Zoran Popstojanović, asistent Univerziteta u Beogradu

PRIMENA FILTER TRANSFORMACIJE SLUČAJNE LEBESGUE-OVE MERE NA SLUČAJNA POLJA

Doktorska disertacija iz oblasti matematičkih nauka radjena pod rukovodstvom profesora Dr Dragoljuba Markovića

Beograd, Novembra 1963. godine

S A D R Ž A J:

PRIMENA FILTER TRANSFORMACIJE SLUČAJNE LEBESGUE-OVE MERE NA SLUČAJNA POLJA

Predmet našeg rada su neprekidna homogena slučajna polja uvedena u radovima ЯГЛОМ-а /2/, Ito-a /3/ i Čang-Ce-Peja /4/, koja predstavljaju prirodno proširenje pojma u širem smislu stacionarnog neprekidnog slučajnog procesa čije su osobine detaljno proučene u monografijama Doob-a /5/, РОЗАНОВ-а /19/ i drugih. Ideja za uvodjenje neprekidnih homogenih slučajnih polja i prvo njihovo tretiranje sa jednog opšteg stanovišta inspirisani su potrebama statističke teorije turbulencije /20/.

Naša je ideja da u ovome radu pokažemo neke osobine neprekidnih homogenih slučajnih polja koje se dobijaju primenom filter transformacije na slučajnoj Lebesgue-ovoj meri koja karakteriše jedno takvo polje; najzad, prikazaćemo regularna neprekidna homogena slučajna polja pomoću iste transformacije.

S obzirom da postoji potpuna analogija izmedju osobina koje se dobijaju primenom filter transformacije Lebesgue-ove mere na u širem smislu stacionarne slučajne procese, to ćemo u prvom delu našeg izlaganja formulisati neke stavove koji se odnose na ove procese i dati potrebne nam definicije.

<u>Definicija 1.</u> Slučajni kompleksni proces $\{x_t,\ t\in T\}$ je stacionaran u širokom smislu ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) $\underline{E}\{|x_t|^2\} < +\infty$ za svako $t \in T$;

(ii) korelaciona funkcija procesa $\underline{E}\{x_{s+t}\bar{x}_s\} = R(t)$ ne zavisi od s.

Preciznije govoreći, u širme smislu stacionarni slučajni proces karakterisan je na sledeći način: neka je $\{U_t,\ -\infty < t < +\infty\}$ skup transformacija koje su primenjene na slučajnim veličinama nekog zatvorenog linearnog skupa. Skup $\{U_t,\ -\infty < t < +\infty\}$ nazivaćemo <u>translacionom grupom izometričnih preslikavanja</u> ako su preslikavanja ove familije izometrična i ako je za svako <u>s</u> i <u>t</u>

$$U_{s+t} = U_s U_t$$

sa tačnošću do na slučajnu veličinu koja je jednaka nuli sa verovatnoćom 1. Sa U_0 ćemo označavati identičnu transformaciju a sa U_{-t} inverznu transformaciju od U_t.

Na osnovu ovoga, u širem smislu stacionarni slučajni proces uvodi se pomoću sledeće definicije:

Definicija 1. Neka je $\{U_t, -\infty < t + \infty\}$ translaciona grupa izometričkih preslikavanja a x_t slučajna veličina iz oblasti definisanosti date translacione grupe.
Tada je, slučajni proces $\{x_t \ , \ t \in (-\infty, +\infty)\}$, definisan sa $x_t = U_t x_o$ stacionaran u širokom smislu.
Obrnuto, ako je $\{x_t, -\infty < t + \infty\}$ stacionaran u širokom smislu slučajni proces, to postoji odgovarajuća grupa (translaciona) izometričnih preslikavanja takva da je za svako $t \in (-\infty, +\infty)$ sa verovatnoćom 1 : $x_t = U_t x_o$, pri čemu su preslikavanja U_t definisana na zatvorenoj linearnoj mnogostrukosti proizvedenoj slučajnim veličinama x_t.
U našem izlaganju mi ćemo se koristiti nekad definicijom 1 a nekad njenim ekvivalentom - definicijom 1:

Za stacionarne slučajne procese definisane u 1 pretpostavljaćemo da su neprekidni, tj. da zadovoljavaju uslov:

(1) $$\lim_{t-s\to 0} \mathbf{E}\{|x_t - x_s|^2\} = 0.$$

Ubuduće ćemo u našem izlaganju za oznaku trajektorije x_t slučajnog procesa upotrebljavati oznaku $x(t)$.
Za ovako definisane kompleksne u širem smislu stacionarne slučajne procese koji imaju osobinu neprekidnosti (1), važi reprezentacija:

(2) $$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda} dy(\lambda)$$

gde je $y(\lambda)$ slučajni proces sa ortogonalnim priraštajima takav da je

$$\mathbf{E}\{|dy(\lambda)|^2\} = dF(\lambda).$$

Pri ovome je trajektorija $y(\lambda)$ procesa $\{y(\lambda)\}$ data relacijom

$$(y(\lambda_2+0)+y(\lambda_2-0))/2-(y(\lambda_1+0)+y(\lambda_1-0))/2 =$$

$$\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-T}^{+T} ((e^{-2\pi i t\lambda_1} - e^{-2\pi i t\lambda_2})/(2\pi i t))x(t)dt \ , -\infty < \lambda_1, \lambda_2 < +\infty.$$

Relacija (2) predstavlja spektralnu reprezentaciju kompleksnog stacionarnog slučajnog procesa $\{x(t), \ t \in (-\infty, +\infty)\}$. /5/.

Definicija 2. Neka je $\{x(t), -\infty < t < +\infty\}$ kompleksan u širem smislu stacionaran slučajni proces sa osobinom (1) i spektralnom reprezentacijom (2).

Pod <u>filter transformacijom</u> procesa $\{x(t), -\infty < t < +\infty\}$, nazivaćemo preslikavanje koje prevodi $\{x(t)\}$ u novi proces $\{\hat{x}(t)\}$ koji je definisan relacijom (preciznije, čije su trajektorije date sa)

(3) $\hat{x}(t) = \sum_j c_j x(t+t_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi it\lambda}(\sum_j c_j e^{2\pi it_j\lambda})dy(\lambda)$, pri čemu je u (3) $\hat{x}(t)$ dato bilo konačnom sumom, bilo granicom u srednjem nizova ovakvih konačnih suma.

<u>Stav 1.</u> Najopštiji oblik procesa (3) dat je relacijom

(4) $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi it\lambda} c(\lambda)dy(\lambda)$

gde je $C=C(\lambda)$ proizvoljna funkcija - granica u srednjem konačnih suma oblika $\sum_j c_j e^{2\pi it_j\lambda}$, tj. proizvoljna funkcija merljiva u odnosu na F takva da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C(\lambda)|^2 dF(\lambda) < +\infty .$$

<u>Dokaz.</u> Na osnovu (3) sledi da postoji funkcija $C(\lambda) = \sum_j c_j e^{2\pi it_j\lambda}$ kojoj konvergira suma na desnoj strani poslednje relacije. Kako je konvergencija u (3) definisana kao konvergencija u srednjem kvadratnom, sledi da $C(\lambda)$ mora da bude merljivo u odnosu F, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C(\lambda)|^2 dF(\lambda) < +\infty ,$$

što dokazuje naše tvrdjenje.

Funkciju $C=C(\ )$ definisanu u (4) zvaćemo <u>Jezgrom filter transformacije definisane na procesu</u> $\{x(t)\}$, koji je tretiran u definiciji 2.

<u>Stav 2.</u> Svaka filter transformacija definisana na kompleksnom u širem smislu stacionarnom slučajnom procesu $\{x(t)\}$ ima jezgro i svako jezgro odredjuje jednu filter transformaciju koja prevodi kompleksan u širem smislu stacionaran slučajni proces $\{x(t)\}$ u isti takav proces $\{\hat{x}(t)\}$, koji ispunjava i osobinu neprekidnosti.

<u>Dokaz.</u> Na osnovu definicije 2. i stavu 1. sledi da svaka funkcija $C=C(\lambda)$ za koju je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C(\lambda)|^2 dF(\lambda) < +\infty$$

definiše za u širem smislu stacionarni slučajni proces $\{x(t)\}$ isti takav proces $\{\hat{x}(t)\}$ dat sa (4). Prvi deo stava sledi neposredno iz definicije filter transformacije.

Pokazaćemo sada drugi deo našega stava - uslov (1) neprekidnosti našeg procesa $\{\hat{x}(t)\}$ koji je dobijen filter transformacijom procesa $\{x(t)\}$.

Imamo

$$E\{|\hat{x}(t) - \hat{x}(s)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{2\pi i t\lambda} - e^{2\pi i s\lambda}|^2 |C(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$

Na osnovu osobine funkcije jezgra $C(\lambda)$ date u stavu 1. sledi da integral na desnoj strani poslednje relacije teži ka nuli kada ~~xxxxx~~ $t - s \longrightarrow 0$. Ovo dokazuje naše tvrdjenje.

Sledeći stav karakteriše korelacionu funkciju i spektralnu funkciju procesa $\{\hat{x}(t)\}$.

Stav 3. Za proces $\{\hat{x}(t)\}$ dobijen primenom filter transformacije kompleksnog u širem smislu stacionarnog slučajnog procesa $\{x(t)\}$ važe sledeće relacije

$$\hat{R}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda} |C(\lambda)|^2 dF(\lambda) \tag{5}$$

$$\hat{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |C(\mu)|^2 dF(\mu) . \tag{6}$$

($\hat{R}(t)$ je korelaciona funkcija procesa $\{\hat{x}(t)\}$ a $\hat{F}(\lambda)$ spektralna funkcija procesa).

Dokaz. Sledi neposredno iz definicije 1. i definicije filter transformacije procesa $\{x(t)\}$.

Na osnovu poslednjeg stava izvlačimo zaključke da se primenom filter transfromacije na kompleksan u širem smislu stacionaran slučajni proces $\{x(t)\}$ uvećava njegova spektralna intenzivnost za multiplikativni faktor $|C(\lambda)|^2$, kao i potreban i dovoljan uslov da se filter transformacija procesa $\{x(t)\}$ svede na identično preslikavanje. Taj uslov je $C(\lambda) \equiv 1$.

Dalje, u našem izlaganju pod pojmom slučajni proces podrazumevaćemo uvek kompleksan u širem smislu stacionaran slučajni proces, sem kada to drukčije nije naglašeno.

