ВЛАСТИМИР СТАЈИЋ

АЛГЕБРА

ЗА VII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Овај уџбеник одобрио је г. Министар просвете одлуком Сн.бр. 28719 од 24 јула 1935 г. а на основи мишљења Главног просветног савета С.бр. 906 од 7 јула 1935 г.

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
1935

ПРЕДГОВОР

1. Ученику се препоручује да ову књигу добро чува и одржава у исправном стању, пошто ће следеће године често бити упућиван на поједине ставове из ње.

2. Кад ученик рачуна на табли мора непрестано да говори и да сваки поступак објашњава. Ћутање на табли је чамотиња у разреду.

3. Велики број задатака из ове књиге могу се употребити као матурски задаци.

Штампарија Драг. Поповића. Луја Бартуа бр. 3.

ДЕО ПРВИ

ГЛАВА I

Квадратни трином

1. Дефиниција. — Квадратни трином је трином облика

$$ax^2 + bx + c,$$

где су a, b и c сталне величине, а x промењлива.

Називе имамо исте као и код квадратне једначине: први члан, први коефициент, независан члан итд.

Ми ћемо често вредност тринома обележавати са y, тј. писаћемо.

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Исто тако, пошто је вредност тринома функција од x, употребљаваћемо и ознаку $f(x)$, (изговара се „еф од икс“), тј. стављаћемо

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

За овакво означавање најчешће се узима слово f, пошто тим словом почиње реч функција. (Види Аритметику и Алгебру за III разред страна 44!)

Ако у триному ставимо место x неки број, или неко друго слово, резултат те смене означићемо стављањем на место x у ознаци $f(x)$ тај број или слово. Тако ћемо имати:

$$f(10) = 100\,a + 10\,b + c$$
$$f(-1) = a - b + c$$
$$f(0) = c$$
$$f(m) = am^2 + b\,m + c$$
$$f(sin\alpha) = asin^2\alpha + bsin\alpha + c.$$

У даљем излагању говорићемо квадратни трином, трином другог степена, а врло често само трином.

2. — Оне вредности x за које трином добија вредност нулу зваћемо *корени тринома.* То су очевидно *корени* квадратне једначине

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

И ове корене обележаваћемо ознаком x_1 и x_2,

Ако је

$$b^2 - 4ac > 0$$

трином има два различита корена.

Кад је

$$b^2 - 4ac = 0$$

трином има два једнака корена.

Најзад ако је

$$b^2 - 4ac < 0$$

трином *нема корена*.

При проучавању квадратног тринома ми ћемо углавном претпостављати да први коефициент a није нула.

3. Канонични облици квадратног тринома. — То су нарочити облици који се могу дати триному. Из њих се могу лако видети његове главне особине. Образоваћемо најпре општи облик, из кога ћемо затим извести три специјална облика према томе да ли је дискриминанта позитивна, нула, или негативна.

1° *Општи канонични облик.* — Пошто претпоставимо да a није нула, имамо

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Допунимо $x^2 + \frac{b}{a}x$ до потпуног квадрата (Види Алгебру аа VI р. стр. 103!), па ћемо имати:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

или

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\,ac}{4a^2}\right]. \qquad (1)$$

Израз на десној страни једначине (1) је канонични облик, који се увек може дати триному.

2° *Случај кад је дискриминанта негативна.* —

Претпоставимо да је

$$b^2 - 4ac < 0,$$

тј.

$$4ac - b^2 > 0.$$

Тада једначина (1) постаје

$$ax^2 + bx + c = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \qquad (2)$$

Ако квадратни корен броја $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ обележимо са m тј. ставимо

$$\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = m,$$

једначину (2) можемо написати у облику

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right]. \qquad (3)$$

Кад је $b^2 - 4ac < 0$, трином се може написати у облику производа из првог коефицијента a и збира два квадрата.

У овом случају *трином никад не може бити једнак нули*. Један квадрат је увек позитиван или нула. Збир два квадрата, два позитивна броја, може бити једнак нули, само ако су оба броја нуле. Међутим овде m^2 не може бити нула, јер $b^2 - 4ac$ није једнако нули. А како ни a није нула, то ни производ на десној страни једначине (3) не може никад бити једнак нули.

Пример. Дат је трином

$$2x^2 - x + 1.$$

Да се напише у каноничном облику.

Овде је $\quad b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 < 0,$

па је

$$2x^2 - x + 1 = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right].$$

3° *Случај кад је дискриминанта једнака нули.* — Кад је

$$b^2 - 4ac = 0$$

једначина (1) постаје

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \qquad (4)$$

Или ако ставимо

$$-\frac{b}{2a} = x_1,$$

пошто у овом случају трином има два једнака корена $-\frac{b}{2a}$, имаћемо

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2. \qquad (5)$$

Кад је $b^2 - 4ac = 0$, трином је једнак производу из a и квадрата бинома првог степена по x.

Пример. Да се трином

$$4x^2 + 8x + 4$$

доведе на канонични облик.

Овде је

$$b_1^2 - ac = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0,$$

па је

$$4x^2 + 8x + 4 = 4(x+1)^2.$$

Двоструки корен тринома је $x_1 = -1$.

4. *Случај кад је дискриминанта позитивна.* — Ако је

$$b^2 - 4ac > 0,$$

можемо једначину (1) написати у облику

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right], \tag{6}$$

или, ако краткоће ради ставимо

$$\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = m$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - m^2\right].$$

У средњој загради имамо разлику квадрата, па је можемо написати у облику производа по обрасцу

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Тако добијамо

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - m\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + m\right),$$

или

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

или

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

или још

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Пошто су разломци у последњем изразу корени квадратне једначине, можемо ставити.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Напослетку добијамо

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{7}$$

Кад је $b^2 - 4ac > 0$, квадратни трином једнак је производу првог коефицијента a и разлике два квадрата, или још производу из коефицијента a и два бинома првог степена, који имају за коефицијент уз x јединицу.

У овом случају трином има два корена x_1 и x_2.

Пример: Да се трином

$$6x^2 - 5x + 1$$

доведе на канонични облик.

Како је

$$b^2 - 4ac = 25 - 24 > 0,$$

то према једначини (1) или (6) имамо

$$6x^2 - 5x + 1 = 6\left[\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{1}{144}\right]$$

или према једначини (7)

$$6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Све ове резултате можемо кратко изнети на овај начин:

1º Општи канонични облик

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

2º Кад је $b^2 - 4ac < 0$ канонични облик је

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right],$$

где је

$$m^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

3º Кад је $b^2 - 4ac = 0$ канонични облик је

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

или

$$a(x - x_1)^2,$$

где је $$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

4º Кад је $b^2 - 4ac > 0$ канонични облик је

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - m^2\right],$$

где је $$m^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

или $$a(x - x_1)(x - x_2),$$

где је $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

За писмено вежбање

Довести на канонични облик следеће квадратне триноме:

1. $x^2 + x + 1$
2. $3x^2 - x + 9$
3. $2x^2 + 3x + 2$
4. $6x^2 - 5x + 3$
5. $x^2 + 2x + 1$
6. $4x^2 + 4x + 1$
7. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$
8. $25x^2 - 30x + 9$
9. $x^2 - 6x + 8$
10. $x^2 - 13x + 36$
11. $x^2 + 0{,}5x - 2{,}04$
12. $6x^2 - 31x + 28$
13. $4x^2 - 17x + 15$
14. $12x^2 + 100x + 125$
15. $0{,}06x^2 - 0{,}31x + 0{,}4$
16. $0{,}36x^2 + 1{,}11x + 0{,}4$
17. $3x^2 - 6\frac{1}{4}x - 18\frac{3}{4}$
18. $6x^2 + 3\frac{1}{5}x - 1\frac{1}{2}$

4. Растављање квадратног тринома на чиниоце. — Резултат

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

омогућује нам да решимо задатак: *да се квадратни трином*

$$ax^2 + bx + c$$

растави на чиниоце.

Треба ставити да је

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

па решити тако добијену квадратну једначину. Ако су корени једначине x_1 и x_2, тражени чиниоци биће a, $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$.

Напомена. — Чиниоце $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ назвали смо још прошле године *кореним чиниоцима.*

Пример. Раставити на чиниоце трином

$$6x^2 - x - 1.$$

Одговарајућа квадратна једначина је

$$6x^2 - x - 1 = 0.$$

Њени корени су

$$x_1 = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = -\frac{1}{3},$$

па ће бити

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right),$$

или

$$6x^2 - x - 1 = (2x - 1) \cdot (3x + 1).$$

За писмено вежбање

Да се раставе на чиниоце триноми:

1. $x^2 - 7x + 6$
2. $x^2 + 5x - 6$
3. $x^2 - 5x - 6$
4. $x^2 + 21x + 68$
5. $2x^2 - 5x + 2$
6. $4x^2 - 17x + 4$
7. $12x^2 - 7x + 1$
8. $12x^2 - x - 1$
9. $15x^2 + 19x + 6$
10. $15x^2 + x - 6$

Скрати следеће разломке:

11. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$
12. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x + 1}$
13. $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 6x + 9}$
14. $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + x - 12}$
15. $\frac{20x^2 + 27x + 9}{20x^2 + 3x - 9}$
16. $\frac{35x^2 - 4x - 4}{28x^2 - 13x - 6}$

5. Знак квадратног тринома. — Пошто знамо да доведемо квадратни трином на канонични облик, лако можемо одредити и какав ће знак имати, тј. да ли ће бити позитиван или негативан, кад место x стављамо разне вредности, па израчунамо вредност тринома. И ту ћемо разликовати три слачаја.

Први случај. — Трином нема корена. Написаћемо га у облику

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+m^2\right].$$

Ма какво да је x, израз у средњој загради (збир два квадрата) је увек позитиван. Према томе трином ће имати исти знак као што га има први коефициент a. На пример трином

$$3x^2 - x + 2$$

биће увек позитиван, па ма какву вредност узели место x.

Други случај. — Трином има два једнака корена. Тада је његов канонични облик

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Израз у загради је увек позитиван, сем случаја $x = -\frac{b}{2a}$, кад је трином једнак нули. Према томе трином ће увек имати исти знак као и први коефициент. Само у случају $x = -\frac{b}{2a}$ трином добија вредност нулу.

Трећи случај. — Претпоставимо најзад да трином има два различита корена x_1 и x_2. Тада је одговарајући канонични облик

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

Претпоставимо још да је x_1 мањи корен, тј. да је

$$x_1 < x_2.$$

После овога, узимајући за x разне вредности, могу наступити три могућности:

1° Или ћемо за x узети вредности мање од мањег корена, тј. биће

$$x < x_1,$$

па тим пре $x < x_2$.

Тада су чиниоци $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ негативни, а њихов производ позитиван. Трином у овом случају има исти знак као и први коефициент a.

2. Или ћемо за x узети вредности веће од већег корена, тј. узети да је

$$x > x_2,$$

па тим пре $x > x_1$.

Тада су чиниоци $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ позитивни, па је и њихов производ позитиван. Трином и у овом случају има исти знак као и први коефициент.

3. Остаје нам још да испитамо шта ће бити, ако за x узмемо вредности веће од мањег корена, а мање од већег, тј. ако узмемо да је

$$x_1 < x < x_2.$$

Тада је чинилац $(x - x_1)$ позитиван, а чинилац $(x - x_2)$ негативан. Њихов производ је негативан. У овом случају знак тринома је супротан знаку првог коефициента a.

На пример трином

$$x^2 + 3x - 4$$

је позитиван за све вредности x мање од -4 и веће од 1, а негативан, ако се x налази између -4 и 1.

Целокупно ово излагање о знаку квадратног тринома можемо резимирати овим правилом: *квадратни трином*

$$ax^2 + bx + c$$

има увек исти знак као и први коефициент a, *изузев једног јединог случаја, кад трином има два различита корена* x_1 *и* x_2, *а ми за* x *узмемо вредност између корена.*

За писмено вежбање

Да се одреди знак следећих тринома:

1. $x^2 + x + 1$	2. $3x^2 - 2x + 2$
3. $6x^2 - 2x + 3$	4. $2x^2 - x - 5$
5. $x^2 - 8x + 16$	6. $-9x^2 + 6x - 1$
7. $x^2 - 9x + 14$	8. $x^2 - 4x - 5$
9. $24x^2 - 10x + 1$	10. $-15x^2 + 8x - 1$
11. $-3x^2 + 2x - 6$	12. $-x^2 + 1{,}3x - 0{,}36$

6. Неједначине II степена. — Ово проучавање знака тринома можемо применити на решавање неједначина II степена. То решавање управо следује непосредно из претходног правила о знацима квадратног тринома.

Неједначина II степена је неједначина облика

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Говорићемо *одговарајућа једначина* овој неједначини је једначина

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

која се добија, кад се знак $>$ замени знаком $=$.

При решавању неједначина II степена разликоваћемо три случаја.

1° Одговарајућа једначина нема корена. У овом случају, ако је a позитивно, дата неједначина је увек задовољена. Ако је a негативно, она никад није задовољена.

2° Одговарајућа једначина има два једнака корена. Закључак је исти као у претходном случају. Изузетак је само кад за x узмемо вредност која је једнака корену. Тада неједначина постане једначина.

3° Одговарајућа једначина има два различита корена x_1 и x_2. Претпоставимо да је $x_1 < x_2$.

У овом случају, ако је a позитивно, неједначина је задовољена за вредности изван корена, тј. за вредности x мање од мањег и веhи од веhег корена тј. или за

$$x < x_1$$

или за

$$x > x_2$$

Зашто?

Ако је a негативно, неједначина ће бити задовољена за све вредности између корена, тј. за

$$x_1 < x < x_2.$$

Зашто?

Слично овоме решава се неједначина II степена

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Али ми можемо ову неједначину и овако написати

$$-ax^2 - bx - c > 0.$$

Онда смо добили неједначину какву смо већ проучили.

Пример 1. Решити неједначину

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Одговарајућа једначина је

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Њени корени су $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Да би трином

$$x^2 - 5x + 6$$

био позитиван, тј. да би имао исти знак као и први коефицијент $(+1)$, треба да узмемо вредности за x изван корена, тј. треба да буде

$$\text{или } x < 2,$$
$$\text{или } x > 3.$$

Пример 2. Решити неједначину

$$10x^2 - 7x + 1 < 0.$$

Одговарајућа једначина гласи

$$10x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Њени корени су 0,2 и 0,5. Трином ће бити негативан, тј. имаће супротан знак знаку првог коефицијента за вредности x узетих између корена. Неједначина ће бити задовољена за

$$0{,}2 < x < 0{,}5.$$

Како се друкчије може решити ова једначина?

Пример 3. Да се реши неједначина

$$6x^2 - 4x + 3 < 0.$$

Одговарајућа једначина гласи:

$$6x^2 - 4x + 3 = 0$$

Дискриминанта $b_1^2 - ac = 4 - 18 = -14$ је негативна. Трином нема корена и има увек исти знак као и први коефицијент $+6$. Он је дакле увек позитиван. Неједначина није задовољена ни за једну вредност x.

За писмено вежбање

Показати за које ће вредности x следеће обе функције бити позитивне, за које негативне, а за које вредности x ће бити супротно означене. Какав закључак из тога следује за њихов производ?

1. x и $x - 3$
2. x и $x + 4$
3. $x - 3$ и $x + 5$
4. $x + 2$ и $x + 7$
5. $2x$ и $6x - 1$.
6. $3x - 1$ и $2x + 3$

Решити неједначине

7. $x(x - 8) > 0$
8. $x(x + 5) > 0$
9. $(x-4)(x+3) > 0$
10. $(2x - 3)(x - 5) > 0$
11. $-(4x + 1)(2x - 9) > 0$
12. $(5x - 2)(8x + 3) < 0$
13. $x^2 + 13x + 40 < 0$
14. $-6x^2 + 5x + 1 < 0$
15. $14x^2 + 45x - 14 > 0$
16. $-2x^2 - 7x + 3 > 0$
17. $x^2 - 4x + 13 < 0$
18. $x^2 + 4x + 1 > 0$
19. $2x + \frac{1}{x} - 3 > 0$
20. $6x^2 - 31x + 3 < 0$
21. $(x - 2)^2 + (x + 2)^2 - 3x^2 > 4(2 - x)$
22. $(x + 3)^2 - (x - 4)^2 < (x - 2)(x + 2)$
23. $(x - 5)^2 + (x + 2)^2 > (2x - 3)^2 - (x + 4)(x + 5)$
24. $2(1 - x) + x^2 < (x - 1)^2 + (x + 1)^2$
25. $\frac{x + 3}{x + 11} > 0$
26. $\frac{2x + 5}{x + 4} < 0$
27. $\frac{4x - 1}{2x + 1} < 0$
28. $\frac{1}{(x - 4)(x - 7)} > 0$
29. $\frac{1}{x^2 + 2x - 15} < 0$
30. $(x^2 + 3x - 10)(x^2 - 5x - 6) > 0$

Решење. Решити ову неједначину значи одредити такве вредности за x, да производ на левој страни буде позитиван.

Да би производ био позитиван, треба чиниоци да буду једнако означени. Да бисмо одредили знаке чинилаца, тринома, треба да решимо одговарајуће квадратне једначине

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Корени ових једначина су — 5 и 2, — 1 и 6. Треба да их уредимо по величини.

$$-5, -1, 2, 6.$$

То су вредности за које лева страна дате неједначине постаје нула. Овим бројевима ми смо интервал од $-\infty$ до $+\infty$ разделили у више интервала. Треба сад испитати какве знаке добијају триноми чиниоци и њихов производ, кад x, мењајући се, добије све вредности од $-\infty$ до $+\infty$.

Резултате можемо сложити у следећу табелу:

x	$x^2+3x-10$	x^2-5x-6	Закључак
$-\infty$	+	+	Чиниоци су једнако означени, производ је позитиван, неједначина је задовољена.
	+	+	Неједначина је задовољена.
-5	0	+	Неједначина није задовољена.
	—	+	Неједначина није задовољена.
-1	—	0	Неједначина није задовољена.
	—	—	Неједначрна је задовољена
2	0	—	Неједначина није задовољена.
	+	—	Неједначина није задовољена.
6	+	0	Неједначина није задовољена.
	+	+	Неједначина је задовољена.
$+\infty$	+	+	Неједначина је задовољена.

31. $(x^2 - 25)(x^2 - 14x + 45) > 0$
32. $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - x + 5) > 0$
33. $(x^2 - 9x + 18)(x^2 - 2x + 1) > 0$
34. $\dfrac{x^2}{x^2 + 4x - 5} > 0$
35. $\dfrac{(x-3)^2}{x^2 - 5x - 24} > 0$
36. $\dfrac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 6x + 9} > 0$
37. $\dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 8x + 15} > 0$
38. $\dfrac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 9x + 18} < 0$
39. $\dfrac{x^2 - 13x + 36}{x^2 - 9x + 14} < 0$

7. Упоређивање једног броја са коренима квадратне једначине. — Често ћемо имати да решавамо и овакав задатак: Дата је квадратна једначина

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0.$$

У могућности смо да одредимо знак тринома $f(x)$. Дат нам је један број m. Шта се може из $f(m)$ закључити о егзистенцији корена и о величини броја m у односу на корене, ако они постоје?

Број $f(m)$ дефинисан односом

$$f(m) = am^2 + bm + c$$

је резултат који добијамо кад место x у триному једначине ставимо m.

Разликоваћемо два случаја према томе да ли је овај резултат истог знака као и први коефицијент a, или супротног.

1° Претпоставимо најпре да су $f(m)$ и a супротног знака. Ми ћемо то изразити математички стављајући да је њихов производ негативан, тј.

$$a \cdot f(m) < 0.$$

Раније смо већ рекли да квадратни трином има увек исти знак као и први коефицијент, изузев једног јединог случаја, кад трином има корене, а ми узимамо за x вредности између корена. Према томе можемо исказати ово правило: Кад је резултат смене $f(m)$ једног броја m у триному квадратне једначине супротног знака знаку првог коефицијента a, можемо утврдити две чињенице:

1) једначина има два различита корена,
2) број m по величини налази се између корена.

Пример: Нека нам је дата једначина

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 = 0.$$

Ставимо у триному место x број 2, па ћемо имати

$$f(2) = 4 - 12 + 7 = -1.$$

Резултат $f(2)$ је негативан, тј. супротан знаку првог коефицијента $+1$. Према томе можемо закључити да једначина има два различита корена x_1 и x_2 и између њих се налази број 2, тј. можемо написати

$$x_1 < 2 < x_2.$$

2º Претпоставимо да $f(m)$ има исти знак као и први коефицијент a. Ту чињеницу можемо изразити пишући

$$a \cdot f(m) > 0.$$

1). Ако је $b^2 - 4ac < 0$ једначина нема корена.

2). Ако је $b^2 - 4ac > 0$ једначина има два корена, а број m се не налази између њих. Или је број m мањи од мањег корена, или је већи од већег.

Ако претпоставимо да је $x_1 < x_2$ онда је

$$\text{или } m < x_1,$$
$$\text{или } m > x_2.$$

Који ће бити од ова два случаја можемо видети на овај начин. Претпоставили смо да је

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2,$$

што се може овако написати

$$x_1 < -\frac{b}{2a} < x_2.$$

Сваки број који је мањи од x_1, биће мањи и од $\frac{-b}{2a}$, сваки број већи од x_2, биће већи и од $\frac{-b}{2a}$.

Кад дакле резултат смене $f(m)$ има исти знак као и први коефицијент a, и ако једначина има корене, да бисмо расветлили положај броја m према коренима, треба да сравнимо m са полузбиром корена $\frac{-b}{2a}$. Ако је број m мањи од полузбира, можемо закључити да је мањи од мањег корена, ако је m веће од полузбира корена, можемо тврдити да је веће од већег корена.

3º Ако је $b^2 - 4ac = 0$ дата једначина има један двоструки корен, чија је вредност $\frac{-b}{2a}$. Овај случај садржан је у претходном, под условом да се претпостави да је $x_1 = x_2$.

Пример. Нека је дата једначина

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 = 0,$$

па ставимо место x број -3. Тада је

$$f(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 1 = 22.$$

Овај резултат је позитиван, тј. има исти знак, као и коефицијент $+1$ уз x^2. Треба још да видимо да ли једначина има корена. Дискриминанта је

$$b_1^2 - ac = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Једначина има два корена x_1 и x_2 и број -3 није обухваћен коренима. Он је мањи од полузбира ових корена па, према томе је мањи од мањег корене:

$$x_2 > x_1 > -3.$$

Какав положај према коренима ове једначине има број 5, а какав број 1?

8. — Све закључке овога чланка можемо укратко овако исказати

1. *Кад је*

$$a f(m) < 0,$$

једначина има корене и број m је обухваћен њима.

$$x_1 < m < x_2.$$

2. *Ако је*

$$a f(m) > 0$$

и кад је $b^2 - 4ac < 0$ једначина нема корена; а ако је $b^2 - 4ac > 0$, број m се налази с леве или с десне стране корена тј.

$$\text{или је } m < x_1 < x_2$$
$$\text{или } x_1 < x_2 < m,$$

према томе да ли је $m < \frac{-b}{2a}$ или $m > \frac{-b}{2a}$.

Изостављамо случај кад је $f(m) = 0$, пошто је тада број m корен квадратне једначине.

Напомена 1. — Ако је $m = 0$, ми испитујемо специјалан случај, где је место нуле у односу на корене, а ово се пак своди на проучавање знака корена. (Види Алгебру за VI р. стр. 114, чл. 124!)

Напомена 2. — Кад се број m не налази између корена, упоређујемо га са полузбиром корена, да бисмо видели да ли се налази с леве или с десне стране корена. Уместо полузбира може да нам послужи и сваки други број који је обухваћен коренима. Додуше полузбир корена се врло лако налази, али ако нам је већ познат који број између корена, онда се и тог малог труда можемо ослободити, да не образујемо полузбир.

На пример нека је дата једначина

$$f(x) = x^2 - x - 1 = 0.$$

Ова једначина има два корена x_1 и x_2 супротно означена, пошто је $\frac{c}{a} < 0$.

То значи да се између корена налази нула. Испитајмо положај броја -2 према коренима. Имамо

$$f(-2) = 4 + 2 - 1 = 5.$$

Број -2 не налази се између корена. А пошто је овај број мањи од нуле, која је обухваћена коренима, то је број -2 мањи од мањег корена.

$$-2 < x_1 < x_2.$$

За писмено вежбање

Испитати положај бројева -5, -2, 1, 2, 4, 6 и 10 према коренима једначина:

1. $x^2 + 8x - 12 = 0$	2. $x^2 - 2x - 24 = 0$
3. $x^2 - x - 6 = 0$	4. $x^2 + x - 6 = 0$
5. $12x^2 - x - 1 = 0$	6. $10x^2 + 3x - 1 = 0$
7. $x^2 - 8x + 13 = 0$	8. $x^2 - 6x + 4 = 0$
9. $4x^2 - 12x + 5 = 0$	10. $9x^2 - 12x - 23 = 0$

9. Примена на дискусију квадратних једначина. — Претходни резултати омогућују многобројне и разноврсне дискусије код квадратних једначина. Ове дискусије обично се односе на егзистенцију и знаке корена. Осим овога за корене се постављају углавном ова три услова:

1. Корени једначине треба да буду мањи од датог броја.
2. Корени треба да буду већи од датог броја.
3. Корени треба да буду обухваћени између два дата броја.

При дискусијама се избегава решавање једначина. Једначине се решавају тек кад треба потврдити добијене резултате.

На неким примерима видећемо како треба изводити те дискусије.

Пример 1. Дата је једначина

$$x^2 - 10x + 7 + 2m = 0.$$

Колико ова једначина има корена већих од 3?

Нека је $f(x) = x^2 - 10x + 7 + 2m$.

Образујмо $f(3) = 3^2 - 10 \cdot 3 + 7 + 2m = 2m - 14$.

Ако је $2m - 14 < 0$, тј. $m < 7$, резултат $f(3)$ је негативан. Како је коефициент уз x^2 позитиван, дата једначина има два корена и број 3 је обухваћен између њих. Можемо дакле написати:

$$x_1 < 3 < x_2.$$

Једначина има један корен већи од 3.

Ако је $2m - 14 > 0$ тј. $m > 7$, не можемо ништа непосредно закључити. Треба најпре образовати дискриминанту

$$b_1^2 - ac = 25 - 7 - 2m = 18 - 2m.$$

Она је позитивна ако је

$$18 - 2m > 0$$

тј.

$$m < 9.$$

Претпоставимо да је

$$7 \leqslant m \leqslant 9.$$

Једначина има два различита корена x_1 и x_2, а број 3 није обухваћен између корена. Како је полузбир корена 5, који је већи од 3, оба корена су већа од 3. Можемо писати

$$3 < x_1 < x_2.$$

Дата једначина има оба корена већа од 3. Кад је дискриминанта једнака нули, тј. кад је $m = 9$, ти су корени једнаки, оба износе по 5.

Ако је

$$18 - 2m < 0,$$

тј.

$$m > 9,$$

једначина нема корена.

Сад посматрајмо случај кад је

$$m = 7.$$

Тада је $f(3) = 0$. Значи да је у овом случају број 3 корен дате једначине. Како је збир корена 10, то је други корен 7. И овде имамо један корен већи од 3.

Кад резимирамо целу ову дискусију, видимо следеће резултате:

1. Ако је $m \leqslant 7$, имамо један корен већи од 3, и то само један.

2. Ако је $7 < m < 9$. имамо два корена већа од 3, који су једнаки, ако је $m = 9$.

3. Ако је $m > 9$, нема корена.

Пример 2 Дата је једначина

$$4\, sin^2 x - 13\, sin x + 3 = 0.$$

Пита се колико ова једначина има корена, који се могу примити за $sin x$.

Корени ове једначине решене по $sin x$ јесу

$$sin x_1 = \frac{1}{4} \qquad\qquad sin x_2 = 3.$$

Очевидно је да се други корен $sin x_2$ не може примити, пошто синус може варирати само између граница -1 и $+1$.

До овог резултата могли смо доћи, а да и не решавамо дату једначину. Само треба да применимо резултате које смо већ проучили и да овако размишљамо.

Да би се једна вредност нађена за $sin x$ могла усвојити, потребно је да буде обухваћена између -1 и $+1$. Ако ставимо

$$sin x = y$$

$$f(y) = 4y^2 - 13y + 3,$$

треба да видимо колико трином $f(y)$ има корена обухваћених између -1 и $+1$. Због тога потражимо резултате $f(-1)$ и $f(1)$.

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) + 3 = 20 > 0$$

$$f(1) = 4 \cdot 1 - 13 \cdot 1 + 3 = -6 < 0.$$

Пошто је резултат $f(1)$ негативан, супротан знаку првог коефицијента 4, то трином $f(y)$ има два различита корена и између њих је обухваћен број 1. Дакле можемо писати

$$y_1 < 1 < y_2.$$

Резултат $f(-1)$ је позитиван. Из тога закључујемо да број -1 није обухваћен између корена. Како је он мањи од броја 1, који је обухваћен коренима, можемо закључити да је број -1 мањи од мањег корена. Због тога можемо написати

$$-1 < y_1 < 1 < y_2.$$

Значи да се

$$sin x = y_1$$

може усвојити као једно решење, тј. само

$$sin x = \frac{1}{4}.$$

Пример 3. Дискутовати егзистенцију и знаке корена једначине.

$$(4m - 1)\, x^2 + 2\,(5m - 3)\, x + 3m + 2 = 0.$$

Најпре израчунамо дискриминанту

$$D = b_1^2 - ac = (5m - 3)^2 - (4m - 1)(3m + 2) = 25m^2 - 30m + 9 - (12m^2 + 5m - 2) = 13m^2 - 35m + 11.$$

Корени овог тринома јесу

$$m_1 = \frac{35 - \sqrt{653}}{26} \text{ и } m_2 = \frac{35 + \sqrt{653}}{26}.$$

За вредности m_1 и m_2 дискриминанта D постаје нула.

Производ корена дате једначине је

$$P = \frac{3m + 2}{4m - 1}.$$

$\frac{11}{13}$

Његов знак је исти као и знак производа

$$(3m + 2)\,(4m - 1),$$

управо као знак тринома, чији су корени $-\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

Збир корена је

$$S = -\frac{2\,(5m - 3)}{4m - 1},$$

а његов знак је исти као и знак производа

$$-(5m - 3)(4m - 1),$$

тј. знак тринома, чији су корени $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{5}$.

Значајне вредности броја m, тј. оне вредности m за које D, P и S промене знак јесу m_1, m_2, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{5}$. При дискусији је врло угодно да се ове вредности поређају по величини. За ово би било довољно да се m_1 и m_2 одреде на један или два децимала. Али уопште узев простије је да се за то искористе правила, која смо већ проучили.

Ако ставимо

$$D = f(m) = 13m^2 - 35m + 11,$$

имаћемо $$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 13 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 35 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 11 > 0,$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 13 \cdot \frac{1}{16} - 35 \cdot \frac{1}{4} + 11 > 0$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = 13 \cdot \frac{9}{25} - 35 \cdot \frac{3}{5} + 11 < 0.$$

Последњи резултат $f\left(\frac{3}{5}\right)$ је негативан, супротан знаку првог коефицијента тринома D. Значи да су $\frac{3}{5}$ обухваћене коренима m_1 и m_2.

А како су бројеви $-\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$ мање од $\frac{3}{5}$, они су мањи и од m_1. Поређани по величини наши значајни бројеви овако изгледају:

$$-\frac{2}{3}, \ \frac{1}{4}, \ m_1, \ \frac{3}{5}, \ m_2.$$

Кад смо успели да ове бројеве поређамо по величини, као резултат дискусије можемо написати табелу, на стр. 23, ако пустимо да се m мења, узимајући све вредности од $-\infty$ до $+\infty$.

Где испод m не стоји никакав број, узима се да m варира између горње и доње вредности.

