O PREVIDJANJU SLUCAJNIH PROCESA

Doktorska disertacija ZORANA IVKOVICA, asistenta Prirodno-matematickog fakuteta u Beogradu, radjena pod rukovodstvom DRAGOLJUBA MARKOVICA, prof. dr, na Prirodno-matematickom fakultetu u Beogradu.

U BEOGRADU, maja 1964. godine   ZORAN IVKOVIC, asistent

Ovaj rad podeljen je u dva dela. U prvom delu data je reprezentacija nelinearnog predvidjanja regularnog stacionarnog procesa, koja je analogna reprezentaciji Wold-a kod linearnog predvidjanja. U drugom delu se tretira problem greške aproksimacije stohastičkog procesa pri slučajnim opservacijama sa posebnim razmatranjem greške predvidjanja.

Definicije , leme i teoreme koje su numerisane jesu nove.

Sve one važe i u slučaju vektorskog slučajnog procesa (sa odgovarajucim malim izmenama u formulacijama i dokazima), ali samo u cilju veće preglednosti ovde se razmatraju jednodimenzionalni slučajni procesi.

Na kraju je dat spisak literature koja je direktno konsultovana.

D E O   P R V I

O JEDNOJ REPREZENTACIJI NELINEARNOG PREDVIĐANJA REGULARNIH STACIONARNIH PROCESA

1.0. Pregled izlaganja

Najpre se izlazu osnovni pojmovi o slucajnim procesima uglavnom na osnovu danas vec klasicne knjige Doob-a /1/, zatim se prelazi na definisanje nelinearnog predviđanja slucajnog procesa kao uslovnog matematickog ocekivanja. Ovakva definicija nalazi se u jednoj fus noti vec 1953. godine u radu Jagloma /2/, dok je opsirnije oformljena i obrazlozena u radu Masani-a i Wienera /3/.

Dalje se uvodi klasa stacionarnih procesa koji danas i sa gladista teorijskih razmatranja (njihova egzistencija ekvivalentna je egzistenciji jednoparametarske grupe jako neprekidnih unitarnih operatora u Hilbert-ovom prostoru) i sa gledista primena (statisticka analiza nestacionarnih slucajnih procesa je nepouzdana zbog nevelikog broja realizacija koje se mogu testirati) zauzimaju centralno mesto u teoriji slucajnih procesa. Prema monografiji Rozanov-a /4/ koja se pojavila 1963. godine i predstavlja danas jedino sistematsko izlaganje najnovijih rezultata os stacionarnim procesima i linearnom prognoziranju, izlaze se uvodjenjem mere u prostoru realizacija i uvodi pojam translacije. Zatim se definise pojam regularnog stacionarnog procesa i daje jedan slikovit ekvivalenat toj definiciji.

Dalje se prelazi na rzmatranje slucajnih procesa kao krivih u Hilbert-ovom prostoru. Rad /5/ Kolmogorova koji je 1941. godine uveo u teoriju verovatnoce metod funkcionalne analize pokazao se izvanredno dalekosezan i plodan. Specijalno metod Hilbert-ovih prostora u klasi slucajnih procesa stacionarnih u širem i užem smislu, doveo je kod ovih prvih do najznačajnih resultata o linearnom prognoziranju.

Uvodjenjem Hilbert-ovih prostora problem predvidjanja svodi se na nalazenje odredjenih projekcija. Taj rezultat je dokazan kod Masani-a i Wiener-a /3/ u slučaju realnog stacionarnog procesa sa diskretnim parametrom, dok ovde posmatramo kompleksne procese sa ne prekidnim ili diskretnim parametrom. Medjutim, dokaz ostaje uglavnom isti tako da se ovde ne navodimo. S obzirom da se u radu /3/ Masani-a i Wiener-a pokazuje mogućnost izražavanja nelinearnog predvidjanja pomoću momenata uvedene su, pored navedenih, oštre restrikcije na slucajan proces: pripadanjem klasi L_{∞} i Assuption 7.5 (/3/). U ovom radu, obzirom da je cilj dobijanje izvesnih reprezentacija analognih Wold-ovoj tih ogranicenja nema; odgovarajuci uslov je pripadanje klasi L_2.

U tački 1.4 razmatra se problem reprezentacije procesa i predvidjanja u slučaju diskretnog parametra i to čini sadržaj teorema 1.2 i 1.3. Predhodno se pokazuje kako se neke geometrijske osobine Hilbert-ovih prostora mogu da prenesu na stacionarne procese. Konkretno, teorema 1.1. dokazuje ekvivalenciju regularnosti stacionarnih procesa i ireducibilnosti odredjenih Hilbertovih potprostora. Zatim se koriste osobine i-reducibilnosti koje su izložene kod Maloos-a u /6/ i /7/. Na kraju se pokazuje kako se dobijene reprezentacije svode na danas klasicne radove Kolmogorova /5/ o linearnom predvidjanju.

U tački 1.3 najpre se uvodi pojam slucajne spektralne mere (definicija 1.1), analogno postupku Hanner-a /8/ u slucaju linearno regularnih stacionarnih procesa. Kako je ovde zahvat drugciji, a u samom pocetku uvedena je predpostavka regularnosti, osobine takve mere od kojih su neke identicne sa onim kod Hanner-a /8/ dokazuju se u nekoliko lema, postupkom znatno kracim od Hanner-ovog . Teoreme 1.4 i 1.5 daju reprezentacije procesa i predvidjanja u slučaju neprekidnog parametra. Na kraju se, kao i u predhodnoj tacki, pokazuje kako se ti rezultati svode na linearno predvidjanje i dobijaju reprezentacije Karhunen-a /9/ i Hanner-a/8/.

1.1. Definicija predvidjanja slucajnog procesa

Neka je (Ω, F, P) prostor elementarnih slucajnih dogadjaja ω sa Borelovim poljem F nad kojim je definisana mera (verovatnoca) P. Svaka kompleksna slucajna promenljiva x je jedna merljiva funkcija $x(\omega)$ nad (Ω, F, P). Slucajan proces $x(t)$ je familija slucajnih velicina $x(t)$, $t \in T$ koje zavise od parametra t koji se redovno uzima kao vreme. (U statistickoj teoriji turbulencije parametar t moze da znaci i, na pr., generalisanu koordinatu). Ako je skup T diskretan moze se "menjanjem casovnika" uvek uzeti da je skup celih brojeva i tada imamo proces sa diskretnim parametrom. U slucaju da je T interval ili skup intervala imamo proces sa neprekidnim parametrom (redovno se uzima da je T cela vremenska osa: $(-\infty, \infty)$). Dakle, slučajan proces $x(t)$ je funkcija sa kompleksnim vrednostima definisana nad $\Omega \times T$ i mozemo ga oznaciti $x(t, \omega)$. Za svako fiksirano $t_0 \in T$ $x(t_0, \omega)$ predstavlja jednu merljivu funkciju nad (Ω, F, P), dakle jednu slučajnu velicinu. Za svaki fiksiran elementarni dogadjaj $\omega_0 \in \Omega$, $x(t, \omega_0)$ je kompleksna funkcija nad T i zove se realizacija ili trajektorija slucajnog procesa $x(t, \omega)$.

Pitanje uvodjenja mere (verovatnoće) za takav proces prirodno namecé odmah sledeći problem: mogu se konstruisati slučajni procesi (Doob /1/, glava II.) za koje

$$P(\omega : x(t, \omega) \equiv 0, \quad t \in S) = 1,$$

gde $S \subset T$ je prebrojiv skup, a sa druge strane

$$P(\omega : x(t, \omega) \equiv 0, \quad t \in T) = 0.$$

Da se izbegnu ovakvi "patoloski slucajevi" odmah ćemo u pocetku uvesti predpostavku o separabilnosti slucajnog procesa i dalje uvek prećutno smatrati da je ispunjena. Slučajan proces $x(t)$ je separabilan ako za svaki elemenat K Borelovog polja kompleksne ravni i svaki otvoreni interval $I \subset T$ postoji niz $\{t_i\}$ vrednosti parametra i skup Λ mere 0 tako da se ω skupovi $(\omega : x(t) \in K, \ t \in I)$ i $(\omega : x(t) \in K, \ t_i \in I)$

razlikuju za ω - skup koji je podskup od Λ.

Dakle, Borelovo polje F možemo generirati pomoću cilindričnih ω- skupova oblika

$$A = (\omega : x(t_1) \in E_1, \ldots , x(t_k) \in E_k),$$

za svako $t_1, \ldots, t_k$ i $E_1, \ldots, E_k$.

Predpostavimo za tremutak da je $x(t)$ realan slučajan proces. Tada za davanje familije konačnodimanzionalnih funkcija raspodele

$$F_{t_1,\ldots,t_k}(a_1,\ldots,a_k) = P(\omega : x(t_1) < a_1,\ldots,x(t_k) < a_k)$$

sa odgovarajucim uslovom kompatibilnosti

$$F_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(a_1,\ldots,a_{k-1}, \infty) = F_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(a_1, \ldots a_{k-1}),$$

Za svako $t_1, \ldots, t_k$ i $a_1, \ldots, a_k$, potpuno odredjuje sa gledišta teorije verovatnoće taj slučajni proces. Kompleksan slučajan proces je odredjen familijama funkcija raspodele svog realnog i imaginarnog dela.

Problem predvidjanja slučajnog procesa $x(t)$ u fiksiranom trenutku $t+\tau$ na osnovu poznavanja procesa u vremenu $(-\infty, t]$, t je fiksirano može da se postavi kao odredjivanje funkcija raspodele uslovnih verovatnoća (u slučaju realnog procesa)

$$F (u \mid x(t_1) = a_1, \ldots, x(t_k) = a_k) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{P(\omega : a_1 \leq x(t_1) < a_1 + \delta, \ldots, a_k \leq x(t_k) < a_k + \delta, x(t+\tau) < u)}{P(\omega : a_1 \leq x(t_1) < a_1 + \delta, \ldots, a_k \leq x(t_k) < a_k + \delta)}$$

Za svako $t_1, \ldots, t_k$ i $a_1, \ldots, a_k$, u.

U slučaju slučajnog procesa sa kompleksnim vrednostima imamo par takvih odgovarajućih funkcija raspodele uslovnih verovatnoća.

Ili u kondenzovanijoj formi: neka je $F_{-\infty}^{t}$ restrikcija Borelovog polja F, generisana ω- skupovima

$$A = (\omega : x(t_1) \in E_1, \ldots, x(t_k) \in E_k)$$

gde $t_1, \ldots, t_k \leq t$.