Stav 4. Neka filter transformacija f_1 sa jezgrom $C_1(\lambda)$ i $\int |C_1(\lambda)|^2 < +\infty$ prevodi slučajni proces $\{x(t)\}$ u slučajni proces $\{x_1(t)\}$, a filter transformacija f_2 sa jezgrom $C_2(\lambda)$ prevodi slučajni proces $\{x_1(t)\}$ u slučajni proces $\{x_2(t)\}$,

Tada operacija $f = f_1 f_2$ sa jezgrom C_1C_2 i $\int |C_1C_2|^2 < +\infty$ prevodi slučajni proces $\{x(t)\}$ u slučajni proces $\{x_2(t)\}$ i pritom je

(7) $$x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_1(\lambda)C_2(\lambda)e^{2\pi i t\lambda}dy(\lambda)$$

pri čemu je pretpostavljeno da proces $\{x(t)\}$ ima spektralnu reprezentaciju datu sa (2).

Dokaz. Na osnovu pretpostavki imamo

$\{x(t)\} \xrightarrow{f_1} \{x_1(t)\}$ sa jezgrom $C_1(\lambda)$, pri čemu je

(+) $x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda}C_1(\lambda)dy(\lambda)$ gde je $\{y(\lambda)\}$ proces sa ortogonalnim priraštajima dat na strani 2.

Slično je

$\{x_1(t)\} \xrightarrow{f_2} \{x_2(t)\}$ sa jezgrom $C_2(\lambda)$, pri čemu je

(++) $x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda}C_2(\lambda)dy_1(\lambda)$ gde je $\{y_1(\lambda)\}$ ortogonalni

proces koji odgovara reprezentaciji (2) za proces $\{x_1(t)\}$. Veza koja postoji izmedju procesa $\{y(\lambda)\}$ i $\{y_1(\lambda)\}$ izražava se relacijom

$$dy_1(\lambda) = C_1(\lambda)dy(\lambda) .$$

Kada se ovo uzme u obzir iz relacije (++) sledi

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda}C_2(\lambda)C_1(\lambda)dy(\lambda) .$$

Kako je

$$\int |C_1C_2|^2 < +\infty$$

po pretpostavci, to je funkcija C_1C_2 jezgro ; kako je $\{y(\lambda)\}$ ortogonalni proces preko koga se razlaže proces $\{x(t)\}$ to je $\{x_2(t)\}$ proces koji je dobijen filter transformacijom $f=f_1f_2$ procesa $\{x(t)\}$. Time je stav dokazan.

Posledica stava 4. Ako se zadrže ista oznake kao u prethodnom stavu dolazi se do zaključka da filter transformacije f_1f_2 i f_2f_1 preslikavaju slučajni proces $\{x(t)\}$ u isti slučajni proces $\{x_2(t)\}$. Ova komutativnost filter transformacija je obezbedjena pretpostavkama o konvergenciji integrala

$$\int |C_1|^2 dF(\lambda) \quad , \int |C_2|^2 dF(\lambda) \quad , \int |C_1C_2|^2 dF(\lambda)$$

s obzirom da se radi o funkcijama jezgra.

Sasvim je prirodno postaviti pitanje o uvodjenju operacije sabiranja filter transformacija. Pod sumom dveju filter transformacija podrazumevamo preslikavanje čije je jezgro pojedinih filter transformacija.

U sledećim stavovima biće uveden pojam diferenciranja i integriranja na slučajnom procesu $\{x(t)\}$ pomoću pojma filter transformacije. Neka je dat proces $\{x(t)\}$ čija je spektralna reprezentacija data sa (2).

Stav 5. Neka je dat slučajni proces $\{x(t)\}$ i neka su ispunjeni uslovi

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dF(\lambda) < +\infty$$

$$(8) \qquad (ii) \quad \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i\lambda e^{2\pi i t\lambda} dy(\lambda).$$

Tada je

$$\underset{h \to 0}{\text{l.i.m.}} ((x(t+h) - x(t))/h) = \dot{x}(t)$$

gde je granica u srednjem kvadratnom uzeta sa težinom $dF(\lambda)$.

Dokaz. Imamo da je

$$(x(t+h) - x(t))/h = \int_{-\infty}^{+\infty} ((e^{2\pi i(t+h)\lambda} - e^{2\pi i t\lambda})/h) dy(\lambda) \quad .$$

Kako je

$$\underset{h \to 0}{\text{l.i.m.}} ((c(t+h) - x(t))/h) = \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i\lambda e^{2\pi i t\lambda} dy(\lambda)$$

to dobijamo relaciju (ii) kao što je i trebalo pokazati, pod uslovom da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |2\pi i\lambda e^{2\pi i t\lambda}|^2 dF(\lambda) < +\infty$$

što je i pretpostavljeno pod (1)

Drugim rečima, sadržaj ovoga stava je sledeći: ako se na proces $\{x(t)\}$ primeni filter transformacija sa jezgrom $2\pi i\lambda$ (pretpostavka (i) stava 5. obezbedjuje da $2\pi i\lambda$ ispunjava uslove za jezgro filter transformacije) onda se dobijeni slučajni proces $\{\dot{x}(t)\}$ može smatrati "izvodom" u srednjem kvadratnom datog procesa $\{x(t)\}$. Ovo opet znači da trajektorije $x(t)$ procesa $\{x(t)\}$ imaju izvod u ovom uopštenom smislu. Ova osobina se preciznije iskazuje sledećim stavom:

Stav 6. Neka je dat separabilni proces $\{x(t,\omega)\}$ čija je spektralna reprezentacija data sa (2) .

Tada su :

(i) Skoro sve trajektorije $x(t)$ procesa ~~x(t)~~ $\{x(t,\omega)\}$ apsolutno neprekidne funkcije ; i

(ii) ako je $x'(.,\omega)$ izvod po t trajektorije, tada je za svako t sa verovatnoćom 1 $x'(t,.)=\hat{x}(t)$, gde je $\hat{x}(t)$ dato sa (8).

Dokaz. Ako ne predpostavimo separabilnost tada imamo sledeću situaciju : neka je R proizvoljan prebrojiv skup vrednosti parametra t; tada se skoro sve trajektorije poklapaju na R sa funkcijama odredjenim za svako t i ispunjavaju uslov o apsolutnoj neprekidnosti i njihov izvod dat je relacijom (8). Drugim rečima, za dato t slučajna veličina $\hat{x}(t)$ odredjena je jednoznačno do na skup tačaka verovatnoće 0.

Na osnovu ovoga, možemo smatrati da je naša slučajna veličina odredjena tako, da je proces $\{\hat{x}(t)\}$ merljiv i da su skoro sve njegove trajektorije L-integrabilne na svakom konačnom intervalu. Tada integral

$$\int_0^t \hat{x}(s,\omega)ds$$

za skoro sve ω odredjuje apsolutno neprekidnu funkciju od t i svaka takva funkcija od t za skoro svako t ima izvod $\hat{x}(t,\omega)$.

Imamo, dakle, sa verovatnoćom 1

$$\int_0^t \hat{x}(s)ds = \int_0^t ds\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i\lambda e^{2\pi is\lambda}dy(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{2\pi it\lambda}-1)dy(\lambda) = x(t) - x(0)$$

s obzirom da je poredak izmene reda integracije ovde opravdan. Dobijenu relaciju treba shvatiti na ovaj način : za svako t leva i desna strana su medjusobom jednake sa verovatnoćom 1 i istovremeno za sve vrednosti t iz proizvoljnog datog prebrojivog skupa R. U slučaju separabilnog procesa $\{x(t)\}$ skup R može biti tako izabran da se gornje i donje granice skoro svih trajektorija procesa $\{x(t)\}$ na otvorenim intervalima poklapaju sa odgovarajućim granicama za vrednosti parametra t koje pripadaju skupu R a nalaze se u tim intervalima. Odavde neposredno sledi da je skoro svaka trajektorija $x(.,\omega)$ procesa $\{x(t)\}$ apsolutno neprekidna funkcija i da ima izvod $\hat{x}(.,\omega)$ dat sa (8), što je i trebalo pokazati.

Primetimo uzgred, da iz egistencije običnog izvoda slučajnog procesa ne sledi egzistencija izvoda u srednjem kvadratnom. To pokazuje sledeći primer:

neka je $\{y(t)\}$ separabilni proces Poisson-a sa sredinom $c>0$ i neka je proces $\{x(t)\}$ definisan pomoću relacije

$$x(t)=y(t+1)-y(t)-c.$$

Proces $x(t)$ je stacionaran i širem smislu i njegova spektralna funkcija je apsolutno neprekidna pri čemu je njegova spektralna gustina data sa

$$\frac{1-\cos 2\pi\lambda}{2\pi^2\lambda^2}\, c\,.$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\, \frac{1-\cos 2\pi\lambda}{2\pi^2\lambda^2}\, c\, d\lambda = +\infty,$$

to izvod u srednjem kvadratnom ne postoji s obzirom da nije ispunjen uslov (i) stava 5. S druge strane, izvod $x'(t,\omega)$ za svako ω postoji i jednak je $\underline{0}$ svuda, izuzev na prebrojivom skupu vrednosti parametra $\underline{t}$.

Sledeći zaključci našeg izlaganja odnose se na pojam integracije procesa $\{x(t)\}$ koji ima spektralnu reprezentaciju datu sa (2).

Pretpostavimo da se jezgro $C \equiv C(\lambda)$ može predstaviti u vidu Fourier-ove transformacije integrabilne funkcije $C^* \equiv C^*(\lambda)$. Tada važi sledeći stav

<u>Stav 7.</u> Ako je

(i) $C(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\lambda\mu} C^*(\mu)\,d\mu$,i

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\, d\mu < +\infty$,

onda postoji filter transformacije procesa $\{x(t)\}$ u proces ~~txx~~ $\{\hat{x}(t)\}$ takva da je

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, x(t+\mu)\, d\mu \quad .$$

<u>Dokaz.</u> Imamo (na osnovu prethodno uvedenih pojmova i rezultata)

$$(+)\quad \hat{x}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda}\, C(\lambda)\, dy(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda}\, dy(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\lambda\mu}\, C^*(\mu)\, d\mu$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(t+\mu)\lambda}\, dy(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, x(t+\mu)\, d\mu$$

gde je neposredno iskorišćena činjenica o reprezentaciji (2) za proces $\{x(t)\}$. Razmena reda integracija u (=) je opravdana.

Obratno, iz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, x(t+\mu)\, d\mu$$

dobijamo (pod pretpostavkom apsolutne konvergencije dvostrukog integrala koji nam se javlja) $\underline{E}\left\{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, x(t+\mu)\, d\mu\right|\right\}$,

$$\le \underline{E}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\,|x(t+\mu)|\, d\mu\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\, \underline{E}\{|x(t+\mu)|\}\, d\mu$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\, \underline{E}^{1/2}\{|x(t+\mu)|^2\}\, d\mu$$

$$= \underline{E}^{1/2}\{|x(0)|^2\} \int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\, d\mu$$

Poslednji integral na desnoj strani relacije konvergira na osnovu pretpostavke (ii) našeg stava. Na taj način naš stav je dokazan.

