82 ИЗДАЊА ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА 82

МИЛАН С. НЕДИЋ

АЛГЕБРА

ЗА СЕДМИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ЧЕТВРТО ИЗДАЊЕ

— СА ЗНАТНО ПОВЕЋАНОМ ЗБИРКОМ ЗАДАТАКА —

Овај уџбеник, по саслушању Главног просветног савета С. бр. 647 од 6 јула 1939 године, одобрен је одлуком Господина Министра просвете IV бр. 9914 од 31 јула 1939 године. Ово одобрење важи до краја 1942/43 школске године.

БЕОГРАД

ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ
ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА

1939

НАПОМЕНА

Одељци за реалке обележени су звездицом поред наслова.

М. С. Н.

АЛГЕБРА
ЗА
СЕДМИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА
ОД ПРОФЕСОРА М. С. НЕДИЋА.

I — КВАДРАТНИ ТРИНОМ

РАСТАВЉАЊЕ НА ЧИНИОЦЕ

Општи облик квадратног тринома. — Општи облик полинома другог степена с једном промењљивом јесте овај трином:

(1) $$ax^2 + bx + c.$$

Он има један члан с промењљивом на другом степену један члан с промењљивом на првом степену и независан члан. Такав трином зове се *квадратни трином.*

Растављање квадратног тринома на чиниоце. — Квадратним триномом (1) образујемо квадратну једначину:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Знамо да она има два корена: x_1 и x_2. Знамо даље да постоје ови односи:

$$b = -a(x_1 + x_2),$$
$$c = ax_1 x_2.$$

Ако ове вредности за a и b ставимо у трином (1), он постаје

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + ax_1 x_2 =$$
$$= a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x - x_1x_2) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2),$$

тј. $$\boxed{ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,x - x_2).}$$

Одавде се види како се квадратни трином раставља на чиниоце.

Уједначимо га с нулом. Решимо добивену квадратну једначину. Од добивених корена образујемо корене чиниоце $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$. Ставимо их у облику чинилаца и још помножимо са a.

Пример 1. — Раставити на чиниоце трином:

$$2x^2 - 11x + 5.$$

Најпре образујемо квадратну једначину:

$$2x^2 - 11x + 5 = 0.$$

Решимо је и добијемо $x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{2}$.

Образујемо корене чиниоце $(x - 5)$ и $(x - \frac{1}{2})$.

Стављамо напред $a = 2$ и пишемо сва три чиниоца:

$$2x^2 - 11x + 5 \equiv 2(x - 5)(x - \frac{1}{2}).$$

И збиља је:

$$2(x - 5)(x - \frac{1}{2}) = 2x^2 - 10x - x + 5 = 2x^2 - 11x + 5.$$

Пример 2. — Раставити на чиниоце трином:

$$3x^2 - 4x - 4.$$

Најпре квадратна једначина:

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Она даје: $x_1 = -\frac{2}{3}$ *и* $x_2 = 2.$

Отуда је:

$$3x^2 - 4x - 4 \equiv 3(x + \frac{2}{3})(x - 2).$$

Пример 3. — Раставити на чиниоце трином:

$$12x^2 - 5x - 2.$$

Ставићемо:

$$12x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Дата једначина има ове корене:

$$x_1 = 2/3, \ x_2 = -1/4.$$

Отуда је:

$$12x^2 - 5x - 2 \equiv 12(x - 2/3)(x + 1/4).$$

Или (зато што је $3.4 = 12$).

$$12x^2 - 5x - 2 \equiv [3(x - 2/3)][4(x + 1/4)],$$

тј. $$12x^2 - 5x - 2 \equiv (3x - 2)(4x + 1).$$

Пример 4. — Раставити на чиниоце трином:

$$x^2 - 4x + 1.$$

Најпре квадратна једначина:

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Она даје: $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Отуда је:

$$x^2 - 4x - 1 \equiv (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}).$$

Пример 5. — Раставити на чиниоце трином:

$$x^2 - 6x + 25.$$

Најпре једначина:

$$x^2 - 6x + 25 = 0.$$

Она даје: $x_1 = 3 + 4i$ и $x_2 = 3 - 4i.$

Отуда је:

$$x - 5x + 25 \equiv (x - 3 - 4i)(x - 3 + 4i).$$

ОДРЕЂИВАЊЕ ЗНАКА КВАДРАТНОГ ТРИНОМА

Знак квадратног тринома. — Понекад нам је потребно да знамо какав ће бити по знаку квадратни трином за извесну вредност *икса* . На пр.: Одредити знак тринома:

$$2x^2 - 9x + 4 \quad \text{за} \quad x = 5.$$

Кад ту вредност унесемо у дати трином, имаћемо:

$$2 \cdot 5^2 - 9 \cdot 5 + 4 = 9 > 0.$$

Наш полином даје позитивну вредност за $x = 5$.

Одредити знак овог тринома за $x = 3$.

$$2 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 4 = -5 < 0.$$

Наш полином даје негативну вредност за $x = 3$.

1. — ГРАФИЧКО ОДРЕЂИВАЊЕ ЗНАКА КВАДРАТНОГ ТРИНОМА

Знак квадратног тринома можемо одредити графички на следећи начин. Наш трином

$$ax^2 + bx + c$$

је функција *икса*.

Ради тога можемо ставити

$$y = ax^2 + bx + c$$

и графички нацртати криву која одговара овој функцији.

Знамо да је та крива парабола; од њеног положаја зависи знак *ипсилона,* т.ј. знак тринома.

Како се ово испитује у појединим случајевима који могу наступити, показаћемо на примерима.

I случај : Парабола сече апсцисну осовину.

Пример 1. — Одредити знак тринома $x^2 - 4x + 3$.

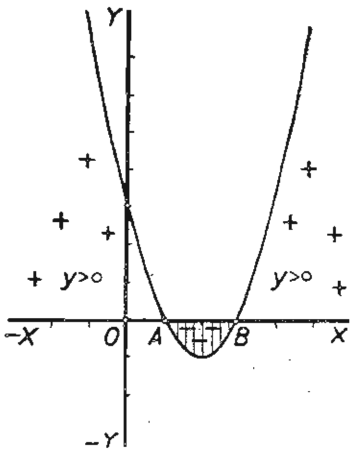
Кад графички претставимо функцију

$$y = x^2 - 4x + 3,$$

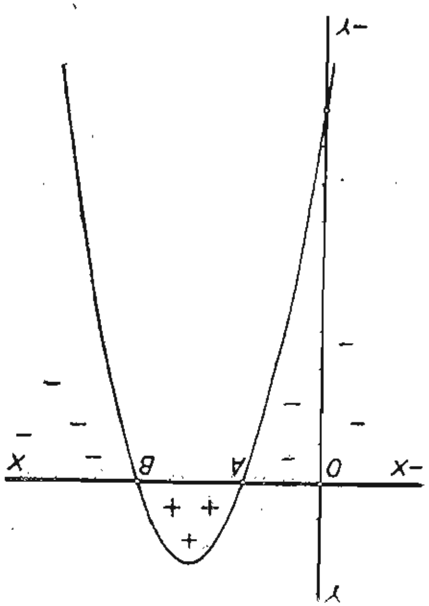
добијамо параболу са слике 1.

Кад ће наш трином бити позитиван? Онда кад y буде позитивно.

Оно је позитивно за све тачке лево од A и десно од B. Значи наш трином ће бити позитиван кад је $x < 1$, или кад је $x > 3$.



Сл. 1.



Сл. 2.

Пример 2. — Одредити знак тринома

$-x^2+7x-10.$

Ставићемо $y=-x^2+8x-10$. Добијамо параболу са слике 2. Ординате су позитивне само од A до B. Значи, наш трином је увек негативан, сем за вредности икса између 2 и 5. Дакле трином је позитиван за

$2 < x < 5.$

II случај: парабола додирује апсцисну осовину.

Пример 3. — Одредити знак тринома $2x^2-12x+18$.

Ставићемо $y=2x^2-12+18$. То ћемо написати овако: $y = 2(x-3)^2$. Добијамо параболу са слике 3. Ординате су позитивне за све вредности икса, сем за вредност $x=3$ (додирна тачка на сл. 3).

Пример 4. — Одредити знак тринома $-2x+4x-2$.

Ставићемо $y = -2^2+4x-2$, тј. $y=(-2)(x-1)^2$.

Пошто је овде $-2 < 0$, имаћемо параболу са сл. 4.

III случај: парабола нема заједничких тачака са апсцисном осовином.

Ако је парабола изнад апсцисне осовине, *ипсилон* је увек позитивно (сл. 5). Ако је парабола испод апсцисне осовине, *ипсилон* је увек негативно (сл. 6).

Пример 5. — Одредити знак тринома x^2-2x+5.

Ставићемо $y=x^2-2x+5$. То је даље: $y=(x-1)^2+4$.

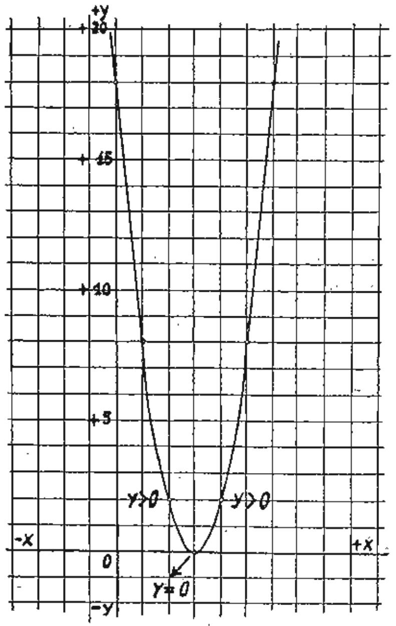
Конструисаћемо ту криву. Добијамо сл. 5. Дати трином је позитиван за сваку стварну вредност икса. (Провери то на неколико вредности за x.)

Пример 6. — Одредити знак тринома $-x^2+3x-4$.

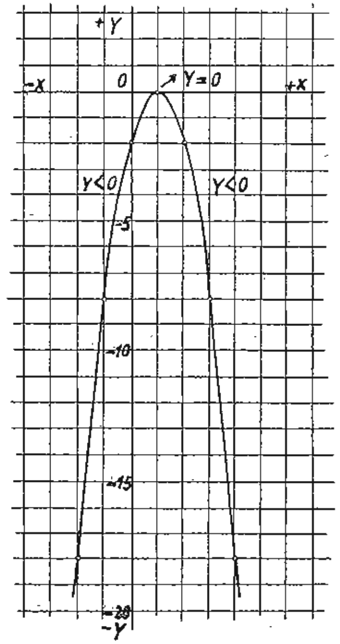
Ставићемо $y=-x^2+3x-4$,

тј. $y=(-1)\,[(x-3/2)^2-9/4+4]$.

То је даље: $y=(-1)\,[(x-1{,}5)^2+1{,}75]$.

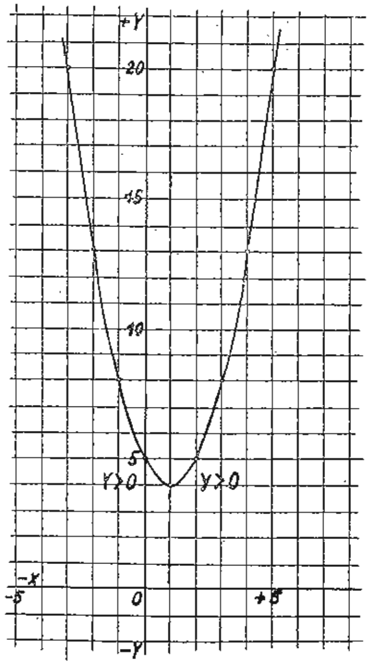


Сл. 3.

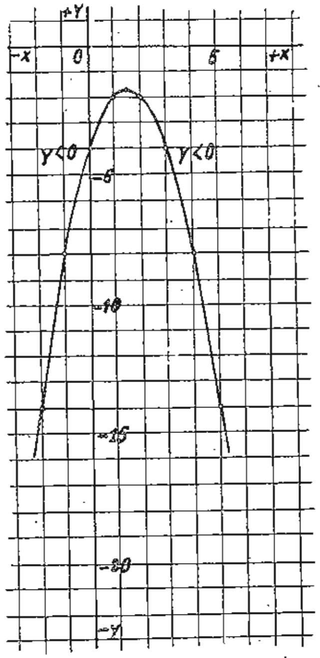


Сл. 4.

Кад конструишемо ту криву, имамо слику 6.



Сл. 5.



Сл. 6.

2. — АЛГЕБАРСКО ОДРЕЂИВАЊЕ ЗНАКА

1. Хоћемо да одредимо за које је вредности икса трином

$$2x^2 - 9x + 4$$

позитиван, а за које је негативан.

Пошто овај трином садржи једну променљиву (x), то ће извесно постојати вредности за x, које ће вредност горњег тринома свести на нулу. Ове ћемо вредности добити из једначине:

$$2x^2 - 9x + 4 = 0,$$

која настаје кад горњи трином уједначимо с нулом.

Ако решимо горњу једначину, имаћемо:

$$x_1 = 4,$$
$$x_2 = \frac{1}{2}.$$

Али ми знамо да сваки трином можемо написати у овоме облику:

$$a\,(x - x_1)\;(x - x_2).$$

Према томе горњи трином можемо овако написати:

$$2(x - 4)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Пошто је први чинилац позитиван, имамо да испитамо само друга два.

Чинилац $(x - 4)$ биће позитиван све док је *икс* веће од 4.

Чинилац $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ биће позитиван све док је *икс* веће од $\frac{1}{2}$.

Кад је $x > 4$, мора бити веће и од $\frac{1}{2}$.

Наш производ ће бити позитиван ако су оба чиниоца

$$(x - 4) \text{ и } \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ позитивни.}$$

То ће бити, ако је $x > 4$, то јест ако је *x веће од већег корена.*

Али наш производ ће бити позитиван и ако оба чиниоца буду негативни. То ће бити ако је

$$x < 4 \quad \text{и} \quad x < \frac{1}{2}.$$

Кад је $x < \frac{1}{2}$, мора бити и $x < 4$.

Наш производ ће бити позитиван ако *иксу* дајемо вредности веће од већег корена, или мање од мањег корена.

Кад ће наш производ бити негативан? Биће негативан онда, ако су му чиниоци $(x - 4)$ и $(x - 0{,}5)$ *неједнако означени.*

Нека је $(x - 4)$ негативно, онда је $x < 4$. Ако је $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ позитивно, значи да је $x > \frac{1}{2}$. То јест, наш производ је тада негативан. Да би наш производ био негативан, иксу можемо дати вредности од $\frac{1}{2}$ до 4.

Али наш производ може бити негативан и ако је

$$x - 4 > 0 \;\; и \;\; x - \frac{1}{2} < 0.$$

А ово би значило да је $x > 4$ и $x < \frac{1}{2}$. То не може да буде.

Отуда излази ово:

наш трином је негативан само у том случају, ако иксу дајемо вредности *између корена.*

Према томе, ако *иксу* дамо вредност 3, наш трином мора бити негативан. И збиља је

$$2 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 4 = 18 - 27 + 4 = 22 - 97 = -5 < 0.$$

2. Да видимо сад како мења знаке трином

$$3x^2 - 24x + 36.$$

Једначина

$$3x^2 - 24x + 36 = 0.$$

има два једнака корена $x_1 = x_2 = 4$. Према томе горњи полином можемо написати у облику

$$3(x-4)^2.$$

Наш трином ће бити позитиван за све вредности икса, сем за $x = 4$.

3. Испитајмо још знак тринома

$$4x^2 - 4x + 5.$$

Корени једначине

$$4x^2 - 4x + 5 = 0.$$

су уображени $x_1 = \frac{1}{2} + i$ и $x_2 = \frac{1}{2} - i$. Горњи трином можемо дакле написати у облику

$$4\left(x - \frac{1}{2} - i\right)\left(x - \frac{1}{2} + i\right) = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) - i\right]\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + i\right] =$$

$$= 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - (i)^2\right] = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right].$$

Према томе *наш полином ће бити позитиван за све вредности икса.*

4. У три горе посматрана случаја коефициенти уз x^2 били су позитивни.

Када је тај коефициенат негативан, треба цео полином помножити са -1. Тада се он своди на претходно проучене случајеве. Тако се полином

$$-2x^2 + 9x - 4$$

своди на

$$(-1)\,(-2x^2 + 9x - 4) = 2x^2 - 9x + 4.$$

Отуда ово

Правило. — *Трином другог степена има знак коефициента првога члана, изузев случаја кад одговарајућа једначина има стварних корена и кад иксу дајемо вредности између тих корена.*

Пример 1. — Одредити знак тринома

$$2x^2 - 7x + 3.$$

Једначина

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

има ове корене: $x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{2}$.

Пошто је овде $a = +2$, овај ће трином бити негативан само за вредности *икса* од $\frac{1}{2}$ до 3. Узмимо $x = 2$.

$$2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 3 = 8 - 14 + 3 = 11 - 14 = -3 < 0.$$

Пример 2. — Одредити знак тринома.

$$-x^2 - 8x - 7.$$

Корени једначине $-x^2 - 8x - 7 = 0$ јесу:

$$x_1 = -1,\ x_2 = -7.$$

Горњи ће трином увек бити негативан, изузев за вредности x од -1 до -7. Узмимо за x вредност (-3).

$$-(-3)^2 - 8(-3) - 7 = -9 + 24 - 7 = -16 + 24 = +8.$$

Пример 3. — Одредити знак тринома

$$x^2 - 14x + 49.$$

Корени једначине $x^2 - 14x + 49 = 0$

су: $x_1 = x_2 = 7.$

Према томе горњи трином је позитиван за *све* вредности *икса*, где је $x \neq 7$.

Узмимо $x = 0$:

$$0^2 - 14 \cdot 0 + 49 = +49.$$

Узмимо $x = -2$:

$(-2)^2 - 14\,(-2) + 49 = 4 + 28 + 49$ итд.

Пример 4. — Одредити знак тринома:

$x^2 - 2x + 5$. (Види сл. 5).

Корени једначине $x^2 - 2x + 5 = 0$ јесу:

$$x_1 = 1 + 2i \quad \text{и} \quad x_2 = 1 - 2i.$$

Корени су *комплексни*. Пошто је у датоме триному $a = 1 > 0$, он је то позитиван *за све реалне вредности икса.*

Пример 5. — Одредити знак тринома

$$-x^2 + 3x - 4.$$

Корени једначине $-x^2 + 3x - 4 = 0$ jесу:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{7} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{7}.$$

Корени су *комплексни.* У датоме триному је $a = -1 < 0$. Овај трином биће негативан за све реалне вредности икса. (Види сл. 6).

ВЕЖБАЊА

Раставити на чиниоце ове триноме:

1. $x^2 - 8x + 15$
2. $x^2 - 10x + 9$
3. $x^2 - 13x + 22$
4. $x^2 - 7x + 12$
5. $x^2 - 12x + 35$
6. $x^2 + 7x + 6$
7. $x^2 - 4x - 21$
8. $x^2 - 4x - 60$
9. $5x^2 + 22x - 15$
10. $9x^2 + 15x - 104$
11. $25x^2 - 65x - 464$
12. $1225x^2 - 455x - 420$
13. $7x^2 - 67x - 434$
14. $x^2 - 2x - 2$
15. $x^2 + 10x + 29$
16. $x^2 - 12x + 85$

Скратити разломке:

17. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$ (Најпре растави и бројилац и именилац на чиниоце).
18. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 6}$
19. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
20. $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$
21. $\dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 4x + 3}$
22. $\dfrac{x^2 - 2x - 80}{x^2 - 11x + 10}$
23. $\dfrac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - x - 12}$
24. $\dfrac{4x^2 - 13x + 10}{x^2 - 9x + 14}$
25. $\dfrac{x^2 - 11x + 18}{x^2 - 10x + 9}$
26. $\dfrac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 6x + 8}$
27. $\dfrac{x^2 - 21x + 20}{x^2 - 11x - 180}$
28. $\dfrac{x^2 - 21x + 110}{x^2 + x - 110}$
29. $\dfrac{x^2 + 8x - 7}{x^2 - 2x - 35}$
30. $\dfrac{x^2 + 12x - 64}{x^2 + 20x + 64}$
31. $\dfrac{x^2 + 6x - 216}{x^2 + 30x + 216}$
32. $\dfrac{x^2 - 12x + 35}{x^2 + 2x - 35}$

Одредити знак овим триномима:

33. $x^2 - 11x + 30$
34. $x^2 - 12x + 35$
35. $x^2 - 9x + 18$
36. $x^2 + 21x + 38$
37. $x^2 + 14x + 33$
38. $x^2 + 16x + 64$
39. $x^2 + 5x - 6$
40. $3x^2 - 7x - 6$
41. $5x^2 + 17x - 12$
42. $8x^2 + x - 33$
43. $4x - 3x - 7$
44. $x^2 + 2x - 7$
45. $x^2 - x - 1$
46. $x^2 - 6x + 9$
47. $x^2 + 8x + 16$
48. $x^2 + 3x + 2$
49. $x^2 + 6x + 25$
50. $x^2 - 2x + 26$
51. $5x^2 - 4x + 1$
52. $-x^2 + 4x - 5$

За које вредности икса ови корени дају стваран, а за које уображени број:

(У вежбањима 53—70 сети се да квадратни корен даје стваран број ако је поткорена количина позитивна, а уображен број ако је поткорена количина негативна).

53. $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$
54. $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$
55. $\sqrt{x^2 - 2x - 6}$
56. $\sqrt{4x^2 + 15x + 6}$
57. $\sqrt{3x^2 - 14x + 5}$
58. $\sqrt{-2x^2 + 3x - 1}$
59. $\sqrt{2x^2 - 3x - 4}$
60. $\sqrt{x^2 - 14x + 40}$
61. $\sqrt{-x^2 - x - 1}$
62. $\sqrt{-2x - 3x - 4}$
63. $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$
64. $\sqrt{x^2 - 10x + 21}$
65. $\sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{4}}$
66. $\sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - \frac{1}{5}}$
67. $\sqrt{x^2 - 4x + 13}$
68. $\sqrt{x^2 - 8x + 25}$
69. $\sqrt{-x^2 - 6x - 25}$
70. $\sqrt{-x^2 + 2x - 17}$

II. — НЕЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА

Општи облик. — Општи облик неједначине другог степена јесте:

(1) $\quad ax^2 + bx + c > 0$ и

(2) $\quad ax^2 + bx + c < 0.$

Ако обе стране прве неједначине помножимо са -1, добићемо други њен облик:

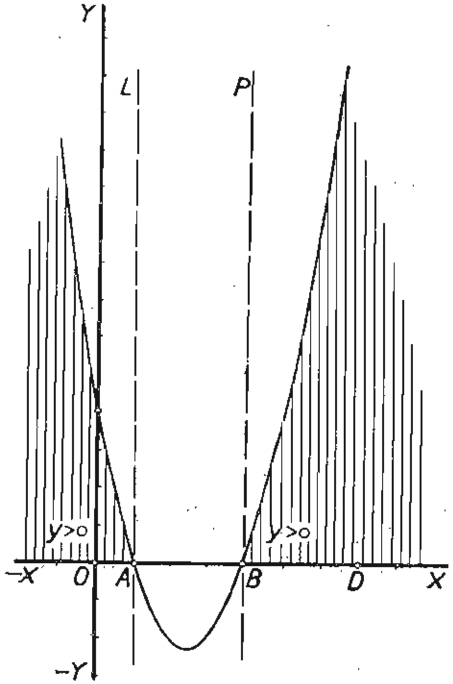
$$-ax^2 - bx - c < 0.$$

1. — ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ.

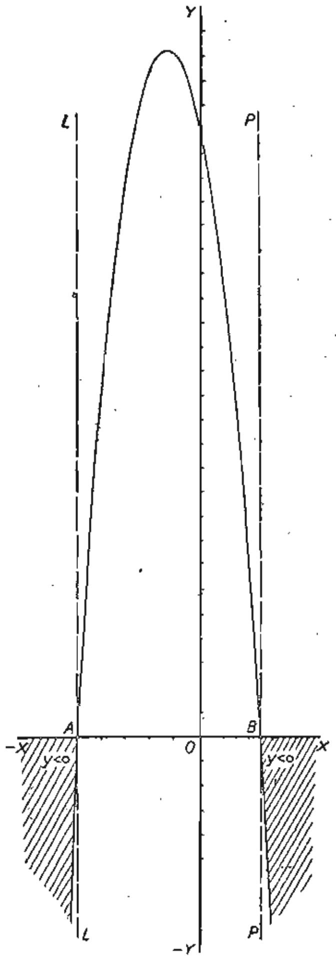
Пример I. Испитати за које је вредности икса задовољена неједначина

$$x^2 - 5x + 4 > 0.$$

Ставимо $y = x^2 - 5x + 4$. Конструишимо криву $y = x^2 - 5x + 4$. То је парабола са слике 7. Она сече апсцисну осовину у тачкама A (1,0) и B (4,0). Наша неједначина каже да ординате треба да буду позитивне. Оне су позитивне за све тачке наше криве лево од праве L и десно од праве P.



Сл 7.



Сл. 8.

Наша неједначина је задовољена апсцисама свих тачака које се налазе лево од A и десно од B. Тако имамо одређен низ тачака чије апсцисе x задовољавају дату неједначину Скуп свих тих вредности *икса* претставља решење дате неједначине.

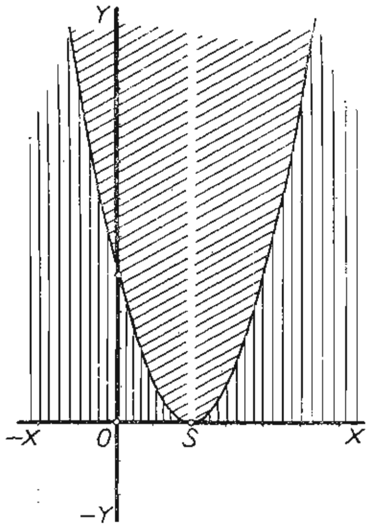
Пример II. — Решити неједначину:

$$-2x^2 - 5x + 25 < 0.$$

Ставићемо $y = -2x^2 - 5x + 25$ и нацртати криву $y = -2x^2 - 5x + 25$. То је парабола са слике 8. Она сече апсцисну осовину у тачкама A $(-5{,}0)$ и $B(+2\ \ , 0)$. Наша неједначина је задовољена апсцисама тачака које леже лево од A и десно од B.

Пример III. Решити неједначину:

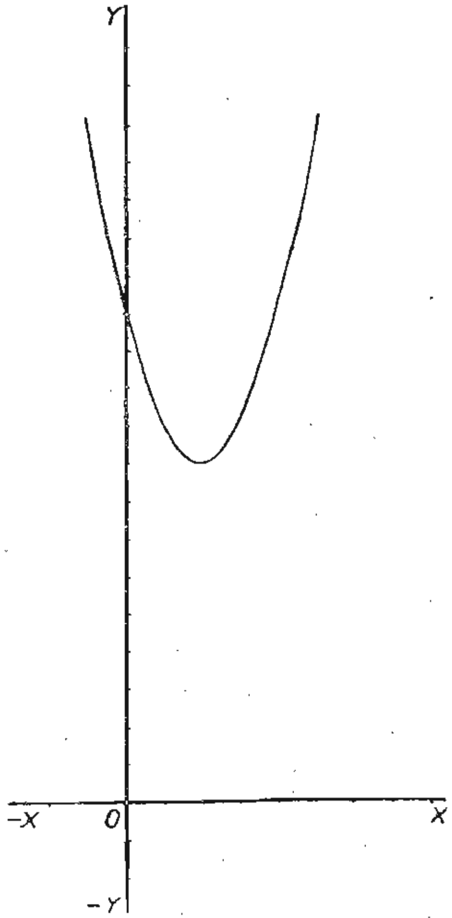
$$x^2 - 4x + 4 > 0.$$



Сл. 9.

Ставићемо $y = x^2 - 4x + 4$ и нацртати ту криву. То је парабола са слике 9. Она *додирује* апсцисну осовину у тачци S (2,0).

Наша неједначина је задовољена за све вредности икса, сем за апсцису тачке S.



Сл. 10.

Пример IV. Решити неједначину:

$$x^2 - 4x + 13 < 0.$$

Нацртаћемо криву $y = x^2 - 4x + 13$. То је парабола са слике 10. Види се да су све ординате позитивне. Негативних ордината нема. Она нити сече, нити додирује апцисну осовину. Наша неједначина нема решења, јер слика казује да ова парабола *нема* негативних ордината.

ВЕЖБАЊА

Испитај за које су вредности икса задовољене ове неједначине:

1.	$x^2 - 3x + 2 > 0$	9.	$x^2 + 5x + 6 < 0$
2.	$x^2 - 8x + 16 > 0$	10.	$x^2 - 2x - 15 > 0$
3.	$3x^2 - 7x - 6 < 0$	11.	$x^2 - 3x - 5 > 0$
4.	$x^2 - 4x + 5 < 0$	12.	$x^2 + 6x + 25 > 0$
5.	$x^2 - 8x + 15 < 0$	13.	$x^2 + 6x + 8 < 0$
6.	$x^2 - 10x + 25 > 0$	14.	$x^2 - 6x - 16 < 0$
7.	$5x^2 + 17x - 12 > 0$	15.	$x^2 - 7x - 9 < 0$
8.	$x^2 - 8x + 17 > 0$	16.	$x^2 - 8x + 25 > 0.$

2. — АЛГЕБАРСКО РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ.

Решавање неједначине другог степена. — Да бисмо решили неједначину:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

ми ћемо најпре решити једначину $ax^2 + bx + c = 0$. Ту могу да наступе ова 3 случаја:

1. случај. — Једначина $ax^2 + bx + c > 0$ има два неједнака корена: x_1 *и* x_2. Тада нашу неједначину можемо овако написати:

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Ако је a позитивно, тада ће горња неједначина остати у важности за све вредности веће од већег корена и мање од мањег корена.

Ако је $x_2 > x_1$ тада је за $a > 0$, неједначина задовољена кад је

$$x > x_2 > x_1$$

или $$x < x_1 < x_2.$$

Ако је $a < 0$, горња неједначина је у важности само ако је x између корена:

$$x_1 < x < x_2.$$

2. случај. — Једначина $ax^2 + b + c = 0$ има двојни корен (два једнака корена). Тада нашу неједначину можемо овако написати:

$$a(x - x_1)^2 > 0.$$

Пошто је квадрат сваког стварног броја позитиван, то ће наша неједначина, док је $a > 0$, важити за све вредности *икса,* изузев за $x = x_1$, када се своди на једначину

$$(x - x_1)^2 = 0.$$

Ако је $a < 0$, нема решења. Зашто?

3. случај. — Једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има уображене корене.

Нека су ти корени $x_1 = p + qi$ и $x_2 = p - qi$.

Тада нашу неједначину можемо овако написати:

$$a[x - (p + qi)]\ [x - (p - qi)] > 0,$$

то јест $$a[(x - p) + qi]\ [(x - p) - qi] > 0,$$

а то је најзад:

$$a[(x - p)^2 + q^2] > 0.$$

Квадрати стварних бројева су увек позитивни, те ће израз у средњој загради бити позитиван за *сваку* вредност икса.

Ако је $a > 0$, наша неједначина важи за *све* вредности икса.

Ако је $a < 0$ наша неједначина не важи ни за једну вредност икса. Нема решења, пошто ће због негативног a израз на левој страни бити увек негативан, то јест *мањи од нуле.*

Решавање неједначине $ax + b^2 + c < 0$. — И овде могу наступити три случаја.

I случај: једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има два стварна неједнака корена x_1 и x_2.

Тада ову неједначину можемо написати овако:

$$a(x - x_1)(x - x_2) < 0.$$

Ако је $a > 0$, неједначина ће бити задовољена само тада, ако иксу дајемо вредности које се налазе између корена. Ако је $x_2 > x_1$, неједначина ће бити задовољена само за ове вредности икса:

$$x_1 < x < x_2.$$

Ако је $a < 0$, неједначина ће бити задовољена само тада, када иксу дајемо вредности мање од мањег корена, или веће од већег корена, тј. ако је

$$x > x_2 > x_1,$$

или

$$x < x_1 < x_2.$$

II случај: — Једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има два једнака корена.

Тада дату неједначину можемо написати у овоме облику:

$$a\,(x - x_1)^2 < 0.$$

Неједначина ће бити задовољена само кад је $a < 0$. За такво a она ће бити задовољена за све вредности икса, сем за $x = x_1$. (Зашто?)

За $a > 0$ ова једначина нема решења.

III случај: — Једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има уображене корене $x_1 = p + qi$ и $x_2 = p + qi$.

Тада неједначину $ax^2 + bx + c < 0$ можемо овако написати:

$$a\,[x - (p + qi)]\;[x - (p - qi)] < 0,$$

тј. $$a\,[(x - p)^2 + q^2] < 0.$$

Квадрати у средњој загради даће увек позитиван број, па ма какво било x. Значи, све зависи од a. Ова је неједначина задовољава за све вредности икса кад је $a < 0$. За $a > 0$ она нема ниједног решења.