Пример 4. Решити ирационалну неједначину

$$\sqrt{2x+3} < 5 - x. \qquad (1)$$

Ако је $x > 5$ десна страна је негативна. У том случају неједначина није никад задовољена, пошто је лева страна позитивна.

За $x = 5$ неједначина такође није задовољена.

Претпоставимо најзад да је $x < 5$. Тада су обе стране неједначине позитивне, само је још потребно да квадратни корен на левој страни има смисла, да не буде имагинаран број. Тај ће квадратни корен имати смисла, ако је

$$2x + 3 \geqslant 0,$$

тј. ако је $$x \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Морамо дакле претпоставити да је $-\frac{3}{2} \leqslant x < 5$.

m	D	P	S	Закључак
$-\infty$	+	+	−	Једначина има два негативна корена $x_1 < 0$ $x_2 < 0$.
	+	+	−	$x_1 < 0$ $x_2 < 0$.
$-\frac{2}{3}$	+	0	−	Један корен једначине је нула, други негативан. $x_1 = 0$ $x_2 < 0$.
	+	−	−	Корени стварни и различито означени $x_1 < 0 < x_2$.
$\frac{1}{4}$	+	∞	∞	Један корен бескрајно велики, други $\frac{11}{7}$.
	+	+	+	Два стварна позитивна корена $x_1 > 0$ $x_2 > 0$.
m_1	0	+	+	Два једнака позитивна корена $x_1 = x_2 = -\frac{5m_1 - 3}{4m_2 - 1} > 0$.
	−	+	+	Нема корена.
$\frac{3}{5}$	−	+	0	Нема корена.
	−	+	−	Нема корена.
m_2	0	+	−	Два једнака негативна корена $x_1 = x_2 = -\frac{5m_2 - 3}{4m_2 - 1}0$.
	+	+	−	Два негативна корена $x_1 < 0$ $x_2 < 0$.
$+\infty$	+	+	−	$x_1 < 0$ $x_2 < 0$.

Кад су ови услови испуњени, обе стране дате неједначине су позитивне. Ако и леву и десну страну подигнемо на квадрат, добићемо опет неједначину са истим знаком неједнакости.

$$3x+2<25-10x+x^2,$$

или $$x^2-13x+23>0. \qquad (2)$$

Ми ћемо усвојити само она решења ове неједначине (2), која се налазе између $-\frac{3}{2}$ и 5.

Ставимо

$$f(x)=x^2-13x+23$$

и образујмо $$f(5)=25-65+23=-17.$$

Овај трином има дакле корене x_1 и x_2, између којих је обухваћен број 5. Они су још и позитивни. Значи можемо написати

$$-\frac{3}{2}<x_1<5<x_2,$$

Неједначина (2) задовољена је за вредност x изван корена. А за дату неједначину (1) можемо усвојити само оне вредности x, које се налазе између $-\frac{3}{2}$ и x_1.

Кад израчунамо x_1 добићемо

$$x_1=\frac{13-\sqrt{169-92}}{2}=\frac{13-\sqrt{77}}{2}.$$

После овога решење дате ирационале неједначине је

$$-\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{13-\sqrt{77}}{2}.$$

За писмено вежбање

У следећим једначинама да се утврди да ли су корени стварни и каквог су знака, а да се не решавају једначине. Једначине да се решавају само кад треба проверити добијене резултате.

1. $x^2+x-20=0$
2. $x^2-x-200$
3. $x^2+3x-18=0$
4. $-10x^2+x+360=0$
5. $-x^2+10x+24=0$
6. $x^2+6x+5=0$
7. $x^2-4x+3=0$
8. $x^2-34x+280=0$
9. $x^2+19x+34=0$
10. $x^2-4x+180=0$
11. $3x^2-7x+2=0$
12. $6x^2-5x+1=0$
13. $32x^2-12x+1=0$
14. $5x^2-16x+3=0$
15. $2x^2+3x+5=0$
16. $8x^2-11x+7=0$

Да се образује једначина, кад су корени

17. 4 и -7; -19 и 5; 6 и 0; -4 и 8.
18. 0, 5 и 0, 25; $-0{,}75$ и 1; $-0{,}8$ и -8.
19. 10 и 0, 1; 100 и 0, 01; 1000 и 0, 001,
20. $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{7}$ и 2; $-\frac{2}{9}$ и $-\frac{5}{6}$.
21. $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
22. $-1-\sqrt{3}$ и $-1+\sqrt{3}$; $-\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{5}{4}}$ и $-\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{5}{4}}$.
23. $2a$ и $5b$; $-3a$ и $4b$; $-8m$ и $-3n$.
24. $a+b$ и $a-b$; $a+3b$ и $2a-b$; $3m+4n$ и $3m-4n$.
25. $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$; $(2a-b)^2$ и $(2a+b)^2$.
26. $\frac{a}{2}$ и $\frac{a}{3}$; $-\frac{m}{4}$ и $=\frac{2m}{3}$; $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$.
27. $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a+b}{a-b}$ и 1; $\frac{a+b}{ab}$ и $\frac{a-b}{ab}$.

Раставити на чиниоце триноме

28. $x^2-8x+16$
29. x^2+4x+4
30. $x^2+7x+10$
31. $x^2-9x+20$
32. $x^2-14x-15$
33. $x^2-25x+154$
34. $x^2-3x-154$
35. $2x^2-5x+1$
36. $2x^2-7x+3$
37. $10x^2-11x-6$
38. $x^2-4ax+3a^2$
39. $x^2-7ax+12a^2$
40. $x^2-3ax+2a^2$
41. $6x^2-5ax+a^2$
42. $6x^2-ax-a^2$
43. $6a^2x^2-5x+6$
44. $a^2+7ab+6b^2$
45. $a^2+ab-2b^2$
46. $2a^2-5ab-3b^2$
47. $a^2+2ab+b^2-c^2$

Скрати разломке

48. $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$
49. $\frac{x^2-16}{x^2+3x-4}$
50. $\frac{x^2+x-30}{x^2+5x-6}$
51. $\frac{x^2-6x+5}{x-7x+10}$
52. $\frac{x^2-a^2}{2x^2+ax-3a^2}$
53. $\frac{x^2-4x+4}{2x^2-5x+2}$

Решити једначине

54. $\frac{11x}{10}-\frac{x-4}{3}=\frac{2x(x-7)}{6}-1$

55. $\frac{x+3}{4} - \frac{x+11}{8} = \frac{x}{5} + \frac{5}{x-10}$

56. $\frac{2(x+7)}{x+1} - 1 = \frac{x+11}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1}$

57. $\frac{26}{3x-2} = \frac{57}{4x-1} - \frac{7}{2x-3}$

58. $\frac{4}{x^2-9} - \frac{1}{3-x} = \frac{4-x}{3+x} - \frac{7}{x+3}$

59. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{4}{x^2-9} - \frac{1}{x^2-x-6}$

60. $\frac{5}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{8}{x^2-1} - \frac{20}{x^2+3x+2}$

61. $\frac{x+6}{x-1} - \frac{x^2+17}{x^2+x+1} = \frac{x+36}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$

62. $\frac{2}{x+1} + \frac{x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{2x(x-5)}{x^3+1}$

63. $\frac{12}{x^2+11x+30} - \frac{1}{x^2-11x+30} = \frac{20}{x^2+x-30} - \frac{15}{x^2-x-30}$

64. $\frac{11}{x^2+8x+15} - \frac{1}{x^2-8x+15} = \frac{22}{x^2+2x-15} - \frac{8}{x^2-2x-15}$

65. Да се реши квадратна једначина

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ако претпоставимо да је

$$a + b + c = 0.$$

Може ли једно решење да са види простим посматрањем?

66. У једначини

$$3x^2 - 5x + 7 = 3a^2 - 5a + 7$$

један корен се може одредити простим посматрањем. Да се и други корен одреди без решавања једначине.

67. Колико је b у једначини

$$4x^2 + bx + 9 = 0,$$

кад знамо да ова једначина има два једнака корена?

68. Исто за једначину

$$9x^2 + bx + 25 = 0.$$

69. Један корен једначине

$$x^2 + px - 20 = 0$$

је 10. Колики је други корен и колико је p?

70. У једначини

$$x + 2x\ldots\ldots = 0$$

један корен је 5. Колики је други корен и како гласи трећи члан једначине?

71. Решити једначину

$$ax^2 + bx + c = 0$$

под претпоставком да је

$$a - b + c = 0.$$

Може ли да се види један корен простим посматрањем?

72. Ако су корени једначине

$$ax^2 + bx + c = 0$$

x_1 и x_2, да се образује једначина, чији ће корени бити $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

73. Образовати једначину чији ће корени бити m пута већи од корена једначине.

$$ax^2 + b\,x + c = 0.$$

74. Образовати једначину чији ће корени бити за $\frac{p}{2}$ већи од корена једначине.

$$x^2 + px + q = 0.$$

75. Написати једначину чији ће корени бити за $\frac{b}{a}$ већи од корена квадратне једначине

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

76. Саставитити једначину чији ће корени бити збир и производ корена једначине

$$x^2 + px + q = 0.$$

77. То исто за једначину

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

78. Изрази збир квадрата корена квадратне једначине

$$x^2 + px + q = 0$$

као функцију од p и q!

79. Изрази збир квадрата корена квадратне једнаичне

$$ax^2 + b\,x + c = 0$$

као функцију од a, b и c!

80. Изрази разлику квадрата корена квадратне једначине
$$x^2 + px + q = 0$$
као функцију од p и q!

81. Изрази разлику квадрата корена крадратне једначине
$$ax^2 + bx + c = 0$$
као функцију од a, b и c!

82. Изрази збир кубова корена квадратних једначина
$$x^2 + px + q = 0$$
и
$$ax^2 + bx + c = 0$$
као функцију коефициената!

83. Исто за разлику кубова корена.

84. У једначини
$$x^2 - x + 2 = 0$$
да се одреди збир квадрата и збир кубова корена, а да се не реши једначина.

85. То исто за једначину
$$6x^2 - x - 1 = 0.$$

86. У једначини
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$
да се одреди разлика квадрата и кубова корена, не решавајући једначину.

87. То исто за једначину
$$12x^2 - x - 1 = 0.$$

88. Решити једначину
$$x^2 - 7x + q = 0,$$
знајући да је збир квадрата корена 25.

89. Решити једначину $x^2 - 9x + q = 0$ знајући да је разлика квадрата корена 45.

90. Покажи да је трином
$$ax^2 + bx + c$$
потпун квадрат, кад је $b^2 = 4ac$!

91 Колико треба да буде m у једначини
$$x^2 - 11x + 18 + m = 0,$$
па да лева страна постане потпун квадрат?

Исто за једначине.

92. $x^2 + 8x + 3 + 4m = 0$ 93. $x^2 - 6mx + 4 = 0$

94. $3mx^2 - 2x + 7 = 0$ 95. $x^2 + mx + 7 + 3m = 0$

96. $2mx^2 + 8m\,x + 10 + m = 0$

97. Какав однос треба да постоји између a, b, и c, па да трином
$$2bcx^2 - (b^2 + 5ac)\,x + 2ab = 0$$
има два једнака корена?

98. Наћи услове под којима ће бити потпуни квадрати триноми
$$(a + b)\,x^2 + (a - b)\,x + (a + b)$$
$$(a + b)\,x^2 + (a - b)\,x + (a - b)$$
$$(a - b)\,x^2 - (a + b)\,x + (a - b).$$

99. Дата је једначина
$$4x^2 + x - 3 + 2a = 0.$$
Да се испита

1. Кад ће ова једначина имати стварне корене, кад имагинарне, а кад једнаке.
2. Кад ће корени бити различито означени.
3. Кад ће корени бити једнако означени и кад ће бити оба позитивни, а кад оба негативни.
4. Шта ће бити ако је $a = 0$? После овога образовати једначину, чији ће корени бити реципрочне вредности корена једначине
$$4x^2 + x - 3 = 0.$$

100. Решити једначину
$$ax^2 + bx + c = 0$$
под претпоставком да је
$$4a + 2b + c = 0,$$

101. То исто кад је $9a - 3b + c = 0$.

102. То исто кад је
$$16a + 4b + c = 0.$$

103 Какву вредност треба да има q у једначини
$$x^2 + 4x + q = 0,$$
да би корени задовољили услов
$$2x_1 + 3x_2 = 5\,?$$

104. Колико треба да буде p у једначини
$$x^2 + px + 6 = 0,$$
па да корени једначине задовоље услов
$$5x_1 - 2x_2 = 4\,?$$

105. Наћи два броја чији је збир 46 а производ 365.

106 Наћи два броја чија је разлика 64, а производ 825.

107. Два непозната броја x_1 и x_2 имају збир s, а производ p.

Образовати једначину чији ће корени бити

$$1+\frac{1}{x_1} \quad \text{и} \quad 1+\frac{1}{x_2}.$$

Бројни пример: $s=\frac{11}{15}, p=\frac{22}{15}$.

108. Нека су α и β корени једначине

$$ax^2+bx+c=0.$$

Да се образује једначина чији ће корени бити

1) α^2 и β^2 2) α^3 и β^3 3) α^4 и β^4

4) $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ 5) $\alpha+m$ и $\beta+m$ 6

6) $\alpha+3\beta$ и $\beta+3\alpha$ 7) $\alpha+m\beta$ и $\beta+m\alpha$ 10) $\frac{k}{\alpha}$ и $\frac{k}{\beta}$

8) $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$ 9) $\frac{\alpha+3}{\alpha}$ и $\frac{\beta+3}{\beta}$ 11) $-\alpha$ и $-\beta$

Специјално: $a=2, b=-7, c=3$; $a=1, b=4, c=-21$; $a=1, b=-4, c=3$; $k=2$.

109. У једначини

$$x^2+px+48=0$$

да се p одреди тако, да један корен буде 3 пута већи од другога.

110. Одреди m тако да једначина

$$4x^2+4x+3+m=0$$

има један корен два пута већи од другога.

111. Одредити a тако, да у једначини

$$3x^2-12x+5-7a=0$$

један корен буде n пута већи од другога.

112. Исто питање за једначину

$$x^2+px+a=0.$$

113. Да се p и q одреди тако, да у једначини

$$x^2+px+q=0$$

буду корени саме вредности p и q.

114. Дата је једначина

$$x^2-x-1=0,$$

чији су корени x_1 и x_2. Израчунати без решавања једначине број

$$\frac{2x_1+3}{3x_1+2}+\frac{2x_2+3}{3x_2+1}.$$

115. У једначини

$$2x^2-(3m-4)x+2m+3=0$$

да се m одреди тако, да корени буду супротни бројеви.

116. У једначини

$$3mx^2-(6m-1)x+m+8=0$$

да се m одреди тако, да корени буду реципрочне вредности. Ако су корени комплексни бројеви, показати да су реципрочни.

117. Колико треба да буде m у једначини

$$x^2-3(m-2)x+m+1=0,$$

да збир корена буде 3.

118. Колико треба да буде m у једначини

$$x^2-7x+3m+7=0,$$

да разлика корена буде 3?

119. Колико треба да буде m у једначини

$$x^2-5mx+7m-1=0,$$

па да збир реципрочних вредности корена буде $\frac{5}{6}$?

120. У триному

$$f(x)=x^2+px+q=0$$

да се p и q одреде тако, да буде

$$f(2)=1 \quad \text{и} \quad f(3)=1.$$

121. Одредити квадратни трином код кога је

$$f(2)=0 \qquad f(3)=0 \qquad f(0)=6.$$

122. Да се одреди квадратни трином, код кога је

$$f(1)=0 \qquad f(2)=0 \qquad f(0)=-2.$$

123. Да се одреди квадратни трином, код кога је

$$f\left(-\frac{3}{5}\right)=0 \quad f\left(\frac{2}{3}\right)=0 \quad f(0)=-6.$$

Решити неједначине

124. $x^2-2x>0$ 125. $2x^2-3x<0$

126. $x^2+8x-9>0$ 127. $x^2+7x-30>0$

128. $x^2-6x-91>0$ 129. $-4x^2-7x+3>0$

130. $-6x^2+5x-1<0$ 131. $3x^2+5x+2<0$

132. $-12x^2+3x+1>0$ 133. $x^2-5x-30<0$

134. $(x+5)(x-5)>(x-2)^2+(x+2)^2-3$

135. $(x+7)^2-(x-7)^2<(x+1)(x-1)+181$

136. $-10x<(2x+1)(2x-1)-3x(x+2)$

137. $x^2-(x-3)^2>2(x-3)(x-2)+(x-2)^2$

138. $\frac{5}{x^2+3x-70}>0$ 139. $\frac{10}{x^2-4x-45}<0$

140. $\frac{4}{10x^2+29x+21}>0$ 141. $\frac{100}{8x^2-10x-3}<0$

142. $(x^2-9)(x^2-16)<0$ 143. $(x^2-1)(x^2-25)>0$

144. $(x^2-4)(x^2-x-110)<0$

145. $(x^2-6)(x^2-4x-32)>0$

146. $(x^2-4x-12)(x^2+8x+12)>0$

147. $(x^2+8x+15)(x^2-5x+6)<0$

148, $(x^2-6x+9)(x^2-2x+10)>0$

149. $(x^2+5x-4)(x^2-2x-15)<0$

150. $(x^2-8x-9)(x^2+7x+10)<0$

151. $(3x^2-x+1)(x^2-4x-45)<0$

152. $\frac{x^2}{2x^2-3x+4}>0$ 153. $\frac{x^2-7x+10}{x^2}<0$

154. $\frac{x^2-36}{5x^2-8x+4}<0$ 155. $\frac{x^2-10x+35}{x^2+3x-28}<0$

156. $\frac{x^2-5x-66}{x^2+4x+12}<0$ 157. $\frac{x^2+x-20}{x^2-3x+8}<0$

158. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{x+1}>0$ 159. $\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-3}>0$

160. $\frac{5}{3x-4}+\frac{8}{x+2}<0$ 161. $\frac{20}{3x}-\frac{5}{x-4}<0$

162. $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}>0$ 163. $\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}<0$

164. $\frac{1}{x-3}<\frac{1}{x+2}$ 165. $\frac{x}{x+5}+\frac{x+5}{x}>0$

166. $\frac{x+7}{x-1}<\frac{x+5}{x-3}$ 167. $\frac{x+2}{x+3}>\frac{x-3}{x+2}$

168. $\frac{3x+1}{2x+3}<\frac{2x-3}{3x-1}$ 169. $\frac{2x-5}{x-4}>\frac{2}{x+4}$

170. $\frac{4x-3}{x-7}>\frac{4}{x-3}$ 171. $\frac{2x+5}{x+2}>\frac{1}{x-2}+2$

172. За које ће вредности c трином

$$2x^2-5x+c$$

бити позитиван, а за које негативан?

173. За које ће вредности b трином

$$3x^2-bx+1$$

бити позитиван, а за које негативан?

174. Исто питање за a у триному

$$ax^2-5x-25.$$

Решити двоструке неједначине

175. $0<x^2-9x+14<6$ 176. $0<x^2-6x+8<3$

177. $0>x^2-8x+15>-1$ 178. $0>x^2-10x+21>-4$

179. $-7<x^2-12x+20<9$ 180. $21<x^2-14x+45<32$

181. Да се изразе услови под којима ће једначина

$$ax^2+bx+c=0.$$

имати корена већих од једног датог броја m.

182. Да се изразе услови под којима ће једначина

$$ax^2+bx+c=0$$

имати корена мањих од једног датог броја m.

183. Да се изразе услови под којима ће корени једначине

$$ax^2+bx+c=0$$

бити обухваћени између два дата броја m и n.

184. Да ли једначина

$$x^2-6x+8+m=0$$

има корена већих од 1?

185. Дата је једначина

$$3x^2-2x-8+m=0.$$

1. Има ли ова једначина корена који су различито означени?

2. Да ли има корена мањих од 10?

3. Има ли вредности за m, кад ће корени бити реципрочне вредности?

4. Шта ће бити, ако је $m=0$?

5. Потом образовати једначину, чији ће корени бити већи за 4 од корена једначине.

$$3x^2-2x-8=0.$$

6. Најзад решити тако добијену једначину.

186. Дата је једначина

$$(1+m)\,x^2+2\,(2+m)\,x+m+5=0.$$

1. За коју ће вредност m један корен бити нула?
2. Кад ће један корен бити бескрајно велики?
3. Постоји ли вредност m, за коју ће лева страна једначине постати потпун квадрат? Ако постоји, колика је?

187. У једначини

$$ax^2+bx+c=0$$

да се изврши смена

$$y=x+h.$$

У тако добијеној квадратној једначини по y да се h изабере тако, да једначина постане чиста квадратна једначина.

Дискутовати егзистенцију и знаке корена једначина:

188. $x^2-2mx-11m+12=0$
189. $x^2-4mx-4m+8=0$
190. $x^2-2mx+3m+10=0$
191. $x^2+2\,(2-m)\,x+6m+4=0$
192. $(1+m)x^2-(4+4m)x+3m=0$
193. $(m+2)x^2+2(3m+2)x+m+7=0$
194. $x^2+4mx+5m+6=0$
195. $(m-2)\,x^2+2\,(3m-2)\,x+m+1=0$
196. $x^2+44-m\,(7+2x)=0$
197. $(5m-1)\,x^2-2\,(3m-2)\,x+4m+1=0$
198. $x^2-6mx+3m+2=0$
199. $(6+m)x^2-2\,(5+m)\,x+7-m=0$
200. $x^2-6x+29-m\,(2x-7)=0$
201. $x^2-2x-5m\,(9+4x)=0$
202. $(1+2m)\,x^2+2\,(1+3m)\,x+5m+1=0$
203. $x^2+6x-m\,(x^2+2x+2)=0$

Решити неједначине

204. $x^2-6mx+6{,}25>0$
205. $(5+m)x^2+6x+5<0$
206. $x^2-10x+7+3m>0$
207. $3x^2+6x-m+5<0$
208. За које ће вредности трином

$$32x^2-4x+c$$

бити позитиван, а за које негативан?

209. $mx^2+(m-1)\,x+m-1<0$

210. $x^2+6x+21-m\,(5-2x)>0$
211. $(1+m)\,x^2-2\,(4+m)\,x+6+m>0$
212. Да ли једначина

$$x^2-10x+21+m=0$$

има корена који леже између 1 и 5?

213. Да се m одреди тако да једначина

$$x^2-6x+15-2m=0$$

има један корен мањи од 1, а један већи од 3.

214. Дата је једначина

$$4x^2+8x+3+m=0.$$

1. Има ли ова једначина корена мањих од нуле?
2. Може ли ова једначина имати два корена већа од нуле?
3. Да ли ова једначина има корена већих од 2?
4. Да ли ова једначина има корена мањих од 2?
5. Може ли ова једначина имати оба корена између 0 и 2?

215. Да се m одреди тако, да једначина

$$x^2-2x+1+3m=0$$

има два корена обухваћена између -2 и $+2$.

Које услове треба да задовољи a, па да корени следећих једначина буду обухваћени између -1 и $+1$:

216. $x^2-2ax+1=0$
217. $x^2-2\,(a-1)\,x+a=0$
218. $2ax^2+(1-2a)\,x-a=0$
219. $x^2-3x-a^2+a+2=0$
220. $ax^2-2\,(1+a)\,x+1-a=0$
221. $ax^2-2(a-1)x+a-2=0$
222. $a\,(a-1)\,x^2+(2a+1)\,x-2=0$

Решити једначине

223. $12\sin^2 x+\sin x-1=0$
224. $30\sin^2 x-\sin x-1=0$
225. $\cos^2 x+0{,}2\cos x-0{,}24=0$
226. $3\cos^2 x+5\cos x-2=0$
227. $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$
228. $50\sin^2 x-25\sin x-12=0$
229. $4\cos^2 x-7\cos x+3=0$
230. $4\sin^2 x-2(\sqrt{3}+1)\sin x+\sqrt{3}=0$

Решити и дискутовати ирационалне једначине

231. $\sqrt{x+4} = x - 8$ 232. $\sqrt{2x-5} = x - 4$

233. $\sqrt{2x-3} = x - 5$ 234. $\sqrt{mx-2} = x + 6$

235. $\sqrt{x^2+2x+1} = m + 2$ 236. $\sqrt{x-a} = x - 1$

227. $\sqrt{x^2+x-2} = m - 3$ 238. $2x + 5 = \sqrt{x - 2ax + 1}$

239. $x + a = \sqrt{x+3}$ 240. $\sqrt{x^2+1} = 2x + a$

Решити и дискутовати ирационалне неједначине

241. $\sqrt{2(x-3)} < x - 5$ 242. $\sqrt{x^2 - 6x + 8} > 1.$

243. $\sqrt{2(x-1)} < -x$ 244. $\sqrt{2(x-1)} > x$

245. $\sqrt{x+1} < 3x - x^2$ 246. $\sqrt{x+2} > 2x + 1$

247. $4 - 3x < \sqrt{x^2 + 6x - 7}$ 248. $\sqrt{2x^2 + x - 5} > x + 3$

249. Које услове треба да задовоље коефициенти p и q, па да трином

$$x^2 + px + q$$

буде увек позитиван?

250. Исказати услове под којима ће једначина

$$x^2 + px + q = 0$$

имати корене обухваћене између -1 и $+1$.

251. Који су услови да ова једначина има корене веће од 1?

252. Који су услови да ова једначина има корене мање од -1?

Решити једначине

253. $\dfrac{x-8}{x} + \dfrac{x}{x-8} = 5\dfrac{1}{5}$ 254. $\dfrac{2x-3}{x^2 + x\sqrt{0{,}02} - 3} = \dfrac{5}{2x+3}$

255. $\dfrac{a}{9a+3x} + \dfrac{a}{6a-2x} - \dfrac{9a^2+ax}{54a^2-6x^2} = \dfrac{1}{5}$

256. $\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \dfrac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{x^2}$

257. $3\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2\sqrt{2x+2}$

258. $3\sqrt{x+15} = 7\sqrt{x-5} - 5\sqrt{x-17}$

259. $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$

260. $\sqrt[3]{72-x} - \sqrt[3]{16-x} = 2$

261. $\dfrac{15}{x} - \dfrac{36-3x-x^5}{x^2} - 6(x^2-2x) - 10 = (x-2)^3$

262. $(c + a - 2b)x^2 + (a + b - 2c)x + (b + c - 2a) = 0$

263. $\dfrac{1}{x-8} + \dfrac{1}{x-6} + \dfrac{1}{x+6} + \dfrac{1}{x+8} = 0$

264. $\dfrac{a+b}{x+b} + \dfrac{a+c}{x+c} = 2 \cdot \dfrac{a+b+c}{x+b+c}$

Показати да су корени следећих једначина увек стварни.

265. $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$

266. $\dfrac{a^2}{x-p} + \dfrac{b^2}{x-q} - 1 = 0$

ГЛАВА II

Варијације квадратног тринома

Квадратна функција

10. — Квадратна функција. — Као што смо у V разреду, после једначине I степена, проучавали промене или варијације функције I степена, или линеарне функције

$$y = ax + b$$

и њено графичко претстављање, тако ћемо сад после квадратних једначина проучавати варијације функције II степена

$$y = ax^2 + bx + c$$

и њено графичко претстављање. О графичком претстављању квадратне функције и о графичком решавању квадратних једначина ученик треба да прочита у Алгебри за VI разред, на страни 153 и даље.

Пре него што приступимо општем проучавању, испитаћемо неке специјалне простије случајеве квадратне функције. Узећемо најпре најпростији случај, кад се трином $ax^2 + bx + c$ сведе на један члан, на први члан ax^2. Кад и у овом случају узмемо да је $a=1$, добијамо најпростију квадратну функцију

$$y = x^2.$$

11. Варијације функције $y = x^2$ и њено графичко претстављање. — Претпоставимо да је у функцији

$$y = x^2$$

x негативно, а по апсолутној вредности врло велико. Тада ће x^2, управо y, бити позитивно и врло велико по апсолутној вредности. На пр. ако је

$$x = -1\ 000\ 000,$$

биће
$$y = 1\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

Пустимо сад да x остане и даље негативно, али да расте, тј. да му се апсолутна вредност смањује. Његов квадрат ће и даље остати позитиван, али ће се смањиавти. Тако ће на пр. бити

$$\begin{array}{ll} x = -1000 & y = 1\ 000\ 000 \\ x = -100 & y = 10\ 000 \\ x = -50 & y = 2500 \\ x = -10 & y = 100 \\ x = -4 & y = 16 \\ x = -1 & y = 1 \\ x = -\frac{1}{2} & y = \frac{1}{4} \\ x = -0{,}1 & y = 0{,}01 \end{array}$$

итд.

Видимо да се y приближава нули, кад се x приближава нули. Кад је $x = 0$ и $y = 0$.

Кад је x позитивно и његов квадрат је позитиван. Кад x, остајући позитивно, бива све веће и веће, његов квадрат, y, бива све већи и већи.

Закључке ове можемо резимирати овом табелом

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	позитивно и опада	0	позитивно и расте	$+\infty$

функција

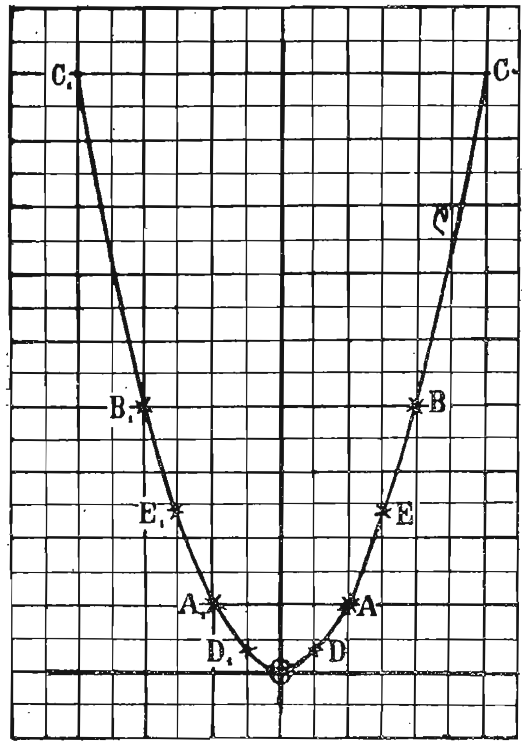
$$y = x^2$$

је опадајућа у интервалу $(-\infty, 0)$, *растућа у интервалу* $(0, +\infty)$.

Да бисмо графички претставили варијације ове функције треба да образујемо њену табелу,

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{2}{3}$	...
y	0	1	4	9	16	25	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	...

да одговарајуће парове вредности сматрамо као координате тачака и да те тачке конструишемо. Кад све конструисане тачке спојимо једном непрекидном линијом, добићемо криву линију, какву видимо на сл. 1. Разуме се да из слике видимо само један део линије. Ова крива линија зове се *Аполонијева парабола.*



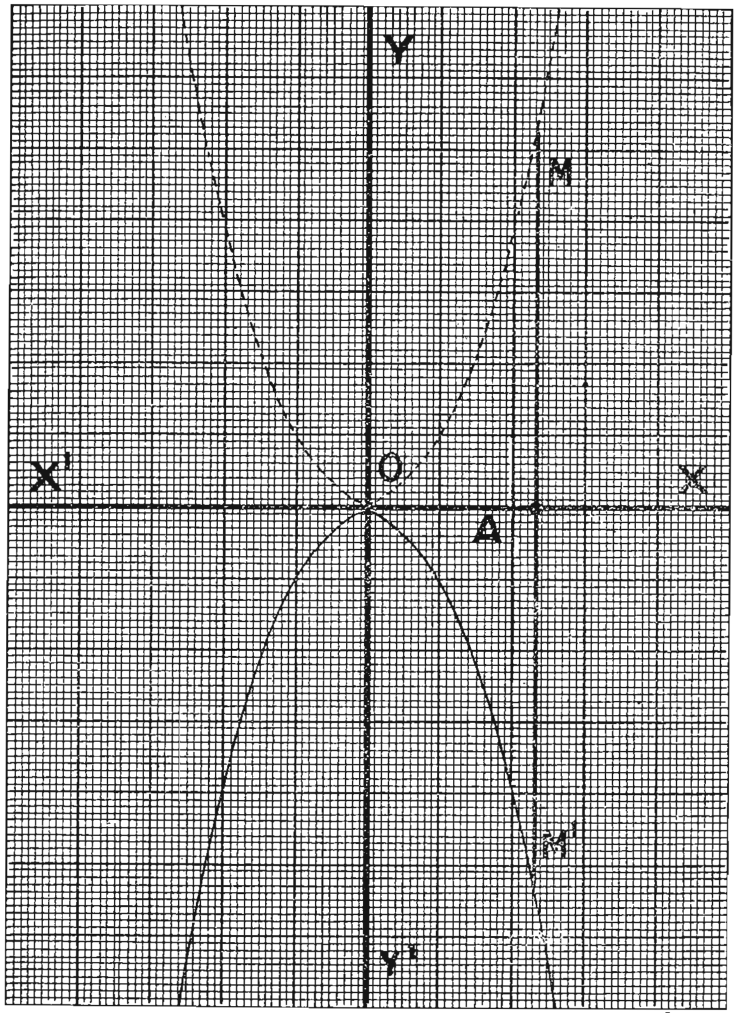
Сл. 1.

