ПРЕДАВАЊА НА БЕОГРАДСКОМ УНИВЕРЗИТЕТУ

ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПОМОЋУ РЕДОВА

ОД

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА

ИЗДАЊЕ ЗАДУЖБИНЕ ЛУКЕ ЋЕЛОВИЋА-ТРЕБИЊЦА

БЕОГРАД

1 9 3 8

Штампарија »Меркур« Д. Јанковића — Тел. 20-654

Интеграција диференцијалних једначина помоћу редова.

I. Општи појмови о интеграцији диференцијалних једначина.

Интегралити једну диференцијалну једначину p-тога реда

(1) $$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)})=0$$

где је $$y'=\frac{dy}{dx}, \qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots, \quad y^{(n)}=\frac{d^ny}{dy^n}$$

значи наћи такву функцију y независно промењљиве количине x, да кад се смени у једначини (1), ова буде идентички задовољена за произвољну вредност x.

Тако, на пример, једначина првога реда

(2) $$y'-y=0$$

је идентички задовољена ако се узме да је

$$y=e^x;$$

једначина другога реда

(3) $$y''+ay=0$$

биће задовољена кад се стави да је

$$y=\sin x\sqrt{a}.$$

Као што се зна из опште теорије диференцијалних једначина, за сваку једначину (1) постоји, не једна, већ бескрајно много функција y које је задовољавају за произвољну вредност. Тако, једначина (2) је задовољена за

$$y=Ce^x$$

за произвољне вредности x и константе C; једначина (3) је задовољена за

$$y=C_1 \sin x\sqrt{a}+C_2 \cos x\sqrt{a}$$

за произвољне вредности x и константе C_1 и C_2.

Као што се опет зна из опште теорије диференцијалних једначина, за сваку једначину (1) постоји по једна функција променљиве x

$$(4) \qquad y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p)$$

која садржи онолико произвољних констаната $C_1, \ldots, C_p$ колики је ред једначине; те се произвољне константе називају *интеграционим константама.*

Кад се у изразу (4) свих p интеграционих констаната оставе као произвољне, тај израз претставља *општи интеграл* једначине (1). Кад се у њему, појединима од тих констаната, или свима, даду утврђене, одређене вредности, он претставља по један *партикуларни интеграл* једначине. Очевидно је да кад се зна општи интеграл једне једначине, знаће се и сви његови партикуларни интеграли, којих има бескрајно много и међу собом се разликују само по вредностима које су придате појединим интеграционим константама у општем интегралу.

Под *интеграцијом* једначине (1) има се у главном разумети одредба

1^0 или њенога општег интеграла y;

2^0 или једнога њеног партикуларног интеграла y.

Кад је нађен општи интеграл, за једначину се каже да је *потпуно интеграљена;* кад је нађен један њен партикуларни интеграл, каже се да је *интеграљена у ужем смислу.*

У великом броју случајева, интеграл једначине, било општи, било партикуларни, састављен је из коначног броја комбинација елементарних функција, т.ј. оних које се из независно променљиве количине x добијају: сабирањем, одузимањем, множењем, дељењем, степеновањем са сталним или од x зависним изложиоцима, логаритмисањем и операција-

ма које се изражавају тригонометриским и циклометриским функцијама. То су, дакле, функције које се добијају елементарним комбинацијама ограниченог броја функција

$$x,\ x^n,\ e^x,\ \sin x,\ \arcsin x,\ \log x.$$

У току развијања математичке анализе пришле су овим елементарним функцијама још и неке раније непознате функције (као што су н. пр. елиптичке функције), тако да данас и оне улазе у оквир елементарних функција, а у тај ће оквир ући још која специјалнија врста функција кад ове буду тачно и у свима својим појединостима проучене.

Кад се, на ма који начин, успело изразити интеграл y у облику комбинација елементарних функција, каже се да је диференцијална једначина *интеграљена у коначном облику*, јер су онда све операције, на које се своди интеграл, сведене на коначни број обичних рачунских операција, које се могу рачунски до краја извршити. Такав је н. пр. случај са једначинама (2) или (3).

Међутим, у великом броју случајева немогућно је изразити интеграл у таквом коначном облику, али се он изражава помоћу елементарних функција и интегралног знака $\int$. Наиме, интеграл се изражава помоћу елементарних функција и једнога коначног броја интеграла

$$\int X_1 dx,\quad \int X_2 dx,\quad \ldots$$

где су $X_1,\ X_2, \ldots$ опет одређене и познате комбинације елементарних функција, и где интегрални знаци могу бити и суперпонирани. У таквим се случајевима каже да је једначина *интеграљена елементарним функцијама и квадратурама.* Тако н. пр. једначина првога реда

$$(5) \qquad xy'+e^x-1=0$$

има за општи интеграл

$$(6) \qquad y=C+x-\int \frac{e^x}{x}\,dx;$$

она је дакле интеграљена на такав начин.

Дешава се и за једначине, које садрже функције непрецизиране, остављене у општем облику $f(x), \varphi(x), \psi(x) \ldots$, да се интеграл може изразити елементарним комбинацијама тих функција и ограниченим бројем квадратура, т. ј. интеграција извршених над тим функцијама и њиховим комбинацијама. Тако н. пр. општи интеграл линеарне једначине првога реда

$$(7) \qquad y' + fy + \varphi = 0$$

(где су f и φ функције независно променљиве количине x) има облик

$$(8) \qquad y = e^{-\int f dx} \left[C + \int e^{\int f dx} . \varphi \, dx \right].$$

Такав је случај и са једначином другога реда

$$yy'' + y'^2 + \varphi \, yy' = 0$$

(где је φ функција променљиве x), чији је општи интеграл

$$y = \sqrt{C_1 + C_2 \int e^{-\int \varphi dx} dx.}$$

Велики број, како појединачних диференцијалних једначина свакога коначног реда, тако и појединих општих типова једначина, могу се интегралити помоћу елементарних функција и квадратура. Али остаје непрегледна множина једначина за које се интеграл не изражава ни комбинацијама таквих функција, ни помоћу квадратура. За неке типове једначина успело се да се и докаже таква немогућност, као н. пр. за општу Riccati-еву једначину

$$y' + fy^2 + \varphi y + \psi = 0$$

(где су f, φ, ψ функције независно променљиве x), или за општу линеарну једначину

$$y^{(p)} + f \, y^{(p-1)} + \varphi \, y^{(p-2)} + \cdots + \lambda y = 0$$

чији је ред $p \geqslant 2$. За друге типове једначина истина таква немогућност није доказана, али су сви покушаји да се оне интеграле у коначном облику и помоћу квадратура, остали безуспешни.

II. Општи појмови о интеграцији једначина првога реда.

Општи интеграл y дате диференцијалне једначине првога реда

$$(9) \qquad f(x, y, y') = 0$$

може се одредити у своја два разна облика:

1° Као функција променљиве x и интеграционе константе C, у облику

$$(10) \qquad y = \varphi(x, C)$$

или, општије, у облику једначине

$$(11) \qquad \psi(x, y, C) = 0$$

такве да y, одређено том једначином, задовољава једначину (9) за ма какве вредности x и C. Тако н. пр. једначина

$$(12) \qquad y' - y = 0$$

има за општи интеграл

$$(13) \qquad y = Ce^x;$$

за једначину

$$(14) \qquad y' - xy = 0$$

то је

$$(15) \qquad y = Ce^{\frac{x^2}{2}};$$

за једначину

$$(16) \qquad yy' + x = 0$$

то је

$$(17) \qquad x^2 + y^2 + C = 0.$$

2° Као онај партикуларни интеграл исте једначине (9) који за $x = x_0$ добија вредност $y = y_0$, а кад се те вредности x_0 и y_0 сматрају као произвољне. Геометриски речено: као онај интеграл једначине чији геометриски претставник (интегрална крива линија) пролази кроз произвољно узету тачку (x_0, y_0) у равни xOy.

Такав би н. пр. интеграл за једначину (12) био

$$y = y_0\, e^{(x-x_0)}\ ;$$

за једначину (14)

$$y = y_0\, e^{\frac{x^2-x_0^2}{2}}$$

а за једначину (16)

$$x^2+y^2-x_0^2-y_0^2=0.$$

Од облика 1^0 прелази се на облик 2^0 изразивши да интегрална крива пролази кроз тачку (x_0, y_0), што даје једначину

(17) $\quad y_0=\varphi\,(x_0, C)$ односно $\psi(x_0, y_0, C)=0$

и елиминишући константу C из двеју једначина (10), односно (11) и једначине (17). Тако се добија општи интеграл у облику

(18) $\quad y = \lambda\,(x, x_0, y_0)$ односно $\mu\,(x, y, x_0, y_0)=0.$

На први поглед изгледало би да такав општи интеграл садржи две произвољне константе x_0 и y_0, што не би могло бити, јер две такве константе садржи општи интеграл само за једначине другога реда. Међутим, лако се уверити да поред свега тога што су обе константе x_0 и y_0 произвољне, оне се код једначина првога реда увек групишу у једну једину константу C. Јер ако се изрази да општи интеграл y одређен н. пр. једначином

(19) $$\varphi\,(x, y, C) = 0$$

за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$, добија се условна једначина

(20) $$\varphi\,(x_0, y_0, C)=0$$

из које, кад би се израчунало C, тако да је н. пр.

$$C = \theta\,(x_0, y_0),$$

општи би интеграл била функција y одређена једначином

$$\varphi\,[x, y, \theta\,(x_0, y_0)] = 0$$

где су се обе произвољне константе x_0 и y_0 груписале у само једну, а та је $\theta\,(x_0\, y_0)$.

У свему даљем излагању овде ће се узети у обзир овај други начин одредбе општега интеграла. Проблем интеграције једначине (9) јавља се тада у овоме облику:

A) *Наћи такав израз y, као функцију променљиве x, да једначина* (9) *буде идентички задовољена за ма какво x, и да тај израз за $x=x_0$ добије вредност $y=y_0$.*

Тада, ако су вредности x_0 и y_0 остављене произвољне, имаће се општи интеграл једначине; ако су те вредности утврђене, имаће се њен партикуларни интеграл, и то онај који за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$.

Међутим, било да се има посла са општим, било са партикуларним интегралом y, увек се проблем може свести на овај:

B) *Наћи такав израз y који идентички задовољава другу једну диференцијалну једначину, изведену из дате, и који ће за $x=0$ имати за вредност $y=0$.*

Јер ако су вредности x_0 и y_0 коначне, па се изврши смена

(21) $$x=x_0+t\,, \qquad y=y_0+u, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dt}$$

и сматра се t као нова независно променљива количина, а u као нова непозната функција, добија се нова, трансформисана диференцијална једначина

(22) $$F\,(t, u, u') = 0.$$

Кад је $x=x_0$ и $y=y_0$, биће $t=0$ и $u=0$. Према томе, наћи интеграл y једначине (9) који за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$, значи наћи интеграл u једначине (22) који за $t=0$ добија вредност $u=0$.

У случају кад је $x_0=\infty$, а y_0 коначно, треба извршити смену

$$x = \frac{1}{t}\,, \qquad y=y_0+u\,, \qquad \frac{dy}{dx}=-\,t^2\frac{dy}{dt}\,;$$

кад је $y_0=\infty$, а x_0 коначно, извршиће се смена

$$x=x_0+t\,, \qquad y=\frac{1}{u}\,, \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

и напослетку, кад је $x_0=\infty$, $y_0=\infty$ треба извршити смену

$$x=\frac{1}{t}\,, \qquad y=\frac{1}{u}\,, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{t^2}{u^2}\frac{du}{dt}$$

па ће добијена диференцијална једначина (22), својим интегралом који за $t=0$ добија вредност $u=0$, дати и интеграл y једначине (9) који за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$.

Кад је проблем одређивања интеграла формулисан у облику В), поставља се питање: како ће се доћи до интеграла који за $x=0$ добија вредност $y=0$? Као што је напред казано, у непрегледном броју случајева не може се интеграл изразити помоћу елементарних функција и квадратура. Па и у случајевима кад је то могућно, добијени израз за интеграл често је тако компликован и неподесан за практично рачунање, да од таквог израза нема велике користи. У таквим случајевима или се гледа да се понешто у изразу y занемари, кад то неће много утицати на резултат рачуна, па ће се имати бар приближан израз за интеграл, или се покушава да се интеграл изрази у облику бескрајнога реда, чији је облик чланова такав да се са њима може лако рачунати, или се на њима може распознати каква нарочита појединост везана за интеграл.

Предмет ове књиге биће такав начин одредбе интеграла, т.ј. *проблем да се интеграл дате диференцијалне једначине одреди у облику каквога реда*

$$y=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots \tag{23}$$

чији ће чланови бити какве просте функције независно променљиве количине x и који ће бити такав да је

$$u_0(0)+u_1(0)+u_2(0)+\cdots=0\,. \tag{24}$$

Код свакога реда (23) мора се водити рачун о томе за које ће вредности x он бити употребљив, т. ј. конвергентан. Према томе исказани проблем интеграције своди се на ова два задатка:

Први задатак: наћи *формално решење* проблема, т. ј. такав ред (23) са условном једначином (24), да y изражено тим редом идентички задовољи дату диференцијалну једначину и услов (24), без обзира на то да ли ће нађени ред конвергирати или не.

Други задатак: испитати за које ће вредности x нађени ред бити конвергентан.

Кад су, у датоме случају, решена оба та задатка, сматра се да је проблем интеграције фактички решен, и добијени ред сматра да даје *фиктично решење* проблема.

Лако се види из простих примера да није довољно знати само формално решење проблема, јер се може десити да добијени ред буде неупотребљив, јер није конвергентан ни за коју вредност x. Тако на пр. једначину

$$x^2y'-y+x=0$$

формално задовољава ред

$$y=0!\,x+1!\,x^2+2!\,x^3+3!\,x^4+\cdots$$

који задољава и услов (24), али је он неупотребљив, јер не конвергира ни за коју вредност x.

Исти је случај и са редом

$$y=0!\sqrt{x}+1!(\sqrt{x})^2+2!(\sqrt{x})^3+\cdots$$

који формално задовољава диференцијалну једначину

$$x(2xy'+1)^2-y^2=0$$

као и услов (24), али не конвергира ни за коју вредност x.

Дешава се и то да је добијени ред конвергентан за неке вредности x, н. пр. за оне што се налазе у једној одређеној области равни x, али да се не може употребити за ону вредност x за коју се тражи вредност интеграла. Тако на пр. ред

$$y=x+x^2+x^3+\cdots$$

формално задовољава једначину

$$y'-(y+1)^2=0$$

и једначину (24) али је употребљив само за вредности x

што се налазе у кругу полупречника 1 описаном око $x=0$, јер је ред конвергентан само за такве вредности x.

Напослетку, дешава се и то да је нађено формално решење диференцијалне једначине у облику реда који конвергира за све вредности x за које се то тражи, али да ред не задовољава условну једначину (24). Такав је н. пр. случај са простом једначином

$$y' = y$$

чији је општи интеграл

$$y = Ce^x$$

изражљив у облику реда

$$y = C + \frac{C}{1!}x + \frac{C}{2!}x^2 + \frac{C}{3!}x^3 + \cdots$$

конвергентног за сваку вредност x. Међутим, такав интеграл само тако може задовољити једначину (24) ако је $C=0$, али у томе случају интеграл је идентички једнак нули за све вредности x; то дакле стварно није функција те променљиве.

Из таквих се примера јасно види да се самим формалним решењем не решава проблем интеграције; то решење још треба допунити решењем задатка конвергенције добијеног реда.

III. Формално решење у облику реда.

Нека је дата диференцијална једначина

(25) $$F(x, y, y') = 0$$

па покушајмо задовољити је изразом интеграла y у облику Maclaurin-овог реда

(26) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Задатак се своди у првоме реду на то да се из саме једначине (25) израчунају коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \ldots$ тако да изразом (26) та једначина буде задовољена. Претпоставивши најпре да одиста постоји такав један скуп тих коефицијената, да формално решење у облику (26) одиста постоји, одредба коефицијената може се извршити на овај начин:

Као што се зна биће

(27) $$a_n = \frac{[y^{(n)}]}{n!}$$

где уопште под знаком $[\varphi]$ треба разумети резултат који се добија кад се у изразу φ смене нулом променљиве количине које φ садржи.

Међутим, из једначине (25) се види да ће вредност

$$a_1 = [y']$$

бити један од корена једначине

(28) $$F(0, 0, \alpha) = 0$$

решене по α. Свакоме од таквих корена одговара, дакле, по једна могућна вредност коефицијента a_1.

Диференцијалењем једначине (25) добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' = 0,$$

одакле је

$$y'' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}y'}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}.$$

Израз на десној страни последње једначине, кад се у њему стави $x=0$, $y=0$, $y'=\alpha$, постаће број $[y'']$. Ако се дакле тај израз означи са F_1, биће

$$a_2 = \frac{1}{2!}[F_1].$$

Диференцијалењем једначине

$$y'' = F_1$$

добија се, пошто F_1 зависи од x, y, y',

$$y''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'}F_1,$$

тако да, ако се израз на десној страни ове једначине означи са F_2, а кад се у њему стави $x=0$, $y=0$, $y'=\alpha$, добијени резултат биће број $[y''']$, и према томе је

$$a_3 = \frac{1}{3!}[F_2].$$

Тако исто, пошто и F_2 зависи од x, y, y', диференцијалењем једначине

$$y''' = F_2$$

добија се

$$y'''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} y' + \frac{\partial F_2}{\partial y'} F_1 ,$$

тако да, ако се израз на десној страни означи са F_3 и у њему стави $x=0$, $y=0$, $y'=a$, добијени резултат биће број $[y'''']$ и према томе је

$$a_4 = \frac{1}{4!}[F_3].$$

Продуживши те радње и даље, долази се до овога закључка:

Кад се формира низ функција

(29) $$F_1, F_2, F_3 \ldots$$

трију променљивих x, y, y', које се једна из друге изводе по обрасцу

(30) $$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1 ,$$

где је

(31) $$F_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

и где се индексу n дају узастопне вредности $n = 2, 3, 4, \ldots$, *коефицијенат a_n имаће за вредност*

(32) $$a_n = \frac{1}{n!}[F_{n-1}]$$

где се под $[F_{n-1}]$ има разумети резултат који се добија кад се у функцији F_{n-1} смени $x=0$, $y=0$, $y'=a$, а где је a један ма који од корена једначине

(33) $$F(0, 0, a) = 0$$

решене по a.

Као што се види такав начин одредбе коефицијената a_n има смисла само онда кад све функције низа (29) имају за $x=0$, $y=0$, $y'=a$ коначне и одређене вредности.

Функције низа (29) постају простије у овим случајевима:

1° Кад је дата диференцијална једначина написана у облику

(34) $$y' - f(x, y) = 0$$

биће

$$y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

и према томе

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f = f_1,$$

$$y''' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f = f_2 ,$$

$$y'''' = \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} f = f_3,$$

. . . .

тако *да се низ* (29) *поклапа са низом функција*

(35) $$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

што зависе од двеју променљивих x, y, а изводе се једна из друге по обрасцу

(36) $$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} f , \qquad f_0 = f(x, y).$$

Коефицијенат a_n дат је обрасцем

$$a_n = \frac{1}{n!}[f_{n-1}].$$

2⁰ Кад диференцијална једначина не садржи промен-љиву y, тј. кад је облика

(37) $$F(x, y') = 0\,,$$

тада је a_1 једнако једноме од корена једначине

(38) $$F(0, a) = 0.$$

Из (37) је

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

одакле је

$$y'' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = F_1\,,$$

затим

$$y''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y'} F_1 = F_2\,,$$

а из тога се добија једначина

$$y'''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y'} F_1 = F_3\,.$$

Продуживши те радње и даље, долази се до закључка: *Низ* (29) *функција, помоћу којих се, према обрасцу* (32), *израчунава коефицијенат* a_n, *јесте онај који се добија помоћу обрасца*

(39) $$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1$$

где је

(40) $$F_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}\,.$$

У специјалном случају кад је једначина (37) написана у облику

(41) $$y' = f(x)$$

низ (29) се састоји из функција $f_1, f_2, f_3 \ldots$, *које се једна из друге изводе помоћу обрасца*

(42) $$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\,, \qquad f_0 = f(x).$$

3⁰ Кад диференцијална једначина не садржи промен-љиву x, т.ј. кад је облика

(43) $$F(y, y') = 0$$

коефицијенат a_1 је једнак једноме од корена једначине

(44) $$F(0, a) = 0$$

решене по a. Из (44) је

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

одакле је

$$y'' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} = F_1$$

па се низ (29) *добија помоћу обрасца*

(45) $$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y'} F_1$$

где је

(46) $$F_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}\,.$$

У специјалном случају кад је једначина (43) написана у облику

(47) $$y' = f(y)$$

низ функција (29) састоји се из функција $f_1, f_2, f_3 \ldots$ *које се једна из друге изводе по обрасцу*

(48) $$f_n = y' \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\,, \qquad f_0 = f(y).$$

Кад су коефицијенти a_n на тај начин израчунати, од интереса је проверити да ред

(49) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

одиста задовољава диференцијалну једначину од које се пошло. Ради упрошћења ствари овде ће бити претпостављено да је једначина решена по изводу y', т. ј. дата у облику

(50) $$y' = f(x, y) \,.$$

Поред тога биће претпостављено да је функција $f(x, y)$ холоморфна функција променљивих x и y у близини вредности $x=0$, $y=0$.

Из (49) добија се да је

(51) $$y' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

где је

$$b_0 = a_1 \quad b_1 = 2a_2, \ldots, \quad b_n = (n+1)\, a_{n+1}$$

и према овоме што претходи

(52) $$b_n = \frac{n+1}{(n+1)\,!}\,[f_n] = \frac{1}{n!}\,[f_n]$$

где је f_n један члан низа $f_1, f_2, f_3, \ldots$, т.ј. тотални извод по x функције f_{n-1}, добијен узастопним диференцијалењима првобитне функције $f_0 = f(x, y)$ по x и y, водећи рачуна о томе да је y функција променљиве x.

Са друге стране, пошто је $f(x, y)$ холоморфна функција променљивих x и y у близини вредности $x=0$, $y=0$, то кад се у њој смени y редом уређеним по степенима променљиве x, и сама се та функција може развити у такав један ред, па нека је то

(53) $$f(x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

Коефицијенти реда биће

(54) $$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{0!}\,[f]\,, \\ A_1 &= \frac{1}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f\right] = \frac{1}{1!}\,[f_1]\,, \\ A_2 &= \frac{1}{2!}\left[\frac{df_1}{dx}\right] = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} f\right] = \frac{1}{2!}\,[f_2]\,, \end{aligned}$$

. . . .

из чега се види да је

(55) $$A_n = \frac{1}{n!}\,[f_n] = b_n \,.$$

Према томе ред (51) који даје извод y', и ред (53) који даје функцију $f(x, y)$ пошто се у овој y смени редом (49), имају исте коефицијенте; та су два реда дакле међу собом једнака, т. ј.

(56) $$y' = f(x, y)\,,$$

што значи да y, дефинисано редом (49) одиста задовољава посматрану диференцијалну једначину.

IV. Примери за одредбу формалног решења.

У предњем одељку наведени начин за одредбу формалног решења проблема интеграције даје експлицитне изразе коефицијената a_n реда који претставља то решење. Он даје могућност да се или израчуна a_n у облику обрасца који даје општи коефицијенат за ма какво n, или да се израчуна онолико првих коефицијената $a_1, a_2, a_3, \cdots$ колико се хоће. Ово је последње одређивање могућно у свима случајевима; оно прво је могућно само у појединим, ређим случајевима. Практична примена тога начина видеће се из ових неколиких примера:

I пример: нека је дата једначина

$$y' = \frac{1}{2}(y - x + 1)^3 + 1\,,$$

па се налази да је

$$f_1 = \frac{1 \cdot 3}{4}(y - x + 1)^5,$$

$$f_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8}(y - x + 1)^7,$$

$$f_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16}(y - x + 1)^9,$$

. . . .

и уопште

$$f_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}} (y - x + 1)^{2n+3}$$

према чему се за коефицијенте интегралног реда добијају вредности

$$a^n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} .$$

II пример: дата је једначина

$$y' = \frac{1}{2} (1 + y)^3 ,$$

па се налази

$$f_1 = \frac{1 \cdot 3}{4} (1+y)^5 ,$$

$$f_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8} (1+y)^7 ,$$

$$f_3 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16} (1+y)^9 ,$$

. . . .

и уопште

$$f_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}} (1 + y)^{2n+3}$$

према чему коефицијенти a_n имају исте вредности као коефицијенти у првсме примеру, осим a_1 који има вредност $\frac{1}{2}$.

III пример: дата је једначина

$$(1 - x^2) y'^2 - 4y^2 - 1 = 0 ,$$

па се налази

$$F_0 = F = (1 - x^2) y'^2 - 4y^2 - 1 ,$$

$$F_1 = \frac{xy' + 4y}{1 - x^2} .$$

$$F_2 = \frac{(5 - 2x^2) y' + 12xy}{(1 - x^2)^2} ,$$

$$F_3 = \frac{(33 - 18x^2) xy' + (32 + 28x^2) y}{(1 - x^2)^3} ,$$

. . . .

тако да ће уопште F_n бити облика

$$F_n = \frac{p_n y' + q_n y}{(1 - x^2)^n}$$

где су p_n и q_n полиноми n-тог степена по x .

Из диференцијалне једначине се налази да за $x = 0$, $y = 0$ извод y' има две вредности ± 1. Првој вредности одговара интеграл чији су коефицијенти

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \frac{5}{6} , \qquad a_4 = 0, \ldots$$

а другој интеграл са коефицијентима

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\frac{5}{6}, \qquad a_4 = 0, \ldots$$

IV пример: уочимо једначину општег облика

(57) $$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

где су P и Q полиноми по x и y, са претпоставком да је вредност $Q(0, 0)$ различна од нуле. Једначина има један, и то само један интеграл који за $x=0$ добија вредност $y = 0$, и он се може развити у ред

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

чији се коефицијенти израчунавају по обрасцу

$$a_n = \frac{r_n}{n!}$$

где r_n означава вредност коју добија за $x=0, y=0$ извесна одређена рационална функција R_n. Та је функција n-ти члан низа рационалних функција

$$R_1 , R_2 , R_3 , \ldots$$

које се једна из друге изводе по обрасцу

$$R_n = \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} + \frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y}\,. \tag{58}$$

$$R_1 = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\,.$$

Овде ће бити показано да се израчунавање коефицијената a_n може свести на израчунавање, не низа рационалних функција, него једнога низа полинома по x, y.

Лако се уверити да ће функција R_2 бити један полином по x, y, подељен са Q^3; да ће R_3 бити полином подељен са Q^5, и да ће уопште, ако се стави да је

$$R_n = \frac{P_n}{Q^{2n-1}}\,, \quad P_1 = P\,, \qquad (n=1, 2, 3, \dots)$$

P_n бити полином по x, y. Из једначине

$$R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q^{2n-3}}$$

добија се да је

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x} = \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x} - (2n-3)\dfrac{\partial Q}{\partial x}\cdot P_{n-1}}{Q^{2n-2}}\,,$$

$$\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y} = \frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y} - (2n-3)\dfrac{\partial Q}{\partial y}\cdot P_{n-1}}{Q^{2n-2}}$$

па сменивши то у једначини (58) добија се

$$P_n = A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + (2n-3)\,C\,P_{n-1} \tag{59}$$

$$(n = 2, 3, 4, \dots)$$

где су A, B, C стални полиноми, т. ј. независни од индекса n, који се из датих полинома P и Q, што фигуришу у диференцијалним једначинама, изводе по обрасцима

$$A = Q^2, \qquad B = PQ,$$

$$C = -\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial y}\right). \tag{60}$$

Коефицијенат a_n тада се јавља у облику

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{P_n}{Q^{2n-1}}\right]$$

па ако се са $p_1, p_2, p_3, \dots$ означе чланови независни од x и y у полиномима P_1, P_2, $P_3, \dots$, а са q такав члан у полиному Q, коефицијенат a_n изражен је обрасцем

$$a_n = \frac{p_n}{n!\,q^{2n-1}}\,.$$

Као што се види, израчунавање коефицијената интегралног реда једначине (57) своди се на одређивање чланова независних од x и y у полиномима Q, P_1, P_2, $P_3, \dots$ који се један из другога изводе по обрасцу (59) у коме треба поћи од почетног полинома

$$P_1 = P(x, y)$$

што фигурише у самој датој диференцијалној једначини.

V. Конвергенција добијеног реда.

Овим што је довде изложено решен је задатак формалног решења у проблему интеграције диференцијалне једначине. Као што се види, у свима случајевима је могућно формирати ред

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{61}$$

који ће идентички задовољити дату једначину (56) и бити такав да за $x=0$ даје вредност $y=0$.

Али да би добијени ред дао и фактичко решење проблема, треба знати још и то да ли ће он бити конвергентан за вредности x за које се то тражи. Као што се зна, сваки Maclaurin-ов ред има свој *круг конвергенције;* кад се вредност x налази у томе кругу, ред је насигурно конвергентан. Круг има за центар тачку $x=0$; ако му је полупречник R бескрајно велики ред је конвергентан за све вредности x; ако је једнак нули, ред је дивергентан за све вредности x и неупотребљив; ако је коначан и различан од нуле, ред је конвергентан и употребљив за све вредности x што се налазе у кругу.

Кад би се могао познавати прави круг конвергенције, т.ј. такав да је ред конвергентан за све вредности x у унутрашњости круга, а дивергентан за све вредности x ван круга, имао би се најпространији могућни скуп вредности x за које би ред био конвергентан. Такав се круг осим у изузетним случајевима, не може одредити. Али се увек може одредити такав један круг, описан око $x=0$, да се може насигурно тврдити да ће добијени ред за интеграл конвергирати за све вредности x што се налазе у његовој унутрашњости, без обзира на то да ли ће он корвергирати и за какве вредности ван круга. Очевидно је да кад се не може имати најпространији скуп вредности за које ће ред бити употребљив, упућени смо на то да се тражи један ма и ужи скуп таквих вредности какав буде могућно наћи.

За одредбу таквога једнога круга постоји *Cauchy-ева компаративна метода*, чији се принцип састоји у овоме:

Уочимо две диференцијалне једначине

(62) $$y'=f(x, y),$$

(63) $$v'=\varphi(x, v)$$

где су f и φ функције холоморфне у близини вредности $x=0$, $y=0$, $v=0$. Те се функције тада могу развити у двоструке редове

(64) $$f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n ,$$

(65) $$\varphi(x, v) = \sum_m \sum_n B_{mn} x^m v^n,$$

који ће насигурно бити конвергентни у близини тих вредности.

Претпоставимо да су испуњени ови *Cauchy-еви услови*:

1^0 *да су сви коефицијенти $B_{m,n}$ реални и позитивни;*

2^0 *да модуо свакога коефицијента A_{mn} не премаша вредност одговарајућег коефицијента B_{mn}, тј. да је*

(66) $$|A_{mn}| \leqslant B_{mn};$$

3^0 *да је интеграл једначине (63) холоморфна функција променљиве x за све вредности x у једноме одређеном кругу C описаном око $x=0$.*

Тада се, у таквим претпоставкама, доказује ова претходна теорема:

Ред

(67) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

који је нађен као формално решење за диференцијалну једначину (62) биће насигурно конвергентан за све вредности x што се налазе у кругу C.

Доказ теореме је основан на овим двама ставовима, који ће претходно бити доказани:

Став А) Нека је $f(x)$ каква функција холоморфна за вредности x такве да је $|x| < r$, т.ј. за вредности x у кругу c полупречника r са центром у тачки $x=0$, и нека је M једна реална и позитивна вредност коју не премаша $|f(x)|$ кад x остаје у кругу c. Поред тога претпоставља се да је функција $f(x)$ непрекидна за вредности x на самоме кругу c. *Тада је за све вредности x у кругу c*

(68) $$\left| \frac{d^m f}{dx^m} \right| < m!\, \frac{M}{r^m} \qquad (m=0, 1, 2, 3, \ldots).$$

То излази непосредно из Cauchy-евог обрасца познатог из опште теорије аналитичких функција

(69) $$\frac{d^m f}{dx^m} = \frac{m!}{r^m \,.\, 2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta$$

из кога излази да је

$$\left| \frac{d^m f}{dx^m} \right| < \left| \frac{m!}{r^m \,.\, 2\pi i} \right| \cdot \int_0^{2\pi} |f(re^{\theta i})| \,.\, |e^{-n\theta i}| \,.\, d\theta$$

па пошто је

$$\left| \frac{m!}{r^m \,.\, 2\pi i} \right| = \frac{m!}{2\pi r^m},$$

$$|e^{-n\theta i}| = 1,$$

$$|f(re^{\theta i})| < M,$$

то је

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right| < \frac{m!}{2\pi r^m} \cdot M \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{M}{r^m}.$$

Став B). Нека је $f(x,y)$ каква функција холоморфна за вредности x такве да је $|x|<r$ и за вредности y такве да је $|y|<r'$ (т.ј. за вредности x у кругу c полупречника r, и за вредности y у кругу c' полупречника r', са центрима у $x=0$, односно $y=0$), а са претпоставком да је функција непрекидна за вредности x и y на самим круговима c и c'. Нека је M једна реална и позитивна вредност коју не премаша $|f(x,y)|$ кад x остаје у кругу c, а y у кругу c'. *Тада је за све такве вредности* x и y

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}(x f, y)\right| < \frac{m!\, n!}{r^m\, r'^n} M, \qquad \begin{pmatrix} m=0,\,1,\,2,\ldots \\ n=0,\,1,\,2,\ldots \end{pmatrix} . \tag{70}$$

Став је непосредна последица става A). Јер ако се означи да је

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \varphi(x,y)$$

биће према ставу A) за вредности x и y у круговима c и c'

$$|\varphi(x,y)| < \frac{M}{r^m} \tag{71}$$

па према истом ставу и

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}\right| < \frac{n!}{2\pi r'^n} N \tag{72}$$

где је N једна реална позитивна вредност која не премаша $|\varphi(x,y)|$ кад x и y остају у круговима c и c'. Па пошто се према (71) може узети

$$N = \frac{M}{r^m}$$

и пошто је

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \cdot \partial y^n} f(x,y) ,$$

из (72) добија се неједначина (70).

Сад се на основу ставова A) и B) теорема што се има у виду доказује на овај начин:

Пошто је функција v холоморфна за вредности x у кругу C, она се може развити у ред

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \tag{73}$$

који ће бити конвергентан за такве вредности x. Упоредимо коефицијенте реда (67) са одговарајућим коефицијентима реда (73). Из ранијих образаца

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1!}[f] , \\ a_2 &= \frac{1}{2!}[f_1] = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right] , \\ a_3 &= \frac{1}{3!}[f_2] = \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f_1}{\partial y}\right] = \\ &= \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{74}$$

види се *структура* коефицијената a_n, која је оваква: a_n је са $n!$ подељен збир сабирака од којих је сваки једнак производу разних степена функције f и њених парцијалних извода по x и y.

Коефицијенти b_n добијају се кад се у обрасцима (74) функција f смени функцијом φ; они дакле имају исту структуру као коефицијенти a_n. Модуо свакога сабирка у обрасцима (74), према неједначинама

$$|f(x,y)| < M \tag{75}$$

и (66) која се може написати у облику

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f\right| < \left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\varphi\right| , \tag{76}$$

мањи је од модула одговарајућег сабирка у сличним обрасцима за коефицијенте b_n. Са друге стране, сви су парцијални изводи функције φ по x и v позитивни за $x=0$, $v=0$ по претпоставци 1°. Модуо сваког сабирка у обрасцима за b_n, пошто се у овима стави $x=0$, $v=0$, једнак је дакле самоме сабирку, па се из свега тога види да је и модуо коефицијента a_n мањи од збира таквих сабирака у изразу за b_n, па дакле мањи и од самог коефицијента b_n, т. ј.

$$| a_n | < b_n .$$

Па како је ред

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

конвергентан за вредности x у кругу C, биће у томе кругу конвергентан и ред

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

чиме је теорема доказана.

Узмимо сад за диференцијалну једначину (63) специјалну једначину

$$(77) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{v}{r'}\right)} = \varphi(x, v),$$

где r, r', M имају малочас наведена значења. Кад се функција $\varphi(x, v)$ развије у двоструки ред по степенима променљивих x и v, из образаца

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{r}} = 1 + \frac{x}{r} + \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^3 + \cdots ,$$

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{r'}} = 1 + \frac{v}{r'} + \left(\frac{v}{r'}\right)^2 + \left(\frac{v}{r'}\right)^3 + \cdots$$

множењем се добија да је

$$(78) \quad \varphi(x, v) = M \sum_m \sum_n \left(\frac{x}{r}\right)^m \left(\frac{v}{r'}\right)^n = \sum_m \sum_n B_{m,n} x^m v^n,$$

где општи коефицијенат има за вредност

$$(79) \qquad B_{m,n} = \frac{M}{r^m r'^n} .$$

Као што се види, тај коефицијенат задовољава Cauchy-ев услов 1°.

Да је, са таквом једначином (77), задовољен и Cauchy-ев услов 2°, може се доказати на овај начин:

Зна се из теорије развијања функција $f(x, y)$ у двоструки Maclaurin-ов ред да коефицијенат $A_{m,n}$ има за вредност

$$(80) \qquad A_{m,n} = \frac{1}{m!\, n!} \left[\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m y^n} f(x, y) \right]$$

где заграда, као и напред, означује број који се добија кад се у функцији $f(x, y)$ стави $x = 0$, $y = 0$. Према неједначини (70) тада се добија да је

$$(81) \qquad | A_{mn} | < \frac{M}{r^m r'^n}$$

што према једначини (79) показује да је одиста

$$(82) \qquad | A_{mn} | < B_{mn}$$

т. ј. да је задовољен и Cauchy-ев услов 2°.

Напослетку, да је једначином (77) задовољен и Cauchy-ев услов 3°, види се на овај начин:

Једначина (77) може се интегралити раздвојивши јој променљиве x и v, чиме се добија

$$\left(1 - \frac{v}{r'}\right) dv = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}} .$$

Интегралећи добија се

$$v - \frac{v^2}{2r'} = - Mr \log \left(1 - \frac{x}{r}\right) + C ,$$

где је константа C одређена условом да за $x = 0$ буде $v = 0$, што захтева да буде $C = 0$. Ако се уведе та вредност за константу C и једначина се реши по v, добија се

$$v = r' \pm \sqrt{r'^2 + 2 Mrr' \log \left(1 - \frac{x}{r}\right)} .$$

Услов да за $x = 0$ буде $v = 0$ допушта пред квадратним кореном само знак минус; стога за интеграл v треба узети вредност

$$v = r' - \sqrt{r'^2 + 2Mrr' \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)}.$$

Тај је интеграл v холоморфна функција променљиве x у близини вредности $x=0$, јер сингуларности функције произлазе само од једначине

$$r'^2 + 2Mrr' \log\left(1 - \frac{x}{r}\right) = 0$$

и

$$\log\left(1 - \frac{x}{r}\right) = 0.$$

Ова друга једначина даје као логаритамски критични сингуларитет вредност $x=r$, али овај не долази у обзир пошто се овде посматрају само вредности у кругу полупречника r.

Прва једначина, решена по x, има само један корен то

$$x = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{83}$$

Та је вредност x једини сингуларитет функције v, у кругу полупречника r и према томе та ће функција бити холоморфна докле год вредност x остаје у кругу C описаном око тачке $x=0$ са полупречником

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{84}$$

Са таквим кругом задовољен је дакле и Cauchy-ев услов 3°.

Из свега овога се види да специјална једначина (77) испуњава сва три Cauchy-ева услова да би могла играти улогу компаративне једначине за диференцијалну једначину (62). Према томе и ранијој претходној теореми ред (67), добијен на показани начин, биће и сам конвергентан у кругу C полупречника R одређеног обрасцем (84).

VI. Искључивост добијеног реда као интеграла једначине.

Остаје још последње питање, које треба решити да би се имало потпуно решење проблема интеграције: да ли је интеграл, добијен на показани начин у облику реда, једино могућно решење, или поред њега постоји и други који интеграл једначине који за $x=0$ добија вредност $y=0$? Јер, ако би се показало да одиста постоји још који интеграл, добијен на други који начин, онда ово досадашње решење не би давало потпуно решење проблема интеграције.

