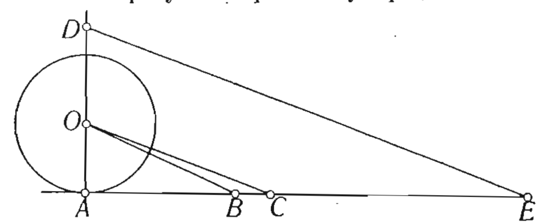
$$63^{gr},6620.$$

Вежбања

1. Израчунати приближву вредност броја π израчунавањем односа $c_n : 2R$ и $C_n : 2R$ и то почев од уписаног и описаног: *a*) квадрата,* *b*) правилног десетоугла. *

2. Конструисати приближно дужину полукруга, кад је: *a*) $\pi \approx \sqrt{10}$, *b*) $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (одредити у кругу полупречника R дужине $R\sqrt{2}$ и $R\sqrt{3}$), * *c*) $\pi \approx 4\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$ (водити рачуна да је $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right)$ страна уписаног правилног десетоугла). *

3. Израчунати приближву вредност π из ове конструкције:

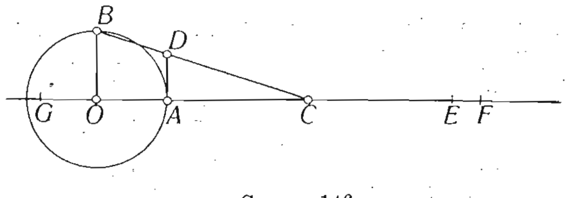


Слика 145

На тангенти у тачки A (сл. 145) одмерити $AB = 2R + \frac{1}{5}R$ и $AC = 2R + \frac{3}{5}R$. Тачке B и C спојити са центром. На правој AO одмерити $AD = OB$ и из тачке D повући праву $DE \parallel OC$. Дужина AE даје приближну вредност обима круга. ($AE : 2R = 3{,}1415919\ldots$). Показати да се ова дужина разликује од праве дужине обима мање од $2\,mm$ за круг полупречника $1\,km$.

4. Израчунати приближну вредност π из ове конструкције (сл. 146):

$OB \perp OA$, $AC = 2R$, $AD \parallel OB$, $CE = CD$,



Слика 146

$EF = \frac{3}{8} R$ и $OG = \frac{4}{5} R$. Тада је $FG \approx 2\pi R$.

5. Доказати да су за исту дужину лука на разним круговима централни углови обрнуто пропорционални полупречницима.

6. Доказати да се обими кругова разних полупречника односе као стране у њима уписаних равностраних троуглова.

7. Доказати да величина промене обима круга зависи само од величине промене полупречника, без обзира на величину самог полупречника.

8. На пречнику $2R$ датог круга конструисана су два једнака круга — сваки пречника R. У једну од области између та три круга уписан је круг који их додирује. У ком су односу обими првог круга, једног од друга два једнака и последњег круга?

9. Нека је дуж a подељена на n једнаких делова, па над сваким делом, наизменично, с једне и друге стране, нацртани полукругови. Доказати да дужина таласне линије, која тако постаје, $_{gr}$ не зависи од броја поделака.

10. Израчунати дужину лука код круга полупречника $2{,}5\,m$, ако је централни угао: *a*) 78^0, *b*) $102^{gr},5$, *c*) 0,6.

11. Израчунати централни угао чији је лук једнак страни уписаног *a*) равностраног троугла, *b*) квадрата, *c*) правилног шестоугла, * *d*) правилног десетоугла.*

12. Израчунати лук од 112^0, кад се зна да је за $4\,m$ дужи од свог полупречника.

13. Који број одговара углу од 30^0; 45^0; 60^0; 150^0; 225^0; 330^0?

14. Који број одговара углу од π^0?

15. Наћи у степенима, минутима и секундима углове којима одговарају бројеви: $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^{11}/_{21}$, $1\,^1/_3\,\pi$.

16. Који број одговара углу од 42^{gr}; 50^{gr}; 100^{gr}; 300^{gr}?

17. Наћи у градима, центезималним минутима и секундима углове којима одговарају бројеви:

$^1/_3$, $^4/_5$, $1\,^1/_2\,\pi$, $1\,^2/_3\,\pi$.

18. Ако је угао при врху равнокраког троугла половина угла на основици, који апстрактни број одговара том углу?

19. Дате су три стране троугла: $13\,cm$, $14\,cm$, $15\,cm$. Израчунати обим описаног круга.

20. Конструисати круг чији је обим једнак *a*) збиру, *b*) разлици обима два дата круга.

ГЛАВА IX

МЕРЕЊЕ ПОВРШИНЕ

§ 49. Површине многоуглова

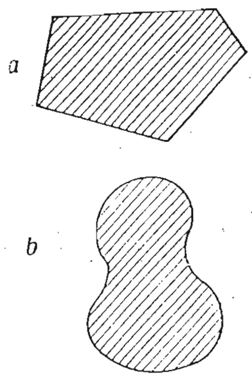
Свака затворена изломљена или крива линија у равни одваја од те равни једну област, део равни (сл. 147, *a* и *b*). Тај део равни, сматран као величина, зове се *површина*. Са површином као величином може се довести у везу број, при чему треба водити рачуна о овим правилима:

a) Свакои, са свих страна ограниченом, делу равни одговара позитивни број.

b) Број, који одговара површини две области без заједничких делова, једнак је збиру бројева те две области.

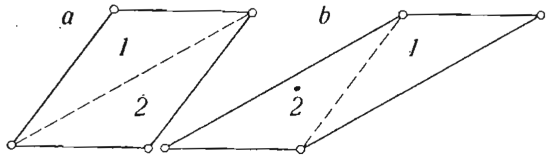
c) Подударним областима одговара исти број.

d) Бројеви, који одговарају разним областима, постају потпуно одређени чим се одреди број који одговара једној одређеној слици, на пр., одређеном квадрату или троуглу.



Слика 147

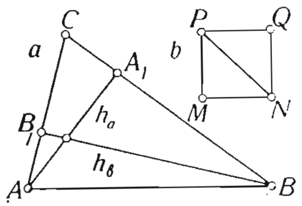
Две области су *једнаке* (или *еквивалентне*), ако се састоје из подударних делова. На пр., паралелограми *a* и *b* на сл. 148 једнаки су, јер се састоје из подударних троуглова.



Слика 148

Теорема 125. *Површина троугла једнака је половини производа основице и висине.*

Нека је дат $\triangle ABC$ (сл. 149, a). Ако се конструишу висине $AA_1 = h_a$ и $BB_1 = h_b$, онда је $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$ (зашто?) одакле



Слика 149

$$a : b = h_b : h_a,$$

тј.

$$ah_a = bh_b.$$

На тај начин производ стране и одговарајуће висине у троуглу, кад су мерене истом јединицом, не зависи од избора стране. Према томе, за мерни број површине троугла може се узети

$$k\, ah_a,$$

где је k ма који позитивни број. Вредност броја k може се изабрати тако, да површина квадрата са јединичном страном буде површина јединица. Како површину квадрата $MNPQ$ (сл. 149, b) дијагонала PN дели на два подударна правоугла троугла, добија се

$$MNQP = 2k \cdot MN \cdot MP = 2k,$$

ако је $MN = MP = 1$. Ако се сад постави као услов да површина тог квадрата буде јединица, онда је: $2k = 1$, одакле $k = \frac{1}{2}$. После тога се за површину троугла може написати

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\, ah_a$$

или

$$P_\triangle = \frac{1}{2}\, ah = a\frac{1}{2}\, bh_b = \frac{1}{2}\, ch_c.$$

С обзиром на извођење ове теореме, она у потпуности треба овако да се изрази: Број, који изражава површину троугла у квадратној јединици, једнак је, половини производа бројева који изражавају основицу и висину у односној дужинској јединици.

Теорема 126. *Кад су познате све три стране троугла a, b, c, онда се површина троугла израчунава по обрасцу*

$$P_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

где је $2s = a + b + c$ (Херонов образац).

На стр. 104 нашли смо, да је висина

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

кад су познате све три стране троугла. Одавде само заменом h_a у обрасцу $P_\triangle = \frac{1}{2}\, ah_a$ добија се тражени образац. Сад видимо да израз $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ који смо на стр. 104 означили са P претставља површину троугла.

