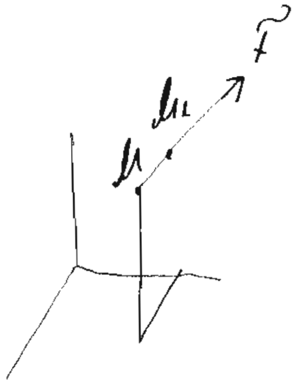
МАТЕМАТИЧКЕ ФИЗИКЕ

Теорија потенцијала



1). Ако су X, Y, Z компоненте силе $\vec{F}$, која дејствује на тачку M, чије су коорд. xyz, за померај MM_1 рад је силе F елементарни dT:

$$dT = Xdx + Ydy + Zdz \quad \ldots \quad 1$$

Ако постоји извесна функција V таква да су:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad \ldots \quad 2$$

из 1 и 2 имамо:

$$dT = \frac{dV}{dx}dx + \ldots = dV$$

$V(xyz)$ се зове функција силе $\vec{F}$, у теорији атракције силе зове се потенцијалом.

2). Површине:

$$V(xyz) = C$$

где је C константа зове се нивоска површина.

3). Сила $\vec{F}$ у тачки M је нормална на нивоску површину.

Компоненте градијента $\vec{F}$ су:

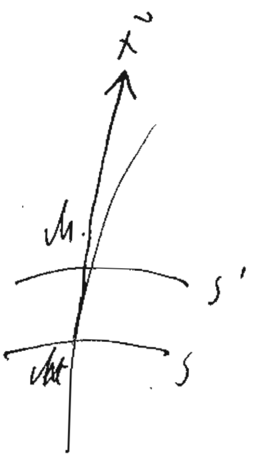
$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$ а ово у исто време компоненте нормале на површину V.

Линије сила су нормалне трајекторије на нивоске површине. Према овоме је F нормално на површине силе.

Unterschied у погледу ~~линија~~ сила F.

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \dots$$

$$\alpha F = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta F = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma F = \frac{\partial V}{\partial z}.$$



3). Ако су S и S_1 нивоске површине, сила F у M је количник dV и dM M'

Ако су координате M xyz, а M' $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ и $MM' = dn$

$$dx = \alpha\, dn, \quad dy = \beta\, dn, \quad dz = \gamma\, dn$$

Вредност прираштаја потенцијала је, кад се пређе из M у M'

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \text{ или}$$

$$dV = F\, dn(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$F = \frac{dV}{dn}$$

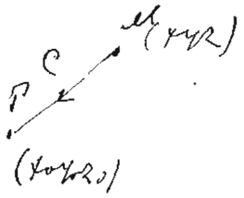
4). Услов за равнотежу тачке M је:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

а ово се поклапа са условом да је у тачки $M(xyz)$ функција V max или min. За случај максим. имамо стабилну или сталну равнотежу.

./.

Потенцијал централне силе. Ако тачка P привлачи тачку M силом F представљеном дужином MC. Ако је одстојање MP означено са r и функција F = φ(r), косинуси ће бити:



$$\frac{x_0-x}{r}, \quad \frac{y_0-y}{r}, \quad \frac{z_0-z}{r}$$

рад dT је:

$$dT = \frac{F}{r}\left[(x_0-x)dx+(y_0-y)dy+(z_0-z)dz\right]$$

Како је:

$$r^2 = \sum_u (x_0-x)^2$$

$$-r\,dr = \sum (x_0-x)dx$$

$$dT = -F\,dr = -\varphi(r)\,dr$$

Сад је лако наћи V видели смо да је

$$dV = -f\varphi(r)\,dr, \quad V = -\int\varphi(r)\,dr = -F(r).$$

Сила централна $F = \varphi(r)$ има за потенцијал израз који је одређен примитивном функцијом од $-\varphi(r)$.

2) Ако имамо више центара $P_1 P_2 \ldots P_n$ које привлаче тачку, а имамо њих одстојања од M $r_1 r_2 \ldots r_n$ потенцијал V

$$V = V_1 + V_2 + \ldots V_n$$

Примери.

Нека је $V = -F(r)$ потенцијал силе према одстојању $\varphi(r_1) = m_1 r_1$

$$V_1 = -\frac{m_1 r_1^2}{2}$$

Ако имамо n центара $P_1 P_2 \ldots P_n$ онда је

$$V = -\frac{1}{2}\sum_1^n m_p r_p^2$$

Neka koeficijenti $m_1, m_2 \ldots m_n$ odgovaraju masama u točkama $T_1, T_2 \ldots T_n$, a masa je ... 1, onda je za ostale ako su $\xi\ \eta\ \zeta$ ... koord. težišta G masa $m_1, m_2 \ldots m_n$:

$$\xi \sum m = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n$$

$$\eta \sum m = m_1 y_1 + \ldots$$

$$\zeta \sum m = m_1 z_1 + \ldots$$

Ako je G u ishodištu koordinatnog sistema onda je

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots m_n x_n = 0$$

$$m_1 y_1 + \ldots = 0$$

$$m_1 z_1 + \ldots = 0.$$

Odaljenosti T_1M, T_2M ... označimo sa r_1, r_2

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_2^2 = x_2^2 + \ldots$$

$$\ldots$$

$$r_n^2 = x_n^2 + \ldots$$

onda

$$V = -\tfrac{1}{2} \sum m_p (x_p^2 + y_p^2 + z_p^2) - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \sum m \ldots \text{(I)}$$

ili

$$V = C - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \sum m \ldots \text{(II)}$$

Ako je V stalno, plohe konstantnog ... onda su kugline plohe određene jednadžbom:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Q_1$$

koje opisuju se kugle, a ... operacije ...

Komponente sile F koje ... su

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = -x \sum m, \quad Y = -y \sum m, \quad Z = -z \sum m$$

... komponente ... kad je M u ishodištu, kad je $x = y = z = 0$. ... V ... u G a ... u ... točki ...

2). Atrakcija [illegible] [illegible] sa distancom

$F = \frac{m}{r}$

Potencijal je

$$V = -m\int\frac{dr}{r} = -m\log r \quad \ldots \quad 1.$$

Obadva V zadovoljava jednačinu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad 2$$

Mi imamo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{m}{r^2}x \quad \text{jer je} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\left(\frac{m}{r^2} - x^2\frac{2m}{r^4}\right) \quad \ldots \quad 3.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\left(\frac{m}{r^2} - x^2\frac{2m}{r^4}\right)$$

Kad u jednačinu od 3 [illegible] [illegible]
jednačinu 2. Obe [illegible] [illegible] ako je $V = V_1 + V_2 + \ldots V_n$

Jednačina [illegible]. [illegible] [illegible] tačke M
$= x + iy$ a tačke $T_1, T_2 \ldots T_n$ $C_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 + ib_2$ [illegible]
[illegible] $T_1M, T_2M \ldots r_1, r_2, \ldots r_n$ i w_1, w_2 [illegible] [illegible]
x. Onda je:

$$x - a_1 = r_1 \cos w_1$$
$$y - b_1 = r_1 \sin w_1$$

$$z - c_1 = r_1 e^{iw_1}$$
$$z - c_2 = r_2 e^{iw_2}$$

u. t. d.

$$\log(z - c_1) = l r_1 + i w_1$$
$$\log(z - c_2) = l r_2 + i w_2$$

Ako označimo sa $f(z) = -\sum m_p \log(z - \zeta_p)$ onda je:

$$f(z) = -\sum m_p \log r_p - i \sum m_p \omega_p \quad \ldots \quad 1.$$

Potencijal je:

$$V = -\sum m_p \log r_p$$

Ako sa W označimo ugao $-\sum m_p \omega_p$ onda je

$$f(z) = V + iW \quad \ldots \quad 2.$$

[illegible] jednačina:

$$W = C.$$

Da je ovo ortogonalna trajektorija [illegible] jednačina:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad 3$$

Ova jednačina [illegible] iz 2 [illegible]

$$f'_x(z) = \frac{\partial V}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{jer } z = x + iy$$

$$f'_y(z) = \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} i.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial x} = -\left[i\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \ldots \quad 4.$$

[illegible] ~~[illegible]~~ ovih jednačina [illegible]

[illegible] 3.

Iz 4 se [illegible]:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$ koju jednačinu zadovoljava

$$V = -\sum m_p \log r_p.$$

Ravnoteža je određena ovim jednačinama:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

iz 4 je onda

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$ [illegible] za položaj

[illegible] iz jednačine $f'(z) = 0$, a ovo je [illegible]

$$f(z) = -\sum m_p \log(z - c_p)$$

$$f'(z) = -\sum \frac{m}{z - c_p}$$

[illegible] z [illegible] iz obe jednačine, a one je [illegible]

[illegible] ravnoteže za [illegible] M.

Ravnoteža [illegible]

Ako je [illegible] ravnoteže u [illegible] koord. [illegible], [illegible] V

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots V_k + \dots V_n + \dots$$

V_k je [illegible] k^{og} stepena u x i y

Ako je [illegible] [illegible] [illegible] od V [illegible] $V_1 = 0$ a

je [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

W će [illegible] tako u [illegible]:

$$W = W_0 + W_1 + \dots W_k + \dots + W_n + \dots$$

$$V + iW = \sum (V_k + iW_k) = f(z) \quad \dots \quad (1)$$

Ako [illegible] $f(z)$ [illegible] [illegible]

$$f(z) = \sum B_k e^{i\theta_k}(x + iy)^k \quad \text{[illegible]}$$

$$f(z) = \sum B_k r^k e^{i(\theta_k + k\omega)} \quad \dots \quad (2)$$

iz (1) и (2) imamo

$$V_k = B_k r^k \cos(\theta_k + k\omega)$$

[illegible] V_K [illegible]

[illegible] V_K [illegible]

[illegible] cosinus [illegible] $+1$ u -1, [illegible]

V [illegible] maximum [illegible]

$(n-1)$ [illegible]

3). [illegible]

[illegible]

$$F = \frac{m}{r^2} \quad \text{[illegible]}$$

$$V = -m\int \frac{dr}{r^2} \quad \text{[illegible]}$$

$$V = \frac{m}{r} \quad \ldots \quad (1.$$

[illegible] $V = \frac{m}{r} = \text{Const.}$ [illegible]

[illegible]

$V = m/r$ [illegible]:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \quad (I$$

[illegible]

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{m}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{m}{r^3}(x-a) \quad \ldots \quad (2.$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

[illegible] (2 [illegible]:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{m}{r^3} + (x-a)^2\frac{3m}{r^5} \quad \ldots \quad (3.$$

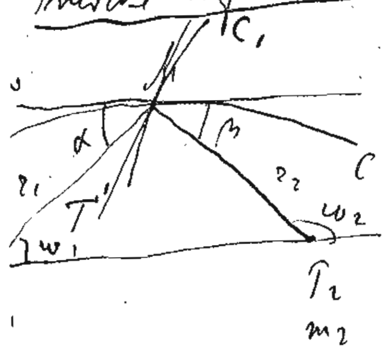
[illegible] y, z [illegible]

[illegible] (3 [illegible] I

[illegible]

$$V = v_1 + v_2 + \ldots v_n = \sum \frac{m_p}{r_p}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]: Узмимо две тачке T_1, T_2



[illegible] [illegible] [illegible] тачка M је дата једначином

$$\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}=Const. \quad \ldots \quad (1)$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

2. [illegible] [illegible] [illegible] C', [illegible] [illegible] једначину [illegible] тангента MT и MT', и узмимо [illegible] [illegible] [illegible] MT и MT' [illegible] V_1 и V_2 [illegible] имамо:

$$V_1\cos\alpha=\frac{dr_1}{dt} \qquad V_1\cos\beta=\frac{dr_2}{dt}$$

$$V_2\cos\alpha=r_1\frac{dw_1}{dt} \qquad V_2\cos\beta=r_2\frac{dw_2}{dt}.$$

одакле је

$$\frac{dr_1}{dr_2}=\frac{r_1\,dw_1}{r_2\,dw_2} \quad \ldots \quad (2)$$

из (1) [illegible] [illegible] [illegible] са (2)

[illegible]

$$m_1\frac{dw_1}{r_1}+m_2\frac{dw_2}{r_2}=0 \quad \ldots \quad (3)$$

Из троугла T_1MT_2 имамо

$$r_1\sin w_1=r_2\sin w_2 \quad \ldots \quad (4)$$

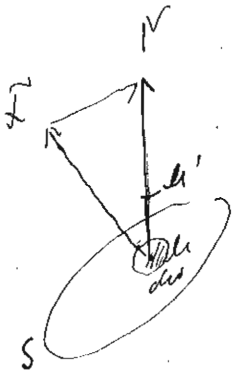
Из 3 и 4 имамо

$$m_1\,dw_1\sin w_1+m_2\,dw_2\sin w_2=0 \text{ или}$$

$$m_1\cos w_1+m_2\cos w_2=Const. \quad \ldots \quad (\bar{I})$$

Једначина I даје [illegible] [illegible]. (Пресек [illegible] I и 1 даје [illegible] [illegible]).

Ефекат силе



1). Ако је s површина у простору, dw елемент њен, M нормала тог елемента, MN нормала, MF сила, ефекат се силе зове:

$$MN \cdot dw \quad \ldots \quad 1$$

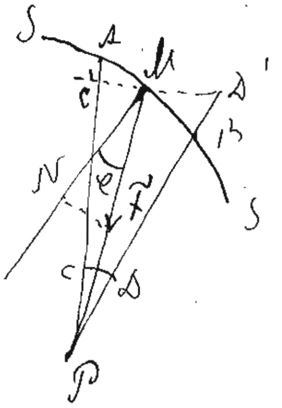
Ако је V потенцијал у M, V+dV у M' онда је рад силе F дат изразом:

$$MM' \cdot MN \text{ и } dV =$$

$$dV = MM' \cdot MN = dn \cdot MN \quad \ldots \quad 2$$

Из 1 и 2 излази да је ефекат силе на елемент изразом

$$\frac{dV}{dn} \cdot dw \quad \ldots \quad I$$



2) Ефекат силе за случај кад имамо једну тачку P која врши привлачење. Ако је привлачна сила MF, онда је ефекат силе dF по обрасцу I

$$dF = MN \cdot dw$$

Ако је сила Њутнова $F = \frac{m}{r^2}$ $(MP = r)$,

$$MN = \frac{m}{r^2}\cos\varphi, \quad dF = \frac{m}{r^2}\cos\varphi \, dw \quad \ldots \quad 3$$

Пројекција елемента AB = dw на раван C'D' управну на MP је сила:

$$dw' = dw\cos\varphi \qquad dw' = C'D'$$

Кад се ово замени у 3 имамо:

$$dF = \frac{m}{r^2} dw' \quad \ldots \quad 4$$

dw' је елемент кугле полупречника r; ако са dσ означим елемент површине кугле полупречника 1 (CD) онда је познато да се

$$dw' : d\sigma = 4r^2\pi : 4\pi$$

$$\frac{dw'}{r^2} = d\sigma \quad \ldots \quad 5$$

Из 4 и 5 имамо

$$dF = m \, d\sigma$$

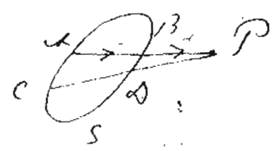
3). Strumień siły z dowolnej powierzchni S

$$\int dX = \int m\, d\sigma$$

$$X = m\,\sigma \quad \ldots \quad (I).$$

Jeśli powierzchnia S zamknięta, masa P wewnątrz, a kąt [illegible] wewnątrz S i − [illegible] S, wtedy strumień siły z dowolnej powierzchni S w [illegible] I

$$X = -4\pi m$$



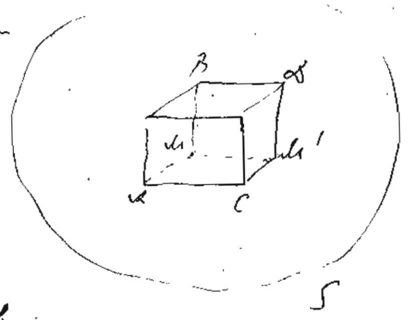
Jeśli masa P poza S, wtedy strumień siły [illegible] elementu AC i BD jest równy a przeciwnego znaku, więc jest zero.

Jeśli siła [illegible] $X = m\, l\, [illegible]$.

Więc strumień siły z [illegible]:

$X = -2\pi m$ [illegible].

4). Poissona równanie. Jeśli weźmiemy kostkę o bokach dx, dy, dz wypełnioną masą o gęstości ϱ, masa jej [illegible]: $\varrho\, dx\, dy\, dz$, a strumień siły z dowolnej powierzchni S



$$-4\pi \varrho\, dx\, dy\, dz \quad \ldots \quad (1).$$

Ten strumień siły [illegible] w [illegible] $X\, dw$ [illegible] [illegible].

Jeśli X komponenta [illegible] z M, $X + \frac{\partial X}{\partial x} dx$ jest [illegible] komponenta z M' a strumień jej z dowolnej powierzchni AB i CD

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz.$$

Na [illegible] [illegible] strumień siły z ostatnich komponentów. Więc strumień:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz \quad \ldots \quad (2)$$

z (1) i (2) mamy

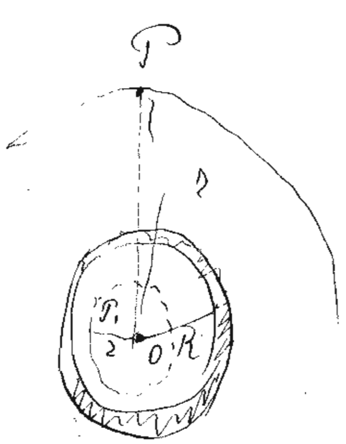
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \varrho \quad \ldots \quad (I)$$

I [illegible] Poissona równanie.

Ако у којој нема масе $\rho = 0$ имамо Лапласову једначину

$$\Delta V = 0.$$

Дефиниција. Атракција је сила која делује на сваку [illegible] као је сва маса концентрисана у центру сфере.



Ако је R полупречник сфере, ε дебљина, ρ густина масе је

$$M = 4\pi R^2 \varepsilon \rho.$$

Ставимо $OP = r$ и означимо са X привлачну силу масе M у тачки P, је

$$= 4\pi M$$

$$= 4\pi r^2 X$$

Ако се ове једначине изједначе:

$$X = \frac{M}{r^2}$$

Кад се зна X налази се потенцијал V из једначине:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r^2}, \quad V = \frac{M}{r} + C$$

Ако је тачка P у P_1 онда је привлачна сила нула:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \qquad V = Const$$

2). Дејство сфере на P. Ако се означи сфера и [illegible] сила налази се да је:

$$X = \frac{M}{r^2}$$

3). Ако је тачка у P_1 има се [illegible]. Ваља означити [illegible] полупречника r [illegible] не дејствује [illegible] привлачна сила у P' је само од дејства [illegible] полупречника r и онда је

$$F = \frac{M_1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{r^2}\frac{R^3}{R^3}\delta = \frac{Mr}{R^3}$$

Потенцијал у P' се добија из израза:

$$\frac{dV}{dr} = -F = -\frac{Mr}{R^3}$$

$$V = C - \frac{Mr^2}{2R^3}$$

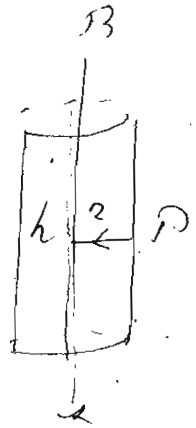
Potencyjał w P jest

$$V = \frac{M}{r}$$

gdzie stała dla potencyjału jednaka za $r = R$ wynosi jest

$C = \frac{3M}{2R}$, stąd jest potencyjał w P':

$$V = \frac{3M}{2R} - \frac{Mr^2}{2R^3} \quad \ldots \quad (II.$$



3/. Zajętko tylko dookoła ... AB na tuszy P. w P jest siła F. skupiona ... gęsty ...:

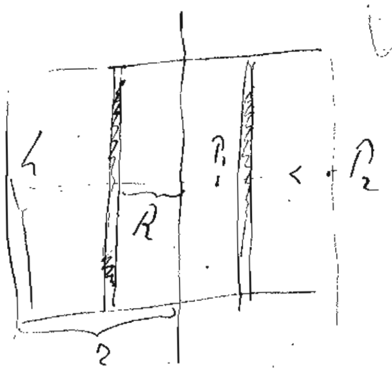
$$- F \cdot 2r\pi h$$

$$= 4\pi M$$

stąd jest $F = \frac{2M}{rh}$, $M = h\delta$ (δ gęstość).

$F = \frac{2\delta}{r}$ potencyjał jest

$$\frac{dV}{dr} = -F = -\frac{2\delta}{r} \qquad \underline{V = -2\delta \log r}$$



4/. Zajętko ... na tuszy P_1 i P_2. Na ... P_1 ... na tuszy P_2 jest skupione ...:

$$-2\pi r h F = -4\pi M$$

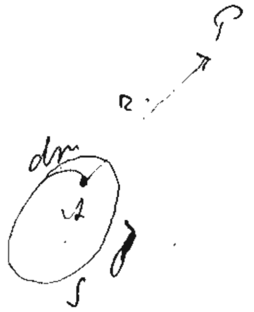
$$F = \frac{2M}{hr} = \frac{2 \cdot [2R\pi \cdot h \varepsilon \delta]}{hr} \quad \varepsilon \text{ ...}, \; \delta \text{ gęstość}$$

$$F = \frac{4R\pi\varepsilon\delta}{r}, \text{ potencyjał jest}$$

$$\underline{V = -4R\pi\varepsilon\delta \log r}.$$

— Други начин —

Израчунавање потенцијала помоћу одређеног интеграла



1). Ако је λ елемент масе која врши привлачење и где је $dm = dx\,dy\,dz \cdot \rho$ (ρ густина). Потенцијал је дејство у P дат изразом а све узето на ограниченој површини S.

$$V = \int_3 \frac{dm}{r}$$

Ако се координате елемента λ означе са x, y, z, а тачке P са x y z, онда је потенцијал дат изразом ρ.

$$V = \int \frac{\rho\, d\tau'}{r} \qquad r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

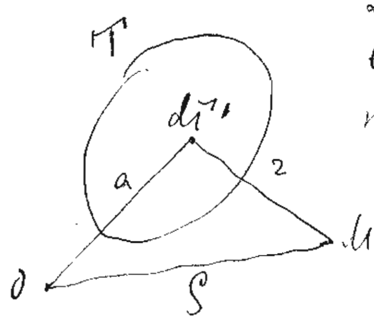
Компоненте атракције су

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{\rho\, d\tau'}{r^3}(x'-x)$$
$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = \quad ''$$
$$Z = \frac{\partial V}{\partial z} = \quad ''$$

Ако уместо запремине посматрамо површине и линије маса које привлаче, онда су потенцијали

$$V = \int_2 \frac{\rho}{r}\, d\omega' \quad , \quad d\omega' \text{ елемент површине}$$
$$V = \int_1 \frac{\rho}{r}\, dl' \quad , \quad dl \text{ '' линије.}$$

2). Особине потенцијала у ∞. Нека је T запремина која привлачи, M тачка која се привлачи, O почетак коорд. система



ρ' густина

$$V = \int_3 \frac{\rho'\, d\tau'}{r} \qquad \rho - a < r < \rho + a$$
$$r = \rho + \theta a \quad \theta < 1$$

$$\rho V = \int_3 \frac{\rho'\, d\tau' \rho}{\rho + \theta a} = \int \rho' d\tau' - \int \frac{\rho' \theta a\, d\tau'}{\rho + \theta a}$$

$$\lim \left(\rho V - \int \rho' d\tau'\right) = 0 \qquad \underline{\lim \rho V = M}$$

за $\rho = \infty$

На исти ће начин [illegible] једначина ... за $\rho = \infty$:

$$V=\int \mu' \log\frac{r_0}{r}\, d\omega'$$

Ако се смени r са $\rho+\theta a$.

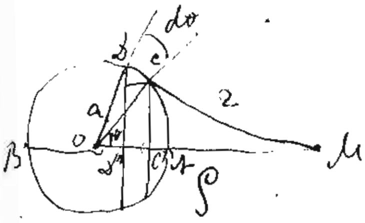
$$V=\int \mu' d\omega' \log\left(\frac{r_0}{\rho+\theta a}\right)=\int \mu' d\omega'\left[\log r_0-\log\rho-\log\left(1+\frac{\theta a}{\rho}\right)\right]$$

$\log\left(1+\frac{\theta a}{\rho}\right) = 0$ за $\rho=\infty$

$$\lim (V-V_0)=M\log r_0 \qquad \int\mu' d\omega = M \text{ (маса)}$$

$$V_0=M\log\frac{r_0}{\rho}$$

3). <u>Потенцијал</u> Њутнов сфере хомогене ...



Потенцијал у M је

$$V=\int\frac{\mu' d\omega'}{r}$$

μ' маса јединице запремине.

$$d\omega'=2a\pi C''D''=2\pi a^2\sin\theta\, d\theta$$

$$V=\mu'\int_0^\pi\frac{2\pi a^2\sin\theta\, d\theta}{r}$$

$$r^2=a^2+\rho^2-2a\rho\cos\theta$$

$$r\,dr=a\rho\sin\theta\, d\theta$$

$$V=\mu'\int_{\rho-a}^{\rho+a}\frac{2\pi a^2}{a\rho}dr=\frac{2\pi a}{\rho}\Big[r\Big]_{\rho-a}^{\rho+a}=\frac{4\pi a^2\mu'}{\rho}=\frac{M}{\rho}$$ Кад је тачка ван сфере.

$$M=4\pi a^2\mu' \text{ маса}$$

Ако је тачка M(маса) у сфери, онда је потенцијал:

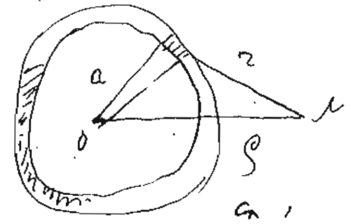
$$V=\frac{2\pi a}{\rho}\int_{a-\rho}^{a+\rho}dr=\frac{4\pi a^2}{a}=\frac{M}{a} \text{ (константно)}$$

4). Potencijal [illegible]. Ako je elementarna [illegible] $d\omega'$ onda je element [illegible] a gustina je ε [illegible] μ'

$$\varepsilon \mu' d\omega'$$

Potencijal je ovog elementa:

$$V=\int \frac{\mu' \varepsilon\, d\omega'}{r} = \varepsilon\mu'\int\frac{d\omega'}{\rho} = \frac{\mu'\varepsilon\, 4\pi a^2}{\rho}$$

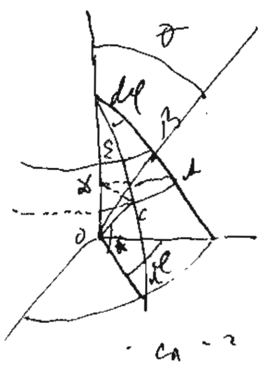


$$V=\frac{M}{\rho}$$ M (je masa [illegible])

Ako je M (na ca) [illegible], potencijal je

$$V=\frac{M}{a}.$$

Ako se [illegible] potencijal [illegible], onda je [illegible]



Zapremina:

Ako je $OC = r$ $\quad AB = r\,d\theta$.

$OB = r$ $\quad AC = r_1 d\varphi = r\sin\theta\, d\varphi$.

$AD = dr_1$

Površina je ABCD

$r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, zapremina je

$r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, masa jedne zapremine je μ' onda je potencijal

je M.

$$V=\mu'\int\frac{a^2 da \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{r}$$ t.d. ako se r [illegible] a [illegible]

ako se smeni $\sin\theta\, d\theta$ sa $\frac{r\,dr}{a\rho}$

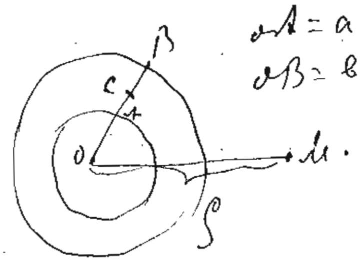
$$V=\iiint a^2 da \frac{r\,dr}{r\, a\rho} d\varphi = \int_0^{a}\int_0^{\pi}\int_{\rho-a}^{\rho+a} \frac{a\,da\,dr\,d\varphi}{\rho}$$

$$V=\frac{a^2}{2\rho}\cdot\pi \qquad V=\mu'\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{r} = \frac{2\pi a^3}{3\rho}\int_{\rho-a}^{\rho+a} dr$$

$$V=\mu'\frac{4\pi a^3}{3}\frac{a}{a\,\rho} = \frac{M}{\rho}$$

5). Потенцијал масе која испуњава простор између две концентричне кугле:

На тачку M ј (која је споља) је вредност одређена:



$OA = a$
$OB = b$

$$V = \mu' \int_a^b a^2 da \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho - a}^{\rho + a} \frac{dr}{a\rho} = \frac{\mu'}{3}(b^3 - a^3) . 2\pi . \frac{2a}{a\rho} = \frac{4\pi}{3}\frac{(b^3 - a^3)\mu'}{\rho}$$

$$V = \frac{M}{\rho} \quad M \text{ (маса целе)}.$$

Ако је тачка M унутра у C.

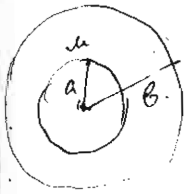
Потенцијал је у C.

$$\mu' 4\pi . \frac{c^2 . dc}{c} = 4\pi c dc \mu'$$

значи: $V = 4\pi\mu \int_a^b c dc = 2\pi\mu (b^2 - a^2)$. потенцијал у центру када је тачка M, која је на средини у M центру.

6). Потенцијал једне масе на тачку M унутра

Ако се кроз M повуче сфера концентрична, потенцијал је од масе сфере у M



$$V_1 = \frac{4\pi\mu'}{3}\frac{a^3}{a} = \frac{M}{a}$$

Ако се упоредимо ..., онда следи да потенцијал сфере ... M. Када се ово уради потенцијал је значи и једнак

$$V_2 = 2\pi\mu_1 (b^2 - a^2)$$

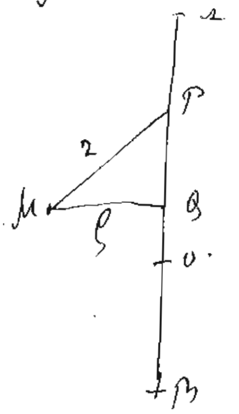
Цео је потенцијал:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi\mu' a^2}{3} + \frac{6\pi\mu_1}{3}(b^2 - a^2) = 2\pi\mu_1\left[\frac{2a^2}{3} + b^2 - a^2\right] = 2\pi\mu_1\left[b^2 - \frac{a^2}{3}\right]$$

Све се ово резултати могу добити и путем ... методом, на који ћемо доћи после.

Потражимо још један општи ... одређених интеграла:

7). Potencijal homogene prave AB na tačku M.



Ako je početak koord. os. u O; koord. tačke M xyz, $x'y'z'$ koord. tačke P, element prave $ds' = dz'$,

$$r = \sqrt{x^2+y^2+(z'-z)^2}$$

$MQ = \rho$, $OA = a$, $OB = -b$.

Potencijal prave u M:

$$V = \int_{(B)}^{(A)} \frac{\mu' ds'}{r} = \int_B^A \frac{\mu' dz'}{\sqrt{x^2+y^2+(z'-z)^2}} = \mu' \log\left[(z'-z)+\sqrt{x^2+y^2+\ldots}\right.$$

$$V = \mu' \log\left[QP+MP\right]_{OB}^{OA} = \mu' \log \frac{QA+MA}{QB+MB}$$

$$V = \mu' \log \frac{(QA+MA)(MB+BQ)}{MB^2-BQ^2} = \mu' \log \frac{(QA+MA)(MB+BQ)}{MQ^2}$$

$$V = \mu'\left[\log(QA+MA)+\log(MB+BQ)-2\log MQ\right]$$

$$QA+MA = 2OA+(MA-OA)+(QA-OA)$$

$MA-OA$, $QA-OA$ teže nuli kad se tačka A udaljuje u ∞.

$$V = \mu'\left[\log 2a+\log 2b-2\log\rho\right]$$

$$V = \mu' \log\frac{4ab}{\rho^2} = 2\mu'\left[\log 2\sqrt{a}+\log 2\sqrt{b}-\log\rho\right]$$

$$V = 2\mu' \log\frac{2\sqrt{ab}}{\rho} = \frac{2(a+b)\mu'}{a+b}\log\frac{2\sqrt{ab}}{\rho}$$

I) $$V = \frac{2M}{a+b}\log\frac{r_0}{\rho} \qquad r_0 = 2\sqrt{ab}$$

Atrakcija prave u M:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{2M}{a+b}\frac{1}{\rho}$$

— III. глава —

Трансформација троструких и запреминских интеграла:

Запремина; $V = \iiint dx\,dy\,dz\, f(xyz) = \int d\tau\, f(xyz) \ldots$ — I

Ако су нове коорд. p, q, r и однос ј између старих и нових:

$$x = \varphi(pqr), \quad y = \psi(pqr) \quad z = \chi(pqr) \ldots 2$$

Ако се мењају p, q, r сваки од одговарајућег граничног ... у своме обиму ...

Из 2 имамо:

$$dx = a\,dp + a'dq + a''dr$$
$$dy = b\,dp + b'dq + b''dr$$
$$dz = c\,dp + c'dq + c''dr$$

$$a = \frac{\partial x}{\partial p} \quad b = \frac{\partial y}{\partial p} \quad c = \frac{\partial z}{\partial p}$$

$$a' = \frac{\partial x}{\partial q} \quad \text{—} \quad \text{—}$$

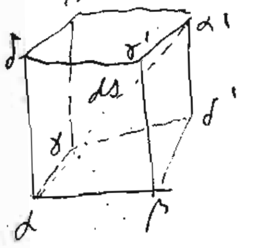
$$a'' = \frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{—} \quad c'' = \frac{\partial z}{\partial r}$$

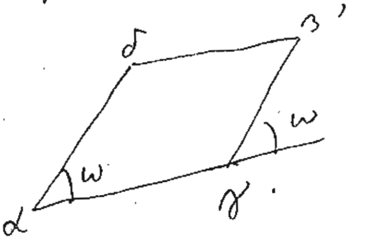
Елемент лука је:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e\,dp^2 + e'dq^2 + e''dr^2 + 2g\,dq\,dr + 2g'dr\,dp + 2g''dp\,dq$$

$$e = a^2 + b^2 + c^2 \qquad g = a'a'' + b'b'' + c'c''$$
$$e' = a'^2 + b'^2 + c'^2 \qquad g' = a''a + b''b + c''c$$
$$e'' = a''^2 + b''^2 + c''^2 \qquad g'' = aa' + bb' + cc'$$

Ако су координате тачке α pqr, а α' $p+dp$, $q+dq$, $r+dr$





[illegible] cy gęstości ubogie elementarnych [illegible] przez ds :

$$(\alpha\beta) = \sqrt{e}\,dp, \quad (\alpha\gamma) = \sqrt{e'}\,dq, \quad (\alpha\delta) = \sqrt{e''}\,dr$$

Jeżeli cy dx, dy, dz koordynaty punktu α' [illegible] koorp. systemu [illegible] α, to [illegible]

$$dx = ds\cos(ds\,x), \quad dy = ds\cos(ds\,y), \quad dz = ds\cos(ds\,z)$$

Jeżeli [illegible] dla punktu α' [illegible] koordynatami dx', dy', dz', [illegible] wedle wzoru:

$$dx\,d'x + dy\,d'y + dz\,d'z = ds\,d's\cos(ds\,d's) \quad . \, . \quad 3$$

Jeżeli cy [illegible] α, w, w', w'' [illegible] 3 [illegible]:

$$g = a'a'' + b'b'' + c'c'' = \frac{\partial x}{dq}\frac{dx}{dr} + \frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr} + \frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr}.$$

$$g = \frac{ds}{dq}\cdot\frac{d's}{dr}\cos(ds\,d's) = (\alpha\gamma)(\alpha\delta)\cos(\alpha\gamma\,\alpha\delta) = \sqrt{e'e''}\cos w$$

$$g' = \sqrt{e''e}\cos w', \quad g'' = \sqrt{ee'}\cos w''$$

[illegible] cy $a\,b\,c$ [illegible] koordynaty [illegible]:

$$d\tau = abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

więc

$$d\tau = \sqrt{ee'e''-g^2e-g'^2e'-g''^2e''+2gg'g''}\,dp\,dq\,dr$$

[illegible] systemy p, q, r [illegible]

I) $\underline{d\tau = \sqrt{ee'e''}\,dp\,dq\,dr}$

Jeżeli [illegible] [illegible] [illegible] koordynat

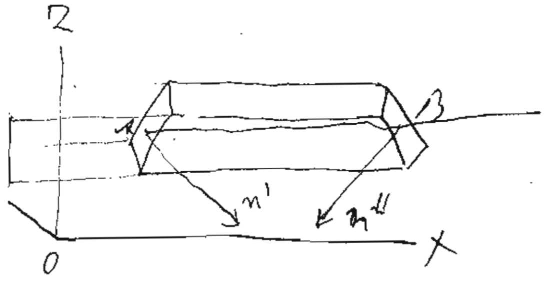
$$x = \varphi(pq) \quad y = \psi(pq)$$

II) $\underline{P = \iint dx\,dy\,f(xy) = \iint f(pq)\,dp\,dq\sqrt{ee'}}$

где су:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2, \quad e' = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$$

— Гаусова формула —



Ако је дат интеграл:

$$J = \iiint \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz \quad \ldots \quad 1$$

запремински, онда се по Гаусовој формули претвара у површински облик

$$J = -\iint X \cos(nx)\, d\sigma \quad \ldots \quad 2.$$

Из 1 имамо кад се интеграли по x:

$$J = \iiint \frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \left(X'' - X'\right) \quad \ldots \quad 3$$

X'' и X' су вредности од X у тачкама B и A где су дакле $X''yz$, $X'yz$

Из слике је јасно, ако се елементи у B, A и мере са $d\sigma''$, $d\sigma'$ и $dy\,dz$:

$$dy\, dz = d\sigma' \cos(n'x) = -d\sigma'' \cos(n''x) \quad \ldots \quad 4.$$

Кад је нормала унутрашња позитивна, обратно се знаци мењају. Из 3 и 4 имамо:

$$J = -\iint \left[d\sigma' X' \cos n'x + d\sigma'' X'' \cos n''x\right] = -\iint \Sigma X \cos nx\, d\sigma$$

или

$$J = -\iint X \cos nx\, d\sigma$$

Ово може бити и интегрисано у пределу $X^{ске}$ ... увек ... Кад се ово обрне и изврши сабирање Гаусова теорема добија облик:

$$\int_3 \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)d\tau = -\int_2 \left(X\cos nx + Y\cos ny + Z\cos nz\right)d\sigma$$

$d\tau$ је елемент запремине

$d\sigma$ " " површине.

— 2 —

Трансформација диференцијалних израза

(Јакобијева теорема)

Ако су u и V две функ. $x\,y\,z$, непрекидне са својим првим изводима у пределу T и V узет на границу [illegible] [illegible], имамо показати како се трансформише интеграл

$$\Omega = \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau \quad \ldots \quad (1$$

$$d\tau = dx\,dy\,dz$$

Ради овога пођимо од идентичности:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\left(V\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - V\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

При сабирању ових једначина ~~и~~ [интеграљењу по $d\tau$ и доле] Гаусове теореме на тр. [illegible] израз постаје:

$$\Omega = -\iiint v\,\Delta u\,d\tau = -\int_3 v\,\Delta u\,dx\,dy\,dz \quad \ldots \quad (3$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Ако се у Ω уведу нове координате p, q, r из

$$x = \varphi(pqr),\quad y = \psi(pqr)\quad z = \chi(pqr)$$

из

$$dx = a\,dp + a'\,dq + a''\,dr$$
$$dy = b\,dp + \ldots \qquad (3$$
$$dz = c\,dp + c'\,dq + c''\,dr$$

и узме ортогонални систем pqr

те ће онда:

$$e = a^2 + b^2 + c^2 \qquad 0 = a'a'' + b'b'' + c'c''$$
$$e' = a'^2 + b'^2 + c'^2 \qquad 0 = \text{—} \qquad \text{—} \qquad (4$$
$$e'' = a''^2 + b''^2 + c''^2 \qquad 0 = aa' + bb' + cc'$$

Ако се помноже у реду једначине (3 имамо

$$e\,dp = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$
$$e'\,dq = a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz$$
$$e''\,dr = a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz \quad \text{одакле}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{a}{e},\quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{b}{e},\quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{c}{e} \quad \text{и т. д.} \qquad (5$$

Изводи се онда изводи функције U помоћу (5

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial p}\frac{a}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{a'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{a''}{e''}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial p}\frac{b}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{b'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{b''}{e''}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial p}\frac{c}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{c'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{c''}{e''}$$

Ако се сличним начином нађу за V и добиће се

израз ... изражен у ортогоналном систему имамо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{1}{e}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p}+\frac{1}{e'}\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q}+\frac{1}{e''}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

Ако о Ω израчунамо на нове променљиве V и узмемо ли сталн $\sqrt{e'e''e}\,dq\,dp\,dr$ у место елемента интеграла наћи ћемо:

I/.. $$\Omega=\iiint\left[\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p}+\sqrt{\frac{ee''}{e'}}\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q}+\sqrt{\frac{ee'}{e''}}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r}\right]$$
$$\times\, dp\,dq\,dr$$

Ако на интеграл I применимо Гриновој теореми сходно на облик:

$$\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\left\{\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}V\right\}-V\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}$$ и

I називамо:

II. $$\Omega=-\iiint V\left\{\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{e''e}{e'}}\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{\frac{ee'}{e''}}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}d\ldots$$ 2

Из II и 3 имамо:

III). $$\Delta u=\frac{1}{\sqrt{e'e''e}}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{e''e}{e'}}\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{\frac{ee'}{e''}}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}$$

(Јакобијева формула).

Ако u и V зависе само од две променљиве x и y. онда је: 4

$$ds^2=dx^2+dy^2=e\,dp^2+e'\,dq^2 \qquad e''=1 \text{ зато}$$

из III имамо 3

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{ee'}}\left(\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e'}{e}}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{e}{e'}}\frac{\partial u}{\partial q}\right)$$

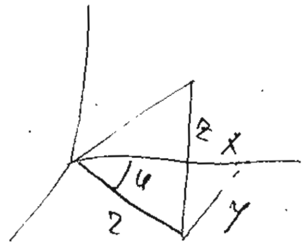
ако је још $e=e'$ имамо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{e}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)$$ 3

Примери за примену Јакобијеве теореме. VII

1. Цилиндричне координате:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad z = z.$$



Координате су ρ, ξ, ζ, r φ, z.

$$dx = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dz = dz$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$e = 1, \quad e' = r^2 \quad e'' = 1$$

$$d\tau = r\, dr\, d\varphi\, dz.$$

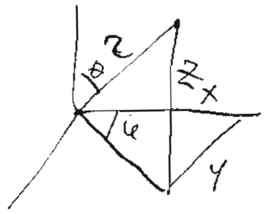
$$\Delta U = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + r\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial r \frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Поларне координате:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$



$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

$$e = 1, \quad e' = r^2, \quad e'' = r^2\sin^2\theta.$$

$$d\tau = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

Елиптичке координате.

Ако су a b c сталне количине

$$a < b < c$$

једначина:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1$$

свакој вредности x, y, z има три вредности за λ, које ћемо обележавати са ρ, ξ, ζ.

Ako su jednadžbe u [illegible] uvjeti:

$$p < a < q < b < r < c$$

3, Konstanta λ [illegible] [illegible] plohu

elipsoid za $\lambda < a$

jednoplošni hiperboloid za $a < \lambda < b$

dvoplošni hiperboloid za $b < \lambda < c$

Ove tri plohe [illegible] [illegible] sistem koordinata. Konfokalne plohe 2^{og} reda.. p, q, r su [illegible] koordinate [illegible].

Za dani p, q, r [illegible] $x\ y\ z$ određujemo [illegible]

$$\varphi(\lambda) = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) \quad \text{u}$$

u [illegible] [illegible]

$$\varphi(\lambda)\left[f(\lambda) - 1\right] = F(\lambda) \quad \ldots \quad 2$$

što je funkcija 3^{eg} stupnja od λ, a za $\lambda = p,\ q,\ r$ postaje nula. Prema tome je:

$$F(\lambda) = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r) \quad \text{u} \ldots$$

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = \frac{(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)} \quad (3$$

Ako [illegible] (3 [illegible] sa $a - \lambda$ i stavimo $a = \lambda$, [illegible] [illegible] [illegible]

$$x^2 = \frac{(a-p)(a-q)(a-r)}{(b-a)(c-a)}$$

$$y^2 = \frac{(b-p)(b-q)(b-r)}{(c-b)(a-b)}$$

$$z^2 = \frac{(c-p)(c-q)(c-r)}{(a-c)(b-c)}$$

Ovim su [illegible] [illegible] uvjeti [illegible] koordinata $x\ y\ z$ [illegible] [illegible] $p, q\ r$

Из 3 се добије, кад се по λ диференцира и

ако ставимо $x=\rho,\ \xi$?

$$\frac{x^2}{(a-\rho)^2}+\frac{y^2}{(b-\rho)^2}+\frac{z^2}{(c-\rho)^2}=\frac{(\rho-\xi)(\rho-\zeta)}{\varphi(\rho)}$$

$$=\frac{(\xi-\zeta)(\xi-\rho)}{\varphi(\xi)} \qquad (5).$$

$$\frac{x^2}{(a-\zeta)^2}+\cdots=\frac{(\zeta-\rho)(\zeta-\xi)}{\varphi(\zeta)}$$

Из 4 и 5 се добије

$$\frac{x^2}{(a-\xi)(a-\zeta)}+\frac{y^2}{(b-\xi)(b-\zeta)}+\frac{z^2}{(c-\xi)(c-\zeta)}=0 \qquad (6)$$

Ако се 4 логаритамски диференцира имаћемо

$$-2\,dx=\frac{x\,d\rho}{a-\rho}+\frac{x\,d\xi}{a-\xi}+\frac{x\,d\zeta}{a-\zeta}$$

Ако се ово квадрира и сабере, и нарочито 5 уреди имаћемо:

$$4ds^2=\frac{(\rho-\xi)(\rho-\zeta)}{\varphi(\rho)}d\rho^2+\frac{(\xi-\zeta)(\xi-\rho)}{\varphi(\xi)}d\xi^2+\frac{(\zeta-\rho)(\zeta-\xi)}{\varphi(\zeta)}d\zeta^2$$

одакле

$$l=\frac{(\rho-\xi)(\rho-\zeta)}{4\varphi(\rho)}\qquad l'=\frac{(\xi-\zeta)(\xi-\rho)}{4\varphi(\xi)}\qquad l''=\frac{(\zeta-\rho)(\zeta-\xi)}{4\varphi(\zeta)}$$

$$d\tau=\frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\rho)(\xi-\rho)\,d\rho\,d\xi\,d\zeta}{8\sqrt{-\varphi(\rho)\varphi(\xi)\varphi(\zeta)}}$$

$$1=\frac{4}{(\xi-\rho)(\zeta-\rho)(\zeta-\xi)}\left[(\zeta-\xi)\sqrt{\varphi(\rho)}\frac{\partial\sqrt{\varphi(\rho)}\frac{\partial u}{\partial\rho}}{\partial\rho}+(\zeta-\rho)\sqrt{-\varphi(\xi)}\frac{\partial\sqrt{-\varphi(\xi)}\frac{\partial u}{\partial\xi}}{\partial\xi}+(\xi-\rho)\sqrt{\varphi(\zeta)}\frac{\partial\sqrt{\varphi(\zeta)}\frac{\partial u}{\partial\zeta}}{\partial\zeta}\right]$$

Овај о [illegible] у [illegible]. Ако се ставе:

$$\frac{dp}{\sqrt{\varphi(p)}} = d\xi, \quad \frac{dq}{\sqrt{-\varphi(q)}} = d\eta, \quad \frac{dr}{\sqrt{\varphi(r)}} = d\zeta$$

(одакле су леве стране интеграли, елиптички интеграли прве врсте)

$$\frac{(q-p)(r-p)(r-q)}{4}\,\Delta U = (r-q)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (r-p)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + (q-p)\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}$$

Применом [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Предавања из матем. физике.

Теорија потенцијала.

I

Једначина у [illegible] за функцију [illegible]:

$$\Delta U = \frac{1}{\sqrt{ee'e''}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\sqrt{\frac{e'e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \quad + \,\right]$$

Ако је

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$ у сферним

коор. [illegible] онда је

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \quad I$$

[illegible] је

$$-\frac{1}{\partial\cos\theta}\,\partial\left(\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial\cos\theta}\right) = \frac{\partial\left(1-\mu^2\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)}{\partial\mu}$$

и I је

$$r^2\Delta u = \frac{\partial}{\partial r} r^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \quad II$$

– II –

Примена једначине под II.

Ако је функција потенцијал [illegible] P [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] V [illegible] изван $\Delta U = 0$ унутра $\Delta u = -4\pi\delta$. где је δ [illegible].

$\Delta u = 0$ и $\frac{\partial r^2\frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} = 0$ [illegible] за $r = 0$.

~~[illegible]~~ [illegible].

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \text{одакле је}$$

$$V = \frac{C}{r} + B.$$

[illegible] за V где је $(V) = 0$ за $r\ \infty$ и

$(Vr) = M$

$$V = \frac{M}{r} \quad I.$$

Когда точка P у внутри

$$\Delta V = -4\pi\delta$$

$$\frac{1}{r^2}\partial\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) = -4\pi\delta$$

$$r^2\frac{\partial V}{\partial r} = C - \frac{4\pi\delta r^3}{3}$$

при $r = 0$. $C = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4\pi}{3}\delta r$$

$$V = C - \frac{4\pi}{6}\delta r^2$$

при $r = 0$.

$$C = V_0$$

$$V = V_0 - \frac{4\pi}{6}\delta r^2$$

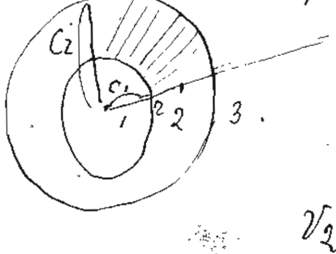
$$V_0 = \delta\int_0^A\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 d\rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\rho} = 2\pi\delta A^2$$

$$V = 2\pi\delta A^2 - \frac{2}{3}\pi\delta r^2 \qquad (II)$$

формулу в I можно и обычно написать. $\cos\theta = \mu$.

$$V_0 = \delta\int_0^A\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 d\rho\, d\mu\, d\varphi}{\rho}$$

Применим полярных коорд. на случай



$$V_2 = \delta\int_{C_1}^{C_2}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 d\rho\, d\mu\, d\varphi}{\rho} = 2\pi\delta(C_2$$

$$V_2 = 2\pi\delta C_2^2 - \frac{2}{3}\pi\delta r^2 - \frac{4\pi}{3}\frac{\delta C_1^3}{r}$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi\delta\left[\frac{C_1^3 - C_2^3}{r}\right]$$

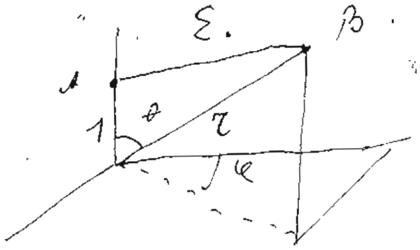
— III —

Лежандрове функције (Лежандр. полиноми).

[illegible]

[illegible]:

$$V = \delta \int \frac{dm}{\varepsilon}$$



	B	A
	$x = r\cos\varphi\sin\theta$	$x = 0$
	$y = r\sin\varphi\sin\theta$	$y = 0$
	$z = r\cos\theta$	$z = 1$.

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} \qquad r > 1.$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_0^\infty r^n P_n(\cos\theta) = P_0 + r P_1 + r^2 P_2 + \dots$$

Ако ставимо да је

$$\alpha = 2rx - r^2 \qquad x = \cos\theta.$$

[illegible]:

$$\frac{1}{\varepsilon} = (1-\alpha)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3 + \dots$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} A.\alpha^h$$

$$\alpha^h = r^h(2x - r)^h = \sum_{k=0}^{k=h} r^h [2x]^{h-k} r^k \binom{h}{h-k} (-1)^k = (-1)^k \sum_{k=0}^{k=h} (2x)^{h-k} r^{k+h} B \dots (2.$$

[illegible]:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k=h} A.B.r^{k+h} 2^{h-k} x^{h-k}.$$

[illegible] $k + h = n$, $h - k = n - 2k$.

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_0^\infty r^n \sum_0^k AB.2^{n-2k} x^{n-2k} (-1)^k \qquad 0 \leq k \leq n/2$$

$$A = \frac{1.3.5}{2.4.6} = \frac{1.3.5\;\;2.4.6}{2^3.1.2.3.2^3.1.2.3} = \frac{\Pi(6)}{2^6\,\Pi(3)^2}$$

$$A = \frac{\Pi(2h)}{2^{2h}\,\Pi(h)^2}.$$

$$B = \binom{h}{n-h} = \frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h+k-n+1)}{(n-k)(n-k-1)\ldots3.2.1}$$

$$B = \frac{\Pi(h)}{\Pi(k)\,\Pi(h-k)}$$

$$AB = \frac{\Pi(2h)}{\Pi(h)\Pi(k)\,\Pi(h-k)}\,\frac{1}{2^{2h}}.$$

$$h+k = n$$

$$h-k = n-2k.$$

$$AB = \frac{\Pi(2n-2k)}{\Pi(n-k)\,\Pi(k)\,\Pi(n-2k)}\,\frac{1}{2^{2n-2k}}.$$

$$R = \frac{1}{\varepsilon} = \sum_0^\infty r^n \sum_0^k (-1)^k \frac{1}{2^n}\,\frac{\Pi(2n-2k)}{\Pi(n-k)\,\Pi(k)\,\Pi(n-2k)}\,x^n$$

Kao u ovo [illegible] za jednačinom za P_n [illegible]

$$P_n = \sum_0^k \frac{(-1)^k}{2^n}\,\frac{\Pi(2n-2k)}{\Pi(n-k)\,\Pi(k)\,\Pi(n-2k)}\,x^{n-2k}$$

$$P_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!} \times \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-}{2.4(2n-1)(2n-}\right.$$

ovaj [illegible] zadovoljava : je o

$$n(n+1)P_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu}\right] = 0.$$

$P_0 = 1$

$P_1 = x \qquad x = \mu = \cos\vartheta.$

$P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

итд.

[illegible]

$$P_n(1) = 1$$
$$P_n(-1) = (-1)^n$$
$$-1 \leq P_n(\cos\vartheta) \leq 1$$

Ако се [illegible]

$f = P_n(\mu) \quad f' = P_n' \quad f'' = P_n'' \quad$ итд.

[illegible]

$$n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)f' = 0.$$ [illegible]

$$n(n+1)f - 2\mu f' + (1-\mu^2)f''$$ [illegible]

$$(n-j)(n+j+1)f^{j} - (2j+2)\mu f^{(j+1)} + (1-\mu^2)f^{(j+2)}$$

$$F = f^{(j)} = P_n^{(j)}(\mu).$$

[illegible] P_n:

$$f(x) = (x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 6\cdot x^5 - 3\cdot 4x^3 + 2\cdot 3x$$

$$f''(x) = 6\cdot 5x^4 - 3\cdot 4\cdot 3x^2 + 2\cdot 3$$

$$f'''(x) = 6\cdot 5\cdot 4x^3 - 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2x$$

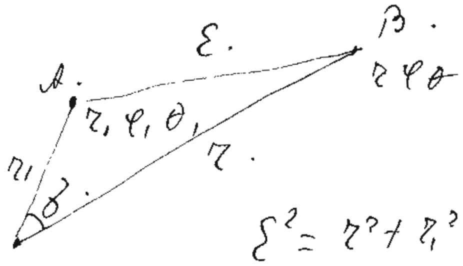
$$\frac{f'''(x)}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = P_3.$$

$$P_3 = \frac{1}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3(x^2-1)^3}{\partial x^3} =$$

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^n(x^2-1)^n}{\partial x^n}$$

Корени од $P_n(x)=0$ леже између -1 и 1

Особине сферне функције:
Зависи од два аргумента



$$\varepsilon^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi-\varphi_1)$$

1) $$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{r\sqrt{1-2\rho\cos\gamma+\rho^2}} \qquad \rho = \frac{r_1}{r} \qquad r_1 < r$$

2) $$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{r_1}\frac{1}{\sqrt{1-2\rho_1\cos\gamma+\rho_1^2}} \qquad \rho = \frac{r}{r_1} \qquad r_1 > r$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{r}\sum_0^\infty \rho^n P_n(\cos\gamma) \quad \dots \quad I$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{r_1}\sum_0^n \rho_1^n P_n(\cos\gamma) \quad \dots \quad II.$$

$$P_n(\cos\gamma) = A_n\mu^n + B_n\mu^{n-2} + C_n\mu^{n-4} + \dots L_n\mu^{n\lambda}$$

$\lambda = 0$, или 1

$$\cos\gamma = \mu\cdot\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1)$$

$$P_n(\cos\gamma) = f(\mu,\ \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi)$$
$$= f(\mu_1,\ \sqrt{1-\mu_1^2}\cos\varphi_1,\ \sqrt{1-\mu_1^2}\sin\varphi_1).$$

$P_n(\cos\gamma) = Y(\mu\,\varphi) = Y_1(\mu_1.\varphi_1)$. од два аргумента

Ако се $V = \frac{m_1}{\varepsilon}$ замени у $\Delta V = 0$ и стави израз само од r ради нове непознате функцију.

$$n(n+1)P_n(\cos\gamma) + \frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2 P_n}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \ldots \quad (I.$$

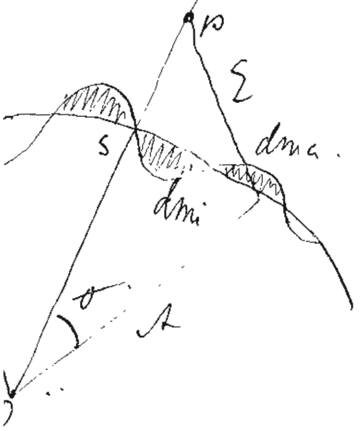
по истом μ_1 и φ_1.

P_n је рационална цела функција μ и φ, облика ...

Кад упрос решења једначине I.

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, f(\varphi_1,\mu_1)\, d\varphi_1\, d\mu_1$$

Лапласово правило о хомогеном сфероиду



Потенцијал је у тачци P:

$$V = \frac{M}{r} + \sum\frac{dm_a}{\rho} - \sum\frac{dm_i}{\rho}.$$

$$V = \frac{M}{r} + \sum\frac{dm}{\sqrt{A^2+r^2-2Ar\cos\theta}}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{r^2} - \sum\frac{(r-A\cos\theta)\,dm}{\sqrt{(A^2+r^2-2Ar\cos\theta)^3}}.$$

Ако тачка P падне у S имамо

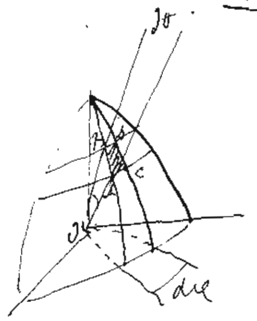
$$\bar{V} = \frac{M}{A} \pm \frac{1}{A}\sum\frac{dm}{\sqrt{2-2\cos\psi}}$$

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial r} = -\frac{M}{A^2} - \frac{1}{2A^2}\sum\frac{dm}{\sqrt{2-2\cos\psi}}$$

$$V + 2A\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{A} \quad \ldots \quad (I.$$

$$R = A(1+\alpha f(\mu\varphi))$$ једначина сфероида.

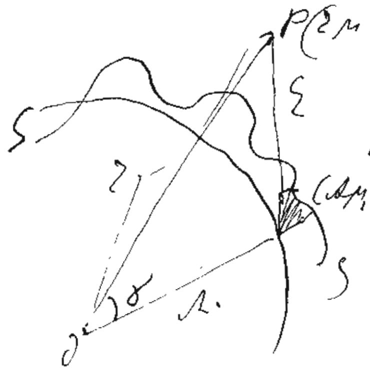
Развијање у ред $f(\mu\varphi)$ по сферним функцијама



$ABCD = AC \cdot AB = d\varphi \cdot d\mu \cdot a^2 =$ елем. површ.

$a =$ полупречник сфере.

Ако је јачина сфероида SS.



$R = a + \alpha a f(\mu_1 \varphi_1)$

$dR = R - a = \alpha a f(\mu_1 \varphi_1)$.

елем. запремина сфероида је

$a^3\alpha \cdot f(\mu_1\varphi_1)\, d\varphi_1 \cdot d\mu_1$ у правцу μ, φ.

Потенцијал је у тачки P:

$$V = \frac{M}{r} + \alpha\delta a^3 \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{f(\mu_1\varphi_1)\, d\varphi_1\, d\mu_1}{\varepsilon}.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\gamma}} = \sum_0^\infty \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma) \quad a < r$$

$$V = \frac{M}{r} + \alpha \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{U_n}{r^{n+1}} \quad \ldots \quad (1)$$

(I) — $U_n = \delta \cdot a^{3+n} \iint P_n(\cos\gamma) f_1(\varphi_1\mu_1)\, d\varphi_1\, d\mu_1$

Из (1) имамо:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M}{r^2} - \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{r^{n+2}} U_n \quad \ldots \quad (2)$$

Ако у (2) ставимо $r = R = a(1 + \alpha f(\mu_1\varphi_1))$

$$\overline{V} = \frac{M(1-\alpha t)}{a} + \alpha \sum \frac{1}{a^{n+1}} U_n$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{M(1-2\alpha t)}{a^2} - \alpha \sum \frac{n+1}{a^{n+2}} U_n$$

Кад се ове вредности помноже са 1 и 2 и [illegible] растојања једначина Лапласа

$$\frac{M}{a} = -\frac{M}{a} + \frac{3\alpha M t}{a} - \alpha \sum \frac{2n+1}{a^{n+1}} U_n .$$

или

$$\underline{\underline{f}}(\mu\varphi) = \frac{1}{4\pi g a^2} \sum \frac{2n+1}{a^{n+1}} U_n = \sum Y_n(\mu\varphi).$$

$$Y_n(\mu\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi g a^{n+3}} U_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint P_n(\cos\gamma) f(\mu_1\varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1$$

Једна важна особина сф. функција.

$$F = Y_n = Y_n(\mu\varphi)$$
$$F_1 = Y_{n_1} = Y_{n_1}(\mu\varphi)$$

[illegible] се овде

$$\int F F_1\, d\mu\, d\varphi = 0$$

или

$$(n+n_1+1)\iint Y_n(\mu\varphi)\, Y_{n_1}(\mu\varphi)\, d\mu\, d\varphi = 0 \qquad n \neq n_1 \qquad \text{(II.}$$

Пример.

Нека се развије у ред функција $Z_3(\cos\gamma) = \frac{5}{2}\cos^3\gamma - \frac{3}{2}\cos\gamma$.

$$Z_3(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu\varphi)$$

$$Y_n(\mu\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint P_n(\cos\gamma)\, Z_3(\mu_1\varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1$$

$$Z_0 = Y_1 = Y_2 = Y_4 = Y_5 = \ldots 0$$

$$Y_3(\mu\varphi) = \frac{2\cdot 3+1}{4\pi}\iint P_3(\cos\gamma)\, Z_3(\mu_1\varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1$$

$$Z_3(\mu\varphi) = \frac{2\cdot 3+1}{4\pi}\iint P_3(\cos\gamma)\, Z_3(\mu_1\varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1$$

Уопште ако је позната функција $F(\mu\varphi)$ онда је она развијена у ред облика

$$F(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu\varphi)$$

$$Y_n(\mu\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi}\iint P_n(\cos\gamma)\, F(\mu_1\varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1$$

Наћи ово развиће је једино развиће F.

Ако је

$$F(\mu\varphi) = \sum Y_n$$

$$F(\mu\varphi) = \sum Z_n \quad \text{онда је множењем}$$

и

$$\iint P_{n_1} F(\mu\varphi) = \sum \iint Y_n P_{n_1} d\mu\, d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} Y_n$$

$$\iint P_n F(\mu\varphi) = \frac{4\pi}{2n+1} Z_n$$

$$\underline{Y_n = Z_n}$$

<u>Потенцијал хомогеног сфероида</u>

Једначина је сфероида

$$R = a\left[1 + \alpha F(\mu\varphi)\right]$$

$$F(\mu\varphi) = \sum_{0}^{\infty} Y_n(\mu\varphi)$$

$$V = V^K + 2\alpha \lambda^3 \iint \frac{f(\mu_1, \varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1}{\varepsilon}$$

$V^K = \frac{M}{r}$ warstwa [illegible] bez masy

$V^K = 2\pi\delta A^2 - \frac{2\pi\delta}{3} r^2$ warstwa grupy y masa.

$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\lambda^n}{r^{n+1}} P_n \cos\gamma$ $\lambda < r$ bez masy

$\frac{1}{\varepsilon} = \sum \frac{r^n}{\lambda^{n+1}} P_n \cos\gamma$ $\lambda > r$ y masa.

$$V = V^K + 2\alpha\lambda^3 \iint \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\mu_1, \varphi_1) \frac{d\mu_1\, d\varphi_1}{\varepsilon}$$

или

$$= V^K + 2\alpha\lambda^3 \iint \frac{Y_n(\mu_1, \varphi_1)\, d\mu_1\, d\varphi_1\, P_n \cos\gamma)\, \lambda^n}{r^{n+1}}$$

$$= V^K + 2\alpha \lambda^3 \iint Y_n P_n(\cos\gamma)\, d\mu_1\, d\varphi_1 \frac{r^n}{\lambda^{n+1}}.$$

na [illegible]

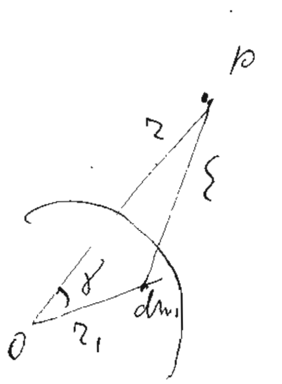
$$= V^K + 2\alpha\lambda^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{\lambda^n}{r^{n+1}} Y_n(\mu\varphi) \ldots \quad I$$

$$V^K + 2\alpha\lambda^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{\lambda^{n+1}} Y_n(\mu\varphi) \ldots$$

$$R = \lambda\left[1 + \alpha \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\mu\varphi)\right].$$

Применение найденных теорем

$$V = \int \frac{dm}{\varepsilon}.$$



$$V = \delta \iiint \frac{r_1^2 dr_1 d\mu d\varphi_1}{\varepsilon}. \qquad r_1 < r$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{r^{n+1}}.$$

$$U_n = \delta \iiint P_n(\cos\gamma)\, r_1^{n+2} dr_1\, d\mu_1\, d\varphi_1. \quad (I)$$

$$U_n = \frac{\delta}{n+3} \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, R_1^{n+3} d\mu_1\, d\varphi_1 \quad (2)$$

$$R_1^i = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^i(\mu, \varphi_1).$$

$$\log R_1 = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\mu, \varphi_1).$$

заменим у

$$R_1^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{n+3}(\mu, \varphi_1)$$

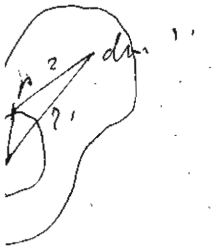
$$U_n = \frac{\delta}{n+3} \underbrace{\iint P_n(\cos\gamma)\, Y_n^{n+3}(\mu, \varphi)\, d\mu_1\, d\varphi_1}$$

$$\iint P_n \cos\gamma\, Y_n^{n+3}(\mu, \varphi_1)\, d\mu\, d\varphi_1 = \frac{4\pi}{2n+1} \ldots$$

$$U_n = \frac{\delta}{n+3} \cdot \frac{4\pi}{2n+1}\, Y_n^{n+3}(\mu \varphi).$$

$$V = 4\pi\delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n^{n+3}(\mu\varphi)}{(n+3)(2n+1)\, r^{n+1}}$$

Другой случай.



$$V = \frac{4\pi\delta r^2}{3} + \iiint \frac{dm_1}{\varepsilon}$$

$$dm_1 = r_1^2\, dr_1\, d\mu_1\, d\varphi_1\, \delta$$

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n \cos\gamma$$

$$V = \frac{4\pi\delta r^2}{3} + \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n U_n$$

$$U_n = \delta \int_r^{R_1}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{r_1^2\, dr_1\, d\mu_1\, d\varphi_1}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

$$U_0 = \frac{\delta}{2}\iint d\mu_1\, d\varphi_1\, R_1^2 - 2\pi q r^2$$

$$R_1^2 = \sum_{n=0} Y_n^2(\mu,\varphi)$$

$$U_0 = \frac{\delta}{2}\iint Y_0^2\, d\mu_1\, d\varphi_1 - 2\pi q r^2 = 2\pi\delta Y_0^2 - 2\pi q r^2$$

ибо $\iint Y_n^2(\mu\varphi)\, d\mu_1\, d\varphi_1 = 0$, $n \neq 0$

За $n = 1$

$$U_1 = \delta\iiint R_1\, d\mu_1\, d\varphi_1\, P_1(\cos\gamma) = \delta\iint Y_1 P_1\, d\mu_1\, d\varphi_1 = \frac{4\pi\delta}{2+1} Y_1(\mu\varphi)$$

$$U_2 = \delta\iiint \log R_1\, P_2(\cos\gamma)\, d\mu_1\, d\varphi_1 = \delta\iint Z_2 P_2\, d\mu_1\, d\varphi_1 = \frac{4\pi\delta}{5} Z_2(\mu\varphi)$$

$$U_n = \varrho \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \frac{R_1^{2-n}}{(2-n)} P_n \cos\gamma \, d\mu_1 \, d\varphi_1$$

$$U_n = \varrho \iint Y_n^{2-n} P_n \cos\gamma \, d\mu_1 \, d\varphi_1 = \frac{4\pi\delta}{2n+1(2-n)} Y_n$$

$$V = \frac{4\pi\varrho r^2}{3} + 2\pi\varrho Y_0^2 - 2\pi\varrho r^2 + \frac{4\pi\varrho r Y_1'}{3} + \frac{4\pi\varrho}{5} L_2(\mu\varphi)$$

$$- \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{4\pi\delta \, r^n}{(n-2)(2n+1)} Y^{2-n}(\mu\varphi)$$

$$V = 4\pi\varrho \left\{ \frac{1}{2} Y_0^2 + \frac{r}{3} Y_1' + \left[\frac{r^2}{5} L_2(\mu\varphi) - \frac{r^2}{6}\right] - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{r^n}{(n-2)(2n+1)} Y_n^{2-n}(\mu\varphi) \right\}$$

Ако је дата кугла онда је

$R_1 = \text{const.}$ $\quad R_1^i = \sum Y_n^i(\mu_1 \varphi_1)$.

$\log R_1 = L_0$ $\quad R_1^i = Y_0^i(\mu_1 \varphi_1)$

$L_0 = \log R_1$

$$V = 4\pi\varrho \left[\frac{1}{2} R_1^2 - \frac{r^2}{6}\right]$$ унутра сфере

Drugo partikularno rješenje

Drugi je integral jednačine:

$$n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial \mu}\right] = 0 \quad \ldots \quad (1$$

$$f = F(\mu) = \int_{\alpha}^{\beta} U\, P_n(\sigma)\, d\sigma$$

Kad se ovo zamijeni i uzme se da se B ...

f gdje je:

$$f = Q_n(\mu) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\sigma)\, d\sigma}{\mu - \sigma}$$

Prema tome je opšti integral jednačine 1

$$A P_n(\mu) + B Q_n(\mu)$$

$$Q_n(\mu) = R_n(\mu) + P_n(\mu) \log \frac{\mu+1}{\mu-1} \quad \ldots \quad (2.$$

$$R_n(\mu) = -\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\mu) - P_n(\sigma)}{\mu - \sigma}\, d\sigma$$

Ako se (2 razvije u red onda je gornji integral:

$$(\mu) = K_n^n \left[\frac{1}{\mu^{n+1}} + \frac{K}{\mu^{n+3}} + \frac{K'}{\mu^{n+5}} + \frac{K''}{\mu^{n+7}} + \ldots \infty\right]$$

$$K_n^n = \frac{2^{n+1}\,\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n+1)}$$

$$K = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}, \quad K' = \frac{(n+3)(n+4)}{4(2n+5)} K, \quad K'' = \frac{(n+5)(n+6)}{6(2n+7)} K' \text{ etc.}$$

Drugi je integral jednačine:

$$(n-j)(n+j+1)F-(2j+2)\mu F'+(1-\mu^2)F''=0$$

$$Q_n^j(\mu)=\frac{\partial^j Q_n(\mu)}{\partial \mu^j}.$$

Ako uzmemo umesto $P_n^{(j)}$ i $Q_n^{(j)}$ izraze:

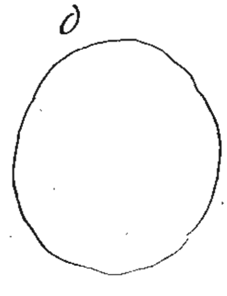
$$P_{nj}(\mu)=(1-\mu^2)^{j/2}P_n^j(\mu)$$

$$Q_{nj}(\mu)=(1-\mu^2)^{j/2}Q_n^j(\mu)$$

onda ćemo dobiti integrale ... u ovoj ...

	$P_n(\mu)$	$Q_n(\mu)$	$P_{nj}(\mu)$ $j=1,2,3\ldots$	$Q_{nj}(\mu)$ $j=1,2,3\ldots$
$\mu=1$	1	∞	0	∞
$\mu=-1$	$(-1)^n$	∞	0	∞
$\mu=\infty$	∞ odnosno	0	∞	0

Гринова теорема
и
њена примена у теорији потенцијала.



Нека је ограничена затворена површина, $U=U(xyz)$ $V(xyz)$ две дате функције такве да:

$$U\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$V\ \frac{\partial V}{\partial x}\ ,\quad ,$$

континуирне у O. Као што смо онда имали бити и израз:

$$A = U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V}{\partial x}$$ и њени слични изрази.

Ако пођемо од идентичности:

$$\int_3 \frac{\partial\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x}d\tau = \int_3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\right)d\tau + \int_3\left(U\frac{\partial^2 V}{dx^2}\right)d\tau$$

и на леве стране применимо Гаусову теорему

$$\int_3 \frac{\partial U}{\partial x}d\tau = \mp\int_2 U\cos nx\, do$$

па онда добијемо имаћемо овај израз:

$$\int\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial V}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial V}{\partial z}\cos nz\right]do = \int_3\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right]d\tau + \int_3 u\,\Delta V\, d\tau$$

где је

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Последња једначина може написати у облику:

$$\int_2 u \frac{\partial V}{dn}\, do = \mp\left[\int_3 \sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\, d\tau + \int_3 u\,\Delta V\, d\tau\right]$$

— где у знаку двојном горњи знак за унутр. а + споља.

Ако се у I смене u и V, добиће се још, од I одузме добија се образ:

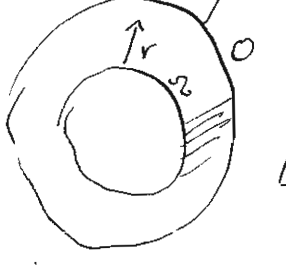
$$\int_3 (u\,\Delta V - V\,\Delta u)\, d\tau = \mp\int \left(u\frac{\partial V}{dn} - V\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\tau$$

нека ~~[illegible]~~ граничне површине O

Једначина II важи за u V ван ... и за случај кад је $U = 1$ $V(xyz)$. Кад ово смени имамо:

$$\int_3 \Delta V\, d\tau = \int_2 \frac{dV}{dn}\, \partial o \quad \ldots \quad (2)$$

У граничном простору



У простору између Ω и O важи II у облику:

III)... $$\int_3 (u\,\Delta V - V\,\Delta u)\, d\tau = +\int_2 \left(u\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{du}{dn}\right) do - \int\left[u\frac{\partial V}{\partial v} - \ldots\right.$$

(између Ω O)

Ако је спољна површина O сфера полупречника R из III следи:

$$\int_3 (u\,\Delta V - V\,\Delta u)\, d\tau = +\int\left(u\frac{\partial V}{\partial R} - V\frac{\partial u}{\partial R}\right) do - \int\left[u\frac{\partial V}{\partial v}\right.$$

или у:

$$\int_3 [u\Delta v - v\Delta u]\, d\tau = K - \int \left[u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{du}{d\nu}\right] d\omega$$

$$K = \int \left(u \frac{\partial v}{dR} - v \frac{du}{dR}\right) d\omega \quad \ldots \quad (IV).$$

У извесним и специјалним случајевима може K рачунати.

Ако је $U = 1$, $V = \frac{M}{R}$ (M је у центру сфере R)

$$\frac{dv}{\partial R} = -\frac{M}{R^2}$$

Ако се обележи у $\overline{IV}$

$$K_1 = -\frac{M}{R^2}\int d\omega = -4\pi M$$

Ако је у запремини τ V потенцијал од масе M,
$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ биће у непрекидне [illegible]:

$$\int_3 \Delta V d\tau = -4\pi M - \int \frac{dV}{d\nu} d\omega \quad \ldots \quad \overline{V}$$

Ако је M у τ ΔV је свуда нула у τ

$$4\pi M = -\int \frac{dV}{d\nu} d\omega \quad \ldots \quad B.$$

(Гаусова о [illegible]).

Ако су U и V потенцијали од маса M_1, M_2

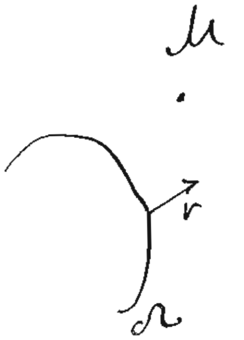
$$K = -M_1 M_2 \int \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^3}\right) d\omega = 0.$$

Према овоме за овај случај биће израз

$$\int_3 (u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau = -\int_2 \left(u\frac{dv}{dr} - v\frac{du}{dr}\right) d\omega \quad \ldots$$

ван Ω.

Ако су масе M_1 и M_2 у Ω онда је ван Ω $\Delta V = \Delta U = 0$.



Ако је M маса која производи потенцијал V ван Ω из I имамо:

$$\int_3 \Delta V\, d\tau = \int_2 \frac{\partial V}{\partial r} d\omega$$

$\Delta V = 0$ у Ω и онда је

$$\int_2 \frac{\partial V}{\partial r} d\omega = 0 \quad \ldots \quad B.$$

(Правило о флукцији).

Ако је M у Ω онда имамо, пошто је Δ ван Ω

$$0 = -4\pi M - \int \frac{\partial V}{\partial r} d\omega \quad \ldots \quad C$$

или

$$4\pi M = -\int \frac{\partial V}{\partial r} d\omega$$

(Правило о флукцији).

Ова су два правила равна изведена за [illegible]

[illegible]

Једначина:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1$$

где је $b^2<c^2$ представља елипсоид, хиперболоид једнокрилни и двокрилни $\lambda^2=\rho^2,\ \mu^2,\ \nu^2$, када су $\rho,\ \mu,\ \nu$ вредности једначине:

$$\lambda^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)-x^2(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)-y^2\lambda^2(\lambda^2-c^2)-z^2\lambda^2(\lambda^2-b^2)=(\lambda^2-\rho^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)$$ 5.

које леже између:

$c^2+\infty,\ c^2\ b^2,\ b^2\ 0$. 1.

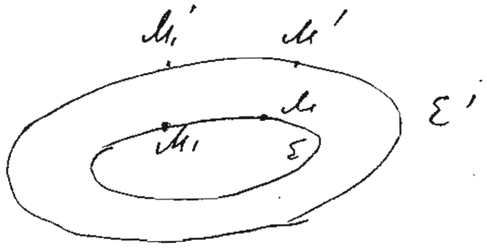
Координате $\rho,\ \mu\ \nu$ зову се елиптичким и одговарају координатама $x\,y\,z$. ... услови ρ,μ,ν и $x\,y\,z$ добија се I, када се у I стави редом $\lambda^2=0,\ b^2,\ c^2$ ... је се:

$$x=\frac{\rho\mu\nu}{bc},\quad y=\sqrt{\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2(c^2-b^2)}}\quad z=\sqrt{\frac{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{\rho^2(c^2-b^2)}}$$

Ако се на елипсоиду Σ,

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

уочи тачка M чије су координате $\rho\ \mu\ \nu$, а на конфокалном Σ' тачка M', координате $\rho'\ \mu'\ \nu'$ тачке се M и M' одговарајуће ако је $\mu=\mu',\ \nu=\nu'$



Ако су координате $M(xyz)$, $M'(x'y'z')$

$$x=\frac{\rho\mu\nu}{bc}\qquad x'=\frac{\rho'\mu\nu}{bc}$$

$$x=x'\frac{\rho'}{\rho}$$

$$y=y'\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}=y'\sqrt{\frac{\rho'^2-b^2}{\rho^2-b^2}}$$

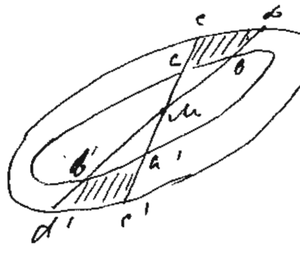
$$z=z'\frac{\beta'}{\beta}=z'\sqrt{\frac{\rho'^2-c^2}{\rho^2-b^2}}$$

Ако имамо још један пар $M_1\,M_1'$ одговарајућих тачака, одстојања M_1' од M и M_1 од M' једнака

4). Ако имамо два хомофокална елипсоида, и у њима ... особине ABC а других A(1−ε), B(1−ε) C(1−ε), запремина је слоја између њих

$\frac{1}{3}\pi ABC\left[1-(1-\varepsilon)^3\right] = 4\pi ABC\varepsilon.$

атракција је слоја елипсоидног на једну тачку унутрашњу нула



Привлачење слоја abcd на P је

$$\frac{ac\,dw \cdot d}{Ma^2}$$

привлачење слоја a'b'c'd' на P је

$$\frac{a'c'\,dw' \cdot d}{Ma'^2}$$

Како су елипсоиди хомофокални, $ac = a'c'$ и $\frac{dw}{Ma^2}=\frac{dw'}{Ma'^2}$. Тада оба ова привлачења су елементарна на P једнака и супротно означена а то је атракција нула. Због овог је потенција $V=\text{const}$.

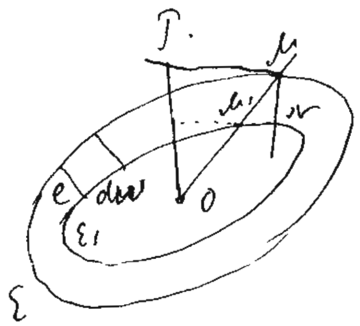
5. Да би нашли атракцију елипсоида на једну тачку ван њега ... на тачку која је на самој површини

Из једначине:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^- = -4\pi\delta.$$

пошто је $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^- = 0$, налазимо да је привлачна снага елипсоида на тачку P која је на самој површини:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^+ = 4\pi\delta. \quad (\delta \text{ је површинска густина}).$$



Нека су дата два хомофок. елипсоида Σ и Σ' и дебљина елементарна, dw елементарна површина (~~елементарна~~) маса је једнака δdw (d густина).

$$e\,dw \cdot d = \delta\,dw$$

$$\delta = e \cdot d.$$

Из сличности троуглова MM'N ∾ OPM налазимо:

$$\delta = \varepsilon\, d\, OM \qquad \varepsilon \text{ (однос хомотетичности)}$$

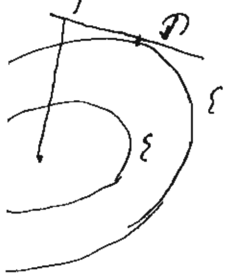
Запремина слоја је $4\pi\varepsilon ABC$, маса је $4\pi\varepsilon d ABC$ и

$$\delta = \frac{Q \cdot OP}{4\pi \cdot ABC}.$$

Алгебарска сила ј

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+} = \frac{Q \cdot OP}{iABC} \quad \ldots \quad II.$$

1). Ако се узме адхерентни елипсоид Σ на тачки P, биће кроз P та елипсоида конфокална Σ' осовина $A'B'C'$ и једначина II ја овако



$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+} = \frac{Q \cdot OP'}{A'B'C'} \quad \ldots \quad 1.$$

Q ј маса елипсоида Σ. (одговара маси слоја који заузима Σ) $Q = 4\pi\varepsilon d\, ABC$. Кад се ово замени у 1 добиће се:

$$F_n = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+} = \frac{4\pi\varepsilon d\, ABC\, OP'}{A'B'C'}$$

У правцу x-ке осовине, $OP' = A'$ ј сила:

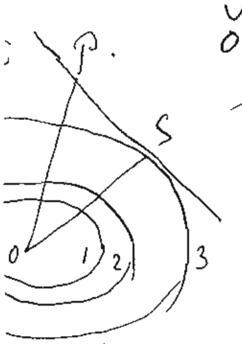
$$F_{ox} = \frac{4\pi\varepsilon d\, ABC}{B'C'} = \frac{4\pi\varepsilon d S\sqrt{(S^2-B^2)(S^2-C^2)}}{\sqrt{(S'^2-B^2)(S'^2-C^2)}} \quad \ldots \quad III.$$

Ако се тражи атракција целог елипсоида на тачку P, биће у место Σ треба слој између два конфокална елипсоида Σ и Σ', чије су осовине Au, Bu, Cu и A(u-du), B(u-du), C(u-du). Атракција целог елипсоида на тачку P у правцу x-ке осовине:

$$F_{ox} = 4\pi d \frac{du}{u} \frac{ABCu^3}{\sqrt{[A^2-(A^2-B^2)u^2][A^2-(A^2-C^2)u^2]}}$$

целог елипсоида ј атракција

$$\Sigma F_{ox} = \int_0^1 (4\pi d\, ABC) \frac{u^2 du}{\sqrt{[A^2-(A^2-B^2)u^2][A^2-(A^2-C^2)u^2]}}$$



Ово се ј... исто и обадве ... Ако се тражи атракција у тачки S онда:

$$P_{os} = \frac{M\, OP'}{A'B'C'}$$

M masa sloja 1.2, a'b'c' osovine unutarnjeg elipsoida.

Ako su osovine elipsoida A B C, a a b c osovine elipsoida

2). kakvi su oni konfokalni i homofokalni, onda između njih odnos:

$$b = a\frac{B}{A}, \quad c = a\frac{C}{A}.$$

$$b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right), \quad c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)$$

Ako se tačka S nalazi na X-noj osovini:

$$P_{0x} = \frac{M}{b'c'} = \frac{4\pi\varepsilon d\, abc}{b'c'} = \frac{4\pi\varepsilon d\, abc}{\sqrt{\left[a_1^2+a^2\left[\frac{B^2}{A^2}-1\right]\right]\left[a_1^2+a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)\right]}}$$

$$P_{0x} = \frac{4\pi\varepsilon d\, abc}{a_1\sqrt{\left[1+u^2\frac{(B^2-A^2)}{A^2}\right]\left[1+u^2\left(\frac{C^2-A^2}{A^2}\right)\right]}} \qquad \frac{a}{a_1} = u.$$

$$P_{0x} = 4\pi\varepsilon d\frac{du}{a_1^2}\cdot\frac{A^2 BC}{\sqrt{\left[A^2-u^2(A^2-B^2)\right]\left[A^2-u^2[A^2-C^2]\right]}}$$

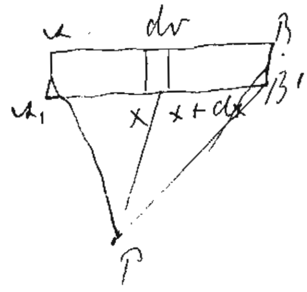
$$P_{0x} = \int_0^{A/a_1} 4\pi\varepsilon d\frac{BC\,u^2\,du}{\sqrt{\left[A^2-u^2(A^2-B^2)\right]\left[A^2-u^2[A^2-C^2]\right]}}$$

A' je koren jednačine:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_1^2+B^2-A^2} + \frac{z^2}{A_1^2+C^2-A^2} = 1$$

-7- Teorema Ivory-ja

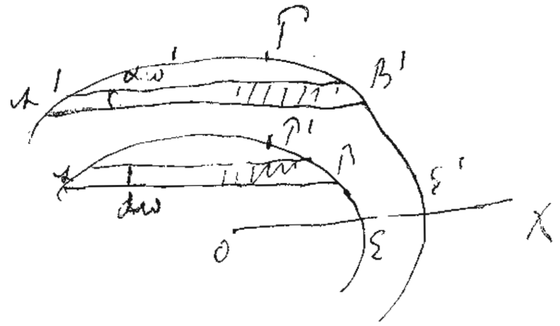
Posmatramo privlačnu komponentu homoide AA'B na tačku P.



Masa je elementa dv: ρ dx dw ili dx dw da ρ = 1, potencijal je u P:

$$\frac{dx\,dw}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int dx\,dw\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) = dw\left[\frac{1}{PB}-\frac{1}{PA}\right] = dw\left[\varphi(PB)-\varphi\right.$$



Ako su elipsoida Σ osovine a b c u privlačnoj tački P(xyz), onda je privlačna

$$X = \int dw\left[\varphi[PB) - \varphi(PA)\right]$$

[illegible] P [illegible] $\mathcal{E}$, [illegible] $a'b'c'$

$$a' = \alpha a, \quad b' = \beta b, \quad c' = \gamma c$$

[illegible] $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ [illegible]:

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z.$$

$$\gamma\alpha\beta \, \text{vol}\, AB = \text{vol}\, A'B' \quad \text{i} \quad d\omega' = \beta\gamma\, d\omega$$

Jeżeli P' [illegible] P, [illegible] X' [illegible] $\mathcal{E}'$

I). $$\begin{cases} X' = \beta\gamma \int d\omega \left[\varphi(P'B') - \varphi(P'A') \right] = \beta\gamma X & \text{gdzie } P'B' = PB \quad P'A' = PA. \\ \text{[illegible]} & \\ Y' = \alpha\gamma Y, \quad Z' = \alpha\beta Z. & \end{cases}$$

Wniosek: [illegible] $\mathcal{E}'$ [illegible] I [illegible] $\mathcal{E}$ [illegible].

[illegible]

Niech X'', Y'', Z'' [illegible] $\mathcal{E}'$ na P [illegible]:

$$\frac{X''}{X'} = \alpha, \quad \frac{Y''}{Y'} = \beta, \quad \frac{Z''}{Z'} = \gamma$$

[illegible] $\frac{\partial V}{\partial x}$ [illegible] x. [illegible] P na $\mathcal{E}'$ [illegible]

$$\frac{X''}{X'} = \frac{x\, d.\, \varrho M}{x\, d\varrho M'} = \alpha \quad , \quad X' = \beta\gamma X, \quad Y' = \alpha\gamma Y, \quad Z' = \beta\alpha Z$$

Dalej [illegible]:

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \frac{Z''}{Z} = \alpha\beta\gamma = \frac{a'b'c'}{abc}.$$

Маса слоја 1.2, $a'b'c'$ основне ... елипсоиде

Ако узмемо елипсоид са ABC, а a ... основне елипсоиде
2). Које су ... кофокусним ... односи:

$$b = a\frac{B}{A}, \quad c = a\frac{C}{A}.$$

$$b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right), \quad c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)$$

Ако ... на X осовини:

$$P_{0X} = \frac{M}{b'c'} = \frac{4\pi\varepsilon d\, abc}{b'c'} = \frac{4\pi\varepsilon d\, abc}{\sqrt{\left[a_1^2 + a^2\left[\frac{B^2}{A^2}-1\right]\right]\left[a_1^2+a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)\right]}}$$

$$P_{0X} = \frac{4\pi\varepsilon d\, abc}{a_1\sqrt{\left[1+u^2\frac{(B^2-A^2)}{A^2}\right]\left[1+u^2\left(\frac{C^2-A^2}{A^2}\right)\right]}} \qquad \frac{a}{a_1} = u.$$

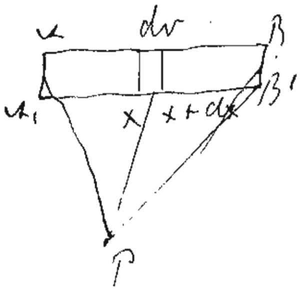
$$P_{0X} = 4\pi d\,\frac{du}{a_1^2}\,\frac{Ab^2c}{\sqrt{[A^2-u^2(A^2-B^2)][A^2-u^2[A^2-C^2]}}$$

$$P_{0X} = \int_0^{A/A_1} 4\pi d\,\frac{BC\,u^2\,du}{\sqrt{[A^2-u^2(A^2-B^2)][A^2-u^2[A^2-C^2]}}$$

A' је ... једначина:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_1^2+B^2-A^2} + \frac{z^2}{A_1^2+C^2-A^2} = 1$$

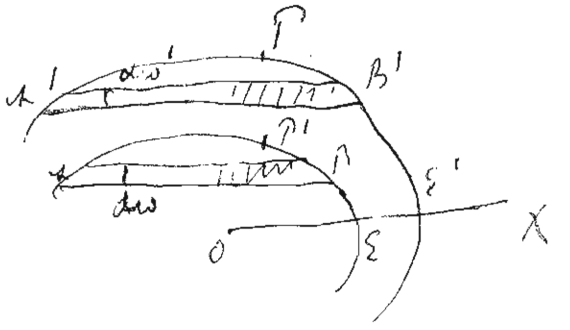
– 7 – <u>Теорема Маклорена</u>. Привлачење ... AA' ... на тачку P.



Маса је елемента dv: $\rho\, dx\, dw$ или $dx\, dw$ за $\rho = 1$, ... је у P:

$$\frac{dx\,dw}{l}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int dx\,dw\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{l}\right) = dw\left[\frac{1}{PB} - \frac{1}{PA}\right] = dw\left[\varphi(PB) - [illegible]\right.$$



Ако су елипсоида Σ основне abc у ... тачку $P(xyz)$, онда је ...

$$X = \int dw\left[\varphi[PB) - \varphi(PA)\right]$$

Podobny [illegible] przy P ermicond Σ, osobne $a'b'c'$

$$a' = \alpha a, \quad b' = \beta b, \quad c' = \gamma c$$

[illegible] Σ i Σ' wzory:

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z.$$

$$\gamma\alpha\beta \, vol\, AB = vol\, A'B' \quad a \quad d\omega' = \beta\gamma\, d\omega$$

Jeżeli P' odpowiadający punkt temu P, [illegible] X' ermicond Σ'

I). $$X' = \beta\gamma \int d\omega \left[\varphi(P'B') - \varphi(P'A') \right] = \beta\gamma X \quad \text{bo } P'B' = PB \quad P'A' = PA.$$

[illegible]

$$Y' = \alpha\gamma Y, \quad Z' = \alpha\beta Z.$$

[illegible] [illegible] Kiedy wiemy atrakcyję Σ' (wartości y przyciąganych) [illegible] wzory I [illegible] atrakcyję od Σ [illegible] [illegible] atrakcyjny.

[illegible]

Niech są X'', Y'', Z'' komponenty atrakcji od Σ' na P wtedy:

$$\frac{X''}{X'} = \alpha, \quad \frac{Y''}{Y'} = \beta, \quad \frac{Z''}{Z'} = \gamma.$$

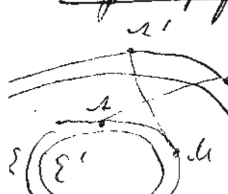
[illegible] przyciągania jest [illegible] $\frac{\partial V}{\partial X}$ [illegible] x. [illegible] P na Σ' [illegible] przyciągania [illegible]

$$\frac{X''}{X'} = \frac{x\, d.\, e M}{x\, d e\, M'} = \alpha \quad , \quad X' = \beta\gamma X, \quad Y' = \alpha\gamma Y, \quad Z' = \beta\alpha Z$$

Skąd jest:

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \frac{Z''}{Z} = \alpha\beta\gamma = \frac{a'b'c'}{abc}.$$

Atrakcyja ermicondu [illegible] na [illegible]



Niech są osobne ermicondu Σ Σ' A B C, $A(1-\varepsilon)$, $B(1-\varepsilon)$ $C(1-\varepsilon)$.

Σ' jest [illegible] od Σ a [illegible] są osobne:

Niech ciało takie w xyz i Σ, i odpowiadające mu w

$x'y'z'$

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y \quad z' = \gamma z$$

Osobne [illegible] Σ_1' są:

$$\alpha A(1-\varepsilon), \quad \beta B(1-\varepsilon) \quad \gamma C(1-\varepsilon)$$

Oznaczmy $\Sigma\Sigma'$ [illegible] $ABC\Sigma$

" $\Sigma_1\Sigma_1'$ [illegible] $ABC\alpha\beta\gamma\Sigma$

Niech są punkty $A\ A'$ $M\ M'$ odpowiadające, V' [illegible] [illegible] $\Sigma_1\Sigma_1'$ na M a V [illegible] od $\Sigma\Sigma'$ na M'; $d\omega$, $d\omega'$ elementy [illegible] w A a A'

$$V = \int \frac{d\omega \cdot d}{A'M} \quad V' = \int \frac{d\omega\, d}{A'M} \qquad d\omega' = d\omega\, \alpha\beta\gamma$$

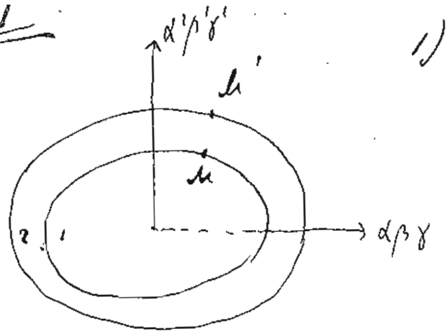
$$V' = V\alpha\beta\gamma$$

V' jest [illegible] na [illegible] [illegible] jest konstantem, dalej jest V jedną konstantą, dalej jest [illegible] Σ [illegible] [illegible]. Ale i [illegible] jedną [illegible] [illegible] konduktora, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] jest w [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] od [illegible] [illegible]. (Patrz dodatek I za [illegible] [illegible] [illegible])

— [illegible] —

[illegible]

Sl. 1



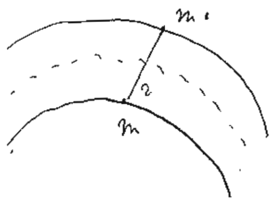
1) Ако су осовине елипсоида 1 и 2 αβγ, α'β'γ'. Координате су одговарајућих тачака M и M' xyz и x'y'z'

$$\frac{x}{x'} = \frac{\alpha}{\alpha'}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{\beta}{\beta'}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \quad \ldots \quad \text{I}$$

Елементарна запремина у M $dx\,dy\,dz$, у M' $dx'dy'dz'$ и однос је између

$$\frac{dx\,dy\,dz}{dx'dy'dz'} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'} \quad \ldots \quad \text{II}.$$

Атракција елипсоида хомогеног на спољну тачку своди се на атракцију тачке која се налази на конфокалном слоју услед трансформације елипсоида.



Потенцијал слоја 2 у тачки m $\rho\int\frac{dv'}{r} = V'$

〃 1 〃 m' $\rho\int\frac{dv}{r} = V$

$$V' = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma}\rho V \quad \ldots \quad \text{III}.$$

Ако се узме трансформација елипсоида 3 услед 1 и 2 имамо

$$\frac{V''}{V} = \frac{\alpha''\beta''\gamma''}{\alpha\beta\gamma}$$

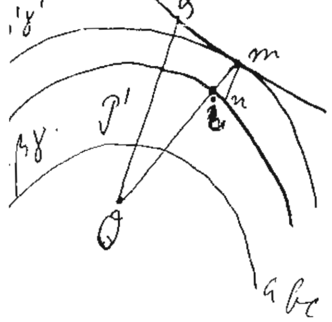
Ако се узме $X' = \frac{dV'}{dx}$, $X'' = \frac{dV''}{dx}$, $X = \frac{dV}{dx}$ имамо

$$\frac{X'}{X''} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha''\beta''\gamma''}, \quad \frac{X'}{X} = \frac{\alpha'\beta'\gamma'}{\alpha\beta\gamma} \quad \ldots \quad \text{IV}$$

из IV је јасно да једна компонента X, атракције слоја на спољну тачку.

Нађимо сада да је атракција слоја на тачку која се налази на површини у правцу нормале

$4\pi\rho\, m\, e$



$OQ = P'$, $mn = e$

$mn \sim OQn$

$$e = \frac{\overline{OQ}\cdot\overline{mi}}{\overline{Om}} = \frac{P'd\gamma'}{\gamma'}$$

xyz корд. тачке m.

$$P'^2 = \frac{1}{\sum\frac{x^2}{\alpha'^4}}$$

$$\cos(P'x) = -\frac{P'X}{\alpha'^2} \text{ etc.}$$

атракција $X'Y'Z'$ елипсоида $\alpha'\beta'\gamma'$ на m је

[illegible]

Ако у тачки m^* нађе одговарајућа m' у елементарној ... на на m одредити се dX, онда је из IV

$$\left(\frac{d\gamma'}{\gamma'} = \frac{d\gamma}{\gamma}\right)$$

$$dX = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}X' = -4\pi\rho m x \frac{\beta'^2_{\alpha\beta}}{\alpha'^3\beta'\gamma'}d\gamma$$

$$dy = -$$

$$dz = -$$

Ако су особине елипсоида $\alpha\beta\gamma^{***}$ $a\, b\, c$ супротно особине и ... с

$$\frac{b^2-c^2}{c^2} = \lambda^2, \quad \frac{a^2-c^2}{c^2} = \lambda'^2 \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = u$$

из:

$$\alpha'^2-\alpha^2 = \beta'^2-\beta^2 = \gamma'^2-\gamma^2 \quad и \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

налази се:

$$\beta' = \gamma\sqrt{u^{-2}+\lambda^2}, \quad \alpha' = \gamma\sqrt{u^{-2}+\lambda^2}, \quad \beta = \frac{\gamma b}{c}, \quad \alpha = \frac{\gamma a}{c}$$

$$z^2u^2 + \frac{y^2}{u^{-2}+\lambda^2} + \frac{x^2}{u^{-2}+\lambda_1^2} = \gamma^2 \;\ldots\; (1)$$

Из ових се једначина налазе, $\gamma, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ $\gamma' = \gamma/u$ и $\beta'^2 d\gamma = \gamma'^3 du$

Ако је маса елипсоида $M = 4/3\,\pi\rho abc$

$$dZ = -3Mm\frac{z}{c^3}\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}(1+\lambda'^2u^2)^{1/2}}$$

$$dY = -3Mm\frac{y}{c^3}\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{3/2}(1+\lambda_1^2u^2)^{1/2}}$$

$$dX = -3Mm\frac{x}{c^3}\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}(1+\lambda^2u^2)^{3/2}}$$

$$\frac{z^2}{c'^2} + \frac{y^2}{c'^2+b^2-c^2} + \frac{x^2}{c'^2+a^2-c^2} = 1$$

Границе су u о и c/c'

$$Z = -\frac{3Mmz}{c^3}\int_0^{c/c'}\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}(1+\lambda'^2u^2)^{1/2}}$$

$$Y = -\frac{3Mmy}{c^3}\;—$$

$$X = -\frac{3Mmx}{c^3}\;—$$

Ово се своди на интеграл $\mathcal{L} = \frac{3Mm}{c^3}\int_0^{c/c'}\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}(1+\ldots}$

$$Z = -z\mathcal{L}, \quad Y = -y\frac{d\lambda\mathcal{L}}{d\lambda}, \quad X = -x\frac{d\lambda'\mathcal{L}}{d\lambda'}$$

I). Elipsoid obrotowy spłaszczony $b = a, \quad \lambda' = \lambda$

$$Z = -\frac{3Mmz}{\lambda^3 c^3}\left(\lambda\frac{c}{c'} - \operatorname{arctg}\lambda\frac{c}{c'}\right)$$

$$Y = -\tfrac{3}{2}\frac{Mmy}{\lambda^3 c^3}\left(\operatorname{arctg}\lambda c/c' - \frac{\lambda c c'}{c'^2 + \lambda^2 c^2}\right)$$

$$X = -\tfrac{3}{2}\frac{Mmx}{\lambda^3 c^3}\left(\operatorname{arctg}\lambda c/c' - \frac{\lambda c c'}{c'^2 + \lambda^2 c^2}\right)$$

I. Elipsoid obrotowy wydłużony $c = b \quad \lambda = 0$

$$Z = -\tfrac{3}{2}\frac{Mmz}{\lambda'^3 c^3}\left[\frac{\lambda' c}{c'}\sqrt{1+\lambda'^2\frac{c^2}{c'^2}} - \log\left(\lambda'\frac{c}{c'} + \sqrt{1+\lambda'^2\frac{c^2}{c'^2}}\right)\right]$$

$$Y = -\tfrac{3}{2}\frac{Mmy}{\lambda'^3 c^3}\left[\frac{\lambda' c}{c'}\sqrt{1+\lambda'^2\frac{c^2}{c'^2}} - \log\left(\lambda'\frac{c}{c'} + \sqrt{1+\lambda'^2\frac{c^2}{c'^2}}\right)\right]$$

$$X = -\tfrac{3}{2}\frac{Mmx}{\lambda'^3 c^3}\left[\log\left(\lambda'\frac{c}{c'} + \sqrt{1+\lambda'^2\frac{c^2}{c'^2}}\right) - \frac{\lambda' c/c'}{\sqrt{1+\lambda'^2\frac{c^2}{c'^2}}}\right]$$

I. Aproksymacja elipsoidy spłaszczonej gdy mam rozwinięcia do [illegible] wyrazów czwartego stopnia.

Wtedy [illegible] z [illegible] rozwinięcia [illegible], niech $x = 0$. [illegible]

[illegible] za $c = c'$ i [illegible] λ^4

$$Z = -\frac{Mmz}{c^3}\left(1 - \tfrac{3}{5}\lambda^2\right)$$

$$Y = -\frac{Mmy}{c^3}\left(1 - \tfrac{6}{5}\lambda^2\right)$$

Aproksymacja G

$$G = \sqrt{X^2+Y^2} = \frac{Mm}{c^3}\sqrt{z^2+y^2}\left(1 - \tfrac{3}{5}\lambda^2\cdot\frac{z^2+2y^2}{z^2+y^2}\right)$$

Jednocześnie równanie [illegible]

$$(1+\lambda^2)z^2 + y^2 = c^2(1+\lambda^2). \qquad z^2+y^2 = c^2(1+\lambda^2)\left(1 - \frac{\lambda^2 z^2}{c^2}\right)$$

wobec tego mamy:

$$(z^2+y^2)^{1/2} = c\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 z^2}{c^2}\right)$$

$$\lambda^2\frac{z^2+2y^2}{z^2+y^2} = 2\lambda^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$G = \frac{Mm}{c^2}\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2 z^2}{2\, c^2}\right)\left[1-\tfrac{6}{5}\lambda^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{Mm}{c^2}\left[1-\tfrac{7}{10}\lambda^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\right]$$

Ако је l географска ширина тачке m (где се налази тачка ...) онда је:

$$\frac{z}{c} = \sin l$$

$$G = \frac{Mm}{c^2}\left(1-\tfrac{7}{10}\lambda^2\cos^2 l\right) \quad \ldots \quad (V)$$

Ово је убрзање ... за $m=1$. Ако ...