Да тако постављено питање није излишно, може се видети из примера у којима диференцијална једначина одиста има више од једног интеграла који за $x=0$ добијају вредност $y=0$. Такав је н. пр. случај са једначином

$$yy' - 1 = 0,$$

која има два интеграла

$$y = +\sqrt{2x} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{2x}$$

који су такви да обадва за $x=0$ добијају вредност $y=0$. Једначина

$$x(1+x)y' - (1+2x)y = 0$$

има бескрајно много таквих интеграла, јер је њен општи интеграл

$$y = Cx(1+x).$$

Осим тога, поред начина на који смо у овоме што претходи добили формално решење проблема интеграције, и који се састоји у израчунавању коефицијената a_n реда

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{85}$$

помоћу методе узастопних диференцијалена, има и других начина за то израчунавање. Један би од њих био н. пр. онај помоћу *методе неодређених коефицијената*, који се састоји у овоме:

Напишимо интеграл y у облику реда (85) са непознатим коефицијентима $a_1, a_2, a_3, \ldots$, па се из тога добија

$$(86) \qquad y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots$$

Кад се редови (85) и и (86) ставе у дату диференцијалну једначину на место y и y', добија се једна једначина

$$\Phi(x)=0$$

у којој кад се лева страна уреди по степенима промењиве x, добија се једна једначина облика

$$M_0+M_1x+M_2x^2+\cdots=0$$

чији ће коефицијенти зависити од коефицијената $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Да би та једначина могла постојати за произвољну вредност x потребно је и довољно да буде понаособ

$$M_0=0, \quad M_1=0, \quad M_2=0, \ldots$$

У извесним случајевима дешава се да се из ових једначина могу израчунати коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \ldots$, тако да се за сваки од њих добије једна или више коначних и одређених вредности. Кад се један скуп тако одређених вредности прида тим коефицијентима, диференцијална једначина биће редом (85) идентички задовољена, а пошто се из (85) за $x=0$ добија $y=0$, тако добијени ред претставља једно формално решење проблема.

I пример: нека је дата једначина

$$(1-x)^2y'+y+1=0;$$

налази се на показани начин да је

$$a_1=-1, \quad a_2=-\frac{1}{2}, \quad a_3=-\frac{1}{6}, \quad a_4=\frac{1}{24}, \ldots$$

а општи коефицијенат a_n за $n=3, 4, 5, \cdots$ израчунаће се из обрасца

$$a_n=\frac{(2n-3)a_{n-1}-(n-2)a_{n-2}}{n}$$

II пример: дата је једначина

$$y'-e^x(1+y)=0\ ;$$

налази се да је

$$a_1=1, \quad a_2=1, \quad a_3=\frac{5}{6}, \quad a_4=\frac{5}{8}, \ldots$$

а општи коефицијенат a_n за $n=2, 3, 4, \ldots$ израчунаће се из обрасца

$$a_n=\frac{1}{n}\left(a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{1!}+\frac{a_{n-3}}{.!}+\cdots+\frac{a_1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\right).$$

III пример: дата је једначина

$$(1+x^2)y'-y+x=0\ ;$$

налази се да је

$$a_1=0, \quad a_2=-\frac{1}{2}, \quad a_3=-\frac{1}{6}, \quad a_4=\frac{1}{12} \ldots$$

а a_n се израчунава за $n=3, 4, 5, \ldots$

$$a_n=\frac{1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

IV пример: дата је једначина

$$y'-y^2-x^2=0;$$

налази се да је

$$a_1=0, \quad a_2=0, \quad a_3=\frac{1}{3},$$

$$a_4=0, \quad a_5=0, \quad a_6=\frac{1}{54},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а a_n се израчунава помоћу обрасца

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n-1}a_i\,a_{n-i}\,.$$

Као што се види из таквих примера, начин који је напред употребљен за одредбу интеграла y у облику реда не мора бити једини начин за решење проблема и с тога се одиста мора поставити питање: да ли је под претпоставком учињеном за функцију $f(x, y)$, добијено решење једини интеграл y једначине

$$y' = f(x, y)$$

који за $x=0$ добија вредност $y=0$? Претпоставка је била та, да је $f(x,y)$ функција холоморфна у близини вредности $x=0$, $y=0$. Под таквом претпоставком може се доказати *да је добијено решење одиста једино решење тражене врсте.*

Да би се то доказало, нека су y и z два таква решења, па означимо њихову разлику $y-z$ са u. Тада је

$$u'=y'-z'=f(x, y)-f(x, z)$$

или

$$u'=\varphi(x, y, u)$$

где је

$$\varphi(x, y, u)=f(x, y)-f(x, y-u). \tag{87}$$

Пошто је за $x=0$ и $y=0$, то мора бити за ту вредност x и $u=0$. Кад се у $f(x,y)$ смени y нађеним интегралом, који је, као што смо видели, холоморфна функција променљиве x у кругу C, функција $\varphi(x, y, u)$ постаје холоморфна функција променљивих x и u за вредности x и u у близини вредности $x=0$, $u=0$. Она се тада може развити у ред уређен по степенима променљиве u

$$\varphi(x, y, u) = A_0+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+\cdots \tag{88}$$

где ће коефицијенти $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ бити холоморфне функције променљиве x у близини вредности $x=0$ (пошто је A_n n-ти парцијални извод функције φ по променљивој u, кад се у њему смени $u=0$ и резултат подели са $n!$).

Из (87) се види да за $x=0$ (пошто је тада и $y=0$, $u=0$) мора бити и $\varphi=0$. Према једначини (88) то захтева да је $A_0=0$, а поред тога могу бити једнаки нули и још један или више првих коефицијената $A_1, A_2, A_3\ldots$ Нека је то случај са првих k коефицијената, тако да је

$$A_0=A_1=A_2=\cdots=A_{k-1}=0\,.$$

Једначина (84) се тада своди на

$$\varphi(x, y, u)=u^k\,\lambda(x, u)$$

где је

$$\lambda(x, u)=A_k+A_{k+1}u+A_{k+2}u^2+\cdots$$

Кад се ова напише у облику

$$\frac{u'}{u} = u^{k-1}\,\lambda(x, u) \qquad (k \geqslant 1) \tag{89}$$

то, пошто логаритамски извод функције u постаје бескрајан кад је $u=0$, тако би морало бити и са десном страном једначине (85). Али то је немогућно, пошто је $\lambda(x, u)$ холоморфна функција у близини вредности $x=0$, $u=0$. Једначина (85) је дакле немогућна ако u није идентички једнако нули, а тада је $y=z$ за произвољну вредност x; интеграли y и z не разликују се, дакле, међу собом.

VII. Основна теорема о фактичком решењу проблема интеграције.

Из целокупног досадашњег излагања изводи се основна теорема за интеграцију диференцијалних једначина првога реда у облику Maclaurin-овог реда, која носи назив *теореме Briot-Bouquet-a.*

Нека је дата једначина

$$y'=f(x, y) \tag{90}$$

где је $f(x, y)$ ма каква функција променљивих x и y, холоморфна у близини вредности $x=0$, $y=0$, као и за све вредности x у једноме кругу c описаном у равни променљиве x око тачке $x=0$ и за све вредности y у једноме кругу c' описаном у равни променљиве y око тачке $y=0$. Ако су r и r' полупречници кругова c и c', а M какав реалан позитиван број који не премаша вредност модула функције $f(x,y)$ док x и y остају у тим круговима, онда важи ова теорема, као резултат свега што је напред изложено:

Онај интеграл у једначине (90), *који за* $x=0$ *добија вредност* $y=0$ *увек се може развити у Maclaurin-ов ред*

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

чији се општи коефицијенат a_n *израчунава помоћу обрасца*

$$a_n=\frac{1}{n!}\left[f_{n-1}\right], \tag{91}$$

а где је $f_1, f_2, f_3\ldots$ *низ функција које се једна из друге израчунавају помоћу обрасца*

$$f_n=\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}+f\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}, \qquad f_0=f(x,y). \tag{92}$$

Добијени ред ће насигурно бити конвергентан за све вредности x *што леже у кругу* C *описаном у равни* x *око тачке* $x=0$ *као центра са полупречником*

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right). \tag{93}$$

Метода којом смо дошли до ове основне теореме, је *Cauchy-ева компаративна метода* која се састоји у томе да се добијени ред за интеграл y упореди са редом што даје интеграл v друге једне диференцијалне једначине првога реда, за који се зна један круг у коме ће ред што изражава v конвергирати. Теорему је први доказао Cauchy, али су је Briot и Bouquet учинили тачнијом, потпунијом и проширили јој област употребљивости.

Са обзиром на напред наведену смену, којом се тачке x_0 и y_0 у својим равнима премештају у координатни почетак, теореми се може дати овај облик:

Нека је функција $f(x,y)$ холоморфна у близини вредности $x=x_0$, $y=y_0$, као и за све вредности x у кругу c описаном у равни x око тачке $x=x_0$, и за све вредности y у c' описаном у равни y око тачке $y=y_0$; нека су r и r' полупречници тих кругова, а M какав реалан позитиван број који не премаша вредност модула функције $f(x,y)$ док x и y остају у тим круговима. Тада:

Онај интеграл у једначине (90), *који за* $x=x_0$ *добија вредност* $y=y_0$ *може се развити у Taylor-ов ред*

$$y=A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\cdots$$

Општи коефицијенат A_n *реда израчунава се помоћу обрасца* (91), *али где* $[f_{n-1}]$ *означује број који се добија кад се у функцији* f_{n-1} *смени* $x=x_0$, $y=y_0$. *Низ функција* $f_1, f_2, f_3\ldots$ *опет се одређује помоћу обрасца* (92).

Добијени ред ће насигурно бити конвергентан за све вредности x *што леже у кругу* C *описаном у равни* x *око тачке* $x=x_0$ *као центра, са полупречником* (93).

Уосталом, напред је показано како се случај $x=x_0$, $y=y_0$ увек своди на случај $x=0$, $y=0$, тако да овај други облик теореме није општији од првога.

Приметимо да пошто је

$$\frac{r'}{2Mr}>0,$$

то је

$$0<e^{-\frac{r'}{2Mr}}<1$$

и према томе

$$0<1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}<1$$

па дакле

$$R<r.$$

Круг C у коме ће конвергирати интегрални ред y, садржан је, дакле, у кругу c у коме је функција $f(x,y)$, сматрана као функција променљиве x, холоморфна.

VIII. Практична примена основне теореме.

Briot-Bouquet-ова основна теорема потпуно решава проблем интеграције диференцијалне једначине првога реда (90) помоћу Maclaurin-ових и Taylor-ових редова. Практична примена теореме на поједине дате случајеве захтева да се одреде полупречници r и r' кругова c и c', као и број M, за дату функцију $f(x,y)$.

А) *Одредба полупречника* r *и* r'.

Пре свега има случајева кад се може за r и r' узети један пар ма колико позитивних бројева; то су случајеви кад је $f(x, y)$ цела функција променљивих x и y, н. пр. какав полином по x и y.

Кад није такав случај, онда су један од два полупречника, или оба, ограничени. Холоморфност функције $f(x, y)$ уопште престаје за вредности x и y које задовољавају извесну једначину $\varphi(x, y)=0$. Тако н. пр. функција f престаје бити холоморфна за такве вредности x, y, кад она има који од облика

$$\frac{P(x,y)}{\varphi(x,y)}, \quad P(x,y)\sqrt[3]{\varphi(x,y)}, \quad \frac{P(x,y)}{\sqrt{\varphi(x,y)}}, \quad P(x,y)\log\varphi(x,y).$$

У случају кад φ садржи само x, холоморфност може престати само за оне вредности x за које је $\varphi(x)=0$; кад φ садржи само y, она престаје само за оне вредности y за које је $\varphi(y)=0$. Тада се у првом случају може за r узети модуо ма које вредности x ближе тачки $x=0$ него ма који корен једначине $\varphi(x)=0$, јер кад круг c има полупречник мањи од тога модула, тај круг не садржи у својој унутрашњости никакав сингуларитет функције f; за полупречник r' може се узети какав се хоће позитиван број. У другоме случају може се за r' узети модуо ма које вредности y ближе тачки $y=0$ него ма који корен једначине $\varphi(y)=0$, из истога разлога као у првом случају; за r се може узети ма какав позитиван број. Напослетку, кад се једначина $\varphi(x, y)=0$ распада на две једначине $\varphi_1(x)=0$ и $\varphi_2(y)=0$, узеће се за r модуо ма које вредности x ближе тачки $x=0$ него ма који корен једначине $\varphi_1=0$, а за r' модуо ма које вредности y ближе тачки $y=0$ него ма који корен једначине $\varphi_2=0$.

Али је проблем компликованији кад се функција φ не изражава у коме од облика

$$\varphi(x,y)=\varphi(x), \quad \varphi(x,y)=\varphi(y), \quad \varphi(x,y)=\varphi_1(x)\,\varphi_2(y),$$

и уопште кад једначина $\varphi(x, y)=0$ нема корена $x=\alpha$ или $y=\beta$ где су α и β константе. У таквим се случајевима може поступити овако:

Пошто је функција $f(x, y)$ холоморфна за $x=0, y=0$, вредност $\varphi(0, 0)$ је различна од нуле. У великом броју случајева могућно је наћи такву једну реалну функцију λ двају променљивих количина да, ако се стави да је

$$|x|=\varrho, \qquad |y|=\varrho',$$

буде за све вредности x и y

$$|\varphi(x, y)|>\lambda(\varrho, \varrho') \qquad \lambda(0, 0)>0.$$

При тражењу такве једне функције λ често помаже правило по коме је модуо збира мањи од збира модула, а већи од разлике модула, т. ј.

$$|u|-|v|<|u+v|<|u|+|v|.$$

Тако н. пр. кад је

$$\varphi(x, y)=1+axy$$

биће

$$|\varphi(x, y)|>1-|axy|=1-\alpha\varrho\varrho', \qquad \alpha=|a|.$$

Кад је

$$\varphi(x, y)=1+ax^m y^n(b+cx^p)$$

биће

$$|\varphi(x, y)|>1-|ax^m y^n|\cdot|b+cx^p|,$$

па пошто је

$$|b+cx^p|<|b|+|c|\varrho^p,$$

биће

$$|\varphi(x, y)|>1-\alpha\varrho^m\varrho'^n(\beta+\gamma\varrho^p)$$

где је

$$\alpha=|a|, \qquad \beta=|b|, \qquad \gamma=|c|.$$

Кад је у датоме случају нађена таква једна функција $\lambda(\varrho, \varrho')$, онда постоји ово правило:

Ако се реални позитивни бројеви ϱ и ϱ' сматрају као координате x и y једне покретне тачке $M(x, y)$ у равни xOy, па се конструише реална крива

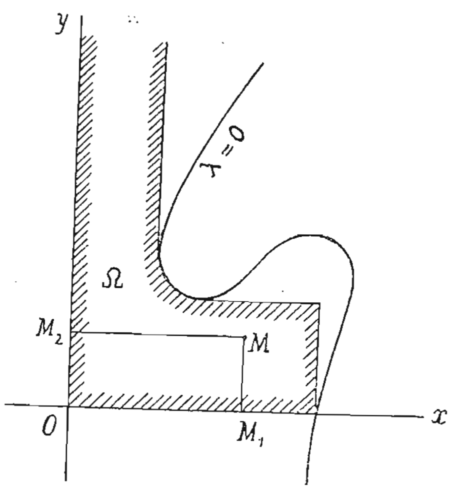
$$\lambda(x, y)=0 \tag{94}$$

и уочи област Ω (види слику) *која се састоји из свих могућних правоугаоника OM_1MM_2 са врховима у*

$$O(0, 0), \quad M_1(x, 0), \quad M(x, y), \quad M_2(0, y),$$

што се налазе цели у позитивној области криве (94), *тада се за r и r' могу узети координате једне ма које тачке у тој области* Ω.

Да би се то доказало, треба потсетити да, као што се зна из Аналитичке Геометрије, крива (94) дели раван xOy на *позитивну и негативну област* те криве, тј. такве две области, растављене самом том кривом, да за све тачке $M(x, y)$ у једној од њих функција λ остаје непрестано позитивна, а у другој непрестано негативна. Знак функције λ, онакав какав је за једну произвољно изабрану тачку једне такве области, остаје непромењен за све друге тачке M у истој области. Како је $\lambda(0,0) > 0$, позитивна област је увек она у којој је координатни почетак.



На пример, права линија

$$\lambda(x, y) = y + 2x + 3 = 0$$

дели раван xOy на две области; једна, у којој је координатни почетак, је позитивна, јер у њему функција λ има вредност $+3$; друга, у којој је н. пр. тачка $x = -2$, $y = -5$, је негативна, јер у овој тачки функција има вредност -6.

Тако исто круг

$$\lambda(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

дели раван на унутрашњу и спољашњу кружну област: за тачку $M(0, 0)$ функција λ има вредност -4, а н. пр. за тачку $M(2, 3)$ она има вредност $+9$. Унутрашња област је негативна, а спољашња позитивна.

Кад је, дакле, конструисана крива (94) и одређена њена позитивна област, која ће садржати и координатни почетак,

за све време док се тачка $M(x, y)$ помера у тој области, а у квадранту позитивних координата, функција λ не мења свој позитивни знак, па ће, дакле, за координате $x = r$, $y = r'$ једне ма које тачке $M(x, y)$ у истој области остати позитивна. То значи да ће за све тачке M постојати неједначина

$$|\varphi(x, y)| > \lambda(r, r') > 0 .$$

Ако се шта више тачка M помера у области Ω, за време ма каквог померања од $M(0, 0)$ до $M(r, r')$, а док $|x| = \varrho$ расте од нуле до r, а $|y| = \varrho'$ од нуле до r', функција $\lambda(x, y)$ не може бити једнака нули. А то показује да, док се x креће у своме кругу c полупречника r и y у своме кругу c' полупречника r', ма како, функција $f(x, y)$ непрестано остаје холоморфна, чиме је горње тврђење доказано.

I пример: нека је дата једначина облика

$$y' = \frac{p(x, y)}{a + bxy}$$

где је $p(x, y)$ полином по x, y, а a и b две позитивне константе. Холоморфност функције на десној страни једначине престаје кад је

$$a + bxy = 0 .$$

Пошто је

$$|a + bxy| \geqslant a - b\,|x| \cdot |y| = a - b\,\varrho\varrho'$$

може се за r и r' узети апсциса и ордината једне ма које тачке $M(x, y)$ у негативној области равностране хиперболе

$$xy - \frac{a}{b} = 0$$

и то у квадранту позитивних координата, пошто се Ω подудара са том области.

II пример: нека је дата једначина облика

$$y' = \frac{p(x, y)}{a + bx^2 + cy^2} ,$$

где су a, b, c позитивне константе. Холоморфност десне стране престаје кад је

$$a+bx^2+cy^2=0\ ,$$

а пошто је

$$|a+bx^2+cy^2| \geqslant a - |bx^2+cy^2|\ ,$$

а

$$|bx^2+cy^2| \leqslant |bx^2| + |cy^2| = b\varrho^2+c\varrho'^2\ ,$$

то је

$$|a+bx^2+cy^2| \geqslant a-b\varrho^2-c\varrho'^2.$$

За r и r' може се, дакле, узети апсциса и ордината једне ма које тачке $M(x, y)$ у унутрашњости круга

$$bx^2+cy^2-a=0$$

описаног око координатног почетка, а у квадранту позитивних координата, пошто се опет Ω подудара са тим кружним квадрантом.

В) Одредба броја $\boldsymbol{M}$.

Очевидно је да број M, који треба да је такав да га модуо функције $f(x, y)$ не премашује док x остаје у своме кругу c полупречника r, а y у своме кругу c' полупречника r', зависи од вредности r и r'. Проблем да се тачно нађе та зависност, нерешљив је, изузимајући неке врло просте случајеве. Али пошто ни сам услов, који одређује M, није прецизан, јер се тражи само то да тај број не буде мањи од поменутога модула функције $f(x,y)$, то је посао упрошћен и задатак одредбе броја M у непрегледном броју случајева решљив.

Пре свега, у многим случајевима помаже правило да је модуо збира мањи од збира модула, а већи од разлике модула. Тако н. пр.

1^0 за једначину

$$y' = \sqrt{1-xy}$$

биће

$$|1-xy| < 1+rr', \qquad r=|x|, \qquad r'=|y|$$

па се може узети

$$M = \sqrt{1+rr'}\ ;$$

2^0 за једначину

$$y' = \sqrt{x^2-y^2}$$

према

$$|x^2-y^2| < r^2+r'^2$$

може се узети

$$M = \sqrt{r^4+r'^2}\ ;$$

3^0 за једначину

$$y'^3-x^2y^5+1=0$$

може се узети

$$M = \sqrt[3]{1+r^2r'^5}\ .$$

Међутим постоји за одредбу броја M и једна општа *метода мајорирања*, која се састоји у овоме:

Кад је дата једначина

$$y' = f(x, y)$$

где је $f(x,y)$ функција холоморфна у близини вредности $x=0$, $y=0$, та се функција може развити у двоструки Maclaurin-ов ред

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn}\, x^m y^n\ . \tag{95}$$

За функцију $f(x,y)$ каже се да је *мајорирана* једном функцијом $\lambda(r, r')$, изражeном двоструким редом

$$\lambda(r, r') = \sum_m \sum_n B_{mn}\, r^m r'^n \tag{96}$$

где је

$$r=|x|, \qquad r'=|y|\ ,$$

ако су коефицијенти B_{mn} реда (96) сви реални и позити а при том је за све вредности индекса n

$$|A_{mn}| \leqslant B_{mn}\ . \tag{97}$$

Пошто је

$$|f(x,y)| < \sum_m \sum_n |A_{mn}| \,.\, |x|^m \,.\, |y|^n\ ,$$

а

$$|A_{mn}| \cdot |x|^m \cdot |y|^n < B_{mn} r^m r'^n$$

биће за све вредности x у кругу c полупречника r, и за све вредности y у кругу c' полупречника r' (са центрима у координатном почетку)

$$(98) \qquad |f(x,y)| < \lambda(r, r').$$

Задатак одредбе броја M сведен је дакле на

1^0 тражење реалних позитивних бројева B_{mn} за које ће постојати неједначина (97)

2^0 на сумирање помоћу њих формираног двоструког реда (96).

А кад је то извршено, може се узети

$$M = \lambda(r, r').$$

У појединим општијим случајевима број M се изражава непосредно помоћу саме функције $f(x,y)$. Тако ће бити кад су сви коефицијенти A_{mn} реални, а поред тога

1^0 или су сви они позитивни; тада се може узети

$$B_{mn} = A_{mn}$$

па дакле

$$\lambda(r, r') = \sum_m \sum_n A_{mn} r^m r'^n = f(r, r')$$

тако да ће бити

$$M = f(r, r');$$

2^0 или су сви коефицијенти парнога ранга m позитивни, а сви непарног ранга m негативни; тада се може узети

$$M = f(-r, r');$$

3^0 или су сви коефицијенти парнога ранга n позитивни, а сви непарног ранга n негативни; тада се може узети

$$M = f(r, -r').$$

Тако исто, у појединим општијим случајевима може се мајорирање функције $f(x, y)$ свести на мајорирање простијих функција. Такав је н. пр. случај кад је функција $f(x,y)$ облика

$$f = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3 + \cdots$$

где су φ_k и ψ_k функције променљивих x и y.

Пошто је тада

$$|f| < |\varphi_1| \cdot |\psi_1| + |\varphi_2| \cdot |\psi_2| + \cdots$$

то кад се знају мајорирати функције

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$$
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots$$

имаће се мајорирана и функција $f(x, y)$, па ће се тиме, на горњи начин, одредити и број M.

Што се тиче задатка сумирања двоструког реда (96) којим се извршује мајорирање функције $f(x, y)$, а тиме и одредба броја M, он ће бити предмет одељка X, ове књиге.

Овде ће бити наведено неколико примера, у вези са тим одељком X.

I пример: зна се да двоструки ред

$$\sum_m \sum_n \frac{1}{m!\,n!} r^m r'^n$$

има за збир функцију

$$\lambda(r, r') = e^{r+r'};$$

према томе за једначину

$$y' = Ae^x e^y, \qquad A = \text{const} > 0$$

може се узети

$$M = Ae^{r+r'}.$$

II пример: зна се да ред

$$\sum_m \sum_n (m+1)(n+1) r^m r'^n$$

има за збир функцију

$$\lambda(r, r') = \frac{1}{(1-r)^2 (1-r')^2};$$

према томе за једначину

$$y' = \frac{A}{(1-x)^2\,(1-y)^2} \qquad\qquad A>0$$

може се узети

$$M = \frac{A}{(1-r)^2\,(1-r')^2}\,.$$

III пример: зна се да ред

$$\sum_m \sum_n \frac{(m+n)\,!}{m\,!\,n\,!\,a^m\,b^n}\, r^m\, r'^n$$

има за збир функцију

$$\lambda\,(r,\,r') = \frac{1}{1-\frac{r}{a}-\frac{r'}{b}}\,;$$

према томе за једначину

$$y' = \frac{A}{1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}$$

(где су A, a и b позитивне константе) може се узети

$$M = \frac{A}{1-\frac{r}{a}-\frac{r'}{b}}\,.$$

IX. Специјалније компаративне једначине у проблему интеграције.

Као што се види из напред изложенога, одређивање круга C у коме ће добијени интегрални ред

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

дате диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ насигурно бити конвергентан, врши се компаративном методом, упоређујући тај ред са редом што даје интеграл

$$v = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

друге једне диференцијалне једначине

$$(99) \qquad v' = \varphi\,(x,\,v) = \sum_m \sum_n B_{mn}\, x^m\, v^n$$

која испуњава ове услове:

1° да су сви коефицијенти B_{mn} реални и позитивни;

2° да је за све вредности индекса m и n

$$|\,A_{mn}\,| \leqslant B_{mn}\,;$$

3° да се може одредити полупречник R' круга C' у коме ће интеграл v бити холоморфна функција променљиве x.

Кад је, за дату диференцијалну једначину нађена таква једна једначина (99), може се тврдити *да ће интегрални ред прве једначине бити конвергентан за све вредности* x, *у кругу описаном око* $x=0$, *као центра, са полупречником* R *који је бар толико велики колики је полупречник* R' *круга* C'.

Једначина (99) је тада *компаративна једначина* за дату диференцијалну једначину

$$(100) \qquad y' = f\,(x,\,y)\,.$$

Компаративних једначина има од две врсте:

1° једних што важе за све једначине (100) у којима је функција $f\,(x, y)$ холоморфна у близини вредности $x=0$, $y=0$; то су *опште компаративне једначине.*

2° других што важе за једначине (100) за које је потребно чинити за $f\,(x,\,y)$ какве нарочите претпоставке; то су *специјалније компаративне једначине.*

Све ово што је напред изложено за одређивање круга конвергенције C интегралног реда y, основано је на употреби Cauchy-еве компаративне једначине која је облика

$$v' = \frac{M}{(1-ax)\,(1-bv)}$$

где су a и b две реалне позитивне константе.

То, међутим, није једина могућна компаративна једначина и познато је више разних других диференцијалних једначина које играју исту компаративну улогу као и Cauchy-ева једначина. Такве би н. пр. биле Weierstrass-ова једначина

$$v' = \frac{M}{1 - ax - bv}$$

или Stäckel-ова једначина

$$v' = \frac{M}{(1 - ax)^2 (1 - bv)}$$

о чијој употреби за одређивање круга конвергенције интегралног реда y овде неће бити говора, пошто је за циљ који се има пред очима била довољна Cauchy-ева једначина.

Специјалних компаративних једначина има мноштво, али је њихова област употребљивости много ужа. За могућност њихове употребе, у појединим датим случајевима, везане су одређене претпоставке о функцији $f(x, y)$ што фигурише у датој диференцијалној једначини.

Најчешће од тих претпоставака су оне *о начину рашћења или опадања коефицијената* A_{mn} двоструког реда

(101) $$y' = f(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn}\, x^m y^n ,$$

кад индекси m и n бескрајно расту. Како се подаци о томе начину рашћења или опадања могу искористити у проблему о коме је реч, видеће се н. пр. из ових правила:

Нека су $\lambda(n)$ и $\mu(n)$ две реалне функције промењљивог целога позитивног броја n и такве да изрази

$$\sqrt[n]{\lambda(n)}, \quad \sqrt[n]{\mu(n)}, \quad \frac{|A_{mn}|}{\lambda(m) \cdot \mu(n)}$$

остају коначни при бескрајном рашћењу индекса m и n. *Ако се тада стави да је*

(102) $$\sum \lambda(n)\, x^n = X(x), \qquad \sum \mu(n)\, v^n = V(v),$$

диференцијална једначина

(103) $$v' = \varphi(x, v) = AXV ,$$

где је A подесно изабран реалан позитиван број, играће улогу компаративне једначине за дату једначину (101).

Јер, под постављеним условима, оба реда (102) биће конвергентна у извесним круговима, описаним око почетка, са полупречницима различним од нуле. Са друге стране, услов да израз

(104) $$\frac{|A_{mn}|}{\lambda(m) \cdot \mu(n)}$$

не расте бескрајно при рашћењу индекса m и n, показује да постоји један реалан и позитиван број A такав да за све вредности тих индекса израз (104) има вредност непрестано мању од A. Тада је, ако се стави да је

$$A\, \lambda(m)\, \mu(n) = B_{mn}$$

за све вредности индекса

$$|A_{mn}| < B_{mn} .$$

Са друге стране, интеграл v једначине (103), који за $x = 0$ добија вредност $v = 0$, је изражен једначином

(105) $$\int_0^v \frac{dv}{V} = A \int_0^x X\, dx$$

и у свакоме датом случају може се одредити круг C' описан око почетка $x=0$ у коме ће функција v, изражена обрасцем (105), бити холоморфна. Једначина (103) испуњава, дакле све услове који треба да су испуњени да би била компаративна једначина за једначину (101). *Полупречник R круга конвергенције интегралног реда у једначине* (101) *биће, дакле, бар толико велики, колики је полупречник круга C'.*

А из тога се изводе н. пр. ова правила:

I правило: *Кад год израз*

(106) $$m!\, n!\, |A_{mn}|$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n, за полупречник R може се узети вредност

$$(107) \qquad R = \log\left(1+\frac{1}{A}\right),$$

где A означује једну горњу границу израза (106).

Јер компаративна једначина,

$$v' = \varphi(x, v) = A \sum \frac{x^m v^n}{m!\, n!} = Ae^{x+v},$$

има за интеграл v, што за $x=0$ добија вредност $v=0$, израз

$$v = -\log[1 - A(e^x - 1)]$$

који има вредност (107) као свој од почетка $x=0$ најмање удаљен сингуларитет.

II правило: *Кад год израз*

$$(108) \qquad \frac{|A_{mn}|}{(m+1)(n+1)}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n, за полупречник R може се узети вредност

$$(109) \qquad R = \frac{1}{1+3A},$$

где A означава једну горњу границу израза (108).

Јер компаративна једначина

$$v' = \varphi(x, y) = A\Sigma(m+1)(n+1)\, x^m v^n = \frac{A}{(1-x)^2 (1-v)^2}$$

има за интеграл v, који за $x=0$ добија вредност $v=0$, израз

$$v = 1 - \sqrt[3]{\frac{1-(1+3A)x}{1-x}}$$

а овај има вредност (106) као свој сингуларитет најближи почетку.

III правило: *Кад год су коефицијенти A_{mn} сви реални и позитивни, а израз*

$$(110) \qquad m!\, n!\, A_{mn}$$

монотоно расте при рашћењу индекса m и n, за компаративну једначину дате диференцијалне једначине

$$(111) \qquad y' = f(x, y)$$

може се узети једначина

$$(112) \qquad v' = \varphi(x, v)$$

где је $\varphi(x, v)$ ма који парцијални извод $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\, \partial v^q}$ функције $f(x, v)$.

Јер, пошто израз (110) монотоно расте при рашћењу индекса, биће за свако m, n, p

$$m!\, n!\, A_{mn} < (m+p)!\, (n+q)!\, A_{m+p,\, n+q}$$

па дакле

$$A_{mn} < B_{mn}$$

где је

$$B_{mn} = \frac{(m+p)!\, (n+q)!}{m!\, n!} A_{m+p,\, n+q},$$

тако да ће једначина

$$v' = \varphi(x, v) = \sum\sum B_{mn}\, x^m v^n$$

играти улогу компаративне једначине за једначину (111) кад год интеграл v задовољава горе наведени услов. Међутим је овде

$$\sum\sum B_{mn}\, x^m v^n = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\, \partial y^q} f(x, v)$$

а та једначина насигурно има свој интеграл v, што за $x=0$ добија вредност $v=0$, као холоморфну функцију променљиве x у близини вредности $x=0$.

Приметићемо да из горњег услова везаног за израз (110) следује да коефицијенат $A_{m,n}$ не опада никад брже него израз

$$\frac{1}{m!\, n!}$$

у току поступног рашћења индекса m и n.

Правило доводи до закључака од интереса кад се примени н. пр. на једначину

$$y' = p(x, y) + \psi(x, y)$$

где је p полином по x и y, а ψ произвољна функција, таква да десна страна једначине задовољава услов везан за израз (110).

X. Сумирање двоструких редова у проблему интеграције.

Као што је показано, и формирање компаративних једначина, и одредба броја M за Cauchy-еву компаративну једначину захтева сумирање двоструких Maclaurin-ових редова

$$z = \sum_m \sum_n A_{mn} x^m y^n . \tag{113}$$

Проблем сумирања нема општег решења, али се он може решити у великоме броју општијих случајева, и то баш у онима који су од нарочитог интереса у проблему интеграције. Најважнији од таквих случајева садржани су у ставовима који следују.

I став: *Да би функција z дефинисана редом* (113) *била изражљива као збир партикуларних интеграла парцијалне диференцијалне једначине*

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{114}$$

потребно је и довољно да израз A_{mn}, пошто се у њему смени m са x, а n са y, буде збир партикуларних интеграла једначине (114).

То следује из тога што једначина (114) има за општи интеграл

$$z = XY \quad , \tag{115}$$

где је X произвољна функција променљиве x, а Y произвољна функција променљиве y. Јер је из (115)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'Y , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = XY' , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = X'Y'$$

и једначина (114) је задовољена за произвољне функције X и Y.

Ако је, дакле, функција (113) једнака збиру партикуларних интеграла једначине (114), она је облика

$$z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \cdots \tag{116}$$

где је X_k функција променљиве x, а Y_k функција променљиве y.

Онај део двоструког реда (113) што произлази од члана $X_k Y_k$ облика је

$$\left(\sum a_m x^m\right) \left(\sum b_n y^n\right)$$

и његов коефицијенат продукта $x^m y^n$ изражава се као збир чланова облика $\alpha_m \beta_n$, где се α_m мења само са индексом m, а β_n само са индексом n. Према томе, и сам коефицијенат A_{mn} изражава се као збир чланова облика $\alpha_m \beta_n$ па, дакле, кад се у њему смени m са x, а n са y, он ће постати линеарна и хомогена комбинација интеграла једначине (114).

Обрнуто, кад год буде наступио овај последњи случај, z је збир чланова облика

$$\sum\sum \alpha_m \beta_n x^m y^n = \left(\sum \alpha_m x^m\right) \left(\sum \beta_n y^n\right) = X_k Y_k$$

па је, дакле, функција (113) збир партикуларних интеграла једначине (114). Услов, исказан горњим ставом, у исто је време и потребан и довољан.

Из свега тога излази и овај, сам по себи очевидан закључак:

II став: *Кад год је функција (113) изражљива као збир партикуларних интеграла једначине* (114), *она је изражљива као хомогена квадратична функција двеју или више функција што зависе само од по једне променљиве x или y, тако да је она облика* (116).

А из тога се добија и овај закључак:

Да би функција (113) и сама била интеграл једначине (114), потребно је и довољно да то буде случај и са функцијом $A_{x,y}$, тј. да она буде продукат двеју функција, од којих једна зависи само од x, а друга само од y. Такав ће исти облик тада имати и функција z.

I.

Једна пространа класа редова (113), који испуњавају услове ових ставова, јесте она за коју је коефицијенат $A_{m,n}$ *рационална* функција:

1⁰ ограниченог броја израза

(117) $$a_m, a_m', a_m'', \ldots$$

што се мењају само само са индексом m;

2⁰ ограниченог броја израза

(118) $$b_n, b_n', b_n'', \ldots$$

што се мењају само са индексом n.

Таква рационална функција ће испуњавати услове горњих ставова кад код су јој полови *стални*, тј. независни од индекса m и n, или кад полова и нема, у коме се случају коефицијенат $A_{m,n}$ своди на полином по изразима (117) и (118).

У овоме последњем случају $A_{m,n}$ је збир ограниченог броја чланова облика

(119) $$a_m^p \, a'^{\,p_1}_m \, a''^{\,p_2}_m \ldots b_n^q \, b'^{\,q_1}_n \, b''^{\,q_2}_n \ldots,$$

тј. облика $\alpha_m \beta_n$, па је, дакле, функција $A_{x,y}$ збир партикуларних интеграла једначине (114). Функција z је облика (116), где је број функција X_k и Y_k ограничен.

У првом случају, тј. кад рационална функција има полова, а ови су стални, међу изразима (117) налазиће се ограничен број израза облика

$$\frac{1}{[a_m^{(k)} - c_k]^{p_k}},$$

а међу изразима (118) ограничен број израза облика

$$\frac{1}{[b_n^{(k)} - d_k]^{q_k}},$$

где су c_k и d_k стални, од m и n независни бројеви, а p_k и q_k цели позитивни стални бројеви. Функција z биће опет облика (116), тј. биће збир ограниченог броја партикуларних интеграла једначине (114).

Елиминацијом функција

(120) $$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

(121) $$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$$

и њихових узастопних извода по x и y из низа једначина које се добијају узастопним парцијалним диференцијалењима израза (116) по x и y, добија се једна парцијална једначина која не садржи ни једну од функција (120) и (121) ни њихове изводе. Та је једначина облика

(122) $$P(z, p, q, r, s, t, \ldots) = 0,$$

где је P полином по функцији z и њеним парцијалним изводима $p, q, r, s, t, \ldots$ по x и y. Кад се ред једнога парцијалног извода сматра као степен, тај је полином хомоген; његови коефицијенти су цели бројеви.

У случају н. пр. кад је

$$z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2,$$

тј. кад се коефицијенат $A_{m,n}$ изражава као збир од два члана облика $\alpha_m \beta_n$, једначина (122) је у своме развијеном облику,

(123) $$\left(z \frac{\partial z^2}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \\ - z \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + \\ + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = 0.$$

А за општи случај важи овај

III став: *Кад год је $A_{m,n}$ облика претпостављеног у овоме параграфу, функција z је интеграл једне парцијалне диференцијалне једначине коначног реда облика* (123) *који зависи само од броја чланова $\alpha_m \beta_n$ на чији се збир своди $A_{m,n}$, а не зависи од облика израза α_m и β_n.*

Једна иста парцијална једначина (123) важи за све двоструке потенцијалне редове z за које се коефицијенат $A_{m,n}$ изражава као збир од једнога истог броја чланова $\alpha_m \beta_n$. Ако је овај број p, једначина је $2p$-ога реда.

II.

Узмимо као пример случај кад је

$$A_{m,n}=Q_{m,n}\, A_m\, B_n\,, \tag{124}$$

где су A_m и B_n чланови ма каквих бескрајних низова

$$\begin{aligned} &A_0\,, A_1\,, A_2\,, \ldots\,, \\ &B_0\,, B_1\,, B_2\,, \ldots\,, \end{aligned} \tag{125}$$

а $Q_{m,n}$ полином по једноме ограниченом броју чланова

$$\begin{aligned} &m\,, \lambda_1^m\,, \lambda_2^m\,, \lambda_3^m\,, \ldots \\ &n\,, \mu_1^n\,, \mu_2^n\,, \mu_3^n\,, \ldots \end{aligned} \tag{126}$$

где су λ_k и μ_k бројеви независни од m и n, као и коефицијенти полинома $Q_{m,n}$.

Коефицијенат $A_{m,n}$ и тада је једнак збиру ограниченог броја сабирака облика

$$Cm^p\, n^q\, M^m\, N^n\, A_m\, B_n\,,$$

где су C, M, N константе независне од m и n, а p и q цели позитивни бројеви такође независни од m и n. Функција $A_{x,y}$ је, дакле, збир партикуларних интеграла једначине (114). Према томе, функција z, дефинисана двоструким редом

$$z=\Sigma\Sigma\, A_{m,n}\, x^m\, y^n$$

једнака је збиру ограниченог броја чланова облика $X_p\, Y_q$, где је

$$\begin{aligned} X_p&=A\Sigma m^p\, A_m\,(Mx)^m\,, \\ Y_q&=B\Sigma n^q\, B_n\,(Ny)^n\,, \end{aligned}$$

и где су A и B две константе.