Примери решавања неједначине 2 степена. — *Пример I. — Решити неједначину:*

$$2x^2 - 7x + 3 > 0,$$

Ставимо:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Одатле је:

$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Горњу неједначину можемо овако написати:

$$2\,(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Овде је $a = 2 > 0$. За све вредности веће од 3 и мање од $\frac{1}{2}$, горња неједначина постоји. Н. пр. за $x = 5$:

$$2 . 25 - 7 . 5 + 3 = 50 - 35 + 3 = 18 > 0.$$

Пример 2. — Решити неједначину:

$$-25x^2 + 30x - 9 < 0,$$

Помножимо је са — 1:

$$25x^2 - 30x + 9 > 0.$$

Ставимо: $25x^2 - 30x + 9 = 0.$

Одатле је: $$x_1 = x_2 = \frac{3}{5}.$$

Пошто је овде $a = 25 > 0$, ова неједначина важи за све вредности *икса* сем за $x = 3/5$.

И збиља је, на пр. за $x = 0$,

$$-9 < 0.$$

за $x = 10$:

$$-2500 + 300 - 9 < 0.$$

Пример 3. — Решити неједначину:

$$-3x^2 + 6x - 15 > 0.$$

Ставимо: $-3x^2 + 6x - 15 = 0.$

Одакле је: $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$.

Нашу неједначину можемо овако написати:

$$-3\;[x - (1 + 2i)]\;[x - (1 - 2i)] > 0$$

а то је даље:

$$-3\;[(x - 1) - 2i]\;[(x - 1) + 2i] > 0$$
$$-3\;[(x - 1)^2 - (2i)^2] > 0$$
$$-3\;[(x - 1)^2 + 2^2] > 0.$$

Квадрати у загради су увек позитивни. Помножени негативним бројем (—3) дају увек негативан број на левој страни. Негативан број је увек мањи од нуле, те наша неједначина нема решења. Пробај!

ВЕЖБАЊА

Решити ове неједначине:

1. $2x^2 - 5x + 2 > 0$
2. $3x^2 - 16x + 5 > 0$
3. $10x^2 - 11x + 1 < 0$
4. $x^2 - 4x + 4 < 0$
5. $-x^2 + 6x - 9 < 0$
6. $-x^2 + 10x - 25 > 0$
7. $-4x^2 + 10x - 4 > 0$
8. $3x^2 + 5x + 7 > 0$
9. $-2x^2 + 5x - 9 > 0$
10. $-8x^2 + 7x - 20 > 0$
11. $x - 5x + 6 > 0$
12. $4x^2 - 5x + 6 < 0$
13. $2x^2 - 3x + 4 < 0$
14. $3x^2 - 2x - 1 > 0$
15. $6x^2 - 4x - 2 < 0$
16. $5x^2 + 6x - 7 < 0$

17. $8x^2 - 5x - 3 < 0$ **20.** $7x^2 - 5x - 3 < 0$
18. $4x^2 - 4x - 1 > 0$ **21.** $x^2 - 10x + 9 < 0$
19. $9x^2 - 5x - 1 > 0$ **22.** $x^2 - 10x + 9 < 0$

III. — ЈЕДНАЧИНЕ 3, 4 И ВИШЕГ СТЕПЕНА КОЈЕ СЕ МОГУ РЕШИТИ ПОМОЋУ КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА. — ИЗЛОЖИЛАЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ. — ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

БИНОМНЕ ЈЕДНАЧИНЕ 3 И 4 СТЕПЕНА

Биномне једначине уопште јесу оне једначине чији је полином од два члана. Њихов општи облик је :

$$ax^n + b = 0.$$

Биномне једначине 3 степена. — Општи облик биномне једначине 3 степена је ово :

$$ax^3 + b = 0.$$

Поделићемо је са a, да бисмо добили чист куб у првом изразу :

$$(1) \qquad x^3 + \frac{b}{a} = 0.$$

Ми знамо, да можемо раставити на чиниоце збир кубова облика $p^3 + q^3$. Зато ћемо израз $\frac{b}{a}$ написати у облику куба и ставити

$$\frac{b}{a} = c^3, \quad \text{тј.} \quad \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = c.$$

Тада једначина (1) узима облик :

$$x^3 + c^3 = 0,$$

коју можемо и овако написати :

$$(x + c)\ (x^2 - cx + c^2) = 0.$$

Овде имамо два чиниоца чији је производ раван нули. Значи да ће дата једначина (1) бити задовољена ако је један од њих раван нули, тј. ако је или

$$x + c = 0,$$

или $$x^2 - cx + c^2 = 0.$$

Кад решимо те две једначине, добијемо 3 корена :

$x_1 = - c,$

$$x_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4c^2}}{2} = \frac{c + i\,c\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,c,$$

$$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\,c.$$

Пример 1. Решити једначину $x^3 + 8 = 0$.
Овде је $a = 1$, $b = 8$, $c^3 = 8$, $c = 2$.

$$x_1 = -\sqrt[3]{8} = -2,$$
$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,2 = 1 + i\sqrt{3},$$
$$x_3 = 1 - 3i\sqrt{3}.$$

И збиља је :

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)\ (x^2 - 2x + 4) = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x_1 = -2$$
$x^2 - 2x + 4 = 0$ а одатле је :

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{-3},$$

$$x_2 = 1 + i\sqrt{3},$$
$$x_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Пример 2. — Решити једначину :

$$4x^3 - 108 = 0.$$

Овде је :

$$a = 4,\ b = -108,\ c^3 = \frac{b}{a} = -27,\ c = -3.$$

Према томе је :

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(-3) = \frac{-3 - i\,3\sqrt{3}}{2},$$
$$x_3 = \frac{-3 + 3i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 3. — Решити једначину: $3x^3 + 4 = 0$.
Овде је :

$$a = 3,\ b = 4,\ c^3 = \frac{b}{a} = \frac{4}{3},\ c = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

Према томе је:

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

$$x_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}},$$

$$x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

Биномне једначине 4 степена. — Биномна једначина 4 степена овако изгледа:

(1) $ax^4 + b = 0.$

Кад је поделимо са a, и ако је $b/a > 0$, можемо ставити

$$\frac{b}{a} = c^4, \quad \text{тј.} \quad c = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}.$$

Тада она узима облик:

$x^4 + c^4 = 0.$

Поделимо обе стране једначине са x^2:

(2) $$x^2 + \left(\frac{c^2}{x}\right)^2 = 0.$$

Ставимо

(3) $$x^2 + \frac{c^2}{x} = y.$$

Степеновањем добијамо:

(4) $$x^2 + \left(\frac{c^2}{x}\right)^2 = y^2 - 2c^2.$$

Ако вредност (4) унесемо у (2), имаћемо:

$$y^2 - c^2 = 0.$$

Одатле је:

(5) $$y = \pm\, i c \sqrt{2}.$$

Сменом вредности (5) у (3) добијамо:

(6) $$x + \frac{c^2}{x} = c\sqrt{2}.$$

и

(7) $$x + \frac{c^2}{x} = c\sqrt{2}.$$

Из (6) имамо: $$x_1 = \frac{c\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i}).$$

$$x_2 = \frac{c\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i}).$$

Из (7) имамо: $$x_3 = \frac{c\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i}),$$

$$x_4 = \frac{c\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathrm{i}).$$

Ако је у биномној једначини $c = b/a < 0$, тада морамо ставити $\frac{b}{a} = -c^4$, па она узима облик:

$$x^4 - c^4 = 0$$
$$(x^2)^2 - (c^2)^2 = 0$$
$$(x^2 + c^2) = 0 \text{ и } (x^2 - c^2) = 0.$$

Из прве једначине имамо:

$x_1 = ci$, и $x_2 = -ci$.

Из друге једначине имамо:

$x_3 = c$ и $x_4 = -c$.

Пример 1. — Решити једначину $x^4 + 16 = 0$.

Делимо са x^2:

(1) $$x^2 + \frac{16}{x^2} = 0,$$

тј. $$x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0.$$

Смена: $$x + \frac{4}{x} = y,$$

тј. $$x^2 + \frac{16}{x^2} = y^2 - 8.$$

Сменом ове вредности у (1) добијамо:

$y^2 - 8 = 0,$

Одатле је: $y_1 = 2\sqrt{2},$

$y_2 = -2\sqrt{2},$

Сад даље: $x + \frac{4}{x} = 2\sqrt{2}$. Одавде је: $x_1 = (1 + i)\sqrt{2}$,

$x_2 = (1 - i)\sqrt{2}$.

$x + \frac{4}{x} = -2\sqrt{2}$. Одавде је: $x_3 = (-1 + i)\sqrt{2}$,

$x_4 = (-1 - i)\sqrt{2}$.

Пример 2. — Решити једначину:

$$x^4 - 81 = 0.$$
$$(x^2)^2 - (3^2)^2 = 0,$$
$$(x^2)^2 - 9^2 = 0,$$
$$(x^2 + 9)(x^2 - 9) = 0.$$

$x^2 + 9 = 0$ даје ове корене: $x_1 = 3i$, $x_2 = -3i$;

$x^2 - 9 = 0$ даје ове корене: $x_3 = 3$, $x_4 = -3$.

ТРИНОМНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Триномне једначине су једначине у чијем се полиному појављује непозната свега у два члана. Овде ћемо испитати само случај кад је степен непознате у једноме члану два пута већи од степена непознате у другоме члану. Ако је једначина четвртог степена назива се још *биквадратна једначина*.

Општи тип триномне једначине је :

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Решава се сменом $x^n = y$.

Кад се та смена изврши, добије се :

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Кад се нађе y, треба наћи x из једначине $x^n = y$.

Пример. — Решити једначину

$$3x^6 - 2x^3 - 10 = 0.$$

$$x^3 = y,$$

$$3y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = -\frac{1}{3},$$

$$x^3 = 1, \qquad (x-1)\ (x^2 + x + 1) = 0.$$

Ова једначина даје три корена:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i,\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i.$$

Ако узмемо $y_2 = -\frac{1}{3}$, имаћемо:

$$x^3 = -\frac{1}{3}$$

$$x^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3 = 0$$

$$x^3 + \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}\right)^3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}\right)\ \left(x^2 - \frac{x}{3}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right) = 0,$$

а одатле још три корена:

$$x_4 = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}.$$

$$x_5 = \frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9} + \sqrt{-\sqrt[3]{3}}}{2}.$$

$$x_6 = \frac{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9} - \sqrt{-\sqrt[3]{3}}}{2}.$$

СИМЕТРИЧНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Симетричне једначине су оне једначине, у чијем су полиному коефициенти који леже симетрично према средини полинома једнаки по апсолутној вредности.

$$ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-2} + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0.$$

Симетрична једначина 3 степена. — Ово је општи облик једначине 3 степена :

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0.$$

Да би она била симетрична, треба да је :

$$A_3 = \pm A_0 \text{ и } A_2 = \pm A_1.$$

Према томе симетрична једначина 3 степена овако изгледа :

$$A_0x_3 + A_1x_2 \pm A_1\, x \pm A_0 = 0.$$

Ради лакшег рачунања, ми ћемо је овако писати :

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,$$

$$\text{и } ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Пример : $3x^3 - 4x^2 - 4x + 3 = 0.$

$$a = 3,\ b = -4.$$

Решавање симетричних једначина 3 степена. — Симетрична једначина 3 степена има у ствари свега 2 коефицента: a и b. Зато се она лако и решава.

Нека нам је дато да решимо ову симетричну једначину:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Скупићемо уједно изразе са истим коефициентима ;

$$a\ (x^3 + 1) + bx\ (x + 1) = 0.$$

Растављањем израза $(x^3 + 1)$ добићемо :

$$a\,(x + 1)\ (x^2 - x + 1) + bx\ (x + 1) = 0$$

а то је даље:

$$(x + 1)\ [a\ (x^2 - x + 1) + bx] = 0.$$

Да би производ два израза био раван нули, *мора* један од њих бити раван нули, или

$$x + 1 = 0 \text{ или } [ax^2 + (b - a)\,x + a] = 0.$$

Из прве једначине имамо:

$$x_1 = -1.$$

Из друге:

$$x = \frac{a - b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 - 4a^2}}{2a}$$

$$x = \frac{a - b \pm \sqrt{-3a^2 - 2ab + b^2}}{2a}.$$

$$x_2 = \frac{a - b + \sqrt{-3a^2 - 2ab + b^2}}{2a},$$

$$x_3 = \frac{a - b - \sqrt{-3a^2 - 2ab + b^2}}{2a}.$$

Пример 1. — Решити једначину:

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$$
$$(3x^3 + 3) + 4x^2 + 4x = 0$$
$$3(x^3 + 1) + 4x\,(x + 1) = 0$$
$$3\,(x + 1)\,(x^2 - x + 1) + 4x\,(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)\;[3\,(x^2 - x + 1) + 4x] = 0$$
$$(x + 1)\;(3x^2 + x + 3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \text{ а одатле: } x_1 = -1$$

$$3x^2 + x + 3 = 0 \text{ а одатле: } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-35}}{6},\; x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-35}}{6}$$

Пример 2. — Решити једначину:

$$2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Решићемо је скупљањем чланова чији су сачиниоци једнаки по апсолутној вредности.

$$(2x - 2) - (5x^2 - 5x) = 0$$
$$2\,(x - 1)\;(x^2 + x + 1) - 5x\;(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)\;[2x^2 + 2x + 2 - 5x] = 0$$
$$(x - 1)\;(2x - 3x + 2) = 0.$$

И сад:

$$x - 1 = 0 \qquad \text{а одатле је: } x_1 = 1,$$

и $\quad 2x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad$ а одатле: $x_2 = \frac{3}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{7},$

$$x_3 = \frac{3}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{7}.$$

Пример 3. — Решити једначину:

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$$
$$(2x^3 - 2) - 7x\;(x - 1) = 0$$
$$2\,(x - 1)\;(x^2 + x + 1) - 7x\,(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)\;(2x^2 + 2x + 2 - 7x) = 0$$
$$(x - 1)\;(2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Из $x - 1 = 0$ имамо: $x_1 = 1$.

Из $2x^2 - 5x + 2 = 0$ имамо: $x_2 = 2,\; x_3 = \frac{1}{2}.$

Корени ове једначине су 2 и $\frac{1}{2}$. Они су *реципрочне вредности* један другоме. Први корен је *1.* Он је реципрочна вредност самоме себи. Видимо ово: реципрочна вредност свакога корена ове једначине је у исто време корен ове једначине. Тако је увек код сваке симетричне једначине. Зато се симетричне једначине зову још и **реципрочне једначине.**

У првоме примеру имали смо:

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-35}}{6}, \qquad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{-35}}{6}.$$

Можемо се одмах уверити да су они реципрочне вредности један другоме:

$$\frac{-2 + \sqrt{-35}}{6} = \frac{6}{-1 - \sqrt{-35}}.$$

Урационалићемо именитељ десне стране:

$$\frac{6}{-1 - \sqrt{-35}} = \frac{6\,(-1 + \sqrt{-35})}{1 + 35} = \frac{-1 + \sqrt{-35}}{6}.$$

Добили смо леву страну. Збиља је $x_2 = \frac{1}{x_3}$.

Симетричне једначине четвртог степена. — Њихово решавање показаћемо на једноме примеру.

Решити једначину:

$$2x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0.$$

Скупимо у један збир симетричне чланове

$$(2x^4 + 2) + (x^3 + x) + x^2 = 0.$$

Поделимо целу једначину са x^2:

$$\left(2x^2 + \frac{2}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Ако ставимо $\qquad z = x + \dfrac{1}{x}$

имаћемо: $\qquad z^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}.$

Према томе је $\qquad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = z^2 - 2.$

Извршимо те две смене, па ћемо имати:

$$2(z^2 - 2) + z + 1 = 0$$

а одатле

$$2z^2 - 4 + z + 1 = 0$$

или:

$$2z^2 + z - 3 = 0.$$

Ова једначина даје за z две вредности: $z_1 = 1$ и $z_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Свако z даће нам по две вредности за x:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ а одатле: } x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \text{ и } x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \text{ а одатле: } x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{i}{4}\sqrt{7} \text{ и } x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{i}{4}\sqrt{7}.$$

Пример 2. — Решити једначину:

$$2x^4 - 3x^3 + 3x + 2 = 0.$$

Овде недостаје члан са x^2. Овакву реципрочну једначину 4 степена решавамо растављањем на чиниоце.

$$2(x^4 - 1) - 3x\,(x^2 - 1) = 0$$
$$2(x^2 - 1)\,(x^2 + 1) - 3x\,(x^2 - 1) = 0$$
$$(x^2 - 1)\,(2x^2 + 2 - 3x) = 0.$$

Из $x^2 - 1 = 0$ имамо $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Из $2x^2 - 3x + 2 = 0$ имамо: $x_3 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{i\sqrt{7}}{4}$,

$$x_4 = \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{7}}{4}.$$

Увери се да је $x_3 = \dfrac{1}{x_4}$.

ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Ирационалне једначине су оне једначине код којих се под једним или под више корена налазе функције икса.

На пр.:

$$\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[m]{f_1(x)} = \sqrt[p]{f_2(x)} + f_3(x)$$
$$\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 6} + \sqrt{x^4 - 7x + 8} = \sqrt[5]{x_2 - 3x + 9}.$$

Решавање ирационалних једначина. — Ми ћемо узети само најпростији случај где су сви корени квадратни.

Ирационалне једначине решавају се *степеновањем.* Знамо да су степеновање и кореновање две супротне радње. Кад корен степенујемо кореним изложитељем, добићемо поткорену количину.

Пре него што се пређе на степеновање једначине треба урадити ово:

1). Ако је полином једначине бином са једним или два корена, треба корене раздвојити, један на једну, а други на другу страну једначине. На тај начин се само *једним* степеновањем ослобођавамо корена.

2). Ако је полином једначине трином са једним кореном, тај корен треба оставити сам на једној страни.

3). Ако је полином једначине трином са два корена, свеједно је који ћемо члан полинома пребацити на десну страну. Главно је да један члан тринома пређе на десну страну.

После сваког степеновања треба вршити ново груписање. Ако је остао само један корен, треба га оставити самог на једној страни, па опет степеновати.

Напомене. — Кад се нађе корен, треба га увек пробати у задатој једначини. Дешава се да смо сасвим правилно решили једначину, а добивени корен ипак не задовољава једначину. У томе случају корен задовољава једначину у којој је пред кореном супротни знак.

Пример. — Решити једначину $\sqrt{3x + 4} = 3\sqrt{x} - 2$.

$$(\sqrt{3x + 4})^2 = (3\sqrt{x} - 2)^2$$
$$3x + 4 = 9x - 12\sqrt{x} + 4$$
$$-6x = -12\sqrt{x}$$
$$x = 2\sqrt{x}.$$

Сад ћемо опет степеновати са 2:

$$x^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x - 4) = 0$$

Решења су: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Кад у задатој једначини сменимо прво решење, добијамо:

$$\sqrt{0+4} = 3\sqrt{0} - 2$$
$$2 = -2.$$

Добивено решење не одговара задатој једначини, али одговара једначини

$$-\sqrt{3x+4} = 3\sqrt{x} - 2.$$

Зашто је то тако?

Кад сменимо $x_2 = 4$, добијамо:

$$\sqrt{16} = 3 \,.\, 2 - 2$$
$$4 = 6 - 2.$$

ИЗЛОЖИЛАЧКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Дефиниција. — Ми смо већ видели изложилачке *функције* овога облика: a^x. Знамо да је изложилачка функција она функција, чија се независно променљива налази у изложиоцу. *Изложилачка једначина је она једначина, чија се непозната налази у изложитељу.*

Изложилац се зове и *експонент*. Зато се изложилачке једначине зову још и *експоненцијалне једначине*.

Примери изложилачких једначина.

I $2^{2x+1} = 8.$

II $a^{2x-1} = b^{3x-7}.$

III $a^{2x} + 4a^x = b.$

РЕШАВАЊЕ ИЗЛОЖИЛАЧКИХ ЈЕДНАЧИНА

Решавање свођењем на једнаке основе. — Ако се у једначини појављује *непозната* као изложилац степена дате основе, трудимо се да на обема странама једначине изменимо дате изразе тако, да добијемо степене једнаких основа. (То није увек могуће).

Пример 1. — Решити једначину

$$a^{2x+3} = a^9.$$

Пошто су овде два једнака степена с једнаком основом, морају им и изложиоци бити једнаки:

$$2x + 3 = 9,$$
$$x = 3.$$

Пример 2. — Решити једначину $10^{5x-2} = 100.000.$

$$10^{5x-2} = 10^5$$
$$5x - 2 = 5$$
$$x = \frac{7}{5}.$$

Пример 3. — Решити једначину $5^{x^2-3x} = 625.$

$$5^{x^2-3x} = 5 \cdot 125$$
$$5^{x^2-3x} = 5^4$$
$$x^2 - 3x = 4$$
$$x_1 = 4$$
$$x_2 = -1.$$

Пример 4. — Решити једначину

$$3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 363.$$

Горњу једначину можемо написати и у овоме облику:

$$3^x + \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{3^2} + \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} = 363.$$

Не може одмах да се логаритмује, пошто је на левој страни полином. Али ми можемо да напишемо леву страну у облику производа

$$3^x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4}\right) = 363.$$

Можемо сад израчунати вредност збира у загради:

$$3^2 = 9$$
$$3^2 = 27$$
$$3^2 = 81$$

Зато ће бити:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{81 + 27 + 9 + 3 + 1}{81} = \frac{121}{81}$$

Дакле:

$$3^x \frac{121}{81} = 363.$$

Одатле је:

$$3^x = \frac{363 \,.\, 81}{121}. \qquad \frac{363}{121} = 3 \cdot$$

$3^x = 3 \cdot 81$

$3^x = 3 \cdot 3^4$

$3^x = 3^5$

$x = 5.$

Решавање заменом. — Има случајева где се јављају степени једнаких основа, али на десној и на левој страни нису мономи. Тада ми најпре вршимо смену. Како се то ради показаћемо на једном примеру.

Пример. — Решити једначину $4^{x+1} + \dfrac{64}{4^x} = 257.$

Да се ослободимо разломака:

$$4^x \, 4^{x+1} + 64 = 257 \cdot 4^x.$$

То је даље:

$$4^{2x+1} + 64 = 257 \cdot 4^x.$$

Не можемо да логаритмујемо, пошто је на левој страни бином. Али можемо да извршимо једну корисну смену:

$$4^x = y$$

Добијамо једначину:

$$y^2 \cdot 4 + 64 = 257y,$$

или

$$4y^2 - 257y + 64 = 0.$$

Одатле је $y_1 = 64 \qquad y_2 = \dfrac{1}{4}$

Имаћемо две једначине:

(1) $4^x = 64$ и $4^x = \dfrac{1}{4}$ (2)

$4^x = 4^3 \qquad 4^x = 4^{-1}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$

Решавање логаритмовањем. — Имамо и таквих изложилачких једначина где не можемо да доведемо степене на једнаке основе. Тада решавамо једначину логаритмовањем.

Пример. — Решити једначину $3^{x-1} + 3^{x+1} - 20 = 0$

$$\frac{3^x}{3} + 3^x \, 3 = 20$$

$$3^x + 9 \cdot 3^x = 60$$

$$10 \cdot 3^x = 60$$

$$3^x = 6$$

$$x \log 3 = \log 6$$

$$x = \frac{0{,}77815}{0{,}47712}$$

$$\log x = \log 77815 - \log 47712$$

$$\log x = 0{,}21244$$

$$x = 1{,}63.$$

ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Једначина код које се непозната јавља под логаритамским знаком зове се логаритамска једначина.

Примери логаритамских једначина:

$\log x + 2 = 0, \quad \log (x - 1) - 3 = \log (x + 2),$

$\dfrac{\log (35 - x^3)}{\log (5 - x)} = 3,$ итд.

На примерима ћемо показати како се решавају логаритамске једначине.

Пример 1. — Решити једначину $2 \log x = \dfrac{\log x}{2} + 3.$

$4 \log x = \log x + 6$

$3 \log x = 6$

$\log x = 2$

$x = 100.$

Пример 2. — Решити једначину $2 + \log x^2 = \dfrac{4}{\log x}$

$2 + 2 \log x = \dfrac{4}{\log x}$

$1 + \log x = \dfrac{2}{\log x}$

$\log x + (\log)^2 = 2.$ Ставићемо: $\log x = y.$ Имаћемо: $y^2 + y - 2 = 0.$ Одатле је $y_1 = 1, \quad y_2 = -2.$

$y = \log x.$

$\log x = 1$ Одатле је: $x = 10$

$\log x = -2.$ Одатле је: $x = 0{,}01.$

Пример 3. — Решити једначину:

$\dfrac{\log (35 - x^3)}{\log (5 - x)} = 3.$ Имаћемо:

$\log (35 - x^3) = 3 \log (5 - x)$

$\log (35 - x^3) = \log (5 - x)^3$

$(35 - x^3) = 125 - 75x + 15x^2 - x^3,$

тј. $15x^2 - 75x - 90 = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

Решења су: $x_1 = -1$ и $x_2 = 6.$

Пример 4. Решити једначину:

$$\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2.$$

$$\log\sqrt{1+x} + \log(\sqrt{1-x})^3 = \log\sqrt{1-x^2} + \log 100$$

$$\log[\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1-x})^3] = \log(100\sqrt{1-x^2})$$

$$\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1-x})^3 = 100\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}\,(1-x) = 100\sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,(1-x) = 100\sqrt{1-x^2}$$

$$(1-x-100)\sqrt{1-x^2} = 0$$

$$(-99-x)\sqrt{1-x^2} = 0$$

I $99 + x = 0$ $\qquad x_1 = -99$

II $\sqrt{1-x^2} = 0$ $\qquad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$

Пример 5. — Решити систем:

I $\log 2x + \log y = 3 + \log 2$

II $\dfrac{xy}{5} - y = 100$

I $\log 2 + \log x + \log y = 3 + \log 2$

$$\log xy = 3$$

$$xy = 1000.$$

II $200 - y = 100$

$$y = 100.$$

Отуда

$$x = \frac{1000}{y} = \frac{1000}{100} = 10.$$

ВЕЖБАЊА

Реши ове биномне једначине:

1. $x^3 + 27 = 0$
2. $x^3 - 8 = 0$
3. $2x^3 - 128 = 0$
4. $125x^3 + 8 = 0$
5. $2x^3 + 27 = 0$
6. $x^3 + 8 = 0$
7. $3x^3 - 18 = 0$
8. $6x^3 - 8 = 0$
9. $4x^3 + 500 = 0$
10. $27x^3 + 1 = 0$
11. $x^3 - 1 = 0$
12. $x^3 - 11 = 0$
13. $x^4 + 625 = 0$
14. $2x^4 - 32 = 0$
15. $3x^4 + 243 = 0$
16. $5x^4 - 5 = 0$
17. $2x^4 - 1 = 0$
18. $5x^4 + 1 = 0$
19. $x^4 - 8 = 0$
20. $2x^4 + 2 = 0$

21. $x^4 - 500 = 0$
22. $2592 - x^4 = 0$
23. $6 - 6x^4 = 0$
24. $-10x^4 = 10$
25. $10 - 9x^4 = 0$
26. $16x^4 - 25 = 0$
27. $81x^4 + 4 = 0$

Реши ове биквадратне једначине:

28. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
29. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
30. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$
31. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
32. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
33. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$
34. $x^4 - 5x^2 - 668 = 0$
35. $16x^2 + \dfrac{7}{x^2} + 113 = 0$
36. $25x^2 - \dfrac{4}{x^2} - 9\dfrac{3}{4} = 0$
37. $9x^2 - \dfrac{16}{x^2} + 32 = 0$
38. $15x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 15\dfrac{2}{3} = 0$
39. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
40. $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$
41. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
42. $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$
43. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$

Реши ове триномне једначине:

44. $x^6 + x^3 = 2$
45. $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$
46. $3x^6 - 2x^3 - 176 = 0$
47. $x^6 - 7x^3 + 12 = 0$
48. $x^6 + 3x^3 - 10 = 0$
49. $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$
50. $2x^6 + x^3 - 1 = 0$
51. $3x^6 - 80x^3 - 27 = 0$

Реши ове симетричне (реципрочне) једначине:

52. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$
53. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$
54. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$
55. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
56. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
57. $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$
58. $12x^3 - 13x^2 - 13x + 12 = 0$
59. $12x^3 + 37x^2 + 37x + 12 = 0$
60. $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0$
61. $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$
62. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$
63. $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$
64. $x^4 - 4\dfrac{2}{3}x^2 + 7\dfrac{5}{12}x^2 - 4\dfrac{2}{3}x + 1 = 0$
65. $x^4 - 4\dfrac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 4\dfrac{1}{2}x + 1 = 0$

66. $x^4 - 5\frac{5}{6}x^3 + 10\frac{1}{3}x^2 - 5\frac{5}{6}x + 1 = 0$

67. $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

68. $x^4 + 2\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1 = 0$

69. $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

70. $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$

71. $12x^4 + 56x^3 + 89x^2 + 56x + 12 = 0$

72. $10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$

73. $18x^4 + 21x^3 - 94x^2 + 21x + 18 = 0$

74. $24x^4 - 10x^3 - 77x^2 - 10x + 24 = 0$

75. $6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$

76. $12x^5 - 8x^4 - 45x^3 + 45x^2 + 8x - 12 = 0$

77. $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0$

78. $3x^4 - 4x^3 + 4x - 3 = 0$

79. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$

80. $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$

81. $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$

82. $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

83. — Решити једначину :

$$x^6 - 1 = 0.$$

(Раставићемо је на чиниоце:

$$(x - 1)\ (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$(x^5 + 1) + x\,(x^3 + 1) + x^2\,(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)\ (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) +$$
$$+ x\,(x + 1)\ (x^2 - x + 1)\ + x^2\,(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)\ [x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + x^3 - x^2 + x + x^2] = 0$$
$$x_2 = -1$$
$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

Сад $x^2 = y$. Итд.)

84. — Решити једначину :

$$x^6 + 1 = 0$$

85. — Решити једначину :

$$x^8 - 1 = 0$$

(Стави $x^2 = y$)

86. — Решити једначину :

$$x^5 - 1 = 0$$

87. — Решити једначину :

$$x^{10} - 1 = 0$$

(Стави $x^5 = y$)

88. — Решити једначину :

$$x^5 + 1 = 0.$$

Реши ове ирационалне једначине:

89. $\sqrt{x + 4} = 7$

90. $\sqrt{36 + x} = 2 + \sqrt{x}$

91. $x + \sqrt{25 - x^2} = 0$

92. $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

93. $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

94. $x + \sqrt{5x + 10} = 8$

95. $x + \sqrt{10x + 6} = 8$

96. $4x + \sqrt{5 - 4x} = 5$

97. $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 + x^2}} = x - 1$

98. $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$

99. $3x + \sqrt{6x + 10} = 35$

100. $\sqrt{7 - x} - \sqrt{x + 1} = -2$

101. $\sqrt{2 + 3x} + 5 = 0$

102. $\sqrt{3x^2 - 7x + 5} - \sqrt{x - 8} = 0$

103. $3x - 7\sqrt{x} + 2 = 0$

104. $\sqrt{x + 5} = x - 1$

105. $x + \sqrt{x + 3} = 4x - 1$

106. $1 - 6x + \sqrt{5\,(x + 4)} = 0$

107. $2x - \sqrt{2x - 1} = x + 2$

108. $3x - 4\sqrt{x - 7} = 2\,(x + 2)$

109. $x - 10 = \frac{2}{3}\,(x - 1) - \sqrt{2x - 1}$

110. $a + \sqrt{a^2 - x^2} = x$

111. $\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 + x} = a + b$

112. $\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b} = \sqrt{a - b}$

113. $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \sqrt{a + b - 2x}$

114. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-3}=6$

115. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

116. $\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-11}=\sqrt{x-3}$

117. $\sqrt{9x+1}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{19x+30}$

118. $3\sqrt{5x+4}+2\sqrt{3x}=6\sqrt{2x-5}$

119. $x(x+3)=\sqrt{346+3x(x+3)}-2$

[У вежбању 119 изврши ову смену: $x(x+3)=y$].

120. $\sqrt{\frac{5}{x^2}+49}-\sqrt{\frac{5}{x^2}-49}=7$

[У вежбању 120 изврши ову смену: $\frac{5}{x^2}+49=y$. Тада је $\frac{5}{x^2}-49=y-98$].

121 $\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}}+\frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2\frac{1}{5}$

122. $\sqrt{3x+2}+\sqrt{7+6x}=\sqrt{7x+72}$

123. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{2x+1}$

124. $\sqrt{5+\sqrt{x}}+\sqrt{7+\sqrt{x}}=\sqrt{2(6+\sqrt{x})}$.

125. — Колика је бројна вредност израза

$$(3-\sqrt{5})\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}?$$

(Нова Градишка, 1936)

(Стави да је тај цео израз раван једном броју!)

126. — Решити једначину: $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x-29}=0$

(Ново Место, 1935)

127. — Решити систем:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2})\sqrt{x^2+y^2}=20$$
$$(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2})\sqrt{x^2+y^2}=30$$

(IV мушка гимназија, Загреб, 1936)

128. — Полупречник круга раван је трећини позитивног корена једначине

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2x+19}$$

У томе кругу уписана су три једнака круга који се узајамно додирују. Нађи површину између та три круга.