12. Осовина симетрије. — Из табеле се види да свакој ординати y одговарају две супротне апсцисе x. Ординатна осовина полови све дужи, које спајају по две тачке са једнаким ординатама. Због тога можемо рећи да тачке са једнаким ординатама леже симетрично у односу на ординатну осовину. Управо грана OAEBC лежи симетрично према грани $OA_1E_1B_1C_1$. Парабола $y = x^2$ је симетрична крива. Осовина симетрије је ординатна осовина.

13. Варијације функције $y = -x^2$. — Посматрајмо сад функцију

$$y = -x^2.$$

Конструишимо најпре криву $y = x^2$. Пошто ће то бити сад помоћна линија, то нека буде извучена тачкасто. Нека је A ма која тачка на апсцисној осовини. Овој тачки A од-



Сл. 2

говара тачка M чија је ордината AM. Која тачка на кривој $y = -x^2$ одговара истој апсциси? То је тачка M^1 чија је ордината AM^1 негативна и има за апсцису вредност OA

Тачка M^1 је дакле симетрична тачки M у односу на апсцисну осовину. Једној ма којој вредности x одговарају на кривим линијама $y = x^2$ и $y = -x^2$ супротне ординате. Другу криву линију дакле добићемо, кад конструишемо симетричну криву првој кривој линији у односу на апсцисну осовину.

О варијацијама функције $y = -x^2$ можемо начинити следећу табелу:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	негативно и расте	0	негативно и опада	$-\infty$

14. Варијације функције $y = ax^2$. — Посматрајмо сад функцију која је дефинисана једначином

$$y = ax^2,$$

у којој је a једна позитивна константа.

Нека је $a = 2$. Тада горња функција постаје

$$y = 2x^2.$$

Кад x расте, расте и $2x^2$, кад x опада, опада и $2x^2$. Варијације функције $2x^2$ исте су као и варијације функције x^2. Табела варијација је иста и ми ћемо је поново написати.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	позитивно и опада	0	позитивно и расте	$+\infty$

Ради конструкције ове криве треба образовати њену табелу:

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{3}{2}$	...
y	0	2	8	18	32	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	...

Ова крива линија је потпуно слична линија $y = x^2$, само је шиљатија. То ће исто бити са свима функцијама $y = ax^2$ за које је $a > 1$. Напротив ако је број a позитиван, а мањи од 1, крива линија ће бити више развучена паралелно апсцисној осовини, неголи $y = x^2$. Сл. 4. претставља параболу $y = 0{,}1x^2$.

Ако је a негативно, на пр.

$$y = -2x^2,$$

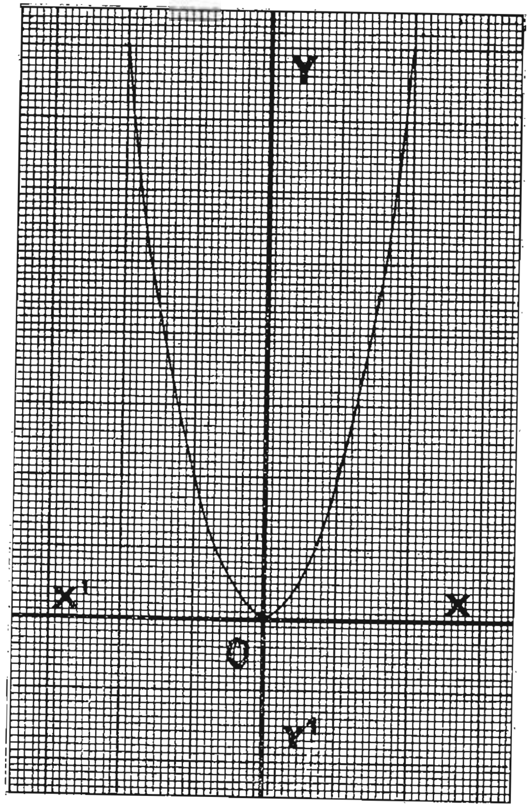
добијамо исту табелу варијације као и за функцију

$$y = -x^2.$$

И крива $y = -2x^2$ слична је кривој

$$y = -x.^2$$

само је оштрија.



Сл. 3

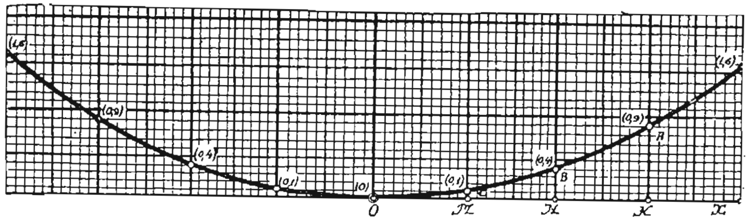
Криве линије:

$$y = 2x^2$$

и

$$y = -2x^2,$$

кад су конструисане у истом координатном систему и кад је



Сл. 4

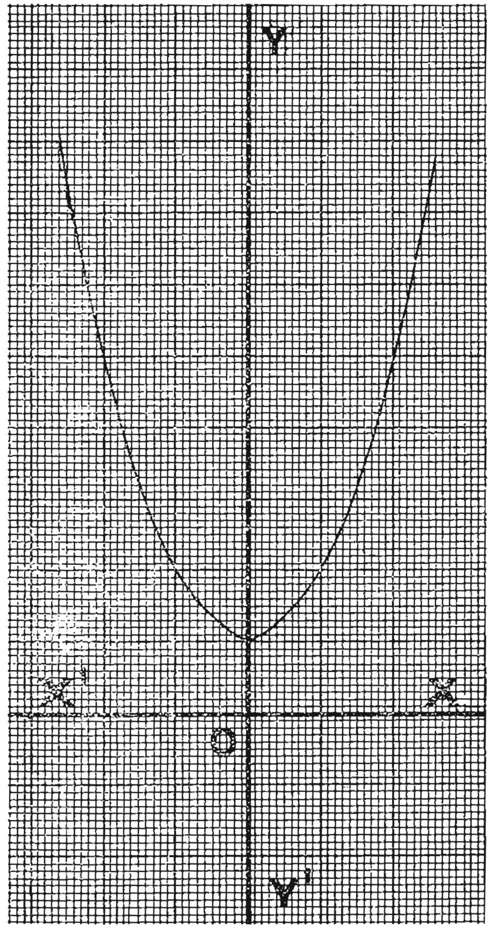
јединица за дужину иста, леже симетрично у односу на апсцисну осовину.

Све ове криве линије зову се параболе. Осовина симетрије Oy зове се *осовина параболе.* Тачка O је *теме параболе.*

15. Варијације квадратног тринома са бројним коефицентима.—

I. Посматрајмо најпре функцију

$$y = x^2 + 1. \qquad (1)$$



Сл 5.

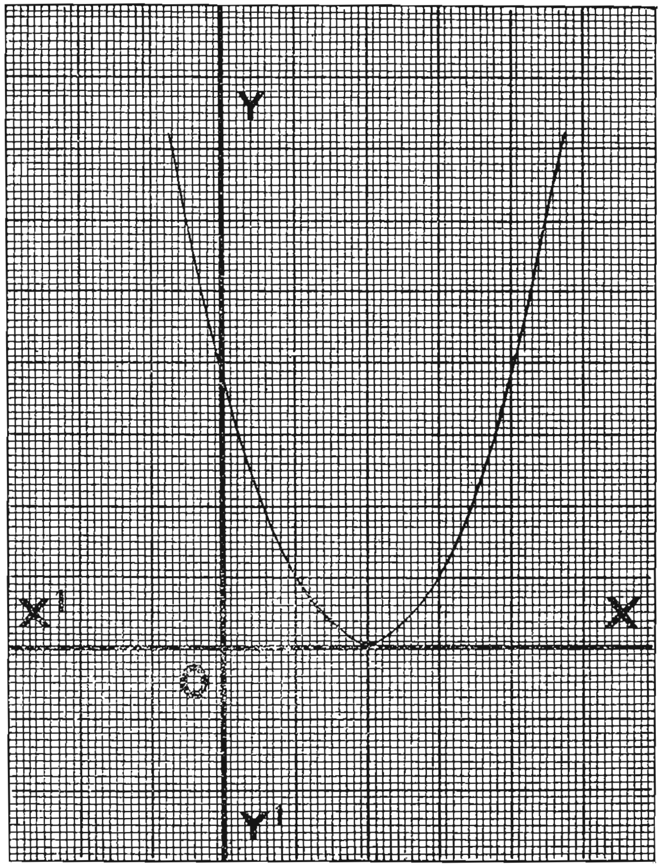
Ако је сравнимо са параболом

$$y = x^2, \qquad (2)$$

видимо да се крива (1) добија, кад се крива (2) помери само за 1 навише, јер су ординате криве (1) у ствари ординате криве (2), само повећане за 1. (Сл. 5.)

Посматрајмо функцију

$$y = (x - 2)^2.$$



Сл. 6.

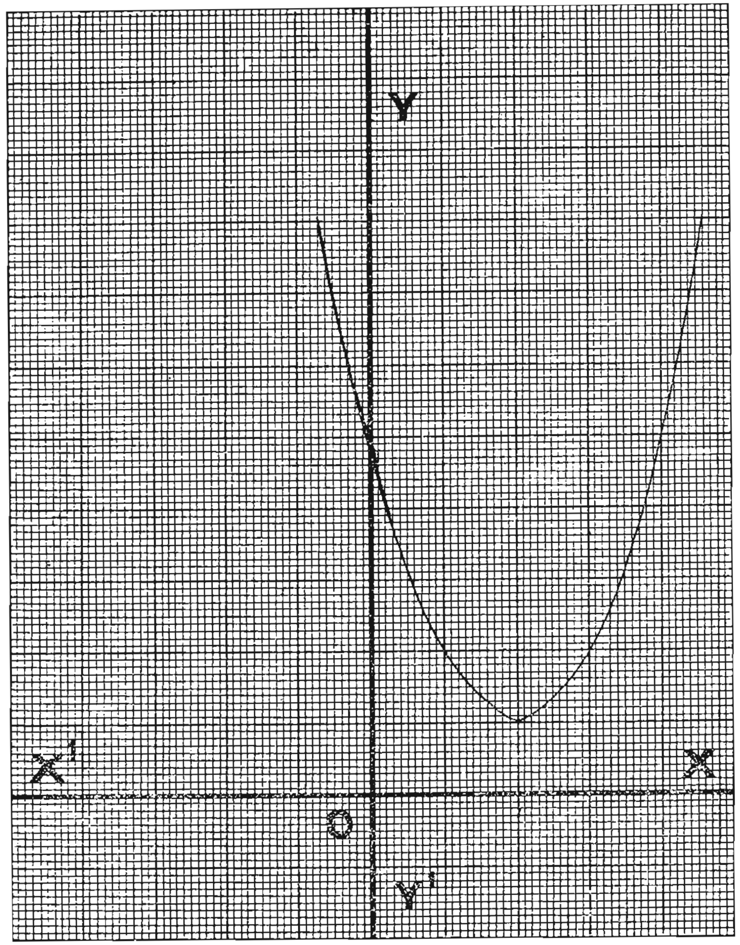
Кад конструишемо ову криву линију, видимо да је то парабола $y = x^2$, само померена паралелно са апсцисном осовином за 2. (Сл. 6.)

Посматрајмо најзад трином

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Ако га напишемо у каноничном облику, биће

$$y = (x - 2)^2 + 1.$$



Сл. 7.

Из овога облика одмах видимо да се тражена крива линија добија из параболе

$$y = x^2$$

померањем паралелно са апсцисном и ординатном осовином.

У правцу апсцисне осовине треба извршити померање за 2 јединице, а у правцу ординатне осовине за 1 јединицу. (Сл. 7.)

Уместо да померимо параболу $y = x^2$, можемо паралелно померати координатни систем. У овом случају бисмо померили координатни почетак за — 2 јединице у правцу апсцисне осовине и за — 1 јединицу у правцу ординатне осовине. Резултат би у оба случаја био исти.

Напомена. — Ученик треба врло пажљиво, тачку по тачку, да нацрта основну параболу $y = x^2$ на картону, па да је изреже. Тако ће добити *шаблон,* помоћу кога ће моћи брзо да црта параболе и да их врло лако помера.

Ако немамо шаблон, лакше је померати координатни систем.

16. — Као што видимо проучавање варијација тринома са бројним коефициентима своди се у ствари на проучавање параболе $y = x^2$, или општије на проучавање параболе $y = ax^2$. Управо то проучавање је мењање положаја параболе $y = ax^2$ према координатним осовинама. У свима случајевима у могућности смо да одредимо положај темена параболе и положај њене осовине. Посматрајући слику можемо написати овакву табелу варијације тринома $x^2 - 4x + 5$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	опада	1	расте	$+\infty$

17. Варијације општег тринома. — Да бисмо проучили варијације тринома

$$y = ax^2 + bx + c,$$

довешћемо га на општи канонични облик:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

или

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Размишљајући као у претходним случајевима, одмах видимо, да се крива линија, која претставља овај трином може извести из параболе

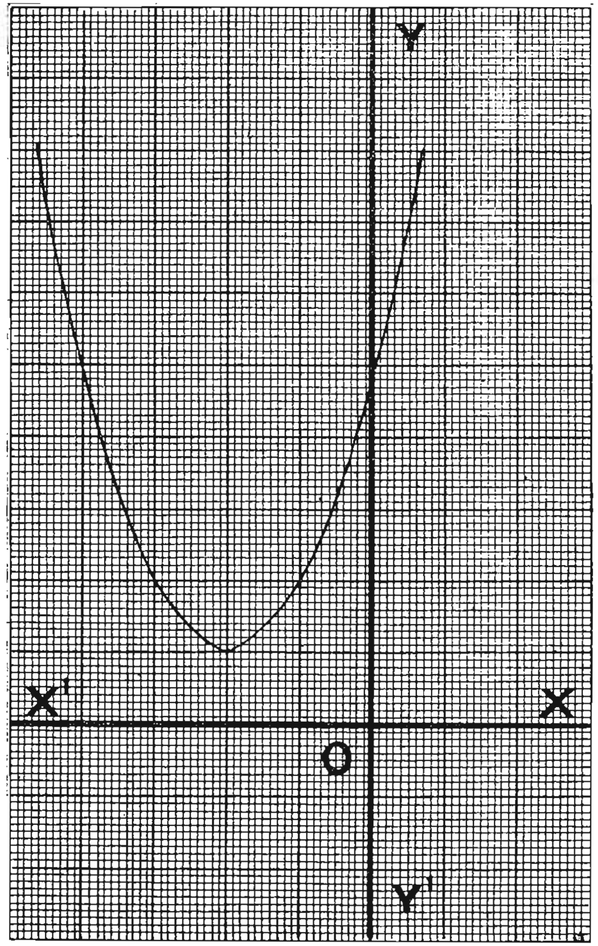
$$y = ax^2$$

паралелним померањем у правцу апсцисне осовине за

$$-\frac{b}{2a}$$

а у правцу ординатне осовине за

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

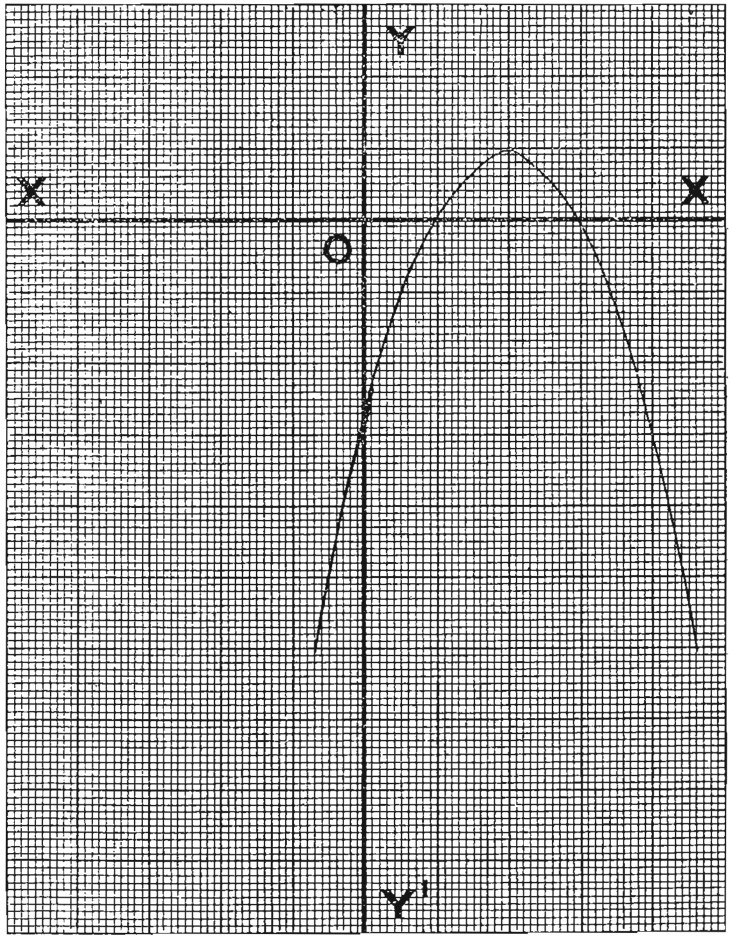


Сл. 8.

Тако добијамо слике бр. 8 и бр. 9. Једна одговара случају, кад је a позитивно, друга кад је a негативно.

Варијације тринома изводе се из посматрања слика.

Ако је а позитивно, кад x расте од $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$, y опада



Сл. 9

од $+\infty$ до $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. И када x продужи да расте од $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$, y расте од $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ до $+\infty$. Најмања вредност

коју може имати y јесте тада $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Кажемо да је y **минимум**, кад је $x=-\frac{b}{2a}$.

Ако је а негативно, кад x расте од $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ y расте од $-\infty$ до $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. И кад x продужи да расте од $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$, y опада од $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ до $-\infty$. Највећа вредност коју може имати y јесте $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Кажемо да је y *максимум*, кад је $x=-\frac{b}{2a}$.

Све ове резултате можемо резимирати у следећој табели

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y $a>0$	$+\infty$	опада	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (минимум)	расте	$+\infty$
y $a<0$	$-\infty$	расте	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (максимум)	опада	$-\infty$

18. Одређивање корена квадратног тринома. —

Испитивања параболе као графичког претставника варијација тринома II степена омогућује нам да још једанпут расмотримо разне случајеве, који нам се јављају при решавању квадратних једначина.

Корени тринома су оне вредности x, за које y постане нула. Тачке параболе које одговарају коренима, налазе се на апсцисној осовини. То су тачке у којима апсцисна осовина сече параболу. Трином ће имати корене или не, према томе да ли апсцисна осовина сече параболу или не.

Посматрајмо једначину

$$ax^2+bx+c=0.$$

Можемо претпоставити да је a увек позитивно, јер ако то није, можемо множењем обеју страна са -1 увек учинити да a буде позитивно.

Трином

$$y = ax^2 + bx + c$$

је тада минимум за $x = -\frac{b}{2a}$. Његова најмања вредност је

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

1. Ако је овај минимум позитиван, тј. ако је

$$b^2 - 4ac < 0,$$

y је увек позитивно, парабола је цела изнад апсцисне осовине. Трином нема корена.

2. Ако је овај минимум негативан, тј. ако је

$$b^2 - 4ac > 0;$$

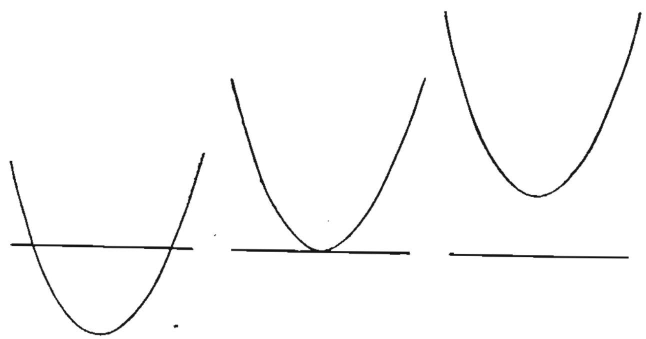
парабола сече апсцисну осовину. Трином има два корена.

3. Ако је минимум једнак нули, тј. ако је

$$b^2 - 4ac = 0,$$

трином има један двоструки корен $x = -\frac{b}{2a}$. Парабола и апсцисна осовина имају само једну заједничку тачку. Апсцисна осовина је тангента параболе.

На слици све то изгледа овако:



Сл. 10.

За писмено вежбање

Проучити варијације следећих функција:

1. $y = x^2 + 3{,}5$
2. $y = x^2 - 4{,}2$
3. $y = 3x^2 + 2$
4. $y = -4x^2 + 1$
5. $y = (x - 2.5)^2$
6. $y = (x + 1{,}4)^2$
7. $y = x^2 - 2x + 1$
8. $y = x^2 + 3x + 2{,}25$

Служећи се шаблоном параболе $y = x^2$, претставити графички варијације функција:

9. $y = x^2 + 1{,}5$
10. $y = x^2 - 0{,}8$
11. $y = -x^2 + 1{,}6$
12. $y = -x^2 - 2{,}4$
13. $y = (x + 1{,}8)^2$
14. $y = (x - 0{,}6)^2$
15. $y = -(x - 2{,}8)^2$
16. $y = -(x + 3)^2$
17. $y = (x + 0{,}5)^2 + 0{,}75$
18. $y = (x - 1)^2 - 2$
19. $y = (x + 1)^2 + 1$
20. $y = (x - 2)^2 - 1$
21. $y = -(x - 3)^2 + 2$
22. $y = -(x - 3{,}2)^2 - 2{,}5$
23. $y = -(x + 2)^2 - 3{,}4$
24. $y = -(x - 1{,}4)^2 + 2{,}3$

Претставити графички промене функција:

25. $y = 3x^2$
26. $y = -4x^2$
27. $y = 0{,}5x^2$
28. $y = 0{,}25x^2$
29. $y = \frac{1}{3}x^2$
30. $y = \frac{2}{3}x^2$
31. $y = \frac{3}{4}x^2$
32. $y = -\frac{3}{2}x^2$

33. Конструисати криву линију, која претставља промене површине коцке. Површина коцке да се изрази као функција ивице.

34. Исто питање за површину равностраног троугла, кад је изражена као функција стране.

35. Исто тако за равностран троугао, кад је површина дата као функција висине.

36. Исто питање за пређени пут, кад тело слободно пада у безваздушном простору. $s = \frac{1}{2}gt^2$, $g = 980cm$.

Следеће функције да се претставе графички, пошто се претходно доведу на канонични облик:

37. $y = x^2 - 5x + 3$
28. $y = x^2 + 6x + 10{,}6$
39. $y = x^2 - 4{,}4x + 2{,}64$
40. $y = x^2 + 3{,}8x - 1{,}39$
41. $y = -6x^2 + 6x - 6$
42. $y = -x^2 + 4{,}2x - 8{,}21$
43. $y = -x^2 - 3x - 5{,}75$
44. $y = -x^2 - 5{,}6x + 1{,}04$

45. Конструиши параболу $y = x^2$

и праву линију $y = -x + 2$

у истом координатном систему и са истом јединицом за дужину! Измери апсцисе пресечних тачака! Пробањем покажи да су ове апсцисе корени квадратне једначине

$$x^2 = -x + 2!$$

(Види Алгебру за VI р. стр. 161!)

46. Исто питање за параболу

$$y = x^2$$

и праву $\qquad y = x + 2.$

47. Исто питање за параболу

$$y = x^2$$

и праву $\qquad y = 2x + 8.$

48. Исто питање за параболу

$$y = x^2$$

и праву линију $\qquad y = 6 - x.$

49. Исто питање за параболу

$$y = x^2$$

и праву $\qquad y = \frac{x}{2} + 5.$

50. Исто питање за параболу

$$y = x^2$$

и праву $\qquad y = \frac{3}{2}x + 1.$

Решити графички квадратне једначине

51. $x^2 - x - 12 = 0$ 52. $x^2 - 0{,}5x - 3 = 0$
53. $x^2 - 0{,}4x - 0{,}6 = 0$ 54. $x^2 - x - 0{,}75 = 0$
55. $x^2 - 0{,}6x - 2{,}16 = 0$ 56. $x^2 + 1{,}5x - 2{,}5 = 0$
57. $x^2 - 1{,}5x - 2{,}5 = 0$ 58. $x^2 + 0{,}6x - 3{,}52 = 0$
59. $x^2 - 2x - 1 = 0$ 60. $x^2 - 4x + 1 = 0$
61. $x^2 + 6x + 4 = 0$ 62. $x^2 - 2x - 6 = 0$

63. У квадратној функцији

$$y = x^2 + px + q$$

да се коефициенти p и q одреде, тако да парабола пролази кроз тачке A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2). Да се потом одреде и координате темена параболе.

A (2,0) B (— 2,0); A (5,0) B (3,0)
A (—4,1) B (—5, —1) A (1,3) B (2,5).

64. Да се у квадратном триному

$$y = -x^2 + px + q$$

одреде коефициенти p и q тако, да парабола пролази кроз тачке A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2). Потом да се одреде координате темена параболе.

A (2,0) B (—2,0); A (5,0) B (3.0);
A (—4,1) B (—5, —1); A (1,3) B (2,5);

Следеће параболе да се конструишу, одређујући тачку по тачку. Табеле да почињу вредношћу $x = -\frac{b}{2a}$. Потом показати да је права линија

$$x = -\frac{b}{2a}$$

осовина ових парабола.

65. $y = 2x^2 - 8x + 3$ 66. $y = \frac{x^2}{3} + x - 2$
67. $y = 3x^2 - 4{,}8x + 5$ 68. $y = 0{,}4x^2 - 3{,}2x + 8{,}5$
69. $y = -2x^2 + 5x - 1$ 70. $y = -\frac{x^2}{5} - 3x - 7{,}25$
71. $y = -3x^2 + 6x - 4{,}5$ 72. $y = -\frac{x^2}{16} - 5x + 3{,}06$
73. $y = -2x^2 + 2x - 1$ 74. $y = -3x^2 + x + 1$

У следећим једначинама да се графички дискутује егзистенција и знаци корена.

75. $x^2 - 2x - 3 = 0$ 76. $x^2 - 4x + 4 = 0$
77. $-3{,}5x^2 - 7x - 10{,}5 = 0$ 78. $\frac{x^2}{2} - x - 1{,}5 = 0$
79. $\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} - 1 = 0$ 80. $x^2 + 2x + 3 = 4$

81. У квадратној функцији

$$y = ax^2 + bx + c$$

да се коефициенти a, b и c одреде тако да парабола пролази кроз тачке A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) и C $(x_3 y_3)$. Да се одреде координате темена параболе и једначина осовине.

A (1,2) B (3,6), C (— 4,27);
A (—3,4) B (—1,6), C (2,9).

Решити графички следеће једначине:

82. $4x^2 - 12x - 11 = 0$ 83. $9x^2 - 36x + 20 = 0$
84. $3x^2 + x - 10 = 0$ 85. $4x^2 - 20x + 25 = 0$
86. $x^2 - 5x + 8 = 0$ 87. $3x^2 - 5x + 3 = 0$

Да се одреди графички и рачунски максимум, односно минимум следећих квадратних функција:

88. $y = x^2 + 6x + 11$ 89. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 22)$

90. $y = \frac{1}{4}(x^2 + 6x - 1)$ 91. $y = 2(x^2 - 6x + 7)$

92. $y = -x^2 - 6x - 12$ 93. $y = -0{,}2(x^2 - 4x - 1)$

94. $y = -\frac{1}{2}(x^2 + 8x + 13)$ 95. $y = -3x^2 + 12x - 16$

96. У квадратној функцији

$$y = x^2 - 5ax + 3a + 1$$

да се a одреди, тако да минимум функције буде једнак броју 1.

97. Исто питање за функцију

$$y = x^2 - 2(2 - 10a)x + a + 4,$$

само да минимум буде једнак нули.

98. У квадратној функцији

$$y = -x^2 - 4x - 6 + 2a$$

да се a одреди тако, да максимум функције буде -3.

99. Исто питање за функцију

$$y = -x^2 + 2(2 - a)x + 6a + 4,$$

само да максимум буде нула.

100. Исто тако за функцију

$$y = -x^2 - 2ax + 4a + 4.$$

Максимум да буде 1.

101 Дата је функција

$$y = (a + 1)x^2 - 2ax + a + 1.$$

Да се a одреди, тако да функција за $x = 2$ постане максимум. Потом проучити варијације тако добијене функције.

102 Дата је функција

$$y = (a + 2)x^2 + 4ax + 2a + 3.$$

Да се a одреди, тако да функција за $x = 1$ постане максимум. Потом проучити варијације тако добијене функције.

103. Да се у функцији

$$y = x^2 + px + q$$

одреде коефиценти p и q, тако да минимум функције буде 2 за $x = 3$.

104. Да се у функцији

$$y = -x^2 + px + q$$

одреде коефиценти p и q, тако да максимум буде 1 за $x = 2$.

105. Да се p и q одреде, тако да функција

$$y = x^2 + px + q$$

добије вредност 1, кад је $x = 2$, и да буде минимум за $x = 3$.

106. У функцији

$$y = x^2 + px + q$$

да се одреде коефиценти p и q, тако да функција добије вредност 2, кад је $x = 1$, и да њен минимум буде $\frac{7}{4}$.

107. У једном троуглу збир основице и висине је $s = 8$ *cm*. Претстави површину као функцију основице!

1. Да се проуче варијације ове функције и конструише одговарајућа крива.

2. Колика треба да буде основица, па да површина буде 7,5(13,44) cm^2? Одговор дати и помоћу рачуна и посматрањем слике.

3. Колика треба да буде основица, па да површина буде највећа?

108. У један троугао, чија је основица $c = 6$ *cm* а висина $h = 4{,}5$ *cm*, могу се уписати бескрајно много правоугаоника, тако да једна страна правоугаоника увек пада на c. Обележимо висину правоугаоника са x, а површину са y!

1. Да се y напише као функција од x.

2. Да се графички претставе варијације ове функције.

3. Колика треба да је висина, па да површина правоугаоника буде 7,5 (13; 44)cm^2?

4. Колика треба да буде висина, па да површина правоугаоника буде највећа?

109. Квадрат ABCD има страну $a = 5$ *cm*. Тачка E је произвољна тачка на страни AB ($AE = x$). Могућно је конструисати квадрат да једно теме буде у E, и да нови квадрат буде уписан у ABCD.

1. Изрази површину y новог квадрата као функцију дужи x и графички претстави њене промене!

2. Колико треба да је x, да површина буде 15(20) cm²?

3. За коју вредност x ће површина бити најмања?

110. Једна дуж АВ дугачка је $a = 4cm$ и подељена је тачком С на два дела. Један део дужи АС нека буде x cm, а збир квадрата над оба дела нека буде y.