Smisao poslednjeg stav sastoji se u tome, što se njime uvodi integracija na datom procesu $\{X(t)\}$. U tome cilju koristi se filter transformacija procesa i pretpostavka o reprezentaciji funkcije jezgra pomoću Fourier-ove transformacije jedne apsolutno integrabilne funkcije na rzmaku ($-\infty$, $+\infty$).

Da bi se mogla uspostaviti veza izmedju diferenciranja i integriranja definisanih u napred izloženom smislu za proces $\{x(t)\}$ potreban je sledeći stav:

<u>Stav 8.</u> Neka su $C_1^* \equiv C_1^*(\lambda)$ i $C_2^* \equiv C_2^*(\lambda)$ dve funkcije koje ispunjavaju uslov (ii) stava 7., takve da je

$$C^*(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_1^*(\mu-\lambda)\, C_2^*(\lambda)\, d\lambda.$$

Tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\, d\mu < +\infty$$

i funkciji C^* odgovara jezgro - njena Fourier-ova transformacija- $C_1 C_2$.

<u>Dokaz.</u> Imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C^*(\mu)|\, d\mu \le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |C_1^*(\mu-\lambda)\, C_2^*(\lambda)|\, d\lambda\, d\mu$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |C_1^*(\mu)|\, d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} |C_2^*(\lambda)|\, d\lambda < +\infty,$$

što pokazuje da $C^*(\mu)$ ispunjava uslov (ii) stava 7. S druge strane je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\mu}\, C^*(\mu)\, d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} C_1^*(\mu-\lambda)\, C_2^*(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda} C_2^*(\lambda)\, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t(\mu-\lambda)} C_1^*(\mu-\lambda)\, d(\mu-\lambda) \ldots$$

čime je stav u potpunosti dokazan. Izmena poretka integracije koja je ovde učinjena, opravdana je s obzirom na pretpostavku a apsolutnoj konvergenciji posmatranih integrala.

Posle ovoga, veza izmedju integriranja i diferenciranja izražena je sledećim stavom

<u>Stav 9.</u> Neka je

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |C(\lambda)|^2 dF(\lambda) < +\infty$

gde je $C \equiv C(\lambda)$ jezgro - Fourier-ova transformacija neke integrabilne funkcije $C^* \equiv C^*(\lambda)$.

Tada je za proces $\{x(t)\}$ sa spektralnom reprezentacijom (2),

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, dx(t+\mu).$$

<u>Dokaz.</u> Na osnovu pretpostavke (i) možemo shvatiti odgovarajuću filter transformaciju procesa kao rezultat dveju uzastopnih primena: itengrala sa jezgrom C^* i diferenciranja sa jezgrom $C(\lambda)$, Imamo

$$\hat{x}(t) = 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda} \lambda\, C(\lambda)\, dy(\lambda).$$

Kako je

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \lambda\mu} C^*(\mu)\, d\mu,$$

to je

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i\, e^{2\pi i t\lambda} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \lambda\mu} C^*(\mu)\, d\mu\, dy(\lambda).$$

Iz (i) sledi da je u poslednjoj relaciji opravdana promena reda integracije, tj. imamo

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{2\pi i \lambda(t+\mu)} 2\pi i\, dy(\lambda) \right) C^*(\mu)\, d\mu,$$

dakle,

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, dx(t+\mu),$$

što je trebalo pokazati.

<u>Posledica stava 9.</u> Ako je pored pretpostavki stava 9. za proces $\{x(t)\}$ još i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\, dF(\lambda) < +\infty,$$

tada

(i) postoji proces $\{x'(t)\}$ i

(ii) $\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, x'(t+\mu)\, d\mu.$

<u>Dokaz.</u> Iz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dF(\lambda) < +\infty,$$

sleduje egzistencija procesa $\{x'(t)\}$, pa ~~xx~~prema predhodnom stavu imamo

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(u)\, dx(t+u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(u)\, x'(t+u)\, du,$$

što je i trebalo pokazati.

Stav 9. i njegova posledica prirodno nameću sledeće pitanje : <u>šta se može reći o egzistenciji integrala oblika</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, dx(t),$$

gde su $f \equiv f(t)$ Fourier-ova transformacija neke integrabilne funkcije $f^* \equiv f^*(t)$ a $\{x(t)\}$ proizvoljan kompleksni u širem smislu stacionarni slučajni proces čija je spektralna reprezentacija data sa (2). Odgovor na ovo pitanje je sledeći stav:

<u>Stav lo.</u> Neka je dat proces $\{x(t)\}$ sa reprezentacijom (2) i

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \lambda t} f^*(t)\, dt,$$

gde je $f^* \equiv f^*(t)$ integrabilna funkcija.

Ako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |f(\lambda)|^2\, dF(\lambda) < +\infty,$$

onda je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, dx(t) < +\infty.$$

<u>Dokaz.</u> Ako se podje odpretpostavki stava, oblika (2) za spektralnu reprezentaciju procesa $\{x(t)\}$ i definicije izvoda u srednjem, dobija se

$$(+) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, dx(t) = 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{2\pi i t\lambda} f^*(t)\, dt\, dy(\lambda)$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(\lambda)\, dy(\lambda)$$

Poslednji integral konvergira na osnovu stava 1. ako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |f(\lambda)|^2\, dF(\lambda) < +\infty.$$

Medjutim, zahteva za konvergenciju ovog integrala je upravo predpostavka našega stava.

Dakle,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, dx(t) < +\infty$$

što je i trebalo dokazati.

Primetimo uzgred sledeće: ako za funkciju f^*, čija Fourier-ova transformacija f zadovoljava uslov

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |f|^2 dF(\lambda) < +\infty$$

definišemo integral koji se nalazi na levoj strani relacije (*) kao integral koji se nalazi na desnoj strani pomenute relacije (+), onda moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

(i) način odredjivanja funkcije f iz date funkcije f^* mora biti jednoznačan sem za vrednosti funkcije na skupu tačaka λ na kojemu je integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dF(\lambda)$$
jednak nuli. Ukoliko ovaj zahtev nije ispunjen onda stohastički integral (+) nije jednoznačan.

(ii) Uslov linearnosti, koji zahteva da funckiji $af^* + bg^*$ (a,b konstante), odgovara kao Fourier-ova transformacija funkcija $af + bg$. Ukoliko ovo nije ispunjeno, onda posmatrani stohastički integral (+) nije linearan u odnosu na podintegralnu funkciju. Ovde se svuda zahteva da f^* odnosno g^* budu apsolutno integrabilne funkcije na $(-\infty, +\infty)$.

Može se, medjutim, uvesti restrikcija, tj. zahtevati da f^* bude integrabilno na svim konačnim intervalima (-A,+A), da granica

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} e^{2\pi i\lambda t} f^*(t)\, dt$$

postoji za svako λ i da f zadovoljava uslov

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda |f|^2 dF(\lambda) < +\infty$$

Analogon posledice stava 9. je sledeći stav :

Stav 11. Neka za proces $\{x(t)\}$ važe pretpostavke posledice stava 9. Ako zadržimo izhake uvedene u stavu lo., onda je :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, dx(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, x'(t)\, dt$$

ako je :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^*(t)|\, dt < +\infty .$$

Dokaz. Na osnovu posledice stava 9. slede i egzistencija procesa $x'(t)$ koji ima reprezentaciju

$$x'(t) = 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{2\pi i t\lambda} dy(\lambda)$$

pri čemu je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dF(\lambda) < +\infty, \quad E\{|dy(\lambda)|^2\} = dF(\lambda).$$

Imajući ovo u vidu, imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, x'(t)\, dt = 2\pi i \int^{+\infty} f^*(t) \left(\int \lambda\, e^{2\pi i t\lambda} dy(\lambda) \right) dt$$

Razmena reda integracije u poslednjem dvostrukom integralu opravdana je ukoliko je

[illegible]

što opet implicira relaciju

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\lambda} f^*(\lambda)\, d\lambda$$

koja izražava činjenicu da je f Fourier-ova transformacija od f. Na taj način, stohastički integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, \alpha'(t)\, dt$$

ima smisla; no kako poslednji integral definiše u stvari integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, d\alpha(t)$$

to je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, d\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)\, \alpha'(t)\, dt,$$

što je i trebalo pokazati.

Sledeći rezultat odnosi se na reprezentaciju procesa, dobijenog primenom filter transformacije sa jezgrom $2\pi i \lambda\, C(\lambda)$ tretiranim u stavu 7.

<u>Stav 12.</u> Neka je

$$C^* \equiv C^*(\lambda)$$

apsolutno integrabilna funkcija na razmaku $(-\infty, +\infty)$, i neka je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 |C(\lambda)|^2\, dF(\lambda) < +\infty;$$

gde je

$$C(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \lambda t}\, C^*(t)\, dt$$

Tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, d\alpha(t+\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu - t)\, d\alpha(\mu)$$
$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, C(\lambda)\, e^{2\pi i t\lambda}\, dy(\lambda).$$

<u>Dokaz.</u> Imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\mu)\, d\alpha(t+\mu)$$

prelazi u

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\lambda - t)\, d\alpha(\lambda)$$

posle transformacije

$$t + \mu = \lambda.$$

Odavde sledi (na osnovu pretpostavki stava)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^*(\lambda - t)\, d\alpha(\lambda) = 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, C(\lambda\ t)\, e^{2\pi i t\lambda}\, dy(\lambda)$$
$$= \int^{+\infty} C^*(\mu - t) \int^{+\infty} 2\pi i \lambda\, e^{2\pi i \lambda\mu}\, dy(\lambda)\, d\mu$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} c^*(\mu - t)\, e^{2\pi i \lambda \mu}\, d\mu \right) dy(\lambda)$$

odnosno, posle transformacije
$\mu = \theta + t$
imamo

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} c^*(\theta)\, e^{2\pi i \lambda(\theta + t)}\, d\theta \right) dy(\lambda)$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{2\pi i \lambda t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} c^*(\theta)\, e^{2\pi i \lambda \theta}\, d\theta \right) dy(\lambda)$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, c(\lambda)\, e^{2\pi i t \lambda}\, dy(\lambda),$$

što je i trebalo pokazati.

II. DEO

U prethodnom izlaganju dali smo sistematski izložen materijal koji se odnosio na primenu filter transformacije na kompleksne u širem smislu stacionarne slučajne procese.

Medjutim, neki problemi statističke teorije turbulencije (20) kao i dalja izgradnja teorije slučajnih funkcija /7/, zahtevali su da se uvede pojam <u>slučajnog polja</u> - vrste uopšteja pojma slučajnog procesa./ 2 /, / 3 /, / 4 / .