Реши ове једначине.

129. $3^x=3^5$

130. $a^x=a^4$

131. $a^{x+5}=a^7$

132. $a^{8x-1}=a^{3x+14}$

133. $a^{\frac{4}{5}x+3}=a^{2x-3}$

134. $a^{0,65x+1,72}=a^{2,27+0,4x}$

135. $(a^{x+3})^{x-3}=(a^{x+4})^{x+2}$

136. $a^{17x+18}\ a^{5x-23}=a^{29x-13}\ a^{127-14x}$

137. $(3^{67-18x})^2\ (3^{11x-9})^3=(3^{5x+7})^4\ 3^{86-24x}$

138. $(a^{8x-5})^{8x-9}\ (a^{5x+3})^{8x-1}=(a^{6x-5})^{3x+2}\ (a^{6x-5})^{4x-3}$

139. $10^{5x-2}=1000000$

140. $2^{-x}=\frac{1}{8}$

141. $\sqrt[3]{a^{5x+3}}=a^{12}$

142. $8^{-x}=\frac{1}{2}$

143. $2^{x-4}\ 4^{2x-3}=8^{x+2}$

144. $\sqrt{a^{7x-5}}=\sqrt{a^{3x+4}}$

145. $2^{5x-2}-2^{5x-3}+2^{5x-1}=68$

146. $2^{3x+5}+4^{1\frac{1}{2}x+3}\ 8^{x-1}=352$

147. $2^5(a^{2x-1})^{3x-2}(4^x)^{3x-1}=(8^{7-x})^{x+7}\ 16^{4x}$

148. $3\log x=2\log 8$

149. $\frac{1}{3}\log x^6=\frac{1}{2}\log 81$

150. $\log 16x-\log 8x^2=2\log 4x^2-\log 8x$

151. $19^x=65$

152. $\sqrt[3x]{34,123}=\sqrt{\frac{252}{115}}$

153. $(4^{3-x})^{2-x}=1$

154. $(10^{5-x})^{6-x}=1000$

155. $\sqrt[x]{a}=a^x$

156. $2^{x+3}+4^{x+1}=320$

157. $2^{x+2}+9^{x+1}=810$

158. $3^x=177147$

159. $\left(\frac{3}{4}\right)^x=51\frac{1}{2}$

160. $3^{x+1}+\frac{18}{3^x}=29$

161. $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$

162. $5^{2x}-7\cdot 5^x-450=0$

163. $2^{3x-5}=228$

164. $100\cdot 10^x=\sqrt[x]{1000^5}$

165. $2^{x+1}+4^x=80$

166. $2^x+4^x=272$

167. $3^{\frac{x}{2}}=768$

168. $24^{3x-1}=10\,000$

169. $5\cdot 3^{2x}-7\cdot 3^x-3456=0$

170. $3^{x+1}+3^{x-2}-3^{x-3}+3^{x-4}=750$

171. $3^{2x}\, 2^{2x-3} = 7^{x-1}\, 4^{x+3}$

172. $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x+3}$

173. — Решити једначину

$$x^{10} - 1024 = 0.$$

(Ново Место, 1934)

(Покушај да решиш овај задатак без употребе логаритамских таблица).

174. — Решити једначину :

$$4^{4x+2} - 27 \cdot 4^{3x+1} + 202 \cdot 4^{2x} - 1728 \cdot 4^{x-2} + 4^2 = 0.$$

(Дубровник, 1938)

175. — Решити једначину :

$$\frac{2^{3x-10}\, 3^{x+2}}{8^{x-4}\quad 6^{7-x}} = \frac{1}{3}\, 9^{x-2}$$

(Сињ, 1936)

176. — Реши систем једначина :

$$x^3 + y^3 = 72 \qquad 3^{x+y} + 3^{x+y+1} + 3^{x+y+2} = 9477$$

(Вуковар, 1938)

177. — Решити систем :

$$4^{\sin x} + 8^{\cos y} = 6$$
$$4^{\sin x}\, 8^{\cos y} = 8$$

(I реална гимназија, Љубљана, 1936)

(Најпре изврши једну подесну смену!)

Реши ове логаритамске једначине :

178. $\log x = 2$

179. $\log x - 1 = \log 10x - \log x$

180. $\log x^2 = \log x + 1$

181. $2 \log x + 3 \log x - 7 = \log x + 1.$

182. $\log^2 x - \log x = 0$

183. $5 \log^2 x - 4 \log x - 1 = 0$

184. $\log (3x^2 - 17x + 2) - \log (x^2 - 6x - 1) = \log 2$

185. $\log [(7x - 9)^2] + \log [(3x - 4)^2] = 2.$

186. $\log \sqrt{5x + 8} + \log \sqrt{2x + 3} = \log 90 - \log 6$

187. $\log \sqrt{7x + 5} + \log \sqrt{2x + 3} = \log 45.$

188. $1 + \log x^3 = 4/ \log x$

189. $\log x + \log (x + 15) = 1 + \log 4$

190. — У једначини $9x^2 - 12x + \log a$ одредити a тако, да корени буду једнаки међу собом.

191. — Наћи такав број да троструки његов логаритам буде за 3 већи од удвојеног логаритма броја који се добија кад се непознати број умањи за 2.

192. — Решити једначину :

$$\log (x^2 + 1 + x \sqrt{2}) + \log (x^2 + 1 - x \sqrt{2}) = \log 34 - \log 2.$$

(Сремски Карловци, 1935)

193. — Решити систем $xy = 500$, $\quad x^{\log y} = 25.$

(Сремски Карловци, 1935)

(Логаритмиши у обема једначинама, па изврши подесну смену!).

194. — Решити систем :

$$5^{\log x} + 3^{\log y} = 32, \qquad 5^{\log x}\, 3^{\log y} = 135.$$

IV. — КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С ВИШЕ НЕПОЗНАТИХ. — ПРОБЛЕМИ У ВЕЗИ СА СИСТЕМОМ ДРУГОГ СТЕПЕНА.

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ С ВИШЕ НЕПОЗНАТИХ.

Систем квадратних једначина. — Две или више квадратних једначина за које претпостављамо да су задовољене истим вредностима за непознате чине *систем квадратних једначина.*

Пример. — Систем квадратних једначина :

$$3x^2 + 4y^2 - 5x = 14$$
$$5x^2 - y^2 - 3y = -5.$$

Обе ове квадратне једначине задовољавају се вредностима $x = 1$, $y = 2$:

$$3 . 1^2 + 4 . 2^2 - 5 . 1 = 14$$
$$5 . 1^2 - 2^2 - 3 . 2 = -5.$$

Систем квадратних једначина с двема непознатима. — Систем квадратних једначина може бити од две, три и више једначина. Ми ћемо показати само неколико врсти система с двема непознатима.

I. — *Систем у коме је једна једначина линеарна* (првог система):

$$x^2 - y^2 = 32$$
$$x - 2y = 2.$$

II. — *Систем у коме једна једначина има све изразе другог степена:*

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$
$$x^2 + 3x + y^2 - 4 = 1.$$

III. — *Систем у коме једна једначина садржи неки познати образац:*

$$x^2 - 2xy + y^2 = a$$
$$x^2 - y^2 = b.$$

IV. — *Систем у коме се једна једначина може раставити на чиниоце првог степена:*

$$3x^2 - xy - 2y^2 - 7x + 7y = 0$$
$$x^2 - 2y^2 - 5y - 19 = 0.$$

Прву једначину можемо овако написати:

$$3x^2 - 3xy + 2xy - 2y^2 - 7x + 7y = 0.$$

Овако ћемо је раставити на чиниоце:

$$3x(x-y) + 2y(x-y) - 7(x-y) = 0$$
$$(x-y)(3x + 2y - 7) = 0.$$

Види се да смо је раставили на два чиниоца првога степена.

РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА С ДВЕМА НЕПОЗНАТИМА.

Пре него што се пређе на решавање система, треба образовати полином обеју једначина (ослободити се заграда и разломака, пребацити све изразе на леву страну, свести и уредити полином).

Општи облик квадратне једначине с двема непознатима овако изгледа:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Кад се уреде оба полинома према овоме општем облику, треба загледати да није код нашег система који од 4 горе поменута случаја. Ако јесте, онда систем треба овако решавати:

Једна једначина у систему је линеарна. — Нека нам је дат систем:

(1) $$x^2 - y^2 - 5x - 2 = 0$$
(2) $$2x - 3y - 6 = 0.$$

Линеарну једначину (2) решићемо по иксу и добивену вредност сменити у квадратној једначини (1):

(3) $$x = \frac{6 + 3y}{2}$$

$$\frac{36 + 36y + 9y^2}{4} - y^2 - 5\,\frac{6 + 3y}{2} - 2 = 0.$$

Кад се ова једначина упрости, добије се:

$$5y^2 + 6y - 32 = 0$$

а одатле:

$$y_1 = 2, \; y_2 = -3{,}2.$$

Ако добивене вредности сменимо у (3) добићемо:

$$x_1 = 6, \; x_2 = -1{,}8.$$

Решења нашег система јесу:

$$x_1 = 6 \;\; x_2 = -1{,}8$$
$$y_1 = 2 \;\; x_2 = -3{,}2.$$

Овај начин на који смо сад радили зове се *метод замене*. Њега смо већ знали и у VI разреду.

Хомогена једначина у систему другог степена. — Једначина је *хомогена* по x и y, ако су јој сви изрази истог степена.

Нека нам је дат систем:

(1) $$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 0$$
(2) $$x^2 + 3x + y^2 - 4y = 1.$$

Прва једначина је *хомогена*. Извршимо ову смену у једначини (1):

$$y = tx,$$

где је t нова непозната.

(1) $$2x^2 - 5xtx + 3(tx)^2 = 0$$
$$2x^2 - 5x^2t + 3x^2t^2 = 0.$$

Избацимо из ње x^2:

$$2 - 5t + 3t^2 = 0.$$

Одавде је:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{2}{3}.$$

Пошто смо одредили t, имаћемо:

$$y = tx, \text{ тј. } y = x.$$

Ову вредност за y сменимо у једначини (2):

(2) $$x^2 + 3x + y^2 - 4x = 1$$
$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

Одавде је:

$$x_1 = 1, \; x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Пошто је $y = x$, биће:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Истим поступком добијамо, кад узмемо другу вредност од t, $t_2 = \frac{2}{3}$, још два пара решења) и то

$$x_3 = \frac{3 + 3\sqrt{66}}{26}, \quad x_4 = \frac{3 - 3\sqrt{66}}{26}.$$

$$y_3 = \frac{1 + \sqrt{66}}{13}, \quad y_4 = \frac{1 - \sqrt{66}}{13}.$$

Систем у коме једна једначина (или обе) садржи неки познати образац. — Нека нам је дат систем:

(1) $x^2 - 2xy + y^2 + 3 = 12,$

(2) $x^2 - y^2 + 15 = 0.$

Ове једначине могу овако да се напишу:

(1) $(x - y)^2 = 9$

(2) $(x - y)(x + y) = -15$

(3) $x - y = \pm 3.$

Из прве имамо:

Узмимо прву вредност (+ 3), па је сменимо у другој једначини:

$$3(x + y) = -15,$$

а одатле:

(4) $x + y = -5.$

Једначине (3) и (4) дају систем двеју линеарних једначина. Из њега имамо:

$$x_1 = -1 \quad y_1 = -4.$$

Из једначине (3) узмимо другу вредност (— 3), па је сменимо у (2). Добићемо овај систем:

$$x + y = 5$$
$$x - y = -3.$$

Он даје ово решење:

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 4.$$

Растављање на линеарне чиниоце. — Нека је дат систем:

(1) $3x^2 + xy - 2y^2 - 21x + 14y = 0$

(2) $x^2 + 2y^2 - 5y - 19 = 0.$

У првој једначини пада у очи да неки коефицијенти имају заједничких чинилаца: 3 и — 21, — 2 и 14.

Напишимо те изразе један уз други:

$$3x^2 - 21x - 2y^2 + 14y + xy = 0.$$

Смета само xy. Али њега можемо раставити на два сабирка тако, да је први дељив са 3, а други са 2:

$$3x^2 - 21x - 2y^2 + 14y + 3xy - 2xy = 0$$

а то је даље:

$$3x^2 + 3xy - 21x - 2y^2 - 2xy + 14y = 0$$
$$3x(x + y - 7) - 2y(y + x - 7) = 0$$

(1) $(x + y - 7)(3x - 2y) = 0.$

Сваки од ових чинилаца даје нам по једну линеарну једначину коју треба комбиновати са једначином (2). Узмимо прво једначину

(3) $(x + y - 7) = 0$

Одатле је $y = 7 - x$. Сменом у једначини (2) добијамо:

$$x^2 + 2(7 - x)^2 - 5(7 - x) - 19 = 0.$$

Та једначина даће нам две вредности за x, а једначина (3) даће нам одговарајуће вредности за y кад у њој ставимо добивене вредности за (x).

Кад узмемо други чинилац једначине (1) тј.

$$3x - 2y = 0$$

тада нам он, у вези са једначином (2), даје још два пара решења датог система.

Комбиновање полинома једначина. — Кад се у задатом систему не појави ниједан од ових случајева, треба видети дали се полиноми датих једначина могу тако комбиновати, да испадне једна непозната, на пр.

Дат је систем:

(1) $x^2 - 3xy + 3y^2 - 5x + 6y - 9 = 0 \;\big|$

(2) $5x^2 - 6xy + 6y^2 - 8x + 12y - 9 = 0 \;\big| -2.$

Поделимо доњу једначину са (—2), па ће бити:

(1) $x^2 - 3xy + 3y^2 - 5x + 6y - 9 = 0$

(3) $-\frac{5}{2}x^2 + 3xy - 3y^2 - 4x - 6y + \frac{9}{2} = 0.$

Саберимо их, па ћемо добити:

$$\left(1 - \frac{5}{2}\right)x^2 - x + \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

Одатле је лако наћи x. Кад сменимо нађено x у ма којој од задатих једначина, моћи ћемо наћи y.

Какво је ово комбиновање једначина?

Кад ни тај поступак не помаже, морамо употребити *метод замене,* који је најтежи, али нас увек доводи до резултата. При томе методу обично се добија једначина 3 или 4 степена по x или по y. Да бисмо избегли дуг рачун, овај се метод не врши непосредно. Ево како се поступа.

Пример. — Нека нам је дат систем:

(1) $x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 7y - 11 = 0.$

(2) $5x^2 - 8xy - 4y^2 - 13x + 14y - 20 = 0.$

Метод замене састоји се у овоме: треба једну једначину решити по једној непознатој, па добивену вредност сменити у другој једначини.

Обе једначине су другог степена и по x и по y. Да избегнемо решавање једначине другог степена и увођење квадратног корена, кога се доцније морамо ослободити, поступа се овако.

Уклонимо најпре члан са x^2. Зато помножимо прву једначину са 5 и одузмимо је од друге:

$$7xy + 21y^2 + 7x + 49y + 35 = 0.$$

Уредимо и скратимо са 7:

$$(y + 1)\,x + 3y^2 + 7y + 5 = 0.$$

Отуда

(3) $$x = -\frac{3y^2 + 7y + 5}{y + 1}$$

Заменимо сад ову вредност икса у једну од датих једначина система, на пр. у прву:

$$\left(\frac{3y^2 + 7y + 5}{y + 1}\right)^2 + 3y\,\frac{3y^2 + 7y + 5}{y + 1} - 5y^2 + 4\,\frac{3y^2 + 7y + 5}{y + 1} - 7y - 11 = 0.$$

Најзад помножимо ову једначину са $(y + 1)^2$ и уредимо је по опадајућим степенима од y:

$$13y^4 + 67y^3 + 125y^2 + 104y + 34 = 0.$$

Ово је једначина 4 степена. Њена решења за y треба сменити у једначини (3) која нам даје одговарајуће вредности за x.

Као што си видео на предњем примеру решавање система од две квадратне једначине са две непознате, методом замене, довело нас је до једне једначине четвртог степена коју ми још не умемо да решимо. Како се решавају такве једначине учићеш на вишим школама.

Зато је најбоље, кад се то може, да решиш систем неком подесном комбинацијом, а не заменом.

Систем са више непознатих. — Њих треба увек свести на систем од две једначине на један од горе побројаних начина.

Пример 1. — Решити систем:

I $x^2 + xy + xz = 24$

II $xy + y^2 + yz = 48$

III $xz + yz + z^2 = 72.$

Раставићемо полиноме на левим странама:

I $x(x + y + z) = 24$

II $y\,(x + y + z) = 48$

III $z\,(x + y + z) = 72.$

Сабраћемо:

$$(x + y + z)\;(x + y + z) = 144$$
$$x + y + z = \pm 12$$

I

$x + y + z = 12$

I $12x = 24$ $\quad x_1 = 2$

II $12y = 48$ $\quad y_1 = 4$

III $12z = 72$ $\quad z_1 = 6$

II

$x + y + z = -12$

$x_2 = -2$

$y_2 = -4$

$z_2 = -6$

Да ли има још решења?

Пример 2. — Решити систем:

I $x^2 + 2y^2 = z^2$

II $7x^2 + 5y^2 = 3z^2$

III $xy + 2yz = 3xz + 5$

Ставимо: $x^2 = u$, $y^2 = v$, $z^2 = t$. Имаћемо:

I¹ $u + 2v = t$

II¹ $7u + 5v = 3t$

III¹ $\sqrt{uv} + 2\sqrt{vt} = 3\sqrt{ut} + 5$

Вредност за t из I¹ унесемо у II¹. Имаћемо

$$7u + 5v = 3u + 6v.$$

Одатле је: $v = 4u$.

Сменом у I^1 добијамо:

$$I^1 \qquad u + 8u = t,$$

тј. $t = 9u$.

Сменом у III^1 добијамо:

$$\sqrt{4u^2} + 2\sqrt{36u^2} = 3\sqrt{9u^2} + 5 \qquad \text{тј.}$$

(1) $2u + 12u = 9u + 5$

(2) $-2u - 12u = -9u + 5.$

Из (1) имамо:

$$u_1 = 1.$$

Из (2) имамо:

$$u_2 = -1.$$

Сад је даље:

$v_1 = 4$	$v_2 = -4$	
$t_1 = 9$	$t_2 = -9$	
$x^2 = 1$	$x_1 = 1$	$x_2 = -1$
$x^2 = -1$	$x_3 = i$	$x_4 = -i$
$y^2 = 4$	$y_1 = 2$	$y_2 = -2$
$y^2 = -4$	$y_3 = 2i$	$y_4 = -2i$
$z^2 = 9$	$z_1 = 3$	$z_2 = -3$
$z^2 = -9$	$z_3 = 3i$	$z_4 = -3i$

Проба за вредности:

$x = -1,\ y = -2,\ z = -3.$

I $1 + 8 = 9$

II $7 + 30 = 3 \cdot 9$

III $2 + 12 = 3 \cdot 3 + 5.$

Добро је. Ваља испробати сва решења.

ПРОБЛЕМИ У ВЕЗИ СА СИСТЕМОМ КВАДРАТНИХ ЈЕДНАЧИНА

За њих важи оно исто што смо рекли за проблеме уопште. Зато ћемо ми овде само навести неколико примера.

Пример 1. — Збир квадрата два броја за 1 је већи од двоструког производа та два броја; разлика квадрата та два броја је 5. Који су то бројеви?

Нека је први број x, а други y. Кад изразимо алгебарски њихове особине, добићемо ове две једначине:

(1) $x^2 + y^2 - 1 = 2xy$

(2) $x^2 - y^2 = 5$

Оне се могу написати и у овоме облику:

(1) $(x - y)^2 = 1$

(2) $(x - y)\,(x + y) = 5.$

Решавање оваквог система показано је на страни 43.

Наш систем даје ова два пара решења:

$x_1 = 3$ и $x_2 = -3$

$y_1 = 2$ $\quad y_2 = -2.$

Пример 2. — Неки путник пређе известан пут за 4 часа. Други путник за то исто време пређе 8 километара мање. Зна се да другоме путнику треба 42 минута више него првоме, па да пређе пут од 28 километара. Коликом брзином се крећу ови путници?

Нека је: брзина првога x,
брзина другога y.

За 4 часа први је путник прешао $4x$ километара.

„ 4 „ други „ „ „ $4y$ „

Та два пута се разликују за 8 километара:

(1) $4x - 8 = 4y.$

Пут од 28 километара прећи ће први путник за $\frac{28}{x}$ часова.

Исти ће пут прећи други путник за $\frac{28}{y}$ часова. Та два времена се разликују за 42 минута. Кад се сетимо да је минут $\frac{1}{60}$ од часа, имаћемо:

(2) $$\frac{28}{y} - \frac{28}{x} = \frac{42}{60}.$$

Добијамо овај систем:

(1) $x - y - 2 = 0$

(2) $xy - 40x + 40y = 0.$

Ако x из прве једначине $(x = y + 2)$ сменимо у другу, добићемо:

$$y^2 + 2y - 80 = 0$$

а одатле $y_1 = 8$ $\quad y_2 = -10$

а затим $x_1 = 10$ $\quad x_2 = -8.$

Први утник се креће брзином од 10 километара на час, а други брзином од 8 километара. Негативна решења одбацујемо. (Зашто?)

ВЕЖБАЊА

Решити системе:

1. $x + y = 7{,}5$; $xy = 14$

2. $x - y = 2$; $xy = 63$

3. $3x - 2y = 0$; $xy = 13{,}5$

4. $2x - y = 5$; $xy = 42$

5. $x + y = 7$; $x^2 - y^2 = 21.$

6. $x - y = 5$; $x^2 + y^2 = 37$

7. $x + y = 8$; $x^2 + y^2 = 34$

8. $x - y = 1$; $3x^2 + y^2 = 31$

9. $3x - y = 1$; $5x^2 - y^2 = -5$

10. $2x + y = 7$; $x^2 + y^2 = 13$

11. $3x^2 - 5xy + 4y^2 + 2x - 3y = 7$; $4x - 3y = 5$

12. $x^2 + xy + y^2 = 19$; $xy = 6$

13. $x^2 - 2xy + y^2 = 25$; $x + y = 5$

14. $x^2 - y^2 = 3$; $x^2 + y^2 - xy = 3$

15. $x^2 + \frac{8}{3}xy - y^2 = 0$; $2x^2 + 3y = 26$

16. $16x^2 + 5xy - y^2 = 0$; $y^2 - 10x = 26$

17. $x + y = 5$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$

18. $x + y = \frac{21}{8}$; $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6}$

19. $3x - 2y = 10$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = = 1{,}25$

20. $2x - y = 3$; $4x^2 - 5y^2 = 3x + 5$

21. $3x^2 - 2xy = 8$; $2x^2 - 3y^2 = 11$

22. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; $x + y = 13$

(У вежбању 22 прву једначину степенуј са 2, затим остави само корен на левој страни, па опет степенуј са 2).

23. $x^2 + y^2 = 20$; $\frac{x}{y} = 2$

24. $x + y = 2{,}5$; $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4{,}25$

25. $x^2 + y^2 + x + y = 62$; $x^2 - y^2 + x - y = 50$

26. $(7 + x)(6 + y) = 80$; $x + y = 5$

27. $x^2 + y^2 = 89$; $x^2 - y^2 = 39$

28. $3x^2 - 5y^2 = 353$; $7x^2 - 4y^2 = 56$

29. $ax^2 + by^2 = c$; $dx + ey^2 = f$

30. $5y + 3xy = 114$; $xy = 33$

31. $\sqrt{x^2 + 13} = \sqrt{2y^2 - 1}$; $\sqrt{2x^2 - 8} = \sqrt{y^2 + 39}$

32. $\sqrt{3x^2 + 16} = \sqrt{4y^2 - 36}$; $\sqrt{5x^2 - 1} = \sqrt{3y^2 - 6}$

33. $\sqrt{3x^2 + 16} = \sqrt{4y^2 - 36}$; $\sqrt{5x^2 + 1} = \sqrt{3y^2 + 6}$

34. $xy + y = 28$; $2x - 3y = 0$

35. $y - \sqrt{3x - 3} = 6$; $4x + 3y = 35$

36. $x + \sqrt{2y + 4} = 9$; $3x - 2y = 3$

37. $x + \sqrt{3y^2 - 2} = 10$; $2x - 3y = 1$

38. $4 - \sqrt{5x^2 + 2} = 1$; $5y - 3x = 38$

39. $7x + 4y = 57$; $xy = 14$

40. $ax + by = c$; $xy = d$

41. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 18$; $12xy = 1$

42. $\frac{4}{x} - \frac{5}{y} = 1$; $xy = 10$

43. $\frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 1$; $xy = 3$

44. $7x^2 - 3y^2 = 27\frac{1}{4}$; $xy = 1$

45. $x^2 + y^2 = 73$; $xy = 24$

46. $x^2 + y^2 = 97$; $xy = 36.$

Решићемо систем 45.

Ставимо $x + y = z$ и $x - y = v$. Тада ће бити $x = \frac{v + z}{2}$ и $y = \frac{z - v}{2}$. Сменом у датоме систему добијамо:

$$\left(\frac{z + v}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - v}{2}\right)^2 = 73,$$

$$\frac{z + v}{2} \cdot \frac{z - v}{2} = 24,$$

а то је даље:

$$v^2 + 2vz + z^2 + v^2 - 2vz + z^2 = 292,$$

$$z^2 - v^2 = 96;$$

а то је даље:

$$z^2 + v^2 = 146,$$

$$z^2 - v^2 = 96.$$

Одатле је:

$$2z^2 = 242$$
$$z^2 = 121$$
$$z = \pm 11 \text{ и } v^2 = 146 - 121, \text{ тј. } v^2 = 25$$

или $v = \pm 5$.

Кад знаш v и z, добијаш ове системе првога степена:

$$\begin{matrix} x + y = 5 \\ x - y = 11 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x + y = -5 \\ x - y = -11 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x + y = -5 \\ x - y = 11 \end{matrix} \text{ и } \begin{matrix} x + y = 5 \\ x - y = -11 \end{matrix}$$

Из њих ћеш добити вредности за x и y:

$$\begin{matrix} x_1 = +8 \\ y_1 = +3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 = -8 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

47. $$\begin{matrix} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{matrix}$$

48. $$\begin{matrix} x^2 + y^2 = \dfrac{25}{36} \\ axy = 2 \end{matrix}$$

Систем 47 можемо решити и без горе показане смене у вежбању 45. Овако:

$y = \dfrac{b}{x}$. Сменом у првој једначини имамо:

$x^2 + \left(\dfrac{b}{x}\right)^2 = a$, а одавде једначина:

$x^4 + b^2 = ax^2$. Сад изврши ову смену: $x^2 = z$, па ради даље! Ради како ти је лакше.

49. $$\begin{matrix} 3x^2 - 2y^2 = 6(x - y) \\ xy = 0 \end{matrix}$$

51. $$\begin{matrix} (x + 4)(y - 3) = 0 \\ (x + 7)(y - 7) = 0 \end{matrix}$$

50. $$\begin{matrix} 4x^2 - 9y^2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 8(x + y) \end{matrix}$$

52. $$\begin{matrix} x^2y = a \\ xy^2 = b \end{matrix}$$

(У вежбању 52 подели леву страну левом, а десну десном, па ћеш добити једну простију једначину).

53. $$\begin{matrix} 3x^2 - 5xy - 2y^2 = 0 \\ 4x^2 - 5xy + 6y^2 - 7 = 6y - 1 \end{matrix}$$

56. $$\begin{matrix} x^2 + 2xy + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{matrix}$$

54. $$\begin{matrix} 5y^2 - 6x^2 - 13xy = 0 \\ 4y^2 + 2xy - 7x^2 = 4 \end{matrix}$$

57. $$\begin{matrix} x^2 - 2xy + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{matrix}$$

55. $$\begin{matrix} xy = a \\ \dfrac{x}{y} = b \end{matrix}$$

58. $$\begin{matrix} x^2 - xy = a \\ x^2y - xy^2 = b \end{matrix}$$

(У вежбању 58 растави на чиниоце полиноме на левим странама, па подели леву с левом десну с десном страном).

59. $$\begin{matrix} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ 3y^2 - 4x^2 + 5xy = 18 \end{matrix}$$

(Помножи горњу једначину са 3, а доњу са 2, па одузми доњу од горње. Добићеш једну хомогену једначину другог степена).

60. $$\begin{matrix} x^2 + xy = -6 \\ xy + y^2 = 15 \end{matrix}$$

61. $$\begin{matrix} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ 4x^2 - 3xy = 1 \end{matrix}$$

62. $$\begin{matrix} 3x^2 - 5y^2 + 4xy = 2 \\ 7y^2 - 8xy + 2x^2 = 1 \end{matrix}$$

63. $$\begin{matrix} 4xy + x^2 + 3y^2 = 32 \\ 15x^2 - 3y^2 - 2xy = 40 \end{matrix}$$

64. $$\begin{matrix} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x - y = 0{,}3 \end{matrix}$$

67. $$\begin{matrix} \dfrac{x + 1}{y + 1} = 2 \\ \dfrac{x^2 + 1}{y^2 + 1} = 5 \end{matrix}$$

65. $$\begin{matrix} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3} \\ x^2 + y^2 = 160 \end{matrix}$$

68. $$\begin{matrix} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b \end{matrix}$$

66. $$\begin{matrix} x\left(1 + \dfrac{x}{y}\right) = a \\ y\left(1 + \dfrac{y}{x}\right) = b \end{matrix}$$

69. $$\begin{matrix} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a \\ x + y = b \end{matrix}$$

У вежбању 69 изврши ову смену: $x = u^3$, $y = v^3$). реши прву од датих једначина по y, па смени у добивеној квадратној једначини.

У вежбањима 64 изврши ову смену: $x = u^3$, $y = v^3$).

70. $$\begin{matrix} \sqrt{x - 5} + \sqrt{y + 2} = 5 \\ x + y = 16 \end{matrix}$$

71. $$\begin{matrix} \sqrt{5 - 3x + x^2} + \sqrt{5 - 3y + x^2} = 6 \\ x + y = 3 \end{matrix}$$

72. $$\begin{matrix} \sqrt{3 - x + \dfrac{1}{5}x^2} + \sqrt{3 - y + \dfrac{1}{4}y^2} = 3 \\ x + y = 4 \end{matrix}$$

73. $$\begin{matrix} \sqrt{x(1 - y)} + \sqrt{y(1 - x)} = a \\ x + y = b \end{matrix}$$

74. $$\begin{matrix} x^2 + y^2 = xy \\ x + y = xy \end{matrix}$$

75. $$\begin{matrix} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{y} \\ x + y = 10 \end{matrix}$$

76. $$\begin{matrix} 27x^2 + 46xy - 73y^2 = 0 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 + 7 = 8(x + y) - 11 \end{matrix}$$

77. $$\begin{matrix} x^3 + y^3 = 7xy \\ 28(x + y) = 7xy \end{matrix}$$

(Види вежбање 68)

78. $x^2 = y^2 + z^2$
$x + y + z = 24$
$x^2 + y^2 + z^2 = 200.$

79. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$
$x^2 - y^2 + z^2 = 6$
$x + y = 3.$

(У вежбању 78 сабери 1 и 3 једначину, па ћеш добити једну једначину по x. Ту вредност смени у другим двема једначинама, па ћеш добити систем од две једначине. Или реши 2 једначину по z, па добивену вредност за z смени у 1 и 3 једначини).

80. $x^2 + y^2 + z = 25$
$x^2 + z^2 = 34$
$y^2 + z^2 = 41$

81. $xy = 56$
$xz = 24$
$yz = 21$

82. $2x^2 + 3y^2 = 107$
$4x^2 - 5z^2 = 83$
$3y^2 + 2z^2 = 44$

83. $x + y + z = 30$
$3x - y + z = 34$
$x^2 + 2y^2 - z^2 = 84$

84. $x - 2y + 3z = 10$
$x - 3y + 2z = -5$
$x^2 + y^2 + z^2 = 350$

85. $x^2 + y^2 + z^2 = 38$
$xy = 6$
$x + y = z$

86. $2x + 4y - 9z = 2$
$3x - 8y + 6z = 0$
$x^2 + y^2 + z^2 = 29$

87. $x + y + z = 36$
$xy = 108$
$x^2 + y^2 = z^2$

88. $x^2 - y^2 - z^2 = 59$
$yz = 20$
$x + y + z = 19$

89. $x + y + z = 132$
$x^2 = y^2 + z^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = 6050$

90. $x^2 + y^2 + z^2 = 50$
$xy + xz + yz = 47$
$x + y - z = 2$

91. $x + y + z = 3$
$x^2 + y^2 = 2$
$xy = z^2$

92. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$
$xy = z$
$x + y + z = 5$

93. $x^2 + y^2 - z^2 = 12$
$xy + xz + yz = 11$
$x + y + z = 6$

(Задатак из вежбања 93. имали су да раде кандидати на вишем течајном писменом испиту у Другој мушкој београдској гимназији 11 јуна 1925 године.