Уочимо тада две функције

$$\begin{aligned} U_p\,(t)&=\Sigma\, m^p\, A_m\, t^m\,, \\ V_q\,(t)&=\Sigma\, n^q\, B_n\, t^n\,, \end{aligned} \tag{127}$$

па ће бити

$$\begin{aligned} X_p&=AU_p\,(Mx)\,, \\ Y_q&=BV_q\,(Ny)\,. \end{aligned} \tag{128}$$

Међутим, функције U_p и V_q одређене су рекурсивним обрасцима

$$\begin{aligned} U_k(t)&=t\,\frac{d}{dt}\,U_{k-1}(t)\,, \\ V_k(t)&=t\,\frac{d}{dt}\,V_{k-1}(t)\,, \end{aligned} \tag{129}$$

са почетним вредностима

$$\begin{aligned} U_0\,(t)&=\Sigma\, A_m\, t^m\,, \\ V_0\,(t)&=\Sigma\, B_n\, t^n\,. \end{aligned} \tag{130}$$

Помоћу тако одређених функција U_k и V_k функција z се изражава као збир ограниченог броја чланова облика

$$CU_p\,(Mx)\cdot V_q\,(Ny)\,. \tag{131}$$

Ако се сингуларитети функције $U_0(t)$ означе са

$$\xi_0\,, \xi_1\,, \xi_2\,, \ldots\,, \tag{132}$$

а сингуларитети функције $V_0(t)$ са

$$\eta_0\,, \eta_1\,, \eta_2\,, \ldots\,, \tag{133}$$

сингуларитети функције z ће бити

$$x=\frac{\xi_0}{M}\,, \quad x=\frac{\xi_1}{M}\,, \quad x=\frac{\xi_2}{M}\,, \ldots \tag{134}$$

$$y=\frac{\eta_0}{N}\,, \quad y=\frac{\eta_1}{N}\,, \quad y=\frac{\eta_2}{N}\,, \ldots \tag{135}$$

Функција z биће холоморфна у кругу полупречника

$$R=\frac{\xi}{M}\,,$$

у равни промењљиве x, и у кругу полупречника

$$R' = \frac{\eta}{N} ,$$

у равни променљиве y, где ξ и η означују најмању међу вредностима (132) и (133).

I пример: нека је

$$A_m = 1 , \qquad B_n = 1 ,$$

а знак $\Sigma\Sigma$ се распростире на вредности

$$(136) \qquad \begin{array}{l} m = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

Тада је

$$U_0 = V_0 = \frac{1}{1-t} ,$$

$$U_1 = V_1 = \frac{t}{(1-t)^2} ,$$

$$U_2 = V_2 = \frac{1+t}{(1-t)^3} ,$$

$$U_3 = V_3 = \frac{4+2t}{(1-t)^4} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Све су функције $U_k(t)$ и $V_k(t)$ рационалне, *па ће функција z бити рационална функција променљивих x и y, која ће имати за полове вредности*

$$x = \frac{1}{M} , \quad y = \frac{1}{N} .$$

Тако се н. пр. налази да је

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (am + bn + c)\, x^m y^n =$$

$$= aU_1(x) \cdot V_0(y) + bU_0(x) \cdot V_1(y) + cU_0(x) \cdot V_0(y) ,$$

па пошто је

$$U_0(t) = V_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m = \frac{1}{1-t} ,$$

$$U_1(t) = V_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m t^m = \frac{t}{(1-t)^2} ,$$

то је

$$z = \frac{ax}{(1-x)^2(1-y)} + \frac{by}{(1-x)(1-y)^2} + \frac{c}{(1-x)(1-y)} .$$

Тако се исто налази да је

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (am + bn + c)^2 x^m y^n =$$

$$= a^2 U_2(x) \cdot V_0(y) + b^2 U_0(x) \cdot V_2(y) + c^2 U_0(x) \cdot V_0(y) +$$

$$+ 2ab \cdot U_1(x) \cdot V_1(y) + 2ac\, U_1(x) \cdot V_0(y) + 2bc\, U_0(x) \cdot V_1(y) ,$$

па пошто

$$U_0, V_0, U_1, V_1$$

имају исте вредности као малочас, а

$$U_2(t) = V_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 t^m = \frac{1+t}{(1-t)^3} ,$$

то, кад се све сведе, добија се за z израз

$$z = \frac{Ax^2y^2 + Bx^2y + Cxy^2 + Dx^2 + Exy + Fy^2 + Gx + Hy + I}{(1-x)^3(1-y)^3} ,$$

где су $A, B, \ldots, I$ константе чије су вредности

$$\begin{aligned}
A &= c^2 + 2(ab - ac - bc) , \\
B &= b^2 - 2c^2 - 2(ab - 2ac - bc) , \\
C &= a^2 - 2c^2 - 2(ab - ac - 2bc) , \\
D &= b^2 + c^2 - 2ac , \\
E &= -2(a^2 + b^2 - 2c^2) + 2(ab - 2ac - 2bc) , \\
F &= a^2 + c^2 - 2bc , \\
G &= a^2 - 2(b^2 + c^2 - ac) , \\
H &= b^2 - 2(a^2 + c^2 - bc) , \\
I &= a^2 + b^2 + c^2 .
\end{aligned}$$

Као специјалан случај добија се образац

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)^2\,x^m y^n=\frac{2x^2y^2+x^2y-xy^2+x^2-2xy+y^2-x-y+2}{(1-x)^3(1-y)^3}$$

Исто тако је и

$$z=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(am^2+bn^2)\,x^m\,y^n=$$

$$=\frac{(a+b)(1-2xy)+bx^2(1+y)+ay^2(1+x)+(a-2b)x-(2a-b)y}{(1-x)^3(1-y)^3},$$

тако да је

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(m^2+n^2)\,x^m y^n=\frac{xy(x+y-4)+x(x-1)+y(y-1)+2}{(1-x)^3(1-y)^3}.$$

II пример: нека је

$$A_m=\frac{1}{m!},\qquad B_n=\frac{1}{n!},$$

а знак $\Sigma\Sigma$ се распростире на све вредности (136). Тада је

$$U_0=V_0=e^t,$$
$$U_1=V_1=te^t,$$
$$U_2=V_2=(1+t)\,e^t,$$
$$U_3=V_3=(2+t)\,e^t,$$
$$U_4=V_4=(3+t)\,e^t,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Функција z је полином по променљивима x, y и по разним експоненцијалним функцијама

$$e^{a_1x},\ e^{a_2x},\ e^{a_3x},\ \ldots$$
$$e^{b_1y},\ e^{b_2y},\ e^{b_3y},\ \ldots$$

где су a_k и b_k константе чији је број ограничен.

III пример: нека је

$$A_m=\frac{(2m)!}{(m!)^2},\quad B_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

а знак $\Sigma\Sigma$ се распростире на све вредности (136). Тада је

$$U_0=V_0=\frac{1}{\sqrt{1-4t}},$$
$$U_1=V_1=\frac{2t}{(\sqrt{1-4t})^3},$$
$$U_2=V_2=\frac{2t+8t^2}{(\sqrt{1-4t})^5},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Функција z је алгебарска функција променљивих x и y, која има вредности

$$x=\frac{1}{4},\qquad y=\frac{1}{4}$$

као алгебарске критичке тачке другога реда.

IV пример: нека је A_m рационална функција променљиве m чији су полови сви прости и једнаки негативним сталним целим бројевима; нека је B_n функција такве исте врсте променљиве n. Поред тога, знак $\Sigma\Sigma$ односи се на вредности

$$m=1,2,3,\ldots$$
$$n=1,2,3,\ldots$$

Тада су A_m и B_n облика

$$A_m = \frac{P(m)}{(m+\alpha_1)(m+\alpha_2)\dots(m+\alpha_p)} ,$$

$$B_n = \frac{Q(n)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)\dots(n+\beta_q)} ,$$

где су α_k и β_k цели позитивни бројеви независни од m и n, а $P(m)$ и $Q(n)$ су полиноми по m, односно по n.

Растављањем рационалних функција A_m и B_n на просте елементе добија се

$$A_m = C + M ,$$
$$B_n = C' + N ,$$

где је

$$M = \sum \frac{R_k}{m+\alpha_k} ,$$

$$N = \sum \frac{R_k'}{n+\beta_k}$$

и где су

$$C,\ C',\ R_k,\ R_k'$$

константе независне од m и n, и то R_k и R_k' су остаци функција A_m и B_n за њихове полове $-\alpha_k$ и $-\beta_k$. Тада је

$$U_0(t) = \frac{C}{1-t} + \sum \frac{R_1 t^m}{m+\alpha_1} + \sum \frac{R_2 t^m}{m+\alpha_2} + \cdots ,$$

$$V_0(t) = \frac{C'}{1-t} + \sum \frac{R_1' t^m}{m+\beta_1} + \sum \frac{R_2' t^m}{m+\beta_2} + \cdots$$

Међутим, образац

$$\log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \cdots - \frac{t^p}{p} -$$
$$- t^p \left(\frac{t}{1+p} + \frac{t^2}{2+p} + \frac{t^3}{3+p} + \cdots \right)$$

даје непосредно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n+p} = -\frac{1}{t^p} \left[\log(1-t) + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^p}{p} \right] ,$$

према чему се налази да је

$$U_0(t) = \frac{C}{1-t} - \log(1-t) \left(\frac{R_1}{t^{\alpha_1}} + \frac{R_2}{t^{\alpha_2}} + \cdots \right) - S(t) ,$$

где је $S(t)$ збир чланова

$$\frac{R_k}{t^{\alpha_k}} \left(t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{\alpha_k}}{\alpha_k} \right)$$

за

$$k = 1, 2, 3, \dots, h ,$$

а где h означава број полова рационалне функције A_m.

Функција $V_0(t)$ има исти облик, само што су у њој константе C и R_k смењене константама C' и R_k', а полови α_k са β_k.

Из тих се почетних функција, помоћу напред наведених рекурсивних образаца, могу изразити потребне функције U_k и V_k а *тиме ће бити сумиран дати ред z помоћу ограниченог броја рационалних и логаритамских функција.*

III.

Уочимо исти случај као у одељку II, а са том разликом што је $Q_{m,n}$ полином по једном ограниченом броју чланова

$$\frac{1}{m},\ \lambda_1^m,\ \lambda_2^m,\ \lambda_3^m \dots ,$$

$$\frac{1}{n},\ \mu_1^n,\ \mu_2^n,\ \mu_3^n \dots ,$$

где су λ_k и μ_k стални бројеви (независни од m и n) као и коефицијенти полинома $Q_{m,n}$.

Израчунавање функције z је исто као у одељку II, са том разликом што функције U_k и V_k имају другојаче облике. На име, биће

$$U_k(t) = \sum \frac{A_m}{m} t^m ,$$

$$V_k(t) = \sum \frac{B_n}{n} t^n .$$

Те су функције у исти мах одређене и рекурсивним обрасцима

$$U_k(t) = \int U_{k-1}(t) \frac{dt}{t},$$

$$V_k(t) = \int V_{k-1}(t) \frac{dt}{t},$$

са почетним функцијама

$$U_0(t) = \Sigma A_m t^m ,$$
$$V_0(t) = \Sigma B_n t^n .$$

Оне се, усталом, могу имати и непосредно изражене у облику одређеног интеграла. Тако, из интегралног обрасца

$$\frac{1}{m^k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-mu} u^{k-1} du$$

добија се да је

$$U_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty U_0(te^{-u}) u^{k-1} du ,$$

$$V_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty V_0(te^{-u}) u^{k-1} du .$$

У специјалном случају кад је

$$A_m = 1 , \qquad B_n = 1 ,$$

а сумирање $\Sigma\Sigma$ се протеже на вредности

$$m = 1 , 2 , 3 , \ldots$$
$$n = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

биће

$$U_0(t) = V_0(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m} = -\log(1-t) ,$$

$$U_1(t) = V_1(t) = -\int \log(1-t) \frac{dt}{t} ,$$

. . . .

Функције $U_k(t)$ и $V_k(t)$ се, уосталом, изражавају и непосредно у облику одређеног интеграла

$$U_k(t) = V_k(t) = \frac{t}{(k-1)!} \int_0^\infty \frac{u^{k-1} du}{e^u - t} .$$

Функција z је тада једна мултиформна функција променљивих x и y, која има вредности $x=1$, $y=1$ за логаритамске критичке тачке.

Уочимо још и случај кад је

$$A_{m,n} = (A_m + B_n) Q_{m,n} ,$$

где су A_m, B_n, $Q_{m,n}$ исти као у одељку II. Коефицијенат $A_{m,n}$ тада је збир ограниченог броја чланова од две врсте, једних облика

$$C m^p n^q M^m N^n A_m ,$$

других облика

$$C m^p n^q M^m N^n B_n ,$$

па је, дакле, функција $A_{x,y}$ опет збир партикуларних интеграла парцијалне једначине (114).

За чланове првога облика је

$$U_0(t) = \Sigma A_m t^m , \quad V_0(t) = \frac{1}{1-t} ,$$

а за чланове другога облика

$$U_0(t) = \frac{1}{1-t} , \quad V_0(t) = \Sigma B_n t^n ,$$

па би се функције $U_k(t)$ и $V_k(t)$ израчунале помоћу рекурсивних напред наведених образаца, а помоћу њихових квадратичких комбинација била би изражена и функција z.

IV.

У многим случајевима могућно је сумирати и двоструке редове

(137) $$z = \Sigma\Sigma C_{m,n} x^m y^n ,$$

у којима општи коефицијенат $C_{m,n}$ не испуњава услове предњих ставова, али их задовољава пошто се подели каквим изразом $B_{m,n}$ што зависи од индекса m и n.

Такве су врсте редови (137) у којима је функција $C_{x,y}$ двеју промењљивих x и y једнака продукту два фактора:

1° једнога $A_{x,y}$ који је једнак збиру ограниченог броја партикуларних интеграла парцијалне једначине.

2° једнога $B_{x,y}$ који је такав да је могућно сумирати ред

(138) $$\varphi(x, y) = \Sigma\Sigma\, B_{m,n}\, x^m y^n.$$

Уочимо, као пример, случај кад фактори $A_{m,n}$ и A_m имају облик претпостављен у одељку II. Општи коефицијенат $C_{m,n}$ тада је једнак збиру ограниченог броја израза облика

$$C m^p n^q M^m N^n B_{m,n}\,,$$

т. ј. збиру ограниченог броја партикуларних интеграла једначине (138), (где су C, M, N константе, а p и q стални позитивни цели бројеви).

Функција (137) је изражљива као збир ограниченог броја израза облика

$$C U_{p,q}(Mx, Ny)\,,$$

где је

$$U_{p,q}(x, y) = \Sigma\Sigma\, m^p n^q B_{m,n}\, x^m y^n\,.$$

Међутим, функције $U_{p,q}$ се могу одредити помоћу једног или другог рекурсивног обрасца

$$U_{p,q} = x \frac{\partial}{\partial x} U_{p-1,q}\,,$$

$$U_{p,q} = y \frac{\partial}{\partial y} U_{p,q-1}\,,$$

где почетна функција $U_{0,0}$ има за израз

$$U_{0,0}(x, y) = \varphi(x, y)\,.$$

Тако н. пр. за двоструки ред

$$\sum\sum \frac{(m+n)!}{(m+n)\, m!\, n!} x^m y^n\,,$$

где се сумирање распростире на све вредности $0, 1, 2, 3, \ldots$ индекса m и n, осим на пар $m=0, n=0$, зна се да има за збир функцију

$$\varphi(x; y) = -\log(1-x-y)\,.$$

Тој функцији одговарају функције $U_{p,q}$ облика

$$U_{1,0} = \frac{x}{1-x-y}\,,$$

$$U_{0,1} = \frac{y}{1-x-y}\,,$$

$$U_{1,1} = \frac{xy}{(1-x-y)^2}\,,$$

$$U_{2,0} = \frac{x(1-y)}{(1-x-y)^2}\,,$$

$$U_{0,2} = \frac{y(1-x)}{(1-x-y)^2}\,,$$

$$U_{2,1} = \frac{xy(1+x-y)}{(1-x-y)^3}\,,$$

$$U_{1,2} = \frac{xy(1-x+y)}{(1-x-y)^3}\,,$$

$$U_{2,2} = \frac{xy(1-x^2-y^2+4xy)}{(1-x-y)^4}\,,$$

. . . .

па се, према томе, увек може сумирати сваки ред облика

$$\sum\sum \frac{(m+n-1)!}{m!\, n!} A_{m,n}\, x^m y^n\,.$$

Сваки шакав ред има, дакле, за збир једну квадрашичну комбинацију функције $\log(1-x-y)$ *и рационалних функција шромењљивих* x *и* y.

Тако исто, за двоструки ред

$$\Sigma\Sigma\, B_{m,n}\, x^m y^n\,,$$

где је

(139) $$B_{m,n} = \frac{[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)]\,[1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)]}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2(m+n)}\,,$$

зна се да има за збир функцију

$$\varphi(x,y)=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{\sqrt{1-y}}}{1+\sqrt{(1-x)(1-y)}},$$

као и то да ред

$$\Sigma\Sigma\, B_{m,n}\, x^{2m}\, y^{m-2n},$$

где је

$$(140)\qquad B_{m,n}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{2^m}$$

има за збир функцију[1])

$$\varphi(x,y)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1-y+\sqrt{1-x^2}}.$$

Помоћу горњих рекурсивних образаца одређују се из ових почетних функција одговарајуће им функције $U_{p,q}$, које ће све бити алгебарске функције променљивих x и y.

Сваки двоструки ред

$$(141)\qquad z=\Sigma\Sigma\, A_{m,n}\, B_{m,n}\, x^m\, y^n,$$

где $B_{m,n}$ има за израз (139) *или* (140), *има за збир по једну алгебарску функцију променљивих x и y.*

На исти би се начин сумирали редови (141) за које $B_{m,n}$ и $\varphi(x,y)$ имају који од ових облика:

$$1^\circ\quad B_{m,n}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!},\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{1-x-y};$$

$$2^\circ\quad B_{m,n}=1,\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{1-xy};$$

$$3^\circ\quad B_{m,n}=\frac{(2m)!}{(m!)^2},\qquad \varphi(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-4xy}};$$

$$4^\circ\quad B_{m,n}=\frac{am+bn+c}{m!\,n!},\qquad \varphi(x,y)=(ax+by+c)\,e^{x+y}.$$

У случајевима 1° и 2° функција z је *рационална* функција променљивих x и y; у случају 3° z је *алгебарска* функција тих променљивих, а у случају 4° z је *цела* трансцендентна функција истих променљивих.

У случају 4°, кад је сумирање распрострто на вредности

$$m=1,2,3,\ldots$$
$$n=1,2,3,\ldots$$

налази се да је

$$\varphi(x,y)=(ax+by+c)\,e^{x+y}-(ax+c)\,e^x-(by+c)\,e^y+c,$$

а одговарајуће функције $U_{p,q}$ добијају се помоћу напред наведених рекурсивних образаца.

[1]) *Hermite*: Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, p. 64.

V.

Ово, што је довде изложено, налази непосредну примену у *проблему мајорирања двоструких потенцијалних редова*

$$(142)\qquad f(x,y)=\Sigma\Sigma\, a_{m,n}\, x^m\, y^n.$$

Пошто је увек

$$(143)\qquad |f(x,y)|<\Sigma\Sigma\,|a_{m,n}|\,r^m\,r'^n,$$
$$r=|x|,\qquad r'=|y|,$$

то, кад год се $|a_{m,n}|$ може мајорирати каквим изразом $A_{m,n}$ онаквог облика о каквом је напред била реч, т. ј. таквим да је $A_{x,y}$ један интеграл, или збир ограниченог броја, овога пута реалних и позитивних, партикуларних интеграла парцијалне диференцијалне једначине

$$zs-pq=0,$$

биће

$$(144)\qquad |f(x,y)|<F(x,y),$$

где је

$$(145)\qquad F(x,y)=\Sigma\Sigma\, A_{m,n}\, x^m\, y^n.$$

Из овога што претходи види се да је у непрегледном броју случајева *могућно имати мајорентну функцију* $F(x,y)$

изражену у ексӣлицитном облику као функцију ӣромењивих x и y.

А то се опет непосредно примењује на *ӣроблем интеграције диференцијалних једначина ӣрвога реда*

$$(146) \qquad y' = f(x, y)$$

ӣомоћу редова

$$(147) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Главни део проблема састоји се у одредби једнога круга, описаног око тачке $x=0$ у равни променљиве x, у коме ће ред (147), за дату једначину (146), бити насигурно конвергентан.

Уочимо интеграл једначине (146) који за $x=0$ добија вредност $y=0$ и претпоставимо да се функција $f(x, y)$ може развити у ред (142) чији је општи коефицијенат $a_{m,n}$ могућно мајорирати каквим реалним и позитивним изразом $A_{m,n}$ о коме је малочас била реч. Тада ће функција $f(x, y)$ бити мајорирана одговарајућом функцијом $F(x, y)$ која ће бити збир партикуларних интеграла парцијалне једначине

$$zs - pq = 0 \ .$$

Означимо са v онај интеграл диференцијалне једначине

$$(148) \qquad v' = F(x, v) \ ,$$

који за $x=0$ добија вредност $v=0$. *Полуӣречник* R *круга конвергенције интегралног реда* (147) *биће бар толики колики је ӣолуӣречник* R' *круга холоморфности интеграла* v.

Међутим, функција F је тада облика

$$F(x, v) = X_1 V_1 + X_2 V_2 + \cdots$$

где X_k зависе само од x, а V_k само од v, па се подесним избором те мајорентне функције може учинити да одговарајућа једначина (148)

$$v' = X_1 V_1 + X_2 V_2 + \cdots$$

буде интеграбилна, или да јој се бар може и без интеграције одредити полупречник R' холоморфности њеног интеграла v. Тада горњи став даје један круг описан око тачке $x=0$, у коме ће интегрални ред (147) насигурно конвергирати.

То ће бити расветљено следећим примерима.

I пример: нека су

$$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \dots$$

$$\mu_1 , \mu_2 , \mu_3 \dots$$

два низа позитивних бројева, таквих да количник

$$(149) \qquad \frac{|a_{m,n}|}{\lambda_m \mu_n}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n; нека је A један сталан позитиван број који није премашен вредношћу количника (149). Тада се може узети

$$A_{m,n} = A \lambda_m \mu_n \ ,$$

па ће у компаративном реду (145) бити испуњени напред постављени услови. Функција $F(x, y)$ биће

$$F(x, y) = A \sum\sum \lambda_m \mu_n x^m y^n = A \lambda(x) \cdot \mu(y),$$

где је

$$\lambda(x) = \sum \lambda_m x^m \ ,$$

$$\mu(y) = \sum \mu_n y^n \ ,$$

а компаративна једначина (148) је тада

$$(150) \qquad v' = A \lambda(x) \mu(v) \ .$$

Полупречник R круга конвергенције интегралног реда

$$(151) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

једначине (146) биће бар толики, колики је полупречник R' круга холоморфности интеграла v једначине (150), датог једначином

$$\int_0^v \frac{dv}{\mu(v)} = \int_0^x \lambda(x) dx \ .$$

Тако н. пр. у специјалном случају кад је

$$\lambda_m = \frac{1}{m!}\ , \qquad \mu_n = \frac{1}{n!}\ ,$$

т. ј. кад модуо општег коефицијента $a_{m,n}$ дате диференцијалне једначине (146), у вези са изразом (142), не опада спорије него израз

$$\frac{1}{m!\,n!}\ ,$$

може се узети

$$A_{m,n} = \frac{A}{m!\,n!}\ .$$

Компаративна једначина (150) је

$$v' = A \sum\sum \frac{x^m\, v^n}{m!\,n!} = A e^{x+v}\ ,$$

а њен интеграл, који за $x=0$ добија вредност $v=0$, је

$$v = \log\left(1 + A - Ae^x\right)\ .$$

Његов круг холоморфности има за полупречник

$$R' = \log\left(1 + \frac{1}{A}\right)$$

и у томе кругу ред (151), што претставља интеграл једначине (146), насигурно је конвергентан.

У специјалном случају кад λ_m и μ_n расту брже но 2^m и 2^n, може се узети

$$A_{m,n} = 2^{m+n} A\ .$$

Компаративна једначина (150) је

$$v' = A \sum\sum 2^{m+n}\, x^m\, v^n = \frac{A}{(1-2x)(1-2v)}$$

а њен интеграл, који за $x=0$ добија вредност $v=0$, је

$$v = 1 - \sqrt{1 + 2A\log\left(1-2x\right)}\ .$$

Он је холоморфан у кругу полупречника

$$R' = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2A}}}{2}\ ,$$

па ће у томе кругу бити конвергентан и интегрални ред (151) једначине (146).

На овај последњи случај се своде и једначине (146) у којима количник

$$\frac{|\,a_{m,n}\,|}{m^2+n^2}$$

остаје коначан и не премаша један сталан број A. Довољно је приметити да је за све позитивне вредности индекса m и n

$$m^2 + n^2 \leqslant 2^{m+n}\ .$$

II пример: уочимо случај кад се за $A_{m,n}$ може узети какав израз облика

$$A_{m,n} = \alpha_m\, \beta_n + \lambda_m\, \mu_n\ ,$$

тако, да је $A_{x,y}$ један партикуларни интеграл парцијалне једначине (123).

Нека је

$$\sum \alpha_m\, x^m = \alpha(x)\ ,$$
$$\sum \lambda_m\, x^m = \lambda(x)\ ,$$
$$\sum \beta_n\, y^n = \beta(y)\ ,$$
$$\sum \mu_n\, y^n = \mu(y)\ ,$$

па ће једначина (148) бити

$$v' = \alpha(x)\cdot\beta(v) + \lambda(x)\cdot\mu(v)\ . \tag{152}$$

Кад су функције α, β, λ, μ такве, да је једначина (152) интеграбилна, полупречник круга холоморфности њеног интеграла v, који за $x=0$ добија вредност $v=0$, даће једну доњу границу полупречника круга конвергенције интеграла (147) једначине (146). Једна од таквих једначина је н. пр. Bernoulli-ева једначина, која се и у општем случају може интегралити.

XI. Редови што изражавају општи интеграл диференцијалне једначине првога реда.

Општи интеграл диференцијалне једначине првог реда

(153) $$y'=f(x\,,\,y)\ ,$$

т. ј. њен интеграл који за произвољну вредност $x=x_0$ добија произвољну вредност $y=y_0$, изражен је једном релацијом

(154) $$F(x,y,x_0,y_0)=0$$

где је F функција четири промењљиве

(155) $$x\,,y,x_0\,,y_0$$

у којој се x може пермутовати са x_0, y са y_0, а да при томе функција не промени своју вредност.

Кад пар вредности (x_0,y_0) не претставља никакву сингуларну тачку функције $f(x,y)$, општи интеграл y може се изразити у облику потенцијалног реда

(156) $$y=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots$$

где су коефицијенти A_n функције промењљивих x_0,y_0.

Један произвољно узет ред (156) може, али не мора бити општи интеграл какве једначине првог реда. Тако н. пр. ред у коме је

$$A_0=y_0\,,\quad A_n=x_0\,y_0+(n-1)\,x_0^2\,y_0^2$$

није општи интеграл никакве једначине (153); напротив, ред у коме је

$$A_0=y_0\,,\qquad A_n=\frac{y_0}{n!}$$

општи је интеграл једначине

$$y'=y\ .$$

У овоме су одељку постављена и потпуно решена ова два питања:

1° *Какве потребне и довољне услове треба да испуне коефицијенти A_n реда (156), па да тај ред претставља општи интеграл какве диференцијалне једначине првог реда облика* (153)?

2° *У случајевима кад су ти услови испуњени, наћи диференцијалну једначину за коју такав ред* (156) *изражава њен општи интеграл.*

Нека је (153) једначина чији је општи интеграл ред (156). Тада је

(157) $$\begin{aligned}&A_0=y_0\ ,\\ &A_1=\left[\frac{dy}{dx}\right]=[f(x,y)]=f(x_0,y_0)\ ,\end{aligned}$$

где уопште израз $[\varphi]$ означава вредност коју добија каква функција φ једне промењљиве x за $x=x_0$, или функција двеју промењљивих x,y за $x=x_0,y=y_0$.

Формирајмо неограничен низ функција

(158) $$f_1\,,f_2\,,f_3\,,\ldots$$

промењљивих x,y дефинисаних рекурентном релацијом

(159) $$f_n=\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}+f\,\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

где је почетна функција

(160) $$f_0=f(x\,,\,y)\ ,$$

па ће бити

(161) $$A_n=\frac{1}{n!}[f_{n-1}]\qquad(n=1,2,3,\ldots)$$

Релација (159) може се написати и у облику

(162) $$[f_n]=\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\right]+[f]\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right]$$

из чега се, према (157), (159) и (161) добија

(163) $$(n+1)\,A_{n+1}=\frac{\partial A_n}{\partial x_0}+f(x_0,y_0)\frac{\partial A_n}{\partial y_0}\ .$$

То показује да израз

(164) $$\Delta=\frac{(n+1)\,A_{n+1}-\dfrac{\partial A_n}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}}$$

има једну исту вредност за све вредности $n=1, 2, 3, \dots$ и да се та вредност поклапа са $f(x_0, y_0)$. Друга једначина (157) тада показује да су x_0 и y_0 везани диференцијалном једначином

$$\frac{dy_0}{dx_0} = f(x_0, y_0) \ . \tag{165}$$

Вредност израза Δ је иста као и вредност коефицијента A_1, а то је $f(x_0, y_0)$. Једначина (160) добија се, дакле, кад се у једначини

$$\frac{dy_0}{dx_0} = A_1 \tag{166}$$

смени x_0 са x, y_0 са y, а $\dfrac{dy_0}{dx_0}$ са $\dfrac{dy}{dx}$.

На тај су начин нађени *потребни* услови да би ред (156) био општи интеграл какве једначине (153). Лако се доказује да су то у исто време и *довољни* услови за то; доказ је истоветан са оним којим је у III одељку ове књиге доказано да кад се коефицијенти реда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

израчунају узастопним диференцијаљењем једначине (153) и деобом добијених извода са $n!$, такав ред формално задовољава једначину (153).

На тај начин добијено је решење постављених питања у облику ова два става:

I став: *Да би ред* (156) *претстављао општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда, потребно је и довољно да израз* Δ *има једну исту вредност за све вредности* $n=1, 2, 3, \dots$

А кад је тај услов испуњен, решење другога од постављених питања дато је овим ставом:

II став: *Диференцијална једначина, чији је општи интеграл тада изражен редом* (156) *добија се кад се у коефицијенту* A_1 *смени* x_0 *са* x, y_0 *са* y, *па се резултат уједначи са* $\dfrac{dy}{dx}$.

У случају кад се тражи да диференцијална једначина (153), чији општи интеграл треба да буде ред (156), не садржи експлицитно променљиву x, једначина (159) се своди на

$$f_{n+1} = f \frac{\partial f}{\partial y} \ ,$$

а једначина (162) на

$$[f_{n+1}] = [f] \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \ ,$$

према чему је

$$(n+1) A_{n+1} = f(x_0, y_0) \frac{\partial A_n}{\partial y_0}$$

из чега следује

III став: *Да би ред* (156) *претстављао општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда која не садржи експлицитно независно променљиву количину* x, *потребно је и довољно да израз*

$$\Delta = \frac{(n+1) A_{n+1}}{\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}} \tag{167}$$

има једну исту вредност за све вредности $n=1, 2, 3, \dots$

И у томе случају је одговарајућа диференцијална једначина одређена ставом II.

Као што се види, да ли ће дати ред (156) бити или не општи интеграл какве једначине првога реда, зависи искључиво од тога *да ли ће његови коефицијенти* A_n *имати за инваријанту израз* Δ. А кад је то случај, *диференцијална једначина тога реда добија се из саме вредности те инваријанте.*

За ред (156) н. пр. за који је

$$A_0 = y_0, \qquad A_n = \frac{y_0}{n!}$$

инваријанта је

$$\Delta = y_0 ;$$

за ред за који је

$$A_0 = y_0, \qquad A_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n\, n!} (y_0 - x_0 + 1)^{2n+1}$$

она је

$$\Delta=\tfrac{1}{2}(y_0-x_0+1)^3+1;$$

за ред за који је

$$A_0=y_0,$$

$$A_n=y_0\left[\frac{(2x_0)^n}{n!}+\frac{(2x_0)^{n-2}}{1!\,(n-2)!}+\frac{(2x_0)^{n-4}}{2!\,(n-4)!}+\cdots\right]$$

она је

$$\Delta=2x_0y_0;$$

за ред где је

$$A_0=y_0, \qquad A_n=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!\,(n-1)!\,(2y_0)^{2n-1}}$$

она је

$$\Delta=\frac{1}{y_0};$$

за ред за који је

$$A_0=y_0$$

$$A_{4n}=\frac{y_0}{(4n)!} \qquad A_{4n+2}=-\frac{y_0}{(4n+2)!}$$

$$A_{4n+1}=\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+1)!} \qquad A_{4n+3}=-\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{(4n+3)!}$$

налази се да је

$$\Delta=\sqrt{1-y_0^2}.$$

Ово што је напред изложено, може се претставити и на овај начин.

У опште једна функција

$$(168) \qquad y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2),$$

која садржи две произвољне константе C_1 и C_2, општи је интеграл једне диференцијалне једначине другог реда која не садржи ни C_1 ни C_2. Та се једначина своди на једначину првога реда кад се између двеју констаната успостави каква релација

$$(169) \qquad \Psi(C_1,\ C_2)=0.$$

Тако н. пр. функција

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x$$

је општи интеграл једначине

$$y''+y=0;$$

то је, међутим, општи интеграл јадначине

$$y'^2+y^2-1=0$$

кад се међу константама успостави релација

$$C_1^2+C_2^2-1=0.$$

Али, функција (168) може бити општи интеграл једначине првог реда (која не садржи ни C_1 ни C_2) а да константе C_1 и C_2 не преставу бити произвољне, тј. да не морају бити међу собом везане. Такав је случај са функцијом

$$y=\varphi(x,\ x_0,\ y_0)$$

што претставља интеграл какве једначине првога реда који за произвољну вредност $x=x_0$ добија произвољну вредност $y=y_0$; довољно је узети $x_0=C_1$, $y_0=C_2$.

Тако н. пр. функција

$$y=C_1e^{x-C_2}$$

општи је интеграл једначине

$$(170) \qquad y'-y=0;$$

функција

$$y=\sin(\log C_1x+C_2)$$

је општи интеграл једначине

$$(171) \qquad x^2y'^2+y^2-1=0.$$

Општи разлог таквог факта је очевидан: у таквим случајевима увек постоји једна одређена функција

$$(172) \qquad \lambda(C_1,\ C_2)$$

двеју констаната C_1 и C_2, таква да кад се стави да је

$$\lambda(C_1,\ C_2)=C$$

обе константе C_1 и C_2 нестају у изразу општега интеграла y, који постаје функција промевљиве x и константе C; ова тада игра улогу једине интеграционе константе.

Тако н. пр. у случају једначине (170) константа C је израз

$$C=C_1 e^{-C_2};$$

за једначину (171) она је

$$C=\log C_1+C_2.$$

Уочимо сад општи проблем:

Кад је дат потенцијални ред

$$(173)\qquad y=A_0+A_1(x-A)+A_2(x-A)^2+\cdots$$

где су A, A_0, A_1, A_2, ... функције двеју произвољних констаната C_1 и C_2,

1^0 *наћи потребне и довољне услове за егзистенцију једне диференцијалне једначине првога реда, која не садржи* C_1 *и* C_2 *и чији ће општи интеграл бити изражен редом* (173);

2^0 *наћи ту диференцијалну једначину у случају кад она постоји.*

Ако се стави да је

$$(174)\qquad \begin{aligned} A(C_1, C_2)&=\alpha\\ A_0(C_1, C_2)&=\beta \end{aligned}$$

параметри ће α и β бити познате функције констаната C_1 и C_2. Сменивши њима те константе, функција y постаје

$$y=\beta+B_1(x-\alpha)+B_2(x-\alpha)^2+\cdots$$

где ће коефицијенти $B_1, B_2, B_3, \ldots$ бити познате функције параметра α и β, и проблем се своди на онај напред решен у овоме одељку; y треба да буде интеграл какве једначине првога реда који за $x=\alpha$ добија вредност $y=\beta$.

Да ли ће ред (173) бити или не општи интеграл какве једначине првога реда, зависи од тога да ли ће његови коефицијенти B_n имати за инваријанту израз Δ (у коме A_k треба сменити са B_k) или не. А кад је то случај, диференцијална једначина се добија елиминацијом двеју констаната C_1 и C_2 из трију једначина

$$(175)\qquad \begin{aligned} A(C_1, C_2)&=x,\\ A_0(C_1, C_2)&=y,\\ A_1(C_1, C_2)&=\frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

Да бисмо одредили, помоћу C_1 и C_2, константу C која ће играти даљу улогу јединe интеграционе константе у општем интегралу y, приметимо да су C_1 и C_2, ма да су им вредности произвољне (као што је и случај са x_0, y_0), везани диференцијалном релацијом што следује из односа

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=A_1(C_1, C_2)=\frac{\partial A}{\partial C_1}+\frac{\partial A}{\partial C_2}\cdot\frac{dC_2}{dC_1}.$$

То је диференцијална једначина

$$(176)\qquad \frac{dC_2}{dC_1}=\Phi(C_1, C_2)$$

где је Φ одређена функција констаната C_1 и C_2 која има за израз

$$(177)\qquad \frac{\dfrac{\partial A_0}{\partial C_1}-A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_1}}{A_1(C_1, C_2)\dfrac{\partial A}{\partial C_2}-\dfrac{\partial A_0}{\partial C_2}};$$

о томе се уверавамо диференцијалењем првих двеју једначина (175) и сменом добијених dx и dy у трећој од тих једначина.

Кад се општи интеграл једначине (176) *напише у облику*

$$\mu(C_1, C_2)=\text{const}$$

израз μ *игра улогу константе* C.

XII. Аналитичко продужење реда што изражава интеграл једначине.

Кад је дата једначина

$$(178)\qquad y'=f(x, y)=0$$

где је функција $f(x, y)$ холоморфна у близини вредности $x=0$, $y=0$, применом основне Briot-Bouquet-ове теореме добија се интеграл, који за $x=0$ постаје $y=0$, у облику реда

$$(179)\qquad y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

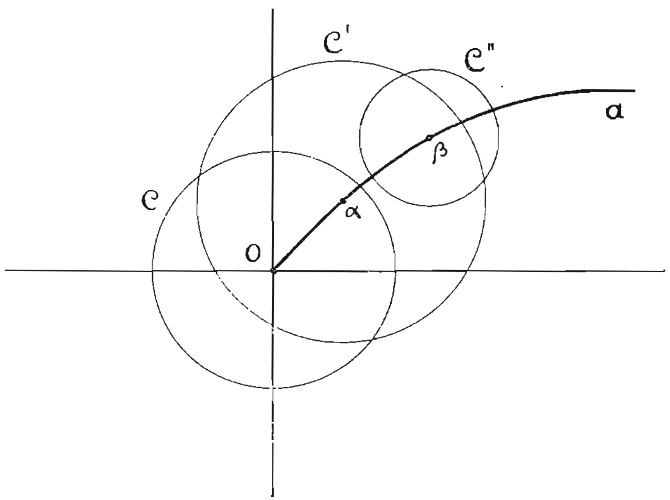
који је конвергентан за све вредности x што се налазе у кругу C описаном око почетка са полупречником R, за који је напред показано како се одређује.

Кад се вредност x, за коју се тражи вредност интеграла y налази у томе кругу, ова се вредност израчунава непосредно из обрасца (179). Међутим, *из тога се реда може, посредним путем, израчунати и вредност интеграла и у којој се хоће тачки* $x=a$ *(осим изузетних и изолованих таквих тачака) ван круга* C.

То се може вршити обичним *аналитичким продужавањем* функције дефинисане редом који важи за једну област равни x, на тачке x што се налазе ван те области.

Нека се тражи да се, искористивши образац (179), израчуна вредност интеграла y за $x=a$, где је a једна дата тачка у равни x ван круга конвергенције C реда (179). Ако је a обична тачка за интеграл y изражен тим редом, онда се такво аналитичко продужавање извршује на овај начин.

Саставимо почетак $x=0$ са тачком a једном произвољном путањом oa, уочимо на тој путањи једну произвољну



тачку $x=\alpha$ у унутрашњости круга C (в. слику). Пошто је та тачка у кругу C, за њу ће важити ред (179), па се из тога реда могу израчунати узастопни изводи функције y у облику

$$
(180)\qquad
\begin{aligned}
y' &= a_1+2a_2\,x+3a_3\,x^2+4a_4\,x^3+\cdots\\
y'' &= 2a_2+2\cdot 3\,a_3\,x+3\cdot 4\cdot a_4\,x^2+\cdots\\
y''' &= 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4\,x+3\cdot 4\cdot 5a_5\,x^2+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Из образаца (179) и (180), где су редови насигурно конвергентни за $x=\alpha$, могу се израчунати вредности

$$A_0\,,\ A_1\,,\ A_2\ldots$$

које добијају $y, y', y'', y'''\ldots$ за $x=\alpha$, па кад су оне израчунате, интеграл y може се, за вредности x у близини тачке α, изразити у облику реда

$$(181)\qquad y=A_0+\frac{A_1}{1\,!}(x-\alpha)+\frac{A_2}{2\,!}(x-\alpha)^2+\cdots$$

који ће бити конвергентан за све вредности x у унутрашњости извесног круга C' описаног око тачке α као центра. Полупречник R' тога круга одредио би се преместивши координатни почетак у равни x у тачку α и применивши напред наведени за то поступак.