Predmet našeg rada su analogoni u širem smislu stacionarnih slučajnih procesa - <u>homogena slučajna polja</u> uvedena u radovima ЯГЛОМ-а /2/, Ito-a /3/, Čang-Ce-Peja /4/ i Urbanik-a /6/.

<u>Definicija 3.</u> Neka je dat $\underline{n}$-dimenzionalni Euklidski prostor E^n; kompleksnu slučajnu funkciju

$$\xi(\underline{x}) = \xi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

od $\underline{n}$ realnih promenljivih zvaćemo <u>slučajnim poljem u prostoru R^n.</u>

Za oznaku prvo i drugog momenta slučajnog polja $\xi(\underline{x}), x \in R^n$ upotrebljavaćemo sledeće oznake:

$$\underline{E}\,\xi(\underline{x}) = m(\underline{x}) \quad , \underline{x} \in R^n \quad \text{i}$$

$$\underline{E}\,\xi(\underline{x}_1)\overline{\xi(\underline{x}_2)} = B(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \ , \ \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in R^n \ .$$

Sem toga, slučajnim poljima definisanim u 3. namećemo i sledeći <u>zahtev neprekidnosti</u> (koji je analogno zahtevu (1) za slučajne procese):

(1') $$\lim_{x_1 \to x_2} \underline{E}\{|\xi(x_1) - \xi(x_2)|^2\} = 0 \qquad x_1, x_2 \in R^n.$$

Neposredni analogon pojma u širem smislu stacionarnog slučajnog procesa je <u>neprekidno homogeno slučano polje</u> (u daljem izlaganju ograničavaćemo se samo na prostor R^2, tj., kompelksnu ravan) koje je dato sledećom definicijom:

<u>Definicija 4.</u> Familija kompleksnih slučajnih promenljivih $x(s,t)$, <u>s</u> i <u>t</u> realni brojevi, je <u>neprekidno homogeno slučano polje</u>, ako je:

(i) $\underline{E}|x(s,t)|^2 < +\infty$,

(ii) $$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \underline{E}|x(s+h_1, t+h_2) - x(s,t)|^2 = 0,$$

i funkcija

(iii) $\underline{E}(x(s+m,t+n)\overline{x(m,n)})$ ne zavisi od <u>m</u> i <u>n</u> .

Funkkiju datu pod (iii) obeležavaćemo ubuduće sa $B_x(s,t)$.

Funkcija $B_x(smt)$ je korelaciona funkcija polja i njeme osobine iskazuje sledeći stav:

<u>Stav 13.</u> Korelaciona funkcija neprekidnog homogenog slučajnog polja data sa (iii) u definiciji 4. je neprekidna, pozitivno definitna funkcija koja ima reprezentaciju

$$B_x(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)}\, dF_x(\lambda,\mu),$$

gde je

$$F_x(\lambda,\mu)$$

nenormirana dvodimenzionalna funkcija distribucije koju ćemo zvati spektralnom funkcijom polja $\{x(s,t)\}$.

<u>Dokaz.</u> Sledi neposredno iz definicije korelacione funkcije i teoreme Hochner-Hinčina o reprezentaciji dvodimenzionalne karakteristične funkcije dveju slučajnih promenljivih.

Dobro je poznato / 2 /, da svaka homogeno slučano polje $x(s,t)$ ima sledeću spektralnu reprezentaciju:

(2') $$x(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)}\, dZ_x(\lambda,\mu),$$

gde je $Z_x(\lambda, \mu)$ slučajna funkcija dveju promenljivih koja ima nezavisne priraštaje i za koju je

$$\underline{E}\, Z_x(S)\, \overline{Z_x(S')} = \iint_{S \times S'} dF_x(\lambda,\mu).$$

Primetimo, da je ova osbbina analogon spektralnoj reprezentaciji

(2) za u širem smislu stacionarne slučajne procese.

U našem izlaganju imaćemo potrebu da operišemo sa prostorima slučajnih promenljivih u kojima je definisan skalarni proizvod.

Za sve ove prostore skalarni proizvod je definisan na sledeći način:

$$(x, y) = E(x\bar{y})$$

(gde se pod konvergencijom uvek podrazumeva konvergencija u srednjem kvadratnom).

Sa ovako uvedenim skalarnim proizvodom vrednosti polja $\{x(s,t)\}$ obrazuju Hilbert-ov prostor koji ćemo obeležavati sa $\mathcal{H}$.

Da bi se za slučajna polja uveo pojam <u>filter transformacije</u> koji je analogan istom pojmu uvedenom za procese $\{x(t)\}$ potrebno je prethodno uvesti neke restrikcije za slučajna polja. Naime, u radu /4/ uvedeni su pojmovi <u>singularnog i regularnog</u> slučajnog polja koji odgovaraju pojmovima <u>determinističkog</u> odnosno <u>kompletno-nedeterminističkog</u> slučajnog procesa.

Ovi pojmovi su nam neophodni, s obzirom da je naš cilj da pomoću pojma filter transformacije za slučajna polja, koji ćemo sada uvesti, damo reprezentaciju regularnog homogenog slučajnog polja.

Uvodimo, dakle, sledeće pojmove :

neka je dato neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$; sa H_x označićemo <u>najmanji zatvoreni linearni prostor</u> koji sadrži sve veličine $x(m,n)$; sa $H_x(t)$ označićemo <u>najmanji zatvoreni linearni podprostor od H_x</u> koji sadrži sve $x(m,n)$ za koje je:

$$-\infty < m < +\infty \quad i \quad n \leq t .$$

Neka je, dalje,

$$S_x = \bigcap_t H_x(t).$$

<u>Definicija 5</u>. Neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ je <u>singularno</u> ako je

$$S_x = H_x .$$

Osnovna osobina neprekidnog homogenog slučajnog polja data je sledećim stavom:

<u>Stav 14</u>. Svaki element $x(s,t)$ neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ ima jednoznačnu reprezentaciju

$$x(s,t) = \eta(s,t) + \xi(s,t)$$

gde je pritom,

$$\xi(s,t) \in H_x(0),$$

a $\eta(s,t)$ je ortogonalno na $H_x(0)$.

Dokaz. S obzirom da vrednosti polja $\{x(s,t)\}$ čine Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ čiji je podprostor $H_x(0)$, to na osnovu poznatog stava Rellich-a /10/ sleduje jednoznačna reprezentacija

$$x(s,t) = \eta(s,t) + \xi(s,t)$$

pri čemu je

$$\xi(s,t) \in H_x(0)$$

a

$$\eta(s,t) \perp H_x(0)$$

gde je

$$\|\eta(s,t)\| = \rho(x(s,t), H_x(0))$$

rastojanje $x(s,t)$ od podprostora $H_x(0)$.

Radi dalje karakterizacije neprekidnog homogenog slučajnog polja potrebno je uvesti sledeće pojmove i oznake:

prvo, stavimo

$$\Gamma_x^2(s,t) = \|\eta(s,t)\|^2.$$

Odavde je jasno da

$$\Gamma_x^2(s,t) = \Gamma_x^2(s',t) \equiv \Gamma_x^2(t)$$

i

$$\Gamma_x^2(t_1) \leq \Gamma_x^2(t_2) \text{ za } t_1 \leq t_2,$$

što znači da granična vrednost

$$\lim_{t\to+\infty} \Gamma_x^2(t)$$

postoji. Označimo ovu graničnu vrednost sa σ_∞^2, tj. $\sigma_\infty^2 = \lim_{t\to+\infty} \Gamma_x^2(t)$.

Sada smo u stanju da iskažemo sledeću definiciju:

Definicija 6. Neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ je **regularno** ako je

$$\sigma_\infty^2 = E|x(s,t)|^2 = \|x\|^2.$$

Stav 15. Potreban i dovoljan uslov, da je neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ regularno, je $S_x = 0$.

Dokaz. Iz

$$S_x = \bigcap_t H_x(t) = 0$$

sleduje da su podprostori $H_x(t)$ za svako t disjunktni, pa odatle za svaki element $x(s,t)$ polja $\{x(s,t)\}$ je

$$\|x\|^2 = E|x(s,t)|^2 = \sigma_\infty^2$$

što znači da je polje $\{x(s,t)\}$ regularno. Obratno, ako se pretpostavi da je za svaki element polja $\{x(s,t)\}$

$$\|x\|^2 = E|x(s,t)|^2 = \sigma_\infty^2$$

onda se lako pokazuje da je $S_x = 0$.

Sa $x_1(s,t)$ označićemo projekciju elementa $x(s,t)$ polja $\{x(s,t)\}$ na prostor S_x; stavimo

$$x_2(s,t) = x(s,t) - x_1(s,t).$$

Tada polje $\{x(s,t)\}$ ima sledeću reprezentaciju :

(9) $$x(s,t) = x_1(s,t) + x_2(s,t) \quad .$$

Stav 16. Za neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ koje ima reprezentaciju (9) važe sledeća tvrdjenja :

(i) homogeno slučajno polje $\{x_1(s,t)\}$ je singularno ;

(ii) homogeno slučajno polje $\{x_2(s,t)\}$ je regularno ; i

(iii) slučajna polja $\{x_1(s,t)\}$ i $\{x_2(s,t)\}$ su uzajamno ortogonalna.

Dokaz ovoga stava sledi neposredno iz definicija regularnog i singularnog slučajnog polja kao i stava 14. i reprezentacije (9).

Polja $\{x_1(s,t)\}$ i $\{x_2(s,t)\}$ zvaćemo ubuduće singularnom odnosno regularnom komponentom neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$.

Neka je dato $h > 0$. Sa $\text{proj}_{H_x(t-h)}x(s,t)$ označićemo projekciju od elementa $x(s.t)$ na prostor $H_x(t-h)$.
Stavimo dalje

$$\hat{x}_h(s,t) = x(s,t) - \text{proj}_{H_x(t-h)} x(s,t) .$$

Sada smo u stanju da damo sledeću definiciju:

Definicija 7. Neka je dato neprekidno homogeno slučajno polja $\{x(s,t)\}$ koje ima spektralnu reprezentaciju datu sa (2'). Tada postoji funkcija

$$C_h(\lambda,\mu) \in L^2\,(dF_x(\lambda,\mu))$$

takva da je:

(1o) $$\hat{x}_h(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\,C_h(\lambda,\mu)\,dZ_x(\lambda,\mu) .$$

$\{\hat{x}_h(s,t)\}$ je neprekidno homogeno slučajno polje čija je spektralna funkcija

$$F_{\hat{x}_h}(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} |C_h(\lambda,\mu)|^2\,dF_x(\lambda,\mu) .$$

Neprekidno homogeno slučajno polje $\{\hat{x}_h(s,t)\}$ zvaćemo filter transformacijom neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$.