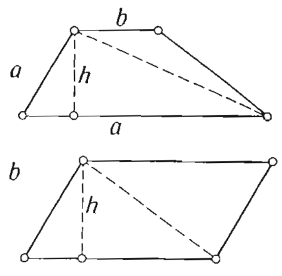
Теорема 127. *Површина трапеза једнака је производу полузбира паралелних страна и висине.*

Пошто дијагонала дели трапез на два троугла чије су површине (сл. 150, a) $\frac{1}{2}\, ah$ и $\frac{1}{2}\, bh$, то је површина трапеза:

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}(a + b)\, h \quad \text{или}$$

$$P_{\triangle} = mh,$$

ако се уведе средња линија $m = \frac{1}{2}(a + b)$.



Слика 150

Теорема 128. *Површина паралелограма једнака је производу основице и висине.*

Дијагонала дели паралелограм (сл. 150, b) на два подударна троугла са површинама по $\frac{1}{2}\, ah$ и према томе површина целог паралелограма:

$$P_{\square} = ah.$$

Теорема 129. *Површина правоугаоника једнака је производу основице и висине.*

Како је сваки правоугаоник истовремено и паралелограм, то се из претходне теореме закључује:

$$P_{\square} = ah \, .$$

Овај производ је истовремено и производ димензија правоугаоника.

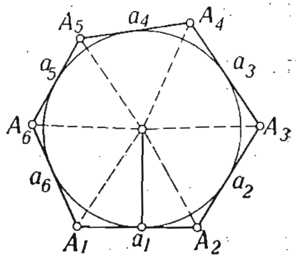
Теорема 130. *Површина квадрата је једнака квадрату стране.*

Квадрат је правоугаоник једнаких димензија, па је

$$P_{\square} = a^2.$$

Теорема 131. *Површина сваког тангентног многоугла једнака је производу полуобима многоугла и полупречника круга.*

Нека је $A_1A_2 \dots A_6$ (сл. 151) око круга полупречника r описан многоугао. Ако се споји центар круга са теменима многоугла, добиће се низ троуглова исте висине r. Према томе је површина нашег многоугла:



Слика 151

$$P = \frac{1}{2}\, a_1 r + \frac{1}{2}\, a_2 r + \cdots + \frac{1}{2}\, a_6 r =$$

$$= \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_6)\, r = sr \, ,$$

ако се са s означи полуобим, тј. $s = \frac{1}{2}\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_6)$.

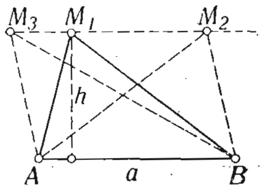
Последица I. Површина сваког правилног многоугла једнака је производу полуобима и полупречника уписаног круга.

Последица II. У сваком троуглу је $r = P_{\triangle} : s$, ако је r полупречник уписаног круга.

Израчунавање површине ма каквог многоугла може се извршити на више начина, кад се тај многоугао подели на такве делове чија се површина може по наведеним обрасцима израчунати. Поред тога, површина многоугла може се одредити и претварањем у троугао исте површине. Да бисмо решили тај задатак, мора се претходно доказати ова теорема:

Теорема 132. *Геометриско место врхова троуглова једнаких површина са истом основицом јесте права паралелна тој основици.*

Како је површина троугла једнака $\frac{1}{2}\, ah$ (сл. 152), то ће при истој основици a имати површина сталну вредност, ако се висина h не мења. То значи баш, да супротни врх мора лежати на истом растојању од AB, тј. на правој паралелној са AB на растојању h.

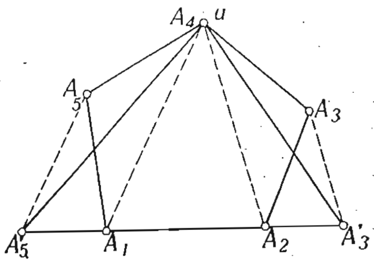


Слика 152

Сад се може решити задатак:

Претворити дати многоугао у троугао исте површине.

Нека је дат, на пр., многоугао $A_1A_2 \dots A_5$ (сл. 153) који треба претворити у троугао исте површине. Спојимо A_4 са A_1 и A_2. Из тачке A_3 повуцимо $A_3A_3{}' \parallel A_4A_2$ до пресека A'_3 са правом стране A_1A_2, па затим исто тако $A_5A'_5 \parallel A_4A_1$. Тада троугао $A_5{}'A_3{}'\,A_4$ има исту површину као и наш многоугао. Доказати.



Слика 153

Ако хоћемо да одредимо онај квадрат, чија је површина једнака површини датог многоугла (то се зове *квадратура* датог многоугла), онда се добијени троугао претвори у квадрат исте површине. То се ради на основу једначине $\frac{1}{2}\, ah = x^2$, која даје пропорцију $^1/_2\; a : x = x : h$, где је x страна траженог квадрата и према томе се своди на конструкцију средње пропорционале.

Вежбања

1. Изразити и доказати теорему за површину правоуглог троугла.
2. Извести образац за површину равнокраког троугла, ако је дата основица a и крак b.
3. Извести образац за површину равностраног троугла.
4. Израчунати површину троугла чије су стране познате:
   a) 9,2 *cm*; 3,9 *cm*; 8,5 *cm*.
   b) 5 *cm*; 7 *cm*; 6 *cm*.
5. Израчунати површину равнокраког троугла основице 60 *cm*, а крака 50 *cm*.
6. У неком равнокраком троуглу висина је једнака основици. Изразити површину помоћу крака b.
7. Доказати да су висине паралелограма обрнуто пропорционалне односним странама.
8. Доказати да је површина трапеза једнака производу једног крака и дужине нормале спуштене из средине другог крака на први.
9. Извести образац за одређивање површине ромба и делтоида помоћу дијагонала.

10. Доказати да четвороуглови, који имају једнаке дијагонале и угао између њих, имају једнаке површине.

11. Ако су у трапезу познате основице a, b и висина h, израчунати површине оба дела трапеза, на које га дели средња линија.

12. Израчунати површину равностраног троугла помоћу: *a*) полупречника уписаног круга r, *b*) полупречника описаног круга R, *c*) висине h.

13. Израчунати полупречник круга уписаног у троуглу, чије су стране дате:

a) 2,4 cm; 0,7 cm; 2,5 cm.
b) 11 dm; 15 dm; 13 dm.

14. У неким земљама је формат хартије нормиран на овај начин. Хартија има увек облик таквог правоугаоника, да кад се превије по симетрали веће стране добија се правоугаоник сличан претходном. Одредити димензије полазног правоугаоника, ако је његова површина једнака квадратном метру.

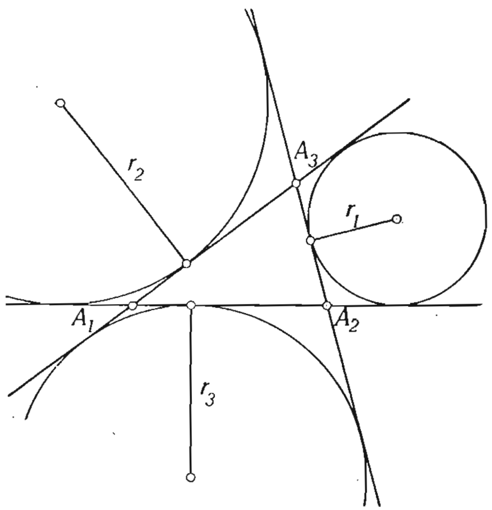
15. Доказати да је површина уписаног правилног шестоугла једнака $^3/_4$ површине описаног правилног шестоугла око истог круга.

16. Правоугаоник висине 1 cm и основице 15 cm поделити на три једнака дела помоћу две паралеле које са основицом чине угао од 45°.

17. Поделити површину троугла са две праве, које иду кроз исто теме, на делове у размери $l : m : n$ (на пр. 1 : 3 : 4).

18. Поделити површину паралелограма помоћу правих, које иду из истог темена, на три дела у размери $l : m : n$.