Радићеш га овако:

Другу једначину помножи са 2; трећу једначину дигни на квадрат; у њој смени $2xy + 2yz + 2xz = 22$, па је одузми од прве једначине. Добићеш једну једначину по z. Сад ради сам даље!).

94. — Подели број 27 на два дела тако, да четвороструки квадрат првога дела увећан за петоструки квадрат другога, даје 1620.

95. — Два броја стоје у размери као 3 : 13. Производ им је 735. Нађи те бројеве.

96. — Растави број 100 на два дела тако, да збир њихових квадрата буде 5882.

97. — Нађи два узастопна парна броја чији је производ 224.

98. — Збир два броја је a, а збир њихове размере и реципрочне (обртне) вредности њихове размере је b. Који су бројеви? Дискусија. Примена: $a = 13$, $b = 2{,}225$.

99. — Нађи двоцифрени број који има ове особине: кад се он подели збиром својих цифара, добије се количник 4,а остатак нула; кад се производу његових цифара дода 19, добије се број са истим цифрама, али обрнутим редом.

100. — Збир два броја је 34. Троструки њихов производ већи је од збира њихових квадрата за 284. Који су бројеви?

101. — Збир квадрата два броја повећан за први број даје 205, а повећан за други број 200. Који су то бројеви?

102. — Производ два броја повећан за први број даје 170, а повећан за други број 176. Који су?

103. — Производ два броја већи је за 91 од десетоструког првога броја, а за 51 већи од десетоструког другог броја. Који су то бројеви?

104. — Збир два броја додан збиру квадрата та два броја даје 686. Разлика та два додана разлици њихових квадрата даје 74. Који су то бројеви?

105. — Збир квадрата два броја је 360. Да је први већи за 1, а други за 3, збир њихових квадрата био би 500. Који су то бројеви?

106. — Ако се једноме двоцифреном броју дода 9, добије се број са истим цифрама, али у обрнутоме реду. Ако се тражени број подели производом својих цифара, добије се 6. Који је тај број?

107. — Две цеви утичу у један басен. Кад је отворена само прва, њој треба 2 часа више него другој да напуни басен. Кад су обе отворене, басен се напуни за 2 часа и 24 минута. Колико времена је потребно свакој цеви посебице да напуни басен?

108. — Две цеви могу на напуне један басен за 18 часова; за које време би напунила басен свака од њих посебице, кад се зна да првој треба 27 часова више него другој, па да сама напуни басен.

109. — Два радника за 25 часова сврше половину једнога посла кад га ради сваки посебице; али кад раде заједно, сврше цео посао за 12 часова. Колико је часова потребно свакоме посебице, па да сврши цео посао?

110. — Два радника приме за један посао: први 80 динара, а други 45. Први је радио 5 часова више од другога. Да је први радио онолико часова колико је радио други, а други колико први, примили би исту суму. Колико је часова сваки радио и колико се свакоме плаћа на час?

111. — Један комад тканине продат је за 1800 динара. Купац примети да му је погрешно послата тканина која је јевтинија 2,20 д. по метру, али да у послатоме комаду има 15 метара више него у ономе што га је он поручио. Он се реши да га задржи, пошто и тај погрешно послати комад стаје 1800 динара. Колико је било метара у послатоме комаду и пошто је метар?

112. — Један трговац прода два мала комада чоје. Први прода за 1200 динара, а други, који има 2 метра више, за 1300 динара. Да је први комад продао по цени по којој је продао други и обратно, продао би оба комада за 2540 динара. Колико је било метара у сваком комаду?

(Означи са x цену првог, са y цену другог, а са z број метара у првоме комаду).

113. — Неко има 27000 динара; ту суму разделио је на два дела и дао посебице под интерес по истом проценту. Први део ће са интересом бити после 6 месеци 12.300 динара, а други после 8 месеци 15.500 динара. Како је разделио свој капитал и под који проценат га је дао под интерес?

114. — Два капитала су дата под интерес. Оба заједно износе 60.000, а збир процената је 12. Први доноси 1300 динара, а други 2340 динара интереса годишње. Који су то капитали?

115. — Два капитала су дата под интерес под разним процентима. Први доноси годишње 500 динара интереса, а већи је од другога за 400 дин. Други носи годишње 390 д. интереса, али је дат под интерес за $^3/_2{}^0/_0$ више него први. Који су то капитали?

116. — Два разна капитала су дата под интерес по $6^0/_0$. Оба износе заједно 30000 д. Први је био 4 месеца дуже под интересом и донео је свега 1280 д. интереса. Други је донео 840 д. Који су то капитали?

117. — Кад се споје средине узастопних страна једнога правоугаоника, добије се ромб чији је обим 40 cm, а површина 96 cm². Колике су стране тога правоугаоника?

118. — Над истом хипотенузом леже два правоугла троугла. Катете првога разликују се за 9 cm, а другога са 13 cm. Колике су стране тих троуглова кад њихове површине заједно износе 90 cm²?

119. — У кругу полупречника $r = 15$ cm, кроз тачку M повучена је тетива чији је производ отсечака 200. Колико је далеко тачка M од центра?

120. — Две тетиве се секу у кругу; једна је од 22 m, а отсечци на овој другој су 12 m и 8 m. Колики су отсечци оне прве?

121. — Одредити стране једнога правоуглога троугла кад се зна да су њихови мерни бројеви три узастопна цела броја.

122. — Наћи површину правоугла троугла, чији је обим $2s$, а полупречник описана круга r. Дискусија!

123. — Стране једног троугла су три цела узастопна броја, а површина му је 84 cm². Наћи стране.

(Сети се обрасца $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$!)

124. — Површина једнога правоугаоника ie p, а дужина му је за d већа од висине. Наћи стране. Дискусија!

Примена: $p = 3200$ m², $d = 14$ m.

125. — У кругу полупречника $r = 25\ m$, уписати правоугаоник чије се стране разликују за 17 m.

126. — Израчунати дужину управних страна једнога правоуглога троугла чија је површина 54 m^2, а хипотенуза 15 m.

127. — Израчунати стране једнога правоуглога троугла чији је обим 36 m, а површина 54 m^2.

128. — Висина једне праве призме је 10 cm, основе су правоугаоници чија је ширина половина дужине. Површина призме је 216 cm^2. Израчунати: површине основа и површине страна.

129. — Израчунати ивице правоуглог паралелепипеда, кад му је површина 180 m^2, дијагонала на основици 20m, а збир свих његових димензија 17 m.

130. — Два велосипедиста иду један другоме у сусрет са места удаљених, 180 km. Први је пошао 1 час доцније, али је прелазио 3 km на час више него други. Колико километара је прелазио на час први, а колико други, кад су се срели на средини пута? Колико времена је путовао први, а колико други?

131. — На кружној стази дугој 700 m полазе два велосипедиста са почетка стазе у истоме смислу. Први је пошао 16 секунди доцније, а прелазио је у секунди $1\frac{1}{2} m$ више од другога. Којом брзином и за које време се кретао први, кад је морао да обиђе круг, па да стигне другога?

V. — ПРОГРЕСИЈЕ

АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

Општа дефиниција. — Математичка прогресија је назив за низ бројева који се ређају по извесном *правилу* тако, да кад знамо неколико узастопних бројева из тога низа, можемо продужити писање и осталих бројева.

На пример: 1, 2, 3, 4 . . . .

Овај низ бројева можемо продужити и надесно и налево, јер видимо да је то *низ бројева* са наше основине. Дакле:

. . . . — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. . . . .

Исто тако можемо продужити и овај низ:

. . . — 2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

јер видимо да је то низ *парних* бројева.

Зашто смо могли продужити наша два горња низа? Зато што смо уочили *правило* по коме се они ређају.

Можемо ли продужити овај низ бројева:

$$1, \frac{3}{5}, 7, -8, 9, -\frac{8}{9} \qquad ?$$

Не можемо, пошто не може никако да се уочи *правило* по коме се нижу ови наши бројеви.

Бројеви који сачињавају један низ зову се *чланови* тога низа.

Дефиниција аритметичке прогресије. — За један низ бројева кажемо да *граде аритметичку прогресију*, или да се *налазе у аритметичкој прогресији*, кад је *разлика* између два узастопна члана *стална*. Правећи ту разлику, увек одузимамо претходни члан од наредног. Горе смо већ имали две аритметичке прогресије:

. . . . . . — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . . и

. . . . — 2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . . . .

У првој прогресији је $(-1) - (-2) = 0 - (-1) = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 1$.

У другој прогресији је $0 - (-2) = 2 - 0 = 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = \underline{\underline{2}}$.

Ту сталну разлику обележаваћемо са $\underline{\underline{d}}$.

Тако чланови низа

$$\ldots -1, -\frac{1}{2}, \; 0, \; \frac{1}{2}, \; 1, \; \frac{3}{2}, \; 2, \ldots$$

граде аритметичку прогресију са разликом $d = \frac{1}{2}$.

Често се аритметичка прогресија назива и аритметички ред.

Грађење аритметичке процесије. — Кад знамо ма који члан једне аритметичке прогресије и разлику, можемо увек *начинити* прогресију. Прогресију градимо на тај начин, што познатоме члану додамо разлику; тако добивеном члану опет додајемо разлику итд. Овим добијамо чланове прогресије с десне стране. Слично можемо продужити прогресију на лево одузимањем исте разлике.

Аритметичка прогресија је *неограничена* и налево и надесно. Међутим при рачунању нама се увек каже које чланове прогресије да узмемо у обзир. Члан којим почињемо зове се *први члан* и ми ћемо га обележавати са a_1. Други члан обележавамо са a_2, трећи са a_3, итд., и у опште **енти члан** (n-ти члан) са a_n. Овај последњи назива се и *општи члан.*

Казаљке при дну указују на положај, појединих чланова у прогресији.

Пример I. — Начинити аритметичку прогресију од пет чланова чији је први члан 3 и разлика 3.

$3, (3+3), (3+3+3), (3+3+3+3), (3+3+3+3+3),$

или

$3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15.$

Овде је: $d = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$, $a_5 = 15$.

Пример 2. — Начинити аритметичку прогресију од 7 чланова, кад је први члан -9, а разлика $+5$.

Биће:

$$(-9)\ (-9+5), (-9+5+5), (-9+5+5+5),$$
$$(-9+5+5+5+5), (-9+5+5+5+5+5),$$
$$(-9+5+5+5+5+5+5).$$

или

$-9, \quad -4, \quad +1, \quad 6, \quad 11, \quad 16, \quad 21,$

овде је $d = 5$, $a_1 = -9$, $a_2 = -4, \ldots\ldots, a_7 = 21$.

Пример 3. — Начинити аритметичку прогресију од 4 члана чији је први члан -7, а разлика -4.

Биће:

$$-7, [-7+(-4)], [-7+(-4)+(-4)]; [-7+(-4)+(-4)+(-4)],$$

или

$-7, \quad -11, \quad -15, \quad -19.$

Овде је $d = -4$, $a_1 = -7$, $a_2 = -11$, $a_3 = -15$,
$a_4 = -19$.

Израчунавање општег члана. — Некад нам је потребно да знамо вредност општег члана a_n. Да бисмо га израчунали, ми ћемо најпре да се потсетимо на начин на који постају чланови аритметичке прогресије. Из досадањих дефиниција и примера знамо да је:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + \underline{\underline{2d}}$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + \underline{\underline{3d}}$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + \underline{\underline{4d}}$$
$$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 4d) + d = a_1 + \underline{\underline{5d}} \text{ и т. д.}$$

Кад загледамо мало пажљивије у казаљке наших чланова на левој страни и сачиниоце уз d на крају десне стране, видимо да је *сачинилац уз d увек за 1 мањи од казаљке.*

То ћемо овако разумети. Узмимо један низ од 5 чланова.

$2, \quad 5, \quad 8, \quad 11, \quad 14.$

Између свака два члана празнину попуњава разлика 3:

$$2\ \underbrace{\overbrace{\qquad}^{3}}_{d}\ 5\ \underbrace{\overbrace{\qquad}^{3}}_{d}\ 8\ \underbrace{\overbrace{\qquad}^{3}}_{d}\ 11\ \underbrace{\overbrace{\qquad}^{3}}_{d}\ 14.$$

Ако на бројној линији узмемо бројеве 2 и 14, видећемо, да ћемо од 2 доћи до 14, ако пренесемо 4 пута d. Значи да је

$14 = 2 + 4d$ Нацртај!

Како увек има *за 1 мање* празнина него што има чланова у реду, биће:

$$(1) \qquad \boxed{a_n = a_1 + (n-1)\ d} \qquad \text{Упамти овај образац!}$$

Пример. — Израчунати десети члан прогресије чији је први члан 6, а разлика 5.

Овде је $n = 10$. Према томе је на основи обрасца (1):

$$a_{10} = a_1 + 9d,$$

а то је даље: $a_{10} = 6 + 9 \cdot 5$
$a_{10} = 6 + 45$
$a_{10} = 51.$

И збиља је тај низ:

$6, \ 11, \ 16, \ 21, 26, \ 31, \ 36, \ 41, \ 46, \ 51.$

Као што се види, *десети* члан је збиља 51.

Збир аритметичке прогресије. — Да видимо колико износи збир узастопних чланова једне аритметичке прогресије. Да бисмо дошли до обрасца који нам даје тај *збир* радићемо овако. Означимо са S_n (сума) збир од n првих чланова једне прогресије, напишимо тај збир:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Збир се не мења ако сабирци промене места и ми ћемо због тога моћи да напишемо наш збир на ова два начина:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + a_1 + 2d) + \ldots\ldots + [a_1 + (n-3)\ d] +$$
$$+ [a_1 + (n-2)\ d] + [a_1 + (n-1)\ d],$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots\ldots + [a_n - 3)\ d] +$$
$$+ [a_n - (n-2)\ d] + [a_n - (n-1), d].$$

Пошто у једном и у другом збиру има исти број сабирака, кад саберемо леву страну с левом, десну с десном, добићемо на десној страни n парова, које ћемо ставити у заграде:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n).$$

На десној страни имамо n једнаких сабирака $(a_1 + a_n)$. Отуда је

$$2S_n = n\,(a_1 + a_n),$$

(2) $$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Пример. — Колики је збир чланова аритметичке прогресије од 10 чланова, чији је први члан 6, а последњи 51?

Овде је
$$n = 10,$$
$$a_1 = 6,$$
$$a_{10} = 51.$$

Према томе ће збир бити:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(6 + 51) = 5 \,.\, 57 = 285.$$

Испиши све чланове ове прогресије, па сабери, да се увериш да му збир збиља износи 285.

Али нама се ретко даје последњи члан; обично нам се даје први члан, број чланова и разлика. Зато ћемо извести још један образац за збир аритметичке прогресије.

Ако вредност за a_n из обрасца (1) сменимо у обрасцу (2), имаћемо:

$$S_n = \frac{n}{2}\left\{a_1 + [a_1 + (n-1)\,d]\right\};$$

а то је даље:

(2') $$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)\,d]}.$$

Пример. — Израчунати збир чланова аритметичке прогресије од 6 чланова чији је први члан 0, а разлика 10.

Овде је:
$$n = 6,$$
$$a_1 = 0,$$
$$d = 10.$$

Према томе је:

$$S_6 = \frac{6}{2}\,[2 \,.\, 0 + (6-1)\,10] = 3 \,.\, 50 = 150.$$ Увери се!

ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА.

Дефиниције. — За један низ бројева кажемо да *чине геометриску прогресију*, или да стоје у *геометриској прогресији*, ако је *количник* свака два узастопна броја *сталан*. При образовању количника увек делимо наредни члан претходним. Количник обележавамо са q.

Пример:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

Овде је:

$$q = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = \frac{243}{81} = \frac{729}{243}.$$

Такав низ се назива и геометриски ред.

Грађење геометриске прогресије. — Из горњег примера и из дефиниције излази да се наредни члан добија кад се претходни помножи количником:

$$1 \qquad 1 \,.\, 3 \qquad (1 \,.\, 3) \,.\, 3 \qquad [(1 \,.\, 3) \,.\, 3] \,.\, 3 \qquad \{[(1 \,.\, 3) \,.\, 3] \,.\, 3\}\,3$$ итд.

И код геометриске прогресије обично нам је дат само *извстан* број чланова. Број којим почиње таква прогресија јесте *први* члан (a_1); a_2 је други члан, a_3 трећи, итд. *Енти-члан* (n-ти члан) назива се и *општи члан* и обележава се са a_n.

Израчунавање општег члана. — Размишљајући слично ономе код израчунавања *општег члана* у аритметичкој прогресији, имаћемо за геометриску прогресију:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1\,q$$
$$a_3 = a_2\,q = a_1\,q\;q = a_1\,q^2$$
$$a_4 = a_3\,q = a_1\,q^2\,q = a_1\,q^3$$
$$a_5 = a_4\,q = a_1\,q^3\,q = a_1\,q^4$$

— — — — — — — —

(1) $$\boxed{a_n = a_1\;q^{n-1}}$$ Упамти добро овај образац!

Пример. — У геометријској прогресији чији је први члан 1 а количник 3 израчунати пети члан.

Овде је:
$$n = 5$$
$$a_1 = 1$$
$$q = 3.$$

Према томе је:

$$a_5 = 1 \cdot 3^4 = 81.$$

Збир чланова геометриске прогресије. — Испишимо један збир:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots\ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.$$

Помножимо обе стране са q:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + \ldots\ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n.$$

Одузмимо горњи збир од доњег

$$qS_n - S_n = -a_1 + (a_1q - a_1q) + (a_1q^2 - a_1q^2) + a_1q^3 - a_1q^3) + + \ldots + (a_1q^{n-1} - a_1q^{n-1}) + a_1q_n$$

$$S_n(q-1) = a_1q^n - a_1$$

(2) $$\boxed{S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}.}$$ Упамти добро овај образац!

Али прогресија може да *расте:*

1, 5, 25, 125, 625.

или да *опада:*

$$1000,\ 200,\ 40,\ 8,\ \frac{8}{5},\ \frac{8}{25},\ \frac{8}{125}.$$

Прогресија која расте зове се *порастна прогресија*. Прогресија која опада зове се *опадна прогресија.*

Код *порастне* прогресије је $q > 1$.

Код *опадне* прогресије је $0 < q < 1$.

Према томе и добивени збирни образац (2) има два облика: један подесан за порастну прогресију, а други за опадну.

Ако је прогресија *порастна,* тада је $q > 1$, те је самим тим и $q^n > 1$. Према томе и бројилац и именилац разломка у обрасцу (2) су позитивна. Зато за *порасну* прогресију задржавамо облик (2) збирног обрасца.

За *опадну* прогресију је $0 < q < 1 \left(\text{на пр. } q = \frac{1}{5}\right)$, те је самим тим и $q^n < 1$. Да не бисмо имали негативан бројилац и именилац помножимо их оба са — 1, па ће збирни образац за *опадну* прогресију добити овај облик :

(2′) $$\boxed{S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.}$$ Упамти добро овај образац!

Образац (2) можемо и овако написати:

$$a_1\frac{q^n-1}{q-1} = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}.$$

Скратимо са a_1, и помножимо обе стране са $q - 1$:

$$q^n - 1 = (q-1)(1 + q + q^2 + \ldots q^{n-1}).$$

Овај образац казује да се бином $x^n - 1$ може раставити на чиниоце $x - 1$ и $1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1}$.

Изведи горњи образац деобом бинома $x^n - 1$ биномом $x - 1$.

Пример 1. — Израчунати збир геометриске прогресије од 5 чланова кад је први члан 1, а количник 5.

Пошто је $q > 1$, значи да је ово *порастна* прогресија, те ћемо применити образац (2).

Овде је: $a_1 = 1, \quad q = 5, \quad n = 5.$

Према томе је:

$$S_5 = 1 \cdot \frac{5^5-1}{5-1} = \frac{3125-1}{4} = \frac{3124}{4} = 781.$$ Увери се.

Пример 2. — Израчунати збир геометриске прогресије од 4 члана чији је први члан 1000, а количник $\frac{1}{5}$.

Пошто је овде $q < 1$, ово је опадна прогресија, те ћемо употребити образац (2′).

Овде је

$$a_1 = 1000,\ q = \frac{1}{5} \text{ и } n = 4,$$

те је:

$$S_4 = 1000\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^4}{1-\frac{1}{5}} = 1000\,\frac{1-\frac{1}{625}}{\frac{4}{5}} = 1000\,\frac{\frac{624}{625}}{\frac{4}{5}} =$$

$$= 1000\,\frac{624}{4 \cdot 125} = 1000\,\frac{624}{500} = 2 \cdot 624 = 1248.$$

Збирни образац бесконачне опадне прогресије. — Узмимо једну опадну геометриску прогресију:

$$256,\ 64,\ 16,\ 4,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256},\ \ldots$$

Тачкицама на десној страни хоћемо да кажемо да узимамо **све** чланове те прогресије, тј. да је надесно неограничено продужујемо. Такву прогресију зовемо **бесконачна прогресија.**

Да видимо шта бива са *ентим* чланом опадне бесконачне геометриске прогресије:

$$a_n = a_1\, q^{n-1}.$$

За горњу прогресију он има облик:

$$a_n = 255 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{256}{4^{n-1}}.$$

Штогод је n веће ми се у прогресији све више удаљујемо надесно; чланови опадају и постају све мањи и мањи. Наш горњи разломак има све *већи* именилац то јест сâм разломак постаје све мањи и мањи. Кад је *n веома велико*, разломак

$$\frac{256}{4^{n-1}}$$

постаје **веома мали.**

На пр. једанајсти члан износи

$$a_{11} = \frac{256}{4^{10}} = 0,000\,2441\ldots;$$

а двадесетпрви

$$a_{21} = \frac{256}{4^{20}} = 0,000\,000\,000\,233\ldots$$

Наш разломак се већ толико смањио, да се веома мало разликује од нуле. Повећавајући n и даље, можемо учинити да *енти члан* буде *произвољно мали.* За такву појаву ми кажемо укратко да *општи члан* тежи нули кад n тежи у бесконачноме и пишемо то овако:

$$a_n \to 0 \text{ кад } n \to \infty.$$

Или пошто је $a_n = a_1\, q^{n-1}$,

то пишемо: $a_1\, q^{n-1} \to 0$ кад $n \to \infty$.

Ако хоћемо да саберемо **све** чланове једне бесконачне опадне прогресије, морамо узети збир првих n чланова те прогресије и пустити n да неограничено расте, тј. да n тежи бесконачноме.

У обрасцу (2′) збир од n чланова је:

$$S_n = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

Да бисмо видели шта бива са овим збиром кад n тежи бесконачноме, написаћемо овај збир у другоме облику:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1\, q^n}{1-q},$$

тј.
$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{q}{1-q}a_1q^{n-1}.$$

Видели смо мало час да израз a_1q^{n-1} тежи нули, кад n тежи бесконачноме. Према томе цео други члан десне стране тежи нули кад n тежи бесконачноме. Због тога збир свих чланова једне опадне бесконачне прогресије тежи вредности

$$\frac{a_1}{1-q}.$$

То пишемо овако:

$$S_n \to \frac{a_1}{1-q} \text{ кад } n \to \infty,$$

или
$$\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_1\,q + a_1\,q^2 + a_1\,q^3 + \ldots\ldots$$

Ако збир свих чланова бесконачне опадне прогресије обележимо са S имаћемо

$$S_n \to S = \frac{a_1}{1-q} \text{ кад } n \to \infty.$$

Образац

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

јесте образац за збир свих чланова опадне бесконачне геометриске прогресије.

Пример. — Израчунати збир бесконачне прогресије чији је први члан 100, а количник $\frac{1}{10}$.

Овде је: $a_1 = 100$ и $q = \frac{1}{10}$.

Према томе је збир ове *бесконачне прогресије:*

$$S = a_1\frac{1}{1-q},$$

тј.
$$S = 100\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 100\,\frac{10}{9} = \frac{1000}{9}.$$

Као што се види, *збир бесконачне опадне геометриске прогресије је коначан број.* Је ли тако и са порастном геометриском прогресијом? Може ли код аритметичке прогресије

n-ти члан тежити нули? Може ли нула бити члан геометриске прогресије? А може ли нула бити члан аритметичке прогресије? Зашто?

Периодични разломци. — Леп пример за збирове бесконачних опадних прогресија дају нам *периодични разломци.*

Просто-периодични разломци. — Израчунати вредност просто-периодична разломка 0,(5).

Знамо да то значи ово,

$$0,(5) = 0,555555\ldots.$$

Међутим овај бескрајни разломак можемо претставити као следећи збир чланова опадне бесконачне геометриске прогресије:

$$\frac{5}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}\ldots\ldots$$

Количник овог реда је $q=\frac{1}{10}$. (Због тога чланови реда и опадају).

Збир ће бити:

$$0,(5) = S = \frac{5}{10}\;\frac{1}{1-q} = \frac{5}{10}\;\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{10}\;\frac{10}{9} = \frac{5}{9}.$$

Према томе ће бити:

$$0,(4) = \frac{4}{9}, \qquad 0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \qquad 2,(7) = 2\frac{7}{9}, \text{ и т. д.}$$

Изведи правило!

Мешовито-периодични разломак. — Израчунати вредност мешовито-периодична разломка 0,23(4)

Биће:

$$0,23(4) = 0,23 + 0,004 + 0,0004 + 0,00004 + \ldots.$$

А то је даље:

$$0,23(4) = \frac{23}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\frac{4}{100000}+\ldots\ldots$$

Као што се види, први сабирак на десној страни није члан прогресије, пошто

$$\frac{4}{1000}:\frac{23}{100} \neq \frac{4}{10000}:\frac{4}{1000}.$$

Зато ћемо горњи мешовито-периодични разломак написати овако:

$$0,23(4) = \frac{23}{100}+\left[\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\frac{4}{100000}+\ldots\ldots\right].$$

Прогресија у загради има количник $q=\frac{1}{10}$. Према томе горњи разломак биће даље:

$$0,23(4) = \frac{23}{100}+\frac{4}{1000}\;\frac{1}{1-\frac{1}{10}},$$

а одатле је:

$$0,23(4) = \frac{23}{100}+\frac{4}{1000}\;\frac{10}{9} = \frac{23}{100}+\frac{4}{900} = \frac{207+4}{900} = \frac{211}{900}.$$

Пошто је 211 = 234 — 23, изведи правило!

ЛОГАРИТМИ

Ми смо раније већ видели једну дефиницију логаритама. Сад ћемо видети још једну.

Две наспрамне прогресије. — Пре него што кажемо саму дефиницију узмимо једну аритметичку прогресију која почиње нулом и једну геометриску прогресију која почиње јединицом:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ 4,\ \ 5\ldots\ldots$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\ldots\ldots$$

Кад их пажљиво загледамо, видимо да су чланови аритметичке прогресије *изложиоци* степена 2^n, а чланови геометриске прогресије *вредности тога степена* чија је *основа* 2:

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32\ldots.$$

Узмимо друге две прогресије од којих се аритметичка почиње нулом, а геометриска јединицом:

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\ldots\ldots$$
$$1,\ 5,\ 25,\ 125,\ 625,\ 3125\ldots\ldots$$

Пошто нам аритметичка прогресија даје изложиоце, а геометриска ред вредности степена, имаћемо:

$$x^2 = 5.$$

Стављамо x, јер не знамо основу. Горња једначина даје за x:

$$x = \sqrt{5}.$$

И збиља, кад добро загледамо горња два реда, видимо:

$$(\sqrt{5})^0 = 1,\ (\sqrt{5})^2 = 5,\ (\sqrt{5})^4 = 25,\ (\sqrt{5})^6 = 125.$$

Опет се показало да су чланови аритметичке прогресије *изложиоци*, а геометриске прогресије *степени* за извесну основу.

Узмимо још један пример:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . . . .

1, 10, 100, 1000, 10000, 100 000, 1 000 000 . . . . . .

Мора да је 10 степен неке основе, где је изложилац 1. Означимо ту основу са x:

$$x^1 = 10$$

а одатле $x = 10$.

Значи да горњи ред претставља изложиоце, а доњи степене, за основу 10.

И збиља је:

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10\,000$

Ако сад узмемо опште бројеве имаћемо ове две прогресије:

$0,\ d,\ 2d,\ 3d,\ 4d,\ 5d \ldots.$

$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ q^5 \ldots..$

Логаритам. — Сваки члан аритметичке прогресије је *логаритам* наспрамног члана из геометриске прогресије. На пр. $2d$ је логаритам од q^2, $5d$ је логаритам од q^5. Обрнуто: чланови геометриске прогресије су *антилогаритми (нумеруси)* наспрамних чланова аритметичке прогресије. На пр. q^2 је *антилогаритам* од $2d$.

Разни системи логаритама. — Пошто можемо изабрати *разне* прогресије једну аритметичку која почиње нулом и другу геометриску која почиње јединицом, *има разних система логаритама.* Ми смо видели такозване *вулгарне логаритме* или *Бригсове логаритме.* Код њих логаритму I одговара антилогаритам 10. Према томе његови низови изгледају

0, **1,** 2, 3. . . . .

1, **10,** 100, 1000 . . . . .

ВЕЖБАЊА

АРИТМЕТИЧКЕ ПРОГРЕСИЈЕ

1. — Начинити аритметичку прогресију од 6 чланова кад је први члан 10, а разлика 4.

2. — Начинити аритметичку прогресију од 10 чланова чији је први члан 100, а разлика — 3.

3. — Начинити аритметичку прогресију од 5 чланова чији је први члан 12, а разлика — 6.

4. — Начинити аритметичку прогресију чија је разлика $-\frac{2}{3}$. Колико има таквих прогресија? Зашто?

5. — Начинити аритметичку прогресију чија је разлика $-\frac{5}{6}$.

6. — Начинити аритметичку прогресију у којој је један члан 9, а разлика — 2.

7. — Начинити ове две аритметичке прогресије: у првој је један члан 99 а разлика 2; у другој је један члан 153, а разлика — 2. Упореди те две прогресије!

8. — Написати аритметичку прогресију од 9 чланова у којој је последња члан $\frac{1}{2}$, а разлика $2\frac{7}{8}$.

Продужи ове аритметичке прогресије:

9. $2\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{4}$ 4 . . . . .

10. -5 $-2{,}5$ 0, ...

11. a $2a$ $3a$ . . . . .

12. m $m-4c$ $m-8c$ . . . . . .

13. $n+4b$ $n+2b$ n . . . . . .

14. — Израчунати 16 члан прогресије у којој је први члан 2, а разлика 3.

15. — Израчунати 10 члан прогресије у којој је први члан 7, а разлика — 7.

16. — Израчунати 8 члан прогресије у којој је први члан $9\frac{1}{2}$, а разлика $-\frac{3}{2}$

17. — Израчунати 12 члан прогресије у којој је први члан $2\frac{1}{2}$, а разлика $\frac{2}{3}$.

18. — Први члан једне аритметичке прогресије је 100, а разлика — 0,1. Колики је стоти члан?

19. — Наћи први члан аритметичке прогресије, чији је 12 члан $105\frac{1}{4}$, а разлика $9\frac{1}{2}$.

20. — Аритметичка прогресија почиње са $\frac{1}{2}$, а завршала се са — $1\frac{7}{8}$. Колика је разлика кад прогресија има 20 чланова? (Употреби образац за a_n!)

21. — Између 12 и 20 уметни 3 броја тако, да она са 12 и 20 чине аритметичку прогресију.

(Кад то будемо урадили, имаћемо аритметичку прогресију од 5 чланова у којој је први члан 12, а пети 20. Треба да нађемо *разлику* наше нове прогресије.

$$a_5 = a_1 + 4d.$$

Овде је $a_5 = 20$, $a_1 = 12$, те је

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4} = \frac{20 - 12}{4} = 2.$$

Тражена прогресија је 12, 14, 16, 18 и 20.)

Уметање нових бројева између два броја тако, да нови бројеви са она два стара чине прогресију зове се *интерполовање,* или *интерполација.*

22. — Између 7 и 35 уметни 6 бројева, који би са два дата броја сачињавали аритметичку прогресију.

(Та прогресија имаће сад 8 чланова. Први члан биће: $a_1 = 7$, а осми члан биће: $a_8 = 35$. Израчунај одатле разлику нове прогресије).

23. — Између 10 и 100 уметни на исти начин 17 бројева.

24. — Између бројева 2 и 5 уметни на исти начин 25 бројева.

25. — Између $2\frac{1}{3}$ и $3\frac{1}{5}$ уметнути још 5 чланова.

26. — Између 3,7 и 5,6 уметнути још 7 чланова.

27. — Између 2,8 и 7,09 уметнути још 10 чланова.

28. — Написати низ бројева који се добија, кад у изразу $2 + 3x$ почне x да расте од 1 до 10, а узимамо само целе бројеве за x. Какав је ово низ?

29. — Написати низ бројева, који се добија, кад се у изразу $\frac{5 - x}{3}$ смењује x целим бројевима од 0 до 19. Какав је низ?

30. — Колико чланова има аритметичка прогресија у којој су крајњи чланови 10 и $7\frac{1}{5}$, а разлика — 0,4 ?

$$[a_n = a_1 + (n - 1)\,d.]$$

31. — Колико чланова има аритметичка прогресија у којој је први члан 10, последњи 110, а разлика 10 ?