Опишимо тада око тачке α тај круг C' и уочимо у његовој унутрашњости, а на путањи Oa, једну тачку $x=\beta$. Пошто је та тачка у кругу C', за њу ће важити ред (181) па се из тога реда могу израчунати узастопни изводи функције y у облику

$$
(182)\qquad
\begin{aligned}
y' &= \frac{A_1}{0!}+\frac{A_2}{1!}(x-\alpha)+\frac{A_3}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots\\
y'' &= \frac{A_2}{0!}+\frac{A_3}{1!}(x-\alpha)+\frac{A_4}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Из образаца (181) и (182), где су редови конвергентни за $x=\alpha$, могу се израчунати вредности

$$B_0, B_1, B_2, \ldots$$

које добијају $y, y', y''\ldots$ за $x=\beta$, па кад су оне израчунате, може се за вредности x у близини тачке β интеграл y изразити у облику реда

$$y = B_0 + \frac{B_1}{1!}(x-\beta) + \frac{B_2}{2!}(x-\beta)^2 + \cdots$$

и тај ће ред бити конвергентан за све вредности x у унутрашњости извесног круга C'' описаног око тачке β као центра, а чији би се полупречник R'' одредио на исти начин као полупречник R'.

И тај би се поступак продужио идући путањом Oa, све дотле док последњи круг $C^{(k)}$ не обухвати и тачку a. Кад то буде, онда ће последњи тако добијени ред за y важити и бити конвергентан и за вредност $x=a$, па ће се помоћу њега моћи непосредно израчунати вредност интеграла за ту вредност x.

Поступак изузетно неће важити ако произвољно изабрана путања Oa пређе преко каквога сингуларитета $x=c$ функције $f(x,y)$, јер ће такав сингуларитет, према условима који се претпостављају за ту функцију, у тренутку кад се идући путањом oa наиђе на њега, онемогућити даље кретање на досадашњи начин у правцу тачке a. Метода за одредбу последњег полупречника $R^{(k)}$ тада изневерава и чини немогућним даље аналитичко продужавање интеграла дуж те путање. Тада се мора изменити путања oa и покушати други какав пут којим би се од последњег кружног центра пришло тачки a.

XIII. Случај кад десна страна диференцијалне једначине постаје бескрајна за x=0, y=0.

Претпоставка, на којој је основана основна Briot-Bouquet-ова теорема о изражавању интеграла диференцијалне једначине, као и теорема исте врсте за системе симултаних једначина, састоји се у томе да је у једначини

$$y' = f(x,y) \tag{183}$$

функција $f(x,y)$ холоморфна за почетне вредности $x=0$, $y=0$ променљивих x и y, тј. да је она за тај пар вредности коначна, одређена и да ни једна друга од тих двеју вредности није критички сингуларитет функције. Тај услов није испуњен

1° или кад за $x=0$, $y=0$ функција $f(x,y)$ добија бескрајно велику вредност, а функција $\frac{1}{f}$ је холоморфна за те вредности променљивих;

2° или кад се вредност $f(0,0)$ јавља у неодређеном облику $\frac{0}{0}$,

3° или кад је једна или друга, или обе вредности $x=0$, $y=0$, критички алгебарски или трансцендентни сингуларитет функције $f(x,y)$.

У таквим случајевима поменуте теореме су неупотребљиве, јер није задовољен основни услов под којим су оне изведене.

Тако н. пр. десна страна једначине

$$y' = \frac{y-1}{x}$$

за $x=0$, $y=0$ постаје бескрајна; не постоји ни један интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$. То се види из израза општег интеграла који је

$$y = 1 + Cx.$$

Десна страна једначине

$$y' = -\frac{y}{x^2}$$

за $x=0$, $y=0$ јавља се у неодређеном облику $\frac{0}{0}$; има бескрајно много интеграла који за $x=0$ добијају вредност $y=0$, али поред те вредности они добијају и сваку другу, произвољну вредност и не могу се развити у ред уређен по степенима променљиве x; то се види из израза општег интеграла који је

$$y = Ce^{\frac{1}{x}}$$

и који има вредност $x=0$ као свој есенцијални сингуларитет.

Десна страна једначине

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{1+y^2}{(1+x)\,y}$$

постаје бескрајна; једначина има интеграла који за $x=0$ добијају вредност $y=0$; али се ти интеграли не могу развити у ред уређен по степенима променљиве x, што се види из израза општег интеграла

$$y=\sqrt{x+C(1+x)};$$

таква су два партикуларна интеграла

$$y=-\sqrt{x} \quad \text{и} \quad y=+\sqrt{x}$$

који одговарају вредности $C=0$ интеграционе константе.

Напослетку, десна страна једначине

$$y'=\frac{y-1}{x+\sqrt{x}}$$

постаје бескрајна за $x=0$, $y=0$, а има и вредност $x=0$ као критичку тачку; постоји интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$, али се он не може развити у ред по степенима променљиве x, што се види из израза општег интеграла који је

$$y=1+C(1+\sqrt{x}).$$

Може се изузетно десити да се и у коме од таквих случајева, и то само у појединачним случајевима, ипак интеграл може изразити у облику Maclaurin-овог реда

$$y=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

али, то тада неће више бити последица наведених општих теорема већ ће се десити из других, за такве једначине специјалних разлога.

За такве случајеве, кад функција $f(x, y)$ није холоморфна за почетни пар вредности $x=0$, $y=0$, јавља се питање: *у ред каквог облика*

$$(184) \qquad y=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

може се тада развити интеграл у који за $x=0$ добија вредност $y=0$, а да ред буде насигурно конвергентан за вредности x у некој области равни x?

Од горе поменутих случајева те врсте у овом ће одељку бити расправљен онај кад за $x=0$, $y=0$ функција $f(x, y)$ добија бескрајно велику вредност.

Нека је, дакле, дата једначина (183) у којој је

$$f(0,0)=\infty.$$

Ако се једначина напише у облику

$$(185) \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}=\varphi(x,y)$$

функција $\varphi(x,y)$ је холоморфна за $x=0$, $y=0$, јер је вредност $\varphi(0,0)$ тачно одређена и једнака нули. Она се, према томе може развити у ред уређен по степенима променљиве x

$$(186) \qquad \varphi(x,y)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots, \qquad A_0=\varphi(0\ y),$$

где ће коефицијенти бити холоморфне функције променљиве y, од којих се поједини могу свести и на константу. Као што ће се видети, *облик реда* (184) *и аналитичка природа интеграла у зависи поглавито од коефицијента A_0.*

Да би се то показало, разликујмо ова два случаја:

Први случај: претпоставимо да коефицијенат A_0 не зависи од y. Тада он мора бити једнак нули, да би било

$$(187) \qquad \varphi(0,0)=0.$$

Ако се тада број првих коефицијената реда (186), који су једнаки нули, означи са k, тако да је

$$A_0=A_1=\cdots=A_{k-1}=0, \qquad A_k\neq 0$$

па да се ред своди на

$$(188) \quad \varphi(x,y)=A_kx^k+A_{k+1}x^{k+1}+A_{k+2}x^{k+2}+\cdots,$$

из (185) и (188) се добија да је

$$(189) \qquad \frac{dx}{x^k}=(A_k+A_{k+1}x+A_{k+2}x^2+\cdots)\,dy.$$

Са друге стране, пошто је $\varphi(x,y)$ холоморфна функција променљивих x и y за $x=0$, $y=0$, према теореми Briot-Bouquet-а за једначину (185) постојаће интеграл x који ће такође бити холоморфна функција променљиве y за $y=0$. Кад се тај интеграл x смени на десној страни једначине (189), она постаје

$$\psi(y)\,dy\ ,$$

где је $\psi(y)$ такође холоморфна функција променљиве y за $\nu=0$, и једначина (189) постаје

$$\frac{dx}{x^k}=\psi(y)\,dy\,.$$

Интегралећи обе стране у границама 0 и x, односно 0 и y, добија се

$$\int_0^x\frac{dx}{x^k}=\int_0^y\psi(y)\,dy\ .$$

Пошто је $k\geqslant 1$, било да је $k=1$ или да је $k>1$, лева страна последње једначине има бескрајно велику вредност, а десна страна остаје коначна, што је немогућно. То показује *да у овом случају не постоји никакав интеграл у једначине* (183) *који за* $x=0$ *добија вредност* $y=0$.

Такав се случај јавља, на пример, за једначину

$$y'=\frac{y-1}{x}\ .$$

Ако се ова напише у облику

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y-1}=A_0+A_1x\ ,$$

биће

$$A_0=0\ ,\qquad A_1=\frac{1}{y-1}\ ,$$

а израз општег интеграла

$$y=1+Cx$$

показује да једначина одиста нема ниједан интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$.

Други случај: претпоставимо да коефицијенат A_0 за-

виси од y. Како је он холоморфна функција променљиве y, може се развити у ред облика

$$A_0=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots\ , \tag{189bis}$$

где ће коефицијенти a_n бити стални бројеви (независни од x и y). А пошто за $y=0$ мора бити $A_0=0$, да би се имала једначина (187), то мора бити $a_0=0$, а поред њега може бити једнак нули још и један извесан број узастопних првих коефицијената a_n. Означимо са m број таквих коефицијената, тако да је

$$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}\ ,\qquad a_m\neq 0\ ,$$

па ће се ред (189^bis) јавити у облику

$$A_0=a_my^m+a_{m+1}y^{m+1}+a_{m+2}y^{m+2}+\cdots \tag{190}$$

Као што је казано, пошто је $\varphi(x,y)$ холоморфна функција променљивих x и y у близини вредности $x=0$, $y=0$, може се на једначину (185) применити основна Briot-Bouquet-ова теорема, према којој се тада интеграл x, који за $y=0$ добија вредност $x=0$, може развити у ред облика

$$x=B_0+B_1y+B_2y^2+\cdots\ , \tag{191}$$

који ће бити конвергентан за све вредности x у једноме кругу описаном око тачке $x=0$ у равни x.

Коефицијенти B_n би се могли израчунати опет по истој теореми, али се лакше до резултата, што се има у виду, долази на овај начин:

Очевидно је да, ако се у једначини (185) смени функција $\varphi(x,y)$ својим изразом (186), па се у овоме коефицијенат A_0 смени редом (190), а x редом (191), добиће се једна једначина која мора бити идентички задовољена, пошто је x један њен интеграл. Та је једначина

$$\begin{aligned}&B_1+2B_2y+3B_3y^2+\cdots=\\ &=(a_my^m+a_{m+1}y^{m+1}+a_{m+2}y^{m+2}+\cdots)+\\ &+A_1(B_0+B_1y+B_2y^2+\cdots)+\\ &+A_2(B_0+B_1y+B_2y^2+\cdots)^2+\cdots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \tag{192}$$

Пошто за $y=0$ треба да буде $x=0$, та једначина (191) показује да мора бити $B_0=0$. Кад се то уведе у једначину (192), члан који не садржи y на левој страни је B_1, а на десној не постоји, мора дакле бити и $B_1=0$. А кад се и то уведе у једначину, њен члан са y на првом степену на левој страни има за коефицијенат $2B_2$, а на десној страни број помножен са B_1; према томе је и $B_2=0$. Продужујући и даље тако са осталим степенима променљиве y, до њеног $(m-1)$-ог степена закључно, налази се да је

$$B_0=B_1=B_2=\cdots=B_m=0\ .$$

Члан који садржи y^m на левој је страни $(m+1)\,B_{m+1}\,y^m$, на десној $a_m\,y^m$, према чему је

$$B_{m+1}=\frac{a_m}{m\,.\,1}\,,$$

па пошто је коефицијенат a_m различан од нуле, тако ће бити и са коефицијентом B_{m+1}. Према томе се интегрални ред (191) своди на

$$x=B_{m+1}\,y^{m+1}+B_{m+2}\,y^{m+2}+B_{m+3}\,y^{m+3}+\cdots \tag{193}$$

а из њега се добија једначина

$$\frac{dx}{dy}=(m+1)\,B_{m+1}\,y^m+(m+2)\,B_{m+2}\,y^{m+1}+ \\ +(m+3)\,B_{m+3}\,y^{m+2}+\cdots \tag{194}$$

Извршимо у тој једначини смену

$$x=t^{m+1}\,,\qquad dx=(m+1)\,t^m\,dt \tag{195}$$

према чему је

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{dy}=(m+1)\,t^m\,\frac{dt}{dy}\,,$$

па ће, кад се то смени у једначини (194), ова постати

$$(m+1)\,t^m\,\frac{dt}{dy}=(m+1)\,B_{m+1}\,y^m+(m+2)\,B_{m+2}\,y^{m+1}+\cdots,$$

што се може написати у облику

$$\frac{dy}{dt}=\frac{(m+1)\,t^m}{(m+1)\,B_{m+1}\,y^m+(m+2)\,B_{m+2}\,y^{m+1}+(m+3)\,B_{m+3}\,y^{m+2}+\cdots}$$

или

$$\frac{dy}{dt}=\left(\frac{t}{y}\right)^m\frac{1}{B_{m+1}+\dfrac{m+2}{m+1}\,B_{m+2}\,y+\dfrac{m+3}{m+1}\,B_{m+3}\,y^2+\cdots}\ . \tag{196}$$

Са друге стране, ако се и непосредно у једначини (193) изврши иста смена (195), добија се

$$t^{m+1}=B_{m+1}\,y^{m+1}+B_{m+2}\,y^{m+2}+B_{m+3}\,y^{m+3}+\cdots,$$

одакле је

$$\left(\frac{t}{y}\right)^{m+1}=B_{m+1}+B_{m+2}\,y+B_{m+3}\,y^2+\cdots$$

Сменом те вредности у једначини (196) добија се једначина

$$\frac{dy}{dt}=\frac{[B_{m+1}+B_{m+2}\,y+B_{m+3}\,y^2+\cdots]^{\frac{m}{m+1}}}{B_{m+1}+\dfrac{m+2}{m+1}\,B_{m+2}\,y+\dfrac{m+3}{m+1}\,B_{m+3}\,y^2+\cdots}\ . \tag{197}$$

За $y=0$ десна страна ове једначине своди се на вредност

$$\frac{(B_{m+1})^{\frac{m}{m+1}}}{B_{m+1}}=B_{m+1}^{\ -\frac{1}{m+1}}\,,$$

а пошто је коефицијенат B_{m+1} различан од нуле, биће и ова последња вредност коначна. Вредности $t=0$, $y=0$ не претстављају, дакле, никакве сингуларитете функције на десној страни једначине (197), па се на ту једначину може применити основна Briot-Bouquet-ова теорема. Према овој, интеграл y једначине (197), који за $t=0$ добија вредност $y=0$ може се развити у ред облика

(198) $$y = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

који ће бити конвергентан за све вредности t у једноме кругу описаном око тачке $t=0$ у равни t.

Кад се у реду (198) смени t његовом вредношћу

$$t = x^{\frac{1}{m+1}},$$

он постаје

(199) $$y = a_1 x^{\frac{1}{m+1}} + a_2 x^{\frac{2}{m+1}} + a_3 x^{\frac{3}{m+1}} + \cdots,$$

из чега се види *да се интеграл у дате једначине*

(200) $$y' = f(x, y)$$

може развити у ред уређен по степенима вредности $x^{\frac{1}{m+1}}$.

А пошто најмања вредност коју може имати m је $m=1$, то је изложилац $\frac{1}{m+1}$ увек прави разломак, чија је најмања могућна вредност $\frac{1}{2}$, и према томе *је вредност $x=0$ увек алгебарски критички сингуларитет интеграла y; ред такве критичке алгебарске тачке једнак је броју m повећаном за јединицу.*

А из свега овога што претходи изводи се овај општи закључак:

Нека је дата диференцијална једначина (200), где је $f(x, y)$ функција која за $x=0$, $y=0$ добија бескрајно велику вредност, али таква да је њена реципрочна функција

$$\varphi(x\ y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

холоморфна за $x = 0$, $y = 0$. Вредност

$$\varphi(0, y) = A_0$$

биће тада или идентички једнака нули, или ће зависити од промењиве y. За један и други случај важе теореме:

I теорема: *Кад је вредност A_0 независна од y (у коме случају она је идентички једнака нули), не постоји интеграл једначине (200) који за $x=0$ добија вредност $y=0$.*

Прост пример за то даје једначина

$$y' = \frac{y-1}{x}, \qquad y = 1 + Cx.$$

II теорема: *Кад вредност A_0 зависи од y и развије се у ред уређен по степенима промењиве y, па се са m означи најнижи степен тога реда по y, интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$ има вредност $x=0$ као алгебарску критичку тачку $(m+1)$-ог реда и може се развити у ред облика*

$$y = a_1 x^{\frac{1}{m+1}} + a_2 x^{\frac{2}{m+1}} + a_3 x^{\frac{3}{m+1}} + \cdots,$$

конвергентан за вредности x у једноме кругу описаном око тачке $x=0$ у равни x.

Одредба коефицијената a_n и његовог круга конвергенције врши се применом основне Briot-Bouquet-ове теореме на једначину (197), пошто она, ради одредбе коефицијената B_n, који су за то потребни, буде претходно примењена на једначину (185).

Прост пример за то даје једначина

$$y' = \frac{1}{y}, \qquad y = \sqrt{C + 2x}.$$

XIV. Случајеви кад се десна страна диференцијалне једначине за $x=0$, $y=0$ јавља у облику $\frac{0}{0}$.

Кад је диференцијална једначина

(201) $$y' = f(x, y)$$

таква да се вредност $f(0, 0)$ јавља у облику $\frac{0}{0}$, проблем интеграције помоћу редова постаје много тежи, и он ни до данас још није у потпуности решен, јер још има специјалних, у томе погледу недовољно проучених случајева.

Овде ће бити проучени најважнији и најчешћи случајеви, у којима се проблем интеграције може до краја решити. Проблем се може разложити на поједине специјалније проблеме који ће бити редом расправљени.

А) *Одредба инфинитезималног реда интеграла.*

Кад једна промењљива количина y, функција независно промењљиве количине x, тежи нули ако x тежи нули, она постаје бескрајно мала количина у исто време кад и промењљива x. Под *инфинитезималним редом* бескрајно мале количине y разуме се такав један позитиван број μ, да количник

$$\frac{y}{x^\mu}$$

тежи коначној и од нуле различној граници H кад x тежи нули.

Пошто се тражи интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$, то, ако је μ инфинитезимални ред интеграла, биће за вредности x у близини вредности $x=0$

$$\frac{y}{x^\mu}=H+\varepsilon,$$

где ε тежи нули кад x тежи нули, што се може написати у облику

$$y=Hx^\mu+\delta\ , \qquad (202)$$

где и δ тежи нули кад x тежи нули.

Функција $f(x,y)$ јавља се за $x=0$, $y=0$ у облику $\frac{0}{0}$. Ми ћемо узети да то долази отуда, што је $f(x,y)$ количник

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)} \qquad (203)$$

двеју функција φ и ψ холоморфних у близини вредности $x=0$, $y=0$, и таквих да је

$$\varphi(0,0)=0\ , \qquad \psi(0,0)=0\ .$$

Функције φ и ψ могу се, према томе, развити у двоструке Maclaurin-ове редове

$$\varphi(x,y)=\sum_m\sum_n B_{mn}\,x^m y^n\,,$$

$$\psi(x,y)=\sum_m\sum_n A_{mn}\,x^m y^n\,,$$

конвергентне у извесним круговима описаним око $x=0$ и $y=0$ у равнима промењљивих x и y.

Заменивши те изразе у једначини (201) написаној у облику

$$\psi(x,y)\,y'=\varphi(x,y)$$

или, према (202), одакле је

$$y'=\mu Hx^{\mu-1}+\delta'\,, \qquad (204)$$

у облику

$$\mu H\psi(x,y)\,x^{\mu-1}=\varphi(x,y)+\eta \qquad (205)$$

налази се кад се обе стране, после те смене, уреде по степенима промењљиве x, ово што следује:

1° на левој страни чланови најнижег реда налазиће се међу члановима облика

$$A_{m'n'}\,x^{m'+\mu n'+\mu-1}\ ,$$

2° на десној страни они ће се налазити међу члановима облика

$$B_{mn}\,x^{m+n\mu}\,.$$

Чланови најнижег степена по x на левој и десној страни морају бити међу собом једнаки; нека је на левој страни то члан који одговара вредностима индекса

$$n'=\alpha'\ , \qquad m'=\beta'\ ,$$

а на десној страни члан што одговара вредностима индекса

$$n=\alpha\ , \qquad m=\beta\ .$$

Тада треба да је

$$\beta' + \mu\alpha' + \mu - 1 = \beta + \mu\alpha ,$$

одакле је

$$(206) \qquad \mu = \frac{1+\beta-\beta'}{1+\alpha'-\alpha} .$$

Пошто су $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ цели бројеви, то једначина (206) показује *да је инфинитезимални ред интеграла у у општем случају рационалан број*. Изузетак би могао бити само у случају кад је у један исти мах

$$1+\beta-\beta'=0 , \qquad 1+\alpha-\alpha'=0 ,$$

у коме се случају μ јавља у неодређеном облику $\frac{0}{0}$.

Једначина (205) важи за сваки пар изложилаца

$$m'+\mu n'+\mu-1 \qquad \text{и} \qquad m+\mu n$$

променљиве x на левој и десној страни једначине (205) пошто се у овој смене y и y' својим вредностима (202) и (204), али сваки такав пар не одговара услову који се има у виду, а то је да тако, помоћу одговарајућег обрасца (206), добијен број μ буде *мањи* од свију оних до којих би довели остали парови изложилаца. Такав се најмањи број μ може у свакоме датом случају одредити рачунски, али Briot и Bouquet су дали једну геометриску конструкцију која тај број одређује помоћу коефицијента правца једне од страна извесне полигоналне линије, која у реалној равни xOy пролази кроз извесне тачке

$$M(\alpha, \beta+1) \qquad \text{и} \qquad M'(\alpha'+1, \beta)$$

а све остале тачке оставља на својој десној страни. Коефицијенат правца једне ма које од страна такве полигоналне линије, кад му се промени знак, даје тражени број μ, и свака од тих страна одређује по један такав број који се може сматрати као инфинитезимални ред по једнога од могућних интеграла y једначине (201). Таква је линија позната под именом *Briot-Bouquet-ове полигоналне линије* везане за дату диференцијалну једначину (201).

B) *Редукција диференцијалне једначине на упрошћени облик.*

Нека је μ један од тако добијених бројева што претстављају инфинитезимални ред интеграла y, и нека су

$$n=\alpha, \quad m=\beta, \quad n'=\alpha', \quad m'=\beta'$$

изложиоци што фигуришу у члану најмањег степена променљиве x на левој и десној страни једначине (205) после поменуте смене.

Пошто је μ рационалан број, ставимо да је

$$\mu = \frac{p}{q} ,$$

где су p и q два цела несводљива броја и извршимо у једначини смену

$$(206) \qquad x=t^q, \quad y=vt^p ,$$

где је t нова независно променљива количина, а v нова непозната функција.

Према (206) и пошто је $\mu q = p$ биће

$$\frac{y}{x^\mu} = \frac{y}{t^{\mu q}} = \frac{y}{t^p} = v$$

а пошто количник $\frac{y}{x^\mu}$ тежи за $x=0$ коначној и од нуле различној граници, види се да ће и функција v за $x=0$ тежити таквој истој граници коју ћемо означити са λ.

Члан

$$A_{\beta'\alpha'}\, x^{\beta'}\, y^{\alpha'}$$

развитка функције ψ, на левој страни једначине (205), што одговара најмањем броју μ, горњом сменом постаје

$$A_{\beta'\alpha'}\, v^{\alpha'}\, t^{p\alpha'+q\beta'}$$

а одговарајући му члан на десној страни исте једначине постаје

$$B_{\beta\alpha} = v^{\alpha}\, t^{p\alpha+q\beta} ,$$

а извод y' постаје

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(vt^p)\,\frac{dt}{dx} = \frac{pvt^{p-1} - t^p\,\dfrac{dv}{dt}}{qt^{q-1}}\,.$$

Према томе, једначина (201), написана у облику

$$\psi(x, y)\,y' = \varphi\,(x, y)$$

таквом сменом помножена са qt^{q-1} постаје

$$(207)\qquad \begin{aligned} &(A_{\beta',\alpha'}\,v^{\alpha'}\,t^{p\alpha'+q\beta'} + \cdots)\left(pt^{p-1}\,v - t^p\,\frac{dv}{dt}\right) = \\ &\qquad = (B_{\alpha,\beta}\,v^{\alpha}\,t^{p\alpha+q\beta} + \cdots)\,qt^{q-1} \end{aligned}$$

где неисписани чланови на левој и десној страни садрже више степене променљиве t.

По дефиницији броја μ, најмањи степен променљиве t на левој страни је

$$p\alpha' + q\beta' + p - 1$$

а на десној то је

$$p\alpha + q\beta + q - 1$$

а лако се увиђа да су та два изложиоца међу собом једнаки, јер је

$$\mu = \frac{p}{q} = \frac{1 + \beta - \beta'}{1 + \alpha - \alpha'}$$

а према тој једнакости је

$$p\alpha' + q\beta' + p = p\alpha + q\beta + q.$$

Ако се заједничка вредност ова два броја означи са h најмањи степен променљиве t на левој и десној страни једначине (207) биће t^{h-1}, па кад се једначина подели са t^{h-1}, она постаје

$$(208)\quad (A_{\beta'\alpha'}\;v^{\alpha'} + \cdots)\left(pv + t\,\frac{dv}{dt}\right) = q\,(B_{\beta\alpha}\,v^{\alpha} + \cdots)$$

где неисписани чланови садрже степене променљиве t.

Кад се у једначини (208) стави $t=0$, она даје за v коначну и од нуле различну вредност, ону исту која је малочас означена са λ. Резултат те смене биће извесна једначина

$$(209)\qquad \Phi\,(\lambda) = 0$$

која одређује ту вредност λ. У тој ће једначини фигурисати само чланови леве и десне стране једначине (208) који не садрже t, а таквих чланова може бити и више од два, јер чланова најнижега степена у једначини (207) може бити два или више од два.

Једначина (209) је облика

$$(210)\qquad p(A_{\beta'\alpha'}\,\lambda^{\alpha'} + \cdots) = q\,(B_{\beta\alpha}\,\lambda^{\alpha} + \cdots)\;,$$

па уочимо један њен корен λ. За тај ће корен, за овај мах, бити претпостављено да не поништава у исти мах посебице и леву и десну страну једначине (210); у даљем излагању биће испитан и такав изузетан случај.

Уведимо нову непознату функцију

$$(211)\qquad w = v - \lambda$$

која ће бити једнака нули за $t=0$, јер је тада $v=\lambda$. По биномном обрасцу тада ће бити

$$\begin{aligned} A_{\beta'\alpha'}\,v^{\alpha'} &= A_{\beta'\alpha'}\,(\lambda + w)^{\alpha'} = \\ &= A_{\beta'\alpha'}\,\lambda^{\alpha'} + \alpha' A_{\beta'\alpha'}\,\lambda^{\alpha'-1}\,w + \cdots \end{aligned}$$

а тако исто и

$$\begin{aligned} B_{\beta\alpha}\,v^{\alpha} &= B_{\beta\alpha}\,(\lambda + w)^{\alpha} = \\ &= B_{\beta\alpha}\,\lambda^{\alpha} + \alpha\,B_{\beta\alpha}\,\lambda^{\alpha-1}\,w + \cdots \end{aligned}$$

где неисписани чланови садрже као чинилац више степене променљиве w.

Таквом сменом једначина (208) постаје

$$(212)\quad \begin{aligned} &\left(A_{\beta'\alpha'}\,\lambda^{\alpha'} + \alpha'\,A_{\beta'\alpha'}\,\lambda^{\alpha'-1}\,w + \cdots\right)\left(p\lambda + pw + t\,\frac{dw}{dt}\right) = \\ &\qquad = (B_{\beta\alpha}\,\lambda^{\alpha} + \alpha\,B_{\beta\alpha}\,\lambda^{\alpha-1}\,w + \cdots)\,q\;, \end{aligned}$$

где неисписани чланови у заградама садрже више степене променљиве w, као и разне степене t променљиве.

Међутим, чланови без w и t са леве и десне стране једначине (212) улазе у састав једначине (209), написане у облику (210), и они ишчезавају, пошто је њихов алгебарски збир, због саме ове једначине, једнак нули. А кад се ти чланови изоставе и једначина (212) после тога реши по изразу $t\frac{dw}{dt}$, добија се једначина

$$(213)\quad t\frac{dw}{dt}=\frac{\alpha q B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha-1}w-\alpha' p A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}w-p A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}w+\cdots}{A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'}+\alpha' A_{\beta'\alpha'}w+\cdots},$$

где неисписани чланови садрже степене промењљиве t и више степене промењљиве w.

Сви сабирци у бројитељу десне стране једначине (213) садрже као чинилац било w, било t, а тако исто и сви сабирци именитеља, осим првога сабирка, који то не садржи. Према томе за $t=0$, $w=0$ бројитељ постаје једнак нули, а именилац је различан од нуле. Једначина (213) је, дакле, облика

$$(214)\qquad t\frac{dw}{dt}=F(t,w),$$

где је F функција промењљивих t и w, холоморфна за $t=0$, $w=0$, која и сама постаје једнака нули за те вредности промењљивих.

Као закључак из свега овога добија се ова теорема:

Кад је дата диференцијална једначина

$$y'=f(x,y)$$

таква, да се вредност $f(0,0)$ јавља у облику $\frac{0}{0}$, једначина је у општем случају, сменом независно променљиве и непознате функције своdљива на облик

$$(215)\qquad x\frac{dy}{dx}=F(x,y),$$

где је F функција променљивих x и y, холоморфна за $x=0$, $y=0$.

Изузетни случај биће испитан у току даљег излагања.

C) *Проучавање редуковане једначине.*

Пошто је функција F холоморфна у близини вредности x и y, она се може развити у двоструки Maclaurin-ов ред облика

$$F(x,y)=ay+bx+cy^2+exy+hx^2+\cdots$$

где ће недостајати члан без x и y, пошто је $F(0,0)=0$. Коефицијенти

$$a,b,c,e,h\ldots$$

су стални бројеви. И онда треба испитати: у какав се ред може развити интеграл y једначине

$$(216)\qquad xy'=ay+bx+cy^2+exy+hx^2+\cdots$$

(где неисписани чланови садрже степене промењљивих x и y више од 2) који за $x=0$ добија вредност $y=0$. Биће показано да *природа интеграла и облик интегралног реда зависе првенствено од коефицијента a*, т. ј. од коефицијента члана са првим степеном промењљиве y на десној страни једначине (216).

Коефицијенат a може бити реалан или имагинаран. Кад је реалан, извесном сменом промењљиве y може се увек учинити да он буде *негативан*, изузимајући случај кад је он једнак нули, у коме случају га треба оставити таквог какав је. Ако је имагинаран, извесном сменом може се увек учинити да његов реалан део буде *негативан* (или нула). То се постиже сменом функције y

$$(217)\qquad y=-\left(\frac{b}{a-1}+z\right)x$$

где је z нова непозната функција. Одатле је

$$(218)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a-1}-z-x\frac{dz}{dx}$$

па дакле

$$(219)\qquad x\frac{dy}{dx}=-\frac{bx}{a-1}-xz-x^2\frac{dz}{dx}$$

а у исто време је

$$(220)\qquad ay+bx+\cdots=-\frac{ab}{a-1}x-axz+bx+\cdots$$

Кад се, дакле, према једначини (216) уједначе (219) и (220) добија се једначина

$$(221)\qquad -xz-x^2\frac{dz}{dx}=-axz+\cdots$$

где ће сви неисписани чланови садржати x^2 као чинилац, јер сви они садрже било x, било y, а y према (217) садржи x као чинилац. Једначина (221), скраћена са x па решена по изразу $x\frac{dz}{dx}$ постаје

$$(222)\qquad x\frac{dz}{dx}=(a-1)z+\Delta$$

где Δ означује скуп чланова који садрже као чиниоце x и z.

Једначина (222) изражава $x\frac{dz}{dx}$ као функцију промењивих x и z холоморфну за $x=0$, $z=0$ и где десна страна једначине постаје једнака нули за те вредности x и z. Једначина је, дакле, истога облика као једначина (216), само што је у њој коефицијенат непознате функције на првом степену смањен за јединицу. Једини случај кад је такво смањивање немогућно, био би тај кад је $a=1$, јер је тада смена (217) немогућна. Тај изузетан случај биће у даљем излагању накнадно испитан.

Поновивши исту смену (217) на новој једначини (222), добила би се опет једначина истога облика, али где би коефицијенат a, био смањен за две јединице. И ако се смена понови онолико пута колико има целих јединица у реалном делу броја a, добиће се једначина истога облика (216), али *где ће реални део тога броја бити или нула, или негативан број.*

У свему што следује биће претпостављено да је такво свођење већ извршено, т. ј. да је реални део броја a нула или негативан број. Вратимо се тада диференцијалној једначини

$$(223)\qquad xy'=ay+bx+\cdots=f(x,y)$$

где је такав коефицијенат a и покушајмо задовољити је интегралним редом облика

$$(224)\qquad y=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

Ако такав ред може задовољити једначину (223) онда се његов општи коефицијенат израчунава по обрасцу

$$(225)\qquad A_n=\frac{1}{n!}\,[y^{(n)}].$$

Узастопни изводи y', y'', $y'''\ldots$ функције y, потребни за то израчунавање, одредили би се из саме диференцијалне једначине (223). Кад би се они израчунавали на обичан начин, као за једначину

$$y'=f(x,y),$$

где је f холоморфна функција за $x=0$, $y=0$, вредности

$$[y'],\quad [y''],\quad [y'''],\ldots$$

јавиле би се у облику $\frac{0}{0}$ и биле би неодређене. Међутим начин, који ће овде бити сад употребљен, не доводи до те неодређености.

Означимо са r и r' полупречнике кругова описаних у x-равни око средишта $x=0$, односно у y-равни око средишта $y=0$, и таквих да је $f(x,y)$ за све вредности x и y у тим круговима и на њиховим рубовима холоморфна. Нека је M максимум модула те функције у посматраној области. Посматрајмо претходно обичну једначину

$$(226)\qquad u=f(x,u)\,.$$

Она одређује u као имплицитну функцију од x, која је за $x=0$ једнака нули, јер је $f(0,0)=0$, а осим тога и униформна око $x=0$, јер када то не би била, $y=0$ би био вишеструки корен једначине

$$u-f(0,u)=0,$$

дакле би се поништио и извод леве стране те једначине, тј. било би

$$1-\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]=0,$$

што значи $1-a=0$, а то не може бити јер је по претпоставци $a \neq 1$. Дакле $u(x)$ је холоморфна око $x=0$, па се може развити у ред облика

$$(227) \qquad u = B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \cdots$$

Израчунајмо узастопне изводе функције $u(x)$. Из (226) се добија

$$(228) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}, \\ \frac{d^3u}{dx^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Одатле се добија за $x=0$, $u=0$, имајући у виду и развитак функције $f(x, y)$ у обрасцу (223),

$$(229) \qquad \begin{aligned} \left[\frac{du}{dx}\right] &= \frac{b}{1-a}, \\ \left[\frac{d^2u}{dx^2}\right] &= \frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]}{1-a}, \\ \left[\frac{d^3u}{dx^3}\right] &= \frac{\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots\right]}{1-a}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Како је $a \neq 1$, именитељи су различити од нуле, дакле леве стране имају коначне вредности. Од њих ће зависити величина круга конвергенције реда (227). Да би се добио један круг у коме ће тај ред насигурно конвергисати, тражи се једна функција $v(x)$, чији ће Maclaurin-ов ред бити мајорантни ред за ред (227). Таква се функција добија пошав од функције

$$\varphi(x, v) = Av + Bx + M\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{xv}{rr'} + \frac{v^2}{r'^2} + \cdots + \frac{x^m v^n}{r^m r'^n} + \cdots\right),$$

где A означава такав позитиван број мањи од 1, да је $1-A \leqslant |1-a|$, а B модуо b. Лако се налази

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = B, \qquad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] = A, \qquad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right] = \frac{2M}{r^2}, \qquad \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial v}\right] = \frac{M}{rr'}, \quad \cdots\cdots$$

и уопште

$$\left[\frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m\,\partial v^n}\right] = \frac{m!\,n!\,M}{r^m r'^n},$$

а то значи, према значењу величина M, r и r' и према ставу В) на страни 26 ове књиге, да за модуо сваког извода функције $f(x, u)$ постоји однос

$$(230) \qquad \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial u^n}\right] \leqslant \left[\frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial x^m\,\partial v^n}\right].$$

Посматрајмо сада једначину

$$(231) \qquad v = \varphi(x, v)$$

Она одређује v као функцију од x, слично као једначина (226) што одређује u као функцију од x. Зато се, слично обрасцима (228), добија

$$(232) \qquad \begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx}, \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

и отуда

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{dv}{dx}\right]=\frac{B}{1-A}\,, \\
(233)\qquad &\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]=\frac{\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]}{1-A}\,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Имениоци су позитивни, а исто тако и изводи функције φ за $x=0$, $v=0$. Прва једначина даје $\left[\frac{dv}{dx}\right]$ као позитивну величину. Сменивши је у другу једначину, добија се бројилац у тој једначини као збир позитивних величина; дакле је и $\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]$ позитивна величина. На тај начин се показује да су уопште сви изводи функције v по x за $x=0$ позитивни.

Упоредимо сада обрасце (229) и (233). Пошто је $|1-a|\geqslant \geqslant 1-A$, то је

$$
(234)\qquad \bmod\left[\frac{du}{dx}\right]\leqslant\left[\frac{dv}{dx}\right].
$$

У другој једначини (229) добиће се вредност већа по модулу, ако се место модула бројоца узме збир модула његових чланова, а тада се налази да је, на основу образаца (230) и (234),

$$
\begin{aligned}
&\bmod\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]\leqslant \\
&\qquad\leqslant\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]+2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial v}\right]\cdot\left[\frac{dv}{dx}\right]+\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right]\cdot\left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]\,,
\end{aligned}
$$

а одатле следује

$$
\bmod\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]\leqslant\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right].
$$

Тако се добија и даље, дакле уопште

$$
\bmod\left[\frac{d^n u}{dx^n}\right]\leqslant\left[\frac{d^n v}{dx^n}\right].
$$

Дакле ће Maclaurin-ов ред за $v(x)$ бити заиста мајорентан за ред (227) функције $u(x)$. Једначина (231) која дефинише функцију $v(x)$ уствари је алгебарска и може се писати у облику

$$
\left(\frac{M}{r}-B\right)x+\left(\frac{M}{r'}-A+1\right)v+M=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)}\,,
$$

те јој се лакше може наћи и полупречник R конвергенције њеног Maclaurin-овог реда. Кад је овај нађен, знамо дакле да ред (227) насигурно конвергира у кругу $|x|<R$.

После ових припремних посматрања једначине (226) и њеног решења датог у облику реда (227) може се доказати *да је диференцијална једначина* (223) *заиста задовољена интегралним редом облика* (224), *и да овај насигурно конвергира у кругу чији полупречник има поменуту величину* R.

Узастопним диференцијалењем једначине (223) добија се

$$
\begin{aligned}
&y' \;+xy'' \;=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\,, \\
(235)\qquad &2y''+xy'''=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''\,, \\
&3y'''+xy''''=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\dots+\frac{\partial f}{\partial y}y'''\,, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

а кад се стави $x=0$, $y=0$ и примети да се други члан на левој страни сваке једначине губи и да је $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]=a$, одатле произлази

$$
\begin{aligned}
&[y']=\frac{b}{1-a}\,, \\
(236)\qquad &[y'']=\frac{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2\right]}{2-a}\,, \\
&[y''']=\frac{\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots\right]}{3-a}\,, \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

и уопште

$$[y^{(n)}]=\frac{\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\cdots\right]}{n-a}.$$

Пошто је реални део броја a негативан, то ако се стави $a=-\alpha+\beta i$, биће

$$|1-a|^2=(1+\alpha)^2+\beta^2,$$

$$|n-a|^2=(n+\alpha)^2+\beta^2, \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

дакле

$$|n-a|\geqslant|1-a|. \tag{237}$$

Према томе је

$$\operatorname{mod}[y^{(n)}]\leqslant \operatorname{mod}\frac{\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\cdots\right]}{1-a}. \tag{238}$$

Међутим израз на десној страни ове неједначине истоветан је са модулом десне стране у одговарајућој једначини (229), дакле је

$$\operatorname{mod}[y']\leqslant\operatorname{mod}\left[\frac{du}{dx}\right],$$

$$\operatorname{mod}[y'']\leqslant\operatorname{mod}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right],$$

$$\operatorname{mod}[y''']\leqslant\operatorname{mod}\left[\frac{d^3u}{dx^3}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{mod}[y^{(n)}]\leqslant\operatorname{mod}\left[\frac{d^nu}{dx^n}\right],$$

а то значи да је уопште и

$$|A_n|\leqslant|B_n|. \tag{239}$$

Отуда следује обећани закључак, да је и интеграл

$$y=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

посматране диференцијалне једначине

$$xy'=f(x, y)$$

конвергентан у кругу $|x|<R$.