19. Располовити површину квадрата правом која пролази кроз дату тачку на страни квадрата.



Слика 154

20. Дати правоугаоник претворити у квадрат исте површине.

21. Нека су r_1, r_2, r_3 полупречници споља уписаних кругова у троуглу $A_1A_2A_3$ (сл. 154). Показати да је

$$r_1 = \frac{P_\triangle}{s-a},\ r_2 = \frac{P_\triangle}{s-b},\ r_3 = \frac{P_\triangle}{s-c}.$$

22. Доказати тачност обрасца.

$$P_\triangle = \sqrt{r\, r_1\, r_2\, r_3},$$

где је r полупречник уписаног круга, а r_1, r_2, r_3 полупречници споља уписаних кругова.

23. Доказати тачност ових образаца:

$$a)\ \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c};$$

$$b)\ \frac{1}{r_1} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a},\quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b},\quad \frac{1}{r_3} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};$$

$$c)\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3};$$

$$d)\ 4R = r_1 + r_2 + r_3 - r.$$

24. Конструисати квадрат једнак $^2/_3$ површине другог квадрата.

25. Нацртати квадрат једнак површини правилног шестоугла.

26. Дате су стране трапеза: основице $a = 28\ cm$, $b = 20\ cm$ и краковн $c = 15\ cm$ и $d = 17\ cm$. Израчунати површину трапеза.

27. Ако се средина једног крака трапеза споји са крајевима другог крака, добија се троугао чија је површина једнака половини површине трапеза. Доказати.

28. Доказати да свака права линија, која пролази кроз средину средње линије трапеза и сече основице трапеза, полови трапез.

29. Израчунати површину троугла, кад су дате: *a*) све три тежишне линије, *b*) све три висине, *c*) две стране a и b и висина h_c.

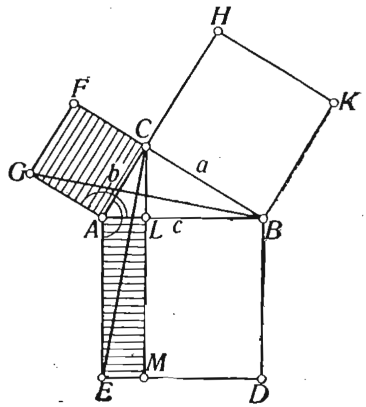
§ 50. Питагорина теорема (Еуклидов доказ).

Теорема 133. *Површина квадрата конструисаног на хипотенузи једнака је збиру површина квадрата конструисаних на катетама.*

Постоји врло много доказа ове теореме чувеног грчког математичара Питагоре. На стр. 102 показали смо, да у сваком правоуглом троуглу између мерних бројева хипотенузе c и катета a и b постоји веза

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Пошто је c^2 мера површине квадрата конструисаног на хипотенузи, а a^2 и b^2 одговарају површинама квадрата конструисаних на катетама, то ова једначина доказује Питагорину теорему. Осим овог рачунског доказа постоје и многи чисто геометриски докази ове теореме, где се врши непосредно упоређивање поменута три квадрата. Такав је овај Еуклидов доказ.



Слика 155

Нека је дат правоугли троугао ABC (сл. 155) са правим углом код C. Конструишемо квадрате: $ABDE$ на хипотенузи $AB=c$, $ACFG$ на катети $AC=b$ и $BCHK$ на катети $BC=a$.

Ради доказа спустимо хипотенузину висину CL и продужимо је до пресека M са ED. Тада права LM дели квадрат $ABDE$ на два правоугаоника. Сад се може доказати да је правоугаоник $ALME$ једнак квадрату $ACFG$, а правоугаоник $LBDM$ — квадрату $BCHK$. У том циљу спојити тачку B са G и тачку C са E. Добиће се два троугла: $\triangle ABG$ и $\triangle AEC$. Ти троуглови имају једнаке по две стране ($GA=AC$ и $AB=AE$) и захваћене углове $\sphericalangle GAB=\sphericalangle CAE$ (зашто?), па су према правилу [СУС] подударни и имају једнаке површине. С друге стране, пошто је површина троугла AGB једнака половини квадрата $ACFG$, јер има с њим исту основицу AG и висину AC, а површина троугла ACE једнака половини правоугаоника $ALME$ из истих разлога, то је површина квадрата $ACFG$ једнака површини правоугаоника $ALME$. Исто тако се спајањем тачке A са K и C са D може доказати, да је површина квадрата $BCHK$ једнака површини правоугаоника $LBDM$. На крају се онда закључује, да је квадрат $ABDE$ једнак збиру квадрата $ACFG$ и $BCHK$.

Вежбања

1. Доказати Питагорину теорему и на неки други начин (на пр. према сликама у нашој Геометрији за IV разред стр. 34).

2. Доказати једнакост

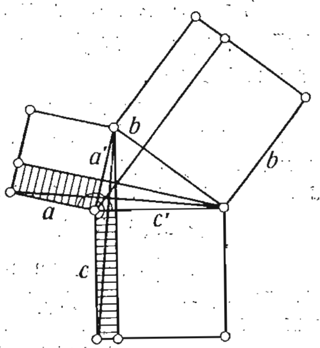
$$c^2=a^2+b^2-2bb'=a^2-aa'+b^2-bb'$$

помоћу површина према слици 156 (прво доказати да је $aa'=bb'$).

3. Доказати слично претходном задатку једнакост

$$c^2=a^2+b^2+2bb'$$

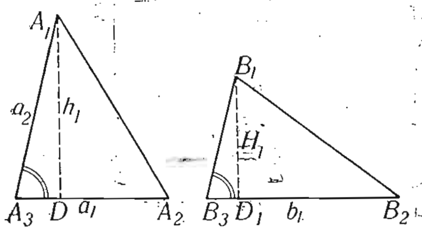
за тупоугли троугао.



Слика 156

§ 51. Однос површина сличних слика

Теорема 134. *Површина два троугла са једним једнаким углом пропорционалне су производима страна које чине те углове.*



Слика 157

Нека је у троугловима $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ (сл. 157) $\sphericalangle A_3=\sphericalangle B_3$. Како је површина првог троугла $P=\frac{1}{2}a_1h_1$, а другог $Q=\frac{1}{2}b_1H_1$, то се добија

$$\frac{P}{Q}=\frac{a_1h_1}{b_1H_1},$$

Међутим је $\triangle A_1A_3D\sim\triangle B_1B_3D_1$ (зашто?) одакле је $\frac{h_1}{H_1}=\frac{a_2}{b_2}$ и после замене најзад

$$\frac{P}{Q}=\frac{a_1a_2}{b_1b_2},$$

што је требало доказати.

Теорема 135. *Површине сличних троуглова или многоуглова пропорционалне су квадратима одговарајућих страна.*

1. Код сличних троуглова су сви углови једнаки, па је према претходној теореми

$$\frac{P}{Q}=\frac{a_1a_2}{b_1b_2},$$

где су P и Q површине два таква троугла. С друге стране знамо, да су код сличних троуглова све стране пропорционалне, тј.

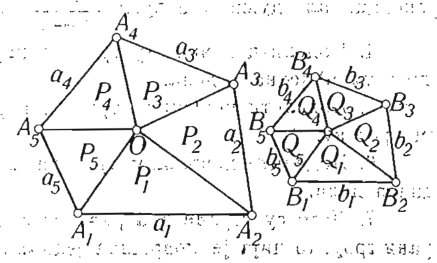
$$\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1}{b_1}.$$

Ако се изврши замена, добија се

$$\frac{P}{Q}=\frac{a_1^2}{b_1^2},$$

што је требало доказати.

2. Видели смо раније (теорема 99), да се слични многоуглови могу поделити у сличне и хомологно распоређене троуглове. Тако су, на пр., два слична многоугла $A_1A_2A_3\ldots$ и $B_1B_2B_3\ldots$ (сл. 158) подељени на сличне троуглове. Ако површине тих троуглова означимо са $P_1, P_2, P_3, \ldots$ у једном многоуглу, а са $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ у другом, онда за сваки пар сличних троуглова важи:



Слика 158

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_1^2}{b_1^2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{a_2^2}{b_2^2}, \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{a_3^2}{b_3^2}, \ldots$$

Али стране сличних многоуглова су пропорционалне, тј.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots$$

и тако се може написати

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_3}{Q_3} = \cdots = \frac{a_1^2}{b_1^2}.$$

Међутим на основу теореме 92 мора бити:

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\cdots}{Q_1+Q_2+Q_3+\cdots} = \frac{P}{Q} = \frac{a_1^2}{b_1^2},$$

где P и Q означавају површине сличних многоуглова, а ово потврђује нашу теорему.