32. — У једној аритметичкој прогресији од 12 чланова први члан је 3, последњи 5,25. Колики је збир целе прогресије?

33. — Наћи збир свих целих бројева од 1 до 100 закључно.

34. — Наћи збир свих целих бројева од 10 до — 20.

35. — Први члан аритметичке прогресије је 2,6; збир првих 5 чланова је 1,75. Наћи пети члан.

36. — Наћи последњи члан аритметичке прогресије од 20 чланова у којој је разлика $\frac{1}{2}$, а збир свих чланова износи 39.

37. — Једна аритметичка прогресија има 55 чланова. Последњи је 5,8; збир два последња члана је 11,5. Наћи збор свих 55 чланова.

38. — Једна аритметичка прогресија има 20 чланова; њихов збир је 860; последњи члан је — 14. Колики је претпоследњи члан?

($a_{n-1} = a_n - d$. Шта треба прво израчунати?)

39. — Разлика једне аритметичке прогресије је 2; последњи члан 35; збир свих чланова 320. Којим чланом почиње прогресија ?

40. — Колико има чланова прогресија чији су први, други и последњи члан: 3, $3\frac{1}{4}$ и 9?

41. — Провери је ли ово тачно :
$2\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 110.$

42. — Провери је ли ово тачно :
$10 + (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 44) = 1000.$

43. — Провери је ли ово тачно :
$(2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 20) - 10 = 100.$

44. — Провери је ли ово тачно:
$(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 19) = 100.$

45. — Провери је ли ово тачно :
$(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots\ldots + 141) = 71^2.$ (Пази!)

46. — Колики је збир првих 100 парних бројева? (2, 4, 6, ...).

47. — Колики је збир првих 100 непарних бројева? (1, 3, 5, 7, ...).

48. — Колики је збир свих двоцифрених бројева?

49. — Колики је збир свих троцифрених бројева?

50. — Два тела била су у почетку кретања на међусобном растојању од 573,75 m. Крену се истим правцем, а супротним смислом. Брзина првог тела у првој секунди била је 25 метара у секунди и сваког секунда порасте за $\frac{1}{2}$ метра. Брзина другог тела у првој секунди била је 30 метара у секунди и расте у свакој секунди за $\frac{1}{2}$ метра. Кад ће се срести?

51. — Колико удараца откуца часовник за 12 часа кад откуцава само часове?

52. — Наћи углове правоугла троугла кад се зна да они чине аритметичку прогресију. (Колики је збир тих углова?)

53. — Једно тело пада и у првој секунди пређе пут од 4,9 m, а пут који пређе у другој секунди већи је за 9,8 m него у другој секунди. Који пут ће прећи ово тело у десетој секунди и са које је висине пало кад је ударило о земљу после 10 секунада? (Какво је ово кретање? Какав низ чине путеви што их тело прелази у свакој секунди?)

54. — Од воза који је пошао узбрдицом откачи се један вагон и у првој секунди пређе 0,30 m, у другој 3 × 0,30, у трећој 5 × 0,30, у четвртој 7 × 0,30, у петој 9 × 0,30 итд. Заустави се после 1 минута. Колики је пут прешао ?

(Кад почнеш да ређаш путеве, видећеш један низ бројева такав, да се из свих чланова може извући заједничко 0,30, а у загради да остане једна аритметичка прогресија).

55. — Наћи потребне и довољне услове, да збир аритметичке прогресије буде нула.

56. — Наћи аритметичку прогресију чији други и седми члан добија збир 92, а четврти и једанајсти дају збир 71.

57. — Збир четири средња члана једне аритметичке прогресије од 12 чланова износи 96. Збир спољних чланова је 48. Која је та прогресија ?

(Који су по реду ти средњи чланови? А спољни? Је ли задатак одређен? Зашто? Колико има таквих прогресија? Је ли код сваке аритметичке прогресије од 12 чланова збир спољних чланова једнак полузбиру 4 средња члана? Зашто?)

58. — Наћи аритметичку прогресију од 11 чланова кад је збир тих чланова 176, а разлика крајњих чланова 30.

59. — Три броја чине аритметичку прогресију. Збир им је 33, а производ 1287. Који су то бројеви?

60. — Три броја чине аритметичку прогресију. Збир им је 22, а збир њихових квадрата 166.

61. — Пет бројева чине аритметичку прогресију. Збир им је s, а производ p. Који су то бројеви?

(Означи средњи члан са x!)

62. — Пет бројева чине аритметичку прогресију. Збир им је 45, а збир њихових реципрочних вредности је $\frac{137}{180}$. Који су то бројеви?

(Ако је средњи члан a_3, а разлика d, тада целу ову аритметичку прогресију можемо овако написати :

$(a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d)$.

Види се да је збир $s = 5a_3$. Како је збир 45, значи да је средњи члан $\frac{45}{5} = 9$. Итд.).

63. — Један службеник има 24000 динара годишње плате. Сваке године добија 100 динара годишње повишице. Колика му је месечна плата у двадесетој години службе?

64. — Један велосипедист пређе првога часа 20 км., а свакога часа смањује своју брзину за $\frac{3}{4}$ км. Колико километара је свега прешао, кад је последњег часа прешао 17 км?

65. — У планинским пределима опада температура за 0,7° Целзијевих (приближно) на сваких 100 m висине. Један путник крене уз једно брдо у 11 часова пре подне када је температура износила 26°. Пошто је ишао неко време, види да је сада на термометру 14,8°. На коју се висину попео?

66. — Шеснаест лица треба да поделе 1000 динара тако, да свако наредно лице прима 5 динара више од претходног. Колико ће свако да добије?

67. — Једна аритметичка прогресија има ову особину, ма колики јој био број чланова (n), збир је увек $3n^2$. Израчунати a_1 и d.

(Узми други образац за збир. Чему је раван тај збир према овоме забитку? Не заборави да у тој једначини n може бити који хоћеш цео позитиван број. Ако је $n = 1$, чему је раван збир?)

68. — Збир 26 првих чланова једне аритметичке прогресије износи 728. Колики је последњи члан, кад је пети члан 11? Је ли број 43 члан те прогресије? Ако јесте, одредити који је по реду.

69. — Одредити први и последњи члан једне аритметичке прогресије од 14 чланова, кад је производ првог и последњег члана 276, а производ седмог и осмог члана 1326.

70. — Производ првог, трећег, петог и седмог члана једне аритметичке прогресије је 1729, а збир првог и седмог члана је 20. Који је то низ?

71. — У једној дворани има 30 реди седишта. У прва два реда има по 20 места; у трећем и четвртом реду има по 22 места; у петом и шестом реду има по 24 места. Број места тако расте до последњег реда: увек два реда имају исти број седишта, а наредна два реда по 2 места више. Колико има седишта у тој дворани?

72. — Наћи збир од n чланова ове аритметичке прогресије:

$$\frac{a-1}{a} + 1 + \frac{a+1}{a} + \frac{a+2}{a} + \ldots + a_n.$$

Како изгледа овде последњи (n-ти) члан?

73. — Пут једног тела баченог вертикално у вис смањује се за 9,8 m у свакој секунди. Докле ће у висину доспети тело бачено брзином од 830 m у секунди? Кад ће се вратити на земљу?

74. — Цифре једног троцифреног броја чине један аритметички низ чији чланови расту слева надесно. Тај број подељен збиром својих чланова даје 26. Ако три цифре тога броја напишемо обрнутим редом, добијамо број већи за 369 од траженог броја. Који је тај број?

75. — Узми једну алгебарску функцију првог степена. Дај независно промењивој вредности из природног низа бројева (1, 2, 3, 4, итд). Израчунај вредности функције. Какав низ чине те вредности функције?

Докажи ово: Ако у функцији $y = ax + b$ независно промењива добија вредности из природног низа, вредности функције чине аритметички низ

76. — Број c је аритметичка средина бројева a и b, ако међу њима постоји овај однос:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Докажи ово: Сваки члан аритметичке прогресије је аритметичка средина свог претходног и свог наредног члана.

77. — У једној аритметичкој прогресији од 1000 чланова забрљане су цифре тако, да сем оже прочитати само ово двоје: пети члан је 9, а осми 15. Колики је збир те прогресије?

78. — Десетоструки већи корен јеначине

$$\log(3x-5) - \log(x+3) = \log(x-1) - \log(2x-5)$$

претставља производ другог и трећег члана аритметичке прогресије у којој је производ првог и четвртог члана 22. Наћи ту прогресију. *(Сремски Карловци, 1938).*

79. — У аритметичкој прогресији од 15 чланова збир a_2 и a_{10} једнак је 22, а производ из a_4 и a_7 једнак је 45. Колика је диференција, први и задњи члан? Колики је збир прогресије која настаје ако се између диференције и задњег члана нитерпасира 7 чланова?

(Шибеник, 1938).

80. — У једној аритметичкој прогресији збир трећег и седмог члана јднак је збиру корена једначине $x^2 - 46x + 273 = 0$. Однос другог члана према шестом је $2:7$. Колико чланова има та прогресија, ако је њен збир 1575?

(Мушка гимназија у Нишу, 1938).

81. — Четврти члан аритметичке прогресије једнак је мањем, а девети члан већем корену једначине

$$33.2^{x+1} - 2^{2x} = 128.$$

Колико чланова те прогресије треба сабрати, да њихов збир буде једнак нули? *(Ваљево, 1935)*

82. — Пет бројева чине аритметичку прогресију. Њихов је збир 75, а квадрат другог члана је за 6 већи од петоструког последњег члана. Који су то бројеви? *Књажевац, 1935).*

83. — У једној аритметичкој прогресији од 8 чланова збир последња четир члана два пута је већи од збира прва четири члана, а производ првог и петог члана је за 160 мањи од производа другог и шестог. Која је то прогресија?

Женска гимназија, Нови Сад, 1936).

84. — Средњи члан аритметичке прогресије од 5 чланова јест x, сума свих чланова износи 10, њихов продукт 14 440. Како гласе тих 5 чланова прогресије?

(Мушка гимназија, Осијек, 1936).

85. — У растућој трочланој аритметичкој прогресији збир квадрата првог и трећег члана је за 2 већи од 24-струког другог члана. Зна се да је збир троструког првог члана и двоструке разлике 15. После решења прогресије испиши овај скуп : $(S_n + 1)$, a_2, S_n, a_3, a_1; испод овога одговарајуће бројеве; а испод бројева слова узта из уређене чириловске азбуке, по рангу исписаних бројева и добићеш једно чувено име. *(Крагујевац, 1936).*

86. — Једна аритметичка прогресија почиње са 1, а збир првих 100 чланова износи јој 10 000. Саставити квадратну једначину чији је један корен једнак трећем, а други седмом члану прогресије. *(Мушка гимназија, Скопље, 1935).*

87. — Збир четвртог и шестог члана аритметичке прогресије раван је корену једначине

$$\sqrt{5+\sqrt{390+\sqrt{x}}}=5,$$

а разликт петог и трећег члана једнака је корену једначине

$$2^{2y-2} - 2^{2y-3} - 2^{2y-4} = 16^4.$$

Наћи збир од 30 чланова ове прогресије.

Смедерево, 1936).

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ПРОГРЕСИЈЕ

1. — Начинити геометриску прогресију од 7 чланова, кад је први члан 1, а количник 10.

2. — Начинити геометриску прогресију од 10 чланова. кад је први члан 256, а количник $\frac{1}{2}$.

3. — Начинити геометриску прогресију с количником 15. Колико има таквих прогресија?

4. — Начинити геометриску прогресију чији је први члан $\frac{1}{3}$, а количник 0,3.

5. — Начинити геометриску прогресију чији је први члан $\frac{3}{2}$, а количник $\frac{2}{3}$.

6. — Начинити произвољну аритметичку прогресију са почетним чланом нула и једну геометриску с почетним чланом нула. Упореди их!

7. — Написати једну аритметичку и једну порасну геометриску прогресију код којих су прва два члана једнака. Која брже расте ?

8. — Написати једну аритметичку прогресију чији је први члан 3, а разлика 1 и једну геометриску прогресију са истим почетним чланом и са количником 1. Загледај!

9. — Начини две прогресије: аритметичку и геометриску тако, да је у обема први члан 2; у аритметичкој разлика — 3, а у геометриској количник — 3 Упореди их!

10. — Колики је пети члан геометриске прогресије чији је први члан 10, а количник 2 ?

11. — Израчунај a_n геометријске прогресије кад је:

a_1	q	n
2	3	4
4	5	6
7	8	9
9	10	12

12. — Наћи 11 члан Г. П. кад су прва два члана: 5 и 10
13. — „ 7 „ „ „ „ „ „ „ „ 2 „ 6
14. — „ 8 „ „ „ „ „ „ „ „ 3 „ 6
15. — „ 6 „ „ „ „ „ „ „ „ 18 „ 5,4
16. — „ 10 „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{32}{81}$ „ $\frac{16}{27}$

17. — Број c је геометриска средина бројева a и b, ако постоји однос $c = \sqrt{ab}$. Докажи да је сваки члан геометриског низа геометриска средина свог претходног и свог наредног члана.

У геометриској прогресији

18. — Нађи количник кад је први члан 9, а пети члан 144.
19. — „ „ „ „ „ „ 5, а осми „ 10935.
20. — „ „ „ „ „ „ 2, а девети „ $\frac{512}{6561}$.
21. — „ „ „ „ „ „ 2048, а дванаести „ 64.
22. — „ „ „ „ „ „ 81, а једанаести „ $\frac{64}{9}$.
23. — „ „ „ „ „ „ 2, а девети „ 215.

24. — Нађи количник кад је први члан $\frac{64}{243}$, крајњи члан $\frac{243}{16}$, а број чланова 11.

Нађи количник у овим прогресијама:

25. $a_{n-1} = 27{,}2$, $a_n = 24{,}9$, $n = 5$.
26. $a_{n-1} = 385$, $a_n = 366{,}7$, $n = 15$.
27. $a_{n-1} = 47{,}5$, $a_n = 55{,}8$, $n = 16$.
28. $a_{n-1} = 0{,}75$, $a_n = 0{,}91$, $n = 16$.

Нађи број чланова (n) једне геометриске прогресије кад је:

29. $a_1 = 6$ $a_2 = 12$ $a_n = 3072$.
30. $a_1 = 25$ $a_2 = 75$ $a_n = 2025$.
31. $a_4 = 13$ $a_6 = 117$ $a_n = 9477$.
32. $a_5 = 7$ $a_9 = 4375$ $a_n = 546\,875$.
33. $a_1 = 37{,}5$ $q = 1{,}8$ $a_n = 24099$.
34. $a_1 = 6344$ $q = -0{,}43$ $a_n = -7{,}415$.
35. $a_1 = 23{,}75$ $q = -0{,}925$ $a_n = -7{,}375$.

36. — Колики је збир чланова геометриске прогресије која почиње са 5, количник јој 3, а има 5 чланова?

37. — Исто питање за $a_1 = 2, q = 3, n = 4$.

38. — „ „ „ $a_1 = 7, q = 5, n = 3$.

39. — „ „ „ $a_1 = 10, q = \frac{1}{10}, n = 10$.

40. — „ „ „ $a_1 = -\frac{1}{10}, q = 10, n = 10$.

41. — „ „ „ $a_1 = 5, q = \frac{2}{5}, n = 4$.

42. — „ „ „ $a_1 = 5, q = 2, n = 11$.

43. — „ „ „ $a_1 = 25, q = -4, n = 7$.

44. — „ „ „ $a_1 = 3750$, $q = -0{,}4$, $n = 6$.

45. — У једној геометриској прогресији је 4 члан 135, а 7 члан 3645. Колики је збир првих двадесет чланова?

46. — Кад је $a_1 = 2, q = 3, n = 5$, нађи a_n и S_n.

47. — Кад је $a_n = 1280, a_1 = 5, n = 9$, нађи q и S_n.

48. — Кад је $a_n = 384, q = 2, n = 8$, нађи a_1 и S_n.

49. — Кад је $q = 3$, $S_n = 3280$, $a_1 = 1$, нађи a_n.

50. — У једној геометриској прогресији од 10 чланова два члана што леже у средини низа су 48 и 96. Колики је збир те прогресије?

(Који су по реду та два члана што леже у средини?)

51. — У једној геометријској прогресији од 16 чланова два члана што леже у средини низа су $\frac{7}{3}$ и $\frac{7}{9}$. Колики су први и последњи члан?

52. — У једној геометријској прогресији износи збир 3 и 5 члана 90, а збир 6 и 8 члана 2430. Која је то прогресија.

$$aq^2 + aq^4 = 90$$
$$aq^5 + aq^7 = 2430.$$

Или:

$$aq^2(1 + q^2) = 90$$
$$aq^5(1 + q^2) = 2430.$$

Сад подели доњу једначину горњом! Итд.

53. — У једној геометриској прогресији је збир 2, 4 и 7 члана 370, а збир 3, 5 и 8 члана је 740. Који је то низ?

54. — У једној геометријској прогресији износи збир 2 и 3 члана 220, а *разлика* 2 и 1 члана 33. Која је та прогресија?

55. — У једној геометриској прогресији збир 2 и 3 члана износи половину *разлике* 3 и 6 члана. Која је то прогресија кад јој је први члан 1?

56. — Нађи први члан једне геометриске прогресије од 5 чланова чији је збир $13\frac{4}{9}$, а количник $\frac{1}{3}$.

57. — Четири броја чине геометриски низ. Збир им је 80. Разлика трећег и првог члана је 16. Који је то низ?

58. — У једној геометриској прогресији од 3 члана збир је 13, а производ крајњих чланова је 9. Који је то низ?

(Види задатак 17. Чему је раван други члан? Да ли се овај задатак може решити и без једначина? Реши га и помоћу једначина.)

59. — У једној геометриској прогресији од 4 члана збир чланова на парним местима је 320, а збир чланова на непарним местима је 160. Која је то прогресија?

59. — У једној геометриској прогресији од 4 члана давац му тражи да му плаћа годину дана по 300 динара месечно. Купцу се то чини много. Продавац му онда нуди ове услове: да му првог месеца плати 1 динар, другога 2, трећег 4 и тако сваког месеца два пута више него претходног све до краја године. Купац веома радо пристане, пошто му се услови учинили веома лаки. Је ли добро урадио?

61. — Не зна се ко је пронашао шах. Прича се да га је пронашао неки Грк Паламед за време опсаде Троје. Он је, веле, том игром кратио време опсадницима. Али ако се не зна ко је пронашао шах, зна се о шаху ова анегдота:

Проналазач је понудио шах на поклон владаоцу своје земље. Овај је био толико одушевљен шахом, да је понудио проналазачу да сам изабере награду. Проналазач затражи да му се за прво поље на шаховској дасци да 1 зрно жита, за друго 2 зрна, за треће 4 зрна, за четврто 8 итд. за свако наредно поље два пута више зрна него за претходно. Шаховска табла има 64 поља. Владар се зачуди толикој скромности проналазачевој и нареди да му се жеља одмах испуни. Кад су његови потчињени почели да дају жито, брзо су прекинули посао, јер су видели како нису у стању да изврше владаочево наређење.

Зашто?

(Замислимо да је земља лопта с полупречником 6 370 km; да је сва њена површина засејана житом; да сваки хектар донесе 40 hl жита; да у сваком хектару има 1 600 000 житних зрна. Да ли би тада била довољна годишња жетва да се исплати награда проналазачу?

Да се проналазач исплати било би потребно

18 446 073 709 551 615

житних зрна, како то тврди један француски писац. Да ли је тачна она петица на крају? Којом се цифром мора завршавати тај број? Израчунај часком, па поправи! Откуда она петица на крају?)

62. — У осам часова ујутру Милош исприча Радовану, Круносламу и Франу једну велику тајну. Они му обећају да ће је добро чувати. После једнога часа Радован наиђе на своја три пријатеља и исприча свакоме посебице ту велику „тајну“ молећи их да то никоме даље не причају. То исто уради Крунослав са другом тројицом својих пријатеља. То исто уради и Фран. Њихови пријатељи ураде то исто после једнога часа: сваки посебице исприча „тајну“ тројици својих пријатеља и замоли их да никоме даље не причају. Узмимо да је свакога сата тајна саопштавана даље на тај начин и да је свако лице казало тајну само тројици. Ако узмемо да Београд са Земуном има 360 000 становника, има ли о поноћи тога дана у Београду макар једног Београђанина који не зна ту „тајну“? У колико часова су је знали већ сви Београђани?

63. — Три броја чине геометриску прогресију са збиром 172. Ако се средњи повећа за 50, прогресија постаје аритметичка. Који су то бројеви?

Доказати ово:

64. — Ако три броја чине једновремено и аритметичку и геометриску прогресију, морају сва три бити међу собом једнака.

65. — Ако три међусобно различита броја чине аритметички низ, не могу чинити и геометриски низ.

66. — Ако три различита броја чине геометриски низ, не могу чинити и аритметички низ.

Израчуној збир ових бесконачних прогресија:

67. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\dots$

68. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots\dots$

69. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\dots\dots$

70. $4-2+1-\frac{1}{2}+\dots\dots$

71. $\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots\ldots$

Израчунај вредност ових периодичних разломака:

72. 0,(7)
73. 2,(3)
74. 4,(5)
75. 18,(2)
76. 3,(8)
77. 2,3(4)
78. 0,(56)
79. 0,1(7)
80. 0,3(5)
81. 0,3(54)
82. 0,4(576)

83. — Наћи геометриску бесконачну прогресију чији је целокупан збир 6, а збир прва два члана 4,5.

84. — Наћи геометриску опадну бесконачну прогресију чији је целокупан збир $\frac{4}{9}$, а збир прва два члана је $\frac{11}{25}$.

85. — У квадрат чији је обим 36 cm уписан је квадрат на тај начин што су спојене средине страна. У другоме квадрату (унутрашњем) уписан је квадрат на исти начин. Ако се замисли тај посао настављен у бескрај, колико би било потребно жице за обиме свих тих квадрата?

86. — Са крака AB угла $BAC = 30^0$ спуштена је из тачке M управна $MD = 6$ cm на крак AC. Из D је спуштена управна DN на крак AB. Из N је спуштена управна на крак AC. Замислимо тај посао настављен у бескрај. Колика ће бити дужина свих тих управних?

87. — Први члан једне опадне бесконачне геометриске прогресије је 0,01. Збир прва три члана износи $^7/_8$ од збира целокупне прогресије. Која је то прогресија?

88. — Израчунати збир прогресије:

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots\ldots$$

89. — У коцку је уписана лопта, а у њу опет коцка, а у ову лопта итд. Колики је збир површина првих 6 лопти кад је ивица највеће коцке $a = 262$ cm?

90. — У једноме месту биле су у рату порушене многе куће. Један предузимач је хтео да подигне 20 кућа, али да му се на згаришту прве куће остави 10 динара, на другоме 20, на трећем 40, на четвртоме 80 динара. Колико је он просечно рачунао цену сваке куће?

91. — Запремина једног правоуглог паралелепипеда је 3375 cm³. Наћи му ивице кад им је збир 65 cm, а оне стоје у геометриској прогресији:

92. — Дат је геометриски низ 1, 8, 64 ..... Између свака два члана уметнути још по 2 броја тако, да нов низ бројева буде опет геометриски.

(Кад између првога и другога члана 1 и 8 уметнемо 2 члана, имаћемо низ од 4 члана:

$$1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad 8.$$

Овде је $a_1 = 1$, $a_4 = 8$.

$$a_4 = a_1\, q^3.$$

$$8 = 1 \cdot q^3, \qquad q = 2.$$

Дакле:

1 2 4 **8** 16 32 **64**....)

93. — Између чланова низа 1, 2, 4, 8 итд. уметнути још по један број тако, да се опет добије геометриски низ.

94. — Између 1 и 7 уметнути 6 бројева тако, да се добије геометриски низ од 8 чланова.

95. — Избеђу a^8 и b^8 уметнути још 7 чланова тако, да се добије геометриски низ.

96. — Између 4 и 972 уметнути 4 члана тако, да се добије геометриски низ.

97. — Неки број треба поделити на 5 делова тако, да делови чине геометриски низ у којем је збир другог и трећег члана 8 400, а првог и трећег 10 000. Колики су делови и који је то број? *(Друга женска гимн. у Загребу, 1936).*

98. — Збир првих 6 чланова геометриске прогресије је 189, наредних 6 чланова 12 096. Која је то прогресија?

(Женска гимназија, Љубљана, 1938).

(Чланови те прогресије могу се овако означити: x, qx, q^2x итд. Како ћеш онда означити збир од 5 чланова? А од 12 чланова? А колики су ти збирови?)

99. — Пет бројева чине геометриску прогресију. Њихов је збир 62, а збир првог, трећег и петог члана односи се према збиру другог и четвртог члана као 21:10. Који су то бројеви?

(Трећа Мушка гимназија у Београду, 1938)

(Прво решење: $S_5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.

Друго решење: $S_5 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2$).

100. — Код једне растуће геометриске прогресије од 5 члачова први члан је 1 и зна се да је збир непарних чланова 2,1 пута већи од збира парних чланова. Како гласи низ?

(Прва мушка гимназија у Скопљу, 1938)

(Чланови тога низа су: 1, q, q^2, q^3, q^4. Добијеш за q две стварне вредности и две комплексне: $q_1 = 2$, итд.).

101. — Пет бројева чине геометриску прогресију; њихов је збир 93, а разлика између збира непарних чланова и збира парних чланова износи 33. Који су то бројеви?

(Сплит, Женска гимназија, 1936).

(Добијаш два решења која задовољавају све услове у задатку.)

102. — Три корена једначине

$$\sqrt{6x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 9x + 3} = 2x^2 + 1$$

чине опадајућу геометриску прогресију. Израчунати збир бесконачног броја чланова те прогресије.

(Призрен, 1938).

103. — Три броја чији је збир 14, чине геометриску прогресију. Ако од трећег члана одузмемо 2, добићемо аритметичку прогресију; који су то бројеви?

(Панчево, 1938)

104. — Први члан једне аритметичке и једне геометриске прогресије су једнаки 4, други чланови су такође једнаки, а трећи члан геометриске прогресије једнак је $\frac{25}{16}$ трећег члана аритметичке прогресије. Које су то прогресије?

(Трећа мушка гимназија, Загреб, 1935).

105. — Први члан аритметичке прогресије једнак је количнику геометриске прогресије, а први члан геометриске прогресије једнак је диференцији аритметичке прогресије Збир првих 5 чланова аритметичке прогресије је 40, а збир прва два члана геометриске 10. Наћи обе прогресије.

(Крк, 1938).

(Добијаш два решења. Једно решење:

3, 5,5, 8, 10,5, ...

Друго решење: 2,5, 7,5, 22,5 . . . .)

105. — Аритметичка и геометриска прогресија са самим позитивним члановима имају исти почетни члан. Диференција прве прогресије једнака је количнику друге. Како гласе прогресије, ако је продукт другог члана геометриске прогресије и шестог члана аритметичке прогресије једнак 102, а продукт првог и петог члана геометриске прогресије једнак 324?

(Женска гимназија, Сарајево, 1938).

ЛОГАРИТМИ

1. — За коју *основу* претстављају логаритме и нумерусе ова два низа:

0	2	4	6	8 . . . . .
1	4	16	64	256 . . . . .

2. — Исто питање за ова два низа:

0	3	6	9 . . . . .
1	27		

3. — Исто питање за ове низове:

0	1	2	3	4 . . . .
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$ . . .

4. — Напиши аритметички и геометриски низ за систем логаритама чија је основа 5, а у геометриском низу један члан је 25.

5. — За коју основу претстављају логаритме и антилогаритме ови низови:

0	2	4 . . . . .
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}$ . . . .

6. — Исто питање за:

0	1	2	3 . . . . .
1	5	25	125 . . . . .

7. — Исто питање за:

0	1	2 . . . . .
1	7	49 . . . . .

8. — Исто питање за:

0	2	4 . . . . .
1	81	6561 . . . . .

9. — Исто питање за:

0	3	5 . . . . .
1	0,001	0,00001 . . . . .

10. — Исто питање за:

0	2	4 . . . . .
1	0,0001	0,00000001 . . . . .

VI. — СЛОЖЕН ИНТЕРЕСНИ РАЧУН. — АНУИТЕТ. — АМОРТИЗАЦИЈА. — РЕНТА.

Прост интересни рачун. — Ми знамо образац за израчунавање простог интереса:

$$i = \frac{k\,p\,t}{100}.$$

Капитал је дат под *прост* интерес, ако се на крају извесне периоде времена (рецимо после 6 месеци или после годину дана) интерес од тога капитала исплаћује сопственику капитала.

Сложен интересни рачун

Сложен интересни рачун. — Ако се интерес после извесне периоде времена не исплаћује сопственику капитала, већ се додаје капиталу, да и сам доноси интерес, онда је капитал дат под *сложен* интерес.

Садања и будућа вредност капитала. — Сваки капитал има две вредности: *садању и будућу.*

Почетна или *садања вредност* капитала је капитал који сопственик има у тренутку кад га даје под интерес. Њу ћемо обележавати са k.

Крајња или *будући вредност* капитала је вредност на коју капитал нарасте после t времена заједно са својим интересом. Њу ћемо обележавти са K.

Крајња вредност капитала датог под прост интерес за n година биће:

$$K = k + \frac{k\,p\,n}{100},$$

или у облику који се лакше памти:

$$K = k\left(1 + \frac{pn}{100}\right).$$

Из овог обрасца ћемо лако израчунати ма коју одових количина кад су нам све остале познате.

Пример. — Колики је капитал, који је по 8% под простим интересом нарастао за 6 година на 5920 д.?

Овде је:
$K = 5920$, $p = 8$, $n = 6$. Означимо за x почетну вредност капитала и применимо малопређашњи образац:

$$K = k\left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

$$5920 = x\left(1 + \frac{48}{100}\right)$$

$$5920 = 1{,}48\,x$$

$$x = \frac{5920}{1{,}48} = \frac{592000}{148} = 4000.$$

Напомена. — После годину дана крајња вредност капитала k датог под $p\%$ под интерес, биће:

$$K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right). \qquad \text{Зашто?}$$

Будућа вредност капитала датог под **сложени интерес** израчунава се овако

Нека је почетна вредност капитала k. Нека је он дат под *сложени* интерес по $p\%$.

На крају *прве* године биће:

$$K_1 = k + \frac{k\,p\,1}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

На крају *друге* године биће:

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

На крају *треће* године биће:

$$K_3 = K_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

На крају *четврте* године биће:

$$K_4 = K_3\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\left(1+\frac{p}{100}\right) = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^4.$$

После n година биће:

$$(1) \qquad \boxed{K_n = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

Интересни чинилац. — Израз $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ јесте крајња вредност *једног* динара на крају једне године.

Нека је капитал дат по 6% под интерес. То значи да 100 динара за годину дана донесу 6 динара интереса. *Један* динар донеће за једну годину сто пута мање интереса: $\frac{6}{100}$. *Један* динар на крају *једне* године биће:

$$1+\frac{6}{100}=1{,}06.$$

Ако је капитал дат по p% имаћемо ово:
100 динара донесу за 1 годину p динара интереса.

1 динар донесе за 1 годину $\frac{p}{100}$ динара интереса.

Према томе на крају године *један* динар имаће ову вредност:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Будућу вредност *једног* динара за *једну* годину зовемо *интересни чинилац* и обележавамо га са q. Према томе образац (1) можемо написати у овом облику:

$$\boxed{K_n = k\ q^n} \tag{2}$$

Капитализовање. — Уношење интереса у капитал зове се *капитализовање*. Оно може да се врши *крајем године, крајем пола године, крајем тромесечја.*

Да видимо како ће изгледати наш образац (1), ако се капитализовање врши крајем пола године.

Рецимо да је капитал дат по 12%. После пола године један динар ће изгледати овако:

$$1+\frac{1\cdot 12\cdot 6}{1200}=1+\frac{6}{100},$$

пошто за *пола* године капитал доноси *пола* годишњег интереса.

Капитализовање се врши *два пута* годишње. Зато у нашем обрасцу за вредност динара *на крају рока* узимамо *пола* датога процента.

Како изгледа један динар после три месеца?

$$1+\frac{1\cdot 12\cdot 3}{1200}=1+\frac{3}{100},$$

пошто за $\frac{1}{4}$ године капитал доноси $\frac{1}{4}$ годишњег интереса $\left(3=\frac{12}{4}\right)$.

Капитализовање се врши *четири пута* годишње. Зато у нашем обрасцу за вредност динара на крају *рока капитализовања* узимамо *једну четвртину* датога процента.