Напослетку остаје још и питање: да ли на горњи начин добијени интегрални ред (224) даје једини интеграл једначине (223) који за $x=0$ добија вредност $y=0$? Може се доказати да је то одиста случај: под досадашњом претпоставком, да је реални део броја a негативан или једнак нули то је једини интеграл те врсте који је холоморфна функција променљиве x.

Да би се то доказало, нека је y интеграл претстављен редом (223), а $y+z$ други један интеграл једначине (223) који за $x=0$ постаје $y+z=0$, што значи да за $x=0$ треба да буде и $z=0$. Пошто оба интеграла треба да задовоље исту једначиву (223), треба да буде

$$xy'=ay+bx+cy^2+\cdots$$

$$x(y'+z')=a(y+z)+bx+c(y+z)^2+\cdots$$

Кад се прва једначина одузме од друге, на десној страни разлике нестаће свих чланова који зависе само од x или само од y, тако да ће сви чланови што остају садржати променљиву z, што даје

$$xz'=az+2cyz+kz^2+\cdots$$

Ако се у тој једначини y смени својим интегралним редом (224), она се претвара у једну једначину чија ће десна страна бити састављена:

1° из једнога реда облика

$$az+lz^2+sz^3+\cdots=z\varphi(z) \tag{240}$$

што зависи само од променљиве z;

2° из једнога двоструког реда по x и z, чији сваки члан садржи и x и z [јер је скуп чланова што зависе само од x ишчезао малопређашњим одузимањем, а скуп чланова што зависе само од z издвојен је као ред (240)], и који ће према томе бити облика

$$xz\,\psi(x,z)$$

где је ψ једна функција холоморфна за вредности $x=0$, $y=0$. Кад се у тој функцији смени z својим изразом као холоморфна функција променљиве x, ψ ће бити холоморфна функција саме променљиве x (за $x=0$), која ако се означи са $\lambda(x)$, нова, тако трансформисана једначина биће облика

$$xz'=z\,\varphi(z)+xz\,\lambda(x)$$

па се, делећи је са $xz\,\varphi(z)$, а затим множећи са dx, из ње добија

$$\frac{dz}{z\varphi(z)}=\frac{dx}{x}+\frac{\lambda(x)}{\varphi(z)}\,dx\,. \tag{241}$$

Функција

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{a+lz+sz^2+\cdots}$$

пошто је холоморфна за $z=0$, може се развити у ред облика

$$\frac{1}{a}+C_1z+C_2z^2+\cdots$$

а функција $\frac{\lambda(x)}{\varphi(z)}$, кад се у њој смени z холоморфном функцијом променљиве x (каква се претпоставља да је) постаје и сама холоморфна функција те променљиве, која ће бити означена са $\mu(x)$.

Једначина (241) помножена са a, јавља се дакле у облику

$$\frac{dz}{z}+a\,(C_1+C_2z+C_3z^2+\cdots)\,dz=a\,\frac{dx}{x}+a\,\mu(x)\,dx$$

па се, интегралећи јој леву страну у границама z_0 и z, а десну у границама x_0 и x, добија

$$\log\frac{z}{z_0}+aC(z)=\log\left(\frac{x}{x_0}\right)^a+aL(x)$$

где је

$$C(z)=C_1\,(z-z_0)+\frac{C_2}{2}\,(z^2-z_0^2)+\cdots,$$

$$L(x)=\int_{x_0}^{x}\mu(x)\,dx,$$

а одатле је

$$\frac{z}{z_0}=\left(\frac{x}{x_0}\right)^a e^{a\,[L(x)-C(z)]}\,. \tag{243}$$

Пустимо сад да x тежи нули. Лева страна једначине (243) тежиће такође нули, пошто по претпоставци и z тада тежи нули. Функције $C(z)$ и $L(x)$ теже коначним границама па дакле израз

$$e^{a\,[L(x)-C(z)]}$$

остаје при том коначан и различан од нуле. А да би се видело што ће бити са изразом

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^a$$

ставимо да је

$$\frac{x}{x_0}=\varrho e^{\theta i}\qquad\qquad a=\alpha+\beta i$$

па ће бити

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^a=\varrho^\alpha\,e^{-\beta\theta}\cdot e^{(\beta\log\varrho+\alpha\theta)\,i}\,,$$

из чега је

$$\left|\frac{x}{x_0}\right|^a=\varrho^\alpha\,e^{-\beta\theta}\,.$$

Кад је α негативно, израз на левој страни добија бескрајно велику вредност кад вредност x, па према томе и ϱ, тежи нули; кад је $\alpha=0$, тај израз постаје $\varrho^{-\beta\theta}$ и има коначну и од нуле различну вредност.

Једначина (243) има, дакле, за $x=0$, $z=0$ своју леву страну једнаку нули, а своју десну страну бескрајно велику или коначну и од нуле различну. Пошто тако не може бити, не може постојати ни претпоставка да поред нађеног интеграла y једначине (223) постоји још један холоморфан интеграл $y+z$ који би, као и онај први, добио вредност $z=0$ за

$x=0$. Нађени интеграл y, изражен у облику реда (224), јединни је интеграл те врсте.

А из целе ове дискусије изводи се теорема:

Кад год је у редукованој диференцијалној једначини (223), *т.ј. сведеној на облик*

$$xy' = ay + bx + cy^2 + exy + hx^2 + \cdots \tag{244}$$

реални део коефицијента a негативан, или једнак нули, једначина има један, и то само један холоморфан партикуларни интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$. Тај се интеграл може развити у ред уређен по степенима променљиве x, који ће бити конвергентан у једноме одређеном кругу описаном око тачке $x=0$.

Интеграл се, у појединим специјалним случајевима, може свести и на y идентички $=0$, као што је н. пр. случај са једначином

$$xy' = -my + \alpha xy \ , \qquad m > 0 \ ,$$

чији је општи интеграл

$$y = C\frac{e^{\alpha x}}{x^m} \ .$$

D) *Изузетни случајеви.*

I.

Видели смо у одељку под A), пре редуковања диференцијалне једначине на облик (244), да се инфинитезимални ред μ интеграла y, који за $x=0$ добија вредност $y=0$, израчунава из једне једначине облика

$$\alpha'\mu + \beta' + \mu - 1 = \alpha\mu + \beta \tag{245}$$

где су $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ изложиоци променљивих x и y што фигуришу у извесна два члана једначине (205).

Број μ је у општем случају *реалан рационалан број.* Али се може десити да је једначина (245) идентички задовољена за произвољну вредност μ, што ће бити кад је у једно исто време

$$1 - \alpha + \alpha' = 0 \ ,$$
$$1 + \beta - \beta' = 0 \ ,$$

и оно што је напред казано у вези са рационалношћу броја μ, тада више не важи. Број μ тада може бити и *ирационалан,* као и *имагинаран;* у таквом изузетном случају може се десити да се у интегралу y јављају ирационални или имагинарни степени, па да је вредност $x=0$ *трансцендентан критички сингуларитет интеграла.*

Такав је, на пример, случај са диференцијалном једначином

$$xy' = \lambda y \ ,$$

где је λ какав реалан позитиван ирационалан, или имагинаран број са позитивним реалним делом. Тада је

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$$

и једначина (245) своди се на идентичност. Општи интеграл једначине

$$y = Cx^{\lambda}$$

показује да сви партикуларни интеграли добијају за $x=0$ вредност $y=0$, а имају вредност $x=0$ као трансцендентну критичку тачку.

II.

У одељку B), при редукцији диференцијалне једначине (201) на сведени облик (223), било је претпостављено за једначину (209)

$$\Phi(\lambda) = 0 \ ,$$

која је облика (210) тј.

$$p\,(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \cdots) = q\,(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \cdots) \ , \tag{246}$$

да њен уочени корен λ не поништава у исти мах посебице и једну и другу страну једначине. Проучимо сад такав изузетан случај, кад је за такав корен λ

$$A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \cdots = 0 \ ,$$
$$B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \cdots = 0 \ .$$

Тада се чланови на левој и десној страни једначине (208), који не садрже t потиру и једначина (208) јавља се у облику

$$(g't+h'v+\cdots)\,t\frac{dv}{dt}=gt+hv+\cdots,$$

тј. у облику

$$t\frac{dv}{dt}=\frac{gt+hv+\cdots}{g't+h'v+\cdots} \tag{247}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и v. Ако се тада изврши смена

$$gt+hv=tu,$$

где је u нова непозната функција, добија се

$$v=\frac{t}{h}(u-g),$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{u-g}{h}+\frac{t}{h}\frac{du}{dt}, \tag{248}$$

тако да ће чланови трансформисане једначине, који садрже степене променљиве u, садржати толике исте степене променљиве t.

Лева страна једначине (247) таквом сменом добија облик

$$atu+bt+\frac{t^2}{h}\frac{du}{dt}$$

а десна страна облик

$$\frac{tu+\cdots}{lt+ktu+\cdots}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљиве t. Скративши бројитељ и именитељ са t, последњи се израз јавља у облику

$$\frac{u+\cdots}{l+ku+\cdots} \tag{249}$$

где неисписани чланови садрже степене променљиве t.

Са друге стране, пошто, кад се у једначини (247) смени v својом вредношћу (248), именитељ израза на десној страни добија облик

$$\left(g'-\frac{gh'}{h}\right)t+\frac{h'}{h}ut+\cdots,$$

то коефицијенат l у изразу (249) има за вредност

$$l=g'-\frac{gh'}{h}.$$

Једначина (247), дакле, сменом (248) постаје

$$a\,tu+bt+\frac{t^2}{h}\frac{du}{dt}=\frac{u+\cdots}{l+ku+\cdots}$$

или

$$t^2\frac{du}{dt}=\frac{hu+\cdots}{l+ku+\cdots}-ah\,ut-bht=\frac{hu+st+\cdots}{l+ku+\cdots}. \tag{250}$$

Ако је $l\neq 0$ десна страна последње једначине је једнака нули за $t=0$, $u=0$ и холоморфна функција променљивих t и u за те њихове вредности. Она се према томе може развити у двоструки ред по степенима тих променљивих, па ће једначина (250) постати

$$t^2\frac{du}{dt}=\alpha u+\beta t+\cdots \tag{251}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и u.

Као што се види, *наместо редуковане једначине ранијег облика*

$$xy'=ay+bx+\cdots$$

јавља се редукована једначина облика

$$(252) \qquad x^2y' = ay + bx + \cdots$$

где неисписани чланови, кад постоје, садрже више степене променљивих x и y.

За једначине облика (252) *вредност $x=0$ је уопште есенцијални сингуларитет интеграла y.* То се види, н. пр. на простоме примеру једначине

$$(253) \qquad x^2y' = au$$

чији је општи интеграл

$$y = Ce^{-\frac{a}{x}}$$

и има вредност $t=0$ као есенцијалну тачку.

Исто се види и из потпуније једначине

$$(254) \qquad x^2 y' = ay + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = e^{-\frac{a}{x}}\left(C + b\int e^{\frac{a}{x}} \frac{dx}{x}\right)$$

и има такође $x=0$ као есенцијалну тачку.

Од интереса је навести за једначине облика (252) још и ову особеност: у општем случају, кад би се покушало да се једначина задовољи редом облика

$$(255) \qquad y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots$$

сви би се коефицијенти $A_1, A_2, A_3, \ldots$ могли израчунати из саме једначине; сви би били коначни и одређени, и тако формирани ред би одиста задовољавао диференцијалну једначину, па ипак, не би био конвергентан ни за коју вредност x.

Тако н. пр., ако се y, дефинисано редом (255), смени у једначини (254), па се међу собом уједначе коефицијенти истих степена променљиве x са леве и десне стране једначине, добија се низ једначина

$$aA_1 + b = 0 \;,$$

$$A_1 = aA_2 \;, \qquad 2A_2 = aA_3 \;, \qquad 3A_3 = aA_4 \;, \ldots$$

из којих се налази да је

$$A_1 = -\frac{b}{a} \;, \quad A_2 = -1!\,\frac{b}{a^2} \;, \quad A_3 = -2!\,\frac{b}{a^3} \;, \ldots$$

и уопште

$$A_n = -(n-1)!\,\frac{b}{a^n} \;. \;.$$

Међутим, тако одређен ред

$$y = -b\left[\frac{x}{a} + 1!\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2!\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3!\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \cdots\right]$$

није конвергентан ни за коју вредност x. На исту се чињеницу наилази и за општу једначину (252), изузимајући њен специјалан случај (253), у коме се налази за све коефицијенте A_n да су једнаки нули. Све то произлази из тога, *што је вредност $x=0$ есенцијални сингуларитет интеграла, па се овај може развити не по степенима променљиве x, већ по степенима променљиве $\frac{1}{x}$*, као што се то види и из горњих примера.

III.

Видели смо у предњем одељку II да се диференцијална једначина (247) сменом

$$gt + hv = tu$$

своди на облик

$$t^2 \frac{du}{dt} = \frac{hu + st + \cdots}{l + ku + \cdots}$$

где коефицијенат l има за вредност

$$l = g' - \frac{gh'}{h} \;.$$

Може се у коме специјалном случају десити да буде $l=0$; једначина се тада своди на облик

$$t^2\frac{du}{dt}=\frac{hu+st+\cdots}{ku+\cdots} \tag{256}$$

и њена десна страна није више холоморфна за $t=0$, $u=0$. Ако се тада у (256) изврши смена слична малопређашњој, тј. ако се стави да је

$$hu+st=vt ,$$

где је v нова непозната функција, нова ће једначина бити облика

$$t^3\frac{dv}{dt}=\frac{h_1v+s_1t+\cdots}{l_1+k_1v+\cdots} .$$

Ако би се десило да је и $l_1=0$, извршили бисмо понова смену исте врсте, која би се понављала све дотле док се не дође у именитељу до једнога коефицијента l који више није једнак нули. Последња тако добијена једначина била би облика

$$t^m\frac{dw}{dt}=\frac{hw+qt+\cdots}{l+pt+\cdots} .$$

Па пошто је тада десна страна једначине холоморфна за $t=0$, $w=0$, она се може развити у двоструки ред по степенима промењљивих t и w, тако да се једначина своди на дефинитиван облик

$$x^m y'=ay+bx+\cdots \tag{257}$$

Таква једначина уопште (изузимајући неке врло специјалне случајеве) нема интеграла y који би за $x=0$ добио вредност $y=0$, а који би се могао развити у ред облика

$$y=A_1 x+A_2 x^2+A_3 x^3+\cdots \tag{258}$$

као што се то већ види из специјалних случајева те једначине, као што су једначине (253) и (254).

IV.

При проучавању редуковане једначине

$$xy'=ay+bx+\cdots \tag{259}$$

видели смо да кад коефицијенат a има свој реални део негативан или једнак нули, он се може развити у ред облика (258), који ће бити конвергентан за вредности x у једном одређеном кругу описаном око тачке $x=0$ у равни промењљиве x. Осим тога показано је да поред тако одређеног интеграла y не постоји више никакав интеграл који испуњава услов да за $x=0$ добије вредност $y=0$.

Кад број a не испуњава такав услов, настају изузетни случајеви, и ови могу бити разноврсни. Сваки од њих захтева нарочито проучавање, слично ономе које је изведено у досадашњем излагању. Резултати у погледу развијања интеграла у ред такође су разноврсни, према аритметичким појединостима везаним за број a. Тако на пример:

За случајеве *кад је реални део броја a позитиван*, Briot и Bouquet, употребом исте методе која је употребљена у овоме што претходи, нашли су да

1° Једначина (259) има опет за интеграл ред облика (258), али поред њега може имати још и бескрајно много других интеграла који за $x=0$ добијају вредност $y=0$, али се не могу развити у ред облика (258).

2° *Кад је a какав реалан, позитиван и рационалан број* $\frac{m}{n}$, интеграл y се може развити у ред уређен по степенима израза $\sqrt[n]{x}$

$$y=A_1\sqrt[n]{x}+A_2\left(\sqrt[n]{x}\right)^2+A_3\left(\sqrt[n]{x}\right)^3+\cdots$$

конвергентан за вредности x у једноме одређеном кругу описаном око тачке $x=0$ у равни x. Тај интеграл има вредност $x=0$ као своју *алгебарску критичку тачку n-тога реда*, а осим њега једначина нема никаквих других интеграла који за $x=0$ добијају вредност $y=0$.

Прост пример за то даје једначина

$$xy' = \frac{m}{n} y$$

чији је општи интеграл

$$y = C\left(\sqrt[n]{x}\right)^m .$$

3° *Кад је* $a=1$, *а коефицијенат* b *различан од нуле*, не постоји интеграл y који за $x=0$ добија вредност $y=0$ и који би се могао развити у ред облика (258), али има бескрајно много таквих интеграла који се могу развити у редове других облика.

Прост пример даје једначина

$$xy' = y + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx + bx \log x .$$

4° *Кад је* $a=1, b=0$, једначина има бескрајно много интеграла који за $x=0$ добијају вредност $y=0$ и од којих се сваки може развити у ред (258).

Прост пример даје једначина

$$xy' = y$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx .$$

Да би се како треба разумели резултати Briot-Bouquet-a, треба имати у виду да они под интегралом y, који за $x=0$ добија вредност $y=0$, разумеју и тривијални интеграл y идентички једнак нули, као и сваки интеграл

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n ,$$

чији се интегрални ред своди на ограничен број чланова.

Тако н. пр. једначина

$$y' = y , \qquad y = Ce^x$$

има као једини свој интеграл, који испуњава услов $x=0$, $y=0$, тривијални интеграл y идентички $=0$.

Једначина

$$xy' = ay , \qquad y = Cx^a , \qquad a > 0 ,$$

има бескрајно много интеграла са условом $x=0$, $y=0$, међу којима је и тривијални интеграл $y=0$. Кад је a какав имагинаран број са позитивним реалним делом, тако да је

$$a = \alpha + \beta i, \qquad \alpha > 0,$$

постоји интеграл y идентички једнак нули, и поред њега бескрајно много интеграла који за $x=0$ постају $y=0$, а који се не могу развити у ред уређен по степенима променљиве x. Ти су интеграли облика

$$y = Cx^{p+qi} = Cx^p \left[\cos(q \log x) + i \sin(q \log x)\right] .$$

Допуњујући резултате Briot-a и Bouquet-a, Poincaré је доказао још и ове теореме:

5⁰ *Кад је а какав цео позитиван број*, једначина има бескрајно много партикуларних интеграла који за $x=0$ постају $y=0$, а сваки се од њих може развити у ред по степенима двеју променљивих t и z, које су

$$t = x, \quad z = \log x .$$

Прост пример даје једначина

$$xy' = y + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = Cx + bx \log x .$$

6⁰ *Кад а није цео позитиван број, а има свој реалан део позитиван*, једначина има један интеграл који за $x=0$ постаје $y=0$, и који се може развити у ред уређен по степенима променљиве x; поред њега она има још бескрајно много интеграла који такође постају $y=0$ за $x=0$, а од којих се сваки може развити у ред по степенима двеју променљивих t и u које су

$$t = x, \quad u = x^a .$$

Прост пример даје једначина

$$xy' = ay + bx$$

чији је општи интеграл

$$y = \frac{b}{1-a} x + Cx^a$$

који, кад је реални део броја a позитиван, тежи нули за $x=0$, а само се један од партикуларних интеграла, онај што одговара вредности константе $C=0$, своди на ограничен ред по степенима променљиве x.

XV. Случај кад десна страна једначине има вредности x=0, y=0 као критичке сингуларитете.

Кад је дата диференцијална једначина

(260) $$y' = f(x, y)$$

може се десити да почетни пар вредности $x=0$, $y=0$ поништава какав поткорени израз што фигурише у функцији $f(x, y)$. То се, на пример, дешава кад једначина (260) претставља једно решење по изводу y' какве алгебарске диференцијалне једначине

(261) $$F(x, y, y') = 0$$

где је F полином по x, y, y'. Тада је пар вредности $x=0$, $y=0$ један пар *алгебарских критичких тачака* функције $f(x, y)$.

У какав се ред тада може развити интеграл y једначине, који за $x=0$ добија вредност $y=0$?

Уочимо најпре једначину

(262) $$f_2(x, y)\, y'^2 + f_1(x, y)\, y' + f_0(x, y) = 0$$

где су f_0, f_1, f_2 полиноми по x и y. Она има два решења по изводу y' и то

(263)
$$y' = -\frac{f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_0 f_2}}{2f_2},$$
$$y' = -\frac{f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_0 f_2}}{2f_2}.$$

Претпоставимо најпре да функција

(264) $$f_1^2 - 4f_0 f_2$$

(која је полином по x и y) није једнака нули за $x=0$, $y=0$. Онда се за y' имају два проста корена (263) једначине (262), различна један од другога. Пар $x=0$, $y=0$ није никакав пар алгебарских критичких сингуларитета за функцију на десној страни једначине (260).

У свакој од двеју једначина (263) десна страна је функција холоморфна за $x=0$, $y=0$, па се према томе на обе те једначине може применити основна Briot-Bouquet-ова теорема; према овој, свака ће од тих двеју једначина дати по један интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$ и који се може развити у ред облика

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

конвергентан за вредности x у једноме кругу описаном око тачке $x=0$ у равни x, одређеном на начин који прописује та теорема.

Изузетак се може имати само у случајевима кад десна страна једначине постане бескрајна за $x=0$, $y=0$, или се јави у облику $\frac{0}{0}$; у тим би се случајевима интеграл проучио на напред наведени начин, после подесне смене променљивих.

Претпоставимо сад да функција (264) добија вредност нулу за пар вредности $x=0$, $y=0$. Тада се оба корена (263) једначине (262) стапају у један њен двоструки корен, који је

$$y' = -\frac{f_1}{2f_2},$$

а такав пар вредности x, y је један пар алгебарских критичких тачака за десну страну једне и друге једначине (263). То су тада алгебарске критичке тачке другога реда, јер корени чиниоци што им одговарају стоје под знаком квадратног корена. А пошто је $x=0$ таква критичка тачка за извод y' (једнак десној страни тих једначина), то ће вредност $x=0$ бити алгебарска критичка тачка другога реда и за само y. Према познатој теореми из теорије функција, y се тада *може развиши у ред уређен по сшейенима израза* $\sqrt{x}$, *који ће биши конвергеншан у једноме одређеном кругу око* $x=0$ *у равни* x.

Уочимо сад општу алгебарску диференцијалну једначину првога реда, која се увек може написати у облику

$$(265) \qquad f_m y'^m + f_{m-1} y'^{m-1} + \cdots + f_1 y' + f_0 = 0$$

где су

$$(266) \qquad f_0, f_1, f_2, \cdots, f_m$$

дати полиноми по промењљивима x и y.

Сменимо у функцијама (266) вредности $x=0$, $y=0$, па ће оне постати константе

$$C_k = [f_k], \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots m)$$

а тако исто ће и извод y' том сменом постати једна константа λ. За те вредности x и y једначина (265) се претвара у обичну алгебарску једначину m-тог степена

$$C_m \lambda^m + C_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + C_1 \lambda + C = 0$$

или у скраћеном облику

$$(267) \qquad \Phi(\lambda) = 0.$$

Претпоставимо најпре да су сви корени једначине (267) прости; да би тако било, потребно је и довољно да, ако је α један корен те једначине, извод $\frac{d\Phi}{d\lambda}$ буде различан од нуле

за $\lambda = \alpha$. Једначина (265) има тада m решења облика

$$(268) \qquad y' = f(x, y)$$

и пар вредности $x=0$, $y=0$ није пар критичких сингуларитета ни за једно од тих решења. Функција $f(x,y)$, ако је за тај пар вредности коначна и не јавља се у облику $\frac{0}{0}$, биће холоморфна функција промењљивих x и y за те њихове вредности и примена основне Briot-Bouquet-ове теореме довешће до развитка интеграла y у облику реда

$$(269) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots;$$

свако од m решења (268) доводи до једнога таквог интеграла, па према томе:

Кад су корени алгебарске једначине сви йросши, диференцијална једначина (265) *има* m *иншеграла који за* $x=0$ *добијају вредносш* $y=0$, *и од којих се сваки може развиши у йо један ред* (269) *конвергеншан у одређеном кругу у равни* x.

Претпоставимо сад да једначина (267) има вишеструких корена, и нека је $\lambda = \alpha$ један такав корен p-тога реда. Да би тако било, потребно је и довољно да за $\lambda = \alpha$ буде

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\lambda^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^{p-1}\Phi}{d\lambda^{p-1}} = 0.$$

Диференцијална једначина (265) тада има једно решење (268) по изводу y', у коме ће пар вредности $x=0$, $y=0$ бити један пар алгебарских критичких тачака p-тога реда за одговарајућу функцију $f(x,y)$, па дакле ће вредност $x=0$ бити алгебарска критичка тачка p-тога реда за извод y', а према томе и за сам одговарајући интеграл y. Овај се, дакле, *може развиши у ред уређен йо сшейенима израза* $\sqrt[p]{x}$ *који ће биши конвергеншан у одређеном кругу у равни* x.

Свакоме вишеструком корену алгебарске једначине (267) одговараће по један интеграл y такве врсте за диференцијалну једначину (265). И као што се види, *облик реда у који се може развиши иншеграл, зависи од йрироде корена једначине*

(267), *тј. од тога да ли су ти корени прости или вишеструки, и кога су они реда.*

Изузетак се јавља само онда кад функција $f(x, y)$ за $x=0$, $y=0$ добија бескрајно велику вредност, или се појави у облику $\frac{0}{0}$. У таквим случајевима треба одговарајућу једначину (268) проучити на напред наведени начин.

XVI. Практично упуство за интеграцију диференцијалне једначине првога реда у облику редова.

Из целокупног досадашњег излагања може се, као крајњи резултат, извући ово опште практично упуство које решава проблем интеграције диференцијалне једначине првога реда у облику ограничених или неограничених редова:

Претпоставиће се да је једначина решена по изводу y', тј. да је написана у облику

$$y'=f(x, y) \tag{270}$$

па да се тражи онај њен партикуларни интеграл који за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$, где су x_0 и y_0 две унапред произвољно дате коначне вредности.

Сменом

$$\xi=x+x_0\,, \qquad \eta=y+y_0$$

једначина (270) своди се на другу

$$\eta'=\varphi(\xi, \eta)$$

чији одговарајући партикуларни интеграл η треба да за $\xi=0$ добије вредност $\eta=0$.

Кад је вредност x_0 бескрајна, треба извршити смену

$$x=\frac{1}{\xi}\ ;$$

кад је вредност y_0 бескрајна извршиће се смена

$$y=\frac{1}{\eta}\ ;$$

а кад су обе те вредности бескрајне, треба извршити обе смене

$$y=\frac{1}{\xi}\,, \qquad y=\frac{1}{\eta}\ .$$

Озде ће бити претпостављено да су такве смене већ извршене и да је (270) добијена једначина чији интеграл y за $x=0$ треба да добије вредност $y=0$.

Разликујмо тада ове случајеве:

Први случај: нека је функција $f(x, y)$ холоморфна за $x=0, y=0$, па ће се на диференцијалну једначину (270) применити основна Briot-Bouquet-ова теорема, по којој ће се интеграл y имати у облику ограниченог или неограниченог реда облика

$$y=a_1\,x+a_2\,x^2+a_3\,x^3+\cdots \tag{271}$$

где се коефицијенти $a_1, a_2, a_3, \ldots$ израчунавају по упуству те теореме (в. I. одељак). Нађени ред ће бити конвергентан за вредности x што се налазе у кругу описаном у равни x око тачке $x=0$ са полупречником

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{2Mr}}\right)$$

где су r и r' полупречници два таква круга (једнога c у равни x, другога c' у равни y) да је функција $f(x, y)$ холоморфна за све вредности x у кругу c и за све вредности y у кругу c'; M је ма какав реалан и позитиван број од кога модуо функције $f(x, y)$ никако није већи па ма где се налазиле вредности x и y у својим круговима c и c'. Вредности r, r', M, потребне за одређивање полупречника R, одређују се по упуству садржаном у I одељку.

Тако добијен интеграл (271) једини је холоморфан интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$. Он се, уосталом, у појединим специјалним случајевима своди и на тривијални интеграл y идентички $=0$, који се има сматрати као специјалан случај реда (271), као случај у коме је

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0\,.$$

Тако исто, у појединим случајевима сви коефицијенти a_n, почевши од једног одређеног ранга p, могу бити једнаки нули; ред се тада своди на ограничен број чланова, т. ј. на полином

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{p-1} x^{p-1}\,.$$

Други случај: нека функција $f(x, y)$ добије бескрајно велику вредност за $x=0\,, y=0$, али тако да је њена реципрочна функција

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

холоморфна за те вредности x и y.

Кад се функција $\varphi(x, y)$ развије у ред по степенима промењљиве x, тако да је

$$\varphi(x, y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

коефицијенти $A_0\,, A_1\,, A_2\,, \ldots$ могу бити или сталне количине, или функције промењљиве y, холоморфне за $y=0$.

Облик реда у који се може развити интеграл који за $x=0$ постаје $y=0$, зависи једино од коефицијента A_0, и то на овај начин:

1° кад је идентички $A_0 = 0$, не постоји ни један интеграл који за $x=0$ добија вредност $y=0$;

2° кад A_1 није идентички $=0$, он не може бити константа, већ само каква функција промењљиве y која се може развити у ред облика

$$A_0 = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \cdots$$

Тај ред може почињати са чланом који садржи y на првом, другом и т. д. степену; нека је m најнижи степен промењљиве y у томе реду. Тада се интеграл може развити у ред уређен по степенима израза $\sqrt[m+1]{x}$

$$(272)\qquad y = a_1 \sqrt[m+1]{x} + a_1 \left(\sqrt[m+1]{x}\right)^2 + a_2 \left(\sqrt[m+1]{x}\right)^3 + \cdots$$

и вредност $x=0$ је алгебарска критичка тачка $(m+1)$-ог реда за интеграл.

Коефицијенти и круг конвергенције реда одређују се применом основне Briot-Bouquet-ове теореме на извесну једначину облика

$$\frac{du}{dt} = \varphi(t, u)$$

која је у вези са једначином (270) и у којој је φ холоморфна функција промењљивих t и u за вредности $t=0$, $u=0$; то је једначина (185) проучена у XIII одељку.

Интеграл (272) је једини интеграл једначине (270) који за $x=0$ добија вредност $y=0$. И он се у појединим специјалним случајевима може свести на тривијалан интеграл y идентички $=0$, или на полином по изразу $\sqrt[m+1]{x}$.

Трећи случај: нека функција $f(x, y)$ за $x=0$, $y=0$ добије неодређену вредност $\frac{0}{0}$. Напишимо је тада у облику

$$(273)\qquad \psi(x, y)\, y' = \varphi(x, y)$$

где су φ и ψ холоморфне функције промењљивих x и y за $x=0\,, y=0$, које постају обе једнаке нули за те вредности x и y.

Одредимо најпре инфинитезимални ред μ интеграла y, по упуствима изложеним у XIV одељку под A), па уочимо један од тако добијених рационалних бројева μ (кад их буде више од једнога, са сваким од њих треба урадити све оно што будемо урадили са једним од њих). Сваки тако одређени број μ биће облика

$$\mu = \frac{p}{q}$$

где су p и q два цела броја.

Извршимо у једначини (273) смену

$$(274)\qquad x = t^q \qquad y = v t^p$$

где је t нова независно промењљива, а v нова непозната функција. Доказује се [XIV одељак под B)] да v има за $t=0$ коначну и од нуле различну вредност λ; ова ће бити корен извесне једначине

$$\Phi(\lambda)=0$$

која се добија кад се у једначини (273) изврши смена (274), па се по том у њој стави да је $v=0$ (чланови са изводом v' тиме отпадају из једначине, јер у овој увек поред тога извода стоји као чинилац који степен променљиве t).

Израчунајмо корене

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$$

те једначине и уочимо један, који било од њих (са сваким од њих треба урадити оно исто што будемо урадили са тим првим); нека је то λ_1, па извршимо нову смену

$$v=\lambda_1+w$$

где је w нова непозната функција. Кад се у новој тако добијеној једначини скрати све што се може, па се једначина реши по изразу $t\dfrac{dw}{dt}$, и десна страна тако добијеног решења развије по степенима променљивих t и w, добија се дефинитивна редукована једначина облика

$$t\frac{dw}{dt}=aw+bt+\cdots \tag{275}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и w (ако таквих чланова уопште има).

Проблем је на тај начин сведен на одређивање реда у који се може развити интеграл w једначине (275) који за $t=0$ добија вредност $w=0$. Облик реда ће зависити поглавито од коефицијента a, а тај коефицијенат није ништа друго до вредност коју добија за $t=0$, $w=0$ први парцијални извод десне стране једначине (275) по променљивој w. Сам начин зависности облика реда од броја a исказан је у овим правилима:

1° Кад је реални део броја a реалан и негативан или једнак нули, интеграл w може се развити у ред по степенима променљиве t, а то је тада једини интеграл једначине који за $t=0$ добија вредност $w=0$. Коефицијенти реда и његов круг конвергенције одређују се по упуству датом у XIV одељку под C).

2° Кад је реални део броја a позитиван, али a није цео позитиван број, једначина има један интеграл w који се може развити по степенима променљиве t, али поред њега постоји још бескрајно много интеграла w који задовољавају услов да за $t=0$ постају $w=0$, а сваки се од њих може развити у ред уређен по степенима променљивих t и t^a.

3° Кад је a какав цео позитиван број, не постоји ниједан интеграл w који би се могао развити у ред по степенима променљиве t (са условом $t=0$, $w=0$), али постоји бескрајно много интеграла (са тим условом), који се могу развити у ред по степенима израза t и $\log t$.

Изузетни случајеви. Примењујући ова правила за случајеве кад се за почетне вредности $x=0$, $y=0$ десна страна диференцијалне једначине јавља у облику $\frac{0}{0}$, може се наићи на изузетне случајеве у којима та правила не важе. Поглавити случајеви такве врсте били би ови:

I. Може се десити да се једначина, која одређује инфинитезимални ред μ интеграла y своди на идентичност. Тада μ може бити и ирационалан број, а вредност $x=0$ може бити трансцендентан сингуларитет интеграла y. За такав случај не постоји никаква општа метода за одредбу интеграла y који за $x=0$ добија вредност $y=0$.

II. Кад се буде нашло да је

$$\mu=\frac{p}{q}$$

где су p и q два цела броја, па се изврши смена

$$z=t^{\frac{1}{q}}, \qquad u=vt^{p}$$

добија се за $t=0$ једначина

$$\Phi(\lambda) = 0$$

где λ означава вредност коју добија v за $t=0$. Ова је једначина облика

$$p(A_{\beta'\alpha'}\lambda^{\alpha'} + \cdots) = q(B_{\beta\alpha}\lambda^{\alpha} + \cdots)$$

па се може десити да њен уочени корен λ поништава посебице и једну и другу заграду. Тада ће се, као што је показано, нова диференцијална једначина са променљивима t и v, јавити у облику

$$t\frac{dv}{dt} = \frac{gt + hv + \cdots}{g't + h'v + \cdots}$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и v. Ако се изврши поновна смена

$$gt + hv = tu$$

(где је u нова непозната функција), па се скрати све што се може, и реши једначина по изразу

$$t^2\frac{du}{dt}$$

једначина ће се, пошто се њена десна страна развије по степенима променљивих t и u јавити у облику

$$t^2\frac{du}{dt} = \alpha u + \beta t + \cdots$$

где неисписани чланови садрже више степене променљивих t и u. Вредност $t=0$ тада је уопште есенцијални сингуларитет интеграла y.

У још изузетнијим случајевима (напред наведеним) диференцијална једначина се сличним сменама своди на облик

$$t^m\frac{du}{dt} = au + bt + \cdots$$

где је m какав цео позитиван број.

Четврти случај: нека је пар вредности $x=0$, $y=0$ један пар алгебарских критичких сингуларитета функције $f(x, y)$. Тада је $x=0$ такође алгебарска критичка тачка интеграла y који за $x=0$ добија вредност $y=0$. Интеграл се може развити у ред облика

$$y = a_1\left(\sqrt[p]{x}\right) + a_2\left(\sqrt[p]{x}\right)^2 + a_3\left(\sqrt[p]{x}\right)^3 + \cdots$$

где је p цео број већи од јединице, који се увек може одредити. Сменом

$$x = t^p$$

интеграл y постаје холоморфна функција променљиве t, па се коефицијенти $a_1, a_2, a_3 \ldots$ могу израчунавати по општем обрасцу

$$a_n = \frac{1}{n!}[y^{(n)}]$$

где се вредности

$$y', y'', y''' \ldots$$

израчунавају из саме диференцијалне једначине и оних које се добијају њеним узастопним диференцијалењима.

Кад је, према свему томе, на тај начин нађен у облику реда интеграл y, који за $x=0$ добија вредност $y=0$, треба се обрнутим путем, помоћу дотле учињених смена променљивих количина, вратити на првобитне променљиве x и y. А ако се тражило да се нађе интеграл y који за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$, онда се одговарајућом сменом напред поменуте врсте треба вратити на првобитну диференцијалну једначину.

XVII. Коефицијенат a_n интегралног реда као функција свога ранга n.

Ретки су случајеви кад се коефицијенат a_n интегралног реда

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

дате диференцијалне једначине може одредити као експлицитна функција свога ранга n, па да се тако у облику једнога општег обрасца имају сви коефицијенти a_n.

Такав је, н. пр. случај са једначином

$$y' = \alpha y + \beta$$

за коју је

$$a_n = \frac{\beta\alpha^{n-1}}{n!}$$

или једначином

$$y' = \frac{1}{2}(y - x + 1)^3 + 1$$

за коју је

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}\,.$$

У општем случају коефицијенти се израчунавају поступно, један из другог, било по методи неодређених коефицијената, која доводи до рекурсивне релације између једнога низа узастопних коефицијената, или, као што је показано у XX одељку, помоћу обрасца

$$a_n = \frac{1}{n!}\,[f_{n-m}] \qquad (n = m, m+1, m+2\ldots)$$

(где је m ред диференцијалне једначине) који своди израчунавање коефицијената на одредбу низа функција f_k везаних напред наведеном рекурсивном диференцијалном релацијом.

Али у сваком случају познате су неке опште особине коефицијената a_n везаних за опште облике диференцијалних једначина, а које се могу сазнати без потребе да једначина буде интеграљена, т. ј. без потребе да се зна тачан аналитички израз тих коефицијената. Такве су особине изражене.

1^0 у неједначинама што се односе на коефицијенат a_n сматран као функција свога ранга n;

2^0 у ставовима што се односе на брзину рашћења или опадања коефицијената кад им ранг n бескрајно расте;

3^0 у ставовима што се односе на аритметичке особине коефицијената.

Ставови под 3^0 биће предмет XXIII одељка ове књиге; у овоме ће одељку бити речи о ставовима под 2^0 и 3^0.

I.

Кад каква једначина

$$v' = \varphi(x, v) \tag{276}$$

има особине које се траже за компаративну једначину дате диференцијалне једначине

$$y' = f(x, y) \tag{277}$$

или каквога система (који се, као што ће бити показано, увек своди на систем симултаних једначина првога реда) онда, ако се са b_n означи општи коефицијенат интегралног реда

$$v = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots \tag{278}$$

једначине (276), а општи интеграл дате једначине (277) гласи

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots, \tag{279}$$

за коефицијенте оба реда важиће општа неједначина

$$|a_n| < b_n\,.$$

А у толико пре, кад се за b_n може познавати каква неједначина

$$b_n < c_n\,,$$

важиће за a_n неједначина

$$|a_n| < c_n.$$

Тако, Cauchy-ева општа компаративна једначина

$$(280)\qquad v' = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)}$$

има као интеграл који за $x=0$ добија вредност $v=0$, функцију

$$v=r'-\sqrt{r'^2-2rr'\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}$$

холоморфну у одређеном кругу описаном око $x=0$ у равни x.