Може се врло лако показати, да су површине сличних слика пропорционалне квадратима ма којих хомологних дужина (на пр. висина у троуглу итд.). То се може извести као вежба.

Последица. Површине правилних многоуглова са истим бројем страна пропорционалне су квадратима њихових страна или квадратима полупречника описаних или уписаних кругова

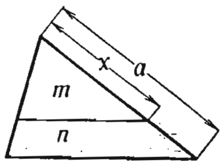
Вежбања

1. Код којих су троуглова површине пропорционалне странама?

2. Доказати да се обими сличних слика односе као ма који пар хомологних страна.

3. Поделити површину троугла правом паралелном основици на два дела у размери $m:n$.

Упут. Из слике 159 следује $x^2 : a^2 = m : (m+n)$, па се према томе проблем своди на конструисање израза $x = \sqrt{a \cdot \frac{m}{m+n} a}$, тј. средње пропорционале дужи a и дужи $\frac{m}{m+n} a$.



Слика 159

4. Поделити површину троугла паралелама према основици на три (или четири) једнаки дела.

* 5. Поделити површину троугла паралелама према основици у златном пресеку. *

6. Поделити површину троугла нормалама на основицу на три једнака дела.

7. Дате су стране два равнострана троугла. Конструисати равнострани троугао чија је површина једнака збиру (или разлици) површина датих троуглова.

8. Конструисати паралелограм сличан датом са двапут већом површином.

9. Два ромба разних величина имају исти угао. Конструисати ромб са истим таквим углом чија је површина збир (разлика) површина два дата ромба.

10. Конструисати квадрат пет пута веће површине од датог квадрата.

11. Конструисати квадрат двапут веће површине од датог ромба.

12. Доказати да, ако су P_1, P_2 и P_3 површине ма каквих сличних многоуглова конструисаних на хипотенузи и катетама, важи једначина:

$$P_1 = P_2 + P_3.$$

13. Конструисати квадрат исте површине са равностраним троуглом познате стране a.

§ 52. Површина круга, кружног сектора, кружног сегмента и кружног прстена

Теорема 136. *Површина круга једнака је производу броја π и квадрата полупречника, тј.*

$$P = \pi R^2,$$

где је са P означена површина круга, а са R као увек његов полупречник.

Нека је око датог круга описан правилни многоугао са n страна и нека је S_n његов обим. Површина P_n тог многоугла је

$$P_n = \frac{1}{2} S_n \, . \, R.$$

Видели смо, да кад број страна n расте, обим правилног многоугла S_n тежи граничној вредности — обиму круга C. Према томе је гранична вредност десне стране наше једначине, кад n расте, $\frac{1}{2} CR$. Ову граничну вредност узимамо за величину површине круга, и према томе је

$$P = \frac{1}{2} CR = \pi R^2,$$

пошто је $C = 2\pi R$.

Последица. Површине кругова пропорционалне су квадратима полупречника (или пречника).

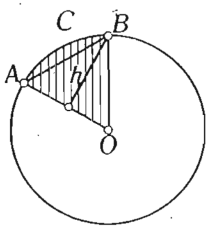
Како је $P = \pi R^2$ и $P_1 = \pi R_1^2$, то је:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{4R_1^2} = \frac{D^2}{D_1^2},$$

где су D и D_1 пречници.

Одређивање квадрата чија је површина једнака површини круга зове се *квадратура круга*. Ако се страна траженог квадрата означи са x, биће: $x^2 = \pi R^2 = \pi R \,.\, R$. То значи, да је страна траженог квадрата средња пропорционала полупречника и дужине полукруга. Пошто се одређивање дужине полукруга помоћу шестара и лењира може извршити само приближно, то се и квадратура круга само помоћу шестара и лењира може извршити исто тако једино приближно.

Теорема 137. *Површина кружног сектора једнака је половини производа његовог лука и полупречника.*



Слика 160

Нека централни угао сектора (сл. 160) има n степена. Пошто површина кружног сектора, чији је централни угао 1^0, износи $\frac{P}{360}$, то кружном сектору, чији је централни угао n^0, одговара површина

$$p = \frac{Pn}{360} = \frac{\pi n R^2}{360}.$$

Међутим је лук $s = \frac{\pi n R}{180}$, па се заменом добија

$$p = \frac{1}{2} sR,$$

што је требало доказати.

Кад централни угао сектора има n^0, n_1', n_2'', његова се површина одређује по обрасцу

$$p = \frac{\pi R^2}{360}\left(n + \frac{n_1}{60} + \frac{n_2}{60\,.\,60}\right).$$

Површина *кружног сегмента* q (сл. 160), ако је његов централни угао удубљен, може се одредити као разлика површине p сектора $ACBO$ и површине $p_\triangle$ троугла ABO. На тај начин је

$$q = p - p_\triangle,$$

тј.

$$q = \frac{1}{2} R(s - h_R),$$

где је h_R висина троугла ABO која одговара краку R.

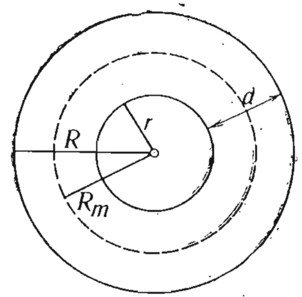
Ако је централни угао, изражен бројем, једнак α, онда је $s = R\alpha$ и $h_R = R \sin\alpha$, па према томе

$$q = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha).$$

Кад је централни угао изражен у степенима, онда је иста површина

$$q = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi n}{180} - \sin n^0\right).$$

Површина *кружног прстена* Q (сл. 161) са полупречницима — спољашњим R и унутрашњим r, очигледно је једнака:



Слика 161

$$Q = \pi R^2 - \pi r^2$$

или

$$Q = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r).$$

Ако се уведе полупречник средњег круга

$$R_m = {}^1/_2 (R + r)$$

и *дебљина* d прстена

$$d = R - r,$$

површина кружног прстена може се и овако изразити:

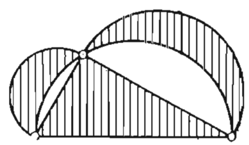
$$Q = 2\pi R_m d,$$

или речима: *Површина кружног прстена једнака је производу обима средњег круга и дебљине прстена.*

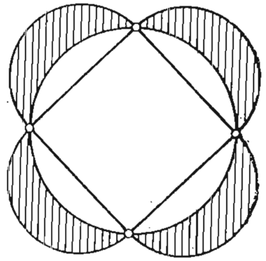
Вежбања

1. Доказати да површине P_1, P_2 и P_3 кругова конструисаних над хипотенузом и катетама задовољавају једначину: $P_1 = P_2 + P_3$.

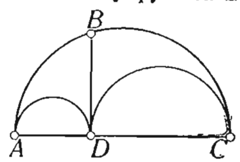
2. Доказати да је збир површина (Хипократових) месечастих рубова, ограничених полукруговима над хипотенузом и над катетама (сл. 162), једнак површини тог троугла.


Слика 162

3. Око датог квадрата описан је круг и на свакој његовој страни конструисани су полукругови (сл. 163). Доказати да је збир површина Хипократових месечастих рубова једнак површини квадрата.


Слика 163

4. Нека је ABC дати полукруг (сл. 164). Над пречником AC нацртају се два полукруга са исте стране с које је и први полукруг као што показује слика. Доказати да је



Слика 164

површина између лукова тих полукругова једнака површини круга чији је пречник BD.

5. Чувени сликар Албрехт Дирер (1471—1528) узимао је, да је површина квадрата једнака површини круга чији је пречник 0,8 дијагонале квадрата. Која приближна вредност броја π одговара тој конструкцији?

6. Конструисати круг трипут већи од датог круга.

7. Поделити круг концентричним круговима на четири једнака дела.