Узмимо да је **рок** капитализовања тромесечје, а проценат p. Тромесечје је $\frac{1}{4}$ године, те ће бити:

$$K_{\frac{1}{4}}=k+\frac{k\cdot p\cdot 3}{100\cdot 12}=k\left(1+\frac{p\cdot 3}{12\cdot 100}\right)=k\left\{1+\frac{p}{400}\right\}.$$

На крају пола године биће:

$$K_{\frac{2}{4}}=K_{\frac{1}{4}}+\frac{K_{\frac{1}{4}}\cdot p\cdot 3}{1200}=K_{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{3p}{1200}\right)=$$

$$=K_{\frac{1}{4}}\left[1+\frac{\frac{p}{4}}{100}\right]=k\left[1+\frac{\frac{p}{4}}{100}\right]\left[1+\frac{\frac{p}{4}}{100}\right]=k\left[1+\frac{\frac{p}{4}}{100}\right]^2.$$

Ако је *рок капитализовања* један m-ти део године, будућа вредност капитала за n година биће:

$$K_n=k\left\{1+\frac{\frac{p}{m}}{100}\right\}^{mn}. \tag{3}$$

Одавде правило:

Ако је *рок капитализовања* $\frac{1}{m}$ *део године, треба узети m-ти део процента, а m пута већи број година*

Сва три обрасца скупићемо у ову прву групу образаца:

$$\text{I.}\quad\left|\begin{array}{ll} (1) & \boxed{K_n=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} \\ (2) & \boxed{K_n=k\ q^n} \\ (3) & \boxed{K_n=k\left\{1+\frac{p}{100\,m}\right\}^{nm}} \end{array}\right.$$

Пример 1. — Наћи крајњу вредност капитала од 60 000 динара, кад је он дат под сложен интерес по 8% за 10 година

Напомена. — Кад се нарочито не нагласи *рок капитализовања* подразумева се да се капитализовање врши на крају године.

$$K_{10} = kq^{10}$$

$$q = 1 + \frac{8}{100} = 1{,}08$$

$$K_{10} = 60\,000 \,.\, 1{,}08^{10}$$

$$log\, K_{10} = log\, 60\,000 + 10\, log\, 1{,}08$$

$$log\, K_{10} = 4{,}77815 + 10 \,.\, 0{,}03342$$

$$log\, K_{10} = 4{,}77815 + 0{,}3342$$

$$log\, K_{10} = 5{,}11232$$

$$K_{10} = N\overline{5{,}11232} = 129\,515 \text{ динара.}$$

Пример 2. — Неко има данас да плати 35 000 динара дуга. Кад се он задужио пре 4 године по 10% колику суму је био узео под сложен интерес?

Овде је непозната почетна вредност дуга који је нарастао на 35 000 динара.

$$K = kq^n$$

$$35\,000 = xq^n \qquad q = 1 + \frac{10}{100} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$$

$$35\,000 = x\,(1{,}1)^4$$

$$x = \frac{35\,000}{(1{,}10)^4}$$

$$\log\ x = \log\ 35\,000 - 4\ log\ 1{,}1$$

$$\log\ x = 4{,}54407 - 4 \,.\, 0{,}04139$$

$$\log\ x = 4{,}37851$$

$$x = N\overline{4{,}37851} = 23\,906 \text{ динара.}$$

Пример 3. — *Неко је узео на зајам извесну суму новаца с тим, да плати после 3 године са 12% сложеног интереса 20 000 д. После 2 године он дође до новаца и хоће да исплати свој дуг. Колико треба мање да плати?*

Дужник неће платити суму од 20 000 динара, пошто није држао новац 3 године.

Он ће платити ону суму, која ће после годину дана под сложеним интересом нарасти на 20 000 динара.

Дисконт. — Разлика између крајње вредности дуга и његове вредности ма у ком ранијем добу зове се *дисконт*. Наш дужник обавезао се да плати K_3 динара после *три* године. После *две године* плаћа суму смањену за *дисконт* за годину дана. Овде је *дисконт* :

$$D = K_3 - K_2.$$

Овде знамо да је $K_3 = 20\,000$. Треба да нађемо K_2 :

$$K_2 = kq^2, \qquad q = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12,$$

дакле
$$K_2 = k\,(1{,}12)^2.$$

Да бисмо нашли K_2, требало би најпре да тражимо k.

Али ми можемо то и простије да нађемо :

$$K_3 = K_2\ q, \qquad 20\,000 = K_2\ 1{,}12.$$

А одатле :

$$K_2 = \frac{20000}{1{,}12} = \frac{5000}{0{,}28} = \frac{1250}{0{,}07}$$

$$\log\ K_2 = \log\ 1250 + \text{colog}\ 0{,}07$$

$$\log\ K_2 = 3{,}09691 + 1{,}15490$$

$$\log\ K_2 = 4{,}25181$$

$$K_2 = \text{anlog}\ 4{,}25181$$

$$K_2 = 17\,858.$$

Место 20 000, дужник ће платити 17 858 д. Платиће 2142 динара мање. *Дисконт* је 2142 динара.

Пример 4. — *Капитал од 6000 динара нарасте за 5 године на 8 029,20 динара. Под којим процентом је био дат под сложен интерес?*

$$K = k\ q^n$$

$$8\,029{,}20 = 6\,000\, q^5.$$

Пошто се проценат p налази у интересном чиниоцу q, ми ћемо најпре наћи q.

$$q^5 = \frac{8029{,}20}{6000} = 1{,}338$$

$$5\ \log\ q = \log\ 1{,}338$$

$$\log\ q = \frac{log\ 1{,}338}{5}$$

$$\log\ q = \frac{0{,}12646}{5}$$

$$\log\ q = 0{,}02529$$

$$q \approx 1{,}06$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad \text{или} \quad \frac{p}{100} = q - 1$$

$p = 100\,(q - 1)$, а то је у нашем задатку:

$p = 100\ (1{,}06 - 1)$

$p = 100\ \dfrac{6}{100} = 6.$

Капитал је био под интересом по 6%.

Пример 5. — *Једнога студента, управо кад је напунио 21 годину, позове једна банка и исплати му 20 699 динара. У банци му је речено да је његов отац некада уложио 5 000 динара у банку и наредио да се сума на коју буде нарастао тај капитал под 7% сложеног интереса исплати његовом сину кад буде пунолетан. Кад је отац уложио тај новац?*

$$K_n = k\ q^n$$
$$20\,699 = 5\,000 \cdot 1{,}07^x$$
$$1{,}07^x = \frac{20699}{5000}$$
$$1{,}07^x = \frac{20{,}699}{5}$$
$$1{,}07^x = 4{,}139$$
$$x \log\ 1{,}07 = \log\ 4{,}139$$
$$x = \frac{\log\ 4{,}139}{\log\ 1{,}07}$$
$$x = \frac{0{,}61690}{0{,}02938}$$
$$x = \frac{61690}{2938}$$
$$x = \frac{30845}{1469}$$

Да не бисмо делили ова два разломка, ми ћемо овај количник израчунати помоћу логаритама:

$$\log\ x = \log\ 30\,845 + \mathrm{colog}\ 1\,469$$
$$\log\ x = 4{,}48919 + \bar{4}{,}83297$$
$$\log\ x = 1{,}32217$$
$$x = 21.$$

Отац је уложио 5000 динара оног дана кад му се син родио.

АНУИТЕТ

Ануитет је сума која се плаћа редовно сваког одређеног рока, било да се *уплати* известан капитал, било да се *исплати* известан дуг.

Неко хоће да уплаћује почетком сваке године извесну суму новаца, да би после n година примио A динара. Колико треба да уплаћује годишње кад се на уплате плаћа $p\%$ сложеног интереса?

Означимо тај *ануитет* са a.

Последња уплата стоји свега 1 годину и изнеће на крају n-те године:

$$aq.$$

Претпоследња уплата стоји 2 године и изнеће на крају n-те године:

$$aq^2.$$

Друга стоји $(n - 1)$ година под интересом и изнеће на крају n година:

$$aq^{n-1}.$$

Прва уплата стоји n година под интересом и изнеће на крају n година:

$$aq^n.$$

Сви ануитети (уплате) вредеће после n година:

$$A = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n,$$

а то је даље:

$$A = aq\ (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}).$$

У загради имамо *геометриски ред* чији је први члан 1, количник q, а број чланова n. Према томе **уплаћени капитал** после n **година** биће:

$$\boxed{A = aq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}} \qquad (4)$$

а одатле је **ануитет a:**

$$\boxed{a = \frac{A\,(q - 1)}{(q^n - 1)\,q}} \qquad (5)$$

Да бисмо израчунали колико је једнаких уплата (ануитета) потребно да се уплати капитал A, израчунаћемо n из обрасца (4):

$$q^n = \frac{A\,(q-1)}{aq} + 1$$

$$q^n = \frac{A\,(q-1) + aq}{aq}$$

$$n \log q = \log\,[A\,(q-1) + aq] + \operatorname{colog}\,a + \operatorname{colog}\,q$$

$$(6)\qquad \boxed{n = \frac{\log\,[A\,(q-1) + aq] + \operatorname{colog}\,a + \operatorname{colog}\,q}{\log\,q}}$$

Можемо ли израчунати q, кад је познато A, a и n?

Сва три обрасца код ануитета скупићемо уједно:

$$\text{II}\quad \boxed{\begin{array}{ll} (4) & A = aq\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \\ (5) & a = \dfrac{A\,(q-1)}{(q^n - 1)\,q} \\ (6) & n = \dfrac{\log\,[A\,(q-1) + aq] + \operatorname{colog}\,a}{\log\,q} - 1. \end{array}}$$

Ученик треба да упамти само образац (4), а остале му је лако извести.

Пример 1. — Колику ће суму имати да прими неко после 10 година, кад је сваког првог јануара и првог јула носио по 600 динара у банку, која на уложени новац плаћа 6⁰/₀ камате? Капиталисање полугодишње.

Овде има 20 уплата. Проценат ће бити 3, пошто је капиталисање полугодишње.

$$A = 600\,.\,1{,}03\,\frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03};$$

$$A = 20\,600\,\,(1{,}03^{20} - 1).$$

Најпре треба израчунати вредност за $1{,}03^{20}$.

$x = 1{,}03^{20}$

$\log\,x = 20\,\log\,1{,}03$

$x = \mathcal{N}\overline{0{,}25680} = 1{,}806$

$A = 20{,}6\,.\,806$

$\log\,A = \log\,20{,}6 + \log\,806$

$\log\,A = 1{,}31387 + 2{,}90634$

$\log\,A = 4.22021$

$A = \mathcal{N}\overline{4{,}22021}$

$A = 16\,604$ динара.

Пример 2. — Неко хоће да уплати са 20 годишњих ануитета 50 000 динара. Колики ће бити ануитет, кад банка плаћа 6⁰/₀, на уложени новац?

Овде ћемо употребити образац (5) из групе II.

$$a = \frac{A\,(q-1)}{(q^{20} - 1)\,q},$$

$$a = \frac{50\,000\,.\,0{,}06}{(1{,}06^{20} - 1)\,1{,}06}.$$

Најпре ћемо израчунати вредност за $1{,}06^{20}$ да бисмо могли логаритмовати.

$x = 1{,}06^{20}$

$\log\,x = 20\,.\,\log\,1{,}06 = 20\,.\,0{,}02531 = 0{,}50620$

$x = \mathcal{N}\overline{0{,}50620} = 3{,}208$

$$a = \frac{3000}{1{,}06\,.\,2{,}208}$$

$\log\,a = \log\,3\,000 + \operatorname{colog}\,1{,}06 + \operatorname{colog}\,2{,}208$

$\log\,a = 3{,}10781$

$a = \mathcal{N}\overline{3{,}10781} = 1282$ динара.

АМОРТИЗОВАЊЕ

Кад се неко задужи за извесну своту новаца D, с тим да је исплати извесним бројем n једнаких отплата, за n једнаких рокова, такво одуживање зове се *амортизовање дуга*, или гашење дуга. Те једнаке отплате зову се *ануитети*. Ануитет се означава са a. Њиме се плаћа интерес и права, чиста отплата, за колико се дуг стварно смањује. Разлика између ануитета и интереса за један рок на стварни износ дуга зове се *амортизација*. То је сума за коју се стварно *смањује* дуг.

Ануитет је сталан. Са сваким роком *амортизација* расте, дуг се смањује и интерес се смањује. Ануитет се плаћа *увек* само на крају рока.

Основни образац код амортизовања. — Неко узајми извесну своту D (дуг) и хоће да је исплати за n година.

Отплата почиње *крајем* прве године од дана задужења, а дуг престаје у тренутку последње отплате, то јест крајем n-те године. Проценат је p. Сталне годишње отплате су a.

Замислимо сад да дужник не носи отплате у банку из које је узео зајам, већ своје отплате а носи на штедњу у другу банку. Шта бива онда за n година? Његове уштеде се гомилају у једној банци а *дуг расте* у другој банци. Кад ће он моћи да исплати дуг својим уштедама? Онда када његове уштеде нарасту на ону суму на коју је нарастао његов дуг крајем n-те године.

Његових уштеда има n. Прва је стојала под интересом $(n-1)$ годину, друга $(n-2)$, трећа $(n-3)$, четврта $(n-4)$ итд. Последња уплата није ни стојала под интересом, јер кад дужник однесе *последњу* уплату његов дуг престаје.

Зашто прва уплата стоји $(n-1)$ г под интересом? Зато што прва отплата почиње кад протекне годину дана од n година за које време дужник има да исплати дуг.

Дужникове уштеде у другој банци биће:

$$aq^{n-1} + aq^{n-2} + \dots + aq^3 + aq^2 + aq + a.$$

Вредности ових уплата чине геометриски ред од a чланова. За први члан можемо узети a, и онда је количник q.

Вредност свих уштеда (уплата) биће:

$$\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Док дужник улаже на штедњу да би отплатио крајем n-те године свој дуг D, његов дуг расте и постаје крајем n-те године:

$$Dq^n.$$

Дужник се одужио онда када вредност свих његових уштеда достигне вредност на коју је нарастао његов дуг:

$$\boxed{\frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} = Dq^n} \tag{7}$$

То је *основни образац амортизације*.

Из њега можемо лако израчунати количине a, D и n, ако нам је која од њих непозната:

Израчунавање првобитне вредности дуга:

$$\boxed{D = \frac{a\,(q^n - 1)}{(q - 1)q^n}} \tag{8}$$

Израчунавање величине ануитета:

$$\boxed{a = \frac{Dq^n\,(q - 1)}{(q^n - 1)}} \tag{9}$$

Израчунавање времена за које може да се исплати позајмљена сума (дуг) D једнаким отплатама a:

$$aq^n - a = Dq^n\,(q - 1)$$

$$aq^n - a = Dq^{n+1} - Dq^n$$

$$aq^n - Dq^{n-1} + Dq^n = a$$

$$q^n\,(a - Dq + D) = a$$

$$q^n = \frac{a}{a - Dq + D}$$

$$n \log q = \log a - \log\,[a - D\,(q - 1)]$$

$$\boxed{n = \frac{\log a - \log\,[a - D\,(q-1)]}{\log q}} \tag{10}$$

Како су стварни само логаритми позитивних бројева, $a - D\,(q - 1)$ мора бити *позитивно*, то јест мора бити:

$$a - D\,(q - 1) > 0,$$

то јест

$$a > D\,(q - 1).$$

Шта је $D\,(q - 1)$?

$$D\,(q - 1) = D\left(1 + \frac{p}{100} - 1\right) = \frac{Dp}{100}.$$

Кад се сетимо обрасца за прост интерес:

$$i = \frac{kpt}{100}$$

видимо, да је $D\,(q - 1)$ интерес на узајмљену суму D за 1 годину. Дакле, ако дужник хоће да амортизира свој дуг (да га отплати једнаким отплатама), његова *отплата (ануитет) мора бити већа од годишњег интереса на првобитно узајмљену суму*.

Шта је $a - D\,(q - 1)$?

То је разлика између ануитета и интереса на првобитни капитал за први рок. То је амортизација којом свотом се смањује дуг на крају првога рока.

Ако величину прве амортизације обележимо са α_1, друге са α_2 . . . . n-те са α_n, интерес који се плаћа на крају првог, другог . . . . n-тог рока биће:

интерес на крају првог рока: $a - \alpha_1$,

„ „ „ другог „: $a - \alpha_2$,

— — — — — — — — — — — — —

интерес на крају n-тога рока: $a - \alpha^n$.

Одатле се види да су ануитети овако састављени:
ануитет на крају првога рока: $a = D(q-1) + \alpha_1$,
" " " другога " : $a = (D - \alpha_1)(q-1) + \alpha_2$,
" " " трећег " : $a = (D - \alpha_1 - \alpha_2)(q-1) + \alpha_3$,
" " " четвртог " :
$$a = (D - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)(q-1) + \alpha_4,$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

ануитет на крају n-тог рока:
$$a = (D - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1 - \ldots\ldots - \alpha_{n-1})(q-1) + \alpha_n.$$

Овде су леве стране једнаке, па морају бити једнаке и десне. Из две и две узастопне једнаке стране излази:

Из I и II:
$$D(q-1) + \alpha_1 = (D - \alpha_1)(q-1) + \alpha_2,$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 q.$$

Из II и III:
$$\alpha_3 = \alpha_2 q = \alpha_1 q^2.$$

И најзад:
$$\boxed{\alpha_n = \alpha_1 q^{n-1}}$$

То је образац за одређивање ма које амортизације кад нам је позната прва (α_1).

Прва амортизација (α_1) одређује се овако. Дуг D мора бити једнак са збиром свих амортизација:
$$D = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n,$$
$$D = \alpha_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Одатле је
$$\alpha_1 = \frac{D(q-1)}{q^n - 1}. \tag{1}$$

Знамо да је
$$\frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = Dq^n.$$

Одатле је $D = \dfrac{a(q^n - 1)}{(q-1)q^n}$.

Сменом у (1) добијамо: $\alpha_1 = \dfrac{a(q^n - 1)}{(q-1)q^n} \cdot \dfrac{q-1}{q^n - 1} = \dfrac{a}{q^n}$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{a}{q^n}}$$

То је образац за израчунавање прве амортизације.

Све обрасце за амортизацију скупићемо у ову трећу таблицу образаца:

III	(7)	$\dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1} = Dq^n$
	(8)	$D = \dfrac{a(q^n - 1)}{(q-1)q^n}$
	(9)	$a = \dfrac{Dq^n(q-1)}{q^n - 1}$
	(10)	$n = \dfrac{\log a - \log[a - D(q-1)]}{\log b}$
	(11)	$\alpha_1 = \dfrac{a}{q^n}$
	(12)	$\alpha_n = \alpha_1 q^{n-1}$

Пример. — *Неко је на више места дужан 20 000 динара Пошто му је то тешко плаћати, он хоће да изврши* **конверзију** *својих дугова.* **(Конверзија** *значи скупљање свих дугова код повериоца). Он може да добије зајам од 20 000 динара, али му банка тражи да јој тај дуг амортизује за 5 година у годишњим једнаким отплатама. Може ли дужник примити обавезу тога зајма кад он може годишње да даје 4 200 динара на име отплате свога дуга, а банка наплаћује 12% на позајмљен новац?*

Морамо наћи колики је *ануитет* потребан, па да се измири интерес и исплати овај дуг:
$$a = \frac{20\,000 \cdot 1{,}12^5 \cdot 0{,}12}{1{,}12^5 - 1}.$$

Да бисмо могли логаритмовати, морамо најпре израчунати вредност за $1{,}12^5$. (Да бисмо уклонили *разлику* у имениоцу коју не умемо да логаритмујемо):
$$x = 1{,}12^5.$$

После логаритмовања и вађења нумеруса, добијамо:
$$x = 1{,}12^5 = 1.7623$$
$$1{,}12^5 - 1 = 0.7623$$
$$\log a = \log 20.000 + 5 \log 1{,}12 + \log 0{,}12 + \mathrm{colog}\, 0{,}7623$$
$$\log a = 3{,}744175$$
$$a = \mathrm{anlog}\, 3{,}744175$$
$$a = 5548{,}50 \text{ динара.}$$

Дужник не може примити ову обавезу, пошто може годишње да плаћа свега 4200 динара.

РЕНТА

Рента је стална сума коју неко прима одређеног сталног рока за известан број година n, пошто је пре тога улагао свој новац у банку за известан низ година, или уложио једном за свагда.

Она се може стећи на два начина.

I. — Може неко улагати m година у почетку сваке године сталну суму a, да би по навршетку m-те године примао сталну суму r за n година, у почетку сваке године.

Док се наврши крај m-те године дешава се ово :

Последња уплата стоји годину дана под интересом: од почетка m-те године (кад се даје последња уплата) до краја m-те године (кад почиње исплата ренте). Она ће према томе бити: aq. *Претпоследња уплата* стоји 2 године под интересом, те ће бити на крају m-те године: aq^2. *Прва уплата* стоји m година под интересом, те ће њена вредност крајем m-те године бити: aq^m. Све уплате укупно износиће крајем m-те године :

$$aq + aq^2 + aq^3 + \ldots.. + aq^{m-2} + aq^{m-1} + aq^m = aq\ \frac{(q^m - 1)}{q - 1}\ .$$

Кад сопственик не би од те суме узимао ништа, она би до почетка n-те године (када се узима последња рента) нарасла на

$$\frac{aq\ (q^m - 1)}{q - 1}\ q^{n-1}.$$

Међутим сопственик почетком сваке године узима за n година по r динара своје ренте. Он изузме од почетка $m + 1$ године до почетка $(m + n)$-те године за n година :

$$\frac{r\ (q^n - 1)}{q - 1}$$

Он губи право на ренту кад изузме све што је уложио, то јест, кад не остане више ничега од суме на коју су нарасли његови улози за $(m + n - 1)$ годину:

$$\text{(13)} \qquad \boxed{\frac{aq\ (q^m - 1)}{q - 1}\ q^{n-1} - \frac{r\ (q^n - 1)}{q - 1} = 0}$$

Из тога обрасца можемо лако израчунати све количине: r, a и n:

Израчунавање ануитета за ренту r :

$$\frac{aq\ (q^m - 1)}{q - 1}\ q^{n-1} = \frac{r\ (q^n - 1)}{q - 1},$$

$$\text{(14)} \qquad \boxed{a = \frac{r\ (q^n - 1)}{q^n\ (q^m - 1)}}$$

Израчунавање ренте r на коју се стиче право за n година после m ануитета a:

$$\text{(15)} \qquad \boxed{r = \frac{aq^n\ (q^m - 1)}{q^n - 1}}$$

Израчунавање броја година n за које се може примати рента r кад се m година улаже сума a:

Из обрасца (15) излази :

$$rq^n - r = aq^n\ q^m - aq^n$$
$$rq^n - aq^n\ q^m + aq^n = r$$
$$q^n\ [r - a\ (q^m - 1)] = r$$
$$q^n = \frac{r}{[r - a\ (q^m - 1)]}$$
$$n\ log\ q = log\ r + colog\ [r - a\ (q^m - 1)]$$

$$\text{(16)} \qquad \boxed{n = \frac{log\ r + colog\ [r - a\ (q^m - 1)]}{log\ q}}$$

Израчунавање броја година m за које треба улагати суму a да би се n година после улагања могла примати рента r:

Из обрасца (14) излази:

$$aq^n\ q^m = rq^n - r + aq^n$$
$$aq^n\ q^m = q^n\ (r + a) - r$$
$$q^m = \frac{q^n\ (r + a) - r}{aq^n}$$
$$m\ log\ q = log\ [q^n\ (r + a) - r] + colog\ a + colog\ q^n$$

$$\text{(17)} \qquad \boxed{m = \frac{[log\ q^n\ r + a) - r] + colog\ a +}{log\ q} - n}$$

II. — Неко хоће сад да уложи извесну суму с тим, да она стоји под интересом m година, па да му се у почетку $(m + 1)$. године почне исплаћивати годишња рента r која има да траје до почетка $(m + n)$ године.

Нека он уложи сад суму a. До почетка $(m+n)$ године она нарасте на

$$aq^{m+n-1}.$$

Вредност ренте у почетку $(m+n)$ године биће (пошто је трајала n година):

$$\frac{r\,(q^n-1)}{q-1}.$$

Сопственик губи право на ренту када изузме тачно онолико на колико је нарастао његов улог:

$$\boxed{aq^{m+n-1}=\frac{r\,(q^n-1)}{q-1}} \tag{18}$$

Израчунавање ренте:

$$\boxed{r=\frac{aq^{m+n-1}(q-1)}{q^n-1}} \tag{19}$$

Израчунавање улога:

$$\boxed{a=\frac{r\,(q^n-1)}{q^{m+n-1}(q-1)}} \tag{20}$$

Израчунавање година за које траје рента:
Из обрасца 19 излази:

$$rq^n-r=aq^{m+n}-aq^{m+n-1}$$
$$rq^n-aq^m\,q^n+aq^{m-1}\,q^n=r$$
$$q^n\,(r-aq^m+aq^{m-1})=r$$
$$q^n=\frac{r}{r-aq^m+aq^{m-1}}$$

$$\boxed{n=\frac{\log r+\operatorname{colog}\,[r-a\,(q^m-q^{m-1})]}{\log q}} \tag{21}$$

Садашња вредност ренте. — Неко има да прима n година ренту r. Њему је потребан новац и он хоће да прода другоме право на своју ренту. Шта вреди сад његова рента?

Од данас па за једну годину он има права да прими r динара (своју прву ренту). Шта вреди она данас? Ми знамо да сума r за m година нарасте на rq^m. Пошто је овде $m=-1$, то ће сума r за годину дана *назад* вредети *данас*:

$$rq^{-1}.$$

Од данас па за 2 године он има да прими опет ренту r. Она ће *данас* (две године назад) вредети:

$$rq^{-2}.$$

Трећа рента:

$$rq^{-3}.$$

Рента r коју он има да прими после n година вредеће *данас:*

$$rq^{-n}.$$

Све његове ренте r од n година вреде данас:

$$rq^{-1}+rq^{-2}+rq^{-3}+\cdots+rq^{-n+2}+rq^{-n+1}+rq^{-n}.$$

То је даље:

$$rq^{-1}\,(1+q^{-1}+q^{-2}+\cdots+q^{-n+3}+q^{-n+2}+q^{-n+1}).$$

А кад саберемо геометриску прогресију у загради, имаћемо:

$$rq^{-1}\,\frac{(q^{-1})^n-1}{q^{-1}-1}$$

а то је даље, ако са R_s означимо садашњу вредност ренте r:

$$R_s=rq^{-1}\,\frac{q^{-n}-1}{q^{-1}-1}=rq^{-1}\,\frac{\frac{1}{q^n}-1}{\frac{1}{q}-1}=rq^{-1}\,\frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}}.$$

То даје:

$$\boxed{R_s=\frac{r\,(q^n-1)}{q^n\,(q-1)}} \tag{22}$$

Садашња вредност ренте зове се још и *продајна цена* ренте.

Ако неко има да ужива n година ренту у почетку године, али рента почиње тек после m година, па хоће да је прода, овако ћемо наћи продајну цену те ренте:

Садашња вредност прве ренте r која има да се прими после m година биће: rq^{-m}.

Садашња вредност друге ренте после $(m+1)$ године биће:

$$rq^{-m-1}.$$

Треће ренте:

$$rq^{-m-2}.$$

Последње ренте :

$$rq^{-m-n-1}.$$

Садашња вредност *целокупне ренте* биће :

$$R_s = rq^{-m} + rq^{-m-1} + rq^{-m-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot + rq^{-m-n-1}$$
$$R_s = rq^{-m}(1 + q^{-1} + \cdot \cdot \cdot \cdot + q^{-n-1})$$

$$R_s = rq^{-m}\frac{(q^{-1})^n - 1}{q^{-1} - 1} = rq^{-m}\frac{\frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = rq^{-m}\frac{\frac{1 - q^n}{q^n}}{\frac{1 - q}{q}} =$$

$$= rq^{-m}\frac{(1 - q^n)q}{(1 - q)q^n} = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^{m+n-1}\,(q - 1)}.$$

ВЕЖБАЊА

1. — На коју суму нарасте капитал од 30.000 динара за 10 година по 5%? Шта би било да је то прост интерес?

2. — Исто питање за капитал од 6.000 д. за 20 г. по 4%.

3. — Исто питање за 7.000 динара по 6% за 21 годину.

4. — Исто питање за 150 динара по 7% за 10 година.

5. — Исто питање за капитал од 11.058,20 динара за 6 година по 5%.

6. — Исто питање за капитал од 120.000 динара по 8% за 15 година са полугодишњим капитализовањем.

7. — На коју суму ће да нарасте капитал од 15.000 динара дат под сложен интерес по $7\frac{1}{2}$% за 20 година, кад је полугодишње капитализовање?

8. — Која сума је била дата под сложен интерес по 6%, кад је за 20 година постала 20.645 динара?

9. — Колика је сума уложена пре 15 година под сложен интерес по 4,5%, кад је данас примљено са интересом 7742 динара?

10. — Исто питање, кад је данас примљено са интересом 7683, а капитал је био 10 година под сложеним интересом по 4%.

11. — Исто питање, кад је после 10 година примљено са сложеним интересом 4800 динара; проценат је био 5, а капитализовање свака 3 месеца.

12. — Један човек прода једно имање за 140.000 динара и ту суму да под сложен интерес по 4%. Кад ће имати 200.000 динара?

13. — Капитал од 275.000 динара нарастао је под сложеним интересом по 12% на динара 433.099. Колико година је био под интересом ?

14. — Капитал од 35.000 динара нарастао је под сложеним интересом за 5 година на суму од 51.424 динара. Колики је био проценат?

15. — После колико година ће нарасти 20.000 динара по 4,5% на 37.038?

16. — Исто питање за суму од 8760 динара која по $5\frac{1}{2}$% нарастао на 25.000.

17. — Сума од 10.500 динара дата је под сложен интерес по $3\frac{1}{2}$% пре двадесет година. Колико износи сад тај капитал?

18. — После колико година могу 15.000 динара донети 8.750 динара сложеног интереса по 5%?

19. — Кад ће се утројити капитал од k динара по p% сложеног интереса?

Примена: $k = 10.000$, $p = 8$.

20. — Исто питање, али полугодишње капитализовање.

21. — Исто питање, али капитализовање свака 3 месеца.

22. — Под којим процентом је била под сложеним интересом сума од 20.000 динара, кад је за 14 година донела 17.038,90 динара интереса ?

23. — Под којим је процентом био капитал од 2.514 динара, кад је за 12 година донео 2.000 динара сложеног интереса?

24. — Кад је неко примио 12.000 динара за 7.025 динара што их је уложио пре 10 година под сложен интерес, колики је био проценат?

25. — На колику суму нарасте капитал од 2.000 динара по 8% сложеног интереса за 3 године и 7 месеци?

(Треба израчунати за 3 године, па на ту суму *прост* интерес за 7 месеци. Тај прост интерес треба додати вредности на коју капитал нарасте за 3 године.

Ако је капиталисање полугодишње, треба израчунати крајњу вредност капитала за $3 \times 2 + 1 = 7$ полгођа, па на ту суму израчунати прост интерес за 1 месец. У обрасцу $K = kq_n$ овде је $n = 7$, али је $q = 1 + \frac{4}{100}$.)

26. — Неко има да плати после 5 година суму од 45.000 динара. Кад је проценат 6%, може ли он исплатити данас тај дуг сумом од 30.000 динара, кад се задужио пре две године?

27. — Неко се задужи 21.000 динара с тим да их по 5% сложеног интереса плати после 7 година. Којом сумом може он исплатити тај дуг после 3 године и 4 месеца?

28. — Неко узајми 10.000 динара с тим, да их врати после 8 година са 8% сложеног интереса. После 6 година и 5 месеци он дође до новаца. Има 13.000 динара. Може ли исплатити свој дуг?

29. — Колико треба времена да се капитал дат под сложен интерес по 7% увећа за своју половину?

(Ако је тај капитал k, после траженога времена биће $\frac{2}{3}k$. То је будућа вредност капитала k.)

30. — На коју суму нарасте капитал од 100.000 динара за 8 г и 8 месеци по 11% сложеног интереса?

(Види вежбање 25).

31. — Коју суму треба дати под сложен интерес по 8%, па да се после 18 година прими 120.000 динара?

32. — Под колики проценат треба дати један капитал под сложен интерес, па да се учетворостручи за 31 годину?

33. — Сума од 150.000 динара дата је са 4,5% под *сложен* интерес за 20 година. Колико година би требала да стоји та сума под *простим* интересом по 5%, па да нарасте на исту вредност?

34. — Сума од 80.000 динара дата је под *сложен* интерес по 5% за 12 година. Коју суму би требало дати под *прост* интерес по 5,5%, те да се за исто време прими исти интерес?

35. — Сума од 400.000 динара дата је под сложен интерес. Да је дата под интерес за годину дана мање, њена крајња вредност би била за 22.050 динара мања. Да је дата под интерес годину дана *више*, крајња вредност би јој била већа за 23.152 д. Наћи проценат и време за које је капитал био дат под интерес.

36. — Један човек има две суме за давање под сложен интерес: једну од 6.000 динара, другу од 5.000 динара. Он израчуна да би после 4 године примио за обе 13.141 динара ако би већу дао под већи проценат, а мању под мањи проценат; међутим ако би већу суму дао под мањи проценат, а мању под већи, примио би свега 13.096 динара. Који су то проценти?

37. — Кад је требало дати под сложен интерес по 5% један динар, па да се данас прими капитал од 1,000.000 дин.?