Самим тиме што постоји такав холоморфни интеграл компаративне једначине (280), зна се, према Cauchy-евој неједначини, да за ред (278) важи неједначина

$$b_n < \frac{A}{r^n}$$

где A означава какав позитиван број који није премашен од модула функције v док x остаје у кругу полупречника r у равни x, у коме је десна страна једначине (277) холоморфна. Према томе:

Општи коефицијенат a_n интегралног реда (279) једначине (277) задовољава за све вредности n неједначину

$$(281)\qquad |a_n| < \frac{A}{r^n}\ .$$

Та неједначина не претпоставља ништа друго о функцији $f(x,y)$ осим то да је она холоморфна за почетне вредности $x=0, y=0$. Међутим, кад се о тој функцији зна још шта ближе, могу се имати и ниже, па дакле пробитачније границе за тај коефицијенат. До таквих граница доводе, на пример, специјалније компаративне једначине, али чије искоришћавање захтева још и суплементарне претпоставке или о самој функцији $f(x,y)$, или о интегралу y.

Тако, као што је напред показано, кад је коефицијенат двоструког реда

$$f(x,y)=\sum\sum A_{mn}\, x^m\, y^n$$

такав да израз

$$m!\, n!\, |A_{mn}|$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n, *модуо коефицијента a_n интегралног реда мањи је но коефицијенат b_n функције*

$$v=-\log\left[1-A\left(e^x-1\right)\right]$$

као интеграла компаративне једначине

$$v'=A\, e^{x+v}\ ,\qquad A>0\ .$$

Тако исто, кад израз

$$\frac{|A_{mn}|}{(m+1)(n+1)}$$

остаје коначан при бескрајном рашћењу индекса m и n, *модуо коефицијента a_n мањи је од коефицијента b_n функције*

$$v=1-\sqrt[3]{\frac{1-Ax}{1-x}}\,,\qquad A>1\ ,$$

као интеграла компаративне једначине

$$v'=\frac{\alpha}{(1-x)^2\,(1-v)^2}\ .$$

Разне друге компаративне једначине, везане за претпоставке о начину рашћења или опадања коефицијента A_{mn} функције $f(x,y)$ при рашћењу индекса m и n, доводе до разних других горњих граница за модуо коефицијента a_n.

Али до таквих горњих граница може се доћи и чинећи претпоставке о самоме интегралу y једначине (277), као функције променљиве x. Једна врло општа таква граница, која важи за општу алгебарску диференцијалну једначину првога реда

$$(282)\qquad f(x,y,y')=0$$

(где се увек, не умањујући генералност, може сматрати да је f несводљив полином по x, y, y') добија се применом једне теореме коју је доказао Lindelöf у погледу горње границе за ма који реални интеграл y једначине (282), при рашћењу променљиве x у реалном позитивном правцу. Теорема гласи:

Почевши од једне довољно велике позитивне вредности x, вредност интеграла y никако не премаша вредност функције

$$(283) \qquad \lambda(x) = e^{\alpha x^{m+1}}$$

где је m степен полинома f по x, а α позитивна константа која се може израчунати из саме диференцијалне једначине.

Lindelöf је дао и начин за израчунавање константе α; њена вредност, смењена у $\lambda(x)$, одређује величину горње границе *ма кога* реалног интеграла једначине (282). Та граница може бити и стварно достигнута у појединим специјалним случајевима, што се види на примеру једначине

$$(284) \qquad y' - (m+1)\, x^m y = 0 \;,$$

чији је општи интеграл

$$y = C e^{x^{m+1}} .$$

Уочимо сад оне интеграле y једначине (282) који су *целе функције променљиве x чији су коефицијенти a_n сви реални позитивни бројеви.*

Пошто су x, α, a_n позитивни, то је

$$x = |x| = r \qquad y = |y| = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots$$

па ће према горњој теореми бити за довољно велике вредности x непрестано

$$(285) \qquad |y| < e^{\alpha r^{m+1}}$$

што значи да израз

$$|y|\, e^{-\alpha r^{m+1}}$$

не постаје бескрајно велики кад r бескрајно расте. Постоји, дакле, један коначан позитиван број A такав да је за све вредности x непрестано

$$|y|\, e^{-\alpha r^{m+1}} < A \;,$$

што значи да је за све вредности x

$$(286) \qquad |y| < A\, e^{\alpha r^{m+1}} .$$

Према општој Cauchy-евој неједначини за $|a_n|$ биће тада

$$(287) \qquad |a_n| < \frac{|y|}{r^n} < A\, \frac{e^{\alpha r^{m+1}}}{r^n} .$$

Пошто је y по претпоставци цела функција, може се полупречнику r дати каква се хоће вредност од 0 до $+\infty$. Израз на десној страни неједначине (287) достиже свој минимум за

$$r = \gamma n^{\lambda}$$

где су γ и λ рационални бројеви

$$\gamma = \left[\frac{1}{(m+1)\alpha}\right]^{\frac{1}{m+1}}, \qquad \lambda = \frac{1}{m+1} .$$

За саму вредност тога минимума налази се да је она

$$A\, \frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}$$

где је β константа

$$\beta = [(m+1)\, e\alpha]^{\lambda}$$

а из тога се види *да је за уочене интеграле y*

$$(288) \qquad a_n = |a_n| < A\, \frac{\beta^n}{n^{\lambda n}} .$$

Из тога се закључка могу извести разноврсне појединости за целе функције са позитивним коефицијентима a_n, које задовољавају какву алгебарску диференцијалну једначину првог реда. Тако:

I. *За све позитивне вредности x интеграл не премаша вредност специјалне целе функције*

$$(289) \qquad \varphi(x) = A \sum_{n=0}^{\infty} n^{-\lambda n} \beta^n x^n.$$

Јер према неједначини (288), а пошто су a_n и x позитивни, мора бити и

$$y < \varphi(x).$$

II. *Узастопне нуле $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ интеграла y не расту, при рашћењу свога ранга n, спорије но што расте вредност n^λ.*

Јер, према неједначини (288), вредност $\sqrt[n]{|a_n|}$ не опада спорије од вредности $n^{-\lambda}$, и према томе $|a_n|^{-\frac{1}{n}}$ не расте спорије од n^λ. А према једној теореми коју је доказао Hadamard, за целе функције уопште, модуо n-те нуле α_n такве једне функције расте брже, при рашћењу њеног ранга n, него што расти израз $|a_n^{-\frac{1}{n}}|$. Па пошто тај израз не расте спорије од n^λ, тако ће исто бити и са нулом α_n.

III. *Кад год интеграл y, израчунат у облику реда са позитивним коефицијентима a_n, претставља какву целу функцију променљиве x, врста те функције је један од бројева*

$$0, 1, 2, \ldots, (m+1).$$

То је последица неједначине (286) и става који је доказао Hadamard за целе функције уопште, да кад је модуо једне такве функције мањи од вредности израза

$$e^{\alpha r^p}, \qquad r = |x|,$$

где је α каква позитивна константа, врста функције не премаша број p.

Од интереса је напоменути да став III не важи и за интеграле алгебарских диференцијалних једначина вишега реда; то се може видети на примеру једначине другога реда

$$yy'' - y'^2 - yy' = 0$$

која има, као једну класу својих партикуларних интеграла, целе функције

$$y = Ce^{e^x}, \qquad C > 0.$$

Пошто су сви изводи функције y позитивни за $x=0$, то су и сви њени коефицијенти a_n позитивни; међутим y је цела функција бескрајне врсте.

Исто се види и на примеру интегралног реда који изражава целу функцију

$$y = e^{e^x} P(x)$$

где је P какав полином чији су коефицијенти сви позитивни; таква функција задовољава једну алгебарску диференцијалну једначину другога реда, а међутим њена је врста бескрајна.

А тако исто треба приметити и то, да целе функције, о каквима је реч, а које су интеграли алгебарских диференцијалних једначина, *могу бити ма које коначне врсте.* То се види на примеру једначине првог реда

$$y'^2 + p^2(1-y^2)\, x^{2(p-1)} = 0$$

($p=$ цео позитиван број), која има за партикуларни интеграл

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x^p} + e^{-x^p}\right) = \cos(ix^p) = 1 + \frac{x^{2p}}{2!} + \frac{x^{4p}}{4!} + \frac{x^{6p}}{6!} + \cdots$$

Нека је, напослетку, наведено и то да горња граница $m+1$ за врсту интеграла y бива и стварно достигнута у поједнним специјалним случајевима, као што је то н. пр. за диференцијалну једначину (284) чији је општи интеграл цела функција $(m+1)$-те врсте

Ставу III може се дати и овај облик:

IV. *Кад год какав ред*

$$(290) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

који изражава интеграл какве алгебарске диференцијалне једначине првог реда, има своје коефицијенте a_n позитивне, а претставља какву целу функцију променљиве x, степен диференци-

јалне једначине по x никад није мањи од врсте те целе функције, смањене за јединицу

II.

Посматрајмо сад случај кад интегрални ред (290) какве алгебарске диференцијалне једначине првог реда *има све своје коефицијенте a_n једнаке позитивним рационалним бројевима*, а претставља какву *целу функцију* променљиве x.

Такав случај наступа, на пример, за диференцијалну једначину облика

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x\ y)} \tag{291}$$

где су P и Q полиноми по x и y чији су коефицијенти позитивни рационални бројеви, са условом да буде

$$Q(0, 0) \neq 0.$$

Сви узастопни изводи интеграла y, добијени узастопним диференцијаљењима једначине (291), биће рационалне функције променљивих x и y, које ће све имати као именилац одређен степен полинома Q. Кад се у њима стави $x=0$, $y=0$ и резултат подели са одговарајућим факторијелом $n!$, добија се коефицијенат a_n као позитиван рационалан број. Само треба још додати и то да, према једној познатој теореми из аналитичке теорије диференцијалних једначина првог реда, између свију једначина облика (291), једина чији *општи* интеграл може бити цела функција, је линеарна једначина

$$y' = f(x)\, y + \varphi(x)$$

где су f и φ полиноми по x. Међутим, и друге једначине облика (291) могу имати *партикуларних* интеграла који су целе функције.

На све једначине

$$f(x, y, y') = 0 \tag{292}$$

(f несводљив полином по x, y, y') чији интеграл има коефицијенте a_n позитивне и рационалне, а претставља какву целу функцију, примењују се непосредно сви ставови из прошлог параграфа.

На пример, ранији став даје једну горњу границу интеграла y, изражавајући да за позитивне вредности x функција никад не премаша вредност

$$A e_{ax}^{\ m+1}.$$

Али, поред тако одређене *горње* границе коју интеграл не може *премашити*, може се поставити и једна *доња* граница коју он никад не може *подбацити* за такве вредности x. Шта више, тако нађена доња граница важиће и за интеграле опште алгебарске диференцијалне једначине ма кога коначног реда p

$$F(x, y, y', \ldots y^{(p)}) = 0. \tag{293}$$

Да би се одредила таква једна доња граница, примениќемо на интеграл y једну теорему коју је доказао Polya за интеграле једначине (293). Теорема гласи:

За сваки интеграл y једначине (293) који се изражава у облику реда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

чији су коефицијенти рационални бројеви, а који је конвергентан за све вредности x у равни променљиве x, израз

$$\frac{|\log a_n|}{n(\log n)^2}$$

не тежи граници $-\infty$ при бескрајном рашћењу броја n.

Пошто је у овде посматраном случају коефицијенат a_n реалан, позитиван и тежи нули кад n бескрајно расти (јер је интеграл y цела функција са реалним позитивним коефицијентима a_n), теорема доводи до закључка да израз

$$-\frac{\log a_n}{n(\log n)^2} = \frac{\log \dfrac{1}{a_n}}{n(\log n)^2}$$

остаје, за све довољно велике вредности n, мањи од једнога коначног позитивног броја h. Из тога излази да је за сваку вредност

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

непрестано

$$a_n > e^{-hn(\log n)^2}. \tag{294}$$

Интеграл y посматране аналитичке природе за све позитивне вредности x премаша вредност специјалне целе функције

$$\mu(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-hn(\log n)^2} x^n. \tag{295}$$

Неједначине (288) и (294) постављају границе могућним варијацијама коефицијената a_n и њиховом начину опадања при бескрајном рашћењу њиховог ранга n. Тако

1° Једначина (288) ограничава брзину опадања коефицијента a_n у томе смислу што према њој a_n *опада брже него израз*

$$\frac{\beta^n}{n^{\lambda n}}$$

или, што је исто, него израз

$$\frac{1}{n^{\lambda n}} = e^{-\lambda n \log n};$$

пошто сменом $x = \dfrac{t}{\beta}$ нестаје фактора β^n у изразу за a_n.

2° неједначина (294) ограничава брзину опадања коефицијената a_n у томе смислу што према њој a_n *опада спорије него израз*

$$e^{-hn(\log n)^2}.$$

Као што се види:

Низ коефицијената a_n $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ *не може опадати ни сувише споро, ни сувише брзо, већ најспорије онако, како опада израз* $e^{-\lambda n \log n}$, *а најбрже онако како опада израз* $e^{-hn(\log n)^2}$.

XIX. Системи симултаних једначина првога реда.

Cauchy-ева компаративна метода примењује се, не само на обичне диференцијалне једначине, већ и на системе симултаних једначина. Овде ће бити у томе погледу проучен систем облика

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{296}$$

где су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непознате функције независно променљиве количине x, везане међу собом системом од n диференцијалних једначина првога реда (296).

Претпоставимо да је свака од датих функција

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \tag{297}$$

холоморфна функција променљиве x у једноме кругу полупречника r, описаном око тачке $x=0$ у равни променљиве x, као и холоморфна функција променљивих

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{298}$$

у близини вредности

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0, \tag{299}$$

тј. у по једноме кругу описаном око тих вредности у равни сваке од тих n променљивих.

Означимо са r' полупречник најмањега од тих n кругова, а са M један број такав да га не премаша модуо ни једне од n функција (297) док променљиве остају у својим круговима полупречника r и r', тј. такав да је за све такве вредности променљивих непрестано

$$|f_1| \leqslant M, \quad |f_2| \leqslant M, \ldots, |f_n| \leqslant M. \tag{300}$$

Формирајмо функцију $n+1$ променљивих количина

$$(301)\quad \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{r'}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{r'}\right)}$$

па упоредимо интеграле система (296) са интегралима система

$$(302)\quad \begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n)\,, \\ \frac{dv_2}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dv_n}{dx} &= \varphi(x, v_1, v_2, \ldots, v_n)\,. \end{aligned}$$

Узастопним диференцијалењима једначина (296) по x и сменама извода

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$$

њиховим вредностима из једначина (296) добија се један систем једначина које изражавају узастопне више изводе функција

$$(303)\quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

као функције променљивих x и (303).

Тако исто, поступним диференцијалењима једначине (302) по x и сменама извода

$$(304)\quad \frac{dv_1}{dx}, \frac{dv_2}{dx}, \ldots, \frac{dv_n}{dx}$$

њиховим вредностима из једначина (302) добија се систем једначина које изражавају узастопне више изводе функција

$$(305)\quad v_1, v_2, \ldots, v_n$$

као функције променљивих x и (305).

На тај начин добијени изводи функција y_k и функција v_k имају исту структуру и изражавају се, сваки извод, као збир сабирака који су производи разних степена функција (297), односно функције φ, и њихових парцијалних извода по променљивима x и (303), односно x и (305).

Међутим, на исти начин као и за обичну диференцијалну једначину првога реда, који је напред изложен, уверавамо се да је модуо свакога парцијалног извода ма које од функција (297) мањи од одговарајућег парцијалног извода функције φ. То ће тада важити и за вредности које ти изводи добијају за

$$(306)\quad \begin{aligned} &x=0\,,\ y_1=0\,,\ y_2=0\,, \ldots, y_n=0\,, \\ &x=0\,,\ v_1=0\,,\ v_2=0\,, \ldots, v_n=0\,, \end{aligned}$$

па ће, према неједначинама (300) и једначини (301) то исто важити и за вредности самих функција (297) и функције φ. Биће дакле

$$|f_k(0, 0, 0 \ldots 0)| < \varphi(0, 0, 0 \ldots 0)\,,$$

$$\left|\frac{\partial^{m+n+p+\cdots}}{\partial x^m\, \partial y_1^n\, \partial y_2^p \cdots} f_k(0, 0 \ldots 0)\right| < \frac{\partial^{m+n+p+\cdots}}{\partial x^m\, \partial v_1^n\, \partial v_2^p \cdots} \varphi(0, 0, \ldots 0)\,,$$

а из тога се, као и у ранијем случају обичне диференцијалне једначине првога реда, закључује да, ако се са α_k^i означи вредност коју добија i-ти извод функције y_k по x за $x=0$, а са β_k^i вредност коју добија i-ти извод функције v_k по x, увек ће бити

$$(307)\quad |\alpha_k^i| < \beta_k^i\,,$$

при чему треба имати у виду да су све вредности β_k^i, добијене на такав начин, очевидно реалне и позитивне; то следује из саме структуре извода (304) и чињенице коју је лако проверити да функција φ, дефинисана једначином (301), и сви њени парцијални изводи, имају за

$$(308)\quad x=0\,,\quad v_1=0\,,\quad v_2=0\,, \ldots, v_n=0$$

реалне и позитивне вредности.

Претпоставимо, за један тренутак, да систем (296) има као своје формално решење један систем вредности (303) изражен у облику Maclaurin-ових редова који за $x=0$ дају $y_k=0$

$$
(309)\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= a_1^1 x + a_1^2 x^2 + a_1^3 x^3 + \cdots ,\\
y_2 &= a_2^1 x + a_2^2 x^2 + a_2^3 x^3 + \cdots ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n &= a_n^1 x + a_n^2 x^2 + a_n^3 x^3 + \cdots ,
\end{aligned}
$$

а да, тако исто и систем (302) има као формално решење један систем вредности (305) изражен у облику редова који за $x=0$ дају $v_k=0$

$$
(310)\qquad
\begin{aligned}
v_1 &= b_1^1 x + b_1^2 x^2 + b_1^3 x^3 + \cdots ,\\
v_2 &= b_2^1 x + b_2^2 x^2 + b_2^3 x^3 + \cdots ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n &= b_n^1 x + b_n^2 x^2 + b_n^3 x^3 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Пошто је

$$a_k^i = \frac{\alpha_k^i}{k!}, \qquad b_k^i = \frac{\beta_k^i}{k!},$$

то је према неједначини (307)

$$|a_k^i| < b_k^i$$

што значи да је коефицијенат од x^n сваке од функција y_k мањи од коефицијента од x^n функције v_k. Ако је, дакле, сваки од редова (310) конвергентан за вредности x у једноме кругу C_k описаном у равни x око тачке $x=0$, у томе ће кругу насигурно бити конвергентан и одговарајући ред (309) истога ранга k.

Међутим, систем (302) је могућно интегралити и одредити кругове C_k свакога његовог интеграла v_k. Из једначина (302) се види да је за произвољне вредности промењљивих x и v_k

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} = \cdots = \frac{dv_n}{dx}$$

одакле је

$$v_2 = v_1 + C_1, \quad v_3 = v_1 + C_2, \cdots , v_n = v_1 + C_n$$

где су $C_1, C_2, \cdots, C_n$ интеграционе константе. Па пошто за $x=0$ свако v_k треба да је једнако нули, добија се да је за произвољне вредности x

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_n .$$

Систем (302) се тада своди на једну једину једначину

$$\frac{dv}{dx} = \varphi(x, v, v, \ldots, v)$$

тј., према (301), на обичну диференцијалну једначину првога реда

$$\frac{dv}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{v}{r'}\right)^n} .$$

Кад се ова напише у облику

$$\left(1-\frac{v}{r'}\right)^n dv = \frac{M}{1-\frac{x}{r}}\, dx$$

добија се интеграцијом

$$\frac{r'}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{v}{r'}\right)^{n+1}\right] = -Mr \log\left(1-\frac{x}{r}\right)$$

одакле се налази да интеграл v, који за $x=0$ добија вредност $v=0$, има за израз

$$v = r'\left[1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{(n+1)Mr}{r'} \log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\,\right].$$

Тај је интеграл v холоморфна функција промењљиве x у близини вредности $x=0$, јер сингуларитети функције произлазе само од једначине

$$1 + \frac{(n+1)Mr}{r'} \log\left(1-\frac{x}{r}\right) = 0 .$$

Та једначина, решена по x, има само један корен, и то

$$x = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right).$$

Та је вредност једини сингуларитет функције v, и према томе та ће функција бити холоморфна докле год x остаје у кругу C описаном око тачке $x=0$ са полупречником

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right)$$

Пошто је функција v холоморфна у томе кругу C, она се може развити у ред

(311) $$v=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

па пошто су све функције v_k једнаке међу собом и са функцијом v, свака се од њих може развити у исти ред (311) са истим кругом конвергенције C. А кад је то случај, према ономе што је малочас казано, биће у томе истоме кругу C конвергентни и сви редови (309) који дају формално решење у проблему интеграције система (296). А такво формално решење постоји: то је оно што се добија кад се коефицијентима a_k^i у обрасцима (309) даду вредности

$$a_k^i=\frac{\alpha_k^i}{k!}$$

На тај начин се долази до овога резултата за систем (296): Нека је дат систем

$$\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,\ldots,y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_n}{dx}=f_n(x,y_1,\ldots,y_n),$$

где је свака од функција $f_1,\ldots,f_n$ холоморфна функција променљиве x у кругу полупречника r описаном око тачке $x=0$ у равни x, и тако исто холоморфна функција променљивих $y_1,\ldots,y_n$ у свакоме од кругова полупречника r' описаних око тачака $y_1=0,\ldots,y_k=0$ у равнима тих променљивих. Означимо са M један број такав да га не премаша модуо ни једне од n функција $f_1,\ldots,f_n$ док свака од променљивих остаје у своме кругу, па је у овоме што претходи доказана ова *основна теорема* за интеграцију система (296) помоћу редова облика

(312) $$y_k=a_k^1x+a_k^2x^2+a_k^3x^3+\cdots$$

Свака се непозната функција $y_1,\ldots,y_n$, као интеграл система (296) *који за $x=0$ добија вредност $y_k=0$, може развити у ред облика* (312), *који ће насигурно конвергирати за све вредности x у кругу описаном око $x=0$ са полупречником*

$$R=r\left(1-e^{-\frac{r'}{(n+1)Mr}}\right).$$

Очевидно је да та теорема и проширује на системе симултаних једначина основну Briot-Bouquet-ову теорему за случај обичних диференцијалних једначина првога реда, на коју се она своди у случају кад је $n=1$.

Теорема је, као што се види, изведена употребом компаративних једначина за сваку од једначина степена (296) а свака од њих има облик Cauchy-еве компаративне једначине за диференцијалну једначину првога реда. Међутим, као и за ову, могу се, под нарочитим претпоставкама за функције $f_1,\ldots,f_n$, употребити и друге, специјалније компаративне једначине, које важе само за такве случајеве.

Тако н. пр. кад се свака од функција $f_1,\ldots,f_n$ развије у двоструки ред по степенима променљивих

(313) $$x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,$$

тако да је систем (296) написан у облику

(314)
$$\frac{dy_1}{dx}=f_1=\Sigma A^1_{m,p\ldots}\,x^my_1^p\cdots y_n^s,$$
$$\frac{dy_2}{dx}=f_2=\Sigma A^2_{m,p\ldots}\,x^my_1^p\cdots y_n^s,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dy_n}{dx}=f_n=\Sigma A^n_{m,p\ldots}\,x^my_1^p\cdots y_n^s,$$

онда, ако су сви коефицијенти A реални и позитивни и такви да израз

$$m!\,p!\ldots A^{i}_{m,p\ldots}$$

монотоно расте при рашћењу индекса $m, p \ldots$, *за сваку од једначина*

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$$

може се узети једначина

$$\frac{dv_k}{dx} = \varphi_k(x, v_1, \ldots, v_n)$$

где је φ_k ма који парцијални извод, и ма кога реда, функције f_k-по променљивима (313).

Доказ правила је исти као доказ III правила у IX одељку.

XX. Диференцијалне једначине и системи симултаних једначина вишега реда.

I.

Диференцијална једначина m-тога реда

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots y^{(m-1)}) \tag{315}$$

може се увек свести на систем од m симултаних једначина првога реда. Ако се стави да је

$$y = y_0, \quad y' = y_1, \quad y'' = y_2, \ldots, y^{(m-1)} = y_{m-1},$$

имаће се систем од m једначина првога реда

$$\begin{aligned} &\frac{dy_0}{dx} = y_1, \\ &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\quad\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dy_{m-1}}{dx} = f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}). \end{aligned} \tag{316}$$

Претпоставивши да је f холоморфна функција променљивих

$$x, y, y', \ldots, y^{(m-1)} \tag{317}$$

и то у кругу полупречника r описаном у равни x око тачке $x=0$, и променљивих $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ у свакоме од кругова полупречника r' описаних око тачака

$$y=0, \quad y'=0, \ldots\ y^{(m-1)}=0. \tag{318}$$

она ће то исто бити и за променљиве

$$x, y_0, y_1, \ldots y_{m-1}. \tag{319}$$

Ако се тада означи са M један број такав да га не премашају ни вредност r', ни модуо функције f док свака од променљивих (318), односно (319) остаје у своме кругу, може се применити горња основна теорема, која доводи до овога резултата:

Свака од променљивих $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$, па дакле и сам интеграл y диференцијалне једначине (315) *који, као и сви његови изводи до $(m-1)$-ог закључно, добија вредност нулу за $x=0$, може се развити у ред облика*

$$a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \cdots \tag{320}$$

који ће бити конвергентан за све вредности x што леже у кругу описаноме око тачке $x=0$ у равни x, са полупречником

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{(m+1)Mr}}\right).$$

Тако н. пр. диференцијална једначина другога реда

$$y'' = f\,(x, y, y')$$

имаће за свој интеграл y, који као и његов извод y', постаје једнак нули за $x=0$, ред облика

$$a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

који ће бити конвергентан за све вредности x у кругу описаном око $x=0$ у равни x са полупречником

$$R = r\left(1 - e^{-\frac{r'}{3Mr}}\right).$$

Остаје да се покаже како се израчунавају коефицијенти

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \ldots$$

реда (320). Из једначине (315) добија се диференцијалењем по x

$$y^{(m+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y^{(m-1)}} f.$$

Десна страна једначине је функција променљивих

(321) $\qquad x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$

која, ако се означи са f_1, биће

$$y^{(m+1)} = f_1\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Диференцијалећи поново по x, добија се

$$y^{(m+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(m-1)}} f,$$

где ће опет десна страна бити функција променљивих (321), која ако се означи са f_2, биће

$$y^{(m+2)} = f_2\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Продуживши тако и даље, добиће се низ израза за више изводе функције y у облику

$$y^{(n)} = f_{n-m}\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}),$$
$$n = m+1, \quad m+2, \quad m+3, \ldots$$

где се низ функција

(322) $\qquad f_1, f_2, f_3, \ldots$

изводи, једна из друге, по рекурсивном обрасцу

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(m-1)}} f$$

са почетном функцијом

$$f_0 = f\,(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}).$$

Ако се тада са $[f_k]$ означи резултат који се добија кад се у функцији f_k смени

$$x=0, \quad y=0, \quad y'=0, \ldots, \quad y^{(m-1)}=0$$

коефицијенти се израчунавају по обрасцу

$$a_{m+n} = \frac{1}{(n+m)!}\,[f_n], \qquad (n=1, 2, 3\ldots).$$

Применимо такав начин одређивања коефицијената a_n на једначину h-тог реда

(323) $\qquad y^{(h)} = R\,(x, y, y', \ldots, y^{(h-1)})$

где је R рационална функција променљивих

(324) $\qquad x, y, y', \ldots, y^{(h-1)}.$

Ставимо да је

(325) $\qquad y^{(k)} = y_k, \qquad (k=0, 1, 2\ldots h)$

па ће једначина (323) бити облика

(326) $\qquad y_h = \dfrac{P}{Q}$

где су P и Q полиноми по променљивима

$$x, y_0, y_1, \ldots, y_h$$

где се, ради холоморфности функције R у близини вредности

$$(327)\qquad x=0\,,\quad y=0\,,\quad y'=0\,,\ldots,\,y^{(h)}=0$$

претпоставља да је

$$Q(0\,,\,0\,,\,0\,,\ldots,0)\neq 0\,.$$

Тада се интеграл y који, као и његови узастопни изводи до $(h-1)$-ог закључно, за $x=0$ добија вредност нулу, може развити у ред

$$(328)\qquad y=a_h\,x^h+a_{h+1}\,x^{h+1}+a_{h+2}\,x^{h+2}+\cdots$$

Коефицијенат степена x^n израчунава се помоћу обрасца

$$(329)\qquad a_n=\frac{r_n}{n!}\,,\quad n=h+1,h+2,h+3\ldots,$$

где r_n означује вредност, коју за вредности (327) добија једна извесна функција R_n; ова је функција n-ти члан низа функција

$$R_h\,,\ R_{h+1}\,,\ R_{h+2}\,,\ldots$$

које се једна из друге израчунавају помоћу рекурсивног обрасца

$$(330)\qquad \begin{aligned} R_n=&\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x}+y_1\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0}+y_2\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1}+\cdots\\ &+y_{h-1}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}}+\frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\end{aligned}$$

са почетном функцијом

$$R_1=\frac{P}{Q}\,,$$

што се доказује, као и за диференцијалне једначине првога реда у IV одељку, и на истоветан начин, узастопним диференцијалењима једначине (323) по x, водећи рачуна о једначинама (323), (325), (326).

Овде ће бити показано да се израчунавање коефицијената може свести на израчунавање, не низа рационалних функција, већ једнога низа полинома по промењљивима (324).

Лако се уверавамо, као и за једначине првога реда, да је уопште

$$(331)\qquad R_n=\frac{P_n}{Q^{2n-2h+1}}\,,\quad P_h=P\,,\qquad (n=h,\,h+1,\,h+2\,,\ldots)$$

где је P_n полином по промењљивима (324). Сменивши n са $n-1$ добија се

$$(332)\qquad R_{n-1}=\frac{P_{n-1}}{Q^{2n-2h-1}}$$

одакле се парцијалним диференцијалењима добија низ једначина

$$(333)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial R_{n-1}}{\partial x}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial x}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\,,\\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_0}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\,,\\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_1}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}&=\frac{Q\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}P_{n-1}}{Q^{2(n-h)}}\end{aligned}$$

па се из последње од њих добија

$$(334)\qquad \frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\frac{P}{Q}=\frac{PQ\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}}-(2n-2h-1)\dfrac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}P\,P_{n-1}}{Q^{2n-2h+1}}\,.$$

Из образаца (330) и (331) је

$$\begin{aligned} P_n=Q^{2n-2h+1}\Big(&\frac{\partial R_{n-1}}{\partial x}+y_1\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_0}+y_2\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_1}+\cdots+\\ &+y_{h-1}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-2}}+\frac{P}{Q}\frac{\partial R_{n-1}}{\partial y_{h-1}}\Big)\end{aligned}$$

а кад се ту смене парцијални изводи функције R_{n-1} њиховим изразима (333) и (334) добија се

$$P_n = A\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + H_0\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_0} + H_1\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_1} + H_2\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_2} +$$

$$(335)\qquad + \cdots + H_{h-2}\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-2}} + B\frac{\partial P_{n-1}}{\partial y_{h-1}} + (2n-2h-1)\,CP_{n-1}$$

где су

$$A,\ B,\ C,\ H_0,\ H_1,\ \ldots,\ H_{h-2}$$

стални полиноми по променљивима $x, y_0, y_1, \ldots y_h$, т. ј. независни од ранга n коефицијента a_n; а који имају за изразе

$$A = Q^2, \quad B = PQ,$$

$$C = -Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + y_1\frac{\partial Q}{\partial y_1} + \cdots + y_{h-1}\frac{\partial Q}{\partial x_{h-2}} + \frac{P}{Q}\,\frac{\partial Q}{\partial y_{h-1}}\right),$$

$$H_0 = y_1 Q^2, \quad H_1 = y_2 Q^2,$$

$$H_2 = y_3 Q^2, \ldots, H_{h-2} = y_{h-1} Q^2.$$

Израчунавање коефицијената a_n своди се дакле на одредбу сталних од променљивих $x, y_0, \ldots, y_h$ независних чланова $p_h, p_{h+1}, p_{h+2} \ldots$ низа полинома

$$P_h, P_{h+1}, P_{h+2} \ldots$$

који се један из другога поступно израчунавају из обрасца (335) и сталнога члана q полинома Q. То израчунавање бива по општем обрасцу

$$(336)\qquad a_n = \frac{p_n}{n!\,q^{2n-2h+1}} \qquad (n = h, h+1, h+2, \ldots)$$

при чему један исти број q важи за све коефицијенте a_n.

Приметићемо још да се и на диференцијалне једначине вишега реда могу применити специјалније компаративне једначине, према претпоставкама које се буду чиниле о функцији f у једначини

$$(337)\qquad y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots y^{(m-1)}).$$

Напослетку, нека је примећено да се и системи симултаних једначина вишега реда, облика

$$(338)\qquad \frac{d^m y_k}{dx^m} = f_k\left(x, y_1 \ldots y_n; \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_k}{dx}; \frac{d^2 y_1}{dx}, \ldots, \frac{d^2 y_k}{dx}, \ldots\right)$$

могу свести на систем симултаних једначина првога реда. То се постиже увођењем нових непознатих функција

$$\begin{array}{lll} y_1 = z_1, & y_2 = z_2, \ldots, & y_n = z_n \\ \dfrac{dy_1}{dx} = z_{n+1}, & \dfrac{dy_2}{dx} = z_{n+2}, \ldots, & \dfrac{dy_n}{dx} = z_{2n}, \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = z_{2n+1}, & \dfrac{d^2y_2}{dx^2} = z_{2n+2}, \ldots, & \dfrac{d^2y_n}{d^nx} = z_{3n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

чији ће број бити mn па се систем (323) своди на систем првога реда састављен из mn једначина облика

$$\frac{dz_k}{dx} = z_{n+k},$$

$$\ldots\ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dz_{(m-1)n+k}}{dx} = f_k(x, z_1, z_2, \ldots, z_{mn}).$$

Напослетку, нека је примећено и то, да се, како у систему првога реда, тако и у систему вишега реда, *увек може учинити да систем не садржи независно променљиву количину* по којој се врши интеграција. Довољно је, поред уведених нових непознатих функција, увести још једну u, дефинисану једначином $u = x$, што у дати систем уводи још једну нову једначину, а та је

$$\frac{du}{dx} = 1$$

што број једначина повећава за јединицу. То је од интереса у извесним питањима у теорији симултаних једначина.

II.

Општи интеграл диференцијалне једначине p-тога реда

$$y^{(p)}=f\,(x\,,\,y\,,\,y',\,\ldots\,,\,y^{(p-1)}) \tag{339}$$

је њен интеграл који за произвољну вредност $x=x_0$ добија такође произвољну вредност $y=y_0$, а његових $p-1$ узастопних извода $y', y'', \ldots, y^{(p-1)}$ добијају произвољне вредности $y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(p-1)}$. Он је изражен једном једначином

$$F\,(x\,,\,y\,,\,x_0\,,\,y_0\,,\,y_0',\,\ldots\,,\,y_0^{(p-1)})=0 \tag{340}$$

где је F функција $p+3$ променљивих $x, y, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}$. Вредности

$$x_0\,,\,y_0\,,\,y_0',\,\ldots\,,\,y_0^{(p-1)} \tag{341}$$

којих има $p+1$, играју улоге интеграционих констананата које се увек могу сменити скупом од p произвољних констананата, на начин сличан ономе који је наведен раније за диференцијалне једначине првога реда.

Кад је функција F холоморфна за вредности (341), општи интеграл се може изразити у облику реда

$$y=A_1\,(x-x_0)+A_2\,(x-x_0)^2+A_3\,(x-x_0)^3+\cdots \tag{342}$$

где су коефицијенти A_n одређене функције променљивих (341).

Један произвољно узет ред (342) може, али не мора бити општи интеграл какве једначине (339). Могу се, дакле, поставити питања:

1° *Какве потребне и довољне услове треба да испуне коефицијенти A_n реда* (342), *па да тај ред представља општи интеграл какве диференцијалне једначине* (339)?

2° *У случајевима кад су ти услови испуњени, наћи диференцијалну једначину* (339) *за коју уочени ред представља општи интеграл.*

Нека је (339) једначина чији је општи интеграл (342). Тада је

$$A_1=\frac{1}{1!}[\,y'\,]=\frac{y_0'}{1!}\,,\qquad A_2=\frac{1}{2!}[\,y''\,]=\frac{y_0''}{2!}\,,\ldots$$

(343)

$$\ldots,\ A_p=\frac{1}{p!}[\,y^{(p)}\,]=\frac{1}{p!}f(x_0,\,y_0\,,\,y_0',\,\ldots,\,y_0^{(p-1)})$$

где у овој прилици знак $[\varphi]$ означава вредност коју добија функција φ променљивих $x, y, y'\ y''\ldots$ кад се у њој те променљиве смене вредностима (341).

Као што је у претходном параграфу речено, ако се формира низ функција $f_1, f_2, f_3, \ldots$ променљивих $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ а по рекурсивном обрасцу

$$f_k=\frac{\partial f_{k-1}}{\partial x}+\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(p-1)}}f, \tag{344}$$

где је почетна функција

$$f_0=f\,(x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}),$$

n-ти извод функције y по x биће f_{n-1}, и према томе је

$$A_n=\frac{1}{n!}\,[f_{n-1}]\,. \tag{345}$$

Кад се у једначини (344) променљиве $x, y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ смене вредностима (341) и има се у виду да је

$$[y']=1!\,A_1\,,\qquad [\,y'']=2!\,A_2,\qquad \ldots$$

$$[f_n]=(n+1)!\,A_{n+1}\,,\qquad [f_{n-1}]=n!\,A_n,\qquad \ldots$$

$$\left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}\right]=n!\,\frac{\partial A_n}{\partial x_0}\,,\qquad \left[\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\right]=n!\,\frac{\partial A_n}{\partial y_0}\,,\qquad \ldots$$

деобом добијене једначине са $n!$ добија се

$$(n+1)\,A_{n+1}=\frac{\partial A_n}{\partial x_0}+1!\,A_1\,\frac{\partial A_n}{\partial y_0}+2!\,A_2\,\frac{\partial A_n}{\partial y_0'}+\cdots$$

$$\cdots+(p-1)!\,A_{p-1}\,\frac{\partial A_n}{\partial y^{(p-2)}}+p\,!\,A_p\,\frac{\partial A_n}{\partial y^{(p-1)}}\,.$$

Решивши једначину по A_p налази се да израз

$$=\frac{(n+1)\,A_{n+1}-\dfrac{\partial A_n}{\partial x_0}-1!\,A_1\,\dfrac{\partial A_n}{\partial y_0}-2!\,A_2\,\dfrac{\partial A_n}{\partial y'}-\cdots-(p-1)!\,A_{p-1}\,\dfrac{\partial A_n}{\partial y^{(p-2)}}}{p!\,\dfrac{\partial A_n}{\partial y^{(p-1)}}}$$

има за вредност

$$A_p = \frac{1}{p!}[f] = \frac{1}{p!} f(x_0, y_0, y_0', \ldots y_0^{(p-1)})$$

А пошто је у исто време и

$$A_p = \frac{1}{p!}\left[\frac{d^p y}{dx^p}\right] = \frac{1}{p!}[y^{(p)}] = \frac{y_0^{(p)}}{p!} = \frac{1}{p!}\frac{d^p y_0}{dx_0^p}$$

јер је, по дефиницији, $y_0^{(k)}$ вредност коју добија k-ти извод функције y кад се у овој стави да је $x = x_0$, то се налази да су променљиве (341) међу собом везане диференцијалном једначином

$$\frac{d^p y_0}{dx_0^p} = f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}) .$$

На тај је начин добијено решење постављених питања у облику ова два става:

I став: *Да би ред* (342), *где су коефицијенти A_n дате функције произвољних констаната $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(p-1)}$, представљао општи интеграл диференцијалне једначине p-тога реда* (338), *потребно је и довољно да израз Δ има једну исту вредност за све вредности индекса n веће од нуле.*

А кад је тај услов испуњен, решење другога од постављених питања дато је овим ставом:

II став: *Диференцијална једначина, чији је општи интеграл тада изражен редом* (342), *добија се кад се у коефицијенту A_p смене $x_0, y_0, y_0' \ldots y_0^{(p-1)}$ вредностима $x, y, y', \ldots y^{(p-1)}$, па се резултат изједначи са $y^{(p)}$.*

Као што се види, да ли ће дати ред (342) бити или не општи интеграл какве једначине p-тога реда (339), зависи искључиво од тога *да ли ће његови коефицијенти A_n имати за инваријанту израз Δ*. А кад је то случај, диференцијална једначина добија се из израза саме те инваријанте.

III.

Завршујући овај одељак, потсетићемо на једну основну разлику што постоји између алгебарских диференцијалних

једначина првога реда и једначина вишега реда, у погледу сингуларитета њихових интеграла.

За једну се диференцијалну једначину

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

каже да је *алгебарска*, кад је F алгебарска функција променљивих $y, y', y'', \ldots$, и онда се једначина увек може написати у таквом облику да је F полином по тим променљивим, са коефицијентима који могу бити ма какве функције променљиве x, алгебарске или трансцендентне (понекад се тражи да су и те функције алгебарске; диференцијална једначина је тада алгебарска у ужем смислу).