8. Који су кружни сектори слични и чему су пропорционалне њихове површине?

9. Да ли код сваког кружног сегмента треба од површине сектора одузимати површину одговарајућег троугла? кад треба додавати?

10. Кад су кружни сегменти слични? Чему су пропорционалне површине сличних сегмената?

11. Тетива са централним растојањем једнаким половини полупречника дели круг на два сегмента. Израчунати приближно размеру површина тих сегмената.

12. Два круга једнаких полупречника секу се тако, да један иде кроз центар другог. Израчунати заједничку површину.

13. Израчунати површину сектора круга полупречника 25 m чији је централни угао једнак $^3/_4$.

14. Израчунати површину сектора, кад је $R = 10\ cm$ и централни угао π^0 (пи степена).

15. Дужина лука од 60^0 је $36\,^2/_3\, m$. Наћи полупречник круга и површину одговарајућег сектора.

16. Израчунати површину кружног сектора чији је лук за 4 m већи од полупречника круга, а централни му је угао 112^0.

17. Конструисати круг чија је површина једнака површини датог кружног прстена.

18. Колика је површина исечка из кружног прстена који одговара централном углу од 48^0, кад су полупречници $R = 12\ cm$ и $r = 8\ cm$?

19. Кружни прстен са полупречницима R и r пресечен је правом са централним растојањем $d < r$. Написати образац за израчунавање мањег дела прстена који се тако добија и извршити рачун, кад је $R = 15\ cm$, $r = 10\ cm$ и $d = 8\ cm$.

20. Нека су P, P_a, P_b, P_c површине уписаног круга и споља уписаних кругова у троуглу са странама a, b, c. Доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{P_a}} + \frac{1}{\sqrt{P_b}} + \frac{1}{\sqrt{P_c}}.$$

ГЛАВА X

*ГЛАВНЕ МЕТОДЕ РЕШАВАЊА КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАТАКА

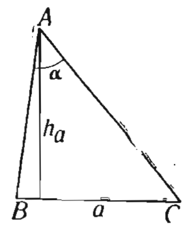
§ 53. Метода геометриских места

Већ смо равније решавали разне конструктивне задатке, а сад ћемо нагласити неке главне методе решавања таквих задатака.

Решити задатак:

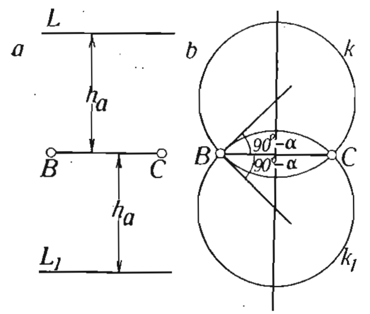
Конструисати троугао, кад је дата страна a, угао α наспрам те стране и висина h_a која одговара тој страни.

Анализа. У траженом троуглу ABC (сл. 165) позната је страна $BC = a$. Треће теме, тачка A, треба да задовољава два услова: 1) да се из те тачке дуж BC види под датим углом α и 2) да висина троугла из те тачке има дату дужину h_a.



Слика 165

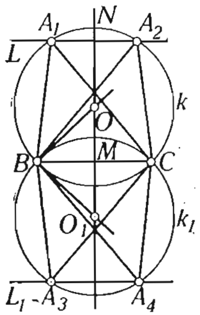
Занемаримо први услов и уочимо само други, да троугао има дату висину h_a. Тада тачка A неће бити потпуно одређена, него може заузимати низ положаја који сви припадају *геометриском месту тачака* на истом растојању од дате праве BC. Како то геометриско место чине две праве L и L_1 паралелне са BC и са разних страна од ње, на растојању h_a (сл. 166, a), то тачка A мора лежати на тим правима.



Слика 166

Занемаримо сад други услов, а уочимо само први, да угао наспрам BC мора бити α. И сад тачка A може узимати низ положаја и мора припадати другом *геометриском месту*. То је геометриско место тачака из којих се дата дуж види под датим углом. Такво геометриско место, као што знамо, чине два кружна лука k и k_1 (сл. 166, b). Центри тих лукова су у пресеку симетрале дужи BC и правих које пролазе кроз један крај те дужи и граде с једне или друге стране угао од $90^0 - \alpha$.

Пошто тачка A мора задовољавати оба услова, мора припадати и једном и другом геометриском месту. То значи, мора се налазити у пресеку линија које одговарају тим местима.



Слика 167

Конструкција. 1. На растојању h_a с једне и друге стране праве BC (сл. 167) конструишу се паралелне праве L и L_1 на познати начин. 2. Одреде се тачке O и O_1 као пресеци симетрале дужи BC и правих кроз B под углом $90^0 - \alpha$ према BC с једне и друге стране. 3. Нацртају се два кружна лука k и k_1 око центара O и O_1 са полупречником OB односно O_1B. Тада пресеци A_1, A_2, A_3, A_4 правих L и L_1 и кружних лукова k и k_1 одређују тражене троуглове A_1BC итд.

Доказ. Тачност конструкције може се врло лако из анализе извести као вежба.

Дискусија. 1. Праве L и L_1 могу сећи лукове k и k_1, кад је $h_a < MN$ и тада имамо четири тачке и четири решења. Та четири троугла чине слику са две осе симетрије: једна је права BC, друга симетрала дужи BC. Сви одређени троуглови су подударни. 2. Праве L и L_1 могу додиривати лукове k и k_1, кад је $h_a = MN$ и тада имамо само два решења. То су два равнокрака троугла симетрична у односу на BC. 3. Најзад, праве L и L_1 могу не сећи и не додиривати лукове k и k_1, кад је $h_a > MN$ и тада задатак нема решења.

Решење овог задатка показује *методу геометриских места.* Она се састоји у томе што се у проблему обично тражи тачка (једна или више), чије одређавање решава проблем. Да би била одређена, тражена тачка треба да задовољава више услова. Ако се занемари неки услов, тачка постаје неодређена, али припада неком геометриском месту тачака које испуњавају све услове сем занемареног. Такво геометриско место је обично линија (једна или више). Затим изоставимо други услов, па добијемо друго геометриско место, нову линију итд. Пресек тих геометриских места одређује тачку (или тачке) која решава проблем.

Примена ове методе захтева да се утврди свако геометриско место које се добије, кад се изостави по један услов. То се може урадити или нарочитим проучавањем тог геометриског места или искоришћавањем већ познатих геометриских места. Овде ћемо навести нека већ позната геометриска места:

1. Геометриско место тачака (скраћено г.м.т.) на истом растојању од сталне тачке је круг.
2. Г.м.т. на истом растојању d од дате праве су две праве, паралелне тој правој са разних страна, а на растојању d.
3. Г.м.т. подједнако удаљених од две дате тачке је симетрала дужи која спаја те тачке.
4. Г.м.т. подједнако удаљених од две праве, које се секу, је симетрала угла између њих. (А шта је г.м.т. подједнако удаљених од две паралелне праве?)
5. Г.м.т. из којих се дата дуж види под датим углом α су два симетрична кружна лука. Њихови центри су у пресеку симетрале дате

дужи и правих из једног краја дужи на једну и другу страну од ње под углом $90^0 - \alpha$.
6. Г.м.т. из којих се дата дуж види под правим углом је круг описан над том дужи као пречником.
7. Г.м.т., које деле у истој размери отсечке паралелних правих између две праве које се секу, је права која пролази кроз пресек тих правих и једну од тих тачака.
8. Г.м.т., чија су растојања од две праве, које се секу, у сталној размери, је права што пролази кроз пресек тих правих и једну од тих тачака.
9. Г.м.т., које деле у датој размери дужи, које спајају сталну тачку O са тачкама дате слике, је слика хомотетична датој слици са центром хомотетије у O. Ако је дата слика права, г.м.т. је такође права линија.
10. Г.м.т. чија су растојања од две сталне тачке A и B у сталној размери $m : n$ је Аполонијев круг, кад је $m \neq n$, а симетрала дужи AB, кад је $m = n$.