Tada u smislu teorije verovatnoće potpunu prognozu o $x(t + \tau)$ imamo ako su zadane uslovne verovatnoće

$$P(\omega : x(t + \tau) \in E \mid F_{-\infty}^{t})$$

za svako E.

Očigledno je poznavanje tih uslovnih verovatnoća za svako t i τ ekvivalentno zadavanju mere slučajnog procesa. Ne treba naročito naglašavati da sa praktične strane je ovo izvodljivo samo za neke sasvim uske klase slučajnih procesa. Zato je izlaz u traženju nekih brojčanih karakteristika tih raspodela uslovnih verovatnoća. Sa praktičnog i teorijskog stanovišta najprihvatljivije je traženje uslovnih matematičkih očekivanja

$$E\,(x(t+\tau)\mid F^{t}_{-\infty}).$$

Ovu ćemo veličinu označavati sa $\hat{x}(t;\tau)$ i dalje smatrati kao predvidjanje slučajnog procesa $x(t)$ u trenutku $t+\tau$ na osnovu poznavanja slučajnog proc-esa u intervalu $(-\infty, t]$.

Simbol $E(\cdot)$ označava matematičko očekivanje veličine u zagradi, a $E(\cdot \mid \cdot)$ uslovno matematičko očekivanje veličine ispred vertikalne crte u odnosu na Borelovo polje dogadjaja koje stoji iza crte. Slična oznaka je već upotrebljena i za uslovne verovatnoće $P(\cdot \mid \cdot)$.

U daljem izlaganju više puta ćemo se koristiti uslovnim matematičkim očekivanjem. Zato navodimo njegovu definiciju kakvu je dao Kolmogorov /10/ i to prema Doob-u /1//

Neka S jedno Borelovo polje merljivih ω-skupova, i neka je y slučajna veličina nad (Ω, F, P). Tada za svako $\Lambda \in S$ $\int_{\Lambda} y\, dP$ je jedna totalna aditivna funkcija skupa jednaka 0 za $P(\Lambda) = 0$. Prema Radon-Nykodim-ovoj teoremi takva funkcija može da se predstavi kao integral od neke merljive nad S funkcije koja odredjena skoro svuda. Ta funkcija je po definiciji uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine y u odnosu na S. Dakle

$$\int_{\Lambda} E(y \mid S)\, dP = \int_{\Lambda} y\, dP\,, \quad \Lambda \in S.$$

Jedna važna osobina koju ćemo više puta da koristimo: ako $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ tada sa verovatnoćom 1

$$E(E(y \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1) = E(y \mid \mathcal{B}_1).$$

1.2. Regularni stacionarni matematički procesi

Slučajni proces $x(t)$ je stacionaran ako je za svako τ, $t_1,\dots,t_k$ i $K_1,\dots,K_k$

$$P(\omega: x(t_1+\tau)\in K_1,\dots,x(t_k+\tau)\in K_k) = P(\omega: x(t_1)\in K_1,\dots x(t_k)\in K_k).$$

Slikovito rečeno: stacionarnost znači da je režim u smislu teorije verovatnoće pod kojim se slučajni proces odvija invarijantan u odnosu na translaciju u vremenu.

Za objašnjavanje daljih pojmova koje ćemo koristiti pokazaćemo drugi način uvodjenja mere slučajnog procesa. Uočimo prostor $\bar{\Omega}$ svih kompleksnih funkcija $\bar{\omega} = \{z(t)\}$ merljivih u odnosu na t (prostor trajektorija ili realizacija) i Borelovo polje $\bar{F}$ generisano cilindrima

$$\bar{A} = (\bar{\omega}: z(t_1)\in K_1,\dots,z(t_k)\in K_k)$$

za svako $t_1,\dots,t_k$ i $K_1,\dots,K_k$.

Posmatrajmo preslikavanje π prostora Ω na prostor $\bar{\Omega}$, koje svaki elementaran dogadjaj ω prevodi u jednu realizaciju $\bar{\omega} = \pi\omega$. Tada se može pokazati da skupovi

$$A = (\omega : \pi\omega \in \bar{A}), \quad \bar{A} \in \bar{F}$$

obrazuju Borelovo Polje koje se poklapa sa F.

Ako nad prostorom $(\overline{\Omega}, \overline{F})$ uvedemo meru

$$\overline{P}(\overline{A}) = P(x^{-1}\overline{A})$$

$(x^{-1}\overline{A}$ označava prasliku skupa $\overline{A}$) i uvedemo slučajne veličine

$$\overline{x}(\overline{\omega}, t) = z(t) \quad \text{ako} \quad \overline{\omega} = \{z(t)\}$$

onda se procesi x(t) i $\overline{x}(t)$ mogu smatrati ekvivalentni u tom smislu što imaju iste probabilističke karakteristike .

Uvedimo grupu transformacija translacije $\{\overline{S}_{\tau}\}$ u prostoru $\overline{\Omega}$

$$\overline{S}_{\tau}\overline{\omega} = \{z(t+\tau)\} \qquad \overline{\omega} = \{z(t)\} \quad .$$

Grupno svojstvo je

$$\overline{S}_{\tau_1} \circ \overline{S}_{\tau_2} = \overline{S}_{\tau_1+\tau_2} .$$

Odgovarajuća transformacija S_{τ} skupova iz Borelovog polja F prostora Ω definiše se kao

$$S_{\tau}A = x^{-1}\overline{S}_{\tau}\overline{A}.$$

Translacija čuva meru $P(S_t A) = P(A)$ i odredjena je jednoznačno do skupova mere 0.

Označimo sa M skup svih merljivih funkcija y nad (Ω, F, P) pri čemu se identičnim smatraju one koje se razlikuju na skupu mere 0. Za svako $y \in M$ predpostavimo da ima matematičko očekivanje jednako 0:

$$E(y) = \int_{\Omega} y \, dP = 0.$$

Ovo ne predstavlja nikakvo ograničenje jer umesto y možemo posmatrati $y - E(y)$ koje imaju potrebnu osobinu.

U skupu M operator translacije U definiše se nad funkcijama indikatorima skupova iz F

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}.$$

kao

$$U_\tau \chi_A = \chi_{\theta_{-\tau} A}$$

i nad prostim funkcijama

$$y = \sum c_k \chi_{A_k} \quad \text{kao} \quad U_\tau y = \sum c_k U_\tau \chi_{A_k}.$$

Kako je svaka merljiva funkcija granična vrednost u meri niza prostih funkcija operator U_τ proširuje se na ceo skup M.

Operator U_t obrazuje grupu $U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1 + t_2}$

i ima osobine:

$$U_t (c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 U_t y_1 + c_2 U_t y_2,$$

$$U_t (y_1 y_2) = U_t y_1 \, U_t y_2,$$

$$U_t(\overline{y}) = \overline{U_t y} .$$

Ako $y \in M$ tada $y(t) = U_t\, y$ predstavlja jedan stacionarni proces.

Stacionarni slucajni proces $x(t)$ je <u>regularan</u> ako je Borelovo polje

$$\bigcap_t F^t_{-\infty}$$

trivijalno, tj. sadrzi samo dogadje verovatnoće 0 i 1.

Ekvivalentna definicija regularnosti:
Za svako $A \in F$ vazi

$$\sup_{B \in F^t_{-\infty}} \left| P(AB) - P(A)\, P(B) \right| \to 0 \quad \text{kad } t \to -\infty$$

daje veću slikovitist tom pojmu; radi se o "asimtotskoj" nezavisnosti bilo kog dogadjeja od dogadja iz "daleke proslosti". Ovaj pojam regularnosti je strožiji od pojma regularnosti koji je uveo Kolmogorov /5/ i koji ćemo u buduće zvati linearna regularnost. Napomenimo još da je regularnost respektivnija od uslova ergodičnosti (Rosenblatt /11/) gde se zahteva samo

$$\lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{0} P(A \; U_n B) = P(A)\, P(B)$$

za svako $A, B \in F$.

1.3. Svodjenje predvidjanja na projektovanje u Hilbert-ovom prostoru

Dalje ćemo uvek predpostavljati da stacionarni slucajni proces $x(t)$ ima konačnu disperziju:

$$E\left(|x(0)|\right)^2 = \int_{\Omega} |x(0)|^2 \, dP < +\infty .$$

Zbog stacionarnosti $E\left(|x(0)|^2\right) = E\left(|x(t)|^2\right)$ za svako t .

Označimo sa $L_{2,P}$ Hilbert-ov prostor svih kompleksnih funkcija φ za koje $\int_{\Omega} |\varphi(\omega)|^2 \, dP < \infty$. Uočimo prostor

$$H = M \cap L_{2,P} .$$

Dakle, prostor H sadrzi sve slucajne velicine y nad (Ω, F, P) konacne dispesije $E\left(|y|^2\right) = \int_{\Omega} |y(\omega)|^2 \, dP < +\infty$. Kao i ranije predpostavljamo $E(y) = 0$. U Hilbert-ovom prostoru H skalarni proizvod definisan je ovako:

$$(y_1, y_2) = E(y_1 \overline{y_2}) = \int_{\Omega} y_1(\omega) \overline{y_2(\omega)} \, dP .$$

Prvo pitanje koje se postavlja jeste pitanje separabilnosti takovog prostora. (Rozanov /4/).

Za stacionarni proces $x(t)$ sa diskretnim parametrom prostor H je uvek separabilan posto je skup svih neprekidnih funkcija $\varphi(x(t_1),\dots,x(t_k))$ koje su nula van nekog zatvorenog k-dimenzionalnog intervala svuda gust u H, a svaka takva funkcija φ moze se uniformno aproksimirati trigonometrijskim polinomima.

Za stacionarne procese $x(t)$ sa neprekidnim parametrom za separabilnost prostora potreban je uslov neprekidnosti procesa u verovatnoci, tj.

$$\lim_{s\to t} \text{Prob}\left\{ \| x(s) - x(t) \| > \varepsilon \right\} = 0 \quad \text{za svako } \underline{t}$$

Iz ovog uslova sledi i neprekidnost procesa u srednjem kvadratnom tj. $\lim_{s\to t} E\left(|x(s) - x(t)|^2 \right) = 0$

ili, jezikom Hilbert-ovih prostora, jaka neprekidnost u H.

Operator translacije U_t nad H uveden u predhodnoj tacki postaje u prostoru H unitarni operator. Zaista za svako $\underline{t}$ $U_t H = H$; izometričnost sledi iz svostva stacionarnosti

$$(U_t y_1, U_t y_2) = E(U_t y_1 \overline{U_t y_2}) = E(y_1 \overline{y_2}) = (y_1, y_2).$$

Tako imamo jedno-parametarsku grupu unitarnih operatora $\{U_t\}$ koji su jako neprekidni (za svako y H: $\| U_s y - U_t y \| \to 0$ kad $s \to t$, Riess i Nagy /12/).