За алгебарске диференцијалне једначине првога реда полови и алгебарске критичке тачке (алгебарски сингуларитети) могу бити *стални* или *покретни*, тј. могу бити исти за све партикуларне интеграле једначине, или се мењати од једног партикуларног интеграла до другог. У првоме случају они се не мењају са интеграционом константом у изразу оштега интеграла; у другом случају они се мењају са том константом.

Тако н. пр. једначина

$$(1+x)y' + y = 0$$

има са општи интеграл

$$y = \frac{C}{x+1}$$

па дакле њени интеграли имају сталан пол првога реда $x = -1$.

Једначина

$$x^3 y' + y^2 - 3x^2 y = 0$$

има за општи интеграл

$$y = \frac{x^3}{x + C}$$

па дакле њени интеграли имају покретан пол првога реда $x = -C$.

Једначина

$$2xy' - y = 0$$

има за општи интеграл

$$y = C\sqrt{x}\ ;$$

њени интеграли имају сталну алгебарску критичку тачку другога реда $x = 0$.

Једначина

$$2xyy' - 2y^2 - x^3 = 0$$

има за општи интеграл

$$y = x\sqrt{x + C}$$

па њени интеграли имају покретну алгебарску критичку тачку другога реда $x = -C$.

За једначину

$$xy' + a = 0$$

је општи интеграл

$$y = C - a \log x$$

па јој интеграли имају сталну критичку логаритамску тачку $x = 0$.

За једначину

$$x^2 y' + ay = 0$$

општи је интеграл

$$y = Ce^{\frac{a}{x}}$$

и сви њени интеграли имају сталну есенцијалну тачку $x = 0$.

Painlevé је доказао *да никаква алгебарска диференцијална једначина* првога реда

$$(346) \qquad F(x, y, y') = 0$$

не може имати покретних трансцендентних сингуларитета (на пр. покретних логаритамских критичких тачака, или есенцијалних сингуларитета). Кад год интеграл има покретних сингуларитета, *ти сингуларитети могу бити само или полови, или алгебарске критичке тачке.*

Painlevé-ова теорема важи само за алгебарске, али не важи и за трансцендентне диференцијалне једначине првога реда, т. ј. оне које се не могу написати у облику (346) где би F био полином по x и y. Такве једначине могу (премда не морају) имати и покретних трансцендентних сингуларитета (логаритамских или есенцијалних). Тако на пример:

Трансцендентна диференцијална једначина

$$y' - e^{-y} = 0$$

има за општи интеграл

$$y = \log(x + C)$$

па јој интеграли имају покретну логаритамску критичку тачку $x = -C$.

Трансцендентна једначина

$$y' + y(\log y)^2 = 0$$

има за општи интеграл

$$y = e^{\frac{1}{x+C}}$$

и интеграли јој имају као покретну есенцијалну тачку $x = -C$.

Али, и у томе лежи једна основна разлика између алгебарских диференцијалних једначина првога реда и оних вишега реда, Painlevé-ова теорема не важи за једначине вишега реда. *Једначина вишега реда*

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

где је F алгебарска функција променљивих $y, y', y'', \dots$ може имати као покретне и трансцендентне интегралне сингуларитете.

Да то одиста може бити, види се из оваквих примера:

Једначина другога реда

$$y'' + y'^2 = 0$$

има за општи интеграл

$$y = C_1 + \log(x + C_2)$$

па јој интеграли имају покретну логаритамску критичку тачку $x = -C_2$.

Израз

$$y = C_1 e^{\frac{1}{x+C_2}}$$

је општи интеграл једне алгебарске једначине другога реда, коју је лако формирати логаритмисањем и диференцијалењем два пута узастопце; интеграли те једначине имају покретну есенцијалну тачку $x = -C_2$.

То су чињенице које треба имати на уму кад се тражи да се интеграл дате диференцијалне једначине или система симултаних једначина (који се, као што се зна, може свести и на обичне диференцијалне једначине) развије у ред. Јер као што је познато из опште теорије аналитичких функција, облик реда у који се може развити једна функција у близини једне дате тачке x_0, битно зависи од природе те тачке у погледу на ту функцију. Ставови изложени у овоме што претходи, дају облик интегралног реда дате једначине, а из тога облика се може сазнати и природа тачке x_0 као обичне тачке или сингуларитета за интеграл.

XXI. Интеграција диференцијалних једначина и система за ма какве коначне почетне вредности промењљивих.

У Одељцима што претходе показано је како се извршује интеграција диференцијалних једначина и система у облику редова, кад се тражи да интеграл за $x=0$ има вредност нулу, као и то да узастопни изводи.

$$y', y'', y''', \ldots$$

до извода датога ранга, буду сви једнаки нули за $x=0$. То су т. зв. *почетни услови* који су у досадашњем излагању били везани за *почетне вредности промењљивих*

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0, \ldots$$

У случајевима кад је интеграл реалан, тај услов значи геометриски да интегрална крива пролази кроз координатни почетак у равни xoy и да у њему има додир $(m-1)$-ог реда са апсцисном осовином, где m означава ред диференцијалне једначине.

Међутим, такви почетни услови могу бити и општији, или друге какве врсте. Може се, на пример, тражити да интеграл за дату почетну вредност $x=x_0$ промењљиве x има као своју почетну вредност $y=y_0$, а да тако исто почетне вредности извода за $x=x_0$ буду

$$y'=y_0', \; y''=y_0'', \; y'''=y_0''', \ldots, \; y^{(m-1)}=y_0^{(m-1)}$$

где су $y_0, y_0', y_0'', y_0''', \ldots$ унапред дате вредности.

Кад је интеграл реалан, као и све дате вредности $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y^{(m-1)}$, тај услов геометриски значи да интегрална крива линија пролази кроз дату тачку (x_0, y_0) у равни xoy и да у њој има додир $(m-1)$-ог реда са извесном параболом $(m-1)$-ог степена.

Задатак се решава ставивши да је

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \\ y &= P(x) + u\,(x - x_0) \end{aligned} \tag{347}$$

где је t нова независно промењљива количина, u нова непозната функција, а P полином $(m-1)$ степена по x.

Ако се стави да је

$$P(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_{m-1} x^{m-1} \tag{348}$$

а тражи се интеграл једначине такав, да за $x=x_0$ он и његови узастопни изводи до $(m-1)$-ог закључно добијају дате вредности

$$y = y_0, \; y' = y_0', \ldots, \; y^{(m-1)} = y_0^{(m-1)} \tag{349}$$

коефицијенти $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}$ израчунавају се из m условних једначина

$$\begin{aligned} y_0 &= P(x_0) + u(0), \\ y_0' &= P'(x_0) + u'(0), \\ y_0'' &= P''(x_0) + u''(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(m-1)} &= P^{(m-1)}(x_0) + u^{(m-1)}(0). \end{aligned} \tag{350}$$

Ако се дакле полином $P(x)$ изабере тако да буде

$$(351)\qquad \begin{aligned} &P(x_0) = y_0 \,, \\ &P'(x_0) = y_0' \,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &P^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)} \end{aligned}$$

па се са тако изабраним полиномом на датој диференцијалној једначини изврши смена

$$(352)\qquad \begin{aligned} &y = P(x) + u(x - x_0)\,, \\ &y' = P'(x) + u'(x - x_0)\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(m-1)} = P^{(m-1)}(x) + u^{(m-1)}(x - x_0) \end{aligned}$$

једначина ће бити трансформисана у нову диференцијалну једначину

$$(353)\qquad \Phi(t, u, u', u'', \ldots, u^{(m)}) = 0\,.$$

Пошто су тада испуњени услови (351), интеграл u треба, према условним једначинама (350) да је такав, да за $x = x_0$ он и његови узастопни изводи до $(m-1)$-ог закључно добијају вредности

$$(354)\qquad u = 0,\; u' = 0, \ldots,\; u^{(m-1)} = 0.$$

Али, кад је $x = x_0$, онда је $t = 0$, што значи да после извршене смене

$$x = x_0 + t$$

интеграл једначине (353) треба да за $t = 0$ испуни услове (354). А тражење таквог интеграла је задатак који је био предмет свега досадашњег излагања.

Пошто је

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{m-k-1} \frac{(n+k)!}{n!} h_{n+k} x^n,$$

то условне једначине (351), написане у обрнутом реду, у своме развијеном облику су

$$\begin{aligned} &(m-1)!\, h_{m-1} = y_0^{(m-1)}, \\ &(m-2)!\, h_{m-2} + \frac{(m-1)!}{1!} h_{m-1} x_0 = y_0^{(m-2)}, \\ &(m-3)!\, h_{m-3} + \frac{(m-2)!}{1!} h_{m-2} x_0 + \frac{(m-1)!}{2!} x_0^2 = y_0^{(m-3)}\,, \\ &(m-4)!\, h_{m-4} + \frac{(m-3)!}{1!} x_0 + \frac{(m-2)!}{2!} x_0^2 + \frac{(m-1)!}{3!} x_0^3 = y^{(m-4)}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Из прве једначине добија се непосредно коефицијенат h_{m-1}; заменом у другој, добија се једначина која даје коефицијенат h_{m-2}; заменом оба нађена коефицијента у трећој, добија се једначина која даје коефицијенат h_{m-3} и продужујући тако, имаће се редом сви коефицијенти полинома $P(x)$. Сменом (347) свешће се тада задатак на онај кад су почетне вредности непознате функције и њених $(m-1)$ узастопних извода све једнаке нули.

Кад буде одређен, у облику реда, интеграл

$$u(x - x_0) = u(t)$$

нове трансформисане једначине, који за $t = 0$ добија вредности (354), ставивши у њој да је

$$t = x - x_0 \qquad u(t) = u(x - x_0)\,,$$

добија се интеграл

$$y = P(x) + u(x - x_0)$$

дате диференцијалне једначине, који ће испуњавати дате почетне услове.

Почетни услови могу бити и какве друге врсте, на пример

1° да интегрална крива пролази кроз дати скуп тачака;

2° или да она пролази кроз одређени број датих тачака и да у свакој од њих има додир одређеног реда са датом кривом линијом.

У случају н. пр. једначине другога реда

$$f(x, y, y', y'') = 0 \tag{355}$$

може се тражити да интегрална крива пролази кроз дату тачку (x_0, y_0) и да ту њена тангента има дати коефицијенат правца α. Тада једначина

$$f(x_0, y_0, \alpha, y_0'') = 0 \tag{356}$$

одређује други извод y_0'' на тој кривој у тачки (x_0, y_0).

Кад се изврши смена (347) и за полином P узме се линеарна функција

$$P(x) = ax + b,$$

условне једначине (351) за тај полином су

$$P(x_0) = ax_0 + b = y_0, \qquad P'(x_0) = a = \alpha,$$

одакле се налази

$$a = \alpha, \qquad b = y_0 - \alpha x_0,$$

тако да P треба да буде

$$P(x) = (x - x_0)\,\alpha + y_0.$$

Кад се у једначини (355) буде извршила смена

$$x = x_0 + t \qquad y = P(x) + u(x) \tag{357}$$

где x и y добију вредности x_0 и y_0, тако да извод y' добије задату вредност α, биће $t = 0$, а за ту вредност променљиве t функција $u(x)$ ће добити вредност $u(x_0)$, која ће према другој једначини (357) бити једнака нули. Задатак је, дакле, сведен на ранији случај кад су почетне вредности независно променљиве количине и непознате функције једнаке нули.

У случају једначине трећег реда

$$f(x, y, y', y'', y''') = 0 \tag{358}$$

може се н. пр. тражити да интегрална крива пролази кроз дату тачку (x_0, y_0) и да у овој изводи y' и y'' имају дате вредности β и α. Тада једначина

$$f(x_0, y_0, \beta, \alpha, y_0''') = 0$$

решена по y_0''', одређује вредност коју ће имати извод y''' у тачки (x_0, y_0).

Кад се изврши смена (347), па се за полином P узме полином другога степена

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

условне једначине за тај полином су

$$\begin{aligned} P(x_0) &= ax_0^2 + bx_0 + c = y_0, \\ P'(x_0) &= 2ax_0 + b = \beta, \\ P''(x_0) &= 2a = \alpha. \end{aligned}$$

Из њих се налази да треба да је

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{2}, \\ b &= \beta - \alpha x_0, \\ c &= y_0 - \beta x_0 + \frac{\alpha^2}{2} x_0, \end{aligned}$$

тако да P буде полином

$$P(x) = \frac{\alpha}{2} x^2 + (\beta - \alpha x_0)\,x + \left(y_0 - \beta x_0 + \frac{\alpha}{2} x_0^2\right).$$

Из тога се добија да је

$$P'(x) = \alpha x + (\beta - \alpha x_0)$$

па кад се у једначини (358) буде извршила смена (347) онда, кад x и y добију вредности x_0 и y_0, тако да извод y' добије вредност β, а да други извод y'' добије вредност α,

1^o функција $u(x)$ ће добити вредност $u(x_o)$ која ће, према једначини

$$y = P(x) + u(x)$$

бити једнака нули;

2^a извод $u'(x)$ ће према једначини

$$y' = P'(x) + u'(x)$$

добити вредност

$$y_o' - P'(x) = y_o' - \beta = 0\,.$$

Задатак је опет сведен на ранији случај кад су почетне вредности променљиве t и непознате функције u једнаке нули.

Уочимо још, као пример сличне врсте, задатак у коме се тражи да интегрална крива једначине трећег реда (358) пролази кроз дату тачку (x_o, y_o) и да у њој има тангенту с датим коефицијентом правца β и једну дату кривину δ. Ако се тада стави да је у тачки (x_o, y_o)

$$y_o' = \beta, \qquad y_o'' = \alpha,$$

пошто кривина у тачки (x, y) има за израз

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

за одредбу вредности α имаће се једначина

(359) $$(1+\beta^2)^{\frac{3}{2}}\delta - \alpha = 0\,.$$

Кад се израчуна α имаће се као почетни услов

$$x = x_o, \quad y = y_o, \quad y' = \beta, \quad y'' = \alpha,$$

па се сменом (347) проблем своди на онај кад су почетни услови

$$t = 0, \quad u = 0, \quad u' = 0$$

и решава се на показани начин, одредбом полинома $P(x)$ који испуњава услове задатка.

Сваком ће пару решења једначина (359) одговарати по једно решење проблеме интеграције.

XXII. Интеграл диференцијалне једначине првог реда изражен као позната функција реда одређеног облика.

Постоји мноштво случајева кад се интеграл алгебарске диференцијалне једначине првога реда

(360) $$f(x, y, y') = 0$$

изрази у облику *алгебарске* функције каквога реда познатог облика, добијеног на начин изложен у ранијим одељцима кад функција f испуњава нарочите, за то потребне услове.

Уочимо један од таквих општијих случајева. Сматрајмо у једначини (360) реалне променљиве y и y' као апсцису и ординату једне тачке $M(y, y')$ у равни yoy', па ће једначина (360) представљати у тој равни једну класу алгебарских кривих линија C, у којој променљива x игра улогу параметра по коме се једна крива те класе разликује од друге, исте класе.

Постоји увек могућност да се однос између y и y', дат једначином (360), изрази у облику двеју параметарских једначина

(361) $$y = \varphi(x, t)\,,$$

(362) $$y' = \psi(x, t)\,,$$

таквих, да кад се из (361) и (362) елиминише параметар t, добија се једначина (360). Из тих се једначина тада добија да је

63) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dx} = \psi(x, t)$$

одакле је

(364) $$\frac{dt}{dx} = f_1(x, t)$$

где је

$$(365) \qquad f_1 = \frac{\psi - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}} .$$

На диференцијалну једначину првог реда (354), где је независно променљива количина x, а непозната функција t, може се тада применити све што је напред изложено о интегралу једначине израженом у облику реда. Ако се за једначину (360) тражи интеграл y, који за дату вредност $x=x_0$ добија дату вредност $y=y_0$, онда су почетни услови за једначину (364)

$$x = x_0 \qquad t = \text{корен једначине } \varphi(x_0, \alpha) = 0$$

решене по α. У случају кад је ова једначина идентички задовољена за ма какво α, може се за α узети каква се хоће произвољна вредност.

Ако је α један корен једначине (а са сваким њеним кореном треба учинити ово што ће се урадити са овим уоченим), смена

$$t = z + \alpha$$

своди почетне услове трансформисане једначине

$$(366) \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, z+\alpha) = f_2(x, z)$$

на $x=0$, $z=0$, па се проблем одредбе интеграла z у облику реда решава на напред изложене начине, према томе да ли је за $x=0$, $z=0$ функција $f_2(x, z)$ холоморфна, или добија бескрајно велику вредност, или се јавља у неодређеном облику $\frac{0}{0}$, или има алгебарских критичких или трансцендентних сингуларитета.

У случају кад је та функција холоморфна за $x=0$, $z=0$, интеграл се може, по теореми Briot-Bouquet-а развити у Maclaurin-ов ред

$$z = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

који ће бити конвергентан у кругу описаном око тачке $x=0$ у равни x, са полупречником R одређеним том теоремом.

Непозната функција t биће тада изражена у облику реда

$$(367) \qquad t = \alpha + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

па кад се то смени у једначини (361), *имаће се интеграл једначине* (360) *изражен у облику једне познате алгебарске функције* φ *променљиве* x *и реда* (367).

У случају кад функција $f_2(x, z)$ добија за $x=0$, $z=0$ бескрајно велику вредност, али нема алгебарских критичких или трансцендентних сингуларитета, интеграл z развиће се у ред облика

$$z = a_1 \sqrt[m]{x} + a_2 \left(\sqrt[m]{x}\right)^2 + a_3 \left(\sqrt[m]{x}\right)^3 + \cdots$$

а непозната t у облику

$$t = \alpha + z .$$

Тако би се исто и у осталим побројаним случајевима одредио облик реда за интеграл z, из чега би се имао и ред за интеграл t, па би се његовом заменом у једначини (361) *имао интеграл у једначине* (361) *опет као алгебарска функција променљиве* x *и тога реда.*

Један општи случај за који је познат начин изражавања променљивих y и y' у облику параметарских једначина (361) и (362), је тај кад криве C састављају једну класу *уникурсалних кривих линија.* Под таквим кривим линијама разумеју се оне криве за које се координате x и y могу изразити као *рационалне функције* једнога параметра t. Њихова је општа теорија разрађена у аналитичкој геометрији; овде ће се само потсетити на неколике одлике таквих кривих линија, које служе за њихово распознавање.

Свака алгебарска крива m тог степена, која има једну вишеструку тачку $(m-1)$-ог реда, уникурсална је.

Јер, као што је познато из Аналитичке Геометрије, кад се вишеструка тачка пренесе у координатни почетак, једначина криве добија облик

$$\varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_m(x, y) = 0$$

где φ_{m-1} и φ_m означују хомогене полиноме по x и y који су $(m-1)$-ог, односно m-тог степена. Променљива права

$$y = tx$$

што пролази кроз координатни почетак, обрћући се око почетка променом параметра t, сече криву у $m-1$ тачака које се поклапају са почетком, и још у једној покретној тачки чије су координате изражене једначинама

$$(368) \qquad x = -\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}, \qquad y = -\frac{t(\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)},$$

из чега се види да је крива уникурсална.

Тако су уникурсалне криве и

1° *све криве другога степена* $(m=2)$;

2° *све криве трећега степена* $(m=3)$ *са једном двоструком или повратном тачком*, као што су н. пр. цисоида и строфоида;

3° *све криве четвртог степена* $(m=4)$ *са једном троструком тачком, или са три двоструке или повратне тачке ;*

4° *све криве* m-*тог степена са*

$$(369) \qquad \frac{(m-1)\,(m-2)}{2}$$

двоструких или повратних тачака.

Као што се зна из Аналитичке Геометрије, број (369) је у исто време и највећи могућни број таквих тачака које може имати једна крива m-тог степена, а да се не разложи на више кривих нижега степена од m.

За криве другога степена, што пролазе кроз координатни почетак и чија је општа једначина

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$$

параметарске једначине (368) су

$$x = -\frac{D+Et}{A+Bt+Ct^2},$$

$$y = -\frac{Dt+Et^2}{A+Bt+Ct^2}.$$

За криве трећега степена под 2° (што пролазе кроз почетак), а чија је општа једначина

$$Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3 + Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

$$x = -\frac{A+Bt+Ct^2}{D+Et+Ft^2+Gt^3},$$

$$y = -\frac{At+Bt^2+Ct^3}{D+Et+Ft^2+Gt^3}.$$

Кад је дата алгебарска диференцијална једначина (360) и претворена у параметарске једначине (361) и (362), наместо сталних коефицијената у њима, као у случају алгебарских кривих линија, фигурисаће коефицијенти који ће бити функције независно променљиве количине x као параметра.

Тако н. пр. за једначину

$$y'^2 + y^2 + xy = 0$$

параметарске једначине су

$$y = \varphi(x, t) = -\frac{x}{1+t^2},$$

$$y' = \psi(x, t) = -\frac{xt}{1+t^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{1+t^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2xt}{(1+t^2)^2},$$

па је одговарајућа диференцијална једначина (364)

$$\frac{dt}{dx} = \frac{(1+t^2)(1-xt)}{2xt}.$$

Нека је, напослетку, поменуто и то да се параметарске једначине за једну дату диференцијалну једначину (360) могу каткад лакше добити у облику једначина трансцендентних по параметру t, али са којима је ипак лако рачунати. Само што ће се у таквим случајевима добити интеграл y *не као алгебарска, већ као трансцендентна функција* добијеног реда. Пример за то даје диференцијална једначина

$$y'^2+y^2-f(x)=0$$

за чије се параметарске једначине могу узети

$$(370)\qquad \begin{aligned} y&=\sqrt{f(x)}\sin t\,,\\ y'&=\sqrt{f(x)}\cos t\,,\end{aligned}$$

пошто се њиховим квадрирањем и сабирањем добија једначина (370). Из њих се добија за t диференцијална једначина

$$(371)\qquad \frac{dt}{dx}=1-\frac{1}{2}\frac{f'(x)}{f(x)}\operatorname{tang} t\,.$$

Кад је функција $f(x)$ холоморфна и различна од нуле за $x=0$, та једначина даје за интеграл, који за $x=0$ добија вредност $t=0$ један конвергентан ред уређен по степенима променљиве x, па ће се интеграл y, што за $x=0$ добија вредност $y=0$ добити у облику

$$y=\sqrt{f(x)}\sin t$$

где t треба сменити тако добијеним редом.

Нека је поменуто да се једначина (371) подесном сменом независно променљиве количине x и непознате функције t своди на једначину облика

$$\frac{du}{d\xi}=F(\xi)+u^3$$

чији се интеграл u може развити у Taylor-ов или Maclaurin-ов ред, према датим почетним условима и аналитичкој природи функције $F(\xi)$.

XXIII. Аритметичке особине коефицијента a_n интегралног реда.

I.

Коефицијенти a_n редова

$$(372)\qquad y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

у облику којих се изражавају интеграли диференцијалних једначина или система, имају и својих *аритметичких особина*, које су од толико већег интереса што произлазе из чињеница *аналитичке* природе, везаних за диференцијалне једначине, а са којима би изгледало да оне не могу стајати ни у каквој вези. Међутим, таквих веза између аритметичких и аналитичких чињеница одиста има и неке од њих су истакнуте на видик у ставовима који су предмет овога одељка.

Пре свега, поједине од таквих чињеница запажају се већ на први поглед на самој диференцијалној једначини, кад се води рачуна о начину израчунавања коефицијента a_n из саме једначине.

Тако, пођимо од чињенице да се за интеграл једначине p-тог реда

$$(373)\qquad y^{(p)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(p-1)})$$

који испуњава почетне услове

$$(374)\qquad x=0,\quad y=0,\quad y'=0,\ldots,\quad y^{(p-1)}=0$$

општи коефицијенат a_n израчунава по обрасцу

$$(375)\qquad a_n=\frac{1}{n!}[f_{n-p}]\qquad (n=p,p+1,p+2,\ldots)$$

где је

$$(376)\qquad f_1,\ f_2,f_3,\ldots$$

низ функција које се изводе једна из друге по рекурсивном обрасцу

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y^{(p-1)}} f$$

$$(k = p+1,\ p+2,\ p+3, \dots)$$

са почетном функцијом

(377) $$f_0 = f\,(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}).$$

Уочимо случај кад је функција f *полином* по свима променљивима

(378) $$x, y, y', \dots, y^{(p-1)}$$

које садржи. Према самоме начину формирања низа (376) очевидно је да ће свака од функција f_k бити полином по променљивим (378), и да ће сваки коефицијенат b таквога полинома бити један број који се из коефицијената a самога полинома f добија сабирањима и множењима међу собом и са сталним целим бројевима што проистичу од изложилаца променљивих (378) при узастопним диференцијалењима. Осим тога, после n диференцијалења број n се увек појављује само или као сабирак, или као чинилац у облику бројева

(379) $$n,\ n-1,\ n-2, \dots$$

или као изложилац било каквог сталног броја, било једнога броја који је опет састављен из сабирака и чинилаца облика (379).

Из начина формирања низа (376) тада се види да ће број $[f_n]$ бити састављен из сабирака од којих је сваки једнак производу разних коефицијената a, чинилаца (379) и чинилаца облика λ^n, где је λ или какав сталан број, или опет број састављен из чинилаца облика (379). А таква структура истиче на видик ове чињенице:

I. *Коефицијенат a_n интегралног реда једначине* (373) *не може садржати у своме саставу никакве ирационалне бројеве који не улазе у састав самих коефицијената a.*

Кад a_n садржи ма један од таквих бројева, може се тврдити да функција y, дефинисана редом (372), не може бити интеграл никакве једначине (373), у којој је функција f полином по (378) који не садржи такве ирационалности.

Тако, на пример, ред (372) у коме би ма и један коефицијенат садржао $\sqrt{2}$ на непарном степену, или $\log 3$, може само тако бити интеграл какве једначине (373) ако који од њених коефицијената a садржи те ирационалности.

II. *Коефицијенат a_n не може садржати у своме саставу никакву функцију индекса n која није* 1° *или производ чинилаца који су стални, од n независни бројеви, или су облика* (379), *или облика λ^n (где је λ од n независан број)*; 2° *или збир ограниченога броја таквих сабирака, а који број може и расти са бројем n.*

Кад a_n није таквог облика, може се такође тврдити да функција y дефинисана редом (372) није интеграл никакве једначине (373). Такав је н. пр. случај кад a_n садржи експлицитно функцију

$$\sqrt{a+bn} \quad \text{или} \quad \log(a+bn)$$

или кад n фигурише у имениоцу коефицијента a_n на други који начин, а не као производ ограниченог броја целих бројева мањих од n (пошто се a_n добија из броја $[f_{n-p}]$ деобом са $n!$).

III. *Кад су коефицијенти полинома f цели бројеви, производ $n!\,a_n$ је за све вредности индекса n цео број.*

Кад је ма један од тих производа рационалан разломак или ирационалан број, ред y не може бити интеграл никакве једначине (373) такве врсте. Тако н. пр. он тада не може бити интеграл никакве линеарне једначине

$$y^{(p)} + p_1(x)\,y^{(p-1)} + \cdots + p_{p-1}(x)\,y' + p_p(x)\,y = 0$$

где су $p_1, p_2, p_3, \dots$ полиноми по x чији су коефицијенти цели бројеви.

Такав је исти случај и кад је a_n рационалан број чији је именилац дељив са каквим простим бројем већим од n.

II.

Посматрајмо сад општу диференцијалну једначину коначнога реда p, алгебарску по променљивима (378), написану у облику

(380) $$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = 0$$

где је f полином по променљивима $x, y, y', \ldots$ које садржи.

Овде ће бити изложен један начин одредбе коефицијената интегралног реда, различан од онога раније приказаног, а из кога се боље може сагледати алгебарска структура тих коефицијената.

Елиминишући x из двеју једначина

$$f = 0 \quad \text{и} \quad \frac{df}{dx} = 0$$

добија се једначина

(381) $$Q(y, y', y'', \ldots, y^{(p+1)}) = 0$$

где је Q полином по променљивима

(382) $$y, y', y'', \ldots, y^{(p+1)}.$$

Свака функција y, која задовољава једначину (380), задовољава у исти мах и једначину (381).

Нека је сад:

(383) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

један Maclaurin-ов ред, који задовољава какву једначину облика (380), па потражимо општи облик коефицијената a_n таквог једног реда, као функције коефицијената $a_0, a_1, a_2, \ldots$ што му претходе.

Познато је да су коефицијенти:

$$A_0^0, \; A_1^0, \; A_2^0, \ldots$$

реда:

(384) $$y^p = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^p =$$

$$= A_0^0 + A_1^0 x + A_2^0 x^2 + \cdots$$

одређени системом линеарних једначина:

$$\alpha_{01} a_0 A_1^0 + \alpha_{10} a_1 A_0^0 = 0$$

(385) $$\alpha_{02} a_0 A_2^0 + \alpha_{11} a_1 A_1^0 + \alpha_{20} a_2 A_0^0 = 0$$

$$\alpha_{03} a_0 A_3^0 + \alpha_{12} a_1 A_2^0 + \alpha_{21} a_2 A_1^0 + \alpha_{30} a_3 A_0^0 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где су α_{ik} цели бројеви и то:

(386) $$\alpha_{ik} = k - pi$$

и где је:

(387) $$A_0 = a_0^p.$$

Из тога се лако изводи да коефицијенат A_n^0 има за израз:

(388) $$A_n = \frac{a_0^{p-n}}{n!} P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

где је P_n полином по $a_0, a_1, \ldots, a_n$ [и то $n-k+1$-ог степена по a_k за $k > 0$, а $n-1$-ог степена по a_0] са коефицијентима који су сви цели бројеви.

Ако се сад коефицијенат a_k смени са:

$$\frac{(m+k)!}{k!} a_{m+k}$$

који израз преставља коефицијенат од x^k у Maclaurin-овом реду што одговара изводу $y^{(m)}$ функције y, налази се да општи коефицијенат A_n^m реда:

(389) $$[y^{(m)}]^q = A_0^m + A_1^m x + A_2^m x^2 + \cdots$$

има за израз

(390) $$A_n^m = \frac{a_m^{q-n}}{(m!)^n \, n!} Q_n^m(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n})$$

где је Q_n^m полином по $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n}$ [чији је степен по a_k број $n+m-k+1$ за $k > m$, а који је степена $n-1$ по a_m] са коефицијентима који су цели бројеви, и где је:

(391) $$A_0^m = (m!\, a_m)^q .$$

Уочимо сад коефицијенат λ_n производа:

(392) $$[y]^{p_0}[y']^{p_1}[y'']^{p_2}\dots[y^{(m)}]^{p_m} = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots$$

и потражимо његов израз као функцију коефицијената: $a_0, a_1, a_2, \dots$ саме функције y.

Лако се налази да је:

(393) $$\lambda_n = \sum A_i^0 A_j^1 \dots A_h^m$$

где је:

(394) $$i + j + \cdots + h = n .$$

Али сваки је коефицијенат A_i^s полином првог степена по коефицијенту a_{i+s} који у њему фигурише и који у исто време преставља онај међу коефицијентима a_k, садржаним у A_i^s, који је највишега ранга.

У исто време очевидно је да:

1° Између свих коефицијената:

$$A_i^0, A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^m,$$

онај што садржи a_k највишега ранга, јесте коефицијенат A_i^m коме одговара a_{i+m} као a_k највишега ранга.

2° Између свих коефицијената

$$A_0^m, A_1^m, A_2^m, \dots, A_h^m$$

онај што садржи a_k највишега ранга, јесте коефицијенат A_h^m, коме одговара a_{h+m} као a_k највишега ранга.

3° Највећа вредност коју може имати h према погодби (394) јесте $h = n$, у коме је случају

$$i = j = \cdots = 0.$$

Из тога излази непосредно да је производ:

(395) $$A_i^0 A_j^1 \dots A_h^m$$

полином првога степена по a_{n+m} тако да је за $n > 0$

(396) $$\lambda_n = U_n\, a_{n+m} + V_n$$

где су U_n и V_n полиноми по

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n+m-1}$$

са коефицијентима рационалним по

$$a_0, a_1, \dots, a_m$$

и где су бројни коефицијенти тих рационалних функција и сами рационални бројеви. Први коефицијенат λ_0 има, у осталом, за израз:

(397) $$\lambda_0 = M\, a_0^{p_0} a_1^{p_1} \dots a_m^{p_m}$$

где је M извесан цео број.

Уочимо, напослетку, коефицијенат μ_n од x^n у збиру једнога ограниченога броја p чланова облика (392), помножених са сталним бројевима:

$$H_1, H_2, \dots, H_p .$$

Према овоме, што је горе казано, коефицијенат ће μ_n за $n > 0$ бити облика:

(398) $$\mu_n = X_n\, a_{n+m} + Y_n$$

где су X_n и Y_n полиноми по

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n+m-1}$$

са коефицијентима који су облика

$$\sum \alpha_i H_i$$

а где су α_i извесне рационалне функције по

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$$

са бројним коефицијентима који су сви рационални бројеви. Коефицијенат μ_0 има за израз

$$\mu_0 = \Sigma \lambda_0$$

и он је извесан полином по

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

са коефицијентима који су облика

$$\Sigma M_i H_i$$

где су M_i цели бројеви.

Помоћу ових елемената лако се решава и постављени проблем: одредити општи коефицијенат a_n Maclaurin-овог реда

(399) $$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

који задовољава какву диференцијалну једначину алгебарску по x, y и изводима функције y по x.

Пошто се једначина увек може довести на облик:

(400) $$\Phi(y, y', y'', \ldots) = 0$$

где је Φ збир једнога ограниченог броја p чланова облика

(401) $$H_i\, y^{p_0} y'^{p_1} \ldots y^{(m)p_m}$$

то ће Maclaurin-ов ред, у који се претвара полином Φ, кад се у њему буде сменило y редом (399) бити:

(402) $$\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots$$

где су $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ горе одређивани коефицијенти, тако да је коефицијенат μ_n дат обрасцем (398). Да би ред (399) задовољавао једначину (400) потребно је и довољно да буде: $\mu_n = 0$, па дакле према обрасцу (398)

(403) $$X_n \cdot a_{n+m} + Y_n = 0$$

одакле је:

(404) $$a_{n+m} = -\frac{Y_n}{X_n}.$$

Отуда овај први резултат:

Кад год какав ред

(405) $$y = \Sigma a_n x^n$$

задовољава какву алгебарску диференцијалну једначину коначнога реда m, коефицијенат a_n, почевши од ранга $n = m+1$, може се изразити као рационална функција претходних коефицијената:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$$

и извесног ограниченог броја ирационалних количина које не могу бити различне од оних што већ фигуришу у самој датој диференцијалној једначини; осим тога коефицијенти ових ирационалних количина увек су реални цели бројеви.

Ако се сад у обрасцу (404) смењује узастопце n са $n-1$, $n-2$, итд. из низа тако добијених једначина може се a_n израчунати као рационална функција само коефицијената $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ и долази се до овог резултата:

Коефицијенат a_n је рационална функција количина

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$$

са коефицијентима који су полиноми по коефицијентима саме диференцијалне једначине, а бројни коефицијенти ових полинома су реални цели бројеви.

Оно, дакле, што се у општем коефицијенту a_n може мењати са индексом n јесу: изложиоци поменутих полинома и цели бројеви што фигуришу у коефицијентима тих полинома. Сви ирационалитети, који би фигурисали у a_n *независни су од n*. Осим тога ти су ирационалитети рационалне комбинације оних ирационалитета што фигуришу у првих $m+n$ коефицијената реда [а који, у осталом, могу бити ма какве природе, пошто су ови коефицијенти произвољни] и у коефицијентима $H_1, H_2, H_3 \ldots$ саме диференцијалне једначине.

Отуда овај закључак:

Кад год један ред (405) задовољава какву алгебарску диференцијалну једначину, његов је општи коефицијенат a_n или рационалан број, или рационална функција једнога ограниченога броја ирационалитета који се не мењају са n; бројни коефицијенти те рационалне функције сви су реални цели бројеви.

Тај став истиче на видик *хипер-трансцендентан карактер* непрегледнога мноштва трансцендената дефинисаних редом

(406) $$a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots$$

т. ј. *немогућност да функција, коју ред претставља, буде интеграл какве алгебарске диференцијалне једначине коначног реда.* А та ће немогућност постојати кад год ред не испуњава услове последњег става.

На завршетку ових излагања биће наведена једна општа аритметичко-аналитичка теорема коју је доказао Hurwitz дубљом анализом структуре коефицијента a_n реда (406) који задовољава какву алгебарску диференцијалну једначину

(407) $$f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})=0 .$$

Теорема се односи на редове (406) чији су коефицијенти a_n *рационални* бројеви, и њој се може дати следећи облик:

Кад год ред, пошто му се коефицијенти a_n сведу на најпростији израз, задовољава какву диференцијалну једначину (407), постоји један позитиван цео број λ и један низ позитивних целих бројева

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

са овом особином везаном за коефицијенте a_n реда:

Ако се са $p(z)$ означи полином n тог степена

$$p(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n$$

сваки прост број са којим је дељив који од именилаца коефицијената

$$a_\lambda, a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots$$

садржан је као чинилац у одговарајућем целом броју

$$p(\lambda), \quad p(\lambda)\cdot p(\lambda+1), \quad p(\lambda)\cdot p(\lambda+1)\cdot p(\lambda+2), \ldots$$

а сви су ти цели бројеви различни од нуле.

Теорема доводи и до овога става као своје последице:

Ако се са β_n означи највећи прост број са којим је дељив именилац коефицијента a_n, логаритам броја β_n не расте, при рашћењу индекса n, брже него $\log n$.

А тај став доводи такође до закључака о хипер-трансцендентном карактеру непрегледног мноштва редова, тако да они не могу бити интеграли никакве алгебарске диференцијалне једначине. Такав је н. пр. случај са целом функцијом променљиве x која је претстављена редом

$$y=1+x+\frac{x^2}{(2^2)!}+\frac{x^3}{(3^3)!}+\frac{x^4}{(4^4)!}+\cdots$$

Док раније наведена теорема Pólya доказује хипертрансцендентан карактер функција једном *чисто аналитичком* особином коефицијента a_n, теорема Hurwitz-а га истиче на видик помоћу једне *аритметичко-аналитичке* особине тога коефицијента.

III.

Ставови и чињенице које ће бити предмет параграфа што следује основани су на неколиким *чисто аритметичким или аритметичко-аналитичким помоћним ставовима,* чији се докази налазе у уџбеницима за Вишу Аритметику или за Алгебарску Анализу. Ти се докази неће излагати, пошто ће ставови овде послужити само као помоћно средство за оно што се мисли доказати. Ставови су ови што следују.

Први помоћни став: *Да би број $(n-1)!+1$ био дељив са целим позитивним бројем n, потребно је и довољно да n буде прост број.*

То је позната у Аритметици Wilson-ова теорема, која се за потребе овога што следује може исказати у овоме облику: ако се означи да је

$$\frac{(n-1)!+1}{n}=\lambda,$$

за сваки прост број n је

$$\lambda=M$$

а за сваки сложен број n је

$$\lambda=M-\frac{1}{n}$$

где је M цео број. Одатле следује као последица

Други помоћни став: *За сваки прост број n је*

$$\frac{(n-1)!}{n} = M - \frac{1}{n}$$

а за сваки сложен број, осим за $n=4$, је

$$\frac{(n-1)!}{n} = M;$$

за $n=4$ је

$$\frac{(n-1)!}{n} = \frac{3}{2} .$$

Тај став налази честе примене у истраживањима аритметичких особина интегралних редова, и он ће овде бити често примењиван.

Трећи помоћни став: *Кад је n какав прост број са којим није дељив цео број a, израз*

$$\mu = \frac{a^{n-1}-1}{n}$$

је цео број.

То је Fermat-ов аритметички став о простим бројевима. Он не даје, као Wilson-ов став, потребне и довољне услове да би израз μ био цео број, јер има и сложених бројева n за које је μ цео број. Такви су бројеви јако разређени у природноме низу целих бројева, и они су названи Fermat-овим бројевима; такви ће сложени бројеви, за специјалан случај кад је $a=2$, овде бити означени са

$$c_1 , \ c_2 , \ c_3 , \dots$$

Број c_k је, дакле, ма који сложен број n за који је

$$\mu = \frac{2^{n-1}-1}{n} = \text{цео број.}$$

По једној Lucas-овој аритметичкој теореми, да би један број n био један број c_k, потребно је да њиме буде дељив не само број $2^{x-1}-1$, већ и бар још један број 2^z-1, где је z какав цео број мањи од $x-1$. Стога су ти бројеви ретки; најмањи су међу њима бројеви

$$c_1 = \ \ 341 = 11 \cdot 31 \ ,$$
$$c_2 = 1105 = \ \ 5 \cdot 13 \cdot 17 \ ,$$
$$c_3 = 4369 = 17 \cdot 257 \ .$$

Постоје таблице тих бројева које дају све бројеве c_k што леже између 0 и 100,000.000 (таблице Lehmer-а и Poulet-а). Из њих се види да између 0 и 1000 леже 3 таква броја; између 0 и 10,000 има их 22; између 0 и 100.000 има их 79; између 0 и 1,000.000 има их 247; између 0 и 10,000.000 их је 750, а између 0 и 100,000.000 има их свега 2037.