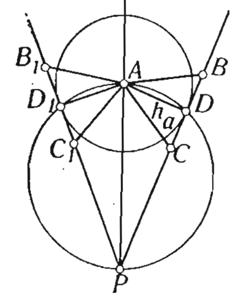
Може се десити и случај, да се проблем своди не на одређивање тачке, него на одређивање праве која треба да задовољава више услова. Ако се занемари неки од услова, добија се низ правих које задовољавају све остале услове сем занемареног. Употреба таквих скупова правих може, слично употреби геометриских места тачака, много олакшати решавање неких конструктивних задатака. Навешћемо неколико примера таквих скупова правих.

1. Праве, које са датом правом чине одређени угао с једне стране, припадају прамену паралелних правих.
2. Праве, које су на истом растојању d од дате тачке O, тангенте су круга са центром у O и полупречником d.
3. Праве, које су на истом растојању од две сталне тачке A и B, чине прамен правих са теменом у средини дужи AB.
4. Праве, чија су растојања од две сталне тачке A и B у датој размери $m : n$, чине два прамена правих са теменима у тачкама које деле дуж AB хармонично у размери $m : n$.
5. Симетрале свих периферијских углова над истим луком су праве које пролазе кроз средину тог лука.

Као пример примене скупова правих решимо задатак:

Нацртати равнострани троугао ABC са датим теменом A и датом висином h_a под условом да права супротне стране BC пролази кроз дату тачку P.

Анализа. Нека је $\triangle ABC$ (сл. 168) тражени равнострани троугао. Како теме A има одређени положај, а h_a је дате дужине, то права стране BC, као права на сталном растојању од дате тачке, мора додиривати круг полупречника h_a са центром у A. С друге стране та права треба да прође кроз тачку P. Према томе треба конструисати тангенту на дати круг из тачке P, па после тога конструисати равнострани троугао са датим теменом A и датом правом основице.



Слика 168

Конструкција. Нацрта се круг полупречника h_a са центром у A. Над AP, као над пречником, опише се круг који сече претходни круг у тачкама D и D_1. Праве PD и PD_1 дају праве основица тражених троуглова. Како је $AD \perp PD$ и $AD_1 \perp PD_1$, то је довољно код A конструисати с обе стране AD односно AD_1 углове од 30^0, па се добијају тачке B и C односно B_1 и C_1.

Доказ. Доказ непосредно следује из анализе и конструкције.

Дискусија. Ако је $AP > h_a$, постоје два решења као на слици. Троуглови ABC и AB_1C_1 симетрични су у односу на праву AP. Ако је $AP = h_a$, тачка P је на кругу полупречника h_a. Обе тангенте се поклапају, те постоји само један троугао, коме је тачка P у средини основице. Најзад, кад је $AP < h_a$, решење не постоји — троугао је немогућ.

Вежбања

Доказати тачност ових геометриских места:

1. Геометриско место тачака чији је збир квадрата растојања од две сталне тачке A и B сталан јесте круг пречника AB (искористити Питагорину теорему).

2. Г.м.т. чија је разлика квадрата растојања од две сталне тачке A и B стална јесте права линија (искористити образац $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab'$).

3. Г.м.т. чији збир растојања од две сталне праве има сталну вредност је отсечак нормале на симетралу угла између тих правих.

4. Г.м.т. из којих тангенте повучене на дати круг имају сталну дужину јесте круг концентричан датом кругу.

5. Г.м.т. које у датој размери деле једнаке тетиве датог круга јесте концентрични круг.

6. Г.м.т. чија разлика растојања од две сталне праве има сталну вредност је права паралелна симетрали угла.

7. Г.м.т., које деле у датој размери растојања између две паралелне праве, јесте паралелна права која пролази кроз једну од таквих тачака.

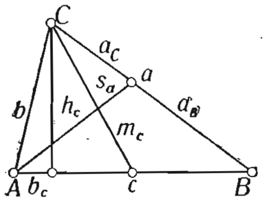
8. Г.м.т. центара кругова, који дати круг додирују у датој тачки, је права која спаја центар круга са датом тачком.

9. Г.м.т., које деле све тетиве повучене из једне тачке на кругу у датој размери, је круг.

---

10. Може ли се конструкција троугла помоћу дате све три стране сматрати као задатак за примену методе геометриских места?

11. У равни су повучене две паралелне праве и коса трансверзала. Наћи тачку која је подједнако удаљена од све три праве.



Слика 169

Нека су у троуглу ABC (сл. 169): стране a, b, c (у правоуглом c је хипотенуза; у равнокраком је $b = c$); углови α, β, γ; висине h_a, h_b, h_c; b_c пројекција стране b на страну c; m_c тежишна линија што одговара страни c; s_a дужина симетрале угла α; a_B и a_C отсечци стране a на које ју дели симетрала угла α; r и R полупречници уписаног и описаног круга; $\sphericalangle am_c$ угао између стране a и тежишне линије m_c итд.

Конструисати правоугли троугао, кад је дато:

12. c, h_c 13. a, r 14. a, R 15. r, R 16. c, $a : b$.

17. Конструисати правоугли троугао, кад се зна, да је његова хипотенуза страна AB датог косоуглог троугла ABC, а теме правог угла се налази на једној од других страна.

Конструисати равнокраки троугао, кад је дато:

18. a, R 19. β, R 20. a, h_b 21. β, h_a 22. r, a.

23. Конструисати равнокрако правоугли троугао, ако је дата: *a*) хипотенуза, *b*) дуж што спаја теме оштрог угла са тачком која дели супротну катету у датој размери $m : n$.

24. Конструисати равнокраки троугао дате основице, ако супротно теме лежи *a*) на датој правој, *b*) на датом кругу.

Конструисати троугао, кад је дато:

25. c, h_c, a	26. a_c, b_c, m_c,	27. a_c, b_c, $\sphericalangle cm_c$
28. h_a, h_b, h_c	29. h_a, h_b, α	30. h_a, h_b, γ
31. h_a, h_c, a_c	32. h_a, γ, $b = h_b$	33. h_a, β, $b_c = 2a_c$
34. R, a, b	35. R, a, α	36. R, h_a, m_a
37. R, h_a, β	38. r, c, α	39. r, a, γ
40. r, h_c, α	41. s_γ, r, γ	42. R, r, c
43. a_c, b_c, γ	44. a_B, a_C, a	45. a_c, b_c, h_a
46. a_c, b_c, $\sphericalangle am_c$	47. c, $\sphericalangle am_c$, γ	48. c, $\sphericalangle am_c$, $\sphericalangle bm_c$
49. c, h_c, $\sphericalangle am_c$	50. a, h_a, h_b	51. c, h_c, $\alpha - \beta$
52. $a : b$, c, h_c	53. $a : b$, c, h_a	54. $a : b$, c, R.

55. Нацртати круг, који додирује кракове угла, а један крак у датој тачки.

56. Нацртати круг који додирује два дата круга, од којих један у датој тачки.

57. Кроз дату тачку у кругу повући тетиву дате дужине.

58. Кроз две дате тачке у кругу повући једнаке паралелне тетиве.

59. Нека је дат пречник AB круга и у тачки B повучена тангента. Наћи на тој тангенти тачку M тако, да круг полови дуж AM.

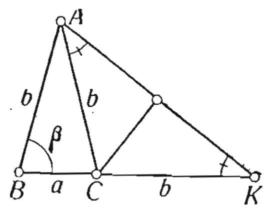
60. На дати круг повући тангенту тако, да збир растојања две дате тачке од те тангенте има дату дужину.

§ 54. Метода помоћних слика

Решити задатак:

Конструисати равнокраки троугао, ако се зна угао β на основици и збир s основице a и крака b.

Анализа. Нека је $\triangle ABC$ (сл. 170) тражени троугао. На продужењу стране BC одмери се $CK = AC = b$ и посматра троугао ABK. Тај троугао може се сматрати као *помоћна слика*, јер ако је он познат, онда је лако одредити тражени троугао ABC. Код троугла ABK су познати углови: $\sphericalangle B = \beta$ и $\sphericalangle K = \frac{1}{2}\beta$ и основица $BK = a + b = s$, па се може конструисати. После тога конструишемо троугао ABC узимајући у обзир да се тачка C налази на симетрали стране AK.



Слика 170

Из анализе су непосредно јасни: конструкција, доказ и дискусија.