Kao zaključak navodimo osobinu koja će se često koristiti u daljem: za svako $y \in H$, $U_t y$ je stacionaran slučajan proces neprekidan u srednjem kvadratnom.

Neka je $H^t_{-\infty}$ Hilber-ov prostor slučajnih velicina $\underline{y}$ nad (Ω, $F^t_{-\infty}$, P) konačne disperzije $E(|y|^2) < \infty$. Ovaj prostor je kompletan (Masani i Wiener /3/) jer se može posmatrati kao L_{2,P^t} - prostor, gde je P^t kontrakcija mere P na Borelovo polje $F^t_{-\infty}$

Kod Masani-a i Wienera /3/ lema 6.1 utvrdjuje da je predvidjanje $\hat{x}(t;\tau)$ projekcija veličine $x(t+\tau)$ na podprostor $H^{t}_{-\infty}$. U oznakama koje cemo dalje upotrebljavati:

$$\hat{x}(t;\tau) = P_{H^{t}_{-\infty}}\left[x(t+\tau)\right] .$$

Na taj način odmah imamo mogućnost da formulišemo grešku predvidjanja.

$$\sigma_{\tau}^{2} = E\left(\left|x(t+\tau) - \hat{x}(t;\tau)\right|^{2}\right) = \|x(t+\tau) - \hat{x}(t;\tau)\|^{2}.$$

Veličina σ_{τ} zbog stacionarnosti slucajnog procesa $x(t)$ ne zavisi od $\underline{t}$.

Regularnost stacionarnog procesa $x(t)$ dobija u Hilber-ovom prostoru "geometrijsku očiglednost" jer je ekvivalelntan uslovu

$$\bigcap_{t} H^{t}_{-} = 0.$$

To znači da greška predvidjanja $\sigma_{\tau} \to \|x(0)\|$ kad $\tau \to \infty$ sto je u skladu sa onim sto je rečeno da " daleka prošlost" nedaje "informacije" o "sadasnjim". Na pr. predvidjanje $x(0)$ pomoću $x(s)$, $s \in t$ kad $t \to -\infty$ tezi ka $E(x(0)) = 0$ i greska predvidjanja tezi samoj disperziji velicine $x(0)$: $\|x(0)\|$.

1.4. Reperezentacija regularnog stacionarnog procesa i njegovog predvidjanja u slučaju diskretnog parametra

U radu /6/ Halmos tretira pitanje egzistencije netrivijalnih invarijantnih podprostora jednog Hilbertovog prostora u odnosu na operator translacije ("shifs"); i to u prvom delu geometriskom metodom, a drugom daje neke funkcionalne reprezentacije invarijantnih podprostora i operatora translacije. Sve teoremekoje se odnose na prvi deo (specijalno teorema 1. koju mi koristimo) definisane za operator bilaterlane translacije koji uvodi Halmos važe za svaki unitarni operator i kao takve ćemo ih primenjivati.

Utvrdjujuci ekvivalenciju nekih osnovnih pojmova iz teorije regularnih stacionarnih slučajnih procesa i pojmove koje uvodi Halmos dolazimo do zaključaka koji su cilj tacke 1.4.

Halmos najpre uvodi pojam "lutajućeg" podprostora N (wandering supspace) koji je ortogonalan na svoje slike pod pozitivnim stepenima operatora A: $N \perp A^n N$, $n = 1, 2, \ldots$;. Podprostor $M = \bigvee_{n=0}^{\infty} A^n N$ je ocigledno invarijantan u odnosu na operator A. (Simbol $\bigvee$ oznacava "span" tj. presek svih podrprostora koji sadrze skup $\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n N$). Ako je U jedan isometricni operator onda vazi i vise , tj. da je $U^m N \perp U^n N$, $m \neq n$, $m,n \geq 0$, a ako je U uniterni, onda (buduci da se mogu definisati i negativni celi stepeni od U) gornja osobina vazi za sve cele m i n ($m \neq n$).

Podprostor M prostora H redukuje operator A, ako su podprostor M i njegov ortogohalni komplement u H invarijentni u odnosu na A. Dalje cemo ortogohalni komplement podprostora M u prostoru H oznacavati sa $H \cap M^{\perp}$. Prema teoremi 2 st.40 Halmos-a /7/ potreban i dovoljan uslov da podprostor M redukuje operator A jeste da je podprostor M invarijantan u odnosu na A i A*. Podprostor M je ireducibilan u odnosu na operator A ako ne sadrzi netrivijalan podprostor koji redukuje operator A. Teorema 2. Halmos-a /6/ tvrdi da ako je M ireducibilan invarijantan podprostor u odnosu na unitarni operator U onda postoji "lutajuci" podprostor N tako da

$M = \sum_{n=0}^{\infty} U^n N$. (kod Halmosa stoji $M = \bigvee_{n=0}^{\infty} U^n N$, buduci medutim da je $U^m N \perp U^n N$, $m \neq n$ ispravnije je staviti onako kako smo mi stavili jer svaki element $f \in M$ moze da se napise kao

$f = \sum_{n=0}^{\infty} U^n f_n$, gde $f_n \in N$; videti teoremu 2 st.26 kod Halmos-a /7/. Takodje u iskazu teoreme 2. /6/ Halmos-a pod operatorom U podrazumeva se bilateralna translacija; prema gore ucinjenoj napomeni mi podrazumevamo jednostavno unitarni operator).

U slucaju stacionarnog slucajnog procesa x(t) sa diskretnim parametrom $t = \ldots,-1,0,1,\ldots$ operator $\bar{S}_\tau$ uveden u prostoru $\bar{\Omega}$ kao

$$\bar{S}_\tau \omega = \{x(t+\tau)\} \quad , \bar{\omega} = \{x(t)\}$$

ima smisla samo za cele brojeve τ — pa odgovarajuce ogranicenje vazi i za unitarni operator U u prostoru H. Da bi smo postigli vecu slikovitost i istakli da se radi o procesu sa diskretnim parametrom micemo ga u ovom paragrafu oznacavati sa x_t umesto x(t) a U_1 prosto U, dok cemo U_t zameniti sa

U_k^t jer se radi o stvarnim stepenima unitarnog operatora U, kako je uobicajeno da se oni definisu.

Pre formulacije i dokaza teoreme 1.1 koja utvrdjuje mogucnost primene Halmos-evih rezultata dokazat cemo jednu lemu koja vazi i za stacionarne slucajne procese sa neprekidnim parametrom.

<u>Lema 1.1.</u>

Ako je $x(t)$ regularna stacionarni slucajni proces onda $x(t) \notin H_{-\infty}^{s}$, $s < t$ za bilo koja dva fiksirana $\underline{s}$ i $\underline{t}$. $\square$

<u>Dokaz.</u>

Na osnovu stacionarnosti slucajnog procesa $x(t)$ ako $x(t) \notin H_{-\infty}^{s}$ tada $U_{\tau}\ x(t) \notin U_{\tau}\ H_{-\infty}^{s}$ ili $x(t + \tau) \notin H_{-\infty}^{s+\tau}$ za svako τ. Predpostavimo sada suprotno da $x(t) \in H_{-\infty}^{s}$, $s < t$. Prema, na pr., Rozanov-u /4/ st.212 svaki element iz $H_{-\infty}^{s}$ moze da se predstavi kao granicna vrednost niza oganicenih neprekidnih funkcija $\varphi_{n,k}\ (x(t_1),\dots,x(t_k))$, $t_1,\dots,t_k \leq s$. Dakle,

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{n,k}\ (x(t_1),\dots,x(t_k)),\ t_1,\dots,t_k \leq s.$$

Medjutim, ako $x(t) \in H_{-\infty}^{s}$, $s < t$ onda $x(t_k) \in H_{-\infty}^{s+t_k-t}$ i primenjujuci navedeni postupak dovoljan broj puta mozemo za svako $\underline{r}$ uciniti da

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi'_{n,k}\ (x(t_1),\dots,\ x(t_k)),\ \text{gde}\ t_1,\ \dots,t_k \leq r.$$

Dakle, $x(t)\in H^r_{-\infty}$ za svako $\underline{r}$ pak $x(t)\in \bigcap_r H^r_{-\infty}$ za neko fiksirano t. Kako je stacionarni slucajni proces $x(t)$ regularan to $\bigcap_r H^r_{-\infty} = 0$ sledi $\|x(t)\| = 0$ za neko $\underline{t}$, a iz $U_\tau x(t)=x(t+\tau)$, vazi za svako $\underline{t}$, sto je protivrecnost , cime je dokaz zavrsen.

<u>Teorema 1.1.</u>

Stacionarni slucajni proces x_t sa diskretnim parametrom je regularan ako i samo ako je podprostor $H^{t_o}_{-\infty}$ (t_o je proizvoljno izabrano, ali fiksirano) i reducibilan u odnosu na operator U^{-1}.

<u>Dokaz.</u>

Dokazimo najpre da iz regularnosti procesa x_t sledi ireducibilnost $H^{t_o}_{-\infty}$. Neka netrivijalni podprostor od $H^{t_o}_{-\infty}$ sadrzi bar jedno x_s, $\underline{s}$ je fiksirano i s t_o. Medjutom, element $U^{t_o-s+1}x_s$ pripada podprostoru $H^{t_o+1}_{-\infty}$ dakle, izlazi iz $H^{t_o}_{-\infty}$, sto prema lemi 1.1 , protivurec̆i uslovu regularnosti. Dakle, $H^{t_o}_{-\infty}$ nema netrivijalnih podprostora koji su invarijantni u odnosu na operator U, sto znaci je $H^{t_o}_{-\infty}$ i-reducibilan podprostor.

Dokazimo sada da iz ireducibilnosti $H^{t_o}_{-\infty}$ sledi regularnost procesa x_t. Podprostor $\bigcap_t U^t H^{t_o}_{-\infty}$ je invarijantan u odnosu na operatore U i U^{-1}, dakle redukuje U^{-1}, i kako je $H^{t_o}_{-\infty}\supset\bigcap_t U^t H^{t_o}_{-\infty}$ iz ireducibilnosti podprostora $H^{t_o}_{-\infty}$ sledi $\bigcap_t U^t H^{t_o}_{-\infty} = 0$ sto je ekvivalentno definiciji regularnosti stacionarnog slucajnog procesa $x(t)$. Time je dokaz zavrsen.