За центрифуг. убрзање:

$$-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c\cos^2 l$$

$$G = \frac{M}{c^2}\left(1-\tfrac{7}{10}\lambda^2\cos^2 l\right)-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 c\cos^2 l \quad \ldots \quad (VI)$$

Ако смо ... $G = g$ за ширину l_1 из $\overline{VI}$ ... можемо наћи $\frac{M}{c^2}$.

За Земљу је:

$c = \frac{40.000.000\,m}{2\pi}$, $T = 86400''$, $l_1 = 48°51'16''$, $g = 9.8088$

$$G = 9.830097 - 0.050704\cos^2 l \ldots$$

За сваку ширину l израчунавамо ... од тежине.

— Литература —

Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Dr. Heinrich Weber — I, II

Vorlesungen über die Théorie des Potentials — Dr. Franz Neumann

Vorlesungen über mathematische Physik Gustav Kirchhoff.

Cinematique H Poincaré

Potentiel Newtonien H. Poincaré

Theoria Matematica dello equilibrio dei corpi elastici. R. Marcolongo

Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide — Ostwald's Klassiker Nr. 19.
(Laplace, Ivory, Gauss, Chasles und Dirichlet).

Schuberts Sammlung

Resal Mécanique céleste.

Teorija elasticiteta [illegible]

(predavanja [illegible] 1905 [illegible] na Zagrebačkom univerzitetu)
matematičke fizike.

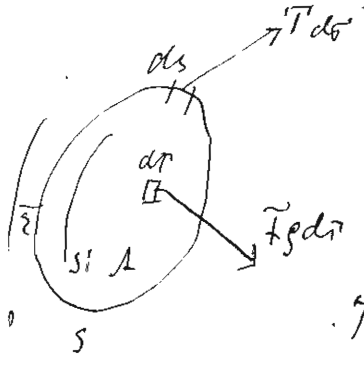
Prvi dio

Ravnoteža i ~~gibanje~~ kretanje kontinuirane mase.

1). [illegible] (aeropl[illegible]) [illegible]:

[illegible] (Principe de d'Alembert)

[illegible] kontinuirane



[illegible]:

1). Sila T'ds, [illegible]

2). sila Fg dτ „ [illegible].

T' je sila [illegible] a F [illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] Fg dτ [illegible]

[illegible]

[illegible] S i S', [illegible] S. [illegible] ε [illegible] ε = 0.000054 m.

1.

2. Jednačine ravnoteže.

Ako su komponente sile $F\rho d\tau$:

$$\rho X d\tau,\quad \rho d\tau Y,\quad \rho d\tau Z$$

a komponente sile $T ds$:

$$T_x\quad T_y\quad T_z$$

Momenti tih sila:

$$\rho[yZ - zY]d\tau,\quad \rho[zX - xZ]d\tau,\quad \rho[xY - yX]d\tau$$

$$\rho[yT_z - zT_y]d\tau \quad \ldots\ldots$$

Ako su koordinate točke, koja ima masu $dm = \rho d\tau$, $x\,y\,z$, sile su [illegible] $J_x\rho d\tau$, $-J_y\rho d\tau$, $-J_z\rho d\tau$, [illegible] J_x, J_y, J_z komponente ubrzanja [illegible] D'Alembert[illegible] su jednačine za [illegible] gibanje:

$$\iiint_V \rho[X - J_x)d\tau + \iint_S T_x d\sigma = 0$$

$$\int_V \rho[Y - J_y)d\tau + \int_S T_y d\sigma = 0$$

$$\int_V \rho[Z - J_z)d\tau + \int_S T_z d\sigma = 0$$

$$\int_V \rho[yZ - zY - yJ_z + zJ_y]d\tau + \int_S (yT_z - zT_y]d\sigma = 0$$

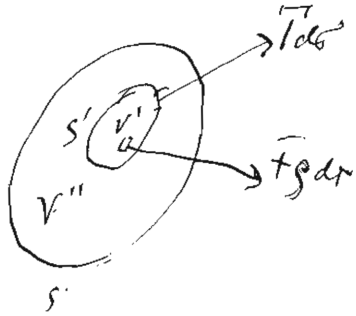
Iz ovih se jednačina za $J_x = J_y = J_z = 0$, dobivaju jednačine ravnoteže, koje su od [illegible].

$$\int_V \rho X d\tau + \int_S T_x d\sigma = 0 \quad \ldots \quad (II)$$

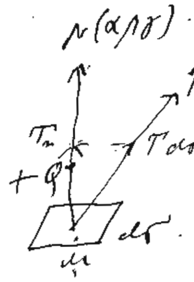
$$\int_V \rho[yZ - zY] + \int_S (yT_z - zT_y)d\sigma = 0.$$

3. [illegible] V', [illegible] T u F. T [illegible] V'' [illegible] V' [illegible] S'. [illegible] V' [illegible] S' [illegible] T [illegible] I u II [illegible] V', S' [illegible] V u S.

[illegible] F [illegible] V'.



4). [illegible] T. [illegible] $d\sigma$ [illegible] $x\,y\,z$, [illegible] $T d\sigma$. [illegible] $T d\sigma$ [illegible] $d\sigma$ [illegible] $d\sigma$, [illegible] N, [illegible] α, β, γ.

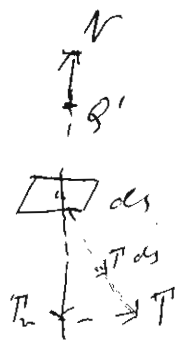


T [illegible] $d\sigma$.

[illegible] T, $T_x\ T_y\ T_z$ [illegible] $x\,y\,z$

18. [illegible] t.

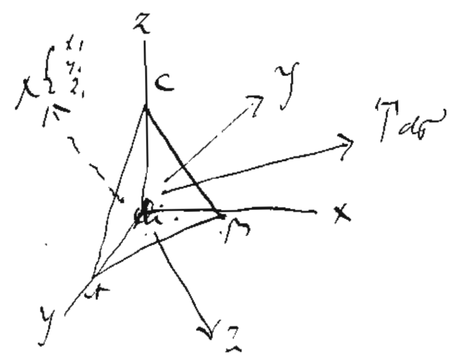
[illegible] T [illegible]



5). [illegible] T [illegible] $\alpha\ \beta.\ \gamma$.

[illegible] $dS' = dy\,dz$, dS_3 u [illegible] $dS = ABC$

[illegible] $x'y'z'$ [illegible] X [illegible] dS_1 [illegible]:



$$T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3$$
$$T_y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3$$
$$T_z = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3$$

[illegible]:

$$ds_1 = \alpha ds\,,\quad ds_2 = \beta ds\,,\quad ds_3 = \gamma ds$$

Jeśli [illegible] T_x, T_y T_z [illegible]

[illegible] od ds, [illegible]

[illegible] $-T_x$, $-T_y$, $-T_z$.

[illegible] ABCD [illegible]

[illegible]:

1). $\rho X d\tau$, $\rho Y d\tau$, $\rho Z d\tau$ .. [illegible]

ρ [illegible] $d\tau$ [illegible].

2) [illegible].

$$-\rho J_x d\tau,\ -\rho J_y d\tau\ -\rho J_z d\tau$$

3).

$$\begin{array}{lll} X_1 d\sigma_1 & Y_1 d\sigma_1 & Z_1 d\sigma_1 \\ X_2 d\sigma_2 & Y_2 d\sigma_2 & Z_2 d\sigma_2 \\ X_3 d\sigma_3 & Y_3 d\sigma_3 & Z_3 d\sigma_3 \\ -T_x d\sigma & -T_y d\sigma & -T_z d\sigma \end{array}$$

[illegible] I [illegible] X, Y, Z [illegible]:

$$\rho(X - J_x)d\tau + X_1 d\sigma_1 + X_2 d\sigma_2 + X_3 d\sigma_3 - T_x d\sigma = 0$$

albo

$$\rho(X - J_x)\frac{d\tau}{d\sigma} + X_1\alpha + X_2\beta + X_3\beta - T_x = 0$$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = h = 0.$$

[illegible]:

$$T_x = X_1\alpha + X_2\beta + \gamma X_3 \ \dots$$

[illegible]

[illegible]

-6- [illegible] [illegible]. Jeśli [illegible]

[illegible] S, [illegible] $d\sigma$, $\alpha\beta\gamma$ [illegible]

[illegible] S', [illegible] S'

може сматрати као површина, ако се узме да на [illegible] $d\sigma$ дејствују на спољашњој страни елементарна оптерећења. Нађене формуле за T_x, T_y, T_z које дејствују на [illegible] страни од ds, на спољашњој [illegible] јесу:

$$T_x = -(\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3)$$

$$T_y = -(\quad)$$

$$T_z = -(\quad)$$

Кад ово сменимо у једначине I и II имаћемо 6 једначина за равнотежу, [illegible]

$$\int_{v'} \rho (X - T_x) d\tau - \int_{S'} (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) ds = 0 \; . \; . \; I'$$

$$\int_{v'} \rho (yZ - zY - yT_x + zT_y) d\tau - \int_{S'} [\alpha (yZ_1 - zY_1) + \beta (yZ_2 - zY_2) + \gamma (yZ_3 - zY_3)] d\sigma = 0 \; . \; . \; II'$$

Применом обрасца [illegible]:

$$\iint_S \alpha X \, d\sigma = \iiint_V \frac{\partial X_1}{\partial x} d\tau \; . \; . \; . \; (1$$

написаћемо прву групу образаца:

$$\int_{v'} \left[\rho (X - T_x) - \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y} - \frac{\partial Z_1}{\partial z} \right] d\tau = 0$$

или ово:

$$\rho (X - T_x) = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}$$

$$\rho (Y - T_y) = \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} \; . \; . \; (III.$$

$$\rho (Z - T_z) = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z}$$

Ако се трансформише једначина II', применом [illegible] написаћемо:

$$\int_{S'} [\alpha (yZ_1 - zY_1) + \;..\;] d\sigma = \int_{v} \partial [\alpha (yZ_1 - zY_1) + \;..\;] \, \sigma$$

$$= \iiint_{v'} \left[y \left[\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial y} \right] - z \left[\frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right) + Z_2 - Y_3 \right]$$

или

$$\int_{v'} \left[y \left[\rho Z - \rho J_z - \frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial Z_2}{\partial y} - \frac{\partial Z_3}{\partial z} \right] - z \left[\rho Y - \rho J_y - \frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right] \right]$$

Из обе једначине и израза III налазимо да је

$$Z_2 = Y_3$$

и сличним путем добијамо, које се могу написати:

$$Y_3 = Z_2$$
$$Z_1 = X_3 \quad \ldots \quad (IV.$$
$$X_2 = Y_1$$

Једначине IV своде 9 компонената $X_1 X_2 X_3 \ldots$ на

6. Ако означимо са Ламеовим компонентама

$X_1 = N_1$ и $Y_3 = Z_2 = T_1$

$Y_2 = N_2$ $\quad Z_1 = X_3 = T_2$

$Z_3 = N_3$ $\quad X_2 = Y_1 = T_3$

изразићемо, када напишемо у Лагранжевим компонентама, онда ће једначине карактеристичне за еластична тела:

$$T_x = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma$$
$$T_y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma \quad - \quad - \quad V.$$
$$T_z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma$$

$$\rho(X - J_x) = \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}$$
$$\rho(Y - J_y) = \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \quad - \quad - \quad VI.$$
$$\rho(Z - J_z) = \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}$$

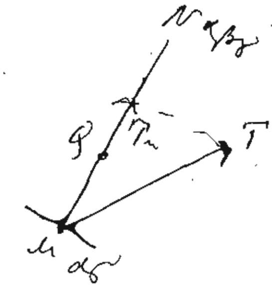
Ако означимо са

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{2} \left\{ N_1 \alpha^2 + N_2 \gamma^2 + N_3 \beta^2 + 2T_1 \beta\gamma + 2T_2 \alpha\gamma + 2T_3 \alpha\beta \right.$$

онда је јасно да је

$$T_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad T_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad T_z = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$$

7. Квадрик дилатације. Ако се у тачци М у деформисаном телу знају дилатације $N_1 N_2 N_3, T_1 T_2 T_3$ онда се функцијом може око тачке М $d\sigma$ дати једначином V! Ово се може представити геометријски.



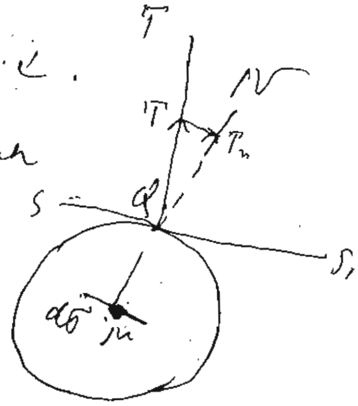
Ако је кос наклона T_n познато онда је:

$$T_n = \alpha T_x + \beta T_y + \gamma T_z$$

или

$$T_n = 2\varphi(\alpha\beta\gamma) = N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2\alpha\beta T_3 + 2\alpha\gamma T_2 + 2\beta\gamma T_1 \ldots L.$$

Знак од φ даје T_n одређује, ако је + онда је дилатација, ако је – контракција.



Ако на MN пренесемо дужину:

$$MQ = \frac{1}{\sqrt{T_n}}$$

Координате Q одредимо са $x' y' z'$ онда је

$$x' = \frac{\alpha}{\sqrt{T_n}}, \quad y' = \frac{\beta}{\sqrt{T_n}} \quad z' = \frac{\gamma}{\sqrt{T_n}}$$

Кад се ово смени у L налазимо квадрик:

$$N_1 x'^2 + N_2 y'^2 + N_3 z'^2 + 2T_1 y'z' + 2T_2 x'z' + 2T_3 x'y' = 1.$$

или

$$2\varphi(x'y'z') = 1 \ldots \quad E$$

Тачке Q леже на квадрику I за случај дилатације а контракције квадрику

$$2\varphi(x'y'z') = -1 \quad \text{јер је II онда } Q = \frac{1}{\sqrt{-T_n}}.$$

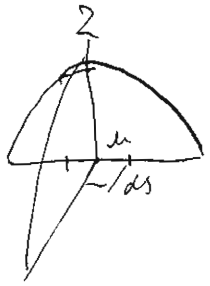
Према томе квадрик I или II М елемент $d\sigma$ и нормалу MN у пресеку нормалом је Q. Кад се ово зна онда је T_n

$$T_n = \frac{1}{MQ^2}$$

Из једначине $T_x = \varphi'_\alpha, \; T_y = \varphi'_\beta \; T_z = \varphi'_\gamma$ ... нормала на тангенцијалној равни у Q SS_1. Према томе T_n ... T_n ... нормалу ... T.

Из доказаног је јасно да квадрик ...

Главне равни и главни пресеци површине у другом р...

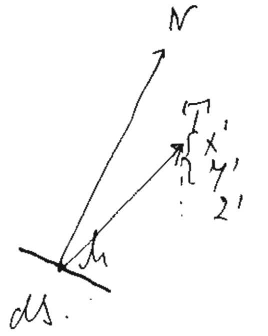


Ако се ds окреће у једној од главних равни координат... нормална је онда главној оси на оси симетрије MZ. Из овог излази да за сваку тачку M има три равни на којима површински напон, оне равни које налазимо у главном нормалном.

Ако се ове равни узму за координатне, једначина за N и T и $\varphi(x'y'z') = 1$ постаје. Нове су једначине $T_1 T_2$ и $N_1 = n_1$, $N_2 = n_2$, $N_3 = n_3$ и једначина је облика:

$$n_1 x^2 + n_2 y^2 + n_3 z^2 = \pm 1$$

$n_1\ n_2\ n_3$ су + за елипсоиде
" " − " хиперболоиде



8. Елипсоид еластичности. Ако је ds елемент кроз M и површински напон у M на ds и пренесемо одговарајући вектор T да оне леже на једном елипсоиду званом елип. еластичности.

Тачка T има ове изразе за своје координате:

$$x' = T_x = \varphi'_\alpha \qquad y' = T_y = \varphi'_\beta \qquad z' = T_z = \varphi'_\gamma \quad \ldots (1)$$

Ако се ове једначине реше по α, β и γ налазимо:

$$\alpha = A T_x + B'' T_y + B' T_z$$
$$\beta = B'' T_x + A' T_y + B T_z$$
$$\gamma = B' T_x + B T_y + A'' T_z$$

Кад се ове смене у:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

налазимо да је облика, која задовољава тачка T елипсоид, чији коефицијенти зависе од $N_1 N_2$. $T_1 T$ ... $N_1 N_2 N_3\ T_1 T_2 T_3$

Главне осе овог елипсоида окрећу се са главним елипсоидом и њихове су дужине једнаке величинама главних напона.

Ако се главне осе кроз M узму за осе координатног система $T_1 T_2 T_3$ су нуле, $n_1\ n_2\ n_3$ су величине главних напона.

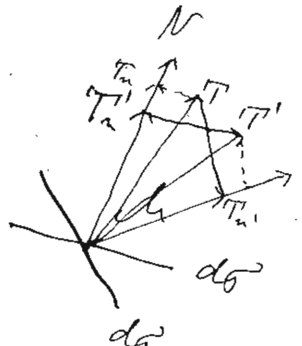
једначине с векторима:

$$T_x = n_1 \alpha, \quad T_y = n_2 \beta, \quad T_z = n_3 \gamma \quad и$$

елипсоид еластичности:

$$\frac{T_x^2}{n_1^2} + \frac{T_y^2}{n_2^2} + \frac{T_z^2}{n_3^2} = 1.$$

Из овог и ранијег елипсоида може се одмах рачунати вектор T.



-9- Реципрочност нормалних компонената. Ако су два елемента dσ, dσ' узети, онда је

$$T_{n'} = T'_n$$

Ово излази из односа:

$$T_{n'} = T_x \alpha' + \beta' T_y + \gamma' T_z$$

$$T_{n'} = \alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta + \gamma' \varphi'_z$$

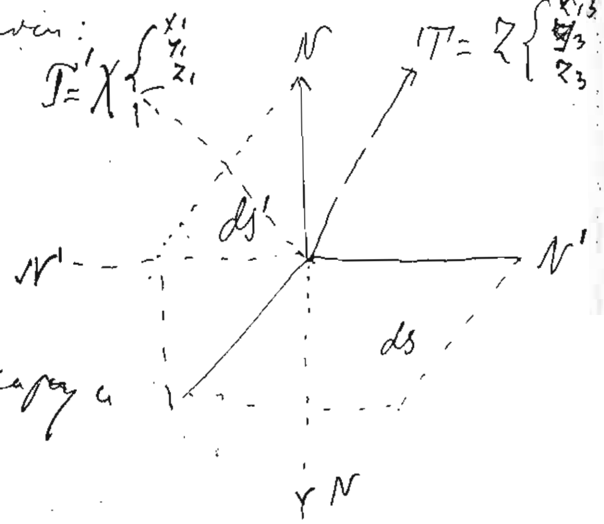
$$T'_n = \alpha \varphi'_{\alpha'} + \beta \varphi'_{\beta'} + \gamma \varphi'_{z'}$$

одакле је

$$T'_n = T_{n'}$$

Последица због овог имамо односе:

$$Y_3 = Z_2$$
$$Z_1 = X_3$$
$$X_2 = Y_1$$



$$T_{n'} = X_3 \Big) \; Z_1 = X_3$$
$$T'_n = Z_1$$

10- Применом координатног система нестају вектори N, T, настаје квадрика:

$$N_1 x'^2 + N_2 y'^2 + \ldots = \pm 1$$

и

$$N_1' x_1'^2 + N_2 y_1'^2 + \ldots = \pm 1.$$

/.

Примена напонских једначина на хидростатику, хидродинамику и аеростатику, аеродинамиком.

-11- Опште нам показују, да с права тела изложена дејству спољних сила деформишу тако, да унутрашње силе морају одговарати напонским једначинама. Ове су размотрене према чврстим равнима у којима се налазе, и напонске једначине важе за чврста тела.

Код течних и гасовитих тела опажамо о напону:

1). да су све унутрашње силе нормалне

2). да су нормални на елемент површине у коме се делују. Знаци да су тангенцијалне компоненте равне нули.

-12- Ако ове особине примене на напонске једначине ми, добијамо:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0 \quad \text{да су}$$

$$T_x = N_1 \alpha, \; T_y = N_2 \beta, \; T_z = N_3 \gamma.$$

Сила ради у правцу нормале N чији су косинуси углови α, β, γ.

$$\lambda N_x = T_x, \; \lambda N_y = T_y, \; \lambda N_z = T_z$$

$$\lambda N\alpha = T_x \quad \lambda N\beta = T_y \quad \lambda N = T_z$$

$$\frac{T_x}{\alpha} = \frac{T_y}{\beta} = \frac{T_z}{\gamma} \quad \text{одакле:} \quad N_1 = N_2 = N_3 = p.$$

-13- Када се од напонских компонената нормалне силе у једначине за равнотежу добија ове услове за хидростатику

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$

из ових се добијамо

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \dots = \rho [X dx + \dots]$$

$$dp = \rho [X dx + Y dy + Z dz] = \rho\, d[illegible]$$

14 - Карактеристичне једначине за течности и гасовита тела:

Поред наведених једначина ради за решење проблема потребна је још једна:

$$F(p\,\rho\,T) = 0$$

T је температура.

За гасовита тела важи Геј-Лисаков закон:

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha T)} = const$$

α = коефицијент ширења гасова

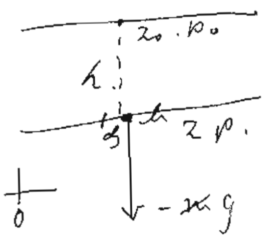
За течности

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\kappa T}$$

κ = коефицијент ширења течности

15. Пример. Нека је дата тешка течност под сопственом тежином.

$$X=0 \quad Y=0 \quad Z=-g \quad m=1.$$



$$dp = -\rho g' dz$$

$$p_0 - p = \int_{z_0}^{z} \rho g' dz = \rho g'(z - z_0) = \text{тежина стуба над } ds = 1.$$

16 - Једначине хидродинамике:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho(X - J_x)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho(Y - J_y)$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho(Z - J_z)$$

једначина карактеристична је

$$F(p\,\rho\,T) = 0$$

и $\rho d\tau = \rho_0 d\tau_0$ једначина континуитета.

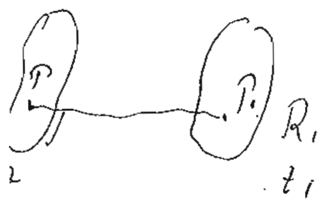
Из ових се пет једначина могу одредити пет непознатих: x, y, z, p, ρ.

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad J_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad J_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

— [illegible] —

[illegible] ([illegible]) [illegible]

-17- [illegible] R, [illegible] R₁ [illegible] t. [illegible] R [illegible] R₁ [illegible]. [illegible] x y z [illegible] P [illegible] P_1 $x_1\ y_1\ z_1$. [illegible] PP_1 [illegible] ξ, η, ζ. [illegible]



$t_1 > t$

$$\xi = x_1 - x$$
$$\eta = y_1 - y$$
$$\zeta = z_1 - z.$$

$$x_1 = f(xyzt), \quad y_1 = f_1(xyzt) \quad z_1 = f_2(xyzt).$$

-18-. [illegible] R [illegible] R₁, [illegible]

-19. [illegible] R, [illegible] R₁ [illegible]:

17. ...

$$\int \rho_1 d\tau_1 - \int \rho\, d\tau = \int \rho_1\, dx_1 dy_1 dz_1 - \int \rho\, dx\, dy\, dz$$

3

[illegible] dx_1, dy_1, dz_1, [illegible] $dx\ dy\ dz$ [illegible]

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x} dx + \frac{\partial x_1}{\partial y} dy + \frac{\partial x_1}{\partial z} dz$$
$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x} dx + \cdots$$
$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x} dx + \cdots + \frac{\partial z_1}{\partial z} dz.$$

Знамо из ранијег да је

$$D\,dx\,dy\,dz = dx_1\,dy_1\,dz_1$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Кад се ово смени у једначини и наведе се

$$\int_3 (\rho_1 D - \rho)\,d\tau = 0 \quad \text{или}$$

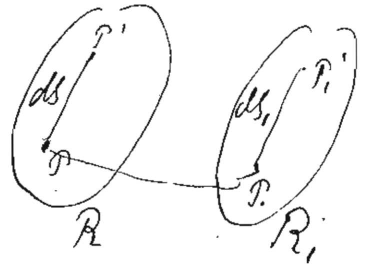
$$\rho_1 D - \rho = 0 \quad \ldots \quad I.$$

ово се једначина назива једн. континуитета.

0 - Дилатација кубна је однос између:

$$\frac{d\tau_1 - d\tau}{d\tau} = \frac{d\tau_1}{d\tau} - 1 = \frac{\rho}{\rho_1} - 1 = D - 1$$

–. Свака је деформација одређена са три вектора: вектор транслације, ротације и вектор који одређује промену облика. За сваку деформацију промену облика има 6. компонената деформација, које ћемо сада одредити.



Ако су дате две тачке у R

P која у координате x, y, z

P' .. $x+dx, \ldots$

$PP' = ds$

$P_1 = \ldots$ " $x_1 = x+u,\ y+v,\ z+w$

P_1' $x_1+dx_1,\ y_1+dy_1, \ldots$

онда вреде односи:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x}dx + \frac{\partial x_1}{\partial y}dy + \frac{\partial x_1}{\partial z}dz = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dy_1 = \text{—} \qquad =$$

$$dz_1 = \text{—} \qquad =$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$$

Ако у ds_1 сменимо горње једначине dx_1, dy_1, dz_1, добићемо квадратну једначину:

$$ds_1^2 = (1+2\varepsilon_1)dx^2 + (1+2\varepsilon_2)dy^2 + (1+2\varepsilon_3)dz^2$$
$$+ 2\gamma_1 dy\,dz + 2\gamma_2 dx\,dz + 2\gamma_3 dx\,dy \ldots$$

$$ds_1^2 - ds^2 = \sum 2\varepsilon_1 dx^2 + \sum \gamma_2 dx\,dz$$

$$1+2\varepsilon_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3,\ \gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$ су карактеристични коефицијенти за деформацију и они су функције од $x\, y\, z$.

-II- Линеарно истезање (дилатација) у елементарној ...

Ако је дужина елемента дужи ds пре истезања после истезања ds' онда је дилатација:

$$\delta = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{ds'}{ds} - 1$$

~~Коефицијент~~ линеарног истезања

Ако обележимо са $\alpha\, \beta\, \gamma$ косинусе правца PP' онда

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta \quad \frac{dz}{ds} = \gamma$$

и израз I из 2) је:

I) $$\frac{ds_1^2}{ds^2} = (1+2\varepsilon_1)\alpha^2 + (1+2\varepsilon_2)\beta^2 + (1+2\varepsilon_3)\gamma^2 + 2\gamma_1\beta\gamma + 2\gamma_2\alpha\gamma + 2\ldots$$

Да би нацртали криву и меру $\frac{ds_1}{ds}$ у P пренесимо на PP' дужину:

$$PQ = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\delta+1}$$

и обележимо координате Q са X, Y, Z

$$X = \frac{ds}{ds_1}\alpha, \quad Y = \frac{ds}{ds_1}\beta, \quad Z = \frac{ds}{ds_1}\gamma$$

[illegible] Φ [illegible]:

$$\Psi(xyz) = (1+2\varepsilon_1)X^2 + (1+2\varepsilon_2)Y^2 + \ldots \qquad = +1$$

[illegible] PQ [illegible]:

$$\delta = \frac{1}{PQ} - 1$$

$$\delta = 0, 2, 1.$$

[illegible] $PP' = ds$ [illegible] Ox, δ_1 [illegible] x [illegible]:

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0$$

[illegible] Φ [illegible]:

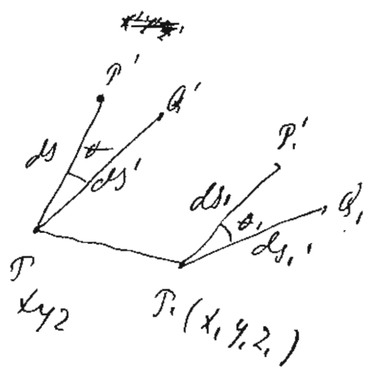
$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1+2\varepsilon_1} \qquad \delta_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} - 1 = \varepsilon_1$$

$$\delta_2 = \sqrt{1+2\varepsilon_2} - 1 = \varepsilon_2$$

$$\delta_3 = \sqrt{1+2\varepsilon_3} - 1 = \varepsilon_3 \quad \text{[illegible]}$$

[illegible] $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ [illegible] PP'!

23 - [illegible] P. [illegible] ds [illegible] ds' [illegible] P [illegible] $ds_1\ ds_1'$ [illegible] θ [illegible] θ_1, [illegible] $\theta_1 - \theta$ [illegible]



[illegible]:

$$ds\,ds'\cos\theta = dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'$$

$$ds_1\,ds_1'\cos\theta_1 = dx_1\,dx_1' + dy_1\,dy_1' + dz_1\,dz_1'$$

[illegible]:

$$x_1 = x+u \qquad y_1 = y'+v, \qquad z_1 = z'+w$$

[illegible] u, v, w [illegible] PP_1

Пројекције су P_1T_1':

$$dx_1 = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$dy_1 = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$
$$dz_1 = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

пројекције од P_1Q_1' су:

$$dx_1' = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx' + \frac{\partial u}{\partial y}dy' + \frac{\partial u}{\partial z}dz'$$
$$dy_1' = -$$
$$dz_1' = \frac{\partial w}{\partial x}dx' + \frac{\partial w}{\partial y}dy' + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz'$$

Кад ово пређашње смене у пређашњи израз за $\cos\theta'$ добија се израз:

1) ... $ds_1 ds_1' \cos\theta' = (1+2\varepsilon_1)dx\,dx' + (1+2\varepsilon_2)dy\,dy' + (1+2\varepsilon_3)dz\,dz'$
$+ \gamma_1(dy\,dz' + dz\,dy') + \gamma_2(dx\,dz' + dx'dz) + \dots$

Ако су косинуси праваца $ds\ ds'$, $\alpha\beta\gamma$ и $\alpha'\beta'\gamma'$ онда ... овако:

$$\frac{dx}{ds} = \alpha,\quad \frac{dy}{ds} = \beta \text{ etc.}$$

Кад ово сменим у 1 добијамо израз:

2) ... $\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1'}{ds'}\cos\theta' = (1+2\varepsilon_1)\alpha\alpha' + \dots + \gamma_1(\beta\gamma' + \gamma\beta') + \dots$

или ако одредимо са

3) ... $\Psi(\alpha\beta\gamma) = (1+2\varepsilon_1)\alpha^2 + \dots + 2\gamma_1\beta\gamma + 2\gamma_2\alpha\gamma + 2\gamma_3\alpha\beta$

и означимо 2 своје на одсек:

$$\frac{ds_1}{ds}\frac{ds_1'}{ds'}\cos\theta' = \frac{1}{2}\left[\alpha'\Psi_\alpha' + \beta'\Psi_\beta' + \gamma'\Psi_\gamma'\right] \quad \text{--- I}$$

Одавде је јасно да се θ' налази кад се зна елипсоид деформације 3.

Из I је јасно да је $\theta_1 = \pi/2$

$$\alpha'\Psi'_\alpha + \beta'\Psi'_\beta + \gamma'\Psi'_\gamma = 0$$

а то значи да су правци PP' и PQ' ортогонални у деформацији за тачку P.

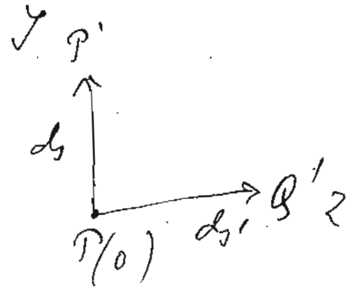
Значи да након [illegible] правца у деформацији, вредности се праве и [illegible]. Правци се ових осовина зову ...

Вредности коефицијената $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3$ се добијају из I ... да су то деформације угла (клизања), које су бине направљене са осовинама.

Нека ds и ds' падају у правце Oy и Oz не ј онда су ~~косинуси~~ угла:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 0$$

$$\alpha' = 0 \quad \beta' = 0 \quad \gamma' = 1$$



После деформације дужине $P_1P_1' = ds_1 = ds_1'$ биће изражене изразима:

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1+2\varepsilon_2} \qquad \frac{ds_1'}{ds} = \sqrt{1+2\varepsilon_3}$$

Тада је између њих угао θ_1. Ако се обележи у

биће

$$\gamma_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_2}\,\sqrt{1+2\varepsilon_3}\,\cos\theta_1 = (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\sin(\pi/2 - \theta_1) = \pi/2 - \theta_1$$

θ_1 је блиско према ε_2 и ε_3

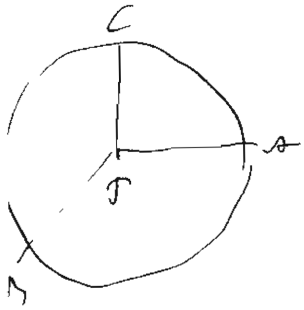
$$\theta = \pi/2 \quad \theta_1 = \pi/2 - \gamma_1$$

$\theta_1 - \theta = \gamma_1$ ... је угао деформације (угао клизања) стране yz око осовине OX.

$\gamma_2 =$ у угао клиз. стране || са XZ страном.

$\gamma_3 =$ " , || са XY страном

-24- __Главне гиратрисе.__ Ако се $\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$ означ[е] квад. гирације једне елипсоиде гиратрисом (ограде) у тачци P, онда је:



$$\Delta_1 = \frac{1}{PA} - 1$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{PB} - 1 \quad \ldots$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{PC} - 1$$

$PA,\ PB,\ PC$ се налазе из једначине:

$$\begin{vmatrix} (1+2\varepsilon_1 - S) & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & (1+2\varepsilon_2 - S) & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & (1+2\varepsilon_3 - S) \end{vmatrix} = 0$$

Корени ове једначине $S_1\ S_2\ S_3$ су $\frac{1}{PA^2},\ \frac{1}{PB^2},\ \frac{1}{PC^2}$. Кад се ово смени у ... имаћемо:

$$\Delta_1 = \sqrt{S_1} - 1,\quad \Delta_2 = \sqrt{S_2} - 1,\quad \Delta_3 = \sqrt{S_3} - 1$$

25 — __Инваријантни односи.__ Ако пренесемо са једног система коорд. на други, међу коеф. има односа који остају непроменљиви. За површину:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'yx + 2B''xy = H$$

су ови односи инваријантни:

$$A + A' + A''$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 - AA' - AA'' - A'A''$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''$$

или ако се ово примени на нашу елипсоиду, онда су непроменљиви односи:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3)$$

$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2$$

– [illegible] deformacja. [illegible] $P_1\,X_1\,Y_1\,Z_1$ [illegible] R [illegible]

– III –

– Tensorowa deformacja –

– [illegible] koeficjenty: $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ [illegible] koordynata punktu $P(XYZ)$, deformacji [illegible] punktu. [illegible] punktu P [illegible] od XYZ [illegible] deformacja tensorowa. [illegible]

[illegible]

[illegible] deformacji.

[illegible] R [illegible] R_1 [illegible] deformacji. [illegible] deformacji.

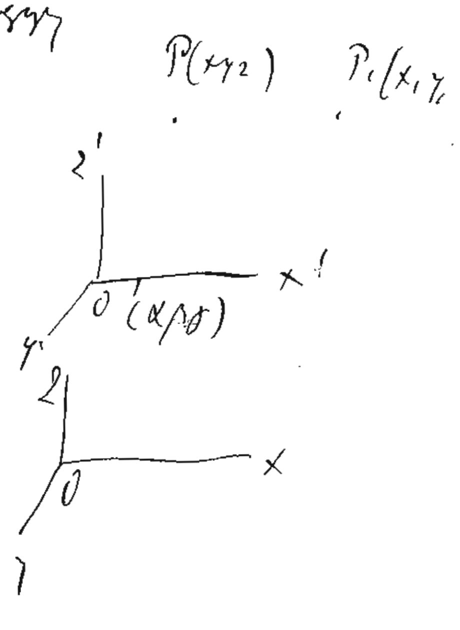
– [illegible] tensorowej transformacji [illegible]:

$$X_1 = a_{10} + (1+a_{11})X + a_{12}Y + a_{13}Z$$

$$Y_1 = a_{20} + \;\dots\; + \;\dots$$

$$Z_1 = a_{30} + a_{31}X + a_{32}Y + (1+a_{33})Z.$$

[illegible] koordynat [illegible] $\alpha\beta\gamma$ [illegible]



онда и сменом

$$x = \alpha + x', \quad y = \beta + y' \quad z = \gamma + z'$$

могу бити једначине:

$$x_1 = (1 + a_{11})x' + a_{12}y' + a_{13}z'$$

$$y_1 = a_{21}x' + (1 + a_{22})y' + a_{23}z'$$

$$z_1 = a_{31}x' + a_{32}y' + (1 + a_{33})z'$$

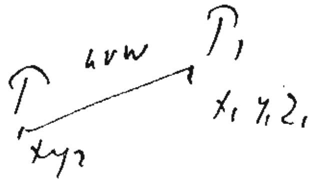
а $\alpha\ \beta$ и γ одредити из

$$a_{10} + (1 + a_{11})\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0$$

$$\text{———} = 0$$

$$\text{———} = 0$$

Јасно је помоћу њих да је хомогена трансформација дата једначинама:



$$x_1 = (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$y_1 = \text{———}$$

$$z_1 = \text{———} \quad \ldots \quad (I)$$

где су пројекције вектора PP'

$$u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \quad \ldots \quad (II)$$

$$w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

-28- Деформација тела. Хомогена је деформација тела онда кад у средини R има трансформацију које тачке остају и у промењеној средини R.

Ако је ово трансформ. OXYZ узето за коорд. и означимо са $x'y'z'$ коорд. тачке P а са $x_1'y_1'z_1'$ коорд. њене P_1 онда морају према I у 28 постојати односи у хомогеној деформацији:

$$x_1' = (1 + A_{11})x' + A_{12}y' + A_{13}z'$$

$$y_1' = \quad + A_{23}z'$$

$$z_1' = \quad \ldots \quad (1 + A_{33})z'$$

Претпоставимо да је тачка P на OX, а која је деформацијом одвојена P_1 на OX, тј. да су $y'z'$ нула и $y_1' z_1'$ нула за све тачке x'. За ово је потребно да је $\alpha_{31} = 0$. Слично се налази за друге коефицијенте који су били равни нули, и овој је координата дати у овој деформацији узајамне:

$$x_1' = (1+\alpha_{11})x', \quad y_1' = (1+\alpha_{22})y' \quad z_1' = (1+\alpha_{33})z' \quad \ldots \quad L.$$

Из једначина L је јасно да су α_{11}, α_{22}, α_{33} коефицијенти линеарног истезања у правцу координатних оса, тј. $\frac{x_1'-x'}{x'} = \alpha_{11}$ и т. д.

Из L је ово померање ове деформације,

које је:

$$u' = x_1' - x' = \alpha_{11} x' = \frac{\partial F}{\partial x'}$$
$$v' = \alpha_{22} y' = \frac{\partial F}{\partial y'}$$
$$w' = \alpha_{33} z' = \frac{\partial F}{\partial z'}$$

$$F = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11} x'^2 + \alpha_{22} y'^2 + \alpha_{33} z'^2)$$

Значи за ове деформације да су $u' v' w'$ изводи ове функције F.

Ако се вратимо сада опет на старе осе координата на које ... деформација ... I у II, то су коефицијенти:

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}$$

Одакле је функција:

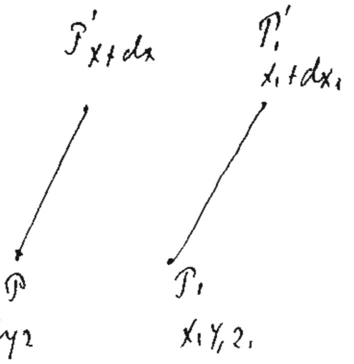
$$F = \tfrac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy)$$

из које ... изводи ... I у II:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

-IV-

Infinitezimalne deformacije [illegible]



-29- Ako uzmemo na [illegible] deformaciji [illegible] jednu glavnu tačku P u P' onda [illegible] deformaciji dve P_1 i P_1' [illegible] koordinate [illegible]:

[illegible]:

$$x_1 = x + u \quad , \quad y_1 = y + v \quad , \quad z_1 = z + w$$

$$x_1 + dx_1 = (x+u) + dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \quad \ldots \quad (1$$

Ako u [illegible] koordinatni [illegible] P onda je $x = y = z = 0$, a koordinate tačke P' $dx\ dy\ dz$ [illegible] sa $x'\ y'\ z'$ a koordinate tačke P_1' $x_1 + dx_1$ [illegible] sa $x_1'\ y_1'\ z_1'$ onda [illegible]

$$x_1' = u + x'\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + y'\frac{\partial u}{\partial y} + z'\frac{\partial u}{\partial z}$$

u [illegible]

$$y_1' = v + x'\frac{\partial v}{\partial x} + y'\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + z'\frac{\partial v}{\partial z} \quad \ldots \quad (2$$

$$z_1' = w + x'\frac{\partial w}{\partial x} + y'\frac{\partial w}{\partial z} + z'\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

-30- Kakav [illegible] između x_1' u x' [illegible] deformacije [illegible], [illegible]:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \ldots$$

u onda [illegible] PP_1 $(u\ v\ w)$ je [illegible] funkcije F

$$dF = u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

[illegible]

P [illegible]

– Ako [illegible] PP₁ mam, [illegible] od u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ...
[illegible] deformacji [illegible]
[illegible] koeffic[illegible] karakterystyczne[illegible]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

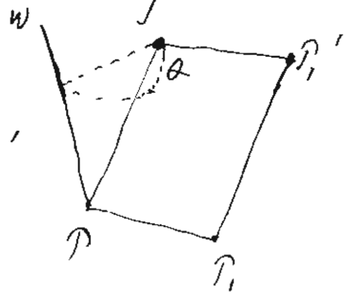
Mniejsze [illegible] deformacji:

$\delta_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} - 1 = \varepsilon_1, \quad \delta_2 = \varepsilon_2 \quad \delta_3 = \varepsilon_3$ Koeff. [illegible]

$\gamma_1 = \pi/2 - \theta_1 \quad \gamma_2 = \pi/2 - \theta_2, \quad \gamma_3 = \pi/2 - \theta_3$ Koeff. [illegible]

$\theta = \vartheta - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (Koeff. [illegible]

Rotacja deformowan[illegible]. [illegible] deformacji [illegible]: [illegible], rotacji i deformacji.



Ako [illegible] koordynat[illegible] punktu P' $x'y'z'$ a koordynat[illegible] P_1' $X_1'Y_1'Z_1'$ [illegible] projekcyj[illegible] wektora $P'P_1'$:

$$X_1' - X' = u + \frac{\partial u}{\partial x}x' + \frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial z}z'$$
$$Y_1' - Y' = v + \frac{\partial v}{\partial x}x' + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial z}z'$$
$$Z_1' - Z' = w + \frac{\partial w}{\partial x}x' + \frac{\partial w}{\partial y}y' + \frac{\partial w}{\partial z}z' \quad (\text{wz. } ?\ 30).$$

[illegible] P' [illegible] P_1' [illegible]. Ako [illegible] Pw [illegible] θ [illegible] $P_1P_2P_3$ (Komponent[illegible] od θ). Projekcyj[illegible] $u_1 v_1 w_1$. Ako [illegible] rotacja [illegible] dt, [illegible] $v = \frac{\theta}{dt}$ [illegible] $Px'Py'Pz'$:

$$p = \frac{p_1}{dt}, \quad q = \frac{q_1}{dt} \quad r = \frac{r_1}{dt}.$$

Rzuty przesunięcia od V na oś P'

$qz' - ry'$, $rx' - pz'$, $py' - qx'$

przesunięcia P'

$W_1 = (qz' - ry')dt = \beta_2 z' - \beta_3 z'$, $V_1 = \ .$ $\quad W_1 =$

Ako obie jednostki stałemu ... w zbadaniu

oznaczenia:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \dots$$

$$2p_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \, .$$

otrzymamy wyraz:

$$x_1' - x' = u + (\beta_2 z' - \beta_3 y') + \varepsilon_1 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_3 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_2 z'$$

2) ... $$y_1' - y' = v + (\beta_3 x' - \beta_1 z') + \tfrac{1}{2}\gamma_3 x' + \varepsilon_2 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_1 z'$$

$$z_1' - z' = w + (\beta_1 y' - \beta_3 x') + \tfrac{1}{2}\gamma_2 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_1 y' + \varepsilon_3 z'$$

Z tego widzimy, że przesunięcie każdej małej ... P'P' ... przesunięcia

1). u v w jako przesunięcia punktu ... PT_1

2). przesunięcia rzutów:

$u_1 = \beta_2 z' - \beta_3 y'$, $V_1 =$ $\quad W_1$

... obrotu ... około osi Pω

3). przesunięcia rzutów

$u_2 = \varepsilon_1 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_3 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_2 z'$

$V_2 =$ —

$W_2 =$ —

... funkcji:

$$F = \tfrac{1}{2}\left[\varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 y_1'^2 + \varepsilon_3 z_1'^2 + \gamma_1 y' z_1 + \gamma_2 x' z' + \gamma_3 y' x'\right)$$

[illegible]

-33 - [illegible]

$u\,dx + v\,dy + w\,dz$ [illegible]

[illegible]

34 - [illegible]

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

5. [illegible] $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$

[illegible]

[illegible]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

[illegible]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = 0 \quad - \quad - \quad -$$

[illegible]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

[illegible]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0 \quad \text{[illegible]}$$

$$u = f_1(y) + \varphi_1(z).$$

[illegible] u naszym za

$$v = f_2(z) + \varphi_2(x)$$

$$w = f_3(x) + \varphi_3(x)$$

z jednania:

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{wnosimy:}$$

$$\varphi_3'(y) + f_2'(z) = 0$$

y i z są niezależne

$$\varphi_3'(y) = -f_2'(z) = p_1$$

$$\varphi_1'(z) = -f_3'(x) = p_2$$

$$\varphi_1'(x) = -f_2'(y) = p_3$$

Integrujemy, dostajemy

$$\varphi_3(y) = p_1 y + a_1 \qquad f_2(z) = -p_1 z + \alpha_2$$

etc.

Kładąc ob. całkowite w u, v i w otrzymujemy

$$u = a_1 + p_2 z - p_3 y$$

$$v = a_2 + p_3 x - p_1 z$$

$$w = a_3 + p_1 y - p_2 x$$

Ale oczywiście [illegible] że $a_1\, a_2\, a_3$ [illegible] translacje a $p_1\, p_2\, p_3$ rotacje.

–36– Dowód że jeżeli przemieszczenia [illegible] funkcjami [illegible] $u = \frac{\partial F}{\partial x}$, $v = \frac{\partial F}{\partial y}$, $w = \frac{\partial F}{\partial z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

z obu tych jednań [illegible] F

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \ldots = \quad \text{(Zadanie Laplace-a)}$$

$$F = \frac{\alpha}{r} \quad \text{(funkcja harmoniczna)}$$

aby u [illegible] równe [illegible] w [illegible] ograniczonej [illegible] S [illegible] funkcja harmoniczna. F [illegible] konstanty.

Теорија еластичности

— Еластичност код чврстих тела.

— I —

Задатак је теорије ове двојаки: наћи деформације изазване познатим силама, и обратно наћи силе, које су изазвале деформације.

Овде ћемо се ограничити само на [illegible] и [illegible] је [illegible] силе као функције [illegible] деформације и [illegible] паралелне [illegible] сваке [illegible].

Ако са $x\,y\,z$ означимо коорд. тачке P а са $x_1\,y_1\,z_1$ тачке P_1 после деформације, [illegible] (Euler) и [illegible] (Лагранж) [illegible]. [illegible] трансформације

Ако се узме [illegible] P_1 [illegible] компоненте $N_1 N_2 N_3$, $T_1 T_2 T_3$ онда је [illegible] силе еластичности T (тј. T_x T_y T_z) у равнијем:

$$T_x = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma$$

$$T_y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma \qquad \ldots \quad (1)$$

$$T_z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma$$

где су $\alpha\,\beta\,\gamma$ косинуси нормале [illegible] елемента $d\sigma$.

[illegible] је [illegible] система карактерисана [illegible] $T_1 T_2 T_3$ $N_1 N_2 N_3$ [illegible]. Кад [illegible] основи деформације P [illegible] P_1 и однос је [illegible] координата

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w$$

У [illegible] стању [illegible] $N_1\,N_2\,T_1\,T_2 \ldots$ [illegible].

one zależą jedynie: $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ i funkcyami od x, y, z. Każda [illegible] jednostek [illegible] i [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Ako [illegible] [illegible] P oznaczymy [illegible] ρ, a X, Y, Z [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] N, T, X, [illegible] a [illegible] ρ [illegible] deformacyi [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] P, [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho\left[X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho\left[Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \quad \ldots \quad (II$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho\left[Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$

$$J_x = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{i t. d.})$$

[illegible] [illegible] P [illegible] deformacyi

[illegible] [illegible]: [illegible] deformacyi [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible], a [illegible] [illegible] [illegible] deformacyi (équilibre contraint) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

3. Wyrażenie N i T przez [illegible] [illegible] deformacyi. [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (Cauchy, Poisson) a [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] (Lamé) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Na [illegible] [illegible] [illegible] $N_1 N_2 ..$ [illegible] funkcyi od $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3\, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ i [illegible] t, [illegible] [illegible] od [illegible] deformacyi.

Ове $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ [illegible] деформације [illegible].

$$N_1 = f(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)$$
$$T_1 = \varphi(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3)$$

Како су N_1 и T_1 нуле у P пре деформације, [illegible] T_1 [illegible], облик је њихов:

$$N_1 = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + A_3\varepsilon_3 + B_1\gamma_1 + B_2\gamma_2 + B_3\gamma_3$$
$$T_1 = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \quad \ldots (3$$

[illegible] степени од ε и γ [illegible].

[illegible] $A_1 A_2 \ldots$ [illegible] константе и њихов је 36 за [illegible] средину.

Ако се [illegible] средина [illegible], онда [illegible] константе. Ако је [illegible] средина [illegible] конфигурације [illegible]. Најбоље је [illegible] изотропна средина.

Средина се зове изотропна кад је [illegible] око сваке тачке [illegible]. [illegible] P. Тада се онда константе [illegible] своде на

две [illegible].

[illegible] (quadrique directrice):

$$3). \quad \varphi(X'Y'Z') = N_1X'^2 + N_2Y'^2 + N_3Z'^2 + 2T_1Y'Z' + 2T_2Z'X' + 2T_3X'Y' = 1 \ldots$$

Координате [illegible] у P а осовине су Px' Py' Pz' [illegible] са осовинама Ox Oy Oz.

Деформације [illegible] (ε) [illegible]:

$$(\Xi)\quad \Psi(X'Y'Z') = (1+2\varepsilon_1)X'^2+(1+2\varepsilon_2)Y'^2+(1+2\varepsilon_3)Z'^2+2\gamma_1Y'Z'+2\gamma_2X'Z'+2\gamma_3 \ldots$$

Из једначина види се, да ће N и T функције од [illegible] јачине, јер ће се коефицијенти (Q) функције коефицијената од Ξ). Кад је систем изображен кончентрично [illegible] Т је исто у односу на које осовине око Т. Ове је исто Q и Ξ независна од коорд. система. Ако пренесемо на систем TX'', TY'' TZ'' онда се једначине квадрика:

$$Q)\quad N_1'X''^2 + N_2'Y''^2 + \ldots = 1$$

$$\Xi)\quad (1+2\varepsilon_1'')X''^2+(1+2\varepsilon_2'')Y''^2+ \ldots = 1$$

Одавде се виде коефицијенти оси, 1. и N дати [illegible] функције од ε_1' γ_1' .. Као што се N и T функције од ε .. γ .. Због тога могу осим на осовине [illegible] да обе две квадрике имају исте главне равни и [illegible] кристалне [illegible].

За имају исте главне равни узећемо и ако [illegible] систем TX TY TZ, који се поклапа са главним равнима квадрика Ξ, како се [illegible] деформ[illegible] [illegible], онда квадрик Q има исте равни за [illegible]. На осовинама обе ове једначине квадрике:

$$4)\ldots Q)\quad \Phi(XYZ) = n_1X^2 + n_2Y^2 + n_3Z^2 = 1$$

$$5)\ldots \Xi)\quad \Psi(XYZ) = (1+2e_1)X^2+(1+2e_2)Y^2+(1+2e_3)Z^2 = 1$$

Коефицијенти n_1 n_2 n_3 дати су као функције од e_1 e_2 e_3 изражене [illegible] независна од коорд. система, а како се сад $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$, из једначине [illegible] се:

$$n_1 = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$$

Ако се осовине TY и TZ замене коефицијент у једначини 4 мењају се e_2 и e_3 и у 5 [illegible], да остане непромењен мора:

$$A_2 = A_3$$

Према овоме је:

$$n_1 = A_1 e_1 + A_2(e_2+e_3)$$

или

$$n_1 = (A_1 - A_2)e_1 + A_2(e_1+e_2+e_3) \quad \dots \quad 6.$$

$e_1+e_2+e_3 = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \theta$ је коефицијент кубне дилатације и ако са [illegible] означимо разлику од две константе

$$n_1 = -\lambda\theta - 2\mu e_1 \quad \dots \quad 7.$$

применом осовина Tx, Ty, Tz налазимо једначине за n_2 и n_3

$$n_2 = -\lambda\theta - 2\mu e_2$$
$$n_3 = -\lambda\theta - 2\mu e_3 \quad \dots \quad 8$$

Када у нађене једначине за $n_1\, n_2\, n_3$ смене у 4 налазимо:

$$\Phi(XYZ) = -\mu\Psi(XYZ) - (\lambda\theta - \mu)(X^2+Y^2+Z^2) \quad \dots \quad 9.$$

где је [illegible] квадратна функција [illegible].

Ако у ову једначину ставимо осовине Tx' Ty' Tz' добијамо одмах:

$$N_1 X'^2 + N_2 Y'^2 + N_3 Z'^2 + 2T_1 Y'Z' + 2T_2 Z'X' + 2T_3 X'Y' = -\mu[(1+2\varepsilon_1)X'^2 + (1+2\varepsilon_2)Y'^2 + (1+2\varepsilon_3)Z'^2 + 2\gamma_1 Y'Z' + 2\gamma_2 Z'X' + 2\gamma_3 X'Y'] - (\lambda\theta-\mu)(X'^2+Y'^2+Z'^2)$$

Из обе се једначине налазе једначине за N и T и даће овим изразима:

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_1 \qquad T_1 = -\mu\gamma_1$$
$$N_2 = -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_2 \qquad T_2 = -\mu\gamma_2$$
$$N_3 = -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_3 \qquad T_3 = -\mu\gamma_3$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \gamma_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\ \gamma_3 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

-5- Константе λ и μ карактеришу еластичност тела изотропних. Узимајући [illegible] претпоставку

$$\lambda = \mu$$

за чврста тела. Ако се [illegible] [illegible] течности се узима да је:

$$\lambda + 2\mu = 0$$

За течности је $\mu = 0$ јер нема тангенцијалних [illegible]

Однос λ/μ узима се као карактеристични коефицијент [illegible] еластичности (Kirchhoff). Неки узимају [illegible] $\mu > 0$ $3\lambda + 2\mu > 0$ (Duhem)

-6- Ако ставимо вредности за N и T [illegible] у II за кретање, за одредбу u, v, w као функције $x y z t$ добијамо ове једначине:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho X = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \rho Y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \ldots \quad (III)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + \rho Z = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Ове се једначине могу и овако написати:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}\right] + \rho X = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и сличне остале две.

У овако општем проблему треба наћи u, v и w као функције $x y z$ и t, које задовољавају једначине III заједно [illegible] које [illegible] неодређеним једначинама. За [illegible] до [illegible] [illegible] решења, [illegible] да се [illegible] дати за u, v и w [illegible] једначина III заједно [illegible]

[illegible]

1). [illegible] u, v, w [illegible] $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ [illegible] $t = 0$ [illegible]

2). [illegible]

[illegible] III [illegible] $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$.

— II —

[illegible]

[illegible] (equilibr contraint) [illegible] u, v, w [illegible] $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \ldots$

[illegible]

$$
\begin{cases}
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho X = 0 \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho Y = 0 \\
(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho Z = 0
\end{cases} \qquad \ldots \quad 1.
$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

[illegible] u, v, w [illegible] $x\, y\, z$.

[illegible] $u\, v\, w$ [illegible]

1). [illegible] $u\, v\, w$ [illegible]

). [illegible] Fedb. [illegible] $\alpha\, \beta\, \gamma$ [illegible] a $X_e d\sigma$, $Y_e d\sigma$, $Z_e d\sigma$ komponenty sił. Obie siły [illegible] wyrażają się wzorami $T_x d\sigma$, $T_y d\sigma$, $T_z d\sigma$. Wówczas X_e [illegible] względem odnosi:

$$X_e d\sigma + T_x d\sigma = 0$$

Kiedy w obu [illegible] [illegible] T_x [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]:

$$X_e + N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma = 0$$
$$Y_e + T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma = 0 \qquad \ldots \qquad (?)$$
$$Z_e + T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma = 0$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

3). [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] deformacji. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] siły X_e Y_e Z_e a [illegible] [illegible] [illegible] za u, v i w.

§. 9. Kiedy [illegible] [illegible] za N_1 N_2 T_3 [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\frac{du}{dn} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$X_e = \lambda\theta\alpha + \mu\frac{du}{dn} + \mu\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

czyli

$$X_e = \alpha\lambda\theta + \mu\frac{du}{dn} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha u + \beta v + \gamma w\right]$$
$$Y_e = \beta\lambda\theta + \mu\frac{dv}{dn} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha u + \beta v + \gamma w\right]$$
$$Z_e = \gamma\lambda\theta + \mu\frac{dw}{dn} + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha u + \beta v + \gamma w\right]$$

§. 10. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] u, v, w [illegible] w [illegible] funkcji φ.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Овде су ротације [illegible] [illegible] и [illegible] [illegible] су:

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \;\ldots$$

За овај случај [illegible] [illegible] [illegible] једначина [illegible]

$$\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi.$$

Одакле:

$$\Delta u = \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \Delta v = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \Delta w = \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

и једначине су (1:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho X &= 0\\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho Y &= 0 \quad \ldots \quad (3.\\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \theta}{\partial z} + \rho Z &= 0
\end{aligned}$$

Ове су једначине сличне са хидродинамичким.

Ако су $X\ Y\ Z$ изводи какве функције U

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

једначине 3 редом помножене са dx, dy, dz и [illegible] дају једначину

$$(\lambda + 2\mu)\, d\theta + \rho\, dU = 0$$

или

$$(\lambda + 2\mu)\,\theta + \rho U = 0 \;\ldots \quad (I.$$

Граничне су једначине, опште су:

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \;\ldots \quad T_1 = -2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}$$

$$\begin{aligned}
X_e &= \lambda\theta\alpha + 2\mu \frac{du}{dn}\\
Y_e &= \lambda\theta\beta + 2\mu \frac{dv}{dn} \quad \ldots \quad (II.\\
Z_e &= \lambda\theta\gamma + 2\mu \frac{dw}{dn}
\end{aligned}$$

Примери

§. 16 - Испитивање напона и деформација хомогене изотропне средине (Lamé).

Задаје се притисак P (уједначен) ...; ... површине ... PdS на површини. (... ...), ... коефицијенте (...) ...

Овде ће се напони и једначине:

$$X_e = -P\alpha, \quad Y_e = -P\beta \quad Z_e = -P\gamma$$

Граничне услове:

$$
\begin{aligned}
P\alpha &= N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma \\
P\beta &= T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma \qquad \ldots \quad 1. \\
P\gamma &= T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-P\alpha &= \lambda\alpha\theta + 2\mu\frac{du}{dn} = \lambda\alpha\theta + 2\mu\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}\right] \\
-P\beta &= \lambda\beta\theta + 2\mu\frac{dv}{dn} = \ldots \\
-P\gamma &= \lambda\gamma\theta + 2\mu\frac{dw}{dn} = \ldots
\end{aligned}
$$

Запреминске ... једначине за ...:

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u &= 0 \\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v &= 0 \qquad \ldots \quad 2. \\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w &= 0
\end{aligned}
$$

Пошто је притисак P ... (компресија) ... Померања u, v, w су облика:

$$u = cx, \quad v = cy, \quad w = cz \quad \ldots \quad I.$$

где је c непознат коефицијенат.

Овде је ... да су u, v, w изводи функције

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\left[cx^2 + cy^2 + cz^2\right] \quad \ldots \quad 3.$$

$3c = \theta = k$ (constan ... једначине 2 су задовољене. Из једначине ... c имамо:

$$P = -\left[3c\lambda + 2c\mu\right]$$

$$C = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} \qquad II.$$

Ово померање такво да свака тачка P лежи на ... тачка P помера у правцу OP за дужину cPO. ... највећу померању ако и другој ... са потенцијом.

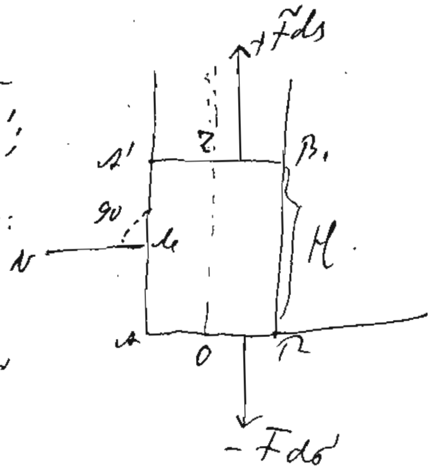
Коефицијенат стишљивости. Ако је запремина тела пре деформације V, после је V − δV, коефицијенат:

$$q = \frac{1}{P}\frac{\delta V}{V} = -\frac{\theta}{P} = -\frac{3c}{P} = \frac{3}{3\lambda+2\mu} \quad \ldots (4)$$

је коефиц. стишљивости.

Истезање лонгитудиналне праве призме, фракцијом ... са основицама. Сила F дејствује на AB и A'B'; AA' и BB' нису оптерећене.
u, v, w морају задовољавати ове граничне услове:

Једначине за унутрашње тачке:



$$0 = N_1\alpha + T_3\beta$$
$$0 = T_3\alpha + N_2\beta$$
$$0 = T_2\alpha + T_1\beta$$

јер је нормала на бочним површинама 90° са OZ и $\gamma = 0$.

За површине основица:

$0 = T_1$	$0 = T_1$	$\alpha = \beta = 0$ и за AB и за A'B'
$0 = T_2$ за A'B'	$0 = T_2$	$\gamma = -1$ за AB,
$-F = N_3$	$+F = -N_3$	$\gamma = +1$ „ A'B'.

Једначине 1 и 2 као и неодређене једначине можемо задовољити обичним хомогеним померањима:

$$u = ax \qquad v = ay \qquad w = cz$$

одакле је функција

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\left[a(x^2+y^2) + cz^2\right]$$

$$\theta = 2a + c$$

Из једначине II у 10 имамо:

$$0 = N_1 = N_2 = -\lambda(2a+c) + 2\mu a$$
$$-F = N_3 = -\lambda(2a+c) - 2\mu c$$

Из ових [illegible] једначина налазимо вредности коеф. a и c

$$a = -\frac{F}{2\mu}\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}, \qquad c = \frac{F}{\mu}\frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}$$

Контракција у попречном смеру је a негативно а истезање у правцу осовине је c позитивно.

Ако је дужина цилиндра H и се оптерети [illegible] F, онда је [illegible] за δH; Коеф. еластичности (Young-ов) је E и он је:

$$E = \frac{FH}{\delta H} = \frac{F}{c} = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$$

Ако се овај коефицијенат E упореди са [illegible] q [illegible]:

$$Eq = \frac{3\mu}{\lambda+\mu}$$

Ако се узме [illegible] Коши-ева λ = μ

$$Eq = 3/2$$

Однос $-a/c$ и зове се контракција [illegible] [illegible] и он је:

$$-\frac{a}{c} = +\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

за $\lambda = \mu$

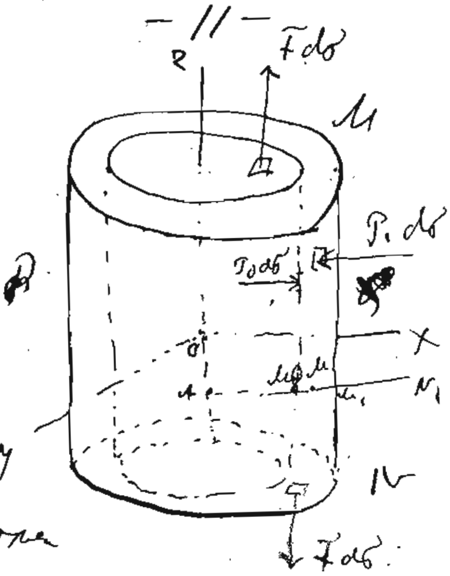
$$-\frac{a}{c} = \frac{1}{2}.$$

§ 13. Равнотежа [illegible] суда. Дат је [illegible], [illegible] изотропно тело ограничено са два [illegible]. Ово тело [illegible] [illegible] и [illegible], [illegible] је [illegible] [illegible] и [illegible] [illegible] равнотежу. (Lamé).

Нека је почетак Коор. система у O. [illegible] тачке M, [illegible] [illegible] [illegible] Координате x y z [illegible] r и z ($r^2 = x^2+y^2$).

Услед [illegible] тачке M и [illegible] у [illegible] [illegible] и [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Компоненте: ξ [illegible] r и W по OZ.

Претпоставимо да ξ зависи само од r а W од z у изразима за u, v, w одмах:



$$u = \xi \frac{x}{r}, \quad v = \xi \frac{y}{r} \quad w = cz \quad \dots \quad 1.$$

u v и w су изводи од функције φ:

$$d\varphi = \xi \frac{x\,dx + y\,dy}{r} + c\,z\,dz = \xi\,dr + c\,z\,dz$$

$$\varphi = \int \xi\,dr + \frac{1}{2} c z^2$$

Да би услови једначине непрекидности били задовољени треба да је $\theta = const.$ или

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \frac{d\xi}{dr}\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^3}\xi + \frac{d\xi}{dr}\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^3}\xi + c$$

или

$$\theta = \frac{d\xi}{dr} + \frac{\xi}{r} + c = \text{конст.} = a$$

или

$$\frac{dr\xi}{dr} = 2ar \qquad \xi = ar + \frac{b}{r} \quad \dots \quad 2.$$

a и b су константе.

Граничне једначине одмах:

$$X_e = \lambda\theta\alpha + 2\mu \frac{du}{dn} \quad \dots \quad 3.$$

За базу M $\alpha = \beta = 0$ $\gamma = 1$, $X_e = Y_e = 0$ $Z_e = F$

из 3 је одмах:

$$F = \lambda\theta + 2\mu\left[\frac{dw}{dz}\right] = \lambda\left[\frac{d\xi}{dr} + \frac{\xi}{r} + c\right] + 2\mu c$$

$$F = \lambda[2a + c] + 2\mu c \quad \dots \quad I.$$

За ~~основу~~ базу N добија се исти резултат.

Ако означимо са r_0 и r_1 полупречнике унутрашњег и спољашњег цилиндра а са P_0 и P_1 [illegible], како су [illegible] до [illegible] услови [illegible] у правцу

За спољну површину у тачки M_1 ~~[illegible]~~ $\gamma = 0$ β $\alpha = 1$ али је у правцу x-ске осовине: $\frac{du}{dn} = \frac{du}{dx}$ ...

$$\xi = ax + \frac{b}{x}$$

$u = ax + \frac{b}{x}$ $v = 0$ $w = cz$

$$\frac{du}{dx} = ax + \frac{b}{x} \qquad 0 \qquad 0$$

$$X_e = -P_1 \quad Y_e = Z_e = 0$$

$$-P_1 = \lambda(2a+c) + 2\mu\left(a - \frac{b}{r_1^2}\right) \quad \ldots \quad (II.$$

За унутрашњу површину у којој $\alpha = -1$, $\beta = \ldots$

$$\frac{du}{dn} = -\frac{du}{dx} \ldots\ ; \quad X_e = P_0 \quad Y_0 = Z_0 = 0$$

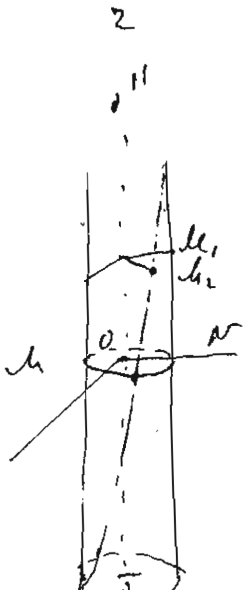
$$P_0 = -\lambda(2a+c) - 2\mu\left(a - \frac{b}{r_0^2}\right) \quad \ldots \quad (III$$

Из I, II и III налазимо a, b, c

$$a = \frac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \frac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_1^2 - r_0^2} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \bar{F}$$

$$b = \frac{1}{2\mu} \frac{r_0^2 r_1^2 (P_0 - P_1)}{r_1^2 - r_0^2}$$

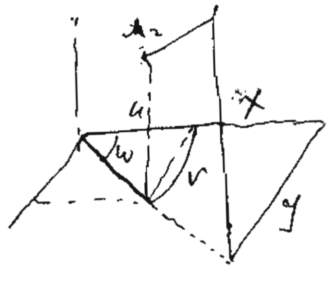
$$c = -\frac{\lambda}{\mu(3\lambda+2\mu)} \frac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \bar{F}$$



§14. Проблем St-Venant-a (Торзија) Основне претпоставке у [illegible] еластичности од Сен Венана. Овде ћемо узети у разматрање само случај торзије.

Нека је дат један шупљи цилиндар [illegible] узећемо неке од карактеристичне површине [illegible]. Облик [illegible] нека је непознат. Деформација нека је оваква: да свака [illegible] која је пре деформације био [illegible] ротира око осовине [illegible] одређени угао [illegible]. Ова је осовина (O'O'') иста за све [illegible]. Угао ротације је пропорционалан са одстојањем од средњег пресека (средњи пресек се не мења). Према овоме узимамо [illegible] подлеже ротацији.

Ако је тачка осовине у O'O'', пресек у пресеку који [illegible] MN.



Ако су координате тачке M₁ пре померања биле x y z онда [illegible] померања биће u, v, w и тачка M₁ дође у M₂. [illegible] претпоставка је:

$$u = -wzy \quad v = wzx \quad , \quad w = \omega\varphi(xy) \quad \ldots \quad (1$$

ω константа, ωz мали угао обртања.

Питање је какве су мале деформације за облик увртања шипке. Овај је проблем одређен разматрањем.

Ако је обичан конац који је пре деформације || осовини дат својим једначинама $x = x_0$, $y = y_0$, после деформације је:

$$x = x_0 - \omega z y_0 \qquad y = y_0 + \omega z x_0$$

Остаје права линија али не и || са OZ.

Из одређене дилатације, налазимо да је:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и компоненте су тангенцијалних сила из ј. 4.

$$N_1 = N_2 = N_3 = 0$$

$$-T_3 = T_2 = \mu\omega\left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad \dots \quad 1.$$

$$T_1 = \mu\omega\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

Једначина и неједначина за равнотежу своди се на

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \quad 2.$$

Ако се узме да никакве силе не дејствују на бочне површине из једначина граничних:

$$T_1\alpha + T_1\beta + N_0 = 0.$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta - y\alpha + x\beta = 0 \quad \dots \quad 3.$$

Једначине 2 и 3 одређују функцију φ.

Ако хоћемо да се φ одређује потпуно [?] да је $\varphi = 0$ за $x = 0$ $y = 0$, али да се тачке осовине не померају.

За основне површине су $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 0$ и $\gamma = -1$ $\alpha = \beta = 0$ које основице:

$$T_x = T_2 = \mu\omega\left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

$$T_y = T_1 = \mu\omega\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \quad \dots \quad 4.$$

$$T_2 = N_3 = 0.$$

[illegible]

[illegible] dz [illegible]

moment [illegible] M

$$M = \int \left(x T_y - y T_x \right) dz = \mu \omega \left[\int (x^2 + y^2)\, dz + \int \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \dots \right.$$

[illegible] M [illegible]

[illegible] Komponenty:

$$X' = \mu \omega \int \left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dz \,, \quad Y' = \mu \omega \int \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dz$$

Ako X' i Y' [illegible]

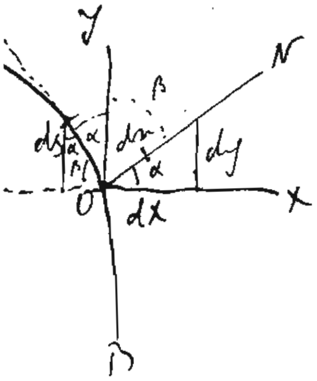
§ 15. [illegible]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \quad (1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \beta - y \alpha + x \beta = 0 \quad \dots \quad (2.$$

[illegible] funkcyj

$$\chi = \varphi + i \psi$$



φ i ψ [illegible] od $z = x + iy$.

[illegible] (AB) [illegible] xy [illegible]

Ako n (normalny) i s (łuk) [illegible] od x, y

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} = \alpha \,, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} = \beta$$

[illegible]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

[illegible] 2. [illegible]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial s}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$2\Psi = r^2 - C \quad \ldots \quad (3.$$

Funkcye Ψ i Φ zadowalają równaniu

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (4.$$

Z równania 4 [illegible] do Ψ [illegible] równania 3. [illegible]

St. Venant podał [illegible]. Znane z χ wyprowadzony [illegible]

Niech $\chi = \text{const.}$ wtedy jest $\chi = \varphi + i\psi$

$\varphi = K$ (w 3 jest) $r^2 = C$ znaczy przekrój kołowy. Przesunięcia [illegible] ($u = -wzy$, $v = wzx$, $w = wK$.) konstante.

Ciśnienia:

$$T_1 = \mu w x \qquad T_2 = -\mu w y.$$

Wypadkowa jest prostopadła:

$R = \mu w r^2$ [illegible]

Niech $\chi = -iaz^m$, a konstante a i m.

$$z = re^{i\theta}$$

$$-iar^m e^{im\theta} = \varphi + i\psi = ar^m \sin m\theta - iar^m \cos m\theta$$

$$\varphi = ar^m \sin m\theta, \qquad \psi = -ar^m \cos m\theta$$

Przesunięcia wzdłuż osi $w = a w r^m \sin m\theta$

Komponenty [illegible]:

$$T_1 = \mu w\left[r\cos\theta + am\, r^{m-1}\cos(m-1)\theta\right]$$

$$T_2 = -\mu w\left[r\sin\theta - am\, r^{m-1}\sin(m-1)\theta\right]$$

wypadkowa jest

$$R = \mu w\sqrt{r^2 + a^2 m^2 r^{2m-2} + 2am\, r^m \cos m\theta}$$

Dla $r = 0$, $m > 1$ [illegible] $\sin m\theta = 0$, $\cos m\theta = -1$ [illegible] $= \frac{2m-1}{m}$ [illegible] $m a r^{m-2} = 1$ [illegible]

Maksymum jest R

$$R = \mu w\left(r + am\, r^{m-1}\right) \quad \text{dla} \quad \cos m\theta = 1.$$

§ 16. Сфера. Нека је шупља сфера у коју с једнаким нормалним притиском сферне; спољни и унутрашњи притисци нормални $-P_1$ и $-P_0$ на спољашњој и унутрашњој сфери.

Ако је O центар сфере, M једна тачка у сфери $OM = r$ онда је

$$u = x\psi(r) \quad v = y\psi(r) \quad w = z\psi(r)$$

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \psi(r)\,r\,dr = d\varphi(r) \quad \dots \quad (1)$$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Неодређене једначине:

$$(\lambda+2\mu)\frac{d}{dx}\Delta\varphi = 0 \quad (\lambda+2\mu)\frac{d}{dy}\Delta\varphi = 0 \quad (\lambda+2\mu)\frac{d}{dz}\Delta\varphi = 0$$

Како $\lambda+2\mu$ није нула то је

$$\Delta\varphi = C$$

одакле је

$$\varphi = \frac{Cr^2}{6} + \frac{\alpha}{r} \quad \dots \quad (2)$$

α и C ћемо одредити из граничних услова:

$$-NP_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx} = \lambda C + 2\mu\left[\frac{\alpha}{r^3}\left(\frac{3x^2}{r^2}-1\right)+\frac{C}{3}\right]$$

Ставимо овде $x = r = r_0$, $x = r_1 = r_1$

имамо:

$$P_0 = \left(\lambda+\frac{2\mu}{3}\right)C + \frac{4\alpha\mu}{r_0^3}$$

$$P_1 = \left(\lambda+\frac{2\mu}{3}\right)C + \frac{4\alpha\mu}{r_1^3}$$

Кад ћемо одабрати наћи C и α заменом у (2) имаћемо једначину за φ, кад ће φ заменом у (1) имаћемо једначину за ψ, а отуда налазимо једначине за u, v, w.

— Равни таласи —

17. Диференцијалне једначине. Једначине равних таласа. Нека непокретну средину и дејству никакве спољне силе $(X=Y=Z=0)$ замислимо, имамо тада за једначине:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \ldots \quad 1.$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Ако се прву једначину диференцијалимо по x, другу по y, трећу по z, добићемо једначину:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\theta=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \quad \ldots \quad 2.$$

Каже се да се таласи крећу равним таласима // равни кад u, v и w зависе само од z и t; ако се таласи крећу у ма ком правцу, онда u, v и w зависе од $x\,y\,z$ и t и облик је функције, имамо задовољавати:

$$u=p\cos(ax+by+cz-st+\alpha)$$
$$v=q\cos(ax+by+cz-st+\alpha) \quad \ldots \quad 3.$$
$$w=r\cos(ax+by+cz-st+\alpha)$$

$p, q, r, a\, b\, c\, s$ и α су константе.

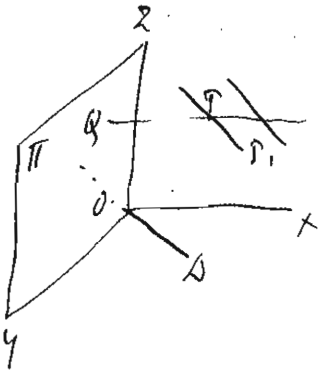
Да видимо какав се креће од таласа у средини каквој представљамо:

Ако конструишемо раван Π која пролази кроз почетак координата, која се креће паралелно //, та раван имаће за једначину израз:

$$aX+bY+cZ=0 \quad \ldots \quad 4.$$

Конструишимо кроз почетак сегмент OD који је пројекција p, q, r. Из 3 је јасно да је померање тачке $P(xyz)$ паралелно са правом која је са сегментом OD паралелна, и

$$\frac{PP_1}{OD}=\cos(ax+by+cz-st+\alpha) \quad \ldots \quad 5.$$



Ако из P спустимо управну PQ.

$$PQ = \frac{1}{h}(ax + by + cz)$$

$$h = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

и тако је

$$\frac{PP_1}{OD} = \cos(h\,QP - st + \alpha) \quad \ldots \quad 6$$

Да би упростили ствар узимамо нека је раван Π раван yz, нека се вибрације врше у равнинама || са xy, раван у којој се налази сегмент OD. QP је онда апсциса тачке P и једначине 3 постају:

$$u = p\cos(hx - st + \alpha)$$
$$v = q\cos(hx - st + \alpha) \quad \ldots \quad 7$$
$$w = 0$$

Брзине су тачке P на правој PP₁ дате изразима:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ps\sin(hx - st + \alpha) \quad \ldots \quad 7'$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = qs\sin(hx - st + \beta)$$

Одавде је вибрација време T које протече од почетка до тренутка када се тачка врати у исти положај, које се налази из 7' за две узастопне вредности $t = 0$ и $T = \frac{2\pi}{s}$, које дају исте брзине у истом смислу.

Ако узмемо све тачке P на QP које су у исто време у истој фази, видећемо да су то тачке за које је

$$\cos\beta = \cos(hx - st + \alpha) \quad \text{и} \quad \sin(hx - st + \alpha) = \sin\beta$$

имају одређене вредности и налазе се у равнинама чије су једначине:

$$hx - st + \alpha = \beta + 2k\pi \quad \ldots \quad 8$$

Све су ове равни || са Π и подједнако одмакнуте. Најкраће одстојање између двеју равни налазимо из 8.

$$hx - st + \alpha = \beta$$
$$hx_1 - st + \alpha = \beta + 2\pi$$

$$h(x_1 - x) = hl = 2\pi$$

$$l = \frac{2\pi}{h}.$$

ℓ се зове дужина таласа (ондулације)

Кад t варира, паралелне равни померају се брзином:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{h} = \frac{l}{T} = G$$

G се зове брзина простирања

§ 18 Ако се u, v, w замене у једначине [illegible] добиће се ове једначине између константа h, p, s, q, α

$$p\left[\rho s^2 - (\lambda+2\mu)h^2\right] = 0 \quad \ldots \quad 1$$

$$q(\rho s^2 - \mu h^2) = 0 \quad \ldots \quad 2$$

Ако $\lambda + \mu$ није нула, једно од констаната или p или q мора да је нула

I) Нека је $p = 0$ $\qquad \lambda+\mu \neq 0$

Вибрација је трансверзална, управно на правац ширења [illegible] OT и то у равни || са yx

Из 2 се налази онда

$$G = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Уједно је $\theta = 0$ и [illegible] је без дилатације [illegible] ([illegible]), [illegible]

II) Нека је $q = 0$, онда је вибрација тачке P у правцу [illegible] и зове се лонгитудинална, правац вибрације управан на таласе, || са правцем простирања

Из 1 је онда

$$G = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

У овом случају су u, v и w облика $\varphi = \frac{p}{h}\sin(hx - st + \alpha)$ [illegible] је [illegible] нула.

Из овога излази да једна одређена еластична [illegible] може само да [illegible] вибрација [illegible] брзинама [illegible]

/.

Деформације трансверзалне и лонгитудиналне, које у општ[illegible] одговарају карактеристикама за средину еластичну и независ[illegible] од амплитуде (OD) и других тачака.

За изотропне средине (не кристалне) у теорији [illegible] еластичности $\lambda + 2\mu = 0$, што значи да је општа деформација лонгитудиналних таласа нула и да средина само трансверзалне деформације да преноси.

Ако је $\mu = 0$ (код течности) општа је деформација трансверзална нула

Ако је $\lambda + \mu = 0$

једначине 1 и 2 су сагласне ма какве вредности [illegible] p и q узмемо тако да је

$$\rho s^2 - \mu h^2 = 0$$

$$G = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

и средина преноси и једне и друге деформације.

– Trabe ręczna –

Ogólna metoda całkowania równania sprężystości

I

Zastosowanie ogólnej metody.

1.19. Zaczniemy od podstawowego równania:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u + \rho X = 0$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v + \rho Y = 0 \quad \dots \quad (1)$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w + \rho Z = 0$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Różniczkując równania (1) wz. x, y, z i sumując otrzymamy:

$$-\rho\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right] = (\lambda+2\mu)\Delta\theta \quad \dots \quad (2)$$

Jeśli zaś różniczkujemy wz. y, potem wz. z i odejmiemy jedno od drugiego obie równania:

$$-\rho\left[\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right] = \mu\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$-\rho\left[\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right] = \mu\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \dots \quad (3)$$
$$-\rho\left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right] = \mu\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

(2) (3) są równaniami [illegible] (wirów) $\xi, 2\eta, 2\zeta$, [illegible] u, v i w.

Z 2 i 3 możemy obie równania [illegible] napisać:

$$\Delta\theta = -\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right]$$
$$\Delta\xi = -\frac{\rho}{2\mu}\left[\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right]$$
$$\Delta\eta = -\frac{\rho}{2\mu}\left[\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right] \quad \dots \quad (I)$$
$$\Delta\zeta = -\rho/\mu\left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right]$$

Rozwiążmy teraz obecnie równanie funkcyi
Koordynatów xyz w [illegible] obszarze:

$$\Delta\varphi = -4\pi f(xyz).$$

Całkowanie tego równania daje [illegible] potencyału
(Zadanie Poissona).

ω, $\xi\ \eta\ \zeta$ są trzy potencyalne funkcye.

$\xi\ \eta\ \zeta$ mogą [illegible] spełniać [illegible] warunek:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0 \quad \ldots \quad (?)$$

Jeżeli [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
trzech równań [illegible] I [illegible] [illegible] x, y, z [illegible]:

$$\Delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=0.$$

Jeżeli [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\Delta\chi$

$$\Delta\chi = \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

Przejdźmy [illegible] $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ [illegible]

$$\xi_1 = \xi - \frac{\partial\chi}{\partial x}$$
$$\eta_1 = \eta - \frac{\partial\chi}{\partial y}$$
$$\zeta_1 = \zeta - \frac{\partial\chi}{\partial z}$$

Jeżeli funkcyę χ możemy [illegible] do
[illegible] $\xi\ \eta\ \zeta$.

§. 20. Na przykład równanie:

$$\Delta\varphi = -4\pi f$$

możemy [illegible] [illegible] twierdzenia Greena [illegible]
Za [illegible] funkcyą [illegible] funkcyę ψ

$$\Delta\psi = 0$$
$$\psi = \frac{1}{r}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

φ a ψ [illegible], f [illegible]

[illegible] $\left[r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]$

[illegible]

$$\varphi(abc) = \int_3 dx\,dy\,dz\,\frac{f}{r} - \frac{1}{4\pi}\int_2 ds\,\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)}{r} + \frac{1}{4\pi}\iint ds\,\varphi\,\frac{\partial(1/r)}{\partial n} \quad \ldots \quad 1.$$

Ako [illegible]

$$\varphi(abc) = \iiint^{\infty} dx\,dy\,dz\,\frac{f}{r} \quad \ldots \quad 2.$$

21. <u>[illegible]</u> za θ, ξ, η a ζ [illegible]

u, v, w [illegible]

Ako [illegible] ~~θ~~ θ, L, M, N, [illegible] u, v a w [illegible]:

$$u = \frac{\partial\theta}{\partial x} - \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)$$
$$v = \frac{\partial\theta}{\partial y} - \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad \ldots \quad 1.$$
$$w = \frac{\partial\theta}{\partial z} - \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)$$

Ako [illegible]

$= \sum\frac{\partial u}{\partial x}$, [illegible]:

$$\theta = \Delta\theta \quad \ldots \quad 2.$$

Ako [illegible] za ξ, η, ζ [illegible]

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{[illegible]}:$$

$$2\xi = \Delta L - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right]$$
$$2\eta = \Delta M - \frac{\partial}{\partial y}\left[\ \ldots\ \right] \quad \ldots \quad 3$$
$$2\zeta = \Delta N - \frac{\partial}{\partial z}\left[\ \ldots\ \right]$$

Кад узмемо за одређене функције L, M N
ji:

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0 \quad \ldots \quad (3')$$

Ако је ова једначина задовољена (ако нису сувишне) а наводно у (19) уметнемо из 2 и 3

$$\begin{aligned} \theta &= \Delta\theta \\ 2\xi &= \Delta L \\ 2\eta &= \Delta M \\ 2\zeta &= \Delta N \end{aligned} \quad \ldots \quad (4)$$

θ, ξ, η, ζ сада познати путем 4 а онда нове наше једначине за θ L, M N а из 2 онда једначине за u, v,

Ако у 4 заменимо θ, ξ, η и ζ нађеним једначинама из 2 имамо:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\theta &= -\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\left[\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right] \\ \Delta\Delta L &= -\rho/\mu\left[\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right] \\ \Delta\Delta M &= -\rho/\mu\left[\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right] \\ \Delta\Delta N &= -\rho/\mu\left[\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right] \end{aligned} \quad \ldots \quad (5)$$

Ако одавде нађемо θ, L, M N имамо директно онда једначине за u, v w.

Означимо ма које једначине из 5

$$\Delta\Delta\varphi = -4\pi f.$$

Ако је $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

$$\Delta\Delta \frac{r}{2} = \Delta\frac{1}{r} = 0$$

Ако узмемо где је $\psi = r/2$ а $\varphi = \varphi$ и одн. у Греновој теореми φ ти ψ добијамо за одређивање:

$$\varphi(abc) = \iiint^{\infty} dx\,dy\,dz\,\frac{r}{2}f$$

[illegible] jednačina

$$\Delta\varphi = \int_3^\infty dx\,dy\,dz\,(\Delta^{?}/_{2})\,f = \int_3^\infty dx\,dy\,dz\,\frac{1}{2} = \varphi \quad \text{([illegible] integral)}$$

$$\Delta\Delta\varphi = \Delta\varphi = -4\pi f.$$

— II —

§. 22. [illegible]

[illegible] $X = Y = Z = 0$ u jednačine [illegible]:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u = \rho\frac{\partial^2 u}{dt^2} \quad \ldots \quad 1.$$

[illegible] u, v, w.

Ako [illegible]:

$$\frac{\partial^2}{dt^2}\theta = \frac{[\lambda+2\mu]}{\rho}\Delta\theta$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{dt^2} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\xi \quad \ldots \quad 2.$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{dt^2} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\eta$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{dt^2} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\eta$$

[illegible] jednačine [illegible]:

$$\frac{\partial\xi}{dx} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad 3.$$

[illegible] jednačine [illegible] 2.

$$\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = c^2\Delta\varphi$$

Ако са ξ η ζ и u v w је као и мало

и једначина

$$\theta = \Delta\Theta, \quad 2\xi = \Delta L, \quad 2\eta = \Delta M \quad 2\zeta = \Delta N$$

Ставимо $\varphi = \Delta\Phi$

једначина за φ прелази у:

$$\frac{\partial^2 \Delta\Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Delta\Phi \quad \ldots \quad (4.$$

или

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Phi \quad \ldots \quad (4'$$

За вредности функције имаће исту једначину као и φ. Ако је φ независно од ... имаћемо:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \varphi \quad \ldots \quad (5.$$

§ 23. Ако се узме, нпр. ... функција t и једне променљиве, једначина за φ онда:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Решења су за $\varphi_1 = F(x-ct)$ и $\varphi_2 = G(x+ct)$

општи је интеграл:

$$\varphi = F(x-ct) + G(x+ct) \quad \ldots \quad (6.$$

§ 24. Наиме ово у ... у поларним координатама (θ = ψ = 0)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2}$$

Ако се оба једначина ... на ... криволинијске ... једначине:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} \quad \ldots \quad (7.$$

$$\varphi = \frac{1}{r}\left[F(r-ct) + G(r+ct)\right] \quad \ldots \quad 2.$$

Ово представља два кретања таласа једно иде од центра ка ... $\varphi(F)$ а друго ка центру функција G, ... (због коефицијента $\frac{1}{r}$)

25. Лонгитудинално ширење кретања.

Пошто се узима да нема ... функције θ ...

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\theta)}{\partial r^2} \quad \ldots \quad 1.$$

Ако је ... талас ... од центра, интеграл је

$$\theta = \frac{1}{r}F(r-c_1 t)$$

Пошто нема ... ξ, η, ζ су константе и

$$u = \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dx} = \left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\frac{x}{r}$$

$$v = (\qquad)\, y/r \quad \ldots \quad 3.$$

$$w = (\qquad)\frac{z}{r}$$

Из ... се ... одмах:

$$u : v : w = x : y : z$$

Померање ... у правцу радијуса

$$\rho = \sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F$$

Ово је чисто лонгитудинално кретање ... (коефицијент кубичне дилатације)

$$\Delta = \frac{1}{r}F'' = \Delta\theta$$

Brzina je uzdužnoga [illegible]

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

§. 26. Transverzalni valovi kuglasti. [illegible] Ako [illegible] $\vartheta = 0 =$ Konstanta, a [illegible]

$\mathcal{L}$, M, N [illegible]

$$2\xi = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2}$$

$$2\eta = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x}$$

$$2\zeta = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial x}$$

Metod [illegible] jednadžbe

[illegible] $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \varphi$ [illegible]:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t^2} = c_3^2 \Delta \mathcal{L}$$

Ako [illegible] jedan je

[illegible] $\mathcal{L} = \frac{1}{r} F(r - c_3 t)$

$$\vartheta = M = N = 0$$

Kad [illegible]

[illegible] $\mathcal{L}$ M N i u v w [illegible]:

$$u = 0$$

$$v = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\frac{d\mathcal{L}}{dr}\frac{dr}{dz} = -\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\frac{z}{r}$$

$$w = \qquad = +\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\frac{y}{r}$$

[illegible]:

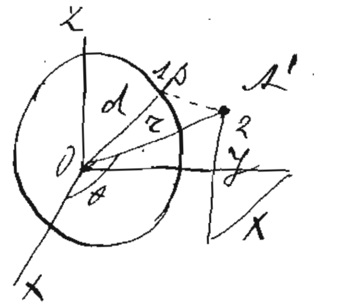
$$u : v : w = 0 : -z : y$$

[illegible] oko osi [illegible]

[illegible]:

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} = \left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r}$$

$$F' = \frac{dF}{d(r - c_3 t)}$$



$$d = OS = \sqrt{x^2+z^2}$$

Из троугла ZAO је:

$$\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r} = \sin\theta$$

$$\rho = \left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\sin\theta \quad . . . \qquad (2.$$

$$\text{где } \Gamma = \frac{\rho}{\sqrt{y^2+z^2}} \text{ угао обртања око}$$

осе осовине.

Из 1 је онда:

$$\Gamma = \frac{1}{r^2}F' - \frac{1}{r^3}F$$

Γ је независно од координата xyz тачке A' већ само од r [illegible] Према томе све тачке на истој сфери за исти угао обрнуте … целокупна сфера се обрће.

Вредности за $\xi\ \eta\ \zeta$ можемо наћи за u, v, w.

Из једначине:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\mathcal{L})}{\partial r^2} = \frac{1}{r}F''$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r^2}F' - \frac{x}{r^3}F\right] = \frac{x^2}{r^3}F'' + \left(\frac{1}{r} - 3\frac{x^2}{r^3}\right)\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right]$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{r^3}F'' - \frac{3xy}{r^3}\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right]$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial z\,\partial x} = \frac{xz}{r^3}F'' - \frac{3xz}{r^3}\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right]$$

Кад се ове смене у изразе за ξ, η, ζ

налазимо:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)F'' - \left(\frac{1}{r} - 3\frac{x^2}{r^3}\right)\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\right\}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{xy}{r^3}\left\{-F'' + 3\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\right\}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{xz}{r^3}\left\{-F'' + 3\left(\frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right)\right\}$$

Исто тако се сфере кугле осим обртања само око x осе целога обртања око себе као осовине.

Ако и [illegible] [illegible], имамо [illegible] услове:

$$L = 0 \quad M = \frac{1}{2} G(z - c_3 t), \quad N = 0$$

$$L = M = 0 \quad N = \frac{1}{2} J(z - c_3 t)$$

G и J су произвољне функције, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] формом са [illegible] и [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

2ог марта 1905

[illegible]

— Литература —

Оригинална дела у којима су изложени теорија еластичности, која су створили и развијали математичари: Navier-a, Cauchy-a, Poisson-a, Lamé-a, [illegible], Lord-Kelvin (Sir W. Thomson), Kirhoffa Saint-Venant.

Поред оригиналних расправа, има врло добрих уџбеника за теорију математичке физике у којима је специјално изложена теорија еластичности:

1) Poincaré – Sur la théorie de l'élasticité
2) Helmholtz – Dynamik kontinuierlich verbreiter Massen (Theoretische Physik)
3) P. Appell – Traité de mécanique rationelle – t. III.
4) F. Neumann – Vorlesungen über Elasticität.
5 Résal – La physique mathématique.

— Електромагнетска теорија светлости —

— Увод —

Задатак је математичке физике да појаве физичке природе сведе на законе механике. За појаве светлости [illegible] је [illegible] [illegible] са појавама звука, а оне су [illegible] [illegible] механичке природе. [illegible] закони оптике, [illegible], [illegible] и [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] у механичкој теорији [illegible] појава светлости [illegible]. [illegible] теорија [illegible] [illegible] обе [illegible]:

а). Еманационе (Newton) теорије. По овој теорији замишља се [illegible] светлост [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] са [illegible] [illegible] светлост [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. ~~[illegible] [illegible]~~

б). Ундулационе (Хајгенс, Јунг, Френел). По овој теорији [illegible] је [illegible] [illegible], које светлост замишља да је [illegible] [illegible] [illegible] и да је [illegible] светлости [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] са [illegible] на [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] је.

ц). Електромагнетска теорија [illegible] појаве светлости [illegible] [illegible] које се у [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] и магнетским [illegible], које [illegible] [illegible] [illegible] (Maxwell, Lorentz, Hertz, Boltzmann).

Ми ћемо се [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] теоријом, која је [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] и [illegible] које се [illegible] [illegible] [illegible] теорија [illegible] [illegible] електромагнетских појава.

/.

[illegible]

— · ———

Osnovka u [illegible] na fizičkoj i [illegible] matematičkoj osnovi. [illegible]

[illegible] osnovka [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Hiszem, hogy a szabadság [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] és [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible].

[illegible]

— Литература —

[illegible]

1) <u>Drude</u>. Lehrbuch der Optik.
2). Poincaré Théorie mathématique de la lumière.
3) Dr. J Classen Mathematische Optik.
4). Mascart Traité d'optique
5) F Neumann. Ges. Werke [illegible]
6) G. Kirchoff Ges. Werke " "
7). Larmor Ether and Matter
8). Winkelmann Handbuch der Physik – Licht.

- Drugi deo -

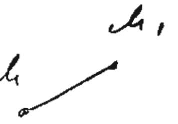
- Prva sveska -

Primenoba teorija elasticnosti (produžena teorija)

I

1.1 [illegible]

[illegible]



$$\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$$ [illegible]

$$\frac{d^2u}{dt^2}, \frac{d^2v}{dt^2}, \frac{d^2w}{dt^2}$$ [illegible]

[illegible]:

$$\alpha_1 = \frac{du}{dx}, \quad \alpha_2 = \frac{dv}{dy}, \quad \alpha_3 = \frac{dw}{dz}$$

$$\beta_1 = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \quad \beta_2 = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \quad \beta_3 = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

[illegible] dx dy dz [illegible]:

$$dx(1+\alpha_1), \quad dy(1+\alpha_2) \quad dz(1+\alpha_3)$$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ [illegible]

[illegible]:

$$\pi/2 + \beta_1 \quad \pi/2 + \beta_2 \quad \pi/2 + \beta_3$$

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ [illegible]

./.

§ 2. Że da [illegible] równanie [illegible] kinetycznej T [illegible] energji [illegible] elementarnym [illegible]

[illegible] Ona jest:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\int \rho\, d\tau \left[\sum \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \right] \ldots (1)$$

ρ jest gęstością, dτ jest elementarnym [illegible].

Jeśli przez W oznaczamy wewnętrzną energię [illegible]

$$U = \int W\, d\tau$$

Za [illegible] W wzorem [illegible]:

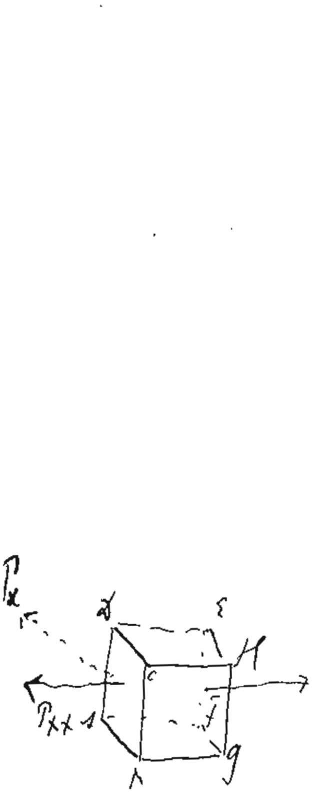
$$W = \mu\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{\beta_1^2}{2} + \frac{\beta_2^2}{2} + \frac{\beta_3^2}{2}\right) + \lambda \frac{\theta^2}{2}$$

μ i λ są koefficjentami Lamego (Lamé)

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

θ jest koefficjentem [illegible].

[illegible] T i W [illegible] x y z [illegible] Lagrange'a [illegible]



Jeśli na ścianie ABCD elementarnego [illegible] P_x a [illegible] oznaczamy:

$T_{xx}\,dydz \quad T_{xy}\,dydz \quad T_{xz}\,dydz$

[illegible]

$T_{yx}\,dxdz \quad T_{yy}\,dxdz \quad T_{yz}\,dxdz$

i

$T_{zx}\,dxdy \quad T_{zy}\,dxdy \quad P_{zz}\,dxdy.$

[illegible]

$$T_{xy} = T_{yx}$$
$$T_{yz} = T_{zy}$$
$$T_{zx} = T_{xz}$$

W [illegible]

$$T_{xx} = \frac{dW}{d\alpha_1} = \lambda\theta\frac{d\theta}{d\alpha_1} + 2\mu\alpha_1 = \lambda\theta + 2\mu\alpha_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}$$

$$T_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\eta}{dy}$$

$$T_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\zeta}{dz}$$

$$T_{xy} = \mu\beta_3 = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$

$$T_{yz} = \mu\beta_1 = \mu\left(\frac{d\eta}{\partial z} + \frac{d\zeta}{dy}\right)$$

$$T_{zx} = \mu\beta_2 = \mu\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)$$

По принципу D'Alembert-ов, да су силе инерције у равнотежи са силама спољним добијамо једначине:

$$\rho\, dx\, dy\, dz\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = -T_{xx}\,dy\,dz + \left(T_{xx} + \frac{dT_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$
$$-T_{yx}\,dz\,dx + \left(T_{yx} + \frac{dT_{yx}}{dy}dy\right)dz\,dx$$
$$-T_{zx}\,dx\,dy + \left(T_{zx} + \frac{dT_{zx}}{dz}dz\right)dx\,dy$$

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{dT_{xx}}{dx} + \frac{dT_{yx}}{dy} + \frac{dT_{zx}}{dz} = \frac{dT_{xx}}{dx} + \frac{dT_{xy}}{dy} + \frac{dT_{xz}}{dz}$$

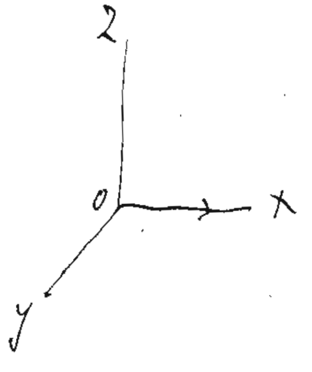
Кад се овде замене једнач. за T_{xx} T_{xy} T_{xz} имаћемо

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu\Delta\xi + \mu\frac{d\theta}{dx} + \lambda\frac{d\theta}{dx}$$
$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\Delta\eta + \mu\frac{d\theta}{dy} + \lambda\frac{d\theta}{dy} \quad \ldots \text{ I.}$$
$$\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu\Delta\zeta + \mu\frac{d\theta}{dz} + \lambda\frac{d\theta}{dz}$$

§3 Таласи равни. Нека ξ η ζ зависе само од z и t онда је:

$$\Delta\xi = \frac{d^2\xi}{dz^2} \quad \Delta\eta = \frac{d^2\eta}{dz^2} \quad \theta = \frac{d\zeta}{dz} \quad \Delta\zeta = \frac{d^2\zeta}{dz^2}$$

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu\frac{d^2\xi}{dz^2}$$
$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\frac{d^2\eta}{dz^2}$$
$$\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{d^2\zeta}{dz^2}$$



Ако је померање управно са OX

$$\eta = \xi = 0 \qquad \zeta \neq 0$$

раван је таласа xy, а деформације управне су на правцу простирања OZ. Једначина за интеграцију је:

$$\rho \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu \frac{d^2\zeta}{dz^2}$$

$$\zeta = f\left(z + t\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) + f_1\left(z - t\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) \ldots 1.$$

Таласи се простиру брзином $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ у позитивном и негативном правцу OZ

Ако је померање у правцу OZ добијамо исту једначину

За случај кад је померање у правцу OZ, кад је лонгитудинално, онда се налази из једначине:

$$\rho \frac{d^2\zeta}{dt^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{d^2\zeta}{dz^2}$$

$$\zeta = f\left(z + t\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\right) + f_1\left(z - t\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\right) \ldots 2.$$

Брзина је лонгитудиналног померања $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$.

Пошто знамо да је померање светлости трансверзално, то мора бити однос $\lambda + 2\mu = 0$

3.4 Кинетичка енергија запремине у којој се налази је

$$\int \rho\, d\tau \frac{v^2}{2}$$

Ако су деформације у правцу x-са $v = \frac{d\xi}{dt}$ и ако је ξ периодична функција облика:

$$\xi = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad T$$

$$J(\text{интензитет}) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{2}\frac{4\pi^2}{T^2}\cos^2 2\pi\frac{t}{T}\,dt = \frac{A^2}{2}\frac{4\pi^2}{T^2}$$

T је време једног периода.