Овде смо показали како се конструкцијом помоћне слике решава проблем. Овај пример показује примену *методе помоћних слика* на решавање конструктивних задатака.

Вежбања

Конструисати правоугли троугао, ако је дато:

1. $a+b, c$ 2. $a+b, \beta$ 3. $a+c, b$
4. $a+h_c, \beta$ 5. h_c+a_c, α 6. $a+a_c, \alpha$
7. $R+{}^1/_2 b, \alpha$ 8. $a-b, \beta$ 9. $a-b, c$
10. $c-a, b$ 11. $c-a, \beta$ 12. $a+b+c, \alpha$.

Конструисати равнокраки троугао, кад је дато:

13. $a+b, \alpha$ 14. $a+b, \beta$ 15. $a+h_b, b$
16. $b+h_a, \alpha$ 17. $a-b, \alpha$ 18. $a-b, \beta$
19. $a-h_b, b$ 20. $b-h_a, \alpha$ 21. $2a+b, \alpha$.

22. Конструисати равнострани троугао, ако је дато $a+h$.

Конструисати троугао, ако је дато:

23. $a+b, h_c, \beta$ 24. $a+b, h_a, \gamma$ 25. $a+h_c, \alpha, \beta$
26. $a+h_c, h_a, \beta$ 27. $a+h_c, s_\gamma, \beta$ 28. $a+h_c, m_a, \beta$
29. $a-b, c, \alpha-\beta$ 30. $a-b, h_a, \gamma$ 31. $a-h_c, c, \beta$.

Конструисати правоугаоник, ако је дато:

32. $a+b, d$ 33. $a, b+d$ 34. $a+b, \sphericalangle ad$,

где су a и b стране правоугаоника, d дијагонала и $\sphericalangle ad$ угао између дијагонале и стране.

Конструисати ромб, ако је дато:

35. $e-f, \alpha$ 36. $a+h, \alpha$ 37. $a-h, \alpha$,

где је a страна, h висина, e и f дијагонале и α један угао ромба.

Конструисати паралелограм, ако је дато:

38. $a+b, e, \alpha$ 39. $a-b, e, \alpha$ 40. $a-b, e, h$,

где су a и b стране паралелограма, а e дијагонала.

Конструисати равнокраки трапез, кад је дато:

41. a, b, φ 42. a, h, φ 43. $a-b, h, m$,

где су a и b основице, h висина, m средња линија и φ угао између дијагонала.

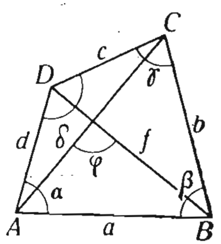
Конструисати трапез, кад је дато:

44. $a+c, b, e, \beta$ 45. $a-b, c+d, e, \alpha+\beta$ 46. $a-c, e, f, \beta$
47. $a, b, c, \alpha+\beta$ 48. a, e, f, φ 49. $a+b, h, e, \beta$,

где су c и d краци, α и β углови на већој основици, e и f дијагонале, а остале ознаке као у претходним задацима о равнокраком трапезу.

Нека су елементи четвороугла обележени као на слици 171. Конструисати четвороугао, ако је дато:

50. $a+d, b, c, f, \alpha$ 51. $a+d, c, f, \alpha, \varphi$
52. $a-d, b, c, f, \alpha$ 53. $a-d, f, \alpha, \beta, \delta$
54. $a-b, c, d, e, \alpha$ 55. $a+b, c+d, e, \beta, \delta$.

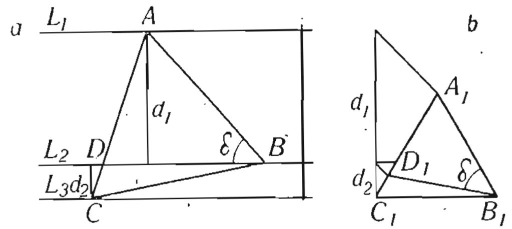


Слика 171

§ 55. Метода сличних слика

Решити задатак:

Конструисати равнострани троугао тако, да му темена леже на датим паралелним правима.



Слика 172

Анализа. Нека су L_1, L_2, L_3, (сл. 172,*а*) дате три паралелне праве и треба конструисати равнострани троугао ABC са теменима на тим правима. Права L_2 пролази кроз тачку B и дели страну AC тачком D у размери $d_1:d_2$, где су d_1 и d_2 растојања датих правих. Са тачком D одређен је и угао $DBA=\delta$ који чини страна троугла AB са правом L_2, а познавање тог угла опет одређује положај троугла ABC. Како угао δ зависи само од односа $d_1:d_2$, он се може одредити ма у ком равностраном троуглу.

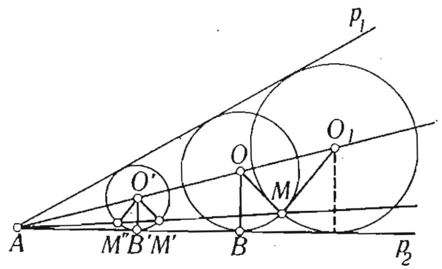
Конструкција. Нацрта се ма који равнострани троугао $A_1B_1C_1$ (сл. 172, *b*) и подели страна A_1C_1 у размери $d_1:d_2$ на познати начин. Тачка D_1 споји се са B_1 и тако одреди угао δ. Из ма које тачке B праве L_2 повуче се права BA под углом δ. Она одређује страну AB траженог троугла, а помоћу те стране се одређује и треће теме троугла C.

Доказ и *дискусија* овог задатка могу се извршити као вежба.

При решавању овог задатка искористили смо сличну слику. Стога се ова метода решавања конструктивних задатака зове *метода сличних слика*.

Решићемо и овај задатак по методи сличних и при томе хомотетичних слика:

Конструисати круг који додирује две праве које се секу и пролази кроз дату тачку.



Слика 173

Анализа. Дате су две праве p_1 и p_2 и тачка M (сл. 173). Нека је O центар траженог круга. Он мора лежати на симетрали угла који чине праве p_1 и p_2. Осим тога је $OB \perp p_2$ и $OB=OM$. Ако из ма које тачке O' симетрале угла између правих p_1 и p_2 спустимо нормалу $O'B'$ на p_2 и на правој AM узмемо тачку M' под условом да је $O'M'=O'B'$, онда је троугао $O'M'B'$ хомотетичан са троуглом OMB са центром хомотетије у A.

Конструкција. Нацрта се прво симетрала угла између правих и споји дата тачка M са пресеком правих A. Из ма које тачке O' симетрале спусти нормала $O'B'$ на једну од правих и опише полупречником $O'B'$ круг са центром у O'. Нека су M' и M'' тачке пресека тог круга са правом AM. Затим се из дате тачке M повуче $MO \parallel M'O'$ и $MO_1 \parallel M''O'$ до пресека у O и O_1 са симетралом угла. Тако се добијају два центра O и O_1 кругова који су решење проблема.

Доказ и *дискусија* следују из анализе и конструкције.

Вежбања

Конструисати троугао помоћу једног од елемената: a, b, c, h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, s_α, s_β, s_γ, R, r, a_c, a_b итд., ако му је облик одређен са:

1. $a : h_c$, γ 2. $a : h_c$, α 3. $c : h_c$, α
4. $a : m_c$, β 5. $h_c : m_c$, β 6. $a : b$, $\alpha - \beta$
7. $a : h_c$, $\alpha - \beta$ 8. $b_c : a_c$, α 9. $R : h_c$, α
10. $m_a : m_b$, γ 11. $c : r$, α 12. $r : s_\gamma$, γ.

Конструисати ромб, ако је дато:

13. a, $e : f$ 14. h, $e : f$.

Конструисати правоугаоник, ако је дато:

15. $a : b$, e 16. $a : e$, b.

Конструисати паралелограм, ако је дато:

17. $a : b$, e, β 18. a, $e : f$, φ
19. a, $e : f$, α. 20. $a : h_a$, b, α

Конструисати равнокраки трапез, ако је дато:

21. $a : c$, e, β 22. $a : b$, e, α
23. $a : b$, c, α 24. $a : b$, c, φ.