Primetimo da je ovako uvedena definicija filter transformacije za neprekidna homogena slučajna polja $\{x(s,t)\}$ potpuno analogna sa reprezentacijom (4) filter transformacije u širem smislu stacionarnog slučajnog procesa $\{x(t)\}$, tretiranog u stavu 1.

Vratimo se sada ponovo Euklidskom prostoru R^n koji je tretiran

Neka je svaka tačka $x \in R^n$ data kao vektor :

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad , \qquad \text{gde je } e_1, e_2, \ldots, e_n$$

ortonormalna baza. Skalarni proizvod kao i normu uvešćemo kao obično :

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad , \qquad \|x\| = \sqrt{(x, x)} \; .$$

Za svako $h \in R^n$, τ_h će označavati translaciju

$$\tau_h x = x + h \qquad (x \in R^n).$$

Isto tako

$$\tau_h \varphi(x) \overset{def}{=} \varphi(\tau_h x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Sa $\mathcal{D}$ ćemo označavati prostor beskonačno diferencijabilnih kompleksno-vrednosnih funkcija definisanih na R^n sa kompaktnim suportima. Suport funkcije $\varphi \in \mathcal{D}$, tj. zatvorenost skupa

$$\{ x ; \varphi(x) \neq 0 \}$$

označavaćemo sa $S(\varphi)$.

U $\mathcal{D}$ ćemo uvesti Schwartz-ovu topologiju na uobičajeni način /8/. Sa $\mathcal{D}'$ označavaćeo konjugovani prostor distribucije od $\mathcal{D}$.

Formirajmo mnogostrukost $\mathcal{H}$ kompleksno-vrednosnih slučajnih promenljivih sa sredinama jednakim 0 i konačnim varijansama. Ako skalarni proizvod u $\mathcal{H}$ uvedemo na sledeći način

$$(XY) = E\,(X\bar{Y}),$$

onda je $\mathcal{H}$ Hilbert-ov prostor. Sada smo u stanju da damo sledeću definiciju :

Definicija 8. $\mathcal{H}$ - vrednosni neprekidni linearni funkcional definisan na prostoru $\mathcal{D}$ zvaćemo uopštenim slučajnim poljem /6 /.

Napomena. Ako su

$$\xi(\varphi_1) \quad \text{i} \quad \xi(\varphi_2)$$

funkcionalni definisani na prostoru $\mathcal{D}$ (tj., $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$) koji uzimaju vrednosti u $\mathcal{H}$, tada je pojam neprekidnosti, predpostavljen u definiciji 8. dat u sledećem smislu:

$$(1'') \qquad \lim_{\varphi_1 \to \varphi_2} E\,|\xi(\varphi_1) - \xi(\varphi_2)|^2 = 0, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D},$$

gde je konvergencija $\varphi_1 \to \varphi_2$ uobičajena konvergencija u Schwartz-ovoj topologiji kojom je snabdeven prostor $\mathcal{D}$.
Primetimo da je pretpostavka o neprekidnosti (1'') analogna pretpostavkama (1) i (1') o neprekidnosti u širem smislu stacionarnog slučajnog procesa $\{x(t)\}$, odnosno neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$.

Sada smo u stanju da uvedemo pojam uopštenog homogenog slučajnog polja koji odgovara pojmu homogenog slučajnog polja uvedenog u definiciji 4.

Definicija 9. Uopšteno slučajno polje $\underset{\sim}{F}$ je homogeno ako za svako $\underline{h} \in R^n$ važi relacija

(11) $$(\xi(\tau_h \varphi), \xi(\tau_h \psi)) = (\xi(\varphi), \xi(\psi))$$

za svako $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$.

Stav 17. Za uopšteno homogeno slučajno polje $\xi(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}$ važe sledeće relacije :

(i) $m(\varphi) = m(\tau_y \varphi)$ i

(ii) $B(\varphi_1, \varphi_2) = B(\tau_y \varphi_1, \tau_y \varphi_2)$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$, $\underline{y} \in R^n$,

gde su sa m(.) i B(.,.) označeni , respektivno, prvi i drugi momenat

$$E\, \xi(\varphi) \quad \text{i} \quad E\, \xi(\varphi_1)\overline{\xi(\varphi_2)}$$

uopštenog slučajnog polja $\xi(\varphi)$.

Dokaz sleduje neposredno iz definicije homogenog uopštenog slučajnog polja kao i iz osobine operatora τ_h .

Kao posledica ovoga stava je sledeći zaključak :

Ako je $\xi(\underline{x})$ obično homogeno slučajno polje tada je :

$$m(\underline{x}+\underline{y}) = m(\underline{x}) \Rightarrow m(\underline{x}) = m = const.$$

i

$$B(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = B(\underline{x}_1+\underline{y}_1, \underline{x}_2+\underline{y}_1) \Rightarrow B(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = B(\underline{x}_1 - \underline{x}_2).$$

Osnovna osobina uopštenog slučajnog polja $\xi(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ data je od strane ЯГЛОМ-а /2/ i odnosi se na spektralnu reprezentaciju funkcionala $m(\varphi)$ i $B(\varphi_1, \varphi_2)$. Ova osobina je u neku ruku analogon odgovarajućim spektralnim reprezentacijama za stacionarne slučajne procese odnosno homogena slučajna polja.

Naime, za svako uopšteno homogeno slučajno polje $\xi(\varphi)$ u R^n sredina $m(\varphi)$ i korelacioni funkcional $B(\varphi_1, \varphi_2)$ izraženi su u obliku

$$m(\varphi) = m\tilde{\varphi}(\underline{0}),$$

gde je

$$\underline{0} = \{0, 0, \ldots, 0\}$$

i

$$B(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{R^n} \tilde{\varphi}_1(\underline{\lambda})\overline{\tilde{\varphi}_2(\underline{\lambda})} F(d\underline{\lambda})$$

gde je m konstanta, a

$$\tilde{\varphi}(\underline{\lambda}) = \int e^{i\underline{\lambda}\underline{x}} \varphi(\underline{x})\, d\underline{x}$$

je Fourier-ova transformacija funkcije $\varphi(s)$, $F(S)$ je mera na n-dimenzionalnom prostoru P_n, takva da je nejednakost

$$\int_{P_n} \frac{F(d\lambda)}{(1+\lambda^2)^p} < +\infty, \quad \lambda = |\underline{\lambda}| = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{1/2},$$

zadovoljena za neki nenegativni broj p.

Funkciju $F(S)$ zvaćemo spektralnom merom polja $\xi(\varphi)$.

Da bi se mogao uvesti pojam slučajne Lebesgue-ove mere, potrebno je prethodno dati neke definicije koje se odnose na uopštena slučajna polja.

<u>Definicija 10.</u> Uopštena slučajna polja ξ_1 i ξ_2 su uzajamno ortogonalna ako je za svaki par $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$

$$(\xi_1(\varphi), \xi_2(\psi)) = 0.$$

<u>Definicija 11.</u> (Gelfand /7/). Uopšteno slučajno polje ξ ima ortogonalne vrednosti ako za svaki par $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ za koji je

$$\sigma(\varphi) \cap \sigma(\psi) = \emptyset$$

važi

$$(\xi(\varphi), \xi(\psi)) = 0$$

<u>Definicija 12.</u> Uopšteno slučajno polje ξ ima skoro svuda ortogonalne vrednosti ako postoji pozitivan broj q takav da je za svaki par $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ čiji se suporti $\sigma(\varphi)$ i $\sigma(\psi)$ razlikuju za više od q,

$$(\xi(\varphi), \xi(\psi)) = 0.$$

Neka je A podskup Hilbert-ova prostora $\mathcal{H}$. Sa $[A]$ označavaćemo najmanji podprostor od $\mathcal{H}$ koji sadrži skup A.

Neka je dato uopšteno slučajno polje ξ. Sa $\mathcal{F}$ označavaćemo sledeći podprostor od $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{F} = [\{\xi(\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}\}].$$

Stavimo

$$T_{\underline{h}}\, \xi(\varphi) = \xi(\tau_{\underline{h}} \varphi), \quad \underline{h} \in R^n, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Poznati rezultat /5/ tvrdi da se $\{T_{\underline{h}}\}, \underline{h} \in R^n$ može produžiti do Abell-ove grupe unitarnih transformacija na ξ. Egzistencija ovakvog jednog proširenja je ekvivalentna sa uslovom homogenosti uopštenog slučajnog polja. Dokaz ove ekvivalencije je analogan sa dkazom o sličnoj egzistenciji grupe izometričnih preslikavanja kod kompleksnog u širem smislu stacionarnog slučajnog procesa, a što je bilo dato na početku ovoga rada. Preciznije, ovo bi bio analogon ekvivalenciji definicija 1. i 1'. za u širem smislu stacionarne slučajne procese.

Neka je $\underline{F}$ uopšteno slučajno polje; sa $\mathcal{B}$ ćemo označavati klasu svih Borel-ovih podskupova od R^n sa konačnom Lebesgue-ovom merom.

<u>Definicija 13.</u> Neka je $\underline{M}$ $\mathcal{F}$ -vrednosna funkcija (preciznije koja uzima vrednosti u $\mathcal{F}$) definisana na klasi $\mathcal{B}$. Funckiju $\underline{M}$ zvaćemo slučajnom <u>Lebesgue-ovom merom</u> ako ispunjava sledeće uslove :

(i) $T_h M(E) = M(\tau_{\underline{h}} E)$, $\underline{h} \in R^n$, $E \in \mathcal{B}$.

(ii) $M(E_1) \perp M(E_2)$ za $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

(iii) Ako su $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}$ disjunktni skupovi i

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B},$$

onda je

$$M(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} M(E_i) .$$

(iv) Ako sa I_o označimo jedinični interval u R^n , onda

$$\| M(I_o) \| = 1.$$

Potpuno na analogan način imamo $\overbrace{\text{za}}^{\text{uvodjenje sl. Leb. mere}}$ obična slučajna polja. Naime, neka je dato neprekidno homogeno slučajno polje $\{\xi(\underline{x}), \underline{x} \in R^2\}$ uvedeno definicijom 4. Kao što je naglašeno $\{\xi(\underline{x})\}$ čini Hilbert-ov prostor koji ćemo označiti sa $\mathcal{H}$. Ako je $\underline{A}$ podskup Hilbert-ova prostora $\mathcal{H}$ onda ćemo sa $[A]$ označavati najmanji podprostor od $\hat{\mathcal{H}}$ koji sadrži $\underline{A}$.

Sa $\hat{\mathcal{F}}$ označavaćemo podprostor od $\hat{\mathcal{H}}$ definisan na sledeći način :

$$\hat{\mathcal{F}} = [\{\xi(\underline{x}) , \underline{x} \in R^2\}] .$$

Dalje, sa $\hat{\mathcal{B}}$ ćemo označavati klasu svih Borel-ovih podskupova od R^2 sa konačnom Lebesgue-ovom merom.