1. Да се y изрази као функција од x и графички претставе варијације ове функције.

2. Колико треба да је x, па да збир површина квадрата износе 16 (12; 8) cm^2.?

3. Колико треба да буде x, па да збир површина буде најмањи?

111. Један правоугаоник има стране $a = 5$ cm, $b = 3$ cm. Ако страну a скратимо за дуж x, а страну b повећамо за толико исто, добићемо нов правоугаоник, са странама $a - x$ и $b + x$ који ће имати исти обим, као и претходни правоугаоник.

1. Да се површина новог правоугаоника y изрази као функција од x и нацрта одговарајућа крива.

2. Колико треба да је x, па да површина правоугаоника буде 6 (9; 12) cm^2?

3. Колико треба да је x, па да површина правоугаоника буде највећа?

112. Могу се конструисати бескрајно много правоуглих троуглова, да збир њихових катета износи $s = 8$ cm. Обележимо једну катету са x, а квадрат над хипотенузом са y!

1. Да се проучи y као функција од x.

2. Колика треба да је катета x, да квадрат над хипотенузом буде 40 (50; 60) cm^2?

3. Колика треба да је катета x, да квадрат на́д хипотенузом буде најмањи?

113. Кад тело слободно пада пређени пут је

$$s = \frac{1}{2} gt^2,$$

где је s пређени пут, g убрзање земљине теже $9,^m8$ и t време изражено секундима.

Бацимо један камен у бунар, који је дубок 100 метара. Претставити графички пут који тело прелази за време падања.

Звук произведен ударом камена у воду прелази за секунд 340 метара. Претставите графички пут који прелази звук за време док стигне до посматрача, који је пустио камен у бунар?

После ког времена ће посматрач чути звук, рачунајући од момента кад је камен пуштен у бунар?

114. Да се измери дубина бунара, кад се звук од камена који је пуштен у воду чује после t секунада! $t = 3$; $t = 4$; $t = 5$; $t = 9$. (Види Алгебру за VI р. стр. 144, зад. 144!)

ГЛАВА III

Једначине чије се решавање своди на решавање квадратних једначина

18. Биномне једначине. — Општа биномна једначина је облика

$$ax^n + b = 0.$$

У њој се непозната јавља само у једном члану на извесном степену. Поред непознате налази се још и стални члан.

Биномне једначине решавају се растављањем бинома једначине на чиниоце I и II степена, тј. њихово се решавање своди на решавање једначине I и II степена.

Пример: 1 $\quad 27x^3 - 1 = 0.$

Бином на левој страни може се раставити на чиниоце по обрасцу.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

С тога имамо

$$(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) = 0.$$

Једначина III степена распала се у две једначине, једну линеарну и једну квадратну:

$$3x - 1 = 0$$

$$9x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Из прве једначине имамо

$$x_1 = \frac{1}{3}.$$

У другој једначини корени су имагинарни

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{6}$$

$$x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{6}.$$

Као што видимо једначина III степена има три различита корена.

Пример 2, $16x^4 - 1 = 0.$

Бином ове једначине IV степена може да се напише у облику

$$(4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = 0,$$

или још у облику $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1) = 0.$

Једначина IV степена распала се у две линеаране и једну квадратну једначину:

$$2x - 1 = 0$$
$$2x + 1 = 0$$
$$4x^2 + 1 = 0,$$

Из прве је

$$x_1 = \frac{1}{2},$$

из друге

$$x_2 = -\frac{1}{2},$$

из треће

$$x_3 = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{i}{2}$$

$$x_4 = -\frac{i}{2}.$$

Овде видимо да једначина IV степена има четири корена. Уопште, свака једначина n-тог степена има n корена.

Видимо још да $\sqrt[n]{a}$, n-ти корен ма каквог броја има n различитих вредности.

За писмено вежбање

1. $x^3 - 1 = 0$	2. $x^3 + 1 = 0$	3. $x^3 - 8 = 0$
4. $x^3 - 125 = 0$	5. $64x^3 - 1 = 0$	6. $x^3 + 64 = 0$
7. $343x^3 - 8 = 0$	8. $125x^3 + 8 = 0$	9. $8x^3 - 1 = 0$
10. $\frac{1}{8}x^3 - 8 = 0$	11. $\frac{8}{27}x^3 - 125 = 0$	12. $\frac{1}{27}x^3 + 27 = 0$
13. $x^4 - 16 = 0$	14. $81x^4 - 625 = 0$	15. $256x^4 - 1 = 0$
16. $x^6 = 1$	17. $x^{10} = 1$	18. $x^{16} = 1$

19. Триномне једначине облика $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Ове једначине решавају се увођењем нових непознатих. Стави се

$$x^n = y,$$

па према томе

$$x^{2n} = y^2$$

и једначина добија облик

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Ако су њени корени y_1 и y_2, решења дате једначине добијају се из једначина

$$x^n = y_1$$
$$x^n = y_2.$$

Једначина ће имати $2n$ корена.

Пример. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

Ставићемо $x^2 = y,$

па место дате једначине имаћемо једначину

$$36y^2 - 13y + 1 = 0.$$

Корени ове једначине су

$$y_1 = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{9}.$$

Решења дате једначине добићемо, кад ставимо

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{1}{9}.$$

Из ових последњих једначина имамо

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}.$$

За писмено вежбање

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	2. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
3. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$	4. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
5. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$	6. $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

7. $64x^4 - 20x^2 + 1 = 0$ 8. $3x^4 - x^2 - 2 = 0$
9. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 79$ 10. $(x^2-5)^2 + (x-1)^2 = 40$
11. $(x^2 - 15)(x^2 - 7) = 180$ 12. $(x^2-9)(x^2 - 11) = 74$
13. $x^4 - 2(a+b)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$
14. $x^4 - 3(a-1)x^2 + 2(a-1)^2 = 0$
15. $x^4 - 3(a+1)x^2 + 2(a+4) = a$
16. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ 17. $8x^6 - 9x^3 + 1 = 0$
18. $8x^6 - 63x^3 - 1 = 0$ 19. $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$
20. $3x^6 + 42x^3 = 3321$ 21. $x^6 - 133x^3 + 1000 = 0$
22. $3x^{-4} - 7x^{-2} = 20$ 23. $8x^{-6} - 5x^{-3} = -\frac{1}{2}$
24. $36\left(\frac{x}{6} - 3\right)^4 - 13\left(\frac{x}{6} - 3\right)^2 + 1 = 0$
25. $(x^2 - 6x + 7)^2 - (x^2 - 6x + 7) + 2 = 0$
26. $(x^2 - 8x + 11)^2 + 5(x-4)^2 - 21 = 0$
27. $(x^2 - 6x + 6)^2 + (x-3)^2 - 5 = 0$
28. $\left(x^2 - x + 3\frac{3}{4}\right)^2 - 15\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\frac{15}{16} = 0$
29. $(x^2 - 6x + 25)^2 + (x-3)^2 - 1040 = 0$

20. Реципрочне једначине. — Општа реципрочна једначина има облик

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0.$$

По спољном облику одликује се тиме, што су коефициенти њених чланова који леже симетрично или једнаки или супротни бројеви.

Ако у реципрочној једначини место x ставимо $\frac{1}{x}$, па се ослободимо именилаца, добићемо исту једначину. Због тога ако је, рецимо, α један корен реципрочне једначине, онда је $\frac{1}{\alpha}$ такође корен те једначине. О овоме ћемо се уверити на примерима које ћемо проучити.

Реципрочне једначине зову се још и *симетричне* једначине.

1. *Реципрочна једначина III степена.* — Општи облик њен је

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Решава се спајањем чланова који имају једнаке коефициенте и растављањем на чиниоце. Горња једначина доведе се на облик

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0,$$

или $$(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0.$$

Тако се једначина III степена распала на једну линеарну и једну квадратну једначину:

$$x + 1 = 0$$

и $$ax^2 - (a - b)x + a = 0.$$

Корени квадратне једначине су реципрочни бројеви.

Слично овоме решавају се и једначине

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$
$$ax^3 + bx^2 + bcx + ac^3 = 0$$
$$ax^3 - bx^2 + bcx - ac^3 = 0.$$

Пример. $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0.$

Доведемо је најпре на облик:

$$2(x^3 - 1) - 5x(x - 1) = 0,$$

или $$(x - 1)[2(x^2 + x + 1) - 5x] = 0,$$

или још $$(x - 1)(2x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Једначина III степена распала се на две једначине

$$x - 1 = 0$$
$$2x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Из прве имамо

$$x_1 = 1.$$

Из друге $$x_2 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{4}$$

$$x_3 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{4}.$$

2. *Реципрочне једначине IV степена.* — Има их две врсте.

I. Једначина има средњи члан.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Спајањем чланова са једнаким коефициентима доводимо је на облик

$$a(x^4 + 1) + b(x^3 + x) + cx^2 = 0.$$

Поделимо је са x^2, па ћемо имати

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Сад ћемо увести нову непознату. Ставићемо

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

па ће бити $$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Последња једначина тада постаје

$$ay^2 + by + c - 2a = 0;$$

Ако су корени ове квадратне једначине y_1 и y_2, решења дате једначине добићемо из једначина $x + \frac{1}{x} = y_1$

и $$x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Слично овоме решава се и једначина облика

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ad^2 = 0.$$

II Једначиꙗа је без средњег члана и облика

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Спајањем чланова са једнаким коефициентима доводимо је на облик

$$a(x^4 - 1) + bx\,(x^2 - 1) = 0,$$

или $$(x^2 - 1)\,[a\,(x^2 + 1) + bx] = 0.$$

Једначина IV степена распала се на две квадратне

$$x^2 - 1 = 0$$

и $$ax^2 + bx + a = 0.$$

Решења ових једначина су у исто време и решења дате реципрочне једначине.

Напомена. — Због једначине $x^2 - 1 = 0$ овај тип реципрочних једначина има увек стварне корене $+1$ и -1.

Пример 1. $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0.$

Најпре једначину доведемо на облик

$$2(x^4 + 1) + (x^3 + x) - 6x^2 = 0.$$

Затим је поделимо са x^2.

$$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) - 6 = 0$$

и ставимо $$x + \frac{1}{x} = y,$$

а $$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Тако добијамо квадратну једначину

$$2y^2 + y - 10 = 0.$$

Корени ове једначине јесу

$$y_1 = -\frac{5}{2}$$

$$y_2 = 2.$$

Сад ставимо

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = 2.$$

Када ове једначине уредимо, добићемо

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Из прве имамо

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}.$$

из друге

$$x_3 = 1$$
$$x_4 = 1.$$

Пример 2. $4x^4 + 17x^3 - 17x - 4 = 0.$

Најпре једначину доведемо на облик

$$4\,(x^4 - 1) + 17x\,(x^2 - 1) = 0,$$

или $$(x^2 - 1)\,[4\,(x^2 + 1) + 17x] = 0.$$

Једначина IV степена распада се на квадратне једначине

$$x^2 - 1 = 0$$
$$4x^2 + 17x + 4 = 0.$$

Из ових једначина добијамо

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = -4$$
$$x_4 = -\frac{1}{4}.$$

Пример 3. Решити биномну једначину V степена

$$x^5 - 1 = 0.$$

Растављањем на чиниоце добијамо

$$(x - 1)\,(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0.$$

Биномна једначина V степена распала се на једну једначину I степена и на једну реципрочну једначину IV степена. Обе једначине знамо да решимо.

3. *Реципрочне једначине V степена.* Оне имају општи облик

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 \pm bx \pm a = 0,$$

при чему морају важити једновремено или сви знаци плус, или сви знаци минус.

Реципрочна једначина V степена распада се у једну линеарну једначину ($x + 1 = 0$ или $x - 1 = 0$) и на једну реципрочну једначину IV степена.

Пример: $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0.$

Најпре ћемо једначину довести на облик

$$6(x^5 - 1) - 41x(x^3 - 1) + 97x^2(x - 1) = 0,$$

или

$$(x - 1)[6(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - 41x(x^2 + x + 1) + 97x^2] = 0,$$

или

$$(x - 1)(6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6) = 0,$$

Реципрочна једначина V степена распала се на једну линеарну једначину и на једну реципрочну једначину IV степена, коју знамо да решимо.

За писмено вежбање

1. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
2. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
4. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$
5. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$
6. $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$
7. $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$
8. $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0$
9. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$
10. $12x^3 + 13x^2 - 13x - 12 = 0$
11. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$
12. $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$
13. $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$
14. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$
15. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
16. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$
17. $x^4 - 2,7x^3 - 11x^2 - 2,7x + 1 = 0$
18. $10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$
19. $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$
20. $4x^4 - 33x^3 + 33x - 4 = 0$
21. $6x^4 + 73x^3 - 73x - 6 = 0$
22. $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$

23. $15x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 16x + 15 = 0$
24. $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$
25. $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$
26. $6x^4 - 5x^3 - 5x - 6 = 0$
27. $12x^4 + 7x^3 + 7x - 12 = 0$
28. $x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$

Решити биномне једначине

29. $x^5 + 1 = 0$ 30. $x^5 - 32 = 0$ 31. $x^5 - \frac{1}{243} = 0.$

Решити реципрочне једначине

32. $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$
33. $x^5 - 2x^4 + \frac{11}{8}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - 2x + 1 = 0$
34. $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$
35. $15x^5 + 34x^4 + 15x^2 - 15x^2 - 34x - 15 = 0$
36. $12x^5 - 56x^4 + 107x^3 - 107x^2 + 56x - 12 = 0$
37. $x^6 - 10x^5 + 27x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 10x + 1 = 0$
38. $x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 3x + 1 = 0$
39. $2x^6 - x^5 - 8x^4 + 8x^2 + x - 2 = 0$
40. $3x^6 + 4x^5 - 17x^4 + 17x^2 - 4x - 3 = 0$
41. $6x^6 - 5x^5 - 7x^4 - 10x^3 - 7x^2 - 5x + 6 = 0$
42. $3x^6 + 7x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 7x - 3 = 0$
43. $x^7 + 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$
44. $180x^7 - 213x^6 - 277x^5 + 244x^4 - 244x^3 + 277x^2 + 213x - 180 = 0$
45. Да се одреде све вредности ових корена

$$\sqrt[6]{1}, \sqrt[7]{1}, \sqrt[8]{1}, \sqrt[10]{1}$$

$$\sqrt[6]{15625}, \sqrt[8]{6561}, \sqrt[10]{1024}.$$

ГЛАВА IV

Експоненцијалне једначине

21. — Једначине у којима се непозната јавља као основа неког степена, или као радиканд каквог корена, при чему је још степени или корени изложилац рационалан број, зову се *алгебарске једначине.*

Једначине у којима се непозната јавља и на неки други начин, осим овог горе поменутог, зову се *трансцендентне једначине*.

Једна трансцендентна једначина зове се **експоненцијална једначина,** *кад се непозната јавља као изложилац неког степена, или као изложилац неког корена.*

Разликоваћемо три случаја.

Први случај. Експоненцијалне једначине решавају се без логаритмисања.

Пример. $$\frac{256^{\frac{x}{4}}}{4^{\frac{3}{x}}} = 0{,}5^{-\frac{x}{2}}.$$

Бројеви 256, 4 и $0{,}5 = \frac{1}{2}$ могу се претставити као степени од 2, па се горња једначина може овако написати,

$$\frac{(2^8)^{\frac{x}{4}}}{(2^2)^{\frac{3}{x}}} = 2^{\frac{x}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{2^{8\cdot\frac{x}{4}}}{2^{2\cdot\frac{3}{x}}} = 2^{\frac{x}{2}}$$

или још $$2^{2x-\frac{6}{x}} = 2^{\frac{x}{2}}.$$

Ово је једначина између два једнака степена. Како су основе ових једнаких степена једнаке, морају и изложиоци бити једнаки. Због тога можемо написати

$$2x - \frac{6}{x} = \frac{x}{2}.$$

Решењем ове једначине добија се

$$x_1 = 2, \; x_2 = -2.$$

Отуда имамо ово правило: *пре него што приступимо решавању једне експоненцијалне једначине, гледамо да ли је могућно да се обе стране једначине претставе као степени истих основа.*

За усмено вежбање

1. $5^x = 5^4$; $a^x = a^8$; $8^x = 64$; $2^x = 64$.
2. $0{,}3^x = 0{,}09$; $1{,}4^x = 1{,}96$; $0{,}4^x = 0{,}0256$.
3. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{64}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{1024}{243}$.

4. $(-5)^x = 625$; $(-2)^x = -32$; $(-0{,}03)^x = -0{,}000027$.
5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \frac{27}{8}$; $0{,}2^{x} = 5$; $0{,}5^{-x} = 2$.
6. $\sqrt[x]{16} = 2$; $\sqrt[x]{0{,}01} = 0{,}1$; $\sqrt[x]{-0{,}729} = -0{,}9$.
7. $8^{\frac{x}{3}} = 8$; $4^{\frac{5}{x}} = 4$; $32^{\frac{x}{5}} = 8$; $81^{\frac{x}{4}} = 9$.
8. $7{,}3^{x-1} = 1$; $3^{-x} = \frac{1}{3}$; $8^x = 16^{\frac{3}{x}}$; $2^x = 16^{\frac{x}{3}}$; $2^x = \sqrt[x]{512}$.

За писмено вежбање

1. $5^{3x-2} = 5^{2x+5}$.
2. $2^{4+\frac{3}{4}x} = 512$.
3. $0{,}003^{-\frac{3}{5}x} = 0{,}000009^{\frac{7}{9}x+13}$
4. $\sqrt{3^{x+2}} = 27$
5. $3^{3x-4} \cdot 9^{2x-3} = 27^{x+2}$
6. $8^{\frac{7x-3}{3}} = 2\sqrt{32^{7-2x}}$
7. $\sqrt{5^{3x-4}} = 625$
8. $(0{,}5^{1,2})^x = 0{,}0625$
9. $\sqrt[x]{9^{4x-3}} = \sqrt[4x]{27^{6-x}}$
10. $(14^{n+2})^{n-3} = 1$
11. $(7^{2x-3})^{3x-4} = 49$
12. $\sqrt[n+2]{64} = 2^{n+1}$
13. $\sqrt[x]{729^2} = 3 \cdot 3^x$
14. $\sqrt{(25^{2x-1})^x} = 5\sqrt[7]{(5^{9-x})}$
15. $\dfrac{\sqrt[n]{8^{n+1}}}{\sqrt[n-1]{8^n}} = \sqrt[n-1]{8^2}$
16. $\dfrac{\sqrt[n]{3^{n-2}}}{\sqrt[n-11]{3^n}} = \sqrt[n-1]{3}$
17. $\sqrt[4]{m^x} \cdot \sqrt[6]{m^y} = m^4$
    $\sqrt[6]{m^x} \cdot \sqrt[3]{m^y} = m^{\frac{1}{4}}$
18. $\sqrt[x-2]{b^4} \cdot b^{2y-1} = \frac{1}{b^3}$
    $\sqrt[x-3]{b^3} \cdot b^{y-2} = b^4$.

Други случај. Експоненцијална једначина решава се помоћу логаритама.

Пример.

$$3^x = 15.$$

Овде се не може удесити да добијемо степене са истом основом. Због тога ћемо се ослободити непознате у изложиоцу логаритмисањем. Разуме се да и ово може бити у случајевима. кад с леве и с десне стране имамо изразе који се могу логаритмисати.

Тако добијамо

$$x \log 3 = \log 15,$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3} = \frac{1{,}17609}{0{,}47712}.$$

Кад се назначено дељење изврши, добија се

$$x = 2{,}4648.$$

Назначено дељење извршује се или помоћу логаритама, или скраћеним дељењем. (Види Алгебру за VI р. стр. 78 и 187!)

Отуда имамо ово правило: *кад на левој и десној страни имамо изразе који се могу логаритмисати, непознате у изложиоцу ослобађамо се логаритмисањем.*

За писмено вежбање

1. $4^x = 8$
2. $10^x = 2$
3. $100^x = 40$
4. $3^2 = 4^x$
5. $0{,}6^x = 12^2$
6. $\sqrt[x]{1000} = 5$
7. $\sqrt[x]{3^6} = 3{,}5$
8. $\sqrt[x]{0{,}4} = 4$
9. $\sqrt[x-1]{0{,}27} = 0{,}3$
10. $6^x = \frac{1}{2} 12^{x+2}$
11. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}x} = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}x}$
12. $\sqrt[x]{0{,}1^{x+1}} = 3\sqrt[x]{0{,}1^{x-2}}$
13. $4 \cdot 6^{x-1} = 3 \cdot 2^{x-1}$
14. $13{,}2873^{x-1} \cdot 0{,}491 = 2{,}6514^x$
15. $5^{x-3} = \sqrt[x+1]{37{,}5}$
16. $\sqrt[x-1]{6} = \frac{2}{3} \cdot 3^x$
17. $5^x = 2 \cdot \sqrt[x]{10}$
18. $2^x \cdot 3^y = 648$
    $4^x \cdot 5^y = 40000$
19. $4^x \cdot 3^y = 18$
    $9^x \cdot 5^y = 75$

Трећи случај. Не може се применити ни изједначење основа, нити логаритмисање. Проба се увођење нове непознате.

Пример. $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486.$

Најпре извршимо назначено степеновање збиром:

$$9^x \cdot 9 - 3^x \cdot 3^2 = 486.$$

Како је $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$ квадрат степена 3^x, то можемо ставити

$$3^x = y,$$

па због тога $\qquad 9^x = y^2.$

Горња једначина тада постаје

$$9y^2 - 27y - 486 = 0,$$

или $\qquad y^2 - 3y - 54 = 0.$

Корени ове једначине су

$$y_1 = 9$$
$$y_2 = -6.$$

Решења дате експоненцијалне једначине добијају се из једначина

$$3^x = 9 = 3^2$$
$$3^x = -6.$$

Из прве једначине добија се

$$x = 2.$$

Друга једначина је немогућна, јер кад број 3 степенујемо ма којим бројем, увек ћемо добити позитиван резултат, а никад негативан.

Отуда имамо правило: *кад у експоненцијалној једначини не можемо добити једнаке основе, нити се изрази могу логаритмисати, уводимо нову непознату.*

За писмено вежбање

1. $2^{5x-2} + 4^{5x-2} = 72$
2. $3^{4x-5} + 3^{4x-1} - 3^{4x-2} = 1485$
3. $49^{5-x} - 7^{5-x} = 117306$
4. $2^{3x+5} + 4^{\frac{3}{2}x+3} - 8^{x+1} = 352$
5. $\frac{7^x}{7^x - 1} = \frac{7^x - 5}{7^x + 1}$
6. $\sqrt[x]{15} + \frac{2 - \sqrt[x]{15}}{2 + \sqrt[x]{15}} = \frac{4\sqrt[x]{15} + 2}{5}$
7. $8^x + 8^{2x} = 42$
8. $6^x - 21 \cdot 6^{-x} = 4$
9. $\sqrt[x]{5} + 2 \cdot \sqrt[2x]{5} = 15$
10. $8 \cdot 3^x = 9^x - 20$
11. $2^{x-1} + 2^{7-x} = 5 \cdot 2^3$
12. $3^{x+2} - 244 + 3^{3-x} = 0$
13. $\frac{a^{x-2} - 1}{a^{x+1} + 1} = a$
14. $(a + b)^x + \frac{a - b}{(a + b)^{x-1}} = 2a$
15. $3^x - 5^y = 4$
    $3^{2x} + 5^{2y} = 106$
16. $2^x + 3^y = 89$
    $2^x \cdot 3^y = 648$

Мешовити задаци за понављање

1. $\left(\frac{3}{8}\right)^{4-x} = \left(\frac{8}{3}\right)^{2x-2}$ 2. $\left(\frac{5}{6}\right)^{2x-5} = \left(\frac{6}{5}\right)^{5x-9}$

3. $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2}$ 4. $\sqrt[3]{\left(\frac{7}{8}\right)^{2x+1}} = \left(\frac{8}{7}\right)^{3}$

5. $40\cdot 3^{3x} - 16\cdot 4^{3x} = 11\cdot 4^{3x} - 24\cdot {}^{3x}$

6. $16^{3x-2} - 4^{4x+1} = 16^{3x-3} - 4^{4x-1}$

7. $2^{x} + 3^{x+2} = 3^{x+3} - 2^{x+4}$

8. $\sqrt[x+1]{27} = 81^{x+2}$ 9. $\sqrt[x+2]{243^{2x+1}} = \sqrt[4x-1]{9^{6x-1}}$

10. $\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{15}{2}\right)^{x}$ 11. $\sqrt[x+5]{1{,}3^{x+2}} = \sqrt[x-3]{(1{,}3\cdot 1{,}69)^{x-6}}$

12. $3{,}125^{6{,}25} = 6{,}75^{x}$ 13. $\sqrt[x]{4^{x-1}} = \sqrt[x-1]{3^{x}}$

14. $(10^{2-x})^{6-x} = 100$ 15. $5^{x}\sqrt[x-1]{4^{x}} = 1000$

16. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{6}{7}\right)^{x+2}$ 17. $\frac{\sqrt[x]{4096}\cdot 5^{x+1}}{2^{x}} = 625\cdot\sqrt[x]{8}$

18. $\sqrt[x]{3^{4}}\cdot\sqrt[x+1]{2^{3}} = 18$ 19. $\sqrt[x+2]{32^{2x+1}} = \sqrt[4x-1]{4^{6x-1}}$

20. $0{,}04^{x}\cdot\sqrt[5]{32768^{x+1}} = 3{,}2\sqrt{2}$

21. $\sqrt{5^{2x}+2} - \sqrt{5^{2x}-3} = 5$ 22. $\sqrt{8^{2x}+4} + \sqrt{2\cdot 8^{2x}} = 14$

23. $\sqrt{2\cdot 16^{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 16^{x}+1}} = 3\frac{1}{3}$

24. $2^{1-x} - 33\cdot 2^{\frac{x}{2}-2} + 1 = 0$ 25. $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x} = -\frac{1}{6}$

26. $2^{x} + 2^{x+2} + 2^{x+6} = 3^{x} + 3^{x+3}$

27. $3^{2x+1} + 5\cdot 4^{x+2} - 8\cdot 2^{2x-1} = 18\cdot 9^{x+1}$

28. $2^{x} + 3^{x-1} = 3^{x} - 2^{x-1}$

29. $6\cdot 5 - 1\frac{1}{4}\cdot 2^{x+6} = 5(6\cdot 5^{x-2} - 2^{x})$

30. $1000\cdot 4^{x} + 100\cdot 10^{x} = 25^{x}$ 31. $9^{x} = 3\cdot 6^{x} + 10\frac{1}{8}\cdot 4^{x-1{,}5}$

32. $\frac{81^{2x+3}}{3^{7x-2}} = \frac{9^{4x-2}}{27^{5x-6}}$ 33. $\frac{2^{2x}\cdot 10^{x+3}}{4^{2x+1}\cdot 5^{2(x-1)}} = \frac{1}{4}\cdot 2{,}5^{x-3}$

34. $4\cdot\sqrt{32^{7-2x}} = \sqrt[3]{8^{7x-3}}$ 35. $\sqrt[x+5]{27\cdot 81} = \sqrt[x-6]{9\cdot 729}\cdot\sqrt[x-1]{3\cdot 9}$

36. $(a^{4x-7})^{4x-3}\cdot(a^{3x+2})^{6x-5} = (a^{2x-1})^{5x+3}\cdot(a^{3x+5})^{8x-2}$

37. $(2^{3x-2})^{2x-1}\cdot(4^{x})^{3x-1} = 2^{-5}\cdot 16^{4x}\cdot(8^{x+7})^{7-x}$

38. $a^{x}\cdot a^{2y} = (a^{2})^{4}$, $a^{3x}:a^{y} = a^{3}$ 39. $\sqrt{m^{x}}:\sqrt[5]{m^{y}} = m$, $\sqrt[3]{m^{x}}\cdot\sqrt{m^{y}} = m^{7}$

40. $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[y]{a^{2}} = \sqrt[12]{a^{5}}$, $\sqrt[x]{a^{2}}:\sqrt[y]{a^{3}} = \frac{1}{\sqrt[24]{a}}$ 41. $\sqrt[x-1]{a^{4}}\cdot a^{y-1} = \sqrt[5]{a^{7}}$, $\sqrt[x-1]{a^{5}}:a^{y-2} = a^{\frac{1}{2}}$

42. $2^{x}\cdot 5^{y} = 800000$, $x + y = 13$ 43. $2^{x+2} = 3^{y-1} + 5^{y}$, $2^{x} = 3^{y}$

44. $3^{x}\cdot\sqrt[y]{16} = 108$, $4^{x}\cdot\sqrt[y]{36} = 384$ 45. $4^{x}\cdot\sqrt[y]{5} = 250$, $3^{2x}\cdot\sqrt[y]{10} = 3000$

46. $10^{y-1} = \sqrt[x+1]{1000^{x-2}}$, $3^{y-1} = \sqrt[x-1]{3\cdot 3^{x}}$ 47. $\sqrt[y]{a^{x}} = \sqrt[x]{a^{x+2}}$, $\sqrt[y]{a^{x+2}} = \sqrt[x+2]{a^{x+14}}$

48. $25^{3} = \frac{5^{4x^2+xy-3y^2}}{5^{3x^2+xy-2y^2}}$, $6^{2x^2} = 2^{2xy+7}\cdot 3^{7+2xy}$ 49. $64\cdot 8^{10+xy-3y^2} = 16^{x^2}$, $xy = 3$

Логаритамске једначине

22. Једначина се зове **логаритамска**, кад се непозната јавља *као логаритманд.*

Пример 1. $8^{\log x} = 3.$

Кад логаритмишемо обе стране, добићемо

$$\log x\cdot\log 8 = \log 3$$

или

$$\log x = \frac{\log 3}{\log 8} = \frac{0{,}47712}{0{,}90309},$$

или још

$$\log x = 0{,}52831$$
$$x = 3{,}3753.$$

Пример 2. $\log\sqrt{x+18} - \frac{1}{2}\log(x+6) = \sqrt{6} - \frac{1}{2}\log(x-3).$

У овом примеру поступићемо супротно од претходног. Овде ћемо логаритме спојити у један и на левој и на десној страни.

$$\log\sqrt{\frac{x+18}{x+6}} = \log\sqrt{\frac{6}{x-3}}.$$

Из ове једначине следује

$$\frac{x+18}{x+6} = \frac{6}{x-3}.$$

Решења ове једначине јесу

$$x_1 = 6$$
$$x_2 = -15,$$

Пример 3. $1 + \log x^4 = \dfrac{14}{\log x}$.

Кад извршимо логаритам степена и ослободимо се разломка, добијамо

$$\log x + 4(\log x)^2 = 14.$$

Ставимо $\log x = y$,
па ћемо добити једначину

$$4y^2 + y - 14 = 0,$$

Корени ове једначине јесу

$$y_1 = -2$$
$$y_2 = \frac{7}{4}.$$

С тога имамо за x две једначине

$$\log x = -2$$
$$\log x = \frac{7}{4} = 1{,}75000.$$

Из прве је $x = 0{,}01$,
из друге је $x = 5{,}6234$.

Пример 4. $[x^{\log(x-2)}]^{\log x} = x^{\log(x-2)} \cdot (x-2)^2$.

Овде се логаритамске величине јављају у изложиоцима. Због тога ћемо логаритмисати обе стране.

$$\log x \cdot \log(x-2) \log x = \log(x-2) \log x + 2 \log(x-2).$$

И леву и десну страну ове једначине можемо поделити са $\log(x-2)$, што значи да можемо ставити

$$\log(x-2) = 0,$$

или $x - 2 = 1$,
одакле је $x_1 = 3$.