Конструисати трапез, ако је дато:

25. $a : c$, b, e, β 26. $a : c$, e, α, β
27. $a : c$, e. f, β 28. $a : c$, h, α, β
29. $a - b$, $c : d$, e, α 30. $a : c : b : d$, e.

Конструисати четвороугао, ако је дато:

31. $a : b$, c, d, e, β 32. $a : b$. c, e, α, β
33. a, $b : e$, c, d, β 34. $a : b$, e, α, β, φ
35. $a : c$, α, β, γ, b 36. a, $e : f$, φ, α, γ.

Конструисати тетивни четвороугао, кад је дато:

37. R, $a : b$, α, β 38. R, $a : b$, γ, δ
39. R, $a : b : c$, β. 40. $a : b$, c, β, φ.

Конструисати тангентни четвороугао, кад је дато:

41. r, $a : b$, α, β 42. r, $a : e$, α, β
43. $a : b$, e, α, β. 44. $a : c$, e, α, β.

45. У дати троугао уписати паралелограм са датим углом α у коме је однос суседних страна $m : n$.

46. Конструисати круг који додирује две праве које се секу и дати круг.

47. Конструисати круг који додирује краке датог угла и пролази кроз дату тачку на симетрали угла.

48. Конструисати круг који иде кроз две дате тачке A и B и две дате паралеле тако сече у тачкама M и N, да је $MN = AB$. *

Неодређени, немогућни и непотпуно одређени планиметриски задаци

Од

Михаила Петровића

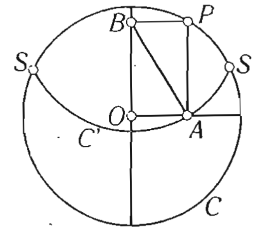
I

Планиметриски задаци решавају се или *геометриски* (конструкцијама) или *рачуном*. Мноштво планиметриских задатака, кад се решавају рачуном, своде се на једначину са једном непознатом; непозната дужина у задатку добија се решењем такве једначине.

Свака једначина првог степена са једном непознатом има решење, корен једначине. У планиметриским задацима та решења треба да имају смисла према геометриском значењу непознате x.

Али, дешава се у појединим задацима да, поред свега тога што унапред изгледа да ће једначина задатка насигурно бити првог степена по непознатој x, она се у крајњем резултату јавља у бесмисленом облику $a = b$, где су a и b два међу собом различита броја, и то ма каква била вредност непознате x, или се јавља у облику $a = a$ који не показује ништа.

Кад се добије тако што, закључује се да је задатак бесмислен, *немогућан*, тј. да не постоји никаква вредност непознате x који задовољава услове задатка, а у неким посебним случајевима, да је задатак *неодређен*, тј. да свака вредност x испуњава те услове.



Слика 174

Понекад се може одмах, и без икаквог рачунања, запазити да је задатак немогућан или неодређен. Тако, на пр., из произвољне тачке P на кругу C (сл. 174) спустимо управне PA и PB на два међусобно управна пречника круга, па тражимо да се одреди положај тачке P тако да се кружни лук SS' описан из тачке B као центра са полупречником BA

поклопи са луком круга C' чија је површина за дато h већа или мања од површине круга C.

Пошто је дужина BA једнака растојању тачке P од средишта O круга C, а ово је растојање једнако полупречнику тог круга, то је задатак очевидно *немогућан* кад се h разликује од нуле, а неодређен кад је $h=0$, јер у овоме последњем случају услов задатка је задовољен, па ма где се на кругу налазила тачка P.

Али то није свакад тако очигледно, па се немогућност или неодређеност задатка може запазити само кад се склопи једначина која изражава услов задатка.

Да би се имао један пример задатка такве врсте, потсетимо се да се под *аритметичком средином* двеју дужи a и b разуме дуж $\frac{a+b}{2}$, а под њиховом *геометриском средином* дуж $\sqrt{ab}$ (Како се конструишу те две средине помоћу датих дужи a и b?).

Нека су b и c две дате утврђене дужи, а x једна трећа, променљива дуж, па помоћу њих конструишемо

1) аритметичку средину p дужи b и c, тј.

$$p=\frac{b+c}{2};$$

2) геометриску средину q дужи $x+b$ и $x+c$, тј.

$$q=\sqrt{(x+b)(x+c)};$$

3) дужину $d=x+p$;

4) катету l правоуглог троугла чија је једна катета q, а хипотенуза дужине d, тј.

$$l=\sqrt{d^2-q^2}.$$

Поставимо тада задатак: Колика треба да је дуж x, па да дуж l буде једнака једној унапред датој дужи h?

Из услова задатка треба да је

$$l^2=d^2-q^2=(x+p)^2-(x+b)(x+c)=p^2+(2p-b-c)x-bc,$$

па кад се на десној страни p смени својом вредношћу, члана са x нестаје и једначина се своди на

$$l^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

За l се, дакле, добија једна од вредности

$$\frac{b-c}{2},\ \frac{c-b}{2},\ 0,$$

према томе да ли је дуж b већа или мања од c, или су те две дужи једнаке.

Према томе имаће се ова два случаја:

1) ако се $\frac{1}{2}(b-c)$, односно $\frac{1}{2}(c-b)$ разликује од дате дужи h, задатак је *немогућан*, јер ни за какво x неће бити $l=h$;

2) ако је $\frac{1}{2}(b-c)$, односно $\frac{1}{2}(c-b)$ једнако дужи h, задатак је *неодређен*, јер за свако x биће $l=h$, па x остаје потпуно неодређено.

II

Кад би се тражило да се, знајући само збир s двеју катета a и b правоуглог троугла, израчуна његова хипотенуза x, одговорило би се да је задатак без смисла, неодређен, јер да би се помоћу катета израчунала хипотенуза, треба да су познате обе катете понаособ, а не само њихов збир.

Међутим, није баш сасвим тако. Задатак истина није потпуно одређен, али није ни потпуно неодређен; о хипотенузи се ипак може нешто казати што није баш тако очигледно. Тако, из идентичности коју је лако проверити

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$$

деобом са $(a+b)^2$ добија се да је

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

што показује да количник

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=\frac{x^2}{s^2}$$

има вредност већу од $\frac{1}{2}$, тј. да је x веће од $\frac{s}{\sqrt{2}}$.

А из идентичности

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

добија се деобом са $(a+b)^2$ да је

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=1-\frac{2ab}{(a+b)^2},$$

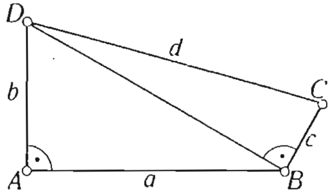
што показује да исти количник $\frac{x^2}{s^2}$ има вредност мању од јединице, тј. да је x мање од s. А пошто је

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7071,$$

из тога се закључује *да се дужина хипотенузе увек налази* *између две дужи* 0,7071 s и s, а такав резултат ипак казује нешто доста одређено.

Сличан случај је и са овим задатком:

Дат је четвороугао $ABCD$ (сл. 175) у коме су угао између страна AB и AD и угао између стране BC и дијагонале BD прави.



Слика 175

Знајући збир s страна a, b, c израчунати четврту страну d четвороугла.

Из слике је

$$d^2 = CD^2 = CB^2 + BD^2,$$
$$CB = c, \quad BD^2 = a^2 + b^2$$

и према томе

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Из идентичности коју је лако проверити

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{3}\left[(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]$$

деобом са $(a+b+c)^2$ добија се да је

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{1}{3} + \frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{(a+b+c)^2}$$

из чега се види да количник

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{d^2}{s^2}$$

има вредност већу од $\frac{s}{\sqrt{3}}$.

А из идентичности

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)$$

деобом са $(a+b+c)^2$ добија се да је

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} = 1-2\frac{ab+ac+bc}{(a+b+c)^2},$$

што показује да количник $\frac{x^2}{s^2}$ има вредност мању од 1, тј. да је страна d мања од s. А пошто је

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774,$$

из тога се закључује да се дужина стране d увек налази између дужи 0,5774 s и s, а то такође казује нешто доста одређено.

Такви су задаци многобројни, а њихова решења у показаноме облику показују да, поред све њихове привидне неодређености, они имају смисла, иако на први поглед могу изгледати бесмислени.