3.5 Ако у једначинама I 3. ставимо $\lambda = -2\mu$ и узмемо да је $\theta = 0$ онда је померање трансверзално једначине су овакве:

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu\Delta\xi \qquad 3.$$

$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\Delta\eta$$

$$\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu\Delta\zeta$$

Ako u y ovim jednačinama stavimo

$$\frac{1}{\mu}\frac{du}{dt} = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}$$
$$\frac{1}{\mu}\frac{dv}{dt} = \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx} \quad \ldots \quad (I.$$
$$\frac{1}{\mu}\frac{dw}{dt} = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}$$

Ako drugu jednačinu diferencijalimo po x a prvu po y pa ih oduzmemo:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}\left[\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right] = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) - \Delta\zeta$$
$$= 0 - \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

Kad se ovo integrali po t nalazi se

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$$

Ako se ovo izvede za ostale jednačine i usvoji ... dolazimo do sistema:

$$\rho\frac{d\xi}{dt} = -\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right)$$
$$\rho\frac{d\eta}{dt} = -\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) \quad \ldots \quad (II.$$
$$\rho\frac{d\zeta}{dt} = -\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$$

Ovaj sistem je potpuno identičan sa jednačinama elektromagnetike.

/.

Електромагнетска теорија светлости

§ 6. Ако се посматра материјална средина која спроводи електромагнетске утицаје $X' = Y' = Z' = 0$ и силе су индукције дате изразима:

$$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$$
$$Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \quad \ldots \; 1.$$
$$R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}$$

ψ је потенцијал електростатички од електричних маса које се налазе у средини.

Из 1 се добијају једначине:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{d^2F}{dt^2}$$
$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{d^2G}{dt^2} \quad \ldots \; 2.$$
$$\frac{dR}{dt} = -\frac{d^2H}{dt^2}$$

Ако се посматра средина у диелектрикуму, где нема спровођења, онда су $u\,v\,w$ струје електричне дате једначинама:

$$4\pi u = K\frac{dP}{dt} = -K\frac{d^2F}{dt^2}$$
$$4\pi v = -K\frac{d^2G}{dt^2} \quad \ldots \; 3.$$
$$4\pi w = -K\frac{d^2H}{dt^2}$$

Знамо да важе једначине:

$$a = \mu\alpha \qquad 4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \qquad \mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$$
$$b = \mu\beta \qquad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \qquad \mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}$$
$$c = \mu\gamma \qquad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \qquad \mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Iz uvrštenih jednačina u β nalazimo:

$$4\pi\mu u = \frac{dJ}{dx} - \Delta F$$
$$4\pi\mu v = \frac{dJ}{dy} - \Delta G \quad \ldots \quad \gamma.$$
$$4\pi\mu w = \frac{dJ}{dz} - \Delta H$$

$$J = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \quad \ldots \quad \delta.$$

Iz 3 i 4 nalazimo jednačine za potencijale F G H:

$$K\mu \frac{d^2F}{dt^2} = \Delta F$$
$$K\mu \frac{d^2G}{dt^2} = \Delta G \quad \ldots \quad (I.)$$
$$K\mu \frac{d^2H}{dt^2} = \Delta H$$

Ako po Maxwellu primimo da je $J = 0$ tj. $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$.

Slične se jednačine nalaze za a b c

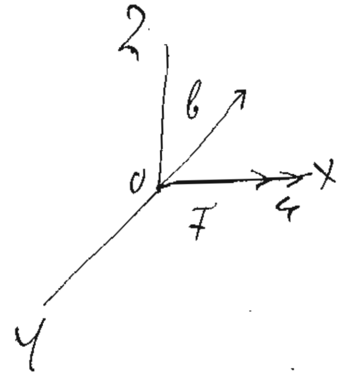
$$K\mu \frac{d^2a}{dt^2} = \Delta a \qquad K\mu \frac{d^2u}{dt^2} = \Delta u$$
$$K\mu \frac{d^2b}{dt^2} = \Delta b \quad \text{i} \quad K\mu \frac{d^2v}{dt^2} = \Delta v \quad \ldots \quad (II.)$$
$$K\mu \frac{d^2c}{dt^2} = \Delta c \qquad K\mu \frac{d^2w}{dt^2} = \Delta w.$$

Te jednačine [illegible] I sadržane [illegible] F kao i za [illegible] F x y z, a a b c u v w [illegible] za [illegible] F G i H.

Ako te jednačine I odnosno II uporedi sa jednačinama [illegible] iz mehanike [illegible], [illegible] jednačine od I [illegible] elastičnog [illegible] brzinom

$$v = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$$

Ako je K [illegible] za $\mu = 1$ [illegible] jednačine [illegible] brzine elektricitet[illegible].



Ч.8 Ако посматрамо један раван електромагнетни талас, је раван фронта XY. Нека је X^{ca} оса ∥ моменту електричне ... вектора онда је:

$$q = H = 0 \quad и$$

$$F = f(z - vt) = A \cos a(z - vt)$$

Функција f произвољна функција, а ако се стави да је једнака cosinusу онда се a може одредити из услова ... вредности када z ~~расте за~~ променом да је:

$$a(z_1 - vt_1) = a(z - vt) + 2\pi$$

За сталан z имаће се:

$$av(t - t_1) = 2\pi \qquad a = \frac{2\pi}{vT}$$

$t - t_1$ је време ... у којем ... стање ... за време ...

За исто време на растојању ...

ако је ... :

$$a(z_1 - z) = 2\pi \qquad a = \frac{2\pi}{z_1 - z} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Дужина растојања $z_1 - z$ ... зове се таласна дужина λ.

Када се ово стави у F ... λ = ...

$$F = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - vt) = A \cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \ldots (1)$$

Индукција је ... даље изразом:

$$q = 0$$

$$b = -A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - vt) \ldots (2)$$

$$c = 0$$

Струја електричне ..., односно струја ...

је:

$$4\pi u = A\mu \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - vt)$$

$$4\pi v = 0$$

$$4\pi w = 0$$

Електрична струја је паралелна са X. (Jer $4\pi u = \ldots$

Zastosowanie mechaniki Lagrange'a do elektromagnetyzmu.

§ 9. Jeśli oznaczymy w:

	Maxwella	w Fresnela	
elektryczna [illegible]	$\frac{K}{c}$ w [illegible]	ρ	$\frac{1}{\mu}$
przenikalność	μ/c	$1/\mu$	ρ
elektryczne siły	X	$\frac{d\eta}{dt} = \eta'$ albo	$\frac{du}{dt} = u'$
	Y	η'	v'
	Z	ζ'	w'
magnetyczne	α	$-u'$	η'
	β	$-v'$	η'
	γ	$-w'$	ζ'

Równania elektromagnetyczne [illegible]:

$$c \operatorname{curl} M = K\frac{dE}{dt} + 4\pi\lambda E$$

$$c \operatorname{curl} E = -\mu \frac{\partial M}{dt}$$

c, [illegible] dielektryki

Dla [illegible] λ = 0 [illegible] równania:

$$\frac{\mu}{c}\frac{d\alpha}{dt} = -\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{d\beta}{dt} = -\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) \quad \ldots \quad (I.$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right)$$

$$\frac{K}{c}\frac{\partial X}{dt} = \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right)$$

$$\frac{K}{c}\frac{\partial Y}{dt} = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \quad \ldots \quad (II.$$

$$\frac{K}{c}\frac{dZ}{dt} = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}$$

$E(XYZ)$ $M(\alpha\beta\gamma)$.

Ako [illegible] dla [illegible]:

$$\rho \frac{d\xi'}{dt} = -\left(\frac{dw'}{dy} - \frac{dv'}{dz}\right) \qquad -\frac{1}{\mu}\frac{du'}{dt} = \left(\frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz}\right)$$

$$\rho \frac{d\eta'}{dt} = \quad — \qquad\qquad —$$

$$\rho \frac{d\zeta'}{dt} = \quad — \qquad\qquad —$$

Ako ob. jednania integrujemy wg t [illegible] jednania

$$\frac{1}{\mu}\frac{du}{dt} = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \quad u \quad \rho\frac{d\xi}{dt} = -\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right)$$

—

—

[illegible] w [illegible].

1). Elektromagnetyczna [illegible]

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

[illegible]

2). [illegible] 6 jednania, [illegible]

3). [illegible]

4). [illegible] (Fresnel, N.

Рекапитулација основних електромагнетних једначина

§ 10 Из овог прегледа је јасно да су једначине ... везане са електромагнетизмом. Кад је коефицијент ... λ раван нули. Једначине за ... појава светлосних су према томе и за електромагнетне појаве. Обј... их укратко овде.

Ако са i означимо јачину струје неке електростатичке ... електрицитета који кроз пресек q прође у јединици времена је

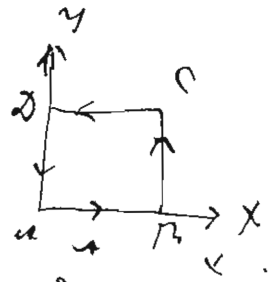
$$i = \frac{de}{dt} \quad \ldots \; 1. \qquad \text{за } q = 1 \text{ јачина се}$$

зове ... са j и зове се густина.

Компоненте су густине j: j_x j_y j_z.

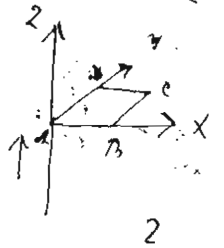
Електрична струја неких електромагнетних ... магнетских дејстава. Ако струја ... магнетни пол јачине m = 1 на ... рад $A = 4\pi i'$ где је i' јачина струје у електромагнетским јединицама.

Ако струја иде као на слици 2 ... ABCD ... магнетни ... Тад за ... магнетни ... ABCDA је:



$$\Omega = \alpha\,dx + \beta'\,dy - \alpha'\,dx - \beta\,dy \quad \ldots \; 1.$$

α β α' β' су компоненте магнетске силе по AB AD DC BC



2

$$\beta' = \beta + \frac{\partial\beta}{\partial x}dx$$
$$\alpha' = \alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy \quad \ldots \; 2.$$

Из 1 и 2 је:

$$\Omega = \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)dx\,dy$$

По дефиницији јачине струје $\Omega = 4\pi i' = j_z'\,dx\,dy$

једначине су за остале две пресеке:

$$4\pi j_x' = \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}$$
$$4\pi j_y' = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \quad \ldots \; (I)$$
$$4\pi j_z' = \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}$$

[illegible] je:

$i : i' = c$ [illegible] $j_x : j_x' = c$

c je [illegible] $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

[illegible] jednadžbama [illegible]:

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_y = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad \ldots \quad I_0.$$

$$\frac{4\pi}{c} j_z = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

§. 11 [illegible] magnetske struje. [illegible] $\frac{\partial \mathfrak{S}}{c\,\partial t}$ [illegible] $q = 1$. Komponente [illegible] $S_x\ S_y\ S_z$.

Magnet [illegible] (Magnetna indukcija)

[illegible] i. [illegible] i. [illegible] i.

[illegible] ($i = 1$) [illegible]

$$A = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) dx\,dy \quad \ldots \quad 2.$$

Ait je [illegible] i [illegible] t [illegible] $4\pi m i' = 4\pi m i/c$. [illegible] je:

$$Ait = 4\pi m i' = 4\pi m\, i/c \qquad A = \frac{4\pi m}{ct}$$

$\frac{m}{t}$ je [illegible] ($\text{za } q = 1$), $\frac{m}{t} dx\,dy$ je 2[illegible] komponenta [illegible] 2 [illegible]:

$$\frac{4\pi}{c} s_z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

X и Y су електричне силе (~~индукционе~~) које се ... ... појаве струје померања ... Ако се обележимо силе које магнетска ... индукциона ... исто као и горе само супротног знака, добијамо ове:

$$\frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{4\pi}{c} s_y = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad \dots \quad (II.$$
$$\frac{4\pi}{c} s_z = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Једначине I и II важе за све средине (кондукторе и изолаторе/диелектрике). За карактерисање појава у овим и Максвелови ... веза између ... s и i са ... односно магнетским силама.

1.12 Упрошћавање и ... веза стационарне струје у етру (вакуму) струје померања.

У вакуму нема ни електрицитета e ни магнетизма m ... ... Свака e и m ... 4πe или 4πm ... ако са N и M означимо ... електричну односно магнетску ... важе односи:

$$4\pi j_x = \frac{\partial N_x}{\partial t} \qquad 4\pi s_x = \frac{\partial M_x}{\partial t}$$
$$4\pi j_y = \frac{\partial N_y}{\partial t} \quad \text{и} \quad 4\pi s_y = \frac{\partial M_y}{\partial t} \quad \dots \quad (Ia$$
$$4\pi j_z = \frac{\partial N_z}{\partial t} \qquad 4\pi s_z = \frac{\partial M_z}{\partial t}.$$

(Пошто је дато $u = p = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t}$ $u = j_x$ $P = N_x$.)

У вакуму је ... ... сила ... са силама електричним и магнетским и за вакум важе једначине:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} \qquad 4\pi s_x = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$
$$4\pi j_y = \frac{\partial Y}{\partial t} \qquad 4\pi s_y = \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad \dots \quad IIa$$
$$4\pi j_z = \frac{\partial Z}{\partial t} \qquad 4\pi s_z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

§ 13. Изотропни изолатори. [illegible] је електрично дејство [illegible] сила $F_e = \frac{ee_1}{r^2}$ $F_m = \frac{mm_1}{r^2}$, у изолаторима [illegible]

$$F_e = \frac{1}{K}\frac{ee_1}{r^2} \qquad F_m = \frac{1}{\mu}\frac{mm_1}{r^2}$$

$$4\pi i_x = K\frac{\partial X}{\partial t} \qquad 4\pi s_x = \mu\frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{и т. д.}$$

K је диелектрична константа и она је > 1 за сва тела

μ магнетична " " $\gtrless 1$. парамагнетична (обрaзо[illegible]) изолатори дијамагнетична

Једначине I и II које важе за [illegible] сад [illegible] изолатори сад гласе: $\mu = 1$

$$\frac{K}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

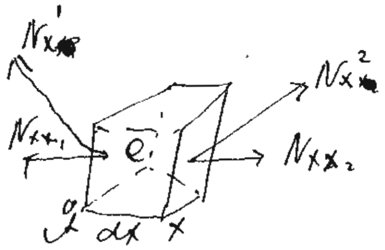
$$\frac{K}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \qquad (I.$$

$$\frac{K}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

§ 14. Трансформ. једначина за изолаторске средине.

a). Једначина континуитета. Тамо смо видели да је [illegible] облика $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$.

Ова једначина [illegible]



Ако [illegible] $dx\,dy\,dz$ [illegible] $4\pi e$ линија силе

Ово се може и [illegible]. Ако са $N_x^1\ N_y^1\ N_z^1$ означимо линије силе (на једначини [illegible]) [illegible] са $N_x^2\ N_y^2\ N_z^2$ [illegible]

[illegible] по dx [illegible] линије силе:

$$-(N_x)_1\,dydz + (N_x)_2\,dydz = \frac{\partial N_x}{\partial x}\,dx\,dydz$$

$$-(N_x)_1 = -(N_{xx})_1 - (N_{yx})_1 - (N_{zx})_1 \qquad (N_x)_2 = (N_{xx})_2 + (N_{yx})_2 + (N_{zx})_2.$$

$$(N_x)_2 = (N_x)_1 + \frac{\partial N_x}{\partial x}dx \quad \text{и т. д.}$$

Wypływ z kostki w czasie [illegible]

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

a [illegible] jednostce czasu:

$4\pi e = 4\pi \rho\, dx\,dy\,z$,

Kiedy [illegible] za [illegible] [illegible] wzór:

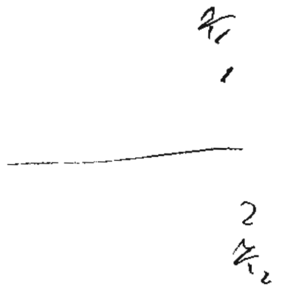
$$4\pi\rho = \frac{\partial KX}{\partial x} + \frac{\partial KY}{\partial y} + \frac{\partial KZ}{\partial z} \quad \ldots \quad (I.$$

ρ jest gęstość elektryczności

[illegible] $K = f(x\,y\,z)$ [illegible].

Ak [illegible] $K = 1$ [illegible] z I [illegible] $X = u$, $Y = v$, $Z = w$ [illegible] (Kapustnikow [illegible]).

e). [illegible]. [illegible] K_1 i K_2 [illegible] 1 i 2 na [illegible].



Za [illegible]:

$$?_x = K\frac{dX}{dt} \qquad \frac{K}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

[illegible] XYZ i $\alpha\beta\gamma$ [illegible]. Ak [illegible]

$\frac{\partial X}{\partial z}\ \frac{\partial \beta}{\partial z}\ \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ [illegible] za $dz =$ ([illegible]) [illegible]

Ak [illegible] $X_1 Y_1 Z_1$ $X_2 Y_2 Z_2$ i t. d. [illegible]:

$\frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{\partial X_2}{\partial z}$ i t. d. [illegible]:

$$X_1 = X_2 \quad Y_1 = Y_2 \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \ldots \text{ za } z = 0 \quad (II.$$

Ово не вреди за Z и γ јер односи $\frac{\partial Z}{\partial z}$ $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$ не улазе у нашим једначинама. Из њих одмах:

$$\frac{\kappa_1}{c}\frac{\partial Z_1}{\partial t} = \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dy} \qquad \frac{\kappa_2}{c}\frac{\partial Z_2}{\partial t} = \frac{d\beta_2}{dx} - \frac{d\alpha_2}{dy}$$

излази да за Z вреди однос:

$\kappa_1 Z_1 = \kappa_2 Z_2$ и слично за γ

$\gamma_1 = \gamma_2$ за $z = 0$ (II).

Из 4 једначина електромагнетског поља I изводимо једначине, које су 4 независне од I и II

Из тих односа:

$$N_x = \kappa X \qquad M_x = \mu\alpha$$
$$N_y = \kappa Y \quad и \quad M_y = \mu\beta \quad и \quad \kappa_1 Z_1 = \kappa_2 Z_2 \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$
$$N_z = \kappa Z \qquad M_z = \mu\gamma$$

[illegible]

§ 11 Ако једначине елм. п. помножимо са $X d\tau$ $Y d\tau$ $Z d\tau$ $\alpha d\tau$ $\beta d\tau$ $\gamma d\tau$ и интегралимо [illegible]:

$$\mathcal{E} = \frac{\kappa}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2) + \frac{1}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

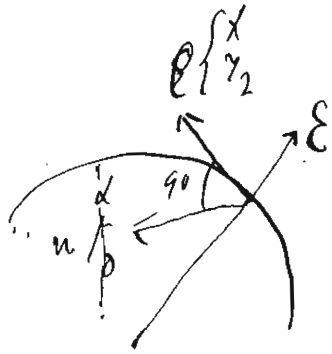
добијамо:

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathcal{E}\, d\tau = \int \Sigma\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) X\, d\tau\right]$$

Ово и [illegible] за $\lambda = 0$.

Грином [illegible]:

$$\int \frac{\partial\gamma}{\partial y} X\, d\tau = -\int \gamma X \cos(ny)\, dS - \int \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\, d\tau \quad \text{имамо:}$$



$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathcal{E}\, d\tau = \frac{c}{4\pi}\int \Sigma\left[(\gamma Y - \beta Z)\cos nx\right] dS. \quad (1)$$

Ако [illegible] вектор електромагнетске [illegible] које [illegible] једначине [illegible] вектор ε (електромагнетски [illegible]) не [illegible] t [illegible]

[illegible] вектор енергије. Ако вектор XYZ и $\alpha\beta\gamma$ [illegible] једначине [illegible] XYZ и $\alpha\beta\gamma$ [illegible]. На [illegible] енергије [illegible] I и XYZ и $\alpha\beta\gamma$ одмах:

$$\alpha t_x + \beta t_y + \gamma t_z = 0 \qquad t_x = \frac{c}{4\pi}(\gamma Y - \beta Z) \quad \text{Компоненте}$$
$$X t_x + Y t_y + Z t_z = 0 \qquad t_y = \frac{c}{4\pi}(\alpha Z - \gamma X) \quad \text{вектора енергије}$$
$$t_z = \frac{c}{4\pi}(\beta X - \alpha Y)$$

— Други део —
— Мале вјежбе —

— Основне појаве I —

3.16 Закони који су одавно познати о светлости и експериментално утврђени су:

1. Праволинијско простирање светлости,
2. Независност зрака светлосног снопа једног од другог
3). Закон рефлексије
4) Закон рефракције.

Ови се закони могу сматрати као основни.

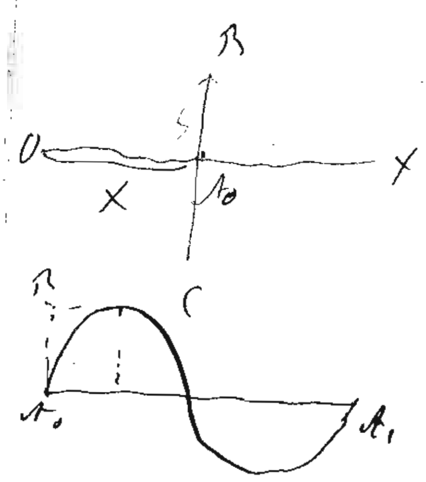
Другим су утврђене ове појаве
1). простирање светлости и њена брзина
2). Интерференција светлости и дифракција
3). Поларизација (двојно преламање)
4). Дисперзија и апсорпција

Задатак је математичке физике да механички протумачи све ове појаве.

3.17 Одавде ћемо сваку појаву кратко изложити у њеној ... како се објашњује, што ће нам служити за математичку теорију електромагнетске појаве.
Већ су помоћу закона изнесене појаве и свих ... Што ... пре свега за дисперзију, апсорпцију, праволинијско простирање. Остаје нам да се задржимо на интерференцији, поларизацији (двојно преламање), јер су ове појаве и били основ у утврђивању основа светлости.

Међу обрађеним теоријама светлости само је чисто ... математичке физике ... преко ових појава објашњени.

§18 Кад сложеног треперења, за које ћемо одмах
да је ~~изохроно~~ (самим) са ~~[illegible]~~ свакојаким треперењима једне елас-
тичне [illegible] у правцу OX представља се једначином:



$$S = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v} + \delta\right).$$

v је брзина простирања таласа по OX, t време, A максимална
елонгација тачке A_0 до B. $A_0B = A$ узима се за амплитуду

$A_0A_1 = \lambda = vT$

Та дужина зове се [illegible] таласна дужина.

Једначина представља прост тон

Пошто звук је суперпозиција више простих тонова [illegible]

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{2\pi}{T_n}\left(t - \frac{x}{v_n}\right) \quad (\text{~~[illegible]~~}$$

Ако узмемо само два звука онда је одговарајуће S
кад су $A_1 = A_2$, ~~T_1~~ $T_1 \neq T_2$ и [illegible]

$$S = A\left\{\sin \frac{2\pi}{T_1}\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + \sin \frac{2\pi}{T_2}\left(t - \frac{x}{v_2}\right)\right\}$$

$$= 2A \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) \cos \pi\left[t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) - x\left(\frac{1}{T_1 v_1} - \frac{1}{T_2 v_2}\right)\right] \cdot \cdot$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \quad \frac{1}{Tv} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1 v_1} + \frac{1}{T_2 v_2}\right).$$

Како је други члан у $2 \cos \pi(\ldots)$ мало [illegible]
представља опет исто стање као и v. Сложено се слагање [illegible]
ако имамо n разних звукова. (Ово је други закон [illegible]
[illegible] једне [illegible] у односу слагања звука).

§19 Интерференција. Суперпозиција два звука неједнака не мора
се [illegible] амплитуда, већ може [illegible]
од два звука [illegible], [illegible] у [illegible]
[illegible] јачина места, [illegible]
[illegible].

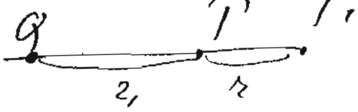
Ако је извор светлости у [illegible] на место P [illegible]
[illegible] једначином.

/.

$$s = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \delta\right) \quad \ldots \quad (1.$$

Интензитет у P зависи од A а није у P.

$$J = A^2$$



Интензитет у P је обрнуто сразмеран од r_1 а енергија ... обрнуто сразмерна са r_1^2 што је J сразмерно квадрату амплитуде. (Дознаје се ово од осцилатора).

Ако се кретање простире од P у P_1 за време τ.

$$\tau v = r.$$

и стање је кретања у P_1 дато једначином:

$$s_1 = A' \sin\left(2\pi \frac{t - r/v}{T} + \delta\right) \quad \ldots \quad 2.$$

Кад се узме $\lambda = Tv$

$$s_1 = A' \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) + \delta\right] \quad \ldots \quad (I.$$

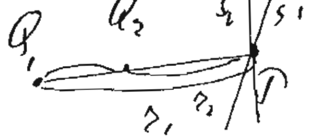
A T δ A' су константе зависне од природе светлости.

$\lambda = 0.000100$ ... ; $\lambda = 0.000872$ ...

$\lambda = 6$ Херцових електричних таласа

$x = 0.06$ ...

све у mm.



Ако имамо два светлосна извора Q_1 и Q_2 који у P изазивају кретање датом једначином:

$$s_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$$

$$s_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

Ако s_1 и s_2 имају исти правац резултујуће кретање S

$$S = s_1 + s_2 = A\left(\sin 2\pi\frac{t}{T} - \delta\right)$$

$$A\cos\delta = A_1 \cos 2\pi\frac{r_1}{\lambda} + A_2 \cos 2\pi\frac{r_2}{\lambda}$$

$$A\sin\delta = A_1 \sin 2\pi\frac{r_1}{\lambda} + A_2 \sin 2\pi\frac{r_2}{\lambda}$$

интензитет је у P

$$J = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 2\pi\left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)$$

$\Delta = 2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}$ је фазна разлика. Од ње зависи да ли $J \lesseqgtr (A_1 \pm A_2)$

Ту је максимум за $\Delta = 0 \quad \pm 2\pi \quad \pm 4\pi \dots$

минимум $\Delta = \pi/2 \quad (2n+1)\pi/2 \dots$

Ако је $A_1 = A_2$

Ту је минимум за $r_2 - r_1 = \pm \lambda/2 \quad \pm \frac{3\lambda}{2} \dots$

На овај се начин објашњава појава Њутнових прстенова

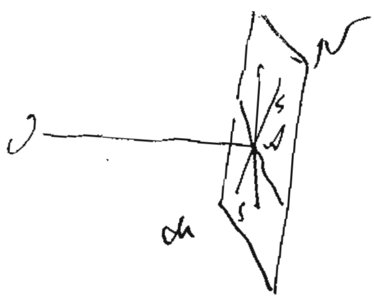
§ 71 Стојећи таласи. Ако се посматра ефекат интерференције у тачки P од два таласа, од којих [illegible] таласа [illegible] стојећи таласи. [illegible] [illegible] [illegible] таласа [illegible] у правцу $Q_1 Q_2$ као се налази у ∞. У тачки је P онда

$$S_1 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$S_2 = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$S = S_1 + S_2 = 2A \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

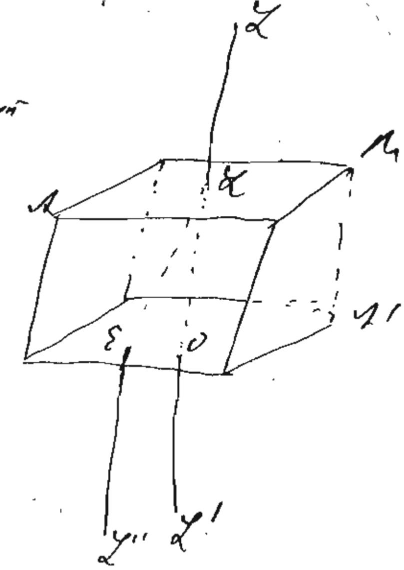
Амплитуда је овде $2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ и она је независна од времена, минимум је за $x/\lambda = 1/4 \quad 3/4 \dots$ итд. а максимум за $x/\lambda = 0 \quad 1/2 \quad 2/2 \dots$ Тачке максимума се називају трбуси а мин. се чворови. Отстојање од чвора до чвора $\lambda/2$. Овако се стварају тзв. стојећи таласи. Њима се објашњава појава фотографије у бојама. (Wiener Lippmann)



§ 72 [illegible] светлосни [illegible] [illegible] [illegible] у правцу OA $\perp$ на [illegible] [illegible], да [illegible] у равни NN, а [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] S [illegible].

За је [illegible] светлост [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. (Ово се [illegible] [illegible])

Кад се светлост одбија, прелама, [illegible] [illegible] [illegible] S у равни [illegible] на [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] се [illegible] светлост [illegible] поларисаном.



[illegible] $107^\circ 53'$. [illegible]

[illegible] ZZ [illegible] ZE [illegible] ZO. ZO [illegible] OZ' [illegible] ZE [illegible] ! [illegible] ZZ [illegible]

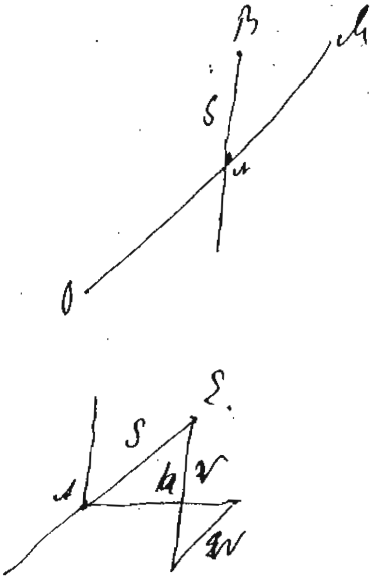
[illegible] ZZ. [illegible]

[illegible]

[illegible] OZ' [illegible] 180° [illegible] 90° [illegible] 45° [illegible] ZZ. [illegible]

1) [illegible]

2) [illegible] (Arago Fresnel) [illegible]



Ak jest OM wskazuje chwilowe [illegible] punktu drgającego który idzie w kierunku SB, oraz S [illegible] chwilowe [illegible] komponenty w kierunku osi każdej u, v, w

$$u = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p\right)$$
$$v = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q\right) \quad \ldots \quad (1)$$
$$w = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r\right)$$

Punkt Σ w czasie t [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] v [illegible] [illegible] t. [illegible] t [illegible] [illegible] [illegible] obrotu:

$$\frac{u}{A} = \sin 2\pi\frac{t}{T} \cdot \cos p + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin p$$
$$\frac{v}{B} = \sin 2\pi\frac{t}{T} \cos q + \cos 2\pi\frac{t}{T} \sin q \quad \ldots \quad (2)$$
$$\frac{w}{C} = \sin 2\pi\frac{t}{T} \cos r + \cos 2\pi\frac{t}{T} \sin r.$$

Ako [illegible] [illegible] pomnożymy [illegible] [illegible] $\sin(q-r)$ $\sin(r-p)$ $\sin(p-q)$ i [illegible] [illegible]:

$$\frac{u}{A}\sin(q-r) + \frac{v}{B}\sin(r-p) + \frac{w}{C}\sin(p-q) = 0$$

Tak że [illegible] [illegible] u v w [illegible] [illegible] [illegible] punkt Σ [illegible] w jednej płaszczyźnie.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\frac{u}{A}\sin q - \frac{v}{B}\sin p = \sin 2\pi\frac{t}{T}\left[\sin(p-q)\right]$$
$$-\frac{u}{A}\cos q + \frac{v}{B}\cos p = \cos 2\pi\frac{t}{T}\left[\sin(p-q)\right]$$

[illegible]:

$$\left(\frac{u}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{B}\right)^2 - \frac{2uv}{AB}\cos(p-q) = \sin^2(p-q)$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $p - q = \pi/2$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Ako jest $w = 0$ $A = B$ $p - q = \pm \pi/2$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$u = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$ $v = A\cos 2\pi t/T$ $w = 0$ десно циркуларно поларисана светлост

или

$u = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$ $v = -A\cos 2\pi t/T$ $w = 0$ лево " "

Ако је $W = 0$ $p - q = 0$ или π

$$\frac{u}{A} \pm \frac{v}{B} = 0$$

[illegible] линеарно поларисана [illegible]

Интензитет $J = A^2 + B^2 + C^2$. [illegible]

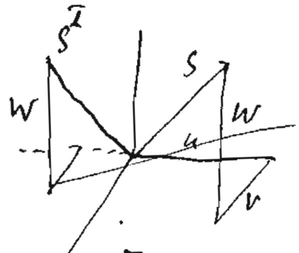
[illegible]

[illegible]

Ако је [illegible]

[illegible]

[illegible]

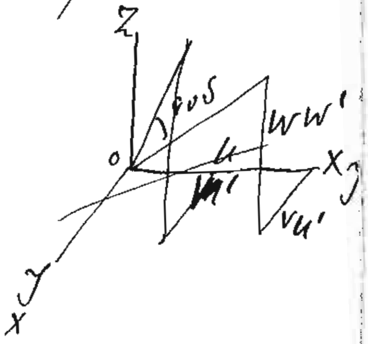


$$u' = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + q + \delta\right)$$

$$v' = -A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + p + \delta\right)$$

$$W' = C \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + r + \delta\right)$$

δ је [illegible] z [illegible]



[illegible] $90°$ [illegible] z [illegible]

[illegible] $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$ [illegible]:

$$A'^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\delta + q - p)$$

$$B'^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(\delta + p - q)$$

$$C'^2 = 2C^2(1 + \cos\delta)$$

Интензитет је:

$$J' = 2J + 2C^2 \cos\delta - 4AB \sin\delta \sin(q - p)$$

Како је $J' = 2J$ [illegible] $C = 0$ $q = p$ или

[illegible] $q = p$ [illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Emocije [illegible]
[illegible] koji [illegible]
[illegible] emocije [illegible].

Ca obo [illegible]
[illegible]
koji [illegible]
[illegible]
[illegible].

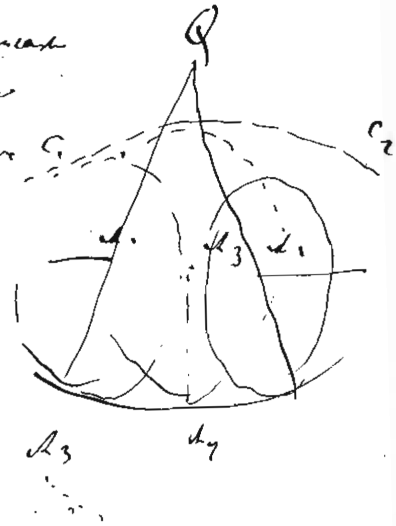
7^{*}_{2}

— [illegible] —

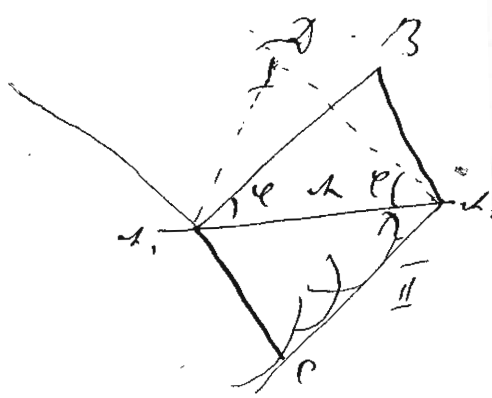
[illegible]

I

1. [illegible]



[illegible]



$$A_1D = v_1 t \qquad A_1C = v_2 t \qquad BA_2 = v_1 t$$

$$\sin\varphi = \frac{BA_2}{A_1A_2} = \frac{v_1 t}{A_1A_2} \qquad \sin\chi = \frac{CA_1}{A_1A_2}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \frac{v_1}{v_2} = \text{const.} = n$$

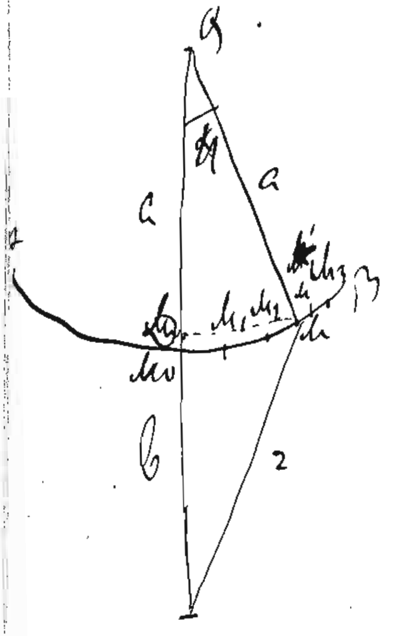
[illegible]

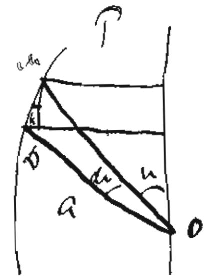
2. [illegible]

[illegible]

$$S = \frac{A}{a}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right)$$

[illegible]





Френелове зоне око тачке M_1.

$$M_1P = r_1 \mp \tfrac{1}{2}\lambda + b$$
$$M_2P = r_1 + \tfrac{1}{2}\lambda$$
и т. д.

Ако се означи тачка M између зоне M_2 и M_3, $MP = r$ и $M'P = r + dr$ имаћемо у одређеној зони за $u = u + du$, површина је елементарне зоне $d\sigma$:

$$d\sigma = 2\pi a^2 \sin u\,du = 2\pi a . MD = 2\pi a . a\,du$$

$$r^2 = a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b)\cos u$$

$$2r\,dr = 2a(a+b)\sin u\,du$$

$$d\sigma = 2\pi \frac{a}{a+b} r\,dr$$

Ова зона шаље у P треперење сразмерно површини $d\sigma$ а обрнуто сразмерно r а то је треперење ds'; (из I) имамо:

$$ds' = \frac{kA}{ar}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) d\sigma$$

Заменом из 2 ј.

$$ds' = 2\pi\frac{kA}{a+b}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr \quad (I.$$

k је фактор који зависи од нагиба M_1M_2 и он је мали ... Ако се узме да је ... између зоне M_{n-1} и M_n константан онда је ... зоне:

$$s_n' = \int ds' = 2\pi\frac{k_n A}{a+b}\int_{r_{n-1}}^{r_n}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r}{\lambda}\right) dr$$

или:

$$s_n' = \frac{k_n \lambda A}{a+b}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_{n-1}}{\lambda}\right) - \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+r_n}{\lambda}\right)\right\}$$

Kako je:

$z_{2n-1} = b + \frac{2n-1}{2}\lambda$ i $z_n = b + \frac{n}{2}\lambda$

naći je:

$$S_n' = (-1)^{n+1} \frac{2K_n \lambda A}{a+b} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right)$$

Djelovanje cijele zone onda:

$$S'_n = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots (-1)^{n+1} S_n$$

Ako uzmemo za $K_1 = K_2 = \dots K_n$

te [illegible]:

$$S' = \frac{S_1}{2} + \left(\frac{S_1}{2} - S_2 + \frac{S_3}{2}\right) + \left(\frac{S_3}{2} - S_4 + \frac{S_5}{2}\right) + \dots + \frac{S_n}{2} \quad (3.$$

ili

$$S' = S_1 - \frac{S_2}{2} - \left\{\left(\frac{S_2}{2} - S_3 + \frac{S_4}{2}\right) + \left(\frac{S_4}{2} - S_5 + \frac{S_6}{2}\right) + \dots\right\} - \frac{S_{n-1}}{2} + S_n \quad (4$$

Ako u zagradi je $S_p >$ od $\frac{S_{p-1} + S_{p+1}}{2}$ iz 3 je

$$S' < \frac{S_1}{2} + \frac{S_n}{2}$$

a iz 4 je

$$S' > S_1 - \frac{S_2}{2} + S_n - \frac{S_{n-1}}{2}$$

i prema tome je:

$$S' = \frac{S_1}{2} + \frac{S_n}{2} \quad \dots \quad (II$$

Ako je $S_p < \frac{S_{p-1}+S_{p+1}}{2}$ [illegible] je:

$$S' = \frac{S_1}{2} - \frac{S_n}{2} \quad \dots \quad (III$$

Uzmemo li ove zone [illegible] za koje zone $K_n = 0$ i za vanjsku zonu $S_n = 0$ i

$$S' = \frac{S_1}{2} = \frac{K_1 \lambda A}{a+b} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda}\right)$$

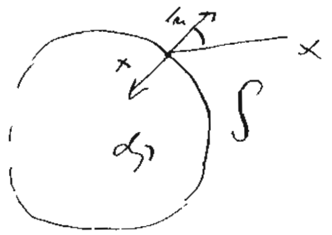
Gdyby zaś jasno gaz efektów u Q i P samo swo
elementarnym zaufanie było.
Aby zaś wymalować ogólniejszego obrazu
obietnicy.

— Хајенсов принцип —

II

основно извођење

28 Ако су дате две функције φ и ψ коначне и њих први изводи у извесном пределу ограђеном површином и испуњени теоремама, до које се лако може доћи применом:



$$\int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = \mp \int F \cos(n\,x)\, dS \quad \ldots \quad \text{L}$$

и једначине:

$$\partial\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (1.\ 2.\ 3.)$$

Ако исте ове једначине саберемо и применимо L имаћемо:

$$\int\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS + \int\left(\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi\right) d\tau = 0 \quad \ldots \quad \text{I}$$

$$= 4\pi\psi_0.$$

Ова теорема важи за $\varphi = \frac{1}{r}$, $\psi = \frac{u}{r}$ где је u функција од $x\,y\,z$ и t а $r^2 = x^2+y^2+z^2$ надомак вод, очито сводни односи:

$$\Delta\varphi = \Delta \tfrac{1}{r} = 0 \qquad \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{r}\frac{\partial \frac{u}{r}}{\partial n} - \frac{u}{r}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{u}{r^2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{u}{r}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial n}.$$

$$\Delta\psi = \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}\right)\frac{1}{r} - \frac{ux}{r^3} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r^2} - \frac{ux}{r^3}$$

$$= -\frac{x}{r^3}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r}\frac{x}{r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r}\right] - \frac{2x^2}{r^4}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^3} - \frac{x}{r^3}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}\right] + \frac{3ux^2}{r^5}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r}\cos xr + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^3} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{3x^2}{r^4}\right) - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial x}\cos xr - \frac{u}{r^3} + \frac{3ux^2}{r^5}$$

овако се једначине добијају за $\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ сабирањем

које:

$$\Delta\Psi = \Sigma \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\Delta u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\left[\Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r}\cos rx\right] - \frac{2}{r^2}\Sigma \frac{\partial u}{\partial x}\cos rx$$

Ако са d означимо потпуни диференцијал са [illegible] имаћемо:

$$\frac{du}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \Sigma \frac{\partial u}{\partial x}\cos rx \quad \text{и} \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}\cos rx.$$

Последња се добија из прве сменом u са $\frac{\partial u}{\partial r}$.

Кад се изврше вредности замене у $\Delta\Psi$ имаћемо:

$$\Delta\Psi = \Sigma \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\Delta u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right] - \frac{2}{r^2}\left[\frac{du}{dr} - \frac{\partial u}{\partial r}\right]$$

или

$$\Delta\Psi = \frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\frac{du}{dr} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

~~Како је~~

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Кад ово заменимо у I и сређимо са $\frac{1}{2}$ имаћемо интеграл:

$$-\int \frac{1}{2}\frac{du}{dn}ds = \int \frac{1}{2}\left(\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)d\tau + \int \frac{2}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right)d\tau$$

До обе интеграле можемо директно овако доћи:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\cos rx.$$

Ако овде сменимо u са $\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д. у $\frac{\partial u}{\partial x}$ ~~...~~

и кад сабирамо имаћемо:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial x}\cos rx + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}\cos rx$$

Кад обадве ове једначине саберемо помножимо са $d\tau$ и интегралимо имаћемо:

$$+\int \Sigma \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\tau = \int\left[\frac{1}{2}\Delta u - \frac{1}{r^2}\left[\frac{du}{dr} - \frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right.\right.$$

/.

Ako se [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] na [illegible] [illegible] [illegible]:

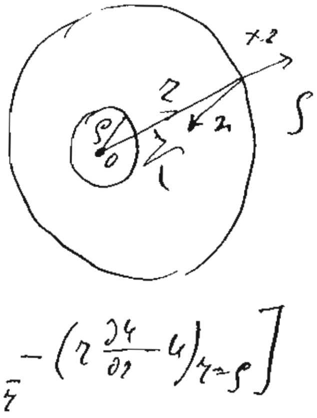
$$\int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau = -\int F \cos(nx)\, ds \quad \text{([illegible] [illegible] [illegible])}$$ (2)

$$-\int \frac{1}{2}\left(\sum \frac{\partial u}{\partial x}\cos nx\right) ds = \int \frac{1}{2}\left(\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) d\tau + \int \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right) d\tau \;\ldots\; (II)$$

[illegible] I [illegible] 2 [illegible] [illegible] $\frac{\partial}{\partial x}$ [illegible] r?

1) [illegible] II [illegible] $\frac{1}{2}$. [illegible] I [illegible] S [illegible] II [illegible]

I. [illegible]: [illegible] [illegible] S [illegible] K za $\rho = 0$ [illegible] K [illegible] S.



Ako [illegible] $d\tau = r^2 d\varphi dr$

$$\int \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right) d\tau = \int d\varphi \int_{\rho}^{\bar r} dr \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right) = \int d\varphi \left[\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right)_{r=\bar r} - \left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right)_{r=\rho}\right]$$

$\bar{r}$ je na [illegible] S.

$r = \rho \qquad r\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad$ a $\qquad \int d\varphi (U)_{r=\rho} = 4\pi U_0$

U_0 je [illegible] U [illegible] 0.

$$r^2 d\varphi = -dS\cos(nr) \quad \text{[illegible] } r \text{ od } 0$$

$$\int d\varphi \left[r\frac{\partial u}{\partial r} - U\right]_{r=\bar r} = -\int dS \cos nr \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{U}{r^2}\right) = -\int dS \cos nr \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)$$

[illegible] II [illegible] S [illegible]:

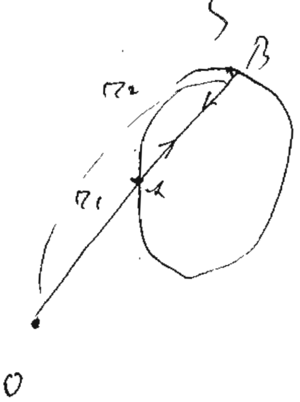
$$\int\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - \cos nr \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\right\} ds = \int \frac{1}{r}\left(\Delta U - \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) d\tau + 4\pi U_0 \;\ldots\; I'$$

$d\tau$ [illegible]

II [illegible]. Ako S [illegible] 0 ([illegible]) y II [illegible]

[illegible]

/.



Нека је даље

$$d\tau = r^2 d\varphi\, dr$$

$$\Delta = \int \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right) r^2 d\varphi\, dr = \int d\varphi \left\{ \left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right)_{r=r_2} - \left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right)_{r=r_1} \right\}$$

Код A је:

$$r_1^2 d\varphi = ds \cos nr$$

Код B је:

$$r_2^2 d\varphi = -ds \cos nr$$

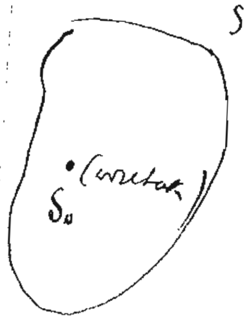
а одавде је:

$$\Delta = -\int_{r_1}^{r_2} ds \cos nr \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right)$$

Кад ово сменимо у II имаћемо:

$$-\iint\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - \cos nr \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\right\} ds = \int\left(\frac{1}{r}\Delta u - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) d\tau \;\ldots$$

Из 3) Нека је у S источник светлости, да видимо S у тачки координатног система. S задовољава једначину:



$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \sum \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = v^2 \Delta S \quad \ldots \quad 1.$$

Ако са u означимо функцију која постаје из S кад се у S t смени са $t - r/v$ онда је $u_0 = S_0$ јер је за то $r = 0$ и задовољава једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u \quad \ldots \quad 2.$$

$$u = S(t - r/v)$$

U зависи од r и оно задовољава једначину:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad \ldots \quad 3.$$

а из 2 и 3 је

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

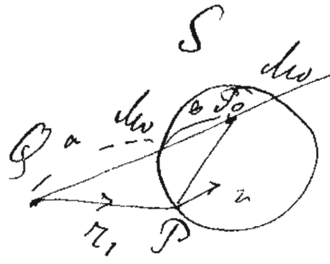
Ако имамо сада да одредимо S у зависности од тачке I где за $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ и $U = S(t - r/v)$

$$4\pi S_0 = \iint\left\{\frac{\partial \frac{S(t - r/v)}{r}}{\partial r}\cos nr - \frac{1}{r}\frac{\partial S(t - r/v)}{\partial n}\right\} ds.$$

Тако је формулисан Хајгенсов принцип (изражен) и он каже: ефекат светлости у S_0 је суперпозиција ефеката ... од свих тачака на површини S око поменуте тачке:

За да нађемо деформацију у тачки [illegible] да је [illegible]
$\frac{\partial s}{\partial n}$ на површини S

1) Нека је извор деформације Q ван површине S која [illegible] тачку P_0. Деформација у тачки P дата је једначином:



$$S = \frac{A}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right) \quad \ldots 1.$$

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \frac{\partial s}{\partial r_1}\cos nr_1 = \cos nr_1\left\{-\frac{A}{r_1^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)+\frac{2\pi A}{\lambda r_1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)\right\} \ldots 2$$

Како је λ мало према r_1 може се [illegible]:

$$\frac{\partial S(t-r/v)}{\partial n} = \cos nr_1\,\frac{2\pi A}{\lambda r_1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right) \ldots 3.$$

Ово се добија из 2 када се t смени са $t - r/v$

Ако се ова иста смена учини у 1 имаћемо:

$$\frac{S(t-r/v)}{r} = \frac{A}{rr_1}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right) \ldots 4.$$

Ако једначину 4 диференцијалимо и занемаримо мале чланове имаћемо:

$$\frac{\partial \frac{S(t-r/v)}{r}}{\partial r} = \frac{2\pi A}{\lambda r r_1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right) \ldots 5.$$

Кад се ради ове смене у I'' имаћемо:

$$S_0 = \frac{A}{2\lambda}\int \frac{1}{rr_1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right)\left[\cos(nr)-\cos(nr_1)\right]ds \ldots II''$$

За тачке изван P_0 на пр. $d\omega'$ ефекат је у P_0 [illegible]

$\cos(nr)-\cos(nr_1) = 0$

За елементе $d\omega$ у непосредној околини $\cos nr = -\cos nr_1 = 1$ (ако је елемент $ds \perp$ на Ox)

$$S_0 = \frac{A}{2\lambda}\int \frac{2}{rr_1}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right) r\,d\varphi\,dr = \frac{A\,2\pi}{\lambda r_1}\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right)\right]_0^{\infty}$$

Ово је као да је директно распростирање деформације из Q. Елементи $ds \perp$ [illegible] фаза је у P_0 као да се директно распростире деформација из Q. [illegible] на QP_0 у II'' имамо члан $-\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right)$ као да се [illegible] за $\lambda/2$ [illegible] деформације од [illegible] из Q.

Глава трећа

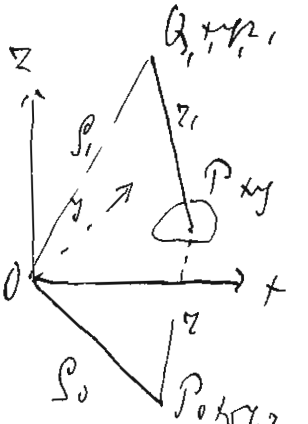
— Дифракција —

(преламање светлости)

I

73. Кад светлост наиђе на уске пукотине или ивице [illegible] и даје одступање од праволинијског простирања. Овде се не може изнети у [illegible] (Хајгенсов принцип) утврђује да је у свакој [illegible] светлосног извора [illegible] одговарајућа [illegible] карактеристичним функцијама, само је неопходно одредити [illegible] зависно од природе заклона и облика кроз који светлост иде. Ја ћу дифракцију објаснити [illegible].

Пре но што пређемо на старо [illegible] ових [illegible] неколико [illegible].



74. Нека је извор светлости у Q_1 отвор у равни xy у P а [illegible] се посматра у тачки P_0.

Обележимо растојања r_1 и r. $\cos n r_1$ и $\cos n r$, [illegible] за [illegible] косинусе, такође r и r_1 кад [illegible] λ

По Хајгенсу је дејство S_0 у P_0 дато изразом:

$$S_0 = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{\cos(nr)-\cos nr_1}{r r_1}\int \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r+r_1}{\lambda}\right)d\sigma \dots$$

По слици:

$$r_1^2 = (x_1-x)^2+(y_1-y)^2+z_1^2 \qquad r^2 = (x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z_0^2 \dots$$

$$\rho_1^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2 \qquad \rho_0^2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2 \dots \quad 3.$$

$$r_1 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)+x^2+y^2-2(xx_1+yy_1) \text{ или}$$

$$r_1 = \rho_1\sqrt{1+\frac{x^2+y^2-2(xx_1+yy_1)}{\rho_1^2}}$$

$$r_2 = \rho_0\sqrt{1+\frac{x^2+y^2-2(xx_0+yy_0)}{\rho_0^2}}$$

x и y је мало према r, r_1, ρ_1 и ρ_0

$$r_1 = \rho_1\left\{1+\frac{x^2+y^2}{2\rho_1^2}-\frac{xx_1+yy_1}{\rho_1^2}-\frac{(xx_1+yy_1)^2}{2\rho_1^4}\right]$$

$$r = \rho_0\left\{1+ \dots\right]$$

Ако се $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ и $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ означе косинуси праваца ρ_1 и ρ_0 имаћемо:

$$z_1 + z = \rho_1 + \rho_0 - x(\alpha_1+\alpha_0) - y(\beta_1+\beta_0) + \frac{x^2+y^2}{2}\left[\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right] - \frac{(x\alpha_1+y\beta_1)^2}{2\rho_1} - \frac{(x\alpha_0+y\beta_0)^2}{2\rho_0}$$

Ако означимо са:

$$z_1 + z = \rho_1 + \rho_0 + f(xy)\frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\frac{t}{T} - \frac{\rho_1+\rho_0}{\lambda} = \frac{t'}{T}$$

$$\frac{A}{2\lambda}\frac{\cos nz - \cos nz_1}{nz_1} = A'$$

имаћемо:

$$S_0 = A'\left\{\sin 2\pi\frac{t'}{T}\int\cos[f(xy)]\,d\sigma - \cos 2\pi\frac{t'}{T}\int\sin[f(xy)]\,d\sigma\right\} \quad (I.$$

Међусоб. кретање у P_0 ј суперпозиција два кретања чиј амплитуде:

$$C = \int\cos f(xy)\,d\sigma \quad \ldots \quad (II.$$
$$S = \int\sin f(xy)\,d\sigma$$

фазна ј разлика $\pi/2$

Интензитет ј у P_0 J

$$J = A'^2[C^2+S^2] \quad \ldots \quad (III.$$

3.32 Френелове појаве дифракције. Посматр. ј система усредсред. на QP_0

$$\rho_1 = -\rho_0 \quad \alpha_1 = -\alpha_0 \quad \beta_1 = -\beta_0$$

$$f(xy) = \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_1}\right)\left[x^2+y^2-(x\alpha_1+y\beta_1)^2\right] \quad \ldots \quad (1.$$

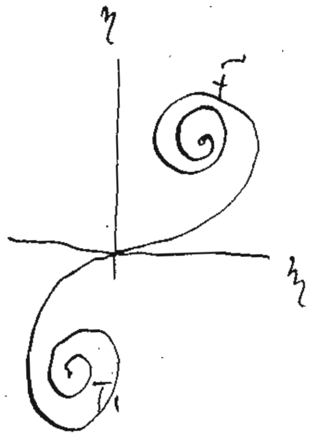
Ако и xске осе узм у правцу QP_0 $\beta_1 = 0$ и ако ј ... између ρ_1 и zске осе онда ј:

$$f(xy) = \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_1}\right)\left[x^2\cos^2\varphi + y^2\right]$$

Кад се ове замене у I II и III имаћемо после интеграције облика:

$$\xi = \int_0^v \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv \quad \text{и} \quad \eta = \int_0^v \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv$$

(Fresnel-ови интеграли).



ако се v схвати за параметар онда тачке ξ η описују, а до ње се долази ... Тачке F и F₁ се добијају за v = ∞ v.

Координате су тачака F и F₁ дате једначинама:

$$\xi_F = \int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv \quad и \quad \eta_F = \int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv$$

Ако ~~интеграл~~ означимо са M интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = M \quad \ldots \quad 1^0$$

$$\int_0^\infty e^{-y^2}dy = M$$

~~Множењем~~ је:

$$\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = M^2 \quad \ldots \quad 2^0$$

Ако су x и y правоугле координате тачке P $x^2+y^2=r^2$, елемент је површине

$$d\sigma = r\,dr\,d\varphi. \quad и\ 2^0\ је:$$

$$M^2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2}\,r\,dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^\infty \quad или$$

$$M^2 = \pi/4 \qquad M = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Ако у 1^0 ставимо $x^2 = -i\frac{\pi v^2}{2}$ $x = v\sqrt{-\frac{i\pi}{2}}$ имаћемо:

$$\sqrt{-\frac{i\pi}{2}}\int_0^\infty e^{i\frac{\pi v^2}{2}}dv = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad или\ како\ је:$$

$$\frac{1}{\sqrt{-i}} = \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

$$\int_0^\infty e^{i\frac{\pi v^2}{2}}dv = \frac{1+i}{2}.$$

или

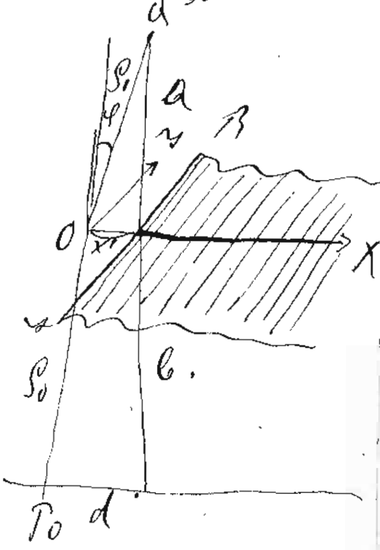
$$e^{i\frac{\pi v^2}{2}} = \cos\frac{\pi v^2}{2} + i\sin\frac{\pi v^2}{2}$$

Одавде је:

$$\underline{\int_0^\infty \cos\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \tfrac{1}{2}} \qquad \underline{\int_0^\infty \sin\frac{\pi v^2}{2}\,dv = \tfrac{1}{2}}$$

33 Савијање на праволинијском ободу заклона

Нека је тачка ока $\parallel$ са ободом заклона AB и нека је ван ње. Заклон иде од $x = x'$ до $x = \infty$. То је ван заклона и је у равни $XZ \perp$ на заклону које се налазе у xy равни.



Израз за интензитет у P_0

Сад нађимо све компоненте интензитета:

$$C = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)(x^2\cos^2\varphi + y^2)\right] \quad \ldots \; 1.$$

$$S = \int_{-\infty}^{x'}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy \sin\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)(x^2\cos^2\varphi + y^2)\right]$$

Кад је обод заклона AB удаљен од линије QP_0 заклон не утиче на јачину у P_0, али што иде заклон удесно и с тога су и одговарајуће границе уже у C и S.

Ако обележимо $d\,l$ са:

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)x^2\cos^2\varphi = \frac{\pi v^2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)y^2 = \frac{\pi u^2}{2}$$

добићемо:

$$C = \frac{1}{\cos\varphi\,\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}\int_{-\infty}^{v'}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\,du \cos\frac{\pi}{2}(v^2+u^2)$$

$$S = \frac{1}{\cos\varphi\,\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}\int_{-\infty}^{v'}\int_{+\infty}^{+\infty} dv\,du \sin\frac{\pi}{2}(v^2+u^2)$$

$$v' = x'\cos\varphi\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}$$

Ако се узме у разлогу одговор:

$$\cos\frac{\pi}{2}(u^2+v^2) = \cos\frac{\pi v^2}{2}\cos\frac{\pi u^2}{2} - \sin\frac{\pi v^2}{2}\sin\frac{\pi u^2}{2} \quad \text{и слично за Sin}$$

Заменимо:

$$C = f\left\{\int_{-\infty}^{v'}\cos\frac{\pi v^2}{2}dv - \int_{-\infty}^{v'}\sin\frac{\pi v^2}{2}dv\right\} \quad \ldots\ldots \; 2.$$

$$S = f\left\{\int_{-\infty}^{v'}\sin\frac{\pi v^2}{2}dv + \int_{-\infty}^{v'}\cos\frac{\pi v^2}{2}dv\right\}$$

$$f = \frac{\lambda}{2\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)}$$

познато је

$$\int_0^\infty \cos\frac{\pi u^2}{2}du = 1/2 \quad и \quad \int_{+\infty}^{+\infty} = \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \int_0^{\infty} + \int_0^{-\infty} = 1$$

Интензитет J је:

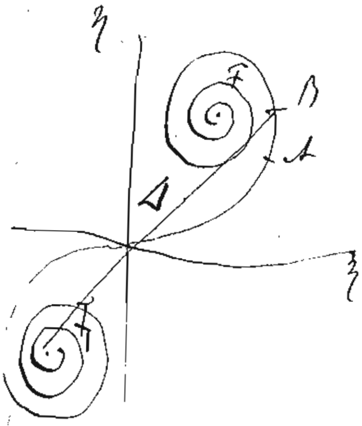
$$J = 2A'^2 f^2 \left\{ \left(\int_{-\infty}^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2}dv\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2}dv\right)^2 \right\} \quad \ldots \text{(I)}$$

$$A' = \frac{A}{2\lambda}\,\frac{\cos(nr) - \cos(nr_1)}{rr_1} \quad \ldots \text{(3.}$$

A је интензитет ... у одстојању један од извора.

За одређивање A' узећемо само оне делове xy-ове равни које су близу тачке ... је

$z = \rho_0 \quad z_1 = \rho_1, \quad \cos nr = -\cos nr_1 = \cos\varphi$



$$A'f = \frac{A}{2(\rho_0+\rho)}$$

Координате су на које наилази ... FF_1, на пр. тачке A и B

тачке A $\quad \xi = \int_0^{v} \cos\frac{\pi v^2}{2}dv \quad \eta = \int_0^{v} \sin\frac{\pi v^2}{2}dv$ за параметар v

тачке B $\quad \xi_1 = \int_0^{v_1} \cos\frac{\pi v^2}{2}dv \quad \eta_1 = \quad$ " " $\quad v_1$

$$\int_v^{v'} \cos\frac{\pi v^2}{2}dv = \xi' - \eta \quad и \quad \int_v^{v'} \sin\frac{\pi v^2}{2}dv = \eta_1 - \eta$$

$$AB^2 = (\xi' - \eta)^2 + (\eta_1 - \eta)^2$$

За параметар $v = -\infty$ одговара тачка F_1, за параметар v' тачка B, одстојање од F_1 до B обележимо са $(-\infty\, v')$ и онда интензитет

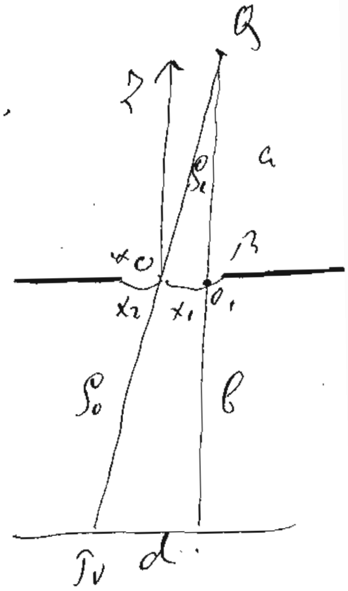
$$J = \frac{A^2}{2(\rho_0+\rho_1)^2}\left(\overline{-\infty\, v_1}\right)^2 \quad \ldots \text{(II.}$$

Из слике је јасно да Δ има своје maxim. и mini. за $v_1 > 0$ када тачка То баш ~~закона~~ геометријске сенке закона, у закону и у сенци је Δ мање $v' < 0$

За $v' = +\infty$ $\quad \Delta^2 = (\overline{-\infty +\infty})^2 = 2$ интензитет је ~~једнак~~ највећи. За $v' = 0$ то је на ивици сенке и $\Delta^2 = (\overline{-\infty\, 0})^2 = 1/2$ интензитет је 1/4 целокупног интензитета.

37 Дифракција кроз уску пукотину. Нека је све из стране
тачку. Узмимо се интензитет у тачки Tv која лежи у x^2 ... поље,
а од x координат обеју пукотина x_1 и x_2. $x_1 x_2$ могу бити
неметални ... само ... кад леже QTv иде кроз пукотину
а је позитивно ... је негативно. O_1 је почетак.

Нека је $AB = \delta$ (O_1 лежи у средини AB)



$x_1 - x_2 = \delta \qquad x_1 - \frac{1}{2}\delta : d = a : a+b$

$a = \rho_1 \quad b = \rho_0$ приближно

Јачина је интензитета у тачки:

$$J = \frac{A^2}{2(\rho_0 + \rho_1)^2}\,(v_1 v_2)^2 \quad \ldots \quad 1.$$

v је дато једначином:

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0}\right) x^2 \cos^2\varphi = \frac{\pi v^2}{2} \quad \ldots \quad 2.$$

v_1 и v_2 одговарају за $x = x_1 \quad -x_2$

$(v_1 v_2)$ је одстојање две тачке на спирали од одговарајуће v_1 и v_2

Из 2 је по замени:

$$v_1 = x_1\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot \cos\varphi \qquad v_2 = x_2\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \cdot \cos\varphi. \quad (\cos\varphi = \cos 0 = 1)$$

$$v_1 - v_2 = \delta\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(1/a + 1/b\right)} \qquad \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{d}{p}$$

$$p = \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}} \qquad x_1 = \frac{1}{2}\delta + \frac{ad}{a+b}$$

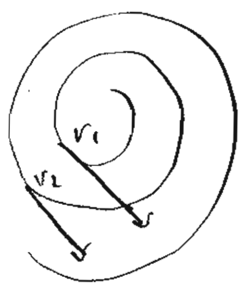
$$x_2 = \frac{3}{2}\delta + \frac{ad}{a+b}.$$

Овде је занемарен члан $\delta\sqrt{\frac{2}{\lambda}\frac{(a+b)}{a \cdot b}}$ који је δ мало.

За дискусију је важно имати је $v_1 - v_2 = const.$ ...
... тако се лако одређује растојање две тачке v_1 и v_2 за које
... $S = v_1 - v_2 = const.$

Нека је ширина пукотине S нека износи 0.1 ...
... ($za\ a = b = 20\,cm \quad \delta = 30\lambda$). ... јачина одговара ...
$=0$ ... $d = const$ ... кад v_1 и v_2 ...
... Светлост је у ... светле ...
... (Дифузија светлости).

Ако је δ веће, ако узмемо да је на пр. $\delta = 0.5$ и обе светлости и не мора у величини ~~[illegible]~~ одговарати. Међ и минимума јавља се за оне тачке од v_1 и v_2, које се ја у резонанцијској сенци. Тачне су минимуми за оне места v_1 и v_2 од [illegible] [illegible]



[illegible] горе је на [illegible] страни:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\frac{\pi v^2}{2} \qquad \tau = \frac{\pi}{2} v^2$$

Дакле за v_1 и v_2 од τ_1 и τ_2 треба разлика да буде 2n.

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{\pi}{2}\left[v_1^2 - v_2^2\right] = \pm 2n\pi \quad \text{или}$$

$$(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = \pm 4n$$

или

$$d\delta = \pm n\lambda b \quad \text{за } n = 1, 2, 3 \ldots \quad \text{I}$$

Ова су места ~~[illegible]~~ минимума осветљености и I је јасно да зависи од a одстојања извора светлости од заклона.

Нека је [illegible] још [illegible] или нека је однос a/b на да је $v_1 - v_2$ велико а за разне вредности v_1 и v_2 има [illegible] о [illegible] места [illegible] резонанцијске сенке. За сваку вредност од $v_1 - v_2$ [illegible] [illegible] зависност I од d и из [illegible] [illegible].

За $v_1 - v_2$ [illegible] велико [illegible] [illegible] [illegible].

За [illegible] [illegible] $d = 0$ I [illegible] [illegible] [illegible]

Од вредности b за дато a и δ зависи I и [illegible] maxim. и minim. За $d = 0$ v_1 и v_2 су супротног знака а једнаки. Линија [illegible] тачке v_1 и v_2 иде кроз [illegible]. Maxim и minim се јављају за [illegible] тачке [illegible] и [illegible] FF₁. Линија FF₁ [illegible] [illegible] [illegible]. За maxim је $\tau = \left(\frac{3}{4} + 2n\right)\pi$ за минимум $\tau = \left(\frac{7}{4} + 2n\right)\pi$ $n = 0, 1, 2, 3$.

maxi. $v^2 = \frac{3}{2} + 4n$, mini. $v^2 = \frac{7}{2} + 4n$

Пошто је $v_2 = -v_1$

maxim за $\frac{\delta^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2} + 4n$

minim за $\frac{\delta^2}{2\lambda}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{7}{2} + 4n$ $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

— II —

Главна теорија дифракције
(Sommerfeld-ов метод)

Једначина за простирање ових таласа је:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \Delta S = v^2 \sum \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad \ldots (1$$

[illegible] ове једначине водећи рачуна о [illegible] дифракције. [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) \quad \ldots (2$$

[illegible]

[illegible]:

$S = 0$ [illegible] ... (a

$\frac{\partial S}{\partial z} = 0$ " " [illegible] " " ... (b

[illegible] за $z = 0$, $x > 0$

[illegible] за $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ [illegible] x и y [illegible]

$$x = r\cos\varphi \qquad z = r\sin\varphi \quad \ldots (3$$

Једначина 2 за 3 је:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2\left[\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}\right) \quad \ldots (I$$

Ovaj problem integrisan za uslove zadanim zrakom.

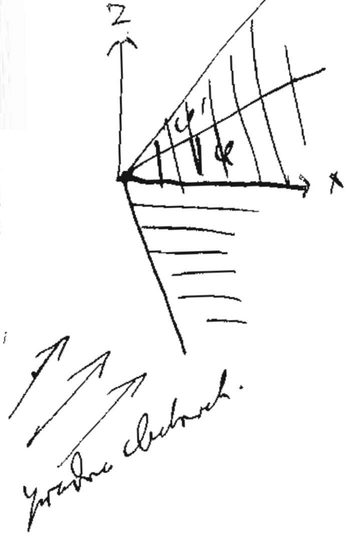
Ako je ravan električnih zrakova upravljena u pravcu [illegible] i osovina je zaklona upravljena u y, $+x$ je u zaklonu $+z$ je [illegible] a S je [illegible] od y u jednačini za S je:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) \quad \ldots \quad (I.$$

Neka je zaklon takav u [illegible] zadanim u [illegible]

5) $S = 0$ Kad je zraka električnih [illegible] upravljena na ravan zaklona

6). $\frac{\partial S}{\partial z} = 0$ Kad je električna [illegible] upravljena na ravan zaklona.



Za $z=0$, $x>0$ $\sin^2\varphi = 0$ u $\varphi = 2\pi$ $x = r\cos\varphi$ $z = r\sin$

Ako u (I uvedemo u jednačinu u [illegible] koordinatama [illegible] ona je sledeća:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}\right) \quad \ldots \quad (II.$$

Ako je izvor u ∞ a [illegible] zraka φ' [illegible] je

$$(III) \ldots S = A\,\frac{1+i}{2}\,e^{i2\pi\frac{t}{T}}\left\{e^{-i\gamma}\int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}}dv \mp e^{-i\gamma'}\int_{-\infty}^{\sigma'} e^{-i\frac{\pi v^2}{2}}dv\right.$$

− za zrak 5 + za zrak 6.

(Sommerfeld Math. Annalen Bd 47 s. 317. 1896)

$$\gamma = \frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\varphi-\varphi') \quad \gamma' = \frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\varphi+\varphi')$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{8r}{\lambda}}\,\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi') \quad \sigma' = -\sqrt{\frac{8r}{\lambda}}\,\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')$$

$$i = \sqrt{-1}$$

In III; $S = (A + Bi) e^{i 2\pi \frac{t}{T}}$

Abgrenzung gegen oben

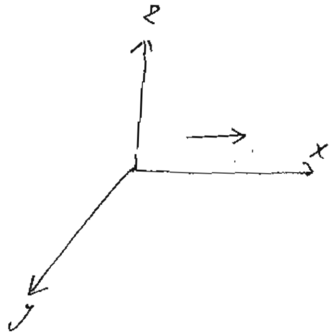
$$s = A \cos 2\pi \frac{t}{T} - B \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Momentanwerte, Leistung J:

$$J = A^2 + B^2$$

Глава IV-та

Провидна изотропна тела.



36. Ако претпоставимо да струје иду паралелно са ox-ом осом у танком слоју || са равни xy, ове струје изазваће магнетне силе на одстојању истога слоја које || са oy осом. Магнетне силе изазваће узрок су појава индуковане електричне струје, које ће бити паралелно супротно електричним струјама [illegible] оси x-ој узроку и у правцу позитивне x-ое оси слоја. У нашем случају струје у позитивном правцу x-ое осе и [illegible] се ре електрични талас у правцу x-ое осе. (позитивне и негативне)

Да би нашли формулу простирања овога поремећаја [illegible] електромагнетне теорије [illegible] једначина и добити:

$$\frac{K}{c}\frac{\partial^2 X}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)c$$

Када ове $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ и $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ сменимо својим вредностима имамо:

$$\frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

Из једначине континуитета имамо:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \qquad \left(\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)$$

Када ово сменимо добијамо:

$$\frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X, \quad \frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y \quad \frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z \quad \ldots \quad (I.$$

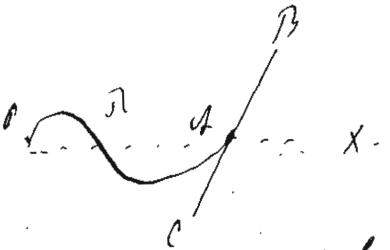
За магнетне силе нашли бисмо ове једначине:

$$\frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Delta \alpha \quad \frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \Delta \beta \quad \frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \Delta \gamma \quad \ldots \quad (II.$$

Једначине под I и II су облика:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2 \Delta S.$$

S jest elongacją cząstki [illegible] w chwili [illegible] pełnookresowej(?) [illegible], t czasem, x y z są koordynaty punktu A, v jest prędkością [illegible] od punktu 0.



Każdy ośrodek 0 y ∞ [illegible] [illegible], [illegible] 7 [illegible] fale i kuliste.

płaskie fale a). Niech 0X [illegible] [illegible]. S jest [illegible] od x i jednocześnie od t

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad \ldots \quad 1.$$

Ogólną [illegible] jest całka:

$$S = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad \ldots \quad 2.$$

f_1 i f_2 są dowolnymi funkcjami.

Jeśli S od t jest okresową funkcją

$$S = A_1 \cos a\left(t - \frac{x}{v} + \delta_1\right) + A_2 \cos a\left(t + \frac{x}{v} + \delta_2\right) \quad \ldots \quad 3.$$

A_1 A_2 δ_1 δ_2 są konstanty.

Z 3 jest widoczne:

$$a\left(t_1 - \frac{x_1}{v} + \delta_1\right) = a\left(t_1 - \frac{x_2}{v} + \delta_1\right) + 2\pi$$

$$a\left(t_1 - \frac{x_1}{v} + \delta_1\right) = a\left(t_2 - \frac{x_1}{v} + \delta_1\right) + 2\pi$$

stąd

$$a(x_2 - x_1) = 2\pi \quad \text{i} \quad a(t_1 - t_2) = 2\pi$$

$$a = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad a = \frac{2\pi}{T} \qquad \lambda = vT$$

Kładąc to zamiast w 3 otrzymamy:

$$S = A_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} + \delta_1\right) + A_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} + \delta_2\right) \quad \ldots \quad 4.$$

T jest czasem jednego [illegible] drgania cząstki A, λ jest długością fali, δ_1 i δ_2 są [illegible] [illegible] [illegible] fali w 4. A_1 i A_2 są amplitudy [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] pełnookresowej [illegible].

b). Kuliste fale. Jeśli w równaniu

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \Delta S$$

[illegible] że $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ [illegible]:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{x}{r} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right) = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{\partial S}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$\Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial S}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2\left[\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) \text{ или}$$

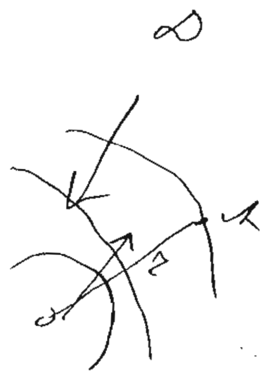
$$\frac{\partial^2 (sr)}{\partial t^2} = v^2\left[r\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + 2\frac{\partial s}{\partial r}\right) = v^2\frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2}$$

Ова се једначина интеграли као обична [illegible] и s буде:

$$sr = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

или

$$s = \frac{A_1}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{vT} + \delta_1\right) + \frac{A_2}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{Tv} + \delta_2\right) \dots 5.$$

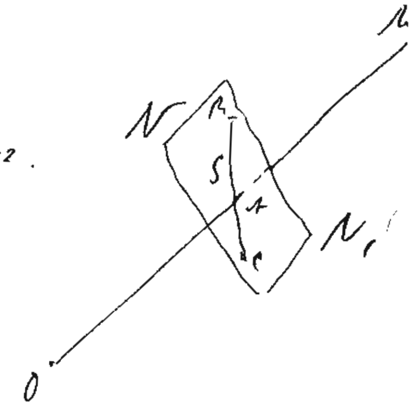


Ово су два [illegible] таласа из 0 у ∞ и из ∞ у 0 брзином v. $\frac{A_1}{r}$ је амплитуда тачке A у одстојању r, а A_1 амплитуда у одстојању један.

c). [illegible]

Ако уведемо у једначину

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2\Delta s \dots 6.$$



Ну можемо задовољити са $s = A_1 e^{i\omega t}\psi$, ψ је функција x y z. Кад и ово сменимо у 6 добићемо за ψ једначину

$$\psi + \frac{\omega^2}{v^2}\Delta\psi = 0 \text{ или}$$

$$\psi + k^2\Delta\psi = 0.$$

Један партикуларни интеграл је за ψ облика:

$$\psi = e^{\pm ik(ax+by+cz)}.$$

$$s = A_1 e^{-i\omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right)}$$

ако само стварни део овог израза узмемо:

$$s = A_1\cos\omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right)$$

или ако заменимо ω са $\frac{2\pi}{T}$

$$s = A_1\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{ax+by+cz}{v}\right) \dots I.$$

Ово вреди кад је тачка A [illegible] у равни NN' ⊥ на правцу OM.

9. Кад се ово примени на једначине

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{c^2}{K}\Delta X = V^2 \Delta X \quad \text{и т. д.} \; \dots \; 1.$$

онда је $v^2 = \frac{c^2}{K}$ = брзина простирања таласа

$v = \frac{c}{\sqrt{K}}$ овде је брзина ел. магн. таласа зависна од вели[illegible] и намагнетисања. За вакуум је $K = 1$ $v = c = 2.99$[illegible]

У тешким телима брзина је мања од c у односу $\frac{1}{\sqrt{K}}$ [illegible] у вакууму. Ако је n_0 експонент преламања [illegible] однос брзине у вакууму и тела онда n_0.

$$n_0 = \sqrt{K} \qquad n_0^2 = K \; \dots \; I.$$

Где n_0 независно од λ (таласне дужине) закон I [illegible] од искуства.

3.38 Ако компоненте [illegible] поља таласа, означимо са $X\ Y\ Z$ амплитуде са $A_x\ A_y\ A_z$ онда у брзине $X\ Y\ Z$ задовољавају једначине 1. облика:

$$X = A_x \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{v}\right)$$
$$Y = A_y \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{v}\right) \quad \dots \; 1.$$
$$Z = A_z \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{v}\right)$$

$mx + ny + pz = \text{const}$ представља фронт таласа. Ове једначине казују да [illegible] поље у једној и истој равни.

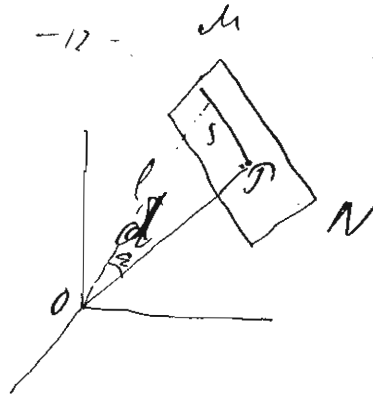
Из односа:

$$\sum \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \text{имамо}$$

$$A_x m + A_y n + A_z p = 0 \; \dots \; 2.$$

значи вектор $A_x A_y A_z \perp$ на правцу $m\ n\ p$ а то је нормала на равни 2. (трансверзални таласи).

Рефлексија и рефракција



§.39 Ако се упоређена тачка T врше у равни MN чија је намена:

$$mx + ny + pz = d \quad \ldots \quad (1)$$

где су m n p cosi. угла нормале нормале d

Означимо с ε нагиб ове одсечка:

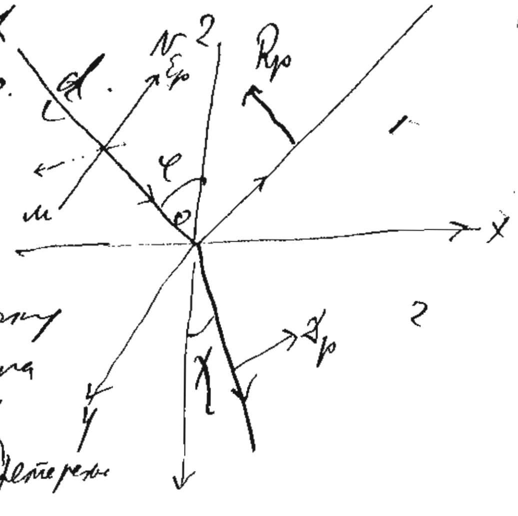
$$l\cos\varepsilon = d.$$

Означимо је вертикалан тачке T датим изразом:

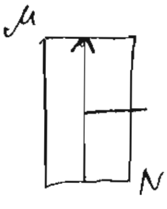
$$s = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{v}\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{mx+ny+pz}{v}\right) \quad \ldots (I)$$

Ако компоненту A разложимо на три компоненте Ax Ay Az, силу електричну E која изазива вертикалан E на три компоненте X Y Z вали је електричн. ... датим једначинама:

$$X = A_x \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{v}\right)$$
$$Y = A_y \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{v}\right) \quad (2)$$
$$Z = A_z \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{v}\right)$$



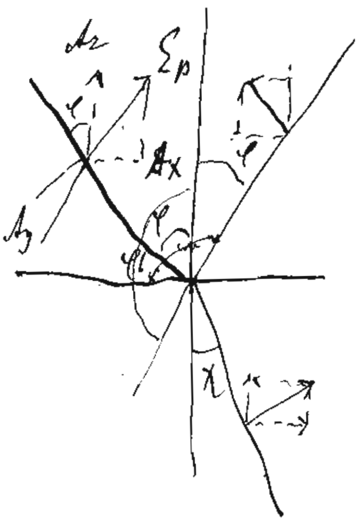
Ако имамо две средине 1 и 2 и брзине светлости у њима означимо са v_1 и v_2 а раван x y узмемо за граничну раван, нормалне ове означимо стрелицама као што је на слици. Ако зрак долази под углом φ из средине 1 нека он лежи у равни Zx ⊥ xy, која је и упадна раван. Претпоставимо у равни MN ⊥ на O.A.



Нормала нормалне d склапа углове са MN чији косинуси

$$m = \sin\varphi \quad n = 0 \quad p = \cos\varphi$$

Ако упадну електричну силу у равни MN разложимо две компоненте од којих је једна ⊥ на упадну раван Zx чију амплитуду обележимо са E_s и на амплитуду E_p у упадној равни, која је паралелна са осеком ова



Ze względu (elektryczny ciąg) są równe

$A_x = \mathcal{E}_p \cos\varphi \qquad A_y = \mathcal{E}_s \qquad A_z = -\mathcal{E}_p \sin\varphi$

Każde z obu promieni z tych komponentów da [illegible] elektryczne [illegible]:

$$X_e = \mathcal{E}_p \cos\varphi \cos\frac{2\pi}{T} w_e$$
$$Y_e = \mathcal{E}_s \cos\frac{2\pi}{T} w_e \quad \ldots \quad (I$$
$$Z_e = -\mathcal{E}_p \sin\varphi \cos\frac{2\pi}{T} w_e$$
$$w_e = t - \frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V_1}$$

K_1 i K_2 są dielektryczne konstanty ośrodka 1 i 2.

$$V_1 = \frac{c}{\sqrt{K_1}} \quad \ldots \quad 2$$

Z równania:

$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ i innych dla [illegible] ze 3 równań [illegible]

[illegible] komponenty magnetyczne [illegible]:

$$\alpha_e = -\mathcal{E}_s \cos\varphi \sqrt{K_1} \cos\frac{2\pi}{T} w_e$$
$$\beta_e = +\mathcal{E}_p \sqrt{K_1} \cos\frac{2\pi}{T} w_e \quad \ldots \quad (II.$$
$$\gamma_e = +\mathcal{E}_s \sin\varphi \sqrt{K_1} \cos\frac{2\pi}{T} w_e$$

Z I i II jasno że przy $\mathcal{E}_s = 0$ i $\mathcal{E}_p > 0$ $\alpha_e = \gamma_e =$ $\beta_e > 0$. [illegible] elektryczne [illegible] $\mathcal{E}_p$ [illegible] β_e [illegible]

Każde [illegible] elektryczne [illegible] i [illegible] i [illegible] i magnetyczne [illegible]

Elektryczne [illegible]

I i II

$$X_2 = R_p \cos\varphi_1 \cos\frac{2\pi}{T} w_2 \qquad (III.$$
$$Y_2 = R_s \cos\frac{2\pi}{T} w_2$$
$$Z_2 = -R_p \sin\varphi_1 \cos\frac{2\pi}{T} w_2 \qquad w_2 = t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}$$

$$\alpha_2 = -R_s \cos\varphi_1 \sqrt{K_1} \cos\frac{2\pi}{T} w_2$$
$$\beta_2 = R_p \sqrt{K_1} \cos\frac{2\pi}{T} w_2 \qquad (IV$$
$$\gamma_2 = R_s \sin\varphi_1 \sqrt{K_1} \cos\frac{2\pi}{T} w_2$$

φ' je ugao između normale z-ose i reflektovanog zraka

Ako amplitude upadnog zraka razložimo na D_p i D_s i sa χ upadni ugao, komponente vektora u prelomljenom talasu:

$$X_2 = D_p \cos\chi \cos\frac{2\pi}{T} w_d \qquad \ldots \quad V$$
$$Y_2 = D_s \cos\frac{2\pi}{T} w_d$$
$$Z_2 = -D_p \sin\chi \cos\frac{2\pi}{T} w_d$$

$$\alpha_2 = -D_s \cos\chi \sqrt{K_2} \cos\frac{2\pi}{T} w_d \qquad VI$$
$$\beta_2 = D_p \sqrt{K_2} \cos\frac{2\pi}{T} w_d$$
$$\gamma_2 = D_s \sin\chi \sqrt{K_2} \cos\frac{2\pi}{T} w_2$$

$$w_2 = t - \frac{x \sin\chi + z\cos\chi}{V_2}$$

V_2 je brzina prelomljenog talasa u sredini 2.

Granični uslovi:

$X_1 = X_2 \quad Y_1 = Y_2 \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2 \quad$ za $z = 0$

Ovo je moguće samo tako ako su obe ove strane jednake funkcijama od t, tj. ako uslovi važe za svako t.

$w_e = w_2 = w_d$ za $z = 0$ ili

$$\frac{\sin\varphi}{V_1} = \frac{\sin\varphi'}{V_1} = \frac{\sin\chi}{V_2} \qquad \ldots \quad C.$$

Iz toga je:

$\sin\varphi = \sin\varphi_1$ ...

... $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi_1) \quad \varphi' = \pi - \varphi \quad \ldots \quad c.$

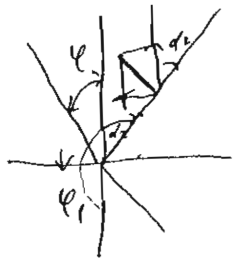
~~$\sin\varphi = \sin(\pi + \alpha_1)$~~ ~~$\varphi = \pi + \alpha_1$~~

$\varphi = -\alpha.$

Ovo je ... zakon refleksije (odbijanja)

Iz I imamo

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \frac{V_1}{V_2} = n \quad \ldots \text{ zakon refrakcije (prelamanja)}$$



$A_y = R_p \sin\alpha_2$
$A_x = R_p \cos\alpha_2$
$A_z = R_p \sin(\varphi_1 - \pi)$
$A_x = R_p \cos(\varphi_1 - \pi)$
$A_z = -R_p \sin\varphi_1$
$A_x = R_p \cos\varphi_1$

[illegible]

3. [illegible]

$$x_1 = x_e + x_2$$
$$y_1 = y_e + y_2$$
$$z_1 = z_e + z_2$$

[illegible]

$$x_e + x_1 = x_2, \quad y_e + y_1 = y_2, \quad \alpha_e + \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_e + \beta_3 = \beta_2 \ldots$$

[illegible] $\varphi = \varphi_1 - \varphi_1$, $\frac{\sin\chi}{\sin\varphi} = \frac{1}{n}$ [illegible] I [illegible] I, II ... VI [illegible]

$\cos\chi = \frac{\sin\varphi}{n}$

$$(\mathcal{E}_p - R_p)\cos\varphi = \mathcal{D}_p \cos\chi \qquad \text{за } z = 0.$$
$$(\mathcal{E}_s + R_s) = \mathcal{D}_s \qquad \ldots \; (I).$$
$$(\mathcal{E}_s - R_s)\cos\varphi\sqrt{\kappa_1} = \mathcal{D}_s\sqrt{\kappa_2}\cos\chi$$
$$(\mathcal{E}_p + R_p)\sqrt{\kappa_1} = \mathcal{D}_p\sqrt{\kappa_2}$$

[illegible] I [illegible]

[illegible]

$$2\mathcal{E}_s = \mathcal{D}_s\left(\frac{\cos\varphi\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2}\cos\chi}{\cos\varphi\sqrt{\kappa_1}}\right) \ldots (1).$$

$$\mathcal{E}_s(\cos\varphi\sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2}\cos\chi) = R_s(\cos\varphi\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2}\cos\chi) \ldots (2).$$

$$2\mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{D}_p(\cos\chi\sqrt{\kappa_1} + \cos\varphi\sqrt{\kappa_2})}{\cos\varphi\sqrt{\kappa_1}}$$

$$\mathcal{E}_p\left[\cos\varphi\sqrt{\kappa_2} + \sqrt{\kappa_1}\cos\chi\right] = \mp R_p\left[\cos\chi\sqrt{\kappa_1} + \cos\varphi\sqrt{\kappa_2}\right]$$

[illegible]:

$$n = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} = \frac{\sin\varphi}{\sin\chi}$$

[illegible]:

$$2\mathcal{E}_s = \mathcal{D}_s\left(1 + \frac{\sin\varphi}{\sin\chi}\frac{\cos\chi}{\cos\varphi}\right) = \mathcal{D}_s\frac{\sin(\chi+\varphi)}{\sin\chi\cos\varphi}$$

$$\mathcal{D}_s = \mathcal{E}_s\frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\chi+\varphi)}$$

[illegible] налазимо одмах:

$$R_s = -E_s \frac{\sin(\varphi-\chi)}{\sin(\varphi+\chi)} \qquad R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi-\chi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\chi)} \quad \ldots \text{(II.}$$

$$D_s = E_s \frac{2\sin\varphi\sin\chi}{\sin(\varphi+\chi)} \qquad D_p = E_p \frac{2\sin\chi\cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)}$$

Ово су Fresnel-ове једначине за рефлексију.

Из II видимо да R_s не може никада бити нула а R_p је нула: ... (2.

$$\operatorname{tg}(\varphi+\chi) = \infty \quad \text{тј.} \quad \varphi+\chi = \pi/2$$

Код рефлектованог зрака [illegible] онда је $R_p = 0$

Због (2) је [illegible] за угао од

$$\operatorname{tg}\varphi = n \quad \text{(Brewster-ов закон)}$$

За случај $\operatorname{tg}\varphi = n$ у рефлектованом зраку нема електричне [illegible] само у равни ⊥ на упадну. [illegible] у упадној равни [illegible] линеарно поларисана. Ако се светлост [illegible] под углом $\varphi = \operatorname{arc\,tg} n$ [illegible] електричним [illegible] у линеарно [illegible]. Ако се [illegible] светлост [illegible] (обе је [illegible] равни упада). Ако се [illegible] поларисаној [illegible] (Ово је доказ Fresnel-ове [illegible] Neumann-ове). [illegible] интензитет [illegible] рефлектованог зрака [illegible] E_s [illegible] интензитет [illegible] светлост [illegible] интензитета.

§.40 Скоро нормално. [illegible] II и III [illegible] $\varphi = 0$ и I [illegible] за $\varphi=0$ мора бити $\chi=0$ имамо:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n \qquad \cos\varphi = \cos\chi = 1$$

$$R_s = -E_s\frac{n-1}{n+1} \qquad R_p = E_p\frac{n-1}{n+1} \quad \ldots \text{(}$$

Ово су обичне формуле [illegible] за случај $n > 1$ рефлектована [illegible] супротног [illegible] упадној. [illegible] за R_p и E_p [illegible]

./.

[illegible] $n = \infty$ [illegible]

[illegible] $R_s = -\mathcal{E}_s$. [illegible]

[illegible] Komponente $\mathcal{E}_p$ R_p [illegible]

Wiener [illegible]

§ 71 Polaryzacja [illegible]

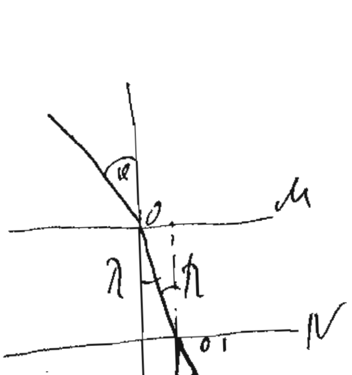
[illegible] $\frac{R_s}{\mathcal{E}_s}$ [illegible] φ [illegible] $\varphi = 0$ [illegible] $\pi/2$ [illegible] $R_p/\mathcal{E}_p$ [illegible] $\varphi = \pi/2$ [illegible]

[illegible] $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_p$ $R_s > R_p$

[illegible]:

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_s}\,\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)}$$

[illegible]



[illegible] Δ'_s Δ'_p [illegible] O'T [illegible] MN [illegible]:

$$\frac{\Delta_s}{\Delta_p} = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p}\cos(\varphi-\chi) \quad \text{i} \quad ~~\frac{\mathcal{E}'_s}{\mathcal{E}'_p} = \frac{\Delta'_s}{\Delta'_p}\,\frac{1}{\cos(\varphi-\chi)}~~$$

$$\frac{\Delta'_s}{\Delta'_p} = \frac{\mathcal{E}'_s}{\mathcal{E}'_p}\cos(\varphi-\chi) = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p}\cos(\varphi-\chi) \text{ więc}$$

$$\frac{\Delta'_s}{\Delta'_p} =$$

1

Објашњење [illegible] проректоване светлости

[illegible]

Ако између средине 1 и средине 2 [illegible]

[illegible] [illegible]

За границу [illegible] $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$

[illegible]

Из једначина електромагнетских које важе за границу

[illegible]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

[illegible] по z $\qquad$ Y и Z зависе од y

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \alpha\, dz = Y_2 - Y_1 \quad \dots \quad 1.$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \beta\, dz = \int_1^2 \frac{\partial Z}{\partial x}\, dz - (X_2 - X_1) \quad \dots \quad 2.$$

$$\varkappa_1 Z_1 = \varkappa_2 Z_2 \qquad \gamma_1 = \gamma_2$$

α, β и $\varkappa Z$ [illegible] $\alpha_1 = \alpha_2$ $\beta_1 = \beta_2$ $\varkappa_1 Z_1 = \varkappa_2 Z_2$ $\gamma_1 = \gamma_2$ [illegible] $\alpha, \beta, \varkappa Z$ [illegible] $\alpha_1 \beta_1 \varkappa_1 Z_1$ [illegible] $\alpha_2 \beta_2 \varkappa_2 Z_2$ [illegible]

[illegible]:

$$\int_1^2 \alpha\, dz = \alpha \int_1^2 dz, \qquad \int_1^2 \frac{\partial Z}{\partial x}\, dz = \varkappa_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x}\int_1^2 \frac{dz}{\varkappa}$$

Ако се l [illegible] границе [illegible] онда:

$$\int_1^2 dz = l \qquad \int_1^2 \varkappa\, dz = p \qquad \int_1^2 \frac{dz}{\varkappa} = q$$

$\varkappa$ је [illegible]

Из [illegible] онда:

$$X_1 = X_2 + \frac{l}{c}\frac{\partial \beta_2}{\partial t} - \varkappa_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x}\, q \quad \dots \quad (I).$$

$$Y_1 = Y_2 - \frac{l}{c}\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$$

[illegible]:

$$\alpha_1 = \alpha_2 - l\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{p}{c}\frac{\partial Y_2}{\partial t} \quad \dots \quad (II).$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \frac{p}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t}. \qquad X_1 = \text{const.}$$

$$\frac{\varkappa}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_1^2 \frac{\varkappa}{c} X\, dz = -\beta_1 + \beta_2 = \frac{p}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t}.$$

[illegible] ...

Да би смо сад нашли опште изразе амплитуда пропуштеног, одбијеног и преламаног зрака уз претпоставку компонената у облику:

$$Y_2 = R\left\{\mathbf{R}_s\, e^{i\frac{2\pi}{T}\omega_2}\right\} \ldots \quad (2$$

$$\omega_2 = \left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{V_1}\right)$$

и нашли би Y_2 стварни део израза 2 који је стварни Y_2

$$Y_2 = R_s \cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}\omega_2\right) + \delta\right]$$ гради стварни део од 2 где је

$$R_s\, e^{i\delta} = \mathbf{R}_s \quad \ldots \quad (3.$$

Ове стварне једначине I II ... VI треба сада уместо $E_s\ E_p\ R_s\ R_p$ ставити увек $\mathcal{E}_s\ \mathcal{E}_p\ \mathbf{R}_s\ \mathbf{R}_p$ а све замењене експоненцијалним функцијама

Из услова I и II кад се узме смена: X_1 са $X_e + X_2$, $d_1 = d_e + d_2$ имаћемо:

$$X_e + X_2 = X\mathfrak{Q} + \frac{\ell}{c}\frac{\partial P_2}{\partial t} - \kappa_2 q \frac{\partial \kappa_2}{\partial x}$$

$$(\mathbf{E}_p - \mathbf{R}_p)\cos\varphi = D_p\left[\cos\chi + i\frac{2\pi}{T}\left(\sqrt{\kappa_1}\frac{\ell}{c} - \frac{\sin^2\chi}{V_2}\kappa_2 q\right)\right]$$

$$\mathbf{E}_s + \mathbf{R}_s = \mathfrak{D}_s\left[1 + i\frac{2\pi}{T}\cos\chi\sqrt{\kappa_1}\frac{\ell}{c}\right] \quad (III.$$

$$[\mathbf{E}_s - \mathbf{R}_s]\sqrt{\kappa_1}\cos\varphi = \mathfrak{D}_s\left[\sqrt{\kappa_2}\cos\chi - i\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\sin^2\chi}{V_2}\sqrt{\kappa_2}\,\ell - \frac{p}{c}\right)\right]$$

$$\sqrt{\kappa_1}(\mathcal{E}_p + \mathbf{R}_p) = \mathfrak{D}_p\left[\sqrt{\kappa_1} + \frac{2\pi i}{T}\cos\chi\frac{p}{c}\right]$$

Из ових 4 једначина налазимо за рефлектовану ...

$$\frac{\mathbf{R}_p}{\mathbf{E}_p} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\kappa_2} - \cos\chi\sqrt{\kappa_1} + i\frac{2\pi}{\lambda}\left[p\cos\varphi\cos\chi - (\ell - q\kappa_2\sin^2\chi)\sqrt{\kappa_1\kappa_2}\right]}{\cos\varphi\sqrt{\kappa_2} + \cos\chi\sqrt{\kappa_1} + i\frac{2\pi}{\lambda}\left[p\cos\varphi\cos\chi + (\ell - q\kappa_2\sin^2\chi)\sqrt{\kappa_1\kappa_2}\right]}$$

$$\frac{\mathbf{R}_s}{\mathbf{E}_s} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\kappa_1} - \cos\chi\sqrt{\kappa_2} + i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\ell\cos\varphi\cos\chi\sqrt{\kappa_1\kappa_2} - p + \ell\kappa_2\sin^2\chi\right]}{\cos\varphi\sqrt{\kappa_1} + \cos\chi\sqrt{\kappa_2} + i\frac{2\pi}{\lambda}\left[\ell\cos\varphi\cos\chi\sqrt{\kappa_1\kappa_2} + p - \ell\kappa_2\sin^2\chi\right]}$$

$$\lambda = Tc \qquad V_2 = \frac{c}{\sqrt{\kappa_2}}$$

Ako u usl[illegible] gornje u zanemarimo [illegible] članove l (gotovo [illegible]) onda je:

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\varkappa_2} - \cos\chi\sqrt{\varkappa_1}}{\cos\varphi\sqrt{\varkappa_2} + \cos\chi\sqrt{\varkappa_1}}\left\{1 + i\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varkappa_1}\,\frac{p\cos^2\chi - l\varkappa_2 + q\varkappa_2^2\sin^2\chi}{\varkappa_2\cos^2\varphi - \varkappa_1\cos^2\chi}\right\}$$

$$\frac{R_s}{E_s} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\varkappa_1} - \cos\chi\sqrt{\varkappa_2}}{\cos\varphi\sqrt{\varkappa_1} + \cos\chi\sqrt{\varkappa_2}}\left\{1 + i\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varkappa_1}\,\frac{l\varkappa_1 - p}{\varkappa_1\cos^2\varphi - \varkappa_2\cos^2\chi}\right\} \quad \ldots (IV.$$

Za $\varkappa_2 > \varkappa_1$, $\varphi > \chi$, $\cos\varphi < \cos\chi$ a [illegible] $\varkappa_1\cos^2\varphi$ ne može biti jednako $\varkappa_2\cos^2\chi$. ~~[illegible] IV [illegible]~~

Za $\cos\varphi\sqrt{\varkappa_2} = \cos\chi\sqrt{\varkappa_1}$ ili $\sqrt{\varkappa_2} : \sqrt{\varkappa_1} = n$ $\operatorname{tg}\varphi = n$

$$\frac{R_p}{E_p} = i\frac{4\pi}{\lambda}\cos\varphi\sqrt{\varkappa_1}\,\frac{p\cos^2\chi - l\varkappa_1 + q\varkappa_1^2\sin^2\chi}{(\cos\varphi\sqrt{\varkappa_2} + \cos\chi\sqrt{\varkappa_1})^2}$$

(Obzirom na zakon refrakcije:

$$\sin\varphi : \sin\chi = n = \sqrt{\varkappa_2} : \sqrt{\varkappa_1} \text{ iz IV [illegible]:}$$

$$\varkappa_1\cos^2\varphi - \varkappa_2\cos^2\chi = \varkappa_1 - \varkappa_2 \quad \ldots (3.$$

$$\varkappa_2\cos^2\varphi - \varkappa_1\cos^2\chi = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_2}\left[\varkappa_1\sin^2\varphi - \varkappa_2\cos^2\varphi\right]$$

Ako je zraka [illegible] linearno polarizovana [illegible] azimutom 45° prema ravnini upada onda je $E_p = E_s$ i iz IV obzirom na 3 izlazi

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)}\left\{1 + i\frac{4\pi}{\lambda}\,\frac{\varkappa_2\sqrt{\varkappa_1}}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\,\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\varkappa_1\sin^2\varphi - \varkappa_1\cos^2\varphi}\,\eta\right\} \quad \ldots (V.$$

$$\eta = p - l[\varkappa_1 + \varkappa_2] + q\varkappa_1\varkappa_2$$

Za ugao $\operatorname{tg}\varphi = n$ (Brewster)

$$\frac{R_p}{R_s} = i\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{\sqrt{\varkappa_1 + \varkappa_2}}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\,\eta \quad \ldots (VI.$$

Разлика фаза зрака V и VI је

$$R_p = R_p e^{i\delta_p}, \quad \overline{R}_s = R_s e^{i\delta_s}$$

$$\frac{R_p}{R_s} = \frac{R_p}{R_s} e^{i(\delta_p - \delta_s)} = \rho e^{i\Delta} \dots \quad \overline{VII}$$

ρ је однос амплитуда рефлектованог зрака, Δ је разлика фаза одгов. компонената.

из $\overline{VII}$ и $\overline{VI}$ је

$$\rho e^{i\Delta} = i\frac{\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{\varkappa_1 + \varkappa_2}}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\eta = \rho\left[\cos\Delta + i\sin\Delta\right]$$

или:

$$\rho \sin\Delta = \frac{\pi}{\lambda}\eta\frac{\sqrt{\varkappa_1 + \varkappa_2}}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \qquad \cos\Delta = 0 \quad \Delta = \pi/2 \dots 4$$

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda}\eta\frac{\sqrt{\varkappa_1 + \varkappa_2}}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \dots \dots \quad 5.$$

Услови 4 и 5 су довољни [illegible] у овом случају: рефлектована светлост није у главној равни поларисана [illegible] елиптично. [illegible] однос ρ од којих је једна $\parallel$ друга $\perp$ на главну раван

$$Y_0 = R_p = \qquad \text{за } \operatorname{tg}\varphi = n$$

$$X_2 = R_p \cos\varphi \; e^{i\frac{2\pi}{T}(t} \quad)$$

$$Y_2 = R_s \; e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{v_1}\right)}$$

[illegible] једначину:

$$\sin^2(\delta_p - \delta_s) = \frac{X_2^2}{R_p^2} + \frac{Y_2^2}{R_s^2} - 2\frac{X_2 Y_2}{R_s R_p}\cos(\delta_p - \delta_s) \qquad \delta_p - \delta_s = \pi/2$$

$$\frac{X_2^2}{R_p^2} + \frac{Y_2^2}{R_s^2} = 1$$

Значи: светлост не само за угао $\operatorname{tg}\varphi = n$ елиптично [illegible] већ и за друге углове [illegible] поларисана. Фазна је разлика из $\overline{V}$ $\overline{VI}$ [illegible]

$$\operatorname{tg}\Delta = 4\frac{\pi}{\lambda}\eta\frac{\varkappa_2\sqrt{\varkappa_1}}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\varkappa_1\sin^2\varphi - \varkappa_2\cos^2\varphi} \dots \quad \overline{VIII}$$

док је однос амплитуда одређен:

$$\rho = -\frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)}$$

Ако у III заменимо η и δ Δ је:

$$\operatorname{tg} \Delta = 4\rho \frac{n^2}{\sqrt{1+n^2}} \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi - n^2} \quad \ldots \quad (6.$$

Највећа је фазна разлика за $\operatorname{tg} \varphi = n$

§74 Тоталне рефлексије. Ако је n из средине 2 у 1 мање од јединице упадном углу φ не одговара реални преломни угао χ јер

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{n} > 1$$

У овом случају нема преломног зрака све се светлост одбија — појава се зове тоталном рефлексијом

Важење формула Fresnel-ових остаје и овде

Као и у пређашњем смеру $\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{n}$ и $\cos \chi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{n^2}} = -i\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{n^2} - 1}$

Као и у пређашњем одговарајуће смеру R_p и R_s са $R_p e^{i\delta_p}$ $R_s e^{i\delta_s}$, онда је $\sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1} = n$ формуле су:

$$\mathcal{E}_s\left[\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} - 1\right) = R_s e^{i\delta_s}\left(\frac{i\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} + 1\right)$$

$$\mathcal{E}_p\left[\frac{i\cos\varphi\, n}{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} - \frac{1}{n}\right) = R_p e^{i\delta_p}\left(\frac{i\cos\varphi\, n}{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} + \frac{1}{n}\right) \quad \ldots (I.$$

Интензитети и наравно, као и у I смеру i са −i и ... онда и добије:

$$\mathcal{E}_s^2 = R_s^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_p^2 = R_p^2$$

Интензитет је према томе једнак са интензитетом рефлектованог светла

Ставимо I искључиво за $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_p$ (под 45° према равни упадне светлости)

онда је $R_s = R_p$

$$\frac{i\cos\varphi - \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n\, i\cos\varphi - \frac{1}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} = e^{i(\delta_s - \delta_p)} \frac{i\cos\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{i\cos\varphi\, n + \frac{1}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}$$

и одавде изводимо

$$e^{i\Delta} = e^{i(\delta_p - \delta_s)} = \frac{\sin^2\varphi + i\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi - i\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}$$

отуда

$$\frac{1 - e^{i\Delta}}{1 + e^{i\Delta}} = \frac{-i\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi}$$

Множењем са коњугованим вредностима добијамо:

$$e^{i\Delta}+e^{-i\Delta}=2\cos\Delta$$

$$\frac{1-\cos\Delta}{1+\cos\Delta}=\left\{\frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{\sin^2\varphi}\right\}^2 \qquad (1.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Delta=\frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}{\sin^2\varphi}$$

За $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ и за $\sin\varphi=n$ $\Delta=0$ онда је од њега рефлектована, значи онда је рефлектована електрична светлост линеарно поларизована која је гранична линеарно поларизована.

Ако се диференцира једначина добијамо:

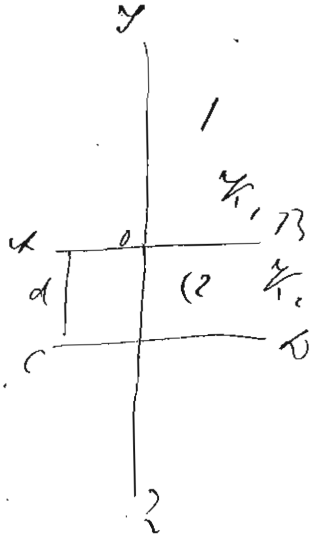
$$\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi}=\frac{2n^2-\sin^2\varphi(1+n^2)}{\sin^3\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-n^2}}$$

Δ је максим. за $\sin^2\varphi'=\frac{2n^2}{1+n^2}$

и њој је максим.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Delta=\frac{1-n^2}{2n}.$$

Пример. Код стакла ј индекс преламања $n = 1.57$, $\varphi' = 57^\circ 20'$ $\Delta = 75^\circ 36$, за $\varphi = 48^\circ 37$ и $\psi = 54' 37$ $\Delta = 45^\circ$.



§45 Интерференција. Дебела плоча. Њене стране су [illegible] перпендикуларне [illegible]. Нек се обе ове [illegible] и оне се одликују [illegible]. Ако са K_2 означимо диелектричну константу њене средине, са d њену дебљину са K_1 константу средине. Нека је угао упадања [illegible] АВ у тачки [illegible] у равни $CD \parallel$ са АВ у даљини $z = d$. Нека је упадни зрак [illegible] $z=0$. За обе стране су компоненте светлости ове:

$$x_e = 0 \quad y_e = \mathcal{E}\, e^{i 2\pi/T \left(t - \frac{z}{v_1}\right)} \quad z_e = 0 \quad \dots \quad 1.$$

магнетске [illegible]:

$$\alpha_e = -\mathcal{E}\sqrt{K_1}\, e^{i 2\pi/T \left(t - \frac{z}{v_1}\right)} \quad \beta_e = 0 \quad \gamma_e = 0 \quad \dots \quad 2 \qquad \varphi' = \pi - \varphi$$

Рефлектовани светлост у C

$$x_r = 0 \quad y_r = R\, e^{i 2\pi/T \left(t + \frac{z}{v_1}\right)} \quad z_r = 0$$

$$\alpha_r = R\sqrt{K_1}\, e^{i 2\pi/T (t + z/v_1)} \quad \beta_r = 0 \quad \gamma_r = 0 \qquad 3.$$

Рефлексија и [illegible] на АВ као и на CD у [illegible] [illegible] на [illegible] z [illegible] и [illegible] ове.

$$X' = 0 \quad Y' = \Delta' e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_2}\right)} \quad Z' = 0 \quad \text{за [illegible]} \quad X = 0.$$

$$\alpha' = -\Delta'\sqrt{K_2}\, e^{\frac{i 2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{v_2}\right)} \quad \beta' = 0 \quad \gamma' = 0$$

и за [illegible]:

$$X'' = 0 \quad Y'' = \Delta'' e^{\frac{2\pi}{T}(t + z/v_2)} \quad Z'' = 0$$

$$X = \pi \dots$$

$$\alpha'' = \Delta''\sqrt{K_2}\, e^{\frac{i 2\pi}{T}(t + z/v_2)} \quad \beta'' = 0 \quad \gamma'' = 0$$

На границама $z = 0$ и $z = d$

$$Y_e + Y_r = Y' + Y'' \qquad \alpha_e + \alpha_r = \alpha' + \alpha'' \qquad \text{за } z = 0$$

$$Y' + Y'' = Y_d \qquad \alpha' + \alpha'' = \alpha_d \qquad \text{за } z = d.$$

/.

[illegible]:

1). $\Sigma + R = \Delta' + \Delta''$ $\quad (\Sigma - R)\sqrt{\varkappa_1} = (\Delta' - \Delta'')\sqrt{\varkappa_2}$

[illegible]:

2). $\Delta' e^{-ip} + \Delta'' e^{+ip} = \mathfrak{D} e^{-iq}$ $\quad (\Delta' e^{-ip} - \Delta'' e^{ip})\sqrt{\varkappa_2} = \mathfrak{D} e^{-iq}\sqrt{\varkappa_1}$

$$p = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{v_2} = 2\pi\frac{d}{\lambda_2}, \quad q = \frac{2\pi}{T}\frac{d}{v_1} = 2\pi\frac{d}{\lambda_1}$$

[illegible] 2 je:

$$(\Delta' e^{-ip} + \Delta'' e^{ip})\sqrt{\varkappa_1} = (\Delta' e^{-ip} - \Delta'' e^{+ip})\sqrt{\varkappa_2}$$

$$\Delta' e^{-ip}(\sqrt{\varkappa_1} - \sqrt{\varkappa_2}) = \mathfrak{D}'' e^{+ip}(\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2})$$

[illegible] je:

$$\frac{\Sigma + R}{\Sigma - R} = \frac{\Delta' + \Delta''}{\Delta' - \Delta''}\frac{\sqrt{\varkappa_2}}{\sqrt{\varkappa_1}} \quad [illegible] \quad \frac{R}{\Sigma} = \frac{\Delta'(\sqrt{\varkappa_1} - \sqrt{\varkappa_2}) + \Delta''(\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2})}{\Delta'(\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2}) + \Delta''(\sqrt{\varkappa_1} - \sqrt{\varkappa_2})}$$

[illegible]:

$$\frac{R}{\Sigma} = \frac{(e^{+ip} - e^{-ip})[\varkappa_1 - \varkappa_2]}{e^{+ip}(\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2})^2 - e^{-ip}(\sqrt{\varkappa_1} - \sqrt{\varkappa_2})^2} = \frac{i\sin p(\varkappa_1 - \varkappa_2)}{i\sin p(\varkappa_1 + \varkappa_2) + 2\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}}$$

Ako [illegible] Kongelomer [illegible] i = -i [illegible]:

$$J_r = J_e \frac{\sin^2 p[\varkappa_1 - \varkappa_2]^2}{\sin^2 p(\varkappa_1 - \varkappa_2)^2 + 4\varkappa_1\varkappa_2} = J_e \frac{\sin^2 p(1 - n^2)^2}{\sin^2 p(1 - n^2)^2 + 4n^2} \quad \text{(I.}$$

Ako je $\varkappa_2/\varkappa_1 = n^2$ [illegible] 2 [illegible]:

$$\frac{\mathfrak{D} e^{-iq}}{\Sigma} = \frac{4\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}}{e^{ip}(\sqrt{\varkappa_1} + \sqrt{\varkappa_2})^2 - e^{-ip}(\sqrt{\varkappa_1} - \sqrt{\varkappa_2})^2} = \frac{2\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}}{i\sin p(\varkappa_1 + \varkappa_2) + [illegible]}$$

[illegible] J_d

$$J_d = J_e \frac{4\varkappa_1\varkappa_2}{\sin^2 p(\varkappa_1 - \varkappa_2) + 4\varkappa_1\varkappa_2}$$

$J_d + J_r = J_e$. ([illegible])

Calymeno amreszah peprekkolane chetruci za $p = 0$, π, 2π ... i
u $d = 0$, $\frac{1}{2}\lambda_2$, λ_2, $\frac{3}{2}\lambda_2$ ... i d.

Maxim intenzitet je za $\sin p = 1$ $J_2 = J_e\left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2$

Ako je 1 bardyz, 2 ciklus $n = 1.5$. Kod kyhnolne zpelembu
je 1 ciklus 2 je bardyx $n = \frac{1}{1.5}$ u

$$J_2 = J_e \frac{\sin^2 p\, 1.56}{\sin^2 p\, 1.56 + 9}$$

Ako y E zanemarimo $\sin^2 p (1-n^2)^2$ prema $4n^2$ imamo:

$$J_2 = J_e\left(\frac{1-n^2}{2n}\right)^2 \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

) d je debljina gyssmuna y bardyzy

Ako je chetrich pradna dan u J_λ je intenzitet pradni chetruch
λ y bardyoj. intenzitet je peprekkolane chetruch:

$$J_2 = \left(\frac{1-n^2}{2n}\right)^2 \sum J_\lambda \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

Ogi cy ikankur nchatn ckhvorvene is pernur corckfunnus dja.

./.

– Praca II –

Ośrodki [illegible] w [illegible]

– I –

[illegible]

[illegible] :

$$4\pi j_x = K_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + K_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + K_{13}\frac{\partial Z}{\partial t} \quad \dots \quad (1.$$

$$4\pi j_y = K_{21}\frac{\partial X}{\partial t} + K_{22}\frac{\partial Y}{\partial t} + K_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}$$

$$4\pi j_z = K_{31}\frac{\partial X}{\partial t} + K_{32}\frac{\partial Y}{\partial t} + K_{33}\frac{\partial Z}{\partial t}$$

[illegible]

[illegible]:

$$\frac{4\pi}{c}\int \Sigma j_x X\, d\tau + \frac{4\pi}{c}\int \Sigma S_x \alpha\, d\tau = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int E\, d\tau \quad \dots \quad (2$$

[illegible] $\Sigma S_x \alpha$ [illegible] $\Sigma j_x X$ [illegible]

$$K_{21} = K_{12}, \quad K_{31} = K_{13}, \quad K_{23} = K_{32} \quad \dots \quad (3.$$

[illegible]:

$$E_1 = \frac{1}{8\pi}\left(K_{11}X^2 + K_{22}Y^2 + K_{33}Z^2 + 2K_{23}YZ + 2K_{13}XZ + 2K_{12}XY + \dots\right)$$

[illegible]:

$$\Sigma_1 = \frac{1}{8\pi}\left(K_1 X^2 + K_2 Y^2 + K_3 Z^2\right) \quad \dots \quad (4.$$

[illegible]:

$$j_x = \frac{K_1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}, \quad j_y = \frac{K_2}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}, \quad j_z = \frac{K_3}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} \quad \dots \quad (5.$$

/.

§. 47. [illegible] K_1, K_2, K_3 [illegible].

[illegible] $\mu = 1$.

[illegible] облика:

$$\frac{K_1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{K_2}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = — \qquad I.$$

$$\frac{K_3}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = —$$

[illegible] $K_1 \frac{\partial X}{\partial t}$, $K_2 \frac{\partial Y}{\partial t}$, $K_3 \frac{\partial Z}{\partial t}$ [illegible].

[illegible] I [illegible] једначине:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1 \frac{\partial X}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_2 \frac{\partial Y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_3 \frac{\partial Z}{\partial t}\right) = 0 \quad \dots \quad 1.$$

~~$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$~~

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \quad — \quad 2.$$

[illegible]:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \gtrless 0$$

[illegible]

[illegible]

(Механичке теорије)

Познате су у погледу светлости три теорије:

1). Магнетична је нова светлосни вектор. Таква су теорије Френел... светлосни је вектор у одговарајућој равни (Neumann, Kirchhoff, W. Voigt)

2). Електрична је нова светлосни вектор. Таква теорија ... зрачне вибрације, светлосни је вектор ⊥ на одговарајућу раван (Ketteler, Boussinesq, Lord Rayleigh)

3). Електрична је струја светлосни вектор. Таква су теорија Френел... светлосни је вектор ⊥ на одговарајућу раван (Fresnel)

Само за ... теорије доводе ... резултате ... са оригиналним ... на ... начин.

Електромагнетска теорија светлости одговара три врсте механичке. Из обе те теорије:

a). Светлосни је вектор ... енергије електромагнетне (Poynting-ов вектор). ... светлосног вектора у ... Kirchhoff-ов

$A_x = (Z\beta - Y\gamma)$, $A_y =$ $\quad A_z =$

в). Вектор је светлосни ... на електричну магнетизму ... са ... , ... електричну ... одговара:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \gtrless 0 \quad \ldots$$

3.**) Одговарајуће ... светлости (Fresnel)

Из једначина I имамо:

$$\frac{\varkappa_1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \quad \ldots \quad (1.$$

$$\frac{\varkappa_2}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\quad \ldots \quad \right)$$

$$\frac{\varkappa_3}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\quad \ldots \quad \right)$$

/.

Ako oznaczymy u v w komponenty elektrycznego wektora i zmieniamy go, jak to przyjęto w elektrycznej teorii (Fresnel), piszemy wyrażenia:

$$u = \kappa_1 X = A\,M \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{V}\right)$$
$$v = \kappa_2 Y = A\,N \cos\frac{2\pi}{T}\left(\quad \right) \quad \ldots \quad (V.$$
$$w = \kappa_3 Z = A\,R \cos\frac{2\pi}{T}\left(\quad \right)$$

Dla fali płaskiej ... M, N, R są kosinusami ..., m n p są kosinusami kierunku normalnej fali, V szybkość ... normalnej.

Z tego wynika:

$$\sum \frac{\partial \kappa_1}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial t} = 0 \quad \text{otrzymamy:}$$

$$Mm + Nn + Rp = 0 \quad \ldots \quad (3.$$

Dlatego, że wektor prostopadły na normalnej (...).

Zamieniam II i I otrzymujemy:

$$\frac{M}{C^2} = \frac{M}{\kappa_1 V^2} - \frac{m}{V^2}\left(\frac{Mm}{\kappa_1} + \frac{Nn}{\kappa_2} + \frac{Rp}{\kappa_3}\right)$$
$$\frac{N}{C^2} = \frac{N}{\kappa_2 V^2} - \frac{n}{V^2}\left(\quad \right) \quad \ldots \quad (II$$
$$\frac{R}{C^2} = \frac{R}{\kappa_3 V^2} - \frac{p}{V^2}\left(\quad \right)$$

Ako ... równania $C^2 V^2$ ...: $\frac{C^2}{\kappa_1} = a^2$, $\frac{C^2}{\kappa_2} = b^2$, $\frac{C^2}{\kappa_3} = c^2$ otrzymamy:

$$a^2 Mm + b^2 Nn + c^2 Rp = G^2 \quad \ldots \quad (4$$

$$M(a^2 - V^2) = mG^2, \quad N(b^2 - V^2) = nG^2, \quad R(c^2 - V^2) = pG^2 \quad \ldots \quad (5.$$

Ako ... 5 równania na m, n, p i do 3 otrzymamy:

$$\frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{n^2}{b^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2} = 0 \quad \ldots \quad (IV.$$

Równanie IV ... V ... szybkości ... normalnej, które jest nazwane zakon Fresnela.

3.

$m = 1 \qquad n = p = 0 \qquad V_1^2 = b^2 \;, \quad V_2^2 = c^2$

Ако [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] од a b c [illegible] [illegible], [illegible] a b c [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

§. 50 <u>За један правац</u> [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] је карактеристика [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Ако [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 1 и 2 [illegible]:

$$\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{N}_1 : \mathfrak{R}_1 = \frac{m}{a^2-V_1^2} : \frac{n}{b^2-V_1^2} : \frac{p}{c^2-V_1^2} \qquad (1)$$

$$\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{N}_2 : \mathfrak{R}_2 = \frac{m}{a^2-V_2^2} : \frac{n}{b^2-V_2^2} : \frac{p}{c^2-V_2^2}$$

[illegible] [illegible] [illegible] m n p [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 1 [illegible]:

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2 = \sum \frac{m^2}{V_1^2-V_2^2}\left(\frac{1}{a^2-V_1^2} - \frac{1}{a^2-V_2^2}\right) = 0$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] IV

$$(a^2-V^2)\mathfrak{M}^2 + (b^2-V^2)\mathfrak{N}^2 + (c^2-V^2)\mathfrak{R}^2 = 0$$

или:

$$V^2 = a^2\mathfrak{M}^2 + b^2\mathfrak{N}^2 + c^2\mathfrak{R}^2 \qquad (2)$$

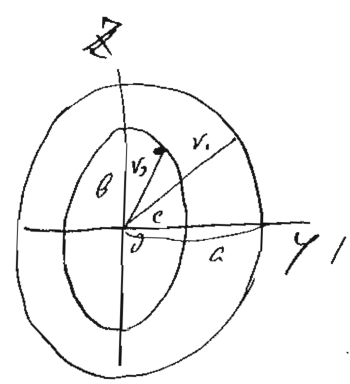
§. 51 <u>Нормалне површине</u>. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] IV [illegible]:

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{a^2-V^2} + \frac{\mathfrak{N}^2}{b^2-V^2} + \frac{\mathfrak{R}^2}{c^2-V^2} = 0$$

[illegible] [illegible] V и [illegible]:

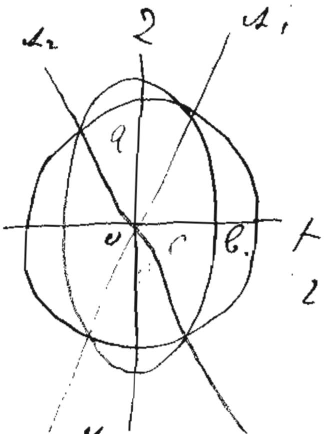
$$V^4 - V^2\left\{m^2(b^2+c^2)+n^2(c^2+a^2)+p^2(a^2+b^2)\right\}+m^2b^2c^2+n^2c^2a^2+p^2a^2b^2=0 \quad 1.$$

– 2 –



[illegible] 0 [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] YZ [illegible] $m=0$ [illegible]

$$V_1^2 = a^2 \qquad V_2^2 = b^2p^2 + c^2n^2$$



[illegible] [illegible] YZ [illegible] $a > b > c$

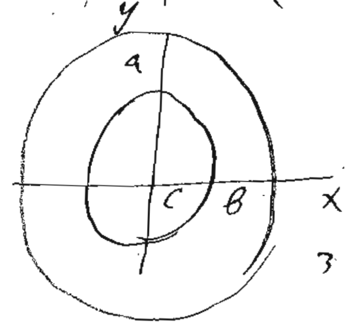
[illegible] XZ [illegible] $p=0$

$$V_1^2 = b^2 \qquad V_2^2 = a^2m^2 + c^2n^2 \qquad a > b > c.$$

[illegible] A_1 u A_2 [illegible] V_1 u V_2 [illegible].

[illegible] YX [illegible] 3

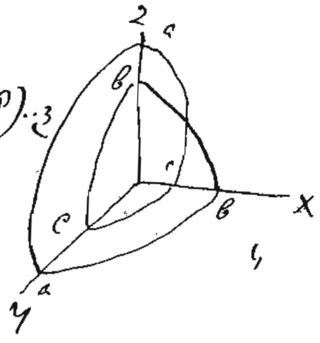
[illegible] X. ([illegible]).



[illegible] 2 [illegible]:

$$M = m^2(b^2-c^2) \quad N = n^2(c^2-a^2) \quad P = p^2(a^2-b^2) \;..\; 2.$$

$$2V^2 = m^2(b^2+c^2)+n^2(a^2+c^2)+p^2(b^2+a^2) \pm \sqrt{M^2+N^2+P^2-2(MN+MP+NP)} \;..\; 3$$



[illegible] $a > b > c$ M u P [illegible] + N –.

[illegible] 3 [illegible]:

$$(M+N-P)^2 - 4MN \quad . \quad . \quad 4$$

[illegible] 3 [illegible]:

$$M+N-P=0 \quad u \quad MN=0 \;.\;..\; 5$$

[illegible] N [illegible] P [illegible] N [illegible] $M=0$ [illegible], [illegible] $N=0$ u [illegible] $M=P$

[illegible] 2 [illegible]:

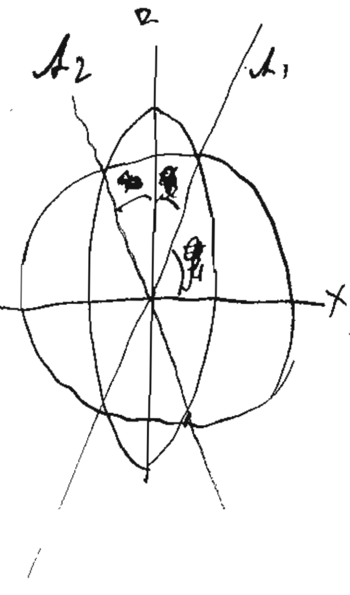
$$n=0 \qquad m^2(b^2-c^2) = p^2(a^2-b^2)$$

– 6.

Кад је $m^2+n^2+p^2=1$ и $m^2+p^2=1$

$$m = \pm\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \quad n=0 \quad p=\pm\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \quad \ldots \quad 6$$

Правци $m\ n\ p$ одређени из 6 зову се правци оптичких оса [illegible] за обе правце [illegible] брзине v_1 и v_2 [illegible]. Осе X и Z [illegible] оптичке осе и [illegible] зову се [illegible] (средњом [illegible])



Из 3 је онда:

$$v_1 = v_2 = b.$$

Правци [illegible] [illegible] [illegible] $n/b^2-v^2 = 0/0$. [illegible] оптичке [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] (2)

Ако са g_1 и g_2 означимо ~~[illegible]~~ [illegible] оса [illegible] [illegible] онда је:

$$\cos g_1 = m m_1 + n n_1 + p p_1 \quad \ldots \quad 7.$$
$$\cos g_2 = m m_2 + n n_2 + p p_2$$

Ако у 7 уснемо из 6 + за m_1 а − за m_2 и (заменимо $+p_1=+p_2$) нађићемо:

$$\cos g_1 = m\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} + p\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

$$\cos g_2 = -m\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} + p\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

Из $n^2 = 1 - m^2 - p^2$

$$m^2(b^2+c^2) + n^2(c^2+a^2) + p^2(a^2+b^2) = a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos g_1 \cos g_2$$

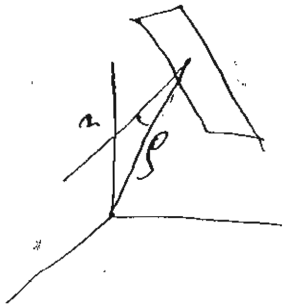
$$M^2+N^2+P^2-2(MN+NP+PM) = (a^2-c^2)^2 \sin^2 g_1 \sin^2 g_2 \quad \ldots \quad 8.$$

Из 3 је онда:

$$2v_1^2 = a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos(g_1-g_2) \quad \ldots \quad I.$$
$$2v_2^2 = a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos(g_1+g_2)$$

§ 52 Геометријска конфигурација таласне површине. Fresnel налази обавојницу површине, која се може представити брзина светлости у правцу зрака. Ако се ρ означи радијус вектор обавојнице а $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ косинусе углова што вектор ρ са осама, једначина површине је обавојнице:

$$\rho^2 = a^2\theta_1^2 + b^2\theta_2^2 + c^2\theta_3^2 \quad \ldots \quad (1.$$



Ако се $m\ n\ p$ означе косинуси углова нормале таласне равни онда важе ове једначине:

$$1 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 \quad \ldots \quad (2.$$
$$0 = m\theta_1 + n\theta_2 + p\theta_3$$

Други услов је услов да је ρ и нормала управни угао од 90^0. Из (1 и (2 вредности $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ за које је ρ maxim, кад се (1 сабере са (2 помножено са $\sigma_1\ \sigma_2$, добива се:

$$0 = 2(a^2+\sigma_1)\theta_1 + m\sigma_2$$
$$0 = 2(b^2+\sigma_1)\theta_2 + n\sigma_2 \quad \ldots \quad (3.$$
$$0 = 2(c^2+\sigma_1)\theta_3 + p\sigma_3$$

Кад се ове једначине помноже са $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3$ и саберу имамо:

$$a^2\theta_1^2 + b^2\theta_2^2 + c^2\theta_3^2 = -\sigma_1 \quad \ldots \quad (4.$$
$$\sigma_1 = -\rho_1^2$$

Кад се ово замени у (3 имамо:

$$\theta_1 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{m}{a^2-\rho^2}$$
$$\theta_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma_2 \frac{n}{b^2-\rho^2} \quad \ldots \quad (5.$$
$$\theta_3 = -\tfrac{1}{2}\sigma_3 \frac{p}{c^2-\rho^2}$$

Из 5 и 2 имамо ову једначину:

$$\frac{m^2}{a^2-\rho^2} + \frac{n^2}{b^2-\rho^2} + \frac{p^2}{c^2-\rho^2} = 0 \quad \ldots \quad (6.$$

Ово показује да у једначини (6 ρ представља брзину простирања

Rezultat je ovaj: Kad je data [illegible] tačka [illegible] (m n p) [illegible] $\parallel$ [illegible] S_1 i S_2 [illegible] S_1 i S_2 [illegible] m n p [illegible].

[illegible] $v_1\, v_2\, v_3$ [illegible] OM OA i R.

[illegible] 7 [illegible] b [illegible]

§ 53 [illegible]. Ako je $a = b$ [illegible]

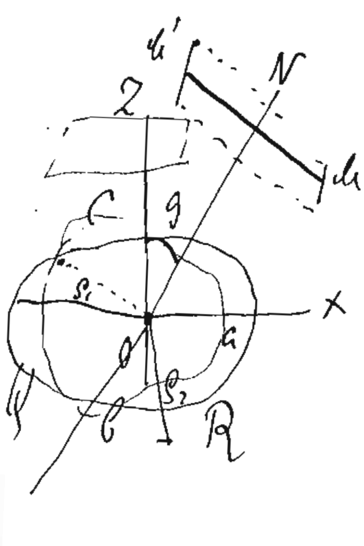
$$m = 0 \quad n = 0 \quad p = \pm 1.$$

[illegible] OZ [illegible]

[illegible] $g_1 = g_2$ [illegible]

$$V_1^2 = a^2 \quad V_2^2 = a^2 \cos^2 g + c^2 \sin^2 g \quad \ldots \quad (.)$$

[illegible] c [illegible] (obe OZ [illegible])

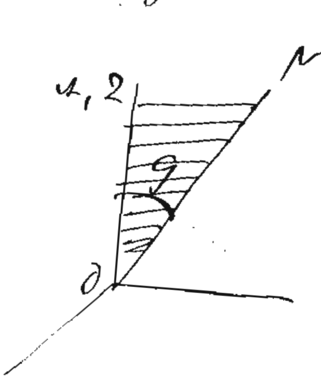


Ako je [illegible] $\parallel$ [illegible] R [illegible] z_1 i z_2 (jer je $z_1 = z_2 = b$). z_1 i z_2 [illegible] $\perp$ na NA_1 i NA_2 [illegible] na NZ. NA_1 i N_2 (osnovni NZ) [illegible] $z_1'\ z_2'$, [illegible] $z_1' \perp z_1$ i $z_2' \perp z_2$ $z_1' = z_2'$ [illegible] $z_1 = z_2$. S_1 i S_2 [illegible] $z_1\, z_2$ i $z_1'\, z_2'$

[illegible] S_1 i S_2 [illegible] NA_1 i NA_2 [illegible] V_2 [illegible] $A_1 N A_2$, [illegible] V_1 [illegible] ($A_1\, N - A_2$)

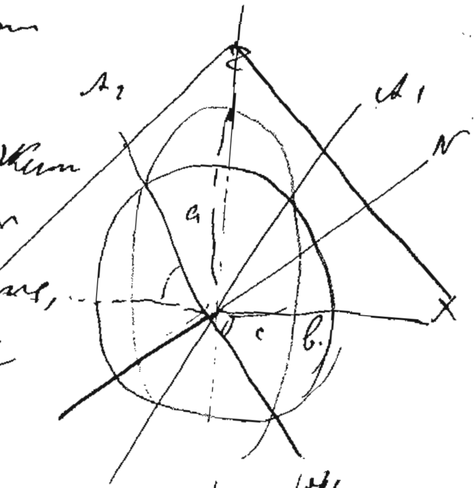
Za kraci drugi A_1 a isto tako A_2 u pravcu je otvoren zraka i prave $N A_1 O$ (normalna presek). Trebamo presek [illegible] pravca otvoren zraka u pravcu je 7 [illegible] zraka ⊥ na [illegible] pravcu (Fresnel)

Ako u pravcu g [illegible] a N [illegible] jednom normalnom presek, [illegible] je otvoren zraka [illegible] presek OZN [illegible] [illegible] g.



Jednoosni kristali gde ove [illegible] kristalne [illegible] jedna [illegible] kristalna osa, [illegible] (tetragonalni i heksagonalni). Osnovna osa [illegible] kristalografski. Kristali [illegible] osnovna [illegible] od [illegible].

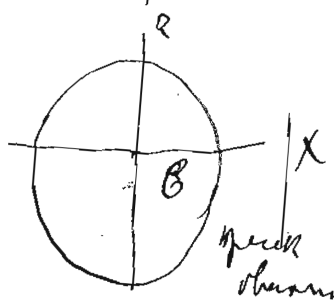
[illegible] Tetragonalni, monoklinski, triklinski [illegible] osnovnom [illegible]. Kod [illegible] kristalografske [illegible] [illegible]. Kod monoklinskih kristala [illegible] na [illegible] jedne [illegible] osnovne, [illegible] ⊥ na jednoj kristalografskoj [illegible] ravan. Kod [illegible] kristala [illegible] osnovne [illegible] zrakom.



Kod jednoosnog kristala $a = b$ Obrazac je [illegible]:

$$\rho^2 = a^2 + (c^2 - a^2) t_3^2 \quad . \; . \; . \quad 1.$$

[illegible] m = 0 p = 0 obrazac je: $\rho^2 = b^2$

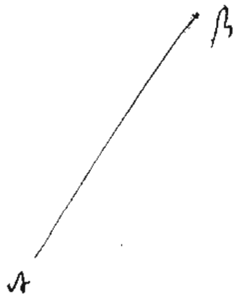


[illegible] je [illegible] ose [illegible], kristali [illegible] pozitivno ili negativno jednoosni. [illegible] je drugi $a > c$ za drugi $a < c$. Kod pozitivnog je kristal [illegible] zrak [illegible], [illegible]. Kvarc je pozitivan [illegible] je negativan jednoosni kristal.

§ 57. Ispitivanje položaja četvoročlanih [illegible] koji zgrada [illegible]

[illegible]:

Ako su m n i p [illegible] kosinusi pravca [illegible] zraka četvoročlanih AB, tako je on na [illegible] imam [illegible]:



$$m : n : p = (\gamma Y - \beta Z) : (\alpha Z - \gamma X) : (\beta X - \alpha Y) \quad \ldots \quad (1$$

Iz [illegible] jednačina je:

$$Z_1 X : Z_2 Y : Z Z_3 = M : N : R \quad \ldots \quad (a.$$

ima tako: $\frac{C^2}{Z_{1,2}} = a^2 \ldots$).

$$X : Y : Z = a^2 M : b^2 N : c^2 R \ldots \quad (2.$$

Iz (a i jednačina [illegible] i naredni:

$$\alpha : \beta : \gamma = b^2 p N - c^2 n R : c^2 m R - a^2 p M : a^2 n M - b^2 m N$$

Zamenom 2 3 i 4 dolazi se:

(5. ... $m : n : p = -m\,(a^4 M^2 + b^4 N^2 + c^4 R^2) + M a^2 (a^2 m M + b^2 n N \ldots$

$: (\cdot) : (\cdot \cdot \cdot)$

Ako uvedemo koordinate $G^2 = a^2 m M + b^2 n N + c^2 p R$

imaćemo:

$$a^2 M = M V^2 + m G^2, \quad b^2 N = N V^2 + n G^2, \quad c^2 R = R V^2 + p G^2$$

tako je:

$$M^2 + N^2 + R^2 = m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

$$M m + N n + R p = 0$$

$$a^4 M^2 + b^4 N^2 + c^4 R^2 = V^4 + G^2 \quad \ldots \quad (I.$$

Ako izvedemo jednačine: $M = G^2 \frac{m}{a^2 - V^2}$, N, R

$$1 = G^4 \left\{ \left(\frac{m}{a^2 - V^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{b^2 - V^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{c^2 - V^2}\right)^2 \right\} \quad \ldots \quad (II.$$

Ако ово уметнемо у 5 имаћемо:

$$m\,a^2\left[\frac{G^4}{a^2-V^2}-\frac{(V^4+G^4)}{a^2}\right]$$

$$M:N:P = -m(V^4+G^4)+nG^4\frac{c^2}{a^2-V^2}:$$

$$M:N:P = V^2 m\left(V^2+\frac{G^4}{V^2-a^2}\right) : n\left(V^2+\frac{G^4}{V^2-b^2}\right)V^2 : p\left(V^2+\frac{G^4}{V^2-c^2}\right)V^2 \quad \ldots (II$$

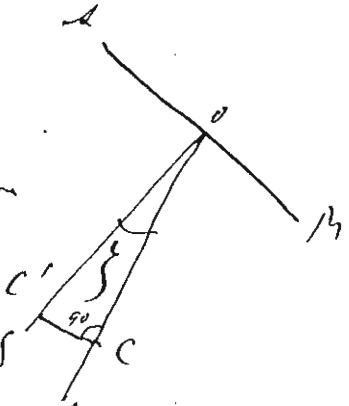
Овде је знак одређен [illegible] од V^2, а V^2 [illegible] по Fresnel-овом закону и G^2 је [illegible] са m n p [illegible] V^2

[illegible] M, N и P одређују из једначина:

$$M = m\sigma\left(V^2+\frac{G^4}{V^2-a^2}\right),\quad N = n\sigma\left(V^2+\frac{G^4}{V^2-b^2}\right)\quad P = p\sigma\left(V^2+\frac{G^4}{V^2-c^2}\right)\ldots 6.$$

из $M^2+N^2+P^2=1$ имамо једначину за σ:

$$1=\sigma^2(V^4+G^4)\quad\ldots\quad 7.$$



§55 [illegible]. Ако је AB таласна раван, ON нормала [illegible] SO [illegible] ON и означимо тај угао ξ, он [illegible] једначином:

$$\cos\xi = mM+nN+pP\ldots\quad 1$$

Ако у једначини [illegible] $V = CO$, [illegible] N [illegible] $W = C'O$

$$W\cos\xi = V\ldots\quad 2.$$

Из једначина 6. [illegible] имамо:

$$\cos\xi = \sigma V^2\ldots\quad 3.$$

$$\sigma = 1 : VW$$

$$G^4 = V^2W^2-V^4\ldots\quad 4$$

$$G^2 = V^2\operatorname{tg}\xi\ldots\quad 5.$$

Када се ово унесе у 6 [illegible]:

$$\frac{MW}{W^2-a^2}=\frac{mV}{V^2-a^2},\quad \frac{NW}{W^2-b^2}=\frac{nV}{V^2-b^2},\quad \frac{PW}{W^2-c^2}=\frac{pV}{V^2-c^2}\ldots 6.$$

[illegible] $m a^2$, $n b^2$, $p c^2$ [illegible]:

$$D\left(\frac{m^2a^2}{D^2-a^2}+\frac{n^2b^2}{D^2-b^2}+\frac{p^2c^2}{D^2-c^2}\right) = -\frac{V}{G^2}\left(a^2Mm+b^2Nn+c^2Pp\right)$$

[illegible]:

$$\sum \frac{m^2a^2}{D^2-a^2} = 0 \quad \ldots \quad (1.$$

ili

$$\sum \frac{m^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{D^2}} = 0 \quad \ldots \quad (7.$$

Ako u 7 [illegible] $m^2+n^2+p^2=1$ [illegible]:

$$\frac{m^2D^2}{D^2-a^2}+\frac{n^2D^2}{D^2-b^2}+\frac{p^2D^2}{D^2-c^2} = 1 \quad \ldots \quad (II.$$

[illegible]

[illegible] II [illegible].

[illegible]:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\theta_1^2}{a^2}+\frac{\theta_2^2}{b^2}+\frac{\theta_3^2}{c^2} \quad \ldots \quad (8$$

[illegible] a, b, c. [illegible] D [illegible] m n p [illegible] 8 [illegible] ρ_1 i ρ_1

[illegible] D_1. [illegible] D^2 [illegible].

[illegible]:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}} \qquad n = 0 \qquad p = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}}$$

$$m = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad n = 0 \qquad p = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

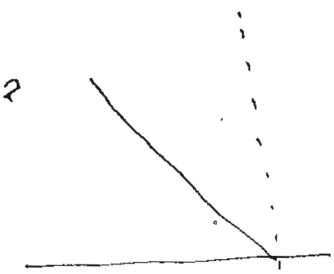
[illegible]

[illegible] P [illegible]

Ako w [illegible] Xapencoba, [illegible] P [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] PS [illegible] [illegible] S [illegible].

[illegible]

Ako [illegible] S [illegible] xyz



w/j: $mD = x$ $D^2 = x^2+y^2+z^2$

a [illegible]:

$$F(xyz) = \frac{x^2}{D^2-a^2} + \frac{y^2}{D^2-b^2} + \frac{z^2}{D^2-c^2} - 1 = 0 \quad . \quad 1.$$

[illegible] 1:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = m : n : p \quad \ldots \quad I$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\left[\frac{1}{D^2-a^2} - \sum\frac{x^2}{(D^2-a^2)^2}\right] \qquad \frac{x}{D^2-a^2} = \frac{mV}{V^2-a^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\left[\frac{1}{D^2-a^2} - \frac{V^2}{G^2}\right] = \frac{2xV^2}{G^4}\,\frac{a^2-V^2}{D^2-a^2} = -2m\frac{V^3}{G^4}$$

[illegible] I [illegible] Xapencoba [illegible] [illegible].

§ [illegible] m, n, p [illegible] $m\ n\ p$. [illegible] P [illegible] PN, [illegible]:

$$mx+ny+pz = V \quad . \quad . \quad 3.$$

[illegible] $m^2+n^2+p^2 = 1$

$$A(m^2+n^2+p^2) = f$$

$$mx + ny + pz + f(m^2+n^2+p^2) = V + f$$

$$X + 2fm = \frac{\partial V}{\partial m} \quad [illegible] \quad \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{m}{V^2-a^2}\,\frac{G^4}{V} \quad \text{и т. д.}$$

$$Y + 2fn = \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$Z + 2fp = \frac{\partial V}{\partial p}$$

из ових једначина [illegible]

$$2f = -V \text{ и онда је:}$$

$$X = m\left(V + \frac{1}{V^2-a^2}\,\frac{G^4}{V}\right)$$

$$Y = n\left(V + \frac{1}{V^2-b^2}\,\frac{G^4}{V}\right)$$

$$Z = p\left(V + \frac{1}{V^2-c^2}\,\frac{G^4}{V}\right)$$

[illegible] $X : Y : Z = M : N : P$. [illegible] $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ [illegible]

Конична рефракција [illegible] V^2 [illegible] $M\,N\,P$ [illegible] 0/0. [illegible] $m = 0$ $\quad V_1^2 = a^2$ [illegible]

$$G^4 = \frac{V_1^2-a^2}{m^2} = 0/0$$

$$M = m\frac{G^4}{V_1^2-a^2} = m\frac{V_1^2-a^2}{m^2} = 0/0$$

[illegible] Fresnel-ове једначине:

$$\frac{0}{0} = \frac{m^2}{V_1^2-a^2} = \frac{n^2}{b^2-V_1^2} + \frac{p^2}{c^2-V_1^2}$$

за $a > b > c$ [illegible] $V_1 = a$

[illegible] $M = 0$ за $m = 0$ [illegible]

[illegible]

За $x=0$ и $V=b$ имамо:

$$\mathfrak{N} = n\,\frac{V^2-b^2}{n^2} \qquad \frac{n^2}{V^2-b^2} = \frac{m^2}{a^2-V^2}+\frac{p^2}{c^2-V^2}$$

[illegible] за $V=b$ тј.:

$$m^2(c^2-b^2)+p^2(a^2-b^2)=0$$

Овај је израз [illegible] за $n=0$ [illegible] и $\mathfrak{N} = 0/0$ [illegible] је $\mathfrak{N}$ неодређено. [illegible]

$$\frac{\mathfrak{M}m}{W^2-a^2}+\frac{\mathfrak{N}n}{W^2-b^2}+\frac{\mathfrak{P}p}{W^2-c^2}=0$$

Кад [illegible] онда је $n=0$ [illegible] и $W \gtrless b$ и онда је:

$$\frac{\mathfrak{M}m}{W^2-a^2}+\frac{\mathfrak{P}p}{W^2-c^2}=0$$

За $V=b$ је

$$W(\mathfrak{M}m+\mathfrak{P}p=b$$

Избацивањем W имамо:

$$(\mathfrak{M}mc^2+\mathfrak{P}pa^2)(\mathfrak{M}m+\mathfrak{P}p)=b^2 \quad \ldots \quad 1.$$

Ако су координате [illegible] тачке [illegible] $x\,y\,z$

$$\mathfrak{M}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{и т. д.}$$

$$(xmc^2+zpa^2)(xm+zp)=b^2(x^2+y^2+z^2) \quad \ldots \quad 2.$$

Ово је конус [illegible].

[illegible] конуса 2.

Конус 2 [illegible]:

$$xm+zp=\text{const.} \quad \ldots \quad 3$$

[illegible] 2 и 3 добија [illegible]:

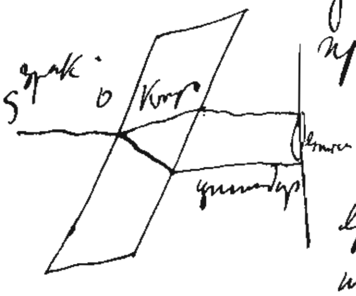
$$(xmc^2+zpa^2)\,\text{const}=b^2(x^2+y^2+z^2)$$

[illegible]

Otklon konjica dat je jednačinom:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{b^2} \quad \ldots \quad 4$$

[illegible]

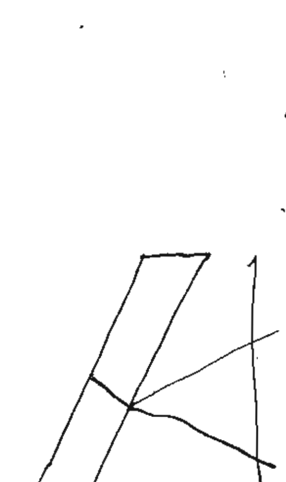


[illegible]

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2c^2}} \quad \ldots \quad 5.$$

[illegible] $m = 0$. $n^2 = b^2$ [illegible] $n = 0$. [illegible]

[illegible] (Hamilton [illegible])



— Глава III^ћа —

Преламање и интерференција

§ 58 Ако је упадни зрак одређен са

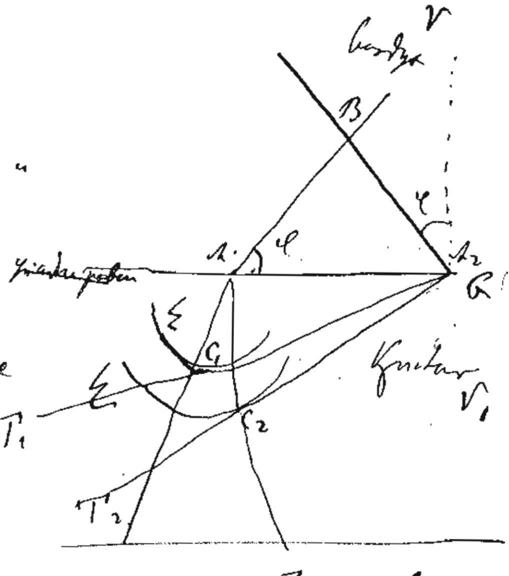
$$\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{mx+ny+pz}{v}\right)$$

а преломљени са:

$$\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{m_1x+n_1y+p_1z}{v_1}\right)$$

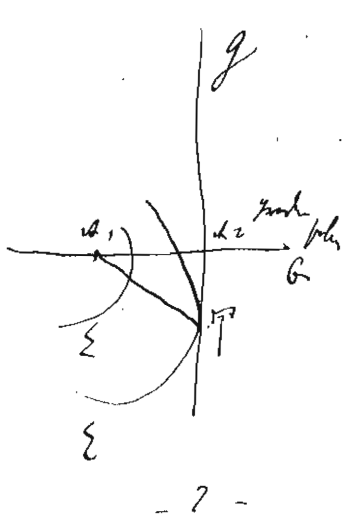
и ако је гранична површина тачка раван $z=0$, гранични услови захтевају да је: $\frac{m}{v}=\frac{m_1}{v_1}$ $\frac{n}{v}=\frac{n_1}{v_1}$ ... (I).

I закон да је нормала преломног таласа у упадној равни и да је преломни угао φ' са упадним: $\sin\varphi : \sin\varphi' = V : V'$ ... (II).



§ 59 Конструкција по Хајгенсу. Ако је раван AB [illegible] гранична раван и AB пресек упадног таласа са граничном равни, $BA_2 = V$ [illegible] за време $t = 1''$. За ово време около [illegible] таласи у [illegible] до површине Σ. [illegible] површина Σ [illegible], то су [illegible] равни из A_2 на ту површину [illegible] таласа у [illegible]. Правци A_1C_1 и A_1C_2 су правци преломног зрака. (Упадни је зрак [illegible] AB. Ако је угао $\varphi = 90°$ нема двојног преламања. За [illegible], а [illegible] зрака који су [illegible] површине на Σ || са граничном површином G.

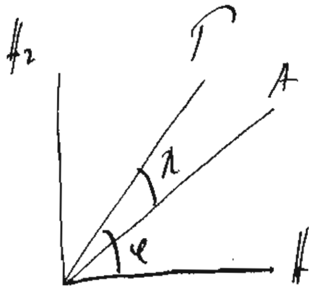
Само тада [illegible] светлост из [illegible] у [illegible].



[illegible] светлосног [illegible] нема двојног преламања за нормалу, већ само за зраке.

§ 60 Аномална рефракција на [illegible]. Ако се [illegible] (пресек површине [illegible]) [illegible] површину [illegible] у [illegible] и [illegible] зрака $A_1T \perp$ на граничну раван, онда нема преломног зрака, већ [illegible] рефракција. [illegible] за [illegible] рефракцију [illegible] површину ΣΣ.

36) Интерференција у паралелној праволинијски поларизованој светлости
Кад је светлост линеарно поларизована и пропуштена кроз кристалну плочу и [illegible]
кристал [illegible] између поларизатора и анализатора. Ово се
[illegible] Nörrenberg-ов
апарат поларизациони. [illegible] апарата замењен николовим
[illegible] анализатором и у њему је [illegible]
[illegible]. [illegible] је поларизатор, који пропушта
светлост [illegible] у P. Ако је правац поларизоване
светлости амплитуде ξ онда се [illegible] у правцу H_1 и H_2
[illegible] у $\xi\cos\varphi$, $\xi\sin\varphi$, φ је угао између P и H_1 и H_2.



V_1 и V_2 [illegible] таласа W_1 и W_2 у кристалу.
[illegible] из кристала оба се таласа [illegible]
[illegible] A и [illegible] кроз анализатор [illegible] амплитуде
$\xi\cos\varphi\cos(\varphi-\chi)$, $\xi\sin\varphi\sin(\varphi-\chi)$. Таласи W_1 и W_2 имају још
[illegible] при проласку кроз кристал:

$$\delta = d\frac{2\pi}{T}\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right) = 2\pi\frac{d}{\lambda}\left(\frac{V}{V_1}-\frac{V}{V_2}\right)$$

d је дебљина кристала, V_1 V_2 су брзине таласа W_1 W_2 кроз кристал,
V брзина у ваздуху. λ таласна дужина у ваздуху [illegible] светлости
[illegible]. Интензитет светлости [illegible] из анализатора је:

$$J=\xi^2\left[\cos^2\varphi\cos^2(\varphi-\chi)+\sin^2\varphi\sin^2(\varphi-\chi)+2\sin\varphi\cos\varphi\sin(\varphi-\chi)\cos(\varphi-\chi)\cos\delta\right]$$

$$\cos\delta = 1-2\sin^2\delta/2$$

$$J=\xi^2\left[\cos^2\chi-\sin2\varphi\sin2(\varphi-\chi)\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\right]$$

$\xi^2\cos^2\chi$ је интензитет [illegible] анализатора, кад не би било
кристала [illegible] означимо са $J_0=\xi^2\cos^2\chi$

1). Ако су николи паралелни $\chi=0$

$$J=J_0\left(1-\sin^2 2\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\delta\right)$$

[illegible] кристала [illegible] за $\varphi=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ имамо $J=J_0$

а то је угао ка[illegible] од равни [illegible] у [illegible] са [illegible] у [illegible] [illegible].

За $\varphi = \pi/4$ и [illegible] [illegible] је:

$$I_{\parallel} = I_0\left(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta\right) = I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\delta$$

за [illegible] δ, [illegible] [illegible] од d [illegible] [illegible], [illegible] [illegible].

2). Укрштени николи $\varphi = \pi/2$ $\quad I_0 = 0$

$$I_x = \varepsilon^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta$$

За [illegible] d је [illegible] [illegible] ако [illegible] [illegible] у [illegible] николу, кад је $\delta = 2k\pi$. [illegible] [illegible] $\varphi = \pi/4$

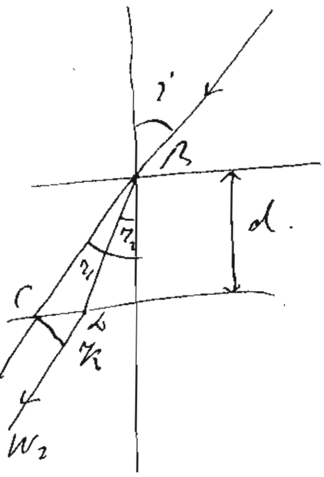
$$I_x = \varepsilon^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta$$

ако δ није $2k\pi$ [illegible] [illegible] [illegible]

Ако је [illegible] [illegible] светлост [illegible] [illegible] [illegible]

§ 62 Интерференција у конвергентној поларисаној светлости.

[illegible] [illegible] светлости [illegible] [illegible] [illegible] угао i. [illegible] [illegible] [illegible] r_1 и r_2. d је [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].



$$\delta = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{BD}{v_2} + \frac{DK}{v} - \frac{BC}{v_1}\right)$$

$$BD = \frac{d}{\cos r_2} \qquad BC = \frac{d}{\cos r_1} \qquad DK = CD \sin i = (BC \sin r_1 - BD \sin r_2)\sin i$$

$$\delta = \frac{2\pi}{T} d \left\{ \left(\frac{\sin i \sin r_1}{v} - \frac{1}{v_1}\right)\frac{1}{\cos r_1} - \left(\frac{\sin r_2 \sin i}{v} - \frac{1}{v_2}\right)\frac{1}{\cos r_2} \right\}$$

по закону преламања је:

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin r_1}{v_1} = \frac{\sin r_2}{v_2}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{T} d \left\{ \frac{\cos r_2}{v_2} - \frac{\cos r_1}{v_1} \right)$$

Ако уместо угла r_1 и r_2 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] v_1 и v_2 са [illegible] $a^2 + c^2$ и $b^2 - c^2$ и [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\delta = \frac{\pi}{T}\,\frac{d}{\cos r}\,\frac{a^2-c^2}{\left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)^{3/2}}\,\sin g_1 \sin g_2 \;\ldots\; (I)$$

[illegible] $\frac{d}{\cos r}$ [illegible]

[illegible] ([illegible] $BA = BC$)

n_1 u n_3 [illegible]

[illegible]:

$$a^2 = V^2 : n_1^2 \qquad c^2 = V^2 : n_3^2$$

$$\delta = \frac{\pi d}{\lambda \cos r}\,\frac{n_3^2-n_1^2}{n}\,\sin g_1 \sin g_2 = \frac{2\pi d}{\lambda \cos r}(n_3-n_1)\sin g_1 \sin g_2 \;\ldots\; (I')$$

[illegible] T [illegible] δ [illegible]

[illegible] I'.

Глава IV та

I

Апсорпција светлости.

§ 63 [illegible]

[illegible]

Ако са σ означимо коефицијент [illegible], а [illegible] u, v, w [illegible] j_x, j_y, j_z ([illegible]) онда је:

$$u = j_x = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \sigma X \quad , j_y = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \sigma Y \quad j_z = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \sigma Z \ldots 1.$$

Ако [illegible] онда је σ [illegible]

$$\sigma = 9.56\,10^{11} \text{ (ово је [illegible])} \ldots 2.$$

[illegible] $\mu = 1$, [illegible] $\mu = 1$ [illegible] светлост.

Гранични услови су овде:

$X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ за $z = 0$ ако је гранична [illegible] раван.

[illegible]:

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \quad и \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Онда је једначина [illegible] $\alpha \beta \gamma$ и $X Y Z$ [illegible]:

$$c^2 \Delta U = K\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\sigma\frac{\partial U}{\partial t} \ldots I.$$

[illegible]

7.67 Један од интеграла (I) је за X облика:

$$X = A e^{i\frac{2\pi}{T}[t-(\mu x+\nu y+\pi z)]} \quad \ldots \quad 1.$$

A, μ ν π су комплексне константе. [illegible] X-а [illegible] 1.

Из 1 је

$$\frac{\partial X}{\partial t} = i\frac{2\pi}{T}X \quad \ldots \quad 2.$$

Кад ово [illegible] у $j_x = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \sigma X$ [illegible]:

$$j_x = \frac{K - i2\sigma T}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{K'}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} \quad (I.$$

$$K' = K - i2\sigma T \quad \ldots \quad 3$$

Из I се [illegible] K [illegible] K' [illegible] комплексном константом. [illegible]:

$$\frac{K'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X \quad \ldots \quad (II.$$

Кад се 1 [illegible] у II [illegible] за K' [illegible]:

$$\frac{K'}{c^2} = \mu^2+\nu^2+\pi^2 \quad \ldots \quad 4.$$

Нека је $\mu = \nu = 0$ онда је $\pi = \frac{1-ik}{V}$

k и V су стварне константе и

$$X = A e^{-2\pi k\frac{z}{\lambda}} e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)} \quad \ldots \quad (III$$

$$\lambda = TV$$

Једначина III [illegible] за λ [illegible], A [illegible] $e^{-2\pi k}$. K [illegible] коефицијент[illegible].

Zaznaczmy III [illegible] elektronu ⊥ [illegible] [illegible]. V jest [illegible] elektronów [illegible] [illegible] [illegible]. Jeśli jest $n = \frac{c}{V}$ [illegible] [illegible]

wtedy:

$$\varkappa_1 - 2\sigma T i = \varkappa_1' = n^2(1 - \kappa^2 - 2i\kappa) \dots 8.$$

$$n^2(1-\kappa^2) = \varepsilon \qquad n^2\kappa = \sigma T \dots \text{IV}.$$

IV gdzie wyrazy n i K są [illegible] konstantami.

[illegible] Refleksja na metalach. Jeśli jest [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] pod 45° [illegible] [illegible] [illegible] $E_p = E_s$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\varkappa$ zmienia w $\varkappa'$ [illegible] [illegible] [illegible] χ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] w [illegible]:

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\varkappa_1'}} \dots 1.$$

Wzór jest komplekcyjnej amplitudy:

$$\frac{R_p}{R_s} = \rho e^{i\Delta} = -\frac{\cos(\varphi+\chi)}{\cos(\varphi-\chi)} \dots 2.$$

ρ jest stosunkiem amplitud odbitego światła p i s komponentu, Δ [illegible] [illegible] [illegible]

$$3) \dots \quad \rho = \frac{R_p}{R_s} \quad \Delta = \delta_p - \delta_s \qquad R_s\, R_p\, \delta_p\, \delta_s \text{ [illegible]}$$

[illegible] [illegible] $\Delta \gtrless 0$: [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Z 2 mamy:

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}} = \frac{\sin\varphi \sin\chi}{\cos\varphi \cos\chi} \dots 4.$$

Z 4 i 1 mamy:

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}} = \frac{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\varkappa_1' - \sin^2\varphi}} \dots 5.$$

1/ Za $\varphi = 0$ $\quad \rho e^{i\Delta} = -1 \quad \Delta = 0, \ \rho = -1.$

2) $\varphi = \pi/2 \quad \rho e^{i\Delta} = +1 \quad \Delta = 0 \quad \rho = 1$

Za dla obu razem światło wracające spada z odbitym chłodnych

3) Jest $\bar\varphi$ dla którego $\Delta = \pi/2$ zatem wartość graniczna przy której $e^{i\Delta} = i$ otrzymamy:

$$\frac{1+i\rho}{1-i\rho} = \frac{\sin\bar\varphi \operatorname{tg}\bar\varphi}{\sqrt{K'^2 - \sin^2\bar\varphi}} \quad \ldots \quad 6.$$

albo u obu wzorów m

$$\frac{1-i\rho}{1+i\rho} = \frac{\sin\bar\varphi \operatorname{tg}\bar\varphi}{\sqrt{K''^2 - \sin^2\bar\varphi}}$$

K' i K'' są korzystane kombinacje K

$$\sin^4\bar\varphi \operatorname{tg}^4\bar\varphi = n^4(1+K^2)^2 - 2n^2(1-K^2)\sin^2\bar\varphi + \sin^4\bar\varphi \quad \ldots \quad (I).$$

z I ... wartość graniczną $\bar\varphi$.

... $\bar\varphi$

$$\sin\bar\varphi \operatorname{tg}\bar\varphi = n\sqrt{1+K^2} \quad \ldots \quad (II).$$

... $\sin^2\varphi$ ...

$\sqrt{K'} = n(1-iK)$ ...:

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}} = \frac{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{n(1-iK)} \quad \ldots \quad 7.$$

... $\rho = \operatorname{tg}\psi$

ψ jest azymut ... (Babinet) ... ψ ... azymut ...

... :

$$\frac{1-\rho e^{i\Delta}}{1+\rho e^{i\Delta}} = \frac{\cos 2\psi - i\sin\Delta\sin 2\psi}{1+\cos\Delta\sin 2\psi} \quad \ldots \quad 8.$$

Z 7 i 8 ...:

$$K = \sin\Delta \, tg\, 2\psi$$

$$n = \sin\varphi \, tg\,\varphi \, \frac{\cos 2\psi}{1+\cos\Delta \sin 2\psi} \quad \ldots \quad III.$$

$$n^2(1+K^2) = \sin^2\varphi \, tg^2\varphi \, \frac{1-\cos\Delta \sin 2\psi}{1+\cos\Delta \sin 2\psi}$$

Računamo dakle φ i Δ a III daje nam optičke konstante n, K

Za $\varphi = \bar{\varphi}$ imamo $\psi = \bar{\psi}$ (glavni azimut)

iz III je: $K = tg\, 2\bar{\psi}$ . . . 18.

Ako je n i K poznato iz III je:

$$tg\, \bar{P} = \frac{2\sqrt{1+K^2}}{\sin\varphi\, tg\,\varphi} \qquad tg\, Q = K$$

$$tg\, \Delta = \sin Q \, tg\, 2P \quad i \quad \cos 2\psi = \cos Q \sin 2P \quad \ldots \quad IV.$$

Za [illegible] je [illegible] [illegible] jednostavno [illegible] pretpostavljeno za $\varphi = 0$. [illegible] je [illegible] za $\varphi = 0$ kad se n zamijeni sa $n(1-iK)$

$$\frac{R_p}{E_p} = \frac{R_p e^{i\delta_p}}{E_p} = \frac{n(1-iK)-1}{n(1-iK)+1}$$

Kad se ovo pomnoži s konjugirano kompleksnim izrazom dobivamo:

$$R = \frac{R_p^2}{E_p^2} = \frac{n^2(1+K^2)+1-2n}{n^2(1+K^2)+1+2n} \quad \ldots \quad V.$$

Kad [illegible] je $2n$ manje prema $n^2(1+K^2)$ R je [illegible] [illegible], [illegible] je [illegible] [illegible], koji [illegible] je oko 95 % [illegible] svojstvo metala (Metallglanz). [illegible] [illegible] [illegible] je K [illegible]. Veliko K [illegible] od [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] metala. [illegible] [illegible] i [illegible] je [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] je [illegible] [illegible] [illegible] ...

— II —

Апсорпција кристала.

36. Ако $\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3$ [illegible] диелектричне константе узмемо да су комплексне количине и место [illegible] [illegible] комплексне количине.

Ако наше једначине:

$$\frac{\varkappa_1'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

решимо, $\bar{X}$ Y и Z су облика

$$u = \varkappa_1' X = M\, e^{i\frac{2\pi}{T}\left[t-(mx+ny+pz)\frac{1-ik}{v}\right]}$$

$$v = \varkappa_2' Y = N\, e^{i\frac{2\pi}{T}(\ \ .}$$

$$w = \varkappa_3' Z = \Pi\, e^{i\frac{2\pi}{T}(\ \ .} \qquad \text{— (I)}$$

$u\ v\ w$ су компоненте електричне [illegible] а оне саме обичне [illegible].

$$m^2+n^2+p^2 = 1$$

$M\ N\ \Pi$ су комплексне количине

[illegible] [illegible] које су [illegible] [illegible] [illegible] $m\ n\ p$ v је брзина [illegible] таласа, k је апсорпциони коефицијент.

Јер зато $j_x = \frac{\varkappa_1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}+\sigma X \quad j_y = \frac{\varkappa_2}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t}+\sigma Y \quad j_z = \dots$

$$X = A\, e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t-(\mu x+\nu y+\pi z)\right)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A\, i\frac{2\pi}{T}\, e^{\dots} = \frac{i2\pi}{T} X$$

$$j_x = \left(A\, i\frac{2\pi}{T}\varkappa+\sigma\right) X = \frac{\partial X}{\partial t}\left[\frac{\varkappa_1 - i2\sigma T}{4\pi}\right] = \varkappa_1'\frac{\partial X}{\partial t}.$$

37. Ако у I ставимо:

$$\frac{v}{1-ik} = \omega$$

Fresnel-ова једначина за брзину:

$$\frac{m^2}{a^2-\omega^2}+\frac{n^2}{b^2-\omega^2}+\frac{p^2}{c^2-\omega^2} = 0 \quad \dots\ (\mathrm{C})$$

$a_0^2\ b_0^2\ c_0^2$ są [illegible]. [illegible]
[illegible] V i K. [illegible] $m\ n\ p$

[illegible] $M\ N\ \Pi$ [illegible]:

$$Mm + Nn + \Pi p = 0 \quad \ldots\ (a)$$

$$M : N : \Pi = \frac{m}{a_0^2 - w^2} : \frac{n}{b_0^2 - w^2} : \frac{p}{c_0^2 - w^2} \quad \ldots\ (b)$$

$$M_1 M_2 + N_1 N_2 + \Pi_1 \Pi_2 = 0 \quad \ldots\ (c)$$

[illegible] $m\ n\ p$.
[illegible]
[illegible]: M i N [illegible] $M = M e^{i\delta_1}$ $N = N e^{i\delta_2}$
$\delta_1 - \delta_2$ [illegible]
[illegible] $\delta_1 - \delta_2 = 0$. [illegible]
[illegible], (c) [illegible]
[illegible].

§ 62 [illegible] w^2 [illegible]
[illegible] K^2 [illegible]

$$w^2 = V^2(1 + 2iK)$$

[illegible]:

$$a_0^2 = a^2 + i a'^2, \quad b_0^2 = b^2 + i b'^2, \quad c_0^2 = c^2 + i c'^2$$

$$\frac{m^2}{a_0^2 - w^2} = \frac{m^2}{a^2 - V^2 - i[2KV^2 - a'^2]} = \frac{m^2}{a^2 - V^2}\left(1 + i\,\frac{2KV^2 - a'^2}{a^2 - V^2}\right)$$

[illegible] (c).

$$\frac{m^2}{a^2 - V^2} + \frac{n^2}{b^2 - V^2} + \frac{p^2}{c^2 - V^2} = 0 \quad \ldots\ (c)$$

$$2KV^2\left\{\frac{m^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{n^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{p^2}{(c^2 - V^2)^2}\right\} = + \frac{a'^2 m^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{b'^2 n^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{c'^2 p^2}{(c^2 - V^2)^2} \quad \ldots\ (e)$$

[illegible] (c) [illegible] $m\ n\ p$
[illegible] K [illegible] $m\ n\ p$. [illegible] (b) $M\ N\ \Pi$ [illegible]
[illegible]

Ако са $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{R}$ означимо [illegible] у $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \Pi$, што су праве косинуси правца нормале [illegible] [illegible] из 6. и 2.

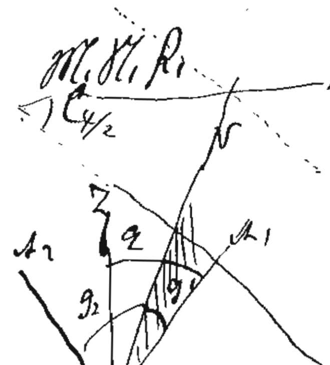
$$\mathfrak{M} : \mathfrak{N} : \mathfrak{R} = \frac{m}{a^2-v^2} : \frac{n}{b^2-v^2} : \frac{p}{c^2-v^2} \quad \dots \quad 3$$

Одређујући [illegible]
из 3 и односа $\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2+\mathfrak{R}^2=1$ налазимо:

$$2k v^2 = a''\mathfrak{M}^2 + b''\mathfrak{N}^2 + c''\mathfrak{R}^2 \quad \dots \quad 4.$$

или:

$$2k = \frac{a''\mathfrak{M}^2+b''\mathfrak{N}^2+c''\mathfrak{R}^2}{a^2\mathfrak{M}^2+b^2\mathfrak{N}^2+c^2\mathfrak{R}^2} \quad \dots \quad 5.$$



[illegible] коефицијент [illegible] функција $\mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{R}$.

S [illegible] [illegible] $v^2 = b^2$. [illegible] NA' и [illegible] A_1A_2 (X2) означимо са φ, [illegible] (NCD) и X2 $\varphi/2$; [illegible] CD [illegible] NA₁ и NA₂, а N [illegible] A_1A_2 (X2). [illegible] CD [illegible] $\varphi/2$ са [illegible] ⊥ на N [illegible] S.

[illegible] S $\cos\varrho$ 0 $-\sin\varrho$

Из [illegible]:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \mathfrak{M}_1\cos\varrho - \mathfrak{R}_1\sin\varrho \quad \dots \quad 1.$$

CD је ⊥ на oN односно oA' и [illegible]:

$$0 = \mathfrak{M}_1\sin\varrho + \mathfrak{R}_1\cos\varrho \quad \dots \quad 2.$$

из 1 и 2 имамо:

$$\mathfrak{M}_1 = \cos\varrho\cos\frac{\varphi}{2} \quad \mathfrak{N}_1 = \sin\frac{\varphi}{2} \quad \mathfrak{R}_1 = -\sin\varrho\cos\frac{\varphi}{2}$$

$\mathfrak{M}_2\ \mathfrak{N}_2\ \mathfrak{R}_2$ стоје ⊥ на $\mathfrak{M}_1\ \mathfrak{N}_1\ \mathfrak{R}_1$

$$\mathfrak{M}_2 = -\cos\varrho\sin\frac{\varphi}{2} \quad \mathfrak{N}_2 = \cos\frac{\varphi}{2} \quad \mathfrak{R}_2 = \sin\varrho\sin\frac{\varphi}{2}$$

Према обрасцу [illegible] имамо:

$$2K_1 b^2 = (a'^2\cos^2\varphi + c'^2\sin^2\varphi)\cos^2\frac{\psi}{2} + b'^2\sin^2\frac{\psi}{2} \quad \ldots (3$$

$$2K_2 b^2 = (a'^2\cos^2\varphi + c'^2\sin^2\varphi)\sin^2\frac{\psi}{2} + b'^2\cos^2\frac{\psi}{2}$$

За угао $\pm\psi$ добивамо за K_1 исту вредност као и за K_2 за $\psi' = \pi \pm \psi$. [illegible] за [illegible] је ψ [illegible].

За [illegible] ($\mathfrak{M} = \mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{P} = 1$) имамо:

$$2K_s b^2 = b'^2 \quad \ldots (4.$$

За [illegible] по [illegible] обрасцу овај је:

$$2K_p b^2 = a'^2\cos^2\varphi + c'^2\sin^2\varphi \quad \ldots (5.$$

[illegible] K_s и K_p

Када K_s и K_p уведемо у [illegible] имамо:

$$K_1 = K_p\cos^2\frac{\psi}{2} + K_s\sin^2\frac{\psi}{2}$$
$$K_2 = K_p\sin^2\frac{\psi}{2} + K_s\cos^2\frac{\psi}{2} \quad \ldots (6.$$

За једноосне кристале је $a = b$, $a' = b'$

[illegible] за обичан зрак:

$$2K_o V_o^2 = a'^2 \qquad V_o^2 = a^2$$

За необичан је зрак:

$$2K_e V_e^2 = a'^2\cos^2\varphi + c'^2\sin^2\varphi \qquad V_e^2 = a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi$$

(где је $m_1 = 0$, $n_1 = 0$, $p_1 = 1$; $m_2 = 0$, $n_2 = 0$, $p_2 = 1$;
$\cos\varphi_1 = mm_1 + nn_1 + pp_1 = p$.).

/

968 [illegible]

[illegible] W_1 [illegible] $\mathcal{E}\cos\varphi$ [illegible]:

$$\mathcal{E}\cos\varphi\; e^{-\frac{2\pi}{T}\frac{\kappa_1}{v_1} l} \qquad \ldots \quad 1$$

l [illegible]

$$l = \frac{d}{\cos r_1}$$

d [illegible], r_1 [illegible] W_1. [illegible] W_2 [illegible]

$$\mathcal{E}\sin\varphi\; e^{-\frac{2\pi}{T}\frac{\kappa_2}{v_2} l} \qquad \ldots \quad 2.$$

[illegible] W_1 [illegible] W_2 [illegible]:

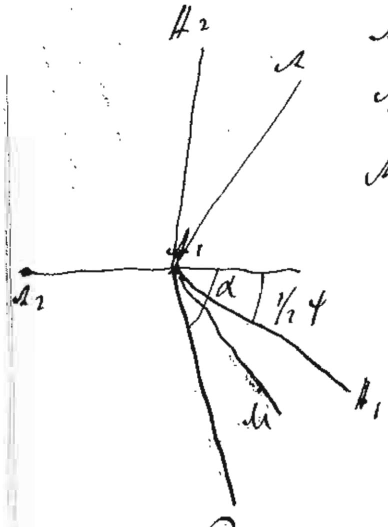
$$\mathcal{E}\cos\varphi\cos(\varphi-\chi)\; e^{-\kappa_1\sigma_1} \qquad \sigma_1 = \frac{2\pi}{T v_1}\frac{d}{\cos r_1}$$

$$\mathcal{E}\sin\varphi\sin(\varphi-\chi)\; e^{-\kappa_2\sigma_2} \qquad \sigma_2 = \frac{2\pi}{T v_2}\frac{d}{\cos r_2} \qquad \ldots \quad 3.$$

[illegible] δ [illegible]:

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\, d\left(\frac{\cos r_2}{v_2} - \frac{\cos r_1}{v_1}\right) \qquad r_2 = r_1 \text{ [illegible]}$$

a). [illegible] $\chi = \pi/2$. [illegible] A_1 [illegible] ψ [illegible] $A_1 A_2$, [illegible] $\psi/2$ [illegible] $A_1 A_2$ [illegible] α [illegible] $A_1 A_2$ $\varphi = \alpha - \psi/2$ $\chi = \pi/2$ [illegible] 3.



$$\mathcal{E}\cos(\alpha-\psi/2)\sin(\alpha-\psi/2)\; e^{-\kappa_1\sigma}$$

$$-\,\mathcal{E}\sin(\alpha-\psi/2)\cos(\alpha-\psi/2)\; e^{-\kappa_2\sigma}$$

$$\sigma = \frac{2\pi d}{T b}$$

[illegible] $v_1 = v_1 = b$ [illegible].

/.

Интензитет светлости тада излази из аналогије:

$$J = \frac{E^2}{4}\sin^2 2(\alpha-\psi)\left\{e^{-2k_1\sigma}+e^{-2k_2\sigma}-2e^{-(k_1+k_2)\sigma}\cos\delta\right\} \quad I.$$

За [illegible] је особине: амплитуду E раставимо на две компоненте паралелно [illegible] и ⊥ на [illegible] $E\cos\alpha$ и $E\sin\alpha$, које [illegible] при изласку из кристала $E\cos\alpha\, e^{-k_p\sigma}$ односно $E\sin\alpha\, e^{-k_s\sigma}$; [illegible] кроз анализатор: $E\cos\alpha\sin\alpha\, e^{-k_p\sigma}$ и $-E\sin\alpha\cos\alpha\, e^{-k_s\sigma}$ [illegible] и интензитет светлости из анализатора:

$$J' = \frac{E^2}{4}\sin^2 2\alpha\left(e^{-k_p\sigma}-e^{-k_s\sigma}\right)^2 .. \quad II$$

што излази из I за $\psi = 0$

Из I за $\psi = 2\alpha$ или $J = 0$ [illegible] [illegible] код [illegible] кристала [illegible], код [illegible] кристала [illegible] [illegible], али [illegible] II [illegible] $\alpha = 0$ или $\pi/2$, када [illegible] [illegible].

Из I за случај када је [illegible] [illegible]. [illegible] од $\cos\delta$, а δ [illegible] [illegible]. Код [illegible] [illegible] за $k_1 = k_2$ а што је за $\psi = \pm\pi/2$ $k_1 = k_2 = k_p$. [illegible] [illegible], [illegible].
Ако је $\cos\delta = 0$ онда је [illegible] из I

$$J = e^{-2k_1\sigma}+e^{-2k_2\sigma}$$

Max за $\psi = 0$ [illegible] и min за $\psi = \pm\pi/2$.

Слично је [illegible] за $\psi = \pm\pi/2$ као за $\psi = 2\alpha$ [illegible] [illegible] за $\alpha = \pi/4$

3) Интерференција код једноосних кристала.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ψ [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] кристала:

$$\Sigma \cos\varphi\, e^{-K_e\delta}$$

при случају из анализатора:

$$\Sigma \cos\varphi \sin\varphi\, e^{-K_e\delta}$$

Нормални зрака [illegible] при случају из Николове

$$\Sigma \sin\varphi\, e^{-K_o\delta}$$

а из анализатора

$$-\Sigma \sin\varphi \cos\varphi\, e^{-K_o\delta}$$

Из анализатора је јачина светлости:

$$J = \frac{\Sigma^2 \sin^2 2\varphi}{4}\left\{ e^{-2K_o\delta} + e^{-2K_e\delta} - 2\cos\delta\, e^{-(K_o+K_e)\delta} \right\} \quad \ldots I.$$

У оваквом случају је $K_o = K_e$ $\delta = 0$

$$J' = 0$$

[illegible] је [illegible] $\varphi = 0, \pi/2$, [illegible] је [illegible] за [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] је [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] је [illegible] [illegible] [illegible].

Ако се [illegible] [illegible] анализатор [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] φ [illegible] [illegible] (пред [illegible]) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] и обичног зрака

$$\Sigma^2 \cos^2\varphi\, e^{-2K_e\delta} \text{ и } \Sigma^2 \sin^2\varphi\, e^{-2K_o\delta}$$

$$J = \Sigma^2\left(\sin^2\varphi\, e^{-2K_o\delta} + \cos^2\varphi\, e^{-2K_e\delta}\right)$$

За [illegible] је [illegible] $K_o = K_e$

$$J' = \Sigma^2 e^{-2K_o\delta}$$

За [illegible] светлост [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] је [illegible] зрака $\Sigma^2 e^{-2K_o\delta}$ [illegible] је $e^2 e^{-2K_e\delta}$ и [illegible] је

$$J = \Sigma^2\left(e^{-2K_o\delta} + e^{-2K_e\delta}\right)$$

у [illegible] је [illegible] $K_o = K_e$

$$J' = 2\Sigma^2 e^{-2K_o\delta}$$

Дисперзија светлости у телима

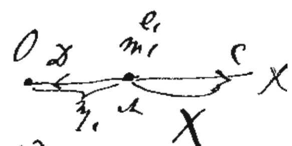
– Предав. V –

– I –

330. Кад ~~[illegible]~~ светлост прође кроз призму, или само кроз какво друго провидно тело, она се дели на светлосне боје, разлаже се на хомогене светлосне зраке, и то се зове дисперзија. За разјашњење ове појаве нај- главнији допринос даје теорија о резонанцији еластичних честица ([illegible]) као и механичка теорија молекула и атома ([illegible]). (Helmholtz). Премда је атоме и молекуле [illegible] [illegible] резонантних еластичних честица у простору.

За данашње [illegible] светлости за [illegible] електромагнетска теорија улоге се [illegible] електрона у телу и свако ~~[illegible]~~ молекула [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]. У свакоме молекулу има позитивних и негативних електрона (јона - електрона). У [illegible] се ови електрони [illegible], у [illegible] [illegible] око њихових равнотежних положаја. У свакој [illegible] [illegible] је [illegible] позитивних и негативних електрона – јона [illegible], ако и свака у [illegible] не [illegible] електрицитета, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

Ако са e_1 означимо количину електрицитета јона, са m_1 његову масу, са ξ_1 отстојање из равнотежног положаја O у правцу x осе, са $e_1 X$ пондеромоторну електричну силу која на јон делује у O у A, са $-\frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1}\xi_1 = AD$ силу еластичности која тежи да јон врати из A у O. (Овде је узето e_1^2 да се [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] од знака масе) и са $-\tau_1 e_1^2 \frac{d\xi_1}{dt}$ отпорност [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] — онда је једначина кретања тачке A дата изразом:



$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = e_1 X - \frac{4\pi e_1^2}{\vartheta_1}\xi_1 - \tau_1 e_1^2 \frac{d\xi_1}{dt} \quad \dots \quad 1.$$

m_1, ϑ_1, τ_1 су извесне константе. Ако и [illegible] [illegible] је [illegible] ξ_1 [illegible] од t и x је

$$e_1\xi_1 = \frac{\vartheta_1}{4\pi} X \quad \dots \quad 2.$$

[illegible] ϑ_1 [illegible] X. [illegible] $\vartheta_1 = \infty$

[illegible]:

$$m_2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = e_2 X - \frac{4\pi e_2^2}{\vartheta_2}\xi_2 - r_2 e_2^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \quad \ldots \quad 2.$$

$m_2\ \vartheta_2\ r_2$ [illegible] e_2 [illegible].

[illegible] $(e\ X)$ [illegible].

[illegible]:

1). [illegible] X

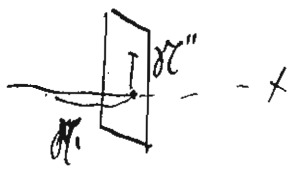
2). [illegible]

3). [illegible]

1). [illegible] X [illegible]

$$(i_x)_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} \quad \ldots \quad 2.$$

[illegible]



2). [illegible] N' [illegible] N'' [illegible] $\perp$ [illegible] X [illegible] dt [illegible] $d\eta_1$ [illegible]:

$$e_1 N' d\eta_1 N'' = e_1 N_1 d\eta_1 \qquad N_1 = N' N'' \quad \ldots \quad 2$$

N_1 [illegible]

[illegible]:

$$(i_x)_1 = e_1 N_1 \frac{d\eta_1}{dt} = e_1 N_1 \frac{\partial \xi_1}{dt} \quad \ldots \quad 3.$$

$(i_x)_1$ [illegible].

[illegible] jona iznosi:

$$(j_x)_2 = e_2 \mathfrak{N}_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \quad \ldots \quad (4.$$

[illegible] u pravcu x-ose u ovom [illegible]:

$$j_x = (j_x)_0 + (j_x)_1 + (j_x)_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(e_1 \mathfrak{N}_1 \xi_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 \xi_2\right) \quad \ldots \quad (I.$$

$$j_y = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(e_1 \mathfrak{N}_1 \eta_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 \eta_2\right)$$

$$j_z = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(e_1 \mathfrak{N}_1 \zeta_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 \zeta_2\right)$$

gde su η i ζ [illegible] y-ose i z-ose.

Iz jednačine I [illegible] i ovo:

$$e_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 = 0 \quad \ldots \quad (II.$$

Koja [illegible]

Iz ove jednačine [illegible]:

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \quad \text{i} \quad \frac{4\pi}{c} s_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \ldots \quad (III.$$

[illegible] je u obzir $\mu = 1$

Jednačine I, II i III su [illegible].

3.72 Određivanje integrala jednačina 1 i 2 [illegible] ξ, ako je X [illegible] funkcija t, ξ_1 i ξ_2 su takođe [illegible] funkcije [illegible] $X = 0$, [illegible].

Ako je $\tau = \frac{T}{2\pi}$ [illegible] onda je:

$$\xi_1 = A_1 e^{it/\tau} \qquad \xi_2 = A_2 e^{it/\tau} \quad \ldots \quad (1.$$

gde su A_1 i A_2 funkcije koordinata, T je [illegible]. [illegible]

$i = \sqrt{-1}$

Из 1 ј:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} = \frac{i}{T} z_1 \quad и \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{T^2} z_1$$

Кад ово уведемо у 1 и [illegible] уметнемо:

$$e_1 z_1 \left(1 + \frac{i}{T}\frac{r_1\theta_1}{4\pi} - \frac{1}{T^2}\frac{m_1\theta_1}{4\pi e_1^2}\right) = \frac{\theta_1}{4\pi} X \quad \ldots \quad (2.$$

или ако ставимо:

$$a_1 = \frac{r_1\theta_1}{4\pi} \qquad b_1 = \frac{m_1\theta_1}{4\pi e_1^2} \quad и \; 2 \; ј:$$

$$e_1 z_1 = \frac{1}{4\pi} X \frac{\theta_1}{1 + \frac{i}{T} a_1 - \frac{b}{T^2}} \quad \ldots \quad (3.$$

За z_2 и иначе исто налазимо:

$$e_2 z_2 = \frac{1}{4\pi} X \frac{\theta_2}{1 + \frac{i}{T} a_2 - \frac{b}{T^2}} \quad \ldots \quad (4.$$

Кад и 3 и 4 уведемо у I ј. [illegible] уметнемо:

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1 + \frac{\theta_1 \mathfrak{N}_1}{1 + \frac{i}{T} a_1 - \frac{b_1}{T^2}} + \frac{\theta_2 \mathfrak{N}_2}{1 + \frac{i}{T} a_2 - \frac{b_2}{T^2}}\right\} = \frac{1}{4\pi} K' \frac{\partial X}{\partial t} \quad (IV.$$

=

Ако и обе [illegible] [illegible] и [illegible] [illegible]:

$$j_x = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}$$ јасно је да је [illegible] [illegible] [illegible] ако и само

К смемо са [illegible] у заградама код IV, тј:

$$K' = 1 + \sum_{h=1} \frac{\theta_h'}{1 + i\frac{a_h}{T} - \frac{b_h}{T^2}} \quad \ldots \quad (5.$$

$$\theta_h' = \theta_h \mathfrak{N}_h$$

Σ и у 5 обухвата [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] од [illegible] у електронима, [illegible] [illegible] [illegible] да [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] за [illegible] [illegible], за [illegible] електричне [illegible], [illegible] [illegible] је $T = \infty$ ([illegible]) и

$$K = K'_\infty = 1 + \Sigma\, \theta_h' \quad \ldots \quad (6.$$

[illegible] (6 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] stałą K [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Dla $\chi = 0$ $\quad a_h = \tau_h = 0$ [illegible]

$$b_h = \tau_h^2 \quad \text{i} \quad \tau_h = T_h / 2\pi \quad [illegible]$$

[illegible] [illegible] [illegible] stałą K' [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$K' = n^2(1 - i\kappa)^2 = 1 + \sum \frac{\theta_h'}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{\tau_h^2}{\tau^2}} \quad \ldots \quad (t.$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] n i κ.

Нормална дисперзија

[illegible] $\frac{a_h}{T}$ [illegible] $1-\left(\frac{T_h}{T}\right)^2$. [illegible] T [illegible] T_h, [illegible] $\frac{T_h}{T}=1$ [illegible] a_h [illegible].

[illegible] T [illegible] T_h [illegible] a_h [illegible].

[illegible] $\frac{a_h}{T}=0$ онда је и

$$K=0 \quad \text{и} \quad n^2 = 1 + \sum \frac{\theta_h'}{1-\left(\frac{T_h}{T}\right)^2} \quad \dots \quad (1)$$

Ако је $T_h - T$ [illegible] n^2 [illegible].

Ако са T_v и T_2 означимо [illegible]

онда је
$$\frac{1}{1-\left(\frac{T_v}{T}\right)^2} = 1 + \left(\frac{T_v}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_v}{T}\right)^4 + \dots \quad (2)$$

$$\frac{1}{1-\left(\frac{T_2}{T}\right)^2} = \frac{T^2}{T_2^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{T}{T_2}\right)^2}\right) = -\frac{T^2}{T_2^2}\left[1+\left(\frac{T}{T_2}\right)^2+\left(\frac{T}{T_2}\right)^4 + \dots\right]$$

ако се T [illegible] T [illegible]:

$$n^2 = 1 + \sum \theta_v' + \frac{\sum \theta_v' T_v^2}{T^2} + \frac{\sum \theta_v' T_v^4}{T^4} + \dots$$
$$- T^2 \sum \frac{\theta_2'}{T_2^2} - T^4 \sum \frac{\theta_2'}{T_2^4} - \dots$$

[illegible] n од T [illegible]:

$$n^2 = -A'T^2 + A + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{T^4}$$

A', A B C [illegible]

$$A = 1 + \Sigma \theta_v$$

[illegible] K_1'

$$K_1' = 1 + \Sigma \theta_n' = 1 + \Sigma \theta_v' + \Sigma \theta_2'$$

$$K_1 - A = \Sigma \theta_2' \quad \ldots \qquad (\mathrm{I}).$$

[illegible] $K_1 - A$ [illegible]

[illegible] A' [illegible] $K_1 - A$ [illegible]

$$A' = \frac{\theta_2'}{T_1^2} \qquad K_1 - A = \theta_2' \quad \text{u} \quad T_1^2 = \frac{K_1 - A}{A'}$$

[illegible] Kettelera [illegible] $A' = 0.0728 \; 10^8 c^2 \sec^{-2}$, $c = 3.10^{10}$

$K_1 - A = 77$ [illegible]

[illegible]:

$$\lambda_1^2 = c^2 T_2^2 = \frac{77}{0.0728} 10^{-8} = 6010^{-6} \text{ mm} =$$

$$\lambda_1 = 7.75 \; 10^{-3} \text{ cm} = 0.08 \text{ mm}.$$

[illegible]

~~[illegible] $\lambda_1^2 = 0.0762$ $\lambda_1^2 = 3179$~~

[illegible] λ^2 [illegible] T [illegible]

[illegible]

III

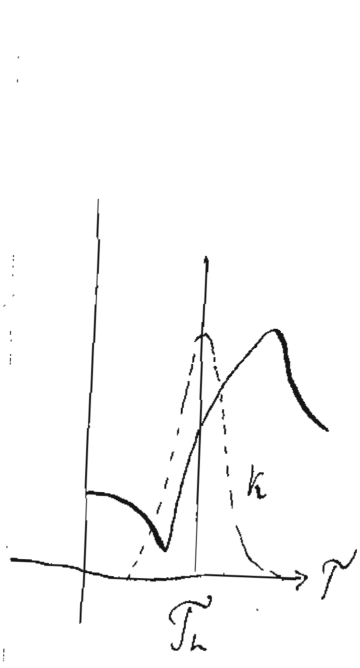
Аномална дисперзија.

§?? Нормална дисперзија наступа кад се посматра вредност у области где је T' далеко од сопствених (?). Кад се овај услов одржи n² се мења. Из израза:

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\theta_k}{1-\left(\frac{T_k}{T'}\right)^2} \quad \ldots \ldots 1)$$

За вредности $T' < T_k$, за које је сумац $1-\left(\frac{T_k}{T'}\right)^2$ негативан и $-\xi$, n^2 има врло велики негативни члан $-\frac{\theta_k}{\xi}$. За случај $T' > T_k$ $1-\left(\frac{T_k}{T'}\right)^2 = \xi'$ је позитивно и n^2 има велики позитивни члан $\frac{\theta_k}{\xi'}$. Кад T' стално расте не стално n^2 опада, док n^2 расте кад светлост иде кроз апсорпциону област. Из 1) се не може одредити n^2 већ из израза:

$$\mathfrak{n}^2 = n^2(1-ik)^2 = 1 + \sum \frac{\theta_k}{1+i\frac{a_k}{T'}-\frac{T_k^2}{T'^2}} \quad \ldots \ldots 2)$$



Који нам служи и за коефицијент K. На слици је графички представљено n и K и види се да је a_k мало K нагло у околини T_k а то има више што је a_k мање, јер из 2) имамо за $T' = T_k$

$$2n^2 K = \frac{T'}{2n}\frac{\theta_k}{a_k} = \frac{2T'\theta_k}{r_k} \quad \ldots \ldots 3)$$

Из 3) излази што је a_k мање тим има јачу апсорпцију, за велико a_k апсорпција се простире на област веће ширине од са малим јачином.

Графичке представе узете су из огледа где је јака апсорпција (фуксин). Тачно и нетачно узети скоро све интензивне апсорпционе траке, па и кад још се јављају аномалне дисперзије за n^2, јер се светлост од групе мењаних вредности долази скупљање, који не иду нормалном правцем, [illegible] и делимично две у више дисперзионих области.

/.

— IV —

— Дисперзија у металима —

Јони (електрони) у металу могу се кретати [illegible] слободно [illegible] у [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] електрона [illegible]

За област [illegible] јона $\theta = \infty$ [illegible] θ_1 [illegible] [illegible] ξ [illegible] електронске силе. Кад се стави $\theta_1 = \infty$ у једначину [illegible] ξ [illegible] [illegible] јона:

$$m\frac{\partial^2 \xi}{dt^2} = eX - re^2\frac{\partial \xi}{dt} \quad \ldots \quad (1.$$

[illegible] јона [illegible] струја [illegible]:

$$j_x = e\mathfrak{N}\frac{\partial \xi}{dt} \quad \ldots \quad (2.$$

из 1 и 2 је: (I.

$$\frac{m}{e^2\mathfrak{N}}\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{r}{\mathfrak{N}}j_x = X \quad \ldots$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] јона, e је [illegible] [illegible], $\mathfrak{N}$ је број јона у јединици запремине

[illegible] [illegible] [illegible] јона (позитивних и негативних) [illegible] [illegible] r_1 и r_2 и [illegible] [illegible] са σ:

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{r_1} + \frac{\mathfrak{N}_2}{r_2} = \sigma$$

σ је електростатички [illegible] [illegible] коефицијент [illegible], и [illegible] да је X периодичка функција од t онда је:

$$X = -i\tau\frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{и слично за} \quad j_x = -i\tau\frac{\partial j_x}{\partial t}.$$

из I

$$j_x\left(\frac{i}{\tau}\frac{m}{e^2\mathfrak{N}} + \frac{r}{\mathfrak{N}}\right) = -i\tau\frac{\partial X}{dt} \quad \ldots \quad (*$$

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{\frac{4\pi\tau\mathfrak{N}}{-\frac{m}{\tau e^2} + ir}\right\} \quad \ldots \quad (II.$$

Ако ставимо:

$$\frac{m}{e^2} = m'$$

и уведемо у рачун и ефективну концентрацију од јона свих молекула нека је K' ознака:

$$K' = 1 + \sum_h \frac{\theta_h'}{1 + i\frac{a_h}{T} - \frac{b_h}{T^2}} + 4\pi i \sum_k \frac{\mathfrak{N}}{i\tau - \frac{m'}{T}} \quad \ldots \quad (\mathrm{III}.$$

Ово је генерализована релација Друдеова за K' вредност знамо.

Ако је дејство ефеката у светлосном спектру далеко од дејства јона h, где је a_h мало из III излази, пошто је $K' = n^2(1-i\kappa)^2$ за одвојене делове од имагинарних количина израз:

$$n^2(1-\kappa^2) = 1 + \sum \frac{\theta_h'}{1-\left(\frac{T_h}{T}\right)^2} - 4\pi \sum \frac{m'\mathfrak{N}}{\tau^2 + \left(\frac{m'}{T}\right)^2} \quad \ldots \quad (5$$

и

$$n^2\kappa = 2\pi T \sum \frac{\tau\mathfrak{N}}{\tau^2 + \left(\frac{m'}{T}\right)^2} \quad \ldots \quad (6.$$

Из 5 и 6 се види да за металне $\kappa > 1$ је ~~[illegible]~~ [illegible] и [illegible] и ово за дато m' и T [illegible] [illegible] [illegible]. Код метала [illegible] [illegible] је 2 [illegible], [illegible] је $n^2\kappa$ мање од σT (правилни пропорционални) док је за $m' = 0$ ($T = \infty$) имамо:

$$n^2\kappa = 2\pi T \sum \frac{\mathfrak{N}}{\tau} = \sigma T \quad \ldots \quad (7.$$

у опште

$$n^2\kappa < \sigma T$$

— Глава VI-та

Природно активна тела

76 Велики број тела, као и кристали кварца, показују [illegible] на [illegible] између [illegible] да кад на њих падне линеарно поларисана светлост [illegible] да се при излазу из њих [illegible] поларизациона раван [illegible] не мења. Кварц није од свих изузетак [illegible] кад њега се креће поларизациона раван. Слична тела, као што су раствори [illegible] и т. д. зову се природно активна тела. На њих [illegible] а да би [illegible] диференцијалне једначине [illegible] које би [illegible] промене у диференцијалним једначинама кад се z смени са −z а x и y задрже исте. Оваква се тела зову дисиметрично-изотропна.

При разматрању [illegible] у [illegible] средини [illegible] [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] у [illegible] [illegible] [illegible] и z [illegible] [illegible] X [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] X [illegible] X Y Z и координатама у [illegible] једначинама. [illegible], т. ј. [illegible] [illegible] једначинама:

$$e_z = \frac{\sigma}{4\pi}\left[X + f'\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right]$$

Из једначине $e\left[\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z}\right] \sim \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$

значи $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial z}$ [illegible]

Једначине [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Na [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = e[X] - \frac{4\pi e}{\theta}\xi - 2e^3\frac{\partial\xi}{\partial t}$$ [illegible] [illegible] [illegible]:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = e\left[X + f'\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] - \frac{4\pi e^2}{\theta}\xi - 2e^2\frac{\partial\xi}{\partial t} \quad \ldots \quad (2.$$

Ak [illegible] z [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$(j_x)_1 = e\mathfrak{N}\frac{\partial\xi}{\partial t}. \quad i \quad \xi = A_1 e^{i\frac{t}{\tau}} \quad \tau = T/2\pi.$$

[illegible]:

$$(j_x)_1 = \frac{\theta\mathfrak{N}}{4\pi\left(1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\left[X + f'\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right] \quad \ldots \quad (3$$

$$a = \frac{2\theta}{4\pi} \qquad b = \frac{2\theta}{4\pi e^2} = \tau_1^2$$

Ak [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] a/τ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible]:

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon X + f\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right]$$

$$\varepsilon = 1 + \sum\frac{\theta_h\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2} \qquad f = \sum\frac{\theta_h f_h'\mathfrak{N}_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}$$

Ak [illegible] $\mu = 1$ i $4\pi s_x = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$ i i. d. [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon X + f\left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right] = \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon Y + f\left[\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right]\right] = \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} \quad \ldots \quad (I.$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon Z + f\left[\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right]\right] = \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad \ldots \quad (II.$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

[illegible]

[illegible]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right]=0 \quad \dots$$

[illegible] $\alpha\ \beta\ \gamma$ [illegible] I i II [illegible]:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varepsilon X + f\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] = \Delta X$$

$$— \qquad = \Delta Y \quad \dots \quad (III).$$

$$— \qquad = \Delta Z$$

[illegible] $\alpha\ \beta\ \gamma$.

[illegible] [illegible] [illegible]. [illegible]

$$X = M e^{\frac{i}{T}(t-pz)} \quad Y = N e^{\frac{i}{T}(t-pz)} \quad Z = 0 \dots$$

$p=\frac{1}{V}$. V [illegible].

[illegible] III [illegible]:

$$\varepsilon M - \frac{i}{T} f p N = M p^2 c^2 \quad \dots \quad 1.$$

$$\varepsilon N + \frac{i}{T} f p M = N p^2 c^2$$

[illegible]:

$$\varepsilon - p^2c^2 = \frac{pf}{T} \qquad M = iN \quad \dots 1$$

$$\varepsilon - p^2c^2 = -\frac{pf}{T} \qquad M = -iN \quad 2$$

[illegible] p_1 i p_2 [illegible] X [illegible] Y [illegible].

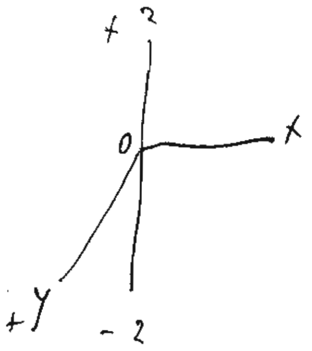
[illegible]

$M = iN$

$$X = M\cos\frac{1}{T}(t-pz), \quad Y = M\sin\frac{1}{T}(t-pz) \quad \dots \quad 3$$

a za $M=-iN$ $\dots$ 4.

$$X = M\cos\frac{1}{T}(t-pz) \qquad Y = -M\frac{1}{T}(t-pz)$$



Ове једначине представљају кружно поларисане зраке. Ако је $x^{ова}$ оса на десно управљена посматрано од [illegible] $z^{ова}$ оса горе за први зрак [illegible] у смеру казаљке на сату [illegible] лево поларисан, други је десно поларисан.

Ова два таласа имају разне брзине. За први је по из 2.:

$$p' = \frac{1}{v'} = -\frac{f}{2\pi c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{f^2}{4\pi^2 c^2} + \varepsilon} \quad \dots \quad 5$$

за други је из 2_2. p

$$p'' = \frac{1}{v''} = \frac{f}{2\pi c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{\frac{f^2}{4\pi^2 c^2} + \varepsilon} \quad \dots \quad 6.$$

Експеримент је [illegible] кружно лево поларисаног зрака [illegible] кроз [illegible]. Он је [illegible] (Fleischl - 1885)

Ако испитамо ефекат суперпозиције два зрака брзине v' и v'' онда су:

$$X = x' + x'' = 2a \cos\frac{1}{T}\left(t - \frac{p'+p''}{2} z\right) \cos\frac{1}{T}\frac{p''-p'}{2} z$$
$$Y = y' + y'' = 2a \cos\frac{1}{T}\left(t - \frac{p'+p''}{2} z\right) \sin\frac{1}{T}\frac{p''-p'}{2} z$$

Из 7 је јасно да на одређеном одстојању z добијамо опет ефекат праволинијског осцилирања, јер су фазе од X и Y исте. Која је осцилациона раван одређена односом:

$$\frac{Y}{X} = tg\frac{1}{T}\frac{p''-p'}{2} z \quad \dots \quad I.$$

и она се мења са $z^{ом}$, одакле је [illegible] обртање равни поларизације дато једначином:

$$\delta = \frac{z}{T}\frac{p''-p'}{2} = \frac{f}{2\pi c^2} z = \frac{2\pi^2 f}{\lambda_0^2} z$$

$$\lambda_0 = Tc$$

$pe = n$ (експонент преламања)

$$\delta = \frac{\pi}{\Gamma c}\,\frac{n''-n'}{2} = \pi\frac{t}{\lambda_0}(n''-n') \quad \cdots (11$$

Из овог и једначине налазимо одмах:

$$2\pi\frac{t}{\lambda_0} = n''-n'$$

Кристали θ_1 и τ_1 зависе од xyz и ако се кристал [illegible] диелектричних константа и f је исто за све правце онда су једначине кретања:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_1 X + f\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_2 Y + f(\quad)\right] = \text{—} \qquad (2$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_3 Z + f(\quad)\right] = \text{—}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{—} \quad \text{—}$$

Али овде су:

$$\varepsilon_1 = 1 + \sum \frac{\theta_h'\,\vartheta_h}{1-\left(\frac{\tau_h'}{\tau}\right)^2} \qquad \varepsilon_2 = 1 + \sum \frac{\theta_h''\,\vartheta_h}{1-\left(\frac{\tau_h''}{\tau}\right)^2} \qquad \varepsilon_3 = 1 + \sum \frac{\theta_h'''\,\vartheta_h}{1-\left(\frac{\theta_h'''}{\tau}\right)^2}$$

$$f = \sum \frac{\theta_h f_h'\,\vartheta_h}{1-\left(\frac{\tau_h}{\tau}\right)^2}$$

Ако се θ_h и τ_h означимо [illegible] у [illegible] једначине:

$$u = \varepsilon_1 X = M e^{i\psi} \quad v = \varepsilon_2 Y = N e^{i\psi} \quad w = \varepsilon_3 Z = \Pi e^{i\psi} \quad \cdots (3.$$

$$\psi = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{mx+ny+pz}{V}\right) \quad \text{из (I} \text{ [illegible]}$$

$$\frac{c^2}{\varepsilon_1} = a^2 \quad \frac{c^2}{\varepsilon_2} = b^2 \quad \frac{c^2}{\varepsilon_3} = c^2 \qquad \eta = \frac{2\pi f c}{\tau e^{3/2}} \quad \cdots (2.$$

ε је [illegible] из $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ (диелектричне константе).

Даље је [illegible] кристала

/.

даће једначином:

II). $$m^2(V^2-b^2)(V^2-c^2)+n^2(V^2-c^2)(V^2-a^2)+p^2(V^2-a^2)(V^2-b^2)=\eta^2$$

[illegible] φ_1 и φ_2 [illegible] из II

[illegible]:

$$2v_1^2 = a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sqrt{(a^2-c^2)^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2+4\eta^2}$$

$$2v_2^2 = a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sqrt{(a^2-c^2)^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2+4\eta^2}$$

v_1 и v_2 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$h+\frac{1}{h}=\frac{\sqrt{(a^2-c^2)^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2+4\eta^2}}{\eta}$$

[illegible] φ_1 или $\varphi_2=0$ и $h=1$ [illegible]

[illegible].

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] δ.

$$\delta=2\pi^2\frac{t}{\lambda^2}\,2=\frac{\pi}{\lambda_0}\,2(n''-n')$$

за $2=1^{mm}$ и [illegible] $\lambda_0=0.000589$ $\delta=21.7^\circ=0.12$[illegible]

$$2\pi\frac{t}{\lambda_0}=n''-n'=0.12\qquad\frac{\lambda_0}{2}=0.00071$$

n' и n'' [illegible]

[illegible]

379 Dyspersja [illegible]. [illegible] — 27 —
[illegible]

[illegible]:

$$\delta = \frac{t}{2\pi^2 c^2} z = 2\pi^2 \frac{t}{\lambda^2} z \quad \text{[illegible] } z = 1 \text{ [illegible] } f.$$

[illegible] $f = \sum \frac{\theta_a t_a' \vartheta_a}{1 - \left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)^2}$ a λ_0 [illegible] λ [illegible]

$$\delta = \frac{K}{\lambda^2} \sum \frac{\theta_a t_a' \vartheta_a}{1 - \left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)^2}$$

[illegible] $\left(\frac{\lambda_a}{\lambda}\right)^2$ [illegible]

$$\delta = \frac{K'}{\lambda^2} \quad K' \text{ jest konstantą.}$$

[illegible] Biot a
[illegible] I [illegible]:

$$\delta = \frac{K_1}{\lambda^2} + \frac{K_2}{\lambda^4} + \frac{K_3}{\lambda^6} + \dots \quad \text{(Boltzmann)}$$

[illegible]:

$$\delta = \frac{K_1}{\lambda^2} + \frac{K_2}{\lambda^4} + \dots + K' + K_1'\lambda^2 + K_2'\lambda^4 + \dots$$

albo: $\delta = \sum \frac{K_a}{\lambda^2 - \lambda_a^2}$

380 [illegible] δ [illegible]:

$$\varepsilon' = n^2(1 - i\kappa)^2 = 1 + \frac{\sum(\theta_a \vartheta_a)}{1 + i\frac{a_a}{T} - \frac{b_a}{T^2}} \quad f = \sum \frac{\theta_a t_a' \vartheta_a}{1 + i\frac{a_a}{T} - \frac{b_a}{T^2}}$$

[illegible] a_a [illegible] f [illegible]

p [illegible], $p = \frac{1 - i\kappa}{V}$

K' jest miarą anizotropii.

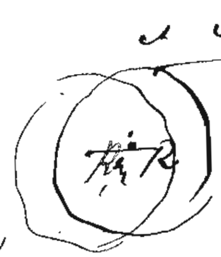
Obydwa wskaźniki dla P_1 i P_2 muszą być [illegible] w K, K_1 i K_2 (Cotton). Anizotropia jest niejednakowa w obu zjawiskach; nie mamy ogólnej [illegible] anizotropii.

Magnetyczno-elektryczna teorja

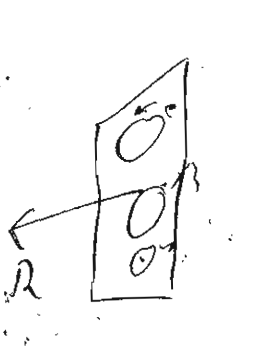
– [illegible] VII

§ 8. [illegible] o [illegible] [illegible]. W magnetycznym [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] funkcją x y z (koordynat) [illegible] [illegible] [illegible]. W [illegible] μ < 1, [illegible] [illegible], [illegible] od 1. [illegible] [illegible] [illegible] elektryczne [illegible] (Weber, Ampère) [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ([illegible] [illegible] [illegible] [illegible]) [illegible] [illegible] ([illegible]). [illegible] teorja [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$i = \frac{e}{T} \quad \cdots \quad 1$$



[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] T [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] T [illegible] [illegible] [illegible] R_1 [illegible] [illegible] R. [illegible] R i R_1 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] T [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].



[illegible] R [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] na [illegible] R. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] R [illegible] $\mathfrak{H}'$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $\mathfrak{H}'$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] M

$$M = 4\pi \mathfrak{H}' i q : c$$

Ako na jedinicu [illegible] M'' [illegible] magnetske mase [illegible] M_1

$$M_1 = 4\pi \frac{M' M'' i q}{c} = 4\pi i q \frac{M}{c}$$

M je [illegible]

Komponente [illegible] od M_1

$$\alpha_1 = \frac{4\pi}{c} i q M \cos(Mx)$$

$$\beta_1 = \frac{4\pi}{c} i q M \cos(My) \quad \ldots \quad c?$$

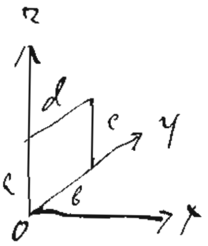
$$\gamma_1 = \frac{4\pi}{c} i q M \cos(Mz)$$

7. $4\pi j_x$ i $4\pi S_x$ [illegible] magnetna [illegible] mase. [illegible] magnetske mase i u S_x [illegible].

Da da [illegible] $4\pi S_x$ [illegible]

[illegible]:

a). [illegible] magnetne mase [illegible] $dy\,dz\ \partial\eta/\partial x$. – [illegible] kroz $dy\,dz$



b). [illegible] magnetne mase M_1. [illegible] $4\pi S_x$ [illegible] $dy\,dz \perp$ na Ox [illegible] magnetne [illegible] R. Ako [illegible] komponente $\xi\ \eta\ \zeta$ [illegible] 4 [illegible] a b c d [illegible].

Ako u [illegible] mase $\alpha_1 \parallel$ sa X [illegible] kroz a [illegible] $\left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_a dz$ kroz c $\left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_c dz$

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_c = \left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_a + dy \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

[illegible] $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ konstante.

[illegible] R [illegible] mase α_1 [illegible] a i c [illegible] $- dy\,dz \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$. [illegible] α_1 [illegible] b d, [illegible]

$- dy\,dz \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1 \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)$

[illegible] równoległobok abcd [illegible] a i c. [illegible] równoległobok [illegible] β_1 [illegible] z [illegible] (+y +x) Efekt [illegible] $\left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right)_c dz$ [illegible] c [illegible] $\left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right)_a dz$ [illegible] a [illegible]. [illegible]:

$$\left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right)_c = \left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right)_a + dy \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right) \dots \quad 1.$$

[illegible] β_1 [illegible] $+ dy\,dz \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right)$

[illegible]:

$$dy\,dz\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \frac{d\eta}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1 \frac{d\zeta}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_1 \frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_1 \frac{d\zeta}{dt}\right)\right\}$$

[illegible] $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ [illegible] ox:

$$4\pi S_x = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_1 \xi - \alpha_1 \zeta\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1 \eta - \beta_1 \xi\right)\right\} \dots \quad 2.$$

[illegible] $\xi \eta \zeta$ [illegible] R.

[illegible]:

$$j_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + e\mathfrak{N}\frac{d\xi}{dt} \dots \quad 3.$$

[illegible] R [illegible]:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\theta}\xi - 2\varepsilon^2\frac{d\xi}{dt} \dots \quad 4.$$

[illegible] R [illegible] X [illegible]:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = eX - 2e^2\frac{d\xi}{dt} \dots \quad 5.$$

Ако се сада мене са индуктивним променама где је

а X и ξ пропорционални $e^{i\frac{t}{T}}$ из (3 се добија:

$$e\frac{\partial \xi}{\partial t}\left\{1+i\frac{2\vartheta}{4\pi T}-\frac{m\vartheta}{4\pi e^2}\frac{1}{T^2}\right\}=\frac{\vartheta}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} \quad . \; . \quad (5.$$

а из (4.

$$e\frac{\partial \eta}{\partial t}\left(2+\frac{i}{T}\frac{m}{e^2}\right)=X=-iT\frac{\partial X}{\partial t} \quad . \; . \quad (6.$$

m је маса јона. Ако се стави:

$$\frac{2\vartheta}{4\pi}=a,\quad \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}=b=l, \quad \frac{m}{e^2}=m'$$

из 5 и 6 имаћемо:

$$j_x=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1+\frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1+i\frac{a}{T}-\frac{b}{T^2}}\right\} \quad . \quad 7.$$

ако јон е није слободан

$$j_x=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{1+\frac{4\pi T\mathfrak{N}}{i2-\frac{m'}{T}}\right\} \quad . \; . \quad (8.$$

ако је јон слободан

Обично се пише:

$$j_x=\frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t},\quad j_y=\frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t},\quad j_z=\frac{\varepsilon'}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t}.$$

ε' је [illegible] константа зависна од T

Из [illegible] једначина [illegible] ξ. имамо:

$$\gamma_1\xi=\frac{\mathfrak{N}\vartheta}{1+i\frac{a}{T}-\frac{b}{T^2}}\frac{q}{CT}\cos(Kz)X$$ за [illegible] јон

и

$$\gamma_1\xi=\frac{4\pi T\mathfrak{N}}{i2-\frac{m'}{T}}\frac{q}{CT}\cos(Kz)X$$ за слободне

узимамо:

$$\gamma_1\xi=v\cos(Kz)X \quad . \; . \quad (I.$$

Сличне су и за η [illegible]

./.

Ако обележимо са:

$$v\cos(K,x)=v_x \quad v\cos(K,y)=v_y \quad v\cos(K,z)=v_z$$

добићемо једначине у вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\left(v_z X - v_x Z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(v_x Y - v_y X\right)\right\} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\beta + \frac{\partial}{\partial x}\left(v_x Y - v_y X\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(v_y Z - v_z Y\right)\right\} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad \ldots \; I$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma + \frac{\partial}{\partial y}\left(v_y Z - v_z Y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_z X - v_x Z\right)\right\} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \text{——} \qquad \ldots \; (II.$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \text{——}$$

Ако имамо више врста молекула између се само у I и II константе ε' и V

$$\varepsilon' = 1 + \sum \frac{\vartheta_h \theta_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} + 4\pi T \sum \frac{\vartheta_k}{i r_k - \frac{n_k}{\tau}} \qquad (III.$$

$$V = \frac{1}{c}\sum \frac{\vartheta_h \theta_h}{1 + i\frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}\frac{q_h}{T_h} + \frac{4\pi T}{c}\sum \frac{\vartheta_k}{i r_k - \frac{n_k}{\tau}}\frac{q_k}{T_k}$$

h се односи на (јоне) изолаторе а k на проводнике. T_h је позитивно или негативно према томе да ли се налази у позитивног или негативног елемента. За негативне јоне је T_h негативно, ... За позитивне јоне је T_h увек позитивно за позитивне јоне и негативно за негативне, ... јоне. q_h зависи од јачине ...

/.

382 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. $X\ Y\ \alpha\ \beta$ są funkcyjami od z i t $Z = \gamma = 0$ [illegible]

$$v_x = v_y = 0 \quad v_z = v.$$

[illegible] [illegible]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha + v\frac{\partial X}{\partial z}\right) = \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad (1$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta + v\frac{\partial Y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial z}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = +\frac{\partial \alpha}{\partial z}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] X i Y [illegible] α i β [illegible] [illegible]:

$$\frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{v}{c}\frac{\partial^3 Y}{\partial t\,\partial z^2} \qquad (2.$$

$$\frac{\varepsilon'}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{v}{c}\frac{\partial^3 X}{\partial t\,\partial z^2}$$

[illegible]:

$$X = M\, e^{\frac{i}{T}(t - pz)} \qquad Y = N\, e^{\frac{i}{T}(t - pz)}$$

[illegible] [illegible] [illegible] $M\ N$ [illegible]:

$$\varepsilon' M = p^2c^2\left(M + i\frac{v}{cT}N\right) \qquad (3.$$

$$\varepsilon' N = p^2c^2\left(N - i\frac{v}{cT}M\right)$$

[illegible] [illegible] 3 [illegible]:

$$p^2c^2\left(1 + \frac{v}{cT}\right) = \varepsilon' \quad M = iN \qquad (4a$$

$$p^2c^2\left(1 - \frac{v}{cT}\right) = \varepsilon' \quad M = -iN \qquad (4b \quad (4.$$

/.

Имамо две зраке: десни и леви циркуларно-поларизовани зрак са неједнаким брзинама простирања. Брзина левог је брзина:

$$p'c = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1+\frac{v}{c\tau}}}$$

другог десног је:

$$p''c = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{1-\frac{v}{c\tau}}}.$$

Суперпонирањем ова два зрака добија се линеарно поларизован зрак чија је раван поларизације окренута на z дужине за угао δ

$$\delta = \frac{z}{T}\,\frac{p''-p'}{2} \dots \quad (I).$$

Како је $v/c\tau$ мало то је:

$$\delta = \frac{v}{2c^2T^2}\sqrt{\varepsilon'}\cdot z \dots \quad (I').$$

За v позитивно је окретање у десно ..., а ово је сад само резултат јона у парамагнетичним стањима.

Код линеарно поларизоване светлости која на магнетском пољу ... [заслуге] ..., поларизације у правцу ... светлости ... Код природно активних тела ... обе ...

§ 83 Дисперзија магнетске ротационе поларизације. Ако је таласна дужина $\lambda_0 = Tc$

$$\delta = \frac{2\pi^2 v}{\lambda_0^2}\sqrt{\varepsilon'}\,z = \frac{2\pi^2 v n}{\lambda_0^2}\,z \dots \quad (1).$$

Ако је n константно онда је δ ... v и обрнуто пропорционално са λ_0^2 као код природно активних тела

Ако се n^2 узме израз:

$$n^2 = 1 + \frac{M_1}{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{M_2}{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} + \dots$$

λ је таласна дужина λ_0 за светлост у ...

$$v = \frac{M_1'}{1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2} + \frac{M_2'}{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^2} \dots$$

$A_1' A_2'$ су константе независне од $A_1\ A_2$

За видљиви спектар довољно је узети λ_1 за једначину [illegible] облика у

$$n^2 = 1 + A_2 + A_3 + \frac{A_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} = 1 + A_2 + A_3 + \frac{A_1 \lambda_1^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$

или

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$

$$\nu = \frac{A_1' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + A_2' + A_3' \ldots = a' + \frac{b' \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2}$$

Ако a и b стална $2\pi^2 z = 1$

$$\delta = n\left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2}\right)$$

За [illegible] је:

$\lambda_1 = 0.212\,\mu$ $\quad \lambda_1^2 = 0.0450$

$a = 1.516$ $\quad b = 0.0433$

$a' = -0.0736$ $\quad b' = 0.1530$

Срачунате мере:

	n израч.	n посмат.	δ израч.	δ посмат.
A				
B	1.6115	1.6118	—	
C				
D	1.6210	1.6214	0.592	0.592
E				
F				
G	[illegible]	[illegible]	δ	
H				

Ако је зрак упадан на правац магнетизације и ако је зрак у равни [illegible] онда се разлика од X и Y. $V_2 = V_y = 0$ $V_z = V$ $X = 0$. Обје магнетизације немају утицаја на оптичке особине [illegible] [illegible] [illegible] и да оне које [illegible] у [illegible] а [illegible] [illegible] [illegible], а то се [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] да које [illegible]

/.

§ 87 <u>Холов ефекат</u>. Узмимо да имамо само металне,
изолаторе јоне. Овакви јони кретањем електричну струју
~~кој~~ магнетно дејство извесном силом управном на правац
~~...~~ јона и правца магнетизације. Ово је Холов ефекат
који се опажа код свих метала (Бизмут, антимон и т. д.)

Ако је дужина струје dl, јачина i_m (електромагнетска јединица)
онда струја ове дужине трпи силу магнетског поља јачине
H пондеромоторну силу K_1 на елемент струје:

$$K_1 = i_m\, dl\, H = \frac{i}{c}\, dl\, H \quad \ldots \quad 1.$$

За систем координата ако је i у y^{oj}, H у $z^{кој}$ онда је
K у правцу $x^{ке}$ осе

Ако је e наелектрисање јона и он за dt пређе пут dy на дужини
dy јачина је:

$$i = e\,\mathfrak{N}'\frac{dy}{dt}.$$

$\mathfrak{N}'$ је број јона на јединици дужине.

Како је $dl = dy$

$$K_1 = \frac{e}{c}\,\mathfrak{N}'dy\,\frac{\partial y}{\partial t}\,H$$

Ова сила дејствује на све јоне у дужини dy а број је јона $\mathfrak{N}'dy$.
На један јон дејствује сила у правцу $x^{ке}$ осе:

$$K_x = \frac{e}{c}\frac{\partial y}{\partial t}H_z \quad \ldots \quad 2.$$

Ако правац магнетизације у правцу $y^{ке}$ осе пондеромоторна ћемо имати силу:

$$K_x = -\frac{e}{c}\frac{\partial z}{\partial t}H_y \quad \ldots \quad 3.$$

Изведимо једначине за кретање јона, које се наелектрисаних
бити, 2 и 3 додамо и једначине су кретања јона:

1.

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\theta}\xi - 2e^2\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}H_z - \frac{\partial\zeta}{\partial t}H_y\right)$$

$$m\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = eY - \frac{4\pi e^2}{\theta}\eta - 2e^2\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}H_x - \frac{\partial\xi}{\partial t}H_z\right)$$

$$m\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = eZ - \frac{4\pi e^2}{\theta}\zeta - 2e^2\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}H_y - \frac{\partial\eta}{\partial t}H_x\right)$$

3. Основне једначине ... за јединицу ... јона:

$$4\pi s_x = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \quad \text{и} \quad 4\pi j_x = \frac{\partial}{\partial t}\left(X + 4\pi\sum e\mathfrak{N}\xi\right) \quad \ldots 2.$$

Из (1) и (2) и Максвел-Херцових једначина имамо све што је потребно за решење проблема.

За згодније уводимо скраћенице:

$$\frac{r\theta}{4\pi} = a \qquad \frac{m\theta}{4\pi e^2} = b$$

имамо:

$$e\xi\left(1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}\right) - \frac{i\theta}{4\pi c\tau}\left(\eta H_z - \zeta H_y\right) = \frac{\theta}{4\pi}X \quad \ldots 3.$$

Ако је спољно магнетско поље $H_x = H_y = 0$, $H_z = H$

и $\theta = 1 + i\frac{a}{\tau} - \frac{b}{\tau^2}$, $\frac{\theta}{4\pi c\tau e}H = \varphi$

из 3 је:

$$e\xi\theta - ie\eta\varphi = \frac{\theta}{4\pi}X$$
$$e\eta\theta + ie\xi\varphi = \frac{\theta}{4\pi}Y \quad \ldots 4.$$
$$e\zeta\theta = \frac{\theta}{4\pi}Z$$

Када ово решимо по ξ η ζ и сменимо у (2) имамо:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t}\left(1 + \sum\frac{\theta\mathfrak{N}\theta}{\theta^2-\varphi^2}\right) - i\frac{\partial Y}{\partial t}\sum\frac{\theta\mathfrak{N}\varphi}{\theta^2-\varphi^2}$$
$$4\pi j_y = \frac{\partial Y}{\partial t}\left(1 + \sum\frac{\theta\mathfrak{N}\theta}{\theta^2-\varphi^2}\right) + i\frac{\partial X}{\partial t}\sum\frac{\theta\mathfrak{N}\varphi}{\theta^2-\varphi^2}$$
$$4\pi j_z = \frac{\partial Z}{\partial t}\left(1 + \sum\frac{\theta\mathfrak{N}}{\theta}\right)$$

или

/.

$$4\pi j_x = \varrho'' \frac{\partial X}{\partial t} + i\nu \frac{\partial Y}{\partial t}$$

$$4\pi j_y = \varrho'' \frac{\partial Y}{\partial t} - i\nu \frac{\partial X}{\partial t}$$

$$4\pi j_z = \varrho' \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

Zbog Hallovog zraka [illegible] [illegible]. [illegible] onda dobivamo od 2^{ha} [illegible] jednadžbe:

$$\frac{1}{c}\left[\varrho'' \frac{\partial X}{\partial t} + i\nu \frac{\partial Y}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \beta}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c}\left[\varrho'' \frac{\partial Y}{\partial t} - i\nu \frac{\partial X}{\partial t}\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial z} \qquad \gamma = Z = 0$$

[illegible] α i β dobiva se:

$$\frac{\varrho''}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{i\nu}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \dots \quad 1.$$

$$\frac{\varrho''}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + \frac{i\nu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

Integrali su:

$$X = M e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)} \quad Y = N e^{\frac{i}{\tau}(t - pz)} \quad \dots \quad 2.$$

i jednadžbe se reduciraju:

$$\varrho'' M = p^2c^2 M - i\nu N \qquad \varrho'' N = p^2c^2 N + i\nu M$$

Dobiva se rješenje:

$$p^2c^2 = n'^2[1 - i\kappa')^2 = \varrho'' + \nu \quad - \quad M = iN \quad \dots \quad 3$$

$$p^2c^2 = n''^2[1 - i\kappa'')^2 = \varrho'' - \nu \qquad M = -iN$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] cirkularno [illegible] polarizovanim zraku.

Kad se uzmu [illegible] ϱ'' i ν [illegible]:

$$n'^2(1 - i\kappa')^2 = 1 + \sum \frac{\theta M}{\theta - \varphi} \quad \dots \quad 4.$$

$$n''^2(1 - i\kappa'')^2 = 1 + \sum \frac{\theta M}{\theta + \varphi}$$

[illegible] Γ [illegible] θ [illegible]

[illegible] $K' = K'' = 0$ [illegible] $d\beta$ [illegible] θ [illegible]

$$n'^2 = 1 + \sum \frac{\sigma\alpha}{\theta}\left(1 + \frac{d\beta}{\theta}\right) \quad \ldots \quad 5$$

$$n''^2 = 1 + \sum \frac{\sigma\alpha}{\theta}\left(1 - \frac{d\beta}{\theta}\right)$$

[illegible] θ

$$\delta = 2\frac{h}{\lambda_0}(n''-n') = 2\frac{h}{\lambda_0}\frac{n''^2-n'^2}{n''+n'}$$

czyli $\qquad n = \frac{n'+n''}{2}$

$$\delta = 2\frac{h}{\lambda_0}\frac{n''^2-n'^2}{2n}$$

czyli

$$\delta = -\frac{h}{n}\frac{2}{\lambda_0}\sum\frac{\sigma\alpha\, d\beta}{\theta^2}$$

[illegible] n

$$n^2 = 1 + \sum\frac{\sigma\alpha}{\theta} \quad \ldots \quad (I)$$

§86. Дисперзија магнетног обртања поларизационе равни

Када пређемо од ... у изр. за δ имамо:

$$\delta = -\frac{\pi}{2n}\frac{z}{\lambda_0^2} H \sum \frac{\theta H}{\left(1-\frac{\theta}{r^2}\right)^2}\frac{v}{e}$$

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\theta H}{1-\frac{\theta}{r^2}}$$

Добијамо у формулама:

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2-\lambda_1^2}$$

$$\delta = \frac{1}{n}\left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'\lambda^2}{(\lambda^2-\lambda_1^2)^2}\right)$$

За угљендисулфид:

$\lambda_1^2 = 0.045$ $a' = +0.1167$ $b' = +0.2379$

спектралне линије	δ опажено	δ израчунато
C	0.592	0.592
D	0.760	0.760
E	—	—
G	—	—

§87. Светлосни зрак управан на магнетизацију. Нека је правац магнетизације z-ова, x-ова је правац зрака. Све зависи од x и t и једначине су:

$$\varepsilon''\frac{\partial X}{\partial t} + i\nu\frac{\partial Y}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{c}\left(\varepsilon''\frac{\partial Y}{\partial t} - i\nu\frac{\partial X}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\alpha = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

Интеграљењем по t имамо:

$$\varepsilon'' X + i\nu Y = 0$$

$$\frac{\varepsilon''}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + i\frac{\nu}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

./.

Издиференцирамо X имамо:

$$\left(\varepsilon'' - \frac{\nu^2}{\varepsilon''}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

Интеграли су:

$$X = M e^{i/\tau(t-p'x)},\quad Y = N e^{i/\tau(t-p'x)},\quad Z = \Pi e^{i/\tau(t-px)}$$

и

$$\varepsilon'' - \frac{\nu^2}{\varepsilon''} = p'^2c^2 \qquad \varepsilon' = p^2c^2 \qquad M = -\frac{i\nu}{\varepsilon''}N$$

Одавде су одређени Z и Y једначине (као [illegible]). За Z је аналог. једначина

$$p^2c^2 = n^2(1-i\kappa)^2 = \varepsilon' = 1 + \sum\frac{\vartheta\,\pi'}{\theta} \quad \dots 1.$$

За место управно на магнетизацију је n':

$$n'^2(1-i\kappa')^2 = 1 + \sum\frac{\vartheta\,\pi\,\theta}{\theta^2-\phi^2} - \frac{\left(\sum\frac{\vartheta\,\pi\,\phi}{\theta^2-\phi^2}\right)^2}{1+\sum\frac{\vartheta\,\pi\,\theta}{\theta^2-\phi^2}} \quad \dots 2$$

Тачнике су мање између n и n'

7. __Zeemann-ов Ефекат.__ Примећено је да се линије [illegible] на ... у магнетном пољу [illegible] ~~[illegible]~~ кад се налазе у магнетном

Кад је одређено светлост дужину одређено јесте $\frac{a}{T}$ и не занемарује. Нека је T' дужина T_1 јесте 1. Ставимо

$T = \nu e_1(1+g) = T_1(1+g)$. Узмимо Σ ~~[illegible]~~ [illegible] и не одговара јер T. Можемо ставити:

$$\frac{1}{\theta-\phi} = \frac{1}{1-\frac{b}{T_1^2}}\left(1+\frac{\phi}{1-\frac{b}{T_1^2}}\right)$$

Ако уведемо ознаке:

/.

$$1 + \sum \frac{\theta \mathfrak{M}}{1-\frac{\ell}{\tau^2}} = A \qquad \sum \frac{\varphi\theta\mathfrak{M}}{\left(1-\frac{\ell}{\tau_1^2}\right)^2} = A'$$

$$\frac{a_1}{\tau_1} = h \qquad \frac{\theta_1}{4\pi c \tau_1 e_1}\mathfrak{M} = \varphi \qquad \theta_1 \mathfrak{M}_1 = B$$

[illegible]:

$$n'^2(1-ik')^2 = A + A' + \frac{B}{2g+ih-\varphi} \quad \text{[illegible]}$$

$$n''^2(1-ik'')^2 = A - A' + \frac{B}{2g+ih+\varphi} \quad \text{[illegible]}$$

[illegible]

Kiedy $2g = \varphi$ t. j. $T^2 = \tau_l^2 = \tau_1^2(1+\varphi)$

[illegible]:

$$2g = -\varphi \qquad T^2 = \tau_r^2 = \tau_1^2(1-\varphi)$$

[illegible]

[illegible] θ^2 [illegible]

$$T = \tau_1(1+g) = \sqrt{\theta_1}(1+g)$$

$$n'^2(1-ik')^2 = A + \frac{B}{(2g+ih)^2-\varphi^2}\left\{2g+ih - \frac{B\varphi^2}{[(2g+ih)^2-\varphi^2]A + [2g+ih]B}\right\}$$

czyli

$$n'^2(1-ik')^2 = A + \frac{B[(2g+ih)A+B]}{A[(2g+ih)^2 + B(2g+ih)]}$$

[illegible] g [illegible]

$$n'^2(1-ik')^2 = A + \frac{B(2g+ih)}{(2g+ih)^2-\varphi^2}$$

/.

~~$n'^2 (1-ik')^2 = A + \ldots$~~

[illegible] дев, апсорпција је велика јер је h мало

Кад је $4q^2 - \varphi^2 = 0$ или $2q = \pm\varphi$

За могућност [illegible] магнетизацијом [illegible] апсорпције [illegible] од [illegible] за [illegible] апсорпција [illegible]

Ако је $2q$ велико [illegible] φ [illegible] је мало

и

$$n'^2 = A + \frac{B}{2q}\,\frac{A\,4q^2 + B\,2q}{A(4q^2-\varphi^2) + B\,2q} \qquad n^2 = A + \frac{B}{2q}$$

$$n'^2 - n^2 = \frac{B}{2q}\,\frac{A\varphi^2}{4q^2n^2 - A\varphi^2}$$

или

$$n' - n = \frac{AB\varphi^2}{16\,n^3 q^3}$$

Код Зееманова ефекта [illegible] за [illegible] [illegible] магнетизацију

Мерењем [illegible], [illegible] D_1 и D_2 Zeeman је за магнетско поље $H = 22400$ [illegible] $2q$ одговара [illegible] $2q = \lambda : 17000$

[illegible]

$$2q = \varphi = \frac{\theta_1 H}{2\pi c T_1 e_1} \qquad T_1 = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\theta_1 = \frac{4\pi T_1^2 e_1^2}{m_1}$$

и

$$\frac{e_1}{cm_1} = 1.6 \cdot 10^7 \quad \ldots \quad [illegible]$$

или

$$\frac{e_1}{cm_1} = 2.4 \cdot 10^7$$ ([illegible]) Kaufmann

38) Magneto-optyka: ośrodki obrotowe, [illegible]. Obie te ośrodki [illegible] ze magnetycznym [illegible] a ze [illegible] magnetyczna [illegible]. Obie te [illegible] od [illegible] efektu, który [illegible] zaniedbujemy.

c) [illegible] światła. Jeżeli [illegible] światło [illegible] [illegible] którą [illegible] [illegible] a [illegible] n i K [illegible] a [illegible] n' i K' [illegible] światła a n'' K'' [illegible] ośrodka:

$$p'c = n'(1-i\kappa') = \sqrt{\varepsilon'}\left(1-\frac{\nu}{2c\tau}\right)$$

$$p''c = n''(1-i\kappa'') = \sqrt{\varepsilon''}\left(1+\frac{\nu}{2c\tau}\right)$$

$$n(1-i\kappa) = \sqrt{\varepsilon}$$

Oznaczmy $\nu = a + bi$ wtedy

$$n''-n' = \frac{n}{c\tau}(a+b\kappa) \qquad n''\kappa''-n'\kappa' = \frac{n}{c\tau}(a\kappa-b)$$

[illegible] światła [illegible] [illegible] światło [illegible]. [illegible] [illegible]:

$$\delta = \frac{z}{2c\tau}(n''-n') = \frac{2\pi^2}{\lambda_0^2}\, z n (a+b\kappa)$$

$$\lambda_0 = cT = 2\pi c\tau$$

b) Odbicie światła (Kerr-owski fenomen). [illegible] [illegible]. [illegible] X, Y [illegible] [illegible]:

$$\alpha,\ \beta \qquad X - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nu_y Z - \nu_z Y) \qquad Y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nu_z X - \nu_x Z)$$

[illegible] światła [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible]

/.

7. Dejstvo magnetskog polja na električne [illegible]. Magnetsko [illegible] ne [illegible] samo [illegible] [illegible] može biti i [illegible].
Ako se zadržimo na [illegible] [illegible] efekta, zanemarujući [illegible] [illegible] jednačine u obliku:

$$\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \ldots \text{(I.}$$

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi \sum e \mathfrak{N} \frac{d\xi}{dt} \quad \ldots 1$$

$$4\pi e \xi = \frac{\vartheta}{\theta}\left[X + \frac{1}{c}\left(\gamma \frac{d\eta}{dt} - \beta \frac{d\zeta}{dt}\right)\right] \quad \ldots 2.$$

$$\theta = 1 + i\frac{a}{T} - \frac{b}{T^2} \ldots$$

[illegible] [illegible] 2 od [illegible]

$$4\pi e \xi = \frac{\vartheta}{\theta} X \quad \ldots 2'.$$

[illegible] da se [illegible] [illegible] [illegible] (efekat), [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible] [illegible] [illegible] električnih

[illegible], a prema 3 i I nalazimo:

$$X = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{cT}\frac{\vartheta}{4\pi e\theta} A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) \quad \ldots 3'$$

[illegible] [illegible] T_0 je dato sa: $T_0^2 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 = b = \frac{m\vartheta}{4\pi e^2}$

$$\frac{\vartheta}{4\pi e} = \frac{T_0^2}{4\pi^2}\frac{e}{m} \quad \ldots 4.$$

Iz 3' i 4 imamo:

$$\frac{1}{c}\frac{d\xi}{dt} = \frac{T_0^2}{2\pi T\theta}\frac{e}{mc} A \qquad \theta = 1 - \frac{T_0^2}{T^2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{d\xi}{dt} = \frac{T}{2\pi}\frac{e}{mc}\frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} A \quad \ldots \text{(II.}$$

Za [illegible] je:

$$\frac{e}{mc} = 1.6\ 10^{7}.$$

Za [illegible] [illegible] je $T' = 2.\ 10^{-15}$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = A\,\frac{T_0'}{T'^2 - T_0'^2}\, 5.10^{-9}$$

[illegible] 1" 12 4 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 1.22 10[6] [illegible] [illegible] ([illegible]) [illegible] cm^2. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] dE [illegible]

$$dE = \frac{c}{4\pi} A^2$$

$$A = \sqrt{\frac{4\pi}{c}}\; 0.66\ 10^{3} = 1.6\ 10^{-2} = 0.016.$$

[illegible] max-[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] je,

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 8.10^{-11}\,\frac{T_0'^2}{T'^2 - T_0'^2} \qquad \text{[illegible] je } \frac{T'}{T_0} = \frac{60}{59}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

/.

— Traktat II —

[illegible]

[illegible] (H. Lorentz). [illegible]

[illegible]

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \qquad \frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \ldots \quad 1.$$

[illegible]

[illegible]:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e N \frac{dy}{dt} \qquad 2.$$

[illegible]

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e N \frac{dy}{dt} + 4\pi e N v_x \quad \ldots \quad 3$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ [illegible]

$\frac{d}{dt}$ [illegible]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \ldots \quad 4.$$

[illegible]:

$$4\pi J_x = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$$
$$4\pi J_y = \frac{\partial\beta}{\partial t} \qquad \mu = 1$$
$$4\pi J_z = \frac{\partial\gamma}{\partial t}.$$

[illegible]

$v_x = v_y = v_z = 0$

$$eX = m\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2e^2\frac{d\xi}{dt} + \frac{4\pi e^2}{\theta}\xi \quad \ldots \quad (I.$$

[illegible] ev_x, ev_y, ev_z [illegible] $\alpha\,\beta\,\gamma$ [illegible]:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2e^2\frac{d\xi}{dt} + \frac{4\pi e^2}{\theta}\xi = eX + \frac{e}{c}(v_y\gamma - v_z\beta) \quad \ldots \quad (II.$$

[illegible] X [illegible] ξ [illegible]

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{i}{\tau'}\xi \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{1}{\tau'^2}\xi \qquad \tau' = \frac{T'}{2\pi} \quad \ldots \quad (5.$$

T' [illegible], T [illegible] $T' > T$ [illegible]

[illegible]:

$$e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}{\omega}\right)}$$

[illegible] $\tau = \frac{T}{2\pi}$

[illegible] 4 [illegible] 5 [illegible]:

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\beta_1 v_x + \beta_2 v_y + \beta_3 v_z}{\omega}\right)$$

[illegible] v [illegible] ω [illegible]:

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{T'}{T} = 1 + \frac{\beta_1 v_x + \beta_2 v_y + \beta_3 v_z}{\omega} = 1 + \frac{v_n}{\omega}.$$

./.

V_x je [illegible]

[illegible] II [illegible], [illegible] a b [illegible]

$$a = \frac{2\theta}{4\pi} \qquad b = \frac{m\theta}{4\pi e^2}$$

$$4\pi e \xi \left(1 + i\frac{a}{T'} - \frac{b}{T'^2}\right) = \theta\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right)$$

Ako je [illegible] Konstanta [illegible] $\varepsilon = 1$, [illegible] je $\mathfrak{N}e$ [illegible] [illegible]:

$$4\pi\rho\mathfrak{N} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

[illegible]:

$$4\pi j_x = \frac{\partial X}{\partial t} + v_x\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{\mathfrak{N}\theta}{1 + i\frac{a}{T'} - \frac{b}{T'^2}} \; \frac{d\left(X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right)}{dt}$$

Ako [illegible] $i\,a/T'$ [illegible] [illegible]

$$\sum \frac{\mathfrak{N}\theta}{1 + i\frac{a}{T'} - \frac{b}{T'^2}} = n^2 - 1 \quad \ldots \quad (\mathrm{III}.$$

n^2 je [illegible] za [illegible] $T' = 2\pi T'$

Kad a y b $\frac{d}{dt}$ [illegible] $\mathfrak{F}$. [illegible] $\mathfrak{V}$. [illegible] [illegible]. [illegible] od V [illegible] b [illegible] v_x [illegible] $V = 0$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

[illegible] b je [illegible]:

$$4\pi j_x = n^2\frac{\partial X}{\partial t} + (n^2 - 1)\left\{v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right\} + \frac{1}{c}\left(v_y\frac{\partial \gamma}{\partial t} - v_z\frac{\partial \beta}{\partial t}\right.$$

a kako je: $\frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$

=

[illegible] je:

$$4\pi j_x = n^2\frac{\partial X}{\partial t} + (n^2-1)\left\{2\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x}+v_y\frac{\partial X}{\partial y}+v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_xX+v_yY+v_zZ\right)\right\}$$

Кад се ово уреди у електр. једначини имамо:

$$\frac{n^2}{c} + \frac{n^2-1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}\left\{2\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x}+v_y\frac{\partial X}{\partial y}+v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_xX+v_yY+v_zZ\right)\right\} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \qquad \text{III}.$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \dots \qquad \text{IV}'$$

Ако и IV диференцирамо по x y z и ставимо $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = f$ сабирањем имамо:

$$\frac{n^2}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{n^2-1}{c}\left\{2\left(v_x\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}v_y+v_z\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(v_x\Delta X+v_y\Delta Y+v_z\Delta Z\right)\right\} = 0 \quad \dots 7.$$

У изотропним непокретним с v_x можемо ставити:

$$f = 0 \qquad \Delta X = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \quad \Delta Y = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad \Delta Z = \dots$$

Из 7 је онда:

$$f = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{n^2-1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_xX+v_yY+v_zZ\right) \quad \dots (8.$$

Ако гледамо да се електрична сила у [illegible] ... ... сила у ... ... сва ... у ... ... тако:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) = 0$$

Ако и друге једначине из IV диференцирамо по t и заменимо $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ имамо за X:

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{n^2-1}{c^2}\left\{2\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x}+v_y\frac{\partial X}{\partial y}+v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\left(v_xX+v_yY+v_zZ\right)\right\} = \Delta X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\dots\right.$$

Уз 8 ј...

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\,\frac{n^2-1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) = \Delta X$$

3.93 Брзина светлости кроз тела у кретању. Интеграл је [illegible] једначине:

$$X = A\,e^{\frac{i}{T}\left(t - \frac{k_1 x + k_2 y + k_3 z}{\omega}\right)}$$

уз услов:

$$\frac{n^2}{c^2} - \frac{2(n^2-1)}{c^2}\,\frac{k_1 v_x + k_2 v_y + k_3 v_z}{\omega} = \frac{1}{\omega^2} \quad \ldots \quad (1).$$

или

$$\frac{n^2}{c^2}\left(1 - \frac{2(n^2-1)}{n^2}\frac{v_n}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}$$

Одатле је:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2}\left(1 + \frac{2(n^2-1)}{n^2}\frac{v_n}{\omega}\right) \quad \text{или} \quad \omega = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{n^2-1}{n^2}\frac{v_n}{\omega}\right)$$

Ако се ω у $\frac{v_n}{\omega}$ замени са $\frac{c}{n}$ добијамо је:

$$\omega = \frac{c}{n} + \frac{n^2-1}{n^2}v_n \quad \ldots \quad (I).$$

Из I [illegible] да кретање тела утиче на брзину светлости [illegible] брзина светлости [illegible] (Fresnel Fizeau). [illegible] I, [illegible] $\frac{c}{n}$. [illegible] T':

$$T' = T\left(1 + \frac{v_n}{\omega}\right)$$

Ако је v [illegible] онда је:

$$n = v + \frac{\partial v}{\partial T}\,T\frac{v_n}{\omega} = v + \frac{\partial v}{\partial \lambda}\,\lambda\frac{v_n}{\omega}$$

$\lambda = cT$ у вакууму.

./.

Одавде је:

$$\omega = \frac{c}{\nu}\left(1 - \frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\frac{\lambda}{\nu}\frac{v_n}{\omega}\right) + \frac{n^2-1}{n^2} v_n$$

Ако у члану са v_n узмемо $n=\nu$ $\omega = c/\nu$ имаћемо:

$$\omega = \frac{c}{\nu} + v_n\left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2} - \frac{\lambda}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}\right) \quad \dots \quad (II.$$

$\frac{c}{\nu}$ је брзина светлости за тело које мирује према T. Код тела у покрету први члан у II даје повлачење брзине услед кретања тела а ово је брзина коју је Fresnel нашао док је $\frac{\partial \nu}{\partial \lambda}$ код нормалне дисперзије негативно. Michelson, Morley нашли су:

$$\omega = \frac{c}{\nu} + v_n(0.434 \pm 0.02)$$

§ 199 Трансформација уопште. Ако су $x'y'z'$ координате одређене у покретном систему везаном са телом у кретању, онда су координате xyz одређене у непокретном систему:

$$x = x' + v_x t, \quad y = y' + v_y t \quad z = z' + v_z t$$

$v_x v_y v_z$ независни од xyz изводи су по xyz исти као изводи по $x'y'z'$ на место $\frac{\partial X}{\partial t}$ бележимо сада $\frac{dX}{dt}$ и сл.:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dX}{dt} - v_x\frac{\partial X}{\partial x} - v_y\frac{\partial X}{\partial y} - v_z\frac{\partial X}{\partial z}$$

Када ово уведемо у једначину за струју имамо:

$$4\pi j_x = \frac{dX}{dt} - v_x\frac{\partial X}{\partial x} - v_y\frac{\partial X}{\partial y} - v_z\frac{\partial X}{\partial z} + (n^2-1)\frac{d}{dt}\left[X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right] + v_x\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

Једначине у целости онда:

$$\frac{n^2}{c}\frac{dX}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_y\gamma - v_z\beta) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}\right)$$

$$\frac{n^2}{c}\frac{dY}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_z\alpha - v_x\gamma) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma + \frac{v_y X - v_x Y}{c}\right) \qquad I$$

$$\frac{n^2}{c}\frac{dZ}{dt} + \frac{n^2-1}{c^2}\frac{d}{dt}(v_x\beta - v_y\alpha) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c}\right)$$

$$\frac{1}{c}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial z}\left[Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[Z + \frac{v_x\beta - v_y\alpha}{c}\right]$$

$$\frac{1}{c}\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[Z + \frac{v_x\beta - v_y\alpha}{c}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right]$$

(II.. $$\frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left[X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c}\right]$$

Обе једначине важе и за нехомогене средине.

У случају ако је граница између средина у Z слоју онда услов је да су непрекидне обе компоненте:

$$X + \frac{v_y\gamma - v_z\beta}{c}, \quad Y + \frac{v_z\alpha - v_x\gamma}{c} \quad \ldots \quad (1.$$

$$\alpha + \frac{v_z Y - v_y Z}{c} \quad \beta + \frac{v_x Z - v_z X}{c}$$

Из обе и I и II имамо:

$$n^2 Z + \frac{n^2-1}{c}(v_x\beta - v_y\alpha) \text{ и } \gamma \text{ непрекидни} \quad \ldots \quad (2.$$

Ако у једначине уведемо граничне услове ... са осим за случај $v_x = v_y = v_z = 0$ граничне су услови из I и II

$$X, \; Y \quad \alpha - \frac{v_y Z}{c} \quad \beta + \frac{v_x Z}{c} \text{ непрекидни}$$

За кретање ... из I и II ... и добили једначину за једну компоненту не пр. X у облику:

имамо је:
$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{d^2 X}{dt^2} - 2\frac{d}{dt}\left[v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right]$$

$$\frac{n^2}{c^2}\frac{d^2 X}{dt^2} = \Delta X + \frac{2}{c^2}\frac{d}{dt}\left(v_x\frac{\partial X}{\partial x} + v_y\frac{\partial X}{\partial y} + v_z\frac{\partial X}{\partial z}\right) \quad \ldots \quad (3.$$

Аналогне једначине важе за Y Z α β γ.

Интеграл је за (3.

$$X = A e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{p_1' x + p_2' y + p_3' z}{\omega'}\right)}$$

./.

[illegible]:

$$\beta_1'^2+\beta_2'^2+\beta_3'^2=1$$

$\beta_1'\beta_2'\beta_3'$ [illegible], a [illegible]

[illegible] 3 [illegible]:

$$\frac{n^2}{c^2}+\frac{2}{c^2\omega'}\left(\beta_1'v_x+\beta_2'v_y+\beta_3'v_z\right)=\frac{1}{\omega'^2}$$

czyli:

$$\frac{n^2}{c^2}\left[1+\frac{2(\beta_1'v_x+\beta_2'v_y+\beta_3'v_z)}{n^2\omega'}\right]=\frac{1}{\omega'^2}$$

$$\omega'=\frac{c}{n}\left(1-\frac{\beta_1'v_x+\beta_2'v_y+\beta_3'v_z}{n^2\omega'}\right)$$

[illegible] ω' $\omega'=\frac{c}{n}$ [illegible]:

$$\omega'=\frac{c}{n}-\frac{\beta_1'v_x+\beta_2'v_y+\beta_3'v_z}{n^2}\quad\ldots\quad(4.$$

[illegible] ω' [illegible] $\beta_1'\beta_2'\beta_3'$. [illegible] $\beta_1'\beta_2'\beta_3'$ [illegible] $\beta_1\beta_2\beta_3$ [illegible]:

$$\beta_1'x+\beta_2'y+\beta_3'z+f(\beta_1'^2+\beta_2'^2+\beta_3'^2)=\omega'+f\quad(5.$$

$\beta_1'\beta_2'\beta_3'$ [illegible]:

$$x+2f\beta_1'=\frac{\partial\omega'}{\partial\beta_1'}\qquad y+2f\beta_2'=\frac{\partial\omega'}{\partial\beta_2'}\qquad z+2f\beta_3'=\frac{\partial\omega'}{\partial\beta_3'}$$

[illegible] (4) [illegible]:

$$x+2f\beta_1'=-\frac{v_x}{n^2}\qquad y+2f\beta_2'=-\frac{v_y}{n^2}\qquad z+2f\beta_3'=-\frac{v_z}{n^2}\quad\ldots(6.$$

[illegible] 2 [illegible]:

$$\beta_1'x+\beta_2'y+\beta_3'z+2f=-\frac{\beta_1'v_x+\beta_2'v_y+\beta_3'v_z}{n^2}$$

[illegible] $\beta_1'x+\beta_2'y+\beta_3'z=\omega'$ [illegible] $2f=-\frac{c}{n}$

/.

[illegible] 2) :

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = x : y : z = \frac{c\beta_1'}{n} - \frac{V_x}{n^2} : \ldots$$

[illegible]

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \beta_1' - \frac{V_x}{nc} : \beta_2' - \frac{V_y}{nc} : \beta_3' - \frac{V_z}{nc} \quad \ldots \quad 3.$$

[illegible]

$$\beta_1' : \beta_2' : \beta_3' = \beta_1 + \frac{V_x}{nc} : \beta_2 + \frac{V_y}{nc} : \beta_3 + \frac{V_z}{nc}$$

[illegible] $t\ x\ y\ z$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] $x\ y\ z$ [illegible] t'

$$t' = t - \frac{V_x x + V_y y + V_z z}{c^2} \quad \ldots \quad 1$$

t' [illegible] $x\ y\ z$, [illegible] $x\ y\ z$ [illegible]

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)'$ [illegible] $x\ y\ z\ t$ $\frac{\partial}{\partial x}$

[illegible]:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' - \frac{V_x}{c^2}\frac{d}{dt'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' - \frac{V_y}{c^2}\frac{d}{dt}, \ldots$$

[illegible] I [illegible] II [illegible]

[illegible]:

$$X + \frac{V_y \gamma - V_z \beta}{c} = X' \quad \ldots$$

$$\alpha + \frac{V_z Y - V_y Z}{c} = \alpha'$$

[illegible] $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)'$ [illegible] $\frac{\partial}{\partial x}$ [illegible]:

$$\frac{n^2}{c}\frac{dX'}{dt'} = \frac{\partial\gamma'}{\partial y} - \frac{\partial\beta'}{\partial z} \qquad \frac{1}{c}\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}$$

$$\frac{n^2}{c}\frac{dY'}{dt'} = \frac{\partial\alpha'}{\partial z} - \frac{\partial\gamma'}{\partial x} \qquad \frac{1}{c}\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial Z'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial z}$$

$$\frac{n^2}{c}\frac{dZ'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial x} - \frac{\partial\alpha'}{\partial y} \qquad \frac{1}{c}\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{\partial X'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial x}$$

/.

[illegible] ... Koordinate:

$X' \; Y' \; \alpha' \; \beta'$ [illegible].

[illegible]

[illegible]

Ako je za [illegible] $X \; Y \; Z \; \alpha \; \beta \; \gamma$ [illegible]

[illegible] $x \; y \; z \; t$ [illegible] T [illegible]

[illegible] $X' \; Y' \; Z' \; \alpha' \; \beta' \; \gamma'$ [illegible] $x \; y \; z$ [illegible]

$t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2}$ [illegible] T, [illegible] $x \; y \; z$ [illegible]

[illegible] T [illegible]

[illegible] T [illegible] $T\left(1 - \frac{v_n}{u}\right)$

§97 [illegible]

[illegible]

[illegible] $X \; Y \; Z \; \alpha \; \beta \; \gamma$ [illegible]

[illegible] $X' \; Y' \; Z' \; \alpha' \; \beta' \; \gamma'$. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] T [illegible]

[illegible]

§98 [illegible] (aberacija)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$T\left(1 + \frac{v_n}{w}\right)$ [T [illegible]]. (Doppler-ov [illegible]). [illegible]

[illegible] $v_n = 0$ [illegible]

[illegible] ([illegible]).

[illegible] (aberacija)

[illegible]

$t - \frac{\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z}{\omega}$. [illegible] $\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3$ [illegible]

/.

[illegible] зрака у целој сфери. Ако се [illegible] $v_x\, v_y\, v_z$ [illegible] $p_1 p_2 p_3$, [illegible]:

$$t - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c^2} - \frac{p_1 x + p_2 y + p_3 z}{\omega}$$

Овај зрак [illegible] $p_1' p_2' p_3'$

$$p_1' : p_2' : p_3' = \frac{p_1}{\omega} + \frac{v_x}{c^2} : \frac{p_2}{\omega} + \frac{v_y}{c^2} : \frac{p_3}{\omega} + \frac{v_z}{c^2} \quad (1).$$

[illegible] $p_1\, p_2\, p_3$ за $\frac{c}{\omega} = n$

Ако је место [illegible] звезде [illegible] $p_1 p_2 p_3$ [illegible] $p_1' p_2' p_3'$. Ако [illegible] $p_1 = p_2 = 0$ $p_3 = 1$ $v_y = v_y = 0$ $v_z = v$ [illegible] $\omega = c$ место звезде [illegible]:

$$p_1' : p_2' : p_3' = v : 0 : c$$

Место звезде [illegible]

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v}{c}$$

— Крај —

Теорија електрицитета и магнетизма

Увод

За тумачење појава електромагнетских узео сам као основицу Максвелову теорију. У лекцијама сам допунио исту теорију једначинама Херцовим за тела у мировању и кретању. Избегавао трансформацију ових једначина, теорију Лоренца о електронима нисам дао, пошто је она истина покренула питање за теорију светлости.

На предавањима ових двеју година теоријски део и додатак у коме је теорија примењена на решавање проблема из области електрицитета и магнетизма.

У овом делу сам се јако задржао на решавању једначина електромагнетских које су у главном употребљене две методе: Фуријеова и Риманова.

Одељак из електрооптике и термоелектрицитета нисам додиривао, пошто је један увезан са теоријом електрона а други са термомехаником, иначе ћу, кад будем ће предавати засебно као засебне одељке извесних дела математичке физике.

К. Стојановић

6ог децембра 1905.

у Београду

Литература.

За предмет курс сам излагао [illegible] су [illegible] имена Максвела, Херца, Хелмхолца, Томсона, Поенкареа, Болцмана, Лоренца [illegible] рађу и [illegible] ~~[illegible]~~ 15–20 година [illegible] у делу и имена [illegible] [illegible] дела:

I). *Vorlesungen* über Maxwells Theorie der Electricität und ~~Magnetismus~~ Lichtes . . tom. I. II. [illegible]

Издања из за Максвелову теорију:

II) *Maxwell* – 1) A treatise on electricity and magnetism
2) An elementary treatise on electricity.
(оба се ова дела налазе у [illegible] преведена и немачком).

III) *Poincaré* 3) *Electricité et Optique* – 1900 г.
4). Oscillations électriques

IV) *Hertz* 5). Gesammelte Werke – tom 1, 2, 3.

V) *Drude* . 6. Physik des Aethers

VI) *Classen* 7. Theorie der Elektricität und des Magnetismus tom I, II [illegible]

VII. *Helmholtz* 8. Gesammelte Werke Theorie d. Elektromagnetismus –

VIII. *H. Weber*. Differential Gleichungen der Mathem. Physik.

IX. Abraham Theorie der Elektricität tom I. и II.

X. E. Wallentin Einleitung in die theoretische Elektricitätslehre.

XI. Carvallo. Leçons d'électricité

XII. *Ostwalds Klassiker* оригинални [illegible] Максвелови [illegible] из електрицитета и магнетизма.

Прва Књига
– Прва свеска –

– Електростатика –

1). За електричне појаве важе ове две хипотезе:

a). хипотеза две течности у телу [illegible] ненабијена тела састављена из једнаких течности позитивне и негативне, а електрисана садрже једну или другу.

б). хипотеза о једној течности [illegible] тела [illegible] електрицитета; кад је [illegible] ненаелектрисано [illegible], а кад је [illegible] наелектрисано. Овој хипотези придружује се Максвел.

§.2 По Куломбу (Coulomb) је сила између две масе m и m' електричне у одстојању r

$$F = -f\frac{mm'}{r^2} \quad \ldots \quad 1.$$

одбијајућа, кад су масе једнаке, т.ј. кад је F позитивно [illegible]. За јединицу електростатичку [illegible] биће f = 1.

$$F = -\frac{mm'}{r^2} \quad \ldots \quad 2.$$

§.3 По Вебер[illegible] [illegible] течности, [illegible] на [illegible] и [illegible] хипотези о [illegible] [illegible] масе електрицитета [illegible] електричне [illegible] [illegible] електричне [illegible]. [illegible]

Ако је r одстојање две [illegible] у [illegible] масе електричне μ и μ₁ и V и V₁ [illegible] масе [illegible]

Сила између маса $-\alpha\frac{VV_1}{r^2}$

" између маса и електрицитета $\beta\frac{V\mu'}{r^2}$ и $\beta\frac{V'\mu}{r^2}$

" између електрицитета $-\gamma\frac{\mu\mu'}{r^2}$

/.

Потенцијал је $\tilde{X}$:

$$\tilde{X} = \frac{1}{r^2}\left[-\alpha\nu\nu' + \beta(\nu\mu' + \nu'\mu) - \gamma\mu\mu'\right]$$

Додавањем и одузимањем $\frac{\gamma\nu\nu'\beta^2}{\gamma^2} - \frac{\gamma\nu\nu'\beta^2}{\gamma^2}$

налазимо:

$$\tilde{X} = -\frac{1}{r^2}\left[\gamma\left(\mu - \frac{\nu\beta}{\gamma}\right)\left(\mu' - \frac{\nu'\beta}{\gamma}\right) + \nu\nu'\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)\right]$$

Ако су тела у безразном стању:

за $\mu = \frac{\nu\beta}{\gamma}$ или $\mu' = \frac{\nu'\beta}{\gamma}$ и $\alpha < \beta^2/\gamma$

$$\tilde{X} = \left(\frac{\beta^2}{\gamma} - \alpha\right)\frac{\nu\nu'}{r^2}$$

ово је одбијајућа сила.

У опште ако је $m = \mu - \frac{\nu\beta}{\gamma}$ и $m' = \mu' - \frac{\nu'\beta}{\gamma}$

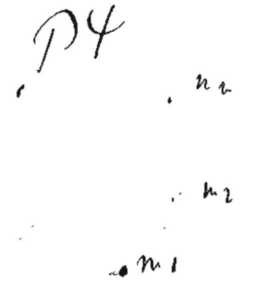
онда је сила

$$\tilde{X} = -\gamma\frac{mm'}{r^2} + \left(\frac{\beta^2}{\gamma} - \alpha\right)\frac{\nu\nu'}{r^2}$$

за $\frac{\beta^2}{\gamma} - \alpha = 0$.

своди се на Њутнов закон:

$$\tilde{X} = -\gamma\frac{mm'}{r^2} \quad \ldots \quad I.$$



§ 4 Потенцијал је у једној тачки под електричним масама на јединицу електрицитета вољумине где се овај електрицитет из бесконачности довео у одређену тачку P.

Ако су масе електричне у тачкама $m_1 \ldots m_n$ онда је потенцијал електричних маса:

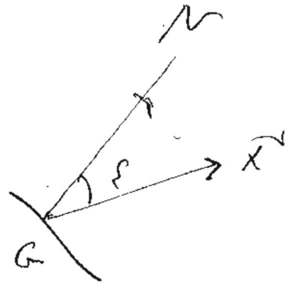
$$\sum^n \frac{m_i}{r_i} = V$$

V је потенцијал од маса $m_1 m_2 \ldots m_n$ у P

Ако у P ставимо масу m' потенцијална акција ових маса $m_1 m_2 \ldots m_n$ је:

$$-m'\frac{dV}{dx}, \; -m'\frac{dV}{dy} \; -m'\frac{dV}{dz}$$

§5 Fluks sile. Neka je G tačka u električnom polju, GN normala na element a GF sila u G. Jednaka nama je G usmjerena, i gdje je sila F, uzet je projekcija na normalu:

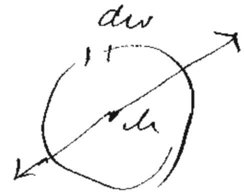


$$F\cos\varepsilon = F_n$$

$F_n\, d\omega$ je tzv. fluks sile kroz element:

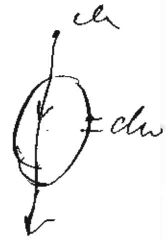
$$-\frac{\partial V}{\partial n}d\omega = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}\right]d\omega = -\left[\sum\frac{\partial V}{\partial x}\alpha\, d\omega\right.$$

Fluks sile kroz zatvorenu površinu je:



$$\int -\frac{dV}{dn}d\omega = 4\pi M \quad 0$$

Ovaj je fluks po Gaussovoj teoremi 4πM ... električnog polja.



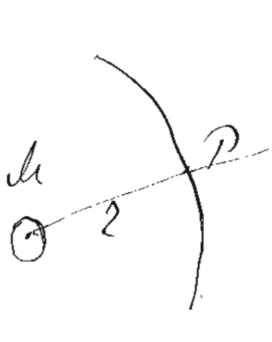
Ako je ... (kondenzator) ... konstanta. Onda je teorema o fluksu ovaj:

$$K\int -\frac{dV}{dn}d\omega = 4\pi M \quad 0$$

Kad je K konstanta onda

$$-\int\frac{dV}{dn}d\omega = 4\pi M \quad 0$$

Kad je K promjenljivo.



§6 Kad je ... u tački P od kondenzatora M, onda je jasno da je ... r ... sila ...:

ако је K константа

$$\int -K\frac{d\psi}{dn}\,dw = -K\int\frac{d\psi}{dr}\,dw = -K\frac{d\psi}{dr}\cdot 4\pi r^2$$

или

$$-K\frac{d\psi}{dr}\,4\pi r^2 = 4\pi M$$

$$-\frac{d\psi}{dr} = \frac{M}{Kr^2} \quad \dots \text{ сила у } P$$

$$\psi = \frac{1}{K}\frac{M}{r} \quad \dots \text{ потенцијал у } P.$$

Не губи које и у P нашем јединицу маса ако имамо масе m онда је сила:

$$-m\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{K}\frac{mM}{r^2} \quad \dots \quad F.$$

27 Поасонова теорема. Из једначине:

$$-\int K\frac{d\psi}{dn}\,dw = -\int K\left(\alpha\frac{d\psi}{dx}+\beta\frac{d\psi}{dy}+\gamma\frac{d\psi}{dz}\right)dw$$

где су $\alpha\ \beta\ \gamma$ косинуси углова нормале на dw имамо Гаусове теореме:

$$\int F\alpha\,dw = \int\frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau \quad (d\tau \text{ елемент запремине}$$

$$\int \alpha K\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\partial w = \int\frac{d}{dx}K\frac{\partial\psi}{\partial x}\,d\tau$$

или:

$$\sum\int\left(\frac{d}{dx}K\frac{d\psi}{dx}\right)d\tau = -4\pi M = -4\pi\int\rho\,d\tau \quad (=0)$$

ρ је густина електрицитета у $d\tau$

или:

$$\sum\frac{d}{dx}K\frac{d\psi}{dx} = -4\pi\rho \quad (=0)$$

За K константно је

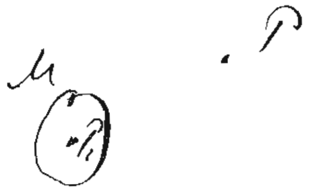
$$K\sum\frac{d^2\psi}{dx^2} = -4\pi\rho \quad \text{или} \quad K\Delta\psi = -4\pi\rho$$

$$K\sum\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0 \quad \dots \quad \text{и} \quad K\Delta\psi = 0$$

што је једначина Поасонова, односно Лапласова.

[illegible] $\rho = 0$.

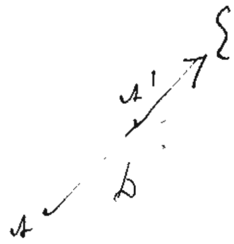
Obie jednakowe [illegible] [illegible] masa M [illegible] P [illegible] masa M [illegible] φ [illegible] równania $\Delta\varphi = 0$ [illegible] P $\rho = 0$ ([illegible]) [illegible] P_1 [illegible] M [illegible] ρ [illegible] [illegible] φ [illegible] P_2 zagadnienia [illegible] $\Delta\varphi = -4\pi\rho$.



[illegible] (Maxwell)

§ 8 [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] $f\ g\ h$ [illegible] D [illegible] $E_x\ E_y\ E_z$ [illegible]:



$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad h = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial z} \ldots$$

[illegible] $E_x = \frac{-\partial \psi}{\partial x}$ etc.

§ 9 [illegible] [illegible]

$$\int -K\frac{\partial \psi}{\partial n} dw = -\int K\left(\alpha\frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta\frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dw = 4\pi M$$

[illegible]:

$$\int(\alpha f + \beta g + \gamma h)\, dw = \int \frac{\partial D}{\partial n} dw = M$$

[illegible].

[illegible] $M = \int \rho\, d\tau$ [illegible] $\int \xi \alpha f\, dw$ [illegible] $\int \xi \frac{\partial f}{\partial x} d\tau$ [illegible]:

$$\int\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right] d\tau = \int \rho\, d\tau$$

[illegible]

$$\mathrm{div}\, D = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho$$

ρ [illegible] [illegible] [illegible].

/.

[illegible]

[illegible] $\rho = 0$

$$\operatorname{div} D = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

[illegible]

[illegible]

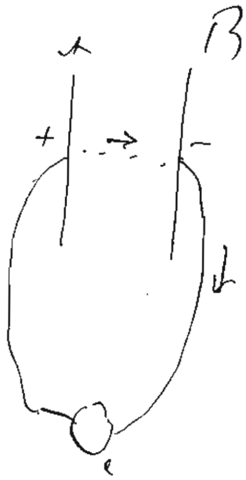
[illegible] 4π [illegible] ρ^*

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} E = \rho^*$$

$$4\pi \operatorname{div} \frac{D}{K} = \rho^* \quad [illegible] \quad \rho = K\rho^*$$

ako je K konstantno.

§10 [illegible]



[illegible]

Као и диелектрикум хомоген, јер се [illegible] односи са електричном силом, као узроком померања. У [illegible] [illegible], где и ова [illegible] [illegible] не [illegible] [illegible] [illegible] се [illegible] [illegible] [illegible].

7.11 <u>Струја спроводника ~~померања~~</u>. Струје кроз спроводнике зову се струја спроводника, струје услед померања у диелектрику зову се струја померања. Но Максвел мисли да су и затворене струје сачињене само из струја померања, какве се оне јаве код отворене струје.

Струја кондукциона објашњава се законима: Џуловим, Омовим и Амперовим. За струју спроводника се може рећи да важе ~~с~~ само ова три закона. Постојање и струје, струје померања утврдио Херц, чијим је откривањем херцијских осцилација Максвелова електромагнетна теорија добила сјајну потврду [illegible] [illegible] не само [illegible] електрична и магнетска [illegible] већ и светлосна.

7.12 <u>Потенцијална енергија система</u>. Наелектрисани [illegible] и кондуктори представљају систем потенцијалне енергије ~~које~~ која долази услед [illegible] и поларизације међу кондукторима (слободне енергије). Но Максвел ова потенцијална енергија долази од диелектричне [illegible] средине, која је смештена у свом [illegible] [illegible]. Ова енергија се може мерити и иста је као [illegible] [illegible].

7.13 Одредба потенцијалне енергије за случај [illegible].

Ако је један елемент запремине $d\tau$, у месту унутар електрицитета густине ρ, координата у $d\tau$ $x\,y\,z$ електрицитет је $d\tau\rho$ и компоненте електричне силе које дејствују на ову масу електрицитета:

$$-\rho d\tau\frac{d\varphi}{dx} \quad -\rho d\tau\frac{d\varphi}{dy} \quad -\rho d\tau\frac{d\varphi}{dz}.$$

Ако временом времена dt зрак се пројектује на осе dx dy dz оба једначина дају за осе:

$$\frac{i\,dx}{c\,dw} = -d\varphi + X\,dx \quad \ldots \quad (I)$$

i је компонента брзине [illegible] dw за 1", $\frac{i}{dw}$ је брзина. Ако се компоненте брзине у правцу осе u v w [illegible]:

$$\frac{u}{c} = -\frac{d\varphi}{dx} + X \quad \ldots \quad (II)$$

и слично [illegible]:

$$\frac{v}{c} = -\frac{d\varphi}{dy} + Y$$

$$\frac{w}{c} = -\frac{d\varphi}{dz} + Z$$

u, v, w [illegible] компоненте које [illegible] брзине означене са $\frac{df}{dx}$, $\frac{dg}{dy}$ $\frac{dh}{dz}$

Кирхофов закон се изражава законом континуитета:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Ово је закон [illegible] овако:

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dg}{dz} = \rho$$

Када се ово диференцира и $\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy}$ $\frac{dh}{dx}$ смени u v w.

Ово [illegible] за непроменљиво стање [illegible] електричног [illegible].

§. 20 [illegible] energii przez przewodnik a energii promieniowania.

Zaznaczmy że dla energii przez przewodnik:

$$\frac{d\psi}{dx} = X - \frac{u}{c}$$

$$\frac{d\psi}{dy} = Y - \frac{v}{c}$$

$$\frac{d\psi}{dz} = Z - \frac{w}{c}$$

a dla energii promieniowania zaś:

$$\frac{d\psi}{dx} = X - \frac{4\pi}{K} f$$

$$\frac{d\psi}{dy} = Y - \frac{4\pi}{K} g$$

$$\frac{d\psi}{dz} = Z - \frac{4\pi}{K} h$$

X, Y, Z są [illegible] energii [illegible]

([illegible] elektromotoryczne [illegible]).

[illegible] energii zależy od prądu elektrycznego a energii promieniowania od ~~[illegible]~~ [illegible] promieni.

§ 21 Prawo Joule'a. [illegible] ilość ciepła wydzielana przez prąd w przewodniku jest proporcjonalna do kwadratu intensywności prądu. [illegible] Maxwell [illegible]

[illegible] wzory:

$$\left(\frac{u}{c}dx + \frac{v}{c}dy + \frac{w}{c}dz\right)d\tau \text{ [illegible]}$$

$$\Sigma\left(\frac{u}{c}\frac{dx}{dt}\right)d\tau\, dt \text{ [illegible]}$$

$$dt\int\frac{u^2+v^2+w^2}{c}d\tau = \frac{dt}{c}i^2$$

- IV -

Стационарне електричне струје.

§ 22. Из основних једначина за $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ etc. диференцијалним … $\sum\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ако узмемо да су $X=Y=Z=0$ … за електростатичко поље дат потенцијалом Ψ, који задовољава једначину:

$$\sum\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\Delta\Psi=0 \quad\ldots\quad 1.$$

или

$$\lambda\Delta\Psi=\operatorname{div}\lambda\operatorname{grad}\varphi=0 \quad\ldots\quad 2.$$

Када се обје стране … у Гаусову интегралу:

$$\int\operatorname{div}\mathfrak{A}\,d\tau=\pm\int A_n\,do$$

у овом $A_n=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ даје … :

$$\int\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,do=0 \quad\ldots\quad 3.$$

или у:

$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ на граници између непроводника и проводника

или у:

$$\lambda_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1-\lambda_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2=0 \quad\ldots\quad 4./$$

на граници између две разне проводне средине.

Уз ове услове … потенцијала:

$$\varphi_A-\varphi_B=(AB)$$

за електромоторне …

3. Ако на … налази … електрод …, онда је …

$$\int\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,do=-\int J_n\,do=0$$

где је J_n јачина струје … а за околину електроде:

$$\int\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,do=4\pi\lambda r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-i\ (\text{јачина струје}).$$

Jeżeli mamy kilka elektrod wtedy [illegible]:

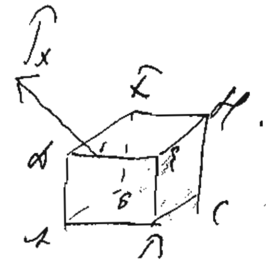
$$\int \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} do = J_1 + J_2 + \ldots J_n$$

[illegible] [illegible] ograniczony, a [illegible] na zewnątrz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{[illegible]} \quad \sum J_n = 0$$

Spawanie [illegible] obu [illegible] [illegible]

węglowej [illegible] elektrody [illegible] [illegible].



— y^{ta} — (

Akcja [illegible] na [illegible] di

T_x na [illegible] [illegible] na x^{cej} osi, [illegible]

komponenty wzdłuż x^{cej} y^{cej} i z^{cej} osi:

$$P_{xx}\,d\omega \quad P_{xy}\,d\omega \quad P_{xz}\,d\omega$$

[illegible] na [illegible]

[illegible]:

$$P_{yx}\,d\omega \quad P_{yy}\,d\omega \quad P_{yz}\,d\omega$$

$$P_{zx}\,d\omega \quad P_{zy}\,d\omega \quad P_{zz}\,d\omega$$

Ale [illegible] na [illegible]

[illegible]. $d\tau = dx\,dy\,dz \quad dx = AB$ etc.

$$\left(P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

Ale [illegible] na $AEGH$ i $BEHC$:

[illegible]

$$\frac{dP_{xx}}{\partial x}d\tau$$

Wzdłuż x^{cej} osi [illegible] P_{yx}, P_{zx} [illegible]

$$\frac{dP_{yx}}{\partial y}d\tau \quad \frac{dP_{zx}}{\partial z}d\tau$$

[illegible] Komponenta [illegible] $-X\,d\tau = -\rho\,d\tau\frac{dV}{dx}$

[illegible]. [illegible] Komponenty

[illegible]:

$$\frac{dP_{xx}}{dx} + \frac{dP_{yx}}{\partial y} + \frac{dP_{zx}}{\partial z} = -\rho\frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dP_{yx}}{\partial x} + \frac{dP_{yy}}{\partial y} + \frac{dP_{zy}}{\partial z} = -\rho\frac{dV}{\partial y}$$

$$\frac{dP_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{dP_{zz}}{\partial z} = -\rho\frac{dV}{\partial z}$$

[illegible]:

$P_{xy} = P_{yx}$; $\quad P_{xz} = P_{zx}$ i $P_{zy} = P_{yz}$.

[illegible] I [illegible] 6 niewiadomych [illegible] [illegible] [illegible]:

$$T_{xx} = \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$T_{yy} = \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$T_{zz} = \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$T_{yx} = T_{xy} = \frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}$$

$$T_{zy} = T_{yz} = \frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dy}\frac{d\psi}{dz}$$

$$T_{xz} = T_{zx} = \frac{K}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dz}.$$

Jeśli wybierzemy [illegible] x [illegible] [illegible]

$$-F = \frac{d\psi}{dx} \qquad \frac{d\psi}{dy} = 0 \qquad \frac{d\psi}{dz} = 0$$

$$T_{xx} = \frac{KF^2}{8\pi} \qquad T_{yy} = T_{zz} = -\frac{KF^2}{8\pi}$$

$$T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0$$

[illegible]

[illegible]

$$W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)\,d\tau$$

Jeśli [illegible] F i $K = 1$ wtedy [illegible] elementu $d\tau$

$$W = \frac{F^2}{8\pi}\,d\tau$$

Jeśli F zmienimy o δF wtedy

$$\delta W = \frac{2F\,\delta F}{8\pi}\,d\tau$$

Jeśli [illegible] $\alpha\beta\gamma = d\tau$ [illegible] δW [illegible] α [illegible] $\alpha(1+\varepsilon_1)$ $\beta(1+\varepsilon_2)$ $\gamma(1+\varepsilon_3)$

Ако се $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ промене у $d\xi_1$ и т. д. утрошени рад [illegible] T_{xx} T_{yy} T_{zz} [illegible] (износиће):

$$\frac{F^2}{8\pi}\beta\gamma\alpha\, d\xi_1 = \frac{F^2}{8\pi} d\tau\, d\xi_1$$

$$-\frac{F^2}{8\pi}\gamma\alpha\beta\, d\xi_2 = -\frac{F^2}{8\pi} d\tau\, d\xi_2$$

$$-\frac{F^2}{8\pi}\alpha\beta\gamma\, d\xi_3 = -\frac{F^2}{8\pi} d\tau\, d\xi_3$$

Сума је једнака:

$$\frac{F^2}{8\pi} d\tau \left[d\xi_1 - d\xi_2 - d\xi_3\right]$$

Ако се обе једначине изједначе:

$$d\xi_1 - d\xi_2 - d\xi_3 = \frac{2\,dF}{F}$$

или

$$\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 2 \log F + \text{Const.}$$

у случају равнотеже $F = 0$ морају бити [illegible] ξ_2 и ξ_3 ∞ што је апсурдно.

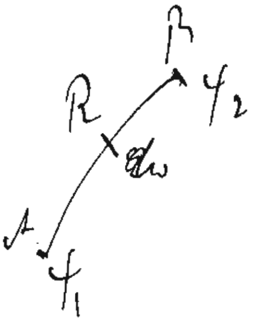
./.

– III –

– Elektrokinetyka –

§18 <u>Liniowe konduktory</u>. Doświadczalne prawa przechodzenia elektryczności leżą w zakonach Ohma i Kirchhoffa.

<u>Ohmów</u> zakon mówi, że jeśli elektromotoryczna siła na pojedynczym konduktorze przenosi ładunek elektryczności ilość ich przez jednostkę wycinka w jednostce czasu. Ale jeśli wycinek obejmuje elektromotoryczna jest siła przesuwająca ładunek elektryczności przez wycinek w jednostce czasu, nazwa a ładunek zowie się <u>intensywnością</u> i. Dla homogenicznego konduktora obowiązuje zakon:



$$Ri = \Psi_1 - \Psi_2 \quad \ldots \quad (I)$$

Ψ_1 i Ψ_2 są potencjałami w A i B, a wycinek i R oporem wycinka.

Jeśli w wycinku działają elektromotoryczne siły (indukcyjne, kontaktowe, chemiczne) równanie I zmienia się:

$$Ri = \Psi_1 - \Psi_2 + \Sigma E \quad \ldots \quad (II)$$

Dla R mamy wyrażenie, jeśli l długość wycinka, c konduktancja, dw przekrój:

$$R = \frac{l}{c\,dw}$$

c zowie się koeficjentem przewodnictwa.

§19 Równanie II można wobec tego napisać

$$\frac{l}{c}\frac{i}{dw} = \Psi_1 - \Psi_2 + \Sigma E \quad \ldots$$

/.

где је Ψ потенцијал своје масе у т.

Ако је помножимо масом у B $\delta x\, \delta y\, \delta z$, пак је елементарни ефект/рад

$$-\rho d\tau \left(\Sigma \frac{d\Psi}{\partial x} \delta x \right)$$

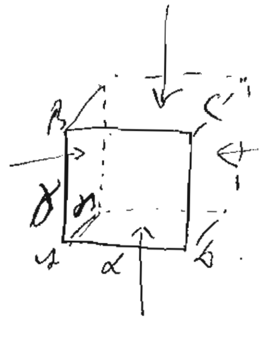
B $\cdot \rho d\tau$ Ψ $x\,y\,z$

Цео је рад

$$-\int \rho d\tau \Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta x$$

Интеграл се простире на цео простор. Ако са W означимо потенцијалну енергију она је једнака раду узетом са супротним знаком:

$$W = \int \rho d\tau \Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta x \quad \ldots \quad I.$$



Ако је коцка ABCD испуњена елементарном ... кроз ... δρdτ ... ове површине, онда се ово ... на ... начин.

Кроз $\beta\gamma$ уђе елементарна $\rho \beta \gamma \delta x$

Кроз супротну површину од $\beta\gamma$ излази елементарна:

$$-\left[\rho \delta x + \frac{d(\rho \delta x)}{dx} \alpha\right] \beta\gamma$$

Алгебарска сума елементарних маса ... између кроз $\beta\gamma$ и кроз супротну површину:

$$-\frac{d(\rho \delta x)}{dx} \alpha\beta\gamma = -\frac{d(\rho \delta x)}{dx} d\tau$$

Ово важи и за остале две површине. Када се ово изједначи са елементарним $\delta\rho d\tau$ ... добија се:

$$\delta\rho = -\Sigma \frac{d(\rho \delta x)}{dx} \quad \ldots \quad II$$

Ово је тзв. једначина континуитета.

Применимо лему:

$$\int \alpha F d\omega = \int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau \quad \text{за случај када је } F = 0 \text{ у } \infty$$

па тако имамо

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = 0$$

Ако се стави $f = uv$ онда имамо:

$$\int u \frac{\partial v}{\partial x} d\tau = -\int v \frac{\partial u}{\partial x} d\tau$$

Ако означимо са $u = \rho \delta x$ а са $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ имаћемо.

$$\Sigma \int \rho \delta x \frac{d\psi}{dx} d\tau = -\int \Sigma \psi \frac{d}{dx}(\rho \delta x) d\tau$$

Када се ово смени у W налазимо да је:

$$\delta W = \int \psi \delta \rho \, d\tau$$

или

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int \psi \, \delta \left[\Sigma \frac{d}{dx} \left(K \frac{d\psi}{dx} \right) \right] d\tau$$

Применом исте леме налазимо

$$\int \psi \left[\frac{d}{dx} \left(K \frac{d\psi}{dx} \right) \right] d\tau = -\int K d\tau \frac{d\psi}{dx} \delta \left(\frac{d\psi}{dx} \right)$$
$$= -\int \frac{K d\tau}{2} \delta \left[\left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right]$$

$$\delta W = \delta \int \frac{K}{8\pi} \Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 d\tau$$

или

$$W = \int \frac{K}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \ldots \quad (II$$

Ако се овде $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ смени са f, и т. д. налазимо

за електростатичку енергију израз:

$$W = \int \frac{2\pi}{K} \left(f^2 + g^2 + h^2 \right) d\tau \ldots \quad (III.$$

§ 140 ~~Градња~~ електростатичке енергије из ... Ако су X Y Z силе ... виртуалних померања δf, δg ...

/.

Rad je elementarni:

$$\Sigma(X\delta f)\,d\tau$$

Ceo je rad $\int\Sigma(X\delta f)\,d\tau$

a odgovarajuća je energija:

$$\delta W = -\int (X\delta f + Y\delta g + Z\delta h)\,d\tau$$

Ako se X, Y, Z zamene obzirom na [illegible] sa njihovim vrednostima dobija se:

$$\delta W = \int \frac{4\pi}{K}(f\delta f + g\delta g + h\delta h)\,d\tau \quad \text{ili}$$

$$W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)\,d\tau \; \ldots \; IV^2$$

§ 15 Površna elektrizacija. Raspodela elektriciteta na kondukterima zavisi od unutrašnjeg potencijala φ koji zadovoljava jednačinu $\Delta\varphi = 0$. Ova jednačina [illegible]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

ili

$$\Sigma \frac{\partial K \frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial x} = 0$$

Ako se označi sa ξ [illegible] elektriciteta na [illegible] površini na kondukteru to se [illegible]:

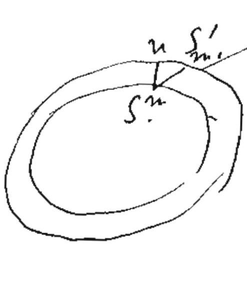
$$K\frac{d\varphi}{dn}\,d\omega = -4\pi\xi$$

odakle je:

$$\sigma = \frac{\xi}{d\omega} = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn}$$

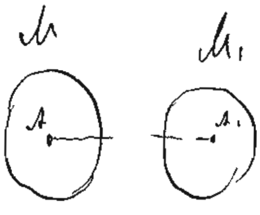
Ovo se [illegible] jednačine

$$mn = \sigma = \alpha f + \beta g + \gamma h = -\frac{K}{4\pi}\left[\alpha\frac{d\varphi}{dx} + \beta\frac{d\varphi}{dy} + \gamma\frac{d\varphi}{dz}\right] = -\frac{K}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn}$$



[illegible] elektriciteta između S i S' a [illegible] sa normalom mn, a to je [illegible] mn [illegible]

[illegible]



[illegible]

$$W = F(\xi\,\eta\,\zeta\,M\,M') \quad \ldots \quad 1.$$

[illegible]

$$-X\,\delta\xi + \frac{dW}{d\xi}\,d\xi = 0$$

[illegible]

$$X = \frac{dW}{d\xi} \quad \ldots \quad 1.$$

[illegible]

[illegible] $- \rho\, dv \frac{d\psi}{dx}$ etc.

[illegible] $X\,dv$, $Y\,dv$, $Z\,dv$ [illegible]

$$X = \rho\frac{d\psi}{dx} \quad Y = \rho\frac{d\psi}{dy} \quad Z = \rho\frac{d\psi}{dz}$$

- Друга свеска -
- I^{во} -
- Магнетизам -

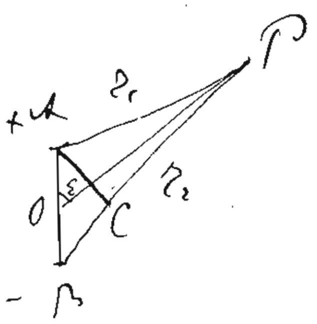
§ 23 Сила између две масе магнетизма обрнуто је сразмерна са одстојањем, а ако су масе m и m' одстојање r сила је f

$$f = -\frac{m m'}{r^2} \quad \dots$$

Потенцијална је сила негативна, одбојна позитивна.

§ 24 Магнетска маса магнета. Количина је сума магнетне масе пола. Ово је разлика између магнетне ... Ако се један магнет преломи на два дела онда ... увек масе на сваком делу.

§ 25 Потенцијал једног магнета и компоненте магнетне снаге. Ако је магнет AB и $+m$ и $-m$ су магнетне масе у A и B потенцијал је од њих у P $d\Omega$:



$$d\Omega = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = m\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \quad \dots \quad (1)$$

Када се A спусти нормала AC на BP $r_2 - r_1$ је бескрајно мале количине друга реда и $r_2 - r_1 = BC$

Ако се одстојање AB означи са da онда је

$$r_2 - r_1 = da \cos\varepsilon \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{и } r_1 r_2 = r^2$$

Када се ово смени у (1) потенцијал је:

$$d\Omega = \frac{m\, da \cos\varepsilon}{r^2} \quad \dots \quad (I)$$

Ако са A, B, C означимо изразе $m\,dx = A\,da$, $m\,dy = B\,da$, $m\,dz = C\,da$ и $A\,B\,C$ називамо компоненте магнетизације I онда је ако су $\xi\,\eta\,\zeta$ координате тачке P а $x\,y\,z$ координате тачке O.

./.

$$\cos\xi = \frac{dx}{da}\,\frac{\xi - x}{r} + \frac{dy}{da}\,\frac{\eta - y}{r} + \frac{dz}{da}\,\frac{\zeta - z}{r}$$

Кад се ово помножи са m да и подели са r^2

имаћемо:

$$d\Omega = \frac{m}{r^3}\left[dx(\xi - x) + dy(\eta - y) + dz(\zeta - z)\right] \quad \ldots (3)$$

из једначине:

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

$$\xi - x = -r\frac{dr}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{\xi - x}{r^3} = -\frac{r}{r^3}\frac{dr}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx}$$

Заменом овога у (3) наћи ће се

$$d\Omega = m\,dx\left[\frac{d(1/r)}{dx}\right] + m\,dy\,\frac{\partial(1/r)}{\partial y} + m\,dz\,\frac{\partial(1/r)}{\partial z}$$

или:

$$d\Omega = \left[A\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]d\tau$$

Ако се обакле опшем у сферу за обим елемент

запремина интеграцијом:

$$\Omega = \int\left[A\frac{\partial(1/r)}{\partial x} + B\frac{\partial(1/r)}{\partial y} + C\frac{\partial(1/r)}{\partial z}\right]d\tau \quad \ldots (I)$$

7. Овај се интеграција Ω може облик ... претворити

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{r}\right) = \frac{dA}{dx}\,\frac{1}{r} + A\,\frac{\partial(1/r)}{\partial x}.$$

$$\int\frac{A}{r}\,l\,d\omega = \int\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{r}\right)d\tau = \int\left[\frac{dA}{dx}\,\frac{1}{r} + A\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\tau$$

Кад се ово смени у I наћи ће се

$$\Omega = \int\frac{lA + mB + nC}{r}\,d\omega - \int\frac{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}}{r}\,d\tau \quad \ldots (4)$$

Потенцијал е магнета слаже се са потенцијалом запреминске и површинске масе чије су густине:

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

и

$$\sigma = lA + mB + nC$$

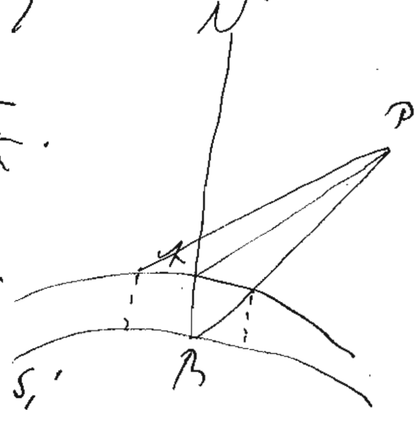
За једну тачку ван магнета је потенцијал

$$\Delta\Omega = 0$$

За тачку у магнету је:

$$\Delta\Omega = -4\pi\rho = 4\pi\left[\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right]$$

§ 26 <u>Потенцијал</u> магнетског листа. Ако је једна магнетна скорамен и где површине бесконачно блиске магнетисане магнетским количинама једнаким а супротног знака, назива се онда магнетски лист. Ако је јачина магнетизације I нормална на површину, и ε (дебљина магнета) сталан, што је карактеристично за магнетски лист производ се Iε зове моћ φ листа.



Ако се на листу узме елемент A чија је маса σ dw (σ је густина листа S a dw површина његова) S онда ће AB листа стварати као један магнет који је маса у B −σdw а дебљина је e онда је потенцијал од AB у P-ој тачки:

$$d\Omega = \sigma\, dw\, \frac{e \cos\varepsilon}{r^2}$$

$$\sigma\, dw = ~~Ae~~ \qquad \sigma\, dw\, e = \sigma\, d\tau = \mathfrak{I}$$

Како је магнетизација по јединици AB ова је

$$~~I d\tau~~ = I = \frac{m\,da}{d\tau} = ~~\frac{\sigma\, dw}{dw\, e}~~ \frac{1}{e} \cdot \sigma \qquad \sigma\, dw$$

~~σ dw e = I dw e = dwe = φ dw = ...~~ или

$$\sigma\, dw\, e = I\, d\tau = I\, dw\, e = \varphi\, dw$$

или

$$d\Omega = \frac{\varphi\, d\omega \cos\varepsilon}{r^2}$$

$\frac{d\omega \cos\varepsilon}{r^2}$ је угао ψ под којим се из P види елемент AB, онда је

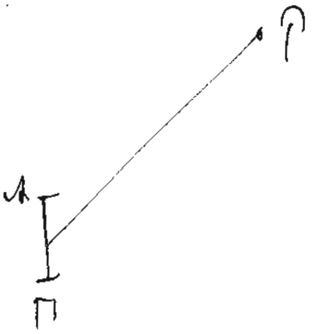
$$d\Omega = \varphi\, d\psi$$

или

$$\Omega = \varphi\, \psi$$

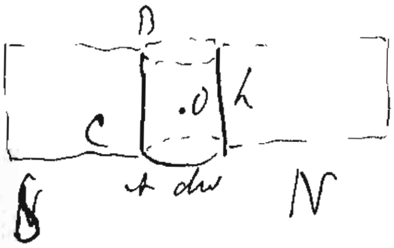
Потенцијал је једнак нулти за симетричку јединку, према производу из момента φ и угла ψ под којим се из те тачке види лист. Знак је + или − ако се види позитивна или негативна страна листа.

§. 97 <u>Магнетске силе</u> код симетричке плоче. Ако је у P смештена јединица магнетске масе, онда је потенцијал од магнета AB у P: Ω, а магнетске силе су $\alpha\ \beta\ \gamma$ дате изразима:



$$\alpha = -\frac{d\Omega}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{\partial y} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

§. 98 <u>Магнетске силе на тачку у магнету</u> (индукција). Да би одредили магнетску силу у тачки у магнету AB које је дебљина c. Ако је потенцијал на тачку O у магнету дат Ω тада је $\Omega - \Omega_1$, ако је Ω_1 потенцијал од масе граничне површине одговарајуће сфере око ње:



$$a = -\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega_1}{dx} \quad b = -\frac{d\Omega}{\partial y} + \frac{d\Omega_1}{dy} \quad c = -\frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega_1}{dz}$$

За одређивање овог потенцијала индукције узимамо ове хипотезе:

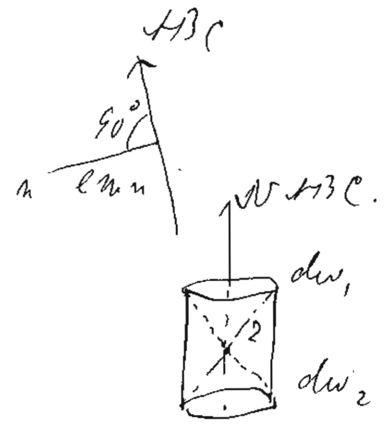
1) h=AB нека је висина цилиндра ограничена са магнетизацијом а нека је основа dω (основица цилиндра).

Ω_1 је потенцијал магнетизма у два магнета:

а) за области где нема тела за извесне. Али је довољно нам бити рећи у пољу се изведе, дакле је

$$\int (lA + mB + nC)\,dw + \int (lA + mB + nC)\,dw$$

за тело — за околину



За одмах је $lA + mB + nC = \cos 90^\circ = 0$.

За околину је dw мало и према томе се не...

Интеграли мора и компоненти су силе магнетизма:

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx} \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

Као и за обичну материју.

б). Тело је хомогено па је h мало од dw. И овде се (и за околину) у другој интеграла за тело и друге околине. Који остаје:

$$\Omega_1 = \int \frac{(lA + mB + nC)\,dw_1}{2} - \int \frac{(lA + mB + nC)\,dw_2}{2}$$

а овде се своди на:

$$\Omega_1 = \int \frac{A}{2}\,dw_1 - \int \frac{A}{2}\,dw_2 = A\left(\int \frac{dw_1}{2} - \int \frac{dw_2}{2}\right)$$

Ако се dw_1 и dw_2 довољно близу према висини онда је $\int \frac{dw_1}{2} = 2\pi \quad \int \frac{dw_2}{2} = -2\pi$ и

$$\Omega_1 = 4\pi A.$$

Магнетизам је сада и у x оси ... за y осу и z осу:

$$a = -\frac{d\Omega}{dx} + 4\pi A = \alpha + 4\pi A$$

$$b = \beta + 4\pi B \quad \ldots \quad (I).$$

$$c = \gamma + 4\pi C.$$

a, b, c, [illegible] komponente magnetske indukcije [illegible].

[illegible] magnetske indukcije [illegible]:

$$A = K\alpha \quad B = K\beta \quad C = K\gamma$$

[illegible] $\bar{I}$ [illegible]

$$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta \quad c = \mu\gamma$$

μ se zove [illegible] indukcije [illegible] konstantom K. [illegible] $\mu > 1$, za [illegible] $\mu = 1$ [illegible] $\mu < 1$

K i μ [illegible] konstante [illegible]

3.29 [illegible]:

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -d\Omega$$

je [illegible] diferencijal funkcije Ω.

$$a dx + b dy + c dz$$

[illegible] diferencijal

[illegible] $\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0$

zbog:

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} + 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

$$= -\Delta\Omega + 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) = 0$$

zbog

$$\Delta\Omega = -4\pi\rho.$$

Независност услова магнетизма и електрицитета.

§ 30 Ако са ε, D и K означимо електричну силу, индукцију и диелектричну константу и са M, B и μ магнетску силу, индукцију и магнетску пермеабилност, онда се могу у свих облика аналогије у ова два феномена изразити. (B се зове магнетска индукција).

1) За μ само казати бити тако слично да је оно $\mu \lesseqgtr 1$ и да је за неке облике μ врло велико.

2). Нема супротности за магнетизам $\operatorname{div} B = 0$

3). Дакле магнетизам нема извора за своје облике где је
$$\operatorname{div} B = m \text{ (у дефиницији магнетизма)}$$

4). $\int m\, d\tau = 0$. (сума позитивног и негативног магнетизма)

4). На објашњење такође није [illegible] магнетизма [illegible] Континуални [illegible] магнетизма [illegible] (Hertz)

5). Енергија магнетска у $d\tau$
$$dT = \frac{1}{2} P M\, d\tau = \frac{1}{2}\left[P_x M_x + P_y M_y + P_z M_z\right] d\tau$$
или $$P_x = \frac{\mu}{4\pi} M_x \text{ etc.}$$
$$dT = \frac{\mu}{8\pi}\int (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)$$

6). Магнетска сила је и овде извод из потенцијала φ
$$M_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ etc.}$$

φ је непрекидан у целом простору и задовољава једначину $$\sum \frac{\partial\, \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\partial x} = -4\pi m.$$

/.

m je za ... [illegible] permanentnog magneta.

$$\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^{+} = \mu'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^{-}$$

φ je ... [illegible] .

§ 31 Permanentni magneti

$$\mu = 1$$

$$\Delta\varphi = -4\pi m$$

$$\varphi = \int \frac{m\, d\tau}{r}$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \quad \ldots \quad (1)$$

Ako se iskoristimo izrazom:

$$\frac{\partial\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$ i ubacimo u (1)

dobijemo:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\, \mathfrak{M})\, d\tau - \frac{1}{8\pi}\int \varphi \Delta\varphi\, d\tau$$

$$\operatorname{div}(\varphi\, \mathfrak{M}) = \sum \frac{\partial\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}$$

$$\int \sum \frac{\partial\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}\, d\tau = \int \varphi\left[\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, l\right] d\omega = 0 .$$

$$\varphi = 0$$

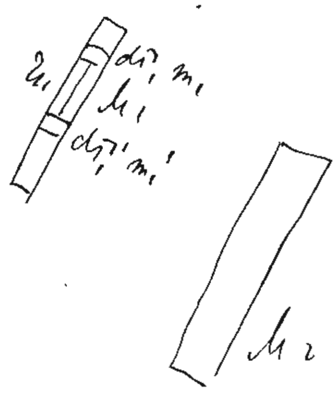
$$T = \frac{1}{2}\int \varphi\, m\, d\tau \quad \ldots \quad (I).$$

$$\Delta\varphi = -4m\pi .$$

Izraz u I daje potencijalnu ... [illegible] ... magneta

Ako imamo dva permanentna magneta M_1 i M_2, potencijalna će energija ... [illegible] ... T ... [illegible] ... T_1 T_2 i T_{12}

За магнете M_1 узимамо место два елемента $d\tau$ и $d\tau'$ са масама m_1 и m_1' онда је потенцијал сваког ~~на~~ како је из одстојања између $d\tau_1$ и $d\tau_1'$:



$$T_1 = \frac{1}{2}\iint \frac{m_1 m_1' d\tau_1 d\tau_1'}{r_1}$$

$$T_2 = \iint \frac{m_2 m_2' d\tau_2 d\tau_2'}{r_{22}}$$

Потенцијал магнета одбијања M_1 на M_2 је:

$$T_{12} = \iint \frac{m_1 m_2 d\tau_1 d\tau_2}{r_{12}}$$

§ 32 Магнетска индукција кугле. Кугла се индукована свуда у магнетном од неког извора кад и она мере у магнетско поље. па за моменат је зове

Нека је магнетска сила у хомогеном пољу свуда стална и нека су њене компоненте A, B, C (на пр. услед земљиног магнетизма)

Кад се у ово поље стави кугла и одредимо начин је сила у њеној кугли обављене. Магнетски је потенцијал φ дефинисан једначинама:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -A \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -B \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -C$$

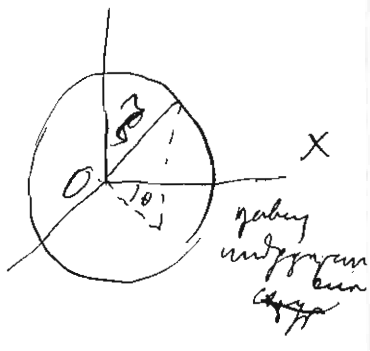
Ово важи за цело поље а изван ове једначине за диелектрицитет.

Ако су φ_i и φ_a вредности за φ у кугли и ван ње

мора је на површини кугле:

$$\varphi_i = \varphi_a$$

$$\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}$$



Нека су поларне координате r и θ центар кугле у O

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 r\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}}{\partial\theta} = 0 .$$

$$\varphi = u \cos\theta$$

и је функција од r

$$\frac{d^2 ru}{dr^2} - \frac{2}{r} u = 0$$

партикуларни су интеграли r и r^{-2}

$$u_e = A_1 r + \frac{B_2}{r^2} \quad и \quad u_i = B_1 r.$$

или

$$\varphi_e = \left(A_1 r + \frac{B_2}{r^2}\right)\cos\theta = A_1 x + \frac{B_2 x}{r^3}$$

~~Из услова да за $r=0$ $\varphi_i = Const$~~ $B_2 = 0$ и

$$\varphi_i = (A_1 r) \cos\theta = C_1 x.$$

Из услова $\varphi_i = \varphi_a$ и $\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial n}$

имамо:

Ако је c полупречник лопте:

$$A_1 c + \frac{B_2}{c^2} = C_1 c \quad или \quad A_1 + \frac{B_2}{c^3} = C_1$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = C_1 \quad и \quad \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = A_1 + \frac{B_2}{r^3} - \frac{B_2 3x}{r^4}\frac{dr}{dx}\frac{x}{r}$$

$$\mu C_1 = A_1 + \frac{B_2}{c^3} - \frac{3B_2}{c^3} = A_1 - \frac{2B_2}{c^3} \dots$$

$$-A = \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = A_1 - \frac{B_2}{r^3}$$

За константе су обе једначине:

$$A_1 + \frac{B_2}{c^3} = C_1 \qquad -A + \frac{B_2}{c^3} = C_1$$

$$A_1 + \frac{2B_2}{c^3} = \mu C_1 \qquad -A - \frac{2B_2}{c_3} = \mu C_1$$

$$A_1 - \frac{2B_2}{x^3 = \infty} = -A. \qquad \overline{-3A = C_1(\mu+2)}$$

$$C_1 = \frac{-3}{(\mu+2)} A \qquad B_2 = A c_3 \frac{\mu-1}{\mu+2}$$

Потенцијал је:

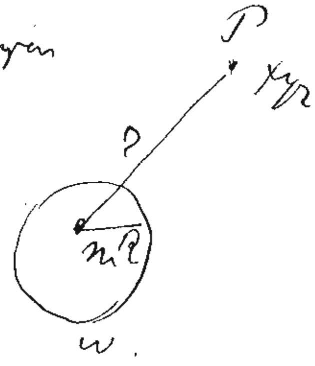
$$\varphi_e = -Ax - \frac{Ac^3}{(\mu+2)}\frac{x}{r^3}(\mu-1)$$

$$\varphi_i = \frac{-3A}{\mu+2} x.$$

§ 33 Zagadka. Niech $\mu = 1$ ... równania

$\Delta \phi = 0$ ... granice ... momentu (każdego dźwięku) ... potencjału φ. Potencjał ... $\phi + \varphi$ ...

$$\chi = \phi + \varphi .$$



Ograniczony dźwięk ... O ... energię ... O. Ona jest równa:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\chi \mathfrak{M})\, d\tau - \frac{1}{8\pi}\int \chi\, \Delta\chi\, d\tau \;..$$

Tażący

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \chi \frac{\partial \chi}{\partial n}\, d\omega + \frac{1}{2}\int \chi\, m\, d\tau \qquad \text{bo } \Delta\chi = \Delta\varphi = -4\pi m$$

Niech ... o ... promienia R

... $\phi = -Xx - Yy - Zz$

... :

$$\varphi = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R^3}$$

$\alpha\ \beta\ \gamma$ ... momentu dźwięku.

Niech $d\omega$ element ... promienia jednostkowego

$\xi\ \eta\ \zeta$ ... $d\omega$

$$x = R\xi \quad y = R\eta \quad z = R\zeta \quad d\sigma = R^2 d\omega$$

$$\int \xi^2 d\omega = \int \eta^2 d\omega = \int \zeta^2 d\omega = 4\pi/3$$

$$\int \eta\zeta\, d\omega = \int \zeta\xi\, d\omega = \int \xi\eta\, d\omega = 0 .$$

...:

$$\phi = -R[X\xi + Y\eta + Z\zeta) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial n} = -(X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

$$\varphi = \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{R^3} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{2(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)}{R^3}$$

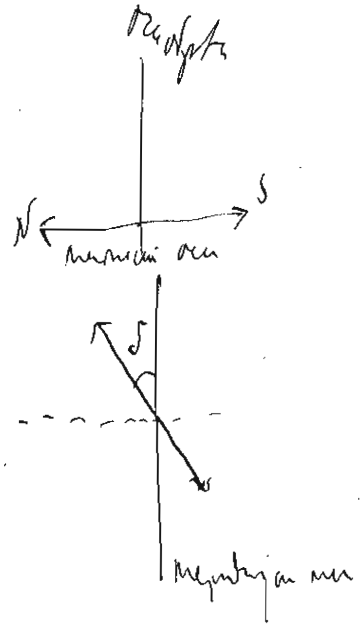
$$\int \chi\, m\, d\tau = \int \varphi\, m\, d\tau - (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)$$

$$\int \chi \frac{\partial \chi}{\partial n}\, d\sigma = \frac{4\pi}{3} R^3 (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{4\pi}{3}(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)$$

Ako je l momenat [illegible] L [illegible] u [illegible] magnetskom X Y Z [illegible]

$$T = \frac{1}{2}\int \varphi m\, dv + \frac{l}{6} R^3 L^2 - \frac{1}{3} L\, l \cos Ll$$

Samo $T_1 = -\frac{1}{3} L l \cos(Ll)$ zavisi od [illegible] [illegible] [illegible].



Ako je L [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] i [illegible]

$$T_1 = -\tfrac{1}{3} L l \cos i \cos\delta$$

za $H = l \cos i$

$$T_1 = -\tfrac{1}{3} H l \cos\vartheta$$

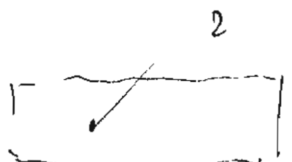
Iz [illegible] o [illegible] [illegible]:

$$\frac{1}{2} K_1 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{3} H l \cos + h(\text{const})$$

[illegible]

$$K_1 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\tfrac{1}{3} H l \sin\vartheta$$

Momenti [illegible] [illegible] [illegible]

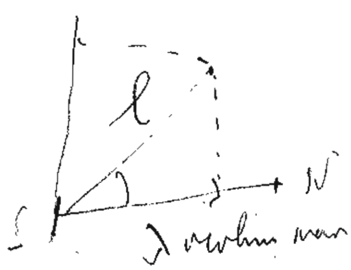


$$\varphi = \int \frac{m\, dv}{r}$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{R^3}$$

Magnetski momenti $\alpha = \int x_1 m\, dv \quad \beta = \int y_1 m\, dv \quad \gamma = \int z_1 m\, dv \quad \int m\, dv =$



$$\varphi = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{R^3}$$

$$l = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

$$l\cos(\lambda x) = \alpha \quad l\cos(\lambda y) = \beta \quad l\cos(\lambda z) = \gamma$$

$$T_{12} = \iint \frac{m_1 m_2\, dv_1\, dv_2}{r_{12}} = \int \varphi_1 m_2\, dv_2$$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 z_2}{R^3}$$

$$T_{12} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{R^3} = \frac{l_1 l_2 \cos(\lambda_1 \lambda_2)}{R^3}$$

I

- Електромагнетизам -

§34 Дефиниција. Је ово својство да се дејство затворене струје на пол магнетски еквивалентно са дејством магнетског листа.

§. Ово се изводи из основних експерименталних закона:

1). Две супротне струје исте јачине (интензитета) а једнаког правца делују на магнетски пол једнако а супротна дејства.

2). Сила, којом дејствује струја на пол магнетски сразмерна је јачини струје.

3). Струја кривудава једнака је са струјом праволинијском, ако им су крајеви исти.

Из ова три закона долазимо довде:

Сила је, услед дејства струје на магнетни пол, извод извесне функције које се са α β γ означе компоненте те силе онда је:

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

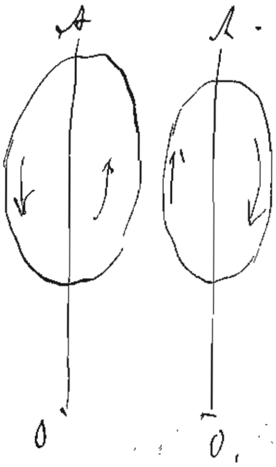
Ω се зове потенцијал струје, а $\alpha\ \beta\ \gamma$ су компоненте силе, а $x\ y\ z$ где се пол магнетски налази.

§35 За одредбу функције Ω послужићемо се неколиким ставовима изведеним из Ампер-ових ознака.

1) ставка. Потенцијал је струје једнак са збиром потенцијала разних делова, на који се струја може разложити.

Ако је ABCD затворена струја, она се може разложити на две ABCA и ACDA, ефекат струје AC је једнак струји и другој може заменити противним правцем

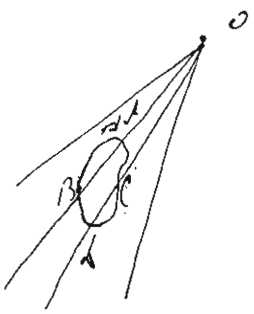
./.



II. теорема. Потенцијал затворене струје исти [illegible] управни нула у свакој тачки О ван струје.

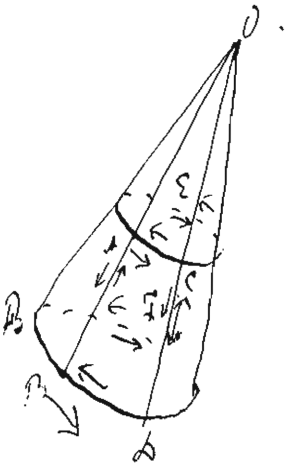
Ако ОА симетрала ове струје и ово се налази нађем у О, потенцијал у О не мења ако се струја обрне услед обртања око ОА за 180°. На основу горе закона о струјама [illegible] само да [illegible] тако али ј потенцијал нула.

Ово биће за не [illegible] облик струје управни



III. теорема. Ако струја иде по линији која се налази на површини конуса са тачке О, тако да сваки [illegible] струји [illegible] а О се налази ван струје, потенцијал је у тачки О нула.

Ако су AB и CD бесконачно блиске генератрисе (изводнице) струја се распада на две управне ACDB а њен је ефекат у О нула на основу II-ге теореме.



IV. теорема. Ако се струја налази на површини конуса изводнице [illegible] исте [illegible] ефекат, односно потенцијал за ове тачке у тачки О исти.

Нека су ACE и BDF две струје исте [illegible], ако се обим струјама додају струје исте јачине а супротне ефекат [illegible] у О нула. То ће бити ако овој комбинацији додамо струје AB и CD. На овај се начин састоји систем од ових делова:

1). струја $ACDB = M_1$

2). затворене струје $ABFDCEA = M_2$

3). струја $BDF = M_3$

4). струја $ACE = M_4$

$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 0$

$M_1 = 0 \quad M_2 = 0$ по III-ој теореми

$M_3 = -M_4$

$BDF \equiv -ACE$ или $\underline{ACE = BDF}$

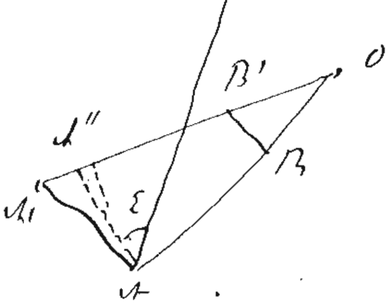
§ 36. Iz izvedenog izraza vidimo u pogledu zakona § 1. ... vidimo da je potencijal zatvorene struje i tačke O kod struje jednak iφ, gdje je i jačina struje a φ prostorni kut pod kojim se iz O vidi struja, tj. je površina plohe [illegible] koju [illegible] je [illegible] od O [illegible] je struja.

$$\Omega = A\varphi i$$

A je konstanta koja je jednaka jedinici za jedinice kao i ostale elektromagnetske jedinice.

Dakle ... struja ne ... kao struja nekog znak. Ako se za pozitivni smjer struje uzme smjer ... koji se ... struje ... tada ispred φ dolazi + ili − prema tome da li je ... pozitivni ili negativni smjer struje.

§ 37 Potencijal elementarne struje. Neka je zatvorena struja AA' u kojoj se potencijal u tački O. Ako je AOA' elementarni kut iz O vidi dφ onda je elementarni potencijal:



$$d\Omega = i\,d\varphi \quad \ldots \quad I.$$

dφ je površina BB' na kugli polumjera jedan oko centra O. Iz crteža je:

$$AA'' = r^2 d\varphi$$

i

$$AA'\cos\varepsilon = AA'' = r^2 d\varphi$$

Kad se to uvrsti u I dobivamo:

$$d\Omega = \frac{i\,d\omega\cos\varepsilon}{r^2} \quad \ldots \quad II$$

Ako se element površine AA' označi sa dω

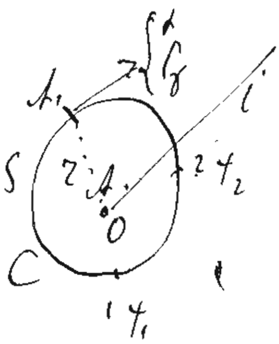
Izraz u II je jednak sa potencijalom za magnetski ...:

$$d\Omega = \frac{\varphi\,d\omega\cos\varepsilon}{r^2}$$

gdje je φ = i, ...

Ovaj [illegible] u ako cy potencijal magnetskih [illegible] struja za $\Phi = i$ [illegible] struja [illegible]. Potencijal je magnetske [illegible] jednoznačna funkcija, gde je potencijal struje [illegible] više vrednosti [illegible].

Ako cy $\alpha\ \beta\ \gamma$ izvodi potencijala, onda se [illegible] potencijal ako [illegible] u [illegible] krivoj [illegible]:



$$\int \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = -\int^2 d\psi = \psi_1 - \psi_2$$

[illegible] za [illegible]:

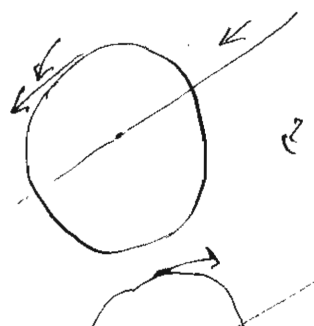
$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\beta}{dx}, \quad \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\gamma}{dx} \quad \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy}$$

u [illegible] funkciji ψ u [illegible] potencijal [illegible] krivoj C.

Ako kriva C obilazi struju i [illegible] struja i [illegible] [illegible] $\alpha\ \beta\ \gamma$ [illegible], onda $\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ nije [illegible]

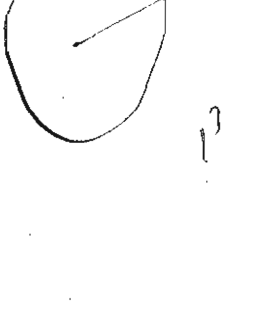
Po [illegible] zakonu je elektromagnetska [illegible]

$$\frac{\varepsilon i}{r}$$



Ako cy [illegible] elektromagnetske za i $\varepsilon = 2$ u [illegible] je $\frac{2i}{r}$.

Pa [illegible], [illegible] C [illegible] u [illegible] $\frac{2i}{r} \cdot 2r\pi = 4\pi i$



Ako se [illegible] krivoj C koja [illegible] struju [illegible] elektromagnetska [illegible] krivoj:

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = -\int\left(\frac{d\Omega}{dx}dx + \frac{d\Omega}{dy}dy + \frac{d\Omega}{dz}dz\right)$$

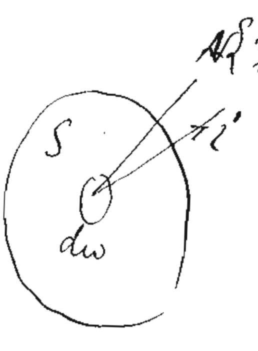
$$= -\int \frac{d\Omega}{ds} ds = \pm 4\pi i \ldots\ldots$$

Znak je + kad kontura C obuhvata struju [illegible] [illegible] u − obratno.

Ако имамо више струја које иду од њих на обичан тон у проводнику једнаке пермитанта из ... од сваке струје и рад је магнетоелектрични (пермитанти струја) рад од свих струја компоненат и он је $\pm\Sigma \pm 4\pi i$. Знак и Σ зависи од свих струја које контура обухвата.

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \Sigma i \ldots$$

Ова се једначина може овако интерпретовати. Ако замислимо површину ограничену контуром c. Све струје са истим знаком пролазе кроз ову површину у једном правцу остале у другом. Како је i јачина струје, количина електрицитета за јединицу времена кроз S, то је Σi тој количини електрицитета кроз S за јединицу времена. Отуда је: Рад електромагнетски кад се иде по C око обухваћене више струја једнак је 4π × количине електрицитета кроз S.



§38 За рад електромагнетски можемо казати и друго правило. Ако се u v w означимо компоненте сложене електрицитета у струји и са dω један елемент струје и површине S, са l m n косинусе правца нормале N на dω, количина је електрицитета који иде кроз S:

$$\Sigma i = \Sigma(lu+mv+nw)d\omega$$

Ако се ово замени у горњи израз имамо да је:

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 4\pi \int (lu + mv + nw) d\omega \ldots I.$$

§. Ако Stokes-ову теорему применимо која каже:

$$\int(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) = \int\left\{l\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + m\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) + n\left[\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]\right\} d\omega$$

наћићемо обе односе:

./.

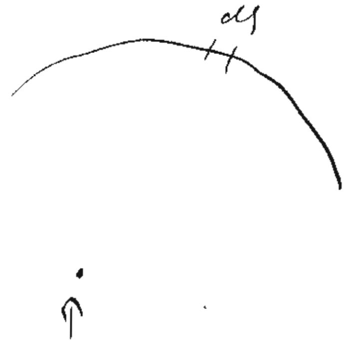
$$u = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right)$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)$$

Ово су Максвелове једначине између u v w компонената јачине струје и α β γ компонената електромагнетске силе. Ове се једначине примењују и на струје помераја као и на струје спроводника, примењујући [illegible] по Омовом и Џуловом закону.

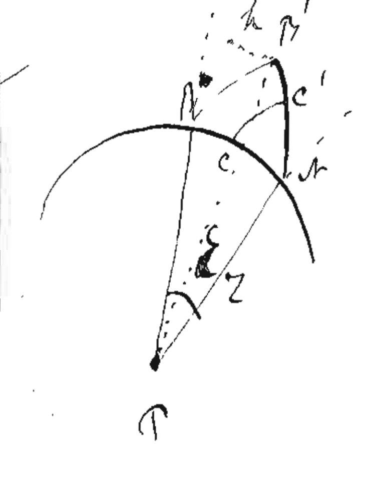
§. 39 Дејство магнета на елеменат струје. Ово је [illegible] раније дејства на основу принципа акције и реакције.



Ако имамо магнетски пол јачине једнак јединици [illegible] елемент струје и Ψ је угао [illegible] P [illegible], компоненте су силе од дејства струје на пол:

$$-\frac{d\Psi}{dx} \quad -\frac{d\Psi}{dy} \quad -\frac{d\Psi}{dz}$$

Дејство пола P на елеменат струје су сила [illegible] супротног знака. [illegible] dΨ обрнуто сразмерно [illegible] P и елемента струје ds. (Био-Саваров закон).



§. 40 Тада [illegible] одредићемо [illegible] два положаја кад се струја помера из положаја AB у AB'. Тада је [illegible] dΨ [illegible] тачке P [illegible] AB.

Кад струја дође из AB у AB' [illegible] dΨ [illegible] ABB'

Запремина је пирамиде PABB':

$$\frac{r^2 \sin\varepsilon\, ds}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

Ако се [illegible] основицу [illegible] ABB' а за висину [illegible]

- / .

изведена из B' на PAB.

Ка је исто сагјенисава јединична и

$$\frac{r^3 d\varphi}{3}$$

ако се за основицу узме површина троугла $ABB' = r^2 d\varphi$ а за висину $AP = r$

Из напред ових једначина налази се да је рад $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{\sin\varepsilon}{2}\frac{h}{R} \quad \ldots \quad (I.$$

Ово је рад од непознате силе f, која долази од дејства масе на елемент AB. Овај се рад може узети као производ из силе f која дејствује у тачки C и пута $CC' \cos(CC'f)$

$$f \cdot CC'\cos(CC'f) = f \cdot \frac{BB_1}{2} \cdot \cos(CC'f) = \frac{f h'}{2} \cdot (II.$$

h' је пројекција пута BB_1 на правац силе.

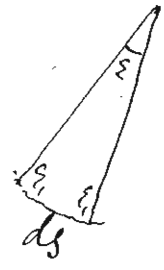
Из I и II имамо:

$$f h' = \frac{\sin\varepsilon}{2} h.$$

Ова је једначина задовољена са $h = h'$ и $f = \frac{\sin\varepsilon}{r}$.

$h = h'$ значи да је сила управна на правцу PAB.

Ово је дакле за јединицу сфере 1 и јединицу масе 1, ако је јединица сфере i а маса m онда је сила, од масе m на елемент сфере:



$$f = \frac{m i \sin\varepsilon}{r} = \frac{m i \varepsilon}{r} = \frac{m i\, ds}{r^2} \quad \ldots (III.$$

Како је $\sin\varepsilon : \sin\varepsilon_1 = ds : r \qquad \varepsilon = \frac{ds}{r}$

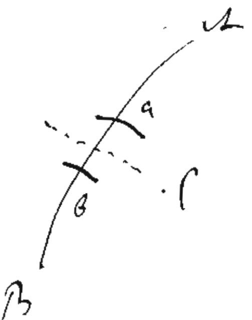
Из III је јасно да је обрнуто сразмерна са квадратом одстојања сила f. (дејства масе на елемент сфере).

Четврта глава

I

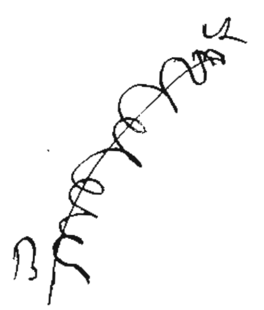
– Електродинамика –

§. 41 Индукција, која се догађа само електромагнетним [illegible] о редукцији [illegible] у разлици између две струје интензитета i и i_1 функције ових јачина и уопште функције [illegible] одређеног [illegible] ових струја.



§. 42 Соленоид. Ако се струја AB дели на делове ab = [illegible] спирала C [illegible] елементарне [illegible] затвореним кругом [illegible] струје [illegible] јачине i, онда се [illegible] соленоидом.

Свака елементарна струја [illegible] соленоида је једнака, [illegible] на [illegible] магнета [illegible] јачине i. Ако је [illegible] једнака δ, количина магнетизма $+\frac{i}{\delta}d\omega$ и $-\frac{i}{\delta}d\omega$, [illegible] C [illegible] магнетских маса [illegible] на [illegible] тако да [illegible] соленоида [illegible] маса магнетизма $+\frac{i}{\delta}d\omega$ и $\frac{i}{\delta}d\omega$ [illegible] у крајевима A и B



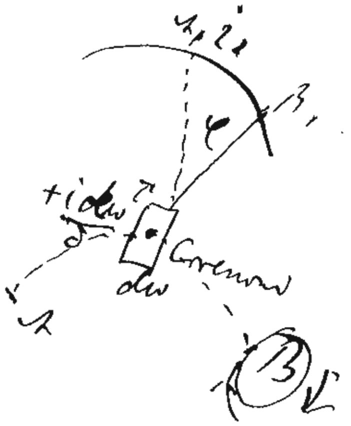
Један од полова A или B може се налазити у бесконачности.

Ако је соленоид затворен, крајеви A и B [illegible] дејство не [illegible] магнетског [illegible] да је дејство соленоида [illegible] зависно од [illegible] полова A и B.

§. 73 Магнетни потенцијал магнетског пола на елементарну струју $i\,m\,dl$ или $i\,m\,\varphi$, где је φ угао под којим се види из пола струја. Ако се пол смести према соленоиду онда је његов $m = \pm \frac{i\,d\omega}{\delta}$ и према томе:

$$T = \pm\, a \frac{i\,i'\,d\omega}{\delta}\,\varphi \quad . \; . \; . \; 1.$$

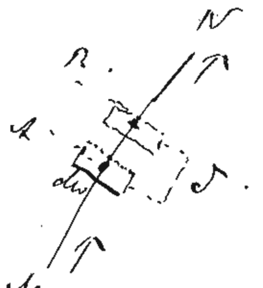
потенцијал струје i' који се односи у јединици струје i.



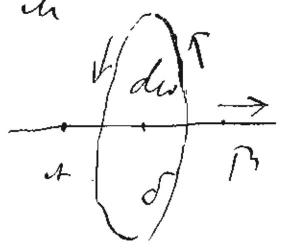
Ако узмемо дуж елемента електромагнетске $a = 1$ и из φ имамо:

$$T = \pm \frac{i\,i_1\,d\omega}{\delta}\,\varphi.$$

Знак + или − односи се смеру струје у соленоиду AB.



§. 74 Потенцијал електродинамички бесконачно малих струја. Бесконачно мали део струје MN се може сматрати као елемент соленоида дужине δ. Ако је површина пресека кроз који иде струја $d\omega$, онда се струја своди на соленоид који се може ... наћи магнетских $+\frac{i\,d\omega}{\delta}$ и $-\frac{i\,d\omega}{\delta}$ у A и B у размаку δ.



Ако је Ω потенцијал целог система сталних струја на јединицу магнетизма у A, у B ће бити потенцијал $\Omega + d\Omega$ и потенцијал је магнетских маса у A и B, према се замењује струја:

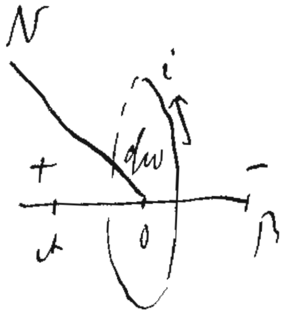
$$\Omega \frac{i\,d\omega}{\delta} - (\Omega + d\Omega)\frac{i\,d\omega}{\delta} = - d\Omega \frac{i\,d\omega}{\delta} \quad . \; . \; 2.$$

Нека су $x\,y\,z$ координате тачке A онда је:

$$d\Omega = \frac{d\Omega}{dx}dx + \frac{d\Omega}{dy}dy + \frac{d\Omega}{dz}dz$$

/.

zatem:



$$d\Omega = -(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \ldots \quad 2$$

α, β, γ są składowemi siły jaką działa obieg na jednostkę magnetyzmu w A.

Jeśli δN rzutowana na dω i l, m, n kosinusy kierunkowe normalnej, wtedy jest:

$$dx = l\delta \quad dy = m\delta \quad dz = n\delta$$

a więc z 2 jest:

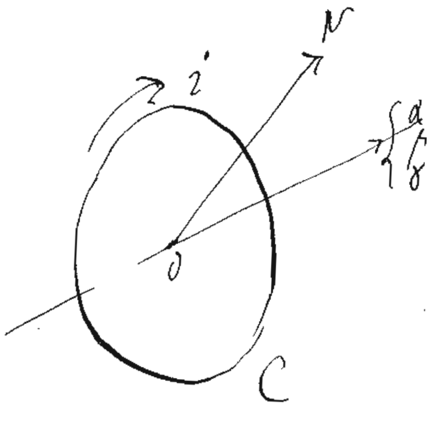
$$d\Omega = -(\alpha l + \beta m + \gamma n)\delta$$

Jeśli w jednostce magnetyzmu w A umieścimy ilość $\frac{i\,d\omega}{\delta}$ wtedy jest wzajemna potencjalna energia obiegu:

$$-d\Omega \frac{i\,d\omega}{\delta} = i(\alpha l + \beta m + \gamma n)\,d\omega \ldots \quad 3$$

Obok jest wzajemna elementarnego obiegu jednak wyrażona [illegible] i że obieg ten [illegible] jako elementarny [illegible]. x

Jeśli uważamy zatem [illegible] obieg który dzieli się na końcowy obieg większy, oba a większy obieg może [illegible] na elementarne obiegi [illegible], od których jest także wzajemna [illegible] danej jednostkami 3 a wzajemna jest elektromagnetyczna całego obiegu większego (zamkniętego)



$$T = i\int(\alpha l + \beta m + \gamma n)\,d\omega \ldots \quad I.$$

Uważając że się tyczy na całej powierzchni ograniczonej [illegible] w której leży zamknięta obiegu.

§ 75 Dowodzenie wzoru wzajemnego potencjału danego obiegu o [illegible] a integral w I może w Stokes-owego [illegible] [illegible]:

$$T = i\int_C (F dx + G dy + H dz) = i\int_0 \left[\sum l\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) d\omega\right.$$

Ако се ове трансформације уврсте у I α β и γ добију се следеће једначине:

$$\alpha = \frac{dH}{\partial y} - \frac{dG}{dz}$$
$$\beta = \frac{dF}{\partial z} - \frac{dH}{dx} \quad \ldots \quad (II.)$$
$$\gamma = \frac{dG}{\partial x} - \frac{dF}{dy}$$

Максвел узима F G и H компонентама момента електромагнетског (Ово је моменат струје у систему вектора).

§. 76 Потенцијал за струју кад се ствара у средини магнетској.

Компоненте магнетске силе биће дате изразима:

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \quad \beta = -\frac{d\Omega}{dy} \quad \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}$$

а магнетске индукције:

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C.$$

Ω је потенцијал магнета, A, B, C су компоненте магнетизације.

Ако се A, B C по Поасону смене са $\mu_0\alpha$, $\mu_0\beta$, $\mu_0\gamma$ и $1 + 4\pi\mu_0 = \mu$ онда су:

$$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta \quad c = \mu\gamma.$$

Ако нема средине магнетске у II место α, β γ имамо a, b c.

Из II имамо:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0$$

ово важи за a b c увек и у II α β γ само смените са a b c. Кад се ово учини једначине су:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$
$$b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \quad \ldots \quad (III)$$
$$c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

./.

7. Одређ. F G H. Ако једначине из 3 заграде крајине F, G H мењају у $F + \frac{\partial X}{\partial x}$, $G + \frac{\partial X}{\partial y}$, $H + \frac{\partial X}{\partial z}$. Оне је ово одмах:

$$\frac{d}{dy}\left(H + \frac{\partial X}{\partial z}\right) - \frac{d}{dz}\left(G + \frac{dX}{dy}\right) = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} - \frac{dG}{\partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}.$$

Да би нашли F G H вала из II наћи α β γ и заменити у једначине за u v w, као и оне обичне добићемо за u и др.

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = \frac{d^2 G}{dx\,dy} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{dz^2} + \frac{d^2 H}{dx\,dz}$$

Додавањем $\frac{d^2 F}{dx^2}$ и одузимањем имамо:

$$4\pi u = -\Sigma \frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right]$$

Ако се $\Sigma \frac{\partial F}{\partial x}$ означи са J имаћемо:

$$4\pi u = \frac{dJ}{dx} - \Delta F$$

$$4\pi v = \frac{dJ}{dy} - \Delta G$$

$$4\pi w = \frac{dJ}{dz} - \Delta H.$$

Како је пак код конструкције J:

$$J = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \text{имамо:}$$

$$4\pi u + \Delta F = 0$$

$$4\pi v + \Delta G = 0 \qquad \ldots \quad \text{IV.}$$

$$4\pi w + \Delta H = 0$$

Из овога је једначина јасно да су F, G и H дати изразима:

интеграли:

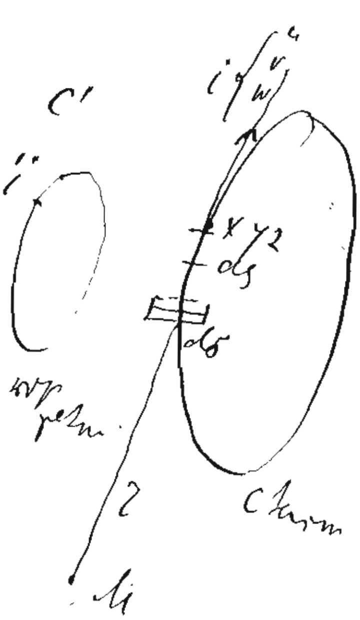
$$F = \int \frac{u}{r} d\tau, \quad G = \int \frac{v}{r} d\tau \quad H = \int \frac{w}{r} d\tau.$$

Ако су елементи ... $u\,d\tau$, $v\,d\tau$, $w\,d\tau$, где су u v w компоненте струје електрицитета у $d\tau$ а r је отстојање запремине $d\tau$ од тачке у којој се траже елементи.

Ако је средина магнетска $\alpha\ \beta\ \gamma$ важна у (II) заменити са $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$ и F G H ће дати ове изразе:

$$F = \mu \int \frac{u}{r} d\tau, \quad G = \mu \int \frac{v}{r} d\tau, \quad H = \mu \int \frac{w}{r} d\tau$$

§ 47 Вредности за F G H у случају кад је струја линеарна. Нека се у простору налази само једна струја, која иде кроз пресек $d\sigma$. Нека је јачина ове струје i, струја електрицитета тада је $\frac{i}{d\sigma}$ и он у правцу тангенте. Компоненте ... струје i $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$ и:



$$u = \frac{i}{d\sigma}\frac{dx}{ds} \quad v = \frac{i}{d\sigma}\frac{dy}{ds} \quad w = \frac{i}{d\sigma}\frac{dz}{ds}$$

или, пошто је $d\tau = ds\,d\sigma$

$$u = i\frac{dx}{d\tau}, \quad v = i\frac{dy}{d\tau} \quad w = i\frac{dz}{d\tau}$$

Компоненте F G H у тачки M су:

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau = \int \frac{i\,dx}{r} = i\int\frac{dx}{r}$$

$$G = i\int\frac{dy}{r} \quad H = i\int\frac{dz}{r}$$

§ 48 Ако имамо две струје од којих је једна стална C а друга отворена C' и имали су интензитет i и i', ... елементарне струје C. Дати израз

/.

7. Одређа F G H. Ако једначине ових 3 заграђене криве F, G H награди и $F+\frac{\partial X}{\partial x}$, $G+\frac{\partial X}{\partial y}$, $H+\frac{\partial X}{\partial z}$. Оне је ово однос:

$$\frac{d}{\partial y}\left(H+\frac{\partial X}{\partial z}\right)-\frac{d}{dz}\left(G+\frac{dX}{\partial y}\right)=\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial^2 X}{\partial y\partial z}-\frac{dG}{\partial z}-\frac{\partial^2 X}{\partial y\partial z}$$

$$=\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Да да нађемо F G H. бада из II нађе $\alpha\ \beta\ \gamma$ и заменимо у једначине за u v w, као и оне обичне добићемо за u на пр.

$$4\pi u=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=\frac{d^2G}{dx\,dy}-\frac{\partial^2F}{\partial y^2}-\frac{\partial^2F}{dz^2}+\frac{d^2H}{dx\,dz}$$

Додавањем $\frac{d^2F}{dx^2}$ и одузимањем имамо:

$$4\pi u=-\sum\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right]$$

Ако се $\sum\frac{dF}{dx}$ означи са J имаћемо:

$$4\pi u=\frac{dJ}{dx}-\Delta F$$

$$4\pi v=\frac{dJ}{dy}-\Delta G$$

$$4\pi w=\frac{dJ}{dz}-\Delta H$$

Кад и уведе Кла. хипотезу дај:

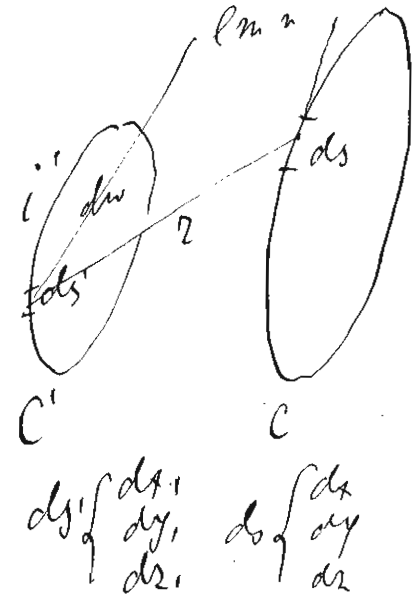
$$J=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0 \quad \text{имамо:}$$

$$4\pi u+\Delta F=0$$

$$4\pi v+\Delta G=0 \qquad \ldots \qquad \text{IV.}$$

$$4\pi w+\Delta H=0$$

Из ових је једначина јасно да су F, G и H дати изразима:



$$T' = i_1 \int (\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1) \frac{dw}{l_1} = \ldots \int \sum \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) l\, d\ldots$$

или

$$= i_1 \int \sum F dx_1$$

$$T' = i_1 \int [F dx_1 + G dy_1 + H dz_1].$$

F, G и H зависе од струје C и ... у тачки

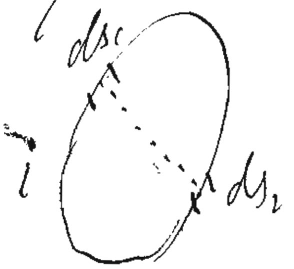
$$F = i \int \frac{dx}{r}, \quad G = i \int \frac{dy}{r} \quad H = i \int \frac{dz}{dr}$$

Кад их заменимо у T' налазимо израз:

$$T' = i i_1 \int \frac{dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1}{r}$$

или:

$$T' = i i_1 \int \frac{ds\, ds' \cos(ds\, ds_1)}{r} \ldots \quad (I.$$



Овај образац Нојманов за потенцијал електродинамичке струје C односно струје C₁.

Из обрасца I можемо лако добити електродинамички потенцијал [своје] струје односно саме себе.

Ваља само узети потенцијал елемента ds₁ од другог елемента; из I ја онда имамо потенцијал:

$$T_1 = \frac{i^2}{2} \int \frac{ds\, ds_1 \cos ds\, ds_1}{r} \ldots \quad (II$$

Овде је узета ½ јер се сваки елементи два пута узима у рачун.

§. 49 За потенцијал T' две струје можемо добити и другојачији израз.

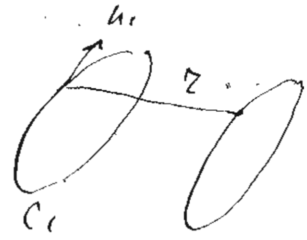
За T' смо нашли израз:

$$T' = i_1 \int (F dx_1 + G dy_1 + H dz_1)$$

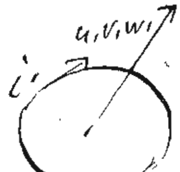
Како је $i_1 dx_1 = u_1 d\tau_1$ и т. д.

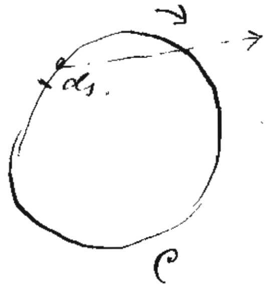
то је онда:

$$T = \int (F u_1 + G v_1 + H w_1)\, d\tau$$



§ 50 Електродинамички потенцијал једне струје односно ње саме. Нека су u, v, w, $F\ G\ H$ компоненте струје електричне [illegible] у ds, а моменат електромагнетски и T електродинамички потенцијал струје односно саме ње. Ако се $u\ v\ w$ промене за $du, dv\ dw$ $F\ G\ H$ и T а мењају се dF, dG, dH, dT. Може се струја [illegible] сматрати као [illegible] струје [illegible] и оне од du, dv, dw. dT је потенцијал струје $u\ v\ w$ односно $du, dv\ dw$ и [illegible] односно ње саме. Потенцијал је струје $u\ v\ w$ односно [illegible] струје:





$$dT = \int [u\, dF + v\, dG + w\, dH)\, d\tau \quad \ldots \quad 1.$$

Потенцијал је [illegible] струје односно [illegible] кола која се може занемарити ($\int du\, dF = 0$.

dT се може сматрати да је једнак потенцијалу [illegible] струје односно [illegible] струји и једној компоненти [illegible]:

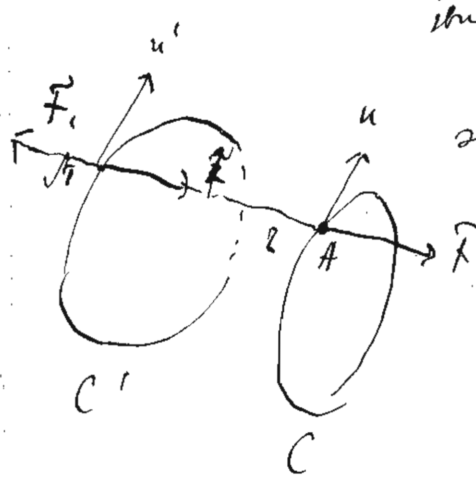
$$dT = \int [du\, F + dv\, G + dw\, H) \quad \ldots \quad 2.$$

Из 1 и 2 ј.

$$dT = \tfrac{1}{2}\, d \int [u F + G v + H w)\, d\tau \quad \text{или}$$

$$T = \frac{1}{2} \int [u F + G v + H w]\, d\tau \quad \ldots \quad I.$$

Овако се назива потенцијал за струју као имамо више струја. Интеграција се врши на [illegible] део у коме се налази проводник.



§.51 Узајамни утицај две оријентисане системе струја одређен ... систем.

Ако ј $u'\ v'\ w'\ d\tau'$ означимо елементе ... A ... :

$$F=\int\frac{u'\,d\tau'}{r}\qquad G=\int\frac{v'\,d\tau'}{r}\qquad H=\int\frac{w'\,d\tau'}{r}$$

Када се обележимо у:

$$T=\tfrac{1}{2}\int(Fu+Gv+Hw)\,d\tau$$

... оријентисане струје C ... онда је:

$$T=\tfrac{1}{2}\int\left(u\int\frac{u'\,d\tau'}{r}+v\int\frac{v'\,d\tau'}{r}+w\int\frac{w'\,d\tau'}{r}\right)d\tau$$

... $d\tau$ и $d\tau'$ ... онда је:

$$T=\iint\frac{(uu'+vv'+ww')}{r}\,d\tau\,d\tau' \quad\ldots\quad (I.$$

§.52 ... :

$$T=\tfrac{1}{2}\int(Fu+Gv+Hw)\,d\tau$$

Ако се обележимо $u\ v\ w$ из једначина:

$$u=\tfrac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)$$
$$v=\ldots$$
$$w=\ldots$$

добићемо:

$$T=\frac{1}{8\pi}\int\left[F\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)+G\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right)+H\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)\right]$$

Ако су F, G, H ... :

из

$$\int_3 F\frac{d\gamma}{dy}\,d\tau=\iint F\gamma m\,d\omega-\int_3\gamma\frac{dF}{dy}\,d\tau$$
$$=0$$

$$=\partial\left(\frac{F\gamma}{\partial y}\right)d\tau=\left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\gamma+F\frac{d\gamma}{dy}\right]d\tau$$

или по Гаусу:

$$\int \frac{\partial (F\gamma)}{\partial y} d\tau = \int F\gamma \cos dw \quad \text{или:}$$

$$\int \left(F \frac{d\gamma}{dy}\right) d\tau = \int F\gamma \cos dw - \int \frac{\partial F}{\partial y} \gamma \, d\tau.$$

Кад се ово смени у израз за T' налазимо:

$$T' = \frac{1}{8\pi} \left[\int \left[\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) + \beta \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \gamma \left[\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] \right] d\tau$$

Ако се обзиром у заграде смене са α β γ па а, b, c односно μα μβ μγ имамо за T':

$$T' = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau$$

или

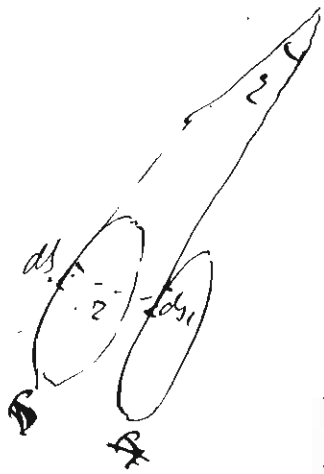
$$T' = \frac{1}{8\pi} \int (\alpha a + \beta b + c\gamma) d\tau$$

или

$$T' = \frac{\mu}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau.$$

Ако имамо систем и линеарних струја онда се налази потенцијал одмах самим тим имамо као а разлику и само довољно знак интеграла ½ сваки елемент две струје.

$$T' = \frac{1}{2} i i' \int \frac{ds \, ds'}{r} \cos \varepsilon$$

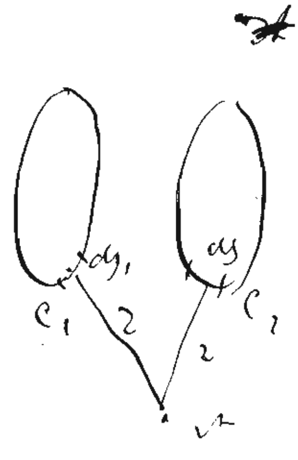


§ 53 **Потенцијал** система од две струје линеарне.
Потенцијалне векторе F G H у једној тачки A ћемо дати:

$$F = i_1 \int \frac{dx_1}{r} + i_2 \int \frac{dx_2}{r}$$

$$G = i_1 \int \frac{dy_1}{r} + i_2 \int \frac{dy_2}{r}$$

$$H = i_1 \int \frac{dz_1}{r} + i_2 \int \frac{dz_2}{r}$$



Ово се назива функцијом од i_1 и i_2

Електродинамичка потенцијална је струје одређена изразом

$$T = \frac{1}{2}\int (Fu + Gv + Hw)\,d\tau \quad \ldots \quad (1)$$

У једној танкој жици струје је:

$u\,d\tau = i_1 dx_1$, у другој је $u\,d\tau = i_2 dx_2$ и т. д.

$v\,d\tau = i_1 dy_1$

$w\,d\tau = i_1 dz_1$

Кад се ово замени у изр. (1) налазимо за T

$$T = \frac{i_1}{2}\int_{C_1}\left[F_1 dx_1 + G_1 dy_1 + H_1 dz_1\right] + \frac{i_2}{2}\int\left[F_2 dx_2 + G_2 dy_2 + H_2 dz_2\right]$$

Кад се F G и H замене одговарајућим вредностима онда је

$$T = \frac{1}{2}\left[L i_1^2 + 2M i_1 i_2 + N i_2^2\right].$$

L, M, N зависе од облика и релативног положаја струја C_1 и C_2. M је $\oint\oint \frac{dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2 + dz_1 dz_2}{r}$ потенцијал једне струје одређен другом. Назива се узајамни потенцијал оба кола. L је потенцијал струје C_1 одређен самим њом кад C_2 не би било и слично је N.

/.

Друга свеска

I

– Индукција –

§.54 Електромоторне силе индукције. Кад се струји мењају јачина и јачине токова јест узрок индуковане струје. (Faraday). Индукцијама струје се сматрају са проводником и јачина да се производе силама електромоторном индукцији.

Односи се индукованих струја добиће до обих закључака. Ако су i_1 и i_2 јачине струја C_1 и C_2 и ако се обе јачине за dt промене за di_1 и di_2 електромоторне силе одређене:

$$A\frac{di_1}{dt} + B\frac{di_2}{dt}$$

$$B\frac{di_1}{dt} + C\frac{di_2}{dt}$$

Прва јесте за C_1 друга за C_2..

§.55 Узимимо случај да су једна од струја i_1 и i_2 [illegible] јачине [illegible] електромоторне силе услед самих кретања.

Нека се само креће струја C_1 у C_2. Електромагнетни [illegible] до ј. [illegible] C и [illegible] C_1 [illegible] струја [illegible]. [illegible] di струје C одређује силе електромоторне $A\frac{di}{dt}$ у струји C. Ако и струја C [illegible] је [illegible] јачине i [illegible] електромоторне силе $-\frac{Ai}{dt}$. [illegible] струје C_1 одређује силе $(A+dA)\frac{i}{dt}$, dA је промене A услед кретања C.

За [illegible] силу имамо израз:

$$(A+dA)\frac{i}{dt} - \frac{Ai}{dt} = i\frac{dA}{dt}.$$

Ако означимо где струје C_1 и C_2 онда су ове електромоторне јачине изазване помицањем проводника:

$$i_1\frac{dA}{dt} + i_2\frac{dB}{dt}$$

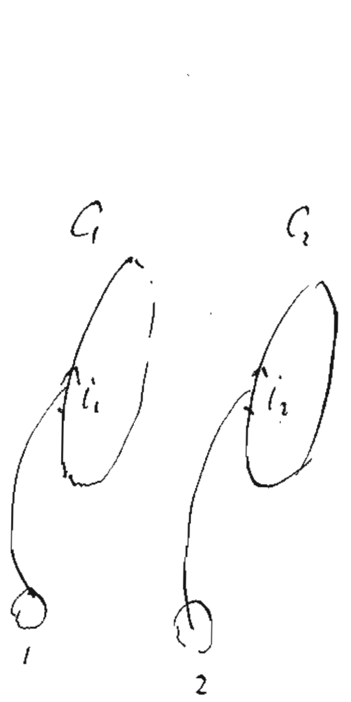
и

$$i_1\frac{dB}{dt} + i_2\frac{dC}{dt}.$$

Ако се мењају и јачине са помицањем, онда су резултујуће ове електромоторне силе збира:

$$A\frac{di_1}{dt} + B\frac{di_2}{dt} + i_1\frac{dA}{dt} + i_2\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(Ai_1 + Bi_2)$$

$$B\frac{di_1}{dt} + C\frac{di_2}{dt} + i_1\frac{dB}{dt} + i_2\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dt}(Bi_1 + Ci_2)$$



7.56 <u>Одредба</u> A, B и C. (Helmholtz). По теме одређене примјером примјене. Консервације енергије.

Нека се јачине i_1 и i_2 одржавају сталним батеријама 1 и 2. Нека су електромоторне силе E_1 и E_2. Енергија хемијска батерија троши се на загревање проводника и последња је енергија за време dt обратна

$$E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt$$

Ова се трансформише у Џулову топлоту загревања проводника и у рад механички услед помицања струје C_1 и C_2. Ако су R_1 и R_2 отпори струја C_1 и C_2 загревање је онда топлота $dt R_1 i_1^2$ и $R_2 i_2^2 dt$. Механички рад услед помицања једнак је са dT, где је интензитет електродинамичке силе одговарајући кинетичка ... dT је варијација T кад се само L, M и N мењају а јачине остају сталне.

За где дефиниција је

$$T = \frac{1}{2}\left[Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2\right]$$

$$dT = dL i_1 + dM i_1 i_2 + dN i_2 \ldots$$

Рачунка измене кинетичке енергије и упоређење тога са рјешењем Максвеловим основа:

$$E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt - R_1 i_1^2 dt - R_2 i_2^2 dt - dT = dZ$$

По принципу конзервације енергије ово је израз за функције заједно. Ако функције нису заједно израз 2 мора дати потпуни диференцијал извјесне функције. Из услова за потпуни диференцијал налазимо A B и C.

Ако се узме да се струје кроз проводнике и да провод: одаје индукционе струје, онда правилом Омовог закона налазимо у једној и другој струји ово:

$$E_1 + \frac{d}{dt}(Ai_1 + Bi_2) = R_1 i_1$$
$$E_2 + \frac{d}{dt}(Bi_1 + Ci_2) = R_2 i_2 \quad \ldots \; 3.$$

Множењем са i_1 i_2 и сабирањем налазимо:

$$E_1 i_1 dt - R_1 i_1^2 dt = -i_1 d(Ai_1 + Bi_2) \quad \ldots \; 4$$
$$E_2 i_2 dt - R_2 i_2^2 dt = -i_2 d(Bi_1 + Ci_2)$$

из 4 и 2 налазимо:

$$-i_1 d(Ai_1 + Bi_2) - i_2 d(Bi_1 + Ci_2) - \frac{1}{2}\left[i_1^2 dL + i_1 i_2 dM + i_2^2 dN\right] \quad \ldots \; 5$$

Ако немамо покрета проводника струје ово се своди на:

$$-Ai_1 di_1 - Bi_1 di_2 - Bi_2 di_1 - Ci_2 di_2 = -\frac{1}{2} d\left[Ai_1^2 + 2Bi_1 i_2 + Ci_2^2\right]$$

а ово је потпуни облик функције:

$$-\frac{1}{2}\left[Ai_1^2 + 2Bi_1 i_2 + Ci_2^2\right]$$

Ако имамо покрета струја i_1 и i_2 диференцијални је израз:

$$-Ai_1 di_1 - Bi_1 di_2 - Bi_2 di_1 - \frac{1}{2} i_1^2 dA - i_1 i_2 dB - \frac{1}{2} i_2^2 dC \quad \ldots \; 6$$

Ale w miejsce S pisząc dostajemy:

$$-A_1 di_1 - B_1 di_2 - B_2 di_1 - C_1 di_2 - i_1^2 dA - 2 i_1 i_2 dB - i_2^2 dC - \tfrac{1}{2} i_1^2 dL - i_1 i_2 dM - \tfrac{i_2^2}{2} dN$$

Z warunku jednoznaczności wynikają z porównania:

$$\tfrac{1}{2} dA = dA + \tfrac{1}{2} dL$$

$$dB = 2dB + dM$$

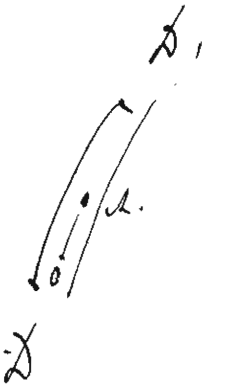
$$\tfrac{1}{2} dC = dC + \tfrac{1}{2} dN$$

czyli

$$A = -L \quad B = -M \quad C = -N$$

A, B i C są koefficyjentami tego prądu i indukcyjnemi elektrodynamicznemi i identycznemi co do L, M, N z koefficyjentami elektrodynamicznemi. Chcąc określić koefficyjenta samoindukcyjnego, L i N są koefficyjentami samoindukcyjnemi a M jest koefficyjentem wzajemnej indukcyi obu prądów.

§. 57 Oznaczenie tych koefficyjentów w Maxwella



Niech w przewodniku DD' naprzeciw jednemu magnesowi A, który wzbudza elektryczność, porusza się magnes A ... od jednego miejsca w obwodzie DD' ... Ale $x_1 x_2 \ldots x_n$ niezależne, które określają ... DD' w obwodzie magnesu A są ... $S\, x_1 x_2 \ldots x_n$.

Jeżeli S jest ... to

$$y = \int_0^t i\,dt = \int_0^t \frac{ds}{dt}\psi(s)\,dt = \psi(s) - \psi(s_0)$$

Ale mamy dwa prądy jako i_1 i i_2 w obwodzie jednego ... i y_1 i y_2 i $x_1 x_2 \ldots x_n$

$$y_1 = \int_0^t i_1\,dt \quad \text{i} \quad y_2 = \int_0^t i_2\,dt.$$

Узете у систему дате Лагранжове
једначине:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q.$$

$i = 1, 2 \ldots n$ за x
и $y_1\, y_2$ за y

Овде је облик тих једначина $n+2$.

T је кинетичка енергија целокупног система и T_1 њен део који потиче од материјалних маса а њен део [illegible] електродинамичких [illegible] интензитета:

$$T = T_1 + \tfrac{1}{2}\left[L i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + N i_2^2\right]$$

$$T_1 = f(x_1 x_2 \ldots x_n\; x_1' x_2' \ldots x_n')$$

$$L = f_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$$ односно исто за M и N

i_1 и i_2 ~~[illegible]~~ су y_1' и y_2' (деривације y_1 и y_2 по времену)

T зависи само од $x_1 x_2 \ldots x_n$, $x_1' x_2' \ldots x_n'$ и $y_1' y_2'$ а не зависи од $y_1\, y_2$

Силе које производе [illegible] електричну:

$$(E_1 - R_1 i_1) + (E_2 - R_2 i_2)$$

Ако са $X_1\, X_2 \ldots X_n$ означимо силе које производе рад механичких органа Q_i добијамо рад при виртуелним померањима:

$$[E_1 - R_1 i_1)\delta y_1 + [E_2 - R_2 i_2]\delta y_2 + X_1 \delta x_1 + \ldots X_n \delta x_n$$

За координату y_1 имамо једначину:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial y_1'} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial\left[L i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + N i_2^2\right]}{\partial y_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_1} = E_1 - R i_1$$

$$\frac{d}{dt}\left[L i_1 + M i_2\right] = E_1 - R i_1$$

или

$$E_1 - \frac{d}{dt}\left[L i_1 + M i_2\right] = R i_1$$

/.

Одавде се види да је електромоторна сила индукције услед [illegible] са супротним знаком од $Li_1 + Mi_2$ [illegible] (Helmholtz)

Ако се оба кола [illegible] и за другу струју [illegible] да је електромоторна сила:

$$-\frac{d}{dt}(Mi_1 + Ni_2)$$

§ 358. Рад електродинамичких сила. Ако једна координата напр. x_1 порасте за δx_1 из Лагранжевих једначина [illegible] сила електромагнетских [illegible]

$$Li_1^2 + 2Mi_1i_2 + Ni_2^2 \text{ не зависи од } x_1' = \frac{dx_1}{dt}.$$

T_1 не зависи од [illegible] x_1 [illegible]

i_1, i_2 не зависе ни од x_1 ни од x_1'

из једначине:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT_1}{dx_1'} - \frac{1}{2}\left(i_1^2\frac{dL}{dx_1} + 2i_1i_2\frac{dM}{dx_1} + i_2^2\frac{dN}{dx_1}\right) = X_1$$

Ако се [illegible] $T_1 = 0$, онда је рад за пораст δx_1

$$X_1\delta x_1 = -\frac{1}{2}\left[i_1^2\delta L + 2i_1i_2\delta M + i_2^2\delta N\right]$$

Ово је рад спољашње силе [illegible] електродинамичких [illegible]

$$\frac{1}{2}\left[i_1^2\delta L + 2i_1i_2\delta M + i_2^2\delta N\right]$$

[illegible]

Ако имамо две струје C_2 и C_1, [illegible] C_2 [illegible] C_2 на C_1

C_2 [illegible] $\delta N = 0$ и рад је електродинамичких сила:

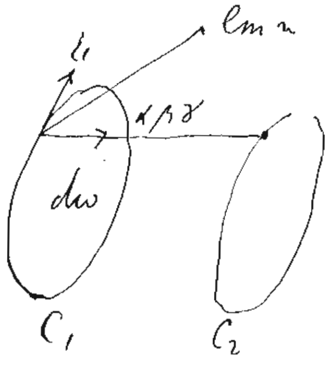
$$\frac{1}{2}\left(i_1^2\delta L + 2i_1i_2\delta M\right)$$

/.

Какав је $i_1 \delta L$ рад ^(од дејства)^ струје C_1 на саму себе тај је
једнак раду од дејства C_1 на C_2 и он износи:

$$i_1 i_2 \delta M$$

$M i_1 i_2$ је потенцијал електродинамичке струје C_1 на струју C_2.
За овај смер ~~рад~~ ^(потенцијал)^ каже да је дат изразом:



$$M i_1 i_2 = i_1 \int (l\alpha + m\beta + n\gamma)\, d\omega$$

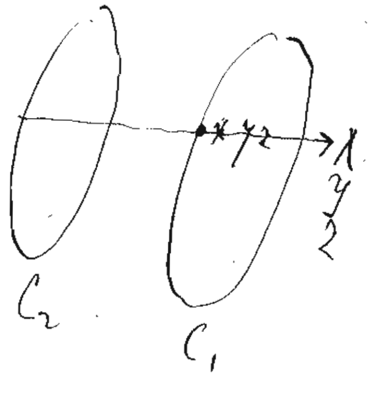
Кад се C_1 креће у немагнетској средини.
Ако је кретање у магнетској средини, ~~рад~~ ^(потенцијал)^ је:

$$M i_1 = i_1 \int (la + mb + nc)\, d\omega$$

a, b, c су компоненте магнетске индукције.
Тад је електродинамички рад између C_1 и C_2

$$i_1 i_2 \delta M = i_1 \int \delta (la + mb + nc)\, d\omega$$

§ 59 Формуле за електродинамичке силе. Ако са $X d\tau$, $Y d\tau$, $Z d\tau$ означимо компоненте електродинамичке силе које производи дејство C_2 на $x\,y\,z$ C_1, рад је њихов сила кад се $x\,y\,z$ помере за $\delta x\, \delta y\, \delta z$:

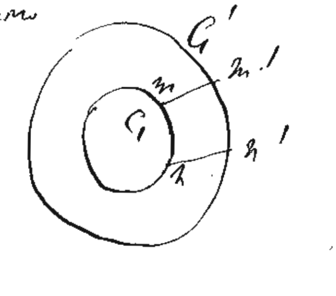


$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau$$

интеграција је по C_1. Овај је рад једнак са раније израженим радом за C_1 и онда је:

$$\int d\tau (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = i_1 \delta \int (la + mb + nc)\, d\omega$$

Нека су C_1 и C' два доста блиска положаја струје C_1. Означимо кад оба два положаја образују површину A и нека је даље интеграл



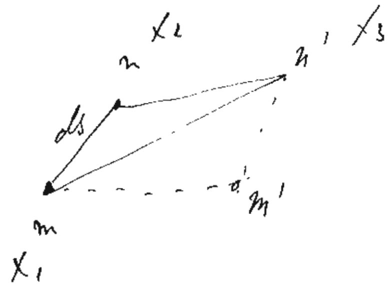
$$\int (la + mb + nc)\, d\tau$$

површине ~~[illegible]~~ ограничене са C_1. Варијација је овог интеграла кад C_1 пређе у C' једнака интегралу по површини између оба круга.

/.

Нека је mn један елеменат на C_1 а $m_1 n_1'$ на C' одговарајући. mn дакле одговарајућим елементима чије пројекције $dx, dy\ dz$, $m_1 n_1'$ $\delta x\ \delta y\ \delta z$

Површина је $m\,n\,n'$



$$(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_3+y_2)(x_3-x_2)-(y_1+y_3)(x_3-x_1)$$

или због $x_3-x_2 = x_3-x_1+x_1-x_2$

$$(y_1+y_2)\,dx+(y_3+y_2)(\delta x-dx)-(y_1+y_3)\,\delta x.$$

или

$$dx\,[y_1-y_3]-\delta x(y_1-y_2)=\delta x\,dy-\delta y\,dx.$$

Ово је пројекција паралелограма $m n m' n'$ на ... Слично и његове друге пројекције онда је ако је dw елеменат површине а $l\ m\ n$ косинуси нормале тог елемента:

$$l\,dw = \delta y\,dz-\delta z\,dy$$
$$m\,dw = \delta z\,dx-\delta x\,dz$$
$$n\,dw = \delta x\,dy-\delta y\,dx.$$

и онда је:

$$\delta\!\!\int\!\!\int(la+mb+nc)\,dw=\int a(\delta y\,dz-\delta z\,dy)+b(\delta z\,dx-\delta x\,dz)+c(\delta x\,dy-\delta y\,dx)$$

Кад се ово учини у изразу за ... добија се:

$$X\,d\tau = i_1(c\,dy-b\,dz)$$
$$Y\,d\tau = i_1(a\,dz-c\,dx)\quad \ldots (I.$$
$$Z\,d\tau = i_1(b\,dx-a\,dy)$$

$$u\,d\tau = i_1\,dx \quad \text{или}$$

$$X = cv-bw$$
$$Y = aw-cu\quad \ldots (II.$$
$$Z = bu-av$$

[illegible]

360 Elektromotorna sila indukcije. Ako se [illegible] struja C_1 [illegible] struja C_2, elektromotorna je sila indukcije u C_1

$$E = -\frac{d}{dt}\left(L i_1 + M i_2\right)$$

$\frac{dL i_1}{dt}$ [illegible] struje C_1 na [illegible], [illegible] struje C_2 [illegible] $\frac{d M i_2}{dt}$

$\delta M i_2$ je promena $M i_2$ kad se struja C_1 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] promena [illegible] kad [illegible] [illegible] [illegible] kad je struja [illegible].

[illegible] je promena $M i_1 i_2$ kad je [illegible] [illegible]:

$$\delta M i_1 i_2 = i_1 \int a(\delta y\, dz - \delta z\, dy) + \dots$$

Odatle je jasno da je $\delta M i_2$ [illegible] [illegible] $\int a(\delta y\, dz - \delta z\, dy) + \dots$

Promena od $M i_2$ kad se [illegible] [illegible] za $M i_2$ [illegible] [illegible]:

$$M i_1 i_2 = i_1 \int_{C_1} F dx + G dy + H dz$$

$$\delta M i_2 = \int_C (\delta F dx + \delta G\, dy + \delta H dz)$$

Konačna je promena od $M i_2$

$$\int a(\delta y\, dz - \delta z\, dy + \delta F dx) + \dots$$

i elektromotorna sila indukcije:

$$-\frac{d M i_2}{dt} = -\left[\int a(y' dz - z' dy) + \dots\right] - \int \left[\frac{dF}{dt} dx + \dots\right]$$

Ako se P Q R označimo komponente indukovane elektromotorne sile nalazimo iz predidućih jednačine za ove:

$$P = cy' - bz' - \frac{dF}{dt} \qquad y' = \frac{dy}{dt}.$$

$$Q = az' - cx' - \frac{dG}{dt} \quad \ldots \quad (III).$$

$$R = bx' - ay' - \frac{dH}{dt}.$$

Kako se P Q u R [illegible]:

$$\int P\,dt = \int\left(cy' - bz' - \frac{dF}{dt}\right)dt$$

iz c y (III) za konstanty [illegible] izraz $-\frac{d\Psi}{dx}$, $-\frac{d\Psi}{dy}$, $-\frac{d\Psi}{dz}$. Maxwell [illegible]

za elektrostatske [illegible].

$$a = \alpha + 4\pi A, \quad b = \beta + 4\pi B, \quad c = \gamma + 4\pi C$$

$$F = \int u\frac{dr}{r} \quad \text{itd.}$$

Uzevši [illegible] F G H

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

ako se za F uzme izraz $\int u\frac{dr}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial x}$

onda jednačine:

$$P = cy' - bz' - \int\frac{du}{dt}\frac{dr}{r} - \frac{d^2\chi}{dx\,dt} - \frac{d\Psi}{dx}$$

u [illegible] da [illegible]

potencijal Ψ da [illegible] elektrostatske [illegible]

/.

- Електромагнетизам. -

Херц и његове једначине за тела у релативном миру

- I -

7.01 Уводне у Херцове:

а). Нема дејства на одстојању, већ посредством средине гравитације (?). Електрицитет и магнетизам сведени на тела

б). материјална (?) без ... тела математичких величина.

ц). Вектори и магнетна сила (исто као код Максвела) - индукција, а тако исто и електрицитет.

Магнетна индукција = $\frac{\text{флукс магнетске силе}}{4\pi}$

" сила = $\frac{\text{флукс индукције магнетске}}{4\pi}$

Електрична индукција = $\frac{\text{флукс електричне силе}}{4\pi} \cdot K_0$ (K_0 константа диелектрична)

" сила је = $\frac{\text{флукс индукције електричне}}{4\pi}$.

Ако је dS елементарна површина ограничена кривом S, флукс је магнетске силе кроз S

$$\sum \frac{d\alpha}{dx} dS$$

ако је M ~~густина~~ индукција магнетна, онда је

$$4\pi M = \sum \frac{d\alpha}{dx}$$

$\alpha\ \beta\ \gamma$ су компоненте магнетне силе.

Ако са M_1 означимо густину магнетне масе, онда је

$$4\pi M_1 = \sum \frac{d\mu\alpha}{dx}$$

Ово је исто као код Максвела

./.

Ако са P, Q, R означимо компоненте електричне силе а са ρ и ρ₁ густину слободног и сродјеног електрицитета онда важе ове једначине:

$$4\pi\rho = \sum\frac{dKP}{dx}$$

$$4\pi\rho_1 = \sum\frac{dK_0P}{dx}$$

или кад са означимо

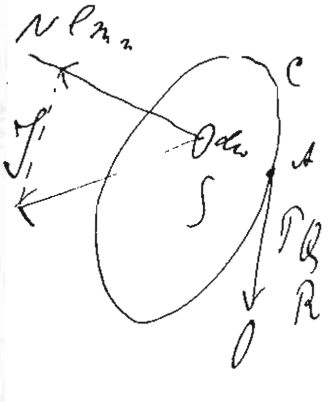
$\frac{KP}{4\pi} = f$ и слично са g, h онда је

$$\rho = \sum\frac{df}{dx} \quad \text{(Као код Максвела)}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{4\pi}\sum\frac{dK_0P}{dx} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

– II

362 Две основне електромагнетске једначине.



Ако једна затворена површина S ограничена контуром C, и у тачки A сила електромоторна има O своје компоненте P, Q, R и означимо где је једно ове силе по C једнак са утицајем индукције магнетске F чије су компоненте μα, μβ, μγ. Ове сталном једначину даје:

$$\int\sum P\,dx = \frac{d}{dt}\int\mu(l\alpha+m\beta+n\gamma)\,d\omega \quad \ldots \text{I}$$

где су l m n косинуси правца нормале ON на dω

Кад се једначина I трансформише по Stokes-овој теореми добија се:

$$\int\sum P\,dx = \int\sum l\,d\omega\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right) \quad \ldots \text{II}$$

Из I и II налазимо једначине:

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}$$
$$\frac{d\mu\beta}{dt} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \quad \ldots \quad 1.$$
$$\frac{d\mu\gamma}{dt} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ово су основне једначине прве групе Херцове.

Ове се једначине дају извести из Максвелових прве групе.
Ако уведемо једначину:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \quad \ldots \quad 1'.$$

где је $a = \mu\alpha$ и сматра се да је у случају мировних тела, кад су $x' = y' = z' = 0$ $\left(x' = \frac{dx}{dt}\right)$ веза између $P\,Q\,R$ и $F\,G\,H$ дата једначинама:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots \quad 2.$$
$$Q = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$R = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

~~Кад~~ ћа а и диференцирамо t и заменимо у 1 имамо

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y\, dt} - \frac{\partial G}{\partial z\, dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{d\mu a}{dt}.$$

На овај је начин утврђена веза између Максвелових и Херцових једначина.

§ 63 ~~Други основни~~ закон електродинамике и друга група Херцових једначина.

Уочимо опет неку површину S и контуру C и замислимо да по њој контури иде нека јединица магнетизма, која је изложена извесној сили од стране поља, рад је те силе:

$$\int \Sigma\, \alpha\, dx$$

ако су $\alpha\,\beta\,\gamma$ компоненте магнетске силе.

[illegible] -4π. [illegible] $u\ v\ w$, [illegible]

$$\int \Sigma\, lu\, d\omega$$

[illegible]

$$\int \Sigma \alpha\, dx = -4\pi \int \Sigma (lu + mv + nw)\, d\omega \quad \ldots \quad (1)$$

[illegible] Stokes-[illegible]:

$$\int \Sigma \alpha\, dx = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} \quad \ldots \quad (2).$$

[illegible] (1) [illegible] (2) [illegible]:

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$
$$4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \quad \ldots \quad (B).$$
$$4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}$$

[illegible]

Uwaga. [illegible] (B) [illegible]

[illegible] (B) [illegible] $u\ v\ w$ [illegible] $f\ g\ h$ [illegible] $\frac{df}{dt}\ \frac{dg}{dt}\ \frac{dh}{dt}$. [illegible] $p,\ q\ r$ [illegible] $u,\ v$ [illegible] w [illegible] (B) [illegible]

$$u = p + \frac{df}{dt}$$
$$v = q + \frac{dg}{dt}$$
$$w = r + \frac{dh}{dt}$$

./.

а друга је друга једначина:

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p + 4\pi\frac{df}{dt} \quad \ldots \quad B'$$

електрицитета а у проводнику износи Омовом закону ако је λ коефицијенат проводљивости

$$p = \lambda P, \quad q = \lambda Q, \quad r = \lambda R$$

Између f, g и h важи однос:

$$f = \frac{K}{4\pi}P, \quad g = \frac{K}{4\pi}Q, \quad h = \frac{K}{4\pi}R$$

Кад се ово стави у B' имаћемо:

$$\begin{aligned} 4\pi\lambda P + K\frac{\partial P}{dt} &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ 4\pi\lambda Q + K\frac{\partial Q}{dt} &= \frac{\partial\alpha}{dz} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} \quad \ldots \quad B'' \\ 4\pi\lambda R + K\frac{\partial R}{dt} &= \frac{\partial\beta}{dx} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} \end{aligned}$$

Ако са X, Y, Z означимо ове P Q R изражене електростатички онда су:

$$P = \frac{1}{C}X \quad Q = \frac{1}{C}Y \quad R = \frac{1}{C}Z.$$

и B'' су:

$$\begin{aligned} \left(4\pi\lambda X + K\frac{\partial X}{dt}\right) &= C\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) \\ \left(4\pi\lambda Y + K\frac{\partial Y}{dt}\right) &= C\left(\frac{\partial\alpha}{dz} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) \quad \ldots \quad I. \\ \left(4\pi\lambda Z + K\frac{\partial Z}{dt}\right) &= C\left(\frac{\partial\beta}{dx} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Ако се ове једначине упореде с другом групом једначина из A, ове једначине изгледају у облик:

/.

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} = c\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{d\mu\beta}{dt} = c\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) \quad \ldots \quad (II.$$

$$\frac{d\mu\gamma}{dt} = c\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

Ako [illegible] elektromotoryczne [illegible] indykowane X, Y, Z oznaczymy $\mathcal{E}$ a magnetyczne M, [illegible] piszemy [illegible] I i II [illegible] obiekt [illegible]

$$c \operatorname{curl} \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial M}{dt}$$

$$c \operatorname{curl} M = K \frac{\partial \mathcal{E}}{dt} + 4\pi\lambda\mathcal{E}.$$

(oznaczenia Heaviside-a Electrical Papers Vol I art. [illegible] oznaczonej [illegible] z jego [illegible])

Z. 64 Dowód:

$$\int \Sigma \alpha\, dx = \int \Sigma\, l\, dw\left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right) = -4\pi \int \Sigma\, l\, u\, dw$$

równanie [illegible] obiekt [illegible]

$$\int \Sigma\, l\, dw \left(\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}\right) = -\frac{d}{dt}\int \Sigma\, l\, dw\, K P - 4\pi \Sigma \int l\, dw\, p$$

$$-\int \Sigma \alpha\, dx = 4\pi \int l\, dw\, u = \frac{d}{dt}\int \Sigma\, l\, dw\, K P + 4\pi \int \Sigma\, l\, p\, dw$$

Ako a S wybierzemy [illegible]

czyli $p = 0$

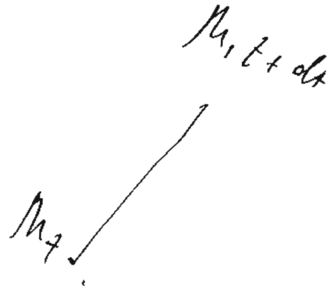
$$\mp \int \Sigma \alpha\, dx = \frac{d}{dt}\int \Sigma\, l\, dw\, K P \quad \ldots \quad (I.$$

Drugi dio

Dinamičke jednačine za vode u kretanju.

§.65 Da bi mogli izvesti jednačine kretanja moramo predhodno riješiti neka pitanja.

Neka su ξ η ζ komponente brzine rotacije, U neka je ukupna funkcija od x y z a ona je poznata u vremenu t u tački M ne će primiti iste vrijednosti u M' u vremenu t+dt.



$$\xi = \frac{dx}{dt}, \quad \eta = \frac{dy}{dt} \quad \zeta = \frac{dz}{dt}.$$

Ovdje mogu dvije stvari biti:

a) tačka je M stalna, nepomična

b). tačka je M u kretanju sa rotacijom

Sprema ovome možemo uzeti dva uslova u vremenu t funkciji U. Ako je tačka M stalna onda je M u t+dt

$$U + \frac{dU}{dt}dt$$

ako se tačka M kreće sa rotacijom vrijednost je U u vremenu t+dt

$$U + \frac{\partial U}{\partial t}dt.$$

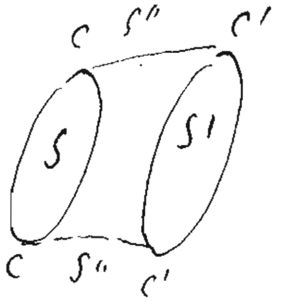
Ako su koordinate tačke M u vremenu t x y z, onda će se koordinate promijeniti za

$$dx = \xi dt$$
$$dy = \eta dt$$
$$dz = \zeta dt$$

ako je tačka M pokretna sa rotacijom a uslov je funkcije U

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi\frac{dU}{dx} + \eta\frac{dU}{dy} + \zeta\frac{dU}{dz} \ldots \quad 1.$$

§.66 Kondicija u pogledu rotacije u kretanju. Neka su komp., nemože [illegible] bektora α β γ, odakle je struja novog bektora kroz vrhvorinu S:



$$\int \Sigma l \alpha \, d\omega = \Phi$$

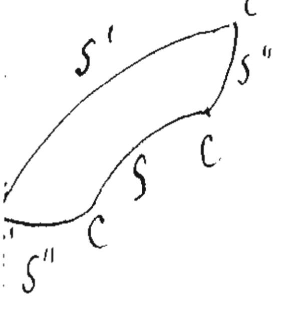
Ako je vrhvorina S stalna, onda je Φ

$$\frac{d\Phi}{dt}$$

ako se vrhvorina mijenja onda je:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Ovo ćemo određivati [illegible] obadva [illegible]. Neka se [illegible] S' [illegible] vrhvorine S u [illegible] dt, onda je u t [illegible] Φ [illegible] $\frac{\delta\Phi}{\delta t}dt$. [illegible]



Ako je S'' [illegible] vrhvorina kroz CC i CC' [illegible] S i S', [illegible]:

1). [illegible] za dt struja kroz S. Ovaj je [illegible]

$$\frac{d\Phi}{dt}dt.$$

2). Struja kroz [illegible] vrhvorinu S'' je $\delta_1\Phi$

3). Razlika struja kroz S+S'' i struja kroz S', što ćemo označiti sa $\delta_2\Phi$

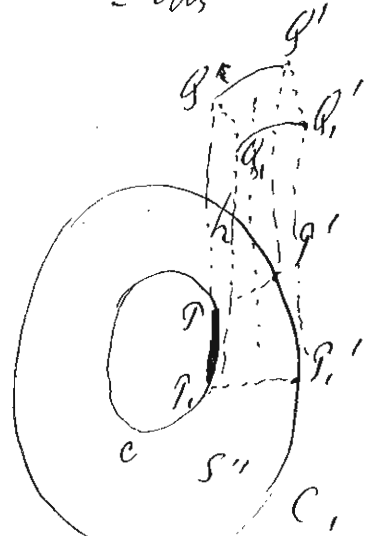
[illegible] je $\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt$ onda:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt = \frac{d\Phi}{dt}dt + \delta_1\Phi + \delta_2\Phi \quad \ldots \quad (I.)$$

$\frac{d\Phi}{dt}dt$ [illegible]

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \Sigma l \, d\omega \frac{d\alpha}{dt} \quad \ldots \quad (II.)$$

— M₃ —



Одредба $\delta\Phi_1$

Ако на C узмемо две тачке P и P_1 после времена dt, кад се контура S уз ти помак дође на C_1 у $P' P'_1$

дужину $PP_1\ P'P'_1$ можемо сматрати као паралелограм с пројекцијом су $\alpha\beta\gamma$ кроз тај одређени део

Запремина паралелопипеда $PP_1\ P'P'_1\ QQ_1\ Q'Q'_1$, које висина PQ и т. д. знамо пројекције су $\alpha\beta\gamma$.

Запремина паралелопипеда $= d\omega \cdot h$

$$h = \sum l\alpha = l\alpha + m\beta + n\gamma$$

Ако су компоненте брзине $\xi\,\eta\,\zeta$ дуж PP' ј. ξdt, ηdt, ζdt. Запремина ј. паралелопипеда $PP_1\ PP' . h$ има:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi dt & \eta dt & \zeta dt \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = dt \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Ово се да лако објаснити ј. $PP_1 = ds$ има ј компоненте $dx\ dy\ dz$, $PP' = ds_1$ (ξdt etc). и h ј компоненте $\alpha\cdot\beta\ \gamma$.

Коначно ј. пројекције кроз S'':

$$\frac{\delta_1\Phi}{dt} = \int \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Ако означимо са $X\ Y\ Z$ изразе:

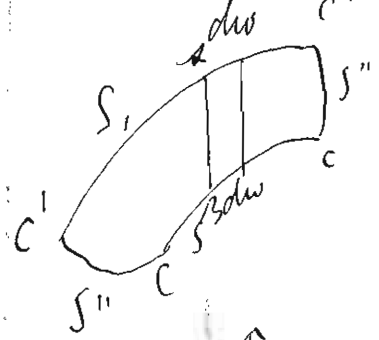
$$X = \gamma\eta - \beta\zeta$$

$$Y = \alpha\zeta - \gamma\xi$$

$$Z = \beta\xi - \alpha\eta$$

$$\frac{\delta_1\Phi}{\delta t} = \int \sum X\,dx = \pm\int \sum l\,d\omega\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) \cdots I.$$

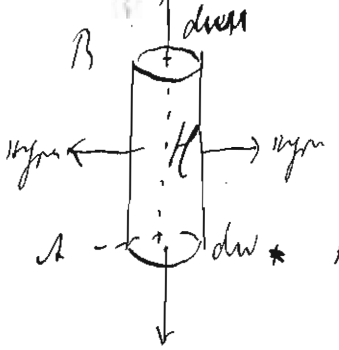
Одредба $\delta_2\varphi$.



$\delta_2\varphi$ је разлика протока кроз S+S'' и S'. Обе су ограничене линијом C'

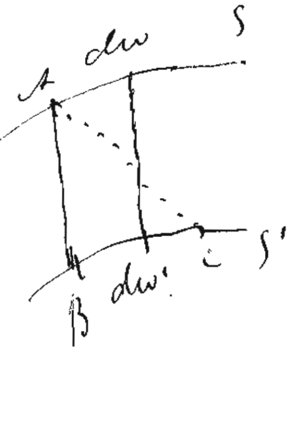
Ако кроз елеменат површине dω од S повучемо линије сила оне ће на S' исећи елеменат dω'. Ако елементе ове заједничке означимо са dτ проток је кроз обеј граница

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)d\tau \quad \ldots \quad 2$$



Ово ће доказати ако узмемо да су протоколи кроз омотач нула и да је проток кроз граничне разлика протокола кроз dω и dω'. Ако је компонента силе у B α онда ће у A бити у правцу x осовине $\left(\alpha+\frac{d\alpha}{dx}dx\right)$, а протокол $\alpha\, dy\, dz$ и $\left(\alpha+\frac{d\alpha}{dx}dx\right)dy\,dz$. Проток је разлика ових протокола и износи: $\frac{d\alpha}{dx}dx\,dy\,dz=\frac{d\alpha}{dx}d\tau$. Када се ово одреди у правцима осталих осовина добија се образац 2.

Одредба dτ



$d\tau = H.d\omega$ (H је висина границе)

H је пројекција од AB на висину у dω

Узмимо тачку на S, ако је у t дошла A на S у t+dt дошла на S' у C

Пројек AB = пројек AC + пројек BC

Пројекција BC је бесконачно мала количина која се може одбацити

Пројекције од AC на осе:

ξdt, ηdt, ζdt

Пројекција од AB на нормалу је

$$\text{proj}\, AB = (l\xi + m\eta + n\zeta)\,dt$$

$$d\tau = (l\xi+m\eta+n\zeta)\,dt\,d\omega = d\omega\, dt \sum l\xi$$

/.

Кад се ово смени у $\delta_2\varphi$ имаћемо:

$$\frac{\delta_2\varphi}{dt} = \int d\omega \sum l\zeta \sum \frac{d\alpha}{dt}$$

Кад се све ово смени у $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ имаћемо:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int\sum l\,d\omega\,\frac{d\alpha}{dt} + \int\sum l\,d\omega\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{d\zeta}{dy}\right) + \int\sum l\,d\omega\,\xi\sum\frac{d\alpha}{dt}$$

или:

$$\frac{\partial\varphi}{dt} = \int\sum l\,d\omega\left[\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d}{dz}(\alpha\zeta-\gamma\xi) - \frac{d}{dy}(\beta\xi-\alpha\eta) + \xi\sum\frac{d\alpha}{dt}\right]$$

ако означимо са:

$$[\alpha] = \frac{d}{dy}(\beta\xi-\alpha\eta) - \frac{d}{dz}(\alpha\zeta-\gamma\xi) - \xi\sum\frac{d\alpha}{dx}$$

$$[\beta] = \frac{d}{dz}(\gamma\eta-\beta\zeta) - \frac{d}{dx}(\beta\xi-\alpha\eta) - \eta\sum\frac{d\alpha}{dx}$$

$$[\gamma] = \frac{d}{dx}[\alpha\zeta-\gamma\xi) - \frac{d}{dy}[\gamma\eta-\beta\zeta] - \zeta\sum\frac{d\alpha}{dx}$$

Кад се ово смени у $\frac{\partial\varphi}{dt}$ налазимо:

$$\frac{\partial\varphi}{dt} = \int\sum l\,d\omega\left[\frac{d\alpha}{dt} - [\alpha]\right] \quad \dots \quad (II.$$

§. 67 Тада услове једначине непрекидности, онда теорема II изражава оно што смо једначином казали

Ако се N означи вектор $\alpha\,\beta\,\gamma$

$$N^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

$$N\frac{\partial N}{\partial t} = \sum\alpha\frac{d\alpha}{dt} - \sum\alpha[\alpha]$$

Нека је OR нормала у $d\omega$, ON вектор, онда је

$$d\varphi = N\cos\theta\,d\omega \quad \dots \quad 1.$$

Ако хоћемо да нађемо $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и упоредимо га радимо са Ојлеровим методом, $\xi\ \eta\ \zeta$ су компоненте брзине ротације, ако нема деформације, онда имамо:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} = 0$$

Из $\varphi = N\cos\theta\, d\omega$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t}\cos\theta\, d\omega - N\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

пошто је у t ~~N θ = 0~~ $\theta = 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t}\, d\omega$$

Ово иде даље једнако са $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int\Sigma\, l\, d\omega\left[\frac{d\alpha}{dt} - [\alpha]\right] d p,$ значи без обзира што је $d\omega$ измењено на $d\omega$.

$$\frac{\partial N}{dt}\, d\omega = d\omega\,\Sigma\, l\left[\frac{d\alpha}{dt} - [\alpha]\right]$$

или када ово помножимо са N и зна се да је $Nl = \alpha$, $mN = \beta$, $nN = \gamma$.

Написаћемо дакле:

$$N\frac{\partial N}{\partial t} = \Sigma\,\alpha\frac{d\alpha}{dt} - \Sigma\,\alpha[\alpha] \quad \ldots \quad \text{II.}$$

/.

I

§ Друга група Херцових једначина

§ 68 Ако је маса у миру, односно ако одговарамо S миру, бићемо само да оставимо опште:

$$\int\sum P\,dx = \frac{d}{dt}\int\sum l\mu\alpha\,d\omega \quad \dots \quad 1$$

Искуство показује да ће одговарајуће S бити са матријом и да с обзиром на [illegible] сила а, β, γ добија се једначина:

$$\int\sum P\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\sum l\mu\alpha\,d\omega \quad \dots \quad 2$$

ако се граница је одређена фигура у [illegible] међу интеграционим фигурама.

Ако се једначина 2 трансформише по [illegible] (из I) добићемо:

$$\int\sum l\,d\omega\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)=\int\sum l\,d\omega\left(\frac{d\mu\alpha}{dt}-[\mu\alpha]\right)\quad\dots\quad(II.$$

Једначавањем израза са 3 имамо:

$$\begin{aligned}\frac{d\mu\alpha}{dt}&=\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}+[\mu\alpha]\\ \frac{d\mu\beta}{dt}&=\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}+[\mu\beta]\\ \frac{d\mu\gamma}{dt}&=\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}+[\mu\gamma]\end{aligned}\quad\dots\quad(I.$$

Ово је друга група Херцових једначина за електромагнетна поља у кретању.

$$\begin{aligned}[\mu\alpha]&=\frac{d}{dy}\mu(\beta\xi-\alpha\eta)-\frac{d\mu}{dz}(\alpha\zeta-\gamma\xi)-\xi\sum\frac{d\mu\alpha}{dx}\\ [\mu\beta]&=\frac{d\mu}{dz}(\gamma\eta-\beta\zeta)-\frac{d}{dx}\mu(\beta\xi-\alpha\eta)-\eta\sum\frac{d\mu\alpha}{dx}\\ [\mu\gamma]&=\frac{d}{dx}(\alpha\zeta-\gamma\xi)-\frac{d}{dy}\mu(\gamma\eta-\beta\zeta)-\zeta\sum\frac{d\mu\alpha}{dx}\end{aligned}$$

/

7. За оне [illegible] у теорији Максвела

$$P = cy - bz - \frac{\partial F}{dt} - \frac{d\psi}{dx}$$

$$Q = az - cx - \frac{\partial G}{dt} - \frac{d\psi}{dy} \quad \dots \quad 3$$

$$R = bx - ay - \frac{\partial H}{dt} - \frac{d\psi}{dz}$$

Ако [illegible] једначину из горње групе Максвелових

једначина:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

диференцијалимо одавде:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial y dt} - \frac{\partial^2 G}{\partial z dt}.$$

Кад у ову уврстимо вредности из горње [illegible] H и G из 3 [illegible]

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(ay - cx) + \frac{\partial}{\partial y}(bz - az) \quad \dots \quad 4.$$

где је $a = \mu\alpha$ $b = \mu\beta$ $c = \mu\gamma$.

Кад се ова [illegible] са [illegible] једначином [illegible] [illegible] и да нема само члана $\xi \frac{d\mu\alpha}{dt}$, који је [illegible] у теорији Максвела, јер код њега нема [illegible] магнетизма.

Између [illegible] магнетних вектора код Херца и Максвела

Компоненте ових вектора код Херца $\mu\alpha$ $\mu\beta$ $\mu\gamma$

" Максвела a b c

$$a = \alpha + 4\pi A$$

$$b = \beta + 4\pi B$$

$$c = \gamma + 4\pi C$$

За [illegible] је потребно да је $a = \mu\alpha$ etc., а то је случај [illegible] у којима нема перманентног магнетизма, већ само индукованог.

Ако се стави:

$$a = \mu\alpha + 4\pi A_0$$
$$b = \mu\beta + 4\pi B_0 \quad \ldots \qquad (2.$$
$$c = \mu\gamma + 4\pi C_0$$

где су A_0, B_0, C_0 компоненте намагнисања [illegible] онда се [illegible]:

$$[a] = [\mu\alpha] + 4\pi[A_0] \quad \text{etc.}$$

Ако се Максвелове једначине:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{dR}{dy} + [a]$$

одузме од [illegible]

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} + [\mu\alpha]$$

[illegible]:

$$\frac{d\mu\alpha}{dt} - \frac{da}{dt} = [\mu\alpha] - [a] = -4\pi[A_0]$$

Сменимо $a = \mu\alpha + 4\pi A_0$

$$\frac{dA_0}{dt} = [A_0]$$
$$\frac{dB_0}{dt} = [B_0] \quad \ldots \qquad (3.$$
$$\frac{dC_0}{dt} = [C_0]$$

Ако једначине 3 [illegible] Максвелове једначине [illegible].

[illegible]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \Sigma\, l\, d\omega \left(\frac{dA_0}{dt} - [A_0]\right) = 0$$

или

$$\frac{dA_0}{dt} = [A_0] \quad \text{etc.}$$

§69 Drugi szereg Maxwella równań

Z tego prawa wynika uogólnienie elektr. indukcji równanie

w ogóle:

$$-\int \sum \alpha\, dx = 4\pi \int \sum l p\, d\omega + \frac{d}{dt}\int \sum l P K\, d\omega \quad \ldots \quad 1.$$

Tylko integral rozciąga się na krzywą C, która ogranicza powierzchnię elektryczności przez wszystkie cząsteczki w polu ... indukcji elektrycznej przez S.

Jeżeli weźmiemy pole, oraz w ... ... w ... ... elektrodynamiki ... ... elektryczności

$$-\int \sum \alpha\, dx = 4\pi \int \sum l\, d\omega\, p + \frac{\partial}{\partial t}\int \sum l p\, d\omega\, KP \quad \ldots \quad 2.$$

Jeżeli zastosujemy Stokes-a twierdzenie i wstawimy w ... równania otrzymamy:

$$\int l\, d\omega \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) = 4\pi \int \sum l\, d\omega\, p + \int \sum l\, d\omega \left[\frac{dKP}{dt} - [KP]\right]$$

czyli:

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi p + \frac{dKP}{dt} - [KP]$$
$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi q + \partial \frac{KQ}{dt} - [KQ] \quad \ldots \quad II.$$
$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi r + \partial \frac{KR}{dt} - [KR]$$

Oto jest drugi szereg Maxwella równań, gdzie $[KP]$ u. w. znaczenie powyżej wyjaśnione.

Z I i II wynika:

$$4\pi p + \frac{dKP}{dt} - [KP] = 4\pi u \quad \ldots \quad 3$$
$$= 4\pi v$$
$$= 4\pi w$$

[illegible] u v w komponenty [illegible]
[illegible]:

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u$$
$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v \quad \dots \quad (3).$$
$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w$$

[illegible] (3) [illegible] Maxwellowskim [illegible]
[illegible] u v w [illegible] Maxwella.

[illegible]:

$$u = p + \frac{1}{4\pi}\frac{dKT}{dt} - \frac{1}{4\pi}[KT]$$

$$v = \cdot -$$

$$w = -$$

[illegible] $f = \frac{KT}{4\pi}$ [illegible] Maxwella [illegible]
[illegible]:

$$u = p + \frac{df}{dt} - [f]$$
$$v = q + \frac{dg}{dt} - [g]$$
$$w = r + \frac{dh}{dt} - [h]$$

$$[f] = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \xi \Sigma \frac{df}{dx}$$
$$[g] = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} - \eta \Sigma \frac{dg}{dx}$$
$$[h] = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} - \zeta \Sigma \frac{dh}{dx}$$

$$X = h\eta - g\zeta \qquad \xi = \frac{dx}{dt}$$
$$Y = f\zeta - h\xi \qquad \eta = \frac{dy}{dt}$$
$$Z = g\xi - f\eta \qquad \zeta = \frac{dz}{dt}.$$

Из овог је једначина јасно резултат теорије Максвелове и Херца.

Ако ставимо $\Sigma \frac{dX}{dx} = \rho$

ρ густина набоја електрицитета

$$u = p + \frac{df}{dt} + \rho\xi + \frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\beta}{dy}$$
$$v = q + \frac{\partial g}{\partial t} + \rho\eta + \frac{d\alpha}{dz} + \frac{d\gamma}{dx}$$
$$w = r + \frac{dh}{dt} + \rho\zeta + \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}$$

Одавде се види да су струје састављене из четири дела

a) $p\ q\ r$ струје кондукционе

b) $\frac{df}{dt}\ \frac{dg}{dt}\ \frac{dh}{dt}$ " " померања

c) $\rho\xi,\ \rho\eta\ \rho\zeta$ " " конвекционе (Rowland)

d) $[(\frac{d\gamma}{dz} - \frac{d\beta}{dy})$ etc.$]$ струје Рентген.

За нове струје с Рентгеном је доказао да се ... магнетне електричне ... као и ... струје у ... Кондензатору. Пондере је ... струје ... померањем ... електрицитета.

Електричне осцилације
(електрични таласи).

Максвел-Херцове једначине електромагнетизма у свом [illegible] све појаве [illegible] електрицитета и магнетизма [illegible]. [illegible] теорија [illegible] електронске [illegible] везе између етера и електрицитета, [illegible] једначина [illegible] као и [illegible] интеграције [illegible] једначина [illegible] за појаве електромагнетске, остављајући етер [illegible].

3.72 Написаћемо сад две прве једначине [illegible]:

$$c \,\mathrm{curl}\, M = K \frac{\partial E}{dt} + 4\pi\lambda E \quad \ldots \quad I$$

$$c \,\mathrm{curl}\, E = -\mu \frac{\partial M}{dt} \quad \ldots \quad II.$$

где је E електрична а M магнетска вектор за [illegible], λ коефицијент проводљивости, μ пермеабилитет а K диелектрична константа.

Ако узмемо у II curl с једне и друге стране имаћемо:

$$c \,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\, E = \mu \frac{\partial\, \mathrm{curl}\, M}{dt} \quad \ldots \quad 1.$$

Диференцијалећи I добија се:

$$c \,\mathrm{curl} \frac{\partial M}{dt} = K \frac{\partial^2 E}{dt^2} + 4\pi\lambda \frac{\partial E}{dt} \quad \ldots \quad 2.$$

Из 1 и 2 се добија:

$$-c^2 \,\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\, E = K\mu \frac{\partial^2 E}{dt^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial E}{dt} \quad \ldots \quad III.$$

Из ове једначине се налази вектор E.

curl E за x осу значи $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$

y " $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$

z " $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$

curl curl $\mathcal{E}$ на x-ову осу је:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}\right)=$$

$$-\left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}\right]=-\Delta \mathcal{E}_x+\frac{\partial\, div\, \mathcal{E}}{\partial x}$$

Кад се ово смени у једначини III имаћемо:

$$c^2 \Delta \mathcal{E}=K\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}+4\pi\lambda\mu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad \ldots \quad (IV.$$

Ако једначину I напишемо за x-ову y z-ову осу и узмемо у обзир x, y и z добићемо пошто је $div\, curl\, \mathcal{E}=0$

$$K\frac{\partial\, div\, \mathcal{E}}{\partial t}+4\pi\lambda\, div\, \mathcal{E}=0 \quad \ldots \quad (3.$$

Ако је $div\, \mathcal{E}$ нула у почетку онда је ~~div~~

$$div\, \mathcal{E}=0 \quad \ldots \quad (4.$$

За све време функција остаје.

Из једначине II се такође добија

$$div\, M=0.$$

За израчунавање вектора $\mathcal{E}$ служимо се једначином IV и (3 или написано у облику пројекција на осе:

$$c^2 \Delta \mathcal{E}_x=K\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2}+4\pi\lambda \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t}$$

$$c^2 \Delta \mathcal{E}_y=K\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial t^2}+4\pi\lambda \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} \quad \ldots \quad A.$$

$$c^2 \Delta \mathcal{E}_z=K\mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial t^2}+4\pi\lambda \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}=0 \quad \ldots \quad B$$

/.

Кад и из ове једначине нађе вектор Е и самим тим II извод вектора М. За одређивање М нужно дати познате вредности његових M_x, M_y и M_z. Кад су познате вредности једног од Е и М из I се одређују вредности једначина за $\frac{\partial E}{\partial t}$ и онда су решења од А и В потпуно одређена.

Компоненте вектора Е и одређују из једначине А, које су облика:

$$c^2 \Delta U = K\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t} \quad \dots \quad (4)$$

и кад дају U и $\frac{\partial U}{\partial t}$ за $t=0$ познате као функције xyz. За случај да кад U зависи само од једне координате x, ће (4) гласити:

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = K\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t} \quad \dots \quad (5)$$

Једначина 5 представља простирање равних таласа у анизотропној средини, где је величина члана са λ која представља апсорпцију енергије – апсорпцију.

— II —

— Једначине таласа —

у

изотропном етеру

173 Ако посматрамо електромагнетно простирање у изотропном етеру онда је $\lambda=0$ $K=\mu=1$ и једначина 4 гласиће:

$$c^2 \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \dots \quad (6)$$

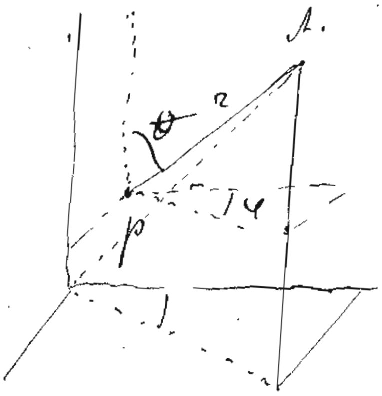
Услови су за U:

$$U = f(xyz)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(xyz) \quad \text{за } t = 0$$

Одатле је проблем: простирање поремећаја електромагнетских на коначном простору ограничене, без обзира на спољашње услове.

/.



Niech jest punkt p [illegible] o współrzędnych $x_1 y_1 z_1$. Punkt A [illegible] oznaczony współrzędnymi xyz [illegible] przez p [illegible] współrzędnych [illegible] punktem p [illegible] równaniami:

$$x - x_1 = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y - y_1 = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z - z_1 = r \cos\theta .$$

Transformujemy równanie $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ otrzymamy:

$$\Delta u = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r u}{\partial r^2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}}{\partial \theta}}_{A_2} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}_{A_3} \quad \ldots (1)$$

Opisujemy z p około A kulę, [illegible] do [illegible]:

$$d\sigma = r^2 d\omega = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$d\omega$ jest [illegible] kąta [illegible] σ.

Każde [illegible] (1) [illegible] przez $d\sigma$ i całkujemy [illegible]:

$$\int A_1 d\sigma = \frac{1}{r}\left[\int \frac{\partial\left[r\frac{\partial u}{\partial r} + u\right]}{\partial r} d\sigma\right] = \frac{1}{r}\left[\left[r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial u}{\partial r}\right] r^2 d\omega\right.$$

$$\int A_1 d\sigma = r^2 \int \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} d\omega + \int 2r \frac{\partial u}{\partial r} d\omega$$

$$\int A_2 d\sigma = \int_0^{\pi} \frac{\partial \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}}{\partial \theta} d\theta \, d\varphi = 0 = \int \left[\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right]_0^{\pi} d\varphi$$

$$\int A_3 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} d\varphi = 0 .$$

Jeśli oznaczymy $\Omega(r) = \frac{r}{4\pi}\int u \, d\omega$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{1}{4\pi}\int u \, d\omega + \frac{r}{4\pi}\int \frac{\partial u}{\partial r} d\omega$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} = \frac{1}{4\pi}\int 2\frac{\partial u}{\partial r} d\omega + \frac{r}{4\pi}\int \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} d\omega$$

/.

Кад и обе стране у 1: $\int \Lambda\, dw$ имамо:

$$\frac{1}{4\pi}\int \Delta\, dw = \frac{r}{}\frac{\partial^2 \Omega}{dr^2}$$

или:

$$\frac{r^2}{4\pi}\int \Delta U\, dw = r\frac{\partial^2 \Omega}{dr^2}$$

$$\frac{r^2}{4\pi}\int \frac{\partial^2 U}{dt^2}\, dw = r\frac{\partial^2 \Omega}{dt^2}$$

Кад и обе стране у 1. поделимо са:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{dt^2} = c^2\frac{\partial^2 \Omega}{dr^2} \quad \ldots \quad 2.$$

Једначина 1. одговара 2 у којој је непозната функција Ω. Ова је једначина за [illegible].

Почетни услови за Ω биће онда функције φ и Φ из:

$$\frac{r}{4\pi}\int f(xyz)\, dw = \varphi(r) \quad \ldots \quad 3$$

$$\frac{r}{4\pi}\int F(xyz)\, dw = \Phi(r)$$

Кад су познате функције f и F познате су φ и Φ и то само за позитивне вредности r. Услови су за Ω:

$$\Omega = \varphi(r) \text{ и } \frac{\partial \Omega}{dt} = \Phi(r) \text{ за } t=0 \;\; r>0 \quad \ldots \quad 4$$

и из једначине за $\Omega = \frac{r}{4\pi}\int U\, dw$

$$\Omega = 0 \text{ за } r = 0$$

Знамо да Ω зависи од x, y, z, и ако је Ω нађено онда је из једначине за Ω

$$\Omega = \int \frac{r}{4\pi} U\, dw$$

$$U(x,y,z) = \lim_{r=0} \frac{\Omega(r)}{r}$$

До познатом методом интеграције једначине 2 уз услове 4 имамо да је:

кратко је:

$$\varphi(-z) = -\varphi(z) \quad \text{и} \quad \Phi(-z) = -\Phi(z) \quad \ldots \quad 7'$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[\varphi(z+ct) + \varphi(z-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{z-ct}^{z+ct} \Phi(z)\, dz \quad \ldots \quad 6$$

из 5

? $$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{1}{2}\left[\varphi' + \varphi'\right] + \frac{1}{2c} \sout{\Phi(z)}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2}\left[c\varphi' - c\varphi'\right] + \frac{2c}{2c}\left[\Phi(z+ct) - \Phi(z)\right] \quad \text{за } t=0$$

или

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2}\left[c\varphi'(ct+z) - c\varphi'(z-ct) + \frac{1}{2c}\left[\Phi(z+ct) - \Phi(z-ct)\right]\right]$$

за $z=0$ с обзиром на $4'$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{2}c\varphi'(ct) + \frac{2}{2c}\Phi(ct) = c\varphi'(ct) + \frac{1}{c}\Phi(ct)$$

из:

$$\Omega = \frac{2}{4\pi}\int U\, d\omega$$

$$\int dt\, \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial u}{\partial t}\, d\omega\, dt$$

$$\frac{\Omega}{z} = U(x_1 y_1 z_1\, x y z)$$

$$\lim_{z=0} \frac{\Omega}{z} = u(x_1, y_1, z_1)$$

и из:

$$u(x_1, y_1, z_1) = \varphi'(ct) + \frac{1}{c}\Phi(ct) \quad \ldots \quad 8.$$

[illegible]

$$\frac{1}{c}\Phi(ct) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, F(x_1 + ct\sin\theta\cos\varphi \text{ etc})$$

$$4\pi\varphi'(ct) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, f(x_1 + ct\sin\theta\cos\varphi \text{ etc})\right].$$

[illegible] за u [illegible] u_1 и u_2:

$$U_1 = \frac{t}{4\pi}\int F(x+ct\xi,\, y+ct\eta,\, z+ct\zeta)\, d\omega$$

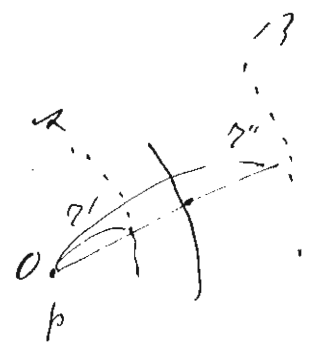
$$u_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint t f(x+ct\xi \ldots)\, d\omega.$$

./.

[illegible] је [illegible] таласа.

Остаје да у [illegible] p уврстимо t [illegible] функцији F и f и [illegible] dt за [illegible] таласа.

Ако f и F имају коначне од нуле вредности у коначном [illegible] од тачке O где је [illegible], а r' и r'' [illegible] од p, [illegible] за:



$$r' < ct < r''$$

За $t' = \frac{r'}{c}$ и $t'' = \frac{r''}{c}$ [illegible] A и B [illegible] [illegible].

Ако [illegible] и c је [illegible] за $CA = a$ [illegible] $2a$.

7.71 [illegible] метод за [illegible] једначине, [illegible] A и B

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \quad \ldots \quad 1.$$

где су услови следећи:

$\Omega = 0 \quad \ldots$ за $x = 0$ и $x = l$

$\left.\begin{array}{l} \Omega = f(x) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial t} = F(x) \end{array}\right\}$ за $t = 0 \quad 0 < x < l \quad \ldots \quad 2.$

За Ω [illegible] функцију [illegible] од x и [illegible] од t [illegible] $\Omega = UV$, где је U [illegible] од t, V [illegible] од x. [illegible]:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{c^2}{V}\frac{d^2V}{dx^2} = -m^2.$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} = -m^2 U \quad и \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{m^2}{c^2} V \quad \ldots \quad 3.$$

Ове једначине 3 лако интегралимо. [illegible] интеграле:

1.

$$U = \cos mt \quad , \quad \sin mt$$

$$V = \cos \frac{mx}{c} \quad , \quad \sin \frac{mx}{c}.$$

Узмимо она решења која дају

$x = 0$ и $x = l$ буду $\Omega = U.V = 0.$

обе одговарају интегралу $\sin \frac{mx}{c}$ је нула кад је $x = 0$ и

$\frac{ml}{c} = n\pi \qquad m = \frac{n\pi c}{l}$. Тада је:

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots \quad (I.$$

Напослетку добијамо интеграл за Ω:

$$\Omega = \left[A_1 \cos mt + B \sin mt\right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

или:

$$\Omega = A_1\left[\cos mt + \frac{B}{A_1} \sin mt\right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Ставимо $\frac{B}{A_1} = \frac{\cos mT}{\sin mT}$ и константу коју означимо са

A на тако имамо: (T је константа)

$$\Omega = A \cos \frac{n\pi c}{l}(t - T) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots \quad (II.$$

Ако узмемо сва решења за $n = 0$ до $+\infty$ и $-\infty$ онда II добијамо општи интеграл. Када у (II заменимо са

$$A_n = A \cos n \frac{\pi c T}{l} \qquad B_n = A \sin n \frac{\pi c T}{l}$$

имаћемо:

$$\Omega = \sum^{n} \left(A_n \cos n \frac{2\pi t}{T} + B_n \sin n \frac{2\pi t}{T}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

где је $\frac{T}{1}$ време за које се једна одговарајућа осцилација, време периода. $T = \frac{2l}{c}$ Ако узмемо да је $n = 1$ имамо $\frac{T}{1} = \frac{2l}{c}$

$cT = 2l.$

A_n и B_n одређујемо из почетних услова.

Ostateczne rozwiązanie:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (III.$$

Otóż teraz oznaczamy A_n i B_n w zasadzie:
za $t=0$ i $0 \leq x < l$ $\quad \Omega = f(x)$ i $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = F(x)$.
Obie funkcje F i f dane są w interwale $0 \ldots l$ ... (1.

Z 1 i III mamy:

$$\sum_0^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad \ldots \quad (2.$$

$$\sum_0^{\infty} n B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{l}{\pi a} F(x)$$

Jeśli $f(x)$ i $F(x)$ rozwiniemy w szereg na sin.

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l} d\alpha \quad \ldots \quad (3.$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l F(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l} d\alpha$$

Jeśli rozszerzymy je od 0 do $-l$ na drugim interwale $0 \ldots -l$, wtedy wychodzi:

$$f(-x) = -f(x) \qquad F(-x) = -F(x) \quad \ldots \quad (4..$$

$$f(x+2l) = f(x) \quad \text{i} \quad F(x+2l) = F(x)$$

Jeśli obie funkcje F i f dane za $x=0$ i $x=l$ w 4 mamy

wtedy: $\quad f(l+x) = -f(l-x)$ i $\quad F(x+l) = -F(l-x)$

Z drugiej równania 2. mnożąc przez wyrażenie ... przez dx i integrujemy:

$$\sum B_n \cos \frac{n\pi x}{l} = -\frac{1}{a} \int F(x)\,dx + Const.$$

./.

374 [illegible] Ω [illegible]:

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_0^\infty A_n\left(\sin\frac{n\pi(x-ct)}{l} + \sin\frac{n\pi(x+ct)}{l}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_0^\infty B_n\left(\cos\frac{n\pi(x-ct)}{l} - \cos\frac{n\pi(x+ct)}{l}\right).$$

[illegible]:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} F(x)\,dx \quad \text{(I.}$$

(D'Alembert, Daniel Bernoulli).

375 ~~[illegible]~~ [illegible] $\varphi(x)$ [illegible]:

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots \quad \text{(}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m-n)x\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\, dx = 0 \quad m \gtrless n$$
$$= \pi \quad m = n$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(m+n)x\, dx = 0 \quad m \gtrless n$$
$$= \pi \quad m = n$$
$$= 2\pi \quad m = n = 0$$

[illegible] (I [illegible] $\sin mx\, dx$ [illegible] $\cos mx\, dx$ [illegible] $-\pi$ [illegible] $+\pi$, [illegible]:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin mx\, dx$$
$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos mx\, dx$$

Збир:

$$\int_{\pi}^{c+\pi} \varphi(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{c-\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx$$

За a_m и b_m имамо ове формуле:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos mx\,dx.$$

§ 76. Уопштени облик Фуријеова реда.

Познато је одавде:

$$2\cos n(x-\alpha) = e^{in(x-\alpha)} + e^{-in(x-\alpha)} \quad \ldots 1.$$

Кад ово уведемо у изразе за a_m, b_m имамо:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)e^{in(x-\alpha)}\,d\alpha \quad \ldots 2.$$

Ако сменимо x са πx и $\varphi(\pi x)$ са $\varphi(x)$ добијамо:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\varphi(\alpha)e^{in\pi(x-\alpha)}\,d\alpha \quad \ldots 3.$$

ово је периодично са 2π а не 2.

Нека је $\varphi(x)$ непарна тј. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx = 2\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx$$

$$\pi b_m = \int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x)\cos mx\,dx = 0.$$

·/.

Za $\varphi(x)$ [illegible] $\varphi(-x) = +\varphi(x)$

$$a_n = 0$$

$$\varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx$$

za $\varphi(x)$ [illegible]

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x +$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx$$

za $\varphi(x)$ [illegible]

[illegible] 2π. [illegible] $2l$ [illegible] $\frac{\pi x}{l}$ [illegible]:

$$\varphi(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

$$\frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} \varphi(x) \sin n \frac{\pi x}{l} \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{c-l}^{c+l} \varphi(x) \cos n \frac{\pi x}{l} \, dx$$

Друга глава

I

Интеграција једначине

$$c^2\Delta U = \alpha^2\frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta\frac{\partial u}{\partial t}$$

Ако у једначини 3.. ставимо $\alpha^2 = K\mu$ и $\beta = 2\pi\lambda\mu$, $c^2\alpha^2$ и β се могу сматрати за позитивне константе. С обзиром [illegible] α [illegible] и β [illegible] коефицијента [illegible] обе ове једначине [illegible] за провођење [illegible] (електричних или [illegible]) у средини [illegible].

За $\alpha = 0$ прва је једначина за провођење топлоте.

„ $\beta = 0$ је за провођење електричних таласа без [illegible].

Узмимо прво једначину облика:

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \quad 1.$$

Зовемо само [illegible] координату.

Једначина 1 је за провођење [illegible] таласа у [illegible] средини а и за провођење електричних [illegible] зове се телеграфска једначина.

Ако у 1 уведемо:

$$U = e^{-\frac{\beta t}{\alpha^2}} u$$

добијемо:

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} u \quad \dots \quad 2.$$

Ставимо у место x $\frac{\alpha c}{\beta}x$ и у место t $\frac{\alpha^2}{\beta}y$

па у 2 добијемо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \quad \dots \quad (I.$$

Сагледни су услови за U [illegible] и $\frac{\partial U}{\partial t}$ за $t = 0$ [illegible] функције x. Тако исто [illegible] за u и $\frac{\partial u}{\partial t}$ за $y = 0$

Из ове особине може доћи и граничне на ову да је на извесној линији u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ даће се $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ познати на C.

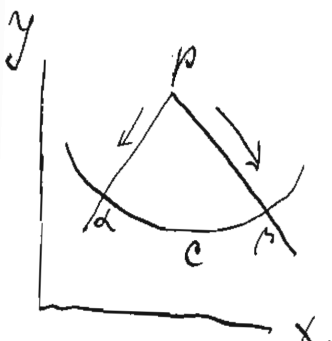
Кад се једна интеграцијом помоћу све једначине I на ову $u = v$ онда имамо једначину:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v = 0 \quad \ldots \quad II$$

или одузимањем I и II

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

Применом Гаусове теореме добијамо:



$$\int\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\right] = 0 \quad \ldots \quad 1$$

$$\left(\int \frac{\partial v}{\partial x} d\omega = \int v\alpha\, ds = \int v\, dx.\right)$$

(ово је Гаусова теорема)

Нека су координате тачке p од које извлачимо [illegible] $x_1 y_1$. Из p повлачимо праве:

$$x - y = x_1 - y_1 \qquad \ldots \quad 2.$$
$$x + y = x_1 + y_1$$

и нека се оне секу са C редом у α и β

Ако се C примени на контуру $p\alpha C$ имаћемо:

због $dx = dy$ на αp и $dx = -dy$ на βp

$$3 \ldots \int_C\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\right] - \int_\alpha^p (v\,du - v\,dv) - \int^p (v\,du \ldots$$

Ако се v тако одреди да је $v = 1$ на C онда је $dv = 0$.

и из 3 добијамо:

$$2u_p = u_\alpha + u_\beta + \int_C\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\right]$$

u_p, u_α u_β су вредности од u у p, α и β

3.78 Налазимо партикуларни интеграл V једначине

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + V = 0 \quad \ldots \quad (I)$$

који је на правама:

$$(X-x_1)-(y-y_1)=0 \text{ и } (X-x_1)+(y-y_1)=0 \ldots 1)$$

равно једнаки 1 између αβγ ...

Узимамо за нову независно

функцију:

$$z = \sqrt{(y-y_1)^2-(x-x_1)^2}$$

на мнештјанима у је нула а свим средњим вредностима у(αβγ).

Трансформишемо једн. I заменом са $V=f(z)$. Ако је то ограничено онда је:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{dv}{dz}\frac{(x-x_1)}{z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dz}\left(\frac{y-y_1}{z}\right); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}}{dz}\frac{(x-x_1)^2}{z} - \frac{1}{z}\frac{dv}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{d\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}}{dz}\frac{(y-y_1)^2}{z} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz}$$

Када се ово смени у I добијамо:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} - V = 0$$

Ово је Беселова једначина реда 0 од аргумента iz

$$v = J(iz) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$$

Овде је V за $z=0$ равно јединици

./.

§ 79 [illegible] за [illegible]

Узмимо случај где је [illegible] за све тачке X^{ce} [illegible] [illegible] с осом $X^{ом}$ од и

1) $u = f(x)$ $\frac{\partial u}{\partial y} = F(x)$ за $y = 0$

одредимо тачке α и β:

$x_1 - y_1$ и $x_1 + y_1$ и $dy = 0$

за $y = 0$

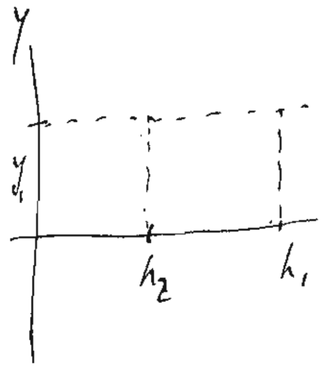
$$z = \sqrt{y_1^2 - (x - x_1)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{y_1}{z}\frac{dv}{dz}$$

и према напред

$$\text{I)} \ldots \quad 2u(x_1 y_1) = f(x_1 - y_1) + f(x_1 + y_1) + \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} v F(x)\,dx + y_1 \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{z}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^2 4} + \frac{z^4}{2^2 4^2 6} + \cdots$$

за $z = 0$ је коначно.



Нека су обе функције за извесни коначан [illegible]:

$f(x) = 0$ $F(x) = 0$ за $x < h_1$ и $x > h_2$

и за y узмимо y_1 ([illegible]), онда је из I $u(x_1 y_1) = 0$

кад је: $x_1 < h_1 - y_1$ или $x_1 > h_2 + y_1$

Ова се [illegible] таласа [illegible] C/α [illegible] [illegible] [illegible] таласа. [illegible] h_2 и h_1 [illegible].

Нека је $y_1 > \frac{1}{2}(h_2 - h_1)$ и узмимо x_1 тако да је

$$h_2 - y_1 < x_1 < h_1 + y_1$$

$x_1 - y_1 < h_1$ и (или) $x_1 + y_1 > h_2$ онда је $f(x_1 - y_1)$ и $f(x_1 + y_1)$ [illegible]

и из [illegible] за $u(P)$ имамо

$$2u_1 = \int_{h_1}^{h_2} v F(x)\,dx + y_1 \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} f(x)\,dx.$$

Obje ... [illegible] ... $y(t)$ ... [illegible] O_5 $-26.$

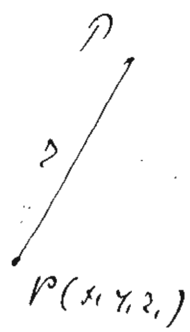
Na ... [illegible] ... [illegible]

Ako je $f(x) = -f(x)$ и $F(x) = -F(-x)$

то је $u_1 = 0$ за $x_1 = 0$ за ... [illegible] ... I ... [illegible]

... f и F ... x ... [illegible]

... [illegible]



4.80 Teorema ... [illegible]

3. ... [illegible] ... x y и z ... за $\alpha = 1$ ... :

$$c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2p\frac{\partial u}{\partial t} \quad \dots \quad I.$$

Neka su koordinate tačke p $x_1 y_1 z_1$. ... [illegible] ... P ... koordinate x y z ... z y и t ... [illegible] ... $z = 1$ ... p ... :

$$\Omega = \frac{2}{4\pi}\int u\,d\omega \quad \dots \quad 1.$$

Ω zadovoljava jednačinu:

$$c^2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + 2p\frac{\partial\Omega}{\partial t} \quad \dots \quad 2.$$

Jasno ... [illegible]:

за $t = 0$ $z > 0$ $\Omega = \frac{2}{4\pi}\int f(xyz)\,d\omega = \varphi(z)$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{2}{4\pi}\int F(xyz)\,d\omega = \Phi(z)$$

за $z = 0$ $\Omega = 0$

/.

Ако је φ одн.:

$$\varphi(-z) = -\varphi(z) \qquad \phi(-z) = -\phi(z)$$

Ако ово заменимо у изразу за $U(t)$ смењујући f и F са φ и $\frac{d\phi}{c}$ и слажемо с једначином:

$$U = e^{-\frac{\beta t}{\alpha^2}} u$$

x са $\frac{\alpha c}{\beta} x$ и y са $\frac{\alpha^2}{\beta} y$ смењујемо $\alpha = 1$ и добићемо:

$$\text{II)} \ldots \; 2\Omega e^{\beta t} = \varphi(z+ct) + \varphi(z-ct) + \frac{1}{c}\int_{z-ct}^{z+ct} v\,\phi(x)\,dx + \frac{\beta^2 t}{c}\int_{z-ct}^{z+ct} \frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\,dx$$

V је извесна функција z дата редом:

$$v = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} + \cdots$$

$$z = \frac{\beta}{c}\sqrt{c^2t^2 - (x-z)^2} \quad \ldots \; 3.$$

Да би нашли израз за U у x, y, z, биће одговара $\frac{\Omega}{2}$ за $z = 0$

из II и израз за $\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}$ немамо.

$$2\frac{d\Omega}{dt}e^{\beta t} + 2\beta e^{\beta t}\Omega = c\varphi'(z+ct) - c\varphi'(z-ct)$$

$$+ \frac{1}{c}\left[\frac{\beta^2}{c}\int_{z-ct}^{z+ct}\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\,dx + \frac{\beta^2 t}{c}\left(c\varphi(ct) - c\varphi(-ct)\right)\right] \quad \text{за } z=0$$

$$U = e^{-\beta t}\left[\varphi'(ct) + \frac{1}{c}\phi(ct) + \frac{\beta^2 t}{2c}\varphi(ct) + \frac{\beta^2}{c^3}\int_0^{ct}\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\,x\,\phi(x)\,dx\right.$$

$$\left. + \frac{\beta^4 t}{c^3}\int_0^{ct}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\right)x\,\varphi(x)\,dx\right]$$

Из ј.:

$$\int v\,\phi(x)\,dx = \left[x v\,\phi(x)\right]_{z-ct}^{z+ct} - \int d(\phi(x)\,dv)\,x.$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\,dx = \left[\frac{x}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\right]_{z-ct}^{z+ct} - \int x\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\right)$$

Где је:

$$z = \frac{\rho}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}$$

Ово [illegible] [illegible] [illegible].

Примедба. За овај изведен интеграл [illegible] и [illegible]:

$$u = \int_a^b f(x\,t)\,dx.$$

на a и b зависе од t и z

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}dx + f(bt)\frac{\partial b}{\partial t} - f(at)\frac{\partial a}{\partial t}.$$

$$b = z + ct, \quad a = z - ct \qquad \frac{\partial b}{\partial z} = 1 \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = 1.$$

$$u_1 = \int_a^b v\,\phi(x)\,dx = \int_a^b \frac{d[v\phi(x)]}{dz}dx + [v\phi(x)]_b - [v\phi(x)]_a = A_1 + 2\phi(ct)$$

$$v = 1 \qquad z^2 = \frac{\rho^2}{c^2}(c^2t^2 - x^2) \quad \text{за } x = ct \quad z = 0.$$

$$u_2 = \int \frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\,dx = \int_{z-ct}^{z+ct} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\right]dx + \left[\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\right]_b - \left[\frac{1}{2}\frac{dv}{dz}\varphi(x)\right]_a$$

$$u_2 = B + \left[\frac{\rho^2}{c^2}\left[c^2t^2 - (x-z)^2\right]\frac{1}{2}\varphi(ct)\right]_a + \frac{1}{2}\varphi(ct) = B + \varphi(ct).$$

$$A_1 = \int \frac{d[v\phi(x)]}{dz}dx = \int \phi(x)\,dx\,\frac{dv}{dz} + \ldots = \int \phi(x)\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dz}\cdot dx = \frac{\rho^2}{c^2}\int \phi(x)\frac{dv}{dz}\frac{x}{z}dx$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{\rho^2}{c^2}\frac{(x-z)}{z} \quad \text{за } z = 0 \quad = \frac{\rho^2}{c^2}\frac{x}{z}$$

Слично се израчуна и B_1.

/.

Линеарне електричне струје

Трансформација Максвелових једначина.

§81 Нека су p, q и r координате за систем линија $p\,q\,r$ у ортогоналном систему. Елемент ds линије даје израз:

$$ds^2 = e\,dp^2 + e'dq^2 + e''dr^2 \;\ldots\; 1.$$

Ако са $E_p\ E_q\ E_r\ M_p\ M_q\ M_r$ означимо компоненте напетости електричне силе у правцу координата онда имамо ово правило:

$$\sum dx\,d'x = ds\,d's\cos(ds\,ds') \;\ldots\; 2$$

$\sqrt{e}\,dp$ $\sqrt{e'}dq$ $\sqrt{e''}dr$ су пројекције елемента ds на p, q, r

ако са A_p A_q и A_r означимо пројекције вектора A на $p\,q\,r$ имамо:

$$\sum A_p\sqrt{e}\,dp = A\,ds\cos(A\,ds) = A_s\,ds \;\ldots\; 3.$$

Нека је у 3 $dp = 0$. по Stokes-овој теореми:

$$\int_2\left(\frac{\partial\sqrt{e''}A_r}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{e'}A_q}{\partial r}\right)dq\,dr = \int\left(A_q\sqrt{e'}dq + A_r\sqrt{e''}dr\right) = \int A_s\,ds \quad 4$$

$$\int A_s\,ds = \int C_p\,dw = \iint C_p\sqrt{e'e''}\,dq\,dr \;\ldots\; 5.$$

Из 4 и 5 следује:

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial\sqrt{e''}A_r}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{e'}A_q}{\partial r}\right)$$

$$C_q = \frac{1}{\sqrt{e''e}} \;\text{———}$$

$$C_r = \frac{1}{\sqrt{ee'}} \;\text{———}\,.$$

C_p, C_q, C_r су компоненте curl-а вектора A у правцу оса p, q и r.

Као и ово применимо на Максвелове једначине I и II и добићемо.

$$\frac{c}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial\sqrt{e''}M_r}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{e'}M_q}{\partial r}\right)=K\frac{\partial E_p}{dt}+4\pi\lambda E_p$$

$$\frac{c}{\sqrt{e''e}}\left(\frac{\partial\sqrt{e}M_p}{\partial r}-\frac{\partial\sqrt{e''}M_r}{\partial p}\right)=K\frac{\partial E_q}{dt}+4\pi\lambda E_q \qquad I$$

$$\frac{c}{\sqrt{ee'}}\left(\frac{\partial\sqrt{e'}M_q}{\partial p}-\frac{\partial\sqrt{e}M_p}{\partial q}\right)=K\frac{\partial E_r}{dt}+4\pi\lambda E_r$$

и друге стране:

$$\frac{c}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial\sqrt{e''}E_r}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{e'}E_q}{\partial r}\right)=-\mu\frac{\partial M_p}{dt}$$

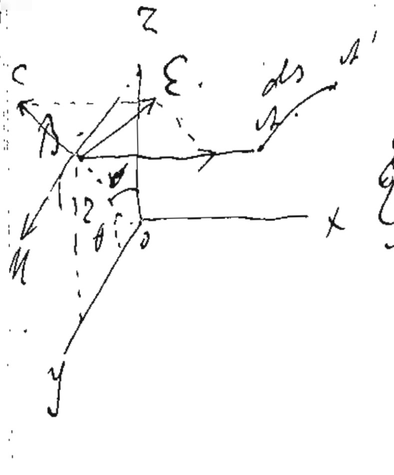
$$=-\mu\frac{\partial M_q}{dt} \qquad II$$

$$=-\mu\frac{\partial M_r}{dt}$$

и даље сматра за $\operatorname{div}E=\operatorname{div}M=0$, које важе:

$$\frac{\partial\sqrt{e'e''}E_p}{\partial p}+\frac{\partial\sqrt{e''e}E_q}{\partial q}+\frac{\partial\sqrt{ee'}E_r}{\partial r}=0 \qquad III$$

$$\frac{\partial\sqrt{e'e''}M_p}{\partial p}+\frac{\partial\sqrt{e''e}M_q}{\partial q}+\frac{\partial\sqrt{ee'}M_r}{\partial r}=0 \qquad IV$$



§28 Аксијално симетрично поље. Нека су координате тачке A $x\,y\,z$ или $z\;\theta$ и x. Између једних и других постоје односи:

$$y=z\cos\theta,\quad z=z\sin\theta,\quad x=x$$

Елеменат је дужи ds:

$$ds^2=dx^2+z^2d\theta^2+dz^2$$

Онда ће бити:

p	q	r	e	e'	e''
x	θ	z	1	z^2	1

Ако електрична сила лежи у равни ABC а магнетска M у правцу нормалном на круг из O у AB, онда су:

$$E_x \neq 0\quad E_z\quad E_\theta=0,\quad M_\theta=M\quad M_z=M_x=0.$$

и независно су E_x, E_z и M независни од θ.

Кад и ово сменимо у напред. једначинама добија се:

$$-\frac{c}{r}\frac{\partial rM}{\partial r} = K\frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x \dots 1.$$

$$\frac{c}{r}\frac{\partial rM}{\partial x} = K\frac{\partial E_r}{\partial t} + 4\pi\lambda E_r \dots 2.$$

$$c\left(\frac{\partial E_x}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial x}\right) = -\mu\frac{\partial M}{\partial t} \dots 3$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial rE_r}{\partial r} = 0 \dots 4.$$

Ако 1 диференцијалимо по r, 2 по x и [illegible] с обзиром на 3 имамо:

$$c^2\left[r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial rM}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 rM}{\partial x^2}\right] = K\mu\frac{\partial^2 rM}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu\frac{\partial rM}{\partial t} \dots I.$$

Кад се одавде нађе M, E_x и E_r се [illegible]

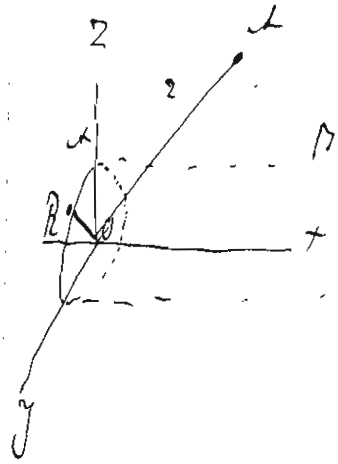
За E_x се добија једначина:

$$c^2\left(\frac{\partial r\frac{\partial E_x}{\partial r}}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right) = \mu K\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu\frac{\partial E_x}{\partial t} \dots II.$$

Ако се једначина I по r диференцијали и стави $\frac{\partial rM}{\partial r} = rU$ као и једначина II [illegible] ову једначину:

$$c^2\Delta U = K\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Електрично струјање у жицама.



379 Нека струја иде кроз цилиндар AB, чији је пресек круг полупречника R. Около овога цилиндра је неки диелектрични медијум. λ има сталну вредност за $r < R$ и $\lambda = 0$ за $r > R$.

Овде ћемо посматрати хидродинамичко решење. Претпоставимо да су E_x, E_r, M независни од x и φ. Једначине се јако поједностављују:

$$E_x = const. \quad E_r = 0 \quad \ldots \quad 1.$$

Из једначине 1 за x и φ правац, једначине дају:

$$M = -\frac{2\pi\lambda}{c} E_x r \qquad r < R \quad \ldots 2.$$

$$M = -\frac{2\pi\lambda E_x R^2}{c r} \qquad r > R$$

M је магнетичка сила за стационарну струју електричну у жици у жици $r < R$ и ван жице $r > R$.

Напомена: знам да је E_r за … у жици у проводнику непрекидно. E_r је непрекидно ако се налази електрична маса на жици, онда E_r није нула ван жице већ $E_r = \frac{const}{r}$ и тиче се одговарајуће масе електричне.

λE_x је густина струје проводника

$$j = \int \lambda E_x \, dq = 2\pi\lambda \int_0^R r E_x \, dr$$

dq је пресек жице $dq = 2\pi r \, dr$, j је јачина струје (интензитет). Ако се w означи отпор јединице дужине а q пресек жице

$$w = \frac{1}{\lambda q}$$

$$wj = \frac{1}{q}\int E_x \, dq = \frac{2}{R^2}\int_0^R r E_x \, dr$$

$$E_x = wj \quad \ldots \quad 3.$$

Из последње једначине 3 се налази да је константа $= wj$.

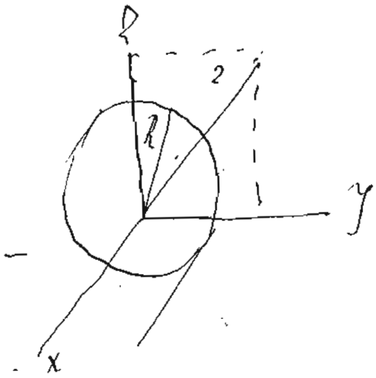
Samoindukcija

3.80 Ako jednačinu ... :

$$c^2\left(\frac{\partial r \frac{\partial E_x}{\partial r}}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right) = \mu K \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

pomnožimo sa $2\pi r$ i integralimo od 0 do R i ... i obzirom:

$$i = 2\pi\lambda\int_0^R r E_x\, dr$$



dobijamo jednačinu:

$$c^2 R\left(\frac{\partial E_x}{\partial r}\right)_{r=R} + \frac{c^2}{2\pi\lambda}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\mu K}{2\pi\lambda}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial i}{\partial t} \quad \ldots \text{I}$$

Neka je $c^2 R\left(\frac{\partial E_x}{\partial r}\right)_{r=R} = 0$

Kad se ovo stavi u I za i dobijamo jednačinu za intenzitet struje:

$$c^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \mu K \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + 4\pi\mu\lambda\frac{\partial i}{\partial t} \quad \ldots \text{II}$$

Ovo je analogno sa telegrafskom jednačinom ... Maxwell ... jednačinu II. Ako je e količina elektriciteta ... vremena t, $\frac{de}{dt}$ ... struje ... $i = \frac{de}{dt}$

Ako je C kapacitet ..., Cdx je količina elektriciteta ... elementa dx ... jednačinu ... je:

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = Cv \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial v}{\partial t}$$

Elektromotorna sila na dx ... $\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$ ... indukcija

$-S\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)dx$ gde je S samoindukcioni koeficijent. Ako je w otpor onda je:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} - S\frac{\partial i}{\partial t} = wi \quad (\text{w Ohm})$$

Ako ... v ... :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CS\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + Cw\frac{\partial i}{\partial t}$$

/.

Ова је једначина истоветна са II за:

$\mu K_1 = c^2 C_s$ и $4\pi\mu\lambda = c^2 C w$

или $4\pi\mu\lambda = C w$ (у електромагнетским јединицама)

3.81 Знамо се:

$$c^2 R\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_z = R$$

Може [illegible]

Нека је E_x нека функција од t и z и ако периодима са периодима

T и L $\quad E_x = A\cos\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi z}{L}$

$$= \frac{W_m R T}{L} \text{ је [illegible] } = \frac{W_m R}{c}$$

c је брзина светлости.

3. Интерпретација [illegible] једначина методом партикуларних интеграла

3.82 Посматрамо партикуларни интеграл једначине:

$$c^2 \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \mu K_1 \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + 4\pi\mu\lambda\frac{\partial j}{\partial t} \quad \ldots 1.$$

и нека је он:

$$j = A e^{i(\alpha x + \beta t)} \quad \ldots 2.$$

A α β су константе [illegible]. Ако 2 заменимо у 1 онда налазимо однос:

$$\mu K \beta^2 - 4\pi\mu\lambda\beta - \alpha^2 c^2 = 0 \quad \ldots 3.$$

Нека је α стварно онда је $\cos z$ у x периодично са периодом $\frac{2\pi}{\alpha}$ која се зове дужина таласа

из 3 је β:

$$\beta = \frac{2\pi i\lambda}{K}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2 K}{4\pi^2\lambda^2\mu}}\right)$$

Za β mamy dwie wartości β_1 i β_2. Wartości $i\beta_1$ i $i\beta_2$ są [illegible] rzeczywiste, jeżeli:

$$\alpha^2 > \frac{4\pi^2\lambda^2\mu}{c^2 k} \quad \ldots \quad 5$$

zaś urojone gdy:

$$\alpha^2 < \frac{4\pi^2\lambda^2\mu}{c^2 k} \quad \ldots \quad 6.$$

Ujemne [illegible] są oba $i\beta_1$ i $i\beta_2$ [illegible], [illegible] β_1 [illegible]:

$$f = A e^{-i\alpha x} e^{i\beta t}.$$

[illegible] $e^{i\beta t} = e^{-at}$ [illegible] t [illegible] wzoru 5 [illegible] wzoru 6 [illegible] f [illegible]

Jeżeli f i $\frac{\partial f}{\partial t}$ dla $t = 0$ są dane jako funkcje x [illegible] $f_0(x)$ i $f_0'(x)$, to Fourier-y:

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_1 e^{i\beta_1 t} + A_2 e^{i\beta_2 t}\right) e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\beta_1 A_1 e^{i\beta_1 t} + \beta_2 A_2 e^{i\beta_2 t}\right) e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

A_1 i A_2 są funkcjami od α.

Jeżeli [illegible] podług wzoru:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\alpha(x-\xi)}\, d\xi$$

Za A_1 i A_2 mamy dwa równania:

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi)\, e^{-i\alpha\xi}\, d\xi.$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_0'(\xi)\, e^{-i\alpha\xi}\, d\xi$$

[illegible], [illegible] α/β.

$$\alpha = \sqrt{\mu k \beta^2 - 4\pi\mu\lambda i\beta}$$

З. 84 Узмимо за f једно решење облика:

$$f = A e^{i(\alpha x + \beta t)}$$

$$\mu K_1 \beta^2 - 4\pi\mu\lambda i \beta - \alpha^2 c^2 = 0$$

Када се ово стави у једначину за P_0 имаћемо:

$$c P_0 = -2A\left(1 + \frac{iK\beta}{4\pi\lambda}\right) e^{i(\alpha x + \beta t)} \quad \ldots \quad ✓$$

$$c P = -2A\left(1 + \frac{iK\beta}{4\pi\lambda}\right) e^{i(\alpha x + \beta t)} I(\gamma r) \quad \ldots \quad (2.$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Ово је A [illegible] за P [illegible] свуда [illegible]

Ако се узме електрична компонента E_x ку налазимо из:

$$-\frac{c}{r}\frac{\partial(rH)}{\partial r} = \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Ако се ово стави:

$$rH = P = e^{i(\alpha x + \beta t)} I$$

имаћемо:

$$E_x = -\frac{c}{i\beta r}\frac{dI}{dr} e^{i(\alpha x + \beta t)} = -\frac{c\gamma^2}{i\beta} e^{i(\alpha x + \beta t)} \psi$$

$$\frac{dI}{dr} = \gamma^2 r \psi$$

Ово је [illegible] у xr [illegible] у [illegible] [illegible] [illegible] индукционо

/.

— [illegible] —

II

Одбијање електричних таласа

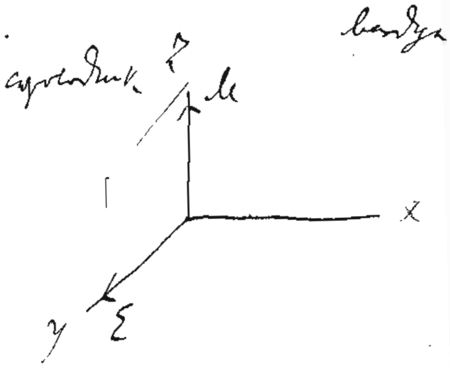
— I —

Одбијање равних електричних таласа.

§85 Из теорије електромагнетских једначина налази се одмах у облику тврђења о простирању електричних таласа и њихових особина сагласно са оптичким својствима.

Нека је у извесној диелектричној средини магнетска и електромагнетска зависна само од координата x и времена t.

$$E_x = 0 \qquad M_x = 0$$
$$E_y = E \qquad M_y = 0$$
$$E_z = 0 \qquad M_z = M$$



E и M су функције x-а и t (времена).

Максвелове једначине за овај случај гласе:

$$K \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi\lambda E = -c \frac{\partial M}{\partial x} \quad \ldots \quad (I).$$
$$c \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \frac{\partial M}{\partial t}.$$

Ако се узме да раван yz одваја две средине диелектрика где је с једне стране ваздух или празан простор а с друге стране диелектрик проводник тада имамо:

за $x > 0$ $\quad K = \mu = 1 \quad \lambda = 0$

$x < 0$ $\quad K, \mu, \lambda$ произвољне константе.

Ако су E, M у ваздуху а E' и M' у проводнику гранични услови

за $x = 0$ $\quad E = E' \quad M = M' \ldots \quad (1).$

Да би могли решити једначине I са условом 1 узетим су још почетни услови, који можемо испитивати ако се

/.

интегралима варијационим решења једначине I.

Ако ставимо:

$$\xi = u e^{i\alpha t} \qquad \eta = v e^{i\alpha t} \quad \ldots \quad 2$$
$$\xi' = u' e^{i\alpha t} \qquad \eta' = v' e^{i\alpha t}.$$

где су $u\, u'\, v\, v'$ функције од x са, α реална константа, која је са периодом трајања T у вези:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

узимамо као 2 и решења за једначину I. Ова су решења у функ... имагинарни за нас који ставимо горњи смисао.

За одређивање $u\, u'\, v\, v'$ имамо ове једначине:

$$\left.\begin{aligned} i\alpha u &= -c\frac{dv}{dx} \\ i\alpha v &= -c\frac{du}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ за } x > 0 \quad \ldots \quad 3$$

$$\left.\begin{aligned} (i\alpha k + 4\pi\lambda) u' &= -c\frac{dv'}{dx} \\ i\alpha\mu v' &= -c\frac{du'}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ за } x < 0 \quad \ldots \quad 4.$$

Из 3 имамо:

$$u = a_1 e^{\frac{i\alpha}{c}x} + a_2 e^{-\frac{i\alpha}{c}x} \qquad x > 0$$
$$v = -a_1 e^{\frac{i\alpha}{c}x} + a_2 e^{-\frac{i\alpha}{c}x}$$

$a_1\, a_2$ су константе које могу бити и имагинарне.

За решење једначине 4 узимамо исто су вези варијационим интегралом:

$$u' = a' e^{\frac{\alpha(\rho + i\sigma)x}{c}} \qquad v' = b' e^{\frac{\alpha(\rho+i\sigma)x}{c}} \quad x < 0 \ldots 5$$

За $\rho + i\sigma$ налазимо једначину:

$$(\rho + i\sigma)^2 = i\mu\left(ik + \frac{4\pi\lambda}{\alpha}\right) = -\mu k + 2i\mu T\lambda$$

$$\rho + i\sigma = \pm\sqrt{-\mu k + 2i\mu T\lambda}$$

Према само + јер би имали за − за $x = -\infty$, ρ било ∞ што је немогуће.

Из b_1 и c_1 налазимо:

$$b' = -a' \frac{\rho + i\sigma}{i\mu} \quad \dots \quad (6.$$

a' је константа која може бити произвољна

Ако се a_1, a_2, a' смене са $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$, $a' + ib'$

из 4 и 5 имамо:

$$\Sigma = (a_1 + ib_1) e^{i\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right)} + (a_2 + ib_2) e^{i\alpha\left(t - x/c\right)} \qquad x > 0$$

Ако и сада узмемо реални део онда је:

$$\Sigma = a_1 \cos\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + a_2 \cos\alpha\left(t - x/c\right) - b_1 \sin\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) - b_2 \sin\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

и за M:

$$M = -a_1 \cos\alpha\left(t + x/c\right) + a_2 \cos\alpha\left(t - x/c\right) + b_1 \sin\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) - b_2 \sin\alpha\left(t - x/c\right)$$

Изрази су периодични по t и по x; где је период αT где је $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{2\pi c}{\alpha} = cT$$

$\mathcal{L} = \frac{2\pi c}{\alpha}$, $\mathcal{L} = cT$

$\mathcal{L}$ се зове таласна дужина.

Ако уведемо нове константе A_1, A_2, α_1, α_2 из једнач.:

$a_1 = A_1 \cos\alpha_1$ $\qquad$ $b_1 = A_1 \sin\alpha_1$

$a_2 = A_2 \cos\alpha_2$ $\qquad$ $b_2 = A_2 \sin\alpha_2$

имаћемо:

$$\Sigma = A_1 \cos\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha_1\right] + A_2 \cos\left[\alpha\left(t - x/c\right) + \alpha_2\right] \quad \dots 7$$

$$M = -A_1 \cos\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha_1\right] + A_2 \cos\left[\alpha\left(t - x/c\right) + \alpha_2\right]$$

или

$$\Sigma = A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2 \quad \dots \quad (II.$$

$$M = -A_1 \cos\theta_1 + A_2 \cos\theta_2$$

Први део зависи од θ_1 односно непроменљив ако $\frac{x}{c}$ остане [illegible] константно за [illegible] t расте и представља [illegible] у правцу [illegible] x [illegible]; други део представља [illegible] у [illegible] Ако [illegible] $x = 0$ [illegible] који је [illegible] одбијени [illegible].

/.

Разлика између фаза $\alpha\left(t+\frac{x}{c}\right)+\alpha_1-n2\pi=\alpha$ [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]:

$$\frac{2x}{c}+\alpha_1-\alpha_2=\alpha$$

[illegible] A_1 и A_2 [illegible], A_1^2 и A_2^2 [illegible].

Угашење таласа у апсорбенту

385 За $x<0$ кад се a' смени са $a'+ib'$ имаћемо:

$$\xi'=(a'+ib')\,e^{\frac{2\pi\rho x}{Tc}}\,e^{i\alpha\left(t+\frac{\sigma x}{c}\right)}$$

$$\mu h'=-(a'+ib')(\sigma-i\rho)\,e^{\frac{2\pi\rho x}{Tc}}\,e^{i\alpha\left(t+\frac{\sigma x}{c}\right)}$$

Ако ставимо:

$$a'+ib'=A'e^{i\alpha'}\qquad \sigma-i\rho=Re^{iz}$$

и задржимо само реалне делове имаћемо:

$$\xi'=A'e^{\frac{2\pi\rho x}{Tc}}\cos\left[\alpha\left(t+\frac{\sigma x}{c}\right)+\alpha'\right]$$

$$\mu h'=-RA'e^{\frac{2\pi\rho x}{Tc}}\cos\left[\alpha\left(t+\frac{\sigma x}{c}\right)+\alpha'+z\right]$$

У апсорбенту се простире само један талас а брзина простирања $c'=\frac{c}{\sigma}$ . . . 1.

[illegible], таласна дужина λ_1

$$\lambda_1=\frac{\lambda}{\sigma}\quad . . . 2.$$

Између електричног и магнетног таласа овде влада фазна разлика једнака z. За h имамо фактор

$$D=e^{\frac{2\pi\rho x}{Tc}}=e^{\frac{2\pi\rho x}{\lambda}}$$

D је мањи што је $-x$ веће, талас слаби.

9. [illegible] [illegible] услове граничне, [illegible] и [illegible] зрака, [illegible] на граничне услове:

за $x=0$

$$\xi = A_1 \cos(\alpha t + \alpha_1) + A_2 \cos(\alpha t + \alpha_2)$$

$$\eta = - A_1 \cos(\alpha t + \alpha_1) + A_2 \cos(\alpha t + \alpha_2)$$

$$\xi' = A' \cos(\alpha t + \alpha_1)$$

$$\mu \eta' = - R A' \cos(\alpha t + \alpha' + ?)$$

Како је за $x=0$ $\xi = \xi'$ и $\mu = \mu_1$

$$\left.\begin{aligned} A' \cos\alpha' &= A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2 \\ A' \sin\alpha' &= A_1 \sin\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_2 \\ R A' \cos(\alpha' + ?) &= \mu (A_1 \cos\alpha_1 - A_2 \cos\alpha_2) \\ R A' \sin(\alpha' + ?) &= \mu (A_1 \sin\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_2) \end{aligned}\right) \quad \ldots \; \checkmark .$$

R и μ су константе зависне од [illegible] и [illegible] зрака. Из једначина [illegible] $A_2 \cos\alpha_2$, $A_2 \sin\alpha_2$, $A' \cos\alpha'$, $A' \sin\alpha'$ [illegible] $A_1 \cos\alpha_1$, $A_1 \sin\alpha_1$, [illegible] [illegible] $\alpha_1 - \alpha_2$ [illegible] T

ако је $\dfrac{T\lambda}{K\mu} = \rho$ и $\sqrt{2i} = 1 + i$ $\quad \rho = \sqrt{T\lambda\mu}$

и

$$\frac{\rho}{T} = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{T}}$$

(Herz $T = 22 \cdot 10^{-10}{''}$ $\lambda = \frac{9}{16} 10^{15}$ $\frac{\lambda}{T} = \frac{9 \cdot 10^{25}}{16 \cdot 22}$, $T' = \frac{589}{3} 10^{-12}{''}$

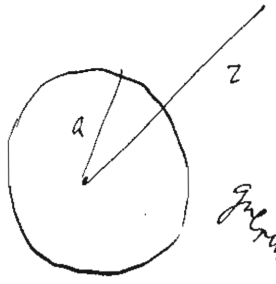
$\frac{\lambda}{T'} = 3 \cdot 10^{29}$).

/.

– Кугласти таласи –

§ 86 Код равних слободних електрицитета тела које се [illegible] занемарује утицај магнетних таласа. На [illegible] проводника је $\Sigma = 0$, концентрисане у конкретни електрична сила нула.

Узмимо један кугласти проводник полупречника a и уведимо поларне координате $r\ \theta\ \varphi$.



Овде је:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$p \quad q \quad r \qquad e \quad e' \quad e''$

$r \quad \theta \quad \varphi \qquad 1 \quad r^2 \quad r^2\sin^2\theta .$

Максвелове једначине:

$$\frac{c}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial r \sin\theta M_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial r M_\theta}{\partial\varphi}\right) = \frac{\partial E_r}{\partial t}$$

$$\frac{c}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial M_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r\sin\theta M_\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial E_\theta}{\partial t}$$

$$\frac{c}{r}\left(\frac{\partial r M_\theta}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} \qquad \text{— I —}$$

$$\frac{c}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial r\sin\theta E_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial\varphi}\right) = -\frac{\partial M_r}{\partial t}$$

$$\frac{c}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r\sin\theta E_\varphi}{\partial r}\right) = -\frac{\partial M_\theta}{\partial t}$$

$$\frac{c}{r}\left(\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right) = -\frac{\partial M_\varphi}{\partial t}$$

За површину кугле су:

$E_\theta = 0,\ E_\varphi = 0$ за $r = a$

Једначине за дивергенцију E и M су:

$$\frac{\partial r^2\sin\theta E_r}{\partial r} + \frac{\partial r\sin\theta E_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial r E_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \qquad \text{II}$$

$$\frac{\partial r^2\sin\theta M_r}{\partial r} + \frac{\partial r\sin\theta M_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial r M_\varphi}{\partial\varphi} = 0$$

Кад [illegible] једначину ... I ... по t, и $\frac{\partial M_\varphi}{\partial t}$ $\frac{\partial M_\theta}{\partial t}$ ... II ...:

$$\frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 r^2 E_r}{r^2\,\partial r^2} + \frac{\partial \sin\theta \frac{\partial E_r}{\partial\theta}}{r^2\sin\theta\,\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 E_r}{\partial\varphi^2}\right]$$

и са граничним условом:

$$\frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} = 0 \quad \text{за } r = a \quad \ldots \ldots (I)$$

Прву једначину можемо овако написати:

$$\frac{\partial^2 r E_r}{\partial t^2} = c^2 \Delta(r E_r) \quad \ldots \quad (III)$$

Нека је [illegible] ‖ x осе

$$E_x = C e^{ik(ct - z)}$$

Кад нема кугле:

$$E_r = E_x \cos(rx) = E_x \sin\theta\cos\varphi = C e^{ik(ct - r\cos\theta)} \sin\theta\cos\varphi$$

... је вредност ... E_r за $r = \infty$. Овај и услов мора задовољити и за решење једначине III.

Ако је Φ функција која задовољава:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi$$

и $\lim \Phi = r E_r$, кад и стави $r E_r - \Phi = W$, W задовољава:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = c^2 \Delta W \quad \text{у граничним условима}$$

$$W = 0 \text{ у } \infty$$

$$\frac{\partial r W}{\partial r} + \frac{\partial r \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{за } r = a.$$

Кад и нађе E_r, M_r и наћи из истих једначина:

$$\frac{\partial^2 r M_r}{\partial t^2} = c^2 \Delta(r M_r)$$

где је M_r за $r = a$ независно од t

Кад и M_r одреди онда и из I лако наћи E_φ и E_θ

III

Бартингарни интеграли

(2)87 Ако ставимо у једначини:

$$\frac{\partial^2 rAr}{dt^2} = c^2 \Delta (rAr)$$

$rAr = U$ ставимо:

$$\frac{\partial^2 U}{dt^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 rU}{r\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) \quad 1$$

Бартингарни интеграл:

$$U = e^{ikt} R Z_n$$

Z_n је кугласта функција n^{og} реда која задовољава једначину

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta \frac{\partial Z}{\partial \theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Z_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Z_n = 0 \quad \cdots \quad 2$$

Z_n има $2n+1$ неодређених константа

R је функција од r, која задовољава једначину

$$\frac{d^2 rR}{r\, dr^2} + \left(\frac{k^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0 \quad \cdots \quad 3.$$

интеграли су:

$$R_1 = e^{\frac{ikr}{c}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(-\frac{2kir}{c}\right)^{-\nu-1} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)}$$

$$R_2 = e^{-\frac{ikr}{c}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(+\frac{2kir}{c}\right)^{-\nu-1} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)}$$

За R се може узети решење

$$A_1 R_1 + A_2 R_2$$

q. Гранични услови. Ако је $U=0$ за $r=a$, A_1, A_2 се у $A_1R_1 + A_2R_2$ морају тако одредити да је R за $r=a$ нула.

Нека је:

$$iR = R_2(a) R_1(r) - R_1(a) R_2(r)$$

· / .

нека је $z_n = X + iY_n$

$$u = e^{ikt} R(X_n + iY_n) = R(X_n \cos kt - Y_n \sin kt)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} R(X_n \cos kt + Y_n \sin kt)\,dk \quad \ldots \quad \text{IV}$$

Ако је $u = f$, $\frac{\partial u}{\partial t} = F$ за $t = 0$ произвољне вредности:

$$f = \sum_0^{\infty} \int_0^{\infty} R X_n\,dk \qquad F = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} R Y_n k\,dk \quad \ldots \quad \text{V}$$

Ако су f и F задати у поларним координатама [illegible] имамо $f(r)$ и $\varphi(k)$ интеграла:

$$f(r) = \int_0^{\infty} R\varphi(k)\,dk \quad \text{[illegible]}$$

Ако се [illegible] кугла [illegible] гранични услов [illegible] за $u = 0$, ако су a и b полупречници имамо:

$$R_2(a) R_1(b) - R_1(a) R_2(b) = 0 \quad \ldots \quad (\text{I}$$

из I [illegible] k [illegible] једначина IV добија:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k R(X_n \cos kt + Y_n \sin kt) \quad \ldots \quad (\text{V}.$$

$$f(r) = \sum_k M_k R_k$$

Ако за k узмемо две вредности k_1 и k_2

$$\frac{d^2 r R_{k_1}}{dr^2} = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} - \frac{k_1^2}{c^2}\right] r R_{k_1}$$

$$\frac{d^2 r R_{k_2}}{dr^2} = \left[\frac{n(n+1)}{r^2} - \frac{k_2^2}{c^2}\right] r R_{k_2}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r R_{k_2} \frac{d r R_{k_1}}{dr} - r R_{k_1} \frac{d r R_{k_2}}{dr}\right] = \frac{k_2^2 - k_1^2}{c^2} R_{k_1} R_{k_2}$$

Када се ово интегрише од a до b

$$\int R_{k_1} R_{k_2} r^2\,dr = 0$$

вредности k_2 и k_1 различне вредности.

Интеграција Максвелових једначина

§ 88 Претпоставимо да из једне једначине елиминишемо $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$.

За $\mu = K = 1 \quad \lambda = 0$ једначине су:

$$\text{I} \quad c \operatorname{curl} \mathcal{M} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

$$\text{II} \quad c \operatorname{curl} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}$$

из обе се једначине добија:

$$c \operatorname{curl}(\mathcal{E} + i\mathcal{M}) = i \frac{\partial(\mathcal{E} + i\mathcal{M})}{\partial t} \quad \ldots \quad 1.$$

Ако су λ μ K константе онда се добија:

$$c \operatorname{curl} \mathcal{M} = K \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda \mathcal{E}$$

$$c \operatorname{curl} \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}$$

Стављајући $\mathcal{E} = e^{ikt}\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{M} = e^{ikt}\mathcal{M}_1$ имамо

$$c \operatorname{curl} \mathcal{M}_1 = (Kik + 4\pi\lambda)\mathcal{E}_1 \quad \ldots$$

$$c \operatorname{curl} \mathcal{E}_1 = -\mu i k \mathcal{M}_1$$

и:

$$c \operatorname{curl}[\mathcal{E}_1 + \sigma \mathcal{M}_1] = (iKk + 4\pi\lambda)\sigma \mathcal{E}_1 - \mu i k \mathcal{M}_1$$

Ако σ одредимо:

$$-\mu i k = (Kik + 4\pi\lambda)\sigma^2 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{-\mu i k}{Kik + 4\pi\lambda}}$$

и ставимо:

$$c h = (Kik + 4\pi\lambda)\sigma = \sqrt{\mu i k (Kik + 4\pi\lambda)}$$

имаћемо:

$$\mathcal{E}_1 + \sigma \mathcal{M}_1 = A \quad \ldots \quad (\text{II}.$$

$$\operatorname{curl} A = hA.$$

Ако се нађе A онда се лако из обе једначине нађу $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{M}_1$ за $\lambda = 0$ $K = \mu = 1$ $\sigma = \pm i$ и стављ. а одатле добија се II као специјални случај за $\sigma = +i$.

./.

§89 Wyznaczenie wektora A. Z II równania z [illegible]:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = hA_x$$
$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = hA_y \quad \ldots\ 1.$$
$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = hA_z$$

Jeżeli $a\ b\ c\ \alpha\ \beta\ \gamma$ konstante [illegible]

$$A_x = a\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}$$
$$A_y = b\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \quad \ldots\ 2.$$
$$A_z = c\, e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}$$

$$b\gamma - c\beta = iha \qquad h^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$
$$c\alpha - a\gamma = ihb$$
$$a\beta - b\alpha = ihc$$

[illegible] $a : b : c$

Jeżeli curl $A = hA$ [illegible] współrzędnych [illegible]:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\, r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial\, rA_\theta}{\partial\varphi}\right) = hA_r$$
$$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\, r\sin\theta A_\varphi}{\partial r}\right) = hA_\theta \quad \ldots\ 3.$$
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\, rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) = hA_\varphi$$

Jeżeli [illegible]:

$$A_r = B_r e^{im\varphi}$$
$$A_\theta = B_\theta e^{im\varphi} \quad \text{gdzie } A_r,\ B_\theta\ B_\varphi \text{ od } \varphi \text{ [illegible]}$$
$$A_\varphi = B_\varphi e^{im\varphi} \quad \text{[illegible]}$$

Dla B [illegible]:

$$\frac{\partial\, r\sin\theta B_\varphi}{\partial\theta} = hr^2\sin\theta B_r + imrB_\theta$$
$$\frac{\partial\, r\sin\theta B_\varphi}{\partial r} = -hrB_\theta\sin\theta + imB_r \quad \ldots\ 4.$$
$$\frac{\partial\, rB_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial\theta} = hrB_\varphi$$

Задржавамо B_θ и B_φ помоћу B_r. Из горњих једначина имамо:

$$\sin\theta\frac{\partial r^2 B_r}{\partial r} + r\frac{\partial \sin\theta B_\theta}{\partial\theta} = -imr B_\varphi$$

$$h\frac{\partial r\sin\theta B_\varphi}{\partial\theta} + im\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} = \sin\theta\left(h^2r^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)B_r$$

$$\sin\theta\frac{\partial^2 r^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \sin\theta\frac{\partial B_r}{\partial\theta}}{\partial\theta} = -h\frac{\partial r\sin\theta B_\varphi}{\partial\theta} - im\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 r^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \sin\theta\frac{\partial B_r}{\partial\theta}}{\sin\theta\,\partial\theta} + \left(h^2r^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)B_r = 0 \quad \ldots \text{I}$$

Једначина за B_r

§. 90 Ако ставимо у I

$$rB_r = R\Theta$$

имаћемо:

$$\frac{r\,d^2 rR}{R\,dr^2} + h^2r^2 = -\frac{d\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}}{\sin\theta\,\Theta\,d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = n(n+1) = \text{const.}$$

За Θ и R су једначине онд:

$$\frac{d\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}}{\sin\theta\,d\theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \quad \ldots 1$$

$$\frac{d^2 rR}{dr^2} + \left[h^2 - \frac{(n+1)n}{r^2}\right]rR = 0 \quad \ldots 3$$

Ставимо у 1 $x = \cos\theta$.

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x(1-x)\frac{d\Theta}{dx} + \left[n(n+1)(1-x^2) - m^2\right]\Theta = 0$$

$$\Theta = P\left|\begin{matrix} 1 & \infty & -1 & \\ m/2 & -n & m/2 & x \\ -m/2 & n+1 & -m/2 & \end{matrix}\right|$$ хипергеометријски ред.

$$1 - x = 2\sin^2\theta/2$$

Ако ставимо $\sin^2\theta/2 = z$

$$\Theta = z^{m/2}(1-z)^{m/2}F(-n, n+1, m+1, z) \;\ldots$$

За R и налазимо:

$$R = e^{\pm ikr} \sum_{v=0}^{n} (\mp 2ikr)^{-v-1} \frac{\Pi(n+v)}{\Pi(n-v)\,\Pi(v)}$$

3.91 Одређивање B_φ и B_θ.

Из једначина:

$$\frac{\partial\, r \sin\theta\, B_\varphi}{\partial \theta} = kr^2 \sin\theta\, B_r + imr B_\theta \quad \ldots\ 1$$

$$\frac{\partial\, r B_\varphi}{\partial r} = -kr B_\theta + \frac{im}{\sin\theta} B_r \quad \ldots\ 2$$

$$\frac{\partial\, r B_\theta}{\partial r} = k B_r + \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \quad \ldots\ 3$$

Када се стави $r B_r = R\theta$ и 3 се помножи са i [illegible] уведемо:

$$\Omega_1 = r(B_\varphi + i B_\theta) \quad \ldots\ 4$$

$$\Omega_2 = r(B_\varphi - i B_\theta)$$

добијамо:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - ki\Omega_1 = i\left[\frac{m}{\sin\theta} B_r + \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right] \quad \ldots\ 5$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + ki\Omega_2 = i\left[\frac{m}{\sin\theta} B_r - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right]$$

Ако нађемо Ω_1 и Ω_2 из 5 онда из 4 можемо наћи B_φ и B_θ.

$$2rB_\varphi = \Omega_1 + \Omega_2 \qquad 2ir B_\varphi = \Omega_1 - \Omega_2 \quad \ldots\ 6$$

Ако се $\Omega_1 = R_1\Theta_1$ и $\Omega_2 = R_2\Theta_2$ и ово замени у 5 добијамо:

$$\frac{r}{iR}\left[\frac{dR_1}{dr} - kiR_1\right] = \frac{1}{\Theta_1}\left(\frac{m\Theta}{\sin\theta} + \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 1$$

$$\frac{r}{iR}\left[\frac{dR_2}{dr} + kiR_2\right] = \frac{1}{\Theta_2}\left[\frac{m\Theta}{\sin\theta} - \frac{d\Theta}{d\theta}\right] = 1$$

Одавде је:

7). $\left(\begin{array}{l} \theta_1 = \dfrac{m\theta}{\sin\theta} + \dfrac{d\theta}{d\theta} \\ \theta_2 = \dfrac{m\theta}{\sin\theta} - \dfrac{d\theta}{d\theta} \end{array}\right)$ одакле имамо θ_1 и θ_2

8) $\dfrac{dR_1}{dr} - hiR_1 = \dfrac{iR}{2}$, $\dfrac{dR_2}{dr} + hiR_2 = \dfrac{iR}{2}$ | одакле R_1 и R_2

Ако уврстимо у једначину $2B_r$, $2B_\theta$ и $2B_\varphi$ имамо:

9). $R_1\left(\dfrac{d\sin\theta\,\theta_1}{d\theta} - m\theta_1\right) + R_2\left(\dfrac{d\sin\theta\,\theta_2}{d\theta} + m\theta_2\right) = 2hr\sin\theta\,\theta R$

Ако 7 диференцирамо и уврстимо θ имаћемо.

$$\frac{d\sin\theta\,\theta_1}{d\theta} - m\theta_1 = -n(n+1)\sin\theta\,\theta$$

$$\frac{d\sin\theta\,\theta_2}{d\theta} + m\theta_2 = n(n+1)\sin\theta\,\theta$$

из 9 једн.:

10). $n(n+1)(R_1 - R_2) = -2hrR$

из 8 ј.:

11) $\dfrac{d(R_1 - R_2)}{dr} = hi(R_1 + R_2)$

из 10 и 8)

12) $n(n+1)(R_1 + R_2) = 2i\dfrac{drR}{dr}$

из 11 и 12 ј.:

$$n(n+1)R_1 = -hrR + i\frac{drR}{dr}$$

$$n(n+1)R_2 = hrR + i\frac{drR}{dr}$$

Према томе R_1 и R_2 изразимо са R као функцију θ_1 и θ_2 са θ.

/.

- Трећа Књига -

Једначине електрицитета и магнетизма

Општа својства

Једначине електростатике.

§1. Ако се помераји у диелектрикуму означи са D а са E јачина поља, онда електростатике:

$$4\pi D = \varepsilon E \quad \ldots \quad 1. \quad (\varepsilon \text{ диелектрична константа})$$

$$\mathrm{div.}\, D = \rho \quad \ldots \quad 2.$$

ρ је густина електрицитета у запремини.

$$D_r^{+} - D_r^{-} = \sigma \quad \ldots \quad 3.$$

σ је густина електрицитета површине.

Енергија је електростатичког поља у ... запремини

$$dT = \frac{1}{2}(ED)\,d\tau \quad \ldots \quad 4.$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\, d\tau\,[E_x^2 + E_y^2 + E_z^2] \quad \ldots \quad 5.$$

§2. Услови равнотеже проводника C је:

1) $E = D = 0$.

2) E је потенцијално поље φ

$$\mathrm{curl}\, E = 0$$

$$\varphi = -\int E_s\, ds \qquad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

3) φ је непрекидно у целом пољу у диелектрикуму и једнако на проводницима константно.

Из 2, 3, 4

$$\mathrm{div}\, D = \mathrm{div}\,\frac{\varepsilon E}{4\pi} = \rho \text{ или}$$

$$\Delta \varepsilon \varphi = -4\pi\rho \quad \ldots \quad I.$$

На граничним површинама неелектричним површинама је: $D_n^+ - D_n^- = \sigma$ или

$$\varepsilon^+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^+ - \varepsilon^- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \nu}\right)^- = -4\pi\sigma$$

на површинама ... биће:

$$D_\nu^+ - D_\nu^- = \sigma \text{ бет. област:}$$

$$\int \sigma\, do = e$$

§. 3. Слободан електрицитет. Из једначине:

$$T = -\frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}D_x + \ldots\right]d\tau \quad \ldots \quad V.$$

налазимо електростатичку енергију.

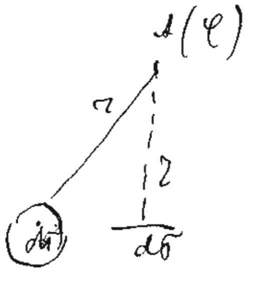
По Гаусовој теореми трансформишемо једначину V. у:

$$T = \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\, do + \frac{1}{2}\int \varphi\rho\, d\tau \quad \ldots \quad (I.$$

или

$$T = -\frac{1}{2}\int div(\varphi D)\, d\tau + \frac{1}{2}\int \varphi\, div D\, d\tau$$

функција φ је облика:



$$\varphi = \int \frac{\rho^* d\tau}{r} + \int \frac{\sigma^* do}{r} \quad \ldots \quad (II.$$

и задовољава једначину:

$$4\pi\rho^* = -\Delta\varphi = div\, E$$

$$4\pi\sigma^* = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^+ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^- = E_\nu^+ - E_\nu^-$$

ρ^* и σ^* су густине слободног електрицитета. Количина слободног и везаног [illegible]

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E} = \rho \quad \text{или}$$

$$\sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}\right) = \rho$$

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right] + \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{E}_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathfrak{E}_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathfrak{E}_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right] = \rho .$$

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon}{4\pi} 4\pi \rho^* = \varepsilon \rho^*$$

$$\varepsilon \rho^* + \frac{1}{4\pi}\left[\sum \mathfrak{E}_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right] = \rho \quad \dots \quad (III).$$

Ако је ε константа онда је:

$$\rho = \varepsilon \rho^* \quad \dots \quad a.$$

и слично је

$$\sigma = \varepsilon \sigma^* \quad \dots \quad b.$$

Ако се ограничимо граничним електрицитетом $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^- = \mathfrak{E}_\nu = 0$ и једначина је за φ обл:

$$4\pi \sigma^* = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^+ = \mathfrak{E}_\nu^+ \quad \dots \quad (IV).$$

Из a и b је јасно да је за ефект у вакууму свуда електрицитет увек са ...

§. 4. Индуковање електричне масе. Нека се у тачки A налази јединица масе електрицитета +1. Тачка B је обухваћена од −1 површином која задовољава једначину

$$\Delta \varphi = 0$$

Тражимо на површини σ:

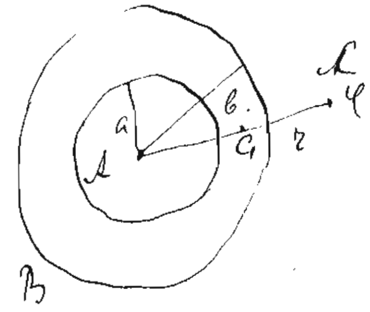
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -4\pi\sigma \quad \text{По Гаусовој је теореми}$$

$$-\int \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\omega = 4\pi m = +4\pi$$

$$\int 4\pi \sigma\, d\omega = 4\pi \quad \text{или} \quad \int \sigma\, d\omega = 1.$$

У B нема индукованог електрицитета $+e$ а ово је електрисање Земљине (индиферентно).

§. 5. Подела електрицитета на концентричним куглама



Нека су кугле полупречника a и b и нека у њима владају потенцијали A и B. У једној тачки између кугала која бива тако је φ функција од r и задовољава једначину $\Delta\varphi = 0$ или:

$$\frac{d^2 r\varphi}{dr^2} = 0$$

$$\varphi = m + \frac{n}{r} \quad \ldots \quad 1.$$

m и n се одређују из услова:

$$A = m + \frac{n}{a} \quad и \quad B = m + \frac{n}{b} \quad \ldots \quad 2.$$

За тачку између a и b, где ћемо потенцијал означити φ_1 и једначине:

$$m = 0 \qquad n = Bb.$$ за тачку C где је потенцијал означен са φ_2

Кад се ове вредности m и n замене у Φ и φ означимо са φ_1 имаћемо:

$$\varphi_1 = \frac{Bb(r-a) + Aa(b-r)}{r(b-a)}$$ а затим φ_2.

$$\varphi_2 = \frac{Bb}{r}$$

Густине на a и b σ_1 и σ_2 се налазе из једначина

$$-4\pi\sigma_1 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=a} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{b}{a}\,\frac{(B-A)}{(b+a)}$$

$$-4\pi\sigma_2 = \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)_{r=b} - \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=b} = -\frac{a(B-A)}{b(b-a)} - \frac{B}{b}$$

Ако са e_1 и e_2 означимо електрицитете целих површина

$$e_1 = 4\pi\sigma_1 a^2 \qquad e_2 = 4\pi\sigma_2 b^2$$

./.

$$e_1 = -\frac{ab(B-A)}{b-a}$$

$$e_2 = \frac{ab(B-A)}{b-a} + Bb.$$

Ако је познато A и B из њих се једначина могу наћи e_1 и e_2 лако.

Нека је сложена кугла у којој се [illegible] онда је $B = 0$ и

$$e_1 = -e_2 = \frac{abA}{b-a} \quad \ldots \quad 3.$$

Ми знамо да је сложена кугла електрични [illegible] кондензатор [illegible] где је $-e_2 = e_1$

Ако означимо са $m^* = e_1 = -e_2$ количину електрицитета на унутрашњој кугли онда је

$$\varphi_1 = m^*\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \quad \varphi_2 = 0.$$

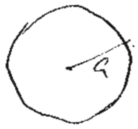
Из 3 се налази даље за $B = 0$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Aa(b-r)}{r(b-a)}.$$

за $r = a$ је:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A$$

§. 6. Капацитет кондензатора. Електростатички [illegible] у [illegible] морамо да их математички [illegible]. Најпростији је случај кугласти кондензатор.



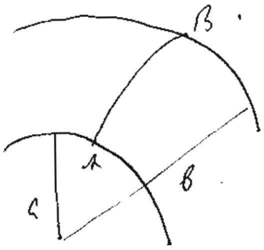
Ако је e маса [illegible] сфере а онда је густина површинска $\sigma = \omega$ ова:

$$\omega = \frac{e}{4\pi a^2} \quad \text{из једначине}$$

$$-4\pi\omega = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_a \quad \text{имамо}$$

$$-\frac{e}{a^2} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_a \qquad -\frac{e}{r^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \qquad \varphi = \frac{e}{r} \qquad \mathfrak{E}_r = +\frac{e}{r^2}$$

$$\varphi_a = \frac{e}{a}$$



Ako [illegible] A u [illegible] B, u na A je naboj $+e$ na B je onda $-e$, gustina je elektriciteta na B

$$w = -\frac{e}{4\pi b^2}$$

[illegible] je

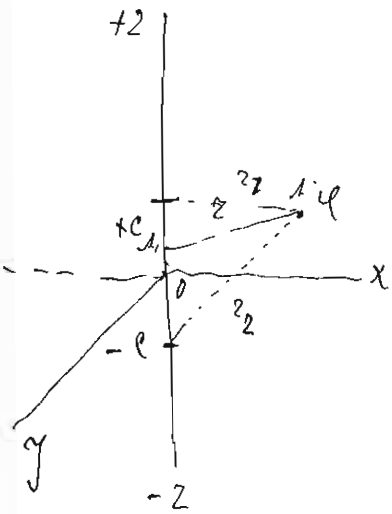
$$\varphi_b = \frac{e}{b}$$

$$\varphi_a - \varphi_b = e\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = e\,\frac{(b-a)}{ab}$$

odnosno K

$$K = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{ab}{b-a}$$

Dobi ce Kapacitet. za $b = \infty$ $K = a$.



§. 7. Kapacitet [illegible]. [illegible] na odsjeku $2c$.

$\sigma = w = \frac{e}{2c}$ [illegible]

[illegible] dat izrazom:

$$\varphi = \frac{e}{2c}\int_{-c}^{+c}\frac{d\zeta}{r} \qquad (1.$$

$0A' = \zeta$. Koordinate tačke A x y z.

$$r = \sqrt{(z-\zeta)^2 + y^2 + x^2}$$

2). onda je $\varphi = -\frac{e}{2c}\log\left(z-\zeta+r\right)\Big|_{\zeta=-c}^{\zeta=+c} = \frac{e}{2c}\log\frac{(z+c+r_1)}{z-c+r_2}$

Ako [illegible] CC', [illegible] C i −C, [illegible] φ [illegible]. [illegible]:

$$4\pi w = -\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$$

/.

$$e = \int df_1 w = -\frac{1}{4\pi}\int df_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{1}{4\pi}\int df_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}.$$

df_1 i df_2 su [illegible] [illegible] kondenzatora [illegible]. Kapacitet je [illegible] [illegible]:

$$K_1 = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

[illegible] e, φ_1 i φ_2. [illegible] [illegible] [illegible]

2).

Ako uzmemo [illegible] 2 [illegible]:

$$z = c\alpha\cos\beta \qquad \sqrt{x^2+y^2} = c\sqrt{\alpha^2-1}\sin\beta \qquad 1 < \alpha < \infty \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

gde su α i β [illegible] [illegible]:

$$\text{za } \alpha = \text{const.} \qquad a = c\alpha \qquad b = c\sqrt{\alpha^2-1}$$

[illegible] [illegible]. [illegible] α-const [illegible] [illegible] [illegible] β = const. [illegible] su kondenzatora [illegible] [illegible] [illegible] $c\cos\beta$

3) [illegible] [illegible]:

$$z_1 + z_2 = 2c\alpha \qquad z_1 - z_2 = 2c\cos\beta$$

$$z_1 = c\alpha + c\cos\beta \qquad z_2 = c\alpha - c\cos\beta$$

[illegible] [illegible] [illegible]:

$$\varphi = \frac{e}{2c}\ln\frac{(\alpha\cos\beta + 1 + \alpha + \cos\beta)}{(\alpha\cos\beta - 1 + \alpha - \cos\beta)} = \frac{e}{2c}\log\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)$$

Na konstantnim [illegible] je φ konstantno [illegible] je α = const. [illegible] je [illegible] [illegible] [illegible] za $\alpha = \infty$.

[illegible] kondenzatora [illegible] [illegible] [illegible] φ = const [illegible] [illegible] [illegible] kondenzatora [illegible]

Ako se a, b [illegible] [illegible] i [illegible] [illegible] a [illegible] $2c$ [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{i}$$

$$\varphi = \frac{e}{2c}\log\left(\frac{a+c}{a-c}\right) = \frac{e}{2\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right) = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

Ако овај потенцијал означимо са φ_1

$$\varphi_1 = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}} \log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

а са φ_2 потенцијал на бесконачном [illegible]

за $\alpha = \infty$ тј. $a = \infty$.

$$\varphi_2 = 0.$$

Капацитет је:

$$\frac{1}{K} = \frac{\varphi_1}{e} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

За мале вредности b/a је:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{a} \log \frac{2a}{b} \quad \ldots \quad (I).$$

§. 8. Ако хоћемо да [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] на елипсоиду, [illegible] [illegible] [illegible] једначину:

$$\Delta\varphi = 0.$$

За унутрашње тачке потенцијал φ дат је једначином:

$$\varphi_i = \pi\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta}$$

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+s/b^2\right)\left(1+s/c^2\right)}$$

[illegible] за један елипсоид.

За [illegible] [illegible] елипсоида је [illegible] [illegible] [illegible] елипсоида $a\ b\ c$ а [illegible] [illegible]

$a_1^2 = a^2(1+\delta)$ $b_1^2 = b^2(1+\delta)$ $c_1^2 = c^2(1+\delta)$ за $\delta = 0$.

[illegible] потенцијал [illegible] елипсоидалног [illegible]:

$\varphi_1 = \varphi_i' - \varphi_i$

$$\varphi_i' = \pi\rho \int_{0}^{\infty} \left(1+\delta - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta}$$

$$\varphi_i' = \pi\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2(1+\delta)+s} \quad \right)\frac{ds}{\Delta'}$$

$$s = (1+\delta)s'$$

Кад се ово замени у $V_i = V_i' - V_i$ налазимо

образац

$$V_i = \pi\rho\delta\int_0^s \frac{ds}{D} \quad (\text{обј. независан од } xyz).$$

Из посредно једначине имамо собзиром на једначину за σ.

$$\frac{\partial V_i}{\partial \nu} = -4\pi\sigma$$

$$\sigma = \frac{\rho\delta}{4}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}(\cos\nu x) + \cdots\right] \ldots$$

$$\cos\nu x = \frac{x}{a^2\psi}, \quad \cos\nu y = \frac{y}{b^2\psi} \quad \cos\nu z = \frac{z}{c^2\psi}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$\sum \frac{\partial\lambda}{\partial x}\cos\nu x = 2/\psi$ и заменом овог у ... налазимо

$$\sigma = \frac{\rho\delta}{2\psi}$$

Ако је e маса електрицитета на целом елипсоиду биће

$$e = \frac{4\pi}{3}abc\rho$$

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc\psi} = \frac{e}{4\pi abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

За издужени елипсоид $c = 0$

$$\sigma = \frac{e}{4\pi ab}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2c^4}{a^4} + \frac{y^2c^4}{b^4} + z^2}} = \frac{e}{4\pi ab\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

За кружни је $a = b$

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Ово нађено важи само за површину елипсоида и круга

За део се добија кад и множимо са 2. и имамо

$\sigma = \frac{e}{2\pi\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}}$ за елипсоид и за круг добивамо $\sigma = \frac{e}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}$

Зад. 9. Дугачак је метал за наелектрисање електростатичко сустина ... сопјева, која лежи у једној равни као котур) овај. Нека електрична S лежи у xy овој равни. Из симетрије излази да је φ функција z и ... изразе. φ је за z = 0 таква да је:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{ван } S \qquad \ldots \quad (I).$$

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{const. у } S.$$

$$\Delta \varphi = 0.$$

Када φ нађемо из $2\pi\sigma = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ налазимо дато σ електричне масе на S.

$$\ldots \quad (V).$$

$$\Delta \varphi = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

Како је φ нула за z = ∞ отуда је φ овај

$$\varphi = e^{-\alpha z} \Phi \qquad \alpha \text{ је константа } \Phi \text{ функција}$$

од x и y. Када ово заменемо у Δ налазимо

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \alpha^2 \Phi = 0 \quad \ldots \quad (2).$$

Ако α од z нађе Φ онда је φ:

$$\varphi = e^{-\alpha z} f(\alpha)\, \Phi(x y \alpha)$$

или

$$\varphi = \int_0^\infty e^{-\alpha z} f(\alpha)\, \Phi(x y \alpha)\, d\alpha.$$

Из (I) је

$$\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, \Phi(x y \alpha)\, d\alpha = 0 \quad \text{ван } S$$

$$\int_0^\infty f(\alpha)\, \Phi(x y \alpha)\, d\alpha = 0 \quad \text{у } S.$$

f и горњим од ових услова не може нађе вред.. За случај када је електрична S котур и смена x и y са r cos θ и r sin θ за Φ имамо једначину:

f.

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr} + \alpha^2\phi = 0$$

$\phi = J(r\alpha)$ (Беселове функције) за $r = 0$ constanta

$$\varphi = \int_0^{\infty} e^{-\alpha z} f(\alpha) J(\alpha r)\, d\alpha$$

Из услова граничних:

$$\int_0^{\infty} \alpha\, d\alpha\, f(\alpha) J(\alpha r) = 0 \qquad r > a$$

$$\int_0^{\infty} f(\alpha) J(\alpha r)\, d\alpha = \text{cons} \qquad r < a$$

Из граничних једначина:

$$\int_0^{\infty} \alpha f(\alpha) J(\alpha r)\, d\alpha = 2\pi\sigma \qquad r < a.$$

Помоћу једног интеграла за Беселове функције имамо ако је $f(\alpha) = \frac{m}{a}\frac{\sin \alpha a}{\alpha}$

$$\int_0^{\infty} f(\alpha) J(\alpha r)\, d\alpha = \frac{m}{a}\frac{\pi}{2} \qquad r < a$$

$$= \frac{m}{a}\arcsin\frac{a}{r} \qquad r > a$$

$$\int_0^{\infty} \alpha f(\alpha) J(\alpha r)\, d\alpha = 0 \qquad r > a$$

$$= \frac{m}{a\sqrt{a^2 - r^2}} \qquad r < a$$

Одавде се налази:

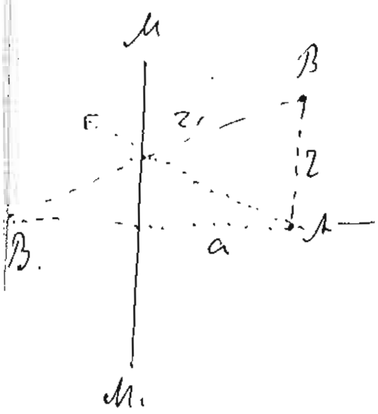
$$\sigma = \frac{m}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Ако се одреди интеграл:

$$\int \sigma\, dv = \frac{m}{2\pi a}\int_0^{a}\int_0^{2\pi} \frac{r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = m$$

$$\varphi = \frac{m}{a}\int_0^{\infty} e^{-\alpha z}\frac{\sin \alpha a}{\alpha} J(\alpha r)\, d\alpha.$$

7. 10. Електрична тачка према равни (спроводнику).

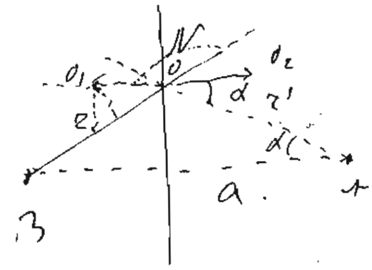


Нека је у тачки А количина електрицитета e. У одстојању a од А раван MM' добро спроводна, спроводник. Ако нема равни у тачки B је потенцијал:

$$\varphi = \frac{e}{r}$$

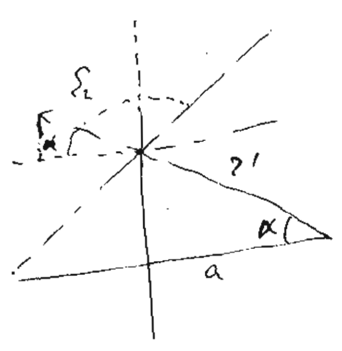
Кад се метне раван MM_1, онда се електрицитет мења и са њим и потенцијал φ.

Ако се замисли у А према тачки B на равни у одстојању a и електрична маса је $-e$ онда је потенцијал у B:



$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1} \quad \dots (1)$$

На равни MM_1 је потенцијал $\varphi = 0 = const.$ јер је $r = r_1$.
И ако се узме (1) [illegible] за потенцијал тачке А кад [illegible] раван MM_1 у тачки B. За овај случај је раван MM_1 еквипотенцијална површина.



У тачки N је сила дата изразом:

$$_{I}E_v = OO_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \qquad _{II}E_v = OO_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

Због [illegible] утицаја А и B у равни:

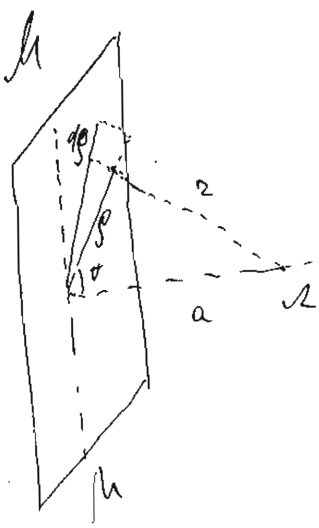
$$E_v = -\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -e\frac{\partial 1/r}{\partial v} + e\frac{\partial 1/r'}{\partial v} = +\frac{e}{r^2}\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{e}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial v}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial v} = \cos\alpha = \frac{a}{r'} \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{-a}{r}.$$

$$E_v = -\frac{2ae}{r^3}$$

Густина је еквипотенцијалној површини:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_v = -\frac{e}{4\pi}\frac{a}{r^3}$$



Целокупна количина електрицитета на спроводнику је:

$$\int \sigma\, df = -\frac{e}{4\pi}\int \frac{a\, df}{r^3} = -\frac{e}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{a\,\rho\, d\rho\, d\theta}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} = +e\left[\frac{a}{(a^2+\rho^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty}$$

Дакле кад [illegible] раван MM_1, електрицитет инфлуенцијом и да је целокупна количина једнака са количином у А а супротног знака. Овај Thomson назива [illegible] сферне кондензације (спроводнике).

/.

§. 11. Dielektrika. [illegible] $K_1 = \varepsilon = 1$

[illegible] Kondensatora [illegible] kugle:

$$K_1 = \varepsilon \frac{ab}{b-a} \quad [illegible] \quad \frac{ab}{b-a}.$$

ε [illegible] dielektrična konstanta. [illegible] § 3, [illegible] 6 [illegible] 8 [illegible] 76 [illegible]

[illegible] konstanta [illegible] E i D [illegible]:

$$D = \frac{\varepsilon}{4\pi} E. \qquad \cdot \varepsilon.$$

E [illegible]:

$$E = -\nabla\varphi \qquad \operatorname{curl} E = 0$$

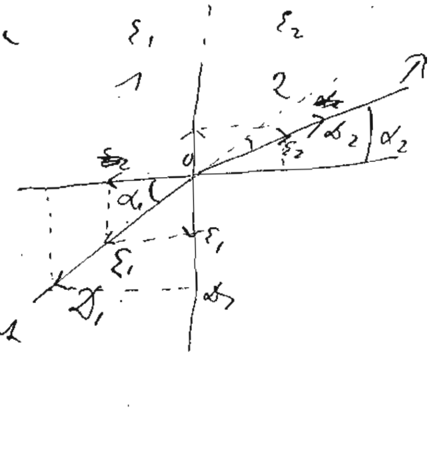
[illegible] E [illegible] komponent od E [illegible]

[illegible] D [illegible] $\operatorname{curl} D = 0$ [illegible]

[illegible] φ [illegible] ρ i σ [illegible] ρ^* i σ^*.

[illegible] komponenta D [illegible] E [illegible]

[illegible] 1 i 2 [illegible] E_1, D_1 [illegible] OA [illegible] α_1 [illegible] OB [illegible] α_2.



[illegible] komponenta od D [illegible]:

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2$$

[illegible] E [illegible]:

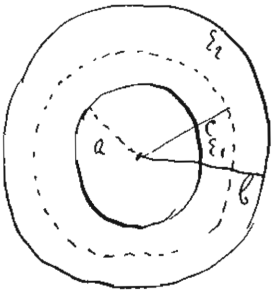
$$E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2$$

[illegible]

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$$

Jeżeli między ciałami wyznaczono wartości napięcia rozgraniczony do [illegible] na granicy występuje tzw. [illegible] elektryczności.

Jako przykład kondensator [illegible] kuli.



Kula ma [illegible] stałą dielektryczną ε_1, promień c. Między kulami c i b [illegible] stałą ε_2.

[illegible] elektryczności na kulach a i b: $+e$ na a i $-e$ na b, (jeśli b [illegible])

[illegible] kulę [illegible] między kulami [illegible]:

$$\int D_r \, df = e$$

W [illegible] dielektryku:

$$D_r = \frac{e}{4\pi r^2} \qquad E_r = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{r^2}$$

w [illegible]:

$$D_r = \frac{e}{4\pi r^2} \qquad E_r = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{r^2}$$

[illegible] gęstość elektryczności na [illegible] kuli a w:

$$w = \frac{e}{4\pi a^2} \text{ na } [illegible] \quad w = -\frac{e}{4\pi b^2}$$

[illegible] elektryczności na kulach a i b:

$$w' = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{4\pi a^2} \qquad w' = -\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{4\pi b^2}$$

Na granicy między ε_1 i ε_2 na kuli c jest gęstość [illegible] elektryczności:

$$w' = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{e}{4\pi c^2}$$

[illegible] elektryczności na kulach a, c i b

$$e' = w' 4\pi a^2 = e/\varepsilon_1 \qquad e\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1/\varepsilon_1\right) \quad \text{i} \quad -\frac{e}{\varepsilon_2}$$

Suma [illegible] elektryczności na [illegible] kulach i c [illegible] zero.

Razlika potencijala između kugala a i b je:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^c E_1\,dr + \int_c^b E_2\,dr = \frac{e}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) + \frac{e}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$$

Kapacitet je kondenzatora:

$$\frac{1}{K} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{e} = \frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 b} + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$$

ako su b i c beskonačno veće a

$$\underline{K = \varepsilon_1 a}$$

Zad 12 Rad električnih elektrostatičkih tovara. Ako se e_2 dovede iz beskonačnosti na udaljenost r_{12} od električnog tovara e_1 dobija se rad $\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$. Ako se dovedu i $e_3\ e_4 \dots e_n$, rad je u e_1

$$A = e_1\left[\frac{e_2}{r_{12}} + \frac{e_3}{r_{13}} + \dots\right] = e_1 V_1$$

V_1 je potencijal od $e_2\ e_3 \dots e_n$ u e_1

Ako se ovo primeni na $e_2\ e_3$ rad je:

$$Rad = (e_1V_1 + e_2V_2 + \dots + e_nV_n)/2$$ jer se svaki uzima dvaput.

Ako imamo konduktore koji je potencijal V onda je:

$V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$

$$A = \frac{1}{2}EV \qquad E = e_1 + e_2 + \dots e_n$$

Za $E_1\ E_2 \dots E_n$ ako su kapaciteti kondenzatora $C_1\ C_2 \dots C_n$ znamo:

$E_1 = C_1V_1 \qquad E_n = C_nV_n$ i

pa je $A = \frac{1}{2}\left[C_1V_1^2 + C_2V_2^2 + \dots C_nV_n^2\right]$

ili $A = \frac{1}{2}\left[\frac{E_1^2}{C_1} + \frac{E_2^2}{C_2} + \dots \frac{E_n^2}{C_n}\right]$

Ako imamo jednu kuglu koja je ... na koju se ... električni tovar E, a je kapacitet kugle a pa je rad električnog tovara iz beskonačnosti doveden na kuglu:

$$A = \frac{1}{2}\frac{E^2}{a} \quad \dots \text{I}$$

./.

§ 13 Ako [illegible] kondensatora [illegible] energija kondensatora [illegible] W:

$$W = \frac{1}{2}\sum \mathcal{E} V$$

Ako se [illegible] elementarni rad dA [illegible] [illegible] :

$$dA + dW = 0 \quad \text{ili}$$

$$dW = \frac{1}{2}\sum \mathcal{E}\, dV$$ kad je na konduktorima [illegible] konstantan.

i

$$dA = -\frac{1}{2}\sum \mathcal{E}\, dV$$

[illegible] energiji

Ako se i [illegible] ondaj:

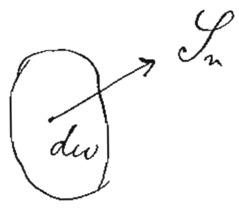
$$dW = \frac{1}{2}\sum (\mathcal{E}\, dV + V\, d\mathcal{E}) \quad \text{i t. d.}$$

Друга свеска

I

Максвелове основне једначине електромагнетизма.

§ 14 Ако применимо неке једначине за струју S на основу Био-Савар-Амперову добићемо до основних једначина електромагнетизма.



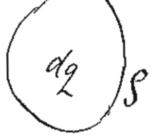
Ако је S_n струја у правцу нормале у једној тачки, интеграл $\int S_n d\omega$ је [illegible] ове струје, који се интеграл зове јачина или интензитет електричне струје кроз површину ω, који ћемо означити са j.

$$j = \int S_n d\omega \quad \ldots 1.$$

Ако је проводник пун [illegible] пресека dq, једначина 1 гласи:

$$j = qS_n = S_n\int dq = S_n Q \quad \ldots 2.$$

Експерименти дају закон: У близини проводника струје се магнетска игла [illegible]. [illegible] у [illegible] правац [illegible] струје у проводнику. [illegible] струје и [illegible] сила [illegible] струје има [illegible] (Амперово правило). Ако са $\mathfrak{M}$ означимо магнетску силу



$$4\pi\int dq\, S_n = c\int \mathfrak{M}_s ds \quad \ldots I.$$

где је dq елемент пресека а s обим његов.

$$\int \mathfrak{M}_s ds = \int(\mathfrak{M}_x\alpha + \mathfrak{M}_y\beta + \mathfrak{M}_z\gamma)ds = \int\sum \mathfrak{M}_x dx =$$

$$\int\left(\frac{\partial\mathfrak{M}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{M}_y}{\partial z}\right)dq$$ по формули Стоксовој, који се и овако да изразити:

$$\int \mathfrak{M}_s ds = \int \mathrm{curl}\,\mathfrak{M}\, d\omega$$

Кад се ово примени на I имаћемо:

у облику Хевисајдовом (Heaviside) једначину:

$$c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = 4\pi \mathfrak{S}^e \quad \text{или}$$

$$c\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) = K\frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x = 4\pi S^e_x$$

$$c\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) = K\frac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi\lambda E_y = 4\pi S^e_y \quad \ldots (II.$$

$$c\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) = K\frac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi\lambda E_z = 4\pi S^e_z.$$

Применом закона Фарадејевог, који и говори електричне струје индукцијом, променом у магнетском пољу имамо сличне једначине које су изражене изразом:

$$c \operatorname{curl} E = -4\pi \mathfrak{S}^m = -\mu\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}.$$

Разложено ово на правоугле координате имамо:

$$c\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\mu\frac{\partial M_x}{\partial t} = -4\pi S^m_x$$

$$c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\mu\frac{\partial M_y}{\partial t} = -4\pi S^m_y \quad \ldots (III.$$

$$c\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\mu\frac{\partial M_z}{\partial t} = -4\pi S^m_z$$

Уз ове две једначине иду још:

$$\operatorname{div} \mathfrak{S}^e = 0 \qquad \operatorname{div} \mathfrak{S}^m = 0 \quad \text{или}$$

§ 15 Електромагнетска енергија поља.

Ако ставимо енергију од јединице електромагнетског поља у простору:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{K}{8\pi}E^2 + \frac{\mu}{8\pi}M^2 \ldots \quad IV$$

Ако употребимо електростатичке једначине за E, M енергију налазимо израз за димензију:

$$[m\,l^2 t^{-2}]$$

E и M су димензије $(m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}$

У једначинама III и IV је C дата једна константа. Ако се у електромагнетским једначинама узме ε димензија те тежине дато $[m^{1/2} l^{1/2} t^{-2}]$. Ако се $C = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_e} = [l t^{-1}]$ где ε_m и ε_e значе вектор ε узет у електромагнетским и електростатичким једначинама. Димензија је C брзина и налазимо да је она једнака са брзином светлости (300 10^8 cm/sec).

– V –

Вектор енергије
(теорема Поинтинга).

§ 16 Енергија у пољу електромагнетском је:

$$T = \int \left[\frac{K}{8\pi}\left(E_x^2+E_y^2+E_z^2\right) + \frac{\mu}{8\pi}\left(M_x^2+M_y^2+M_z^2\right)\right] d\tau \quad \ldots 1.$$

Промена у јединици времена је:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K}{4\pi}\int \sum E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} d\tau + \frac{\mu}{4\pi}\int \sum M_x \frac{\partial M_x}{\partial t} d\tau \quad \ldots 2.$$

Ако се овде смене $\frac{\partial E_x}{\partial t}$ и $\frac{\partial M_x}{\partial t}$ из једначина: $S_e = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t} + \lambda E$ и $S_m = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial M}{\partial t}$. имамо:

$$\frac{dT}{dt} = \int \sum (E_x S_x^e) d\tau + \int \sum (M_x S_x^m) d\tau - \int \lambda E^2 d\tau$$

где је

$$Q = \int \lambda E^2 d\tau \quad \ldots 3.$$

Количина топлоте по Џуловом закону.

Из 3 имамо:

$$\frac{dT}{dt} + Q = \int \sum (E_x S_x^e) d\tau + \int \sum (S_x^m M_x) d\tau$$

Ако овде за S^e и S^m унесемо изразе из Максвелових једначина, означимо са H_x H_y H_z изразе $E_y M_z - M_y E_z$, $E_z M_x - M_z E_x$, $E_x M_y - M_x E_y$ имамо:

/.

$$\frac{dT}{dt}+Q = \frac{c}{4\pi}\int\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)d\tau = \frac{c}{4\pi}\int \operatorname{div} H\, d\tau$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int H_n\, do \;..$$

Промена је енергије изражена флуксом вектора H кроз површину O, која опасивала запремину T, као да је енергија излазила кроз површину, што је представљена овим вектором.

Запазимо:

$$M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z = 0$$
$$E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = 0$$

значи да вектор H стоји управно на E и M

$$H = \sqrt{H_x^2+H_y^2+H_z^2} = EM \sin(EM) \;\ldots\; IV'$$

изражава дакле интензитет вектора Поентинговог H једнак је површини паралелограма EM и стрелица горе изнесене.

Претпоставка је да је вектор H непрекидан, ако не мора бити и H_n међу тим кроз обичне површине непрекидно, што је вршимо ово енергије.

Ако се узме да за T бесконачно E и M онда је:

$$\frac{dT}{dt}+Q=0$$

Енергија је стална у овом случају са граничним енергији. Овде се није водило рачуна о c из једначина II и III. Ако се претпостави да је у III c' неко друго, добиће се израз:

$$\frac{dT}{dt}+Q = \frac{c'-c}{4\pi}\int(E_xC_x+E_yC_y+E_zC_z)\,d\tau$$

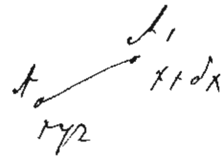
$$C_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}-\frac{\partial M_y}{\partial z} \quad \text{и т. д.}$$

Ако узмемо за $t=0$ $E_x=C_x$ и т. д. за $t=0$ онда:

$$\frac{dT}{dt}+Q = \frac{c'-c}{4\pi}\int C^2 d\tau$$ и ако C није нула онда ово … знам $c'=c$ …

[illegible]

§. 17 [illegible] ρ [illegible] (xyz). [illegible] $x y z$ [illegible] $\delta x, \delta y, \delta z$:



$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad 1.$$

[illegible] ρ [illegible] xyz [illegible] $\rho d\tau$ [illegible] $\delta(\rho d\tau)$ [illegible] (ρ):

$$\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x - \frac{\partial \rho}{\partial y}\delta y - \frac{\partial \rho}{\partial z}\delta z = \rho - \left[\Sigma \frac{\partial \rho \delta x}{\partial x}\right] \quad \ldots \quad 2.$$

[illegible] τ [illegible] $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, [illegible] $\delta\mathfrak{D}$ [illegible]:

$$-\Sigma \frac{\partial \rho \delta x}{\partial x} = \operatorname{div} \delta\mathfrak{D}$$

ili

$$\Sigma \frac{\partial[\delta\mathfrak{D}_x + \rho\delta x]}{\partial x} = 0$$

[illegible] A [illegible]:

$$\delta\mathfrak{D}_x = -\rho\delta x + \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$\delta\mathfrak{D}_y = -\rho\delta y + - \quad -$$

$$\delta\mathfrak{D}_z = -\rho\delta z + - \quad -$$

[illegible]:

$$\delta T = \int \Sigma(\mathfrak{E}_x \delta\mathfrak{D}_x)\, d\tau$$

[illegible]

$$\Sigma \mathfrak{E}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \Sigma A_x\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = \Sigma\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{E}_z A_y - \mathfrak{E}_y A_z\right)$$

[illegible] $\mathfrak{E}$ [illegible] A [illegible] τ, [illegible] Maxwell [illegible]:

$$\delta T = -\int \rho \Sigma(\mathfrak{E}_x \delta x)\, d\tau - \frac{\mu}{c}\int \Sigma\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} A_x\right) d\tau \quad \ldots \quad 3.$$

Ако $\mathfrak{M}$ и заиста од [illegible], [illegible] електрична маса $\rho\,\delta\tau = e$ на др. удаљ. δx [illegible] рад вектора:

$$e E_x \delta x = e E \cos(E x)\,\delta x$$

Отуда имамо да:

Електричном вектору одговара електрична маса e [illegible] свом удаљ. са јачином eE.

§ 18 Максвелове једначине имају само једно решење

Узимамо да су λ, K, μ непрекидне на [illegible] [illegible] од [illegible].

1). Да су компоненте [illegible] од E, M [illegible] [illegible] непрекидне, а [illegible] непрекидне [illegible] λ, μ, K [illegible]. [illegible] непрекидно

2). За решење [illegible] Максвелових једначина [illegible] да су дате [illegible] од E и M за $t = t_0$. Ако је ово дато онда постоји само једно решење.

Нека имамо два решења $E\,M$ и $E'M'$ за $t = t_0$ онда мора постојати решење $E'' = E - E'$ и $M'' = M - M'$ [illegible] [illegible] за [illegible]:

$$T + \int_0^t Q\,dt = 0$$

$T > 0$, $Q > 0$ мора $E - E' = M - M' = 0$ или

$E = E'$, $M = M'$ значи постоји само једно решење.

3). Имамо само једно решење и онда кад су [illegible] компоненте [illegible] E [illegible] [illegible] вектор $\alpha E + \beta M$ [illegible] где су α и β константе.

II

(— [illegible] elektromotornih [illegible] —

§ 19 Neka je λ i K konstantno. Ako se [illegible] jednačine elektromagnetskog [illegible] po x, y, z i [illegible] imaćemo [illegible] jednačinu:

$$\frac{K}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{E} = -\lambda \operatorname{div}\mathfrak{E} \quad \ldots \quad (1.$$

Ako se ρ označava [illegible] elektriciteta onda je

$$\frac{K}{4\pi}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \rho \quad \ldots \quad 2.$$

Kad se $\operatorname{div}\mathfrak{E}$ iz 2 zameni u 1 i sa θ označi $\frac{4\pi\lambda}{K}$ imaćemo jednačinu:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \theta\rho = 0 \quad \ldots \quad (II.$$

$$\rho = e^{-\theta t}\rho_0 \quad \ldots \quad (A.$$

gde je ρ_0 ρ za $t = 0$.

Jednačina A [illegible] elektriciteta [illegible] provodnika [illegible] ... [illegible] elektriciteta [illegible] provodnika i neprovodnika (dielektrikuma).

[illegible]. Neka se u [illegible] dielektrikumu nalazi provodnik [illegible]. U [illegible] provodnika je [illegible] funkcija φ. Na provodniku je [illegible] i [illegible] jednačinu $\nabla\varphi = 0$

Neka je [illegible] funkcija ψ u [illegible] provodnika [illegible] na provodniku [illegible]

Neka su [illegible] u [illegible] elektro[illegible]:

u vazduhu $\quad \mathfrak{E}^0_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \mathfrak{E}^0_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \mathfrak{E}^0_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

u provodniku $\quad \mathfrak{E}^0_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$

1) Neka [illegible]

2). U [illegible] je $\lambda = 0$ [illegible]

$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}^0_x \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}^0_y \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}^0_z$

3). U provodniku je:

$\mathfrak{E}_x = e^{-\theta t}\mathfrak{E}^0_x \ldots$

I

- Електрокинетика -

-20- Нашли смо да је однос између померања електричног и електричне силе $\mathcal{E}$ дат једначином:

$$D = \frac{K}{4\pi}\mathcal{E} \quad \ldots \quad 1.$$

Ако се диелектрик електропроводљив налази у $\mathcal{E}$ пољу и $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ + $\mathcal{E}$ струју односно промену ... (изведено из Максвела) за $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$:

$$S_e dt = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{E}}{dt}dt \quad \ldots \quad 2.$$

Вектор S се зове електрична струја, које смо обележили са i.

Ако се струја изазива магнетским пољем наизменично:

$$S_m = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{M}}{dt} \quad \ldots \quad 3.$$

Ово важи за несавршене проводнике.

Ако се у проводнику налази електрична сила која изазива померање, сила има тенденцију да у току времена се изравна и доводи стање у равнотежу.

Код изотропних средина електрична сила се изједначава када прође се временом dt, ако се сила (елементарна) посматра. Ако је $\mathcal{E}$ вектор силе а θ константа, објашњава проводљивост, онда ће за време вектор $\mathcal{E}$ добити време dt $\mathcal{E} - \mathcal{E}\theta dt$. Додатком нове силе $\mathcal{E}'$ имамо:

$$\mathcal{E}(1 - \theta dt) + \mathcal{E}' dt \ldots$$

одакле је сада у јединици времена:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{dt} = \mathcal{E}' - \theta\mathcal{E} \quad \ldots \quad I.$$

[illegible] $\mathcal{E}'dt$ [illegible] $\mathcal{S}dt$ [illegible]:

$$\mathcal{S} = \frac{K}{4\pi}\,\mathcal{E}'$$

Ako [illegible] $\lambda = \frac{K\theta}{4\pi}$ [illegible]

[illegible]:

$$\mathcal{S} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{E}}{dt} + \lambda\mathcal{E} \qquad (II.)$$

Vektor $\mathcal{S}$ [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]

Vektor $\mathcal{S}$ [illegible]:

$$J_1 = \lambda\mathcal{E} \quad \text{i} \quad J_2 = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{E}}{dt}$$

J_1 [illegible] (Leitungsstrom) a $J_2 = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{E}}{dt}$ [illegible].

Ako [illegible] J_1 [illegible] λ koeficijent [illegible] a θ je konstanta [illegible] (Relaxationszeit), onda $J_1 = \lambda\mathcal{E}$ odgovara Ohmov zakon [illegible]

Ako je $\mathcal{E}$ [illegible] onda [illegible] dT [illegible] energije dT a ona je:

$$dT = \frac{K}{8\pi}\mathcal{E}^2 d\tau \qquad (III.)$$

[illegible] $\mathcal{E}$ [illegible] $d\tau$ [illegible]:

$$dQ = \frac{K}{4\pi}\theta\,\mathcal{E}^2 d\tau = \lambda\mathcal{E}^2 d\tau$$

$$\frac{dQ}{d\tau} = \lambda\mathcal{E}^2$$

[illegible] energija [illegible]

ji $\quad \frac{dQ}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{J}^2 = w\mathcal{J}^2 \qquad$ w je [illegible] otpor.

[illegible] odgovara Jouleov zakon

Ако и овде место са временом из III имамо:

$$\partial \frac{dT}{\partial t} = \frac{K}{4\pi}\left(E_x \frac{\partial E_x}{dt} + \cdots\right) d\tau$$

Ако се овде замени E из једначине:

$$\mathcal{J} = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial E}{dt} + \lambda E$$

или:

$$E_x = \frac{J_x}{\lambda} - \frac{K}{4\pi\lambda}\frac{\partial E_x}{dt}. \quad \text{имаћемо:} \quad \frac{\partial E_x}{dt} = \frac{4\pi}{K} J_x - \vartheta E_x.$$

$$E_x \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} J_x \frac{\partial E_x}{dt} - \frac{K}{4\pi\lambda}\left(\frac{\partial E_x}{dt}\right)^2 \text{ или}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{4\pi}\sum E_x \frac{\partial E_x}{dt} d\tau = \frac{K}{4\pi\lambda}\sum J_x \frac{\partial E_x}{\partial x} d\tau - \frac{K^2}{16\pi^2\lambda}\sum\left(\frac{\partial E_x}{dt}\right)^2 d\tau$$

$$\partial \frac{\partial T}{\partial t} + dQ = (J_x E_x + J_y E_y + J_z E_z)\, d\tau \quad . \; . \quad \text{IV}$$

Ове величине ефекта S представља енергију; производ $\sum J_x E_x$ је рад свих E, (мерило) једнако је прираштају електричне енергије и утрошене енергије (Џулове топлоте) dQ. Стога се намеће и овде [illegible] ...

Једначине електромагнетног поља у електрокинетици важе, кад величине $\frac{\partial E}{\partial t}$ и $\frac{\partial M}{\partial t}$ сталне ... За овај случај ... једначине ... ефекти у електромагнетном пољу.

/.

II

Стационарне електричне струје

§. 41 Какво мора бити магнетно стање, да је стање струје у проводнику стационарно, да су електрично и магнетно поље независни од времена?

Услов стационарног стања нема. [illegible] електромагнетским [illegible] [illegible] [illegible] и на [illegible] од којих [illegible] [illegible] и [illegible] услов стационарног стања на једначине:

$$\frac{\partial E}{dt} = \frac{\partial M}{dt} = 0 \quad \ldots \quad I.$$

Први Кирхофов закон: одузета количина електрицитета, [illegible] [illegible] количина електрицитета [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] у једној тачки [illegible] и [illegible], [illegible] сви струја једнака нули

$$\sum i_n = 0 \quad \ldots \quad I.$$

Други закон. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] струје [illegible] [illegible] струје и [illegible] једнака суми електромоторних сила.

Ово се изводи из [illegible]:

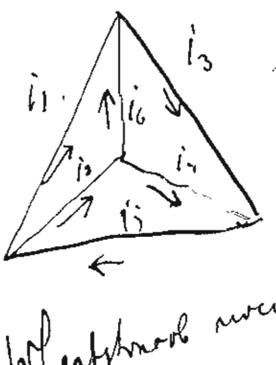
Закон Ома. $iw = V_1 - V_2 + e$ (V_1 и V_2 потенцијали [illegible] e електромоторна сила)

Кад се ово примени на n струја [illegible]:

$$i_1 w_1 = V_1 - V_2 + e_1$$
$$i_2 w_2 = V_2 - V_3 + e_2$$
$$i_n w_n = V_n - V_1 + e_n$$

Сабирањем се добија:

$$\sum iw = \sum E \quad \ldots \quad II$$



Wheatstoneов мост

§. Пример. Из [illegible] [illegible] [illegible] $i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_6$ [illegible] и [illegible]

По I ј:

$$-i_1 - i_2 + i_5 = 0$$
$$+i_1 - i_3 + i_6 = 0$$
$$+i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

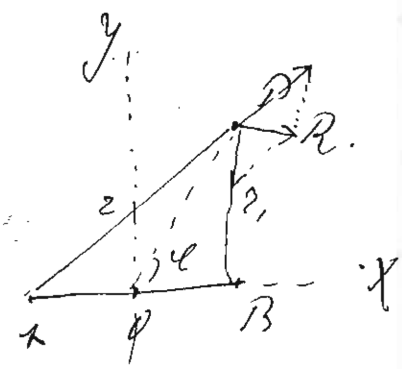
по II ј:

$$i_1 w_1 - i_2 w_2 - i_6 w_6 = e_1 - e_2 - e_6$$
$$i_3 w_3 - i_4 w_4 + i_6 w_6 = e_3 - e_4 + e_6$$
$$i_2 w_2 + i_4 w_4 + i_5 w_5 = e_2 + e_4 + e_5$$

[illegible] [illegible] сем e_5 [illegible] да је i_6 нула ј $w_1 w_4 = w_2 w_3$

/.

Теоријска физика
— Магнетизам —
I



§ 22. Магнетске масе у A и B + и − m, AB = 2a, моменат је магнетски $M = 2am$. Тражимо потенцијал у P.

Потенцијал је V у P где је + јединица магнетизма

$$V = m\,\frac{r_1 - r}{r r_1}$$

Нека је раван XY у равни тачака A, B, P, у средини O између A и B нека је почетак. [illegible] R, њене компоненте:

$$X = m\left\{(x-a)\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-3/2} - (x+a)\left[(x+a)^2+y^2\right]^{-3/2}\right\}$$

$$Y = my\left\{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-3/2} - \left[(x+a)^2+y^2\right]^{-3/2}\right\}$$

Ако је тачка P у X оси онда $y = 0$

$$P_1 = \frac{2Mx}{(x^2-a^2)^2}$$

За P у Y оси биће је:

$$P_2 = \frac{M}{(y^2+a^2)^{3/2}}$$

Ако одредимо [illegible] P_1 и P_2 од O са R онда је:

$$P_1 = \frac{2M}{R^2}\left(1 + \frac{2a^2}{R^2} + 3\frac{a^4}{R^4} + \dots\right)$$

$$P_1 = \frac{M}{R^3}\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{a^2}{R^2} + \frac{3\cdot 5}{2^2}\frac{a^4}{R^4} + \dots\right)$$

и $R > a$

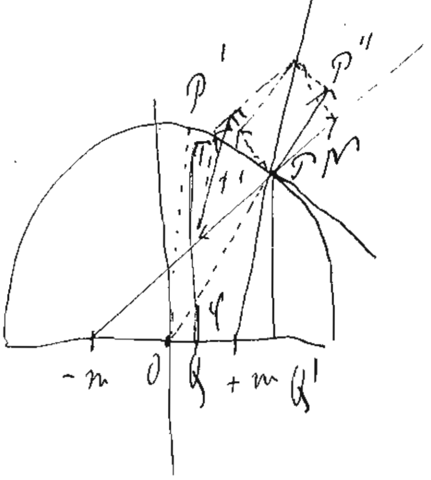
$$P_1 = \frac{2M}{R^3} \qquad P_2 = \frac{M}{R^3} \qquad P_1 = 2P_2$$

Ако се узме да су масе +m и −m [illegible] са магнетом 2a [illegible], онда је:

$$P = \frac{M}{R^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}$$ P_2 се добија за $\varphi = 0$ а P_1 за $\varphi = \pi/2$.

Овај [illegible] обично [illegible]:

/.



Нека се P помери у P_1 и P' па је онда:

$$T'PP' = \frac{M}{r^2}(\cos\varphi - \cos\varphi') \quad , M = 2ma$$

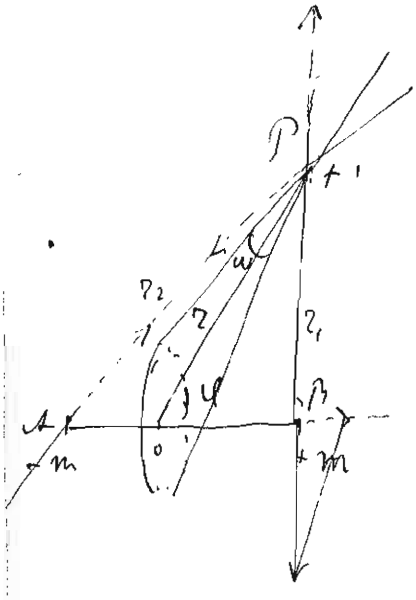
$$T'TT' = \frac{M}{r^2}\cdot\frac{QQ'}{2} \quad , \quad QQ' = PT'\sin\varphi$$

$$T = \frac{M}{r^3}\sin\varphi .$$

$$NPP'' = \frac{M\cos\varphi}{r^2} - \frac{M\cos\varphi}{r_1^2}$$

$$N = \frac{2M}{r^3}\cos\varphi$$

$$R = \sqrt{T^2+N^2} = \frac{M}{r^3}\sqrt{4-3\sin^2\varphi} = \frac{M}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi} \ldots$$



Да је потенцијал магнета $+m$ $-m$ $\frac{M}{r^2}\cos\varphi$ [illegible] се овако доказује:

Од P на $+m$ потенцијал је: $(r = r_1 = r_2)$

$\frac{m}{r^2}$ а компонента од ове силе у правцу AB

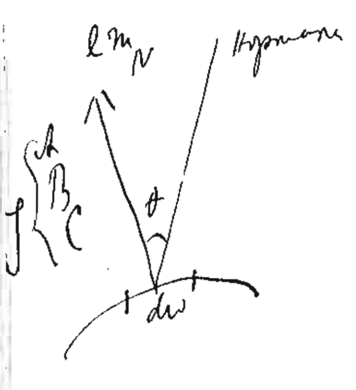
$\frac{m}{r^2}\cos\varphi$. Сила у P је компонента ових супротног знака

Тако је ова компонента кад се P помера у правцу магнета за дужину $AB = 2a$, а то је једнако са потенцијалом V у P

$$V = \frac{2am}{r^2}\cos\varphi = \frac{M}{r^2}\cos\varphi$$

Ако кроз O повучемо нормалну раван са [illegible] ова је једнаком M а је угао ω под којим се види из P

$$w = \frac{M\cos\varphi}{r^2} \qquad V = w .$$



§ 13 Магнетски потенцијал кад је магнетизација конзервативна

Имамо овде дакле:

$$V = \iint \frac{(Al + Bm + Cn)d\omega}{r}$$

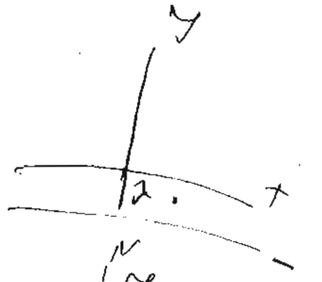
или

$$V = J\iint \frac{d\omega\cos\theta}{r}$$

Ако је $d\omega'$ пројекција од $d\omega$ на раван управној на J онда је

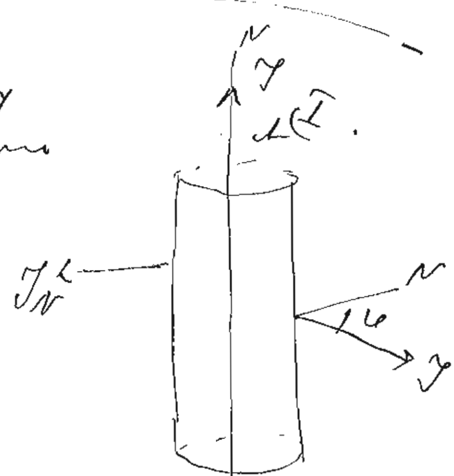
$$V = J\iint \frac{d\omega_1}{r}$$

Ово је вертикална компонента $\sigma = I\cos\theta$. Ако је густина магнетизма ρ: $I = \rho\lambda$



I Ако узмемо [illegible] намагнетисан [illegible] паралелно са осом, онда ће магнетизам [illegible] само на крајевима А и В где је [illegible] густина:

$$\sigma = I\cos\theta = I\cos 0 = I.$$



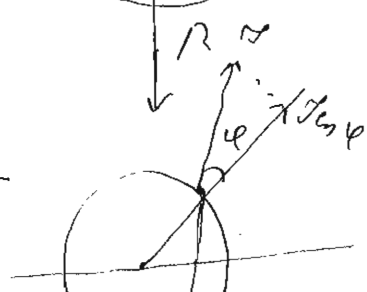
II) Ако је вертикално намагнетисан у А и В је $\sigma = 0$ на [illegible] [illegible] магнетизам.

III). Нека I са вертикалом [illegible] угао φ σ је $I\cos\varphi$.

Ово исто важи и за кугли.

густина вертикалне је $I\cos\varphi$ и количина је магнетизма

$$\frac{4}{3}\pi r^3 I\cos\varphi$$

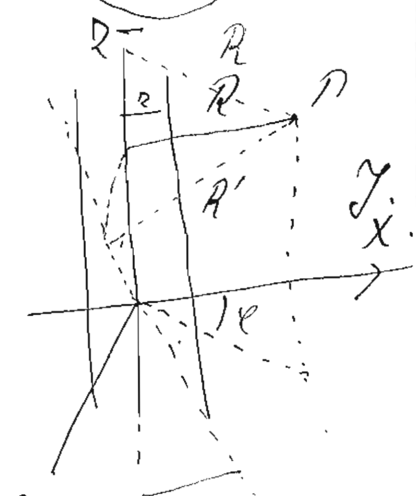


224 [illegible] намагнетисан [illegible]. [illegible] I је у X. [illegible] ρ је густина [illegible]

[illegible]:

$$-\frac{2\pi\rho r^2}{R}$$

[illegible]: $$\frac{2\pi\rho r^2}{R'}$$ [illegible]: $$X = 2\pi\rho r^2\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$



[illegible] R и X је φ $\quad R' = R - \lambda\cos\varphi$

$$X = -2\pi r^2 I \frac{\cos\varphi}{R^2} = -\frac{\partial V_e}{\partial R}$$

$$I = \rho\lambda$$

$$V_e = 2\pi r^2 I \frac{x}{R^2}$$

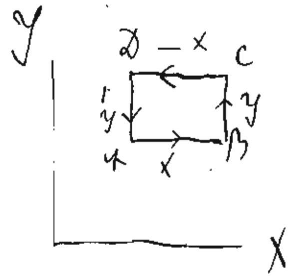
за $R = r$

$$V'_e = 2\pi I x.$$

$$V_i = \pi\rho\left[R^2 - (R - \lambda\cos\varphi)^2\right] \quad \lambda^2 = 0$$

$$V_i = 2\pi I x.$$

25 Теорема Штокса (Stokes).



[illegible] X и Y [illegible] $ABCD$

$$Xdx + Ydy = X\,AB + Y(x+dx, y)\,BC - X(x+dx, y+dy)\,DC$$

$$- Y(x, y+dy)\,AD = Xdx + \left(Y + \frac{\partial Y}{\partial x}dx\right)dy - \left(X + \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy\right)dx$$

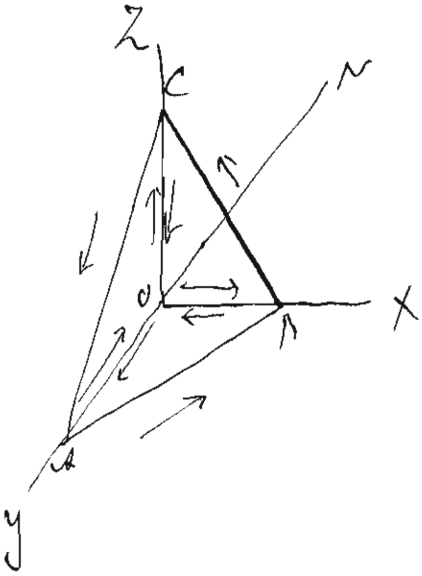
$$- \left(Y + \frac{\partial Y}{\partial y}dy\right)dy = \partial x \partial y\left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right]$$

$X = f(xyz)$
$Y = f_1(xyz)$

[illegible] $ABCD$ [illegible] C

$$\int_C Xdx + Ydy = \pm\int\left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right]dx\,dy = \pm\int\left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right]d\omega$$

$d\omega$ [illegible] C. [illegible] C [illegible]



[illegible] ABC, [illegible] $BCOB = OBC$ OAB OCA, [illegible] OC, OB и OA [illegible] ABC

$$\int_C Xdx + Ydy + Zdz = \pm\iint\left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right]dx\,dy + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)dx\,dz$$

$$+ \left[\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right]dy\,dz$$

[illegible] ON [illegible] ABC [illegible] Ox Oy Oz l m n

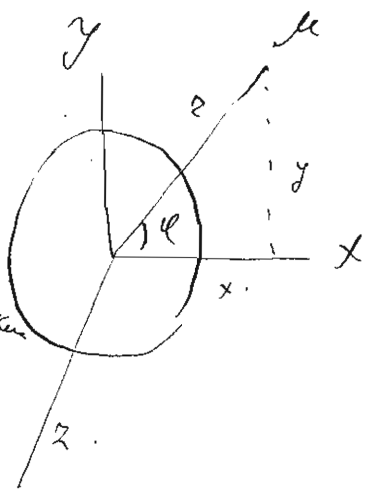
[illegible]

$$\int_C \Sigma X dx = \pm\int\Sigma\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)l\,d\omega$$

[illegible] $d\omega$ [illegible] ABC, [illegible] C [illegible]

$$\int Xdx + Ydy + Zdz = -\int\Sigma\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)l\,d\omega = \int\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)l + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)m + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right.$$

26 <u>Бесконачни намагнетисани цилиндар</u> у хомогеном пољу. [illegible] је цилиндра у OZ. Узмимо [illegible] паралелно са OX. [illegible] створити магнетисану индукцију [illegible] поље. Ако је дужина [illegible] потенцијал V_e и V_i



$$\frac{\partial V_i}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V_e}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2} = 0$$

Како [illegible] вели [illegible] магнетска потенцијал задовољава једначину:

$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (I.$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = 0$$

$f(x+iy)$ је решење обе једначине ако

$$f(x+iy) = X(xy) + i\,Y(xy).$$

Ако са $z = x + iy = r$ онда су решења од I:

$$V_e = Ar + \frac{B}{r} \quad \ldots \quad (II.$$

$$V_i = Cr + \frac{D}{r}$$

Где су r и $1/r$ решења за I.

Из II се добијају једначине:

$$V_e = Ax + \frac{Bx}{x^2+y^2} + i\left[Ay - \frac{By}{x^2+y^2}\right]$$

$$V_i = Cx + \frac{Dx}{x^2+y^2} + i\left[Cx - \frac{Dy}{x^2+y^2}\right]$$

решења су:

$$V_e = Ax + \frac{Bx}{r^2} = Ar\cos\varphi + \frac{B\cos\varphi}{r}$$

$$V_i = Cr\cos\varphi + \frac{D\cos\varphi}{r}$$

За M у ∞ $V_e = Ar\cos\varphi = Ax$ и сила је $-\frac{\partial V_e}{\partial x} = -A$.

$D = 0$ за $V_i = Cx$

[illegible]:

$$V_i = V_e$$

$$Ca = Aa + B/a \qquad \text{[illegible]}$$

[illegible] Thomson-[illegible]:

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \mu \frac{\partial V_i}{\partial n}$$

$$A - B/a^2 = \mu C$$

$$C = \frac{A}{\mu} \qquad \frac{B}{a^2} = -\frac{\mu - 1}{\mu} A.$$

[illegible] V_e i V_i [illegible]:

$$V_e = X + iY = \left(Ax + \frac{Bx}{x^2+y^2}\right) + i\left(Ay - \frac{By}{x^2+y^2}\right)$$

$$V_i = X + iY = \left(Cx + \frac{Dx}{x^2+y^2}\right) + i\left(Cy - \frac{Dy}{x^2+y^2}\right)$$

[illegible]:

$$Ax + \frac{Bx}{x^2+y^2} = \text{const} \quad \text{[illegible]}$$

$$Cx + \frac{Dx}{x^2+y^2} = \text{const} \quad \text{[illegible]}$$

[illegible]: ([illegible])

$$Ay - \frac{By}{x^2+y^2} = \text{const} \quad \text{[illegible]}$$

$$Cy - \frac{Dy}{x^2+y^2} = \text{const} \quad \text{[illegible]}$$

[illegible]

I

Ogólne uwagi ... elektrostatycznych i elektromagnetycznych jednostkach.

27. Wymiary ... prędkości . . . $[LT^{-1}]$

" przyspieszenia $[LT^{-2}]$

" siły $[MLT^{-2}]$

" pracy $[ML^{2}T^{-2}]$.

gdzie L długość, T czas, M masa. ... z równania $\frac{s}{t} = v$, ... $\frac{s}{t^2} = a$, ... $P = Ma$ i ... $Ps = Ma \cdot s$.

28. Elektrostatyka ...

Jeśli ... e_1 i e_2 ... elektryczności ... [illegible]

... z ... siła ... P

$$P = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

Wymiar $[e] = [L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}]$. . . e.

Potencjał ... $V = \frac{e}{r}$

$$[V] = [L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}]$$

Jeśli ... pojemność C ... elektryczności e ... $e = CV$ ... wymiar:

$$[C] = [L] \ldots \text{ ... długość}$$

Z równania $\sigma\, d\omega = e$ ... wymiar gęstości powierzchniowej:

$$[\sigma] = \frac{[e]}{L^2} = [L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}] \text{ wymiar siły ...}$$

Uwagi ... $\mathfrak{D}$ i siły $\mathfrak{F}$ ...: $\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi}\mathfrak{F}$

Z równania $\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = 4\pi\sigma$ ... wymiar $\mathfrak{D}$ ... σ, ... wymiar siły $\mathfrak{F}$, ... K ... wymiaru.

Рад је производ из e.V и његова димензија

$$[\text{Рада}] = \mathcal{L}^2 M T^{-2}$$

§ 29 Електромагнетски систем мера.

Две магнетске масе m_1 m_2 у одстојању r делују силом P:

$$P = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Одатле јединица $[m] = [\mathcal{L}^{3/2} M^{1/2} T^{-1}]$ . . . 1.

Из Био Саваровог закона силе: $P = \frac{m i a}{r^2}$, где је a константа, налазимо да је јединица за i:

$$[i_m] = \frac{[P]\,\mathcal{L}}{[m]} = \frac{M \mathcal{L} T^{-2} \cdot \mathcal{L}}{M^{1/2} \mathcal{L}^{3/2} T^{-1}} = M^{1/2} T^{-1} \mathcal{L}^{1/2}$$

Електрична маса у магнетским јединицама је:

$$[e_m] = \left[i_m T\right] = \mathcal{L}^{1/2} M^{1/2} \quad . . . \quad 2.$$

По Џуловом закону је топлота у проводнику wi^2, где је w отпор. Димензија је отуда димензија рада подељена са временом

$$[wi^2] = \frac{\mathcal{L}^2 M T^{-2}}{T}$$

$$w = \left[\frac{\mathcal{L}^2 M T^{-3}}{M T^{-2} \mathcal{L}}\right] = [\mathcal{L} T^{-1}] \text{ брзина} \quad . . . \quad 3.$$

По Омовом закону је електромоторна сила $E = wi$ има димензију од E је:

$$[E] = \mathcal{L} T^{-1} \mathcal{L}^{1/2} M^{1/2} T^{-1} = [\mathcal{L}^{3/2} M^{1/2} T^{-2}]$$

На јединицу дужине $\mathcal{L}$ на јединицу дужине:

$$[E] = [\mathcal{L}^{1/2} M^{1/2} T^{-2}]$$

Диелектрична константа (K) у $\left[\frac{e_m}{e_r^2}\right] = \mathcal{L}^{-3/2} M^{1/2}$ у електромагнетским јединицама је димензија односа диелектричне поларизације и силе из: $D = \frac{K}{4\pi} E$.

$$[K] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{\mathcal{L}^{-3/2} M^{1/2}}{[\mathcal{L}^{1/2} M^{1/2} T^{-2}]} = \mathcal{L}^{-2} T^2 = \frac{1}{C^2}$$

$$C = [\mathcal{L} T^{-1}] \text{ брзина светлости.}$$

Однос између e_e и e_m, количине електрицитета у електростатичким и електромагнетским јединицама:

$$\frac{e_e}{e_m} = [\mathcal{L} T^{-1}] = C \text{ брзина}$$

Ова брзина одговара са брзином светлости.

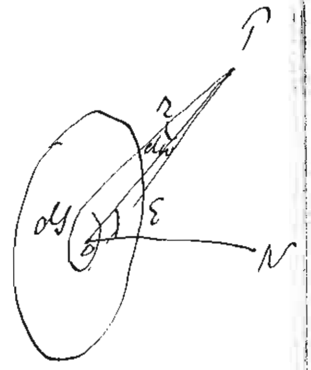
Слично важи и за силе.

$$\frac{E_e}{E_m} = \frac{[E]_e}{[E]_m} = \frac{\mathcal{L}^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}}{\mathcal{L}^{1/2} M^{1/2} T^{-2}}$$

$$\frac{E_e}{E_m} = \frac{1}{\mathcal{L} T^{-1}} = \frac{1}{C}.$$

Магнетске силе и струје електрицитета.

§ 30 Ако је нормала елемента ds ON а угао између r и ON ε потенцијал је од ds у P:



$$V = \varphi \iint \frac{ds}{r^2} \cos\varepsilon \quad \ldots \quad (I.$$

Ако су координате елемента ds, тачке O $\xi\eta\zeta$ а P xyz онда је:

$$\cos\varepsilon = \Sigma\, l \frac{x-\xi}{r} \quad \ldots \quad 1.$$

$$r^2 = \Sigma (x-\xi)^2$$

$$V = \varphi \iint \frac{1}{r^3} \Sigma (x-\xi)\, l\, ds \quad \ldots \quad 2.$$

l m n су косинуси правца нормале ON.

Како је: $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\xi} = \frac{x-\xi}{r^3}$ из 2 имамо:

$$V = \varphi \int \Sigma\, l \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) ds \quad \ldots \quad (II.$$

Ако са X_1 означимо силу у правцу x-ке осе која делује на тачку P имаћемо:

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\varphi \int \Sigma\, l \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(1/r\right) \quad \ldots \quad 3.$$

Знамо да је

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$X_1 = \varphi \int \Sigma\, l \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(1/r\right) ds \quad \ldots \quad 3.$$

$$\Delta\left(1/r\right) = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(1/r\right) = 0.$$

Када се ово замени у 3 имаћемо за силу X_1 израз:

$$X_1 = \varphi \iint \left[m \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(1/r\right) + n \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\left(1/r\right) - l \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(1/r\right) - l \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \right] ds.$$

Ако овде додамо:

$$X = 0 \quad Y = \varphi \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \quad Z = -\varphi \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$$

имаћемо због услова:

$$\int \Sigma X \frac{dy}{ds} ds = \int \Sigma l \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right)$$

$$\varphi \iint \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\eta}{ds} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{dy}{ds} \right] ds = \text{[illegible]} \; X_1$$

или:

$$X_1 = \varphi \int \left[\frac{z-\zeta}{r^3} \frac{d\eta}{ds} - \frac{y-\eta}{r^3} \frac{d\zeta}{ds} \right] ds.$$

$$Y_1 = \varphi \int \left(\frac{x-\xi}{r^3} \frac{d\zeta}{ds} - \frac{z-\zeta}{r^3} \frac{d\xi}{ds} \right) ds \quad \ldots \quad \text{II}$$

$$Z_1 = \varphi \int \left(\frac{y-\eta}{r^3} \frac{d\xi}{ds} - \frac{x-\xi}{r^3} \frac{d\eta}{ds} \right) ds.$$

Ако у место магнета имамо ~~[illegible]~~ јачине i онда су силе у тачки P у магнетском пољу a, b, c.

Ако обележимо са F G H компоненте вектора

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau \qquad \frac{i}{d\sigma} \cdot \frac{dx}{ds} = u \quad \text{etc.}$$

$$i\,dx = u\,d\tau$$

$$F = i \int \frac{dx}{r} = i \int \frac{d\xi}{r} = i \int \frac{1}{r} \frac{d\xi}{ds} \cdot ds$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\xi}{ds} ds = -i \int \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\xi}{ds} ds$$

Када ово сменимо у II и т. д. имаћемо:

$$X_1 = a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$$

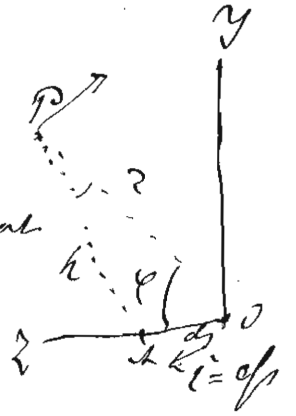
$$Y_1 = b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$Z_1 = c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

Које дају управо Максвелове једначине.

/.

Пример. Нека је [illegible] у делу $dt = ds$. Нека су координате тачке $\xi\, \eta\, \zeta$.



$$dt = ds = d\zeta \quad , \quad d\eta = 0 \quad d\xi = 0$$

Нека је тачка P [illegible] у [illegible] равни [illegible] координате

$z = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ [illegible]:

$y - \eta = r\sin\varphi \qquad z - \zeta = r\cos\varphi$

Кад се ово замени у $X_1\, Y_1\, Z_1$ имамо за X_1

$$X_1 = -\int f\rho\, ds \left[\frac{\sin\varphi}{r^2}\right] \qquad Y_1 = 0 \quad Z_1 = 0.$$

Сила [illegible] у P [illegible] на ZY равни [illegible].

~~ds $r^2 = r^2 + ds^2 - 2r\,ds\cos\varphi$~~

~~$0 = 0 + r\,ds\,d^2s$ [illegible]~~ $2r\,ds + 2r\cos\varphi\, ds.$

§ [illegible] Потенцијална енергија [illegible] магнетске [illegible] [illegible]. Овај је [illegible] [illegible] магнетске [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] потенцијал V. Ако се [illegible] ~~[illegible]~~ магнетизмом σds [illegible] σds [illegible]

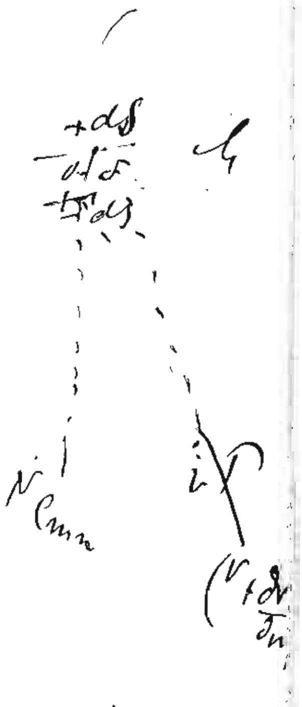
$$-\sigma ds\, V$$

За [illegible] [illegible] је [illegible]:

$$\sigma ds \left(V + \frac{\partial V}{\partial n}\delta\right).$$

ако је [illegible] δ.

Тад је [illegible] потенцијална енергија [illegible] у P



$$A = \iint \delta\sigma \frac{\partial V}{\partial n} ds = f\rho \int \frac{\partial V}{\partial n} ds$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -(l X_1 + m Y_1 + n Z_1)$$

$$A = -f\rho \iint \Sigma\, l X_1\, ds \quad \ldots \quad I.$$

$\int \Sigma (X_1 l) ds$ је флукс магнетских сила кроз затворену струју а ако се тај флукс означи са N онда је:

$$A = -\Phi N \quad \ldots \quad (II).$$

Ако је струја у коме се налази магнетско поље каквим струјним Φ_2 онда је потенцијална енергија овог система

$$-\Phi_1 N_2 \quad \ldots \quad (1)$$

где је Φ_1 јачина струје а N_2 флукс кроз затворену струју у пољу струје Φ_2.

За исту енергију имамо израз

$$-\Phi_2 N_1 \quad \ldots \quad (2).$$

Оба ова израза једнака. Ако није $\Phi_1 = \Phi_2$ онда је и $N_1 = N_2$ имамо општији израз

$$\Phi_1 N_2 = \Phi_2 N_1 \quad \ldots \quad (III).$$

Како је $N = \int \Sigma (X_1 l) ds$

то је $N_1 = \int \Sigma (X_1 l_1) ds_1 \quad N_2 = \int \Sigma (X_2 l_2) ds_2$

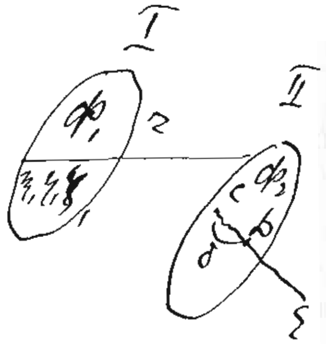
и да су оба флукса сразмерни са Φ_1 и Φ_2. Према томе је енергија система струја у првом случају

$$-\Phi_1 \Phi_2 M_2$$ а у другом у овом систему $-\Phi_2 \Phi_1 M_1$

$M_2 = M_1$ и зову се коефицијенти узајамне индукције код струја, једнаки су за струје ако се у месту Φ_1, Φ_2 узму јачине струја.

§ 32 Да би нашли једначине M_1 узајамне индукције I и II јачине Φ_1 и Φ_2 за свако ... је ... ако је I непомично а II и ... ако је I и ... онда имамо ...

./.



Ако је $CD = dn_2$ једнака мутној у C се налази негативан у D позитиван магнетизам, меремо се $-\sigma_2 dS$" и $+\sigma_2 dS$". Јединица масе у C од I има потенцијал V" и $-\sigma_2 dS_1$

$$-\sigma_2 dS_2 V_1$$

У D је потенцијал:

$$\sigma_2 dS_2 \left[V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial n_2} dn_2\right]$$

Ако и II на дектонамичне гробуге и потенцијал II потенцијал је рад:

$$\mathfrak{A} = \varphi_2 \int \frac{\partial V_1}{\partial n_2} dS_2 \qquad \varphi_2 = \sigma_2 dn_2$$

У правцу CE је сила $F = -\frac{\partial V_1}{\partial n_2}$

$$\mathfrak{A} = -\varphi_2 \int F_1 dS_2$$

Ако се пројекције F_1 X_1 Y_1 Z_1 а косинуси правца CD l m n

$$\mathfrak{A} = -\varphi_2 \int \Sigma X_1 l_2 dS_2 \quad \ldots \quad (I).$$

За компоненте X_1 Y_1 Z_1 нашли смо раније израз:

$$X_1 = \varphi_1 \int \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1}\right] ds_1$$

$Y_1 = -$

$Z_1 = -$

$\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ су тачке намотаја I з погледом тачке од једне мутне II

Ако ово уносимо у I и мењамо с теоремом Stokes-овом имаћемо:

$$\mathfrak{A} = -\varphi_2\varphi_1 \iint \left\{\Sigma\left[l_2 \int \frac{\partial}{\partial \zeta_1}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_1}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1}\right] ds_1\right\} dS_2$$

Кад у Stokes-овој теореми ставимо

$$X = \varphi_1\varphi_2 \int \frac{1}{r}\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1} ds_1 \qquad Y = Z$$

и значи: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\mathfrak{A} = \Phi_1 \Phi_2 \iint_3 \Sigma \left[l_2 \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{dy_1}{ds_1} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial z_1}{\partial s_1} \right) \right] ds_1\, ds_2$$

По Stokes-овој теореми:

$$\int \Phi_1 \Phi_2 \frac{1}{r} \Sigma \frac{dx}{ds_2} \frac{dx_1}{ds_1}\, ds_1 ds_2 = \Phi_1 \Phi_2 \iint_3 \Sigma\, l_2 \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial z_1}{ds_1} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial y_1}{ds_1} \right] ds_1\, ds_2$$

и даље је:

$$\mathfrak{A} = -\Phi_1 \Phi_2 \iint \frac{1}{r} \Sigma \frac{dx}{ds_2} \frac{dx_1}{ds_1}\, ds_2\, ds_1$$

или

$$\mathfrak{A} = -\Phi_1 \Phi_2 \iint \frac{1}{r} \cos \varepsilon\, ds_1\, ds_2 \ldots \qquad \text{II.}$$

$$M = \iint \frac{1}{r} \cos \varepsilon\, ds_1\, ds_2$$

Формула II дата је за струје $\Phi_1 = i_1$, $\Phi_2 = i_2$ и зове се Franz Neumann-ова.

§ 33 Израчунавање енергије

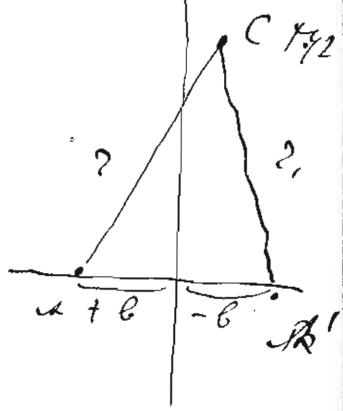
За електричну енергију имамо сада израз:

$$T_e = \frac{K}{8\pi}\int \Sigma d\tau \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]^2 = \frac{2\pi}{K}\int d\tau\, \Sigma f^2 \quad \dots \quad I$$

слично се налази за енергију магнетизма. Овај:

$$T_m = \frac{\mu}{8\pi}\int \Sigma d\tau \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\mu}{8\pi}\int \Sigma d\tau\, \alpha^2 \quad \dots \quad (II.$$

Применићемо ову једначину I на једно [illegible] [illegible] T_e.



Нека у A и B имамо две електричне куглице које у [illegible] у C $\frac{A}{r}$ $\frac{A'}{r'}$. Потенцијал од обе кугле је:

$$\psi = \frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} + B \qquad (B \text{ константа}).$$

Услед A и A' јавља се једна диелектрична поларизација и с њом једном [illegible] које смо звали потенцијалном енергијом.

Нека координатни x-оса иде кроз A и A' и нека су координате A A' и C b 0 0, -b 0 0, xyz.

Диелектрична поларизација у C:

$$f = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{KA}{4\pi r^3}(x-b) + \frac{KA'}{4\pi r'^3}(x+b)$$

$$g = \qquad = \frac{KAy}{4\pi r^3} + \frac{KA'y}{4\pi r'^3} \quad \dots$$

$$h = \qquad = \frac{KAz}{4\pi r^3} + \frac{KA'z}{r'^3}$$

Цела је енергија:

$$T = \frac{2\pi}{K}\int d\tau (f^2+g^2+h^2) = \frac{K}{8\pi}\int d\tau \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] \quad \dots \quad 4.$$

Када у 4 заменимо 3 имаћемо:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{KA^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r^4}, \quad T_2 = \frac{KA'^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r'^4}$$

$$T_3 = \frac{KAA'}{4\pi}\int d\tau \frac{(x^2-b^2+y^2+z^2)}{r^3 r'^3}$$

/.

Уведимо координате округло.

$y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$

$d\tau = 2\pi\rho\, d\rho\, dx$

Како у T_3 за $+x$ и $-x$ имамо исте вредности интегралимо од 0 до ∞ и помножимо са 2.

$$T_3 = k\mathcal{A}\mathcal{A}_1 \int_0^\infty dx \int_0^\infty \rho\, d\rho\, \frac{x^2+\rho^2-b^2}{\sqrt{(x^2+\rho^2+b^2)^2-4b^2x^2}^{\,3}}$$

нека је $u = x^2+\rho^2+b^2$

$$T_3 = \frac{k}{2}\mathcal{A}\mathcal{A}' \int_0^\infty dx \int_{x^2+b^2}^\infty du\, \frac{u-2b^2}{\sqrt{u^2-4b^2x^2}^{\,3}}$$

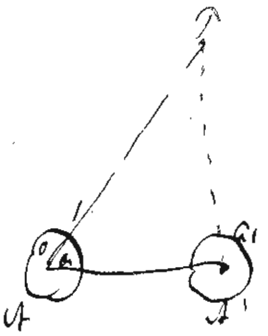
неодређени је интеграл по u $\;-\frac{1}{\sqrt{u^2-4b^2x^2}} + \frac{u}{2x^2\sqrt{u^2-4b^2x^2}} = \frac{1}{2x^2}\frac{u-2x^2}{\sqrt{u^2-4b^2x^2}}$

за $x<b$ вредност је нула, $x>b$ вредност је $1/x^2$ и

$$T_3 = k\mathcal{A}\mathcal{A}_1 \int_0^\infty \frac{dx}{2x^2} = \frac{k\mathcal{A}\mathcal{A}'}{2b} = k\frac{\mathcal{A}\mathcal{A}'}{c}$$

из $\partial T_3 = \frac{k\mathcal{A}\mathcal{A}'}{c^2}\partial c$ имамо да се обе кугле одбијају силом одбојном $\frac{k\mathcal{A}\mathcal{A}'}{c^2}$ (Coulomb).

За T_1 и T_2 градимо око ок. сферодимензионе координате



a и a.

За $r > a$ $\quad \frac{d\psi}{dr} = -\frac{\mathcal{A}}{r^2} \quad$ $\mathcal{A}$ је константа

$r < a \quad \frac{d\psi}{dr} = 0$

Ако означимо обе вредности на кугли a и узмемо 1 и 0 имамо

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1 = -\frac{\mathcal{A}}{a^2} \quad \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0 = 0$$

$$\frac{d\psi}{dn_1} = \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1 \text{ и } \left(\frac{d\psi}{dn_0}\right) = -\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0$$

густина је $\eta = \frac{k\mathcal{A}}{4\pi a^2}$

Електрицитет је на кугли: $\varepsilon = 4\pi a^2\eta = k\mathcal{A}$. а исто је $\varepsilon' = k\mathcal{A}'$

Када ово сменимо у $\frac{k\mathcal{A}\mathcal{A}'}{c^2}$ имамо $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{kc^2}$ за Кулонову силу.

$$T_1 = \frac{k\mathcal{A}^2}{2}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{k\mathcal{A}^2}{2a} = \frac{\varepsilon^2}{2ka}. \quad (d\tau = r^2 dr\, d\varphi\, d\theta \sin\theta.)$$

$$T_2 = \frac{\varepsilon_1^2}{2ka'}$$

$$T = \frac{1}{2k}\left[\frac{\varepsilon^2}{a} + \frac{2\varepsilon\varepsilon_1}{c} + \frac{\varepsilon_1^2}{a'}\right]$$

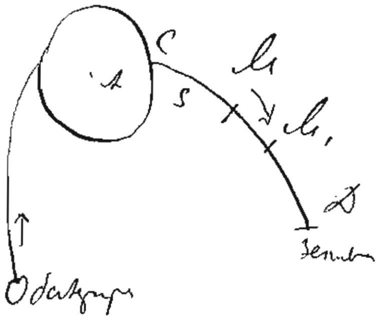
(Boltzmann t. I.).

I

– Електричне струје –
(електрокинетика)

334 Ако кугла A је сталног напона, у проводнику имамо сталну струју.

Нека је V_1 потенцијал кугле A, V_1 опада од V_1 до нуле од C до D. Ова разлика потенцијала ствара кроз проводник електричну струју.



Ако је тачка M далеко за s од кугле A, у M је потенцијал, у M_1 потенцијал v.

Елементарни рад ... је $\mathcal{E}\,ds$

$$\int \mathcal{E}\,ds = V_1 - v = -\int dv$$

или

$$\mathcal{E} = -\frac{dv}{ds}.$$

[Омов је закон $\mathcal{E} = \lambda i = \frac{l}{kq} i$ или

$$i = -kq\frac{dv}{ds} \quad \ldots \quad I \qquad k = \frac{k_1}{l}.$$

l је дужина]

Количина електрицитета q ... за јединицу времена ... пресека ... и $\mathcal{E}$ ... :

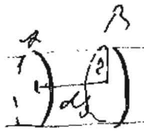
$$i = -kq\frac{dv}{ds}$$

Ако је струја стална $\frac{di}{ds} = 0$ или $\frac{d^2V}{ds^2} = 0$ $\quad V = a + bs$

За $s = 0$ $v = V_1$ $\quad s = l$ $\quad v = V_0$ (потенцијал земље).

$$i = \frac{V_1 - V_0}{l : qk} = \frac{\mathcal{E}}{W} \quad \text{закон Омов}.$$

335 Струја кад се проводник налази у средини неизолаторској



Нека је $di = -\alpha c v$ (Kirchhoff). $\qquad \alpha = 2\pi r$

$\alpha = u\,ds$, u је обим проводника и ds је елемент ... $\qquad t_{AB} = 2\pi r\,ds$

... c је коефицијент ...

Знамо да је

$$i = -kq\frac{dv}{ds} \quad \text{или}$$

./.

$$-kq\frac{d^2v}{ds^2}ds = -\alpha c v = -u c v\,ds$$

czyli

$$\frac{d^2v}{ds^2} = \frac{uc}{kq}v = \beta^2 v$$

β jest konstantą

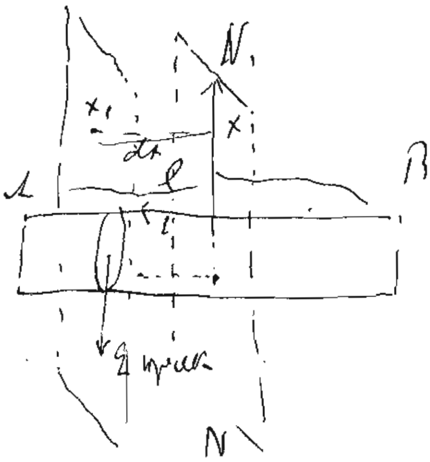
$$v = A e^{\beta s} + B e^{-\beta s}$$

Ponieważ dla $s = \infty$ $v = 0$, przeto $A = 0$

$s = 0$ $v = V_1$ $\quad B = V_1$

$$v = V_1 e^{-\beta s}$$

$$i = -kq\frac{\partial v}{\partial s} = kq\beta V_1 e^{-\beta s}$$



§36 [illegible] V_1 i V_2, [illegible] l. [illegible] A i B [illegible] ϑ. [illegible]

[illegible]

x

$$-kq\frac{dV}{dx}dt.$$

[illegible] dx [illegible] dt.

$$-\left(\frac{dV}{dx} + d\frac{dV}{dx}\right)kq\,dt.$$

[illegible]:

$$kq\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx\,dt.$$

[illegible] (Coulomb) [illegible] γ [illegible] $l = 1$ [illegible] $V = 1$) i dx (γdx [illegible]) [illegible] dt [illegible] $b\gamma V dx\,dt$ (b jest konstantą) [illegible]:

$$\gamma dx\frac{\partial V}{\partial t}dt = kq\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx\,dt - b\gamma V dt\,dx$$

./.

ако је $\frac{\gamma}{kq} = \alpha^2$, $\frac{\beta\gamma}{kq} = \beta^2$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} - \beta^2 V = 0 .$$

а). Нека је стање струје перманентно $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \beta^2 V$$

Ако је дужина линије l а V_1 V_2 потенцијали на крајевима онда је:

$$V = V_1 \frac{e^{\frac{\beta l}{2}}}{1 - e^{\beta l}} \left\{ e^{\beta(x - l/2)} - e^{-\beta(x - l/2)} \right\} + \frac{(V_1 + V_2)\, e^{\beta l}}{e^{2\beta l} - 1} \left(e^{\beta x} - e^{-\beta x} \right)$$

ако је $V_2 = 0$

$$V = V_1 \frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}$$

Потенцијал је V_0 у средини линије:

$$V_0 = \frac{V_1}{e^{\frac{\beta l}{2}} + e^{-\beta l/2}}$$

или

$$e^{\beta l/2} = \frac{V_1}{2V_0} + \sqrt{\frac{V_1^2}{4V_0^2} - 1}$$ (формула Bougain-ова)

Отпор је w

$$w = \frac{w_0}{\beta} \frac{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}$$ w_0 отпор $l = 1$

$$i = \frac{\beta}{w_0} V_1 \frac{e^{\beta(l-x)} + e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}$$

За бесконачну линију

$$V = V_1 e^{-\beta x}$$

$$i = \frac{\beta V_1}{w_0} e^{-\beta x}$$

$$w = \frac{w_0}{\beta} e^{\beta x}$$

б). Интеграција једначине:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial t} - \beta^2 V = 0 .$$

$$v = v' + u$$

za $t=\infty$ bi $u=0$, v' funkcija samo od x ...

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = \beta^2 v'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t} - \beta^2 u = 0$$

$$u = e^{-bt} W, \qquad W = f(x)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad b = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

$$W = e^{-\frac{m^2}{\alpha^2}t}\left[A \sin mx + B \cos mx\right] \ldots \quad (1).$$

Neka je vrlo mnogo dana u neizgorenom stanju, ... integracija V_0 koji $V_1 = 0$

za $t=0$	$V=0$	$u=-v'$	$W=-V'$	za svako x
za $x=0$	$V=V_0$	$u=0$	$W=0$	" t.
za $x=l$	$V=0$	$u=0$	$W=0$	

Ako se ispune uslovi $x=0$ i $x=l$

nalazimo $B=0$ $\sin ml = 0$ ili $m = \frac{n\pi}{l}$

$$W = A e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2\alpha^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x \ldots$$

osnovni integral

$$W = \sum A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2\alpha^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

A se određuje iz $t=0$ $W = -v' = \varphi(x)$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

Da bi odredili sumu A_n, određujemo vrlo integral određeni:

$$\int_0^l \varphi(y) \sin\frac{n'\pi y}{l}\,dy$$

/.

n' је цео број.

Последњи је интеграл једнак једном од ових интеграла:

$$A_n \int_0^l \sin\frac{n\pi y}{l} \sin\frac{n'\pi y}{l}\, dy$$

За $n \gtrless n'$ ови су интеграли нула, за $n = n'$ имамо:

$$A_n \int_0^l \sin^2\frac{n'\pi y}{l}\, dy = A_{n'}\, l/2 \quad \ldots \quad c.$$

Кад се једначина $\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x)$ помножи са $\sin\frac{n'\pi x}{l}dx$ интегрира и узме у границе 0 и l налазимо за A ово решење

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \ldots \quad (I$$

Ако за φ узмемо решење $-V_0 = V'$ које важи за одговарајући случај $\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = \beta^2 V'$, $V' = V_0\left[e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}\right]\frac{1}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}$.

$$A_n = -2/l \cdot \frac{n\pi l V_0}{n^2\pi^2 + \beta^2 l^2}$$

На овај се начин налази решење за W:

$$W = -2\pi V_0 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n}{n^2\pi^2 + \beta^2 l^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2\alpha^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$U = -2\pi V_0\, e^{-bt} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n}{n^2\pi^2 + \beta^2 l^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2\alpha^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Ако се обрне горње решење за V онда је

вредност

$$V = V_0\frac{e^{\beta(l-x)} - e^{-\beta(l-x)}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} - 2\pi V_0\, e^{-bt} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n}{n^2\pi^2 + \beta^2 l^2}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x \quad \ldots \quad (II$$

ако се занемари губитак електрицитета од

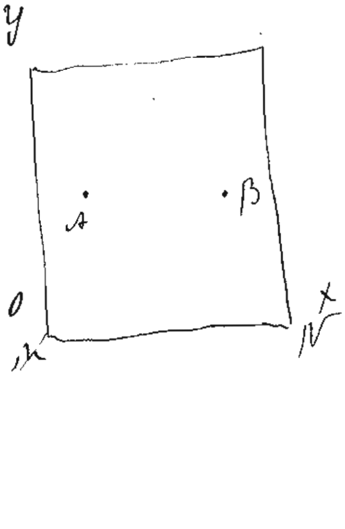
површине проводника $b = \beta = 0$

$$V = V_0\frac{l-x}{l} - 2V_0 \sum_0^\infty \frac{1}{n\pi}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t} \sin\frac{n\pi}{l}x \quad \ldots \quad (II'$$

./.

Зрно ε које је одређено да је интензитет у једној тачки његовог гео мерено или коефицијент интензитета пропорционалан са $\alpha^2 \ell^2$ (ил $\alpha^2 = \frac{\delta}{K\varrho}$). Знак овде се за обичну дифузију кроз мрежу налази у толико мање дубину у којој је мрежа дуга и дебља.

§ 37 Стационарна дифузија у мрежама



Ако концентрација V не зависи од времена (по Кирхофовом закону $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$ имамо за V једначину Лапласову:

$$\Delta V = 0$$

Ако за коо узмемо мрежу MN где су у A и B електроде (где се одвија једна дифузија) и ако нема дифузије у правцу z тј. $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ (мрежа је MN у хоризонталној равни) онда V задовољава једначину:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

Ово важи за случај кад је окружење несиметрично.

Ако је мрежа бескрајна да A и B немају утицаја на концентрацију, можемо узети да је $V=f(r)$ $\quad r^2=x^2+y^2$. Ако се A и B налазе у 0 се диференцијалну једначину у r налази:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=0 \quad . \quad . \quad 2.$$

одакле је: $\quad 3.$

$$V = A \log r + B \quad . \quad . \quad .$$

Ако са Σ означимо количину електрицитета која пролази кроз мрежу у A за јединицу времена:

$$\Sigma = -2\pi\alpha\delta K\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\alpha$$

δ дебљина мреже MN, α полупречник пресека K константа.

Из 3 је $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{A}{r}$ и $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\alpha = \frac{A}{\alpha}$

$$\Sigma = -2\pi\alpha\delta . K\frac{A}{\alpha}$$ Одакле се налази A.

B се налази из вредности интензитета у некој тачки

./.

Ако су електроде А координата a и b онда је $r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Кад имамо две електроде $a\, b$ — $a_1 b_1$, потенцијал је V:

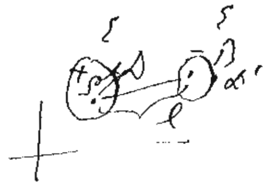
$$V = -\frac{\Sigma}{2\pi k\delta}\log r - \frac{\Sigma'}{2\pi k\delta}\log r_1 + 2B$$

r и r' су одстојања тачке ту од ab и $a_1 b_1$.

У A и B је потенцијал $-\infty$. Ако су обе електроде [illegible] једнаке [illegible] $\Sigma = -\Sigma'$ и

$$V = \frac{\Sigma}{2\pi k\delta}\log\frac{r_1}{r} + C \quad . \quad . \quad (I).$$

§ 38 Належење отпора. Отпор [illegible] између две електроде [illegible].



Из I је:

$$V = \frac{\Sigma}{2\pi k\delta}\log\frac{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Ако око A и B замислимо кругове полупречника ρ, координате у једне тачке D:

$$x = a + \rho\cos\varphi$$
$$y = b + \rho\sin\varphi$$

и потенцијал је у D V_1

$$V_1 = \frac{\Sigma}{4\pi k\delta}\log\frac{[(a-a_1+\rho\cos\varphi)^2+(b-b_1+\rho\sin\varphi)]^2}{\rho^2} + C$$

ако је [illegible] мало и [illegible] ℓ [illegible] занемарујући

$$V_1 = \frac{\Sigma}{2\pi k\delta}\log\frac{\ell}{\rho}$$

Слично [illegible] за једну тачку у D' у B, V_2

$$V_2 = \frac{\Sigma}{2\pi k\delta}\log\frac{\rho_1}{\ell} + C$$

Отпор W је $W = \frac{V_1 - V_2}{\Sigma} = \frac{1}{2\pi k\delta}\log\frac{\ell^2}{\rho\rho_1}$

за $\rho = \rho_1$

$$W = \frac{1}{\pi k\delta}\log\frac{\ell}{\rho} \quad . \quad . \quad (III).$$

$$V = \frac{\Sigma}{2\pi k \delta} \log \frac{z_1}{z_2} + C = \text{Const.}$$

даје линије исте потенцијале. Ово су кругови. Ортогоналне траекторије ових кругова су кругови кроз А и В у овом случају струјне.

339 Једначина:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad 1.$$

задовољава се једначином:

$$V = F(x + yi) = F(z) = X + Yi$$

$$dV = \frac{dF}{dz} dz = \left[\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x}\right] dx + i \left[\frac{1}{i} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right] dy$$

$$= (dx + i\,dy) \left[\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x}\right] = dz \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Ово је могуће за:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

или за

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \ldots \quad 2.$$

Одавде је:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0.$$

Значи и X и Y као функције од x y задовољавају једначину 1.

— Из 2 излази:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad 3.$$

значи да су X = 0 и Y = 0 једначине линија које се секу под правим углом.

3 значи да и обе мреже линија се секу под правим углом.

X = Const. дају еквипотенцијалне линије

Y = Const ″ линије силе (струјне линије)

и обратно.

Дефиниција на пример.

Нека су електроде у е' и е, потенцијал у тачки

V за електроде − ∞ и V задовољава једначину:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$V = C \log r_0 - C \log r_1$$

или

$$V = C \log(x + yi - a) - C \log(x + yi + a)$$

$$V = C\left[\log r e^{i\varphi} - \log r' e^{i\varphi'}\right]$$

$$V = C\left[\log \frac{r}{r'} + i(\varphi - \varphi')\right]$$

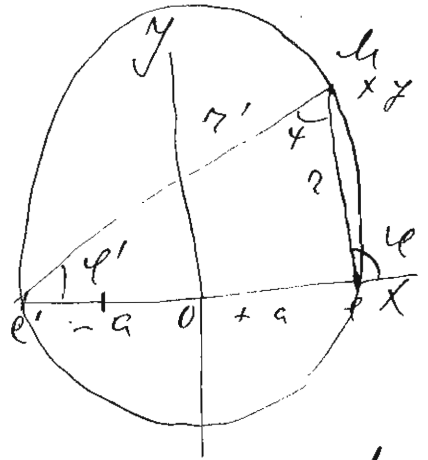
$$V = C \log \frac{r}{r'} = \text{const.}$$ еквипотенцијалне линије

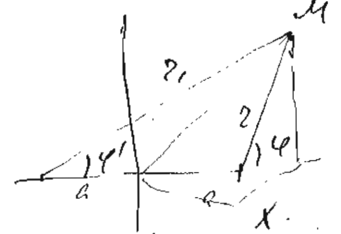
$$\psi = \varphi - \varphi' = \text{const}$$ линије силе (струјне).

$\psi = \text{const}$ су кругови кроз e и e'.

$r = mr'$ су кругови који гласе једначином:

$$\left[x - a\frac{(1+m)}{1-m}\right]^2 + y^2 = a^2 \cdot \frac{4m}{(1-m)^2}$$





$M = re^{i\varphi}$

$M = r'e^{i\varphi'}$

$M = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

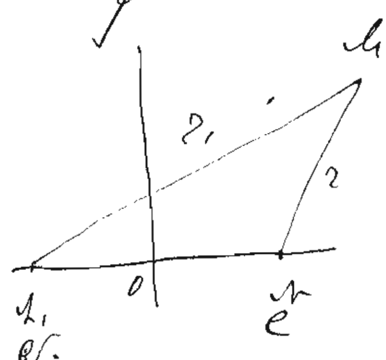
$M = x - a + iy$. етц.

§.40 Ако се узме полураван у електричном пољу ограничена са OY

и потенцијал налази се из

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

и услов за $x = 0$ $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

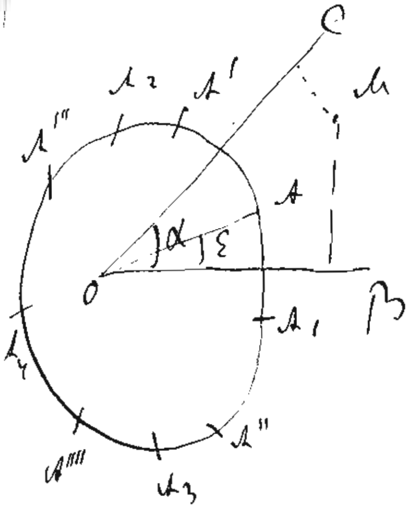


Нека једна електрода е, али и њена слика симетрична према OY у одстојању е₁ и тако замишљена електрода. Потенцијал у M:

$$V = -\frac{\Sigma}{2\pi k\delta} \log r - \frac{\Sigma}{2\pi k\delta} \log r_1 + A$$

Ако имамо две електроде е и е' једнаке обе и замишљене слике, потенцијал је у M: ако је $e = -e'$

$$V = \frac{\Sigma}{2\pi k\delta} \log \frac{r' r_1'}{r r_1} + A .$$



Ово а [illegible] на основанием фигуре електри- ме у сектору BOC угла α.

Ако је електрода у A из O одговарајући круг на OC. На висини су круга [illegible] од A према OC и OB.

Ако су координате од A $x_0\ y_0$, потенцијал је у

$$\log(x+iy-x_0-y_0 i)$$ за [illegible]

Да је задовољен услов да нема струје [illegible] нормалном на OC и OB [illegible], бити [illegible] координате [illegible] A_1 $A_2 \ldots A_n$. Као се ово [illegible]:

$$V = A\log(z-z_0)(z-z')(z-z'')\ldots\quad(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$$

A је дато углом ε ... $A^{V}\ (6\alpha-\varepsilon)$

$A'\ \ 2\alpha-\varepsilon$ $\quad A'''\ (4\alpha-\varepsilon)$ ..

$A''\ -(2\alpha-\varepsilon)$ $\quad A^{IV}-(4\alpha-\varepsilon)$ и т. д. према ординати OA.

За ординату OB је:

$A_1\ \ -\varepsilon$ $\quad A_2\ \ 2\alpha+\varepsilon$ .. $A_4\ \ 4\alpha+\varepsilon$

$A_5\ -(4\alpha+\varepsilon)$

$A_3\ -(2\alpha+\varepsilon)$ ..

Ако означимо са $z = x+yi$

$$z_0 = re^{\varepsilon i}$$

$$z' = re^{(2\alpha-\varepsilon)i} \qquad z_1 = re^{-\varepsilon i}$$

$$z'' = re^{-(2\alpha-\varepsilon)i} \qquad z_2 = re^{(2\alpha+\varepsilon)i}$$

etc.

$$V = A\log(z-z_0)(z-z_1)(z^2-2zz_0\cos 2\alpha+z_0^2)(z^2-2zz_1\cos 2\alpha+z_1^2)\ldots$$

Када се ова потенцијал [illegible] може бит изказан [illegible] лако [illegible].

/.

Механика

— I —

Електромагнетизам

Из Био-Саваровог закона из једначине:

$$4\pi A u = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$
$$4\pi A v = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$4\pi A w = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}.$$

где значе u, v, w су у правцу L M N; компоненте електричне струје и магнетског поља.

Ако уведемо вектор потенцијал:

$$F = \int \frac{u}{r} d\tau, \quad G = \quad H$$

Онда је јасно да су L, M и N дати овим

изразима:

$$L = A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \quad \text{etc.}$$

О овоме и можемо уверити [illegible] L, M и N

[illegible] x y z.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = A\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} - \frac{\partial G}{\partial x \partial z}\right) \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \int w \frac{\partial (1/r)}{\partial x} d\tau + \int \partial (1/r) \frac{\partial w}{\partial x} d\tau$$

$$\int \frac{\partial (1/r)}{\partial x} d\tau = -\int \frac{x}{r^3} \varpi r^2 dr = -\int \frac{x}{r} \varpi dr \quad \text{[illegible] } r = 0.$$

Ако је струја линеарна:

$$F = \int \frac{J}{r} dx' \quad \text{etc.}$$

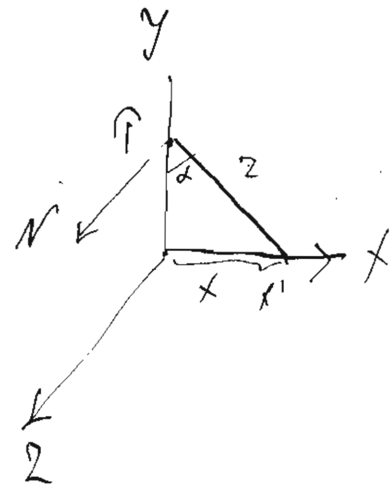
$$L = A J \int\left(\frac{\partial 1/r}{\partial y} dz' - \frac{\partial 1/r}{\partial z} dy'\right) \quad \text{etc.}$$

Ако уведемо једнаке магнетске масе означене

$\varphi = AJ$, потенцијал је од њих

$$d\Pi = \frac{\varphi \, ds \cos rn}{r^2}$$

Доказано је било да су магнетске силе линеарне струје индентичне са силама из магнетских листова.



Нека струја иде по OX и, $v=w=0$.

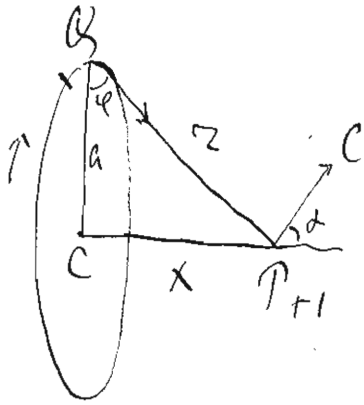
онда је $X=M=0$ $dy'=dz'=0$ и $\frac{\partial 1/r}{\partial z}=0$.

$$N=-AJ\int\frac{\partial 1/r}{\partial y}dx' = AJ\int\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}dx'$$

Из слике је:

$$r=\frac{y}{\cos\alpha}\qquad x'=y\operatorname{tg}\alpha\qquad dx'=y\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$N=\frac{AJ}{y}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha=\frac{2AJ}{y}\ \text{(Biot-Savart-ов)}$$



§ 42 Кружна струја. Дејство струје према магнетском полу у P.

У Q је елемент dl

Пол магнетске јачине 1 дејствује на Q јачином

$\frac{1}{r^2}=H'$ а сила је у dl:

$K=\frac{Jdl}{r^2}$. Пројекција њена на CP је

$$\frac{Jdl}{r^2}\cos\alpha=\frac{Jdl}{r^2}\frac{a}{r}$$

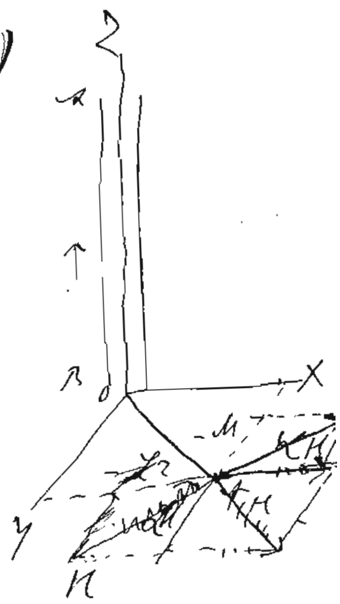
дејство струје на P. H

$$=\int\frac{Jdl\,a}{r^3}=\frac{2a^2\pi J}{r^3}=\frac{2JS}{r^3}$$

§ 43 Соленоид а састоји се из n обичних струја (Као у кругови једнаке удаљености) на једнакој удаљености, онда је $nL=N$ на један дужински J. L. Једнако је свакој јединици $\frac{1}{n}$ а моћ је свакој J. Ако је J јачина магнетизације $J=\frac{J}{n}$ $i=nJ$

Моменат је $JSL=nSLJ=NSJ$

Израчунавање самоиндукционих коефицијената



Ђ) Самоиндукциони је коефицијент [illegible] (flux) [illegible] индукције [illegible] коју даје струја. [illegible] магнетног [illegible] ако [illegible], кад је проводник цилиндар.

Нека је оса проводника AB у OZ

$$u=0 \quad v=0 \quad 4\pi w = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \quad \ldots \quad (1.)$$

Векторни потенцијал, јако [illegible] компоненте

F G H означимо са U V W

$$U=0, \quad V=0 \quad W=\int \frac{w}{r} d\omega$$

$$L = A\gamma \iint \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy'\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) A = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$M = A\gamma \iint \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dx' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz'\right) = \left(-\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) A = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad \ldots (2)$$

$$N = A\gamma \iint \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dy' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dx'\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) A = 0.$$

A = 1 ако су електромагнетске

јединице и за w и за L, M N

Из 2 и 1 имамо:

$$4\pi w = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) = -\Delta W$$

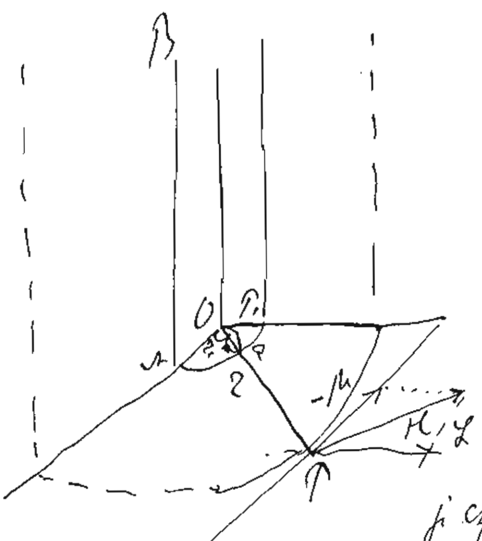
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial x} \quad и \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial \frac{y}{r}}{\partial x}$$

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

$$и \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 \frac{r^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2$$

Ако је у векторијалног W онда је $\frac{\partial W}{\partial r}$ [illegible] H у [illegible]



H j. magnetyczna siła y P od prądu w Z, a one j. wyznaczona na płaszczyźnie OZP.

Każe ob[illegible] y $4\pi w = -\Delta W$ [illegible]:

$$-4\pi w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH)$$

Ako je w [illegible]

$$\frac{1}{2} r H = \int_0^r 2\pi r w\, dr \quad \ldots \quad (I.$$

$2\pi r\, dr$ j. [illegible] z, $2\pi r w\, dr$ j. [illegible], $\int_0^r 2\pi r w\, dr$ [illegible] od 0 do r [illegible]

Ako [illegible] AB, [illegible] a [illegible] $J = \int 2\pi r w\, dr$

[illegible] I [illegible] siła H [illegible] (prąd J)

Ako j. [illegible] AB [illegible]

$$I \text{ j. } \quad \frac{1}{2} r H = \sout{2\pi w}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a = J$$

$$H_a = \frac{2J}{r}$$

[illegible] magnetyczna siła [illegible] (Biot-Savart-ob zakon)

[illegible] T_i [illegible]:

$$H_i = \frac{2J_i}{r}$$

[illegible] J_i [illegible] r,

Ako j. [illegible]:

$$J : J_1 = r^2 : a^2 \qquad \underline{H_i} = \frac{2Jr^2}{a^2}$$

Ako j. [illegible] (AB) [illegible]:

$$H_a = \frac{2J}{r} \quad \text{u} \quad H_i = \frac{2J_i}{r}$$

$$\frac{J_1}{J} = \frac{r^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \qquad H_i = \frac{2J}{a_1^2 - a_2^2}\left(r - \frac{a_2^2}{r}\right)$$

[illegible] $H = 0$ [illegible] $J = 0$.

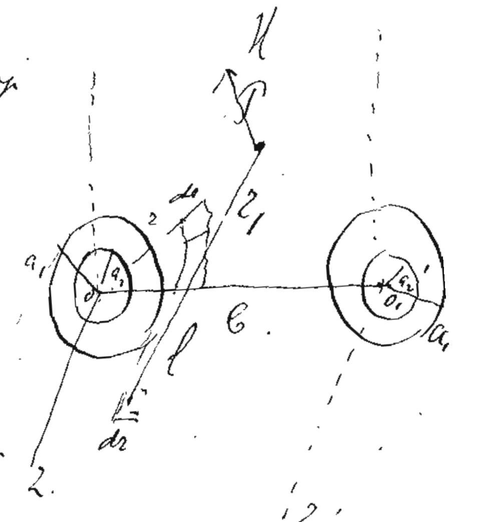
$a_1 > a_2$

§ 4?. Самоиндукција две паралелне жице, које спроводе две једнака а супротне струје.

Индукциони је коефицијент однос између флукса индукције који обухвата струја и јачине струје.

Флукс који пада од 0'2' састоји се из два дела: μH и $\mu H'$. Ако у равни паралелно са 0z исечемо правоугаоник између r и $r+dr$ дужине l, флукс је кроз овај правоугаоник:

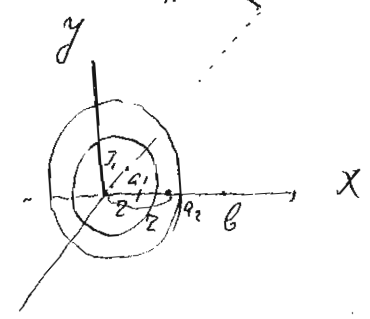
$$(\mu H + \mu H')\, l\, dr$$ кад је струја константна дуж жице.



Ако је струја променљива:

$$H_b = -\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\int \frac{w}{r_1}\, dv$$ интеграција по дужи жице

$$l\int [\mu H + \mu H']\, dr = \text{флукс на дужини } l$$



Ако је у жици пермеабилитет μ, у другој μ' у средини μ_0

$$l\int_0^b [\mu H + \mu H']\, dr = \int_0^{a_2} + \int_{a_2}^{a_1} + \int_{a_1}^{b-a_1'} + \int_{b-a_1'}^{b-a_2'} + \int_{b-a_2'}^{b}$$

1 2 3 4 5

1 $\mu H' = 0 \quad \mu H'' = \frac{2J\mu}{b-r} \quad \int_0^{a_2} \mu H dr = 2J\mu \log \frac{b}{b-a_2} \qquad H = \frac{2J}{r}.$

r је одстојање од 0 до P (P је на оси)

2 $\mu H' = \frac{2J\mu}{a_1^2-a_2^2}\left(r - \frac{a_2^2}{r}\right) \quad \mu H'' = \frac{2J\mu}{b-r}$

$$\int_{a_2}^{a_1} \mu H dr = \int_{a_2}^{a_1} \mu \frac{2J}{b-r} dr = 2J\mu\left[\log(b-r)\right]_{a_2}^{a_1} = 2J\mu \log\frac{b-a_2}{b-a_1}$$

$$\int_{a_2}^{a_1} \mu H dr = \int_{a_2}^{a_1} \frac{2J\mu}{a_1^2-a_2^2}\left(r - \frac{a_2^2}{r}\right) dr = \frac{2J\mu}{a_1^2-a_2^2}\left[\frac{r^2}{2} - a_2^2 \log r\right]_{a_2}^{a_1} = \frac{2J\mu}{a_1^2-a_2^2}\left[\frac{a_1^2-a_2^2}{2} - a_2^2 \log\frac{a_1}{a_2}\right]$$

3. $\mu_0 H' = \frac{2J\mu_0}{r} \quad \mu_0 H'' = \frac{2J\mu_0}{b-r}$

$$\int_{a_1}^{b-a_1'} \mu_0 H dr = 2J\mu_0\left(\log\frac{b-a_1'}{a_1} + \log\frac{b-a_1}{a_1'}\right)$$

4. $\mu' H' = \frac{2J\mu'}{2}$ $\mu' H'' = \frac{2J\mu'}{a_1'^2 - a_2'^2}\left(b - 2 - \frac{a_2'^2}{b-2}\right)$

$$\int_{b-a_1'}^{b-a_2'} \mu' H dr = 2J\mu'\left(\log\frac{b-a_2'}{b-a_1'} + \frac{1}{2} - \frac{a_1'^2}{a_1'^2 - a_2'^2}\log\frac{a_1'}{a_2'}\right)$$

5 $\mu' H' = \frac{2J}{2}$ $\mu' H'' = 0$ $\int_{b-a_2'}^{b} \mu' H dr = 2J\mu \log\frac{b}{b-a_2'}$

Сабирањем и рачуном део индукционог флукса:

$$l\int_0^b \mu H dr = 2\left[\mu_0 \log\frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{1}{2}(\mu + \mu') - \frac{\mu a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}\log\frac{a_1}{a_2} - \frac{\mu' a_2'^2}{a_1'^2 - a_2'^2}\log\frac{a_1'}{a_2'}\right]$$

M

Коефицијенат самоиндукције једне жице дужине l

$P = 2lM$

За $a_2 = a_2'' = 0$ и $a_1 = a_2$ $a_1' = a_2'$

1). За две пуне жице коефицијент

$$P = 2l\left(\mu_0 \log\frac{b^2}{a_1 a_1'} + \frac{\mu + \mu'}{2}\right)$$

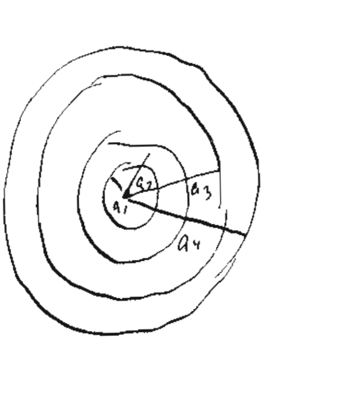
2). Самоиндукциони коефицијент за одвојене танке

$$P = 2l\mu_0 \log\frac{b^2}{a_1 a_1'}$$

или за $a_1 = a_1' = a$

$$P = 4l\mu_0 \log\frac{b}{a}$$

Присуством средине ферромагнетских материјала не утиче на коефицијент индукције



2). Коефицијенат самоиндукције две концентричне жице

Интеграција је на четири зоне:

1). од 0 до a_1 $H' = 0$ $H'' = 0$

2). og a_1 go a_2 $\quad \mu H' = \frac{2J\mu}{a_2^2 - a_1^2}\left(r^2 - \frac{a_1^2}{2}\right) \quad H'' = 0$

$$\int_{a_1}^{a_2} \mu H dr = 2J\mu\left(\frac{1}{2} - \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}\log\frac{a_2}{a_1}\right)$$

3). og a_2 go a_3 $\quad \mu H' = \frac{2J\mu_0}{r} \quad \mu'' = 0$

$$\int_{a_2}^{a_3} \mu H dr = 2J\mu_0 \log\frac{a_3}{a_2}$$

4). Og a_3 go a_4 $\quad \mu' H' = \frac{2J\mu'}{r} \quad \mu' H'' = -\frac{2J\mu'}{a_4^2 - a_3^2}\left(r^2 - \frac{a_3^2}{r}\right)$

$$\int_{a_3}^{a_4} \mu H dr = 2J\mu'\left[\log\frac{a_4}{a_3} - \frac{1}{2} + \frac{a_3^2}{a_4^2 - a_3^2}\log\frac{a_4}{a_3}\right]$$

Koeficijent P:

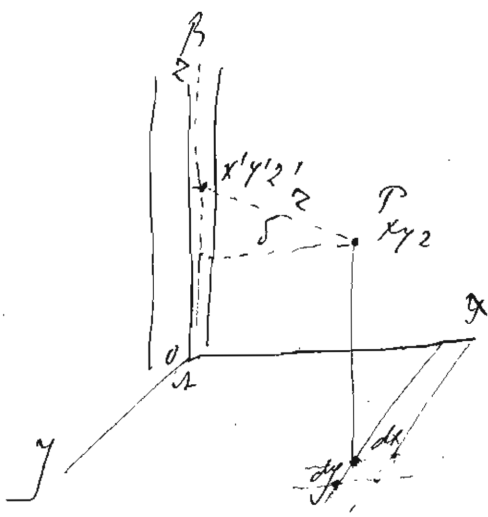
$$P = 2l\left[\mu_0 \log\frac{a_3}{a_2} + \frac{\mu - \mu'}{2} - \frac{\mu a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}\log\frac{a_2}{a_1} + \frac{\mu' a_4^2}{a_4^2 - a_3^2}\log\frac{a_4}{a_3}\right)$$

Ako se efekte ... ...:

$$P = 2l\mu_0 \log\frac{a_3}{a_2}$$

3). Samoindukcija ... ... AB ... Energija ... T.

$$T = \frac{1}{2}\int(Uu + Vv + Ww)d\tau = \frac{1}{2}PJ^2.$$



$$PJ^2 = \int(Uu + Vv + Ww)d\tau \qquad u = v = 0$$

$$PJ^2 = \int Ww\, d\tau, \quad W = \int \frac{w}{r} d\tau$$

~~... $x'y'z'$ ... od ose OZ~~

δ je odstojanje P og ... ... $x'y'z'$ $\parallel$ sa OZ

$dx'dy' = d\omega \qquad d\tau = dx'dy'dz'$

$$W = \int w\,d\omega \int\frac{dz'}{r} = \int w\,d\omega\int\frac{dz'}{\sqrt{\delta^2 + (z - z')^2}}$$

/.

$$\int \frac{dz'}{\sqrt{\delta^2+(z-z')^2}} = \log\left[z'-z+\sqrt{\delta^2+(z-z')^2}\right]_{z'=0}^{z'=l} + C =$$

$$= \log\frac{\left(l-z+\sqrt{\delta^2+(l-z)^2}\right)\left(z+\sqrt{\delta^2+z^2}\right)}{\delta^2} =$$

δ [illegible] wobec l

$$W = \int w \log\frac{4(zl-z^2)}{\delta^2}\, d\omega$$

$$W = \log 4(zl-z^2)\int w\, d\omega - 2\int w \log\delta\, d\omega$$

$d\omega = dx'dy'$ $\int w\, d\omega = J$ ([illegible])

$w \log\delta\, d\omega$ [illegible]

[illegible] $\log \frac{1}{\delta}$ [illegible] W. [illegible] $\log\delta$

[illegible]

[illegible]

$$W_1 = \int w \log\delta\, d\omega = J\log\delta_0 = J\log a$$

[illegible]

$$W = J\log 4(zl-z^2) - 2J\log a = J\log\frac{4(zl-z^2)}{a^2}$$

$$PJ^2 = \int W w\, d\tau = \int W w\, d\omega\, dz = J\int w\, d\omega \int \log\frac{4(zl-z^2)}{a^2}$$

$$= J^2 \int \log\frac{4(zl-z^2)}{a^2}\, dz =$$

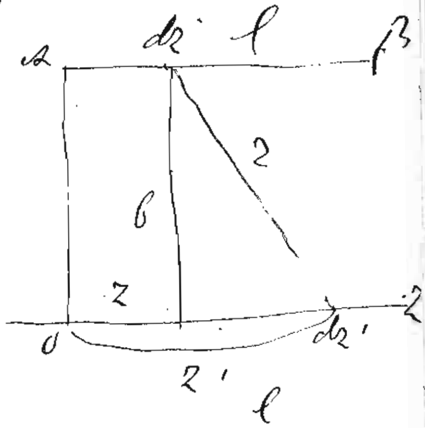
$$P = \int \log\frac{4(zl-z^2)}{a^2}\, dz = \left[z\log\frac{4}{a^2} + z(\log z - 1) - (l-z)\right]\left[\log(l-z) - \dots\right]$$

$z=0$ do $z=l$

$$P = 2l\left(\log\frac{2l}{a} - 1\right)$$

§44 [illegible] współczynnik [illegible]

Ово тем путем у Neumann-ову формулу
За сваки део бавити се индукционим коефицијентом
[illegible] узимамо [illegible] формули
[illegible] у формули $\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, dl\, dl'$



За ОА и АВ $\cos\varepsilon = 0$, за АВ и ОZ је $\cos\varepsilon = -1$

Коефицијенат је за АВ и ОZ

$$M = \int \frac{dl\, dl'}{r}$$

Овде треба бити израчунати:

$$\int_0^l \frac{dz'}{r} = \int_0^l \frac{dz'}{\sqrt{b^2+(z'-z)^2}} = \Big[\log\big(z'-z+\sqrt{b^2+(z'-z)^2}\big)\Big]_0^l$$

$$= \log \frac{\big(l-z+\sqrt{b^2+(l-z)^2}\big)\big(z+\sqrt{b^2+z^2}\big)}{b^2} = \psi(z)$$

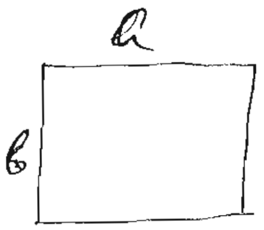
$$\int \frac{dz\, dz'}{r} = \int \log \psi(z)\, dz = \int \log\big[l-z+\sqrt{b^2+(l-z)^2}\big]\, dz + \int \log\big(z+\sqrt{b^2+z^2}\big)\, dz + 2\log \tfrac{1}{b}\int dz$$

$$\int_0^l \frac{dz\, dz'}{r} = \Big[-(l-z)\Big[\log\big(l-z+\sqrt{b^2+(l-z)^2}\big)+\sqrt{b^2+(l-z)^2}\Big] + z\log\big(z+\sqrt{b^2+z^2}\big) - \sqrt{b^2+z^2} + 2z\log \tfrac{1}{b}\Big]_0^l$$

или

$$\int_0^l \frac{dz\, dz'}{r} = 2l\log\frac{l+\sqrt{b^2+l^2}}{b} + 2\big(b-\sqrt{b^2+l^2}\big)$$

Ово треба помножити са $\cos\varepsilon = -1$



Ако су стране правоугаоника a и b биће за [illegible] стране [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] правоугаоника [illegible] [illegible] [illegible] и тако је коефицијенат P:

$$P = 4\left\{2\big(\sqrt{a^2+b^2}-a-b\big) + a\log\frac{2ab}{r\big(a+\sqrt{a^2+b^2}\big)} + b\log\frac{2ab}{r\big(b+\sqrt{a^2+b^2}\big)}\right\}$$

r је полупречник пресека жице.

За квадрат $a = b$

$$P = 2l'\Big[\log\frac{l'}{r} - 2.16\Big) \qquad l' = [illegible]$$

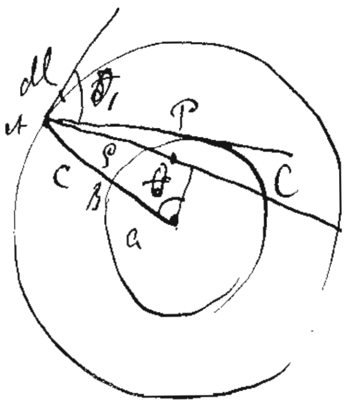
(§ 48 Samoindukcyja cylindra drugi

Obliczamy tu dla obręczy indukcyjnej koła o promieniu $a+c$ przez konturowy okrąg o promieniu a

Niech jest element koła $a+c$ dl, koła a dl'.

Kąt przy nich ... jest równe 1 ... P

siła H jest:



$$dH = \frac{\sin\theta\, dl}{\rho^2}$$

Przez powierzchnię przepływowa ... dl jest obrotnie:

$$dG = 2dl\int \frac{\sin\theta}{\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta_*$$

$\rho\, d\rho\, d\theta$ = element powierzchni koła a. θ_* będzie ...

od $\theta = \theta_1$ do $\pi/2$, θ_1 jest ... dl a ... koło

prom. a; za ρ od $r_2 = AB$ do $r_1 = AC$

$$dG = 2dl\int_{\theta_1}^{\pi/2}\int_{r_2}^{r_1}\frac{\sin\theta}{\rho}\,dr\,d\theta = 2dl\int_{\theta_1}^{\pi/2}\sin\theta\log\frac{r_1}{r_2}\,d\theta$$

Z geometrii:

$$r_1 r_2 = c(c+2a)$$

$$r_1 + r_2 = 2(a+c)\sin\theta$$

$$r_1 = (a+c)\sin\theta + \sqrt{(a+c)^2\sin^2\theta - c^2 - 2ac}$$

$$r_2 = (a+c)\cos\theta - \sqrt{(a+c)^2\sin^2\theta - c^2 - 2ac}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{a}{a+c}. \quad \theta_1 = \arcsin\frac{\sqrt{c^2+2ac}}{a+c}$$

Jeśli c małe wobec a można pisać:

$$r_1 = 2a\sin\theta, \quad r_2 = \frac{c}{\sin\theta}, \quad \theta_1 = \arcsin\sqrt{\frac{2c}{a}} \quad \cos\theta_1 = 1$$

Kąt ... od ... dG $\int dG$ będzie ... po całym kole

$$G = \int dG = 4\pi a\int_{\theta_1}^{\pi/2}\sin\theta\log\frac{2a\sin^2\theta}{c}\,d\theta.$$

$$G = 4\pi a\left[-\cos\theta \log\frac{2a\sin^2\theta}{c} + 2\log \operatorname{tg}\theta/2 - 2\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

czyli

$$G = 4\pi a\left(\log 4 - 2 - \log\frac{c}{2a}\right) = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{c} - 2\right)$$

[illegible]

$$P J^2 = 4\pi a \iint \left[\log\left(\frac{8a}{c}\right) - 2\right] i i' \, d\omega \, d\omega' \quad \ldots (1)$$

[illegible] $d\omega$ i $d\omega'$

[illegible]

$$P J^2 = 4\pi a J^2 (\log 8a - 2) - 4\pi a J \int i' \log c \, d\omega'$$

[illegible] $\int i' \log c \, d\omega'$ [illegible]

$$P = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{\rho} - 2\right)$$

$l = 2\pi a$

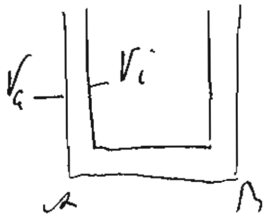
$$P = 2l\left(\log\frac{4l}{\pi\rho} - 2\right) = 2l\left(\log\frac{l}{\rho} - 1.758\right)$$

[illegible]

[illegible] $\log 0.77882$ [illegible]

$$P = 4\pi a\left(\log\frac{8a}{\rho} - 1.750\right) = 2l\left(\log\frac{l}{\rho} - 1.508\right)$$

Одредба капацитета кондензатора



§49 Означимо са енергију кондензатора AB је:

$$T = \frac{1}{2}E(V_i - V_a)$$

(E је количина електрицитета, V_i и V_a су потенцијали).

Капацитет је $C = \frac{E}{V_i - V_a}$

$$T = \frac{E^2}{2C} = \frac{C}{2}(V_i - V_a)^2$$

Ако има више кондензатора који су капацитета C_1 C_2 … C_n

$$C = \frac{E_1 + E_2 + \dots E_n}{(V_i - V_a)} = C_1 + C_2 + \dots C_n$$

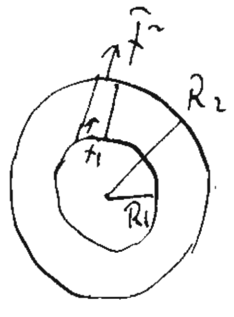
Капацитет батерије паралелно [illegible]

Ако се унутрашња облога једног са спољном другог [illegible] кондензатора [illegible] у E. [illegible]

$\frac{E}{C_1}$ $\frac{E}{C_2}$ …

$$V_i - V_a = E\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n}\right]$$

$$\frac{1}{C} = \frac{V_i - V_a}{E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n}$$



§50 Нека је кондензатор састављен из две концентричне кугле

$$V_i - V_a = 4\pi\sigma R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = 4\pi\sigma R_1^2\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

Ово је тако јер је сила F_1 на кугли R_1 [illegible]

$F = F_1 \frac{R_1^2}{R^2}$. $F_1 = 4\pi\sigma$ и $F = 4\pi\sigma \frac{R_1^2}{R^2}$ Према томе

$$\int_{R_1}^{R_2} F\,dR = V_i - V_a.$$

На унутрашњој кугли: $E = 4\pi R_1^2 \sigma$

и капацитет је C:

$$C = \frac{E}{V_i - V_a} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \dots (I)$$

$$C = K\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

[illegible] у диелектрику [illegible] K.

7) Przenoszenie energii w elektromagnetycznym polu (Pointing-ów wektor).

§51. Ako w jakimś miejscu pola oznaczymy komponenty elektryczne X Y Z, magnetyczne L, M N, mamy:

$$A\left[k\frac{\partial X}{\partial t}+4\pi\lambda X\right]=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \qquad A\mu\frac{dL}{dt}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}.$$

$A=1/c$, c jest prędkością światła.

Ako obie [illegible] pomnożymy przez $\frac{1}{4\pi A}$ i przez X Y Z L M N [illegible] otrzymamy na lewej stronie:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{k}{8\pi}\left(X^2+Y^2+Z^2\right)+\frac{\mu}{8\pi}\left(L^2+M^2+N^2\right)\right]+\lambda\left[X^2+Y^2+Z^2\right]$$

Na prawej zaś stronie otrzymamy:

$$\frac{1}{4\pi A}\left\{\left[X\left(\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)+L\left[\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right]\right]\right\}$$

Kiedy uwzględnimy [illegible] $X\frac{dN}{\partial y}+N\frac{dX}{dy}=\frac{dNX}{dy}$

otrzymamy

$$\sum\frac{d}{dx}\left[ZM-YN\right]$$

Kiedy się lewą i prawą stronę pomnoży przez $d\tau$ i scałkuje, otrzymamy: $\int\frac{dk}{8\pi}\sum X^2 d\tau$, $\frac{d}{dt}\int\frac{\mu}{8\pi}\sum L^2 d\tau$, $\int\lambda\sum X^2 d\tau$ znaczy zmianę elektrycznej i magnetycznej energii. [illegible] ako $\lambda>0$ a oznacza $\int\frac{i^2}{\lambda}d\tau$ [illegible] ilość elektrycznej energii przemienionej przy $\lambda X=i_x$ (i gęstość prądu) na [illegible] ciepło.

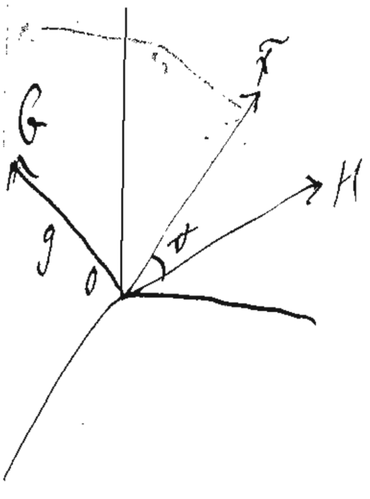
Lewa strona przedstawia [illegible] energii a prawa [illegible] [illegible] elektrycznego i magnetycznego pola [illegible] energii i [illegible] objętości [illegible] [illegible].

Пошто је $d\tau = dx\,dy\,dz$

$dy\,dz = dS\cos(nx)$ итд.

Кад ово унесемо у целу сферу имаћемо:

$$\frac{A}{4\pi}\int_3\frac{d}{dx}(ZM-YN)\,d\tau = \frac{A}{4\pi}\int(ZM-YN)\,dS\cos nx \quad \ldots \quad \text{I}$$



Ако је у тачки ? F вектор X Y Z и H вектор L M N и θ угао међу њима FH sin θ је површина паралелограма од F и H. Ако се у 0 дигне вектор $G = FH\sin\theta$ и нормалан на F и H онда су његове компоненте на Ox Oy Oz $G\cos(gx) = ZM - YN$ итд. Ово је производ двају вектора. Кад ово ставимо у I имаћемо:

$$\frac{A}{4\pi}\int\left[G(\cos nx\cos gx + \cos ny\cos gy + \cos nz\cos gz)\right]dS = \frac{A}{4\pi}\int G\cos gn\,dS$$

Кад се стави у целу сферу једначина горња имаћемо:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_3\frac{K}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)\,d\tau + \int_3\frac{\mu}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\,d\tau\right] + \int_3\lambda(X^2+Y^2+Z^2)\,d\tau$$

$$= \frac{A}{4\pi}\int_2 G\cos gn\,dS \quad \ldots \quad \text{II}$$

Где се интеграл односи на елементе заграничне површине а другом на површину

Из II а то енергија целе сфере долази зрачењем:

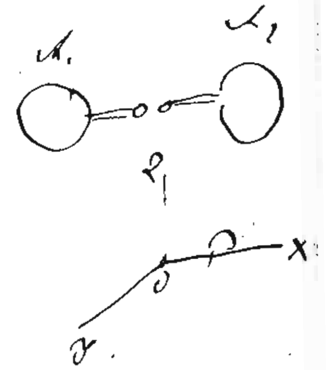
Количина енергије у јединици времена која пролази кроз површину једнака је $\frac{1}{4\pi}$-ом производа вектора G. Овај се вектор зове Pointing-ов. Вектор G са F и H образује правоугли систем.

Електромагнетска енергија, коју вектор G представља креће се у правцу, који је нормалан на F и H нормалан

Примењујемо ово излагање на појаве код Херцових таласа.

/.

§ 52 [illegible]



$$\Sigma \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \ldots \quad 1.$$

[illegible]

[illegible] $N = 0$ [illegible] $\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \ldots \quad 2.$

[illegible] 2 [illegible] $Ldy - Mdx$ [illegible]

[illegible]:

$$Ldy - Mdx = A\, d\frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad \ldots \quad I.$$

$$L = A\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}, \quad M = -A\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t} \quad N = 0 \quad \ldots \quad 3.$$

[illegible] $\lambda = 0$ [illegible]

$$K\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial x \partial z \partial t}, \quad K\frac{dY}{dt} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y \partial z \partial t} \quad K\frac{dZ}{dt} = -\frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^2 \partial t}$$

[illegible]:

$$KX = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad KY = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \quad KZ = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \quad \ldots \quad 4$$

$X\, Y\, Z \quad L\, M\, N$ [illegible] Π.

[illegible]:

$A = \frac{1}{c}$ $\qquad A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ [illegible]:

$$A^2 \mu K \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y \partial t^2} = \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3} = \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial y}$$

[illegible]

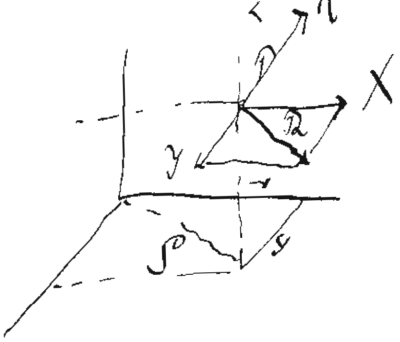
$$A^2 \mu K \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \Delta \Pi \quad \ldots \quad II.$$

[illegible] II [illegible]

[illegible] $X\, Y\, Z$ [illegible]

$dx\, dy\, dz$ [illegible] XYZ [illegible]

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{ds}{R}$$



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\rho\,d\rho = x\,dx + y\,dy$$

$$\frac{x\,dx}{xX} = \frac{y\,dy}{yY} = \frac{\tfrac{1}{2}d(x^2+y^2)}{xX+yY} = \frac{\rho\,d\rho}{X\frac{x}{\rho}+Y\frac{y}{\rho}\,\rho}$$

$$= \frac{d\rho}{R}$$

$$R = X\frac{x}{\rho} + Y\,y/\rho$$

[illegible] za X a Y [illegible] x i y:

$$\frac{dz}{Z} = \frac{d\rho}{R} \quad \text{czyli} \quad R\,dz - d\rho\,Z = 0 \text{ [illegible]:}$$

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial z}\frac{x}{\rho} + \frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z}\frac{y}{\rho}\right]dz + \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right]d\rho = 0 \;\ldots\; (II)$$

$$\text{[illegible]} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \qquad \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} \quad \text{etc} \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}$$

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial z}\frac{d\rho}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial h}{\partial\rho}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{\partial h}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial\rho}\right]$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \;;\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial h}{\partial\rho}\frac{d\rho}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 h}{\partial\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{\partial h}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial h}{\partial y}\right] \qquad = \frac{\partial^2 h}{\partial\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial h}{\partial\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}$$

$$\Delta h = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\rho^2}\rho + \frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

[illegible] oba [illegible] y II [illegible]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial h}{\partial\rho}\right)dz + \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial h}{\partial\rho}\right]d\rho = 0$$

czyli

$$\rho\frac{\partial h}{\partial\rho} = \text{Konstante} = Q.$$

Q = [illegible] $X\,Y\,Z$.

Q = [illegible] $X\,Y\,Z$.

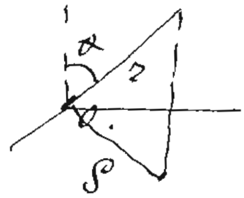
$$R = -\frac{1}{\rho}\frac{dQ}{dz} \quad H = \frac{1}{\rho}\,\frac{dQ}{dt} \quad Z = \frac{1}{\rho}\frac{dQ}{d\rho} \quad N = 0.$$

$$H = \sqrt{L^2 + M^2} = L\,y/\rho - M\,x/\rho$$

/.

$$H = L\,y/\rho - M\,x/\rho = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial y}\, y/\rho + \frac{\partial \Pi}{\partial x}\frac{x}{\rho}\right]$$

$$H = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\left(\frac{y^2}{\rho^2} + x^2\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right)\right].$$



§3 [illegible] [illegible]: ? Π [illegible] Π [illegible] r и t.

$$\rho = r\sin\theta, \quad z = r\cos\theta \qquad r^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \rho/r \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = z/r$$

$$\Delta \Pi = \sum \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}\cdot\frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial r}\frac{1}{r} - \frac{\partial \Pi}{\partial r}\frac{z^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial r}1/r - \frac{\partial \Pi}{\partial r}\frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -$$

$$\Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

Кад u ово смени у једначини за П [illegible]

$$a^2\mu k\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \dots \quad (I)$$

Ову једначину задовољава $\Pi = \dfrac{f(rt)}{r}$ ако $f(rt)$ задовољава

$$a^2\mu k\frac{\partial^2 f(rt)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(rt)}{\partial r^2} \quad \dots \quad (II)$$

За $f(rt)$ узимамо решење $f(rt) = C\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$

[illegible] у [illegible] [illegible]

$$\Pi = \frac{C}{r}\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad \dots \quad (III).$$

Кад смо нашли П лако је наћи Q:

$$Q = \rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} = \frac{\rho^2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} = r\frac{\partial \Pi}{\partial r}\sin^2\theta.$$

$$Q = \frac{2\pi C}{\lambda}\left\{\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{\sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - t/T\right)}{\frac{2\pi}{\lambda}r}\right]\sin^2\theta.$$

Диференцирајући φ по z, t и ρ имамо вредности за ρZ, ρR и ρH

1). У близини осцилатора (ексцитатора) z је мало $\frac{z}{\lambda}$ према $\frac{t}{T}$ и за Π имамо вредност:

$$\Pi = -\frac{1}{z} C \sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$\Delta \tfrac{1}{z} = 0 \quad X = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} \quad Y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} \quad Z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$$

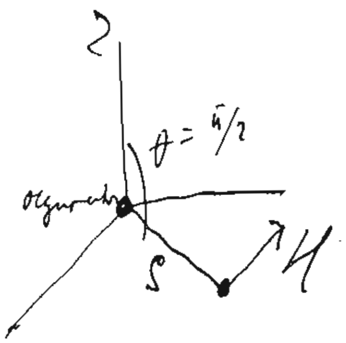
Овде је сила електрична изражена из потенцијала:

$$V = \frac{\partial \Pi}{\partial z} = -C \sin\frac{2\pi t}{T} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Ово је потенцијал [illegible] тачке B_1 и B_2 одстојања l и мером $-e\sin\frac{2\pi t}{T}$, $C = el$

Магнетска сила:

$$H = A\frac{2\pi}{T} el \cos\frac{2\pi}{T} t \frac{\sin\theta}{z^2}$$



2). За велика одстојања у екваторијалној равни је $dz = -z\,d\theta$, $d\rho = dz$, $\theta = 90^0$ $(z = z\cos\theta \quad dz = -z\sin\theta . d\theta = -z\,d\theta)$ $\theta = \pi/2$

$$R = 0 \quad Z = \frac{4C\pi^2}{\lambda^2 z}\left\{-\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) + \frac{\cos 2\pi\left(z/\lambda - t/T\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} z} - \frac{\sin 2\pi\left(z/\lambda - t/T\right)}{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} z^2}\right\}$$

$$H = \frac{AC4\pi^2}{\lambda T z}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) - \frac{\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} z}\right\}$$

У правцу R [illegible] је $\theta = 0$ $d\rho = z\,d\theta$ $dz = dz$

$R = 0 \quad H = 0$

$$Z = \frac{4\pi C}{\lambda z^2}\left\{\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right) + \frac{\sin 2\pi\left(z/\lambda - t/T\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} z}\right\}$$

[illegible] електричне силе у електричном пољу [illegible] и [illegible]
[illegible] са [illegible].

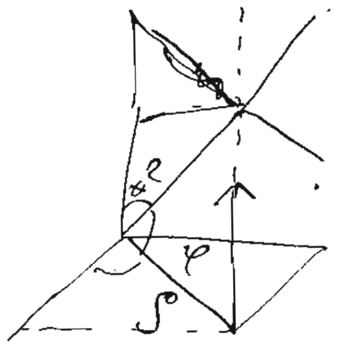
3). [illegible] је 1/2 [illegible] за свако θ су:

$$Q = C\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin^2\theta$$

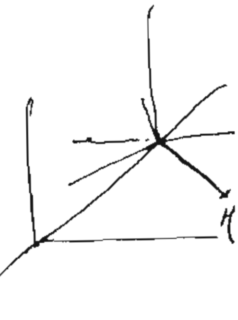
$$R = C\frac{4\pi^2}{\lambda}\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin\theta\cos\theta\frac{1}{z}$$

$$Z = -C\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin\theta\frac{1}{z}$$

$$H = AC\frac{4\pi^2}{\lambda T}\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin\theta\frac{1}{z}$$



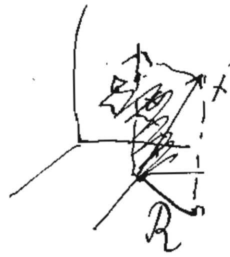
$$Z\cos\theta + R\sin\theta = 0$$ [illegible] z



$$Z\cos\theta + X\frac{x}{\rho}\sin\theta + Y\frac{y}{\rho}\sin\theta = 0$$

[illegible] z [illegible] $\rho\cos\varphi$ $\rho\sin\varphi$ $\rho\cos\theta$
$= x$, $= y$, $= z$.

$$Zz + Xx + Yy = 0 \therefore \cos(\hat{F}z) = \cos 90 = 0.$$



[illegible]
[illegible]. Електрична и магнетска [illegible] $\perp$ [illegible]
[illegible]
[illegible] за $\theta = 0$

§ 57 [illegible] енергије [illegible] 1/2 [illegible]
Кад нам је вектор електричне F

$$F = R\cos\theta \mp Z\sin\theta = \frac{el\,4\pi^2\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin\theta}{\lambda^2 z} \qquad C = el$$

Магнетска је сила:

$$H = A\frac{el\,4\pi^2\sin 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin\theta}{\lambda T z}$$

Ако око [illegible] између θ и $\theta + d\theta$ [illegible]
[illegible] $2\pi z^2\sin\theta d\theta$, [illegible] за dt [illegible] енергије:

$$\frac{2\pi z^2\sin\theta d\theta}{4\pi A}dt\,FH = \frac{8\pi^4 e^2 l^2\sin^2 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\sin^3\theta\, d\theta\, dt}{\lambda^3 T}$$

ωt од 0 до π $\quad t = 0$ до $T/2$

Кад се уврсти интеграција добија се:

$$\frac{8\pi^4 e^2 l^2}{3\lambda^3}$$

Ако су полупречник кугле електрода a, капацитет ~~$e/2$~~ је једнак a. Свака кугла има ~~количину~~ наелектрисања једнак $1/2$ наелектрисања разлике кугле. Енергија је кондензатора [illegible] e и наелектрисање разлике. Капацитет је једнак $\frac{a}{2}$. Енергија је једнака $\frac{e^2}{a}$ а одатле је енергија за $T/2$

$\frac{e^2}{a}\frac{8\pi^4 a l^2}{3\lambda^3}$. За $a = 15$ cm $l = 100$ cm $\frac{\lambda}{2} = 480$ cm

$\frac{8\pi^4 a l^3}{7\lambda^3} = 0.0739$. За јединицу 1 cm узимамо апсолутна наелектрисања 120 ел.стат. јединица $e = 120\ e/2$ [illegible] $2400 = 22$ [illegible]

$\frac{e^2}{a} = 5400$. За $1/2\,T$ одлази енергија

$$\frac{T}{2} = \frac{480}{3.10^{10}} = 1.6\,10^{-8} \text{ секунди (Hertz).}$$

— II —

Електрично осциловање (Стојећи таласи).

§55 Из једначине $A^2 \mu k \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r}$

Нашли смо да је

$$\Pi_1 = \frac{C \sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)}{r}$$

[illegible] за своју [illegible] таласа у [illegible] у [illegible] који [illegible], [illegible] решење [illegible]:

$$\Pi' = \frac{C \sin\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \delta\right]}{r}$$

[illegible] таласа од осцилатора [illegible] r [illegible] $\frac{\lambda}{T}$, а Π' [illegible]. За [illegible] од [illegible] ка осцилатору [illegible]

$= \frac{\lambda}{T}(nT - r)$ [illegible] Π и Π'! Π' [illegible]

[illegible] у [illegible] средини, [illegible] осцилатору. [illegible] дато [illegible] осцилатору.

Π_2

$$\Pi_2 = \frac{C_1}{r} \sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{C_2}{r} \sin\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \delta\right]$$

за $C_1 = C_2$, [illegible] C.

$$\Pi_2 = \frac{C}{r}\, 2 \sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\delta}{2}\right)$$

За $r = a$ $\Pi = 0$ [illegible] $\frac{2\pi a}{\lambda} + \frac{\delta}{2} = 0$

$$\Pi_2 = \frac{2C}{r} \sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\right) \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right)$$

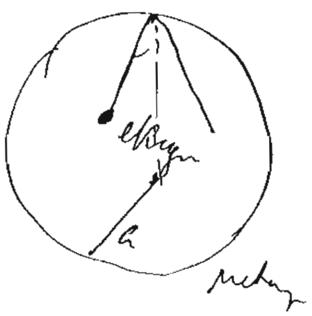
[illegible]

За [illegible] је:

$$X = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \sin\vartheta = -\frac{8\pi^2 C}{\lambda T^2} \sin 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\right) \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right) \sin\vartheta$$

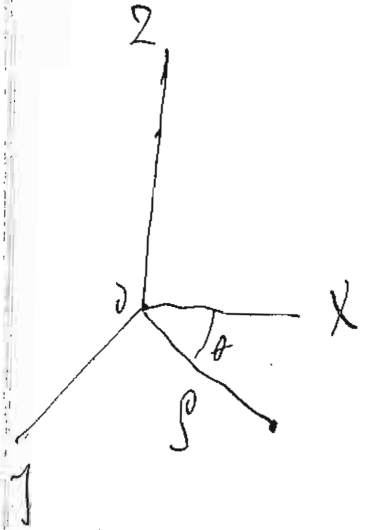
$$H = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r\, \partial t} \sin\vartheta = \frac{8\pi^2 C}{\lambda T r} \cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{a}{\lambda}\right) \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a}{\lambda}\right) \sin\vartheta$$

Где је $X = 0$ H је максимум



Простирање таласа у жици

§ 56 Нека је жица у OZ оси, распоред јачине у равни управној на OZ. Ако је ψ ... у равни ... онда је јачина израз $\psi\,\varphi(\rho) = \psi(Zt)\,\varphi(\rho) = \Pi$



Имамо сада:

$$KZ = -\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}$$

или

$$A^2\mu K\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \Delta\Pi$$

$$A^2\mu K\,\varphi(\rho)\frac{\partial^2\psi(Zt)}{\partial t^2} = \varphi(\rho)\frac{\partial^2\psi(Zt)}{\partial Z^2} - Z \quad \ldots \quad 1.$$

Ако је у дебљини Z Z = 0 онда је:

$$A^2\mu K\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi(Zt)}{\partial Z^2} \quad \ldots \quad 2.$$

Таласи се дуж жице простиру брзином $\frac{1}{A\sqrt{\mu K}} = \frac{c}{\sqrt{\mu K}}$

Ако у 2 за $\psi = \cos 2\pi\left(\frac{Z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\Pi \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial Z^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Pi$$

$$A^2\mu K\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \Delta\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial Z^2}$$

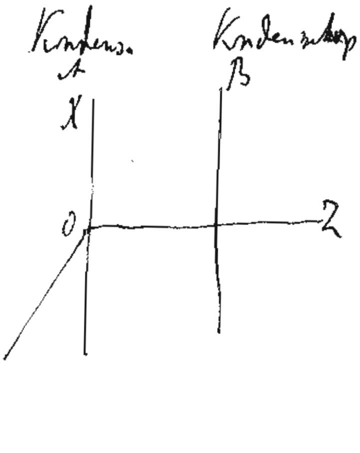
Ако је $\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - A^2\mu K\frac{4\pi^2}{T^2} = n^2$

$$n^2\Pi = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}$$

или делимо са ψ имамо:

$$\frac{\partial^2\varphi(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi(\rho)}{\partial\rho} - n^2\varphi(\rho) = 0$$

$$\varphi(\rho) = 1 + \frac{(n\rho)^2}{2^2} + \frac{(n\rho)^4}{(2\cdot4)^2} + \ldots$$



2). Нормални таласи у електрицитету између кондензатора. Овде је Π независно од Z $\frac{\partial\Pi}{\partial Z} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial Z^2} = 0$

$$A^2\mu K\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}$$

Rozch. p.:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\Pi$$ a [illegible] równanie:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}+\frac{4\pi^2}{T^2}A^2\mu K\,\Pi=0$$

Oznaczam $\frac{1}{\lambda}=\frac{A\sqrt{\mu K}}{T}$ i $\Pi = f(t)\varphi(\rho)$ w tem [illegible]:

$$\frac{\partial^2\varphi(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi(\rho)}{\partial\rho}+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\varphi(\rho)=0$$

$$\varphi(\rho)=1-\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right)^2\frac{1}{2^2}+\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right)^4\frac{1}{(2\cdot4)^2}-\dots+\dots$$

Z tego [illegible] Z natężenie [illegible] kondensatora. [illegible] Z natężenie i σ (gęstość [illegible]) $\sigma=\frac{KZ}{4\pi}$ [illegible]

$$Z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho^2}=-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Pi=-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}f(t)\left[1-\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right)^2\frac{1}{2^2}+\dots\right]$$

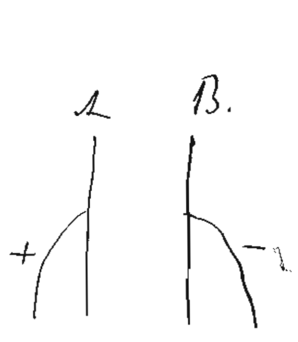
Na [illegible] między ρ i $\rho+d\rho$ [illegible] elektryczności

$$2\pi\rho\,d\rho\,\sigma=\frac{KZ\rho\,d\rho}{2}$$

$$\varepsilon=\int_0^R\frac{KZ\rho\,d\rho}{2}=-\frac{4K\pi^2}{\lambda^2}f(t)\left[\frac{R^2}{2}-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{R^4}{2^4}+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4\frac{R^6}{2^{?}\cdot3}-\right]$$

Jeśli [illegible] kondensatora V, d [illegible] elektrostatycznie [illegible]: $\frac{V}{d}=Z$ i [illegible]

$C=\frac{KR^2}{4d}=\frac{\varepsilon}{V}$ [illegible] $\varepsilon=\frac{KR^2}{4}Z$. [illegible] kondensatora z elektrostatyczną [illegible] $1-\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$ zaniedbujemy.



§ 52 Rozładowanie kondensatora. [illegible] kondensatora A i B V_1 i V_2 [illegible] C. Na A jest [illegible] e_m (e_m elektryczność [illegible]).

$$e_m=C(V_1-V_2)$$

Jeśli [illegible] prąd i

$$i=-\frac{de_m}{dt}\ \dots$$

По Ohm-овом закону је:

$$iw = -\mathcal{L}\frac{di}{dt} + V_1 - V_2$$, у којој је $\mathcal{L}$ коефицијент самоиндукције

Из облога кондензатора је:

$$i = -c\frac{d(V_1 - V_2)}{dt}$$

Ако сад елиминишемо између i и $V_1 - V_2$ налазимо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{\mathcal{L}}\frac{di}{dt} + \frac{1}{\mathcal{L}c} i = 0$$

$$i = Ae^{Kt}$$

$$K_1 = \frac{-w \pm \sqrt{w^2 - 4\mathcal{L}/c}}{2\mathcal{L}} \qquad \begin{matrix} i = A_1 e^{K_1 t} \\ i = A_2 e^{K_2 t} \end{matrix}$$

За наше је једначине интеграција, w^2 мање је него $4\frac{\mathcal{L}}{c}$ и

$$i = e^{-\frac{w}{2\mathcal{L}}t}\left(A_1' \cos 2\pi\frac{t}{T} + A_2' \sin 2\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\mathcal{L}c} \ldots$$

458 За Teslin-ов трансформатор. $\mathcal{L}_{11}$ и $\mathcal{L}_{22}$ су коефицијенти самоиндукције секундарног и примарног кола. $\mathcal{L}_{12}$ узајамни индукциони коефицијент.

$$i_1 w_1 = -\mathcal{L}_{11}\frac{di_1}{dt} - \mathcal{L}_{12}\frac{di_2}{dt} + (V_1 - V_2)_1$$

$$i_1 = -C_1\frac{d(V_1 - V_2)_1}{dt}$$

$$i_2 w_2 = -\mathcal{L}_{22}\frac{di_2}{dt} - \mathcal{L}_{12}\frac{di_1}{dt} + (V_1 - V_2)_2$$

$$i_2 = -C_2\frac{d(V_1 - V_2)_2}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{w_1}{\mathcal{L}_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\mathcal{L}_1 C_1} = \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_1}\frac{d^2 i_2}{dt^2} \quad \ldots 1$$

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{w_2}{\mathcal{L}_{22}}\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\mathcal{L}_{22} C_2} = \frac{\mathcal{L}_{12}}{\mathcal{L}_{22}}\frac{d^2 i_1}{dt^2} \quad \ldots 2$$

i_1 је мало према у примарном од i_2. Тј. се може занемарити десна страна у 2 једнач. Из 2 је онда

$$i_2 = e^{-\delta_2 t}\left[A_2 \cos 2\pi\frac{t}{T_2} + A_2' \sin 2\pi\frac{t}{T_2}\right)$$