Uocimo "lutajuci" podprostor

$$D = H^{o}_{-\infty} \bigcap (U^{-1} H^{o}_{-\infty})^{\perp}$$

Neka je $b^{(j)}$, $j \in J$, gde je J prebrojiv skup, baza u podprostoru D.

<u>Teorema 1.2.</u>

Ako je x_t regularan stacionaran proces sa diskretnim parametrom tada

$$x_t = \sum_{j \in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c^{(j)}_{t-n} U^{n} b^{(j)}$$

gde $c^{(j)}_{t-k} = (x_{t-k}, b^{(j)})$ i

$$\sum_{j \in J} \sum_{n=-\infty}^{t} \left| c^{(j)}_{t-n} \right|^{2} < +\infty$$

<u>Dokaz.</u>

Kako je H^{o}_{-} ireducibilan imamo $H^{o}_{-\infty} = \sum_{n=-\infty}^{0} U^{n} D$.

Posto $x_o \in H^{o}_{-\infty}$ imamo $x_o = \sum_{n=-\infty}^{0} U^{n} y_n$, gde $y_n \in D$ i

$y_n = \sum_{j \in J} c^{(j)}_{n} b^{(j)}$. Dakle $x_o = \sum_{n=-\infty}^{o} U^{n} \sum_{j \in J} c^{(j)}_{n} b^{(j)}$, ili, zbog

linearnosti operatora U: $x_o = \sum_{n=-\infty}^{0} \sum_{j \in J} c^{(j)}_{n} U^{n} b^{(j)}$.

Primenjujuci levo i desno operator U^t imamo

$$U^t x_o = x_t = \sum_{n=-\infty}^{o} \sum_{j\in J} c_n^{(j)} U^{n+t} b^{(j)} \quad \text{ili}$$

$$x_t = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{o} c_n^{(j)} U^{n+t} b^{(j)}$$ i najzad uvodeci pomeranje indeksa $x_t = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c_{n-t}^{(j)} U^n b^{(j)}$.

Mnozeci zadnju jednakost skalarno sa $U^k b^{(i)}$ dobijamo

$$(x_t, U^k b^{(i)}) = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c_{n-t}^{(j)} (U^n b^{(j)}, U^k b^{(i)});$$ kako je

$(U^n b^{(j)}, U^k b^{(j)}) = 0$ za svako $n \neq k$, jer $U^n b^{(j)} \in U^n D$ i $U^k b^{(j)} \in U^k D$ i $U^n D \perp U^k D$, $n \neq k$ i sa druge strane

$$(U^n b^{(i)}, U^n b^{(j)}) = (b^{(i)}, b^{(j)}) = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} - Kronekerov simbol) dobijamo $(x_t, U^k b^{(i)}) = c_{k-t}^{(i)}$.

Zbog unitarnosti operatora U: $(x_t, U^k b^{(i)}) = (U^{-k} x_t, b^{(i)})$

ili konacno $(x_{t-k}, b^{(i)}) = c_{k-t}^{(i)}$. Najzad

$$\|x_t\|^2 = (x_t, x_t) = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{o} |c_{t-n}^{(j)}|^2 < +\infty .$$

Teorema 1.3

Ako je x_t regularan stacionaran proces sa diskretnim parametrom tada

$$\hat{x}(t;\tau) = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c^{(j)}_{t+\tau-n}\, U^n b^{(j)}$$

sa greskom predvidjanja

$$\sigma_\tau^2 = \sum_{j\in J} \sum_{n=0}^{\tau-1} \left|c_n^{(j)}\right|^2 .$$

Dokaz.

Prema teoremi 1.2

$$x_{t+\tau} = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t+\tau} c^{(j)}_{t+\tau-n}\, U^n b^{(j)} \quad \text{ili}$$

$$x_{t+\tau} = \sum_{j\in J} \sum_{n=-\infty}^{t} c^{(j)}_{t+\tau-n}\, U^n b^{(j)} + \sum_{j\in J} \sum_{n=t+1}^{t+\tau} c^{(j)}_{t+\tau-n}\, U^n b^{(j)}.$$

Ako prvi sabirak na desnoj strani napisemo u obliku

$\sum_{n=-\infty}^{t} U^n \sum_{j\in J} c^{(j)}_{t+\tau-n}\, b^{(j)}$ postaje ocigledno da on pripada podprostoru $\sum_{n=-\infty}^{t} U^n D = H^t_{-\infty}$. Drugi sabirak pripada podprostoru $\sum_{n=t+1}^{t+\tau} U^n D$ koji je ortogonalan komplement od $H^t_{-\infty}$ u podprostoru $H^{t+\tau}_{-\infty}$. Dakle, projekcija od $x_{t+\tau}$ na $H^t_{-\infty}$ je prvi sabirak cime je on indentifikovan kao $\hat{x}(t;\tau)$. Sa druge strane

$$\sigma_{\tau}^{2} = \|x_{t+} - \hat{x}(t;\tau)\|^{2} = \sum_{j\in J} \sum_{n=t+1}^{t+\tau} c_{t+\tau-n}^{(j)} U^{n} b^{(j)}\|^{2} = \sum_{j\in J} \sum_{n=t+1}^{t+\tau} |c_{t+\tau-n}^{(j)}|^{2} \quad i$$

posle pomeranja indeksa dobijamo izraz za grsku predvidjanja. Time je dokaz zavrsen.

U problemu linearnog predvidjanja kako ga je 1941. godine postavio i resio Kolmogorov /5/ i /13/ za slucaj stacionarnog procesa sa diskretnim parametrom $t = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ posmatra se takav proces sa konacnom disperzijom: $E(|x_t|^2) < +\infty$ za svako t. Oznacimo sa $L(x)$ linearnu zatvorenost elemenata x_t, $t =$ u smislu norme $\|x_t\|^2 = E(|x_t|^2)$. $L(x)$ je Hilbert-ov prostor sa definicijom skalarnog proizvoda $(y_1, y_2) = E(y_1 \bar{y}_2)$ i podprostor je naseg prostora H. Sa $L(x;t)$ oznacimo zatvoren podprostor od $L(x)$ proizveden pomocu x_s, $s \leq t$. Linearno predvidjanje $x_{t+\tau}$ pomocu x_s, $s < t$ definise se kao

$$\hat{x}(t;\tau) = P_{L(x;t)}\left[x_{t+\tau}\right].$$

Stacionaran proces x_t je linearno regularan ako je $\bigcap_t L(x;t) = 0$. Dekompozicija Wold-a (Kolmogorov /5/) za linearno regularne stacionarne procese sa diskretnim parametrom je:

$$x_t = \sum_{n=-\infty}^{t} c_{t-n}\, z_t ,$$

gde je z_t jedan ortonormiran stacionaran niz: $(z_i, z_j) = \delta_{ij}$ takav da $L(x;t) = L(z;t)$ za svako t.

Zamenjujuci prostor $H^t_{-\infty}$ prostorom $L(x;t)$ nasa reprezentacija se svodi na dekompoziciju Wold-a. Zaista, "lutajuci" podprostor $D = L(x;0) \cap (U^{-1}L(x;0))^{\perp}$ je dimenzije 1 jer prostor $L(x;0)$ dobijamo kao linearnu zatvorenost od podprostora $U^{-1}L(x;0) = L(x;-1)$ i velicine x_0. Neka je z baza u D tada je $z_t = U^t_z$ ortonormiran stacionaran niz i teorema 1.2 dovodi do dekompozicije Wold-a.

1.5. Reprezentacija regularnog stacionarenog procesa i njegovog predvidjanja u slucaju neprekidnog parametra

Karhunen je 1949. godine /9/ u slucaju stacionarnih procesa sa neprekidnim parametrom dosao do rezultata analognih rezultatima Kolmogorov-a u /5/ i /13/ za diskretan slucaj, koristeci se poznatim rezultatima Stone-a o spektralnoj reprezentaciji jednoparametarske grupe unitarnih operatora. U isto vreme je Hanner /8/ dosao do istih rezultata direktnijim i vise probabilistickim postupkom nekoristeci spektralnu teoriju unitarnih operatora. Ovde cemo sprovesti postupak slican Hanner-ovom.

Neka je $y \in H$, tada kao sto smo videli $y(t) = U_t y$ predstavlja regularan stacionaran slucajan proces. Oznacimo sa $H(a,b)$, a $< b$ ortogonalni komplement podprostora $H^a_{-\infty}$ u podprostoru $H^b_{-\infty}$.

Definicija1.1

Slucajna spektralna mera intervala (a,b) u odnosu na proces $y(t)$ definise se kao

$$Z^{y}(a,b) = P_{H(a,b)}\left[\int_a^b y(t)\,dt\right].$$

Integral $\int_a^b y(t)dt$ treba podrazumevati u obicnom Rimanovom smislu.

<u>Lema 1.2</u>

Spektralna mera $Z^{y}(a,b)$ ima svojstva: za svako $a<b<c$

$Z^{y}(a,b) \perp Z^{y}(b,c)$, $Z^{y}(a,b)+Z^{y}(b,c) = Z^{y}(a,c)$ i

ako $\|y\|>0$ $\|Z^{y}(a,b)\|>0$.

<u>Dokaz.</u>

Prve dve osobine se lako dokazuju. Kako $Z^{y}(a,b)\in H(a,b)$ i $Z^{y}(b,c)\in H(b,c)$ a $H(a,b)\subset H^{b}_{-\infty}$ i $H^{b}_{-\infty} \perp H(b,c)$ sledi $H(a,b)\perp H(b,c)$ dakle $Z^{y}(a,b)\perp Z^{y}(b,c)$. Dalje

$$P_{H(a,c)}\left[\int_a^c y(t)dt\right] = P_{H(a,c)}\left[\int_a^b y(t)dt + \int_b^c y(t)dt\right] =$$

$$= P_{H(a,c)}\left[\int_a^b y(t)dt\right] + P_{H(a,c)}\left[\int_b^c y(t)dt\right].$$

Medjutim, $H(a,c) = H(a,b) + H(b,c)$ jer $H(a,b)\perp H(b,c)$, te posto $\int_a^b y(t)dt \in H^{b}_{-\infty}$ a $H^{b}_{-\infty}\perp H(b,c)$ dobijamo

$$P_{H(a,c)}\left[\int_a^b y(t)dt\right] = P_{H(a,b)}\left[\int_a^b y(t)dt\right] \quad \text{i}$$

$$P_{H(a,c)}\left[\int_b^c y(t)dt\right] = P_{H(b,c)}\left[\int_b^c y(t)dt\right].$$

Dokaz da $\| P_{H(a,b)} \left[\int_a^b y(t)dt \right] \| > 0$ moze se izvesti indirektnim putem. Ako je $P_{H(a,b)} \left[\int_a^b y(t)dt \right] = 0$ sledi da $\int_a^b y(t)dt \perp H(a,b)$.

Sa druge strane iz neprekidnosti $y(t)$ sledi:

$\int_a^b y(t)dt = (b - a)\, y(t_o)$, a $t_o > b$ te $\| \int_a^b y(t)dt \| > 0$ i $\int_a^b y(t)dt \perp H^b_{-\infty}$. Kako je $H(a,b) = H^b_{-\infty} \cap (H^a_{-\infty})^{\perp}$ sledi da $\int_a^b y(t)dt \in H^a_{-\infty}$ ili $y(t_o) \in H^a_{-\infty}$ za $t_o > a$ sto protivreci leni 1.1. Time je dokaz zavrsen.

Dalje cemo slucajne velicine $Z^y(a,b)$ smatrati tako normiranim da $\| Z^y(a,b) \| = b-a$ sto je lako postici ako umesto $Z^y(a,b)$ posmatramo

$$\frac{(b-a)}{\| Z^y(a,b) \|} Z^y(a,b) .$$

Zadana na intervalima (a,b) spektralna mera $Z^y(a,b)$ moze se jednoznacno prosiriti na sve Borelove skupove realne prave.

Sledeci Hanner-a /8/ definisimo

$$Z^y(t) = \begin{cases} Z^y(0,t) & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ - Z^y(t,0) & t < 0 \end{cases}$$

Tako definisana $Z^y(t)$, $-\infty < t < \infty$, se indentifikuje kao stacionaran slucajen proces sa ortogonaralnim prirastajima (Doob /1/). Kako je $Z^y(a,b) = Z^y(b) - Z^y(a)$ ili $Z^y(a,b) = \int_a^b dZ^y(u)$, ili pak $Z^y(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(a,b)}\, dZ^y(u)$ mozemo za svaku kompleksnu funkciju $g(u) \in L_2$ ($\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 \, du < \infty$) da definisemo $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)dZ^y(u)$ time stocemo najpre za funkcije

$$g_n(u) = \begin{cases} c_i & u \in (a_i, b_i) \\ 0 & u \notin (a_i, b_i) \end{cases}$$

definisati $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(u)\, dZ^y(u) = \sum_i c_i \left(Z^y(b_i) - Z^y(a_i) \right)$.

Kako je svaka funkcija $g(u) \in L_2$ granicna vrednost u srednjem kvadratnom funkcija $g_n(u)$ po definiciji

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)dZ^y(u) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(u)\, dZ^y(u).$$

Dalje, imamo osobinu $\| \int_{-\infty}^{\infty} g(u)dZ^y(u) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du$. Velicina $\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, dZ^y(u)$, $g(u) \in L_2$, pripada ocigledno podprostoru $L(Z^u)$. Vazi obrnuto(Hanner /8/): za svako $z \in L(Z^y)$ postoji funkcija $g(u)$ L_2 tako da vazi $z = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, dZ^y(u)$. Ako Z $L(Z; 0)$ tada odgovarajuca funkcija $g(u) \in L_2$ je takva da $g(u) = 0$ $u > 0$ tako da imamo $z = \int_{-\infty}^{0} g(u)\, dZ^y(u)$.

Vazna je sledeca

<u>Lema 1.3.</u>

Ako $y \in H^t_{-\infty}$ tada $L(y; t) = L(Z^y; t)$ za svako t.

Dokaz.

Oznacimo $\alpha(s) = P_{L(Z^y;t)}[y(s)]$ i $\beta(s) = P_{H^t_{-\infty} \cap (L(Z^y;t))^{\perp}}[y(s)]$ za s t. Tada $y(s) = \alpha(s) + \beta(s)$. Kako je prema definiciji $\overset{y}{Z}(a,b)$ $\|\alpha(s)\| > 0$ ako pokazemo da $\beta(s) = 0$ za svako $s \leq t_0$ lema je dokazana. Ako predpostavimo suprotno onda za svako s_1 i $s_2 \leq t$ $\alpha(s_1) \perp \beta(s_2)$ odnosno $L(\alpha;t) \perp L(\beta;t)$ te $L(\beta;t) = L(y;t) \cap L(\alpha;t)^{\perp}$. Ocigledno su podprostori $L(y;t)$, $L(\alpha;t)$ i $L(\beta;t)$ inverijantni u odnosu na unitaran operator U_{-t_0}, $t_0 > 0$ i fiksirano. Prema Halmos-u /7/ podprostor $L(y;t)$ reduku-je operator U_{-t_0} sto zanaci da je invarijentan u odnosu na $(U_{-t_0})^* = U_{t_0}$, $t_0 > 0$. Dakle, $L(y;t+t_0) \subset L(y;t)$. Medjutim, $y \in H$ pa je $y(t)$ regularan stacionaran proces i $y(t+t_0) \in H^t_{-\infty}$, t_0 0 sto je u protivurecnosti sa lemom 1.1, cime je dokaz zavrsen.

Neka je $b^{(j)}$, j J baza u separabilnom podprostoru $H^0_{-\infty}$, dakle J je prebrojiv skup. Oznacimo $Z^{b^{(j)}}(s)$ sa $Z^{(j)}(s)$.

Lema 1.4.

Vazi jednakost $H^t_{-\infty} = \sum_{j \in J} L(Z^{(j)};t)$.

Dokaz.

Dovoljno je pokazati $H^0_{-\infty} = \sum_{j \in J} L(Z^{(j)};0)$, tada jednakost u lemi dobija se primenjujuci levo i desno operator U_t. Svako $y \in H^0_{-\infty}$ je oblika $y = \sum_{j \in J} c_j b^{(j)}$, $\sum_{j \in J} |c_j|^2 < \infty$. Medjutim,

$b^{(j)} \in L(Z^{(j)}; 0)$ jer prema lemi 1.1. $L(b^{(j)}; 0) = L(Z^{(j)}; 0)$; cime je dokaz zavrsen.

Teorema 1.4

Ako je $x(t)$ regularan stacionaran slucajan proces neprekidan u srednjem kvadratnom i sa neprekidnim parametrom tada:

$$x(t) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{t} g^{(j)}(t-s)\,dZ^{(j)}(s), \quad g^{(j)}(u) \in L_2.$$

Dokaz.

Imamo $x(0) = \sum_{j\in J} c_j\, b^{(j)}$, $\sum_{j\in J} |c_j|^2 < \infty$ i kako

$c_j\, b^{(j)} = \int_{-\infty}^{0} g^{(j)}(u)\,dZ^{(j)}(u)$, $g^{(j)}(u) \in L_2$, imamo

$x(0) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{0} g^{(j)}(u)\,dZ^{(j)}(u)$. Primenom levo i desno U_t

$x(t) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{0} g^{(j)}(u)\, dZ^{(j)}(u+t)$ i posle smene $u = t - s$ u integralu dolazimo do trazene reprezentacije.

Teorema 1.5

Ako je $x(t)$ regularan stacionaran proces neprekidan u srednjem kvadratnom i sa neprekidnim parametrom, tada

$$\hat{x}(t;\tau) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{t} g^{(j)}(t+\tau-s)\, dZ^{(j)}(s)$$

sa greskom predvidjanja

$$\sigma_\tau^2 = \sum_{j\in J} \int_0^{\tau} |g^{(j)}(s)|^2\, ds.$$

Dokaz.

Prema teoremi 1.4

$$x(t+\tau) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{t+\tau} g^{(j)}(t+\tau-s)dZ^{(j)}(s) \text{ ili}$$

$$x(t+\tau) = \sum_{j\in J} \int_{-\infty}^{t} g^{(j)}(t+\tau-s)dZ^{(j)}(s) + \sum_{j\in J} \int_{t}^{t+\tau} g^{(j)}(t+\tau-s)dZ^{(j)}(s)$$

Prvi sabirak na desnoj strani pripada podprostoru $H_{-\infty}^{t}$ a drugi podprostoru $H(t, t+\tau)$ koji je ortogonalan kompelemnt od $H_{-\infty}^{t}$ u $H_{-\infty}^{t+\tau}$. Dakle, projekcija $x(t+\tau)$ na $H_{-\infty}^{t}$ je prvi sabirak cime je on indentifikovan kao $\hat{x}(t;\tau)$. Sa druge strane

$$\sigma_{\tau}^{2} = \|x(t+\tau) - \hat{x}(t;\tau)\|^{2} = \Big\|\sum_{j\in J} \int_{t}^{t+\tau} g^{(j)}(t+\tau-s)dZ^{(j)}(s)\Big\|^{2} =$$

$= \sum_{j\in J} \int_{t}^{t+\tau} |g^{(j)}(t+\tau-s)|^{2} ds$ i posle smene u integralu dobijamo izraz za gesku predvidjanja cime je dokaz zavrsen.

U problemu linearnog predvidjanja stacionarnih procesa sa neprekidnim parametrom posmatra se takav proces neprekidan u srednjem kvadratnom i sa konacnom disperzijom $E(|x(t)|^{2}) < \infty$ Oznacimo sa $L(x)$ linearnu zatvorenost elemenata $x(t)$, $-\infty<t<\infty$ u smislu norme $\|x(t)\|^{2} = E(|x(t)|^{2})$. $L(x)$ je Hilbertov prostor sa definicijom skalarnog proizvoda $(x,y) = E(x\bar{y})$ i podprostor je naseg prostora H. Sa $L(x;t)$ oznacimo podprostor od $L(x)$ proizvede pomocu $x(s)$, $s\leq t$. Linearno predvidjanje $x(t+\tau)$ pomocu $x(s)$ $s\leq t$ definise se kao

$$\tilde{x}(t;\tau) = P_{L(x;t)}\left[x(t+\tau)\right].$$

Proces je linearno regularan ako $\bigcap_{t} L(x;t) = 0$. Dekompozicija Wold-a (Karhunen /9/, Hanner /8/) za linearno regularan stacionaran slucajan proces je

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\, dZ(s) \;,\; g(s)\in L_2 \;,$$

gde je $Z(s)$ stacinaran proces sa ortogonarlnim prirastajima takav da $L(x;t) = L(Z;t)$ za svako t.

Uvodeci spektralnu meru $Z^x(a,b)$ u odnosu na proces $x(t)$ prema lemi 1.3 imamo da $x(s) \in L(Z^x;t)$ $s \leq t$ i da $x(t)$ ima reprezentaciju $x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t - s)dZ^x(s)$, $g(u) \in L_2$ odakle imamo izraze za linearno predvidjanje $\widetilde{x}(t;\tau) = \int_{-\infty}^{t} g(t+\tau-s)dZ^x(s)$ i gresku predvidjanja $\sigma_\tau^2 = \int_0^\tau |g(s)|^2 ds$ koji su indenticni sa onim kod Karhunena /9/.

D E O   D R U G I

O APROKSIMACIJI STOHASTICKIH PROCESA PRI SLUCAJNIM OPSERVACIJAMA

2.0. Pregled izlaganja

Najpre se, na osnovu jedne primedbe Jagloma /14/ , izlaze opsti problem aproksimacije slucajne velicine y pomocu stohastickog procesa x(t) posnatog na izvesnoj kolekciji vremenskih intevala. Predpostavku da je ta kolekcija slucajna izneo je, u pitanju estimiranja spektra slucajnog procesa , Prof. R. Fortet u jednom usmenom razgovoru 1960. godine. Nikakva literatura koja tretira taj problem nije poznata. Sa slucajnim kolekcijama vremenskih intervala dolazi se u novu probabilisticku situaciju i definise se (Definicija 2.2.) greske aproksimacije pri slucajnim opservacijama. U tacki 2.3. daju se procene tako definisanegreske u slucaju linearnog predvidjanja stacionarnih procesa. Na kraju se navodi izracunavanje geske ili njene procene u specijalnim slucajevima procesa x(t) i (t) koja se srecu u praksi i imaju jednostavne ekstrapolacione osobine.

2.1. Opsti problem aproksimacije slucajne velicine y pomocu stohastickog procesa x(t)

Neka je x(t), $-\infty<t<\infty$ stohasticki (slucajni) proces nad prostorom (Ω, F, P). Merljiva funkcija $y(\omega)$ nad (Ω, F, P) je jedna slucajna promenljiva y. Oznacimo sa $\mathcal{T}$ jednu kolekciju zatvorenih intervala vremenske ose $-\infty<t<\infty$. Toj kolekciji mogu da pripadaju i intervali oblika $(-\infty, c]$ i $[b, +\infty)$, kao i isolovane tacke. Oznacimo sa $F(\mathcal{T})$ restrikciju Borelovog polja F na

ω- skupove koji se proizvode pomocu cilindara oblika

$$K = (\omega: x(t_1) \in K_1, \ldots, x(t_k) \in K_k),$$

za svako $K_1, \ldots, K_k$ i $t_1 \in \mathcal{T}, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$. Posle ovoga vidi seda formiranje kolekcije $\mathcal{T}$ pomocu zatvorenih intervala nije nikakvo ogranicenje intervali se mogu uzeti otvoreni i poluotvoreni.

U smislu teorije verovatnoce aproksimacija velicine y pomocu $x(s)$, $s \in \mathcal{T}$ je zadata ako je poznata funkcija raspodele uslovnih verovatnoca $F(\omega : y \in K \mid F(\mathcal{T}))$, za svako K iz Borelovog polja skupova kompleksne ravni. Vodeci racuna o primedbi koja je ucinjena na odgovarajucem mestu u prvom delu ovog rada daje se

Definicija 2.1

Aproksimacija slucajne velicine y pomocu stohastickog procesa $x(t)$, $t \in \mathcal{T}$ jeste uslovno matematicko ocekivanje velicine y u odnosu na Borelovo polje dogadjaja $F(\mathcal{T})$: $\hat{y}(\mathcal{T}) = E(y \mid F(\mathcal{T}))$.

Pod ovakvu definiciju podpada takozvani problem filtriranja (Jaglom /2/): Slucajna velicina y moze se smatrati kao vrednost slucajnog procesa $y(t) = U_t\, y$ u nekom fiksiranom trenutku $t \notin \mathcal{T}$ i nju treba aproksimirati pomocu slucajnog procesa $x(t)$, $t \in \mathcal{T}$. Ako je y vrednost slucajnog procesa $x(t)$ u trenutku $t \notin \mathcal{T}$ imamo opsti problem interpolacije. Ako je jos i kolekcija $\mathcal{T}$ takva da krajnja tacka poslednjeg intervala iz kolekcije τ je manja od t imamo slucaj predvidjanja ili ekstrapolacije. Na pr., u prvom delu smo razmatrali problem aproksimacije kada je $y = x(t+\tau)$ a kolekcija τ sadrzi samo jedan interval oblika $(-\infty, t]$

Predpostavimo da je stohasticki proces $x(t)$ sa konacnim disperzijama $E(|x(t)|^2)<\infty$ za svako t, kao i slucajna velicina y $E(|y|^2)<\infty$ (Uvek podrazumevamo da je $E(x(t)) = 0$ za svako t i $E(y) = 0$). Kao u prvom delu H oznacava Hilbertov prostor svih slucajnih velicina ogranicene disperzije nad prostorom (Ω, F, P) Sa $H(\tau)$ oznacimo podprostor prostora H koji cine sve merljive funkcije (slucajne velicine sa ogranicenom disperzijom) nad Borelovim podpoljem $F(\tau)$. Podprostor $H(\tau)$ je zatvoren jer se moze indentifikovati kao prostor L_{2,P^τ}, gde je P^τ kontrkacija mere P na Borelovo podpolje $F(\tau)$.

<u>Teorema 2.1.</u>

Aproksimacija $\hat{y}(\tau)$ je projekcija slucajne velicine y na podprostor $H(\tau)$: $\hat{y}(\tau) = P_{H(\tau)}[y]$

<u>Dokaz.</u>

Kako $\hat{y}(\tau)$ pripada $H(\tau)$ treba pokazati da za svako $z \in H$ vazi $(y - \hat{y}(\tau), z) = 0$ ili $E((y-\hat{y}(\tau))\bar{z}) = 0$. Imamo

$E((y-\hat{y}(\tau))\bar{z}) = E(y\bar{z} - \hat{y}(\tau)\bar{z}) = E(y\bar{z}) - E(\hat{y}(\tau)\bar{z}) = E(y\bar{z}) -$
$- E(E(y|F(\tau))\bar{z})$. Na osnovu osobina uslovnih matematickih ocekivanja (Doob /1/), od kojih je jedna navedena u prvom delu imamo:

$E(E(y|F(\tau))\bar{z}) = E(E(y\bar{z}|F(\tau))) = E(y\bar{z})$, cime je dokaz zavrsen.

Greska aproksimacije definise se kao disperzija velicine $y - \hat{y}(\tau)$: $\delta^{y\,2}_{(\tau)} = E(|y - \hat{y}(\tau)|^2) = \|y - \hat{y}(\tau)\|^2$.

2.2. Definicija greske aproksimacije pri slucajnim opeservacijama

Kolekcija τ jeste skup vremenskih intervala u kojima se vrsi opservacija stohastickog procesa $x(t)$, tj. registruje jedna njegova trajektorija (realizacija). U primenama iz raznih razloga(izvesna inercija uredjaja, spoljni uticaji) situacija je redovno takva da kolekcija τ nije fiksirana i njena promenljivost moze da sekontrolise samo statisticki. Na pr., u astronomiji, imamo posmatranje u vremenskim intervalima izmedju nailazaka oblaka, koji su sa svoje strane fenomen slucajan.

Predpostavimo daklem da je kolekcija τ slucajna. Sa gledista teorije verovatnoce da je zadan jedan merljiv prostor $(T, \mathcal{T}, p)$ u kome su elementarni slucajni dogadji kolekcije τ : $T = \{\tau\}$, $\mathcal{T}$ je Borelevo polje skupova -kolekcija, p mera (verovatnoca) nad $\mathcal{T}$.

Ovakvu situaciju mozemo da ucinimo podeshodjim za formalno razmatranje uvodeci jedna nov slucajni proces $\omega(t)$, $-\infty < t < \infty$ sa vrednostima u skupu koji sadrzi samo dva apstraktna elementa: o opservacija i $\bar{o}$ odsustvo opservacije. Ako propisemo da $\omega(t) = o$ tada i samo tada kada t pripada kolekciji τ onda ova kolekcija postaje jedna trajektorija slucajnog procesa $\omega(t)$ a prostor (Υ, $\mathcal{T}$,p) je prostor svih nejgovih trajektorija. Nataj nacin podprostor $H(\tau)$ postaje slucajen i "duzina normale" iz "tacke" y na $H(\tau)$, koja predstavlja gresku aproksimacije, postaje slucajna promenljiva nad prostorom (Υ, ,p). Poznavanje verovatnoca $p\,(\tau : \delta^y(\tau) \in R)$, za svako R koje je elemenat iz Borelovog polja realne parve odredjuje sa probabilistickog stanovista gresku aproksimacije pri slucajnim aproksimacijama. Za davanje tih verovatnoca ekvivalentno je za davanju funkcije raspodele $\phi(x) = p(\tau : \delta^y(\tau) < x)$. Kako je $0 \leq \delta^y(\tau) \leq \|y\|$ imamo ocigledno $\phi(x) = 0$ za $x < 0$ i $\phi(x) = 1$ za $x > \|y\|$

<u>Definicija 2.2.</u>

Greska aproksimacije slucajne velicine y pri slucajnim opservacijama jeste matematicko ocekivanje velicine $\delta^y(\tau)$: $\delta^y = \int_T \delta^y(\tau)\,dp = \int_0^{\|y\|} x\,d\phi(x)$.

Dalje cemo posmatrati samo slucaj kada je slucajna velicina y bas vrednost procesa x(t) u nekom proizvoljnom ali fiksiranom trenutku. Odgovarajuce izmene oznaka: $\delta^y(\tau) = \delta_t(\tau)$ i $\delta^y = \delta_t$. Velicina δ_t moze da se interpretira kao mera srednjeg gubitka informacije o stohastickom procesu x(t) u trenutku t, prouzrokovanaslucajnim smetnjama u opservacijama koje nose tu informaciju.

<u>Teorema 2.2.</u>

Ako su slucajni procesi x(t) i $\omega(t)$ stacionarni tada δ_t je skoro izvesno konstanta nezavisna od t: $\delta_t = \delta_o = \delta$.

Dokaz.

Ako sa $\hat{x}_t(\tau)$ oznacimo aproksimaciju x(t) pomocu x(s), $s\in\tau$ imamo $\delta_t = \int_T \sqrt{\int_\Omega |x(t) - \hat{x}_t(\tau)|^2 \, dP(\omega)} \, dp(\tau)$. Operator translacije S u prostorima (Ω, F, P) i (T ,$\mathcal{T}$,p) cuva meru tako da imamo

$$\int_T \sqrt{\int_\Omega |x(t+s) - \hat{x}_{t+s}(S_s\tau)|^2 \, dP(S_s\omega)} \, dp(S_s\tau) =$$

$$= \int_T \sqrt{\int_\Omega |x(t) - \hat{x}_t(\tau)|^2 \, dP(\omega)} \, dp(\tau) \quad \text{za svako } s \text{ , skoro izvesno.}$$

Primer 2.1

Kao primer uocimo stacionarni stohasticki proces x(t) sa funkcijom korelacije $B(s) = Ce^{-\alpha|s|}$, $C,\alpha>0$ i pitanje njegove linearne aproksimacije u trenutku t = 0. Na osnovu Jagloma /2/ za takav proces $\hat{x}_0(\tau) = e^{-\alpha|t|}x(t)$ gde je $t = \min_{s\in\tau} |s|$ Takav stohasticki proces naziva se korelaciono-markovski. Obrazlozenje ovakvog naziva lezi u tome sto informaciju o procesu u datom trenutku daje samo vrednost procesa u trenutku koji je najblizi datom trenutku, a ne zavisi od poznavanja procesa u drugim trenutcima- osobina tipicana za procesa Markova. S druge strane rec je o zadavanju procesa samo pomocu njegove funkcije korelacije tako da proces x(t) predstavlja klasu slucajnih procesa koji imaju iste druge momente. Greska predvidjanja je $\delta_o(\tau) = \sqrt{C(1 - e^{-2\alpha|t|})}$, $t = \min_{s\in\tau} |s|$.

Za proces $\omega(t)$ predpostavimo da je stacionaran, homogen i permanentan markovski proces (sa dva moguca stanja) koji poseduje osobinu reversibilnosti (videti Blanc-Lapierre i Fortet /15/). Ova osobina sastoji se u tome da je verovatnoca prelaska iz stanja o u stanje $\bar{o}$ (ili obrnuto) u vremenskom intervalu Δt jednaka verovatnoci da proces , buduci u stanju o , bio je u vremenu ne daljem od Δt u stanju $\bar{o}$. Oznacimo sa $p(o)$ i $p(\bar{o})$ verovatnocu apriori stanja o i $\bar{o}$. Verovatnoca da stacionaran, homogen i permanentan markovski proces, buduci u stanju $\bar{o}$, $0 < p(\bar{o}) < 1$, u vremenskom intervalu duzine x samo jednom promeni stanje (u nasem slucaju predje u stanje o) je $F(x) = e^{-p(\bar{o})x}$, $x > 0$ (Gnedenko /16/). Obzirom na predpostavku reversibilnosti vazi $F(x) = e^{-p(\bar{o})x}$ za $x \gtrless 0$. Ocigledno $F(x)$ predstavlja jednu funkciju raspodele verovatnoce ($F(\pm\infty) = 0$ i $F(0) = 1$). Predjimo sada na izracunavanje $\delta_o = \delta$. Naosnovu osobine matematickog ocekivanja $E(\delta(\tau)) = p(\bar{o})E(\delta(\tau)|\omega(0) = \bar{o}) + p(o)\, E(\delta(\tau)|\omega(o) = o)$. Medjutim, $\delta(\tau) = 0$ za svako τ koje sadrzi trenutak 0 tako da je $E(\delta(\tau)|\omega(0) = o) = 0$. Kako je

$$E(\delta(\tau)|\omega(0) = \bar{o}) = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{C(1 - e^{2\alpha x})}\, dF(x) \text{ imamo}$$

$$= p(\bar{o}) \int_{-\infty}^{0} \sqrt{C(1 - e^{2\alpha x})}\, p(\bar{o}) e^{p(\bar{o})x} dx \text{ ili konacno}$$

$$= \frac{p^2(\bar{o})}{2} \sqrt{C}\; B\left(\frac{p(\bar{o})}{2\alpha}, \frac{3}{2} \right), \text{ gde je } B(.,.) - \beta\text{-funkcija.}$$

Napomenimo jos jednom da δ predstavlja srednju gresku koju mozemo ocekivati u odredjivanju $x(t)$ u bilo kom fiksiranom tretku t pod dejstvom slucajnih smetnji u opservacijama koje su statisticki odredjene slucajnim procesom $\omega(t)$.

2.3. Slucaj linearnog predvidjanja stacionarnog procesa

Probelm izracunavanja greske δ_t , cak pod predposatavkom vrlo jednostavnih osobina slucajnog procesa $\omega(t)$, ostaje vrlo slozen, tako da se efektivno izracunavanje broja δ_t moze sprovesti samo u sasvim partikularnim slucajevima kakav je, recimo, primer 2.1. Razlog je pre svega u tome sto teroija nelineranog predvidjanja uopste nije razradjena dovoljno da bi se dobili neki efektivni izrazi za gresku $\delta_t(\tau)$, pa makar i na kolekcijama τ sasvim jednostavne strukture. Micemo se zato u daljem ograniciti na linearnu aproksimaciju stacionarnih procesa. Pa je i ovde nema opstih postupaka za efektivno dobijanje greske $\delta_t(\tau)$ u slucaju ma kakve kolekcije τ. Najdalje u tom praveu uradjeno je kod Jagloma /17/, /14/ i Rozanova /4/, ali se i tu rezultati odnose samo na stacionarne u sirem smislu procese sa racionalnim spektralnim gustinama. To ne bi bilo veliko ogranicenje da izrazi za gresku nisu izvanredno komplikovane funkcije od τ tako da nalazenje matematickih ocekivanja u odnosu na prostor verovatnoce $(T, \mathcal{T}, p)$ je izvodljivo samo u trivijalnim oblicima ovog poslednjeg. Efektivni izraz $\delta_t(\tau)$ dat je samo u slucaju linearnog predvidjanja stacionarnog procesa $x(t)$ na osnovu "cele proslosti". U slucaju da je kolekcija τ oblika $\tau_{t_0} : (-\infty, t_0]$ gresku linearnog predvidjanja velicine $x(t)$, $t > t_0$ pomocu $x(s)$ $s \leq t_0$ oznacimo sa $\sigma_t(t_0)$ (u nasem ranije oznacavanju $\sigma_t(t_0) = \delta_t(\tau_{t_0})$).

Kolmogorov /13/, Karhunen /9/ i drugi dali su postupak za efektivno nalazenje koeficijenata c_{t-n}, $n=\dots,-1,0$, kod procesa sa diskretnim parametrom i funkcije $g(u)$, $-\infty < u < 0$, u slucaju neprekidnog parametra (u prvom delu ovog rada dati su izrazi za $\sigma_t(t_o)$ pomocu c_{t-n}, odnosno $g(u)$). Zbog svega ovoga ovde cemo se ograniciti na slucaj linearnog predvidjanja stacionarnih procesa.

Dalje cemo posmatrati proces $\omega(s)$ samo na vremenskoj poluosi $-\infty < s \leq t$, t fiksirano. Oznacimo sa T_{t_o} podskup skupa T za cije elemente τ vazi: $\omega(s) = \bar{s}$, za svako $s \in (t_o, t]$. Izvecemo asimtotski jednako ponasanje greski $\delta_t(\tau)$ i $\sigma_t(t_o)$ utvrdjuje

<u>Teorema 2.3</u>

Za svako $\tau \in T_{t_o}$ vazi $\lim\limits_{t_o \to -\infty} \delta_t(\tau) = \lim\limits_{t_o \to -\infty} \sigma_t(t_o)$.

Napomenimo da ako je stacionaran proces $x(t)$ linearno regularan granicna vrednost u teoremi jednaka je $\|x(0)\|$.

<u>Dokaz.</u>

Kako je za svako τ_1 i τ_2 $\tau_1 \geq \tau_2$ vazi $\delta_t(\tau_1) \leq \delta_t(\tau_2)$ imamo: za svako $\tau \in T_{t_o}$, $\tau \in \zeta_{t_o}$ i $\delta_t(\tau) \geq \sigma_t(t_o)$. Sa druge strane za svako τ koje pripada T_{t_o}: $\delta_t(\tau)$ nije vece od "duzine normale" iz "tacke" $x(t)$ na podprostor $\bigcap_{t_o} H(t_o)$. Ta normala je bas $\lim\limits_{t_o \to -\infty} \sigma_t(t_o)$ cime je dokaz zavrsen.

Veza izmedju δ_t i $\sigma_t(t_o)$ je data u obliku procene δ_t odozdo

Teorema 2.4

Vazi $\delta_t \geqslant p_t(\bar{o}) \int_{-\infty}^{t} \sigma_t(x)\, dF_t(x)$, gde je

$p_t(\bar{o}) = p(\tau ; \omega(t) = \bar{o})$ i $F_t(x)$ funkcija raspodele uslovnih verovatnoca

$F_t(x) = p(\tau ; \omega(s) = \bar{o}, \ \forall s, \ t \geqslant s > x | \omega(t) = \bar{o})$

$F_t(-\infty) = 0 \quad F_t(t) = 1.$

Dokaz.

U dokazu se koriste osobine uslovnih matematickih ocekivanja (Doob /1/). Kako je za savko $\tau \in T_{t_o}$ $\delta_t(\tau) \geqslant \sigma_t(t_o)$ imamo $E(\delta_t(\tau) | \tau \in T_{t_o}) \geqslant \sigma_t(t_o)$. Odavde sledi $E(E(\delta_t(\tau)|\tau \in T_{t_o})|\omega(t) = \bar{o}) \geqslant E(\sigma_t(t_o)| \omega(t) = \bar{o})$. Medjutim, na osnovu svojstva matematickog ocekivanja navedenog u prvom delu rada izraz na levoj strani je $E(\delta_t(\tau)|\omega(t) = \bar{o})$. Izraz na desnoj strani je , vodeci racuna da $\sigma_t(t_o) = const.$ za svako $\tau \in T_{t_o}$, $\int_{-\infty}^{t} \sigma_t(x)\, dF_t(x)$. Sa druge strane

$E(\delta_t(\tau)) = p_t(\bar{o})\, E(\delta_t(\tau)|\omega(t) = \bar{o}) + p_t(o))E(\delta_t(\tau)| \omega(t) = o).$

Kako je $\delta_t(\tau) = 0$ za svako τ za koje $\omega(t) = 0$ $t \in \tau$ drugi sabirak na desnoj strani je 0, odakle sledi nejednakost koju je trebalo dokazati.

Procena za δ_t odozdo , koja se daje pomocu korlacione funkcije stacionarnog procesa $B(s) = E(x(s)\, \overline{x(o)})$, vazi u opstem slucaju aproksimacije (ne samo predvidjanja). U cilju uproscavanja iskaza i oznaka ovde je dajemo u slucaju realnog stacionarnog procesa x(t).

Teorema 2.5.

Vazi $\delta_t \le p_t(\bar{o}) \int_T \rho_t(\tau)\, dp$ gde je

$$\rho_t(\tau) = \inf_{s\in\tau} \sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-s)}{B(0)}} \,.$$

Dokaz.

Greska linearne aproksimacije velicine x(t) pomocu x(s) lako se izracunava jer predstavlja minimu po α funkcije $E(|x(t) - \alpha x(s)|^2) = \sqrt{B(0) - 2\alpha B(t-s) + \alpha^2 B(0)}$, i iznosi $\sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-s)}{B(0)}}$. Kako je $\delta_t(\tau) \le \sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-s)}{B(0)}}$ za svako τ koje sadrzi s sa koje $\omega(s) = 0$, imamo $\delta_t(\tau) \le \rho_t(\tau)$. Dalje dokaz tece kao u predhodnoj teoremi.

U slucaju predvidjanja stacionarnog procesa i monotonosti korelacione funkcije B(s) (slucaj koji se cesto javlja u primenama) procena dobija jednostavniji oblik.

Teorema 2.6

Ako je $B(s)_t$ monotono opadajuca funkcija tada

$$\delta_t \le p_t(\bar{o}) \int_{-\infty} \sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-x)}{B(0)}}\, dF_t(x).$$

Dokaz.

Za svako τ i $t_o \in \tau$: $E(\delta_t(\tau)|\omega(t_o)=o) \leq \sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-t_o)}{B(0)}}$.

Dakle, $E(E(\delta_t(\tau)|\omega(t_o) = o)|\omega(t) = \bar{o}) \leq E(\sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-t_o)}{B(0)}}|\omega(t)=\bar{o})$

Izraz na levoj strani je $E(\delta_t(\tau)|\omega(t) = \bar{o})$, dok onaj na desnoj strani moze da se napise u obliku $\int_t^{-\infty}\sqrt{B(0) - \frac{B^2(t-x)}{B(0)}}\, dG_t(x)$,

gde je $G_t(x)$ funkcija raspodele uslovnih verovatnoca

$G_t(x) = p\,(\tau: \omega(t_o) = o,\ t \geq t_o > x\,|\,\omega(t)\ \ \bar{o})$, $(G_t(t)=0,\ G_t(-\infty)=1)$

Medjutim, dogadjaj $(\omega(s) = \bar{o}, \forall s,\ t \geq s > x\,|\,\omega(t) = \bar{o})$ i $(\omega(t_o) = o,\ t \geq t_o > x\,|\ \omega(t) = \bar{o})$ su komplementarni tako da $G_t(x) = 1 - F_t(x)$ i savrsetak dokaza je ocigledan.

Prosirenjem postupka sprovedenog u teoremi 2.5 mogu se dobiti ostrije procene za δ_t u slucaju stacionarnih procesa sa diskretnim parametrom. Radi uproscavanja izracunavanja predpostavimo da je $\omega(t)$ stacionaran proces, dakle mozemo uzeti da je $t = 0$. Uocimo interval vremenske ose $[x+y, x]$, $x, y < 0$. Nalazenje greske r_{xy} linearne aproksimacije x_o pomocu x_t, $t \in [x + y\ ,\ x]$ svodi se na jednostavan problem visedimenzione linearne regresije (Jaglom /2/). Imamo $\delta(\tau) \leq r_{xy}$ za svako τ za koje : $\omega(t) = \bar{o}$ za svako $x < t \leq 0$ i $\omega(s) = o$, za svako $x + y \leq s \leq x$, tako da vazi

$E(\delta(\tau)|\omega(t) = \bar{o}, \forall t, x > t \geq 0, \omega(x) = o) \leq \int_{-\infty}^{0} r_{xy}\, d\,\varphi(y)$, gde je $\varphi(y)$ funkcija raspodele verovatnoce

$\varphi(y) = p(\tau): \omega(t) = o, \forall t, 0 \quad t \quad y) \; (\varphi(-\infty) = 0, \varphi(0) = 1)$. Integral na desnoj strani je izvesna srednja vrednost koju mozemo da oznacimo sa $\bar{r}_x$. Uzimajuci u gornjoj nejednakosti matematicko ocekivanje po x dobijamo $\delta \leq p(\bar{o}) \int_{-\infty}^{o} \bar{r}_x dF_o(x)$. Ocigledno r_{xy} je monotono opadajuca funkcija kad $y \to -\infty$ i $\lim_{y\to-\infty} r_{xy} = \sigma_o(x)$.

Primer 2.2.

Gornja procena moze se primeniti na slucaj stacionarnog procesa sa diskretnim parametrom cija je spektralna gustina oblika $f(\lambda) = \left|\sum_{j=o}^{\beta} B_j e^{2\pi i j\lambda}\right|^{-2}$, $B_o \cdot B \neq 0$, gde su koreni polinoma $\sum_{o}^{\beta} B_j z^j$ u krugu $|z| = 1$. Za takav proces (Doob /1/)

$$x_{n+1} = -\frac{1}{B_\beta}(B_{\beta-1} x_n + \dots + B_o x_{n-\beta+1}) + \frac{\xi_{n+1}}{B_\beta},$$

gde $_j$ obrazuju ortonormilan slucajan niz i $_{n+1}$ x_i, $i = n, n-1, \dots$. Dakle u ovom slucaju $\sigma_o(-1) = \frac{1}{B_\beta^2}$. Iteracijom se moze lako dobiti $\sigma_o(k)$, $k = -2, -3, \dots$. Iz izraza za x_{n+1} vidi se da je on linearno predstavljen pomocu $\beta + 1$ uzastopnih vrednosti u proslosti i velicine ortogonalne na tih $\beta + 1$ vrednosti procesa. Takav proces moze da se nazove "korelaciono markovski reda $\beta + 1$". Kod takvog procesa $r_{xy} = \sigma_o(x)$ za svako $y \geq \beta + 1$ tako da se $\bar{r}_x$ lako efektivno nalazi.

Kod ovog procesa mozemo neposredno dobiti procenu u verovatnoci za δ

$$\text{Prob}\left\{ \delta \leq \sigma_0(x) \right\} \geq p(\tau : \omega(t) = \bar{0}, \forall t,\ x < t < 0, \forall s\ ,\ x+\beta \alpha \leq s \leq x).$$

Primer 2.3

Neprekidan stacionaran proces $x(t)$ sa spektralnom gustinom $f(\lambda) = \left|\sum_{0}^{\beta} B_j \lambda^j\right|^{-2}$, gde su koreni polinoma $\sum B_j z^j$ u gornjoj poluravni, moze se predstaviti u obliku (Doob /1/):

$$x(0) = \sum_{j=0}^{\beta-1} a_j(t_o)x^{(j)}(t_o) + \int_{t_o}^{0} g(s)dZ(s),\ t_o < 0,$$ gde se a_j i g izrazavaju eksplicitno pomocu B_j, a $\int_{t_o}^{0} g(s)dZ(s) \perp x(t), t \leq t_o$

($x^{(j)}(t_o)$ oznacava j-ti izvod procesa $x(t)$ u srednjem kvadratnom, a $Z(s)$ je stacionaran proces sa ortogonalnim prirastajima). Dakle, $\sigma_o^2(t_o) = \int_{t_o}^{0} |g(s)|^2 ds$.

Ako za slucajni proces $\omega(t)$ predpostavimo da je neprekidan u verovatnoci to jest: $\text{Prob}\{\omega(s) \neq \omega(t)\} \rightarrow 0$, kad $s \rightarrow t$ za svako t onda sa verovatnocom proizvoljno bliskom 1 opservacija u trenutku t_o povlaci opservaciju u malom intervalu oko t_o, dakle omogucije nalas enje izvoda procesa $x(t)$ za $t = t_o$. U tom slucaju $\delta = \int_{-\infty}^{0} \sigma_o(x)\, dF_o(x)$.

LITERATURA

/1/. J.J. Doob : Stochastic Processes, New-York, 1953.

/2/. A.M. Jaglom : Vvdenije vteoriju stacionarnih slucajnih funkcii, Uspehi matem.nauk 7(5),3-168 , 1952.

/3/. P. Masani and N. Wiener : Non-linear prediction. Probability and statistics. The Harald Cramer Volume. Uppsala 1959, p.190-212.

/4/. J. A. Rozanov : Stacionarnije slucanije procesi, Moskva 1963.

/5/. N.A. Kolmogorov : Suites stationnaires dans l, espace de Hilbert, Bull. de l Universite de Moscou, 1941, v.II e.6.

/6/. P. Halmos : Shifts on Hilbert spaces. Journal fur die reine und angewnadte Mathematik, Band 208, 1961., p.102-112.

/7/. Introduction to Hilbert Space, New York, 1951.

/8/. O. Hanner : Deterministic and non-deterministic stationary random processes. Arkiv fur Mathematik, Band 1, Hefte 2, 1950, p.161-177.

/9/, K. Karhunen : Uber die Struktur stationaren zufalligen Funktionen, Ark. Mat. 1, 141-160, 1950.

/10/. A.N. Kolmogorov : Fundations of Probability Theory, New York, 1956.

/11/. M. Rosenblatt : Random Processes, New York, 1962.

/12/. F. Riesz et B Sz. Nagy : Lecons D Analyse fonctionnelle, Paris, 1955.

/13/. A.N. Kolmogorov: Interpolirovanije i ekstrapolirovanije stacionarnih slucajnih posledovateljnostej, Izv. AN. SSSR (ser. matem. 5, 3-14, 1941.

/14/. A.M. Jaglom : Efektivnije resenija linejni aproksimacionih zadac dlja mnogomernih stacionarnih procesov s racionalnim spektrom. Teorija verojatnosti i jejo primenenija V, 3, 265-292, 1960.

/15/. A. Blanc-La Pierre & R. Fortet: Theorie des Fonctions Aleatoires, Paris 1953.

/16/. B.V. Gnedenko: Kurs teoriji verojatnostej, Moskva 1961.

/17/. A.M. Jaglom: Extrapolation, interpolation et filtrage des processus aleatoires stationnaires a densite spectrale rationnelle; Trudi Moskov. Mat. Obsc. 4(p. 333-375) 1955. Traduction, Institut Henri Poincare.