Кад поделимо са $\log(x-2)$, добијамо једначину

$$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0.$$

Ако ову једначину решимо по $\log x$, добијамо

$$\log x = -1$$
и
$$\log x = 2.$$

Из прве једначине добијамо

$$x_2 = 0{,}1,$$
из друге
$$x_3 = 100.$$

За усмено вежбање

1. $\log x = -4$
2. $3 \log x = 2 \log 1000$
3. $\log x^5 = 5 \log 3^2$
4. $\log \sqrt{x} = \frac{4}{3} \log 8$
5. $\frac{1}{2} \log x = \log 2 + \log 3$
6. $\frac{1}{3} \log x = 1 - \log 2$
7. $\frac{1}{4} \log x = 2 \log \sqrt[4]{2}$
8. $\log(x-1) = 2 - \log 20$
9. $3^{\log x} = 27$
10. $2^{\log 2x} = 32$
11. $5^{\log \frac{x}{2}} = 125$
12. $2^{\log x^7} = 64$

За писмено вежбање

1. $\dfrac{2}{6 - \log x} + \dfrac{1}{\log x} = 1$
2. $3 \log x - \dfrac{12}{\log x} = 5.$
3. $\log x + \log x^2 + \log x^3 = \log 4x^2$
4. $\log x + \log 2x + \log 3x = \log 4x$
5. $\log 3x + \log 2x^2 + \log x^3 = \log \frac{1}{6} x^2$
6. $\log x - \log \dfrac{1}{x} - \log x^2 + \log \dfrac{1}{x^2} = 1$
7. $\log 2x + \log x^2 + \log 2^{\log x} = 2$
8. $\log x^2 \cdot \log \sqrt{x} - \log \dfrac{1}{x} = 2$
9. $\log x^5 \cdot \log \sqrt[7]{x} + \log \sqrt[4]{x} = \dfrac{3}{14}$

10. $\log(x-5)+\log(x+2)=\log(x-7)+\log(x+6)$

11. $\log x-\log(x-1)=\log(2x-1)-\log(x+1)-0{,}30103$

12. $2\log x-\log(x+14)=2\log(x-3)-\log(x-1)$

13. $\log(x+1)^2+2\log(2x-8)=4$

14. $1{,}20412+2\log\left(x-\frac{3}{4}\right)=1{,}39794$

15. $\frac{2\log 2+\log 2x}{\log(2x-4)}=2$ 16. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$

17. $\log\sqrt{9x+1}+\frac{1}{2}\log(7x-13)=1+\log 8$

18. $\log\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{3b^2-5a}{a\sqrt{x}}\right)\frac{a}{b^2}\right]=1{,}17609$

19. $\log\left(5^{3\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}}-624{,}996\right)=-2{,}39794$

20. $2(\log 2+0{,}47712)+\log(2+7^x)-\log 12=\log 189-x\log 7$

21. $\log 3^x=(x+1)\cdot 3^{\log 3}$ 22. $(\log 3)^{\log x}=\frac{1}{3}x^{\log 3}$

23. $x^{1+\log x}=0{,}1\cdot x^3$ 24. $(100x)^{1+\log x}=(10x)^{2\log x}$

25. $x^{7+3\log x}=10x^5$ 26. $\frac{x^{\log x}}{x^2\sqrt{x}}=\frac{1}{16}$

27. $(x+2)^{\log(x+2)}=x+2$ 28. $(x+1)^{\log(x+1)-1}=8$

29. $(2x-1)^{\log(2x-1)}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

30. $(3x+1)^{\log(3x+1)}=\left(\frac{3x+1}{10}\right)^6$

31. $3^{\log x}+2\cdot 3^{\log 100x}=57$

32. $3^{\log x^2}+\frac{1}{18}\cdot 6^{2+\log x}=12\cdot 4^{1+\log x}$

33. $\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{3}\log y=0{,}42158$

$\frac{1}{3}\log x+\frac{1}{4}\log y=0{,}31725$

34. $2\log x+\log y=2{,}4$; $\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}\log y=\log 0{,}024$

35. $\frac{4}{\log x}+\frac{3}{1+\log y}=5$

$\frac{5}{\log x}-\frac{2}{1+\log y}=3$

36. $x^y=100$

$(2x)^{2y}=160000$

37. $\log x+2\log y=5$

$x^2y^3=1000$

38. $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\log 10\,000$

$\log x-\log 12y=-1$

39. $\frac{1}{2}\log x+2=\log y$

$\sqrt{y-x}=14$

40. $4^{\log x}+3^{\log y}=43$

$4^{\log x}\cdot 3^{\log y}=432$

41, $\log x+\log y=\log x\cdot\log y$

$\log y_{(x)}=2$

42. $\log x^2y-\log xy^2=3$

$(\log x)^2-(\log y)^2=3$

43. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}}-9\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}}=112$

$x^y=\frac{1}{2}$

ГЛАВА V

Просте квадратне једначине са две непознате

23. Решавање методом замене. — Општа једначина II степена са две непознате x и y има овај облик:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0.$$

Да бисмо могли да израчунамо x и y, морамо имати још једну једначину између x и y. Најпростији је случај, кад је ова друга једначина линеарна.

Кад је једна једначина квадратна, а друга линеарна, служимо се методом замене. Из линеарне једначине одредимо једну непознату помоћу оне друге, па тако нађену вредност сменимо у квадратној једначини. Овакво решавање смо већ проучили у VI разреду.

За писмено вежбање

1. $4x^2 + 6y^2 = 22$
$3x - 5y - 1 = 0$

2. $2x^2 - 7y^2 = 11$
$4x + 8y = 20$

3. $5x - 3y = 16$
$xy = 15$

4. $4x^2 + 9y^2 = 2$
$xy = \frac{1}{6}$

5. $7x - 4y = 16$
$xy + y = 15$

6. $3x^2 - y^2 - 2x + 3y = 8$
$2x + y = 5$

7. $2x^2 + y^2 = 78 - 8(x - y)$
$x = 7 - y$

8. $xy - y^2 = 7$
$4y - 3x = 4$

9. $x^2 + 3xy + 7y - 5x = 53$
$2x - 5y = -7$

10. $axy + by = c$
$dx + ey = f$

11. $x^2 - 2xy + 4y^2 - 6y = 18$
$5x - 4y = 11$

12. $\frac{9}{x} - \frac{8}{y} = 1$
$2x + y = 10$

13. $\frac{5x - 3y}{2x - y} = \frac{20}{9}$
$x^2 + y^2 = 74$

14. $\frac{3x + 2y}{7x - 3y} = \frac{18}{19}$
$2x^2 + 3y^2 = 59$

15. $3x^2 + 4y^2 = 4(35 + 4y) - 18x;$ $\quad 3x = 2(y + 1)$

16. $(2x - 3y)(3x - 2y) = 26;$ $\quad x - 2y + 1 = 0$

17. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 1 = 0;$ $\quad 4(x - 3) - 3(y + 2) - 25 = 0$

18. $(x + 2{,}9)^2 + (y + 3{,}6)^2 - 17{,}64 = 0;$ $\quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0.$

19. $\frac{3x - 2}{y + 5} + \frac{y}{x} = 2;$ $\quad x - y - 4 = 0$

20. $2(x - 4)^2 - 3(y + 3)^2 = -36;$ $\quad x - y = 7$

21. $4x + \sqrt{15y - 6} = -17$
$3y - 3x = 18$

22. $y - \sqrt{3x^2 - 12} = -8$
$2x + 3y = 2$

23. $x^2 + y^2 + 5x = 6\frac{1}{4}$
$x^2 + y^2 + y = 1\frac{3}{4}$

24. $x^2 + y^2 + x + y = 42$
$x^2 - y^2 + x - y = 18$

25. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 5a^2 + 2ab + 2b^2$
$xy + y^2 = 2a^2 - ab - b^2$

26. $x^3 - xy^2 = 750$
$x^2y - y^3 = 567$

24. Ако су обе једначине II степена, примењујући метод замене, кад одредимо x из једначине, y ће се јавити под знаком квадратног корена. После смене у другој једначини морамо овај квадратни корен уклонити подизањем на квадрат. Тако ће се за y добити једна општа једначина IV степена коју ми у нижој математици не можемо да решимо. Средствима којима ми располажемо можемо обрађивати само специјалне случајеве. Ми ћемо овде решити најпростије случајеве, и то оне, који се у примени најчешће употребљавају.

25. Једначина само са квадратима непознатих. —

$$a_1x^2 + b_1y^2 = c_1$$
$$a_2x^2 + b_2y^2 = c_2.$$

Најпре одредимо x^2 и y^2 по методу једнаких коефициената.

$$x^2 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y^2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Одавде је

$$x = \pm\sqrt{\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}.$$

Још да видимо како ћемо одредити знаке за поједине парове вредности x и y. Пошто у једначини имамо само квадрате, то је свеједно какав ће знак имати корени. Могућне су све комбинације са знацима $+$ и $-$, тј. могу бити четири пара вредности за x и y,

Ако вредност горњих квадратних корена обележимо са α и β тј. ако ставимо

$$\sqrt{\frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}} = \alpha$$

$$\sqrt{\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}} = \beta,$$

имаћемо $\quad x_1 = +\alpha \quad x_2 = +\alpha \quad x_3 = -\alpha \quad x_4 = -\alpha$

$\qquad\qquad\;\; y_1 = +\beta \quad y_2 = -\beta \quad y_3 = -\beta \quad y_4 = +\beta.$

За писмено вежбање

1. $x^2 + y^2 = 113$
   $x^2 - y^2 = 15$
2. $(4x)^2 + 2y^2 = 242$
   $10y^2 + 16x^2 = 634$
3. $2x^2 - 3y^2 = \frac{1}{6}$
   $3x^2 + 2y^2 = \frac{35}{36}$
4. $(2x)^2 + (3y)^2 = 0{,}61$
   $(3x)^2 + (2y)^2 = 0{,}7225$
5. $\frac{4}{x^2} + 3y^2 = 48$
   $\frac{5}{x^2} - 4y^2 = 29$
6. $\left(\frac{3}{x}\right) - 24 = \left(\frac{4}{y}\right)^2$
   $\frac{15}{28} y^2 = \frac{28}{15} x^2$
7. $4(x-4)^2 - 5(y+10)^2 = 20$
   $7(x-5)^2 - 9(y+10)^2 = 31$
8. $3(3x-4y-3)^2 + 7(4x-7y+8)^2 = 75$
   $7(3x-4y-3)^2 - 2(4x-7y+8)^2 = 10$
9. $\left(\frac{18}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{3}\right)^2 = 5$
   $\left(\frac{24}{x+1}\right)^2 + (2y-2)^2 = 160$
10. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 4\frac{1}{4}$
    $x^2 + y^2 = 34$

26. Дат је производ и количник непознатих.

$$xy = p$$
$$\frac{x}{y} = q.$$

Једначине се решавају њиховим множењем и дељењем. Множењем добијамо

$$x^2 = pq$$

а дељењем

$$y^2 = \frac{p}{q}.$$

Тако је

$$x = \pm\sqrt{pq}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Овде знаке треба тако удесити, да при смени, рецимо, у првој једначини, производ xy добије исти знак као и p.

Горњи систем једначина има као решење два пара вредности

$$x_1 = +\sqrt{pq} \qquad x_2 = -\sqrt{pq}$$
$$y_1 = +\sqrt{\frac{p}{q}}. \qquad y_2 = -\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

За писмено вежбање

1. $xy = 54$
   $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$
2. $\frac{x}{y} = -\frac{5}{6}$
   $xy = -120$
3. $x : y = 4 : 3$
   $x : 10 = 30 : y$
4. $y : x = 2a - 3b$
   $xy = 8a^3 - 27b^3 - 6ab(3b - 2a)$
5. $(x+4)(y-6) = 72$
   $\frac{x+4}{x-6} = 2$
6. $(x-2)(y+3) = 9$
   $\frac{x-2}{y+3} = 1$
7. $(x+y) : (x-y) = 15 : 13$
   $9 : \frac{x}{8} = \frac{y}{3} : 7$
8. $(5x^2 - 0{,}3) \cdot (y^2 + 0{,}11) = 0{,}09$
   $(5x^2 - 0{,}3) : (y^2 + 0{,}11) = 0{,}25$

27. Дат је збир квадрата непознатих и њихов производ.

$$x^2 + y^2 = s \qquad (1)$$
$$xy = p. \qquad (2)$$

Овде и у следећим случајевима је ова мисао водиља: *покушавамо да образујемо збир и разлику непознатих.*

Ако двоструку једначину (2) први пут додамо једначини (1), а другипут је од ње одузмемо, добићемо квадрат збира и квадрат разлике непознатих. па даље имамо

$$x + y = \pm\sqrt{s + 2p} \qquad (3)$$
$$x - y = \pm\sqrt{s - 2p}. \qquad (4)$$

Одавде је

$$x = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{s+2p} \pm \sqrt{s-2p}\right).$$
$$y = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{s+2p} \mp \sqrt{s-2p}\right).$$

Из једначина (3) и (4) комбинујући знаке $+$ и $-$, имамо у ствари четири једначине. Због тога имамо и четири пара решења за x и y.

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s+2p} + \sqrt{s-2p}\right) \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s+2p} - \sqrt{s-2p}\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s+2p} - \sqrt{s-2p}\right) \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s+2p} + \sqrt{s-2p}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{s+2p} + \sqrt{s-2p}\right) \qquad x_4 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{s+2p} - \sqrt{s+2p}\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{s+2p} - \sqrt{s-2p}\right) \qquad y_4 + \frac{1}{2}\left(-\sqrt{s+2p} + \sqrt{s-2p}\right).$$

Кад посматрамо ове парове вредности, видимо да се други пар добија из првог променом места, а четврти из трећег такође променом места. Ово се уосталом види из самих једначина. Ако x и y промене места, једначине се неће ништа променити. Овакви системи једначина зову се *симетрични системи.*

За писмено вежбање

1. $x^2 + y^2 = 25$
   $xy = 12$
2. $xy = 20$
   $x^2 + y^2 = 41$
3. $x^2 + y^2 = 74$
   $4x = 140 : y$
4. $x^2 + 2\sqrt{xy} + y^2 = 109$
   $xy = 36$
5. $x^2 + y^2 = 32a^2 + 50b^2$
   $xy = 16a^2 - 25b^2$
6. $(3x + 2y)^2 + (5x - 4y)^2 = 221$
   $(3x + 2y)(5x - 4y) = 70$
7. $(2x - y^2)^2 + (3x + y)^2 = 125$
   $(2x - y^2)(3x + y) = 50$
8. $x^2 + y^2 + xy = \frac{a - ab + b^2}{a^2}$
   $xy = \frac{b - a}{a}$
9. $x^2 + y^2 + xy = 4a^2 - \frac{x^2 y^2}{4b^2}$
   $xy = 4b^2$
10. $x^2 + y^2 + xy = 91$
    $x^2 - xy + y^2 = 31$

28. Дат је збир непознатих и њихов производ.

$$x + y = s \qquad (1)$$

$$xy = p. \qquad (2)$$

Разлика непознатих добија се, кад се лева и десна страна једначине (1) подигне на квадрат, па од тог резултата одузме

четворострука једначина (2) и још из последњег резултата извуче квадратни корен. Тако добијамо

$$x - y = \pm\sqrt{s^2 - 4p}. \qquad (3)$$

Из једначина (1) и (3) добијамо тада

$$x = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 4p}\right) \text{ и } y = \frac{1}{2}\left(s \mp \sqrt{s^2 - 4p}\right).$$

Због тога што у једначини (3) имамо два знака пред квадратним кореном, из једначине (1) и (3) може се образовати два система једначина. Отуда имамо и два пара решења:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4p}\right) \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}\right) \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4p}\right).$$

Видимо да се други пар решења добија из првог променом места. У датим једначинама могу x и y да промене места, а да се једначине ништа не измене.

Напомена. — Случај који смо у овом чланку проучавали, кад је дат збир непознатих и њихов производ, поред тога што се може решити методом замене, може се још брже и лакше решити применом Виетовог правила о вези између корена и коефицијената квадратне једначине. Можемо $x + y$ сматрати као збир, а xy као производ корена једне квадратне једначине

$$z^2 - sz + p = 0.$$

Њеним решењем добијамо

$$z = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Један корен је x, други y. Њихова размена даје други пар вредности.

За писмено вежбање

1. $x + y = 8$
   $xy = 15$
2. $x + y = 42{,}5$
   $xy = 1$
3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$
   $\sqrt{xy} = 12$
4. $x + y = 2a$
   $xy = a^2 - b^2$

5. $x + y = 3(a + b)$

$xy = 2(a^2 + b^2) + 5ab$

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$

$\frac{9}{xy} = 20$

7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$

$\frac{1}{xy} = \frac{a^2 - q^2}{ab}$

8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2\frac{1}{2}$

$xy = 1$

9. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{7}{24}$

$4 : \sqrt{x} = \sqrt{y} : 12$

10. $(x + 4)(y - 3) = 1$

$x + y = -1$

11. $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{y-2}} = \frac{3}{2}$ и $\frac{1}{\sqrt{(x+2)(y-2)}} = \frac{1}{2}$

29. Дата је разлика непознатих и њихов производ.

$$x - y = d \qquad (1)$$

$$xy = p. \qquad (2)$$

Образује се збир непознатих слично случају из претходног чланка.

$$x + y = \pm\sqrt{d^2 + 4p}. \qquad (3)$$

Потом из једначина (1) и (3) следује

$$x = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{d^2 + 4p} + d) \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{d^2 + 4p} - d).$$

И овде имамо два пара вредности:

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 + 4p} + d) \qquad x_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{d^2 + 4p} + d)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 + 4p} - d) \qquad y_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{d^2 + 4p} - d).$$

Напомена. — У овом случају x и y не могу да промене места.

За писмено вежбање

1. $x - y = 4$
   $xy = 45$
2. $x - y = -0{,}4$
   $xy = 0{,}44$
3. $x - y = 5a - 6b$
   $xy = 14a^2 - 3ab - 5b^2$
4. $(x + 4)(y - 3) = 9$
   $x - y = 1$

5. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{y}{3} - 5\right) = 6$

$\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 3$

6. $\frac{x+y}{y+4} \cdot \frac{x}{6-y} = 20$

$\frac{x+y}{y+4} - \frac{x}{6-y} = 1$

7. $\frac{1}{\sqrt{2\frac{5}{16} - y}} - \frac{1}{\sqrt{4{,}5 + x}} = \frac{11}{20}$

$\frac{1}{\sqrt{\left(2\frac{5}{16} - y\right)(4{,}5 + x)}} = 0{,}2$

30. Дат је збир непознатих и збир њихових квадрата.

$$x^2 + y^2 = a \qquad (1)$$

$$x + y = b. \qquad (2)$$

Кад једначину (2) подигнемо на квадрат и од резултата одузмемо једначину (1), добићемо двоструки производ непознатих:

$$2xy = b^2 - a. \qquad (3)$$

Кад од једначине (1) одузмемо једначину (3), добијамо квадрат разлике, а одатле и саму разлику

$$x - y = \pm\sqrt{2a - b^2}. \qquad (4)$$

Тада из једначина (2) и (4) следује

$$x = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{2a - b^2}) \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2}(b \mp \sqrt{2a - b^2}).$$

Имамо два пара вредности

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a - b^2}\right) \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a - b^2}\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a - b^2}\right) \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a - b^2}\right).$$

Овде је други пар вредности размењени први пар. И у овим једначинама могу x и y да промене места.

За писмено вежбање

1. $x^2 + y^2 = 265$
   $x + y = 23$
2. $x^2 + y^2 = 1{,}45$
   $x + y = 1{,}7$
3. $x^2 + y^2 = 10a^2 + 12ab + 10b^2$
   $x + y = 4a + 4b$
4. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 32$
   $x + y = 12$

5. $x + y = 0,89$ 6. $\frac{16}{x^2} + \frac{25}{y^2} = \frac{13}{36}$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,3$ $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{5}{6}$

7. $\sqrt{\frac{4x - 6y}{y - 2}} + \sqrt{\frac{14x + 8}{4 - y}} = 8$ $\frac{4x - 6y}{y - 2} + \frac{14x + 8}{4 - y} = 34.$

31. Хомогене квадратне једначине.—

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \quad (1)$$
$$3x + xy + 2y = 9. \quad (2)$$

Прва једначина овог система је *хомогена, јер су у њој сви чланови другог степена.*

Ако ову једначину (1) поделимо са y^2, добићемо

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 1 = 0. \quad (3)$$

Ову једначину можемо сматрати као квадратну по $\frac{x}{y}$. Њеним решењем добијамо

$$\frac{x}{y} = 1$$

и

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}.$$

Тако смо добили линеарне једначине

$$x = y \quad (4)$$

и

$$2x = y.$$

Довођењем у везу ових једначина (4) са једначином (2), добијамо системе

$$x = y$$
$$3x + xy + 2y = 9$$

и

$$2x = y$$
$$3x + xy + 2y = 9.$$

У првом случају имамо решења

$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{2}$ $x_2 = -\frac{5 + \sqrt{61}}{2}$

$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{61}}{2}$ $y_2 = -\frac{5 + \sqrt{61}}{2},$

у другом

$x_3 = 1$ $x_4 = -\frac{9}{2}$

$y_3 = 2$ $y_4 = -9.$

За писмено вежбање

1. $3x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$, $8x^2 + 5xy + 2y^2 = 20$
2. $10x^2 + 7xy - 3y^2 = 0$, $6x^2 - 5xy - 10y^2 = 1$
3. $x^2 - 6xy - 10y^2 = 30$, $2x^2 + 3xy - 15y^2 = 5$
4. $5x^2 - xy - 2y^2 = 8$, $4x^2 + xy - y^2 = 1$
5. $x^2 + xy + y^2 = 13$, $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 11$
6. $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, $2x^2 - 3xy - y^2 = 5$
7. $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 16$, $x^2 + 2xy - 3y^2 = 20$
8. $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29$, $7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43$
9. $x^2 + 5xy + 3y^2 = -3$, $x^2 + 3xy + 5y^2 = 53$
10. $7x^2 + 2xy + y^2 = 73$, $2x^2 - 3xy + 7y^2 = 199$
11. $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 108$, $x^2 - 3y^2 = 53$
12. $3x^2 + 2xy - 4y^2 = 69$, $x^2 + 2y^2 = 43$
13. $5x^2 + xy - 3y^2 = -4$, $2x^2 + 3xy = 104$
14. $x^2 + 3xy - 5y^2 = 208$, $xy - 2y^2 = 16$
15. $x^2 - xy + y^2 = 300$, $2x^2 - xy - y^2 = 500$
16. $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 108$, $4x^2 - 3xy + 2y^2 = 186$

32. Сложени задаци. — У примерима расправљаним у претходним чланцима јављају се увек два од ових облика: $x + y$, $x - y$, xy и $x^2 + y^2$. Ако се у неком задатку јаве три оваква облика, треба за два од њих увести нове непознате u и v, а трећи израз изразити помоћу u и v. Тада се задатак може свести на један од типова које смо већ проучили.

Пример.
$$\frac{x + y}{4 + xy} = \frac{1}{2} \quad (1)$$
$$\frac{x^2 + y^2}{3 + x^2y^2} = \frac{1}{3}.$$

Ставимо
$$x + y = u \quad (2)$$
$$xy = v.$$

Тада је
$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$

Заменом у датом систему добијамо

$$\frac{u}{4+v} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u^2 - 2v}{3 + v^2} = \frac{1}{3},$$

или
$$2u = 4 + v \qquad (3)$$
$$3u^2 - 6v = 3 + v^2.$$

За решење овог последњег система (3) применимо метод замене. Из прве једначине имамо

$$v = 2u - 4 \qquad (4)$$

Сменом у другој једначини имамо

$$3u^2 - 12u + 24 = 3 + 4u^2 - 16u + 16,$$

или
$$u^2 - 4u - 5 = 0.$$

Одавде добијамо

$$u_1 = 5$$
$$u_2 = -1.$$

Сменом ових вредности у једначини (4) добијамо
$$v_1 = 6$$
$$v_2 = -6.$$

Кад се вратимо на једначине (2), добићемо системе

$$x + y = 5$$
$$xy = 6$$

$$x + y = -1$$
$$xy = -6.$$

Решењем ових последњих система добијамо

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = -3$

$y_1 = 2 \qquad y_2 = 3 \qquad y_3 = -3 \qquad y_4 = 2.$

Као што видимо у овој једначини x и y могу променити места.

За писмено вежбање

1. $x + y = xy = x^2 + y^2$
2. $x - y = xy = x^2 + y^2$
3. $x^2 + y^2 = 45$, $\quad xy - 2(x + y) = 0$
4. $x^2 + y^2 + 7xy = 171$, $\quad xy = 2(x + y)$
5. $x^2 + y^2 - (x - y) = 20$, $\quad xy + x - y = 1$
6. $x^2 + y^2 - (x + y) = 22$, $\quad xy + x + y = 17$

7. $x^2 + y^2 - x - y = 22$, $\quad x + y + xy = -1$
8. $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 38$, $\quad xy + 3x - 3y = 25$
9. $x + xy + y = 29$, $\quad x^2 + xy + y^2 = 61$
10. $x + xy + y = -9$, $\quad x^2 + x^2y^2 + y^2 = 99$
11. $x^2 + y^2 - 8 = x + y = xy + 2$
12. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{30}$, $\quad x^2 + y^2 = 61$
13. $3(x + y) - xy = 5$, $\quad x^2 + y^2 + x^2y^2 = 179$
14. $x + y - 12 = \sqrt{x + y}$, $\quad x^2 + y^2 - xy = 76$
15. $x^2 + y^2 - (x + y) = 12$, $\quad xy - 2(x + y) = -8$
16. $x + y = xy$, $\quad \sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 3xy - 10$
17. $x + xy + y = 19$, $\quad x^2y + xy^2 = 84$
18. $x(1 + y) + y = -1$, $\quad x(x - 1) + y(y - 1) = 22$
19. $(1 + x)x - y(1 - y) = 14$, $\quad xy = 6x - 6y$
20. $y(y + 2) - x(2 - x) = 38$, $\quad xy - 25 = 2y - 2x$
21. $\sqrt{x - y} + 2\sqrt{3} = 1 + \sqrt{y}$; $\quad x + xy - y = 13$
22. $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} + 42$; $\quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$
23. $(x^2 + y^2) \cdot (x - y) = 195$; $\quad (x - y)^2 - \frac{177}{20} = \frac{x - y}{20}$
24. $\frac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = 41$, $\quad \frac{1}{xy} = 20$
25. $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 10$, $\quad \sqrt{xy} = 16$
26. $x^3 + y^3 = 189$, $\quad xy = 20$
27. $x^3 + y^3 = -91$, $\quad x + y = -1$
28. $x^3 - y^3 = 45$, $\quad x - y = 3$
29. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = 1$, $\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 19$
30. $x^3 + y^3 = 559$, $\quad xy(x + y) = 546$
31. $x^3 - y^3 = 387$, $\quad xy(x - y) = 120$
32. $x^3 - y^3 = 49(x - y)$, $\quad xy = x + y + 7$
33. $x + y + 3\sqrt{x + y} = 18$, $\quad x^3 + y^3 = 4401$

34. $x + \sqrt{x-y} = 6 + y$

$x^3 - y^3 = 208$

35. $\frac{3}{4}\sqrt{x-y} - \frac{5}{\sqrt{x-y}} = \frac{7}{4}$

$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 9$

36. $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{5}{2}$

$x^3 + y^3 = 152$

37. $\sqrt{\frac{5x-3y}{3x+3}} + \sqrt{\frac{3x+3}{5x-3y}} = 2$

$4x^2 - 9y^2 = 27$

38. $2x + \sqrt{xy} = 12a$

$2y + \sqrt{xy} = 30a$

39. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0{,}26xy$

$x + y = 0{,}6xy$

40. $x^2 + y\sqrt{xy} = 70$

$y^2 + x\sqrt{xy} = 105$

41. $x + xy = 8$

$x^2 + x^2y^2 = 40$

42. $(x^2+y^2)(x^3+y^3) = 247$; $x + y = 1$.

Проблеми II степена са две непознате

1. Збир основице и висине једног троугла је 33 cm. Површина тог троугла је 121 cm². (Ученик сам да постави питање!)

2. Збир катета једног правоуглог троугла је 34 cm. Хипотенуза је 26 cm.

3. Хипотенуза правоуглог троугла је 30 cm, површина 216 cm².

4. Дијагонала једног правоугаоника дугачка је 89 cm. Ако сваку страну правоугаоника скратимо за 3 cm, дијагонала новог правоугаоника биће 85 cm.

5. Хипотенуза једног правоуглог троугла дугачка је 65 cm. Ако већу катету продужимо за 7 cm, а мању скратимо за 17 cm, хипотетуза новог правоуглог троугла биће иста као и у претходном.

6. Дијагонала једног правоугаоника је 85 cm. Ако сваку страну повећамо за 2 cm, површина ће порасти за 230 m².

7. Кад спојимо средине узастопних страна једног правоугаоника, добијамо ромб чији је обим 52 cm, а површина 60 cm².

8. У једном правоуглом троуглу површина је 96 cm², а размера катета 0,75.

9. Две коцке стављене једна на другу имају заједничку висину 13 cm. Збир њихових запремина је 559 cm³.

10. Запремина једног правоуглог паралелопипеда је 2048 cm³, висина 8 cm, а дијагонала 24 cm.

11. У једном троуглу позната је страна $a = 13$ cm, збир $b + c = 22$ cm, угао $\alpha = 60^0$. Да се одреди b и c.

12. У једном троуглу позната је страна $a = 86$ cm, разлика $b - c = 44$ cm и угао $\alpha = 120^0$. Да се одреди b и c.

13. На крацима једног правог угла налазе се две тачке удаљене 120 сантиметара. Оне у исто време почну да се крећу ка темену угла, и то једна прелази за секунд 12 сантиметара, друга 13 сантиметара. После четири секунда удаљене су 52 сантиметра. Колико су ове тачке биле удаљене од темена пре почетка кретања?

14. Две тачке крећу се по крацима правог угла ка темену једнаком брзином. Пре почетка кретања једна тачка је удаљена од темена 270 cm (50), друга 189 cm (136,5). После 10 (7) секунада њихово међусобно отстојање је 169 cm (85), после 14 (9) секунада 109 cm (68). Колика је брзина обеју тачака?

15. По крацима једног правог угла почну да се крећу једновремено две тачке правцем од темена, и то једна брзином 23 cm, друга брзином 24 cm. Пре почетка кретања њихово међусобно отстојање било је 17 cm. После три секунда биле су удаљене једна од друге 116 cm. Колико су ове тачке биле удаљене од темена пре почетка кретања?

16. По крацима једног правог угла отпочну једновремено да се крећу две тачке чије је међусобно отстојање 61 cm. Прва, која за секунд прелази 5 cm, креће се ка темену, друга која у сваком секунду прелази 7 cm, креће се од темена. После 7 секунада њихово међусобно отстојање износило је 65 cm. Колико су ове тачке биле удаљене од темена пре почетка кретања?

17. На крацима једног угла од 60° налазе се две тачке A и B, чије је отстојање 31 cm. Ако се тачка A помери за 20 cm ка темену, њихово међусобно отстојање биће 21 cm. Колико су удаљене тачке A и B од темена?

18. По крацима једног угла од 60° крећу се две тачке ка темену угла. Прва је удаљена од темена 50 cm, друга 36 cm. После 3 секунда њихово међусобно отстојање је 31 cm, а четири секунда после овога је 13 cm. Којом су се брзином кретале тачке?

19. Збир квадрата два броја повећан за први број износи 205, повећан за други даје 200.

20. Производ два броја повећан за први број даје 72, а повећан за други даје резултат 70.

21. Кад се збир квадрата два броја подели првим бројем добије се количник 11 и остатак 1, кад се подели другим добије се количник 17 и остатак 4.

22. Ако један двоцифрен број поделимо производом његових цифара, добијамо количник 2. Ако цифрама променимо места, нови број има се према старом као 7 : 4.

23. Да се одреде два таква цела броја, да буде збир њихових реципрочних вредности 0,41, а збир њихових квадратних корена 9.

24. Збир квадрата два броја је 629, разлика квадратних корена иста та два броја је 3.

25. Два броја чији је производ 120, имају особину да овај производ остане непромењен, кад се један број повећа за 7, а други смањи за 7.

26. Известан двоцифрен број је 3 пута већи од производа његових цифара. Ако том броју додамо 18, збир ће имати исте цифре, само у обрнутом реду. Који је тај број?

27. Постоје два броја чији су збир, производ и разлика квадрата један другом једнаки.

28. Геометриска средина два броја је за 2 мања од њихове аритметичке средине, а њихов производ је за 44 већи од њиховог збира.

29. Вредност једног разломка постане за $\frac{1}{6}$ мања, кад бројилац и именилац повећамо за 1, а постане за $\frac{1}{2}$ већа, кад бројилац и именилац смањимо за 1.

30. Ако бројилац једнога разломка смањимо за 1, а именилац повећамо за 1, добићемо као резултат његову реципрочну вредност. А ако повећамо и бројилац и именилац за 1, добиће се разломак за $\frac{1}{6}$ мањи. Који је првобитни разломак?

31. Кад се број 720 подели једним, па затим другим бројем, биће један количник за 10 већи од другога. Ако се 720 подели са иста два броја повећана за 7, један количник ће бити само за 3 већи од другога.

32. Ако се један двоцифрени број подели производом његових цифара, добије се количник 5 и остатак 3. Ако цифре тог броја промене места и поново изврши исто дељење, добиће се 2 као количник и 5 као остатак.

33. Два пријатеља удаљена $30^{km}\,\frac{1}{3}$ иду један другом у сусрет и сретну се после $3\frac{1}{2}$ часа. Да би прешао цео пут потребно је једноме 1 час и 5 минута више времена, него ли другоме. По колико километара прелазе сваки на час?

34. Два лица удаљена 9 километара иду једно другом у сусрет. Пошто лице које сваког минута прелази 15 метара више, крене 25 минута доцније, сретну се тачно на средини пута. По колико метара прелази свако лице за минут?

35. Један капитал нарасте заједно са својим интересом за једну годину на 10 400 динара. Кад би капитал био за 5000 динара већи, а интересна стопа за 1% већа, тај исти капитал би за једну годину заједно са интересом нарастао на 15 750 динара, Колики је капитал и под којим процентом је пласиран?

36. Награду од 2 700 динара треба поделити на 8 радника квалификованих и неквалификованих. Квалификовани сви заједно добијају 1 800, а неквалификовани 900 динара. Сваки квалификовани радник добије 60 динара више од неквалификованог. Колико је било квалификованих, а колико неквалификованих радника?

37. Једна слика, у којој се, без рама, има дужина према ширини као 6:5, треба тако да се прецрта, да њена површина, заједно за рамом, који је свуда широк 10 m, изнесе 1,045 m^2. Колико треба да узмемо дужину и ширину?

38. Једна слика има без рама површину 735 m^2 и одговарајућу размеру страна 3:5. Са једним рамом, који је свуда исте ширине има површину од 1395 cm^2. Колика је дужина и ширина слике? Колика је ширина рама?

39 Ако редом спојимо средине страна правоугаоника, добићемо ромб, чији је обим 20 сантиметара, а површина 24 квадратна сантиметра. Колике су стране правоугаоника?

40 Имамо два правоугла троугла над истом хипотенузом. Разлика катета једног троугла износи 3 сантиметра, а код другог 7 cm. Колике су катете, кад је збир површина оба троугла 18 квадратних сантиметара?

41. Између тачака A и B чије је отстојање a, треба одредити две тачке C и D тако, да у низу тачака $ACDB$ буде и дуж AD са C и дуж CB са D подељена по златном пресеку, и то

1) у једном случају да буде већи отсечак AC, а у другом BD;

2) у оба случаја да буде CD већи отсечак.

42. Резултанта двеју сила, које делују под правим углом на једну тачку, износи $0,^{kg}5$. Колике су компоненте, кад је

1) њихов збир $8,^{kg}9$;

2) њихова разлика $4,^{kg}7$;

3) њихова размера 12:5?

43. У једној пропорцији је збир унутрашњих чланова 9, збир спољашњих 12, збир квадрата свих чланова 145. Како гласи пропорција?

44. У једној пропорцији је производ спољашњих чланова 30, збир свих чланова 24, збир њихових квадрата 170. Који су ти чланови?

ДЕО ДРУГИ

ГЛАВА VI

Аритметички редови

33. Редови. — Низ величина од којих се свака образује из претходне по једном истом закону зове се у математици *ред* или *прогресија*. Поједине величине у реду зову се *чланови реда*. Уопште се један ма који ред у математици овако обележава:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots a_n.$$

Број који казује које место по реду заузима један члан реда зове се *казаљка* или *индекс тога* члана. Први члан a_1 зове се још и *почетни члан*, n-ти члан a_n, где је n произвољан природни број, зове се још и *општи члан* реда.

Има редова код којих је број чланова коначан, одређен.

Има редова са бескрајно много чланова. Овакви редови зову се *бескрајни* редови.

Код коначних редова општи члан се зове још и *последњи члан*.

34. — Какве нарочите особине показују следећи низови бројева:

1	4	7	10	13 ....
27	23	19	15	11 ....
— 6	—4	—2	0	2 ....
5	2,5	0	—2,5	—5 .....

Аритметички ред, или аритметичка прогресија је ред у коме се сваки број образује из претходног додавањем једног сталног броја.

Овај стални број зове се *разлика реда*.

Ако почетни члан означимо са a_1, а сталну разлику са d, општи облик аритметичког реда изгледаће овако:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ \ldots\ldots\ a_1 + (n - 1)\,d.$$

Ако је разлика позитивна, сваки следећи члан биће већи. Ред се тада зове *растући*. Кад је разлика негативна, ред је *опадајући*.

35. Израчунавање општег члана. — Како је горе означено, видимо да је n-ти члан аритметичког реда

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Он се зове и *последњи члан*. Само треба имати у виду да се закон, по коме се образује аритметички ред, може применити и налево од броја a_1 и надесно од броја a_n.

Тако се ред може произвољно продужити на једну и на другу страну. Значи да се *појам почетног и последњег члана треба да сматра као релативан*. Тако се управо именују они чланови, између којих се налази ред, за који се ми у датом моменту интересујемо.

Пример. — Да се одреди двадесети члан реда

$$10, 5, 0, -5, -10, -15 \ldots\ldots$$

Применом горњег обрасца имамо

$$a_{20} = 10 + 19 \cdot (-5) = 10 - 95 = -85.$$

Двадесети члан горњег реда је — 85.

36. Израчунавање збира. — Ако саберемо све чланове почевши од једног одређеног почетног члана a_1, до једног одређеног последњег члана a_n, то овај делимични збир зовемо *збир* s_n *аритметичког реда.*

Да бисмо одредили овај збир, написаћемо испод делимичног збира, још једанпут тај исти збир, само обрнутим редом.

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \quad + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n,$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \quad + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1.$$

Сабирањем ова два реда добијамо

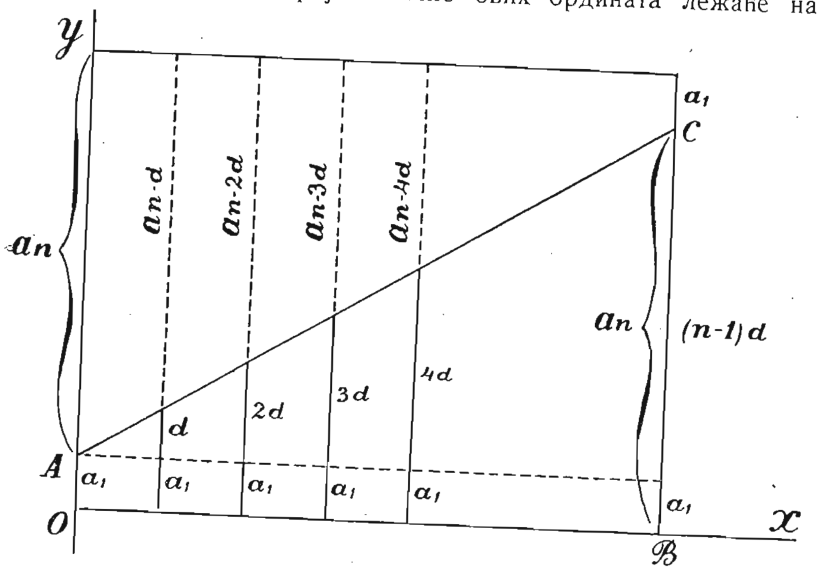
$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \ldots\ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

или
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Пример. Да се одреди збир 20 првих бројева природног бројног реда.

$$s_{20} = \frac{20}{2}(1 + 20) = 10 \cdot 21 = 210.$$

37. Графичко претстављање аритметичког реда. — Ако чланове аритметичког реда претставимо као ординате у тачкама 0, 1, 2, 3 .... крајње тачке ових ордината лежаће на



Сл. 11.

једној правој линији, која графички претставља ток аритметичког реда.

Из слике се одмах види да је последњи члан

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d.$$

Збир реда дат је збиром ордината. Ако трапез $A\,O\,B\,C$ окренемо око $A\,C$ добићемо један правоугаоник. Свака ордината је $(a_1 + a_n)$, па је због тога

$$2s = n\,(a_1 + a_n)$$

и

$$s = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

38. Пошто код једног аритметичког реда имамо пет врста величина a_1, d, n, a_n и s_n, а међу њима постоје само две једначине, то нам уопште морају бити дате три од ових величина, да бисмо помоћу ове две једначине могли да одредимо две непознате.

Код проблема обично се као непознате узимају почетни члан a_1 и разлика d, пошто се из ових величина могу остале лако израчунати.

39. Интерполација. — То је задатак да се између два дата броја a и b уметне, интерполира, аритметички ред, коме ће припасти и бројеви a и b. Ако треба интерполирати r чланова, онда ће заједно са a и b бити укупно $(r + 2)$ члана. Ако разлику реда који треба да добијемо обележимо са d, имаћемо однос

$$b = a + (r + 1)\, d.$$

Одакле је
$$d = \frac{b - a}{r + 1}.$$

Пример. Између бројева 2 и 5 уметнути 7 чланова, да заједно са 2 и 5 чине аритметички ред. Разлика траженог реда биће

$$d = \frac{5 - 2}{8} = \frac{3}{8}.$$

Тражени ред биће

$$2,\ 2\frac{3}{8},\ 2\frac{6}{8},\ 3\frac{1}{8},\ 3\frac{4}{8},\ 3\frac{7}{8},\ 4\frac{2}{8},\ 4\frac{5}{8},\ 5$$

или

$$2,\ 2\frac{3}{8},\ 2\frac{3}{4},\ 3\frac{1}{8},\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{7}{8},\ 4\frac{1}{4},\ 4\frac{5}{8},\ 5$$

За писмено вежбање

Да се одреди последњи члан и збир аритметичког реда, кад је познато

1. $a_1 = 3,\ d = 5,\ n = 32;\ a_1 = 4,\ d = 3\frac{1}{2},\ n = 28.$

2. $a_1 = \frac{2}{5},\ d = \frac{2}{15},\ n = 18;\ a_1 = 14,\ d = 1\frac{3}{8},\ n = 40.$

3. $a_1 = 18,\ d = 4{,}6,\ n = 41;\ a_1 = -63,\ d = 4\frac{1}{4},\ n = 27.$

4. $a_1 = 29,\ d = -3{,}5,\ n = 16;\ a_1 = -10,\ d = -8{,}8,\ n = 48.$

5. $a_1 = -8,\ d = 0{,}6,\ n = 19;\ a_1 = -2{,}1,\ d = -4,\ n = 200.$

У следећим примерима дате су по три величине, да се одреде две непознате.

6. $a_1 = 36,\ d = 0{,}45,\ a_n = 81.$
7. $a_1 = 8{,}4,\ d = -4,\ a_n = -71{,}6.$
8. $a_1 = -0{,}4,\ d = -0{,}7,\ a_n = -36{,}1.$
9. $a_1 = 26,\ n = 18,\ a_n = -42.$
10. $a_1 = -35,\ n = 15,\ a_n = 35.$
11. $a_1 = 5\frac{3}{4},\ n = 9,\ a_n = 29\frac{7}{8}.$
12. $a_1 = 4{,}6,\ n = 56,\ a_n = 32{,}1.$
13. $a_1 = 8,\ a_n = 25,\ s_n = 363.$
14. $a_1 = 3{,}4,\ a_n = 12{,}6,\ s_n = 400.$
15. $a_1 = \frac{7}{8},\ a_n = 15\frac{5}{12},\ s_n = 782.$
16. $d = 2{,}5,\ n = 39,\ a_n = -5.$
17. $d = 6{,}7,\ n = 17,\ a_n = 105{,}4.$
18. $d = -4,\ n = 41,\ a_n = 40.$
19. $d = 0{,}8,\ n = 36,\ s_n = 513{,}6$
20. $d = -6,\ n = 13,\ s_n = -48.$
21. $d = -2{,}4,\ n = 21,\ s_n = 21.$
22. $n = 50,\ a_n = 3\ \ s_n = 100.$
23. $n = 96,\ a_n = 4\ \ s_n = 240$
24. $n = 38,\ a_n = 37,\ s_n = 760$
25. $d = 0{,}5,\ a_n = 35,\ s_n = 600.$
26. $d = \frac{7}{24},\ a_n = 17,\ s_n = 84.$
27. $d = 3{,}5,\ a_n = 42,\ s_n = 252.$
28. $d = -1{,}5,\ a_n = 5{,}5,\ s_n = 213{,}5.$
29. $a_1 = 4,\ d = 8,\ s_n = 240.$

30. $a_1 = -3,\ d = \frac{5}{8},\ s_n = 119.$

31. $a_1 = -3{,}8,\ d = -1{,}6,\ s_n = -375{,}9.$

32. Да се графички претстави аритметички ред, чији је први члан 1, а разлика 0,5.

33. Да се графички претстави ред, чији је први члан 10, а разлика — 1,5.

34. Колики је збир s првих n непарних бројева? (Види Аритметику и Алгебру за III р. стр. 48, зад. 129!).

Овај збир је функција броја n. Шта је графички претставник те функције?

35. Колики је збир s првих n парних бројева? Претстави графички збир као функцију од n! (Види Аритметику и Алгебру за III р. стр. 48, зад. 130!).

36. Колики је збир s првих n природних бројева? Претстави графички s као функцију од n! (Види Аритметику и Алгебру за III р. стр. 48, зад. 131!).

37. Колики је збир свих бројева који су дељиви са p, почев од p до np?

38. Колики је збир 16 парних узастопних бројева, кад је први 16. Који је последњи међу њима?

39. Колики је збир првих 14 непарних бројева, који подељени са 4, дају остатак 3?

40. У једном аритметичком реду је први члан $2n + 5$, разлика $n + 3$. Колики је 6 члан и збир првих шест чланова?

41. У једном аритметичком реду је први члан — 19, други — 11. Колики је збир чланова од шестог до петнаестог закључно?

42. Пети члан једног аритметичког реда је — 10, двадесет шести је — 135. Колики је двадесети члан и збир првих 20 чланова?

43. Трећи члан једног аритметичког реда је 6, седми — 6, Колики је пети члан и збир првих 140 чланова?

44. p-ти члан једног аритметичког реда је r, q-ти је t. Колики је први, n-ти и збир од првих n чланова?

$$p = 3,\ q = 20,\ r = 11,\ t = 50,\ n = 101.$$

45. Збир другог, петог и шестог члана једног аритметичког реда је 9, збир трећег, четвртог, седмог и четрнаестог

члана је $18\frac{2}{5}$. Колика је разлика, збир првих 46 чланова и збир од петог до двадесетог члана закључно?

46. Збир четвртог и осмог члана једне аритметичке прогресије је 20, производ трећег и једанаестог члана је — 60. Који је тај ред? Колики је збир од првих шест чланова?

47. Збир трећег и десетог члана једне аритметичке прогресије је 24, производ првог и трећег је 20. Који је тај ред?

48. У једном аритметичком реду је збир првог и петог члана —4, производ другог и трећег је 12, збир свих чланова 224. Колики је први члан, разлика и број чланова?

Да се одреди аритметички ред, кад је

49. $a_5 - a_2 = 6$, $a_4 : a_1 = 3 : 2$ 50. $a_5 + a_4 = 20$, $a_3^2 = 49$ 51. $a_8 + a_3 = 0$, $a_4^3 + a_6^3 = 26$

52. Три броја чине растући аритметички ред, њихов је збир 27, а збир њихових квадрата 315. Који је тај ред?

53. Један аритметички ред има 6 чланова. Збир последња 4 износи 62, а производ првог и четвртог 70. Наћи тај ред.

54. Дат је аритметички ред, у коме је један члан једнак нули. Који је тај члан по реду?

55. Пет лица треба да поделе 100 динара, тако да њихови делови чине аритметички ред. Збир прва два дела треба да је једна трећина од збира друга три дела.

56. У једном аритметичком реду од 100 чланова збир свих чланова је 8 200, производ два средња члана је 6 723. Колики је први члан и разлика?

57. **Стари проблем.** — У рачуници Ахмеса, из времена старог Египта, око 1 700 г. пре Хр. р. налази се овај задатак:

100 хлебова треба поделити на 5 лица да њихови делови чине аритметички ред. $\frac{1}{7}$ онога што добију прва три треба да изнесе колико добију последња два.

58. Колико пута избије један часовник за 24 часа, кад

1. откуцава само целе часове;
2. откуцава $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ часа са 1, 2, 3 откуцаја, и испред целих часова избије још 4 пута?

59. Збир од више узастопних непарних бројева, чији је последњи члан за 20 већи од првог, износи 231. Који су ти бројеви?

60. Један аритметички ред има 100 чланова. Збир 1, 3, 5 до 99 закључно има се према збиру осталих чланова као 148:151. Оба крајња члана кад се саберу дају 299. Колика су ова два члана?

61. Збир 10 чланова једног аритметичког реда је 150. Збир трећег и петог односи се према збиру четвртог и седмог као 4 : 5. Који је тај ред?

62. Збир прва два члана једног аритметичког реда је 11, збир квадратних корена из првог и петог члана је 6. Колики је први члан, колика разлика и колики је збир првих n чланова?

63. Збир четири прва члана једног аритметичког реда је 10, збир њихових квадрата је 84. Који је тај ред?

64. Збир чланова једног аритметичког реда са самим позитивним члановима је 192, збир квадрата првог и осмог члана је 386, збир квадрата трећег и шестог члана је 306. Колики је први члан, разлика и број чланова?

65. У једном аритметичком реду нека је $a_1 = 1$, $d = 1$. Који члан је тада управо дванаести део збира свих претходних чланова?

66. Збир кубова петог и осмог члана једног растућег аритметичког реда је 2457, збир петог и осмог члана је 21. Колики је десети члан, и колики је збир првих 20 чланова?

67. У једном аритметичком реду са позитивним члановима и разликом $d = 0,5$ износи збир n првих чланова 81. Ако се овом дода збир следећа 4 члана, добије се 124. Колики је број чланова и почетни члан?

68. Збир пет чланова једног аритметичког реда са стварним члановима је 10, њихов производ 1440. Који су ти чланови? (Стави да је средњи члан x!)

69. У једном аритметичком реду од 12 чланова је производ првог и последњег 92. Производ средњих чланова је 572. Колики је први члан и разлика?

70. У једном аритметичком реду од 8 чланова је збир последња 4 члана 2 пута већи од збира прва 4, а производ

првог и петог члана је за 160 мањи од производа другог и шестог. Који је тај ред?

71. Између a и b треба уметнути r нових чланова, да заједно са a и b чине аритметички ред. Који је k-ти члан?

$$a = 4, b = 25, r = 6, k = 4.$$

72. Између свака два члана аритметичког реда, чији је почетни члан a_1, последњи члан a_n и у коме је број чланова n, треба уметнути r нових чланова, тако да нови уметнути и првобитни чланови чине један јединн аритметички ред. Колика је разлика новог посталог реда? Колики је збир свих његових чланова?

$$a_1 = 1, a_n = 21, n = 31, r = 4.$$

73. У реду

$$2, 5, 8, 11, \ldots\ldots$$

треба између првог и другог члана уметнути толико нових, да збир уметнутих чланова буде само за 1 мањи од збира 20 првих чланова главнога реда. Колико чланова морају бити уметнути и колика мора бити њихова разлика?

74. Један аритметички ред чија је разлика 2, има збир 66. Ако уметнемо између свака два члана овога реда још по један нов члан, збир ће бити 121. Који је тај ред?

75. Збир једног аритметичког реда, чија је разлика 4, износи 65. Ако уметнемо између свака два члана овога реда још по два нова члана, збир ће бити 169. Који је тај ред?

76. Да се докаже да логаритми појединих чланова реда

$$\frac{a}{x}, \frac{a^2}{x^2}, \frac{a^3}{x^3}, \frac{a^4}{x^4} \ldots\ldots$$

чине један аритметички ред. Да се израчуна збир првих 28 чланова овог аритметичког реда.

77. Разлике квадрата узастопних бројева чине аритметички ред. Зашто?

78. Разлике квадрата чланова сваког аритметичког реда чине један аритметички ред. Зашто?

79. Један кров састоји се из два равнокрака троугла и два равнокрака трапеза. Треба да се покрије плочама етернита. Свака од ове 4 површине има по 40 редова. У најмањем реду трапеза има места за 30 плоча, а у троуглу само за 1 плочу. У сваком следећем реду има места за једну плочу више. Колико је плоча етернита потребно?

80. Један чиновник има почетну плату 3000 динара и добија сваке друге године повишицу од 240 динара. Колику плату ће он примати у двадесетој години службе и колико је свега добио за 20 година?

81. Неко има 2 700 динара почетне плате и добије сваке године повишицу од 180 динара. Али и његови издаци расту годишње по 225 динара. Које године ће имати до потроши целу плату, ако се зна да је њему прве године било довољно 2 250 динара и колика му је плата те године?

82. При копању једног бунара плаћено је за први метар 120 динара, а за сваки следећи метар по 12 динара више. Колика је дубина бунара, кад укупни трошкови износе 5 040 динара? Колико је плаћено за последњи метар?

83. Један дужник се споразумео са својим повериоцем да дуг од 1 295 динара исплати у месечним ратама, од којих прва износи 60 динара, а свака следећа по 5 динара више. После колико месеци ће дуг бити исплаћен?

84. При једној коњској трци награде су тако одређене, да сваки следећи јахач добије 400 динара мање од претходног. Први добије 2 800 динара. Сви следећи заједно 7 200 динара. Колико је било јахача, и колико је добио последњи?

85. Динара 54 000 треба да се поделе на непаран број стипендија, које чине аритметички ред. Притом треба средња да износе 6 000 динара, а најнижа да буде половина највише. Колике су поједине стипендије?

86. Један стуб висине $7,^{m}43$ има при дну пречник $1^{m},06$, при врху $0^{m},85$. Састоји се из 7 једнако високих комада. Колики доњи и горњи пречник има четврти комад бројећи одоздо?

87. Висина једне праве купе подељена је на 40 једнаких делова и кроз подеоне тачке постављене су равни паралелне са основом. Колики је збир обима кругова које те паралелне равни отсецају на омотачу купе, кад је висина купе 80 *cm* и обим њене основе 180 *cm*?

88. Имам толико ораха, да од њих могу начинити потпун квадрат. Али ако хоћу да задржим први ред и број редова и да сваком реду додам по толико ораха да сваки следећи ред има по један орах више, потребно ми је још 28 ораха. Колико имам ораха?

89. Од две тачке чије отстојање износи 100 метара крећу се два тела једно другом у сусрет. Тело А пређе за секунд

3^m, а у сваком следећем секунду по $\frac{1}{3}\,m$ више. Тело B пређе у сваком секунду по 4 метра. Кад и где ће се срести?

90. Од две тачке чије је отстојање $484\frac{1}{2}\,m$ крећу се два тела A и B једно другом у сусрет. A пређе у првом секунду $5\,m$ и у сваком следећем $\frac{1}{2}\,m$ више, неголи у претходном; B пређе у првом секунду $19\,m$ и у сваком следећем по $\frac{1}{3}\,m$ мање неголи у претходном. Кад и на ком растојању од почетних тачака ће се срести?

91. Једно тело пређе у првом минуту 20 метара, затим у сваком следећем минуту по 2 метра више. Тако оде далеко 510 метара. Колико минута се тело кретало и колико је прешло у последњем минуту?

92. Једно тело пређе у првом секунду $1^m\frac{2}{3}$, у сваком следећем секунду за $\frac{1}{6}$m више. Тако се креће извесно време, затим још половину од овог времена, али сада прелази у сваком секунду за $\frac{1}{4}$ мање. На овај начин пређе свега $46^m\frac{3}{4}$. Колико се времена кретало ово тело?

93. По једној правој AB крећу се два тела у истом правцу, оба од тачке A. Оно што иде испред пређе у првом секунду 11 метара и у сваком следећем по 1 метар мање. Следеће отпочне своје кретање 3 секунда доцније и пређе у првом секунду 10 метара, а у сваком следећем по 1 метар више. Значи да ово задње тело мора да стигне оно прво негде у тачки B. Кад ће се ово догодити и колика је дужина AB?

94. По законима механике једно тело пређе при слободном падању у првом секунду $4^m,9$, а у сваком следећем секунду по $9^m,8$ више од претходног. Колики пут пређе тело у четрнаестом секунду, а колики за 14 секунада?

95. Ако величине у претходном задатку заокруглимо на 5^m и 10^m, колико је секунада потребно да тело пређе 1000 метара?

96. Једно пушчано зрно избачено је вертикално увис почетном брзином од 600 m. На којој се висини налази после 80 секунада?

97. После колико секунада ће се чути звук од камена пуштеног у једну јаругу дубоку 180 метара?

98. Колика је дубина бунара, када се звук од пуштеног камена чује после 5 секунада?

99. Узима се да је на дубини од 25 m температура непроменљива и одговара средњој годишњој температури места. Одавде температура расте на свака 33 метра по 1^0 C. Колика је температура на дубини од 200 m, од 500 m, од 1000 m, од 2400 m, у центру земље (6370 km), кад је средња годишња температура места 12^0 C?

На којој би дубини прокључала вода?

На којој би се дубини истопило олово (327^0), а на којој платина ($1\,775^0$).

100. Једна лопта котрља се по стрмој равни, која са хоризонталном равни гради угао $\alpha = 30^0$. Почетна брзина је $c = 4\,m$. Колика је брзина на крају петог секунда и колики је дотле пређени пут?

101. Низ једну стрму раван, чији је нагиб 0,25, котрља се лопта почетном брзином од 2 м у секунду. Са којом ће брзином проћи кроз место које је од полазне тачке удаљено $142^m,5$? ($g = 9^m,8$).

102. Два тела крену се у исто време из две тачке, које су удаљене 1 190 метара, једно другом у сусрет. Једно пређе у првом минуту $20\,m$ и у сваком следећем по $10\,m$ више. Друго пређе у првом минуту 90 m и у сваком следећем по 8 m мање. Кад ће се срести?

103. По обиму једнога круга крећу се две тачке A и B из истог места и у исто време, једна надесно, друга налево. A, крећући се једнако убрзаним кретањем, пређе у првом секунду један степен, и у сваком следећем по 1 степен више. B се креће једнаком брзином прелазећи у сваком секунду по 1 степен. Кад ће се ове тачке срести први пут, а кад другипут?

104. Да се одреде стране правоуглог троугла, кад оне чине аритметички ред и кад је обим $2s$.

105. Исто питање кад је место обима дата површина p.

106. Полупречник основе, висина и страна једне купе чине аритметички ред; запремина купе је 1 dm^3. Да се израчуна површина.

107. Одредити највећи број чланова природног бројног реда, чији збир не прелази 1000.

108. Наћи збир од 80 чланова арометичког реда, чији је општи члан $3n + 4$.

109. Наћи збир од 80 чланова аритметичког реда, чији је општи члан $10 - 3n$.

110. Збир од n чланова једног реда је

$$n^2 - 5n.$$

1. Образовати збир од $(n - 1)$ чланова.
2. Из ова два збира одредити n-ти члан.
3. Потом доказати да је ово аритметички ред.
4. Написати 8 чланова овога реда, одредити стоти члан и збир првих 100 чланова.

111. Показати да је ред, коме је збир од n чланова

$$7 - 2n^2,$$

један аритметички ред.

112. Бројеви 7, 43 и 124 могу бити чланови бескрајно много аритметичких прогресија. Да се одреди она прогресија, у којој ће разлика бити највећа.

113. Ако су бројеви a, b и c у аритметичкој прогресији, квадратна једначина

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

има увек стварне корене. Доказ!

114. У једном троуглу ABC, чија је основица $BC = a$, подељена је висина $AD = h$ на n једнаких делова. Кроз подеоне тачке повучене су паралелне са основицом. Над сваком од ових паралелних конструисан је навише по један правоугаоник висине $\frac{h}{n}$. Показати да ови правоугаоници образују један аритметички ред и одредити њихов збир. Колика је гранична вредност овога збира, ако пустимо да n бива све веће и веће, а напослетку да постане и бесконачно велико?

Геометриски редови

40. — Какву особину имају следећи редови:

$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \ldots\ldots$$

$$4 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \ldots\ldots$$

$$16 \quad -4 \quad 1 \quad -0{,}25 \quad 0{,}0625 \ldots\ldots$$

Геометриски ред или геометриска прогресија је такав ред, у коме се *сваки број образује из претходног множењем једним сталним бројем*. Тај стални број зове се *количник геометриског реда.*

Ако *почетни члан* реда означимо са a_1, *стални количник* са q, општи облик геометриског реда биће

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ a_1q^3, \ldots\ldots\ldots\ a_1q^{n-1}.$$

Ако је количник $q > 1$, сваки следећи члан биће већи од претходног. Геометриски ред је *растући*. Ако је $q < 1$, чланови реда ће бити све мањи. У том случају геометриски ред је *падајући*.

41. Израчунавање општег члана. —

Посматрањем појединих чланова општег реда који смо малочас написали види се да је n-ти члан

$$a_n = a_1\, q^{n-1}.$$

Пример. — Дат је геометриски ред

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16 \ldots\ldots$$

Да се одреди десети члан

Решење. — Десети члан одредићемо по обрасцу

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

или $$a_{10} = 1 \cdot 2^9 = (2^3)^3 = 8^3 = 512.$$

Десети члан датог геометриског реда је 512.

И овде се појмови *почетног члана* и *последњег члана* имају сматрати као *релативни*.

42. Израчунавање збира. — Ако саберемо све чланове почевши од једног почетног члана a_1 до последњег члана a_n, овај делимчни збир зове се *збир геометриског реда* и бележи се са s_n.

Да бисмо га израчунали, одузећемо га од истог тог делимичног збира помноженог са q,

$$q \cdot s_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$
$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots \quad + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

Одузимањем доњег реда од горњег добија се

$$q_1 s_n - s_n = a_1 q^n - a_1,$$

или

$$s_n(q-1) = a_1(q^n - 1).$$

Одавде је

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Пример. — Дат је геометриски ред

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16 \ldots\ldots$$

Да се одреди збир првих десет чланова.

Решење. — Збир првих десет чланова одредићемс по **обрасцу**

$$s_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{b - 1},$$

или

$$s_{10} = \frac{1\,.\,(2^{10} - 1)}{2 - 1} = (2^5)^2 - 1 = 32^2 - 1 = 1024 - 1 = 1023.$$

43. — Пошто се у геометриском реду јављају пет разних величина a_1, q, n, a_n и s_n, а између њих имамо само две једначине, то морају уопште узев, бити познате три од ових величина, да би се могле одредити две непознате. Ако је непознато n, има да се реши једна експоненцијална једначина.

При решавању проблема најпре се одређуу почетни члан и количник, пошто се из ових величина могу одредити сви остали чланови.

44. Интерполација. — То је задатак да се између два дата броја a и b уметне, интерполује, r бројева, да заједно са a и b чине геометриски ред.

Ако количник траженог реда означимо са q, и како ће укупан број чланова бити $r + 2$, то имамо једначину

$$b = a \cdot q^{r+1}$$

одакле је

$$q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Пример. Између бројева 1 и 27 уметнути два броја, да сви заједно чине геометријски ред.

Овде је $r = 2$, па ће бити

$$q = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Резултат је геометријски ред

1 3 9 27.

За писмено вежбање

У следећим задацима да се одреде величине које недостају, а потом да се напишу првих 5 чланова реда.

1. $a_1 = 3,\ q = 2,\ n = 7$
2. $a_1 = 4,\ q = -2,\ n = 10$
3. $a_1 = 2,\ q = \frac{1}{3},\ n = 10$
4. $a_1 = \frac{1}{128},\ q = 2,\ n = 11$
5. $a_1 = 500,\ q = \frac{3}{2},\ n = 17$
6. $a_1 = 256,\ q = -\frac{1}{2},\ n = 8$
7. $a_1 = \frac{3}{64},\ q = 4,\ n = 9$
8. $q = -2,\ n = 10,\ a_n = -4\,096$
9. $q = \frac{1}{2},\ n = 7,\ a_n = \frac{1}{4}$
10. $q = -0{,}3,\ n = 7,\ a_n = -0{,}000729$
11. $a_1 = 1,\ n = 25,\ a_n = 1\,000$
12. $a_1 = \frac{1}{8}\quad n = 6,\ a_n = 128$
13. $a_1 = 25,\ n = 6,\ a_n = 0{,}008$
14. $q = 2,\ a_n = 2\,500,\ s_n = 5\,115$
15. $q = -1{,}5,\ a_n = -243,\ s_n = -133$
16. $q = 0{,}2,\ a_n = 10^{-6},\ s_n = 1{,}25$ (приближно)
17. $q = 0{,}1,\ a_n = 1,\ s_n = 1\,111\,111$
18. $a_1 = 0{,}1,\ a_n = 100\,000,\ s_n = 111\,111{,}1$
19. $a_1 = 27,\ a_n = 8,\ s_n = 65$
20. $a_1 = 1\,024,\ a_n = 182{,}25,\ s_n = 709{,}85$
21. $a_1 = \frac{8}{81},\ a_n = 216,\ s_n = 323\frac{77}{81}$
22. $a_1 = -1\,000\,000,\ a_n = 0{,}001,\ s_n = -909\,090,909$
23. $a_1 = 0{,}2^{-3},\quad a_n = 0{,}2^3,\quad s_n = 156{,}248$
24. $a_1 = 0{,}01\quad q = 3\quad a_n = 21{,}87$ Stajić izvršio popravku IV. I
25. $a_1 = 39{,}0625,\quad q = -0{,}6,\quad a_n = 0{,}6561$
26. $a_1 = 1,\quad q = 0{,}8,\ a_n = -0{,}512$

27. $a_1 = \frac{4}{3}$ $q = 2$, $a_n = \frac{1}{384}$
28. $a_1 = 4{,}5$, $q = 2$, $s_n = 2\,299{,}5$
29. $a_1 = 243$, $q = \frac{1}{3}$, $s_n = 364$
30. $a_1 = -\frac{1}{217}$, $q = -5$, $s_n = 12$
31. $q = 0{,}1$, $n = 4$, $s_n = 9{,}990$
32. $q = -6$, $n = 5$, $s_n = 7\,777$
33. $q = -3$, $n = 5$, $s_n = 122$.

34. Које једначине треба решити, кад треба да се одреди
1. q и a_n из a_1, n и s_n;
2. a_1 и q из n, a_n и s_n?

За какве вредности n је ово само могућно?
3. Дато је $a_1 = 4, n = 3, s_n = 7$, колико је q и a_n?
4. Дато је $n = 3, a_n = -250, s_n = 310$, колико је a_1 и q?

35. Бројеви једнога низа имају особину да је сваки средња пропорционала (геометриска средина) између оба суседна. Доказати да је такав један ред геометриски ред.

36. Који је то геометриски ред
1) кад је a први, а b други члан;
2) кад је a први, а b четврти члан;
3) кад је a први, а b n-ти чан?

Да се одреде следећи збирови
37. $a^7 + a^6 b + a^5 b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ab^6 + b^7$
38. $a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ab^9 + b^{10}$
39. $a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots + ab^{n-1} + b^n$
40. $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5$
41. $a^8 - a^7 b + a^6 b^2 - a^5 b^3 + \ldots\ldots - ab^7 + b^8$
42. $a^{2n} - a^{2n-1} b + a^{2n-2} b^2 - \ldots\ldots + a^2 b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}$

43. У једном геометриском реду који се састоји из 5 чланова први члан је x^2, други $x\sqrt{xy}$. Како гласе остала три члана и збир свих чланова?

44. Први члан једног геометриског реда, који се састоји из 7 чланова је p^2, количник је $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Који је тај ред.

45. У једном геометриском реду је четврти члан 27, а седми 729. Који је тај ред?

46. У једном геометриском реду, који почиње са 4, је збир прва 3 члана 52. Који је тај ред?

47. У једном геометриском реду од 4 члана је збир првог и четвртог 36, а збир средњих чланова је 24. Који је тај ред?

48. Наћи збир геометриског реда од 10 чланова, у коме је збир другог и трећег члана 24, а збир петог и шестог 148.

49. У једном геометриском реду од 6 чланова је збир другог и претпоследњег члана 168, а њихов производ 972. Који је тај ред?

50. У једном геометриском реду збир другог и трећег члана је 12, количник првог и четвртог је 27.

51. У геометриском реду од 10 чланова производ првог и последњег је 64, а збир петог и шестог 20. Наћи тај ред.

52. Три броја чине геометриски ред. Њихов збир је 21, а производ 64.

53. У једном геометриском реду од 6 чланова збир прва три чланка је 13, а збир друга три члана је 351. Наћи тај ред и његов збир.

54. У једном геометриском реду је производ из 2 (2) и 3 (4) члана 5 000 (1 296), четврти (5) члан је 200 (16); колики је први члан, количник и збир првих 12 (5) чланова?

55. У једном геометриском реду је први члан 3, збир 3 и 5 члана 60, последњи члан је 192, Колико је q, n и s_n?

56. У једном геометриском реду је 2. члан 8, збир од 4 и 6 члана је 160, збир свих чланова 252. Колико је a_1, q, и n?

57. У једном геометриском реду је 3 члан 36, збир оба следећа члана 432, последњи члан је 324. Да се израчуна a_1, q, n и s_n.

58. У једном геометриском реду је 2 члан 6, разлика између 6 и 4 је 72, последњи члан је 192. Да се израчунају a_1, q, n и s_n.

59. У једном геометриском реду има се разлика 5 и 3 члана према разлици 3 и 2 као 6 : 1. Збир првих 5 чланова је 124. Колико је a_1 и q?

60. У једном геометриском реду износи збир 1 и 4 члана 27, збир 2 и 3 члана 18, збир свих чланова 381. Који је тај ред?

61. Збир прва 4 члана једног геометриског реда је 160, збир следећа 4 члана је 12 960. Који је тај ред?

62. Ако се одузме од збира првих 5 парних чланова једног геометриског реда, чији је количник 2, збир првих 5 непарних чланова, добија се 1 364. Колики је 14 члан?

63. У једном геометриском реду је збир првог и четвртог члана $9\frac{1}{3}\left(3\frac{14}{27}\right)$, а производ истих чланова $3\left(-7\frac{11}{27}\right)$. Одредити тај ред.

64. У једном геометриском реду од 5 чланова збир непарних чланова је 42, а збир парних 20. Како гласи тај ред?

65. Пет рационалних бројева чине један геометриски ред. Збир реципрочних вредности 2, 3 и 4 члана има се према 1 члану као 13 : 108. Производ из 1 и 2 члана је 12. Који су ти бројеви?

66. Кад се од првог и другог од три броја, од којих је други аритметичка средина првог и трећег, одузме 1, а трећем броју дода 1, добијају се прва три члана једног геометриског реда. Колики је збир од 5 до 14 члана геометриског реда, кад је збир 1 и 3 број 10?

67. Збир више бројева, који чине један геометриски ред са количником $\frac{3}{2}$, износи $\frac{65}{4}$. Ако чланове геометриског реда квадрирамо, постане један нов геометриски ред, чији је збир $\frac{1261}{16}$. Који су првобитни бројеви?

68. Да се уметну између бројева 1 и 2 једанаест нових чланова, тако да сви заједно граде геометриски ред. (Овај задатак има примену у акустици.)

69. Између првог и другог члана реда $\frac{5}{32}, \frac{5}{2}, 40$ да се уметне толико чланова, да њихов збир износе $2\frac{3}{16}$. Колики је њихов број, и који су ти бројеви? Исто толико чланова

да се уметне између $\frac{5}{2}$ и 40 и да се одреди збир свих чланова од $\frac{5}{22}$ до 40 закључно.

70. Број 155 да се растави на три позитивна броја, тако да они чине један геометриски ред у коме је трећи члан за 120 већи од првог, потом да се између свака два члана уметне по један нов, тако да нови ред буде такође геометриски.

71. Цифре једног троцифреног броја чине геометриски ред. Цифра на месту јединица, која је трећи члан тога реда, трећина је броја који граде прве две цифре. А број чије цифре иду обрнутим редом већи је за 594 од датог броја.

72. Стране једног троугла чине геометриски ред. Обим троугла је 35, а средња страна једнака је $\frac{2}{5}$ од збира највеће и најмање стране. Наћи стране троугла.

73. Проналазач шаха тражио је од индиског краља награду збир пшеничних зрна, који произилази, кад се на прво поље стави 1 зрно, на друго два зрна, на треће 4 зрна, на четврто 8 зрна итд. Колико *hl* износи овај збир, кад на 1 *hl* долази отприлике 1 500 000 зрна?

74. Из једног суда који садржи 18 *l* алкохола буду оточени 5 *l* и замењени са 5 *l* воде; после потребног мешања буду источени 5 *l* смеше и замењени са нових 5 *l* воде. Овај поступак понови се 12 пута.

1. Колико алкохола је остало у смеши?

2. Како ће изгледати решење задатка, кад се место 18, 5 и 12 узму опште ознаке a, b, n?

3. Колико % алкохола би напослетку садржала смеша, кад у почетку не би било 18 *l* чистог, већ 76 процентног алкохола и исти поступак се поновио 5 пута? (Види Аритметику за II р. стр. 125, пр. 6!)

75. Из једног бурета које садрже 1200 *l* вина источи се 20 *l* и замени са 20 *l* бољег вина. Овај поступак отакања и допуњавања треба толико пута да се понови, док буре најзад не буде садржало 300 *l* бољег вина. Колико пута се ово мора догодити?

76. 50 *l* неке течности садрже 4 *kg* кухињске соли. Ја доспем 10 *l* воде а од смеше оточим поново 10 *l*. Исти поступак

поновим свега 15 пута. Колико kg соли ће остати напослетку у смеши?

77. Направи се легура од 80 грама сребра и 33 g бакра. Од те легуре се одвоје 33 g, и замене са 33 g бакра. Овај поступак понови се 7 пута. Колико напослетку има сребра у легури од 80 грама и колико пута би се морао поступак да обнови, да би легура имала сребра мање од $1^0/_0$?

78. Један цилиндричан гвоздени штап полупречника 1 cm и 5 m дужине издужи се на 7 m дужине и отсеку 2 m; преосталих 5 m издужи се поново на 7 m и отсеку 2 m. Тако се настави 10 пута. Колико ће бити дебео штап напослетку и колику запремину има комад који је напослетку остао? Да са саберу запремине свих отсечених комада од 2 m и да се покаже да овај збир заједно са израчунатим последњим комадом даје запремину датог штапа.

79. 1) Запремина реципиента једног ваздушног шмрка је $a\ cm^3$. Запремина цилиндра са клипом је $b\ cm^3$. Колика ће бити густина ваздуха d_n после n потеза?

$a = 8000 \qquad b = 2600 \qquad n = 10.$

2) После колико потеза ће густина ваздуха бити d?

$a = 6000 \qquad b = 270 \qquad d = 0{,}267,$

3) После колико потеза ће барометарско стање спасти од 740 mm на $82^{mm},94$, кад је $a = 1200\ cm^3$, а $b = 250\ cm^3$.

80. Један град, који је пре 20 година бројио 60 000 становника, сад броји 100 000. Колико ће становника имати после даљих 45 година, ако претпоставимо да ће пораст становника остати исти?

81. При пењању увис атмосферски притисак опада у геометријској прогресији. На висини од 4000 метара атм. притисак је 470 mm. На морском нивоу је 760 mm. Начини једну табелу атм. притиска за сваких 100 метара висине!

82. Погађајући се са газдом слуга рече: Не тражим велику месечну плату. Платићете ми за први дан 1 пару, за други 2 паре, за трећи 4 паре итд., за сваки следећи дан двапута више од претходног дана. Колико је изнела та његова мала плата за месец дана? (Види Аритметику за I р. стр. 102, зад. 9!).

83. Наћи производ од n чланова једне геометр. прогресије.

84. Ако бројеви a, b и c чине геометриски ред, квадратна једначина

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

има два једнака корена.

85. Углови једног троугла чине геометриски ред. Најмањи износи $25^0\frac{5}{7}$. Колики су остали?

86. Одредити стране једног правоуглог троугла, кад се зна да чине геометриску прогресију.

87. У једном троуглу стране чине геометриски ред. Познат је обим $2s$ и средња страна b. Да се израчунају остале стране. Дискусија!

88. Ако је

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b},$$

бројеви a, b, и c чине геометриски ред.

89. Ако су бројеви

$$5 - x,\ 7 + x \text{ и } 17 - x$$

у геометриској прогресији, да се израчуна x.

90. Ако су бројеви a, x, y, b, у геометр. прогресији, покажи да је $x^3 + y^3 = ab\,(a + b)$!

91. Колико чланова реда

$$1,\ 2,\ 4,\ \ldots\ldots$$

треба сабрати, да збир пређе 1 000 000 000?

Спајање аритметичких и геометриских редова

92. Прва два члана једног аритметичког реда су x и y. Како изгледају следећа три члана?

Прва два члана једног геометр. реда су x и y. Како изгледају следећа три члана?

93. Један аритметички ред и један геометриски ред имају једнаке прве и друге чланове: Трећи члан геометриског реда је m пута већи од трећег чл. аритметичког реда. Да се одреде по 5 првих чланова оба реда,

$$a_1 = 4,\ m = \frac{25}{16}$$

94. Ако узмемо два броја x и y као прва два члана једног геометриског реда, то разлика између четвртог и трећег члана износи 16 (9). Ако се они сматрају као први чланови јед-

ног ариметичког реда, то је разлика између четвртог и другог члана 18 (8). Који су ти бројеви?

95. Један аритметички и један геометриски ред од све самих позитивних чланова имају исти почетни члан; разлика код првог једнака је количнику другога реда. Која су та два реда, кад је производ из другог члана геометриског реда и шестог члана аритметичког реда једнак 102 (5465, а производ од првог и петог члана геометриског реда једнак 324 (144)?

96. Један аритметички и један геометриски ред од по три члана имају једнаке средње чланове; даље је разлика првог реда једнака количнику другога. Збир од другог члана аритметичког и трећег члана геометриског реда износи 216, збир од трећег члана аритметичког и првог члана геометриског реда је 35. Како изгледају оба реда.

97. Ако се на прва четири члана једног аритметичког растућег реда додају редом бројеви 1, 8, 35 и 122, добијамо 4 величине, које образују један растући геометриски ред. Да се одреде оба реда.

98. Четири броја чине један геометриски ред. Њихови логаритми узети за основу 2 чине један аритметички ред са разликом 1 и збиром 22. Да се одреде та четири броја.

99. Код једном аритметичког реда је први члан 5, а разлика 2. Последњи члан једног геометриског реда, чији је количник 2, је толики колико 8 првих чланова аритметичког реда заједно, док је збир свих чланова геометриског реда за 3 мањи од збира 12 првих чланова аритметичког реда. Колико чланова има геометриски ред и који су?

100. Један аритметички и један геометриски ред имају исти почетни члан 8. Шести члан аритметичког реда једнак је трећем члану геометриског реда. Збир првих шест чланова аритметичког реда је за 96 већи од збира прва три члана геометриског реда. Како гласе оба реда?

101. Наћи три броја који чине аритметички ред, коме је разлика d, а да њихови квадрати чине геометриски ред.

102. Три броја чине геометриски ред. Ако други повећамо за 10, добијамо аритметички ред. Ако сад трећи повећамо за 80, ред постане поново геометриски.

103. Могу ли три иста број бити једновремено и у аритметичкој и у геометриској прогресији?

104. Од четири узастопна члана једног геометриског реда одузмемо 3, одн. 4, $5\frac{1}{2}$ и 8 и тако добијемо 4 узастопна члана аритметичког реда. Пронаћи чланове геометриског реда.

105. Кад четири узастопна члана аритметичког реда повећамо за 5, одн. 6, 9 и 15, добију се 4 члана геометриског реда Како гласи аритметички ред?

106. Од 5 бројева прва три чине један геом. ред, четири последња граде један ар. ред. Збир четири последња броја је 20, а производ другог и петог је 16. Који су ови бројеви?

107. Једанаест бројева чине један геометриски ред. Њихови логаритми за основу 10 чине један аритметички ред. Количник између последњег и првог члана геом. реда је 100. Збир аритм. реда је 33. Колики је први и последњи члан у оба реда? Колики је збир геометриског реда?

Бескрајни геометрисни радови

45. Питамо се да ли збир геометриског реда од n чланова

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots\dots\dots + a_1q^{n-1} = a_1\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

има какво значење, кад број n, односно број чланова расте неограничено.

Ако је $q > 1$, чланови збира постају све већи, уколико n више расте. Због тога и вредност збира бива све већа. Кад n бесконачно расте и q^n ће бесконачно расти, па и сам збир s_n.

46. Ако је $q = 1$, збир реда постаје

$$s_n = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + \dots\dots + a_1.$$

У збиру има бескрајно много једнаких чланова. Значи да је збир и у овом случају бескрајно велики.

47. Ако је $q < 1$, тј. неки прави разломак, биће сваки следећи члан све мањи. Кад се прави разломак степенује са 2, 3, 4... резултати ће бити све мањи, тј. q^n биће све мање и мање.

Кажемо кад је

$$0 < q < 1$$

и кад n бескрајно расте, q^n се бескрајно смањује, управо тежи нули.

Образац за збир

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

тада се приближава вредности

$$s = a_1 \cdot \frac{-1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Ово је образац за збир бескрајног геометриског реда.

Напомена. — Не треба губити из вида да овај образац важи само кад је апсолутна вредност броја q мања од 1.

Пример. Да се одреди збир бескрајног реда

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots$$

Имамо $$s = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

48. Конвергенција геометријских радова. — Кад се збир једног реда приближава једној коначној и одређеној граници, кажемо да је тај ред *конвергентан*. Ако се збир једнога реда не приближава никаквој коначној и одређеној граници, ред је *дивергентан*.

Геометријски ред је конвергентан, ако је $q < 1$, дивергентан, ако је $q > 1$ или $q = 1$.

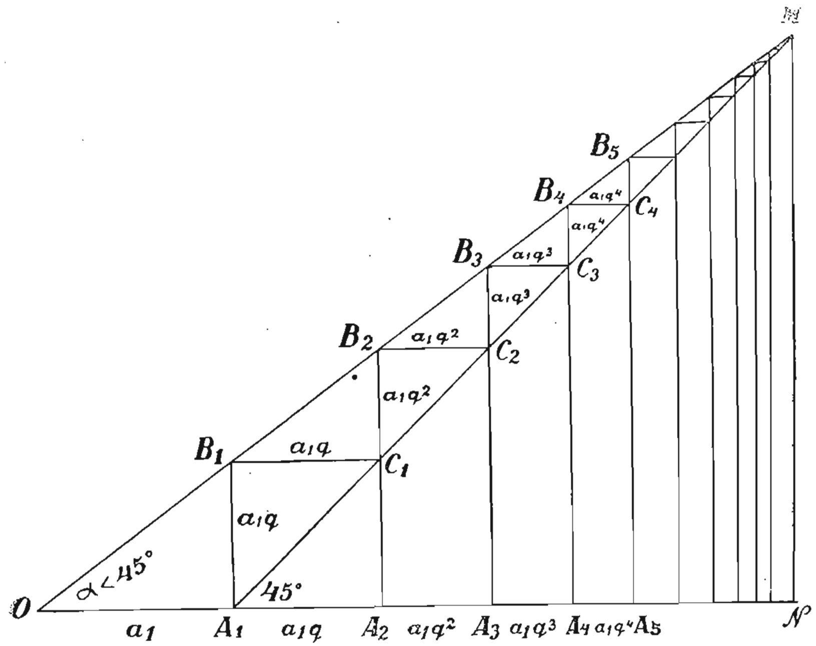
Шта ће бити, ако је $q = -1$?

Напомена. — Један бескрајан аритметички ред је увек дивергентан.

49. Графичко претстављање збира геометриског реда Миланковићев поступак. — Збир једног конвергентног реда може се овако графички претставити. На апсцисну осовину почев од координатног почетка пренесемо дужину $0A_1 = a_1$. У тачки A_1 подигнемо управну $A_1B_1 = a_1 q$. Повучемо праву $0B_1$. Угао α који ова права гради са апсцисном осовином одређен је једначином

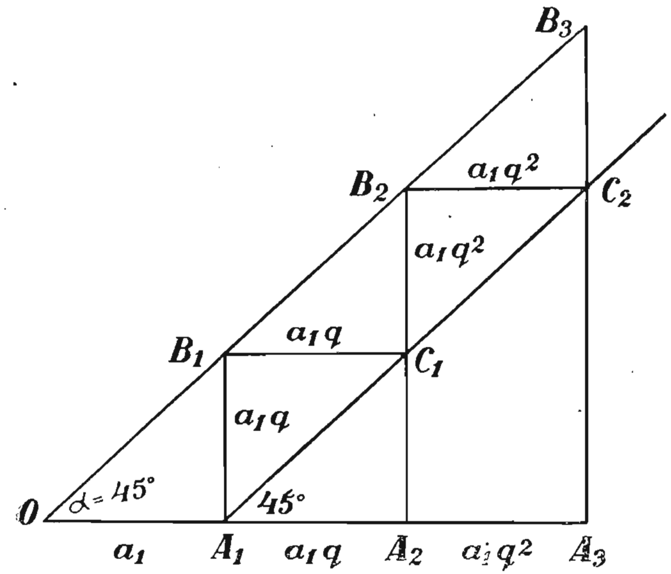
$$tang\,\alpha = q\,.$$

Повучамо B_1C_1 паралелно апсцисној осовини и удесимо да буде $B_1C_1 = A_1B_1 = a_1 q$. Повуцимо праву A_1C_1 до пресека M са правом OB_1. Права A_1C_1 захвата са апсцисном осовином угао од 45^0. Спустимо из M управну MN на апсцисну осовину. Тада је ON збир конвергентног геометриског реда. Доказ и детаљи виде се из слике 12.



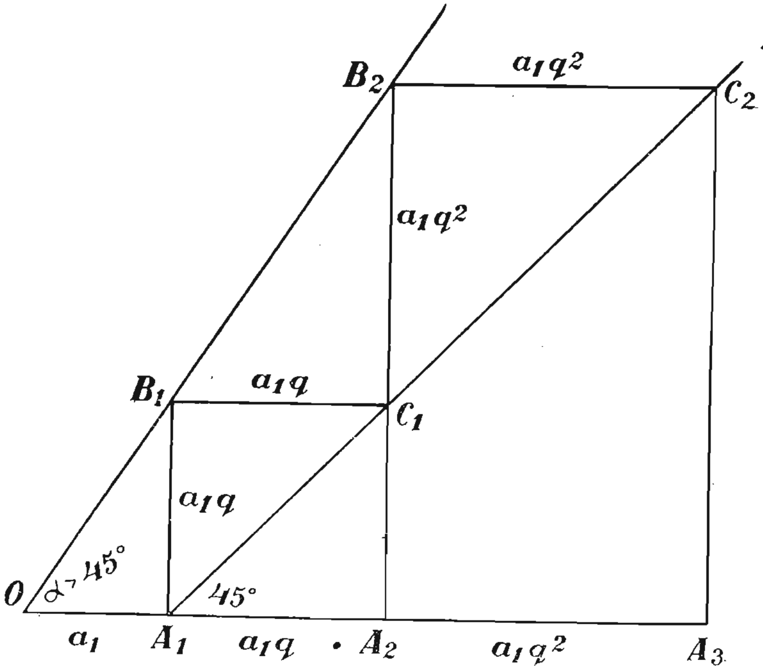
Сл. 12.

Ако је $q = 1$, угао α је 45^0. Праве OB_1 и A_1C_1 паралелне су. Ред је дивергентан. Сл. 13.



Сл. 13.

Ако је $q > 1$ праве OB_1 и A_1C_1 не секу се. Ред је дивергентан. Сл. 14



Сл. 14.

За писмено вежбање.

Да се одреде збирови следећих бескрајних редова:

1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\dots$ 2. $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\dots$

3. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots$ 4. $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\dots$

5. $6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\dots$ 6. $20+12+7\frac{1}{5}+4\frac{8}{25}+\dots$

7. $14+6+1\frac{5}{7}+\frac{24}{49}+\dots$ 8. $7+1{,}4+0{,}28+0{,}056+\dots$

9. $1-\frac{3}{7}+\frac{9}{49}-\frac{27}{343}+\dots$ 10. $2-\frac{3}{4}+\frac{9}{32}-\frac{27}{256}+\dots$

11. $17+17\cdot0{,}3+17\cdot0{,}3^2+\dots$ 12. $36-24+16-10\frac{2}{3}+\dots$

13. $18-15+12\frac{1}{2}-10\frac{5}{12}+\dots$ 14. $5\frac{4}{9}-1\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{3}{56}+\dots$

15. $5-\frac{80}{100}+\frac{1\,280}{10\,000}-\dots$ 16. $\sqrt{18}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\dots$

17. $5+\sqrt{5}+1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\dots$ 18. $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}+\dots$

19. 0,666...	20. 0,555...	21. 0,363636...
22. 0,999...	23. 4,727272...	24. 8,090909...
25. 0,189189...	26. 3,495495...	27. 5,216216...
28. 7,24032403...	29. 1,48264826...	30. 2,00270027...
31. 0,4333...	32. 6,5666...	33. 1,8999...
34. 9,74545454...	35. 0,266363...	36. 3,088181...
38. 0,12234234234...		38. 0,86351351...

39. $1+x+x^2+x^3+\dots,$ кад је $x<1$.

40. $1-x+x^2-x^3+\dots,$ кад је $x<1$.

41. $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\dots,$ кад је $x>1$.

42. $\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^4+\dots,$ кад је $b>a$.

43. Колики је збир бескрајног геометриског реда

$$1+0{,}9+0{,}81+\dots?$$

Од ког члана надаље је збир већи од 9,99?

Од ког члана надаље су чланови мањи од 0,000001?

44. У једном бескрајном геометриском реду је збир свих чланова 10, збир квадрата свих чланова 25. Који је тај ред?

45. Од једне дужи a узме се $\frac{1}{3}$, од остатка поново $\frac{1}{3}$ итд. Показати да је збир свих ових делова једнак a и да се исто тако добија a, кад се од дужи отсецају увек $\frac{2}{3}$.

46. 1) Из једне тачке на једном краку једног угла од 60° спуштена је управна на други крак; из подножне тачке ове нормале спуштена је поново нормала на први крак итд. Колики је збир свих нормала, кад је прва нормала једнака a?

2) Како изгледа кад је прва нормала једнака a, а угао α?

3) Како изгледа решење, кад угао није познат, али прва нормала је једнака a а друга b?

47. 1) Једну дуж дужине a поделимо по златном пресеку и задржимо већи комад. Мањи комад поново поделимо по златном пресеку и одатле узмемо већи комад и ставимо га у продужетку већ раније узетог комада. С мањим поступимо на исти начин и тако продужимо даље. Колики су поједини комади, и зашто збир свих даје поново a?

2) Како изгледа решење, ако увек задржимо мањи комад, а већи даље делимо по непрекидној пропорцији?

48. Један круг полупречника r додирује две тангенте, чија је просечна тачка од центра круга удаљена за a. У затвореној површини између тангената и кружне периферије уписан је круг који додирује ове границе. У сад преосталој површини поново је уписан један круг итд. Да се израчуна збир полупречника ових кругова и збир њихових површина.

49. У једном правоуглом троуглу повучена је паралелно са једном катетом дужине a на остојању h једна трансверзала дужине b, тако да се отсече један трапез. Од остатка отсечемо једном трансверзалом паралелном са b један други трапез, који је сличан првоме. Исто тако отсечемо од остатка један трећи сличан трапез итд. Да се израчунају дужине ових трансверзала, висине трапеза и збир површина свих трапеза. Затим да се покаже да је овај збир површина једнак површини троугла.

50. У један круг полупречника r упишемо један квадрат, у овај квадрат поново круг, у овај круг поново квадрат итд. до центра. Колики је

1) збир полупречника свих ових кругова;
2) збир свих кругова, без датог круга;
3) збир свих квадрата?

51. Десно од једне коцке са ивицом a ставимо једну другу коцку, тако да им се суседне стране додирују. Десно од ове поново једну итд. али њихове ивице изаберем тако да њихове горње ивице све леже у једној равни, која земљу сече на отстојању b од прве коцке.

1) Колике су ивице ових коцки?

2) Која је по реду коцка по запремини мања од v, кад је $v = 1cm^3$, $a = 1m$, $b = 10m$?

3) Колики је збир свих коцки?

52. Колики је збир једног бескрајног падајућег геометриског реда, код кога је производ прва три члана 1728, а збир трећих степена ова 3 члана је 15 768. Како гласи ред?

53. Колики је збир једног бескрајног геометриског реда са позитивним рационалним члановима, кад је збир 1. и 3. члана 20, збир 1. и 5. члана 172. Који је то ред?

54. У једном квадрату чија је страна 10 cm уписан је други квадрат, тако да темена другог полове стране првог квадрата. У другом квадрату је уписан трећи на исти начин итд.

1. Да се одреди обим дванаестог кквадрата.

2. Да се израчуна збир обима и збир површина свих бескрајно много уписаних квадрата.

55 Да се предходни задатак реши за равностран троугао
56. Исто за правилан шестоугао.

57. Ахил и корњача. Скептик Зенон (500 г. пре Хр.) покушавао је да исмеје математичке радове својих противника Питогорејаца следећим посматрањем.

Брзоноги Ахил гони корњачу која се налази испред њега за 1 корак. Не може никад да је стигне, јер док он стигне на њено место, она је већ отишла даље. Док стигне на њено друго место, она је поново мало измакла итд. Увек ће корњача бити испред Ахила, иако је он њој све ближи.

Ако њихову прву раздаљину обележимо са a, и ако је брзина корњаче n пута мања од брзине Ахила, да се одреди

1. пут који пређе корњача док је Ахил не стигне;
2. пут који би Ахил прешао за то време;

3. грешка при закључивању. (Упореди овај задатак са задатком поклапања казаљки на часовнику!)

ГЛАВА VII

Сложен интересни рачун

50. — Кад се интерес од једног издатог капитала крајем године дода капиталу, тако да идуће године доноси интерес тако увећани капитал и кад се и следећих година поступи на исти начин, каже се да је капитал издат под интерес на интерес.

Треба да се израчуна на колико нарасте капитал k заједно са интересом и интересом на интерес за n година по $p\%$.

Ако вредност капитала заједно са интересом на крају прве године обележимо са K_1 то је

$$K_1 = k + k\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k \cdot q,$$

при чему смо израз $1 + \frac{p}{100}$ ради краткоће обележили са q. q се зове *интересни чинилац.*

У току једне године капитал дакле постане q пута већи.

Ако обележимо са $K_2, K_3, K_4, \ldots Kn$ вредност капитала заједно са интересом на интерес на крају 2, 3, 4 ..... n-те године, то је

$$K_2 = K_1 \cdot q = k \cdot q \cdot q = k \cdot q^2$$
$$K_3 = K_2 \cdot q = k \cdot q^2 \cdot q = k \cdot q^3$$

и слично томе

$$K_4 = k \cdot q^4$$
$$K_5 = k \cdot q^5.$$

Уопште је ....

$$K_n = k \cdot q^n,$$

тј. један капитал издат под интерес на интерес је на завршетку n-те године q^n пута већи неголи на почетку.

Из обрасца се може обрнуто да израчуна k, или q (па из тога и p), или n.

По овом обрасцу израчунава се приращтај становника једнога града, повећање дрвета у шуми и све величине које расту у сталној размери.

За писмено вежбање

1. Колики је интересни чинилац, кад је проценат 3; 3,5; 4,5; 5,5?

2. Колики је процент, кад је интересни чинилац 1,03, 1,035, 1,045, 1,06?
3. На коју суму нарасте 1 динар по 4(5)% за 5, 10, 15, 20 година?
4. На које суме нарасту следећи капитали, издати под интерес на интерес.
   1) 12 600 дин. по 4% за 27 година;
   2) 31 800 дин. по $3\frac{1}{2}\%$ за 40 година;
   3) 53 000 дин. по $4\frac{3}{4}\%$ за 21 годину;
   4) 91 500 дин. по 3% за 8 година?
   5) 45 000 дин. по 5% за 10 година?
5. На коју суму би нарасла 1 пара, која би била издата под интерес на интерес од рођења Христова, по 4% до краја 1935 године?
6. Један капитал је издат по 4% за 10 година под интерес на интерес; по колико процената би требао да буде издат под прост интерес, да би на толику исту суму нарастао?
7. На коју ће суму нарасти 81 000 д. по 4% за 15 година, кад се капиталисање врши полугодишње?
8. 65 000 динара пласирани су под инт. на инт. по $3\frac{1}{2}\%$. Половина се капиталише годишње, а половина полугодишње. На коју ће суму нарасти после 8 година?
9. Сума од 43 000 издата је под инт. на инт. по 4%. На коју ће суму нарасти после 10 година и 6 месеци? На коју после 12 година и 9 месеци?
10. Неко се обавеже да свом брату исплати, кад постане пунолетан (21 година) 45 000 динара. Због тога он намерава да уложи одговарајући капитал у банку под интерес на интерес по 4%. Колики се капитал мора уложити, кад је брату сад 16 година?
11. После 8 година има неко да плати 120 000 динара; колико би сад морао да плати, кад се рачуна интерес на интерес по $3\frac{1}{2}\%$?
12. Колику садашњу вредност имају 150 000 динара, које треба платити после 5 година по 3%?

13. Једна шума, која се повећава годишње за 4%, има сада 2 000 000 m^3 Колико m^3 је имала она пре 7 година, и колико ће имати после даљих 9 година?

14. За једну машину тражено је 45 000 динара у готову, 30 000 динара после 2 године и 30 000 динара после 4 године. Колика је садашња вредност машине, кад се рачуна са 5%?

15. За једно пољско добро нуди лице A 280 000 динара у готовом новцу; лице B нуди 80 000 динара у готову и још 3 пута по 80 000 динара после сваке треће године. Која је понуда повољнија, кад се рачуна $3\frac{1}{2}$%?

16. Ја хоћу да исплатим један дуг платив у готову 37 500 и од 45 000 динара чији је рок тек после 8 година једним јединим плаћањем после 3 године. Колико износи ово плаћање, кад се рачуна са 3%?

17. Под којим процентом стоје 225 000 динара, кад су за 10 година нарасли на суму од 375 000 динара.

18. За један посао изда неко 375 000 динара и добије натраг после 6 година 960 000 динара. Колико % износи просечно годишња добит на том послу?

19. Становништво једнога града је порасло за 15 година од 85 200 становника на 95 100; колико % је просечно износио годишњи пораст становника?

20. По колико % морају бити издати 104 400 динара, да они после 12 година порасту исто толико, колик 120 000 динара по $3\frac{1}{2}$% за 10 година?

21. Једна шума, која је измерена пре 7 година и имала тада 650 000m^3 дрва, показује сада 815 000m^3. Колико ће имати после даљих 10 година?

22. Један град бројио је 8 540 становника; после 20 година бројио је 10 870 и после даљих 15 година 13 360 становника. Да ли је пораст становника у овим размацима времена био исти?

23. Колико времена се морају издати 108 450 динара, да по 4% нарасту на 150 000 динара?

24. Становништво једнога града који сад броји 87 400 становника, досада се је годишње повећавало за 2,1%. Кад ће нарасти на 100 000 становника, ако претпоставимо да рашћење остане исто?

25. Неко остави 480 000 динара са наређењем да се интерес додаје капиталу све дотле, док не буде могућно да се из годишњег интереса додељују 5 стипендија по 7 500 динара. После колико времена ће ово моћи да буде, кад је капитал издат по 3%?

26. За које ће се време један капитал *a*) удвојити; *b*) постати 3 пута већи; *c*) $1\frac{1}{2}$ пута већи; *d*) 100 пута; *e*) 1000 пута већи, кад је издат по 3%; или по 4%; или по $4\frac{1}{3}$%, или по 5%?

27. Један капитал од 63 500 динара издат је по $4\frac{1}{2}$%; кад ће он стићи капитал од 80 000 динара, који је у исто време издат по 3%?

28. За колико година ће један капитал од 40 975 динара постати исто толико велики, као капитал од 63 118 динара за 9 година, ако у оба случаја рачунамо $3\frac{3}{4}$%?

29. Једн град који сада броји 120 000 становника имао је пре 20 година само 65 000 становника; после колико ће година, рачунајући од сада, имати 150 000, ако све околности остану исте. Пре колико година је имао 100 000 становника?

30. Од једног капитала издате су $\frac{2}{3}$ по $3\frac{1}{2}$% и $\frac{3}{5}$ по $4\frac{1}{2}$%; после 15 година био је нарастао на суму од 54 000 динара. Колики је био првобитно?

31. Од једног капитала који је 10 година издат по 4% одузето је после овог времена 8000 динара и издато по $4\frac{1}{2}$%, док је остатак и даље остао по 4%. По истеку даљих 12 година износио је укупни капитал 32 740 динара. Колики је био у почетку?

32. Од једног дуга од 47 778, за који је неко морао да плаћа по 5%, платио је он после 5 година 15 456 динара и после 8 година 20 988 динара. Колики је остатак дуга кад се рачуна интерес на интерес.

33. Неко дугује 34 000 динара да плати у готову, а 76 500 да плати после 10 година. Кад може он целу суму од 110 500 динара одједанпут да плати, кад се рачуна *a*) 4% простог интереса, *b*) 4% интереса на интерес?

34. А има пласираних 324 000 динара по $3\frac{1}{2}$%, *B* 180 хиљада динара по $4\frac{1}{2}$ После колико година ће имати подједнако? 2) После колико година би В имао два пута више од А? 3) На које суме је у оба случаја нарасла имовина лица А и лица В?

35. Неко преда штедионици 27 000 динара и додаје припадајући годишњи интерес капиталу уз $2\frac{1}{2}$%. На почетку 7 године изузме од тога 8 100 динара; али 4 године доцније могаде он додати поново толику суму, да је за наредних 10 година уложена сума толико нарасла, као да почетни капитал није ни диран. Колико износи онај додатак?

36. Једној штедионици предата су 500 динара 2 јануара 1870 и 400 динара 2 јануара 1880. Кад је све то нарасло на динара 1871,76, кад се рачуна интерес на интерес по $3\frac{1}{2}$%?

Капитал са годишњим повећавањем или смањивањем

51. — При овом треба на то добро пазити, да ли се промена од *a* динара збива на почетку или на крају године. Да бисмо у сваком случају исправно рачунали, не треба користити никакав образац, већ у сваком задатку размишљати, како ће се видети из следећих примера. При томе може се радити и са посебним бројевима.

Пример 1. Један капитал од *k* динара издат је под интерес на интерес по p%. Њему ће се додавати још крајем сваке године по *a* динара. Колика ће бити крајња вредност *K* по истеку *n* година?

Решење. Капитал на почетку 1 године износи k
на крају 1 године $k \cdot q + a$
на крају 2 године $k \cdot q^2 + aq + a$
(q пута већи него на крају прве више a).
на крају 3 године $k \cdot q^3 + aq^2 + aq + a$
....

на крају n-те г. $k \cdot q^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots\ldots + aq^2 + aq + a$. Чланови

$$aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots\ldots + aq^2 + aq + a$$

образују један геометриски ред (ту написан обрнутим редом) коме је почетни члан *a*, количник *q*, број чланова *n*, од нултог до $(n-1)$ степена од q. С тога је

$$K = kq^n + \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Пример 2. Један отац остави иза себе својој деци имовину од 240 000 динара, која је пласирана под интерес на интерес по 5%. Било је четворо деце. Свако дете добија у почетку сваке године по 4 500 динара из наследства. По колико ће свако дете добити на крају 10 године, пошто после овога времена наследство треба да се подели на једнаке делове.

Решење. — На почетку сваке године смањује се уложна сума за $a = 4 \cdot 4\,500 = 18\,000$ динара; интересни чинилац је $q = 1{,}05$.

Капитал на почетку прве године $240\,000 - 18\,000$
„ „ „ друге „ $240\,000q - 18\,000q - 18\,000$
„ „ „ треће „ $240\,000q^2 - 18\,000q^2 - 18000q - 18\,000$.

Капитал на почетку 10 године $240\,000q^9 - 18\,000q^9 - 18\,000q^8 - \ldots\ldots - 18\,000q - 18\,000$.

Капитал на крају 10 године
$240\,000q^{10} - 18\,000\,(q^{10} + q^9 + q^8 + \ldots\ldots + q^2 + q)$.

У загради имамо један геометриски ред чији је почетни члан *q*, колииник *q*, и број чланова 10 (од 1 до 10 степена), с тога је

$$K = 240\,000q^{10} - 18\,000 \cdot \frac{q\,(q^{10} - 1)}{q - 1},$$

$$\text{или } K = 240\,000q^{10} - 18\,000 \cdot \frac{1{,}05\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05}.$$

$$K = 153\,216 \text{ динара.}$$

Ово је капитал после 10 година, с тога свако дете добија при деоби 38 304 динара.

За писмено вежбање

1. Један радник уштеђује годишње по 2 250 динара и ту суму даје крајем сваке године у штедионицу. Колика ће му бити уштеђевина на крају 30 године? Штедионица даје 4% интереса.

2. Неко улаже почетком сваке године у штедионицу по 6 300 динара. На колико му нарасту ови улози на крају 20 године, кад штедионица плаћа 5%?

3. Неко улаже крајем сваке године у банку по 1 000 дин. Банка плаћа 4% и капиталише сваких 6 месеци. Колико ће имати да прими после 24 године?

4. Колики је један капитал од k динара издат по $p\%$ интереса на интерес на крају n-те године, кад се

1) на почетку сваке године додаје по a динара;
2) на завршетку сваке године одузима по a динара?

5. На 72 000 динара додаје неко крајем сваке године још 6 480 динара. Колико има он после 10 година, кад се рачуна 4% интереса на интерес?

6. Неко дугује 161 000 динара и отплаћује годишње по 7 000 динара. Колико је још дужан после 15 година, кад се рачуна интерес на интерес по $3\frac{1}{2}\%$?

7. Неко се обавеже да свом 12-годишњем брату плаћа интерес $4\frac{1}{2}\%$ на суму од 108 000 динара до његовог пунолетства (21 године) и тада да исплати капитал. Колико има млађи брат да потражује по достигнутом пунолетству, кад је за његово издржавање и васпитање у почетку сваке године узимано по 7 800 динара?

8. Колика је сума осигурања код једног осигуравајућег друштва улогом од 2 400, који је плаћан почетком сваке године, кад треба да се исплати после 20 година, а рачуна се 4%?

9. Неко осигура свој живот у 23 години старости на 60 000 динара и плаћа у почетку сваке године премију од 1 350 динара. Да ли осигуравајуће друштво губи или добија, ако осигурани умре после навршене 49 године, и колико?

10. Колико се сме узимати почетком сваке године од суме 16 500 динара да би после 16 година преостало још 20 000? Процент је 4.

11. Колико мора неко почетком сваке године додавати на 28 000 динара, да би по истеку 12 година имао 140 000 динара? Процент је 4.

12 Из једне шуме од 37 000m^3 дрва, која се годишње повећава за $5\frac{1}{2}\%$, треба годишње толико дрва да се посече, да се у року од 14 година количина дрва попне на 45 000m^3. По колико се може сећи?

13. Колику суму треба уложити у једну штедионицу, да би годишњим додатком од 4 500 динара за 15 година при 4% порасла на 180 000 динара? Додатак се збива на почетку сваке године, а штедионица додаје интерес капиталу крајем сваке године.

14. Колику је суму један отац уложио у штедионицу на дан рођења своје кћери, кад је додавањем сваког рођендана још по 1 200 динара после 18-ог додатка имовина кћери износила 33 957 динара? Процент $3\frac{1}{2}$.

15. Колико времена се мора додавати на 56 000 динара крајем сваке године још по 4 200 динара, да се добије 119 000 дин. при $4\frac{1}{4}\%$?

16. Једна општина има фонд за грађење школе укамаћен по 4% коме она сваке године 1 јануара додаје по 35 000 динара. 1 јануара 1912 године био је овај фонд, рачунајући интерес и додатак који приспева ове године, нарастао на 710 000 динара. Кад ће фонд заједно са интересом и додацима нарасти на суму од 1 600 000 динара. Колики је прорачун за изградњу школе?

17. За једно осигурање живота од 20 000 динара плаћа неко годишњу премију од 748 динара почетком сваке године. После колико година је он стварно уплатио осигурану суму?

18. Један капиталист, чија је имовина 9 000 000 динара, добија годишње од свог новца 5% интереса, а потребно му

је за кућни трошак 127 500 динара. Колико он има после 12 година и кад ће имати 15 милиона динара?

19. Лице А има под интересом на интерес 20 000 динара, В има 9 000 динара и додаје к томе крајем сваке године по 3 375 динара. После колико година В има исто толико, колико и А, кад је интерес на интерес 4%?

20. После колико година ће један дуг спасти на половину кад се годишње отплаћује по 5% од дуга, и рачуна интерес на интерес 4%?

21. Колико проценáта дуга мора неко да отплаћује, кад његов дуг треба да се преполови за 15 година. Процент је $3\frac{1}{2}$.

22. За које ће време један дуг постати за 40% мањи, кад се при 4% интереса отплаћује $4\frac{3}{4}$%?

23. Један капитал од 400 000 динара остави неко најпре 6 година под интерес на интерес и узима после тога крајем сваке године по 3 750 динара. Колика је његова имовина после даљих 12 година, кад је процент 4?

24. Да би помогао студије свога синовца један стриц остави у банку 7 500 динара ,па ће још поред тога додавати почетком сваке године, у року од 19 година, толику суму, да синовац после тога може имати по 9 000 динара за 4 универзитетске године и да на завршетку још прими суму од 22 500 динара. Колико је имао стриц да уплаћује у банку у току ових 19 година, кад банка на улоге плаћа $3\frac{1}{2}$%?

25. За покрића будућих трошкова око студија свога сина дао је отац у банку a динара по p% за n година под интерес на интерес. По истеку овог времена почне школа. За време година студија узимао је по b динара почетком сваке године. Колико година је узето да ће трајати студије, кад је по завршетку њихову преостало још b динара? (После општег решења узети бројни пример $a = 28\,125$; в $= 9000$; $p = 4$; $n = 10$).

26. Неко уплаћује m година почетком сваке године једном осигуравајућем друштву премију од a динара. По истеку овог времена једну за s% смањену годишњу премију исто тако у почетку сваке године. После колико година (рачунати после прве уплаћене премије) износе целокупни улози са p% интереса на интерес суму од c динара? (После општег решења узети бројне примере: $m = 5$ година; $q = 394{,}50$ динара; $s = 40$ $p = 3\frac{1}{2}$ $c = 15\,000$ динара.

27. Неко узајми 45 000 динра по 4%. По уговору за 5 година није плаћао никакав интерес. Затим 4 године требао је да плаћа само прост итерес и то половину. Он сад хоће после овога да плаћа 10 година по толико, да после овог времена остатак дуга буде опет 45 000 динара. Колико износи отплата, која треба да се плаћа крајем сваке године?

28. Неко уложи у банку 75 000 динара под инт. на инт. и овом капиталу додаје крајем сваке треће године по 3 500 динара. Колика ће бити његова имовина на крају 20 године, кад се рачуна 5%?

Рачуни ренте

52. — У рачунима се назива *рента* сума новаца која се од извесне установе добија у одређеном року и увек иста сума. Да би на пр. једна банка могла извесном лицу да плаћа ренту a мора ово лице да уложи у банку извесну суму новаца, известан капитал k под интерес на интерес. Овај капитал се смањује сваке године за ренту a, док се сав не исцрпе, тј. крајња вредност капитала има да постане нула.

Уложени капитал зове се *садашња вредност* ренте.

Пример. Један радник хоће да улаже у штедионицу почетком сваке године извесну суму новаца од почетка своје 18 до почетка 50 године, да би могао после своје 50 године, он или његова породица, да добија у току од 10 година годишњу ренту од 6 000 динара, крајем сваке године. Колико треба да улаже годишње, кад је процент 4? Колика би требала да буде просечна месечна уштеда?

Решење. — Посматраћемо одвојено уплаћивање и одвојено ренту.

Уплаћивање. На почетку сваке године уплаћује се x динара. Број уплата 33.

Капитал на	почетку	1	год.	x
„	„	„	2	„	$xq + x$
„	„	„	3	„	$xq^2 + xq + x$

....

Капитал на почетку 33 год. $xq^{32} + xq^{31} + \ldots + xq + x$.

Капитал на крају 33 „ $K = xq^{33} + xq^{32} + \ldots + xq^2 + xq$.

$$K = \frac{xq\,(q^{33} - 1)}{q - 1}.$$

Рента. Овај задњи капитал K, уплата, у исто време је садашња вредност ренте.

Капитал на почетку 1 године K

„ „ крају 1 „ $Kq - 6\,000$

„ „ „ 2 „ $Kq^2 - 6\,000q - 6\,000$

„ „ „ 3 „ $Kq^3 - 6\,000q^2 - 6\,000q - 6\,000$.

Капитал на крају 10 године $K.q^{10} - 6\,000q^9 - 6\,000.q^8 - \ldots - 6\,000\ q - 6\,000$.

Чланови које треба одузети чине геометриски ред, чији је збир

$$\frac{6\,000\,.\,(q^{10} - 1)}{q - 1}.$$

Како крајњи капитал треба да буде једнак нули, то ће бити

$$Kq^{10} - \frac{6000\,(q^{10} - 1)}{q - 1} = 0$$

или

$$\frac{r\,.\,q^{11}\,(q^{33} - 1)}{q - 1} = \frac{6\,000\,(q^{10} - 1)}{q - 1},$$

одакле је

$$x = \frac{6\,000(q^{10} - 1)}{q^{11}(q^{33} - 1)}.$$

Кад се стави

$$q = 1.04$$

и изврше назначене рачунске радње, добије се

$$x = 706{,}65 \text{ динара.}$$

Толико износи годишња уплата. Просечна месечна уштеда треба да буде 59 динара.

53. Вечита рента. Ако је уложена сума за ренту, т,ј. ако је њена садашња вредност K, и ако величину ренте обележимо са r, онда је према малопређашњем једначина ренте

$$K\,.\,q^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1},$$

где је n број година. Садашња вредност ренте уложена под инт. на инт. треба да порасте на исту суму, на коју би нарасле и све ренте, кад би биле издате одмах по пријему.

Проблем вечите ренте је питање, колика треба да буде рента, па да траје вечито. Ако горњу једначину решимо по r, биће

$$r = \frac{K\,.\,q^n\,(q - 1)}{q^n - 1}.$$

Питамо се сад на шта ће се свести десна страна овог обрасца, кад пустимо да n бескрајно расте. Ако и бројилац и именилац поделимо са q^n, добићемо

$$r = \frac{K\,.\,(q - 1)}{1 - \frac{1}{q^n}}$$

Како је $q > 1$, степен q^n, кад n расте бескрајно биће бескрајно велики, а његова реципрочна вредност

$$\frac{1}{q^n}$$

тежиће нули. Образац за ренту тада постаје

$$r = k\,.\,(q - 1).$$

А како је

$$q - 1 = 1 + \frac{p}{100} - 1 = \frac{p}{100}.$$

то ће бити напослетку

$$r = \frac{k\,.\,p}{100}$$

Вечита рента своди се на прост годишњи интерес. (Види Аритметику и Алгебру за III р. стр. 16!).

Амортизација једног дуга

54. — Кад се за један дуг плаћа не само интерес који припада годишње, већ извесна сума a, дуг ће постепно бивати све мањи и мањи и напослетку ће бити исплаћен, *амортизован.*

На пр. код једног дуга од 8000 динара, за који се плаћа 7% интереса, годишњи интерес би износио

$$i = \frac{8000.7}{100} = 560 \text{ динара.}$$

Ако се отплаћује 1% више *(амортизациона квота)*, дакле свега 8% дуговане суме тј.

$$a = \frac{8000.8}{100} = 640 \text{ динара,}$$

то ће дуг с године у годину бивати мањи, и напослетку бити сав исплаћен, тј. постати нула.

И овде се размишља слично као код рачуна ренте, стављају се редом дужне суме, како оне остају на крају 1, 2, 3... n-те године и тада каже: *после n година дуг мора бити једнак нули.*

Пример. После колико година ће један $7\frac{1}{2}\%$ зајам бити исплаћен, кад је за плаћање интереса и одужења дуга одређена стална годишња сума која износи 10% од првобитне величине дуга.

Решење. За x година дуг K ће бити амортизован, кад се на крају сваке године отплаћује сума $a = \frac{10}{100} k = 0{,}1\,k$; интересни чинилац је $q = 1{,}075$.

Дуг на почетку 1 године K

„ „ крају 1 „ $Kq - 0{,}1k -$

„ „ „ 2 „ $Kq^2 - 0{,}1kq - 0{,}1k$

„ „ „ 3 „ $Kq^3 - 0{,}1kq^2 - 0{,}1kq - 0{,}1k.$

....

Дуг на крају x-те године $K.q^x - 0{,}1kq^{x-1} - 0{,}1kq^{x-2} -$
$- 0{,}1kq^{x-3} \ldots\ldots\ 0{,}1kq - 0{,}1k.$

Овај крајњи капитал мора бити једнак нули. Негативни чланови граде геометријски ред од x чланова, са почетним чланом $0{,}1k$ и количником q, с тога мора бити

$$kq^x - \frac{0{,}1k\,(q^x - 1)}{q - 1} = 0.$$

Како видимо из ове једначине испада произвољна сума дуга k. Даље је

$$q^x\left(\frac{0{,}1}{q-1} - 1\right) = \frac{0{,}1}{q-1},$$

$$1{,}075^x = \frac{0{,}1}{0{,}025} = 4$$

$$x = \frac{0{,}60206}{0{,}03141} = 19{,}168.$$

После приближно 19 година дуг ће бити амортизован.

За писмено вежбање

1. Колика се рента може добијати крајем сваке године у току од 15 година, кад се у почетку године уложи сума од 100 000 динара по 4%?

2. Неко хоће да има годишњу ренту од 5 000 динара у току од 16 година. Колико треба да уложи у почетку године, да би ренту могао уживати крајем исте године? Процент је 4.

3. Колики се дуг може исплатити за 20 година плаћајући крајем сваке године по 3 000 динара, кад је процент 8?

4. Неко дугује 80 000 динара и плаћа 7% интереса на инт. Колике треба да буду отплате почетком сваке године, ако дуг треба отплатити за 4 године?

5. Која се 20-годишња рента може купити капиталом од 120 000 динара, кад се рачуна $3\frac{1}{2}\%$ интереса на интерес?

6. Колико се мора крајем сваке године плаћати, да се један $3\frac{1}{2}$ (4) процентни дуг од 180 000 (60 536) одужи за 16 (19) године?

7. Колика је садашња вредност једне ренте од 30 000 динара, која се добија крајем сваке године у току од 20 година, кад се рачуна $3\frac{1}{2}\%$ интерес на интерес?

8. Неко који има да плаћа 12 година сваке године суму од 4 000 динара, хоће сав свој дуг да исплати при првом термину. Колико има да плати, кад се у рачун унесе 4% интерес на интерес?

9. Право становања од 1 400 динара вредности и једног вероватног трајања од 20 година треба да буде разрешено досад. Са којом сумом то се може догодити, кад је уобичајена интересна стопа у земљи 4%?

10. Колику суму треба уплатити код једне банке, да би она 40 пута, по истеку сваке године, — први пут годину дана после уплате — плаћала суму од 22 500 динара?

11. За колико година се може исплатити дуг од 27 600 (100 000) кад се годишње отплаћује 1 720 (7 000)? Процент је $4\frac{1}{2}$.

12. За колико година ће један дуг бити исплаћен, кад се плаћа 8% (9%) од дуговане суме? Процент је 6 ($5\frac{1}{2}$).

13. Један зајам треба да се исплати за 25 (40) година. Са колико се процената мора амортизовати кад је уобичајен процент $7\frac{1}{2}$ ($8\frac{1}{2}$)?

14. Један град направи 4-процентни зајам од 4 000 000 динара и хоће да изврши амортизацију са 1%. Колико му времена треба за то и колико обвезница од по 200 динара се морају издати у 20 години за исплату остатка?

15. На почетку 1891 године пласирани су 900 000 дин. по 3½% под интерес на интерес. Од овог капитал изузима сопственик на почетку сваке године, и то први пут 1 јануара 1901 године ренту од 60 000 динара. Кад ће он последњи пут примити пуну ренту? Колико после овога има још да прими као остатак?

16. Једна годишња рента од 10 500 динара треба да се прима 14 година крајем сваке године. Кад се она може сумом $14 \cdot 10\,500 = 147\,000$ сва подићи, тј. кад је средњи термин плаћања, пошто се рачуна 4% интерес на интерес?

17. Једна рента од 4 200 динара има да се прима у току од 18 година крајем сваке године. Место плаћања ренте треба да се отвори само једна исплата од 84 000. После ког времена ће ово моћи да се оствари, кад интересна стопа износи 5%.

18. Да би неко могао уживати годишњу ренту од 15 000 динара уложи одједанпут капиал од 75 000 и к томе додаје поред интереса од 3½% годишње још 9 000 динара. Колико

ће му трајати ова рента, кад уплата и рента доспевају крајем сваке године?

19. Неко уложи n-пута своју годишњу уштеду од a динара у једну банку. Колико времена може он уживати ренту од b динара. Прва рента има да се добије годину дана после последње уплате. Проценат је p. После општег решења узети бројни пример: $n = 30$, $a = 4\,500$, $b = 20\,178{,}84$ $p = 3^1/_2$.

20. На 60 000 хоће неко 8 година почетком сваке године толико да додаје, да може од тада да подиже једну 15-годишњу ренту крајем сваке године. Колики мора бити годишњи улог кад је процент 4?

21. Једна 15 годишња рента од 8 100 динара, која пада крајем сваке године, треба да се замени 12-годишњом рентом, која ће се исплаћивати почетком сваке године. Колики ће бити ова рента при $3\frac{1}{2}$%?

22. Неко има да прима 30 година ренту од 45 000 динара. Њему то није довољно, па би желео да има ренту од 60 000 динара. Колико времена ће моћи ове суме да му се исплаћује, кад ренте треба да се узимају почетком сваке године и кад се интерес на интерес рачуна 4%?

23. Неко, који има права на 18-годишњу ренту, од које се 13 950 динара исплаћује крајем сваке године, не прима од тога ништа првих 7 година и због тога хоће следећих 11 година да ужива повећану ренту. Колика је ова, кад је интересна стопа $3\frac{1}{2}$%?

24. Један дуг од 450 000 хоће неко да исплати за 40 година и плати 8 година одговарајућу суму. Потом 7 година не може ништа да плати, а од тада хоће годишње толико да плаћа, да он ипак следећих 25 година буде готов. Колико има да плаћа, кад је процент 4?

25. Неко плаћа отплате за један 4-процентни дуг годишње толико, да би дуг исплатио за 40 година. После колико времена је дуг остао само половина? После колико година га је од тада исплатио, кад је могао дуг да претвори у 3-процентни, а да исти износ плаћа годишње?

26. Неко је за свог сина уплаћивао у банку 20 година рате од по a динара. Сакупљен капитал остане још 10 година

после уплаћене последње рате под интересом на интерес, па се затим претвори у ренту и прва рата се одмах исплати. Да се израчуна годишња величина ренте коју банка има да плаћа, кад се узме да прималац има да је прими 25 пута $a = 3000$, интересна стопа $3\frac{1}{2}\%$.

27. Ја имам право на једну 17 годишњу ренту од 25 200 динара, која пада почетком сваке године и хоћу место ње да добијем одједанпут 75 000 у готову а остатак у облику једне годишње ренте од 18 000 динара, која пада крајем сваке године. Колико година могу ову ренту уживати кад је интерес 4%?

28. За 75 000 готових и право на годишњу ренту од 12 000 динара крајем сваке године за 12 година, хоће неко да купи 18 годишњу ренту. Он хоће да почне да је прима тек после 6 година, да би је тада примао почетком сваке године. Колика је рента, кад интересна стопа износи $3\frac{1}{2}\%$.

29. Једна рента, која се може подизати n година почетком сваке године би имала већу садашњу вредност за b динара, кад би могла да се добија и даљих још n_1 година. Колика је рента при $p\%$ интереса на интерес? Задатак најпре да се реши опште, па онда за $n = 15$, $n_1 = 6$, $b = 13\,166{,}66\ldots$ и $p = 3\frac{1}{2}$.

30. Од једне ренте од 13 500 која је утврђена за 13 година, да се прима крајем сваке године, ужива неко првих 5 година само по 8 400 динара, али почетком године. Колико може он за следећих 8 година још годишње почетком године да прима, кад је проценат утврђен на $4\frac{1}{2}$?

31. Неко хоће 16 годишњу ренту од 21 000 динара, која почиње после 8 година да замени за ренту, која ће почети тек после 12 година, а тада крајем године, и трајати 15 година. Колика је ова рента кад се рачуна 4%?

32. Пошто је неко узимао 5 година од једне 15 годишње ренте од 22 500, која доспева почетком године, само по 15 000 динара, хоће сада да прими 45 000 динара у готову, а остатак да ужива у облику једне годишње ренте од 16 500 динара крајем сваке године. За које време може он на њу полагати право, кад је интересна стопа 5%?

33. Неко хоће једну 14 годишњу ренту од 7 500 динара која доспева крајем године, да претвори у једну 10 годишњу од 15 000. Колико мора још готовог новца да дода, кад он хоће 10-годишњу ренту да почне тек после 3 године, али тада почетком године, кад се рачуна 4%?

34. Један зајам од 150 000 динара треба да се исплати у 5 једнаких рата. Прва рата доспева после 6 година, а следеће после сваке 2 године. Колика је свака рата, кад се рачуна $3\frac{1}{2}\%$?

35. Један зајам може да се исплати у 3 једнаке рате, при чему први доспева после 3 године по пријему зајма, а свака следећа после даље 4 године. Један други начин исплате, а за исто време, је тај да се крајем сваке године отплаћује један и исти износ. Колики је овај у сравњењу са првом ратом, кад се аа обрачун узме интересна стопа од $4\frac{1}{2}\%$?

САДРЖАЈ