Четврти помоћни став: *Кад год ред*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{408}$$

чији су коефицијенти рационални бројеви, претставља какву алгебарску функцију променљиве x, постоји један сталан, од n независан цео број k такав да су сви производи

$$a_n k^n \qquad (n=1, 2, 3, \dots)$$

цели бројеви.

То је Eisenstein-ова теорема која даје потребне услове да би ред (408) представљао алгебарску функцију променљиве x. Она не даје у исти мах и довољне услове за то, јер има и трансцендентних функција које, развијене у ред (408) имају као коефицијенте a_n бројеве за које постоји број k са наведеном аритметичком особином. Таква је н. пр. функција $f(x)$ дефинисана елиптичким одређеним интегралом

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-16a^2x^2t^2)}}$$

где је a какав рационалан број $\frac{p}{q}$, која кад се развије у ред (408), има за коефицијенат a_n израз

$$a_{2n} = \binom{2n}{n}^2 a^{2n} = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{q^{2n}} p^{2n};$$

у томе је случају $k=q$, јер је

$$a_{2n}\, q^{2n} = (n+1)(n+2)\ldots 2n\,.\, p^{2n} = \text{цео број},$$

а сви коефицијенти a_{2n+1} су једнаки нули, пошто је $f(x)$ парна функција.

Као пример алгебарске функције за коју важи став, уочимо функцију

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

где је

$$a_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\,.$$

Тај се коефицијенат може написати у облику

$$a_n = \frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2n}{(2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n)^2} = \frac{\lambda_n}{2^{2n}}$$

где је

$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,.$$

Познато је из теорије факторијела да је λ_n увек цео број; он је једнак броју $\binom{2n}{n}$ т. ј. коефицијенту средњега члана у биномном обрасцу за $(1+x)^{2n}$. Према томе, ако се за k узме $k=4$, израз $a_n k^n$ је одиста цео број.

Из Eisenstein-ове теореме изводи се као последица

Пети помоћни став: *Кад год ред* (408) *претставља какву алгебарску функцију променљиве* x, *прости бројеви са којима је дељив именилац* a_n *у ограниченом су броју, не растући бескрајно при бескрајном рашћењу индекса* n.

Јер, пошто је

$$a_n k^n = h_n$$

где је h_n цео број, добија се да је

$$a_n = \frac{h_n}{k^n}$$

што показује да именилац коефицијента a_n не може имати

за делитељ ниједан прост број који није делитељ сталног броја k, а ови су делитељи у ограниченом броју и не расту бескрајно при бескрајном рашћењу индекса n.

Тај став истиче на видик трансцендентан карактер мноштва функција дефинисаних редом (408) са рационалним коефицијентима a_n. Тако н. пр. редови

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

имају коефицијенте чији су имениоци дељиви са простим бројевима који бескрајно расту са рашћењем ранга коефицијента; они, дакле, не могу претстављати алгебарске функције променљиве x. И одиста, први ред претставља логаритамску функцију $\log(1+x)$, а други експоненцијалну функцију e^x.

Шести помоћни став: *Кад год се ред* (408) *изражава у коначном облику помоћу елементарних, тј. алгебарских, експоненцијалних и логаритамских функција, највећи прост број, са којим је дељив именилац коефицијента* a_n, *не расте брже но што расте ранг* n *коефицијента.*

Ту је теорему дао без доказа Чебишев, али су сви покушаји да се она или тачно докаже, или нађе да је нетачна, остали безуспешни, премда сва испитивања у томе правцу нагињу томе да је теорема тачна. Она даје могућност да се чисто аритметичким посматрањима истакне на видик несводљивост појединих редова на коначне комбинације елементарних функција. Тако н. пр. број n^2+1 је дељив са простим бројевима који расту брже него n; према томе ред (408) чији је општи коефицијенат

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}$$

несводљив је на коначне комбинације елементарних функција.

У параграфима што следују ти ће аритметички и аритметичко-аналитички ставови бити примењени на испитивање аритметичких особина коефицијента a_n интегралног реда диференцијалних једначина.

IV.

Предмет овога параграфа биће диференцијалне једначине облика

$$(409) \qquad f(x, y, y', y'' \dots) = 0$$

где је f полином по променљивим $x, y, y', y'', \dots$ које садржи са коефицијентима који су *рационални бројеви* (и за које се може узети да су *цели бројеви*, пошто се ослобођавањем од именилаца увек случај може на то свести).

Уочимо најпре једначину првога реда

$$(410) \qquad f(y, y') = 0$$

која не садржи експлицитно променљиву x. Њен интеграл, који за $x = 0$ добија вредност $y = 0$, добија се инверсијом Abel-овог интеграла

$$(411) \qquad x = \int_0^y Y\, dy$$

где је Y алгебарска функција променљиве y дефинисана релацијом

$$(412) \qquad f\left(y, \frac{1}{Y}\right) = 0.$$

Са претпоставком да та једначина, решена по Y, има један корен Y који је холоморфна функција променљиве y у близини вредности $y = 0$ и који за $x = 0$ добија вредност једнаку каквоме рационалном броју, може се доказати овај став:

Променљива x дефинисана диференцијалном једначином (410) *може се развити у ред*

$$(413) \qquad x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots$$

где се коефицијенат b_n добија као коефицијенат степена x^n у развитку функције

$$(414) \qquad f(x) = x\, e^{\frac{x}{k}}$$

(k = подесно изабран цео позитиван број) кад се овај помножи једним рационалним бројем λ_n; број λ_n је цео број кад је n сложен број; кад λ_n има свој именилац различан од јединице, n је прост број.

Да би се то доказало, приметимо да пошто је Y функција променљиве y холоморфна за $y=0$, она се у близини те вредности y може развити у конвергентан ред

$$(415) \qquad Y = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots$$

Коефицијенти c_n тога реда биће сви *рационални бројеви*, што се види из овога што следује.

Коефицијенат c_0 је вредност коју добија Y за $y=0$, и она је, као што је претпостављено, рационалан број. Диференцијалењем једначине (412) по x добија се

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial Y} Y' = 0$$

одакле се, пошто је

$$y' = \frac{1}{Y}$$

и кад се стави да је

$$(416) \qquad -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{Y}}{\frac{\partial f}{\partial Y}} = f_0(y, Y),$$

решењем по Y' добија да је

$$Y' = f_0(y, Y).$$

Диференцијалењем ове једначине по x налази се да је

$$Y'' = \frac{\partial f_0}{\partial y} y' + \frac{\partial f_0}{\partial Y} Y'$$

одакле се, сменивши

$$y' = \frac{1}{Y}, \qquad Y' = f_0,$$

добија

$$Y'' = f_1(y, Y)$$

где је

$$f_1 = \frac{\partial f_0}{\partial y} \frac{1}{Y} + \frac{\partial f_0}{\partial Y} f_0 .$$

Поновним диференцијалењем добија се

$$Y''' = f_2(y, Y)$$

где је

$$f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{1}{Y} + \frac{\partial f_1}{\partial Y} f_0,$$

па ће уопште бити

$$Y^{(n)} = f_{n-1}(y, Y)$$

где је f_{n-1} члан низа функција $f_0, f_1, f_2, \ldots$ које се једна из друге израчунавају по рекурсивном обрасцу

$$f_k = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial y} \frac{1}{Y} + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial Y} f_0$$

са почетном функцијом (416).

Коефицијенат c_n израчунава се по обрасцу

$$c_n = \frac{1}{n!} [f_{n-1}]$$

где $[f_{n-1}]$ означава број који се добија кад се у функцији f_{n-1} смени

$$y = 0, \qquad Y = c_0 .$$

Па пошто су сви коефицијенти функција f_k рационални бројеви, очевидно је да ће тако исто бити и са коефицијентима c_n.

Из обрасца (411) добија се тада да је

$$(417) \qquad x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots$$

где је

$$(418) \qquad b_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \mu_n \frac{c_{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\mu_n = \frac{(n-1)!}{n} .$$

Са друге стране, пошто ред (415) претставља алгебарску функцију променљиве y, а коефицијенти су му рационални бројеви, према четвртом помоћном ставу постојаће један цео позитиван број k такав да је сваки производ

$$c_n k^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

цео број, који ако се означи са M_n биће

$$c_{n-1} = M_{n-1} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1},$$

$$b_n = \mu_n M_{n-1} h_{n-1},$$

$$h_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} .$$

Међутим h_{n-1} означава коефицијенат степена y^n у развитку функције (414). А према другом помоћном ставу број μ_n ће бити

1° цео број кад је n ма какав сложен број осим $n=4$;

2° несводљив рационалан разломак кад је n прост број; може се десити да се именилац тога разломка скрати упоредо са целим бројем M_n, али је сигурно то да кад тај именилац остане различан од јединице, n је прост број и као такав остаће у изразу за μ_n, па дакле и у имениоцу коефицијента c_n.

Тиме је став доказан. А лако се увиђа да ће сличан став важити и за општу једначину (409) кад је она таква да се из ње једна која било од променљивих $y, y', y'', \ldots$ што у њој фигуришу, изражава као *рационална функција* осталих, а коефицијенти те функције су *рационални бројеви*. И став ће важити не само за почетне услове

$$x=0\,, \quad y=0\,, \quad y'=0\,, \quad y''=0\,, \ldots$$

него и за услове

$$x=m\,, \quad y=n_0\,, \quad y'=n_1\,, \quad y''=n_2\,, \ldots$$

где су $m\,, n_0\,, n_1\,, n_2\,, \ldots$ ма какви *рационални бројеви*.

За случај једначина првога реда

$$y'=\frac{P(x\,,y)}{Q(x\,,y)} \tag{419}$$

где су P и Q полиноми по x и y *са рационалним коефицијентима*, а за интегрални ред y може се доказати ова аритметичка особина:

Напред је показано (IV одељак) да се израчунавање коефицијента a_n интегралног реда y своди на одредбу сталних чланова $p_1, p_2, p_3, \ldots$ у полиномима $P_1, P_2, P_3, \ldots$ који се један из другог израчунавају помоћу рекурсивног обрасца (59) и помоћу сталног члана q полинома Q; тада је коефицијенат a_n изражен обрасцем

$$a_n=\frac{p_n}{n!\,q^{2n-1}} \tag{420}$$

што се може написати у облику

$$a_n=\frac{k_n}{n!\,q^{2n}}$$

где је k_n цео број qp_n. Из тога се види да:

Коефицијенат a_n за $n=1, 2, 3, \ldots$ интегралног реда једнак је коефицијенту степена x^n у развитку експоненцијалне функције

$$f(x)=e^{\frac{x}{q^2}}$$

помноженом једним целим бројем.

То очевидно важи и за случај кад диференцијална једначина (419) не садржи експлицитно независно променљиву количину x. У томе случају она припада типу једначина (410) па интегрални ред има још и ту аритметичку особину да му је коефицијенат a_n једнак коефицијенту степена x^n у развитку функције

$$f(x)=x\,e^{\frac{x}{k}}$$

(где је k подесно изабран цео позитиван број), помножен једним рационалним бројем, који се своди на цео број кад је n какав сложен број, а кад му је именилац различан од јединице, n је прост број.

Горњи став за једначину (419) уопштава се и проширује и на диференцијалне једначине вишега реда

$$y^{(p)}=\frac{P}{Q} \tag{421}$$

где су P и Q полиноми по променљивим

$$x\,, y\,, y', \ldots, y^{(p-1)} \tag{422}$$

чији су коефицијенти *рационални бројеви* (што се увек може свести на случај кад су коефицијенти *цели* бројеви).

Као што је напред показано (XX одељак), израчунавање коефицијента a_n интегралног реда y своди се тада на одредбу сталних чланова $p_1, p_2, p_3, \ldots$ у полиномима $P_1, P_2, P_3, \ldots$ који се један из другога израчунавају помоћу рекурсивног обрасца (335) и помоћу сталног члана q полинома Q; тада је

$$a_n=\frac{p_n}{n!\,q^{2n-2p+1}} \qquad (n=p+1, p+2, p+3\ldots)$$

што се може написати у облику

$$a_n=\frac{k_n}{n!\,q^{2n}}$$

где је k_n цео број $p_n\,q^{2p-1}$. А то показује да горњи став за једначину (419) одиста важи и за једначину (421).

V.

Нека је сад дата ма каква, алгебарска или трансцендентна диференцијална једначина

$$(423) \qquad y' = f(x, y)$$

где се за функцију f претпоставља само то да је холоморфна функција промењљивих x и y за $x=0$, $y=0$.

Према основној Briot-Bouquet-овој теореми, интеграл једначине, који за $x=0$ добија вредност $y=0$ изражава се у облику реда

$$(424) \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

конвергентног у кругу који одређује та теорема.

Формирајмо помоћну функцију

$$(425) \qquad \varphi(x, u, u') = \frac{f(x, u+xu') - 2u'}{x}$$

а помоћу ње низ функција

$$(426) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

трију промењљивих x, u, u' које се једна из друге израчунавају по рекурсивном обрасцу

$$\varphi_n = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} u' + \varphi \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u'}$$

са почетном функцијом

$$\varphi_0 = \varphi(x, u, u').$$

Уочимо низ бројева

$$(427) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots$$

где A_n означује број који се добија кад се у функцији φ_{n-2} низа (427) смени

$$(428) \qquad x = 0, \quad u = 0, \quad u' = \frac{1}{2} f(0,0).$$

Тада постоји једна чисто аритметичка веза између двају низова бројева

$$A_5, A_6, A_7, \ldots$$

$$a_5, a_6, a_7, \ldots$$

и та се веза изражава овим ставом:

Кад год је који од бројева A_n једнак реципрочној вредности каквог целог (позитивног или негативног) броја, да би тако исто било и са коефицијентом a_n истога ранга, потребно је и довољно да буде испуњен један или други од ова два аритметичка услова:

1° или да цео број $\frac{1}{A_n}$ буде дељив са $n+1$;

2° или да n није какав прост број смањен за јединицу.

Да би се то доказало, приметимо да, пошто једначина (423) има интеграл y који се у близини вредности $x=0$ може развити у ред (424) диференцијална једначина другога реда

$$(429) \qquad u'' = \varphi(x, u, u')$$

такође има интеграл u који се у близини вредности $x=0$ може развити у ред

$$(430) \qquad u = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

Јер, ако се у једначини (429) изврши смена

$$(431) \qquad (xu)' = xu' + u = y$$

из чега се добија да је

$$(432) \qquad y' = xu'' + 2u',$$

према (425), (429) и (432) добија се да је

$$y' = x\varphi(x, u, u') + 2u' = f(x, u + xu') = f(x, y)$$

из чега се види да функција

$$y = (xu)'$$

задовољава једначину (423). Према томе је

$$(xu)' = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

а одатле се, за интеграл u који за $x=0$ добија вредност $u=0$, добија израз

$$u = \frac{1}{x}\int y\,dx = \frac{a_1}{2}x + \frac{a_2}{3}x^2 + \frac{a_3}{4}x^3 + \cdots$$

што показује да се он одиста може развити у ред (430), као и то да коефицијенат b_n тога реда има за израз

$$b_n = \frac{a_n}{n+1}\,. \tag{433}$$

Међутим, исти коефицијенат b_n може се израчунати и помоћу бројева A_n низа (427), јер се из једначине (429) узастопним диференцијалењима добија да је

$$u''' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}u' + \frac{\partial \varphi}{\partial u'}\varphi = \varphi_1,$$

$$u'''' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}u' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u'}\varphi = \varphi_2,$$

. . . .

и уопште

$$u^{(n)} = \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial u}u' + \frac{\partial \varphi_{n-3}}{\partial u'}\varphi = \varphi_{n-2},$$

$$(n=4, 5, \ldots)$$

из чега се види да је

$$b_n = \frac{A_n}{n!}\,. \tag{434}$$

Уједначивши десне стране једначине (433) и (434) добија се да је

$$a_n = \lambda_n A_n, \qquad \lambda_n = \frac{n+1}{n!}\,.$$

Да би коефицијенат a_n био једнак реципрочној вредности каквог целог броја, потребно је и довољно 1° или да именилац броја A_n буде дељив са $n+1$; 2° или да λ_n буде реципрочна вредност каквог целог броја. Према другом помоћном ставу, пошто је по претпоставци $n>4$, да би услов 2° био испуњен, потребно је и довољно да $n+1$ буде сложен број, чиме је став доказан.

Један став сличне врсте може се доказати и за први извод y' диференцијалне једначине (423). Формирајмо помоћну функцију

$$\psi(x, u) = \frac{f(x, xu) - u}{x} \tag{435}$$

и помоћу ње низ функција

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{436}$$

двеју променљивих x и u, које се једна из друге израчунавају по рекурсивном обрасцу

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} + \psi\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u}$$

са почетном функцијом

$$\psi_0 = \psi(x, u).$$

Уочимо низ бројева

$$C_1, C_2, C_3, \ldots$$

где C_n означује број који се добија кад се у функцији ψ изврши смена

(437) $x = 0, \qquad u = f(0,0).$

Тада између низова бројева

$$C_5,\ C_6,\ C_7, \ldots$$

$$\alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7, \ldots$$

где су α_n коефицијенти реда

$$y' = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

постоји аритметичка веза изражена овим ставом:

Кад год је који од бројева C_k једнак реципрочној вредности каквог целог (позитивног или негативног) броја, да би тако исто било и са коефицијентом α_n, потребно је и довољно да буде испуњен један или други од два аритметичка услова:

1° *или да цео број* $\frac{1}{C_k}$ *буде дељив са* $k+1$;

2° *или да* k *није какав прост број смањен за јединицу.*

Да би се то доказало, ставимо да је

$$\frac{y}{x} = u.$$

Партикуларном интегралу

(438) $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$

једначине (423) одговара партикуларни интеграл

(439) $u = \frac{y}{x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$

једначине

(440) $u' = \psi(x, u)$

који за $x = 0$ добија вредност

$$u = a_1 = f(0,0).$$

Према једначини (439) и ранијем правилу за израчунавање коефицијената интегралног реда, биће

(441) $c_n = \frac{C_n}{n!},$

па пошто се из (438) и (439) види да је у исто време и

(442) $c_n = a_{n+1}$

упоређењем једначина (441) и (442) добија се да је

$$a_{n+1} = \frac{C_n}{n!},$$

а како је

$$\alpha_n = (n+1)\, a_{n+1}$$

налази се да је

$$\alpha_n = \lambda_n C_n, \qquad \lambda_n = \frac{n+1}{n!}$$

па се доказ довршује као и у претходном случају.

Први пример: За диференцијалну једначину

(443) $y' = \frac{x+1}{x} y + x$

је

$$\psi(x, u) = 1 + u$$

па се налази да је

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \cdots = 1 + u$$

и према томе

$$C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = 1.$$

Једначина (440) овде је

$$u' = 1 + u;$$

и она има као партикуларни интеграл

$$u = e^x - 1;$$

једначина (443) има као одговарајући партикуларни интеграл

$$y = x(e^x - 1)$$

који има за извод

$$y' = (x+1)e^x - 1$$

који развијен у ред даје

$$y' = 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{7}{720}x^6 + \frac{1}{630}x^7 + \cdots$$

па се на томе реду непосредно проверава да су коефицијенти оних степена x_n једнаки реципрочној вредности каквога целог броја за које је $n+1$ сложен број; они то нису за оне вредности n за које је $n+1$ прост број.

Други пример: За диференцијалну једначину

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 - y^2} \tag{444}$$

је

$$\psi(x, u) = \sqrt{1-u^2}$$

па се налази да је

$$\psi_{4k} = \sqrt{1-u^2}, \qquad \psi_{4k+1} = -u,$$

$$\psi_{4k+2} = -\sqrt{1-u^2}, \qquad \psi_{4k+3} = u,$$

и према томе сви бројеви C_n имају за вредност 0, -1, $+1$. То доводи за ред у који се може развити извод y' до истог закључка као у првоме примеру. А закључак се проверава непосредно на интегралу y који је

$$y = x \sin x$$

чији се извод

$$y' = \sin x + x \cos x$$

може развити у ред

$$y' = 2x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{20}x^3 - \frac{1}{630}x^4 + \cdots$$

XXIV. Аритметичке особине интеграла диференцијалних једначина.

У одељку што претходи изложене су неколике аритметичке особине коефицијената a_n интегралног реда диференцијалне једначине или система, првога или вишег реда. Од интереса је сазнати и за поједине аритметичке особине самога интеграла. Такве су н. пр. особине везане за вредности које интеграл добија кад се у њему независно промењљива количина x смени целим бројем, или за нуле интеграла, његове максимуме и минимуме, његове асимптотне вредности, појединих геометриских елемената интегралне криве линије итд. У овоме ће одељку бити дат одговор на неколика питања те врсте, а која се нарочито тичу улоге *простих бројева* у чисто аналитичким проблемима интеграције диференцијалних једначина.

I.

Посматрајмо скуп функција

$$y = \Phi(x)$$

које имају ту особину да за $x =$ ма коликом целом позитивном броју m функција добија вредност $\Phi(m)$ која је *рационалан број*. Нека су p и q бројилац и именилац тога рационалног броја после извршеног могућног скраћивања, тако да је

$$\Phi(m) = \frac{p}{q}.$$

Лако се уверити да постоје

1° такве функције $\Phi(x)$ да кад год је именилац q различан од јединице, он је увек *сложен број*. Таква је н. пр. према Wilson-овој теореми (помоћни став у XXIII одељку) функција

$$\Phi(x)=\frac{1+\Gamma(x)}{x}.$$

Функције те врсте овде ће бити означене као *функције* $\lambda(x)$;

2° такве функције $\Phi(x)$ да кад год је именилац q различан од јединице, он је увек *прост број*. Таква је н. пр. опет према Wilson-овој теореми, функција

$$\Phi(x)=\frac{\Gamma(x)}{x} \qquad \text{за } x>4 .$$

Функције те врсте овде ће бити означене као *функције* $\mu(x)$.

На питање: да ли алгебарске диференцијалне једначине

$$(445) \qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})=0$$

могу имати међу својим интегралима и функције $\lambda(x)$ или $\mu(x)$, може се дати овај одговор:

Све до данас познате функције $\mu(x)$ су *хипертрансценденте*, тј. нису интеграли никакве једначине (445). Али то не важи и за функције $\lambda(x)$: *диференцијалне једначине* (445) *могу имати као своје интеграле функције* $\lambda(x)$.

Да би се о томе уверили, посматрајмо функцију

$$(446) \quad y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x}-1\right) \quad \text{где је} \quad \alpha=\log 2=0,693147\ldots$$

То је једна функција $\lambda(x)$, јер се она може написати у облику

$$y=\frac{2^{x-1}-1}{x}$$

а према Fermat-овој теореми (помоћни став у XXIII одељку) израз $2^{x-1}-1$ је дељив са x кад год је x цео прост број; ако, дакле, вредност функције y за $x=$ цео број има именилац различан од јединице, тај именилац је сложен број и y је једна функција $\lambda(x)$. Међутим, та функција y је интеграл линеарне једначине првога реда

$$(447) \qquad xy'+(1-\alpha x)y-\alpha=0.$$

Међу функцијама $\lambda(x)$ могу се разликовати

1° једне, које ће бити означене са $\lambda_1(x)$, и за које је $\lambda_1(x)$ цео број кад год је x цео *прост број*, а разломак кад год је x цео *сложен број*. Таква је н. пр. функција

$$\lambda_1(x)=\frac{1+\Gamma(x)}{x};$$

2° друге, које ће бити означене са $\lambda_2(x)$, за које, кад x не премаша један утврђен број M, вредност $\lambda_2(x)$ има горњу аритметичку особину функција $\lambda_1(x)$.

За до сада познате функције $\lambda_1(x)$ не постоји никаква диференцијална једначина (445) која би њих имала као своје интеграле. Али то не важи и за функције $\lambda_2(x)$: *постоје диференцијалне једначине* (445) *што имају као свој интеграл коју од функција* $\lambda_2(x)$.

Да би се о томе уверили, уочимо функцију

$$(448) \qquad y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{\alpha x}-1\right)+\frac{a}{2\pi}R(x)\sin 2\pi x$$

где је a произвољан рационалан број, а $R(x)$ рационална функција облика

$$R(x)=\frac{1}{x-c_1}+\frac{1}{x-c_2}+\cdots+\frac{1}{x-c_p}$$

а где $c_1, c_2 \ldots c_p$ означује скуп Fermat-ових бројева који не премашују дати број M (в. помоћни став у XXIII одељку).

Лако се уверити да са таквом структуром рационалне функције $R(x)$ функција y има ту особину да постаје цео број кад се x смени ма којим простим бројем, а да постаје разломак кад се x смени ма којим сложеним бројем мањим од M. Јер, према Fermat-овој теореми, за $x =$ прост број први сабирак функције y је цео број, а други сабирак постаје једнак нули; за $x =$ сложен број $\leqslant M$ (осим $x=c_1, c_2 \ldots c_p$) први сабирак је разломак, а други сабирак једнак нули; за саме вредности $x=c_1, c_2 \ldots c_p$ први је сабирак цео број, а други је разломак (што се види применом L'Hospital-овог правила на тај сабирак). То показује да функција y одиста има одлику функција $\lambda_2(x)$.

Међутим, *та функција y је интеграл једне диференцијалне једначине другога реда облика*

$$Py''^2+Qy'+S=0 \tag{449}$$

где су P, Q, S полиноми по y и y'; коефицијенти тих полинома су рационалне функције променљиве x чији су коефицијенти цели бројеви. Полином P је другога степена, Q је трећег, а S четвртог степена по y и y'. Једначина (449) добија се кад се једначина (448) диференцијали два пута узастопце, па се из тако добијених двеју једначина и једначине (448) елиминишу $\sin 2\pi x$ и $\cos 2\pi x$.

Кад је $M<341$, пошто не постоји ниједан број c_k мањи од M, функција y се своди на функцију (446), а диференцијална једначина (449) на једначину (447).

Кад је $M<1105$, пошто постоји само један број c_k мањи од M, а то је $c_1=341$, функција y је

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{ax}-1\right)+\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{\sin 2\pi x}{x-341}.$$

Кад је $M<4369$, пошто постоје само два броја c_k мања од M, а то су $c_1=341$ и $c_2=1105$, функција y је

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{ax}-1\right)+\frac{a}{2\pi}\cdot\frac{2x-1446}{x^2-1446x+376805}\sin 2\pi x. \tag{450}$$

II.

Зна се да постоји бескрајно много функција $\theta(x)$ које су униформне у целој равни променљиве x и имају ту одлику да постају једнаке нули за све *просте бројеве* x, веће од 2, а различне су од нуле за све *сложене бројеве*. Али ни једна од таквих функција није интеграл никакве једначине (445).

По аналогији са оним што је казано у параграфу I, поставља се питање: да ли има таквих функција $\theta(x)$ које задовољавају какву од једначина (445), а имају ту аритметичку особину за све бројеве x што не премашају један дати број M?

Одговор на питање је позитиван: *постоје диференцијалне једначине* (445) *што имају за интеграл коју од таквих функција* $\theta(x)$.

Да би се то видело, пођимо од једначине првога реда

$$\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{y'}{\lambda_2'}\right)^2+y^2-1=0 \tag{451}$$

где је λ_2 једна од функција (448) из параграфа I. Елиминацијом трансцендената e^{ax} и $\sin 2\pi x$ из једначине (451) и двеју једначина које се из ове добијају двема узастопним диференцијалењима, долази се до једне алгебарске диференцијалне једначине трећега реда

$$f(x, y, y', y'', y''')=0$$

која има за један свој партикуларни интеграл функцију

$$y=\sin(2\pi\lambda_2)$$

а та функција, према аритметичкој особини функције λ_2, постаје једнака нули кад је x ма какав прост број, а различна је од нуле кад је x какав сложен број што не премаша M.

Али функције $\theta(x)$ такве врсте могу, поред простих бројева, имати као своје реалне нуле још и друге бројеве који нису цели, пошто се може десити да функција $\lambda_2(x)$ постане цео број и за коју вредност x који није цео број. Поставља се, дакле, питање: да ли има таквих функција $\theta(x)$ које задовољавају какву диференцијалну једначину (445), а које би имале као своје реалне нуле што не премашају дати број M, искључиво просте бројеве x?

Одговор је и на то питање позитиван: *постоје диференцијалне једначине* (445) *што имају за интеграл коју од таквих функција* $\theta(x)$. Таква би н. пр. једна функција била

$$\theta(x) = 2 - \cos 2\pi x - \cos 2\pi\lambda_2$$

јер, да би она за реално x добила вредност нулу, потребно је и довољно да буде у један исти мах

$$\cos 2\pi x = 1 \ , \qquad \cos 2\pi\lambda_2 = 1 \ ;$$

прва једначина показује да x треба да је цео број, а друга да је λ_2 цео број, па дакле тај цео број x треба да буде једнак ма коме простом броју; за ма какав сложен број што не премаша M то неће бити случај.

Међутим та функција $\theta(x)$ је интеграл једне алгебарске диференцијалне једначине која се добија елиминацијом трансцендената из једначине (451) и оних што се из ње добијају узастопним диференцијалењима.

III.

У погледу асимптотних вредности интеграла алгебарских диференцијалних једначина може се тврдити да и оне могу бити у вези са простим бројевима. Тако, има пространих класа једначина првога или вишег реда чији општи, или који партикуларни интеграл *има за асимптотну вредност број који се изражава помоћу простих бројева што не премашају један утврђен број* M.

Уочимо н. пр. једначину другога реда

$$y'' + \varphi(y)\, y'^2 + f(x)\, y' = 0 \tag{452}$$

где је $\varphi(y)$ дата функција промењиве y, а $f(x)$ дата функција промењиве x. Сменом

$$y' = zY \ , \tag{453}$$

одакле је

$$y'' = Yz' + YY'z^2 \ , \tag{454}$$

једначина (452) постаје

$$z' + (Y' + \varphi Y)\, z^2 + fz = 0. \tag{455}$$

Изаберимо Y тако да буде

$$Y' + \varphi Y = 0 \ , \tag{456}$$

тј. тако да је

$$Y = e^{-\int \varphi(y)\, dy} \ , \tag{457}$$

па се једначина (455) своди на

$$z' + f(x)\, z = 0 \ , \tag{458}$$

а ова има за општи интеграл

$$z = C'e^{-\int f(x)\, dx} \ , \tag{459}$$

где је C' интеграциона константа.

Према обрасцима (453), (457) и (459) општи интеграл једначине (452) је

(460) $$y=\psi\left[C+C'\int_0^x e^{-\int f(x)\,dx}\,dx\right],$$

где $y=\psi(t)$ означује инверсију интеграла

(461) $$\int e^{\int\varphi(y)\,dy}\,dy=t.$$

Уочимо специјалан случај кад је:

1° инверсија $\psi(t)$ периодична функција променљиве t;

2° функција $f(x)$ има облик

(462) $$f(x)=1-\frac{P'_m(x)}{P_m(x)},$$

где P_m означује полином $(m-1)$-ог степена

(463) $$P_m(x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^{m-1}}{m},$$

где су имениоци сабирака чланови природног низа целих бројева који не премашају m.

Тада је

$$\int f(x)\,dx=x-\log P_m(x)$$

и према томе

$$e^{-\int f(x)\,dx}=e^{-x}P_m(x).$$

Општи интеграл једначине (452) је дакле

(464) $$y=\psi\left[C+C'\int_0^x P_m(x)\,e^{-x}\,dx\right],$$

а асимптотна вредност $y(\infty)$ интеграла за $x=\infty$ је

(465) $$y(\infty)=\psi(C+C'I_m),$$

где је

$$I_m=L_1+L_2+\cdots+L_m,$$

$$L_n=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx=\frac{(n-1)!}{n}.$$

Пошто је, према ранијем помоћном ставу (XXIII одељак)

за $n=$ прост број $\quad\frac{(n-1)!}{n}=M-\frac{1}{n}$,

за $n=$ сложен број (осим 4) $\quad\frac{(n-1)!}{n}=N$,

за $n=4$ $\quad\frac{(n-1)!}{n}=1-\frac{1}{2}$,

(где су M и N цели бројева), то ће бити

$$y(\infty)=\psi(C+C's_m-C'A),$$

где је A цео број, а s_m означује бројну константу

(466) $$s_m=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots$$

једнаку збиру реципрочних вредности природног низа простих бројева који не премашују m.

Ако се узму у обзир они интеграли y што одговарају вредности интеграционе константе

(467) $$C'=\omega,$$

где је ω елементарна периода функције $\psi(t)$, биће

$$y(\infty) = \psi(C+\omega s_m), \tag{468}$$

из чега се види да:

Алгебарска једначина другога реда (452), *кад се у њој алгебарске функције* $f(x)$ *и* $\varphi(y)$ *изберу на горе наведени начин, има једну класу интеграла у што зависе од једне интеграционе константе* C *и чија се асимптотна вредност изражава помоћу природног низа простих бројева мањих од једнога одређеног броја.*

Такав је н. пр. случај са једначином

$$(y''+fy')(1-y^2)+yy'^2=0,$$

кад је f рационална функција променљиве x облика (462). Тој једначини одговара

$$\varphi(y)=\frac{y}{1-y^2}, \qquad Y=\sqrt{1-y^2}, \qquad \psi(t)=\sin t,$$

тако да је њен општи интеграл

$$y=\sin\left[C+C'\int_0^x e^{-x}P_m(x)\,dx\right].$$

Она класа интеграла те једначине што одговара вредности $C'=2\pi$ константе C', има горе наведену аритметичку особину: њихова асимптотна вредност је

$$y(\infty)=\sin(C+2\pi s_m).$$

IV.

Поједини геометриски елементи интегралне криве линије такође могу бити у вези са простим бројевима и изражавати се помоћу ових. Као пример, овде ће бити показана таква веза што постоји између простих бројева и површине интегралне криве за алгебарску диференцијалну једначину другога реда формирану на овај начин:

Пођимо од линеарне једначине првога реда

$$f(x)y'+\varphi(x)y+\psi(x)=0 \tag{469}$$

где је

$$f(x)=xe^x, \qquad \varphi(x)=\frac{d}{dx}(xe^x),$$

$$\psi(x)=-\left(\frac{x^\beta-x^\alpha}{x-1}\right)$$

а α и β ($\alpha<\beta$) означују два ма каква цела позитивна броја већа од 4.

Кад се из (469) и једначине

$$fy''+(\varphi+f')y'+\varphi'y+\psi'=0$$

која се добија диференцијалењем једначине (469) елиминише e^x, добија се једна диференцијална једначина другога реда

$$F(x,y,y',y'')=0 \tag{470}$$

где је F полином по $x, y, y'\ y''$; то је једначина која се овде има у виду.

Једначина (469) има као један свој партикуларни интеграл функцију

$$y=\frac{e^{-x}}{x}\int_0^x\frac{x^\beta-x^\alpha}{x-1}\,dx \tag{471}$$

па ће њу имати за партикуларни интеграл и једначина (470). Интегрална крива пролази кроз координатни почетак, има са десне стране осовине oy један позитивни максимум и осовина ox јој је асимптота, а у исто време и дирка у почетку. То се види из тога што је

$$\frac{x^\beta-x^\alpha}{x-1}=x^\alpha+x^{\alpha+1}+\cdots+x^{\beta-1} \tag{472}$$

према чему је

$$\frac{1}{x}\int_0^x \frac{x^\beta - x^\alpha}{x-1}\,dx = \frac{x^\alpha}{\alpha+1} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+2} + \cdots + \frac{x^{\beta-1}}{\beta}\,.$$

Једначина интегралне криве може се, дакле, написати у облику

$$y = e^{-x} P(x)$$

где је $P(x)$ полином (472). Извод y' је

$$y' = Q(x)\, e^{-x}$$

где је Q полином

$$Q(x) = P'(x) - P(x) = \frac{\alpha}{\alpha+1} x^{\alpha-1} + C_1 x^\alpha + C_2 x^{\alpha+1} + \cdots - \frac{x^{\beta-1}}{\beta}\,,$$

а $C_1, C_2 \ldots$ су константе изражене обрасцем

$$C_k = \frac{(\alpha+k)^2 - (\alpha+k+1)}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}\,.$$

Из тога се види да ће за $x=0$ бити $y'=0$, тј. да интегрална крива додирује апсцисну осовину у координатном почетку. А пошто је број $\alpha+k$ већи од 2, коефицијенти C_k су сви позитивни, тако да полином $Q(x)$ има свега једну промену знака својих сабирака, па према томе он има највише једну позитивну нулу. Та нула одиста постоји, јер за довољно малу позитивну вредност x вредност $Q(x)$ је позитивна, док за врло велике вредности x она је негативна (пошто је $\beta-1$ највиши степен у полиному Q). Тој јединој нули полинома Q одговара једна максимална функција y, јер кад би то био један њен минимум, функција би морала проћи кроз још један максимум пре но што почне опадати и тежити нули као граничној вредности.

Целокупна површина S интегралне криве линије, што се налази са десне стране ординатне осовине, има тада ову аритметичку особину:

Кад год је површина S изражена каквим децималним бројем, децимални део тога броја једнак је допуни до јединице децималног дела збира реципрочних вредности свих простих бројева што се налазе између α и β.

Да би се то доказало, пођимо од обрасца

$$S = \int_0^\infty y\,dx = \int_0^\infty e^{-x} P(x)\,dx$$

из кога се добија да је

$$S = A_{\alpha+1} + A_{\alpha+2} + A_{\alpha+3} + \cdots$$

где је

$$A_n = \frac{1}{n}\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

што према познатом интегралном обрасцу

$$\int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = p\,!$$

даје

$$A_n = \frac{(n-1)!}{n}\,.$$

Према помоћном ставу из XXIII одељка, кад год је $n>4$ какав сложен број, факторијел $(n-1)!$ је дељив са n, а кад год је $n>4$ какав прост број, биће

$$\frac{(n-1)!}{n} = \text{цео број} - \frac{1}{n}\,.$$

Према томе ће бити

$$S = \text{цео број} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \cdots\right)$$

где су $p, p', p'' \ldots$ узастопни прости бројеви што се налазе између α и β, као што је требало доказати.

САДРЖАЈ

		стр.
I	Општи појмови о интеграцији диференцијалних једначина	3
II	Општи појмови о интеграцији једначина првога реда	7
III	Формално решење у облику реда	12
IV	Примери за одредбу формалног решења	19
V	Конвергенција добијеног реда	23
VI	Искључивост добијеног реда као интеграла једначине	31
VII	Основна теорема о фактичком решењу проблема интеграције	35
VIII	Практична примена основне теореме	37
IX	Специјалније компаративне једначине у проблему интеграције	46
X	Сумирање двоструких редова у проблему интеграције	52
XI	Редови што изражавају општи интеграл диференцијалне једначине првога реда	74
XII	Аналитичко продужење реда што изражава интеграл једначине	81
XIII	Случај кад десна страна диференцијалне једначине постаје бескрајна за $x=0$, $y=0$	84
XIV	Случајеви кад се десна страна диференцијалне једначине за $x=0$, $y=0$ јавља у облику $\frac{0}{0}$	93
XV	Случај кад десна страна једначине има вредности $x=0, y=0$ као критичке сингуларитете	122
XVI	Практично упуство за интеграцију диференцијалне једначине првога реда у облику редова	126
XVII	Коефицијенат a_n интегралног реда као функција свога ранга n	133
XIX*)	Системи симултаних једначина првога реда	145
XX	Диференцијалне једначине и системи симултаних једначина вишега реда	152
XXI	Интеграција диференцијалних једначина и система за ма какве коначне почетне вредности променљивих	166
XXII	Интеграл диференцијалне једначине првога реда изражен као позната функција реда одређеног облика	173
XXIII	Аритметичке особине коефицијента a_n интегралног реда	179
XXIV	Аритметичке особине интеграла диференцијалних једначина	207

*) Одељак XVIII накнадно изостављен.

ИСПРАВКЕ

стр.	63,	ред 2	оздо,	треба	$U_k(t)=\sum \frac{A_m}{m^k} t^m$
„	63,	„ 1	„	„	$V_k(t)=\sum \frac{B_n}{n^k} t^n$
„	64,	„ 3	„	„	$U_0(t)=V_0(t)=\sum_{m=1}^{\infty} t^m=\frac{t}{1-t}$
„	64,	„ 2	„	„	$U_1(t)=V_1(t)=-\log(1-t)$
„	176,	„ 9	озго	„	$y=-\frac{t\,\varphi_{m-1}(1,t)}{\varphi_m(1,t)}$.