38. — У почетку сваке године улаже се 800 динара. Колико ће вредети сви ти улози на крају двадесете године, кад се плаћа сложен интерес 4,5%?

39. — Два детета се роде 1 јануара. Отац првог детета уложи у банку 4.000 динара с тим да се његовом детету исплати тај улог са интересом кад му буде 21 година. Други отац почне улагати од рођен-дана свога детета у почетку сваког шестомесечја по 80 динара. Кад банка плаћа на уложен новац 6%, а капиталише интерес сваких шест месеци, које од та два детета има више да прими кад буде пунолетно?

40. — Неко носи у банку по 600 динара сваког првог јануара. Колико ће имати крајем десете године, кад је сложен интерес 7%?

41. — Неко данас прими 46.880 динара за новац који је 12 година улагао почетком сваке године. Кад је проценат 4%, колики су били ти улози?

42. — Неко је преко целе године штедео и крајем сваке године носио у банку своју уштеду и давао под сложен интерес по 5%. Сваке године штедео је исту суму. Кад се навршило 10 година како је почео да штеди ради улога, прими из банке 4087 динара. Колико је штедео просечно сваког месеца?

43. — Коју суму би требало улагати почетком сваке године, да би се после 20 година примило 6 000 дин.? Проценат 5.

44. — Неко лице има да исплати свој дуг годишњим ануитетом од 2 500 динара који има да се плаћа за 6 година Којом сумом може сад да се одужи? Проценат 4,5.

(Треба наћи капитал k који би за 6 година по 4,5% нарастао на исту суму на коју нарасту оних 6 ануитета).

45. — Једна општина може да плаћа годишње 50 000 динара ануитета у току 40 година за зајам који мисли да начини. Кад је проценат 5, колику суму може добити на зајам?

46. — Пре 10 година отац је уложио за свога сина суму од 25 000 динара под сложен интерес по $4\frac{1}{2}$%. Данас је банка јавила да смањује проценат на 4%. Отац уложи још 12 000 динара и кад је син постао пунолетан, дође да прими новац. Колику суму ће примити?

47. — Кад му се кћи родила, отац уложи у банку извесну суму која је за 24 године имала да нарасте по 8% сложеног интереса на 200 000 динара. Кад је банка после 12 година смањила проценат на 7, а отац због тога уложио у банку још 20 000 динара, колико има кћи да прими кад наврши 23 годину?

48. — Отац остави 698 000 динара с тим, да се крајем сваке године за његовог сина даје из банке 30 000 динара. Колико му је још остало у банци крајем 21 године, кад је проценат $6\frac{1}{2}$?

49. — Који је тај дуг, који је исплаћен за 12 година једнаким годишњим отплатама крајем сваке године по 1 500 динара, кад је интерес $7\frac{1}{2}$ %?

50. — Неко хоће да купи кућу. Сопственик му тражи да положи одмах 83 500 динара и да му од дана куповине па за 6 година *почетком* сваке године плаћа по 83 500 динара. Купац нуди сад 50 000 динара и да *крајем* сваке године плаћа по 86 000 динара. Кад је интерес 5%, пошто сопственик хоће да прода, а пошто купац хоће да купи?

(Нађи прво вредност свих тих улога крајем шесте године. Затим нађи обема тим сумама садашњу вредност по обрасцу $k = \frac{K}{q^n}$).

51. — Колико година би требало улагати по 1 200 динара годишње, па да се после тога времена прими 20 000 динара, кад је интерес по 5%?

52. — Неко хоће да осигура своме десетогодишњем синчићу 50 000 динара кад му буду 23 године. Колико треба да улаже сваке године, па да му осигура ту суму, кад је интерес по 6%?

53. — Један младић прими данас 30 000 динара. Ту суму му је осигурао отац, који је почетком сваке године улагао по 2 400 динара. Пре колико година је отац почео уплаћивати ту суму, кад је интерес по 6%

54. — Неко се задужи 315 000 динара с тим, да тај дуг исплати за 12 година плаћајући крајем сваке године једнаке суме. Колике морају бити отплате, кад је интерес по 12%?

55. — Колико година мора крајем сваке године да се плаћа по 4 000 динара, да би се отплатио дуг од 20 202,75 динара кад је интерес 10%?

56. — У отплату једног дуга од 62 100 динара плаћа се крајем сваке године по 10 000 динара. Кад ће дуг да се исплати са 6% сложеног интереса?

57. — Један човек се задужио 100 000 динара по 4% сложеног интереса. Сваке године даје 5 679 динара отплате. Кад ће се одужити?

58. — Неко се задужи 100 000 динара и исплати дуг у две годишње отплате по 52 765 динара. Колики је проценат?

59. — Један човек пита колику суму би требао да улаже под сложен интерес по 7% почетком сваке године, од навршене 20 до навршене 55 да би тада имао суму од 300 000 динара?

60. — Један пушач је трошио од своје 20 до 60 године по 8 динара дневно за цигарете. Колико би примио по навршетку своје 60 године да је крајем сваке године улагао под сложен интерес по 7% суму од 2 920 динара колико га годишње стаје та штетна навика?

61. — У једној држави становништво се увећа сваке године за свој $\frac{1}{50}$ део. Пита се кад ће се удвојити.

(Колики је овде проценат?)

62. — Једна варошица има 8 000 становника. Примећено је да се у њој становништво смањи сваке године просечно за 160 становника. Ако се то тако продужи, кад ће она спасти на 5 000 становника?

63. — Који дуг би се могао исплатити годишњим отплатама крајем сваке године за 7 година по 20 000 динара, кад је сложен интерес по 5%?

64. — Две суме, једна од 18 000 динара, а друга од 12 000 динара, дате су под сложен интерес: прва по 4%, друга по 5%. Кад ће се оне изједначити?

65. — Неко се задужио 15 000 динара с тим, да тај дуг плати у 12 једнаких отплата крајем сваке године. Колика је отплата кад је сложен интерес по 5%?

66. — За колико година са сложеним интересом по 12% могу 5 000 динара да постану 100 000 динара?

67. — Сума од 150 000 динара дата је под сложен интерес по 12%. Кад се крајем сваке године изузима сума од 20 000 динара, колико ће још остати после 15 година?

68. — Неко је дао у банку под сложен интерес по 7% суму од 600 000 динара и крајем сваке године узима по 84 000 динара. Колико година ће му трајати тај новац?

69. — Један човек се задужи 160 000 динара по 10% сложенога интереса, да отвори једну радњу. После 3 године врати своме повериоцу 50 000 динара, а опет после 3 године још 100 000 динара. Две године после другога плаћања он хоће да исплати сав свој дуг. Колико има још да плати?

70. — На колику суму се осигурао неко који се обавезао да плаћа у току од 20 година, почетком сваке године по 1 200 динара? Интерес 5%.

71. — Који дуг може да се исплати за 8 година, кад се крајем сваке године плаћа по 20 000 динара, а интерес је 6%?

72. — Једно имање је купљено за 250 000 динара. При куповини се исплати 87 000 динара, а остатак има да се исплати у 15 једнаких отплата крајем сваке године. Колико мора да се плаћа годишње, кад је интерес 8%?

73. — Неко је дужан 14 720 динара. Крајем сваке године плаћа по 2 000 динара. Кад ће се одужити са сложеним интересом од 6%?

74. — Колико година је улагао неко крајем сваке године по 3 000 динара, кад је крајем последње године примио 46 880,35? Интерес је 4%.

75. — Неко је некорисно трошио сваке године за 25 година бар по 1 500 динара. Да је то поклањао неком добротворном друштву, колико би то друштво имало сад, кад је интерес 6%?

76. — Неко отплаћује свој дуг од 100 000 динара полугодишњим ануитетом од 5 000 динара. Кад отплата дуга има да траје 25 година, колики проценат сложеног интереса наплаћује банка за дуг, кад дужнику рачуна 5,5% на његове уплате? Колико тај дужник стварно дугује крајем 10 година?

77. — Дужник има да плаћа 8 000 динара полугодишњег ануитета за 12 година, да би исплатио свој дуг. Колики му је дуг, кад банка наплаћује 11,5% на позајмљени новац?

Колика је десета амортизација?

78. — Неко је дужан 100 000 динара. Колики је полугодишњи ануитет, кад дуг мора да се исплати за 12 година, а банка наплаћује 10% на позајмице? Којом сумом може тај улог да се исплати крајем 5 година?

79. — Неко дугује 16 000 динара и исплаћује их тромесечним ануитетима за 20 година. Банка наплаћује 12%. Колика је прва амортизација? А десета?

80. — Неко хоће да исплати свој дуг од 300 000 динара полугодишњим ануитетима од 30 000 динара. Банка наплаћује 8%. Колико година ће трајати отплаћивање тога дуга? Колика је пета амортизација?

81. — Неко дугује 220 000 динара. Дуг исплаћује полугодишњим ануитетима од 12 000 динара. Банка наплаћује 12%. Крајем 6 година дужник положи банци 5 000 динара место 12 000 динара. Кад ће се одужити?

82. — Колико дугује једно лице које је обавезно да плаћа полугодишње ануитете од 10 000 динара за 10 година, кад банка наплаћује 9% интереса? Колико дугује то лице крајем 8 година (после положеног 16 ануитета)?

83. — Једно лице може да плаћа 8 година полугодишње ануитете од 15 000 динара. Може ли примити дуг од 260 000 динара за кућу коју жели да купи с тим, да дуг са ње исплати за 8 година поменутим ануитетима, кад банка наплаћује 10%? Колика му је шеста амортизација?

84. — Која сума мора да се улаже 25 година сваке године у банку која плаћа 5% интереса, да би се осигурала рента за 20 година од 7 000 динара с тим, да се прва рента прими годину дана после последњег улога?

85. — Неко је 20 година улагао у банку по 4 700 динара годишње. Интерес је 5%. После тих 20 година он је рад да троши годишње по 18 000 динара, а да не улаже ништа. Колико година ће му трајати та рента?

86. — Неко је улагао 25 година сваке године по 3 600 динара у банку која плаћа $6{,}5\%$ интереса. После тога времена он престаје уплаћивати. Он хоће да ужива ренту од 12 000 динара. Колико година може да је ужива.

87. — Неко хоће да ужива ренту од 15 000 динара годишње 20 година. Колико треба да улаже годишње за 25 година, кад је интерес 5%?

88. — Неко има право на годишњу ренту од 24 000 динара за 15 година. За колико треба да смањи своју ренту, кад хоће да му она траје 25 година, а интерес је $5{,}5\%$?

89. — Неко је израчунао да после 10 година има да потроши сав свој капитал ако узима годишње 30 000 динара. Колико година ће моћи уживати ту своју ренту ако узима годишње само по 20 000 динара, кад је интерес $6\frac{1}{4}\%$?

90. — Један човек има права на 30-годишњу ренту од 24 000 динара. Кад је интерес 5%, колико он може добити сад за ту ренту?

91. — На коју суму нарасте капитал од 25 000 динара дат у банку под интерес на интерес за 15 година са процентом који је једнак корену једначине

$$\sqrt{x+13} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x-8},$$

а капиталисање се врши семестрално.

(Београд, Четврта женска гимназија, 1938).

(Један део решења: 12%).

92. — На коју ће вредност порасти капитал од a динара, уложен по p процената сложеног интереса за n година, кад је a једнако збиру непарних бројева између 50 и 204; p је мањи а n већи целобројни корен једначине

$$30x^4 - 403x^3 + 1070x^2 - 403x + 30 = 0.$$

(Ћуприја, 1938).

(Делови решења: $p = 3$, $n = 10$, $a = 10414$)

93. — Неко има градилиште у вредности 10 000 динара. A му нуди ту своту одмах, а B му нуди кроз 12 година ренту од 1250 динара (почетком године). Која је понуда боља? (7%).

(Загреб, Друга женска гимназија, 1938).

(Нађи садашњу вредност понуђене ренте. Последња рента се исплаћује почетком 12 године. Значи, до тога рока имамо пуних 11 година. Нека та рента данас вреди R динара. Итд.)

94. — Неко уложи у неки завод 25 000 динара по $5{,}5\%$; на крају десете године уложи још 15 000 динара, али му завод у исто време смањи интересну стопу на 4%. Колику ће суму примити на крају 20 године?

(Београд, Гимназија Краља Александра, 1938).

95. — Један дуг од 10 000 динара има се отплатити у 10 једнаких оброка који доспевају на концу сваке године. Првих пет година укамаћује се са 5%, а затим са 4%. Колики је поједини оброк? *(Бјеловар, 1938).*

96. — Неко узме 20 000 динара уз 8%, а уплаћује кроз n година на концу сваке године 2 400 динара. Колико је још дужан на крају n година ако је n два пута веће од већег корена једначине.

$$3^{x^2-2} = 27.3^{4x}?$$

(Велес, 1938).

97. — Од којег капитала који је дат под сложени интерес а који се крајем сваке године умањује за 2 500 динара, остаје после 10 година још 56 590 динара? Проценат је једнак другом члану аритметичке прогресије од 3 члана чији је збир 18, а производ 192. *(Велика Кикинда, 1938).*

(Решење: 49975,50 динара).

98. — Неко је 1 јануара 1936 године узајмио 100 000 динара с тим да 31 децембра 1940 године врати 50 000 динара, а остатак да отплати у 10 једнаких годишњих рата. Прва рата треба да се положи 31 децембра 1942 године. Колике ће бити те рате кад је каматна стопа 5%, а интерес се капиталише годишње?

(Суботица, Мушка гимназија, 1938).

(Најпре израчунај величину дуга на дан 31 децембра 1940).

99. — Сума од 58400 динара нарасла је после n година, при полугодишњем капиталисању, на 169 000 динара. Са колико процената је била уложена, кад је n једнак већој апсолутној вредности корена једначине

$$\sqrt[x+5]{27.81} = \sqrt[x-6]{9.729}\,\sqrt[x-1]{3.9}$$

(Тетово, 1936).

100. — Неко наследи годишњу ренту од 24 000 динара која има да тече 18 година; наследник није првих пет година примао ту ренту, него уговори са банком да му остале рате повиси. Колика је та нова рента?

(Сремска Митровица, 1936).

101. — За колико ће се година отплатити дуг од 10 760,80 динара, ако се на концу сваке године отплаћује 2 400 динара и ако се рачуна $3\,^3/_4\%$ сложених камата?

(Карловац, 1936).

102. — Колико година мора бити уложен капитал од 40 000 динара, да би за 15 година доносио почетком сваке године ренту од 22 000 динара, рачунајући 6% сложеног интереса? *(Љубљана, Друга гимназија, 1936).*

103. — Неки добротвор поклони Заједници Дома и школе 25 000 динара уз увјет да Заједница додаје тој своти крајем сваке школске године по 800 динара све дотле док не дође до 50 000 динара, а тада да се из те закладе набаве за школу најпотребнија учила. Кад ће се то постићи, ако се рачуна 5% годишњи каматњак?

(Загреб, Друга мушка гимназија, 1936).

104. — Којим се ануитетом може отплатити дуг од 15 000 динара, ако је број година једнак корену једначине

$$2^{x+5} + 2^x = 144,$$

а проценат два пута већи него број година?

(Крагујевац, Женска гимназија, 1936).

VII — *КОМБИНАТОРИКА. — БИНОМНИ ОБРАЗАЦ

КОМБИНАТОРИКА

Дефиниција. — Кад имамо више ствари, па се питамо: *на који начин можемо да их размештамо и здружујемо?* — улазимо у *комбинаторику* или *науку о комбинацијама.*

Један прост пример ће нам то одмах објаснити. За једним столом има *шест места.* Може нам се поставити овако питање: *на колико разних начина могу да се разместе шест лица за тим столом?* Или: кад је *десет* присутних лица *колико разних друштванаца од шест лица могу да саставе тих десет лица?* Или: на колико начина могу сва та друштванца од *шест* лица (која су састављена од *десет* присутних лица) да се поразмештају за тим столом?

Ако одговарамо на прво питање, ми ћемо вршити *пермутовање;* ако одговарамо на друго питање, вршићемо *комбиновање;* а ако одговарамо на треће питање, вршићемо *варирање.*

Дате ствари (или лица) које имамо да ређамо или да здружујемо, зову се *основци,* или *елементи.* Више основака заједно узетих зову се *слог.* Слог од једног основка је *слог прве класе,* од два основака *слог друге класе,* од три основка *слог треће класе* итд.; слог од n основака јесте слог n-те класе.

Основке обележавамо на разне начине. Можемо их обележавати писменима из азбуке: $a, b, c, d, \dots$ Можемо их све обележавати цифрама: 1, 2, 3, 4, 5, ...Можемо их све обележавати истим писменом али разним казаљкама.

Примери:

Слогови друге класе: $ab, cd, mn, rs, pq, xy \dots$

12, 33, 56, 78, 89, 67. . . .

$a_1a_2,\ a_2a_3,\ a_4a_5,\ a_6a_7,\ a_8a_9,\ a_3a_5 \dots$

Слогови треће класе: $abc, cde, def, efg, ghj, klm, mnp \dots$

123, 345, 567, 893, 567, 786 . . . .

$a_1a_2a_3,\ a_3a_4a_5,\ a_6a_7a_8,\ a_2a_3a_6 \dots$

итд. итд.

Од два основка *виши* је онај који је претстављен доцнијом цифром или доцнијим писменом у азбуци, или има већу казаљку.

Примери :

d је виши основак од a

4 „ „ „ „ 3

a_5 „ „ „ „ a_2.

Од два слога *виши* је онај код кога пре наилазимо на виши основак идући у слогу слева надесно.

Примери:

abmnpc је виши од *abcmpn*
4156 „ „ „ 1456
$a_1a_3a_2a_4$ „ „ „ $a_1a_2a_3a_4$.

ПЕРМУТАЦИЈЕ

Дефиниција. — Кад нам је дато неколико основака, па нам се тражи да их *све* разместимо на све могуће начине, ми ћемо добити известан број слогова. Тај посао зове се *пермутовање*, а сваки добивени слог зове се *пермутација*.

Пример. Дата су нам три основка *a, b* и *c*.

Поређајмо најпре *a* и *b*. Биће:

ab и *ba*.

У сваком од ова два слога можемо ставити *c* на три места: сдесна, у средини, или слева. Дакле:

abc	*bac*
acb	*bca*
cab	*cba*

На тај начин смо изређали 3 дата основка на све могуће начине. Добили смо 6 *пермутација* 3 класе.

У сваку пермутацију улазе сви задати основци. Затим је број класе код пермутовања увек једнак с бројем задатих основака.

Пермутације без понављања и пермутације с понављањем. — Ако су у једном слогу сви основци различити, то је *пермутација без понављања*. Ако у слогу има два или више једнаких основака, то је *пермутација с понављањем*.

Примери.

Пермутације без понављања: 2345, 6923, *abcd, amcb*, $a_1a_3a_4a_2$....

Пермутације с понављањем: 2324, 3345, *abad, bbca*, $a_1a_2a_1a_3$....

Грађење пермутација. — Нека су нам дата неколико основака. Да бисмо од њих добили све могуће пермутације, треба радити овако:

Гради се најпре *најнижи слог*. То је онај слог код кога је први с лева најнижи основак, а први с десна највиши, а остали основци иду редом *растући*. У том најнижем слогу

пође се сдесна налево и гледа који се основак може повисити. Тај основак се повиси следећим већим сдесна, основци испред њега се не дирају, а основци десно од њега се поређају природним редом. Тај посао, — *пермутовање* — понавља се, док се не добије *највиши слог*. Највиши слог је онај, у коме је с лева први основак највиши, а сдесна први најнижи, а остали основци иду природним редом *опадајући*.

Примери. — Начинити све пермутације 4 класе од основака 1, 2, 3, 4 и *a, b, c, d* и 1, 1, 2, 3.

1)	1234,	1243,	1324,	1342,	1423,	1432,
	2134,	2143,	2314,	2341,	2413,	2431,
	3124,	3142,	3214,	3241,	3412,	3421,
	4123,	4132,	4213,	4231,	4312,	4321,
2)	*abcd,*	*abdc,*	*acbd,*	*acdb,*	*adbc,*	*adcb,*
	bacd,	*badc,*	*bcad,*	*bcda,*	*bdac,*	*bdca,*
	cabd,	*cadb,*	*cbad,*	*cbda,*	*cdab,*	*cdba,*
	dabc,	*dacb,*	*dbac,*	*dbca,*	*dcab,*	*dcba.*
3)	1123,	1132,	1213,	1231,	1312,	1321.
	2113,	2131,	2311.			
	3112,	3121,	3211.			

Број пермутација. — Да бисмо видели колико пермутација можемо направити од n основака, радићемо овако:

Узмимо два основка: *a* и *b*.

Пермутације друге класе биће свега *две*:

ab и *ba*.

Свака од њих има 3 места на која можемо ставити трећи основак *c*, као што смо већ видели. На тај начин ћемо од сваке пермутације друге класе добити 3 пермутације 3 класе. Пошто имамо 1 пермутацију прве класе, а 2 пермутације друге класе, биће:

број пермутација 1 класе: $P_1 = 1$
„ „ 2 „ $P_2 = 2$
„ „ 3 „ $P_3 = 3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Свака пермутација 3 класе има 4 места где можемо ставити четврти основак *d*:

abcd, abdc, adbc, dabc.

Значи да ћемо од сваке пермутације 3 класе, добити 4 пермутације 4 класе. Према томе биће :

број пермутација четврте класе : $P_4 = 4P_3 = 2.3.4 = 42.$

Свака пермутација 4 класе има 5 места где можемо ставити пети основак *е* :

abcde, abced, abecd, aedcb, eabcd.

Према томе, свака пермутација 4 класе даје 5 пермутација 5 класе. Отуда ће бити :

број пермутација пете класе : $P_5 = 5P_7 = 24.5 = 120.$

Како имамо свега једну пермутацију прве класе, можемо писати :

$P_1 = 1$

$P_2 = 1.2$

$P_3 = 1.2.3$

$P_4 = 1.2.3.4$

$P_5 = 1.2.3.4.5$

$P_6 = 1.2.3.4.5.6$

$P_n = 1.2.3.4.5.6 \ldots\ldots (n-3)(n-2)(n-1)\,n$

Ово је производ од *n узастопних бројева,* почевши од јединице. Такав производ пишемо скраћено овако :

$$n\,!$$

и читамо : *„ен факторијел“.*

Ако у наших *n* основака има *m* међусобно *једнаких,* можемо најпре те основке сматрати различним, па ћемо добити

$$n\,!$$

пермутација. Ако те пермутације поделимо сад у групе тако, да у једну групу ставимо само оне пермутације у којима се неједнаки основци (има их $n-m$) не померају са својих места, у свакој ће групи бити $m!$ пермутација. Према томе број свих тих група биће $\frac{n!}{m!}$. У ствари слогови исте групе биће једнаки, те ће број пермутација бити онолики колики је број група. Према томе број пермутација је :

$$\frac{n!}{m!}$$

ако у *n* основака има *m* једнаких.

Ако у *n* основака има *m* једнаких једне врсте, *p* једнаких друге врсте, а *q* једнаких треће врсте, биће број свих пермутација :

$$\frac{n!}{m!\;p!\;q!}. \qquad \text{Зашто?}$$

Примери. — 1) На колико начина могу да се разместе 6 лица за једним столом ?

$$P_6 = 6! = 1.2.3.4.5.6 = 720.$$

2) Колико пермутација могу да се направе од ових основака :

$$1,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Овде имамо 4 основка, од којих су 2 *једнака.*

Дакле $n = 4$, $m = 2$. Према томе је

$$P'_4 = \frac{4!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2} = 12.$$

Овај пример смо већ израдили. Са P' означићемо број *пермутација с понављањем.*

КОМБИНАЦИЈЕ

Дефиниције. — *Комбиновати* значи од *n* датих основака направити све слогове *r*-те класе, али тако, да не буду нигде у два слога сви основци једнаки. Тако добивени слогови зову се *комбинације.* Комбинације могу бити *с понављањем* и *без понављања.* Ако су у једноме слогу сви основци различити, комбинација је без понављања; ако у слоговима има и по два и више једнаких основака, комбинација је с понављањем.

Комбинацију *r*-те класе од *n* основака обележаваћемо са ${}_rC_n$, ако је без понављања, а са ${}_rC'_n$, ако је с понављањем.

Грађење комбинација. — Да бисмо добили све комбинације *без понављања r*-те класе од *n* елемената, треба радити овако. Образује се *најнижи слог* од *r* основака изабраних између *n* датих основака. У томе слогу иде се сдесна налево и замењује се првим вишим основком онај основак који се може заменити преосталим основцима, а основци десно од њега поређају се природним редом. Тај посао се понавља докле год је могуће повишавати основке.

Примери. — 1. — Начинити све комбинације без понављања друге класе од 4 основака *a, b, c, d.*

Најнижи слог друге класе биће овде:

$$ab.$$

Основак b се може заменити са c:

$$ac.$$

Основак c се може заменити са d:

$$ad.$$

Основак d се више не може замењивати, јер је међу датим основцима a, b, c и d он највиши основак. Али може се заменити основак a. Његов је први виши b. Кад место a ставимо b, морамо друго место попунити природним редом, дакле са c:

$$bc.$$

И сад даље:

$$bd, \quad cd.$$

Све комбинације 2 класе од 4 основка, а без понављања, биће:

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd.$$

2. — Начинити све комбинације без понављања 3 класе од основака 1, 2, 3, 4, 5.

123
124
125
134
135
145
234
235
245
345

Да бисмо добили *све* комбинације r-те класе од n елемената *с понављањем*, треба радити овако. Образује се слог r-те класе од *најнижег основка* (узетог r пута). Затим се с десна крајњи основак замењује првим вишим. Први виши основак ређа се сдесна, док се не попуне свих r места. Тако се ради док се не дође до слога састављеног само од *највишег* основка.

Примери. — 1) Начинити све комбинације *с понављањем* 3 класе од ових основака: 1, 2, 3, 4, 5.

1)	2)	3)	4)
111	134	234	355
112	135	235	444
113	144	244	445
114	145	245	455
115	155	255	555.
122	222	333	
123	223	334	
124	224	335	
125	225	344	
133	233	345	

2) Начинити све комбинације *с понављањем* 2 класе од основака a, b, c и d.

1)	2)	3)	
aa	ad	bd	
ab	bb	cc	dd.
ac	bc	cd	

Број свих комбинација r-те класе од n основака. — 1) *Без понављања.* — Узмимо најпре да видимо број комбинација 2 *класе* од n основака.

Да бисмо добили ма коју комбинацију 2 класе, треба ма који од n основака да вежемо са једним од $(n-1)$ преосталих. Да бисмо добили *све* комбинације 2 класе, треба сваки основак да вежемо са свима осталима. Док један основак везујемо са свима осталим добићемо $(n-1)$ комбинацију. А кад тај посао обавимо n пута (јер има n основака), добићемо n пута по $(n-1)$ комбинацију. Према томе број комбинација 2 класе био би $n\,(n-1)$. Јест, али при томе послу свака комбинација се јавља *два* пута. (Кад везујемо a са b и b са a, b са c и c са b). Зато горњи број треба поделити са 2. Према томе, број комбинација 2 класе од n елемената без понављања биће:

$$_2C_n = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

Ако хоћемо сад да добијемо све комбинације 3 класе, треба све комбинације 2 класе да вежемо са свима преосталим основцима. При томе ће се свака *комбинација јавити три пута.* Ако све комбинације 2 класе вежемо са свима $(n-2)$

преосталим основцима, добићемо

$${}_2C_n \times (n-2) \text{ комбинације.}$$

Али како се свака комбинација јавља три пута, горњи број треба поделити са 3, те ће ово бити број свих комбинација 3 класе без понављања:

$${}_3C_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Да се свака комбинација јавља 3 пута при спајању комбинација 2 класе с преосталим основцима, види се из овога.

$a \quad b \quad c \quad d$

ab и c дају abc

али и ac и b дају acb

и bc и a дају bca

а ове три комбинације 3 класе представљају *једну исту* комбинацију 3 класе *без* понављања.

Ако исто размишљање продужимо, видећемо да је

$${}_4C_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Одатле лако можемо извести овај образац за број комбинација r-те класе од n основака без понављања:

$${}_rC_n \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot r}.$$

Горњи се образац скраћено пише овако:

$${}_rC_n = \binom{n}{r}$$

и чита се: *„ен над ер“*.

Пример. — 1) Израчунати број комбинација 2 класе од 4 основка без понављања. Биће:

$${}_2C_4 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot \cdot \cdot \cdot}{1 \cdot 2}.$$

Бројилац се почиње са 4, а треба да се заврши са:

$$4 - 2 + 1 = 3$$

према томе ће тражени број комбинација бити:

$${}_2C_4 = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Видели смо при грађењу комбинација да је ово тачно.

2) Израчунати број комбинација 3 класе од *пет* основака без понављања.

$${}_3C_5 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \cdot \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Бројитељ се почиње чиниоцем 5, а треба да се заврши чиниоцем:

$$5 - 3 + 1 = 3,$$

те ће бити:

$${}_3C_5 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

При грађењу комбинација видели смо да је ово тачно

2) *Број комбинација с понављањем.*

Узмимо најпре да направимо све комбинације друге класе *с понављањем* од 3 основка: 1, 2, 3.

11, 12, 13, 22, 23, 33.

Ако основцима у сваком члану додамо посебице редом првоме нулу, а другоме 1, добићемо: $1 + 0$, $1 + 1$, то јест 12, па ће бити:

12, 13, 14, 23, 24, 34.

Добијамо, као што се види, све *комбинације без понављања*, 2 класе од 4 елемената (1, 2, 3, 4). Сад имамо *исти број* комбинација у оба случаја. Како је

$${}_2C_4 = \binom{4}{2},$$

мора бити:

$${}_2C'_3 = {}_2C_4 = \binom{4}{2}.$$

Ако начинимо све комбинације 3 класе од 4 елемента 1, 2, 3, 4, имаћемо (с понављањем):

111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134,
144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334,
344, 444.

Ако основцима у свима овим комбинацијама додамо редом 0, 1, 2, добићемо:

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156,
234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

А ово су комбинације класе од 6 елемената без понављања. Њих има: ${}_3C_6 = \binom{6}{3}$. Како је једних и других комбинација *исти број*, то ће бити:

$${}_3C'_4 = {}_3C_6 = \binom{6}{3}.$$

Ако тако будемо и даље размишљали, добићемо:

$${}_4C'_5 = {}_4C_8 = \binom{8}{4}.$$

Како ћемо познати од колико елемената ће бити нове комбинације, кад додамо 0, 1, 2, 3 .... основцима у свима комбинацијама? Ако је комбинација с понављањем 5 класе од 7 основака додаћемо 0, 1, 2, 3, 4. Ако крајњем основку 7 додајемо редом 0, 1, 2, 3, 4, видећемо ово: он се не мења, ако му додамо нулу; мења се, ако додамо један од она друга четири основка. Значи имаћемо 5 — 1 нових основака. Било их је већ 7, те ће их свега бити 7 + 5 — 1. Ако је комбинација r класе од n основака, кад највишем основку од n основака додајемо редом: 0, 1, 2, 3, 4 ..... $r - 1$, добићемо $(r - 1)$ нових основака. Сад ће комбинације без понављања бити од $[n + (r - 1)]$ основака. Према томе ће бити:

$${}_rC'_n = {}_rC_{n+(r-1)} = \binom{n+r-1}{r}.$$

То је општи образац за број комбинација *с понављањем*.

Пример. Нађи број свих комбинација 2 класе од 5 основака с понављањем.

$${}_2C'_5 = {}_2C_{5+2-1} = {}_2C_6 = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

ВАРИЈАЦИЈЕ

Пермутоване комбинације. — Нека су нам дате 4 цифре: 1, 2, 3 и 4 да од њих начинимо све могуће двоцифрене бројеве неједнаких цифара.

Начинићемо све комбинације друге класе без понављања:

(*a*) 12 13 14 23 24 34

Али то нису сви тражени бројеви. Од цифара 1 и 2 можемо добити и број 21, а њега нема у горњем низу. Број 21 добијамо кад извршимо пермутацију у првоме слогу:

од 12 правимо 21.

Кад извршимо пермутације у свима слоговима низа (*a*), добијамо све тражене бројеве:

(*b*)	12	13	14	23	24	34
	21	31	41	32	42	43.

Слогови из низа (*a*) су комбинације без понављања. Слогови из низа (б) су пермутоване комбинације. Пермутоване комбинације зову се **варијације.** Слогови из низа (*b*) су **варијације.** Како се у њима основци не понављају, ово су *варијације без понављања.* Све су то варијације II класе без понављања.

Грађење варијација без понављања. — Од основака *a*, *b*, *c* и *d* начинити све варијације без понављања треће класе

I. начин. — Начинимо све комбинације треће класе без понављања. То су:

abc abd acd bcd.

Сад од њих све варијације:

abc	abd	acd	bcd
acd	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

II начин. — Најпре начинимо најнижу комбинацију треће класе без понављања. То је комбинација *abc*. Сад сдесна налево смењујемо први основак који се може повисити једним од датих основака. Основке десно од њега узимамо из датих основака и ређамо их природним низом (најнижи, па све већи.)

a, b, c, d.