Sada smo u stanju da uvedemo sledeću definiciju:

<u>Definicija 14.</u> Neka je $\hat{\underline{M}}$ $\hat{\mathcal{F}}$ -vrednosna funkcija definisana na klasi $\hat{\mathcal{B}}$. Funkciju $\hat{\underline{M}}$ zvaćemo <u>slučajnom Lebesgue-ovom merom</u> ako ispunjava sledeće uslove :

(i) $T_{\underline{h}} \hat{M}(E) = \hat{M}(\tau_{\underline{h}} E)$, $\underline{h} \in R^2$, $E \in \hat{\mathcal{B}}$.

(ii) $\hat{M}(E_1) \perp \hat{M}(E_2)$, za $E_1, E_2 \in \hat{\mathcal{B}}$ i $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

(iii) Ako su $E_1, E_2, \ldots \in \hat{\mathcal{B}}$ medjusobom disjunktni skupovi i ako

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \hat{\mathcal{B}} ,$$

onda

$$\hat{M}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{M}(E_i) .$$

(iv) $\|\hat{M}(\underline{0})\| = 0$.

Operator $T_{\underline{h}}$ koji figuriše pod (i) definisan je na sličan način kako je to bilo učinjeno za uopštena slučajna polja. Skup transformacija $\{T_{\underline{h}}\}$, $\underline{h} \in R^2$ može se takodje produžiti do Abel-ove grupe unitarnih preslikavanja na $\mathcal{H}$, a što je ekvivalentno uvodjenju pretpostavke o homogenosti slučajnog polja $\{\xi(x)\}$.

Koristeći se ovako uvedenim pojmom slučajne Lebesgue-ove mere neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ u stanju smo da pokažemo sledeće osobine slučajnih polja $\{x(s,t)\}$ i njegove filter transformacije $\{\hat{x}_h(s,t)\}$ koju smo napred uveli.

Stav 18. Za neprekidno homogenoslučajno polje $\{x(s,t)\}$, koje ima spektralnu reprezentaciju datu sa (2') i čija je filter-transformacija neprekidno homogeno polje $\{\hat{x}_h(s,t)\}$, važi sledeće:

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} |C_h(\lambda,\mu)|^2 dF_x(\lambda,\mu) = 0 \quad (|t| \geq h),$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} C_h(\lambda,\mu) dF_x(\lambda,\mu) = 0, \quad (t \geq h).$$

Dokaz. Sledujeiz činjenica da je

$$\underline{E}\left\{ \hat{x}_h(s_2,t_2)\, \overline{\hat{x}_h(s_1,t_1)} \right\} = 0, \quad (t_2 - t_1 \geq h),$$

i

$$\underline{E}\left\{ \hat{x}_h(s_2,t_2)\, \overline{x(s_1,t_1)} \right\} = 0, \quad (t_2 - t_1 \geq h).$$

Sledeći stav iskazuje osobinu apsolutne neprekidnosti slučajne Lebesgue-ove mere koja karakteriše slučajna polja $\{x(s,t)\}$ i $\{\hat{x}_h(s,t)\}$.

<u>Stav 19.</u> Neka je $\{x(s,t)\}$ neprekidno homogeno slučajno polje čija je filter transformacija neprekidno homogeno slučajno polje $\{\hat{x}_h(s,t)\}$. Tada je za svaki prirodan broj **h** mera $dF_{\hat{x}_h}(\lambda,\mu)$ apsolutno neprekidna u odnosu na meru

$$\sum_{h=1}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{h+|j|}}\,dF_x\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h},+\infty\right)d\mu,$$

pri čemu je

$$F_x(\lambda,+\infty)=\int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}dF_x(\lambda,\mu)$$

gde je $F_x(\lambda,\mu)$ spektralna funkcija polja $\{x(s,t)\}$.

<u>Dokaz.</u> Neka su **m** i **n** celi brojevi, a **h** prirodan broj. Tada, skup vrednosti $\hat{x}_h(mh,nh)$ filter transfrmacije slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ obrazuje homogeno slučajno polje sa diskretnim parametrom. Kako je na osnovi predhodnog stava

$$E\{\hat{x}_h(s_2,t_2)\,\overline{\hat{x}_h(s_1,t_1)}\}=0,\qquad t_2-t_1\geq h,$$

to se korelaciona funkcija polja   može napisati u obliku

$$(+)\qquad B_{\hat{x}_h}(mh,nh)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}\,dN_h(\lambda)\,d\mu$$

gde je $N_h(\lambda)$ spektralna funkcija stacionarnog niza $\{\hat{x}_h(mh,0)\}$. Za polje $\{\hat{x}_h(s,t)\}$ korelaciona funkcija ima oblik

$$B_{\hat{x}_h}(s,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(s\lambda+t\mu)}\,dF_{\hat{x}_h}(\lambda,\mu)$$

odnosno, u specijalnom slučaju :

$$(++)\qquad B_{\hat{x}_h}(mh,nh)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(m\lambda+n\mu)}\,dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda}{h},\frac{\mu}{h}\right)$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i(m\lambda+n\mu)}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{2j\pi+\lambda}{h},\frac{2l\pi+\mu}{h}\right).$$

Uporedjivanjem relacija (+) i (++) dobijamo :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, \frac{\mu+2l\pi}{h}\right) = \frac{1}{2\pi}\, dN_h(\lambda)\, d\mu.$$

Iz (++) sleduje opet

$$B_{\hat{x}_h}(mh, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imh\lambda}\, dF_{\hat{x}_h}(\lambda, \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\lambda}\, dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda}{h}, +\infty\right)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{(2j-1)\pi}^{(2j+1)\pi} e^{im\lambda}\, dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda}{h}, +\infty\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\lambda} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right).$$

Na osnovu prethodnog i poslednje relacije imamo :

$$dN_h(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right),$$

odakle,

$$(*) \quad \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, \frac{\mu+2l\pi}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu .$$

Kako je za filter transformaciju $\{\hat{x}_h(s,t)\}$ spektralna funkcija data relacijom

$$F_{\hat{x}_h}(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} |C_h(\lambda,\mu)|^2\, dF_x(\lambda, \mu),$$

to sleduje da je mera $dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right)$ apsolutnog neprekidna u odnosu na meru $dF_x\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right)$.

Na osnovu relacije ($*$) sledi da je mera

$$\sum^{+\infty} \sum^{+\infty} dF_{\hat{x}_h}\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, \frac{\mu+2l\pi}{h}\right)$$

apsolutno neprekidna u odnosu na meru

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_\alpha\left(\frac{\lambda+2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu .$$

Na osnovu ovoga je zaključak da je mera $dF_{\hat{\alpha}_h}(\lambda,\mu)$ apsolutno neprekidna u odnosu na meru

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} dF_\alpha\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu ,$$

i prema tome, u odnosu na meru

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{h+|j|}} dF_\alpha\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu .$$

Za svako prirodno $\underline{h}$ mera $dF_{\hat{\alpha}_h}(\lambda,\mu)$, koja je apsolutno neprekidna u odnosu na meru

$$\sum_{h=1}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{h+|j|}} dF_\alpha\left(\lambda+\frac{2j\pi}{h}, +\infty\right) d\mu ,$$

ne zavisi od $\underline{h}$. Na taj način stav 19. je u potpunosti dokazan.

Na osnovu ovoga stava izvlači se čitav niz osobina slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ i njegove filter-transformacije - slučajnog polja $\{\hat{\alpha}_h(s,t)\}$.

Pre nego što se zadržimo na osobinama homogenih slučajnih polja $\{x(s,t)\}$ i $\{\hat{\alpha}_h(s,t)\}$ navodimo jednu važnu osobinu mere koja karakteriše homogeno slučajno polje.

Neka je na R^2 dato neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ čija je spektralna funkcija $F_\alpha(\lambda,\mu)$. Neka su dalje, dati (λ,μ)-skupovi $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ takvi da je $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i \neq j$,

i da je
$$\bigcup_{j=1}^{\nu} A_j = R^2 .$$

Pretpostavimo da su svi skupovi A_j merljivi u odnosu na meru $dF_\alpha(\lambda,\mu)$. Tada se polje $\{x(s,t)\}$ može napisati u obliku zbira od $\underline{\nu}$ uzajamno ortogonalnih neprekidnih homogenih slučajnih polja $\{x^{(j)}(s,t)\}$, $j=1,\dots,\nu$, čije su spektralne funkcije $F_\alpha^{(j)}(\lambda,\mu)$, $j=1,\dots,\nu$, date na skupovima A_j.

To se postiže na ovaj način : na osnovu (2') je

$$x(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, dZ_x(\lambda,\mu)$$

gde je

$$\underline{\underline{E}}\, Z_x(S)\, \overline{Z_x(S')} = \iint_{S\times S'} dF_x(\lambda,\mu);$$

Stavimo dalje

$$x^{(j)}(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, \Phi_j(\lambda,\mu)\, dZ_x(\lambda,\mu)$$
$$j = 1, 2, \ldots, \nu,$$

gde je

$$\Phi_j(\lambda,\mu) = \begin{cases} 1, & (\lambda,\mu)\in A_j \\ 0, & (\lambda,\mu)\notin A_j. \end{cases}$$

Svako polje $\{x^{(j)}(s,t)\}$, $j=1,2,\ldots,\nu$, je neprekidno homogeno čija je spektralna funkcija $F_x^{(j)}(\lambda,\mu)$ data sa :

$$F_x^{(j)}(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} \Phi_j(\lambda,\mu)\, dF_x(\lambda,\mu), \quad j=1,2,\ldots,\nu.$$

Lako se uočava da je distribucija $F_x^{(j)}(\lambda,\mu)$ cela data na skupu A_j.

Dalje je

$$\underline{\underline{E}}\left\{ x^{(j)}(s_2,t_2)\, \overline{x^{(k)}(s_1,t_1)} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[(s_2-s_1)\lambda+(t_2-t_1)\mu]}\, \Phi_j(\lambda,\mu)\,\Phi_k(\lambda,\mu)\, dF_x = 0,$$

za $l \neq k$.

Ovo razlaganje može biti izraženo pomoću napred uvedene filter transformacije slučajnog polja $\{x(s,t)\}$. (Ovo će biti dato preciznije nešto kasnije).

Sledeći specijalan slučaj razlaganja homogenog polja $\{x(s,t)\}$ igra važnu ulogu. Neka je $\underline{F}$ spektralna funkcija neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$. Tada se $\underline{F}$ može predstaviti u obliku zbira

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

gde je F_1 stepenasta funkcija sa skokovima u tačkama prekida funkcije $\underline{F}$, F_2 apsolutno neprekidna komponenta spektralne funkcije $\underline{F}$, a F_3 je neprekidna monotono nerastuča funkcija koju nazivamo singularnom komponentom spektralne funkcije $\underline{F}$.

Ovom razlaganju spektralne funkcije $\underline{F}$ odgovara sledeće razlaganje neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$:

$$x(s,t) = x^{(1)}(s,t) + x^{(2)}(s,t) + x^{(3)}(s,t)$$

pri čemu su slučajna polja $\{x^{(1)}\}$, $\{x^{(2)}\}$, $\{x^{(3)}\}$ uzajamno ortogonalna.

Koristeći ovo, i stav 19. (koji je "u neku ruku" analogon stavu 6. za slučajne procese) u stanju smo da pokažemo sledeći stav.

<u>Stav 2o.</u> Neka je dato neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ čija je filter transformacija neprekidno homogeno slučajno polje $\{\hat{x}_h(s,t)\}$. Ako je $\underline{h}$ prirodan broj, onda je :

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |C_h(\lambda,\mu)|^2 \, d\bar{F}_x(\lambda,\mu) = 0;$$

$$\text{(ii)} \quad F_{\hat{x}_h}(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\mu} |C_h(\lambda,\mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dp_x(\lambda)\,d\mu} \, dp_x(\lambda)\,d\mu;$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} |C_h(\lambda,\mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dp_x(\lambda)\,d\mu} \, dp_x(\lambda)\,d\mu = 0, \quad (|t| \geq h);$$

$$\text{(iv)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda s+t\mu)} C_h(\lambda,\mu) \frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dp_x(\lambda)\,d\mu} \, dp_x(\lambda)\,d\mu = 0; \quad (t \geq h);$$

$$\text{(v)} \quad E|\hat{x}_h(s,t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |C_h(\lambda,\mu)|^2 \frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dp_x(\lambda)\,d\mu} \, dp_x(\lambda)\,d\mu,$$

gde je

$$dp_x(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|k|+|j|}} \, dF_x\left(\lambda + \frac{2\pi j}{h}, +\infty\right),$$

mera $dF_x(\lambda, \mu)$ je singularni deo mere $dF_x(\lambda,\mu)$ u odnosu na meru $dp_x(\lambda)\, d\mu$;

$$\frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dp_x(\lambda)\, d\mu}$$

je izvod apsolutno neprekidnog, u odnosu na $dp_x(\lambda)\, d\mu$, dela mere $dF_x(\lambda,\mu)$ po meri $dp_x(\lambda)\, d\mu$.

Dokaz se izvodi pomoću stavova 18. i 19. i činjenice da je

$$F_{\hat{\alpha}_h}(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{\mu} |C_h(\lambda,\mu)|^2 \, dF_x(\lambda,\mu),$$

pri čemu je iskorišćeno razlaganje spektralne funkcije na komponente F_1, F_2, F_3.

Sledeći stavovi daju osobine regularnog i singularnog neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ a dobijeni su korišćenjem pojma napred uvedene filter transformacije polja $\{x(s,t)\}$.

<u>Stav 21.</u> Da bi neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ čija je spektralna reprezentacija data sa (2'), bilo singularno, potrebno je i dovoljno da bude $\hat{\alpha}_h(s,t) \equiv 0$.

<u>Dokaz.</u> Sledi iz činjenice da je

$$\hat{\alpha}_h(s,t) = x(s,t) - \operatorname{proj}_{H_x(t-h)} x(s,t),$$

i reprezentacije

$$\hat{\alpha}_h(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} C_h(\lambda,\mu)\, dZ_x(\lambda,\mu),$$

gde

$$C_h(\lambda,\mu) \in L^2\left(dF_x(\lambda,\mu)\right).$$

<u>Posledica stava 21.</u> Ako je filter transformacija neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ jednaka identički nuli, tada je za svako $h > 0$ polje

$$\left\{ \operatorname{proj}_{H_x(t-h)} x(s,t) \right\}$$

singularno.

Stav 22. Da bi filter transformacija $\{\hat{x}_h(s,t)\}$ neprekidnog homogenog polja $\{x(s,t)\}$ bila identično preslikavanje potrebno je i dovoljno da bude

$$\text{proj}_{H_x(t-h)}\, x(s,t) = 0$$

za svako h >0.

Dokaz ovoga stava sleduje iz činjenice da je

$$\hat{x}_h(s,t) = x(s,t) - \text{proj}_{H_x(t-h)}\, x(s,t)$$

za h >0.

Sledeći stav karakteriše reprezentaciju regularnog neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$.

Stav 23. Ako je $\{x(s,t)\}$ regularno neprekidno homogeno slučajno polje za koje je :

$$(*)\quad x_\nu(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, dZ_x^{(\nu)}(\lambda,\mu),$$

$$\nu = 1, 2,$$

gde je

$$(**)\quad Z_x^{(1)}(A) = Z_x(A\bar{M}_0),\quad Z_x^{(2)}(A) = Z_x(A\bar{M}_0),$$

pri čemu je M_0 skup tačaka (λ,μ) takav da je

$$d\bar{F}_x(A) = d\bar{F}_x(AM_0)$$

za svaki merljivi skup A tačaka (λ,μ), i

$$\int_{M_0} d\rho_x(\lambda)\, d\mu = 0 ,$$

onda važi reprezentacija

$$\hat{x}_h(s,t) = \sum_{\nu=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, C_h(\lambda,\mu)\, dZ_x^{(\nu)}(\lambda,\mu)$$

Dokaz. Kako je mera

$$d\bar{F}_x(\lambda,\mu)$$

singularni deo mere $dF_x(\lambda,\mu)$ u odnosu na meru $d\rho_x(\lambda)\,d\mu$, to postoji (λ,μ)-skup M_0 takav da je

$$d\bar{F}_x(A) = d\bar{F}_x(A\bar{M}_0)$$

za svaki merljivi (λ,μ)-skup A i da je pritom :

$$\int_{M_0} d\rho_x(\lambda)\, d\mu = 0.$$

Kako je prema pretpostavci

$$x_\nu(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} dZ_x^{(\nu)}(\lambda,\mu), \quad \nu=1,2,$$

gde je

$$Z_x^{(1)}, \quad Z_x^{(2)} \quad \text{dato sa } (*) \text{ i } (**),$$

za svaki merljivi (λ,μ)-skup A, to iz $(*)$, $(**)$ i reprezentacij

$$\hat{x}_h^{(\nu)}(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} C_h(\lambda,\mu)\, dZ_x^{(\nu)}(\lambda,\mu), \quad \nu=1,2,$$

sleduje

$$\hat{x}_h(s,t) = \sum_{\nu=1}^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} C_h(\lambda,\mu)\, dZ_x^{(\nu)},$$

što je trebalo pokazati.

Ovaj stav daje neku vrstu "dekompozicije" filter transformacij je slučajnog polja $\{x(s,t)\}$. (videli str. 27).

Stav 24. Sa pretpostavkama i oznakama iz prethodnog stava sleduje relacija :

$$\hat{x}_h(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} C_h(\lambda,\mu)\, dZ_x^{(1)}.$$

Dokaz. Ako iskoristimo prethodni stav i tvrdjenje (i) stava 2o., imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |C_h(\lambda,\mu)|^2 dF_{x_2}(\lambda,\mu) = \iint_{M_0} |C_h(\lambda,\mu)|^2 dF_x(\lambda,\mu) =$$

$$= \iint_{M_0} |C_h(\lambda,\mu)|^2 d\bar{F}_x(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |C_h(\lambda,\mu)|^2 d\bar{F}_x = 0.$$

Odakle,

$$\hat{x}_h = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)} C_h(\lambda,\mu)\, dZ_x^{(1)}(\lambda,\mu),$$

što je i trebalo dokazati.

Osnovni rezultat o reprezentaciji regularnog neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ potiče od Čang-Ce-Peja /4/ i izražava se sledećim stavom.

Stav. Da bi neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ bilo regularno potrebno je i dovoljno da ima reprezentaciju

$$x(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\lambda} g(\lambda, t+\mu)\, d\xi(\lambda,\mu) \tag{12}$$

gde je $d\xi(\lambda,\mu)$ slučajna Lebesgue-ova mera uvedena definicijom 14. koja ispunjava sledeća svojstva :

(i) $\xi(A)$ je slučajna veličina za svaki merljivi (λ,μ) skup A;

(ii) za proizvoljne skupove A_1 i A_2 tačaka (λ,μ) koji su merljivi u odnosu na $dK(\lambda)\,d\mu$ važi

$$\xi(A_1+A_2)=\xi(A_1)+\xi(A_2)\,;$$

(iii) za svaki merljivi par skupova A_1 i A_2 je

$$E\left\{\xi(A_1)\,\overline{\xi(A_2)}\right\}=\iint_{A_1\times A_2} dK(\lambda)\,d\mu$$

gde je $dK(\lambda)$ neka mera definisana na osi λ a funkcija

$$g(\lambda,\mu)\in L^2\left(dK(\lambda)\,d\mu\right)$$

sa osobinom

$$g(\lambda,\mu)=0 \qquad \text{za } \mu\leq 0.$$

Naš osnovni cilj je da sada damo reprezentaciju regularnog neprekidnog homogenog slučajnog polja pomoću napred uvedenih pojmova filter transformacije slučajnog polja i slučajne Lebesgue-ove mere koja karakteriše jedno takvo polje.

Preciznije, dajemo sledeći stav kojim se izražava veza između slučajnog polja i njegove filter transformacije kada je slučajno polje regularno.

<u>Stav 25.</u> Za svako regularno neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ postoji regularno neprekidno homogeno slučajno polje $\{\hat{x}(s,t)\}$ takvo da se slučajno polje $\{x(s,t)\}$ dobija kao filter transformacija slučajnog polja $\{\hat{x}(s,t)\}$, pri čemu imamo sledeću reprezentaciju

$$x(s,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\,c(\lambda,\mu)\,d\xi(\lambda,\mu)$$

gde

$$d\xi(\lambda,\mu)$$

je slučajna Lebesgue-ova mera uvedena u definiciji 14. a funkcija

$$C(\lambda,\mu) = L^2\,(dF(\lambda,\mu))\,,$$

gde je F spektralna funkcija slučajnog polja $\{\tilde{x}(s,t)\}$.

Dokaz. Koristeći se rezultatima datim u radu /4/ imamo sledeću kanoničnu reprezentaciju regularnog neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$;

$$(*) \quad x(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s}\, g(\lambda, t-\mu)\, d\eta\,(\lambda,\mu)$$

gde je

$$g(\lambda,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{A\to+\infty}{l.i.m.} \int_{-A}^{+A} e^{i\mu u}\, C(\lambda,u)\, du$$

sa

$$(**)\begin{cases} C(\lambda,u) = \lim\limits_{v\to 0-0} C(\lambda, u+iv) \\ \text{i} \\ C(\lambda,\omega) = K(\lambda)\exp\left\{-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\mu\omega}{\mu-\omega}\cdot\frac{\log \dfrac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,+\infty)\,d\mu}}{1+\mu^2}\, d\mu\right\}, \\ \operatorname{Im}\{\omega\} < 0, \end{cases}$$

gde je $K(\lambda)$ merljiva kompleksna funkcija koja zadovoljava uslov:

$$|K(\lambda)| = 1.$$

Polazeći od $(*)$ koje važi za posmatrano slučajno polje $\{x(s,t)\}$, i koristeći osobinu datu u $(**)$, imamo sledeće: stavimo

$$\xi(S) = \iint\limits_S \frac{dZ_x(\lambda,\mu)}{C(\lambda,\mu)}\,,$$

gde je Z_x slučajna funkcija dveju promenljivih koja figuriše u spektralnoj reprezentaciji (2') neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$.

Tada funkcija $\xi(S)$ ima sledeće osobine:

(i) $\xi(S)$ je slučajna funkcija s obzirom na činjenicu da je $Z_x(\lambda,\mu)$ slučajna funkcija.

(ii) Ako su S_1 i S_2 disjunktni skupovi, tada je:

$$\xi(S_1+S_2) = \iint_{S_1+S_2} \frac{dZ_x(\lambda,\mu)}{C(\lambda,\mu)} =$$

$$= \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \xi(S_1) + \xi(S_2)$$

s obzirom na činjenicu da je slučajna funkcija $Z_x(\lambda,\mu)$ sa nezavisnim priraštajima.

(iii) Za proizvoljne merljive skupove S_1 i S_2 imamo

$$\underline{\underline{E}}\{Z_x(S_1)\overline{Z_x(S_2)}\} = \iint_{S_1 x S_2} dF_x(\lambda,+\infty)\,d\mu.$$

Iz (i) - (iii) sleduje da je $\xi(S)$ slučajna Lebesgue-ova mera koja karakteriše slučajno polje koje ćemo označiti sa $\{\tilde{x}(s,t)\}$.

Ovo slučajno polje je neprekidno i homogeno.

Na osnovu ovoga sleduje sledeća reprezentacija regularnog neprekidnog homogenog slučajnog polja $\{x(s,t)\}$

$$x(s,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\,C(\lambda,\mu)\,d\xi(\lambda,\mu),$$

gde $C(\lambda,\mu)$ zadovoljava uslove date napred, i

$$C(\lambda,\mu) \in L^2\ (dF(\lambda,\mu))$$

gde je $\underline{F}$ spektralna funkcija polja $\{\tilde{x}(s,t)\}$ koje je okarakterisano slučajnom Lebesgue-ovom merom $d\xi(\lambda,\mu)$.

Lako je pokazati da za polje $\{\tilde{x}(s,t)\}$ sledeća relacija važi:

$$\tilde{x}(s,t) = \tilde{\xi}(s,t) + \tilde{\eta}(s,t) \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} r^2(s,t) = \|\tilde{\eta}(s,t)\|^2 = \underline{E}|\tilde{x}|^2 = \sigma_\infty$$

tj., da je $\{\tilde{x}(s,t)\}$ regularno slučajno polje.

Navedeni stav ima dvojaki smisao:

prvo, pokazuje egzistenciju jednog regularnog polja, i

drugo, daje reprezentaciju posmatranog polja u obliku jedne filter transformacije.

Od Čang-Če-Peja /4/ potiče sledeći zaključak:

Da bi neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$ bilo singularno potrebno je i dovoljno da skoro svuda na -osi (u odnosu na meru $dF_x(\lambda,+\infty)$) bude

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,+\infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu = +\infty,$$

gde je

$$\frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,+\infty)\,d\mu}$$

izvod apsolutno neprekidnog, u odnosu na $dF_x(\lambda,+\infty)$, dela mere $dF_x(\lambda,\mu)$ po meri $dF_x(\lambda,+\infty)d\mu$.

Sada smo u stanju da iskažemo sledeći stav:

<u>Stav 26.</u> Ako je za neprekidno homogeno slučajno polje $\{x(s,t)\}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\log \dfrac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,+\infty)\,d\mu}\right|}{1+\mu^2}\,d\mu = +\infty$$

gde je

$$\frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_x(\lambda,+\infty)\,d\mu}$$

izvod apsolutno neprekidnog, u odnosu na $dF_x(\lambda,+\infty)$ dela mere $dF_x(\lambda,\mu)$ po meri $dF_x(\lambda,+\infty)d\mu$, onda postoji funkcija $C(\lambda,\mu)\in L^2\,(dF_x(\lambda,\mu))$ tako da je filter transformacija slučajnog polja $\{x(s,t)\}$ jednaka nuli, tj.,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\,C(\lambda,\mu)\,dZ_x(\lambda,\mu)=0.$$

Dokaz sledi iz stava 21. i činjenice da za svako polja $\{x(s,t)\}$ važi reprezentacija

$$x(s,t) = x_1(s,t) + x_2(s,t)$$

gde je $\{x_1\}$ singularno a $\{x_2\}$ regularno slučajno polje, pri čemu su polja $\{x_1\}$ i $\{x_2\}$ uzajamno ortogonalna.

Lako se pokazuje da je na osnovu gornjih pretpostavki

$$x_2(s,t) \equiv 0 \quad ,$$

odnosno da je

$$\iint_N dF_x(\lambda,\mu) = 0,$$

gde je N (λ, μ)-skup definisan pomoću relacija

$$Z_{x_1}(A) = Z_x(A\bar{N})$$
$$Z_{x_2}(A) = Z_x(A\bar{N}),$$

gde je A proizvoljni merljivi (λ, μ)-skup a Z_x funkcija dveju slučajnih promenljivih koja ima nezavisne priraštaje i preko koje se slučajno polje $\{x(s,t)\}$ spektralno reprezentuje.

Na osnovu ovoga sleduje da je polje $\{x(s,t)\}$ singularno pa prema stavu 21. sleduje egzistencija funkcije

$$C(\lambda,\mu) \in L^2(dF_x(\lambda,\mu))$$

koja daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s\lambda+t\mu)}\, C(\lambda,\mu)\, dZ_x = 0,$$

što je trebalo pokazati.

Smisao ovoga rada bio je da pokaže neka svojstva neprekidnih homogenih slučajnih polja pomoću napred uvedenog pojma filter transformacije slučajnog polja. Ideja za uvodjenje filter transformacije je sasvim prirodan tok razvitka teorije slučajnih polja. Naime, neprekidna homogena slučajna polja su prirodno proširenje kompleksnih u širem smislu stacionarnih slučajnih procesa ; kod ovih poslednjih, kao što je to bilo pokazano u uvodnom delu našega izlaganja, filter transformaciojom je uveden čitav niz lokalnih pa i nekih integralnih svojstava.

Zbog toga je naše proučavanje imalo za cilj da pokaže neka da ih tako nazovemo "u širem smislu lokalna svojstva" neprekidnih homogenih slučajnih polja, koja omogućavaju da se razradi matematička aparatura koja je kao i kod slučajnih procesa, mada je kod poslednjih situacija bolja, za sada još uvek nedovoljno teorijski razradjena i stoga vrlo oskudna što izaziva nesavladive teškoće kod pokušaja primene njenih rezultata na neke probleme statističke teorije turbulencije /20/, prognoze kretanja vazdušnih slojeva i sličnih.

Potreba da se što bolje opišu neki tehnički problemi (kao što je "beli šum", na primer), dovela je do uvodjenja pojma, slično kao što je to bio slučaj i kod slučajnih procesa, uopštenih slučajnih polja /6/ , /7/ , koja smo mi naveli u našem radu.

Slični problemi karakterizacije analitičkih svojstva koja je ovde učinjena za obična neprekidna homogena slučajna polja mogu se postaviti i za uopštena slučajna polja. To su delimično učinili Jaglom /2/, Ito /3/ i Urbanik /6/.

LITERATURA

/1/ Yaglom: Introduction to the theory of stationary random functione, The successes of methematical sciences, Moskou, t.VII, vol. 5(51), (1952),3-158.

/2/ Yaglom: Some classes of random fields, Probability theory and its applications, Moskou, t. III, vol. 3 (1957).

/3/ K.Ito : Stationary random distributions, Mem.Col.Sci.Univ. Kyoto, Ser. A, 28, 2o9-223 (1954).

/4/ Chiang-Ce-Pej: Linear extrapolation of the continuous homogeneous random field. Probability theory and its application. t. II, vol. 1, (1957), 6o-91.

/5/ J.L.Doob: Stochastic processes, New-York, 1953.

/6/ K.Urbanik: Contrib tion to the theory of generalized stationary random fields, Proceedings of the second Praque conference in information theory, random functions and statistical decision theor , Praque, 196o.

/7/ Geljfand: Obebšćenie slučajnie procesi, Dokladi, 1955.

/8/ L.Schwartz: Theorie des distributions, t. I i II, Hermann, Paris, 1957.

/9/ M.Loeve: Probability theory, New-York, 196o.

/10/ F.Rellich: Spektraltheorie in nichtseparablen Raume, Math. Ann. 1934, (11o), 346-356.

/11/ R.Paley,N. Wiener: Fourier transforms in complex domain, New-York, 1939.

/12/ A.Kolmogorov: Stacionarnie posledovateljnosti v gilbertovom prostranstve, Biljteb Moskovskovo Universiteta, 2, vip. 6 (1941), 1-4o.

/13/ A.Kolmogorov: Interpolirovanie i ekstrapolirovanie stacionarnih slučajnih posledovateljnosti, Izv. AN. SSSR, ser. matem., 5, No. 5 (1941), 3-14.

/14/ K.Karhunen: Uber linearen methoden in der Warhsheinlichkeiterechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicas, I,No.37 (1947), 3-79).

/15/ K.Karhunen: Uber die Structur stationarer sufalligen Funkticnen, Ark, fur Math., I, No. 2, (1950), 141-160.

/16/ O.Hanner: Linear extrapolation of stationary stochastic procceses, Ark, fur Math., I, No. 2, (1950).

/17/ S.Bocner: Harmonic Analysis and theory of probability, Berkeley, 1955.

/18/ N.Wiener: The Fourier integral and certain of its applications, New-York, 1933.

/19/ РОЗАНОВ: ТЕОРИЈА СТАЦИОНАРНИХ СЛУЧАЈНИХ ПРОЦЕСА, МОСКВА, 1963.

/20/ A. BLANC-LAPIERE, R. FORTET: THÉORIE DES FONCTIONS ALÉATOIRES, PARIS, 1953.