Најнижа комбинација без понављања је *abc*. abc

Повишујемо основак *c*: abd

Сад смењујемо основак *b* основком *c*:

ac .

Остају нам основци *b* и *d*. Празно место у нашем слогу попуњавамо са *b*:

Даље:

Сад смењујемо основак *c* основком *d*:

ad .

Остају нам основци *b* и *c*. Узмимо *b*: adb

Даље је:

adc	bac	bad	bca	bcd	bda	bdc	cab
cad	cba	cbd	cda	cdb	dab	dac	dba
dbc	dca	dcb					

Број варијација без понављања. — Да израчунамо број варијација без понављања r-те класе од n елемента.

Број комбинација r-те класе без понављања биће:

$$\binom{n}{r}.$$

Свака комбинација даће r пермутација. Зато ће свега варијација r-те класе од n елемента, без понављања, бити:

$$_rV_n = \binom{n}{r} r!.$$

То је даље:

$$_rV_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3).....\,(n-r+1).$$

Пример 1. — Израчунај број варијација без понављања 2 класе од 3 елемента.

$$_2V_3 = \binom{3}{2} 2! = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 2 = 6.$$

Пример 2. — Израчунај број варијација без понављања 4 класе од 5 основака.

$$_4V_5 = \binom{5}{4} 4! = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

Примеир 3. — Израчунај број варијација без понављања 3 класе од 3 елемента.

$_3V_3 = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,(n-r+1) = 3\,.\,2\,.\,1 = 6.$

Је ли исти толики и број пермутација $P_3 = \,.\,.\,.\,.\,?$ Зашто је то тако?

Варијације с понављањем. — Варијација је с понављањем онда, ако се у њеним слоговима понављају основци.

Грађење варијација с понављањем.

I начин. — Начинити све варијације с понављањем друге класе од ових основака: *a b c d.*

Начинићемо све комбинације друге класе с понављањем:

aa ab ac ad bb bc bd cc cd dd.

Сад ћемо пермутовати оне које се даду пермутовати:

Од *ab* добијамо ba
„ ac „ ca
„ ad „ da
„ bc „ cb
„ bd „ db
„ cd „ dc

Не могу се пермутовати:
aa
bb
cc
dd

Добили смо све варијације с понављањем друге класе од 4 дата основка.

II начин. — Начинимо најнижи слог од једнаких основака. То је слог *aa*. Први основак с десна који се да заменити замењујемо вишим основком, а остале узимамо из датог низа, почињући од најмањег. При томе узимању не прескачемо ни основак који већ имамо.

Основци: a b c d.

Варијације друге класе с понављањем:

aa ab ac ad ba bb bc bd ca cb cc cd
da db dc dd.

Број варијација с понављањем. — Образац за број варијација с понављањем извешћемо на примерима. Број варијација r-те класе с понављањем од n елемената обележаваћемо са $_rV'_n$.

Пример I. — Колики је број варијација с понављањем друге класе од 3 основка?

Основци: а б г,

Тражене варијације:

аа аб аг ба бб бг га гб гг.

Број варијација је 9. То значи 3^2.

$$_2V'_3 = 3^2$$

Пример II. — Колики је број варијација с понављањем 3 класе од 2 основка?

Основци: *a, b.*

Варијације:

aaa aab aba abb baa bab bba bbb,

$$_3V'_2 = 8 = 2^3.$$

Пример III. — Колики је број варијација с понављањем 3 класе од 3 основка?

Основци: *a, b, c.*

Варијације:

aaa	*aab*	*aac*	*aba*	*abb*	*abc*	*aca*	*acb*	*acc*
baa	*bab*	*bac*	*bba*	*bbb*	*bbc*	*bca*	*bcb*	*bcc*
caa	*cab*	*cac*	*cba*	*cbb*	*cbc*	*cca*	*ccb*	*ccc*

$$_3V'_3 = 27 = 3^3.$$

Пример IV. Колики је број варијација с понављањем 2 класе од 4 основка?

Њих смо већ градили. Видели смо да их је 16

$$_2V_4 = 16 = 4^2.$$

Пример V. — Колики је број варијација с понављањем 4 класе од 2 основка?

Нека су основци: 1, 2.

Тада су ово варијације:

1111	1112	1121	1122	1211	1212	1221	1222
2111	2112	2121	2122	2211	2212	2221	2222.

$$_4V'_2 = 16 = 2^4.$$

Из примера видиш да је

$$_r\mathbf{V}'_n = \mathbf{n}^r.$$

Тај образац се може извести и овако:

Узмимо 4 основка *a b c d*.

Број варијација прве класе биће: 4.

Ако сваку ту варијацију спојимо са сваком основком, добићемо све варијације друге класе с понављањем.

Број варијација прве класе: 4

Број варијација друге класе: $4 \cdot 4 = 4^2$.

Све варијације треће класе с понављањем добићемо ако сваку варијацију друге класе спојимо са сваком основком. Свака варијација даје још 4 нове. Према томе број варијација треће класе с понављањем биће:

$$_3V_4' = 4^2 \cdot 4 = 4^3. \text{ Итд.}$$

БИНОМНИ ОБРАЗАЦ

Производ бинома који се разликује само другим чланом. — Веома често нам је потребно да множимо биноме код којих је једнак први члан:

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) \ldots . (x + l).$$

Узмимо свега два таква бинома:

$$(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\, x + ab.$$

Узмимо три таква бинома:

$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) = x^3 + (a + b + c)\ x^2 + (ab+ac+bc)\, x + abc.$

Кад погледамо коефициенте уз *x*, видимо да је коефицијент првога члана 1, а осталих чланова збир *комбинација без понављања.* Те збирове комбинација обележићемо грчким писменом сигма:

$$(a + a)\ (x + b) = x^2 + \Sigma\, _1C_2 x + \Sigma\, _2C_2,$$

$$(x + a)\ (x + b)\ (x + c) = x^3 + \Sigma\, _1C_3 x^2 + \Sigma\, _2C_3 x + \Sigma\, _3C_3.$$

За *n* таквих бинома биће:

$$(1)\quad (x + a)\, (x + b) \ldots . (x + l) = x^n + \Sigma\, _1C_n x^{n-1} + \Sigma\, _2C_n x^{n-2} + \ldots + \Sigma\, _nC_n.$$

(*n* чинитеља)

Пример. — Наћи производ $(x+1)\ (x+2)\ (x=3)\ (x+4)$.

$$\begin{aligned}(x+1)\, (x+2)\, (x+3)\, (x+4) &= x^4 + \Sigma_1C_4x^3 + \Sigma\, _2C_4x^2 + \Sigma\, _3C_4x + \Sigma_4C_4 \\ &= x^4 + (1+2+3+4)\, x^3 + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \\ &+ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)\, x^2 + \\ &+ (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + \\ &+ 2 \cdot 3 \cdot 4)\, x + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24.\end{aligned}$$

Биномни образац. — Ако у обрасцу (1) ставимо $a=b=c=\ldots\ldots=l$, добићемо бином $(x + a)$ на *n*-ти степен. У томе случају наше комбинације постају све једнаке и овако изгледају:

$$a,\ aa,\ aaa,\ aaaa, \ldots\ldots,$$

или

$$a,\ a^2,\ a^3\ a^4, \ldots\ldots\ a^n.$$

Њихов број је број комбинација без понављања:

$$_1C_n = \binom{n}{1} = n$$

$$_2C_n = \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{1\ .\ 2}$$

$$_3C_n = \binom{n}{3} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}$$

— — — — — — — —

$$_nC_n = \binom{n}{n} = 1.$$

Према томе производ једнаких чинилаца ће овако изгледати:

$$(x \pm a)\ (x \pm a)\ (x \pm a)\ \ldots\ldots\ n \text{ пута},$$

а то је даље:

$$(2)\quad (x \pm a)^n = x^n \pm na\ n^{x-1} + \frac{n\ (n-1)}{1 \cdot 2}\ a^2 x^{n-2} \pm \ldots\ldots \pm a^n,$$

то је **биномни образац.**

Пример. — Развити овај степен: $(x + a)^5$.

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^2x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3x^2 +$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4x + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 =$$

$$= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

Кад се боље загледа у образац (2) и у овај пример, види се ово:

1. Изложилац првог члана (x) бинома *опада* од n до 0.

2) Изложилац другог члана (a) бинома *расте* од *0* до n.

3) Коефициенти су једнаки код чланова једнако удаљених од крајева развијеног бинома.

4) Знаци су сви + ако бином представља збир, а наизменично + и — ако бином представља разлику.

ВЕЖБАЊА

1. — Напиши све пермутације од речи соба.

2. — Исто за реч *школа*.

3. — Исто за реч *Авала*.

4. — Напиши све пермутације свога имена.

5. — Исто за бројеве 152, 1 567, 85 679, 8 819, 1 888.

6. — Напиши све троцифрене бројеве који се могу написати овим трима цифрама: 1, 2, 7.

7. — Колико има свега пермутација од речи *Космај?*

8. — Исто за реч *Јагодња*.

9. — У једном одељку у вагону има 6 места. На колико начина могу да се размештају 6 лица тако, да никад једно лице не седи на истом месту?

10. — Међу свима пермутацијама цифара броја 456, колико бројева се почињу са 5?

11. — Колико троцифрених бројева могу да се напишу овим трима цифрама 2, 2 и 4?

12. — Колико четвороцифрених бројева могу да се напишу цифрама 1, 2, 8, 9?

13. — Исто питање за цифре 2, 3, 7, 8?

14. — На колико начина могу три ученика да седе у једној клупи?

15. — Колико има пермутација које почињу са *m*, кад су грађене од основака *i, m, n?*

16. — Колико има пермутација које почињу са *ma* од основака *a, m, n?*

17. — Колико има пермутација од основака *a, i, l, m, n,* које почињу са *mil?*

18. — Која је пермутација по реду реч *Јован* од основака *а, в, ј, н, о?*

(Колико има пермутација које почињу са *а?*
„ „ „ „ „ „ *в?*
„ „ „ „ „ „ *ја?*
„ „ „ „ „ „ *јв?*
„ „ „ „ „ „ *јн?*
„ „ „ „ „ „ *јоа?*
„ „ „ „ „ „ *јов?*
Итд.)

19. — Како гласи пета пермутација од основака *а, д, р?*

(Колико их има које почињу са *а?* Колико почињу са *д?* Итд.)

20. — Како гласи 10 пермутација од основака *а, в, е, р?*

(Колико њих почињу са *а?* Јеси ли већ дошао до десете пермутације? Колико их има што почињу са *в?* Да ниси већ прешао 10 пермутацију? Врати се. Колико их има што почињу са *ва?* Колико их има свега до сад? Оних са *а* . . . ; оних са *ва* = . . . Свега прошло пермутација . . . Итд.)

21. — Како гласи 87 пермутација од основака *е, п, с, у, х?*

22. — Како гласи 708 пермутација од основака *а, б, д, е, о, п?*

23. — Колико двоцифрених бројева могу да се напишу од цифара, 2, 5, 7, 8, али тако, да нигде два броја немају исте цифре? Испиши их!

24. — Написати све двоцифрене бројеве који се могу образовати од цифара 1, 2, 3, 4 али тако, да им цифре не буду једнаке. Испиши их!

25. — Од десет кандидата са одличним условима могу добити места свега двојица. На колико начина може да се учини распоред?

26. — Означено је 15 тачака тако, да нигде не леже три на једној правој. Са колико правих могу међусобно да се̑ вежу све те тачке по две и две?

27. — Колико дијагонала могу да се повуку у тридесетоугаонику?

28. — Број комбинација 3 класе од извесног броја основака стоји према броју комбинација 5 класе, као 5 : 3. Колико има тих основака, кад су комбинације без понављања?

29. — Колико разних застава могу да се начине од ових трију боја: *плаве, беле* и *црвене?*

30. — У једној кеси налазе се 8 белих и 6 црвених лоптица. На колико начина могу из ње да се изваде 10 лоптица?

31. — Колико троцифрених бројева разних цифара могу да се напишу од цифара 6, 4, 0, 3?

32. — Од извесног броја основака број комбинација треће класе без понављања два пута је мањи од броја таквих комбинација друге класе. Колико има свега тих основака?

33. — Колико има комбинација 2 класе с понављањем од елемената a, b и c?

34. — Колико има комбинација 3 класе од истих основака? (С понављањем.)

35. — Колико има комбинација 4 класе од истих основака? (С понављањем.)

36. — Колико има комбинација 5 класе с понављањем од основака m, n, p и q?

37. — Од колико основака су грађене комбинације друге класе без понављања, кад их има свега 21?

38. — Начинити све варијације 2 класе од ових основака: a, b.

39. — Начинити све варијације 2 класе од ових основака: a, b, c.

40. — Начинити све варијације 2 класе од ових основака: a, b, c, d, e.

41. — Колики је број варијација друге класе од 4 основка?

42. — Колики је број варијација треће класе од 5 основака?

43. — Колики је број варијација четврте класе од 5 основ.?

44. — Колики је број варијација пете класе од 5 основака?

45. — Колики је број варијација прве класе од 5 основака?

46. — Је ли исто ${}^3V_4$ и ${}_4V_3$? За колико се разликују?

47. — Начинити све двоцифрене бројеве од цифара 1 и 2. Колико их има?

48. — Начинити све двоцифрене бројеве од цифара 1, 2 и 3. Колико их има?

49. — Начинити све двоцифрене бројеве од цифара 0, 1 и 4. Колико их има?

50. — Начинити све троцифрене бројеве од цифара 2, 4 и 6. Колико их има?

51. — Начинити све четвороцифрене бројеве од цифара 1 и 2. Колико их има?

52. — Начинити све троцифрене бројеве од цифара 7 и 8. Колико их има?

53. — Начинити све троцифрене бројеве од цифара 0, 3 и 9. Колико их има? (Пази!)

54. — Колико четвороцифрених бројева могу да се начине од 1 и 5?

55. — Колико има свега двоцифрених бројева?

56. — Колико има свега троцифрених бројева?

57. — Колико има троцифрених бројева чије су све цифре парне?

58. — Колико има четвороцифрених бројева чије су све цифре непарне?

59. — Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре непарне?

Изврши означено множење скраћеним путем:

60. $(x+1)(x+2)(x+3)$.

61. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

62. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)$.

63. $(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)(x-7)$.

Разви по биномном обрасцу ове степене:

64. $(a+b)^6$.

65. $(a+b^2)^5$.

66. — Нађи 3 члан развијеног степена $(a-b)^9$.

67. — Исто за 7 члан од $(a-b)^{15}$.

68. — У развијеном степену $(x^2-m)^{24}$ написати 9 члан

69. — У развијеном степену $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z})^7$ наћи место члана у коме је z на четвртом степену.

70. — Одреди члан у коме су изложиоци међусобно једнаки, кад се развије бином $(a+b)^{19}$.

VIII. — *РАЧУН ВЕРОВАТНОЋЕ С НАЈПРОСТИЈОМ ПРИМЕНОМ

Вероватно и невероватно. — У обичном животу вероватно је оно што мислимо да се може десити, а ми очекујемо да се то деси. Невероватно је оно што мислимо да се не може десити и што не очекујемо да се деси.

Повољни догађаји и неповољни догађаји. — Догађај је повољан ако желимо да се он деси. Догађај је неповољан ако не желимо да се он деси.

Математичка вероватноћа. — У једној кеси имамо 10 лоптица једнаке величине, начињене од истог материјала. Од њих су 6 белих и 4 црвене. Ако завучемо руку у ту кесу са намером да из ње извучемо једну лоптицу, може нам се десити да извучемо белу, или црвену. Колика је вероватноћа да ћемо извући белу? Математика овако одговара на то питање:

Вероватноћа је однос броја повољних случајева према броју свих могућих случајева.

Ми хоћемо да извучемо белу лоптицу. За нас је тада повољан случај ако извучемо белу. Белих лоптица има 6. Лоптица има свега 10. Значи има 10 могућих случајева. Математичка вероватноћа за тај случај биће:

$$\frac{6}{10}, \text{ тј. } \frac{3}{5}.$$

Немогућан догађај. — Догађај је немогућан ако се не може десити. На пр. у кеси имамо 10 белих лоптица. Колика је вероватноћа да из те касице извучемо црвену лоптицу кад вадимо једну лоптицу из ње? Види се да је немогуће оно што желимо. Догађај који очекујемо немогућан је. Колика му је вероватноћа? Означимо број повољних случајева са p, број неповољних случајева са q, број свих могућих случајева са m, а вероватноћу са v. Тада је вероватноћа:

за повољан случај: $\frac{p}{m}$, за неповољан случај: $\frac{q}{m}$,

$$v=\frac{p}{m}, \qquad v=\frac{q}{m}.$$

Колико има овде могућих случајева? Имамо 10 лоптица. Дакле $m=10$. Колико имамо повољних случајева? Црвених лоптица нема. Дакле, $p=0$. Колика је вероватноћа?

$$v=\frac{0}{10}=0.$$

Вероватноћа немогућег догађаја је нула. Обрнуто: *Кад је вероватноћа једног догађаја нула, он је немогућан.*

Сигуран догађај. — Из кесе у којој су 10 белих једнаких лоптица хоћемо да извучемо једну белу лоптицу. *Сигурно* је да ћемо извући белу лоптицу, пошто других и нема. Колика је вероватноћа?

$$v=\frac{p}{m}.$$

Колико је могућих случајева? Има десет лоптица. Зато је $m=10$. Колико има повољних случајева? Желимо белу лоптицу. Њих има 10. Зато је $p=10$. Колика је вероватноћа?

$$v=\frac{p}{m}=\frac{10}{10}=1.$$

Вероватноћа сигурног догађаја је 1. Обрнуто: *Кад је вероватноћа 1, догађај је сигуран.*

Између нуле и јединице. — Код свих догађаја крајности су: немогућан догађај и сигуран догађај. Сви остали догађаји су између њих. Према томе и њихове вероватноће ће бити између 0 и 1. Између нуле и јединице нема целих бројева. Како вероватноћу изражавамо разломком, вероватноћа свих догађаја који нису ни сигурни ни немогући, биће неки прави разломак.

Збир повољне и неповољне вероватноће. — У једној кесици имамо 3 беле и 2 црвене лоптице. Колика је вероватноћа да ћемо, кад извлачимо једну куглицу, извући баш белу?

Тај догађај је повољан по нас. Вероватноћу повољног догађаја обележаваћемо са V_p, а вероватноћу неповољног догађаја са V_q. Овде је

$$V_p = \frac{3}{5}.$$

Колика је вероватноћа да ћемо извући црвену лоптицу?

$$V_q = \frac{2}{5}.$$

Колики је збир обе те вероватноће?

$$V_p + V_q = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

Збир повољне и неповољне вероватноће је 1.

То можемо и овако да докажемо.

$$m = p + q. \qquad \text{Одатле је} \qquad q = m - p.$$

$$V_p + V_q = \frac{p}{m} + \frac{q}{m} = \frac{p}{m} + \frac{m-p}{m} = \frac{p + m - p}{m} = \frac{m}{m} = 1.$$

ПРОСТА ВЕРОВАТНОЋА

За вероватноћу кажемо да је проста ако је посматрани догађај једноставан, тако да његову вероватноћу можемо лако добити из саме дефиниције, тј. непосредним пребројавањем повољних и свих могућих случајева. На пр. имамо коцку чије су стране обележене редним бројевима од 1 до 6. Колика ће бити вероватноћа да горе буде страна 3 кад само једанпут бацимо ту коцку?

Могуће је да се горе појави свака од 6 страна. Могућих случајева има 6. Колико их је повољних? Свега 1. Вероватноћа је: $V = \frac{1}{6}$.

СЛОЖЕНА ВЕРОВАТНОЋА

За вероватноћу кажемо да је сложена ако је догађај, чију вероватноћу тражимо сложен, тако да његову вероватноћу не добијамо непосредно, већ ју израчунавамо из вероватноћа појединих простих догађаја, на које се посматрани догађа може свести. Ово израчунавање на основу следећа два правила.

Збир вероватноћа. — Колика је вероватноћа да ћемо при бацању коцке добити горе **било** 2 **било** 3?

Вероватноћа да добијемо 2 јесте: $\frac{1}{6}$. Вероватноћа да ћемо добити 3 је опет $\frac{1}{6}$. Вероватноћа да ћемо добити или 2 или 3 је:

$$V = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

О томе се можеш уверити овако:

$m = 6$, $p = 2$ (страна 2, страна 3, а обе повољне).

$$V_p = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}. \qquad (V_p = \frac{1}{3})$$

Отуда ово правило:

Ако се један сложен догађај своди на више простих догађаја тако да ће сложени догађај наступити ако наступи било један од простих догађаја, и ако ови прости догађаји један другог искључују, тада је вероватноћа сложена догађаја раван збиру вероватноћа простих догађаја.

Производ вероватноћа. — У двема кесицама су по 3 беле и по 2 плаве лоптице. Из сваке вучем по једанпут. Колика је вероватноћа, да ћу из обе извући белу?

Вероватноћа да ћу из прве извући белу је: $\frac{3}{5}$.

Вероватноћа да ћу из друге извући белу је опет $\frac{3}{5}$.

Колика је вероватноћа да ће оба пута бити беле?

Могући случајеви:

I кеса	II кеса
I бела. На њу може доћи:	1 бела
	1 бела
	1 бела
	1 плава
	1 плава

На сваку лоптицу из I кесе може доћи ма која лоптица из друге кесе. Према томе, свакој лоптици из I кесе одговарају 5 могућих лоптица из II кесе. У I кеси има 5 лоптица. Поред сваке од њих може да се појави једна од 5 лоптица из II кесе. Отуда је ово број могућих случајева:

$$5 \cdot 5 = 25, \quad m = 25.$$

Повољни случајеви :

1	бела.	На њу може доћи ма која од три беле. Повољних случајева	3
1	„	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	3
1	„	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	3
		Свега повољних случајева ...	9

$p = 9.$

Дакле је $V_p = \frac{9}{25}$.

Са друге стране вероватноћа да из прве кесице извучемо белу лоптицу је $\frac{3}{5}$. Исто је тако вероватноћа да из друге кесице извучемо белу лоптицу $\frac{3}{5}$.

Видимо да је

$$V_p = \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}.$$

Отуда ово правило :

Ако се један сложен догађај своди на више простих догађаја тако да ће сложени догађај наступити ако наступе **сви** *прости догађаји, и ако су ови прости догађаји независни један од другог, тада је вероватноћа сложена догађаја равна производу вероватноћа простих догађаја.*

ПРИМЕРИ

I. У једној кеси имамо 5 лоптица: белу, плаву, црвену, зелену и жуту. Извлачићемо редом једну по једну. Колика је вероватноћа да ће лоптице излазити редом којим су поменуте?

У колико разних редова могу да се појаве лоптице?

б п ц з ж

ж ц п б з и т. д.

Колико ће бити таквих редова? Онолико на колико разних начина могу да се поређају горња слова. А на колико начина то може бити? На онолико начина колико има пермутација без понављања од 5 основака. Могућих случајева има:

$m = 5! = 125.$

Колико повољних? Свега 1. Вероватноћа да ће он наићи јесте :

$$V_p = \frac{1}{125}.$$

II. — У кеси су 6 белих и 4 црвене лоптице. Извлачимо по три одједанпут. Колика је вероватноћт да одмах извучемо 3 беле?

Колико има могућих случајева? Онолико колико има комбинација треће класе од 10 основака без понављања. Њих има :

$$\left|\begin{matrix}10\\3\end{matrix}\right| = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120, \qquad m = 120.$$

Колико има повољних случајева?

Замислимо да су беле лоптице обележне од 1 до 6. Ако ми се деси да извучем све три беле лоптице, то може бити овако :

1	2	3	
3	5	4	итд.

Колико има таквих случајева? Онолико колико има комбинација треће класе без понављања од 6 елемената. (Јер има 6 белих лоптица.). Тих комбинација има

$$\left|\begin{matrix}6\\3\end{matrix}\right| = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20, \qquad p = 20.$$

Вероватноћа је $V = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

III. — *Колика је вероватноћа да се двема коцкама баци збир 7 ?*

Да видимо кад можемо добити збир 7 ?

1	6	или	6	1
2	5	или	5	2
3	4	или	4	3

Свега има 6 повољних случајева. А колико има могућних случајева ?

Кад са прве коцке падне 1, може с друге коцке бити :

I	II
1	1 или 2, или 3, или 4, или 5, или 6.

За сваку страну прве коцке има 6 могућих случајева друге коцке. Колико је онда свега могућих случајева?

$m = 6 \,.\, 6 = 36, \qquad p = 6.$

$$V_p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

IV. — *Три пута бацам коцку. Колика је вероватноћа да ћу сва три пута добити страну 5 ?*

Кад први пут бацам, $V_1 = \frac{1}{6}$.

Кад други пут бацам, $V_2 = \frac{1}{6}$.

Кад трећи пут бацам, $V_3 = \frac{1}{6}$.

Какви су ово догађаји? Ту се мора десити *и* један *и* други *и* трећи, због тога ће бити.

$$V_p = V_1 \ V_2 \ V_3 = \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Статистичке таблице

У свима напредним земљама врши се редовно попис становништва и бележе сва рођења и сви смртни случајеви. Из тих таблица се види како се становништво развија. Из таблице коју смо ми узели примера ради, а која важи за једну страну земљу, види се да од 100.000 лица која имају 20 година њих 71.831 доживе 50 годину. Таквим таблицама служе се осигуравајућа друштва. Из њих се вади вероватноћа да неко доживи одређен број година. Како се то ради, показаћемо на примерима.

Вероватноћа доживљавања. — То је број који казује колика је вероватноћа да ће неко доживети неку одређену годину.

Пример I. — Колика је вероватноћа да ће младић од 20 година доживети 70 годину?

Из таблице се види да у 20 години има 100.000 лица, Сва та лица могу доживети 70 годину. Дакле, $m = 100.000$. Колико њих доживе 70 годину? Њих 33701. То су повољни случајеви. Зато је овде $p = 33701$.

$$V_p = \frac{33791}{100000} = 0{,}33701.$$

Вероватност умирања. — То је број који казује колика је вероватноћа да ће неко умрети у некој одређеној години.

Пример II. — Колика је вероватноћа да ће младић од 20 година умрети у 70 години?

Године старости	Број становника тих година	Број умрлих за годину дана
20	100000	919
21	99081	908
22	98173	887
23	97286	861
24	96425	835
25	95590	816
26	94774	804
27	93970	797
28	93173	795
29	92378	800
30	91578	808
31	90770	818
32	89952	831
33	89121	841
34	88280	856
35	87424	873
36	86551	889
37	85662	906
38	84756	928
39	83828	950
40	82878	975
41	81903	1006
42	80897	1035
43	79862	1063
44	78799	1092
45	77707	1117
46	76590	1140
47	75450	1169
48	74281	1204
49	73077	1246
50	71831	1303
51	70528	1362
52	69166	1425
53	67741	1490
54	66251	1556
55	64695	1621

Године старости	Број становника тих година	Број умрлих за годину дана
56	63074	1691
57	61383	1759
58	59624	1832
59	57792	1906
60	55886	1976
61	53910	2038
62	51878	2097
63	49781	2149
64	47632	2197
65	45435	2246
66	43189	2302
67	40887	2355
68	38532	2399
69	36133	2432
70	33701	2452
71	31249	2455
72	28794	2436
73	26358	2406
74	23952	2360
75	21592	2290
76	19292	2210
77	17083	2103
78	14980	1982
79	12998	1848
80	11150	1730
81	9420	1599
82	7821	1443
83	6378	1264
84	5114	1080
85	4034	896
86	3138	715
87	2423	566
88	1857	442

Па то је неповољна вероватноћа горњег случаја.

$$V_q = 1 - V_p = 1 - 0{,}33701 = 0{,}66299.$$

Види се да је већа вероватноћа да ће умрети у 70 години, него да ће доживети ту годину.

Пример III. — Колика је вероватноћа да ће старац од 84 године доживети идућу годину.

Да израчунамо вероватноћу умирања. Она је:

$$V_q = \frac{1080}{5114} = 0{,}21119.$$

Вероватноћа да ће доживети идућу годину је:

$$V_p = 1 - 0{,}21119 = 0{,}78881.$$

ВЕЖБАЊА

1. — Кад бацимо метални новац на земљу, колика је вероватноћа да дође круна горе?

2. — Два пута ће бити бачен новац. Колика је вероватноћа да ће лице бити горе?

3. — При бацању коцке колика је вероватноћт да у 2 бацања добијемо једанпут 4?

4. — Исто. Колика је вероватноћа да у два бацања добијемо оба пута по 5?

5. — Исто. Колика је вероватноћа да у два бацања добијемо збир 9?

6. — Исто. Колика је вероватноћа да у три бацања добијемо збир 20?

7. — Бацамо три коцке. Сваку једанпут. Колика је вероватноћа да добијемо збир 12?

8. — Бацамо 4 коцке. Сваку једанпут. Колика је вероватноћа да добијемо збир 22?

9. — Бацамо једну коцку. Колика је вероватноћа да ћемо 5 пута узастопце добити страну 4?

10. — У кесици су 3 беле, 2 црвене и 4 плаве лоптице. Колика је вероватноћа да једним потезом извучемо две беле и једну црвену?

11. — Исто. Колика је вероватноћа да извучемо само три беле одједанпут?

12. — Два пута бацамо коцку. Колика је вероватноћа да оба пута изађе 1?

13. — Две коцке. Бацамо сваку једанпут. Колика је вероватноћа да ћемо оба пута добити 1? (Је ли иста вероватноћа као и у вежбању 12? Зашто?)

14. — Три пута бацамо коцку. Колика је вероватноћа да никако не изађе 2?

15. — Два пута бацамо коцку. Да ли је већа вероватноћа да оба пута добијемо по 6, или да једанпут добијемо 2, а други пут 3?

16. — У кесици су 5 црвених лоптица, 6 жутих и 7 белих. Колика је вероватноћа да једним потезом извучемо 1 црвену, 1 жуту и 1 белу?

17. — На једној лутрији има 120 000 бројева, а 2 згодитка. Колика је вероватноћа добитака кад играч има једну срећку? А кад има 5?

18. — Исто за 100 срећака.

19. — Ако играч из вежбања 17 узме 3 пута више срећака, хоће ли и вероватноћа добитака бити 3 пута већа ?

20. — У кесици су 4 црвене лоптице и 7 зелених. Колика је вероватноћа да се првим потезом извуку 2 црвене и 2 зелене заједно ?

21. — Колика је вероватноћа да из кесице из претходног вежбања три пута вучемо по једну лоптицу и да никако не изађе црвена ?

22. — Колика је вероватноћа, да ћемо, бацајући коцку, бацити од три пута 1, или 2, или 3 ?

23. — Од 20 000 срећака са 400 згодитака једне лутрије играч има једну срећку. Да ли је већа вероватноћа да ће добити, или да неће ?

24. — Бацамо две коцке. Колика је вероватноћа да ни на једној неће изаћи 5 ?

25. — Бацамо три коцке. Колика је вероватноћа да ће на двема изаћи по 4, а на једној 1 ?

26. — Бацамо две коцке. Сваку 2 пута. Колика је вероватноћа да ће на једној изаћи 3 и 3, а на другој 2 и 2 ?

27. — У кесици су три беле лоптице и две жуте. Вадимо их једну по једну. Колика је вероватноћа да ће најпре изаћи све беле ? Колика је вероватноћа да ће најпре изаћи све жуте ?

28. — У кесици су 3 беле, 3 плаве и 3 црвене лоптице. Извлачимо их све по три.

Колика је вероватноћа да ће излазити увек 1 бела, 1 плава и 1 црвена ?

29. — У кесици су 4 беле, 8 зелених и 12 плавих. Извлачимо све по 3. Колика је вероватноћа да ће најпре излазити 1 бела, 1 зелена и 1 плава (4 пута), па 1 зелена и 2 плаве (4 пута) ?

30. — Бацамо три коцке. Сваку 2 пута. Колика је вероватноћа да никад не изађе збир 10 ? (Бацимо одједанпут све три, па по други пут све три).

31. — Колика је вероватноћа да ће човек од 50 година доживети 60 ?

32. — Колика је вероватноћа да ће човек од 40 година доживети 50 ?

33. — Колика је вероватноћа да ће старац од 70 година доживети идућу годину ?

34. — Колика је вероватноћа да ће старац од 80 година доживети 86 ?

35. — Колика је вероватноћа да ће младић од 20 година доживети 86 ?

36. — Колика је вероватноћа да ће младић од 20 година доживети идућу годину ?

37. — Колика је вероватноћа да ће старац од 78 година доживети идућу годину ?

Јесу ли те две вероватноће једнаке ?

38. — Колика је вероватноћа да ће човек од 33 године живети још 50 ?

39. — Колика је вероватноћа да ће човек од 60 година живети још 10 ?

40. — Да ли се помоћу рачуна вероватноће може утврдити на таблици са стране 137 ко ће пре умрети: старац од 60 година, или младић од 21 године ? А мора ли то тако да буде? Зашто ?

41. — Колика је вероватноћа да ће идуће године умрети човек од 40 година ?

САДРЖАЈ: