К. Стојановић

О ПОЛУ И ПОЛАРИ

КОД КРИВИХ ЛИНИЈА

6057 5935

О полу и полари код кривих линија

Т. Стојановић

— Садржај —

I одељак

О полу и полари код линија другог степена (Конусних пресека)

α). Прва глава

О полари једне тачке

-β- Друга глава

О полу једне праве

-γ- Трећа глава

О полу и полари код линија што резултују из опште једначине другог степена — т. ј. код елипсе, круга, хиперболе и параболе (код конусних пресека)

-17- Пол праве у односу Конусних бракова

-18- Геометријска Конструкција пола и поларе код Кb (Конусних бра...

-19- Аналитичка Конструкција пола и поларе код Кb.

г. Четврта глава

Однос пола према полари код кривих линија другог степена

-20- Полара једне тачке на извесној прави, пролази кроз пол исте праве

-20а- Полара пресечне тачке двеју правих, јесте линија која спаја полове тих пра...

-21- О конјугованим тачкама и правама

-22- Систем конјугованих тачака на једној прави јесте систем инволуторних тачака; конјуговане праве чине инволуторни прамен.

-23- Анхармонијски однос четири тачака на правој линији раван је анхармонском односу ~~анхармониј~~ четири конјугованих тачака.

-24- Систем троугла конјугованих тачака и правих.

ђ. Пета глава

О поларним и аутополарним троугловима

-25- О поларним и аутополарним троугловима

-26- О оси и полу аутополарних троуглова

-27- Кад је један троугао уписан у браку 2°, онда је пол његовог поларног троугла пол осе ових поларних троуглова.

-28- Једначина 2° у односу аутополарног троугла, као основног троугла (triangle de référence)

-29- Два брака 2° имају увек један заједнички аутополарни троугао

-31- $\Theta = 0$ или знак да се око поларних троуглова у односу брака S може описати браку S_1, и да је оса ових троуглова теменима на браку S_1

-32- Шест темена двају аутополарних троуглова односно брака S_1, леже на једном браку S. Шест страна обвијају брак S_{11}.

-33- Теорема Faure-ова

-34- Центар уписаног круга у једном троуглу, који је аутополаран односно равностране хиперболе, налази се на истој хиперболи.

ж. Шеста глава

О центрима и жижама код Кb

-35- Центар је пол праве у бесконачности (∞)

-36- Директриса је полара жиже

-37- Одредба жижа код бракова 2°.

з. Седма глава

Проблеми и задаци код кривих линија 2°.

-38- Однос између отстојања једне тачке од центра круга, и ... стран је.

-39- Производ из отстојања жижа (код елипсе и хиперболе) од тангенте једне тачке и отстојања пола исте тангенте од ње, раван је квадрату мале осе елипсине или хиперболине.

-40- Угао под којим се види из жиже тангента једне тачке, преполовљен је фокалном тетивом кроз пол исте тангенте. (код елипсе и хиперболе)

-40a. Последња теорема код параболе

-41- Код свију конусних кривих (круга, елипсе, хиперболе и параболе) постоји теорема: права која спаја жижу са полом једне тетиве која иде кроз жижу, нормална је на ту фокалну тетиву.

-42- Права која спаја жижу конусних кривих са пресечном тачком тангенте и директрисе, директриса је симетрала угла између праве, под којим се види из жиже та тангента

-43- Управна спуштена из ма које тачке на праву која је конјугована са координатном осом, на тангенту исте тачке, пролази кроз једну исту тачку осину

-44- Тангенте једне тачке у односу система кругова са једном заједничком осом радикалном, пролазе кроз једну исту тачку

-45- Граничне тачке (points limites) код система кругова са једном осом радикалном

-46- Поларе једне тачке у односу кривих 2° који пролазе кроз четири исте тачке, пролазе кроз једну тачку.

-46a Поларе једне тачке у односу кривих 2° описаних око четвороугла ABCD, пролазе кроз једну тачку.

-47- Геометријско место полова једне сталне праве, у односу кривих 2° описаних око четвороугла ABCD, јесте крива 2°.

-48- Геометријско место полова оних правих које су тг. на криви 2° у односу криве 2° јесте крива 2°.

-49- Геометријско место полова једне сталне праве, у односу конјугованих конфокалних кривих, је права линија.

-50- Геометријско место које постаје обвијањем правих које су хармонијски подељене двема кр., јесте крива 2°

-51- Геометријско место оних тачака, из којих повучене тангенте на систем кр. чине хармонијски прамен, јесте крива 2°.

-52- Примена инваријаната и коваријаната на криве наведене у 50 и 51.

-53- Систем кр. који пролази кроз четири тачке, одсеца систем инволутних тачака на једној трансверзали.

-0- <u>Осма глава</u>

— Наставак седме главе —

<u>Задаци, који се односе на криве 2°.</u>

-54- Наћи пол праве у односу криве 2° дате једначином $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{\ldots}$.; у односу криве уписане на троуглу одређеном α, β, γ.

-54a – Геометријско место пола једне праве у односу кривих тангентних на 3 праве α, β, γ и одређених још једним условом

-54a-1- Геометријско место центара КВ. уписаних у троугао αβγ

-54a-2- Геометријско место пола једне праве у односу кривих тангентних на 4 праве α, β, γ и $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, је права линија

-54a-3- Геометријско место пола једне праве, у односу кривих тангентних на трима правима и које пролазе још кроз једну сталну тачку, јесте крива 2°.

-55 – Геометр. место пола једне праве, у односу КВ описаних око троугла, чије су стране α, β, γ (α β γ) јесте конична крива.

-55-1 – Геометријско место пола једне праве, у односу кривих описаних око једног троугла, и које још пролазе кроз једну тачку, јесте крива 2° (КВ)

-55-2- Геом. место пола једне праве у односу кривих 2° описаних око једног троугла и тангентних на једној сталној прави.

-56- Геом. место пресечних тачака једног низа, тачака једне сталне праве, у 2-КВ, јесте конична крива (крива 2°)

-57- Једначина двеју тангената повучених на криву 2° у пресечним тачкама са једном страном основног троугла (triangle de référence). Једначина асимптота

-58- Анвелопа асимптота КВ описаних око једног троугла, јесте КВ уписана у исти троугао, ако друга асимптота пролази кроз једну сталну тачку

-59- Теорема Burnside-ова.

-60 - Теорема Williamson-ова.

-61 - Описати у једном КВ троугао, чије стране пролазе кроз три сталне тачке A, B и C.

-62- Две криве 2° са двојним контактом, хармонијски деле ма који од заједничких контакта кривих, пресечним тачкама те и друге криве, кордом контакта и тачком двојног места тангенте

-63- Једначина КВ. тангентних на 5 правих.

-64 - Геометријско место жижа КВ. уписаних у троугао α, β, γ

-64₁- Геометријско место жижа параболе уписане у троугао αβγ

-65 - Геометријско место жижа свију КВ уписаних у четвороугао чије су стране α, β, γ, δ, јесте линија 3°.

-К- Десета глава -

O низу и мрежи у односу трију кривих 2° (U, V, W)

-66- - Јакобијана -

-67- Одговарајуће тачке јакобијане, њихове особине и једначина јакобијане у најопштијем облику (односно трију кривих 2°)

-68- Начин КВ тангентних на криву W и које пролазе кроз 4 тачке АК

-69- Јакобијана трију КВ, које имају један заједнички аутополарни троугао, своди се на три праве

-70- Јакобијана у односу трију кривих 2° U, V и W, кад пролазе кроз једну исту праву КВ, своди се на ту праву и на КВ кроз пресечне тачке исте праве и кривих U, V и W.

—— . ——

II одсек

Опште о поларама код алгебарских линија $n^{ог}$ степена

— Прва глава —

О полари једне тачке — Поларне криве (Courbes polaires)

-1- Општи поглед на поларе код линија n^o.

-2- Joachimsthal-ова метода одређивања пресечних тачака криве n^o и праве линије —

-3- Поларне криве као поларе једне тачке у односу криве n^o.

-4- Поларна права тачке са геометријског гледишта

-5- Поларна права једне тачке у равни кривој са геометријског гледишта

-6- Поларне криве са геометријског гледишта.

Друга глава

О дијаметрима и центрима код кривих линија n^o.

-7- Поларна права тачке у ∞ или праволинијски дијаметар криве n^o

-8- Поларне криве једне тачке у ∞ или криволинијски дијаметри криве n^o.

-9- Пол поларне праве у ∞ или један центар криве n^o

-10- Поларне криве праве у ∞ или општи центри криве n^o колико има пресека између поларних кривих двеју тачака у ∞

Трећа глава

О неким особинама поларних кривих

-11- $(l+k)^{та}$ поларна крива једне тачке ~~је она~~ у односу криве n^o, јесте $l^{та}$ или $k^{та}$ поларна крива у односу криве $\Delta^k U=0$, или у односу криве $\Delta^l U=0$

-12- Једначина поларних кривих тачке, у односу криве U n^o дате у хомогеним координатама

-13- Геометријско место свих тачака, чије поларне праве пролазе кроз једну тачку, јесте прва поларна крива исте тачке.

-14- Једна права има $(n-1)^2$ полова

-15- Поларне криве једне тачке криве.

Четврта глава

О сингуларним тачкама и правама код криве n^o

-16- О обичним или несингуларним тачкама криве n^o

-17- О двојним тачкама

-18- Разне врсте двојних тачака

-19- О тројним и вишеструким тачкама $k^{ог}$ реда. Та вишеструка тачка $k^{ог}$ реда вреди $\frac{k}{2}(k-1)$ двојних тачака

-20- Број двојних тачака код линија n^o

-20a- Вредност једне вишеструке тачке међу пресечним тачкама двеју кривих U и V ($m^{ог}$ и $n^{ог}$ степена).

-21- О сингуларним правама, кривама и двојним.
-22- О тројним правама и њиховим конјугованима
-23- Реципрочност између сингуларних тачака и права
-24- Пример ради објашњења сингуларних тачака
-24a- Једначине ради одредбе координата сингуларних тачака.

Пета глава

Општа теорија мултипликованих тачака и права (многострукости) у вези са питањем о одређивању кривих.

-25- Мултипла тачка $k^{ог}$ реда на кривој n°, је мултипла тачка (k-1), (k-2) и т. д. на првој поларној кривој, другој и т. д.

-26- Поларна права једне тачке криве n° је тангента у тој тачки кривој

-27- Све поларне криве тачке на кривој n° тангирају се у тој тачки кривој са самом кривом

-28- Тачка контакта свију тангената, које се из једне тачке могу повући на криву n°, лежи на првој поларној криви исте тачке.

-29- Класа криве n° – или степен њене реципрочне криве.

-30- Класа криве n°, кад иста крива има и сингуларних тачака

-31- Једначина из које се одређују коорд. двојне тачке криве n°

-32- Услов да прва поларна крива једне тачке има двојних тачака — једначине Хесијане и Штајнеријане.

-33- Услов нужан да једна права додирне криву у две коинцидентне тачке

-34- Услов нужан да права додирне криву у сингуларној тачки.

-35- Услов нужан да је једна тачка на кривој двојна, и мултипла $k^{ог}$ реда

-36- Услов да права додирне криву у инфлексионој тачки. Број инфлексионих тачака на кривој n°

-37- Број инфлексионих тачака кад крива n° сингуларних

-38- Број инфлексионих тачака кад кубика двојних и сингуларних

-38a- Једначине из којих одређујемо тангенте у мултиплим тачкама које поларне криве свих тачака у односу криве n°.

Шеста глава –

Општа својства у односу трију кривих $m^{ог}$, $m'^{ог}$, $m''^{ог}$ степена
(Јакобијана)

-39- Јакобијана у односу трију кривих u, v и W виших од 2°,

-40- Јакобијана је геометр. место двојних тачака трију кривих, чија је једначина $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$

-41- Заједничке тачке кривих u v и w налазе се на јакобијани трију криве

-42- Ако су криве u, v и W истог степена, онда је свака заједничка тачка двојна тачка јакобијане

-43- Ако су само 2 криве u и v истог степена, онда је ~~заједничка~~ јакобијана тангентна на криву W у заједничкој тачки кривих u, v и w.

-44- Ако су 2 криве u и v истог степена, а заједничка је тачка кривих u v и двојна тачка, онда се јакобијана трију кривих, u, v и W са кривом W у заједничкој тачки трију кривих, u v и w, имају 2 заједничке тангенте

Трећи одељак
О реципрочно поларним кривама
(courbes polaires réciproques)

— Прва глава —
Општи погледи на реципрочно поларне криве

-1- Сумарна историја о реципрочним кривама
-2- Реципрочно поларне фигуре врсте m^0 у односу директрисе n^0
-3- Кратки елементи ради упрошћавања писања о реципрочним поларама

— Друга глава —
Одредба једначине поларно реципрочних фигура

-4- Сличност писања о инверзијама са писањем о реципрочним поларама
-5- Изналажење једначине реципрочне поларе врсте n^0 у односу врсте 2^0 као директрисе
-6- Одредба једначине реципрочно поларне криве из њене тангенцијалне једначине.
-7- Тангенцијална једнач. једне криве, је једначина реципрочне поларе, ако је директриса вр. 2^0 облика $X^2+Y^2+Z^2=0$.
-8- Изналажење реципрочне поларе врсте 2^0 у односу линије 2^0 као директрисе
-9- Једначина реципрочно поларних кривих, помоћу изражења инверзних поларних кривих
-10- Изналажење реципрочне поларе врсте n^0 у односу директрисе n^0, кад су поларне криве помоћу извесне константе.
-11- Једначина реципрочно поларних кривих, кад поларне криве зависе од два параметра
-12- Одредба једначине реципрочне поларе врсте n^0 у односу врсте m^0, помоћу услова два реда контакта између врсте које се сматрају поларно реципрочне кривама поларних кривих места упрошћене реципрочне поларе.
-13- Дата врста 3^0 у тангенцијалним коорд. наћи му реципрочну полару односно врсте $X^2+Y^2+Z^2=0$
-14- Дата врста n^0 у праволинијским (или Cartesi-јевим) координатама, наћи реципрочну полару у односу врсте $X^2+Y^2+Z^2=0$
-15- Примери ради објашњења изнетих разлагања у глави другој
-15а- Врсту 2^0 датом у тангенцијал. коорд. наћи реципрочну полару
-15б- Врсту 2^0 датом у праволинијск. коорд. наћи реципрочну полару
-15в- Наћи реципрочну полару врсте $Ax^2+By^2-1=0$ у односу круга $X^2+Y^2-1=0$
-15г- Наћи реципрочну полару кубика и врсте $(ax)^m+(by)^m+(cz)^m=0$ у односу круга $X^2+Y^2+Z^2=0$.

— Трећа глава —
— Степен реципрочно поларних кривих —

-16- Степен и класа криве једн. n^0
-17- Степен једне криве n^0 раван је класи њене реципрочне поларе у односу директрисе 2^0 — и обратно
-18- Степен реципрочне поларе 2^0 n^0 – [illegible] класа n^0.
-18m- Степен реципрочне поларе једне врсте је степен тангенцијалне једначине исте врсте
-18а- Степен реципрочне поларе врсте $(ax)^m+(by)^m+(cz)^m=0$
-18б- Степен реципрочне поларе кубика (линије 3ег степена)

– 18c – Степен реципрочне поларе једне сингуларне кубике
– 19 – Степен реципрочне поларе криве m° у односу директрисе n° (Тако исто
– 19a – 19c – Примедбе за § 19.

Четврта глава
Принцип дуализма (реципроцитета)

– 20 – Суштина овог принципа
– 21 – Извођење реципрочних (дуалних) теорема
– 22 – Читање реципрочности теорема из једне и исте једначине
– 23 – Примена принципа дуализма на теорему: да се три корде трију кривих секу у једној тачци, ако свака три криве имају једну заједничку корду
– 24 – Неколико реципрочних теорема
– 25 – Два конична пресека двојног контакта, двојног су контакта и код свију реципрочних фигура
– 26 – Израз реципрочне поларе криве S помоћу њене директрисе S и [illegible] кривих S и S₁ – т.ј. функцијом F.

Пета глава
Однос између полара реципрочних у случају кад је директриса круг

– 27 – Облик реципрочне поларе сваке криве r° односно тачке O (т.ј. ~~[illegible]~~ круга чији је центар у O)
– 28 – Потег једне тачке реципрочне поларе [каквог криве] је реципрочна вредност потега на тангенту у одговарајућој тачци криве и кад је полупречник директрисе раван
– 28a – Реципрочна полара КВ. у односу центра њеног (т.ј. круга чији је центар у центру кривом)
– 28b – Нађи реципрочну полару КВ. односно тачке у тачци ван криве.
– 28c – Испитивање реципрочне поларе КВ. у односу тачке у x'y'; из реципрочне поларе исте криве у односу њеног центра.
– 29 – Једначина реципрочне поларе кривих кад су оне дате у поларним координатама (реципрочне поларе треба наћи, круга, одн. равнострање хиперболе, кардиоиде и т. д.)
– 30 – Реципрочна полара круга у односу круга као директрисе
– 31 – Аналитички доказ да је реципрочна полара круга у односу круга ~~[illegible]~~ увек један од коничних пресека.
– 32 – Оскулаторни кругови у одговарајуће тачке на реципрочној полари у ∞
– 33 – Утврђивање ~~[illegible]~~ испитивања особина реципрочних полара, кад је центар директрисе круга.

———— . ————

Примедба. У раду сам се служио овим скраћењима. Једначину бележио сам често са једн. Конични пресек обележавао сам са КВ; координате са коор; праволинеарне и правоугле са прав. и тангенту са tg. Друга се скраћења могу лако из самог рада видети.
Све што сам радио у односу Cartesi-јевих коор. односи се на правоугли координатни систем.

———— . ————

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ.

I део.

О полу и полари код алгебарских линија другог степена. (2°)

1. глава

О полари једне тачке

§ 1. Све криве алгебарске 2° дају се представити једначином 2° између двеју променљивих x и y:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 \quad \ldots\ldots \quad (1$$

Једначина 1. представља нам однос између Cartesi-евих координата једне тачке криве. Према овоме од односа сачинитеља саме једначине зависи облик криве 2°, и он може бити у облику: елипсе, круга, хиперболе и параболе. или у облику двеју правих линија, што је случај кад се једначина 1. распада на 2 сачинитеља 1° по x и y.

Према овоме испитујући поларне особине једне тачке у односу криве чија је једначина 1., ми ћемо моћи пренети на све специјалне случајеве исте криве, т.ј. на криве 2° које нам крива 1 може дати.

— 2 — Ако је дата једна тачка ван криве S 2°, која је дата једначином 1, па одатле из ове тачке повучемо неколико зракова OA_1B_1, OA_2B_2 и т.д. и одатле линија (p) која је геометријско место свију четвртих хармонијских тачака M' M'' у односу дате тачке O и двеју пресечних тачака сваког зрака из O и криве (, зове се полара тачке O у односу криве (. (слика 1)

Код кривих другог степена ова је полара права линија; о чему се можемо најбоље уверити овако:

Узмимо неку тачку O почетак коорд. сис. Нека једначина криве S је једнач. под (1 у § 1

Ако означимо са $y=Mx$ $\ldots\ldots$ 2

једначину ма ког зрака из O, онда нам једначина:

$$(A+BM^2+2CM)x^2+2(D+EM)x+F=0 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

која се добија заменом y из 2 у 1, даје апсцисе пресечних тачака зрака, који је представљен једначином 2 и блока 1).

Ако из познатог правила о хармонијским тачкама имамо једначину:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x} \quad \ldots\ldots \quad 4$$

где нам x_1 и x_2 значе апсцисе тачака пресечних између блока 1 и линије 2 а x представља апсцису 4. хармонијске тачке на линији 2.

Из једнач. 4 имамо

$$x = x_1 x_2 : \frac{x_1+x_2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 5$$

С обзиром на значај $x_1 x_2$ и x_1+x_2, виђеног из једначине 3 имамо да једначина 5 добија овај облик:

$$x = -\frac{F}{D+EM} \quad \ldots\ldots \quad 6$$

Из једначине 6 и 2 елиминацијом M ми карактеришемо само један зрак и према томе и једну хармонијску тачку, добијамо једначину линије свих четвртих хармонијских тачака, или једначину поларе тачке O и она је облика

$$xD+yE+F=0 \quad \ldots\ldots \quad 7$$

Линија из 7 зове се права по x и y; према томе је доказано да је полара једне тачке O у односу блока 1 права линија.

— 3 — Облик поларе постаје другојачији, ако се тачка O не налази у почетку коор. система.

Тако ако означимо коор. тачке O са $x'y'$ једначина блока S нека је дата општом једначином 1, онда ћемо до једначине поларе тачке O доћи овако.

Пренесимо коор. систем чији је почетак на оке у равни, и одредимо се x' и y' коор. тачке O, онда су трансформационе једначине $x=\xi+x'$, $y=\eta+y'$, где нам ξ и η представљају координате тачака односно оба другог система.

Једначина блока S у односу оба другог система добија се заменом x и y са $\xi+x'$ и $\eta+y'$ у једнач. 1, кад се ово изврши имамо за једначину блока S:

$$A\xi^2+B\eta^2+2(Ax_1+Cy_1+D)\xi+2(Cx_1+By_1+E)\eta+Ax_1^2+By_1^2+2Cx_1y_1+2Dx_1+2Ey_1+F=0 \quad \ldots\ldots \quad 8$$

Полара тачке O односно блока 8 у 3 на основу 7 у 3. 2 је:

$$(Ax_1+Cy_1+D)\xi+(Cx_1+By_1+E)\eta+Ax_1^2+By_1^2+2Cx_1y_1+2Dx_1+2Ey_1+F=0.$$

Ако се вратимо старом коорд.-систему онда су трансформационе формуле $\xi = x - x_1 \quad \eta = y - y_1$

Заменом ових вредности у једнач. 2 и свађањем добијамо за једначину поларе тачке O чије су коорд. $x'y'$ ову једнач.

$$(Ax_1 + Cy_1 + D)x + (Cx_1 + By_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \ \dots \qquad 3$$

или ако се једнач. ова напише у облику:

$$(Ax + Cy + D)x' + (Cx + By + E)y' + Dx + Ey + F = 0 \ \dots \qquad 4$$

Ако означимо једнач. под 1. у § са $F(xyz)$, пошто смо у њој заменили x и y са $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$ — т.ј. начинили је хомогеном, и означимо са F'_x, F'_y, F'_z прве изводе ове функције по x y и z; онда се једначине под 3 и 4 претварају у ове две једначине:

$$F'_x x' + F'_y y' + F'_z z' = 0 \quad \text{или} \quad F'_{x'} x + F'_{y'} y + F'_{z'} z = 0 \ \dots \qquad 5$$

Последња једначина под 5 $F'_{x'} \dots$ значи исто што и $F'_x \dots$ само што је $x\,y\,z$ у њима замењено са $x'\,y'\,z' \dots$

— 4 — Ако се тачка $x'y'z'$ налази на криви, онда нам једначина њезине поларе под 5 ($\xi\eta$) представља тангенту у тој тачки кривој. Но да ово одиста тако мора и бити уверавамо се из овога. Ако замислимо да нам O у слици 1. падне на криву S — (слика 2), онда зраци који из O пролазе не секу више криву у две тачке већ само у једној; и ми сад имамо за геометријско место оних четвртих хармонијских тачака, које су хармонички двема тачкама у O и једној од пресечних тачака зракова из O и криве S. Но у овом последњем случају све четврте хармонијске тачке падају у O и према томе полара одиста мора бити тангента. Но да доиста четврта хармонијска тачка мора падати у тачку у којој се поклапају две тачке односно којих се тражи четврта хармонијска увиђавно је из тога што X мора бити равно x_1 или x_2 за случај кад је $x_1 = x_2$ — из једнач. под 5. § 2.

— § 5 — Ако из једне тачке O повучемо на криву S 2 тангенте (tg), онда права која спаја додирне тачке њихове, полара је тачке O.

Ово излази као нужна последица § 2, јер у тачкама R и Q су и четврте хармонијске тачке које одговарају пресечним тачкама зрака a и b, а то је зато што се поклапају пресечне тачке зракова a и b пошто су они tg из O. Но ево и аналитичког доказа овоме. (сл 3)

Нека је $F(xyz) = 0$ једначина криве S у хомогеним коорд.; нека су коорд. додирне тачке R ξ и η; коорд. тачке O са x, y, означимо.

Одредба ξ и η биће из ових двеју једначина:

$$F(\xi\eta\zeta) = 0 \quad \text{и} \quad \xi F'_{x_1} + \eta F'_{y_1} + \zeta F'_{z_1} = 0$$; које постоје зато што се $\xi\eta$ налази на криви [illegible] што је tg у $\xi\eta$ пролази кроз $x'y'$.

Кад ово узмем онда знам да се K и Q налазе у пресеку линија представљених следећим двема једначинама. Ако се загледа у њих увиђа се да нам оне представљају брак S и поларну тачке O. Према овоме наше је тврђење доказано.

-6- ~~Ради доцније ради~~ нужно је да се упознамо са об[ликом] поларе у трилинеарним координатама.

Једначина брака 2° дата је у овим координатама овим, типом:

$$S = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0 \; \ldots \; 1$$

Да би нашли поларну претпоставимо тангенту у једној тачци $\alpha'\beta'\gamma'$ на самом браку, а до ње ћемо доћи овако, ако узимамо да се тачке M и M' на сечици m поклапају у тачци M или M'. Тај се услов добија овако. (слика 4)

Ако у једначину бр 1 ставимо у место $\alpha \beta$ и γ коорд. тачке M $l\alpha'+m\alpha''$, $l\beta'+m\beta''$, $l\gamma'+m\gamma''$; где нам $\alpha'\beta'\gamma'$ и $\alpha''\beta''\gamma''$ дају коорд. двеју тач. A и B на сечици m. Онда ћемо резултат супституције написати ово:

$$l^2 S' + 2lm P + m^2 S'' = 0 \; \ldots \; 2$$

Услов да се A поклапа са M једначина бр 2. даје:

$$2lP + mS'' = 0 \; \ldots \; 3$$

Из ове последње једначине одређујемо коорд. тачке M, но да су координате тачке M' једнаке коорд. тачке M или тачке A која се поклапа са M мора се ово узети у обзир да је

$$P = 0.$$

И у овом последњем случају сечица m постаје тангента у $M(\alpha'\beta'\gamma')$ и једначина $P=0$ није ништа друго до тангента у тачци $(\alpha'\beta'\gamma')$, и према овом

$$P = a\alpha''\alpha' + b\beta''\beta' + c\gamma'\gamma'' + f(\beta''\gamma'+\beta'\gamma'') + g(\gamma'\alpha''+\alpha'\gamma'') + h(\alpha'\beta''+\alpha''\beta') = 0$$

што сам ја краткоће ради у 2 означио са P показује односе између коорд. додирне тачке M и коорд. ма које тачке $B(\alpha''\beta''\gamma'')$ на тангенти; и апстрахујући од вредности $\alpha''\beta''\gamma''$ ми имамо за једначину тангенте у $(\alpha'\beta'\gamma')$ ову једначину:

$$a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' + f(\beta'\gamma+\gamma'\beta) + g(\gamma'\alpha+\gamma\alpha') + h(\alpha'\beta+\beta'\alpha) = 0 \ldots$$

Ако овде означимо изводе по α β и γ функције бр 1, са S_1, S_2, S_3 онда се једнач. бр 4 може овако написати:

$$\alpha' S_1 + \beta' S_2 + \gamma' S_3 = 0 \text{ или } \alpha S_1' + \beta S_2' + \gamma S_3' = 0 \; \ldots \; 5$$

где нам $S_1'\,S_2'\,S_3'$ значе исто и $S_1\,S_2\,S_3$ само што су $\alpha\,\beta$ и γ у њима замењени са $\alpha'\beta'\gamma'$.

+. S' S'' P су скраћени изрази у извршеној супституцији.

На основу § 4 једначина се под 4 може сматрати као поларна тачке које су коорд. $\alpha'\beta'\gamma'$.

Ако сад будемо посматрали поларе тачака које су координате $\alpha=\beta=0$, $\alpha=\gamma=0$, $\beta=\gamma=0$, онда ћемо видети из једначина под 5, да су оне S_3, S_2, S_1. Пошто су пак ове тачке темена основног троугла то одуда изводимо правило:
Поларе темена основног троугла равне су првим изводима једначине 126 по ~~одг~~ супротној страни.

-7- <u>Једначина</u> 126 може бити дата у овом облику:

$$LM = K^2 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

где нам L M и K представљају тангенте из P на влак S а K тетиву контакта ових тангената. (слика 5).

Кад сад будемо тражили полару тачке $x'y'$ односно влака S по § 3. онда добијамо за једначину поларе ово:

$$ML' - 2KK' + LM' = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

где нам $L'K'M'$ значе што и $M\,L\,K$ у једначине 1° по $x\,y$ само што је у њима x и y замењено са $x'y'$.

-8- <u>Да видимо шта</u> бива са поларом једне тачке P у случају кад се влак. 2° распада на две праве X Y: сл. 6.

За ту нам геометријско место свију тачака M на ту доказаћемо да је то полара тачке P у овом случају; узимајући у овом случају O за почетак коорд. система а X и Y са коорд. осе.

Нека су коорд. тачке P $x'y'$ то је онда једнач. буди које праве PA

$$y - y_1 = a(x - x_1) \quad \ldots \quad 1$$

једнач. праве PC је

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots \quad 2$$

Ако сад из једначина 1 и 2 одредимо коорд. тачака $A\,B\,C$ и D и из њих сакупимо једначине правих AD и BC, онда ту за једначину праве што пролази кроз њихов пресек добићемо једначину:

$$y_1 X + x_1 Y = 0 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Ово је једначина праве што пролази кроз M и кроз O јер је задовољена и коорд. $x=y=0$.

Ако посматрамо полару тачке $x'y'$ у односу влака $XY=0$ по § 3. наћићемо за једначину поларе једначину под (3). од куда изводимо да је полара тачке P у овом случају геометријско место тачака M.

— 9 — Јошише узео ако се брак 2° распада на две праве чије су једначине

$$\alpha = lx+my+n \qquad \beta = l'x+m'y+n' \quad \ldots \quad 1$$

онда права чија нам представља полару једне тачке $x'y'$ пролази кроз пресек правих (1); јер је њена полара 3

$$X_1(l\beta+l'\alpha)+Y_1(m\beta+m'\alpha)+Z'(n\beta+n'\alpha) \quad \ldots \quad 2$$

или за $Z=1$

$$(lx_1+my_1+n)\beta+\alpha(l'x_1+m'y_1+n')=0$$

Но ако означимо изразе у заградама ове две једначине са α' и β' имамо за једначину поларе тачке $x'y'$

$$\alpha'\beta+\alpha\beta'=0 \quad \ldots \quad 3$$

— 10 — Знак распознавања да се један брак 2° распада на 2 саставна — т.ј. на 2 праве, јесте о вредности њихове дискриминанте.

Тако ако је брак дат овом једначином:

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2h\alpha\beta+2g\alpha\gamma+2f\beta\gamma=0 \quad \ldots \quad 1$$

њихова је дискриминанта Δ

$$\Delta = abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 \quad \ldots \quad 2$$

и ако је $\Delta=0$ онда се једначина 1 распада на 2 саставна 1° по $\alpha\beta\gamma$ и брак 2° распада се онда на 2 праве.

Но с обзиром на једначину 2, која је детерминанта ових израза:

$$S_1 = a\alpha+h\beta+g\gamma$$
$$S_2 = h\alpha+b\beta+f\gamma \quad \ldots \quad 3$$
$$S_3 = g\alpha+f\beta+c\gamma$$

који су поларе темена основног троугла, можемо извести да за случај кад се ове поларе секу у једној тачки, онда се брак 2° распада на две праве; јер је детерминанта израза под 3 равна нули у том случају.

Друга глава

О полу једне праве

-11.- Ми смо у 32. видели да једна тачка има само једну поляру, према овоме ако је дата једна права на њој се тражи пол онда ћемо наћи само једну тачку која одговара датој правој као пол. Ово ће се овом месту моћи аналитички изведене једначине пола, кад нам је дата права.

(слика 7) Нека је једначина праве p, чији пол тражимо

$$Ux+Vy+W=0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Означимо са $x'y'$ координате траженог пола P

Овим задовољен Онда по § 3 где је права p поларе тачке x, y, мора бити испуњен овај услов

$$xF'_{x_1}+yF'_{y_1}+zF'_{z_1}=0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Где нам $F(xy)=0$ значи једначину криве s, а F'_{x_1} …… имају исто значење као што смо казали у § 3.

На основу ових једначина 1 и 2 су једначине исте праве, према томе коефицијенти њихових координата x y и z морају бити пропорционални међу собом, или однос њихов …

Да би ово изведено аналитички исказали, напишемо једначину 1 први хомогеном, па онда добијамо:

$$\frac{F'_{x_1}}{U}=\frac{F'_{y_1}}{V}=\frac{F'_{z_1}}{W}=\frac{2}{\lambda} \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Из једначине 3 можемо увек лако одредити x' и y' јер су њихове вредности алгебарске функције првог степена по x и y, јер су нам $F'_{x_1}, F'_{y_1}, F'_{z_1}$, први изводи једначине 2°.

Из једначине 3 и једначине 2 § 3. имамо:

$$\lambda(Ax_1+Cy_1+D)=U$$
$$\lambda(By_1+Cx_1+E)=V \quad \ldots\ldots \quad 4$$
$$\lambda(Dx_1+Ey_1+F)=W$$

Из једначине под 4 лако се израчунавају вредности x_1 и y_1 и оне су

$$x_1=\frac{au+bv+dw}{du+ev+fw}$$

$$y_1=\frac{bu+cv+ew}{du+ev+fw} \quad \ldots\ldots \quad 5$$

или кад се развије детерминанта система у, која смо скраћено ради означили са abc ..., онда за x и y имамо

$$x' = \frac{v(CF - DE) + w(BD - EC) + u(E^2 - BF)}{v(AE - CD) + w(C^2 - AB) + u(BD - CE)}$$

$$y' = \frac{v(AF - D^2) + w(BD - AE) + u(ED - CF)}{v(AE - CD) + w(C^2 - AB) + u(BD - CE)} \quad \ldots \quad 6$$

Примедба. Једначине под 5 су написане на овај начин. У једначинама под 4. сматране су за непознате λx, λy и λ и оне се одређују по познатом решавању линеарних једначина. Добија се одговарајуће:

$$\Delta\lambda x_1 = au + bv + dw$$
$$\Delta\lambda y_1 = du + ev + ew \quad \ldots \quad 7$$
$$\Delta\lambda = du + ev + fw$$

Према овоме да би имали сталне и коначне вредности за x' и y', нужно је да је Δ детерминанта система једначина брака 5 различна од нуле, а поред тога да је именитељ једначина у 7 такође различан од нуле. Ако је у случају имамо за x' и y' извесне вредности. Тако нам једначине 6 кажу да су вредности x' и y' независне од детерминанте система једначина, т.ј. пол извесне праве остаје у случају кад се брак S распада на две праве, а ако би права имала такав положај да је:

и у случају у ком да је у овом случају пол неодређен (§ 13)

$$du + ev + fw = 0 \quad \ldots \quad 8$$

Онда из једначина 5 видимо да су коорд. пола ∞. Што да видимо шта то онда значи.

Једначина се 8 може и овако написати

$$\frac{d}{f}u + \frac{e}{f}v + w = 0 \quad \ldots \quad 9,$$

која упоређена са једначином праве казује да права у овом случају пролази кроз једну тачку чије су коорд. (Из једначине 7 ово је права пол.)

$$x = \frac{d}{f}, \quad y = \frac{e}{f}.$$

Ове садржи на значај d f и e може се овако написати:

$$x = \frac{BD - CE}{C^2 - AB} \qquad y = \frac{AE - CD}{C^2 - AB}$$

а ово су координате (C) центра брака 2°. Отуда видимо извесно правилно, да је пол праве у кроз центар брака у ∞, као што би и одговарало полара центра пролази кроз ∞.

Ако има брака 2° којима центар лежи у ∞, онда је парабола. Код параболе је $C^2 = AB$, према томе је центар x y у ∞.

Једначина 9. може овако изгледати (у овом случају)

$$du + ev = 0 \quad ..$$

упоређена са једначином праве показује да је пол праве која је паралелна оси параболиној праве биће такође у ∞.

-12- Узмимо би сад доказивати да ако права p заузима положај тј на браку S, дуже права p' да, пол њен у додирној тачки ... P и брака S; или ако права p

Заузме вредност p'' да је онда свака тачка у пресеку усмерена у R и Q', и ј у тачци O. Све обе случајеве имали смо у звезди мало обе двеју, сада је довољна само напомена обеју кривих (сл. 7)

— 13 — Ако хомогене координате ~~тачке~~ једне тачке са $\alpha'\beta'\gamma'$ (тримнеарне коор.) и сматрамо тачку као пол праве $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$, онда се у помоћу обих ~~једнач.~~ образац с обзиром на § 6 и 12 налази да су координате пола

$$\Delta\alpha' = \lambda(bc-f^2)+\mu(fg-ch)+\nu(hf-bg)$$
$$\Delta\beta' = \lambda(fg-ch)+\mu(ca-g^2)+\nu(gh-af)$$
$$\Delta\gamma' = \lambda(hf-bg)+\mu(gh-af)+\nu(ab-h^2) \qquad \ldots\; c$$

За све вредности $\alpha'\beta'\gamma'$ дуне коначне упоредо да је $\Delta \gtrless 0$. За $\Delta=0$ $\alpha'\beta'\gamma'$ дуне су ~~као~~ неодређене ~~...~~ ~~праве ...~~. Δ мени и обе знам оно што смо расте сагледали. Ко с обзиром на § 10. $\Delta=0$ значи да се поларе тачака основног троугла пресецају у једној тачци, а ова је тачка пресечна тачка двеју линија на које се крива распада § 8, § 9.

У ~~§ 9~~ ... смо видели да је поларе тачке P одн. двеју линија, линија што иде кроз пресек $x.y.$ сл. 6; према обоме и у поларе свих тачака на једној правој, линија иде кроз пресек двеју правих на које се крива распада. На основу овога пол једне праве дуне су свакоја у ... пресеку, ... у томе су пресеку двеју ... и свих двеју правих у ... / ... Према обоме и одавде је ... да је пол праве у односу двеју правих линија неодређен.

Но да су ... ... правих у обоме случају неодређени, нити се у ... обадва.

Нека је у овом случају крива друге класе дата једначином:

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma)(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\gamma) = 0 \quad \ldots\ldots\quad e$$

Кад се оба разбије и сравне коефицијентима обих крива с правом коефицијентима крива 1 у § 6, онда ће се лако увидети да ~~с~~ коначне $\alpha_1\ \beta_1$ и γ_1 из једначине од 1. јавиће у облику $\frac{0}{0}$, што је знак неодређености у аналитичкој геометрији.

Из једначине 1 увиђа се да ако права $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ пролази кроз ~~коор.~~ ~~тачке~~ дотичне коничне крива онда је, по § 12

$$\Delta\gamma' = 0 .$$ Коор. пола такве праве су $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}=\frac{N}{0}$ $\frac{\beta'}{\gamma'}=\frac{M}{0}$ дакле ∞. као што смо већ били видели у 12 §.

Но нама је намера дуне да изложено сиже, ... између једначине пола и једначине поларе, што смо с обзиром на тримнеарне коор. извели, а не изводећи обих ... до којих смо ...

- 10

-14- Коефицијенте λ, μ и ν у једначинама 1 (Б13) може означити са A, B, C, F, и т. д., јер та ова једначине могу нам дају координате пола праве $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ написати овако:

$$A\lambda+H\mu+G\nu, \quad H\lambda+B\mu+F\nu, \quad G\lambda+F\mu+C\nu, \ldots$$

A, H, G, B и т. д. нису ништа друго до коефицијенти једначине:

$$A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2+2F\nu\mu+2G\nu\lambda+2H\lambda\mu=0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Једначина 2, добија се из услова да је права 1 на вези који је дат једначином 1 у § 6, и ако се иста једначина 2 означи словом Σ, онда су једначине под 3 сразмерне изводима које ћемо означити са Σ_1, Σ_2, Σ_3; где ћемо Σ_1 знач[ити] извод њене функције по λ, Σ_2 по μ, Σ_3 по ν.

Према овоме као што смо у § 6 нашли да је поларна тачке α', β', γ'

$$\alpha S'_1+\beta S'_2+\gamma S'_3=0 \ldots$$

имамо исто тако сад услов да права $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ пролази кроз пол праве $\lambda'\alpha+\mu'\beta+\nu'\gamma=0$ овај:

$$\lambda\Sigma'_1+\mu\Sigma'_2+\nu\Sigma'_3=0 \;\ldots\ldots \quad 4$$

Једначина 4 није ништа друго до тангенцијална једначина пола $\alpha'\beta'\gamma'$ јер се такве једначине добијају из услова да је каква права $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ задовољена коорд. тачке $\alpha=\alpha'$ $\beta=\beta'$ $\gamma=\gamma'$ које су сада означене Σ'_1 Σ'_2 Σ'_3.

На исти би начин нашли да је тангенцијална једначина пола праве $\lambda'\alpha+\mu'\beta+\nu'\gamma=0$, из услова да $\lambda\alpha+\mu\beta+$ пролази кроз пол праве $\lambda'\alpha+\mu'\beta+\nu'\gamma$, а то је

$$\lambda'\Sigma_1+\mu'\Sigma_2+\nu'\Sigma_3=0$$

$\Sigma'_1, \Sigma'_2 \ldots$ значе оно што и Σ, само што су λ, μ и ν замењени са λ', μ', ν'.

— Примедба. У тангенцијалним коорд. као што се и из овог примера види права је увек дата својим координатама λ, μ и ν, а тачка једначином облика $\lambda a+\mu b+\nu c=0$, која се добија кад се у једначину праве $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ ставе у место α, β и γ a, b и c, што су координате извесне тачке кроз коју права λ, μ, ν пролази. λ, μ, ν коефицијентом једн. праве зову се тангенцијалне координате. Ми ћемо се и доцније сусретати са облицима једначина у тангенцијалним координатама, нарочито у одсеку о реципрочним поларама.

Трећа глава

О полу и полари код конусних пресека

§ 15. У првом § ми смо казали да једначина 2° реда претставља све линије 2°, које се у аналитичкој геометрији зову још и конусни пресеци (КП). Да би ово што смо довде изнели о полу и полари лакше применили на поједине линије видећемо какве нам изгледају линије другог степена, које нам једначина 1. претставља.

Једначина под 1. претставља круг под овакиим условима $A = B = 1$ $C = 0$. Према томе је једначина круга из 1.

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Само што међу коефицијентима D E и F нема никаквог и извесног односа, која се добија из услова да је једначина

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

једнака са једначином 1.

Из ових услова одређено α, β и r као функције од D E и F знаћемо коорд. центра круга $(\alpha\beta)$ и полупречник његов. Ако дакле у једнач. 1 § 1 означимо са $D=-\alpha$ са $E=-\beta$, онда је $F=\alpha^2+\beta^2-r^2$, или ако се са D и E означе коор. центра круга, онда је $F=D^2+E^2-r^2$. или полупречник круга 1 се добија из једначине $r^2=F-(D^2+E^2)$.

Померањем коор. система, тако да $\alpha=\beta=0$ т.ј. да је центар круга у почетку коорд. сист., добијамо једначину 2 у облику

$$x^2+y^2=r^2 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Једначине елипсе и хиперболе, добијају се у простијем облику из јед. општег 2°, ако се њихове једначине изведу одношено коор. система чији је почетак у центру симетрије, а ако су осе x и y система коор. дају коњуговане пречнике. Тако да за елипсу и хиперболу имамо ове једначине

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}=1$$

где + важи за елипсу − за хиперболу. a је оса елипсе (хиперболе) у правцу x, b у правцу y осе.

Једначина параболе односно коор. система у њеном темену је

$$y^2 = px$$

где је p звани параметар параболом и он је ~~равен 4m, где је m = a − √(a² − b²)~~, ~~одстојање жиже од темена~~

Уопштењу аналитику и ...

-16- По § 3 поларе једне тачке $x'y'$ односно обих кривих су

$$xx' + yy' = r^2 \quad \ldots \quad 1$$

За круг

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad 2$$

За елипсу (+) и за хиперболу (−)

$$2yy' = p(x + x') \quad \ldots \quad 3$$

За параболу.

-17- Полови једне праве $ux + vy + w = 0$ ... (a) односно обих кривих су по § 13 и 14 ови

$$x_1 = -\frac{ur^2}{w}, \quad y_1 = -\frac{vr^2}{w} \quad \ldots \quad 1$$

код круга.

$$x_1 = \frac{ub^2}{w} \qquad y_1 = \frac{\pm v a^2}{w} \quad \ldots \quad 2$$

За елипсу и хиперболу, са истим оправданим односно знакова + и −, као и горе.

Код параболе имамо да су координате пола $x_1 y_1$ праве a

$$x_1 = \frac{w}{u} \qquad y_1 = \frac{vp - 2w}{2u} \quad \ldots \quad 3$$

Ми бисмо били у стању сад извести многе од поменутих особина у горњим наставама, но то је врло опширно и свешћемо се само у заслабљу у нешто образце.

Ако сад запишемо да нам једначине под 1. 2 и 3 у § 16. представљају тангенте на дотичним кривама онда су 1. 2 и 3 у § 17. координате додирних тачака. Према истом све особине које се односе на тангенте, важе и за поларе.

-18- <u>За све конусне пресеке</u> (Кб) имамо ове пети односе пола и поларе:

Ако се из ма које тачке ρ (слика 8) повуку праве ρa, ρb ... итд, онда ће у пресечним тачкама тих праваца секу се на полари тачке ρ односно праве S (48)

2.) Или хармонијско место пресечних тачака тих тангената[1,2] је хармонијско место 4. хармонијских тачака тачке ρ у односу пресечних тачака aa', bb', cc' итд.

-3- Тачке пресека правих ab и a'b', и ab, и a'b' леже на истој правој. (48)

Ако је ~~дата~~ права p на којој се тражи пол, онда свака из ових дате на којих тачака повући по две тангенте, и одредити тим тачкама четврте хармонијске ~~тачке~~ праве у ~~односу~~ правој p односно тангената из тачака (7.7) праве p, у њиховом пресеку лежи пол O праве p. (сл. 9)

Ове су две правила реципрочна, јер тачки O у слици 9 одговара права g у слици 8, правој p у слици 9 одговара тачка ρ у слици 8. Четвороуглу aa'bb' сл. 8 одговара четворострани из правих 1.2.3.4 сл. 9.

Ово је све изведено на основу већ доказаних теорема у пројективним правилима, и из њих може ... бити у конструкцији поларе једној тачки, и обратно полове ... у руци. У следећем параграфу доказаћемо како се може аналитички конструисати полара једне тачке код Кб.

-19- <u>Из једначине 1. § 16</u> имамо да је полара круга

$XX'+YY'=2^2$ што је права m на слици 10. Тражимо да је пол у тачки A чије координате $X'Y'$.

За аналитичку конструкцију праве m, треба нам знати одсечке OD и OE на X и Y оси.

Из једначине праве m налазимо да су они:

$$OD=\frac{r^2}{x_1} \qquad OE=\frac{r^2}{y_1}$$

То су такви одсечци, да је средња геометријска пропорционала између њих и одговарајућих координата пола. Слике 10 и 11 показују нам ову конструкцију за положаје пола A у кругу и ван круга. Из истих слика је јасно да је четврта хармонијска тачка O'' тачке A у односу тачака O' и O'''.

Из једначина под 2 § 16, јасно је да се исти одсечци поларе p тачке A ~~добијају~~ равни

$$OD=\mp\frac{a^2}{x_1}, \qquad OE=\pm\frac{b^2}{x_1}$$

код елипсе и хиперболе. Слика 12 показује јасно конструкцију p тачке P ван елипсе. Код хиперболе се налази на слици ... Слика 12а показује конструкцију поларе p за случај кад је A у елипси.

Из § 16 једначина је параболине тангенте

$$2yy_1 = p(x + x_1)$$

Одсечци њене тангенте су на Y и X оси

$$OD = \frac{px_1}{2y_1} \qquad OE = -x_1$$

Конструкција је њихова врло лака, кад се сетимо за обих израза. p је на слици $4\,OF$. OM је код параболе равно OF, јер је M директриса параболе S. Конструкција тангенте може се одредбе одсечком на Y. оси, пошто се из једначине 1. врло лако увиђа конструкција одсечка OE на X оси.

Конструкција се OD. оснива на овој једначини.

$$OD \cdot Y_1 = FM \cdot X_1 \qquad \text{јер је } \frac{p}{2} = MF$$

Ставимо $OD \cdot y_1 = FM\,x_1 = R^2$ и одредимо R^2

R^2 је представљено дужином AK, пошто смо из A спустили FM и описали над OK круг.

Из једначине $OD = \frac{R^2}{y_1}$ изводимо да је OD равно дужини AD' и према овоме тангента тачке B је ... p сл. 13.

Као што се види из саме конструкције тангента ... сечи дијаметрале параболе S, то зовемо као и код круга. Конструкција тачке A према параболи S

Четврта глава

О односима пола према полари код алгебарских линија другог степена. (2°).

-20- Ако пол једне праве лежи на извесној правој онда полара тог пола, мора пролазити кроз пол те праве.

Ако нам је дата каква тачка $P(x_1 y_1)$ која се налази на правој a, онда полара p тачке P мора пролазити кроз тачку A, што нам представља пол праве a.

Једначина поларе тачке P је

$$(Ax_1+Cy_1+D)x+(Cx_1+By_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad \dots \quad 1$$

Ако на овој правој (P) узмемо једну тачку $A(x''y'')$ онда једначина 1 мора бити задовољена њеним координатама. Кад ову супституцију извршимо и једначину средимо онда ће 1/ изгледати овако:

$$(Ax''+Cy''+D)x'+(Cx''+By''+E)y'+Dx''+Ey''+F=0 \quad \dots \quad 2$$

Једначина 2 је полара тачке A у којој су замењене непознате $x\ y$ са $x'y'$, што је знак да она пролази кроз тачку P чије су координате x' и y'. (слика 14)

-20a- На основу овога правила изводимо да је полара тачке пресека двеју линија, она права што спаја полове тих пресечних правих.

Тако из исте слике имамо да је полара тачке M права m, што спаја полове правих a и b, тачке M' и M''.

Исто је тако пол једне праве у пресеку полара двеју тачака исте праве.

-21- Ако су у слици 15 тачке P, Q и R такве тачке да полара једне од њих пролази кроз другу тачку, онда се такве тачке називају конјугованим или по Poncelét-у тачкама реципрочним.

Две пак праве a и b које су такве да се пол једне ~~од њих~~ налази на другој зову се конјугованим правама (или реципрочним).

У једначини 2° [§20] показан је услов, који мора постојати између главних тачака $x'y'$ и $x''y''$, па да су оне конјуговане у односу брака 2°.

Услов да су две праве a и b конјуговане добићемо на овај начин.

Нека су [illegible] једначине истих правих

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0 \ldots (a \quad \text{и} \quad \lambda'\alpha+\mu'\beta+\nu'\gamma \ldots (b$$

Да су обе две праве конјуговане у односу брака другог степена, мора бити [?] једначину означену са 1 у §6, бива да се пол једне праве налази на другој.

У §14. казали смо да су коорд. [illegible] једне праве облика једначине под 1 $\Sigma_1; \Sigma_2, \Sigma_3$ или [illegible] Σ_1' Σ_2' Σ_3' по

праве b — Према томе аналитички исказан услов о конјуговању правих мора изгледати овако:

$$\lambda'\Sigma_1+\mu'\Sigma_2+\nu'\Sigma_3=0 \quad \text{и} \quad \lambda\Sigma_1'+\mu\Sigma_2'+\nu\Sigma_3'=0$$

Према облику Σ који смо ми извели у §14. можемо рећи да је он резултанта, или резултат елиминације $\alpha'\beta'\gamma'$ и ρ из ових једначина:

$$a\alpha'+h\beta'+g\gamma'+\rho\lambda=0 \qquad h\alpha'+b\beta'+f\gamma'+\rho\mu=0$$
$$g\alpha'+f\beta'+c\gamma'+\rho\nu=0 \qquad \lambda\alpha'+\mu\beta'+\nu\gamma'=0$$

За то се Σ може представити детерминантом овом

$$\begin{vmatrix} a & h & g & \lambda \\ h & b & f & \mu \\ g & f & c & \nu \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Ако би смо хтели испитати услов који треба да је испуњен па да x и y осе буду конјуговане [?] две конјуговане праве, онда би видели по показаном начину и нашли да је за то нужан овај однос између сачинитеља у једначини другог степена $hc=gf$ или обзиром на коефицијенте једначине 1 §1, треба да оне стоје $CF=DE$

Том [illegible] приметити да кад праве имају две конјуговане тачке [?] секу криву, онда се једна од обих тачака мора увек налазити ван брака, а једна у браку.

— 22 — Из слике 16 увиђавно је да су конјуговане тачке A и C или B и C хармонијски спрегнуте са тачкама пресека праве [illegible] и брака S т. ј. тачкама M и N; или тачкама R и Q.

Ако су сада на правој [illegible] $A'A''$, $B'B''$ и т. д. одређене конјуговане тачке

[illegible] једначина:

$ax^2+2hx+b=0$ дају [illegible] [illegible] [?] тачке од почетка O)

Онда је врло уочљива ствар да су те конјуговане тачке елементи такође низа, да ако будемо тражили тачци A' одговарајућу тачку на низу m да ћемо добити за одговарајућу тачку тој тачци тачку A'' која је њој конјугована; и обратно, ако тачци A' будемо тражили одговарајућу тачку онда ћемо доћи до тачке A'' као одговарајуће тачке тачци A' на истом низу. Овакав низ назива се инволуторан низ и он је дат једначином:

$$Axx' + H(x+x_1) + C = 0 \quad \ldots \quad 1$$

+ x и x' значе нам одстојања конјугованих тачака A' и A'' од тачке O.

која је симетрична по x и x', а потпуно одговара споменутим особинама конјугованих тачака.

Тачке M и N на низу m су двоструке тачке јер се оне поклапају са својим конјугованим тачкама. Према овоме можемо казати да се у инволуторном низу парови конјугованих тачака са двоструким тачкама образују четири хармонијске тачке.

На низу m парове конјугованих тачака A'A'' бирао је од тачке O као почетка, но ми то можемо учинити од једне тачке чија је конјугована у ∞, и која се зове центар низа инволуторног. Ту ћемо тачку овако наћи. Ако означимо са α ~~...~~ одстојање тражене тачке од O, онда се једначина (1) добија овакав облик:

$$A(x_1+\alpha)(x_1'+\alpha) + H(x_1+x_1'+2\alpha) + C = 0 \quad \ldots \quad 2$$

где нам сад x_1 и x_1' значи одстојање конјугованих тачака од новог почетка.

Ако се сад α тако одреди да је $H + A\alpha = 0$ онда из једначине 2 избацимо да је производ одстојања двеју конјугованих тачака од тог почетка сталан; а да је центар сад та тачка тачка чија је конјугована у ∞ уверава се овако. $x' = -\frac{Hx+C}{Ax+H}$ из једначине 1 за $x=\alpha$ $x' = -\frac{\alpha H + C}{A\alpha + H}$. Из због узетог $H + A\alpha = 0$ $x' = \infty$, а x' даје нам одстојање конјуговане тачке, тачци чије је одстојање од тачке O равно α.

Одредба центра инволуторног система тачака парова конјугованих тачака на пресечницима линија 2° доводи нас до центра истих линија.

-23- Анхармонијски однос четири тачака на једној правој или равни је анхармонијском односу њихових полара, или ових конјугованих тачака. Овај последњи последица је првог, јер поларе пролазе кроз конјуговане тачке.

Ако имамо четири тачке $l\alpha'+m\alpha''$ ...

$l'\alpha'+m'\alpha''$, $l'\beta'+m'\beta''$, $l'\gamma'+m'\gamma''$; $l''\alpha'+m''\alpha''$ ... ; $l'''\alpha'+m'''\alpha''$ ...

на правој која пролази кроз тачке чије су координате $\alpha'\beta'\gamma'$ и $\alpha''\beta''\gamma''$; онда су њихове поларе:

$$lP'+mP'';\ l'P'+m'P'';\ l''P'+m''P'';\ l'''P'+m'''P''.$$

Пошто анхармонијски однос код ових тачака и зависи од количина l и m то је одма увиђавно да су ови односи исти и код полара као и код њихових полова.

-24- Нека нам у слици ~~16~~ -15- a b и c представљају 3 конјуговане тачке+, онда је извесно да права која спаја две од њих, бити полара треће тачке, и да њихов размештај мора бити и да ако се једна од њих налази у кругу, 2 морају бити ван круга обратно.

Ма које од главних страна троугла abc су конјуговане према тој страни ab, ac и bc чине један систем конјугованих правих.

Из последње слике видимо да спајањем тачака A″Б″C″D″++ добијамо потпун четвороугао~~ник~~, а у пресеку четири тангената по две из C и B добијамо такође потпун четворострaник чија су темена A′, Б′, C′, D′. Дијагонале ових четвоространика се морају сећи у тачци A јер је то пол праве БC (§ 8). За сад осим од посматрања поларних особина код потпуног четвороугаоника и четвороугла, видећемо да ће тачке што леже у пресеку дијагонала, чине систем конјугованих тачака, а праве што их спајају чине систем конјугованих правих.+++

+. Тачке A, Б и C нађене су на основу § 8

++. A″Б″C″D″ добијају се у пресеку произвољних правих из C и Б са круг[illegible]

S. +++. Тачке A, Б и C леже у пресеку правих A″C″ и Б″D″ а то су дијагонале потпуног четвороугла A″Б″C″D″, Б и C леже у пресеку C″D″, Б″A″ и C″Б″ D″A″ а то остале дијагонале истог четвороугла. Троугао AБC зове се дијагоналним. [illegible] су пресеку темена систем групу конјугованих тачака, јер је према односу тачка S (респективно односу правих Б″D″ и Б″C″) по § 8 права AБ [illegible] БC права AC, поларa A је БC. Ако би посматрали отисак потпуног четвор[illegible] — што се дијагонале зове потпуни четворострaник, онда би видели да су тачке [illegible] C тачке што леже у пресеку његових дијагонала. (слика 15)

Пета глава

О поларним и антиполарним троугловима код кругова 2°

-25- <u>Ако је дат круг 2° S</u> и троугао АБЦ, па нађемо поларе његових темена односно круга S, онда оне образују нов троугао $A_1B_1C_1$, који се зове поларни троугао првом троуглу. У новом су троуглу темена $A'B'C'$ полови страна АБЦ, ЦА и АБ. У случају да се поларе од А Б и Ц поклопе са БЦ, ЦА и АБ онда се та два поларна троугла зову автополарна. Таква су два троугла (троугли) чија су темена система конјугованих тачака (слика 16)

-26- <u>Код поларних троуглова имамо</u> ове две важне особине. Праве што спајају ~~стране~~ темена CC_1, AA_1, BB_1, секу се у једној тачци. Тако се исто и пресечне тачке одговарајућих страна ових двају троуглова $A'B'$ и AB, $A'C'$ и AC, $B'C'$ и BC налазе на једној правој p (слика 17). Тачка O зове се пол троугла а p оса троуглова.

Ако означимо координате тачака А Б и Ц са $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$ (сл. 17)

Поларе су тачака А, Б и Ц по показаном у § 3

$$x'F'_x + y'F'_y + z'F'_z = \alpha \quad \ldots \text{ полара } A.$$
$$x''F'_x + y''F'_y + z''F'_z = \beta \quad \ldots \quad B \qquad \ldots\ldots \quad 1$$
$$x'''F'_x + y'''F'_y + z'''F'_z = \gamma \quad \ldots \quad C.$$

Да би одредили праве AA_1, BB_1 и CC_1 важно се сетити да све праве пролазе кроз пресеке правих у једнач. 1 и тачке A, B и C.

Права AA' пролази кроз тачку $x'y'$ и тачку A' која лежи у пресеку β и γ (правих). Све праве које пролазе кроз пресек β и γ дају се представити једначином

$$\beta - k\gamma = 0 \quad \ldots \qquad 2$$

Права што пролази и кроз $x'y'$ добија се заменом k у 2 вредношћу $k = \frac{\beta'}{\gamma'}$, где смо са β' и γ' означили оно исто што и са β и γ само што су коор. xy у β и γ замењене коор. x' и y'; дакле једначина праве AA_1 је $\beta\gamma' - \gamma\beta' =$

Праве BB_1 и CC_1 добијају се на сличан начин и оне изгледају овако $\beta_1\gamma - \gamma_{11}\alpha = 0$ и $\gamma_{11}\alpha - \gamma_1\beta = 0$. γ_{11} је исто и γ само је $x\,y$ и z у γ замењено са $x''y''$.

Ове три једначине представљају три праве и види се на која од њих може извести као комбинација других двеју што је онда доказан први део ове теореме, а то је да се праве што спајају суседне темене у поларним троугловима, секу у једној тачци.

Други део ове је овако доказан.

Нека су поларе тачака А Б и Ц ове једначине

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax' + By' + C = 0 \quad Ax'' + By'' + C = 0$$

И како су А Б и Ц ... место $F(xyz) = 0$ по x, y и z.

Пресечне тачке (xy) између правих A_1B_1 и праве између темена $x'x''$ и $y'y''$ су:

$$x = \frac{(Ax'+By'+C)x'' - (Ax''+By''+C)x'}{(Ax'+By'+C) - (Ax''+By''+C)} = \frac{ax'' - bx'}{a-b}$$

$$2) \dots \quad y = \frac{(Ax_1+By_1+C)y'' - (Ax''+By''+C)y'}{(Ax_1+By_1+C) - (Ax''+By''+C)} = \frac{ay'' - by'}{a-b}$$

Као што смо нашли ~~тачке~~ пресечне тачке праве AB и A_1 тако би смо могли наћи и осталих одговарајућих правих и оне би биле овакве облике:

$$x_I = \frac{bx''' - cx''}{b-c}, \quad y_I = \frac{by''' - cy''}{b-c}$$

$$3. \dots \quad x_{II} = \frac{ax''' - cx'}{a-c} \quad y_{II} = \frac{ay''' - cy'}{a-c}$$

Овде смо означили са a и b из једначине под 2 ове вредности, са c смо такође овде означили: $Ax_{III} + By_{III} + C$.

Знак да пресечне тачке леже на једној правој за овај случај добићемо из облике ако праве које спајају пресек AA_1 и BB_1 буде исто са правом, која спаја AA_1 са CC_1, или исто са правом BB_1 и CC_1. Ако означимо угао што једна од обих двеју последњих правих заклапа са x осом са α, а угао оне праве према са α_1 онда другим речима услов да ове праве поклапају између обако, да је $tg\,\alpha = tg\,\alpha_1$ или да је $\alpha = \alpha_1$

Угаони сачинилац праве xy $x_{II}y_{II}$ је

$$M_1 = \frac{y_{II} - y}{x_{II} - x}$$

праве тачк. $x_{II}y_{II}$ и $x_I y_I$ је

$$M = \frac{y_{II} - y_I}{x_{II} - x_I}$$

Изразимо M_1 и M вредностима из једначина 2 и 3 налазимо да је $M = M_1$ или да је $\alpha = \alpha_1$ што је знак да пресеци свих правих сучелних леже на једној правој

одакле

$$M_1 = M = \frac{(a-b)(ay'''-cy') - (a-c)(ay''-by')}{(a-b)(ax'''-cx') - (a-c)(ax''-bx')} = \frac{(ay'''-cy')(b- \dots - (a-c)(by'''-cy'')}{(b-c)(ax''' \dots - (a-c)(bx'''-cx'')} = \frac{y'(b-c) + y''(c-a) + y'''(a-b)}{x'(b-c) + x''(c-a) + x'''(a-b)}$$

— 27 — Тачка пресека правих AA' BB' и CC' је на правој на којој леже пресечне тачке. О овоме нешто с доказом нађоше овако. (слика 18)

Нека је један од троуглова таквих основних троугао на пр. нека је то троугао ABC. Његове су стране α, β и γ. Поларе његових темена A, B и C су S_1 S_2 и S_3 $(3 \cdot 6)$, а то су једнаке стране $B'C_1$, C_1A' и B_1A_1, слика 19a.

Ако ми сад уврстимо у једначину која нам представља кв. S из онај трећи добивени коорд. темена троугла ABC, узевши сад мјесто од $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ једнаке нули и онда ће изгледати облика:

$$h\alpha\beta + g\alpha\gamma + f\beta\gamma = 0 \quad \dots\dots \qquad 1$$

По § 26. Коорд. тачке O - збирне пола троуглова ABC и A'B'C' у односу обе једначине су

$$\alpha = \frac{1}{gh} \qquad \beta = \frac{1}{hf} \qquad \gamma = \frac{1}{fg} \quad \dots\dots \qquad 3$$

у односу брака пак и § 6. биле би коор. исте тачке O.

$$\alpha = \frac{1}{gh - af} = \frac{1}{F}, \quad \beta = \frac{1}{hf - bg} = \frac{1}{G} \quad \gamma = \frac{1}{fg - ch} = \frac{1}{H} \quad \dots \qquad 4$$

Једначина праве која спаја пресечне тачке правих BC B'C', AC A'C' ... коју смо ми означили на слици 18. са p дакле је једначином:

$$hg\alpha + hf\beta + gf\gamma = 0 \quad \dots\dots \qquad 5$$

Да је сад једначина под 5 поларе тачке O види се кад ставимо једнач. под 3 можемо се врло лако уверити. Ми смо овде би ми могли доказати p. као поларе тачке O у односу на оба троуглова ABC и A'B'C, ... тачка ... да је полара тачке O у исто време њена збирна оса троуглова, а тачка O њен ... троуглова ABC и A'B'C'.

- 28 - Једначина брака 2° одређена на аутополарни троугао

гледиште са свим другојачије облика, на према облику и поларе.

Ако је аутополарни троугао основни троугао онда ћемо $S_3 = \gamma$ $S_2 = \beta$ $S_1 = \alpha$ ... коефицијенти $f = g = h = 0$, јер само тако може бити троугао аутополаран. Кад ове услове ставимо онда је једначина брака 2° облика са облика:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0 \quad \dots \qquad 1$$

полара једне тачке $\alpha'\beta'\gamma'$ је

$$a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' = 0 \quad \dots \qquad 2$$

- 29 - Два брака друге класе имају увек један заједнички аутополарни троугао

Слика 19. показује јасно да у случају кад брака S и S₁ имају 4 пресечне тачке ABCD онда постоји аутополарни троугао OEF. Ми ћемо сад испитати шта бива са истим троуглом кад су неке од тих тачака уображене.

Ако једначине брака S и S₁ одредимо на њихов заједнички аутополарни троугао, онда ће оне изгледати према § 28 облика:

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0 \qquad a_1\alpha^2 + b_1\beta^2 + c_1\gamma^2 = 0 \qquad 1$$

Кад једначина под 4. ~~изједначимо~~ означимо $\frac{\alpha}{\delta}$ и $\frac{\beta}{\delta}$ и т. д.) онда нам резултујућа једначина даје оне вредности за α, β и γ које уистини задовољавају обе једначине под 1. – даје нам другим речима коорд. ~~додирних~~ пресечних тачака ABCD између блака S и S'

Ако 4. корена ове резултујуће једначине могу бити изражени у некаку ~~датим~~ овим изразима:

$$x'+x''\sqrt{-1},\quad x'''+x^{IV}\sqrt{-1},\quad x'\mp x''\sqrt{-1},\quad x'''\mp x^{IV}\sqrt{-1} \quad \ldots \quad (2$$

Што ако је који једна група 4⁰ задовољена корена под 2 мора бити задовољена и корена вредности корена под 2 спрегнутим а ~~сп. корени~~; ако су корени једначине под 2. спрегнути, онда су вредности под 3 оне

$$y'-y''\sqrt{-1},\quad y'''-y^{IV}\sqrt{-1},\quad y'+y''\sqrt{-1},\quad y'''+y^{IV}\sqrt{-1} \quad \ldots \quad (3$$

Једначине под 2 и 3. дају нам коорд. тачака A B C и D знајући ових знамо и праве AC, AB, AD ... у чијим пресецима леже темена четвороугла автополарног OEF. Ако им одредимо праве AC, AB ... добићемо две само реалне с тим што оне што спајају тачке чији су коорд. $x'+x''\sqrt{-1}$, $y'+y''\sqrt{-1}$ са тачкама чији су коорд. $x'-x''\sqrt{-1}$, $y'-y''\sqrt{-1}$, остале праве биће имагинарне и представљене ће бити једначином облика:

$$L\pm M\sqrt{-1}=0 \quad L'\pm M'\sqrt{-1}=0 \quad \ldots \quad (4$$

Две реалне праве дају у своме пресеку увек једну реалну тачку, према томе известно је да је у овом случају једно теме четвороугла OEF увек реално. Но и у пресеку правих изражених под 2 морају бити реална теме а то је с тога, што изражењем коорд. пресечних тачака ~~—~~ правих које су дате једначинама под 4 итд. за координате тих тачака не налазимо уображене вредности већ опет реалне.

На основу овога можемо казати да автополарни четвороугао двају ~~блокова~~ S и S. у случају кад између њих нема пресека остаје као реалан, док ћемо мало час видети у другим специјалним случајевима ~~видети~~ да остаје по или као имагинарни, или као четвороугао чије је једно или ~~два~~ темена имагинарне.

других случај. Пресек између S и S_1 може бити дакле реалним и двема имагинарним тачкама. Спајањем ових двеју реалних или двеју имагинарних тачака имамо две реалне праве, спајањем реалне тачке са једном имагинарном добијамо имагинарне праве, а тих је свега 4. у овом случају. Према овоме јасно је да увек имамо пресек самих реалних правих, дакле реалних и имагинарних, према томе и један од њих мора бити реалан а остала две имагинарне.

Тако ако у слици 29. тачке A и B реалне и C и D имагинарне, онда су праве CD и AB реалне, остале праве BD и AC, BC и AD су имагинарне и сваки је теме E троугла OFE само реално а O и F су темена имагинарни.

Ако пак криве S и S_1 имају контакт у једној тачки A онда су B, C и D имагинарне, темена (којега) су све имагинарне, према томе је аутополарни троугао OEF имагинаран.

Ово што смо рекли о аутополарним троугловима односно крива S и S_1 важи и за систем кривих који пролазе кроз четири тачке $ABCD$ и који се дају представити једначином $S+kS_1=0$

-30- Примена инваријаната ~~и коваријаната~~ на аутополарне троуглове.

Ако са $S = ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ ... 1

и са $S' = a'x^2+b'y^2+c'z^2+2f'yz+2g'zx+2h'xy=0$ ... 2

означимо две криве онда се

$S+kS_1=0$ - систем кривих кроз четири тачке да представим врло лако комбиновањем горњих двеју једначина.

Ако са Δ и Δ' означимо дискриминанте кривих 1 и 2 онда је

3) ... $\Delta k^3+\Theta k^2+\Theta' k+\Delta'=0$ дискриминанта криве $S+kS_1=0$ која се добија на већ показани начин у § 10, или боље заменом a, b са $a+ka'$, $b+kb'$, ... у Δ.

~~Usrm~~ $\Theta=0$

Једначина од 3 даје нам вредности за k за које се крива $S+kS_1=0$ распада на две праве. Δ Δ' Θ и Θ' зову се инваријанте кривих S и S_1

Ако се сад узме један аутополарни троугао криве S за основни троугао, онда по § 28 једначина криве S постаје:

$ax^2+by^2+cz^2=0$ ... 4

дакле $f=g=h=0$

Инваријанта Θ је ~~...~~ $\Theta = bca'+cab'+abc'$ у овом случају и она је нула за $a'=b'=c'=0$ јер a, b и c су исто у реалним коефицијентима, и онда једначина криве S' изгледа

$f'yz+h'xy+g'zx=0$ ... 5

Једначина нам 5 представља криву S_1 описану око троугла чија су темена XYZ, јер је 5. задовољено координатама темена. Из једначине 4 закључујемо да је тај троугао аутополарни односно криве S

Према овоме инваријанта двеју конака S и S₁ $\Theta =$ знаци да је троугао уписан у S' автополарни ~~троугао~~ конику S

тумачила се ово стање изводи ... знаци инваријанта зависи од коорд. система.

Да смо узели за основни коорд. Θ ниште друго нула и том другом условима. Да смо узели за автополарни троугао у односу S', онда би по § 28

Онда $f' = g' = h' = 0$ а $\Theta = (bc-f^2)a' + (ca-g^2)b' + (ab-h^2)c'$.

и Θ је нула за $bc-f^2 = ca-g^2 = ab-h^2 = 0$. пошто су a' b' c' различити од нуле. Значи овако тело овако утврдили ако у једначини S заменимо прво x са нулом па y за ним z видећемо да ли $bc-f^2$ и т. д. значи услове да су X Y и Z стране автополарног троугла уписаног на конику S.

Дакле $\Theta = 0$ значи и ово, да је један описан троугао око конике S автополаран односно конике S₁.

Сличним резоновањем налази се да $\Theta' = 0$ значи да је могуће уписати у S автополарни троугао односно S' описан око S' автополарни троугао око S.

— 31 — Ако имамо две конике које су тако везане међу собом да је инваријанта $\Theta = 0$ онда ми пред собом у троуглу § знамо $\Theta = 0$ и ово

Ако имамо два поларна троугла у једном од њих онда су координате темена ... § 27

$$\frac{1}{F} \quad \frac{1}{G} \quad \text{и} \quad \frac{1}{H}$$

Једначина конике $S = ax^2 + by^2 + cz^2$ а једначина конике S' кад је $\Theta = 0$ је

$$S' = f'yz + g'zx + h'xy \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

или $S' = f'\frac{1}{x} + g'\frac{1}{y} + h'\frac{1}{z} \quad \ldots\ldots \quad (2)$

Заменом коорд. тачака у (2) имамо

$$Ff' + Gg' + Hh' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3) \text{ јер је } \Theta = 0$$

а $\Theta_j = (gh-af)f' + (hf-bg)g' + (fg-ch)h' \quad \ldots \quad (4)$

Одавде изводимо ово правило. Θ је равно нули и онда кад се ... троугла уписаног у S' односно S ... S', тако је ... два троугла односно S' описаног око S ... S. Ово се даје правило ... доказује.

— 32 — Кад су два троугла автополарна односно једне конике S' онда су 6 њихових темена темена једне конике, а њихових 6 тем. ... су тангенте друге конике.

Нека су стране једног од та два автополарна троугла X Y и Z и нека је тај троугао основни троугао

Кроз 5 тачака свих двају кругова можемо учинити да прође: пролази један брак 2°, кроз 3 једног круга и 2 тачке неког основног круга.

Пошто је тражени брак ортоген ако задовољава, то ако се означимо са S онда је инваријанта брака S и S' $\theta' = 0$ из § 30. или $a+b+c=0$. А пошто брак пролази кроз темена троугла XYZ то мора бити $a=b=0$; кад је ово случај онда (обзиром на горњу једначину) и $c=0$; дакле брак S пролази кроз свих 6 тачака – респективно темена свих аполарних кругова.

Други се део ове доказује на сличан начин обзиром на § 30.

-33- Квадрат централе из центра једног брака на круг ортоген ако аполарног круга је сталан и раван $\underline{\underline{a^2+b^2}}$ (ово је теорема Faure-ова)

Ово је врло лако доказати, ако је брак ортоген ако аполарни круг, онда инваријанта θ круга и брака S који је то круг аполарни је равна нули; трансформишући аналитички израз ове инваријанте, даје нам Faure-ову теорему

Ако означимо са

$a x^2 + b y^2 = a^2 b^2$ брак S, круг ако аполарни круг са $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$ онда је

$$\theta = \frac{1}{a^2 b^2}\left(\beta^2+\alpha^2-a^2-b^2-r^2\right) \ldots\ldots$$

$\theta = 0$ је $\beta^2+\alpha^2 = a^2+b^2+r^2$. Квадрат тј. из центра бракова је $(\alpha-0)^2+(\beta-0)^2-r^2=m^2$ а то је обзиром на горњу једначину $\underline{a^2+b^2=m^2}$

Уместо a и b су велика и мала оса брака, m тј. из центра бракова на круг ортоген ако круга аполарног, r полупречник круга; α и β коорд. центра кругова. Почетак коорд. система је у центру бракова X и Y оса у правцу велике и мале осе.

Ова се теорема може и овако исказати:

Сваки круг ортоген ако аполарног круга сече ортогонално круг који је геометријско место темена правих углова описаних око брака 2°

-34- Центри ортогоналних кругова у аполарном кругу односно равностране хиперболе је немају се на самом браку

Ово се добија из § 32. Кад се одреди θ' инваријанта брака S и круга сабрајући у S $a^2=-b^2$ за хиперболу тако ће добити равнострану хиперболу: (§ 31), па се θ' стави равно нули.

Кад нам је сад $\theta' = \dfrac{\alpha^2}{a^2} - \dfrac{\beta^2}{a^2} - 1 - r^2\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}\right) = 0$

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2 \ldots\ldots\ldots$$

Једначина, у којој да се α β . . . налазимо на равностраној хиперболи . . .

Шеста глава

Одређивање и налажење код конусних пресека

-35- Ми смо видели у §(11) да је центар кп она тачка чија је поларa у ∞, или који је пол праве у ∞. Ово значи и то пола дијаметра у пресеку тј. у A и B, које су међу собом $\parallel$ јер или је поларa дијаметра у пресеку са конјугованим му дијаметром у ∞. Пол једног дијаметра лежи ће на конјугованом му дијаметру у ∞.

Тако ако су у слици aa и bb конјуговани дијаметри онда су праве обичних тангената на једном или другом од оба два конјугована дијаметра у ∞.

Права или сија праве $A\infty$ и $B\infty$ права a и b је поларa центра O.

Ако су сад M, M', N, N' конјуговане тачке на дијаметру $A(a)$ онда су оне у инволуцији и једначина или није оне који одређује центар, овом једначином:

$$AXX' + H(X + X') + B = 0 \quad \ldots\ldots 1$$

Отстојања конјугованих тачака m и m' мерена су од тачке O''. Но ако ми изаберемо тачку почетну да се она поклапа са центром кб. онда и једначина 1 добија другн облик.

Ако означимо дужину OO'' са α а отстојања конјугованих тачака m и m' од O са x_1, x_1' онда једначина 1 прелази у ову једначину

$$Ax_1x_1' + (H + A\alpha)(x_1 + x_1') + A\alpha^2 + 2H\alpha + B = 0 \quad \ldots \quad 2$$

Ако из ове једначине одредимо α тако да је

$$H + A\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = -\frac{H}{A} \quad \ldots 3$$

онда из ове нам одређује центар инволуције поклапа се са центром кб.

Заменом једнач. под 3 у 2 имамо овај однос међу отстојањима двеју конјугованих тачака;

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_1X_1' = -\frac{A\alpha^2 + 2H\alpha + B}{A} = M = \text{const}. \quad \text{а ово значи}$$

Производ отстојања конјугованих (или инволуторних) тачака од центра инволуције (кб) је сталан. (види §22)

Да је одиста центар тачка чија је конјугована тачка у ∞ уверавамо се овако.

Ако дођемо једначине 1 да је $-\dfrac{Hx + B}{Ax + H}$ за отстојање конјуговане тачке тачци X_1 — одговарајуће тачка O'', онда конјугована тачка тачци чије је $X = -\dfrac{B}{\ }$ изразимо то

$X' = -\frac{Hx+B_1}{Ax+H}$ може бити у ∞ вредности за ону вредност x $Ax+H=0$.

Или ако се узме у обзир једначина под 4 па се изврши координатна тачка одакле $x=0$ онда је $x_1=\infty$, а ово се односи на центар и његову координатну тачку.

Као резултат овога излази да један облик 2° има само један центар, јер једна права у ∞ може имати само једну тачку за пол и то је центар.

Поларе свију тачака праве у ∞ пролазе кроз тачку праве дакле кроз центар. Отуда излазимо да су сви дијаметри поларе ових тачака на правој у ∞.

(30) 2° облика [illegible] мислимо на дијаметрима, јер сви у том [illegible] на правој а у самој ко [illegible] само до једне тачке О која је координатна у ∞, јер је једначина $Ax+H=0$, која нам даје отстојање те тачке од почетка O и т. д. праве сталне.

-36- о Фокусима. Има таквих тачака и правих у равни облика, да су отстојања тачака облика од праве и од тачке у сталном односу. Таква тачка и права су карактеристике код облика другог степена и права је полара те тачке карактерне. Ова се тачка назива фокусом а права карактеристика, која је полара ове тачке назива се директрисом.

Ми ћемо прво доказати да су гоњине тачке чија су отстојања од праве једне и тачке сталне, тачке облика 2°.

Нека је у самој равни права ED стална права и њена једначина

$$mx+ny+h=0 \quad \ldots\ldots \quad (1$$

Стална тачка нека је F која у координате α и β ...

Ако узмемо једну произвољну тачку у равни $(F.\ ED)$. M која у координате x, y. онда су отстојања M од праве ED и тачке F ова

$$MF = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} \quad \ldots\ldots \quad 2$$

$$MP = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}} \cdot (mx+ny+h) \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Аналитички изражена особина тачке M је:

$$\frac{MF}{MP} = k \text{ или } (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \frac{k^2(mx+ny+h)^2}{m^2+n^2} \quad \ldots\ldots \quad 4$$

Кад се једначина под 4 развије и среди видећемо да је то једначина 2° по x и y, којом смо ми у 1 обележили све облике 2°.

Сад претпоставимо не другом део ове особине а то је да је полара тачке $F(\alpha\ \beta)$ права 1.

Тако по § 3. имамо да је полара тачке $\alpha\ \beta$ односно праве под 4.

$$\left\{(x-\alpha)-\frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)\right\}\alpha + \left\{(y-\beta)-\frac{k^2}{m^2+n^2}(mx+ny+h)\right\}\beta + \left\{(x-\alpha)\alpha+(y-\beta)\beta-\frac{k^2h}{m^2+n^2}(mx+ny+h)\right\}=0$$

Обе се једначина може и овако написати

$$\frac{R^2}{m^2+n^2}(m\alpha+n\beta+h)(mx+ny+h)=0$$

или $$mx+ny+h=0 \;\ldots\ldots\; 5.$$

Једначина под 5. до које смо дошли претставља полару тачке $\alpha\beta$ (F) која захвата управо директрису, или карактеристична права кривих алгебарских 2°.

Примедба. Подела кривих 2° може се извршити и основу природе односа између одстојања тачака кривих од тачке F, и од ΣD. Тако за $R=1$ имамо ~~хиперболу~~ параболу, за $R>1$ елипсу а за $R<1$ хиперболу.

Ако развијемо једначину под 4 и упоредимо њене коефицијенте са коефицијентима једначине под 1 у § 1 имамо

$AC-B^2=1-R^2$; а ова нам једначина упоређена са оним што смо сазнали за R показује да за $AC-B^2 \gtreqless 0$ имамо параболу елипсу или хиперболу.

— 37 — Одредба жижа и директриса. Питање, које је овде обрађено је питање кратко има таквих тачака карактеристичних као R, кад их знамо онда знамо и директрисе, јер су то поларе жижа.

Нека нам једначина $f(xy)=0$ претставља једначину под 1 у § 1, којом смо обележили све криве 2°

Означимо са $\varphi(xy)$ једначину истих кривих, дату у облику под 4. § 36.

Кад оба сваку онда координате ма које тачке кривих морају задовољавати не само једначину под 1 већ и једначину под (2); коефицијенти једначина под 1 и 2 морају бити сразмерни и нека је њихов однос раван количини λ. Онда аналитички исказан услов о идентичности $\varphi(xy)$ и $f(xy)$ је

$$\lambda f(xy)=\varphi(xy) \;\ldots\ldots\; (3$$

Једначина 3 развијена изгледа овако:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\lambda f(xy)=(mx+ny+h)^2 \;\ldots\ldots\; (4$$

ако се у једначини под 4. (§ 36) R стави равно $\sqrt{m^2+n^2}$.

И сад се је питање о жижама свело на одређење $\alpha\beta$. да одговара условима под 4 или да је

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\lambda f(xy)=M^2 \;(5)$$ где је M линеарна једначина првог степена по x и y.

Ако пренесемо почетак у жижу онда су трансформационе једначине $x=\alpha+x'$ $y=\beta+y'$ и једначина операција у једначину:

$$(1-\lambda A)x'^2 - 2x'y'\lambda B + (1-\lambda C)y'^2 - \lambda f'_\alpha(\alpha\beta)x' - \lambda f'_\beta(\alpha\beta)y' - \lambda f(\alpha\beta) = 0 \quad \ldots \; 6$$

Да је сад једначина 6 потпуни квадрат нужно је и довољно да постоје међу њеним коефицијентима:

$$(1-\lambda A)f'_\beta + \lambda B f'_\alpha = 0$$
$$(1-\lambda C)f'_\alpha + \lambda B f'_\beta = 0 \quad \ldots \ldots \quad 7$$
$$\lambda f'_\alpha f'_\beta - 4\lambda B f(\alpha\beta) = 0$$

Са f'_α означ. први извод функције 1 у 3.1 у којој је x замењено са α и f'_β ... и исто тако у $f'_{\alpha\beta}$ x и y замењени са α и β а у f'_β y са β.

Из једначина под 6. добијамо обе две једначине:

$$f'_\alpha f'_\beta - 4B f(\alpha\beta) = 0 \; 8 \ldots \quad f'_\alpha(Af'_\beta - Bf'_\alpha) - f'_\beta(Cf'_\alpha - Bf'_\beta) = 0 \; \ldots 9$$

Из једначина под 8 и 9 као што знамо у свакој одређено α и β координате жиже Кб.

Ако сад са $a\,b\,c\,d\,e\,f$ означимо ~~...~~ коефицијенте једначине 1 у 3.1 онда једначине 8 и 9 постају

$$f\alpha\beta - e\alpha - d\beta + b = 0 \quad \ldots \ldots \quad 10$$
$$(A\alpha + B\beta + D)(f\beta - e) - (B\alpha + C\beta + E)(f\alpha - d) = 0 \quad \ldots \ldots \quad 11$$

Из 10 и 11 имамо за једначину 9 која нам одређује ... тачке код Кб.

$$f(\alpha^2 - \beta^2) - 2d\alpha + 2e\beta + a - c = 0 \quad \ldots \ldots \quad 12$$

За случај да је f различно од нуле, једначине са под 12 и 10 могу се лако написати:

$$(f\alpha - d)(f\beta - e) = ed - bf = B\Delta \quad \ldots \; 13$$
$$(f\alpha - d)^2 - (f\beta - e)^2 = (cf - e^2) - (af - d^2) = (A - C)\Delta \quad \ldots \; 14$$

Из 13 и 14 имамо најзад једначине за одређивање α и β а то су

$$2(f\alpha - d)^2 = \Delta(A - C + R) \quad \ldots \quad 15$$
$$2(f\beta - e)^2 = \Delta(C - A + R) \quad \ldots \quad 16$$

Δ је дискриминанта ... Ако ... $R = \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}$

Из једначина под 15 и 16 имамо по две вредности за α и β, дакле свега 4 ~~...~~ тачке, од којих су само 2 стварне код Кб.

Код параболе је $f = 0$ онда из 10 и 12 које постају једначине 1° по α и β имамо само један пар вредности за α и β, дакле и једну жижу реалну.

Код кругова се жиже поклапају са центром, што нам и једначине под 15 и 16 дају примењене на круг.

Седма глава

Задаци и проблеми, који се решавају помоћу већ пок...них исечака, а односе се на коничне пресеке.

-38- Ако је дат круг и две тачке ван њега или на кругу у равни круга A и B, онда између отстојања тих тачака од центра круга и отстојања њихових од поларе постоји овај однос

$OA \cdot BQ = OB \cdot PA$ 1

Ако узмемо за координате тачака A и B са X'Y' и X''Y'', онда су поларе њихове a и b по § 16

$XX' + YY' = r^2$ . . . . . 3 полара тачке A права a

$XX'' + YY'' = r^2$ . . . . . 4 " " B права b

Отстојање тачака B и A од поларе a и b добијају се по обрасцу $p = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Једначине под 3 и 4 кад нам су праве према овоме имамо за:

$BQ = \frac{X_{11}X_1 + Y''Y_1 - r^2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}$ а за $PA = \frac{X_1X_{11} + Y''Y_1 - r^2}{\sqrt{X_{11}^2 + Y_{11}^2}}$ . .

Дужине AO и BO добијају се из слике и оне су:

$OA = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$ $OB = \sqrt{X_{11}^2 + Y_{11}^2}$ . . . . . .

Из једначина под 5 и 6 увиђавно је да имамо

$\frac{OA}{OB} = \frac{AP}{BQ}$ или $OA \cdot BQ = AP \cdot OB$ 7

(Производ из отстојања једне тачке од центра и отстојања ~~друге~~ друге тачке од поларе друге које тачке, раван је производу из отстојања друге тачке од центра и њеног отстојања од поларе прве тачке.)

-39- Производ из отстојања центра елипсе или хиперболе од поларе и ... на тачкиног, чија је то полара, од ~~осовине пресеке~~ поларе, сталан је и раван квадрату ~~велике~~ њене полу осе (слика 23) (~~...~~)

Полара P чије су координате X'Y' по § 16

$\frac{XX'}{a^2} + \frac{YY'}{b^2} = 1$ . . . .

$CM = \frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}}$ 2

Из слике је $N_1P^2 = y_1^2 + N_1X^2 = y_1^2 + \left(\frac{x' - x'c^2}{a^2}\right)^2$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$N_1P^2 \cdot CM^2 = \frac{a^2b^2 \cdot a^2b^2}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \cdot \frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{a^4} = b^4 \text{ или}$$

$$N_1P \cdot CM = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

-40- Линија што спаја пол једне тачке са тачком ствара угао под којим се виде полара из тачке.

Нека нам у слици (24) права АБ представља полару тачке О чије су координате $\xi'\eta'$. Угао XFA означимо са θ, а угао OFX са θ'. Онда је:

$$\cos(\theta' - \theta) = \cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Из слике имамо, ако коорд. А означимо са $\xi\ \eta$ а О са $\xi'\eta'$, дужину MF са c, обе одстојања тачака А и О од тачке F са ρ и ρ':

$$\cos\theta = \frac{\xi + c}{\rho} \quad \sin\theta = \frac{\eta}{\rho}; \quad \cos\theta' = \frac{\xi' + c}{\rho'} \quad \sin\theta' = \frac{\eta'}{\rho'} \quad \ldots \quad 2$$

Из једначина под 1 и 2 имамо:

$$\cos(\theta' - \theta) = \frac{(\xi + c)(\xi' + c) + \eta\eta_1}{\rho\rho'} \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Заменом $\xi\xi'$ из једначине $\frac{\xi\xi'}{a^2} + \frac{\eta\eta_1}{b^2} = 1$ у 3 имамо:

$$\rho\rho' \cos(\theta' - \theta) = e^2\xi\xi' + c\xi + c\xi' + (c^2 \pm b^2) = e^2\xi\xi' + c\xi + c\xi' + a^2 = (a + e\xi)(a + e\xi') \ldots 4$$

где смо са e означили $\frac{a^2 \mp b^2}{a^2}$ или $\frac{c^2}{a^2}$ ..

Но $a + e\xi = \rho$, јер из прве једначине под 2 имамо да је

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^2} = \frac{\xi + c}{\rho}$$

одакле кад се обе стране квадрирају

$$\rho = \sqrt{(\xi e)^2 + 2\xi c + a^2}$$

или заменом c вредношћу ea имамо

$$\rho = a + e\xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Из 4 и 5 имамо да је угао OFA или $\theta' - \theta$ раван

$$\cos(\theta' - \theta) = \cos(OFA) = \frac{a + e\xi'}{\rho'} \quad \ldots\ldots \quad 6$$

Из 6 се види да је овај угао независан од додирне тачке тангенте из О, већ од коорд. тачке О, која је пол праве АБ. Да смо узели од додирне тачке Б, нашли би да је:

$$\cos OFB = \frac{a + e\xi'}{\rho'} \quad \ldots\ldots \quad 7$$

И одатле закључујемо, да је угао под којим се из тачке виде полара једне тачке, преполовљен линијом што спаја тачку са полом обе праве (поларе). (Ово смо доказали за елипсу и хиперболу)

—40_a Ово би смо нашли да стоји кад параболе

Ако будемо применили све ово из § 40 на параболу наћи ћемо да је половина угла ŠFA, т.ј. ... и KFO је

$$\theta' - \theta = \operatorname{arc\,cos} \frac{\eta + \frac{p}{4}}{S}.$$

-41- Код елипсе, хиперболе и параболе постоји и ово тврђење:

Права што спаја жижу са пресеком једне тетиве што пролази кроз жижу, нормална је на њеној одговарајућој тетиви.

Ово излази кад означимо тврђења под 40 и 40а јер је збир $\theta - \theta'$ равно $2 \cdot 90° = 180°$ као што се види и из слика 24 ...

$$\theta - \theta' = \tfrac{1}{2}(\check{S}FA') = 90°.$$

-42- На основу ових тврђења код КБ може и овај врло лако решити:

Права што спаја жижу са пресечном тачком тангенте и директрисе је бисектриса спољашњег угла онога под којим се из жиже види та тангента.

Нека нам у слици 25. TT' представља тангенту на одговарајућој КБ S. Ако са m означимо тангенту ... директрису, са D означимо пресек између тангенте TT' и m, онда из § 36 D лежи на правој FT. У 41 доказали смо да је угао DFT прав угао; у § 40 и 40а доказали смо да је $\measuredangle PFT = \measuredangle TFP'$. Одавде излази да је

$$\measuredangle PFD = \measuredangle DFQ \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Из једначине 1. излази да је права DF бисектриса угла PFQ, који није ништа друго до спољашњи угао угла PFP'.

-43- Управне, на из дијаметра тачке на тангенту на линији перпендикуларној једном или другом координатном осом, пролазе увек кроз једну исту тачку осовине.

Ако су координате једне тачке P x'y', нормала P на тангенту а тачке P је

$$\frac{a^2 x}{x_1} \mp \frac{b^2 y}{y_1} = c^2 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Ако са Z означимо пресек нормале p из P на а са x-ом осом, онда дужина NZ из једн. 1

$$NZ = \frac{c^2}{a^2} x' = e^2 x' \quad \ldots\ldots$$

NZ је сталан за x' сталним код једне КБ, а како све тачке у правцу p ∥ са y осом имају x' сталним онда све нормале из тих тачака на линији p, на одговарајућу тангенту мора пролазити кроз N. (сл. 29а)

-44- Поларе једне тачке у односу система кругова са једном осом радикалном, пролазе кроз једну сталну тачку.

Линија што спаја пресечне тачке двају кругова S и S' зове се радикална оса.

Ако се узме оса за Y осу, а линија што спаја центаре кругова за X осу коор. система, онда је једначина система кругова са једном заједничком осом радикалном дата овим изразом:

$$x^2+y^2-2Rx\pm\delta^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Ова нам једначина показује да се центри кругова датих једначином од 1 налазе на X оси у одстојању R и да сви кругови секу Y осу у тачкама које се добијају из једначине

$$y^2\pm\delta^2=0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Једначина нам 2. показује да за $-\delta^2$ имамо код кругова датих једначином 1. тачке са Y осом а за $+\delta^2$ немамо.

Полара тачке $x'y'$ круга од 1 је

$$xx'+yy'-2R(x+x_1)\pm\delta^2=0 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Једначина се од 3 може и овако написати

$$xx'+yy'\pm\delta^2-2R(x+x_1)=0 \quad \ldots\ldots \quad (3a$$

што значи да полара тачке $x'y'$ пролази кроз пресек двеју правих:

$$xx'+yy'\pm\delta^2=0 \quad \text{и} \quad (x+x_1)=0 \quad \ldots \quad 4$$

које не зависе од R, који својом вредношћу одређује поједине кругове у систему кругова представљених једначином од 1.

-45- Граничне тачке (points limites). На основу § 44 ми смо у стању наћи две тачке у равни система кругова са једном осом радикалном заједничком, да су њихове поларе сталне.

У предњем §. нашли смо да полара једне тачке $x'y'$ пролази кроз сталну тачку у односу система кругова од 1 али не и то да се све те поларе поклапају. Ово ће последње бити остварено ако нам линије од (4 [illegible] место пресека пролази полара тачке $x'y'$ буду представљене истом правом и то баш полару [illegible] тачке $x'y'$.

Да би једначине $xx'+yy'\pm\delta^2=0$ и $x+x_1=0$ једначине једне и исте праве, треба да су испуњени услови:

$$y'=0 \quad x'^2=\pm\delta^2 \quad \text{или} \quad x'=\pm\delta \quad x'=\sqrt{-\delta^2}=\pm\delta\sqrt{-1}. \quad 5$$

Једначине од 1. дају нам сад координате оних тачака које поменутом услову одговарају. Обе су тачке реалне за δ позитивно, а имагинарне за δ одречно; а ово значи с обзиром на § 44. реалне су за системе кругова који имају две имагинарне заједничке тачке, а имагинарне код кругова који имају две реалне заједничке тачке.

Једначине нам од 1. показују да се ове две тачке налазе на X оси и то с једне и с друге стране осе радикалне у истом одстојању δ.

ово су дакле карактеристичне тачке. Поларе и које од ових двеју тачака пролази кроз другу тачку – нарочито у односу на круг од кругова се може сматрати радикалном; и друга је на централи, као што се то из једначине

$$x + x' = 0 \ldots$$

види.

Ове се тачке називају граничним тачкама по Poncelet-у [illegible] зато што су те тачке центри кругова ∞ мало

Једначина се под 1 у § 44 може и овако написати

$$y^2 + (x-R)^2 = R^2 - \delta^2 \ldots \qquad (2$$

кад се само + узме пред δ.

Једначина под 2 представља реалне кругове само за $R^2-\delta^2>$ за случај $R^2=\delta^2$ једначина под 2 даје нам један од кругова из с... од кругова који су представљени једначином 2, налази центра координате $y=0$ $x=\pm\delta$ а који је полупречник раван нули.

Дакле у граничним тачкама леже центри кругова који са круговима под 2 имају осу заједничку, само што су њихови полупречници ∞ мали.

-46- Наћи полару једне сталне тачке у односу свију кб, које пролазе кроз четири тачке. (слика 26a)

Нека су те 4 тачке ABCD, кроз које пролазе криве S, S_1 S_2 .... узмимо тачку O за почетак координата, а праве BC и AD за x и y осу.

Онда, ако са $\lambda\lambda'$ и $\mu\mu'$ означимо сегменте OB, OC, OA, OD, које криве одсецају на координатним осовинама x и y, једначина свију кривих кроз ABCD може гласити:

1) .... $\mu\mu' x^2 + 2hxy + \lambda\lambda' y^2 = \mu\mu'(\lambda+\lambda')x - \lambda\lambda'(\mu+\mu')y + \lambda\lambda'\mu\mu'$

О томе се лако можемо уверити ако из једначине 1 будемо потражили одсечке OB, OC, OA и OD на осама, јер ћемо увек добити одсечке λ, μ, λ' и μ'.

Дајући коефицијенту h разне вредности добићемо разне криве које чине [illegible]. Поларе ~~сталне~~ ~~одговарај~~ једне исте тачке у односу свију тих кривих садрже једну и ~~исту~~ константу h, h' и h''. Линије које се једна од друге разликују по само једном константом пролазе увек кроз једну и исту тачку. Одда можемо извести правило да поларе једне тачке у односу система кб пролазе кроз једну тачку.

Према овоме врло је вероватно да је пример који смо анализирали у § 45 само један специјалан случај овог примера.

46a – Ми смо ово у ствари доказали и на овај начин. Ако означимо са S и S_1 две криве 2°, онда је јасно да нам једначина $S + kS_1 = 0$ даје једначину система криве који пролазе кроз пресек бракова S и S_1.

Поларе једне тачке $ξη$ у односу брака $S+RS_1$ које пролазе кроз пресек поларе исте тачке у односу бракова S и S_1. Јер је полара $ξη$ у односу $S+RS_1=0$

$$ξ(S_1+RS_{11}')+η(S_2+RS_{12}')+S_3+S_{13}=0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Поларе тачке $ξη$ у односу бракова S и S_1 су

$$ξS_1+ηS_2+S_3=0 \quad \text{и} \quad ξS_{11}+ηS_{12}+S_{13}=0 \quad \ldots \quad 2$$

Пошто је сад једначина под 1 задовољена координатама пресека линија под 2, онда је овим и наше тврђење о поларама једне тачке у односу система кб. доказано.

примедба. Једначина под 1 нам показује да у њој знаци неодређена R уистини смену, у коју сфигурише и у једначини бракова $S+RS_1=0$.

Одавде излази и то да је полара једне тачке у односу кб окреће око четвороугла $ABCD$ (слика 26а) пролази кроз једну тачку.

-47- Из једначина под 1 и 2 § 46а. излази да ако са $P=0$ и $P'=0$ означимо поларе једне тачке (A) у односу бракова S и S_1 (кб), онда је полара брака $S+RS_1=0$, $P+RP'=0$ (B)

Ако су сад поларе друге које тачке $Q=0$ и $Q_1=0$ у односу бракова S и S_1, онда је $Q+RQ_1=0$ једначина поларе исте тачке у односу система бракова $S+RS_1$

Место пресека одговарајућих линија прамена $P+RP'=0$ и прамена $Q+RQ'=0$, која су пројективна јер зависе исто од једначине од константе R, је неки брак 2°, који се добија елиминацијом R из $P+RP'=0$ и $Q+RQ'=0$

Једначина је тог брака:

$$PQ'=P'Q \quad \ldots\ldots \quad 1$$

брак 1. пролази кроз темена обих пројективних прамена, јер је једначина 1 задовољена пресечним тачкама једначине Q Q' и P P', у њиним пресецима теме темена пројективних прамена.

Но ми можемо ово и овако формулисати. Пошто ⅓ пресеци одговарајућих зракова двају симетричних прамена поларе праве AB у односу брака $S+RS_1$ у каноничном смислу, то је онда геометријско место пресечених једначином 1 геометријско место ових зракова место који пресецају поларе праве AB у односу система бракова кроз 4 тачке, Као место видимо то је геометријско место линија 2°.

-48- Дати брак S и једна тачка A чија је полара у односу брака S $λx+μy+ν=0$, па се тражи геометријско место тачака A чије су поларе паралелне кб. $δ_m$ (слика 27)

Ако означимо са α и β координате тачке A, а с $F(xy)=0$ и $T(xy)=0$ бракс S и S_2. Онда из познатог [illegible]

1).... $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ права тачке $\alpha\beta$ у односу бракса S

онда је $\lambda = f'_{\alpha}$ $\mu = f'_{\beta}$ $\nu = f'_{\alpha\beta}$ . . . . . (I

Из услова да је права 1 тангента на бракс S_2 имамо $F(xy)=0$ 2

Зато ако из 1 и 2 елиминишемо [illegible] добивамо да [illegible] те једначина имају два корена једнака, онда добивамо да између λ μ и ν мора постојати овај однос:

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2F\mu\nu + 2G\nu\lambda + 2H\lambda\mu = 0 \quad \ldots \quad 3$$

и да је једначина [illegible] на бракс 2.

Коефицијенти A B [illegible] су изрази из [illegible] једначине [illegible] x y и z.

Ако сад у једначину 3 заменимо λ μ и ν из једначине под I, онда добивамо једначину између α и β [illegible] функције [illegible] α и β. Једначина изражена [illegible] облика

$$\psi(\alpha\beta) = 0 \quad \ldots \ldots \quad 4.$$

— Ова задатка, које [illegible] бићемо [illegible]

— 79 — Геометријско место [illegible] једне тачке праве у односу [illegible] конфокалних [illegible] бракова је права линија.

Под конфокалним [illegible] разумевају се [illegible] који имају исте [illegible], а конфокални [illegible] су [illegible]. Према томе ако су a и b [illegible] онда је једначином $a^2-b^2=c^2$ изражено [illegible] конфокалних [illegible], c [illegible]

Према овоме ако је дата права

$nx + my = mn$ . . . 1 и нека су координате њеног пола α β у односу бракса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad 2$$

онда из § 16 где је права 1 права XY у односу бракса 2 следи да је [illegible] између коорд. α β m и n

$$m\alpha = a^2 \qquad n\beta = b^2 \quad \ldots \quad 3$$

Ако одузмемо једначине из 3 имамо

$$m\alpha - n\beta = a^2 - b^2 = c^2 \quad \text{или}$$

$$mx - ny = c^2 \quad \ldots \quad 4$$

1) Једначина изражена [illegible] и [illegible] права на датој [illegible]

Тако ако нам права l знати ту у тачки O на знаку S, онда се ту у A и B на хомофокалном знаку S' секу на пресецању у O на правој q, која је обје праве (4. и т. д. (слика 28

50. <u>Два знака 2° исецају</u> на правој m два пара тачака AA'BB', показаће се да су те тачке хармонијски спрегнуте или другим речима да постоји једна на којој тачке у односу знака који не припада, доказати, Број другог пресечних тачки знака који припада. Ово је аналогни случај оног код Бригса у § 45 (слика 29)

Ако ми сад означимо са једначином праву m

$$\lambda\alpha+m\beta+n\gamma=0 \quad \ldots\ldots\ldots 1$$

и одредимо коорд. пресечних тачака AA' и BB' на напоредимо услов који треба да је испуњен па да су тачке AA' и BB' међу хармонијске тачке, добићемо до једне једначине облика од (4)

Јер елиминацијом γ из једначине 1 и једначине знака 2° § 6 којом нам у овом случају представља наш знак S, добијамо за коорд. пресечних тачака знакових A A' са правом m, једначину:

$$(a\nu^2+c\lambda^2-2g\lambda\nu)\alpha^2-2(c\lambda\mu-f\lambda\nu-g\mu\nu+h\nu^2)\alpha\beta+(b\nu^2+c\mu^2-2f\mu\nu)\beta^2=0 \quad \ldots 2$$

Сличну једначину добијамо елиминацијом γ из 1 и једначине $f(\alpha\beta\gamma)=0$ ... која нам представља знак S_1. Ако сад нађемо од два корена $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ из ових двеју једначина онда ћемо наћи и дужи AB, BA' AB' и B'A'.

Да би да су AA'BB' у хармонијске тачке ваља да је испуњен услов

$$\frac{AB}{BA'}=-\frac{AB'}{B'A'} \quad \ldots\ldots\ldots 3$$

Величине у услову 3 но су разлике ординација пресечних тачака знакова S и S_1 са правом m — или су разлике корена једначине од 2 и њој сличне, према овоме кад се ово све изврши имо, као резултат једначину:

$$(bc'+b'c-2ff')\lambda^2+(ca'+c'a-2gg')\mu^2+(ab'+a'b-2hh')\nu^2+2(gh'+g'h-af'-a'f)\mu\nu+2(hf'+h'f-bg'-b'g)\nu\lambda+2(fg'+f'g-ch'-c'h)\lambda\mu=0 \quad \ldots 4$$

Једначина нам у облику одное између коорд. праве m (λ, μ и ν) коорд. знакових сачинилаца (abc) и (a, b, c, ...), а то је нужни услов па да су тачке ABA'B' у хармонијске тачке.

Једначина од 4. представља анвелопу праве (m) која је линија 2°. Дакле није само један пар таквих тачака, већ безброј многих таквих правих има, које се налазе на тј. анвелопа знака, који је представљен једначином од 4.

Једначина од 4. зове се Конхармонијанта <u>знакова</u> S и S_1 и игра велику улогу у теорији коничких знакова. Она се обично обележава са Φ F Φ

–51– Резимирана дефиниција је ова: [350)] Тражење геометријског места оних тачака из којих повучене тангенте на два конична брака S и S_1 чине 4 хармоникала. Ово друго решење Кијано знаци, трепне се тачке 4. тј. на 2 КВ да сматрана је од њих за пола у односу КВ на коме није тангенциони пол у односу на КВ, да ~~..~~ једној тачци ~~оне~~ друге тј. на оној Коничком браку на коме ће исто тангенција лежати.

Тако ако су дата 2 Коничка брака S и S_1, па се из једне тачке M повуку по 2 ~~додирне~~ тј. a, b, c и d на S и S_1, који чине 4 хармоничка зрака. Онда је argo дуги друго део наше дефиниције.

Позови m и m' су перспективно-хармонички позови, за по њима се тачке 1 и 1' поклапају. Ако пи сада пол трагамо ~~тачку~~ тј. [(a)] у тачци 1 на браку S пол у односу брака S_1, је Кажем ако су, као што смо узели $a\,b\,c\,d$ 4 хармоникала, онда ће њен пол лежати у (~~додирној~~ једној) тачци тангенције b на браку S – тј. у тачци 2' или 2 (слика 29a и 30)

Пол праве a у односу брака S' по § 20, 20a лежи у пресеку поларa дирних тачака на правој a на по тачке M и 4''. Ако потражимо поларе тих тачака видећемо да је њихов пресек у

једној (~~додирној~~) тачци тј. b – ~~пол 2'~~ и лежи q, јер је права b полара тачке 4'' у односу брака S_1, а q полара тачке M у односу на брака. (слика 29 и 30)

Тражено геометријско место тачака M може се сматрати као геометријско место центара перспективно хармоничких позова m m' за поједине Коничких бракова као у слици 29a. У слици 30 видимо да је M центар хармоничких позова m и m', који су и перспективни, јер им се одговарајуће тачке O и O' поклапају.

Да сад видимо који услов мора бити испуњен па да су из једне тачке M повучене тј. на 2 КВ 4 хармоникала.

Означимо координате тачке M са $\alpha'\beta'\gamma'$.

Ради одређивања тангената из M на брак S имамо услов за једначину тих тангената.

$$SS' = P^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Услов под 1, који се добија из услова да једначина S у којој је α β и γ замењено са $l\alpha + m\alpha'$, $l\beta + m\beta'$, $l\gamma + n\gamma'$ има два једнака корена по $\frac{l}{m}$.

У једначини $SS' = P^2$ $S_{je} = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \cdots$

$S' = a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2 + \cdots$ $\quad P = a\alpha\alpha' + \cdots$ $\quad$ (види § 6)

Ако се сад у једначину 1, која нам представља тангенте из $\alpha'\beta'\gamma'$ на брак S, стави $\gamma = 0$, онда

Показано пресечне тачке ових двеју тангената са са страном γ основног троугла. То су тачке M_1 и N_1 сл. 30

Ако покретимо парове тангената из $\alpha'\beta'\gamma'$ на брак S_1 и у њ ставимо $\gamma=0$, онда добијамо пресечне тачке тангената C и D са γ, а то су тачке M'' и N''.

Ако по § 50 ставимо да су четири тачке $M'N'M''N''$ 4 хармонијске тачке онда по Pappus-овој зрака 4. хармоникала abcd морају бити четири хармо-никала. Кад се све ово сврши онда имамо једначину:

$$\left(BC'+B'C-2FF'\right)\alpha_1^2+\left(CA'+C'A-2GG'\right)\beta_1^2+\left(AB'+A'B-2HH'\right)\gamma_1^2+$$
$$+2\left(GH'+G'H-AF'-A'F\right)\beta_1\gamma_1+2\left(HF'+H'F-BG'-B'G\right)\gamma_1\alpha_1+2\left(FG'+F'G-CH'-C'H\right)\alpha_1\beta_1=0 \ldots \; 2$$

која нам износи услов који треба да је испуњен да су 4. тангенте из $\alpha'\beta'\gamma'$ 4. хармоникала.

Једначина од 2 је однос између координата тачке M и коефицијената једначина бракова S и S_1, јер су $A B C G \ldots$ $A'B'C'G' \ldots$ функције од $abc \ldots$ и $a'b'c' \ldots$ то су већ више дуже симетричне изводи диференцијала бракова S и S_1.

Да се није пошло услов хармоничности између 4. тангената ми би добили до једначине $F^2=4SS_1$, која нам представља геометријско место тачака M. Где је F једначина под 2 а S и S_1 једначине бракова S и S_1 у смислу 30.

Једначина под 2 је коваријанта S и S_1, јер је то функција између симултаних S и S_1 и непознатих $\alpha\beta\gamma$, али уз то да она изражава особину ових двеју бракова, која је независна од координатног система.

-52- Једначина под 4 § 50 и једначина под 2 у § 51 могу се изразити као функције других пресечних израза.

Тако ако будемо тражили услов да права $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ у § 51 пролази кроз једну пресечну тачку бракова S и S_1 онда ће се једначина 4 § 51, будући ми знамо од сада Φ јавити у овом облику $\Phi^2=4\Sigma\Sigma_1$ где су Σ и Σ_1 тангенцијалне једначине бракова S и S_1.

Јер очигледно услов да права 1 у § 51 пролази кроз 4 тачке од пресечних тачака двеју бракова S и S_1 није ништа друго до изначење тангенцијалне једначине ових четири тачака.

Тангенцијална се једначина брака система $S+kS_1$ добија заменом $a, b \ldots$ са $a+ka'$, $b+kb'$ у тангенцијалну једначину брака S т.ј. у

$$\Sigma=(bc-f^2)\lambda^2+(ca-g^2)\mu^2+\ldots\ldots$$

Резултат ове замене је:

$$\Sigma+k\Phi+k^2\Sigma'=0 \ldots\ldots$$

где је Σ' тангенцијална једначина брака S_1

Пошто $S+RS'$ и $\Sigma+R\Phi+R^2\Sigma'=0$ представља-
-систем крива који пролазе кроз 4 тачке, то је извесно да
свију крива представљене овим двојним тачкама

Тангенцијална се једначина ове линеарне
добија из једначине 1, на начин који смо ми видели у ра-
нијим одељцима из дотичне дискусије.

Та је једначина $\underline{\Phi^2=4\Sigma\Sigma'}$ – линеарна 2
јед. 1

Резултат је задатак овога испитивања је-
дначине тангенцијалне заједничких двеју К.В.

Ако су Σ и Σ_1 једначине две криве S и S_1 у § 51 изра-
жене тангенцијалном једначином, онда је $\Sigma+R\Sigma_1$ крива која се за-
у тангенцијалном образовању из 4 заједничке тангенте
кривих S и S', то је једначина тангенцијална групе К.В. у та-
нгенцијалним координатама.

Одговарајућа дискриминантна једначина једначини
$\Sigma+R\Sigma_1$ криве групе у тангенцијалним, добија се на сличан начин оног
нормалним; у којој једначини јавља нам функција ~~Φ~~ F
параграфа 51. Та је једначина:

$$\Delta S+RF+R^2\Delta'S'=0 \quad \ldots \quad 1$$

У једначини 1 Δ и Δ' су дискриминанте система К.В. $S=0$ и $S'=$

Једначина од 1 представља К.В. чији је линеарни систем
тангенцијални; према овоме линеарна једначина 1 је једна-
4 заједничких тангената на 2 К.В. S и S_1 и она је линеарна:

$$F^2=4\Delta\Delta'SS' \quad \ldots \quad 2$$

—53— Систем конусних крива, који пролазе кроз
четири тачке, на једној правој образују систем инволуторних
тачака

Инволуција на једној правој дата је ово-
м једначином:

$$AXX'+H(X+X_1)+B=0 \quad \ldots \quad 1$$

Из једначине 1 је $X=-\dfrac{B+HX'}{H+AX'}$ 2 а $X'=-\dfrac{B+HX}{H+AX}$ 3; јер ако узмемо
тачку која одстоји од почетка за $X=m$ одговарајућу тачку на њој
онда је одстојање њене тачке $X'=m$ из једначине 2. Ако не тражимо
одговарајућу тачку тачки $X'=m$ добијамо тачку $X=$
из једначине од 3. Такве тачке које се могу сматрати да припадају
и једном и другом низу називају се инволуторне тачке.

Низ је инволуторан одређен ако знамо коефици-
јенте A H и B; њих можемо одредити из два пара тачака, које два
К.В. одсецају на трансверзали m (слик 31) тачке су тачке $A_2 A_1$
$B_2 B_1$.

Ако узмемо да је оса m X оса онда ће вредности
које одређују тачке $A_1 A_2 B_1 B_2$ добијају из једначине конусних

кругова, симетричну у реч $y=0$.

Ако се стави $y=0$ у $S=0$ имамо $ax^2+2gx+c=0$ ...(4

" " у $S_1=0$ " " $a'x^2+2g'x+c'=0$ ...(5

Ако означимо корене једначина под 4 са $x\,x_1$, онда с обзиром на једначину под 1 имамо једначине ради инволуторног низа: ($\beta\beta'$)

$$AC+Ba-2Hg=0 \quad и \quad AC'+Ba'-2Hg'=0 \quad \ldots (6$$

Да је и систем коаксијалних кругова $S+\lambda S_1$, чине инволуторне тачке, уверавамо се овако.

Ако једну одреде тачака M_1M_2 које на који од ових кругова сече на x оси на трансверзали — имамо једначину:

$$ax^2+2gx+c+\lambda(a'x^2+2g'x+c')=0 \quad \ldots \quad 7$$

која се добија као и горња једначина под 4. и 5. Да је пар тачака једначином 7 одређен инволуторан са паром тачака одређених једначином 4 и 5 овако ћемо се уверити:

Једначина се од 7 може и овако написати

$$x^2(a+\lambda a')+2x(g+\lambda g_1)+(c+\lambda c_1)=0 \quad \ldots \quad (8$$

Из једначине 6 и 1 имамо ову једначину ради одређе инволуторног низа:

$$2(ag'-a'g)xx'-4(x+x')(gc'-g'c)+(ac'-a'c)=0 \quad \ldots \quad (9$$

Но ако два тачке одређене једначином 8 $x\,x_1$ заменимо у једначину 9, онда ће једначина 9 бити задовољена из обе стране, што означи једначина:

$$2(ag'-a'g)(c+\lambda c')+(ac'-a'c)(a+\lambda a')-2(gc'-g'c)(g+\lambda g')=0 \quad \ldots 10$$

10 се може и овако написати

$$A(c+\lambda c')+B(a+\lambda a')-2H(h+\lambda h')=0 \quad \ldots \quad 11$$

а ова је једначина равна суми збир једначина под 6. Према томе ако су онда два произвољна пара тачака A_1A_2, B_1B_2 инволуторна онда је и систем тачака дат једначином 8 инволуторан. Овим је наше тврђење доказано.

Друкчије речено ово можемо и овако исказати: системи КВ који имају једну заједничку апсолутну тројку $O\xi T$ на једној трансверзали одређују инволуторан низ. (слика 31); јер тачке су ABC и D 4. заједничке тачке свих кругова, који су из тројке $O\xi T$ апсолутни заједнички свима КВ који пролазе кроз 4 тачке ABC и D.

На основу сличних особина конјугованих тачака у §. 22 можемо казати да поларе тачака инволуторних у односу оба кругова пролазе кроз одговарајуће тачке на инволуционој инволуторни. Тако полара тачке A_1 у односу круга S_2 пролази кроз A_2 а полара тачке B_1 у односу круга S_1 пролази кроз тачку B_2. (сл. 34 и ~~37~~).

Реципрочно је правило овоме: поларе маркиране тачке из једне тачке на систем КВ у једном правцу чине инволуторан систем.

Осма глава.

— наставак — седме главе —

— 54 — <u>Дата једна права</u> $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$. тражи се координате пола у односу на конику другог степена која је дата једначином: $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=0$ 2

Из 2. ... имамо ради одређене координате пола тангенцијалну једначину конике под 2, а она се добија из услова да је права 1 тангента на конику 2. Према овоме је тангенцијална једначина конике 2.

$$\mu\nu l+m\nu\lambda+n\lambda\mu=0 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Коорд. пола означимо са α' β' и γ' и оне су изводи по λ, μ и ν функције 3. Дакле за коорд. пола имамо једначине

$$\alpha'=m\nu+n\mu, \quad \beta'=n\lambda+l\nu, \quad \gamma'=l\mu+m\lambda \quad \ldots\ldots \quad 4$$

— 54a — <u>Тражи се геометријско</u> место пола праве:

$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

у односу једног кв. дефинисаног троуглом тангената α, β и γ и једним другим условом.

Тада решења овог задатка увиде из једначина под 4 § 54 које одредимо l m и n, па онда ове комбинованим са једначином под 1, [§ 54 2] и сменама кад ... α β и γ, и увиђамо онда ... који је дат. Резултујућа те једначина биће тражено геометријско место пола праве 1.

54a.1. <u>Таква нека је дат</u> услов да су коефицијенти праве 1 равни страницама основног троугла ABC тј. једини a, b, и c.

Једначина 1. добија онда овај облик:

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Једначина под 2 је једначина праве у ∞, јер за знаке тачке у коначној даљини важи овај однос

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=2F \quad \ldots\ldots \quad 3$$

види одељ. (32). Где нам F значи двоструку површину троугла ABC.

Тражење места пола праве 1 сведено је овим условом на тражење места пола праве у ∞, према § ... тражено место је место ~~центра~~ центра и оно је, из једначина под 4 § 54, кад решимо l m и n

$$l=a(b\beta'+c\gamma'-a\alpha') \quad m=b(c\gamma'+a\alpha'-b\beta') \quad n=c(a\alpha'+b\beta'-c\gamma')$$

Управо су l m и n сразмерни овим вредностима

Ако се ове тенегдве [?] бјегносим замене у једначину

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$$

, која нам представља једну линију тангентовану на 3 праве α β и γ, онда добијамо пресечено место тих права $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ или место центара Кв. који су тангентовани на 3. праве.

Једначина центра свију Кв уписаних у једном троуглу чије су стране α, β и γ, прелази [?] ... Ако се ове трилинеарне координате сврше $\varphi(\alpha'\beta'\gamma') = 0$ · функција 2° по $\alpha'\beta'\gamma'$ јесте опет Кв. Као што се то види из једначине под 4, која нам тај круг представља:

$$\varphi(\alpha'\beta'\gamma') = \sqrt{\alpha a(b\beta'+c\gamma'-a\alpha')} + \sqrt{\beta b(c\gamma'+a\alpha'-b\beta')} + \sqrt{\gamma c(a\alpha'+b\beta'-c\gamma')} = 0 \quad \ldots 4$$

Ако узмемо да су стране троугла, коме су Кв уписани, равне [?] страницама основног троугла, а осим [?] тога да је основни троугао равностран, онда једначина под 4 добија овај облик:

$$\sqrt{\beta'+\gamma'-\alpha'} + \sqrt{\gamma'+\alpha'-\beta'} + \sqrt{\alpha'+\beta'-\gamma'} = 0 \quad \ldots \quad 5.$$

и она нам показује да су ~~стране~~ центри свију Кв. уписаних у равностраном троуглу опет на кругу кружном [?].

§ 54_a - 2 – Нека је дат Кв геометријски [?] услов да је Кв био тангентован на праву:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \quad \ldots$$

Зна се [?] права под 1. тангентна на кругу: $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma} = 0$ који је тангентован на 3 праве α β и γ треба да је испуњен услов.

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1$$

Заменом l, m и n ... бројевима из 3 добијамо једначину геометријског места тих права: $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$, ову једначину:

$$\frac{\lambda(\mu\beta'+\nu\gamma'-\lambda\alpha')}{A} + \frac{\mu(\nu\gamma'+\lambda\alpha'-\mu\beta')}{B} + \frac{\nu(\lambda\alpha'+\mu\beta'-\nu\gamma')}{C} = 0 \quad \ldots 2$$, а што треба ...

§ 54_a - 3. Ако је геометријски услов, да Кв. који тангира [?] на 3. праве α β и γ и у односу кога се тангира [?] тих $\alpha'\beta'\gamma'$ праве $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$, пролази кроз тачку чије су координате $\alpha''\beta''\gamma''$, онда је једначина геометријског места ... § 54 ... ово:

$$\sqrt{\lambda\alpha''(\mu\beta'+\nu\gamma'-\lambda\alpha')} + \sqrt{\mu\beta''(\nu\gamma'+\lambda\alpha'-\mu\beta')} + \sqrt{\nu\gamma''(\lambda\alpha'+\mu\beta'-\nu\gamma')} = 0$$

то је Кв. тангентован на 3 праве дате једначинама

$$\mu\beta'+\nu\gamma'-\lambda\alpha' = 0 \qquad \nu\gamma'+\lambda\alpha'-\mu\beta' = 0 \qquad \lambda\alpha'+\mu\beta'-\nu\gamma' = 0$$

[illegible] $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ [illegible] ∞ [illegible] α [illegible] $\alpha''\beta''\gamma''$. [illegible] § 54. 1 a [illegible] C. [illegible]

-55- [illegible] $l\beta\gamma+m\gamma\alpha+n\alpha\beta=0$ [illegible] α, β и γ [illegible] $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ .... 3 [illegible]

[illegible] § 14 [illegible] 1. [illegible]

$$\Sigma = l^2\lambda^2+m^2\mu^2+n^2\nu^2-2mn\mu\nu-2nl\nu\lambda-2lm\lambda\mu=0 \quad .... \quad 3$$

[illegible] § 14. [illegible] (α,β,γ) [illegible]

$$\frac{d\Sigma}{d\lambda}=\alpha'=l(l\lambda-\mu m-\nu n);\ \frac{d\Sigma}{d\mu}=\beta'=m(m\mu-\nu n-l\lambda);\ \frac{d\Sigma}{d\nu}=\gamma'=n(n\nu-[illegible]$$

[illegible] $\alpha'\beta'$ и γ' [illegible] l m и n, [illegible]

$$\alpha'(\mu\beta'+\nu\gamma'-\lambda\alpha') \quad \beta'(\nu\gamma'+\lambda\alpha'-\mu\beta') \quad \gamma'(\lambda\alpha'+\mu\beta'-\nu\gamma') \ ..$$

[illegible]

55, 1. [illegible] $\alpha''\beta''\gamma''$. [illegible] $\alpha''\beta''\gamma''$ [illegible] $\alpha\beta$ и γ [illegible] 155 [illegible]

$$l\beta''\gamma''+m\gamma''\alpha''+n\alpha''\beta''=0 \quad \text{или}$$

$$\frac{l}{\alpha''}+\frac{m}{\beta''}+\frac{n}{\gamma''}=0 \quad ... \quad 1$$

[illegible] 1. l m и n [illegible] § 55, [illegible] $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ [illegible] $\alpha\beta\gamma$, [illegible] $\alpha''\beta''\gamma''$, [illegible]

$$\frac{\alpha'}{\alpha''}(\mu\beta'+\nu\gamma'-\lambda\alpha')+\frac{\beta'}{\beta''}(\nu\gamma'+\lambda\alpha'-\mu\beta')+\frac{\gamma'}{\gamma''}(\lambda\alpha'+\mu\beta'-\nu\gamma')=0 \ ..$$

[illegible] 2, [illegible] $\lambda=a$, $\mu=b$ $\nu=c$ [illegible] ∞ — a [illegible] ва, који се могу одређивати из 4 тачака, т.ј. из тачке $\alpha''\beta''\gamma''$ и тачака пресечних страна $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, и $\beta\gamma$.

55(2). Ако у пољу узмемо да КВ означава око троугла $\alpha\beta\gamma$, изражава број тачку $\alpha''\beta''\gamma''$, узмемо да су оне тангентне на правој: $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$ 1

онда је једначина по одређеном начину, која даје пресечне геометријско место праве $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$, у односу према конусу тангентних на једној правој 1 и описаних око троугла чије су стране $\alpha\beta$ и γ, ова једначина:

$$\sqrt{A\alpha(\mu\beta+\nu\gamma-\lambda\alpha)}+\sqrt{B\beta(\gamma\nu+\lambda\alpha-\mu\beta)}+\sqrt{C\gamma(\lambda\alpha+\mu\beta-\nu\gamma)}=0 \ldots 2$$

а ова је у опште узев линија четвртог степена, јер кад се једначина 2 развије, видиће се да у њој фигуришу α β и γ у четвртом степену. Једначина 2 добија кад се у узме тангентну праве 1 на једном браку 2° - т.ј. у $\sqrt{lA}+\sqrt{Bm}+\sqrt{Cn}=0$, l, m, n замене вредностима из јед. 4 § 55

-56- Једне тачке А помера се по једној сталној правој тражи се геометријско место пресечних тачака поларе тачке А, у односу два степена КВ.

Узмимо на сталној правој две тачке А и В чије су координате $\alpha'\beta'\gamma'$ и $\alpha''\beta''\gamma''$. Њихове поларе у односу два степена браке S и S' означимо са P' и P'' Q' и Q''.

Коорд. ма које тачке X на правој AB је су $\lambda\alpha'+\mu\alpha''$, $\lambda\beta''+\mu\beta''$, $\lambda\gamma'+\mu\gamma''$. ако са λ означимо одстојање AX а са μ одстојање XB. Поларе тачке X у односу бракова S и S' су по § -14- $\lambda P'+\mu P''=0$ $\lambda Q'+\mu Q''=0$. Пресечне тачке обих полара добијамо одређеном вредности $\alpha\beta$ и γ који су заједничке овим двема поларама или само путем елиминацијом λ и μ из ових двеју једначина добијамо геометријско место пресечних тачака полара свију тачака на правој AB, у односу браке S и S'. Резултат ове елиминације је:

$$P'Q''=P''Q' \ldots 1$$

и ова је једначина коју имамо ако се тачке узете задовољена пресечним тачкама полара X, која смо ми са свим произвољно узели на сталној правој AB.

Једначина под (1) показује да је тражено геометријско место брак 2°.

-57- Тражи се једначина двеју тангената a и b, повучених из КВ у пресечним тачкама њихових са страном γ основног троугла ABC слика (33)

Полара једне тачке D на правој γ је иста $\alpha'S_1+\beta'S_2=0$ (по § -13-), јер је овде коорд γ тачке D равна нули.

Пресечне тачке брака S и праве γ, т.ј. тачке R и Q добијамо из једначине кб. 4 з 6 заменом у њој γ = 0; дакле из једначине

$$a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2=0 \quad \ldots \quad 2$$

ако сад замислимо да се тачка D поклапа са тачком Q онда је једначина 2 задовољена коорд. тачке D т.ј. коорд. α, β, и ми имамо

$$a\alpha_1^2+2h\alpha_1\beta_1+b\beta_1^2=0 \quad \ldots \quad 3$$

Једначина (1) је једна хармонична на брака S (стр. 12) праве а хармонична добија се [illegible] тачке D када се поклапа са тачком R, док [illegible] елиминацијом α, β, из 3 и 1 добијамо за једначину обеју хармоничних у R и Q ово:

$$aS_2^2-2hS_1S_2+bS_1^2=0 \quad \ldots \quad 4$$

— S_1 извод S по β S_2 извод S по α · — S је скраћен знак једначине 1 з 6

— Ако је γ у ∞, онда нам једначина [illegible] даје хармоничне у тачкама брака S које се у пресеку [illegible] са правом γ у ∞ [illegible] то је једначина асимптота брака S. Ако ми означимо сталне троугла [illegible] са x y и z онда за z у ∞ једначина асимптота добија се из [illegible] на њу и она је представљена овом једначином:

$$a\left(\frac{dS}{dy}\right)^2-2h\frac{dS}{dx}\frac{dS}{dy}+b\left(\frac{dS}{dx}\right)^2=0 \quad \ldots \quad 5$$

— 58 — Ако једна асимптота кб. описаног око троугла αβγ, пролази кроз једну тачку A, онда ће [illegible] праве асимптота [illegible] кб. [illegible] троугла.

Нека је троугао ABC чије су стране α β и γ, око кога се описани кб [illegible] у [illegible] троугла, координате [illegible]. Једначина кб. у односу [illegible] гледе хармонична и [illegible] дата је једначином

$$t_1t_2=(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2 \quad \ldots \quad 1$$

Код нас је права $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ права у ∞ која сече [illegible] тачке асимптота t_1 и t_2, за нас нам једначина 1 представља кб описан око троугла ABC; [illegible] гледе хармонична $-t_1t_2$ (асимптота) и коорд. [illegible] $a\alpha+b\beta$ – која је низ права у ∞.

Из [illegible] једначина 1 представља [illegible] који пролази кроз темена троугла ABC, [illegible] онда једначина 1 [illegible] задовољена коорд. αβ, αγ, βγ — коорд. [illegible] темена троугла ABC. Дакле једначина 1 не сме имати [illegible] у којима [illegible] α^2, β^2 и γ^2, [illegible] заменом [illegible] у [illegible] αβ, βγ и γα, не [illegible] само [illegible].

Ако је једна асимптота (t_1) права $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$ онда друга t_2 мора бити тако удешена, да заменом њеном у једначину t_2 имамо израз са $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$. Дакле мора бити одавде:

$$\frac{a^2}{\lambda}\alpha+\frac{b^2}{\mu}\beta+\frac{c^2}{\nu}\gamma=0 \quad \dots \quad 2$$

Ако t_2 пролази кроз тачку једну $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ као што смо из већ ~~...~~ узели, онда из наше сад смењујемо одавде друге асимптоте t_1 може изведен облику $\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma=0$

$$a\sqrt{\alpha\alpha'}+b\sqrt{\beta\beta'}+c\sqrt{\gamma\gamma'}=0 \quad \dots \quad 4.$$

Једначина (4) преставља ~~...~~ t_1 на криву уписану у троугао ABC. Права тачка $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ је тангента на ову криву, ~~...~~ јер би се могли узети образовањем анвелопе праве $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$. Или даље обрнуто ако претпоставимо услов да је права $t_1=\lambda\alpha+m\beta+\nu\gamma$ тангента на криву и онда ћемо добити до једначине:

$$\frac{a^2}{\lambda}\alpha_1+\frac{b^2}{\mu}\beta'+\frac{c^2}{\nu}\gamma'=0 \quad \dots \quad 5$$

Знамо да између коефицијената праве t_1, $\lambda\,\mu\,\nu$ и коефицијената криве (4) $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, постоји веза услов под 5 па да је права t_1 тангента на криву 4. Шта ли овај услов значи сад? Шта је права t_2, дата једначином под 2 пролази као што смо узели кроз тачку $\alpha'\beta'\gamma'$, па за њу је задовољена ова координата. Ако се ове супституција у једначину под 2 изврши имамо услов под 5, значи да је права t_1 тангента на криву 4 — која је уписана у троугао $\alpha\beta\gamma$ (ABC)

-59- <u>Даље су два КБ који имају један заједнички асимптотски правац.</u> Ако сад узмемо да једна корда пресека једну од ових двеју крива са једним правцем стал. ним правцем пролази кроз једну сталну тачку; друга корда обвија један КБ. (Burnside-ова теорема)

Нека је заједнички асимптотски правац основни правац, двеју кривих S и S_1 и крива сечица S_2 S_3. По з. -28- чланови од $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ и $\alpha\beta$ у једначинама S и S_1 ишчезавају. Ако означимо је(2) корде са P и Q онда ће једначине кривих $S_1 S_2$ који имају један заједнички асимп. тотски правац бити израшене.

$$S=a_1\alpha^2+b_1\beta^2+c_1\gamma^2 \qquad S_1=a_2\alpha^2+b_2\beta^2+c_2\gamma^2$$

Ако сад узмемо и означимо две корде P и Q између једне од две криве и криве $S_3=a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2h\alpha\beta+2g\alpha\gamma+2f\beta\gamma$. Питање је сад каква мора бити корда Q ако је $P=\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma$

S_3 и S имају две корде P и Q заједничке помоћу једначине морају бити представљене једначином

$$(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)(x\alpha+y\beta+z\gamma)=0=S_3-S_1$$

Где сам са $X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0$ означио величину заједничку знака S и S_3. Кад се сад једначине [illegible] разложе и сведу, и нађене вредности за X Y и Z замене у једначини Q, онда налазимо да ова мора бити облика:

$$\alpha\lambda(\mu g + \nu h - \lambda f) + \mu\beta(\nu h + \lambda f - \mu g) + \nu\gamma(\lambda f + \mu g - \nu h) = 0 \ldots$$

Ако сад посматрамо анвелопу праве ~~λα'~~ [illegible] за случај кад [illegible] пролази кроз тачку $\alpha'\beta'\gamma'$, онда ја кажем да је ова анвелопа конусни пресек. Ово ћемо [illegible] изводим.

Ако елиминишем ν из једначине праве P — из $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ — и једначине I кад у њој заменим $\alpha\beta\gamma$ са $\alpha'\beta'\gamma'$ [illegible] израза да права Q пролази кроз сталну тачку, ја ћу добити једначину облика

$$2) \ldots (A\gamma^2 - 2G\gamma\alpha + C\alpha^2)\lambda^2 + 2(H\gamma^2 - F\gamma\alpha - G\gamma\beta + C\alpha\beta)\lambda\mu + (B\gamma^2 - 2F\gamma\beta + C\beta^2 \ldots$$

Анвелопа праве P остварујући коефицијенте λ μ и ν [illegible] са једначином 2 је, кад се све изврше операције, о образовању анвелопе из једначине 2:

$$(BC - F^2)\alpha^2 + (CA - G^2)\beta^2 + (AB - H^2)\gamma^2 + 2(GH - AF)\beta\gamma +$$
$$+ 2(HF - BG)\gamma\alpha + 2(FG - CH)\alpha\beta = 0 \ldots \ldots \quad 3$$

са великим A, B, C ... означио сам сачиниоце λ, μ и ν једначине и овог [illegible].

Да је сад једначина 3, која [illegible], анвелопа праве P, може би се уверити ако би посматрали [illegible] праве 3 и упоредили сачиниоце [illegible] са праве Γ, онда би нашли да међу њима мора постојати услов [illegible] од које [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible], да ~~[illegible]~~ [illegible], ако се праве [illegible] условом у тачки овог [illegible] испуњени.

По овом начину можемо лако решити проблем [illegible] § 8. Где кад смо нашли да међу коефицијентима праве $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ постоји услов $\frac{a^2}{\lambda}\alpha' + \frac{b^2}{\mu}\beta' + \frac{c^2}{\nu}\gamma' = 0$ онда одређење анвелопе праве $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$, по начину мало [illegible] изнесеном морамо би добити [illegible] једначине:

$$a\sqrt{\alpha\alpha'} + b\sqrt{\beta\beta'} + c\sqrt{\gamma\gamma'} = 0 \ldots \ldots \quad 4$$

Од које смо мало час видели кад [illegible] да је права $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$ додирна [illegible] на знаку [illegible]

-4-

Примедба. Образовање анвелопе [illegible] у [illegible] изнели, сада пренесимо преко овог кад да [illegible] знамо.

 Дакле су две кр. U и V према с оне,

хомологично нечим пресечних линија AP и A_1P' остих права које спајају пресечне тачке P и P' правих b, мора пролазити кроз тачку O на заједничкој тангенти (a) двају кривих U и V, са додирним тачкама тангенте a и кривих U и V — то јест A и A_1. (слика 34)
(Теорема Williamson-ова)

Нека су ~~P_1Q_1 и P_2Q_2 ако ...~~ P и Q поларе тачака $A(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ и $A_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ односно кривих U и V. Бележимо координате пресечне тачке C са $\alpha_3\beta_3\gamma_3$.

Да би нашли пресечне тачке праве AC и криве U, т. ј. коорд. тачке P, нека нам пресек између праве AC или праве $\alpha(\beta_1\gamma_3-\gamma_1\beta_3)+\beta(\gamma_1\alpha_3-\gamma_3\alpha_1)+\gamma(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)=0$, што нам изведена једначина представља праву која пролази кроз тачке $A(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ и $C(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$. Кад се ово сврши налазимо да су коорд. тачке P ово:

$$U\alpha_1-2P\alpha_3,\quad U\beta_1-2P\beta_3,\quad U\gamma_1-2P\gamma_3\ \ldots\ (1)$$

где нам U значи кр. једначину U, а P полару тачке A у односу криве U; само што је у U и P $\alpha\beta$ и γ замењено са $\alpha_3\beta_3\gamma_3$.

На сличан се начин одређују координате тачке P_1 и оне су:

$$U\alpha_2-2Q\alpha_3,\quad V\beta_2-2Q\beta_3,\quad U\gamma_2-2Q\gamma_3\ \ldots\ (2)$$

где U значи једначину кр. V а Q полару тачке A_1 у односу криве V, са горњим скраћењем одговарајућим $\alpha\beta$ и γ у V и Q.

Ако права PP' пролази кроз тачку O, која можемо узети да лежи у пресеку α и β т. ј. у темену основног троугла. Онда све праве које пролазе кроз пресек α и β представљене су једначином

$$\alpha-k\beta=0$$

а пошто праве које одређују тачке P и P' пролазити кроз O, пролазе и кроз P и P'; из се онда из обе поменутих једначина са обзиром на једначине из 1 и 2 лако нам даје коорд. P и P' дотичи из обе односа међу коорд. тачке C

$$\frac{U\alpha_1-2P\alpha_3}{U\beta_1-2P\beta_3}=\frac{V\alpha_2-2Q\alpha_3}{V\beta_2-2Q\beta_3}\ \ldots\ (3)$$

Сменимо ми из 3-4 $\alpha_3=\alpha$ $\beta_3=\beta$ $\gamma_3=\gamma$ видимо из 4 где је геометријско место тачака тачака C линија 4о. кад би тачке A и A' биле произвољно узете на U и V, и O на овој правој.

No ако су тачке сво ми спецификовали P, P' додирне тачке заједничке тангенте на U и V и O на правој $AA'=\alpha$ (страни основног троугла)

Једначина (3) прелази, пошто је $\alpha_1=\alpha_2=0$ у

$$PV\beta_2=QU\beta_1$$

~~...~~ због скраћења $P=Q\frac{(3\,14)}{(\ldots)}$ значи ми имамо да је

$$U=kV\ (5)$$

Једначине из 4. показују једначину

$$PV_{\beta_2} = QU_{\beta_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 6$$

за случај кад се A, A_1 и O налазе само на једној правој ако су α — сталне основне координате

Једначина (5 исказује да је геометријско место тачака C описане кроз пресек кв. U и V. Једначина 6 исказује да је геометријско место тачака C блок 3°, кад A и A_1 нису горње тачке, већ само леже на једној правој. Пошто је с тим што се непознате $\alpha\beta$ и γ у 6 јављају у 3°, показује U и V функцији 2° а P и Q које опнаре тачке A и A_1, односно U и V функције 1°.

— 61 — Увесимо у једном кв. који је дат једначином 1 § координате у симетралне кроз три тачке $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ $\alpha\beta$ — т.ј. кроз темене координате $\alpha\beta\gamma$

Нека је овај основни координатни. Коор. оне тачке у којој права која спаја једну тачку (C) кв. $\alpha\beta\gamma$ са једном тачком $\alpha'\beta'\gamma'$(C') добија се из исказане формуле у § 60, и оне су

$$S'\alpha - 2P'\alpha', \quad S'\beta - 2P'\beta' \quad S'\gamma - 2P'\gamma' \quad . \; . \; . \; . \; . \; 1$$

S' значи брак S у коме је $\alpha'\beta'\gamma'$ заменило, P' значи ознаку тачке $\alpha\beta\gamma$ односно брака S.

Нека је тачка $\alpha'\beta'\gamma'$ у пресеку β и γ онда је $\beta=\gamma$ а $\alpha' = m$ који можемо узети за јединицу. За овај случај је $S' = a$ $P' = S_1$ из § 6, и коор. тражене тачке су онда ово

$$a\alpha - 2S_1, \quad a\beta \quad a\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; 2$$

На сличан начин налазимо да права која спаја кроз $\alpha\beta\gamma$ и $(\gamma\alpha)$ секу кв. у тачки, чије су координате

$$b\alpha, \quad b\beta - 2S_2, \quad b\gamma \quad . \; . \; . \; . \; 3$$

Права која спаја обе ове тачке из 2 и 3, добија се из обрасца праве која пролази кроз 2. тачке $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ и $\alpha''\beta''\gamma''$, из обрасца у § 60.

Кад се ово учини имамо:

$$\frac{a\alpha - 2S_1}{a\beta} = \frac{b\alpha}{b\beta - 2S_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4$$

Једначина из 4. задовољена је коор. темена $(\alpha\beta)$ т.ј. она је независна од γ, јер у њој нема члана са којима стоји γ. Значи права која спаја тачке из 2 и 3 пролази кроз теме $(\alpha\beta)$. Једначина се може уз ово и овако написати

$$2S_1S_2 = a\alpha S_2 + b\beta S_1 \quad . \; . \; . \; . \; 5$$

Према овоме нам једначина из 5 исказује једначину која је задовољена коор. темена $\alpha\beta\gamma$.

Замјеном $a\alpha=S_1-h\beta-g\gamma$ и $b\beta=S_2-h\alpha-f\gamma$ обим једначина, које се добијају из једнач. -5- и -6-, добијамо из једначине бр. 5:

$$h(\alpha S_1+\beta S_2)+\gamma(fS_1+gS_2)=0 \quad \ldots\ldots \quad 6$$

из услова о конкурентности а како α β и γ задовољавају [illegible] S што је

$$S=\alpha S_1+\beta S_2+\gamma S_3=H=0$$

и једначина 6 онда прелази у

$$\gamma(fS_1+gS_2-hS_3)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7$$

Што је једначина праве CC' ... и као што видимо она не зависи од γ, што се непосредно аналитички знам, да како тачке A и B⁺, онда на основу одређујемо две тачке на правој AB или γ, које се тачком C' секу на истој правој.

\+ A, B и C су [illegible] основног троугла. A'B'C' су темена траженог троугла

Тражена темена A'B'C' налазе се у пресеку линија бр. 7 са КВ S, ~~[illegible]~~. За једну линију, јер ове 7 даје линију CC', а да смо пошли да за праве пролазе кроз βγ или γα, ми би добили још две линије сличне бр. 7, које би такође својим пресецима одређивале 2 темена. и т. д.

$$fS_1=gS_2=hS_3 \quad \ldots$$

представљају нам праве које спајају одговарајућа темена троуглова чије су стране α β γ и $S_1 S_2 S_3$. Очевидно се лако може увидети [illegible] пресечне тачке стране $S_1=a\alpha+h\beta+g\gamma$ и $S_2=h\alpha+b\beta+f\gamma$, а за ново [illegible] темена A т. ј. $\alpha=\beta=0$ γ, ма [illegible] у одрасцу [illegible] 6 [illegible] праву која спаја темена одговарајућих троуглова.

Кад се ово зна, онда се конструкција праве 7 може обавити изведеним:

Конструишемо троугао DEF али тако да су стране њихове поларе 3. стране тачака A B и C у односу КВ S. Праве AD, BE и CF, које спајају одговарајућа темена троуглова ABC и DEF секу стране троугла DEF у L M и N. LM, MN и LN су ~~[illegible]~~ стране које пролазе кроз темена траженог троугла. У пресецима ових страна КВ S леже темена тражених троуглова. Тачке су троуглова 654. и 123. (слика 35.)

За случај да су прве стране тачке ABC тачке конјуговане, или темена аутополарног троугла, проблем је онда неодређен и ми имамо ∞ много решења. Јер онда као што је и у слици -35- аутополарни троугли DEF и ABC се поклапају. L M и N нису одређене на правама истим и темена траженог троугла нису одређена.

-62- Кад две КВ U и V имају двојни контакт у правој mn, онда свака је тангента на ма коме од ове 2 круга, не [illegible] тангенте на V подељена хармонијски добијеном тачком A, пресечним тачкама са двема круговима B B' и кроз пол контакта mn A. (слика -36-)

Ово следује. Као специјалан случај § -53-, што ми напоменуто и лако доказано.

Ако означим једначину редног кв. у случају -36- са S а једначину контакта са R, онда је једначина другог прамена са $S+R^2=0$

Нека је прамен M дат једначином S и означим координате тачака K и K' са $\alpha'\beta'\gamma'$ и $\alpha''\beta''\gamma''$, онда ако означим коорд. једне ма које тачке X на правој q са:

$l\alpha'+m\alpha''$, $l\beta'+m\beta''$, $l\gamma'+m\gamma''$ и заменимо у једначини прамена $S+R^2=0$, онда с обзиром што је $S=0$ задовољено са $\alpha'\beta'\gamma'$ и $\alpha''\beta''\gamma''$ имамо као резултат супституције ову једначину

$$(lR'+mR'')^2+2lmP=0 \quad \ldots \quad (1)$$

Обе нам једначине одређују пресечне тачке праве кроз $\alpha'\beta'\gamma'$ и $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ и прамена $S+R^2=0$. Услов да обе једначине имају два једнака корена $\left(\frac{l}{m}\right)$ дају нам тангенту на $S+R^2$ које иду и кроз $\alpha'\beta'\gamma'-K$ и $\alpha_2\beta_2\gamma''-K'$. Тај је услов исказан у овој једначини:

$$P=-2R'R'' \quad \ldots \quad (2)$$

Из 2 и 1 имамо сад

$$(lR'-mR'')^2=0 \quad \ldots \quad (3)$$

R' и R'' значи јед. R у коју је $\alpha\beta\gamma$ замењено са $\alpha'\beta'\gamma'$ или са $\alpha''\beta''\gamma''$

Једначина под 3, иначе са једначином $R=0$ показује нам да су координате пресечних тачака A $l\alpha'-m\alpha''$, $l\beta'-m\beta''$, $l\gamma'-m\gamma''$. Обе тачке са тачкама $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ и додирном тачком тангенте: $l\alpha'+m\alpha''$, $l\beta'+m\beta''$, $l\gamma'+m\gamma''$; чине 4 хармонијске тачке.

-63- Тражи се једначина кв. тангенцијалне на 5 правих, α, β, γ, $A\alpha+B\beta+C\gamma$, $A'\alpha+B'\beta+C'\gamma$

Једначина $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=0$ представља нам све кв. тангенцијалне на три праве $\alpha\beta\gamma$. Пошто у истој једн. имамо још две константне неодређене $\frac{l}{n}$ и $\frac{m}{n}$, то онда ако усвојимо да је тај прамен тангенцијалан још на две праве онда ће и ове две непознате бити одређене.

Ако је права $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$ тангенцијална на прамен $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=0$, онда она мора бити равна тангенцијала прамена. Тангента овог прамена је у облику $\alpha'\beta'\gamma'$

$$\alpha\sqrt{\frac{l}{\alpha_1}}+\beta\sqrt{\frac{m}{\beta_1}}+\gamma\sqrt{\frac{n}{\gamma_1}}=0$$

Пошто одредба једначина и једначине $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ и $A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0$ представљају и саме праве, то су онда коефицијенти њихови сразмерни, и ми онда имамо две једначине између l, m n и AB . . .

$$\sqrt{\frac{l}{\alpha'}} = A \quad \sqrt{\frac{m}{\beta'}} = B \quad \sqrt{\frac{n}{\gamma'}} = C \quad \ldots \quad (1$$

$$\sqrt{\frac{l}{\alpha'}} = A' \quad \sqrt{\frac{m}{\beta_1}} = B' \quad \sqrt{\frac{n}{\gamma'}} = C' \quad \ldots \quad (2$$

Ако вредности $\alpha'\beta'\gamma'$ из ових једначина заменимо у једначину врха, она мора бити њима задовољена, јер су $\alpha'\beta'\gamma'$ њихови тангенције – или додирне њихове тачке. Кад се ово изврши; онде за одредбу l m и n имамо ове две једначине:

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{l}{A'} + \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} = 0 \quad \ldots \quad 3$$

3. Из 3 одреди $\frac{l}{m}$ и $\frac{n}{m}$ па замени у $\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$ па је задатак решен.

— 63(1) Ако се тражи КВ тангенцијален на правама α, β, γ, $\alpha+\beta+\gamma$ и $2\alpha+\beta-\gamma$; онда ће из обе једначине од 3 за овај случај испадати:

$$l + m + n = 0, \quad \text{и} \quad \tfrac{1}{2} l + m - n = 0 \quad \ldots \quad (4$$

Одређено $\frac{l}{m}$ и $\frac{n}{m}$ из ове последње једначине и замењено у једначину:

$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0$, даје за једначину КВ тангенцијалног на правама α, β, γ, $\alpha+\beta+\gamma$, $2\alpha+\beta-\gamma = 0$ ово:

$$2\sqrt{-\alpha} + \sqrt{3\beta} + \sqrt{\gamma} = 0 \quad \ldots \quad 5$$

63-(2). Тражи се КВ. тангенцијален на трима правама $\alpha\beta\gamma$ у ~~њиховим~~ половинама њихових дужина.

Ако ми сад означимо дужине тих страна са a b c и узмемо да неки је ~~т~~ троугао из тих трију страна основни троугао, онда је тражени знак:

$$\sqrt{a\alpha} + \sqrt{b\beta} + \sqrt{c\gamma} = 0 \quad \ldots \quad (6$$

Овај задатак изгледа да има један услов више но што је потребно. Праве 3 праве на којима је тангенцијалан и 3 тачке у половинама њихов дужина што 6 услова, а за одредбу једначине КВ нужна су само 5. Но и овде имамо 5, јер се један од услова сам, ниче, кад се сетимо да се линије што спајају половине троугла страна све секу у једној тачци.

— 63-3 — Тражи се КВ тангенцијален на једној правој у ∞, која је дата једначином $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ § 57а-1. ово у дужине основног троугла.

Према једначини под 3 ово §(63) између l m и n сачињаваца КВ и a b c сачињаваца ове праве мора постојати овај однос:

$$\frac{l}{a} + \frac{m}{b} + \frac{n}{c} = 0 \quad \ldots \quad 7$$

Познајући једначину услов да је кв. $\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}$ [illegible] тангенција на правој у ∞ — услове решења да је он парабола.

—64— Трилинеарно геометријско место тачака једн[illegible] кв. уписаног у троуглу $\alpha\beta\gamma$. (или кв. уписаних у троуглу $\alpha\beta\gamma$)

Ако са $\alpha'\beta'\gamma'$ означимо координате тачке једне, онда праве што спајају темена троугла $\alpha\beta\gamma$ са том тачком, представљене су једначинама:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}\;;\quad \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma_1}\,,\quad \frac{\gamma}{\gamma_1}=\frac{\alpha}{\alpha_1}\;\ldots\ldots \quad (1)$$

Праве што спајају другу тачку са теменима троугла $\alpha\beta\gamma$, пошто оне једнако узимају са страницама троугла $\alpha\beta\gamma$, то ако означимо коорд. друге тачке са $\alpha''\beta''\gamma''$, биће те праве представљене јед.

$$\alpha''\alpha=\beta''\beta\,,\quad \beta''\beta=\gamma''\gamma\quad \gamma''\gamma=\alpha''\alpha\;\ldots \quad (2)$$

из једначина под 1 и 2 имамо да су коор. $\alpha''\beta''\gamma''$

$$\frac{1}{\alpha'}\,,\ \frac{1}{\beta'}\,,\ \frac{1}{\gamma'}\;\ldots\ldots \quad (3)$$

Ако се сад тачка $\alpha''\beta''\gamma''$ налази у ∞, то оне задовољавају праву $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. Дакле имамо једначину

$$a\alpha''+b\beta''+c\gamma''=0$$ или једначину:

$\alpha''\sin A+\beta''\sin B+\gamma''\sin C$, где смо са A, B и C означили углове темена троугла које су странице a, b, c,

Геометријско место друге тачке налазимо врло [illegible] лако ако у последњу једначину заменимо $\alpha''\beta''\gamma''$ вредностима из [illegible] и добијамо:

$$\frac{\sin A}{\alpha'}+\frac{\sin B}{\beta'}+\frac{\sin C}{\gamma'}=0\;\ldots\ldots \quad (4)$$

Једначина нам под 4. казује да се тачка $\alpha'\beta'\gamma'$ налази на кругу [illegible] ако $\alpha''\beta''\gamma''$ налази на правој у ∞.

- 64- (1) За параболичну тачку у ∞ имамо обе једначине:

$$\alpha''\sin A+\beta''\sin B+\gamma''\sin C \quad \text{и из § 63 једначина} \quad \frac{l}{\sin A}+\frac{m}{\sin B}+\frac{n}{\sin C}=$$

или $\sqrt{l\alpha''}+\sqrt{m\beta''}+\sqrt{n\gamma''}=0$ пошто се тачке на правој у ∞ налазе услов да и параболи припадају: Одавде израчунате координате тачке у ∞ јесу $\frac{l}{\sin^2 A}$, $\frac{m}{\sin^2 B}$, $\frac{n}{\sin^2 C}$. Координате су друге тачке по једн. (3) овог §

$$\frac{\sin^2 A}{l}\quad \frac{\sin^2 B}{m}\quad \frac{\sin^2 C}{n}\;\ldots\ldots \quad 5$$

- 64-(2) Сад нам је врло лако одредити директрису обе параболе, јер је тачка тачке чије су координате дате [illegible] она је с обзиром на параболичну једначину дату у облику

$$\sqrt{l\alpha}+\sqrt{m\beta}+\sqrt{n\gamma}=0$$

представљена овом једначином:

$$l\alpha \sin B \sin C \cos A + m\beta \sin C \sin A \cos B + n\gamma \sin A \sin B \cos C = 0 \ldots 6$$

С обзиром на однос $\frac{l}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c}=0$, до ког смо дошли у § 63., једначина под 6 прелази у:

$$l \sin B \sin C(\alpha\cos A - \gamma\cos C) + m \sin C \sin A(\beta\cos B - \gamma\cos C) = 0 \ldots 7.$$

Једначина под 7 показује ~~[illegible]~~ да директриса пролази кроз пресечну тачку висина троугла $\alpha\beta\gamma$.

-65- Тражи се геометријско место [illegible] свију [illegible] у четвоространику $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Означимо са $a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta=0$ једначину једне покретне [illegible], ово је могуће учинити јер је једначина која треба да представља као функција других 3 [illegible]. Пошто је то покретна [illegible], она мора бити задовољена кроз коју тачку ~~[illegible]~~; а права ће бити показана и кроз друге тачке. Заменимо ли у ову једначину $\alpha, \beta\gamma$ и δ са $\alpha'\beta'\gamma'$ и δ' ~~[illegible]~~ добијамо:

$$a\alpha'+b\beta'+c\gamma'+d\delta'=0 \ldots 1$$

Како је $\alpha'=\frac{1}{\alpha''}$, $\beta'=\frac{1}{\beta''}$ ...; једначина 1 добија облик

$$\frac{a}{\alpha''}+\frac{b}{\beta''}+\frac{c}{\gamma''}+\frac{d}{\delta''}=0 \ldots 2$$

Једначина под 2 је геометријско место другог [illegible] свију [illegible] у једном четвоространику; и које као што се види линија трећег степена.

— Девета глава —

О полу и поларама у односу трију бракова другог степена (Конусних бракова)

—66— Дата су три кв. чије су једначине U, V и W; тражи се геометријско место оних тачака, чије се поларе у односу ова три брака секу у једној тачки.

Означимо коорд. тражене тачке са x y z. Те њене поларе у односу ових бракова биће:

$$+\quad U_1x+U_2y+U_3z=0;\quad V_1x+V_2y+V_3z=0;\quad W_1x+W_2y+W_3z=0.$$

Да се обе поларе секу у једној тачки, морају бити задовољене координатама оних тачака, које су дате једначином:

$$U_1(V_2W_3-V_3W_2)+U_2(V_3W_1-V_1W_3)+U_3(V_1W_2-V_2W_1)=0 \ldots$$

Једначина под 2. је резултанта елиминације xyz из једначина полара. Као што се види једначина под 2. је трећег степена, и зове се по проналасачу Jacobi-у, Јакобијана трију конусних бракова U V и W

+ $U_1\, U_2\, U_3,\ V_1\, V_2 \ldots$ значе прве изводе по x, y, z функција U, V и W

Врло је очевидно да ако се поларе једне тачке M у односу бракова U V и W секу у једној тачки, да се у истој тачки морају сећи поларе исте тачке у односу система бракова датих једначином $lU+mV+nW=0$. ++ Јер полара тачке M чије су ко. XYZ у односу 3 брака из система бракова, датих поменутом једначином ће бити:

++ обележно у односу 3 брака из обр. система

$$l(U_1x+U_2y+U_3z)+m(V_1x+V_2y+V_3z)+n(W_1x+W_2y+W_3z)=0$$

и ова полара мора бити задовољена ~~свим~~ пресечном тачком полара под 1; јер се до пресечне тачке долази [illegible] оне једн. или решавањем све 3. једначине под 1.

—67— ~~Ако~~ Поларе једне тачке A на Јакобијану J, као што смо казали морају пролазити кроз једну тачку — које поларе у односу ~~свију~~ 3 бракова система $lU+mV+nW$ пролазе кроз пресек полара тачке A.† Ако означимо сада ту пресечну тачку са B; јер видимо да и она мора бити једна тачка Јакобијане. На основу доказаних особина пола и поларе у § 20 увиђавно је да и поларе тачке B у односу 3) бракова система $lU+mV+nW$ морају пролазити кроз тачку A. Овим је доказано да је то једна тачка чије поларе пролазе ~~кроз~~ у односу [illegible] бракова ~~пролаз~~

† и то у односу брака U, V и W

које једну тачку. Сем тога ми смо мало час говорили о групи тачака Јакобијане једнога и B које пре- ... -сечени. Тачке на Јакобијани као што су A и B зову се одговарајуће тачке. (Слика 37)

На основу онога што смо рекли до сада, специјалне тачке кривих U, V и W се одређују из њега, и са специјалним тачкама обих ... [illegible] једних кривих, чине и хармонијске тачке — може се -казати да је права AB одређена хармонијски специјалним тачкама кривих U, V и W као и специјалним тачкама кривих криве $lU+mV+nW=0$, и одговарајућим тачкама Јакобијане M и тачкама A и B. Тако су у слици -37- $AM'BM^2$ и хармонијске тачке и т.д.

Тако ми на прави AB имамо четири тачака $M'M_2$, $M_2M_1^*$ и т.д., које са тачкама A и B чине хармонијске тачке. По §-22- права AB инволуторно одређена свима кривама $lU+mV+nW$, а то значи да су A и B двојне тачке у тој инволуцији. По групи двоструких тачака, у A и B имамо по две тачке, ... ако је која од кривих у ... на правој AB, то може бити само у двострукој тачки A или B. Ако се која крива у систему кривих распада на 2 праве, онда пресек тих правих не може бити ни где већ у једној од обих двоструких тачака у A или у B.

Обрнуто се овде може бити тако доказано. Нека се крива $lU+mV+nW=0$ распада на 2 праве, онда по §-10- пресек тих задовољава једначине:

$$lU_1+mV_1+nW_1=0 \quad lU_2+mV_2+nW_2=0 \quad lU_3+mV_3+nW_3=0$$

Ако би сад хтели да видимо какво је ... између обих пресека, елиминисали би l, m и n из обих ... једначина. Ова ... елиминација добија се једначина Јакобијане — од куда сад изводимо да је пресек обих двеју правих на које се распада крива $lU+mV+nW=0$ мора бити на Јакобијани. Пошто смо ми мало час рекли да је пресек тих двеју правих на AB, то онда на основу овог обрнутог изводимо да мора бити или у A или у B ... тачке Јакобијане.

Права AB сече Јакобијану још у једној тачки C, пошто је Јакобијана трећег степена. Ми онда можемо као што смо мало час показали узети да се пресек двеју правих, на које се распада крива $lU+mV+nW=0$, налази у C, но онда права AB има једну праву у две ... правих из C.

Јакобијана у односу групе кривих U V и W које су дате општим једначинама $ax^2+by^2+\dots$ $a'x^2+b'y^2+\dots$ $a''x^2+b''y^2+c''z^2+\dots$ је ова:

$$(agh)x^3+(bhf)y^3+(cfg)z^3-[(abg)+(ahf)]x^2y-[(cah)+(afg)]x^2z-$$
$$-[(abf)+(bgh)]y^2x-[(bch)+(bfg)]y^2z-[(caf)+(cgh)]z^2x-[(bcg)+(chf)]z^2y-[(abc)+2(fgh)]xyz=0 \;\dots 1$$

Где нам израз под нашим заградама значи детерминанту из коефицијената $a\,a'\,a''\;b\,b'\,b''$ – тако на пр. (abc) значи детерминанту из

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = (abc).$$

$$(abc) = a(b'c'' - b''c') + b(a''c' - a'c'') + c(a'b'' - a''b')$$

Јакобијана се обично бележи словом J, она је увек симетрична и у односу непознатих и у односу коефицијената abc….

-68- Помоћу јакобијане можемо решити велики број задатака. За ту узмимо ову:

Наћи Пв. која пролази кроз четири тачке ABC(D) и тангира се на површи W.

Узмимо неке се 4. тачке ABC и D налазе у пресеку двеју Пв. U и V. Онда општи облик је облика $U+RV=0$, који пролази кроз пресек U и V, интересује је сад каква R ваља да он одабере услову да је тангентан на W. К томе одредимо из услова тангентности између $U+RV$ и W, ако добијамо заменом a b .. са $a+Ra'$ $b+Rb'$ у услов тангентности између U и W. Где нам a b значе сачиниоце једначине U а a', b' сачиниоце од V.

Услов се тангентности између U и W добија из услова да једначина $\Delta R^3 + \Theta R^2 + \Theta' R + \Delta' = 0$ има два једнака корена. Ова ваља једначина даје вредности за R за које се $U+RW=0$ распада на 2. равне. Кад су наше две U и W тангентне онда се две тачке од 4. пресечних тачака између U и W поклапају и са два пара пресечних корена између U и W онда два корена једначине $\Delta R^3 + \Theta R^2 + \Theta' R + \Delta' = 0$ постају два једнака, јер нам ова једначина одређује R за три пара корена између две U и W, које се добијају заменом R у једначини $U+RW=0$

Према овоме услов тангентности између U и W је

$$\Theta^2\Theta'^2 + 18\Theta\Theta'\Delta\Delta' - 27\Delta^2\Delta'^2 - 4\Delta\Theta'^3 - 4\Delta'\Theta^3 = 0 \quad \ldots$$

Θ и Θ' значе за U и W оно исто у § 30 што за S и S', а Δ и Δ' дискриминанте U и W.

Да би сад нашли услов тангентности између $U+RV$ и W ваља у 1. заменити a са $a+Ra'$ b са $b+Rb'$,

Кад се ово изврши добићемо да се из 1. добија као резултат једначина 6° по R. Значи да за R имамо 6. вредности тј. 6 решења $U+RV=0$. Дакле кроз 4 тачке ABCD можемо повући 6 Пв. тангентних на површ W.

Тиме се 6 тачака од којима пресечни враци додирују врак W, налазе у пресеку Јакобијане трију вракова U V W и врака W.

Узмимо једну тачку M на пр. од пресечних тачака Јакобијане и врака W; онда њена полара у односу врака $U+kV$, који смо навели, мора пролазити кроз пресек полара исте тачке у односу врака U и W; а кроз пресек обих полара U и V мора пролазити и полара тачке M односно врака W, из доње пети тангенте у M на W, пошто је M лежи на враку W.

Ако ли ми сматрамо M као тачку у којој је врак $U+kV$ тангентан на враку W онда ћемо добити да мора да тангента у M на враку W и $U+kV$ као полара тачке M у односу врака $U+kV$, мора пролазити кроз пресек полара тачке M у односу вракова U и V.

Према овоме закључујемо да се исте тачке M, кроз које пролази КВ. који ... кроз пресечне тачке вракова U и V, налазе у пресеку врака W и Јакобијане вракова U V и W.

-69- Јакобијана се трију КВ које имају један заједнички автополарни троугао своди на три праве.

Тако ако имамо три врака U V и W којима је један заједнички автополарни троугао, онда су њихове једначине по § -28-

$$ax^2+by^2+cz^2=0\ ; \quad a'x^2+b'y^2+c'z^2=0 \quad a''x^2+b''y^2+c''z^2=0$$

Д.1.§67. $J = xyz \ldots 1$ Јакобијана се своди на три праве x, y и z на стране автополарног троугла.

По овоме ми можемо наћи стране автополарног троугла заједничког двама врацима S и S', јер ... зоваћемо Јакобијану изнету врака S, S' и коваријантног F види § -51- јер из следећег је јасно да је заједнички автополарни троугао враку S и S' и F заједнички.

Тако ако је $S = ax^2+by^2+cz^2 \ldots\ldots 2$

$S' = x^2+y^2+z^2 \quad \ldots \quad 3$

онда је F по § 51.

$$F = a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2 = a''x^2+b''y^2+c''z^2 \quad 4$$

Јакобијана ова три КВ 2. 3. 4. мора бити производ из страна автополарног троугла на основу једначине 1 овог §.

Ако се потражи Јакобијана ова 3 КВ. под 2 3 и 4 онда уведемо скраћења F, Θ Θ' Δ и Δ' односно вракова S и S', која смо узели у § -30-, наћићемо за једначину Јакобијане:

$$J^2 = F^3 - F^2(\Theta S'+\Theta' S) + F(\Delta'\Theta S^2+\Delta\Theta' S'^2) + F(\Theta\Theta'-3\Delta\Delta')SS'$$
$$-\Delta'^2\Delta S^3 - \Delta\Delta'^2 S'^3 + \Delta'(2\Delta\Theta'-\Theta^2)S^2S' + \Delta(2\Delta'\Theta-\Theta'^2)SS'^2 \ldots 5$$

Једначина под 5 је квадрат производа из трију линеарних функција, које нам претстављају стране автополарног троугла, заједничког вракова 2 3 и 4.

— 70 — Ако су 3 кб. U V и W, које имају једну заједничку тетиву RQ, онда се Јакобијана све три криве распада на праву RQ и кб. која пролази кроз обе тачке RQ. (слика -38-)

Зато ако означимо једначину криве U са U = 0 онда су једначине кривих V и W, пошто им је тетива RQ заједничка, дате обликом израза:

$$U+(RQ)(R'Q')=0 \quad \text{и} \quad U+(RQ)(R''Q'')=0$$

Ако је сад узмем троугао ABC који је образован од три тетиве, RQ R'Q' и R''Q'' за основни троугао и означим стране његове редом са x y и z, онда су једначине наших кривих

$$U=0 \quad U+XZ=0 \quad U+YX=0$$

ако сам означио са X заједничку тетиву све 3. криве – т. ј. RQ, а са Z и Y осталe две тетиве R_1Q_1 и R_2Q_2

Ако се израчуна јакобијана ових трију кривих добиће се ова једначина:

$$X(XU_1-ZU_3+YU_2)]=0 \quad \text{- - - -} \quad (1)$$

Знамо да све тачке на правој X као и на кб $XU_1+ZU_3+YU_2$ одговарају тачкама јакобијане. О овоме се најлакше уверавамо посматрањем тачака R и Q, видећемо да се оне секу у R и Q зато што су R и Q, које припадају нађеној правој X и кб, у исто време и тачке јакобијане. За сваку R и Q тачке кб XU_1-ZU_3 биће се из овог види је овај услов задовољен код $x=0$ $\left(\frac{y}{z}\right)^2=\frac{c}{b}$ [illegible] које представљају коорд. R и Q. [Тада је $\frac{m}{n}=\frac{U_3}{U_2}=\frac{y}{z}$ упоређено из једначине $U_3z+yU_2=0$, која се добија ако ставимо $x=0$ у једначину нађене кб чија је једна грана дата горњим ~~[illegible]~~ параметром с њеве стране у јед. (1) + одговара.

Јакобијана се 3 кб своди на једну праву и једну кб, кад је који од кб U V и W дат једначином L^2, где је L функција од x y z. За ову ћемо доказивање овај случај напишемо да је ова права права L.

$$x[ax^2+(by^2+cz^2+2fyz)]=0$$

\+ Кад развијем једначину 1. имам: ~~$x_1[ax^2+(by^2+cz^2+2fyz)]=0$~~

ако са U означим јед. +[illegible]. За би одредио пресечне тачке X и $U=0$ кад у U ставимо $X=0$ па онда имамо за коор. R и Q две вредности α, β, које се добијају из једначине $by^2+cz^2+2fyz=0$ ~~$\left(\frac{y}{z}\right)=\pm\sqrt{-\frac{c}{b}}$~~ или $\left(\frac{y}{z}\right)^2=-\frac{c}{b}$) ставимо их у $ax^2-by^2-cz^2-2fyz=0$ коор. R. ~~из $x=0$~~ $\left(\frac{y}{z}\right)^2=\frac{c}{b}$ онда одговарајућа је једначина 2-задовољена помоћу коор. пошто да кб нађена пролази кроз R и Q.

\+ $ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gxz+2fyz=0$

x са U_1 U_2 U_3 изводе обе једначине по x, y и z.

Други одељак

Полови и поларе код алгебарских линија 3ег степена

– Прва глава –

Поларе једне тачке код линија 3ег степена — о поларним кривама.

-1- Полара једне тачке M у односу криве S као линије 3° састављена са поларама поларе код линије 3° опет је права линија, као што ћемо ниже видети. Но осим ове линије има у том другом карактеристична линија више степена од њих звана поларним кривама, који овде играју улогу полара. До једначина ће тих линија доћи следећим путем.

-2- ~~Поларне криве~~: Ако имамо једну тачку M ван криве S слика (1), и нека су координате $x'y'z'$, па из нове тачке повучемо праву p, онда ћемо једначина:

$$f(\lambda x''+\mu x', \lambda y''+\mu y', \lambda z''+\mu z'') = 0 \; \ldots \; 1$$

решена по $\frac{\lambda}{\mu}$ одредиће број пресечних тачака $A, A_1 \ldots$ праве p и криве S дате једначином $f(xyz)=0$. Ово је за што ова једначина $f(xyz)=0$ мора бити задовољена координатама $\lambda x'+\mu x''$, $\lambda y'+\mu y''$, $\lambda z'+\mu z''$ једне ма које тачке на правој p што пролази кроз $M(x'y'z')$ и $N(x''y''z'')$, ако се ове тачке још налазе и на самој кривој.

Ако узмемо сад да се тачка N кроз коју пролази права а чије су координате $x''y''z''$, ~~налази на криви~~ координате xyz т.ј. да се налази на криву S, онда једначина 1 добија облик:

$$f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z') = 0 \; \ldots \; 2$$

Кад се једначина бр. 2 развије онда ћемо доб[illegible] обадвије једначине по λ и μ.

$$3 \quad \dots\dots \quad U\lambda^n + \Delta U\lambda^{n-1}\mu + \frac{1}{2}\Delta^2 U\lambda^{n-2}\mu + \dots \quad + \frac{1}{(n-1)!}\Delta^{n-1}U\lambda\mu^{n-1} + \frac{1}{n!}\Delta^n U$$

гдје само са U означавамо $f(xyz) = 0$ једначина брака бр. 5. а са ΔU, .. изводе ~~[illegible]~~ функције бр. 2. [illegible] или доцне пишу обје изразе

$$x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy} + z'\frac{dU}{dz} = \Delta U \quad \dots\dots \quad 4$$

$$x'^2\frac{d^2U}{dx^2} + y'^2\frac{d^2U}{dy^2} + z'^2\frac{d^2U}{dz^2} + 2y'z'\frac{d^2U}{dydz} + 2z'x\frac{d^2U}{dzdx} + 2xy\frac{d^2U}{dxdy} = \Delta^2 U \quad \dots \quad 5$$

и т. д.

Број је јасна ствар да је $\Delta^n U$ т. ј. у сачин[illegible] μ^n не може функција $x\,y\,z$. [illegible] је функција U бр. 1. а [illegible] изразу [illegible] обих сачинитеља [illegible] гдје је $\Delta^n U$ [illegible] сачинитељ λ^n само што је у њему $x\,y\,z$ замијењени са $x'\,y'\,z'$.

$I\ \Delta^{n-1}U$ функције $x \cdot y$ и z у [illegible] степену, [illegible] у ΔU $x'y'z'$ функције у првом степену. и т. д.

Сада само ми у степену сачинитеље од μ^n, μ^{n-1}, μ^{n-2} .. у једначини 3 да означимо са U' $\Delta U'$ $\Delta^2 U'$ .... означујући са U' функцију $f(xyz)$ у којој је $x\,y$ и z замијењено са $x'y'z'$, а $\Delta U'$ означава разлику од . у само x, y, z, и т. д. Ако сад узбројимо обе ове [illegible] означења за сачинитеље [illegible] онда имамо обр.:

$$\underline{\Delta^n U = U', \quad \Delta^{n-1}U = \Delta U' \quad \dots \quad \Delta^{n-p}U = \Delta^p U_1}$$

— Ми ћемо се сада бринути у разним случајевима сачинитељима $U_1\, U_2\, U_3$, $a\, b, c, h$ т. д. Треба нам за израз знати изводе U по $x \cdot y$ и z или доцне сачинитеље једначине по $x'y'z'$. А ако ово треба знати сачинитеље од $x_1, y_1, \dots$ у једначини бр. 5. $U_1'\, U_2'\, U_3'\, a_1'\, b_1' \dots$ знати нам је ако са [illegible] [illegible] и изводима $x\,y$ и z замијењени са $x_1\, y_1\, z_1$

Ова начина одређе посебних [illegible] брака у погледу [illegible] се Јохимсталове методе, се [illegible] само се [illegible] на неколико начина одређивати.

— 3 — Ako čelomno oznape jegne tačke $\alpha'\beta'\gamma'$ ~~...~~ kog kornorskih brakoba na deme ryaba koja je gawa odnocom usnesy $\alpha'\beta'\gamma'$ u $\alpha\beta\gamma$ koop. Rb. u ov jegnanom $P = 0$, koja je funkcijama kao rumway y jednanom $l^2 S^0 + 2lmP + m^2 S' = 0$, koja nam je ogpefubana specek usnesy jegne ryabe u braka S.

Y jednanom 3 § 2. (y—n—1) koja nam obge ogrefyje specek ryabe p kpos warky $M(x'y'z')$ uma ne jednor carunnoga y kone funkcijama xyz u $x'y'z'$ beh $(n-1)$. Nanar nam cbu on uzpasn usnore ognoce usnesy koop. warke M u waraka brakobux no one specerabrasy neporume kpyde, koje ce enasoro osnapu kog mmyja 2° nesnbily osnapnum kpydama.

$\Delta U = 0$, (tanke $x'y'z'$) je mmyja $(n-1)^0$ u nasobite ce ryba osnapna kpyda). $\Delta^2 U = 0$ je mmyje $(n-2)^0$ u sobie ce gryga osnapna kpyda u m. g. go $\Delta^{n-2} U = \Delta^2 U' = 0$ koja ce kpyda sobe osnapnu konunom brak (T. Rb) u $\Delta^{n-1} U = \Delta U' = 0$ osnapna ryaba warke $x'y'z'(M)$.

Ukore nam znaceabe mmyje u kakbe gaore ugpafy kod annelepcskux mmyje 2° bugeteato gogmuje.

— 4 — O osnapnum kpydama ca neomeepyjckor nregunwa

Ako ce cetamo osnape tačke O kog Rb. na deme mmyja p neomerpycko ut. tačaka (R) koji ygrobapazy yerobg:

$$\frac{2}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2}$$

ade nam R_1, R_2 znare specerne tačke Rb. S u ryabe a u ~~...~~ cnura (3) S.

Po Cotes-obog meopemu usnesy specernux waraka jegne ryabe a u braka n^0 S wucoyp obaj ognoc: (cnuka 3)

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \frac{1}{OR_3} + \cdots \frac{1}{OR_n} \quad \cdots \quad 1$$

rge nam $R_1 R_2 \ldots$ znare ocurjasba oma specernux waraka og 0. Jednanuna 1. wokasyje ga je sbek nozyta nerka na ryabog R_0 jegny warky R rujuje n. ogyra yzeura perusgoran bpegnocm ocurjasba og O pabna cymu perunpomux ocurjasba gryjux n specernux waraka usnor ryaka a u braka S. Kao mora je kog Rb. neomerpycko necmo tačak R. Suna ryaba, mačko je obge ounemo ryabe mmyja. Ozanyce nomenco obicko yljeqnam

Ozmaumo ca $U = 0$ jednanuny braka S (cnu 3) Ako warky O yzmeno za nozemak koop-cucmena, ~~...~~ u osnanumo y osnap. koop. jednanuny braka S ca:

$$-2- \ldots \quad A + (B\cos\theta + C\sin\theta)\rho + (D\cos^2\theta + E\sin\theta\cos\theta + F\sin^2\theta) + \ldots$$

Onda ga do godinu jednačiny opake [illegible] ce tačke R. [illegible] ugjedno u jednačine 2. OR_1, OR_2 na [illegible] [illegible] recipročne [illegible] dobiće u jednačine

$$A\frac{1}{\rho^n} + (B\cos\theta + C\sin\theta)\frac{1}{\rho^{n-1}} + \ldots = 0 \ldots \quad 2$$

[illegible] korenu recipročne ~~b~~ od korena jednačine rog 2, [illegible] [illegible] tačke opake a u tačke S, uzimamo da je 3 [illegible] korena

[illegible] sa znakom (−) [illegible] od [illegible] y $(n-1)^{om}$ člana, a to je:

$$-\left(\frac{B\cos\theta + C\sin\theta}{A}\right) = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \ldots + \frac{1}{OR_n} = \frac{n}{OR} \ldots \quad 3$$

Ako označimo [illegible] tačke R t. j. OR sa ρ onda nam jednačina 3 označava [illegible]:

$An + B\rho\cos\theta + C\rho\sin\theta = 0$ ili y Cartesi-jevim koord.

$$An + B\cancel{x} + Cy = 0 \ldots \quad 4$$

Dakle kao [illegible] nam jednačina (4) [illegible] [illegible] [illegible] tačka R je opaka [illegible]

Jednačina rog 4. je ~~[illegible]~~ $(n-1)$ [illegible] [illegible] tačke [illegible] jednačinom 2 [illegible] [illegible] [illegible] opaka, o [illegible] do ce [illegible] kad do y jednačiny $\Delta U' = 0$ [illegible] $x_1 = y_1 = z_1 =$ [illegible] ce 0 [illegible] y [illegible]. [illegible] o [illegible] [illegible] ce [illegible] y [illegible] 3.

— § 5 — Neka cy $x'y'z'$ koordinate tačke O. a koord. tačke R (y [illegible] 3) neka cy xyz. Onda ako označimo [illegible] jedne na koji tačke na [illegible] u opaby OR ~~[illegible]~~ od O ca λ a [illegible] tačke od R ja μ_n u [illegible] [illegible] [illegible] y § 2. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] tačke $R_1 R_2 R_3 \ldots$ je

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1}\mu \Delta U' + \frac{1}{2}\lambda^{n-2}\mu^2\Delta^2 U' + \ldots = 0 \ldots ($$

[illegible] [illegible] [illegible] nam jednačina [illegible] odnos $\frac{RR_1}{OR_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \ldots$

[illegible] [illegible] jednačine [illegible] opake je

$\Delta U' = 0$ u jednačine 1. $\Delta U' = 0$ znači [illegible] korena [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\frac{RR_1}{OR_1} + \frac{RR_2}{OR_2} + \ldots = 0$$

или с обзиром на слику, видимо је $OR_1 - OR = RR_1$, ... имамо ове следеће једначине:

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{OR_1} + \frac{1}{OR_2} + \cdots$$

а из свега овога може се лако видети да је геометријско место свих тачака R права линија, као што напоменусмо, ~~као што напоменусмо~~ да је геометријско место свих тачака $\Delta U' = 0$ или да је то поларна права тачке $x'y'z'$, као што смо то могли сад напоменути.

§ 6 — Ако би овако у даље ишли начином би да је $(n-1)^{ва}$ поларна крива или Rb. $\Delta^2 U' = 0$ (поларни) геометријско место свих тачака, које одговарају условима:

$$\sum \left(\frac{RR_1}{OR_1} \cdot \frac{RR_2}{OR_2} \right) = 0 \; \ldots \qquad \text{или}$$

условы $\sum \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1} \right) \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_2} \right) = 0 \; \ldots \qquad 2$

и т.д. за остале поларне криве. Тако ако се са OR означи почетне криве n^o а са Or почетне поларне криве једне тачке $x.y.z$, онда су особине поларне криве R^r реда изражене овим једначинама:

$$\frac{1}{n} \sum \frac{1}{OR} = \frac{1}{R} \sum \frac{1}{Or}$$

$$\frac{1.2}{n.(n-1)} \sum \frac{1}{OR_1 \, OR_2} = \frac{1.2}{R.(R-1)} \sum \frac{1}{Or_1 \, Or_2}$$

$$\frac{1.2.3}{n.(n-1)(n-2)} \sum \frac{1}{OR_1 \, OR_2 \, OR_3} = \frac{1.2.3}{R(R-1)(R-2)} \sum \frac{1}{Or_1 \, Or_2 \, Or_3} \ldots$$

Друга глава

О хармонијским код кривих линија n°

-7- Ми смо код конусних праваца видели да се хармонијски полови тачке O. у ∞. То исто важи и за линије алгебарске n°.

Ако је тачка O. није коорд. почетак $x_1 y_1 z_1$ онда у ∞ онда сви правци из O иду || са правцем a на коме је била тачка O и то је тачку O помакнули у ∞. Поларна права p, која дели хармонијски [illegible] тачака R, који су одговарајуће услову:

$$\sum \frac{RR_1}{OR_1} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

сад је хармонијско место тачака R који одговарају услову:

$$RR_1 + RR_2 + RR_3 + \dots = \sum RR_1 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

пошто је $OR_1 = \infty R_1 = \infty R_2 = \infty R_3 \dots = \infty R_n \dots$

Из једначине 2. можемо закључити [illegible] хармонијске праве тачке у ∞ или [illegible] у облику [illegible] хармонијског правца n°. Та особина [illegible]:

Хармонијско место средине свих тачака на паралелним правцима a, од којих свака [illegible] пресечних тачака [illegible] са линијом n°, [illegible] права тачке у ∞ или хармонијска линија n°. (сл. 4)

-8- Тачке O у ∞ и остале поларне криве [illegible] хармонијски [illegible] кривих хармонијских правца n°.

Тако ми конусни правац, који је дат [illegible] $\Delta^2 U = 0$ или тачкама које одговарају услову:

$$\sum \left(\frac{RR_1}{OR_1} \cdot \frac{RR_2}{OR_2} \right) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

За случај кад тачка $O(x_1 y_1 z_1)$ [illegible] у ∞ [illegible] хармонијски конусни правац тачке O у односу [illegible] n°. ~~[illegible]~~ [illegible] једначина $\Delta^2 U = 0$ [illegible] хармонијска, јер једначина [illegible] због $OR_1 = R_2 O = R_3 O = \dots$ изгледа

$$0 = \sum (RR_1 RR_2) = [RR_1 RR_2 + RR_1 RR_3 + RR_1 RR_4 \dots] .$$

Или с обзиром на слику (4), једначина основна, која нам ~~даје~~ се испоставља особину тачака R које имају одговарајући ... RB, између осталих:

$$\sum (OR - OR_1)(OR - OR_2) = 0 \quad \ldots \ldots (3)$$

Тако ако и даље будемо исто наставимо да једна крива мења своју позицију ... једна тачка у ∞ ... а ово је свега (n-1). Међутим ... : n-2. Криволинијска ... мења $\alpha(n-1)^0$ до 2^0 а један 1^0 ... (сл 4)

— 9 — Ценит кад ... мења n^0. Пре него што ... обележимо ... однос ... једначине ..., где ће ... једначину тачке, као ... видимо како стижемо са ценитима кад мења n^0.

Ако са λ, μ и ν означимо ... координате које једне праве, онда су које једне тачке ~~...~~ $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$ или ова је права ... кроз тачку ... $\alpha\beta\gamma$. Ако узмемо да су величине λ, μ и ν ... ~~...~~ ... онда нам $\ell : m$ изнесе однос синуса углова између праве $(\lambda \mu \nu)$ и $(\lambda' \mu' \nu')$ ... ~~...~~ $\ell\lambda + \mu\lambda'$, $\ell\mu + m\mu'$, $\ell\nu + \mu\nu'$.

Једначина: Λ

$$\Lambda = U\ell^n + \ell^{n-1} m \Delta U + \frac{\ell^{n-2}}{2!} m^2 \Delta^2 U + \frac{\ell^{n-3}}{3!} m^3 \Delta^3 U + \cdots \quad (2)$$

аналогно облику једначине коју смо раније навели, даће нам однос синуса углова које се добијају кад се греде између ... правих ..., која се може ... на криву S $(U = 0)$ из пресека ових двеју правих.

(слика 5) Тако да за ... R једне праве OP имамо ...:

$$\sum \left(\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1 PO}\right) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

а ово се добија из услова: $\Delta U' = 0$ из једначине (... је ... нам даје U представља једначину криве S у ... а не у ... координатама.)

Резолуција ... (2) каже да из сваке тачке на правој OP (слика 5), $T_1 T_2 \ldots$ ако будемо повлачили тангенте на криву S, онда ће из сваке ~~...~~ $T_1 T_2 \ldots$ моћи повлачити тачке праве $TR, T_1R, T_iR \ldots$ које одговарају условима (2).

-68-

Другим речима све се ове праве PR, P_1R, P_2R ... сијеку се у једној тачки на пр. у R. Ако сад права OP оде у ∞ онда се ове праве одређују из услова:

$$\sum(\sin RPR_1) = 0 \quad \ldots \quad (3$$

и пресечна тачка добивена т. ј. тачка R, која представља праву ... сматраће се центром брака s. Овај је задатак обратни од оног кад је тачка O била у ∞ у (3 · 7)

Ево шта би ово значило, кад би брак S, кога смо ми узели за линију n^0 био брак 2^0

За случај где је права OP у коначној даљини имали би где је $\sum \frac{\sin RPR_1}{\sin R_1TO} = 0$

$$\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1TO} + \frac{\sin RTR_2}{\sin R_2TO} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sin RPR_1 \cdot \sin R_2TO}{\sin R_1PO \cdot \sin RPR_2} = -1 \ldots (4$$

а ово значи, да ако из једне тачке P на правој OP повучемо на $R6$ 2 зрака и у четвртом зраку P нађемо зрак PR, да одговара услову ово онда је он четврти хармонички према осталим зрацима у односу према њима. Пак се тачка праве OP налази у пресеку ове 4. хармоничког и другог 4. хармоничког кога би нашли кад би из друге тачке на правој OP повукли 2 тј. на $R6$ и од њих четврти хармонички. Па нам јасним ово 4. тачке да све тачке четвртог хармоничког морају пролазити кроз једну тачку а то није ништа друго до ове саме праве, кад права OP оде у ∞ видећемо да ове праве OP пролазе центром брака ове, а оваквог брака и кад линија n^0.

Тај аналитички можемо овде упростити ако уместо синуса узмемо стране OP TR_1, TR_2 ... углова хармонична одређена из тачака R_1R_2 ... (сл. 5) на правој другој OP и на зраке који пресецају тангентима из појединих тачака на правој OP одређују четврти хармонички. Ово се може учинити ако се синуси ~~тих~~ страницама ~~...~~ странама R_1O' $R'M'$, R_2O_2 R^2M^2 ... (слика 5) ~~...~~ из троугла $O'R_1PR_1$ и троугла, где O' ~~...~~ троуглом $R'M'P$ где M' имамо:

$$\frac{\sin RPR_1}{\sin R_1PO_1} = \frac{M_1R_1}{R_1O_1}$$

Одатле сад реченице из 1. и 3. у обзир параграфа имаћемо:

$$\sum\left(\frac{M_1R_1}{R_1O_1}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \sum(M_1R_1) = 0 \quad \ldots \quad (5$$

—10— Центар једног брака може бити као и код компоненти бракова, а то је у пресеку двеју ортогоналних правих двеју тачака на којих на правој у D.

Као што две на које тачке на правој у D имају и своје ортогоналне кругове у односу брака n°, онда јасно следи да код бракова n° не само једне тачке које нам репрезентују центар КВ, имамо још и других тачака које одговарају центрима. Такве су све оне тачке које се налазе у пресеку ортогоналних кругова тих двеју тачака.

Тако у пресеку првих ортогоналних кругова двеју тачака А и Б на правој а у D неће $(n-1)^2$ тачака које одговарају центрима брака n°; у пресеку других ортогоналних кругова који су $(n-2)^\circ$ имамо $(n-2)^2$ тачака, које одговарају такође ~~[illegible]~~ центрима; у пресеку трећих ортогоналних кругова који су $(n-3)^\circ$ имамо $(n-3)^2$ тачака као центара брака n° и т.д. до 1. тачке које неће у пресеку ортогоналних компонентних бракова тих двеју тачака А и Б, и до једне тачке која неће у пресеку ортогоналних правих истих тачака (А и Б) и коју смо ми у § 9 узели као да нам представља центар брака n°.

А ако се сетимо онога што смо у § 8 рекли о криволинијским дијаметрима код бракова n° онда је јасно да 1. тачка у пресеку ортогоналних КВ. тачака А и Б одговара дијаметралном компонентном браку, остале пак тачке које неће у пресеку кругова ортогоналних тачака А и Б одговарају другим криволинијским дијаметрима.

Према свему овоме имамо, да једна линија алгебарска n° има свега авакво ~~дија~~ $(n-2)$ дијаметара, ~~које~~ од којих криволинијских и 1. праволинијски, свега $n-1$; да иста линија има $(n-1)^2+(n-2)^2+(n-3)^2+ \dots +4+1$ тачака које би одговарале центрима истог брака.

Трећа глава

— О неким особинама код поларних кривих —

— § 11 — Ми смо у § 3 видели да је прва поларна крива тачке $O(x_1 y_1 z_1)$

$$\Delta U = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

друга поларна крива исте тачке је

$$\Delta^2 U = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Ова једначина се може изразити и овако написати $\Delta(\Delta U) =$. На основу ове последње изводимо да је друга поларна крива једне тачке $(x' y' z')$ у односу криве U исто што и прва поларна крива исте тачке у односу криве $\Delta U = 0$.

Уопште узев можемо рећи:

$$\Delta^{l+k} U = \Delta^k(\Delta^l U) = \Delta^l(\Delta^k U) \quad \ldots \quad 3$$

што је $(l+k)$-та поларна крива једне тачке $(x_1 y_1 z_1)$ у односу криве $U(=0)$, l-та крива у односу криве $\Delta^k U$, или k-та крива у односу криве $\Delta^l U = 0$.

— 12 — Ако се једначина $U = 0$ једне криве n^o реда хомогеном ... и замени x и y са $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, то се онда може овако написати:

$$z^n U_0 + U_1 z^{n-1} + U_2 z^{n-2} + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

где $U_0\ U_1\ U_2 \ldots$ значе функције x, y при чему U_0 функцију x, y нултог степена, U_1 првог степена, U_2 другог и т. д.

Ако сад тражимо поларне криве тачке која се налази у почетку тј. тачке O где је коорд. $x_1 = y_1 = 0$, онда је по показаном, поларна права

$$n U_0 z + U_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1'$$

што се диференцијалењем $x' U_1 + y' U_2 + z_1 U_3 = 0$ има сад изједначимо само по z_1.

Понављањем ово:

$$\frac{1}{2} n(n-1) U_0 z^2 + (n-1) U_1 z + U_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

итд.

Једначина кубика је:

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + 3a_2 x^2 y + 3a_2 x^2 z + 3b_1 y^2 x + 3b_3 y^2 z + 3c_1 z^2 x + 3c_2 z^2 y + 6m\,xyz = 0$$

у ово написано хомогеном. Ако раде такве радимо упрошћење, једначину можемо довести — Хесеову у најпростијој форми — каноничној форми:

$$x^3+y^3+z^3+6mxyz=0 \ldots \ldots \quad 3$$

на коју се једначину увек може свести једначина 3° у нехомогеном облику.

Једначина од 3. је сад наше $U=0$

Поларе је конусна крива од тачке $O(x_1,y_1,z_1)$

$$x_1U_1+y_1U_2+z_1U_3=0 \ldots \ldots \quad 4$$

или с обзиром на јед. 3

$$x_1(x^2+3myz)+y_1(y^2+3mxz)+z_1(z^2+3mxy)=0 \ldots 5$$

За тачку O у бесконачности је прва поларна крива $z_1(z^2+3mxy)=0$ из 5 за $x_1=y_1=0$ 6

или што је равно по једн. 2.:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)U_0z^2+(n-1)zU_1+U_2=0 \ldots \quad 7$$

Где је једначина од 3 може и овако написати:

$$U_3z^{-3}+U_2z^{-2}+U_0=0 \ldots \ldots \quad 8$$

где је $U_1=0$ из 7 и 3 видимо сад да је

$$U_3=x^3+y^3 \quad U_0=1, \quad U_2=6mxy \ldots \quad 9$$

6. Кад се вредности из 9 ставе у 8 имамо једначину од 7.

Једначина конусне праве је: $\Delta^{n-1}U=0=\Delta U'$ или за наш пример $\Delta^2U=0$ или $\Delta U'=0$

$$x(x_1^2+3my_1z_1)+y(y_1^2+3mx_1z_1)+z(z_1^2+3mx'y')=0 \ldots 10$$

или за тачку у бесконачности где је $x_1=y_1=0$ је једначина 10

$$zz_1^2=0 \ldots \ldots \quad 11$$

или по обрасцу 1' овог параграфа

$nU_0z+U_1=0$ вредности кад се једначина 8, $U_1=0$ $U_0=1$, то је оба вредности једначине иста са једначином 11. Кад се она скрати са z_1^2, а обе вредности са n за овај случај равно 3.

—13— [illegible] $x'y'z'$ [illegible] $U=0$ [illegible] $\Delta U'=0$, [illegible]:

$$xU_1' + yU_2' + zU_3' = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

$U_1' U_2' \ldots$ [illegible] $U_1 U_2 \ldots$ [illegible] U' [illegible] U [illegible] $x \cdot y \cdot z$ [illegible] $x'y'z'$.

[illegible] xyz [illegible] $x'y'z'$ [illegible]:

$$x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

[illegible] 2 [illegible] $x'y'z'$ [illegible] 2 [illegible] x, y, z [illegible] 2 [illegible] x, y, z. [illegible] $x'y'z'$ [illegible] xyz [illegible] $x'y'z'$ [illegible] 1 [illegible] 2. [illegible] $x'y'z'$ [illegible] 2 [illegible] $x'y'z'$. [illegible]

[illegible]

—14— [illegible] § 10.

[illegible]

[illegible] a [illegible] A и B [illegible] n^0 $U=0$, [illegible] $(n-1)^2$ [illegible] $(n-1)^0$ [illegible].

Тих $(n-1)^2$ тачака (§ 13) су оне тачке чије се прве поларе у односу криве $u=0$ морају поклапати са правом АБ; јер све тачке на ~~кривој~~ правом поларном кривој тачке А јесу (по § 13) тачке чије ~~праве~~ прве поларе пролазе кроз А; а све тачке на првој поларној криви тачке Б су тачке чије прве поларне пролазе кроз Б; пресечне тачке ~~свих~~ прве поларних крива тачака А и Б су тачке чије поларне праве морају пролазити и кроз А и кроз Б т.ј. то су тачке чије се прве поларе морају поклапати са правом АБ.

Ове се $(n-1)^2$ тачака зову половима праве АБ.

Тако би исто нашли да има $(n-2)^2$ тачака које леже у пресеку других поларних крива тачака А и Б на правој АБ, а то су ~~тачке~~ тачке чији поларни конусни пресеци пролазе кроз А и Б и т. д.

Ово исто смо овде изнели мислећи да поступно објашњавамо излагање о дефиницији у § 10; јер су дефиниције полова праве АБ у D; а одавде увиђамо да једна права АБ има $(n-1)^2$ полова у пресеку првих поларних крива њених двеју тачака; и $(n-2)^2$ полова у пресеку другихполарних крива и т. д.; и 4 пола у пресеку поларних КП тачака А и Б; и 1 пол у пресеку поларних правих тачака (А и Б).

— 15 — Прва поларна крива, као и све остале поларне криве до поларне праве пролазе кроз тачку чије су то поларне криве, кад се исте тачке налазе на кривој $U=0$

Ако означимо коорд. тачке О са x, y, z, онда ће прва поларна крива:

$$x' \cdot U_1 + y' U_2 + z' U_3 = 0 \quad \text{или} \quad x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} = 0$$

За $x' = x$ $y' = y$ $z' = z$ постаје једначина ~~због~~ познате особине хомогених функција овеједи:

$$x \frac{dU}{dx} + y \frac{dU}{dy} + z \frac{dU}{dz} = nU = 0$$

т. ј. разликује се од изводне функције U само у једној константи n као множитељу. Ово значи да онда коорд. тачке О задовољавају не само криву U на којој се налазе већ и прву поларну криву. Ово би се могло доказати и за остале поларне криве, јер ~~за~~ код сталне диференцијације једне хомогене функције по независним њене функције, за резултат даје увек њену функцију.

— Четврта глава —

Додатак о сингуларним тачкама кад криве имају n^{ог} степена

—16— Нека нам је једначина:

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \dots \dots = 0 \dots (1)$$

представља једначину криве n^o у Декартовим координатама. Извесно је да кад се почетак коорд. система налази на самој кривој да онда члан A мора бити нула, јер једначина (1) мора бити задовољена координатама почетка $(x=y=0)$, што је случај кад је $A=0$.

То исто важи и за једначину:

$$A + (B\cos\theta + C\sin\theta)\rho + (D\cos^2\theta + E\cos\theta\sin\theta + F\sin^2\theta)\rho^2 + \dots \dots = 0 \dots (2)$$

Кад се почетак узме на кривој онда је $A=0$, ова је једначина дељива са ρ и онда остаје онда $(n-1)^o$ по ρ а то значи да свака права из тачке о као почетка сече криву S чија је једначина (2), још у $(n-1)$ тачака.

Но ако је θ такво да је, поред $A=0$ и

$$B\cos\theta + C\sin\theta = 0 \dots \dots (3)$$

онда ће једначина (2). бити дељива са ρ^2, а то значи да се из почетка може повући једна права под таквим углом θ, који се из једначине (3) одређује и та права пролази кроз почетак и још кроз $(n-2)$ тачке, дакле кроз $(n-1)$ тачака свега, значи да пролазећи кроз почетак пролази кроз две тачке различите. Та права зове се тангента почетка. и дата је једначином

$A + B\cos\theta + C\sin\theta = 0$ или у Cartesi-јевим коорд. са једнач. $A + Bx + Cy = 0 \dots (4)$

Ми можемо обрнуто рећи, ако нам је једнач. криве n^o дата једначином:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 0$$

где нам u_0 значи члан нулти, u_1 значи члан где x и y улазе у 1^o, и т.д., то је онда једначина тангенте почетка:

$$u_1 = 0$$

—17— Но ако су у једначини (2). A B и C сви ће равни нули, онда ће скраћеном једначина је свега дељива са ρ^2, али но сад на која права положена кроз почетак сече криву у (n-1) тачака тј. спојена кроз почетак као кроз две обичне тачке. У овом се случају почетак зове двојна тачка

двоје и о тачки. Но ако поред ишчезавања једначина A, B и C даје:

$$D\cos^2\theta + E\cos\theta\sin\theta + F\sin^2\theta = 0 \ldots\ldots (1)$$

онда знамо да се кроз почетак као двојну тачку могу повући две праве које спајају кроз њу обичне тачке, јер је сад једначина (1) § 16. дељива са ρ^3; а могуће је повући две праве јер је једначина 1. 2° по θ. Закле из једне тачке на кривој n° S, која је очевидно да све праве кроз сад спајају кроз две узастопне тачке могуће је повући две праве које спајају кроз њу обичне тачке. Ове праве одређене једначином од 1; или једначином која се добија од 1 дељења, кад се исти помножи са ρ^2 и представи у Cartesi-јеве коорд., а она је

$$Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

брак од две праве које се зову тангенте у двојној тачки. Одавде видимо да од свих правих које се у двојној тачки могу повући и за које се може рећи да су тангенте у двојној тачки, и да је према томе у двојној тачки могуће повући две тангенте. Једначина ових тангената у двојној тачки је

$$u_2 = 0$$

ако је $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots = 0$ једначина брака n° кад је двојна тачка узета за почетак.

—18— Двојне су тачке разне врсте и зависе од правих датих једначином од 2.

1) Ако су обе тангенте дате једначином од 2 реалне онда се двојна тачка у којој су оне две праве тангенте, назива чвор (noeud)

2). Два корена једначине од 2 или $u_2 = 0$ могу бити имагинарна и онда се двојна тачка зове коњугована (point conjugué) или акнодална (acnodal). Обе је за ову тачку коорд. обе тачке задовољавају једначину криве али она тачка не припада самој криви, знак је да има такве тачке и ово кад сама брака из које положене праве секу брак не у n већ у (n-2) као што одговара двојним тачкама. ~~Коњугована~~ кроз које пролазе праве као кроз две обичне тачке

3) једначина $u_2 = 0$ може имати два једнака корена онда се двојна тачка зове тачком повратном или стационарном (point de rebroussement, stationnaires cuspidaux)

о чему ћемо обо доцније на једном примеру говорити.

—19.— Ако су у једначини 2 § 16 од једног реда A, B, C, D, E и
два равна нули онда су једначине 2 дате деобом са ρ^3 зна-
да су почетак двојна тачка, да су слике праве добијена из
њег пролазиле кроз ову троструке тачке.
Таква се тачка назива 3 тобе тројна
тачка.
Као и за двојне тачке тако и за тројне тачке и-
мо поделу, а оне се оснивају на броју тангената у тој тачки.
Почетак и у тројним тачкама могу добити такве праве, које про-
лазе кроз 4. тачке троструке — т.ј. које су биле тангенте у тројним
тачкама, и које су се одређивале једначином

$$u_3 = 0$$

сличном показаном у § 17. Као онда као и § 18 по природи ова-
кве одређује се природа тројних тачака. Пошто почетна је
$u_3 = 0$ једначина 3° ст. онда можемо разликовати 4 врсте
тројних тачака, т.ј. a) где су све три тангенте реалне
и то a₁) све различне и a₂) две једнаке, a₃) све три једнаке (b)
једна реална а две имагинарне.

Сличном показаном изводу имамо сад услов
да је почетак тачка k-ог реда, да све коефицијенти x и y до
k-ог степена x и y буду равни нули, и да нам онда једначина б
нова изгледати овако:

$$u_k + u_{k+1} + \dots = 0 \quad \dots \dots \quad 1$$

У тачци k-ог реда могу се добити k тангената одре-
ђених једначином:

$$u_k = 0 \quad \dots \dots \quad 2$$

Према томе сад да ли су тангенте све реалне, све
различне или неке и једнаке, одређујемо специје тих
тачака.

—19a— Тројна се тачка може сматрати као
пресек три двојне тачке, мултипла тачка k-ог реда као
да важи за $\frac{1}{2}k(k-1)$ двојних тачака.

Замислимо да имамо k правих линија које
имају систем $\frac{1}{2}k(k-1)$ двојних тачака (којих има). Ако све ове праве
пролазе кроз једну тачку онда је ово мултипла тачка k-ог реда јер к-
кроз њу пролазе k правих или k гране криве пролазе, кад су ту
нагомилане у пресецима од k правих, што је све једно. Дакле
мултипла тачка k-ог реда вреди као што бисмо за $\frac{1}{2}k(k-1)$
двојних тачака система k

—20— Једна крива 2° има ограничен број

двојних тачака, кад се иста крива нађе растављена на криве нижих степена.

Тако линија 3° не може имати 2 двојне тачке, јер би онда значило да линију 3° једна права сече у 4 тачке, пошто би иста права која их спаја имала обе двојне тачке.

Линија 4.° не може имати 4 двојне тачке, јер би значило да конусни пресек који пролази кроз ове 4 тачке и још кроз једну сече криву 4° у 9 тачака, а то пресецање је могуће само у 8 = 2.×4.

Јачије линија $n°$ не може имати више двојних тачака од $(n-1)(n-2)/2$, ~~онда~~ јер ако би рецимо имала само једну више, онда би кроз $(n-1)(n-2)/2+1$ тачку и кроз $(n-3)$ других тачака криве могли повући криву степена $(n-2)$, која би према овоме секла криву у:

$$2\left[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+1\right]+n-3 \quad \text{тачака или у}$$

$$n^2-2n+1 = n(n-2)+1 \ldots$$

што је немогуће, јер ми знамо да између крива $n°$ и $(n-2)$ може бити само $n(n-2)$ пресечних тачака.

-20а- Доказати ако се једна тачка пресека између двеју кривих U и V стопи за двојну тачку на једној од кривих U или V, то онда та тачка вреди за 2 тачке међу пресечним тачкама U и V. Ако је тачка двојна на обема онда вреди за 4 тачке. Ако је тачка $k^{ог}$ реда на једној кривој а $l^{ог}$ реда на другој онда међу тачкама пресека U и V вреди за lk тачака.

Тако на пр. ако имамо k линија правих у систему и посматрамо пресек овог система са системом l правих. Свака пар[?] даје kl пресечних тачака. Но ако све праве оба система пролазе кроз једну тачку на једној правој другог система, то онда та тачка вреди међу пресечним тачкама за k тачака и према овоме има сад $k(l-1)$ пресечне тачке између правих k и l.

Кад су две криве U и V још и таквог положаја у којој од пресечних тачака, онда се опет та пресечна тачка сматра да вреди две тачке, јер те две криве у таквим тачкама имају две коинцидирајуће тачке. Ако је то једнострука тачка на U или V или на обема, па се још та тачка налази у вишој заједничкој, онда то доказане важи увек знаком водећи рачуна о вредности тачака, међу пресечним тачкама између U и V.

-21- Као што смо у прошлим ~~одељцима~~ параграфима видели да имамо имагинарне тачке, тако ћемо се у овом 3. [illegible] са имагинарним ~~тачкама~~ правама.

Потражимо услов да је права x [illegible] тангента, као што смо пре израчунали да је почетак O вишеструка тачка. Овај ћемо услов исписати из једначине:

$$A + BX + DX^2 + GX^3 + \dots PX^n = 0 \dots 1$$

која нам даје пресечне тачке осе X и криве n^o S.

Једначина се под 1 може и овако написати:

$$P(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\dots = 0 \dots 2$$

где су $a, b, c, d \dots$ корени једначине под 1, или са геометријског гледишта то су вредности x за пресечне тачке криве S и осе X.

Права ће X бити тангента ако се две од њених пресечних тачака поклапају, или ако су два корена од $a, b, c \dots$ једнака, нпр. ако је $a = b$

Онда се једначина под 2 може написати овако

$$P(x-a)^2(x-c)(x-d)\dots = 0$$

и права је X тангента у тачки $y=0$ $x=a$.

I Ако је $A = B = 0$ онда је једначина 1 дељива са x^2 значи да су њена два корена равна нули, а то значи да је X оса тангента у почетку, ~~а почетак је у овом случају~~

Ако је једначина 1 реална а ми знамо да су њена 2 корена $a = b$ имагинарна, то онда и њена два друга корена морају бити једнака $c = d$, који су такође имагинарни и са првим конјуговани, и ово [illegible].

II) А ако међу кореницима $a\,b\,c\,d$ .. постоји овај специјални однос онда је X оса двојна тангента, ј. постоји однос $c = a$ и $d = b$, а то је да се 4 од пресечних тачака

X осе и криве S по две и две поклапају.

Посебан случај имамо размотривши обе случаје:

1) a и b оба реална и друга [illegible] права X је тангента у тачкама $y=0$ $x=a$, $y=0$ $x=b$.

2) a и b имагинарна, онда је X оса двојна тангента али у двема имагинарним тачкама.

III) Ако су 3 корена једначине 2 једнака онда је X оса ~~права~~ тангента двојна звана стационарна

Једначина 2. реда нам одређује пресеке x осе и криве S; је сад

$$P(x-a)^3(x-b)(x-d)\cdots=0 \qquad 3$$

Ово је двојна тангента ~~(се додирује)~~ реда која пролази кроз једну тачку, у којој се 3 поклапају. Ако ли сад пример n° схватамо као алгебарски правих онда је вероватно, да права која је одвојена у тој тачки засеца и за то се та тангента назива сечица, оскулаторном тангентом. Тачка контакта ове тангенте и криве n° назива се инфлексионом тачком. (point d'inflexion) (тачка 7 тачка N је тачка инфлексиона)

За $A=0$ $B=0$ $D=0$ почетак је тачка инфлексиона и линија x-ска је тангента у тој тачки. и једначина је 3 онда $Px^3(x-c)\cdots=0$.

-22- Једначина 2 (§ 21) x осе те биће двојна тангента, ако је облика:

$$P(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2(x-d)\cdots=0$$

Према томе да ли су тачке контакта ове тангенте (x осе) реалне одвојене или разне, ми можемо разликовати ~~разне~~ 4. врсте тројних тангената.

Ако је једначина 2 § 21. облика:

$$P(x-a)^4(x-b)\cdots=0 \qquad x \text{ оса додирује}$$

криву у 4. консекутивне тачке. Тачка се контакта ове тангенте назива тачком ... (point d'ondulation) Тако и код линија, као и код тачака може бити говора о ~~...~~ вишим редовима, но наша излагања је довољна са оваквим посматрањем код сингуларних тачака виших реда.

-23- Кад би сад испитивали шта од сингуларних тачака одговара сингуларним правама, нашли би да ово стоји:

Једној двојној тачки, двогуб или контактованој тачки — одговара — Једна двојна тангента реалног контакта или имагинарног

Тачки кусподалној или стационарној — " " — стационарна тангента или тангента у инфлексионој тачки.

и т. д.

-24- Ако узмемо 1. пример онда ће нам излагање о сингуларним тачкама бити јасније.

Нека нам $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$ 4

представља криву 3°, где је $c>a>b$.

Једначина 7 конструисана графички изгледа као функција у слици 7. Као што видимо ова се крива сас[тоји] из два крака једног ~~за~~ који је затворене форме то је A B и једног дела који почиње у C и иде у ∞ и једна и друга симетр[ична] X оси.

<u>За случај</u> $b=c$ једначина ове пресеку у об[лику]

$$y^2=(x-a)(x-b)^2.$$ и крива добија облик приказан у слици 8.

<u>За случај</u> $a=c$ једначина је:

$$y^2=(x-a)^2(x-b)$$ крива прелази у криву дату јед-ном изолованом а представљена у слици 9) ~~форм~~ графички.

за случај. $a=b=c$ једначина је криве

$$y^2=(x-a)^3$$ и он је графички представљен у слици 10.

У функцији 8. B се спојио са C и настала је крива B двојном тачком. У функцији 9. B и A се поклопило и то је двојна тачка звана изолована; или се A поклопио са B и C и то је тачка звана стационарна тачка, које и називамо у оба случаја добија крива у својим сингуларним тачкама.

Ја сам сматрао за нужно рећи обично о сингуларним тачкама како би гранична поступка била на овај начин боље разумљива.

-24/(a) Ако је дата крива n^o једначином $f(x,y)=0$ и права $y=tx$ која пролази кроз почетак, онда нам једначина $f(x,tx)=0$ одређује пресечне тачке криве и ове праве. Ако се пренесемо коорд. почетак у једну тачку x_0 на криву, онда сменимо 2. једначине добијамо:

$$\left(x f'_{x_0}+y f'_{y_0}\right)+\tfrac{1}{2}\left(x^2 f''^{2}_{x_0}+2xy f''_{x_0y_0}+y^2 f''^{2}_{y_0}\right)+\dots=0\ \dots$$

$$x\left(f'_{x_0}+t f'_{y_0}\right)+\tfrac{1}{2}x^2\left(f''^{2}_{x_0}+2t f''_{x_0y_0}+t^2 f''^{2}_{y_0}\right)+\dots=0\ \dots(1)$$

Дакле сви чланови су равни нули. Једначина ова 2 ће бити де[љива] са x^2 ако је $f'_{x_0}=0$ и $f'_{y_0}=0$ или $f'_{x_0}+tf'_{y_0}$ са x^3 ако је $f''^{2}_{x_0}+2tf''_{x_0y_0}+f''_{y_0}=0$ (3) или ако је $f''_{x_0}=0$ $f''_{x_0y_0}=0$ $f''_{y_0}=0$. Кад је први услов испуњен онда је тачка x_0y_0 двојна тачка, кад је други онда је у тачки x_0y_0 права $y=tx$ тангента, кад је ~~д~~ трећи услов испуњен онда је у тачки x_0y_0 тангента која је t (из једначине 3) могла добити 2 тј. кроз 3 тачке; кад је четврти услов испуњен онда све праве кроз x_0y_0 пресецају кроз три тачке и једначине које су задовољене са x_0y_0 су $f''_{x_0}=0$ $f''_{x_0y_0}=0$ $f''_{y_0}=0$, то су услови из којих се одређују коорд. тројне тачке. Уопште тако долазимо да се коорд. тачке k^{te} реда одређују из $(k-1)$ извода функције f, која нам представља криву n^o.

— Пета глава —

Општа теорија сингуларних тачака и тангенцама

—25— Пре но што пређем на испитивање сингуларних особина код линија $n°$ у околини поларних кривих, ја ћу изнети још једну особину поларних кривих, која је морала изнети због тачнијих посматрања у главној целокупности.

Ако једна крива $n°$ има коју тачку вишеструку $k^{ог}$ реда, она те тачке броји $(k-1)^{ог}$ реда на првој поларној криви сваке тачке у одвојеној равни; $(k-2)^{ог}$ реда на другој поларној криви и т. д.

Ако се посматра напред у тој вишеструкој тачки онда ћемо видети да све изводи једначине до k морају ишчезавати. У првој поларној криви налазиће се k први изводи функције U у једначини функције $(k-1)°$ од x и y; у другој поларној криви други изводи U има $(k-2)°$ од x и y и т. д.

Ако смо узели почетак у тангенте у двострукој тачки онда смо добили овај израз

$$Ax^2 + Exy + Fy^2 = 0$$

т. ј. $U_2 = 0$, а ако би узели почетак тангенте у вишеструкој тачки имали би добили потпуно исти:

$$U_k = 0 \quad \dots \dots (1)$$

Сад ако се две тангенте у једној вишеструкој тачки поклопе, и оне морају бити тангенте и на првој поларној криви, а што је зато што се тангенте у вишеструкој тачки добијају из једначине која је први извод једначине што нам на самом бројају одређује у вишеструкој тачки тангенте. Те се према овоме и у њој једначини морају налазити фактори који и у првој, изузев оних у првом степену који су.

У опште ако l тангенте у свакој вишеструкој тачки поклапају, $(l-1)$ од њих морају бити тангенте на првој поларној криви, $(l-2)$ на другој и т. д.; јер ако се U_k налази који фактор у l степену онај је редом у поларним кривама мора налазити у $(l-1)^{ом}$, $(l-2)^{ом}$ и т. д. степену.

—26— Нека нам у слици 11 U представља једначину криве S $n°$ а права a праву која иде кроз две тачке $M(x, y, z)$ $M_1(x''y''z'')$. Једначина Λ има

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1}\mu\Delta U' + \frac{1}{1.2}\lambda^{n-2}\mu^2\Delta^2 U' + \dots \quad = 0 \dots (2)$$

[illegible] λ/μ [illegible] S, [illegible] MK a μ KM'. [illegible] (a) [illegible] $2, 3$ [illegible] $3, 4 \ldots$ [illegible]

M' [illegible] x y a z [illegible] $x''y''z''$; $\Delta U'$ [illegible] ΔU [illegible] $x\,y\,z$ [illegible] x'' [illegible]

[illegible] $\lambda x' + \mu x''$, $\lambda y' + \mu y''$, $\lambda z' + \mu z''$ [illegible] $x'y'z'$ [illegible] $x'y'z'$ [illegible] μ [illegible] $U_1 = 0$

[illegible] $x'y'z'$ [illegible] μ^2 [illegible] $U' = 0$ [illegible] $\Delta U'$ [illegible] $M(x''y''z'')$ [illegible] $x'y'z'$ [illegible] $\Delta U' = 0$ [illegible]

$$x U_1' + y U_2' + z U_3' = 0 \ldots\ldots \quad (2)$$

[illegible] $x'y'z'$ [illegible]

[illegible]

— 27 — [illegible] x, y, z, [illegible]

[illegible] x, y, z, [illegible] x, y, z, [illegible] x, y, z, [illegible] (§ 15), [illegible]

— 28 — [illegible]

[illegible] § 26 [illegible] x

$$x^0 U_1' + y^0 U_2' + z^0 U_3' = 0_{(x'y'z')} \quad \ldots \quad (2)$$

[illegible] $(x'' y'' z''$ [illegible] $x\,y\,z)$ [illegible]

$$x' U_1 + y' U_2 + z' U_3 = 0 \ldots \quad (2)$$

а ово је прва поларна крива тачке $X \cdot YZ\,(X''Y''Z'')$ у којој су коорд. замењене са $X'Y'Z'$ — тј. са координатама контакта. Према овоме је тиме правилно доказано

— 29 — На основу ове последње особине ми смо у стању одредити број могућих тангената из једне тачке на влак n^0, а према томе и степен реципрочне поларе криве n^0, као што ћемо доцније видети.

Помоћу коорд. контакта тангената из једне тачке на криву n^0 леже на првој поларној криви, то онда број пресека између поларне криве, која је $(n-1)^0$ и самог влака, који је n^0 одређује број тачака контакта респективно број могућих тангената на 1. влак n^0. А како је број пресечних тачака $n(n-1)$, то онда помоћу и двојних тачака — не помоћу и тангената. Према овоме је класа криве n^0 $n(n-1)$-ва, а то је као што ћемо доцније видети степен реципрочне поларе саме криве n^0.

То је случај са класом кад крива n^0 нема двојних или каквих других сингуларних тачака, но ако је то случај, онда ћемо видети и од чега зависи

— 30 — Класа влака n^0, кад у њем влак има и сингуларних тачака.

У § 25 видели смо да ако влак n^0 $U=0$ има двојних тачака, онда прва поларна крива мора кроз исте тачке пролазити. У овим сингуларним тачкама смо видели да двојна тачка важи између пресечних тачака за две тачке. Према свему овоме јасно је да ће степен реципрочне поларе или класа влака $U=0$, бити умањен за 2δ, ако влак U има δ двојних тачака. Број пресека између $U=0$ и $\Delta U=0$ није више $n(n-1)$ већ $n(n-1)-2\delta$. Оба ова резултата значе да се тангената из $M'(X''Y''Z'')$ на влак $U=0$ умањити кроз двојне тачке бројиће за две тангенте.

У § 25. доказали смо да кад је једна тачка R^{og} реда на криви да је она $(R-1)^{og}$ реда на првој поларној криви, и кад се l тангената поклапају у њој, да $(R-1)$ морају бити поклопљене и на првој поларној криви. Одакле ако крива $U=0$ има једну стационарну тачку, онда не само што прва полара на коју тачке пролази кроз ову тачку, већ је у њој тангента и тангенте. Та тачка онда вреди за три тачке између тачака пресека, те ако крива U има осим δ двојних и R стационарних тачака, то је онда њена класа:

$$n(n-1)-2\delta-3R \quad \dots\dots \quad 1$$

Ако крива n^0 $U=0$ има сингуларну тачку R^{og} реда, то смо видели да иста важи $\frac{1}{2}R(R-1)$ двојних тачака; а према напред доказаном ефекту двојних тачака на класу криве n^0 имамо сад да је класа криве за случај кад она има неку тачку R^{og} реда

$$n(n-1)-R(R-1) \quad \dots\dots \quad 2$$

Ако сад крива нарочито има буде δ' двојних и k' повратних тачака (или τ' двојних тангената и повратних или сиљастих) онда је по изказаном класа криве n°

$$n(n-1) - (2\delta' + 3k') \ldots \quad 3$$

§ 31. Где је права A тангента у тачци $M(x'y'z')$ на криви s (стр 12) одређена су услови услови

$$U' = 0 \text{ и } \Delta U' = 0 \left(x''U_1' + y''U_2' + z''U_3' = 0\right)$$

~~но ако~~ Коор. $x''y''z''$ тачке M' задовољавају једначину $\Delta U'$ увек ако су испуњени услови

$U_1' = 0 \quad U_2' = 0 \quad U_3' = 0$, т.ј. ако коор. тачке $M(x'y'z')$ задовољавају једначине $U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_3 = 0 \ldots \mathfrak{Z}$

Кад је ово изведено испуњено онда те једначине § 26 биће дељиве са μ^2, и свака права која пролази кроз тачку x,y,z, одређену из једначина под $\mathfrak{Z}$, пролази кроз две бесконачно блиске тачке. Тачка x,y,z, на овај начин одређена зове се двојном тачком.

Да би сад $U_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_3 = 0$ имале једну заједничку тачку, бивало би испуњено, које је услов нужни да постоји међу њиховим коефицијентима, а то би добили елиминацијом x y и z из њихових једначина. Та резултујућа једнака нули зове се дискриминанта једначине $U = 0$, јер су U_1, $U_2 = 0$ и $U_3 = 0$ први изводи хомогене функције $U = 0$ по x y и z.

Тако смо нашли да је дискриминанта кв. $ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots = 0$

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \ldots \quad \mathfrak{C}$$

Она је дискриминанта 3° по сачиниоцима једначине кв. Уопште узев је дискриминанта $3(n-1)^2$ог степена односно сачинилаца једначине n°. Јер су 3 једначине $U_1 = 0$ $U_2 = 0$ и $U_3 = 0$ из којих се добија дискриминанта је су свака $(n-1)$°, у резултанти свакој те сачиниоцима коефицијента $U = 0$ у $(n-1)^2$ом степену, а пошто је сума степена тих коефицијената који има-ју у дискриминанти, идући степена дискриминанте, то је очигледно доказано да степен њен $\underline{3(n-1)^2}$.

– § 32 – Ово што смо у изведеном § нашли примени сад на испитивање услова, који одређују да се тачка буде двојна тачка M($x_1y_1z_1$) или једна двојна тачка

Jegnarime opbe ornapne Kypde warke $x'y'z'$ je

$$x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = 0 \quad \ldots \quad 1$$

y odnocy bnerke U

opena § 24.a umamo ga ce Rogo gbojne warke jednor brerka uspaiynabajy us f'_{x_0} f'_{y_0}, no ga je ona jegnarime $A(xy)=0$ dune xoxoronom gbugem du ga du usbode reem ka ngo ngbe no x y. z nojam dnem zadobrem Rogo. gbojne warke $x'y'z'$ (§ 31) C wore ako rafero usbode jednarime 1. u cwabuno ux pobno ugen, na enunmnucero xyz onda teno nerbu kyxan ycorb nezy Roefnegnjentuna venobne jegxarime U ne ga opbe ornapna Kypde una jedny gbojny warky.

Quefepemgujaneiben jegnarime & umamo:

$$ax' + hy' + gz' = 0 \qquad hx' + by' + fz' = 0 \qquad gx' + fy' + cz' = 0 \quad \ldots \quad 2$$

rde cno ce a b c .. oznarnum gygo usbode no x . y . z ofyentazyi U.

Jegnarime nem nog 2 usnoce ognoe nezy Rogo warke $M(x_1 y_1 z_1)$ a Rogo. gbojne warke $B(xyz)$

Kosmrem brerko (wnapne) warke $B(xyz)$ ga ce obako neumceum

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0 \quad \ldots \quad 3$$

jegnarime nog 2 codnupom na obaj ucem § norkaszyy nem y ucto bpene u ycorb Kofu nypedu ga je ucnyraem ne ga je warka $(x'y'z')$ gbojna warka Kb. 3 warke B.

Bbor obor ornegsber nu usboguno meopeny: ako opbe ornapna jegne warke $M(x'y'z')$ una Kyry gbojny warky $B(xyz)$ no ornapnon Kb. ~~ya~~ warke B nopu umaeum za gbojny warky warky $M(x_1 y_1 z_1)$

Za du ceg gofunu reorneapzijcko neceor warake B bacbano du enunmnucemn $x'y'z'$ us 2 ne du gofunu:

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \quad \ldots \quad 4$$

Reo jednarmy nor neceor, a ume je nuny a reorneapzijcko neceor gbojnex warake B na opbem ornapnem Kypdama cbupy warka odnocno jednor brerka 3^0; umi Reo reorneapzijcko neceor onex warake nyi ce ornepnnn Kb pacnagapy na 2. opabe, jep ycorb nog § nyi nunceen gygo no ycorb ga ce Kb 3 pacrade ne 2 opabe, Reo ucto cno ne beti bugem Rog (Kb (§ 10 I odbreak)

$$abc \ldots \quad cy(n-2)' \quad y \text{ jednarmu } 4, \text{ opena}$$

ornce obe je jegnarime $3(n-2)'$ ona je jegnes Konbapyjanma brerka $U = 0$ u zebe ce Xecujana no umeny uenor nporanesare Hesse-a.

Za cno enunmnucanu xyz us jednar. 2 gofunu du cxuny jednarmy jednarmm nog 4 u no du dune jegnarime reorneapzijckor neceor warake M nyi opbe ornapne umary jedny gbojny warky, ne ce nunyja zobe no reeno cbom nporanesary Steiner-y Uleajnezyjana. Kako du ce nono ybugem ga je cwexen ue jednarime $3(n-2)^2$.

— § 33 — Ако је дакле једначина $h=0$ (1) § 26. задовољена тј. з ус пнена корена равна нули, онда дакле мора ићи кроз $x'y'z'$ $x''y''z''$ дакле кроз 3 координатне тачке. За овај случај је нужно не само да је U и $\Delta U'$ равно нули но још

$$\Delta^2 U' = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Ако је $x'y'z'$ двојна тачка онда су U и $\Delta U'$ једнако нула за $x'y'z'$ равно $x'y'z'$ као $x''y''z''$ ма како било, јер ће услов под 1 бити да и $x''y''z''$ лежи на бесконачно малој ^{кв}/поларној кв. тачке $x'y'z'$ јер је $\Delta^2 U'=0$ поларна кв тачке $x'y'z'$

Из овога што смо рекли да се у двојној тачки могу повући 2 tg мора ићи кроз ове координатне тачке се $x''y''z''$ може налазити на једној од тих праваца, на да услов. под 1 задовољен. Из овога излази да је поларна кв. тачке $x'y'$ која двојне равни раставља правце у двојној тачки, које су одређене дакле једначином $\Delta^2 U'=0$ или једначином:

$$a'x^2+b'y^2+c'z^2+2f'yz+2g'zx+2h'xy=0 \quad \ldots \quad (2)$$

Ако је $M^{(x'y'z')}$ двојна тачка онда је она сходно § 32 тачка сечења, и можемо сад казати ако каква тачка задовољује сечења онај је двојна тачка.

По Euler-у имамо за хомогене функције, кад је $U'_1=0$ $U'_2=0$ и $U'_3=0$ задовољено које двојне тачке тачке онда се ове једначине могу написати овако:

$$a'x'+h'y'+g'z'=0$$
$$h'x'+b'y'+f'z'=0 \quad \ldots \quad (3)$$
$$g'x'+f'y'+c'z'=0$$

Одавде $x'y'z'$ добијамо сечења, као координате ове двојне тачке.

— 34 — Када је тачка $M(x_1y_1z_1)$ повратна тачка. Као што смо видели двојна тачка у којој се тангенте кроз ове координатне тачке поклапају. Ове две тангенте могу добити из услова да је $\Delta^2 U'=0$ потпун квадрат

Сходно на једначину под 2, § 33 мора је испуњено

$$b'c'=f'^2 \quad c'a'=g'^2 \quad a'b'=h'^2 \quad \ldots \quad (1)$$

Но кад је један од ових услова испуњен, онда су и друга два испуњена, као што се види из ових једначина:

$$\frac{x'}{z'}=\frac{h'f'-b'h'}{a'b'-h'^2}=\frac{b'c'-f'^2}{h'f'-b'g'}=\frac{f'g'-c'h'}{g'h'-a'f'}$$

$$\frac{y'}{z'}=\frac{g'h'-a'f'}{a'b'-h'^2}=\frac{f'g'-c'h'}{h'f'-b'g'}=\frac{c'a'-g'^2}{g'h'-a'f'} \quad \ldots \quad (2)$$

које се једначине добијају из 3 § 33 за координате тачке $M(x_1 y_1$

—35— [illegible] $M(x,y,z)$ [illegible] 25 [illegible] U [illegible] x, y [illegible] x, y [illegible] $\Delta^2 U' = 0$ [illegible]
$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0$ [illegible] $\Delta^2 U' = 0$ [illegible] $x'' y'' z''$. [illegible] $\Delta U' = 0$. [illegible] $x' y' z'$ [illegible]

[illegible] ∞ [illegible]

$$\Delta^3 U = 0 \quad \ldots \quad c$$

[illegible] $M(x, y, z)$ [illegible] k^{or} [illegible] $U = 0$ [illegible]

$$\Delta^k U = 0 \quad \ldots \quad c$$

—36— [illegible] $(x' y' z')$ [illegible]

[illegible]

$$\Delta U' = 0 \quad \text{u} \quad \Delta^2 U' = 0 \quad \ldots \quad c$$

[illegible] $x' y' z'$ [illegible] $x' y' z'$. [illegible] $x' y' z'$ [illegible] $\Delta^2 U' = 0$ [illegible] $\Delta U'$ [illegible] $x' y' z'$ [illegible]

[illegible] n^o [illegible] $3n(n-2)$ [illegible] $3(n-2)^{or}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] k^{or} [illegible] $3k - 4$ [illegible] n^o [illegible] $3(k-2)^{or}$ [illegible]

Тангенте у сингуларној тачци на U је исти на у сингуларној тачци на Хесијани (~~...~~ Хесијана ће се означава са H). Ако је нека је $X=0$ тангента повучена, све чланове највишег степена по x и y садрже X као чиниоца; јасно је да ће се X налазити као фактор и у другим изводима од U по y и z а то је у b c и f, дакле и у овој једначини:

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

јер иста садржи у свима члановима или b, или c или f, а која је једначина Хесијане; па дакле X налази у њој као фактор, то је $X=0$ тангента и на њој.

— 37 — Ако U има једну двојну тачку, она је показаном двојина и на H и 2. тачке ће бити заједничке U и H. Кад је ово случај онда смо видели да та тачка вреди за 6 тачака међу тачкама пресека, јер по 2. за двојне тачке на U и H и 2 за две заједничке тангенте; дакле свега 6. Ако има δ двојних тачака онда је број пресечних тачака између U и K

$$3n(n-2) - 6\delta.$$

Ако је на U једна тачка $k^{\text{ог}}$ реда онда је иста тачка, као што смо видели у § 36 наговештено, $3k-4^{\text{ог}}$ реда на H и обе тачке имају све k тангената. Мултиплицитет тачке ће бити

$$k(3k-4) + k = 6 \times \tfrac{1}{2}k(k-1)$$ једнака међу пресечним тачкама обадве U и H.

Кад се на U налази каква тачка повратна налази се да та тачка мора бити на Хесијани превојна тачка и да тангента у овој превојној тачци поклапа се са тангентама у сингуларној тачци. Кад се тачка обако деси са инфлексионом тачком, онда она вреди 8 једнака.

Према томе ако имамо δ двојних а k самоповратних тачака, онда је број пресечних тачака између U и K

$$3n(n-2) - 6\delta - 8k \; . \; . \; .$$

а по § 36 знам да толико и инфлексионих тачака на двојку U мора бити.

—— . ——

— 38 — За ту ово о инфлексионим тачкама у овом § мало боље објаснимо једним примером.

Видимо у § 1. § 26 $\frac{M}{\lambda} = x$ а x'' са x U са $f(xyz)$ то нам онда на једначина изгледа овако:

$$f(x_1y_1z_1) + \lambda\left(x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}\right) + \frac{\lambda^2}{1.2}\left(x^2 f''_{x_1^2} + y^2 f''_{y_1^2} \cdots\right) + \cdots =$$

[illegible] MM' [illegible] 11 [illegible]
[illegible]

$$\Delta U' = 0 \quad \text{czyli} \quad Xf'_{x_1} + Yf'_{y_1} + Zf'_{z_1} = 0$$ [illegible]

[illegible]

$$U' = 0 \quad \text{czyli} \quad f(x_1 y_1 z_1) = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

[illegible] f'_{x_1} f'_{y_1} f'_{z_1} [illegible] $M_1(x_1 y_1 z_1)$ [illegible] M [illegible]

[illegible] M [illegible] 36 [illegible]:

$$U' = 0 \quad \Delta U' = 0 \quad \text{i} \quad \Delta^2 U' = 0 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

[illegible]:

$$\varphi(XYZ) = X^2 f''_{x_1^2} + Y^2 f''_{y_1^2} + Z^2 f''_{z_1^2} + 2YZ f''_{y_1 z_1} + 2ZX f''_{x_1 z_1} + 2XY f''_{x_1 y_1} = 0 \quad \ldots \quad 4$$

[illegible]

$$X^2 a_1 + b_1 Y^2 + \ldots$$

[illegible] $M_1(xyz)$ [illegible] (4) [illegible] $x_1 y_1 z_1$ [illegible] 2, [illegible]:

$$\varphi(XYZ) = \left(Xf'_{x_1} + Yf'_{y_1} + Zf'_{z_1}\right)(M) \quad \ldots\ldots \quad 5$$

[illegible] M [illegible] $X+Y+Z$ [illegible] $M(x_1 y_1 z_1)$ [illegible] 4. [illegible] 5. [illegible] H, [illegible]:

$$H = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 y_1} & f''_{x_1 z_1} \\ f''_{x_1 y_1} & f''_{y_1^2} & f''_{y_1 z_1} \\ f''_{x_1 z_1} & f''_{y_1 z_1} & f''_{z_1^2} \end{vmatrix} = 0 \quad 6$$

[illegible] H [illegible] $M(X'Y'Z')$ [illegible]

[illegible] $(x_1 y_1 z_1)$ M [illegible] $H(XYZ)$ [illegible]

Добиће се део обих тачака [illegible] из једначине:

$$\varphi(x_1 y_1 z_1) = n(n-1) f(x_1 y_1 z_1) = 0 \ldots \quad 7$$

која служи за хомогене функције, а друга из обе једначине

$$x_1\varphi'_x + y_1\varphi'_y + z_1\varphi'_z = 2(n-1)(x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}) \ldots \quad 8$$

која се добија [illegible] тачку $x'y'z'$ на криву φ. [illegible] на релацију под 7.

Детерминанта H се може поништити и за једну тачку $M(x_1 y_1 z_1)$ сингуларну. Јер ако је M двојна тачка онда су $x'y'z'$ одређени из једначина $f'_{x_1}\ f'_{y_1}\ f'_{z_1}$ и [illegible] се све једначине [illegible] због једначине 8, и извод $\varphi(xyz)$ за $x=x'\ y=y'\ z=z'$ поништава, а због једначине 6 поништава се и H, [illegible] функције $\varphi(x\ldots)$. Но ми смо доказали да за случај кад је M двојна тачка да је онда и тачка имају $H=0$ (хесијана)

H се зове хесијана. Ако се $x_1 y_1 z_1$ сматрају [illegible] (координате [illegible] coordonnées courantes) H је крива $3(n-2)°$ ако је $f(xyz)$ $n°$, као што смо видели.

Пресечне тачке $f=0$ и $H=0$ ако нису сингуларне тачке јесу као што смо [illegible], а у обе доказали инфлексионе тачке. Тако ако крива $n°$ нема сингуларних тачака, онда има $3n(n-2)$ инфлексионих тачака

Пример. Дата крива $f(xyz) = x^3 + y^3 + 1$

у хомог. коорд. је $f(xyz) = x^3 + y^3 + z^3 = 0$

нема сингулар. тачака јер се $f'_x = 3x^2$ $f'_y = 3y^2$ $f'_z = 3z^2$ не поништавају ни једним скупом вредности.

Хесијана је $H = 6^3 xyz = 0$ или $H = xyz = 0$

између H и f има 9 пресечних тачака [illegible] у коорд.

$x=0$ и $\frac{y}{z} = -1$ или $\frac{y}{z} = -\omega$ или $\frac{y}{z} = -\omega^2$ *

$y=0$ " $\frac{x}{z} = -1$ " $\frac{x}{z} = -\omega$ " $\frac{x}{z} = -\omega^2$

$z=0$ $\frac{y}{x} = -1$ " $\frac{y}{x} = -\omega$ " $\frac{y}{x} = -\omega^2$

Само су 3 тачке инфлексионе реалне

$x=0\ \frac{y}{z} = -1$; $y=0\ \frac{x}{z} = -1$; $z=0\ \frac{y}{x} = -1$. Обе се [illegible] тачке налазе на правој $x+y+z=0 \ldots$

* $\omega = \sqrt{-1}$

Крив., -2- Узмимо једну криву у [illegible]

$$F(\alpha\beta\gamma) = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6k\alpha\beta\gamma = 0 \quad - - - - \quad (1$$

која је дата у канонском (простом) облику.

Она нема двоструких тачака, о чему се лако уверити [illegible].

Хесова је хесијана

$$H = 6^3\begin{vmatrix} \alpha & k\gamma & k\beta \\ k\gamma & \beta & k\alpha \\ k\beta & k\alpha & \gamma \end{vmatrix}$$

$$H = 6^3\left[-k^2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+(1+2k^3)\alpha\beta\gamma\right]$$

у пресеку H и F имамо превојне тачке.

Помоћу H и F избор [illegible] израза $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ и $\alpha\beta\gamma$ [illegible] Коеф. [illegible] H и F

$1+8k^3$ и ако обе имају равно нули, то оба у пресеку F и H [illegible] обе једначине за одређују пресечних тачака

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0$ и $\alpha\beta\gamma=0$.

Обе ове једначине [illegible] имамо онда одређених 9 превојних тачака.

Ако је $1+8k^3=0$ $F=0$ и $H=0$ су исте једначине. Знам да су све тачке криве F тачке превојне а то је могуће за случај кад се крива распадне на 3 праве као и хесијана. А тачно и јесте, јер за

$$k^3=-1/8 \quad -1/2, -\frac{\omega}{2}, -\frac{\omega^2}{2} \quad - - - \quad (2$$

на које од вредности прелази [illegible] 2. F прелази:

$$F=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)$$

распада се на 3 праве.

-38a- Из свега што смо довде рекли о сингуларним тачкама и тангентама јасно је [illegible] да [illegible] права тачке $x'y'z'$ $\Delta U'=0$ знам тангенту у тачки $x'y'z'$ на криву. Затим права једне тачке $x'y'z'$ која [illegible] тангента у тачки $x'y'z'$ на криву. Поларни конусни $\Delta^2U'=0$ једне тачке $x'y'z'$ [illegible] тангента у двојној тачки [illegible] координате једне тачке на криву, а кад [illegible] једне [illegible] тачке у [illegible]. Уопште полара криве k-те реда тачке $x'y'z'$ је једнака тангентама у сингуларној тачки k-те реда, [illegible] одређене једначином $\Delta^kU'=0$ која нам [illegible] k-те поларе једне тачке $x'y'z'$.

— Шеста глава —
(о Јакобијани)

-39- Ми смо видели да је Јакобијана геометријско место тачака чије се поларне праве у односу на криве U V и W [20] секу у једној тачки; ако су криве U, V, W [illegible] од 2° онда је јакобијана геометријско место тачака чије [illegible] поларне праве у односу [illegible]

кода,

Поларне праве тачке $x'y'z'$ у односу бра[illegible] на U V и W су

$$x'U_1+y'U_2+z_1U_3=0$$
$$x'V_1+y'V_2+z_1V_3=0$$
$$x'W_1+y_1W_2+z_1V_3=0$$

Елиминацијом $x'y'z'$ добијамо геометријско место [illegible] тачака, а то место није ништа друго до детерминанта облика

$$J=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=0$$

-40- Јакобијана је и геометријско место тачака двоструких тачака криве

$$\lambda u+\mu v+\nu w.$$

Ако имамо криву брака по U, V и W то онда [illegible] двоструке тачке брака $\lambda U+\mu V+\nu W$ добијамо из ових једначина

$$\lambda U_1+\mu V_1+\nu W_1=0$$
$$\lambda U_2+\mu V_2+\nu W_2=0$$
$$\lambda U_3+\mu V_2+\nu W_3=0$$

које нам представљају праве [illegible] у односу на $\lambda u+\mu v+\nu w$ (§ 3[illegible]

Елиминација λ, μ и ν из једначина [illegible] добијамо ову једначину:

$$u_1(V_2W_3-V_3W_2)+u_2(V_3W_1-V_1W_2)+u_3(V_1W_2-V_2W_1)=0$$

Као геометријско место двојних тачака система кривих $\lambda u+\mu v+\nu w$. То може да се изведе и геометријско место тачака јакобијане, јер је то [illegible] [illegible] из § 39.

-41- Ако 3 криве U, V и W имају које заједничке тачке, оне се морају налазити на њиховој јакобијани. [illegible] како се то доказује.

Ако означимо са m, m' и m'' степене [illegible] u, v и w, то је онда ~~[illegible]~~ [illegible]:

$$xu_1+yu_2+zu_3=mu, \quad xv_1+yv_2+zv_3=m'v, \quad xw_1+yw_2+zw_3=m''w \quad (1$$

где су u, v и w хомогене функције.

Кад сад помножимо јакобијану x. [illegible] из § 39 са X имамо:

$$JX = mu(v_2w_3-v_3w_2)+m'v(w_2u_3-u_2w_3)+m''w(u_2v_3-v_2u_3) \quad (2$$

помоћу [illegible] замене xu', xv', xw' из једначина (1),

Означимо ли из 2 [illegible]:

$$XJ = muA+m'vB+m''wC \quad (3$$

Означимо ли из 3 [illegible] једначина [illegible] а то је [illegible] за бројеве u, v и w [illegible] и на јакобијану, где је једнак J [illegible] [illegible] који [illegible] u, v и w

—72— Ако су све ~~[illegible]~~ [illegible] u v и w [illegible] онда је [illegible] јакобијане. Обрнуто [illegible] ако [illegible] (x / [illegible]) [illegible], набавимо [illegible] J по x, y и z; а [illegible]

Из 3. у § 41 имамо

$$J+X\frac{dJ}{dx} = m\frac{dA}{dx}u+m'v\frac{dB}{dx}+m''w\frac{dC}{dx}+mAu_1+m'Bv_1+m''Cw_1 \quad (1$$

Одузмимо [illegible] је

$$J = mAu_1+m'Bv_1+m''Cw_1 \quad \frac{\text{за случај } m=m'=m''}{\text{је [illegible]}}$$

$$X\frac{dJ}{dx} = \frac{m\,dA}{dx}u+m'v\frac{dB}{dx}+m''w\frac{dC}{dx} \quad (2$$

и $\frac{dJ}{dx}$ је [illegible] за све [illegible], које [illegible] између u, v и W

[illegible] из једначине 3 § 41

$$X\frac{dJ}{dy} = mu\frac{dA}{dy}+m'v\frac{dB}{dy}+m''w\frac{dC}{dy}+mAu_2+m'Bv_2+m''Cw_2$$

$\frac{dJ}{dy}$ [illegible] за $m=m'=m''$ за све [illegible] J и v и W [illegible], јер [illegible] $mAu_2+m'Bv_2+m''Cw_2=J=0$ за $m=m'=m''$. Тако би [illegible] и за $\frac{dJ}{dz}$, а кад [illegible] [illegible] између u, v и W онда [illegible] на јакобијани.

—43— Ако се само две функције од u v и W узму сталне, Јакобијана је нормална на свакој у заједничкој тачки функција u v и W

Због из једначине 1 § 42 и једначине 3 § 41 за $m = m'$ имамо:

$$J + x\frac{dJ}{dx} = mu\frac{du}{dx} + mv\frac{dk}{dx} + m''w\frac{dC}{dx} + mJ + (m''-m)Cw_1$$

За заједничке тачке u v и W обе једначине

дају нам $\quad xJ_1 = x\frac{dJ}{dx} = (m''-m)\,Cw_1$

на исти начин показаћемо:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{dJ}{dy} &= xJ_2 = (m''-m)\,Cw_2 \\ x\frac{dJ}{dz} &= xJ_3 = (m''-m)\,Cw_3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Нормалност на Јакобијану је

$$xJ_1 + yJ_2 + zJ_3 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

нормалност на ... W је

$$xw_1 + yw_2 + zw_3 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

а обе ове ~~?~~ задовољавају се оне опште, јер међу коефицијентима једначине постоји однос исказан у једначини под (2). Овим је доказано да у заједничкој тачки ... u, v и W мора ... J бити нормалнија на W ако се само u и v узму сталне а W различито од њих.

—44— Ако се од ове ... заједничке тачке u v и W двојне тачке, онда ће на основу ... § 43 J и ... W ... заједничке нормале

Ако се ... да $\Delta^2 J = \Delta^2 W$ ... једначине ... двојне тачке ... доказано

Ако ... J по x y и z и ... Ко... заједничке координате ... J, J_1, w_1 w_2 w_3 ... u v и W ... двојне тачке ... J_1 J_2 J_3 ... једначина под 2 у § 43 а $w_1 w_2 w_3$

Тако ћемо написати:

$$X\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = m\left(u_1\frac{dA}{dx}+v_1\frac{dB}{dx}\right)+(m''-m)CW_{11} \quad — 1$$

W_{11} значи други извод W по x.

Заменом A и B у једначину 1 и једначинама из § 41 јед 3, имамо за једначину 1

$$X\vartheta_{11} = (m''-2m)CW_{11} \quad \ldots \quad 2$$

пошто је

$$u_1\frac{dA}{dx}+v_1\frac{dB}{dx} = u_1(v_2W_{13}-v_3W_{12})+v_1(W_{12}u_3-W_{13}u_2)$$

Елиминацијом xyz из једначина:

$$xu_1+yu_2+zu_3=0, \quad xv_1+yv_2+zv_3=0, \quad xW_{11}+yW_{12}+zW_{13}=0$$

даје $u_1(v_2W_{13}-v_3W_{12})+v_1(W_{12}u_3-W_{13}u_2)+W_1(u_2v_3-u_3v_2) = -CW_1$

ϑ_{11} значи у једначини 2 $\frac{d^2\vartheta}{dx^2}$, и ако би исто заменили $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{22}, \vartheta_{33}$ у одговарајућој једначини $\Delta^2\vartheta=0$ а одговарајућим у једначини $\Delta^2W=0$. Онда би се утврдило сабирање једначина под 2. и при сличном ... да обе једначине буду идентичне т.ј. $\Delta^2W=\Delta^2\vartheta=0$, а одавде би утврдили особину да ϑ и W имају заједничке вредности у главној тачки, која се налази на ϑ и на кривама u, v и w.

Трећи одељак

— О реципрочно поларним кривама —
(courbes polaires réciproques)

— Прва глава —
Општи погледи на питање о реципрочним поларама

—1— Општи погледи на реципрочно поларне (рец. пол.) криве.
Да би појам о реципрочно поларним кривама добили почнимо од једног примера.

Ако је дат систем тачака abc.... на ком год [illegible], нађимо одговарајуће поларе у односу круга S, и означимо исте са A' B' C'..., онда на слици 1. имамо две фигуре abc и MNO, које због природе своје зову се поларно реципрочним; јер ако на показани начин [illegible] поступимо од фигуре MNO добићемо до фигуре abc.

Низ тачака abc... може бити на каквој линији, реципрочно поларна фигура, која је анвелопа полара тачака abc више се одликује тим што управља се према одликама фигуре која је сачињена из низа тачака abc, а затим и од круга S односу ког се добија сама реципрочна фигура. На начин ове анвелопе [illegible] ћемо доцније извести, а на овом примеру показаћемо у чему се само што састоји.

— 2 — У слици 2, ми смо узели да низ тачака abc лежи на једном кругу S, који смо замислили да је представник кругова n°, и ако се на начин мало час изнети тачкама ab.. нађу поларе односно круга P — што ће оне бити праве линије A'B'C' и обвијаће реципрочну криву S' само у овом случају ако је круг P 2°, јер су само у том случају поларе тачака круга S праве линије. Одде сазнајемо да круг S' не мора бити [illegible] с кругом S, [illegible] ћемо доцније.

Круг P преко ког се као помоћна одређује круг S у S', јавља јако на реципрочне фигуре.+ Тако ако би био круг 2° и имали криву S n° коју управимо реципрочну полару, онда је питање о реципроч. поларама [illegible] компликовано.

+ где је и круг P назван директрисом

Од куда долази ова закономерност? Број је тачно то да је овој појави узрок тај што су сличне тачка на браку S у односу P као центру n°, такође фигуре $(n-1)^{\circ}$, $(n-2)^{\circ}$ — до 1°. На основу овога усаглашеним тачкама на браку S одговарају усаглашене конгруентне фигуре, а аналогне фигуре $(n-1)^{\circ}$, $(n-2)^{\circ}$ ... 1° дате браку које ће у овом случају репрезентирати редуковано конгруентне фигуре, једној датој фигури S.

За све ово дато јасније најбоље је светити овоме. У случају 2. пример A на браку S одговара само један тип a' на редуковано конгруентној фигури S', кад је брак P, који се зове код редуковано конгр., дефектница, центар 2°. Н ако је P (дефектница) центар 2° онда пример A на браку одговарају $(n-1)^2$ тачака као основни исте пример. Према овоме је ствар по себи јасна да док у овом случају тачк а' као тип пример A описује само један брак S', дотле ће другом случају $(n-1)^2$ тачака као основни исте пример описивати конгруентно редуковане фигуре.

— 3 — Из овога што је довде казано излази да за испитивање конгруентно редукованих фигура нужно зависности групе фигуре S што се конгруентних тачака особина што од дефектнице. Кад се тако узме оно што сто мало час рекох јасно је да ни број конгруентно самог проблема не смемо да дефектници узимамо другу досем браке 2°; а ради испитивања других особина редуковано конгруентних кривих ми се морамо ограничити на најпростију центра 2° као дефектнице. Ми ћемо се ипак у следећем доцније и неких питања односно конгруентно редукованих фигура у случају кад је дефектница n°, али то само што се сведене редуковано конгруентних кривих имале, тако преко овога прећи.

— · —

Друга глава

Одредба једначине контрапедно реципрочним кривама односно директрисе линије 2°.

-4- Одредба једначине реципрочно контрапедних крива је један од најважнијих проблема у овом одељку. У § 1. ми смо помоћу увиђели да је реципрочна контрапедна линије S, т.ј. S', анвелопа контрапедних тачака линије S, т.ј. a' b' c' .. које одговарају контрапеду реципрочну S' наспрам датој до контрапедних тачака abc. Обратно важи: S може се сматрати као реципрочна контрапедна линија S и узети да је она анвелопа тангената-реципрочно контрапедних тачака линије S'. Даље проблем се своди на анвелопе, као и на који начин видећемо из следећег.

-5- Најпростији случај (~~као најобичнији~~) је ако је могуће решити следеће једначине и из њих одредити зависност међу коорд. тачака реципрочне фигуре, кад је директриса P. 2°, линија S $F(xy)=0$ m° (сл. 2).

Означимо коорд. тачака a' b'... реципрочно контрапедне криве са x'y', онда ћемо до једначине линије S' $\varphi(x_1y_1)=0$ доћи на овај начин.

Нека је у тачки a на линији S, чија је једначина m° $F(xy)=0$, једначина тангенте:

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

(Хомогена функција је и овде као и на више места до сада начињена узети хомогеном;)

Ако тангента у a је контрапедна тачка a' чије су коорд. x'y', онда ова једначина 1 мора бити испуњена за коорд. тачке a'(x'y'), која је дата овом једначином

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

једначина $f(xyz)=0$ је једначина линије P у односу које се тражи контрапе.

Због свега овог нам једначине 1 и 2. представљају једну и исту праву, међу њиховим коефицијентима мора постојати овај однос:

$$\frac{f'_{x_1}}{F'_x} = \frac{f'_{y_1}}{F'_y} = \frac{f'_{z_1}}{F'_z} \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Ако се из једначине под 3 може наћи однос између $x_1 y_1$, онда је то функција једначина криве S', где су $x'y'$ координате тачке a', која опет реципрочном криву описује. Ове ... место у свакој датој до решења. Слика тако између њих и друге методе.

-6- Тражење једначине реципрочне поларе може се свести на тражење тангенцијалне једначине исте криве.

Јер ако означимо са:

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0 \quad \ldots \quad 4$$

полару тачке a' у односу криве P која је дата једначином $y = f(x)$

Означимо ли исто време криву S која опет на реципрочној полари са $F(xyz) = 0$, онда ако је тачка a' на реципрочно поларној кривој њена права 1 дира тангентно на криву $F(xyz) = 0$ (слика 2)

Ако сад претпоставимо услов тангентности између праве 1, која има облик: $x\lambda + y\mu + z\nu = 0$ и криве $F(xyz)$, а до њег се долази најлакше овако. За обе једначине елиминацијом једне непознате на пр. z добија се једначина $F\left(x, y, -\frac{(x\lambda + y\mu)}{\nu}\right) = 0$, но да је ова права тангента на криву $F(xyz) = 0$ нужно је да ова последња једначина има два једнака корена по x и y. А овај последњи услов аналитички представљен добија се једначина од λ, ν, μ извесног облика на пр.:

$$\Psi(\lambda, \mu, \nu) = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Једначина ова даће се звати тангенцијалном једначином криве $F(xyz) = 0$, а то ће у исто време бити и једначина криве S, или реципрочне поларе криве S, јер су λ, μ и ν неке функције од $x'y'$ ...

– 7 – Под тангенцијалном једначином брака разуме, ваће једначина која се добија из услова да је права $X\lambda + \mu y + \nu z = 0$ тангента на каквом браку; но веома онај само права ово одакле где су сачиниоци λ, μ и ν уравни бројеви.

Кад нас су $\lambda = f'_{x_1}$ $\mu = f'_{y_1}$ $\nu = f'_{z_1}$

Ако се из § 6 сетимо видећемо да нам f'_{x_1} ... зависе од дискриминанте и ако је ~~једна~~ брак 2° дат општом једначином, онда се из тангенцијалне једначине не може одмах једначина реципрочне поларе криве, већ се из ње одређеном по x' y' може добити. Но ако су $f'_{x_1} = x_1 = \lambda$, $f'_{y_1} = y_1 = \mu$ $f'_{z_1} = z_1 = \nu$, онда је $\varphi(\lambda, \mu \nu) = \varphi(x_1 y_1 z_1) = 0$ т. ј. тангенцијална је једначина једначина реципрочне криве.

Ако би тражили какве поларе биле дискриминанта да су ~~нам~~ испуњени услови $x' = \lambda = f'_x$ ......, налазимо да поларе биле круг облика $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ....

Према овоме можемо одавде извести правило:

Једначина реципрочне поларе каквог брака идентична је тангенцијалном једначином самог брака, у случају кад је дискриминанта круг.

– 8 – Да би ово последње расветлили мало боље узећемо овај пример.

Нека је у равни 4. линија S која представља ~~[illegible]~~ реципрочну полару линије 2° и дата овом једначином

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2hxy + 2gxz + 2fyz + \cdots = 0 \quad \ldots\ 1$$

Линија P (дискриминанта) ~~неке~~ је брак 2° дата једначином

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2h'xy + 2g'xz + 2f'yz = 0 \quad \ldots\ 2$$

полара једне тачке M у равни линије S' је

$$x(a'x' + h'y' + g'z') + y(h'x' + b'y' + f'z') + z(g'x' + f'y' + c'z') = 0 \quad \ldots\ 3$$

ако су $x'y'z'$ коорд. тачке M.

Једначину под 3. можемо и овако написати

$$X\lambda + \mu y + \nu z = 0 \quad \ldots\ 4$$

Ако је тачка М на реципрочној полари брака S онда и њена 4. која даље лежи на истом браку. Да би сад испитали узајамну ... између линије ζ и 1 брака ... показаном у ранијем случају, ... кад се ... добијамо:

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + 2H\lambda\mu + 2G\lambda\nu + 2F\mu\nu = 0 \quad \dots \quad 5$$

где само са A, B, C ... означени изводи детерминанте брака S по a, b, c ....

Једначина је под 5 једначина реципрочне поларе јер нам она показује однос између координата $x'y'z'$ тачке М брака S, и ... замењеном λ, μ и ν њиховим вредностима из једначине ... Кад се та супституција учини имамо:

$$A(a'x'+h'y'+g'z')^2 + B(b'y'+h'x'+f'z')^2 + \dots = 0.$$

Кад се једначина 6. развије и среди онда ћемо добити ... нам она даје једначину реципрочне поларе; само ... трансформисаном ... једначине не би ... која и једначина 5, који се зове и ... једначином брака S. Ово би био само онда случај кад би ... се бира ... $x^2+y^2+z^2=0$ као што смо ... видели. Где би у овом ... случају једначина под 3 ...

$$xx' + yy' + zz' = 0 \quad \dots \quad 7$$

λ, μ и ν би били равни x', y', z', и кад би ове ... сад заменили у 5 имали би:

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + 2Hx_1y_1 + 2Gx_1z_1 + 2Fy_1z_1 = 0 \quad \dots \quad 8$$

за једначину реципрочне поларе криве S_1 криве S.

-§9-

Најопштији случај реципрочних ... имамо, кад узмемо реципрочну полару фигуре S која је ... у односу брака P као ... ζ ...

Неки ... S_1 једна од реципрочних полара криве брака S; она је као што видимо ... линије 1, 2 ... које ... ~~реда~~ поларе криве ... a, b, c ... брака S. Питање је сад какав ... брака S_1

Њега можемо наћи на два начина:

1) или образовањем анвелопе из низа, 1. 2. . .

2) или одређивањем услова која треба да је испуњен па да 1, буде тангенцијална на криву S; где смо 1, разумевали ма коју криву ~~кри~~ низа a, која обухвата криву S1.

Ја вам тек ћу се задржати само на први начин.

Знамо ми са $f(xya)=0$ један од конкретних кривих 1. 2. 3. .. на пр. 1, онда је довољно да дамо разне вредности параметру a добијамо разне криве у систему кривих 1. 2. 3. .. Тако ако a дамо вредност $a+da$, онда је крива $f(xy, a+da)$ бескрајно блиска криви 1 и у пресеку обих двеју кривих налазићемо тачке њихове анвелопе.

А кад ове тачке леже у пресеку линија, оне се једначине (нису сад једначине линија већ пресека једначина) $f(xya)$ и $f(xy\ a+da)$ морају заменити и

$$f(xya)=0 \quad \text{и} \quad \frac{f(xy\,a+da)-f(xya)}{da}=0.$$

А пошто је ова последња једначина први извод $f(xya)$ по a, из овога излази да се тачке анвелопе S налазе у пресеку линија:

$$f(xya)=0 \text{ и } f'_a(xya)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Једначине ових двеју линија тј. пресека линија S, за различите вредности од a, дају нам само линију S. Добијамо елиминацијом a из 1. Кад се ово учини онда имамо:

$$\varphi(xy)=0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

као једначину анвелопе ~~св~~ свију кривих 1. 2. 3. . . или као једначину криве S1.

— § 10 — Ако је $f(xya)=0$ такође облика да је изражено одређено a. Онда елиминација a из $f(xya)=0$ и $f'(xya)=0$, која нас је довела до једначине $\varphi(xy)=0$ није ништа друго до услов да једначина ~~ову~~ $f(xya)=0$ има два једнака корена по a.

Тако ако је $f(xya)=Ma^2+2Na+P=0$ где су M, N и P функције xy. $f'(xya)=Ma+N=0$. Елиминација a из обих двеју ~~последњих~~ једначина $Ma+N=0$ и $Ma^2+2Na+P=0$ је $N^2-MP=0$ а ово је баш $\varphi(xy)$ или је једначина анвелопе кривих $f(xya)=0$. Ово је у исто време услов да једначина $f(xya)=0$ има 2. једнака корена.

§-11- Ако нек $f(xya)$ зависи још од једног параметра b и нека је њена једначина $f(xyab)=0$; а осим тога нека нам је дат услов зависношћу a и b овом једначином $\varphi(ab)=0$, онда се до анвелопе линије $f(abxy)=0$ долази ок... Нађе се прво диференцијална једначина $f(xyab)$ по a која је:

$$f'_a + f'_b \frac{db}{da} = 0 \quad \dots \quad 1$$

Ако се одреди $b' = \frac{db}{da}$ из $\varphi(ab)=0$ и замени у 1 има се

$$\frac{\varphi'_a}{f'_a} = \frac{\varphi'_b}{f'_b} \quad \dots \quad 2$$

Сад елиминацијом a, b из 2, $\varphi(ab)=0$ и $f(xyab)=0$ добија се нову једначину $\psi(xy)=0$ као једначину анвелопе.

§-12- У овом ћемо се § позабавити применом једначине регуларно оскулаторне криве по 2. начину изнесеном у §9.

Нека нам у слици §3 S представља линију, к[оју] изразимо регуларну оскулу, односно алгебарске линије L која је n^o. Прва њена регуларно оскулаторна крива нека је S' и она је као што смо то већ видели анвелопа линија S'', које линије ... даје до крајње оскулаторне криве тачаке на влакну S од влакна L.

Да би у овом случају нашли S' по другом начину означићемо коорд. тачке M са $x'y'$ и затим њену прву ~~регуларно~~ оскулаторну криву односно L. Рецимо нека је то крива S_2^* и она нека буде тангенцијална на S ако је тачка M на првој регуларно оскулаторној кривој влакна S. Овај ћемо услов одмах испитати. Означимо једначину влакна S_2^* са $f(xyx_1y_1)=0$ јер је то прва оскулаторна крива тачке $M(x_1y_1)$; једначину влакна S са $\varphi(xy)=0$.

Да су обе линије S и S'' тангенцијалне између [њих] сем тангенције у заједничкој тачки, а обе те дакле ...
Да

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = \lambda$$

где смо са f'_x, φ'_x означили прве изводе функција $f(xyx_1y_1)$, $\varphi(xy)$ по x а са f'_y φ'_y по y

Из једначине под 1 и једначине криве S' $\varphi(xy)=0$ добијамо једначину: $\psi(x_1 y_1)=0$ између Коорд. $x_1 y_1$ т.ј. једначину криве S'.

—13— Нека нам у слици (-2-) S представља криву 2° а P нека је [illegible] криве 2° облика $x^2+y^2+z^2=0$ наћи ће се једначина реципрочне криве S'.

Ми смо видели да је у овом случају пошто, држали једначина криве S једначина реципрочне криве S_1 (§7). Ми ни можемо наћи једначину реципрочне криве S_1 и на начин изложен у §10 и 11; т.ј. посматрати линеарну праве

$$V = \alpha x+\beta y+\gamma z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

која нам представља тангенту тачке a криве S, а која праве [illegible] у слици (-2-).

По §10 и 11 нама је за овај случај довољно да знамо $\varphi(\alpha\beta\gamma)=0$ а што нам је дато у тангенцијалној једначини криве S, коју ћемо једначину означити са $\Sigma=0$.

Одатле ћемо изложеном другом начину за ове линеарне праве, т.ј. другом начином елиминације α, β и γ из 1 и $\varphi(\alpha\beta\gamma)=0=\Sigma$.

Ако помножимо једначину 1 са λ и саберемо са једначином Σ онда добијамо ову једначину:

$$\lambda V+\Sigma=0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Налазећи прве изводе по α, β и γ ове последње једначине добијамо:

$$\frac{d\Sigma}{d\alpha}+\lambda x=0, \quad \frac{d\Sigma}{d\beta}+\lambda y=0 \quad \frac{d\Sigma}{d\gamma}+\lambda z=0 \quad \ldots \quad 2$$

Једначина $\psi(xyz)=0$ §11 која нам даје анвелопу линије V која нам линији $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, добија се елиминацијом α,β,γ и λ из 2 и једначине $V=0$ и $\Sigma=0$.

—14— Мало пре изложени случај се употребљује онда када је једначина криве S дата у тангенцијалним координатама но ако је дата у тачкастим или Картезијевим, тада би радили о анвелопи праве:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

које следе из тангенцијалне једначине криве S.

У једначини 1. означено би сад означавање параметре $x\,y\,z$ а $\alpha\,\beta$ и γ као функције коорд. тачака перспективне слике S' (слика 2) — или као коорд. тачака перспективне слике кад је пресечница круг $x^2+y^2+z^2=0$ (§ 6 и 7).

Кад се овако схвате онда је лако из добивене једнач. 1, која нам и сад представља однос тачака на бази S, јер нам је дата однос између xyz и параметара исте слике; а дати је у једначини базе S, која је једначином одређена само S.

Аналогно можемо сад извршити елиминацију да се $x\,y$ и z узимају као независни и једначина

$$1),\quad S=0,\quad \text{и}\quad \frac{dS}{dx}+\lambda\alpha=0 \quad \frac{dS}{dy}+\lambda\beta=0 \quad \frac{dS}{dz}+\lambda\gamma=0 .$$

Резултат ове једначине даје функцију f а то је тангенцијална једначина базе S.

Примедба. Мора V не може дати облик нити да се елиминација параметара $\alpha\,\beta$ и γ врши на основу начина у одредби 2. §, мора V само дати начин да се елиминација на исти начин изврши. Остало да се сведе дато у § 11 кад би се мора $f(xyz)$ заменити још од једног параметра c.

§ 15. Добивене тако § изводи неколико ... па који се односе на § у овој глави.

$-15a-$ Кад мора у 20) Траже се перспективно слична база базе S, кад је од дата у тангенцијалним коор. (слика —). Шта ово значи? Имамо дакле да означавамо примитивне једн. базе S, јер тангенцијална једначина исте базе је једначина примитивне перспективне слике S, у односу P које је дат ... именом $x^2+y^2+z^2=0$. Имамо дакле да одредимо перспективно слична база базе S_1, који је ... једначина ... тангенцијалном једначином базе S. Која је знамо са

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2Fy_1z_1+2Gx_1z_1+2Hx_1y_1=0 .$$

тангенцијална једначина базе S где смо са $x_1 y_1 z_1$ ... параметре слике

$$xx_1+yy_1+zz_1=0 \quad \ldots\ldots$$

који није никаква друга до поларна тачка блика S_1 чије су Коорд. $x_1 y_1$.

Радећи по § 13. где нам је сад α β и γ $x_1\ y_1\ z_1$ имамо за једначину апсолутне праве z':

$$\left(BC-F^2\right)X^2+\left(CA-G^2\right)Y^2+\left(AB-H^2\right)Z^2+2\left(GH-AF\right)Y$$
$$+2X\left(HF-BG\right)+2Y\left(FG-CH\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Кад би елиминисали Z_1 из 1 и 2 добили би једначину: до које једначине можемо и овако доћи.

$$M\left(\frac{x'}{y_1}\right)^2+2N\left(\frac{x_1}{y_1}\right)+P=0 \quad \ldots \quad 4$$

Једначина под 4. је слична са једначином ~~од~~ $f(xyz)$ у § 10. чија је апсолутна

$$N^2-MP=0 \quad \ldots \quad 5$$

а једначина 5, кад се замене N и P њиховим вредностима идентична са једначином под (3).

Једначина 3 је облика:

$$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gxz+2fyz=0 \quad \ldots \quad 6$$

одакле би се могле добити замене A, B, C … њиховим вредностима т.ј. [illegible] функције 6. види § 8.

— 15 — Кад би била дата једначина блика S у тространичним Коорд. и узмемо неки блик $2°$ и означимо на са

$$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gxz+2fyz=0 \quad \ldots \quad 1$$

на се одредити једначина реципрочне поларе у односу блика онда је по § 8. на једначина [illegible] једначина под блика — [illegible] по [illegible] облика $x^2+y^2+z^2=0$.

Но и одређене апсолутне праве:

$$XX'+YY'+ZZ'=0 \quad \ldots \quad 2$$

која нам у ствари [illegible] праве $x'y'$ поларне тачке а на блику S_1 можемо доћи до једначине $\varphi(x'y')=0$ или до једначине блика S_1.

По § 14

α, β и γ су сад $x'\ y'\ z'$ а једначина S је једначина 1. и кад смо [illegible] за ~~[illegible]~~ једначину реципрочне праве једначину [illegible] који смо [illegible] а овај је:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Gxz + 2Fyz = 0 \quad \text{— . 2}$$

ABC ... [illegible], t. j. [illegible] Δ [illegible] braka wzg. 1.

[illegible] a i b $\frac{y'}{x'}$ i $\frac{z'}{x'}$, a [illegible] w § 11. [illegible] to j. $\varphi(ab)$ jest jednanne wzg. 1, [illegible] $x'y'z'$ [illegible] x i y; [illegible] jednannom 1. [illegible] jednanne wzg. 2. [illegible] §. [illegible] jednanne [illegible] S, [illegible] S

— 15.c — [illegible] braka $Ax^2 + By^2 - 1 = 0$ [illegible] $x^2 + y^2 - 1$. w § 5 [illegible] wzg. 3. [illegible]

$$\frac{x_1}{Ax} = \frac{y_1}{By} = \frac{z_1}{z} = a \quad \ldots\ldots \quad 1$$

$$\text{ws } 1 \ldots \quad x = \frac{x_1}{Aa} \quad y = \frac{y_1}{Ba} \quad z = \frac{z_1}{a} \quad \ldots\ldots \quad 2$$

[illegible] w 2 [illegible] $Ax^2 + By^2 - 1 = 0$ [illegible] $x^2 + y^2$ [illegible] jednanne [illegible] jednanna [illegible] jednanny: $\frac{x_1^2}{A} + \frac{y_1^2}{B} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad 3$ [illegible] jednanny [illegible] — 7 — jednann[illegible]

— 15.d — [illegible] brak $(ax)^m + (by)^m + (cz)^m = 0 \quad \ldots\ldots \quad 1$ [illegible] braka [illegible] $x^2 +$ [illegible] w § 13. [illegible] x y i z [illegible] jednannie $xx' + yy' + zz' = 0$, [illegible] $x'y'z'$ [illegible] S' [illegible] S, [illegible] jednanny [illegible] braka S [illegible]:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^{\frac{m}{m-1}} + \left(\frac{y'}{b}\right)^{\frac{m}{m-1}} + \left(\frac{z'}{c}\right)^{\frac{m}{m-1}} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Ako jest brak 1. [illegible] (kanonicznej odmiany) $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz\,m = 0$, [illegible] jednann[illegible] [illegible]:

$$x_1^6 + y_1^6 + z_1^6 - (2 + 32m^3)(y_1^3 z_1^3 + z_1^3 x_1^3 + x_1^3 y_1^3) - 24m^2 x_1 y_1 z_1 (x_1^3 y_1^3 + \ldots$$
$$- (24m + 48m^4)\, x_1^2 y_1^2 z_1^2 = 0$$

— Трећа глава —

— Степен регуларно поларних курава —

— § 16 — Под степеном или редом једне линије разуме се степен једначине, која нам ту линију представља. Но обзир што права линија сече блак n° у n тачака реалних, или уображених, или у n″ реалних и уображених, што се своди, степен једнога блака n° одређује се бројем целокупних пресечних тачака између једног блака n° и праве линије.

Под класом једне курве разумева се онај број, који нам бележи број могућих тангената из једне тачке у равни блаковој на сам блак.

§ 17 — Две су поларно регуларне курве односно дуалне блака другог степена, тако да је степен једне раван класи друге и обратно.

Ево доказа овоме:

Ако су (в. слику 60) S и S′ две регуларне фигуре, и ако је S n° онда између S и праве p мора бити n пресечних тачака. Правој p одговара тачка p′ у регуларно поларној S, блака S. Пресечним тачкама S и p т.ј. тачкама a, b, c ..., којих је на броју n, одговарају тангенте из p′: A′ B′ C′ ..., којих такође мора бити n на броју. По броју тангената из тачке p′ на блак S′ одређује се класа курве S′ и она је као што се то види равна степену блака — степену своје регуларне поларе, јер је равна броју пресечних тачака блака S и праве p. Обратно казали би да је степен курве S′ раван класи курве S.

§ 18 — Ако су S и S′ конични блаци, онда је степен 2 а и класа равна броју два. Ако су то линије вишег степена, онда ћемо видети у каквој вези стоји класа једне курве са њеним степеном, јер према овоме јасно је како и степен регуларне поларе зависи од од степена класе, која је за криву реципрочне поларе. Ми смо нашли у другом одељку, како на класу обичне криве утичу сингуларне тачке. Тако нашли смо формулу за степен реципрочне поларе, или за класу криве $n^{\text{то}}$ реда линија са δ двојних и k стационарних тачака; а то је формула:

$$n(n-1) - 2\delta - 3k.$$

Кад линија нема сингуларних тачака, онда је њена класа:

$$n(n-1)$$

а то је степен n. Осведочићемо се о овом закључку из неколико примера, које ћемо изнети у следећем §.

§ 18 m. Ми смо видели да нам диференцијална једна на једној класа специјалну реципрочну полару класе дати у примитивним једначинама; (сама поменутим диференцијалним једначине даље примитивној једначини, ми ћемо се уверити да ли степен реципрочне поларе одговара класи саме криве.

Код свију линија 2°, реципрочне су поларе 2°, јер диференцијална једначина исте класе тачака 2°. Као што смо ми имали прилике видети, већ и вишег класа у овом одељку.

18 a. Класа m^{o} на пр. $(ax^m)+(by)^m+(cz)^m=0$ ... је $m(m-1)$-ве класе, т.ј. њена је реципрочна полара $m(m-1)$ степена. Ако се сетимо њене реципрочне поларе, која следи из услова да је права $XX'+YY'+ZZ'=0$ тангента на споменутој криви; која нам права представља полару једне тачке $(X'Y'Z')$ на реципрочној полари односно криве $X^2+Y^2+Z^2=0$. Та је реципрочна полара по облику:

$$\left(\frac{X'}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}+\left(\frac{Y'}{b}\right)^{\frac{m-1}{m}}+\left(\frac{Z'}{c}\right)^{\frac{(m-1)}{m}}=0 \ldots$$

Кад се ова једначина рационализује од корена, онда је јасно да у њој степену $X'Y'Z'$ фигурише $m(m-1)^{\text{ом}}$ степену, што ће да се класа $m(m-1)$ криве $m^{\text{те}}$ која нема сингуларних тачака јавља као степен реципрочне поларе.

— 18 б — Кубик, линија 3°, без сингуларних тачака, мора по овоме бити шесте ($6^{\text{те}}$) класе, а по другом речима њена реципрочна полара мора бити $6^{\text{ог}}$ степена. А ово исто, јер је реципрочна полара кубика:

$$x^3+y^3+z^3+6xyzm=0$$

Она гласи:

$$x_1^6+y_1^6+z_1^6-(2+32m^3)(y_1^3z_1^3+z_1^3x_1^3+x_1^3y_1^3)-24m^2x_1y_1z_1(x_1^3+y_1^3+z_1^3)-$$
$$-(24m+48m^4)(x_1^2y_1^2z_1^2)=0 \ldots\ldots$$

-18c- Кад би смо посматрали реципрочну полару кубике $y^2+x^2(x-a)=0$, казали би да је она класе $4^{\text{ог}}$ степена, а то је с тога што је ово сингуларна кубика са једном двојном тачком, те је по формули $n(n-1)-2\delta$ степен реципрочне поларе кубике 4. а не 6 као код несингуларних кубика.

Не обај би немамо сваког кубике $4^{\text{о}}$ мора класу, и ако је та класа мања од броја, који би дала формула одговарајући знак је да има сингуларних тачака.

m. Треба увек једној кубици ... Примера ради, као обо реди ме само исто, нпр, која може наћи реципрочна полара ове кривe у односу криве $x^2+y^2+z^2=0$ и по степену не једнаке закључити на класу реди оне кубике која је ово реципрочна полара, и обратно по класи реципрочне поларе ми само у степену само степен оне кубике, која је ово реципрочна полара.

-19- Ако полара тачке реципрочне кубике има класу $1^{\text{о}}$, као што смо видели у $II^{\text{ом}}$ одељку, која има $m^{\text{ог}}$ степена, то ће до једначине реципрочне поларе доћи, тражећи услова контакта између криве U, које представљају реципрочну полару и оне класе која нам представља полару кубике тачке реципрочне поларе. Ово је случај онда, кад је дискриминанта P класа $n^{\text{ог}}$ степена.

Услов ће контакта између две криве U и V добија онако исто као и између праве и КВ; а то је као што смо већ видели добија елиминацијом λ, α, β и γ из једначина $U=0$, $V=0$ $\frac{dU}{d\alpha}=\lambda\frac{dV}{d\alpha}$, $\frac{dU}{d\beta}=\lambda\frac{dV}{d\beta}$, $\frac{dU}{d\gamma}=\lambda\frac{dV}{d\gamma}$

Обе ће једначине добијати из услова да су наменице U и V са звиковим тачкама контакта једнаке:

[illegible] $\alpha\ \beta\ \gamma$ [illegible] U и V, [illegible] U и V.

[illegible] U [illegible] m [illegible] U, [illegible] U и V [illegible] V [illegible] $(x'y'z')$ [illegible] U; [illegible] V [illegible] m'.

[illegible] V: $a'b'c'$, .., [illegible] W [illegible] V [illegible] $a''b''c''$ [illegible] $V+kW$ [illegible] m' [illegible] U, [illegible] $a', a'', b'\ b''$ $a\ b\ c$; [illegible] $m=$ [illegible] U и V a', b' c' [illegible] a'' ka'' [illegible] $b'+kb''$ $c'+kc''$, ... [illegible] k [illegible] V [illegible] $V+kW$ [illegible] U 19/8, 3°

[illegible] $V+kW$ и U [illegible] m' [illegible]

$$V_1+kW_1=\lambda U_1 \qquad V_2+kW_2=\lambda U_2 \qquad V_3+kW_3=\lambda U_3 \quad ..$$

[illegible] V_1+kW_1 [illegible] $V+kW$ [illegible] x [illegible] a [illegible]

[illegible] $V+kW=0$ и $U=0$ [illegible] k и λ [illegible] k и λ [illegible] U [illegible] Δ [illegible] U [illegible] $V+kW=0$. [illegible]

$$\Delta=\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & W_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix}=0$$

[illegible] $U_1\ V_2\ W_3$ [illegible] $m-1$, [illegible] $m'-1$ [illegible] $m'-1$, [illegible] Δ $m+2m'-3$. [illegible] U и $V+kW$ [illegible] $m(m+2$ [illegible] U, [illegible] $m'(m'+2$

[illegible] U [illegible] $U_1\ U_2\ U_3$ [illegible] $U_1\ U_2\ U_3$. [illegible]

Стационарна тачка, онде су и тангенте у тој тачци на криву U и кривима U_1 U_2 U_3 исте. Тако би нашли да су у такт инваријанти (условној једначини контакта U и V) степени коефицијената V за сваку двојну тачку криве U умањени за двоједнице, а за сваку стационарну тачку за три. За δ двојних и k стационарних тачака криве U, степени су коефицијената V у такт инваријанти:

$$m(m+2m'-3)-2\delta-3k \quad \text{или} \quad n+2m(m'-1) \quad \ldots\ldots (1)$$

Примери

19а. Јасно да је права $xx'+yy'+zz'=0$ тангента на криву 2° $\varphi(xyz)=0$. Овде је U другог степена а V првог, т.ј. $m'=1$ а $m=2$, степени од x' y' и z' у такт инваријанти или пак је то овде реципрочна полара криве $\varphi(xyz)$, по показаном су:

$$m'(m'+2m-3)=1\cdot(1+2\cdot 2-3)=2^{\circ}$$

а ово смо нашли већ више пута.

19(б) Нека је V сад опет $xx'+yy'+zz'=0$ а $U=y^2+x^2(x-a)=0$ крива 3°. Такт инваријанта U и V је реципрочна полара криве U, односно криве ~~ко~~ узете у облике обрнута криве V. Код нас је сад $m'=1$, а $m=3$. Степени у коме фигуришу $x'y'z'$ сачиниоци криве V у такт инваријанти су:

$$m(m+2m'-3)=3(3+2-3)=6$$

Но пошто крива U има једну двојну тачку, јер су први изводи по x y и z задовољени корд. једне тачке, то је онда степен по формули (1) из 19ог 4. а не 6. А овако смо видели да мора бити.

— Четврта глава —

Принцип дуалитета

—20— Да би схватили овај принцип дуалитета, упознаћемо се једним примером.

Нека нам у слици 7 S представља један круг, S' нека је његова реципрочна полара у односу на КВ P. Онда по доказаном знамо да тачки A круга S одговара права a' на кругу S', правој c на кругу S одговара тачка C' на кругу S и т. д. Тако ако се круг S сматра као низ тачака, круг ће S' бити сматран као анвелопа правих, које тим тачкама одговарају и обратно.

Према овоме свакој теореми, која се односи на низ тачака круга S одговара реципрочна теорема односно правих на кругу S'. У овоме се огледа основни принцип у аналитичкој геометрији и он се назива принципом дуалитета.

Тако ако имамо низ тачака одређене фигуре у равни нашој, онда низ правих, које тим тачкама одговарају, морају пролазити кроз једну тачку, на основу већ доказаних теорема особине код КВ.

—21— Да би доказали изведене реципрочне теореме једне фигуре, узећемо да нам је круг S (слика 7) један од коничких кругова (КВ); онда ће по већ доказаном и реципрочна фигура S', као и S мора бити један од КВ.

Ако се сад на кругу S узме 6 тачака A. B. C. D. E. F и будемо их сматрали за темена шестоугла, онда ћемо на реципрочној фигури S', добити, као одговарајућу фигуру овом уписаном ~~шестоуглу~~ шестоуглу фигуру окружену из 6 тангената — т. ј. описани шестоугао. Особине ових двају фигура су сад са свим реципрочне. Паскаловој правој у фигури S одговара Брианшонова тачка у фигури S' и обратно. Као што смо изашли од Брианшоновог шестоугаоника, морали би добити ~~фигуру~~ од Паскаловог шестоугла, као реципрочне фигуре ове фигуре, и тако би нашли да Паскалова права реципрочна фигуре, Брианшоновој тачки.

Принципи су овде неисцрпљиви. Једино што нам остаје да овде применимо то је да уочимо све што важи од тачака код једне фигуре, важи одговорно правима код друге. Тако ако су извесне тачке на правој у хармонијским односима, њима одговарајуће праве морају такође бити у хармонијским односима. Инволуциони низ мора бити одговарајуће инволуционо прамен и т. д.

-22- Изнаке реципрочних особина из једне једначине.

Једначина се једне фигуре може представити или координатама тачке (Cartesie-вим, и триниеарним) или коорд. праве (тангенцијалним) од којих се разумевају коефицијенти једне праве $\lambda x+\mu y+\nu z=0$

У Картезијевим и триниеарним координатама једна тачка даје величине xy или $\alpha\beta\gamma$ праве једначином: $\lambda x+\mu y+\nu=0$ или једначином $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$

Обратно у тангенцијалним координатама $\lambda\ \mu$ и ν дајући им једну вредност $\lambda a+b\mu+\nu c=0$ дајући нам једну тачку ($\alpha=a$ $\beta=b$ $\gamma=c$), јер нам последња једначина изражава услов да права која је карактерисана координатама $\lambda\ \mu$ и ν пролази кроз тачку, чије су координате триниеарне: $\alpha=a$ $\beta=b$ $\gamma=c$.

Ако $\lambda\ \mu$ и ν задовољавају услов:

$$(a\lambda+b\mu+c\nu)(a'\lambda+b'\mu+c'\nu)=(a''\lambda+b''\mu+c''\nu)(a'''\lambda+b'''\mu+c'''\nu)\ \dots L$$

онда права $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ обвија Кб, обвојни показан као спрега од се израз анвелопа обе праве $(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)=0\ \dots C$

Из једначине се L може и овако протумачити, да је права или сечица тачке $(a\lambda+b\mu+c\nu)$ $(a''\lambda+b''\mu+c''\nu)$ тангента на Кб који обвија праве C. Да је ово доиста тачно, помножимо и увршћени из ова или координате ове праве одређене из последње двеју једначина морају задовољити услов од L, који је у том да [illegible] међу растојањима једне праве, па да ова права буде тангента на том тачку.

Према овоме, ако нађено карактеристику у Cartesi-јевим координатама, онда ову једначину можемо протумачити из тангенцијалне једначине исте теореме. Тако је Кб протумачен из Cartesi-јевим координатама ~~ног~~ низ тачака, а из једначине тангенцијалне од је анвелопа правих и т. д.

Из израза $\alpha\gamma=k\beta\delta$, можемо извести две теореме, тако ако $\alpha,\gamma,\beta,\delta$ представљају 4. праве или 4. тачке; т.ј. да ли од α разумевамо $x\cos\alpha'+y\sin\alpha'-p$ или од $\alpha\ \beta\ \gamma$ разумевамо $\lambda a+b\mu+c\nu\ \dots$, те су две теореме реципрочне, јер ако су $\alpha\beta\gamma\delta$ тачке онда нам $\alpha\gamma=k\beta\delta$ представља Кб тангенцијален на 4 праве $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta$ и $\delta\alpha$, обратно ако су то праве онда нам једначина $\alpha\gamma=k\beta\delta$ представља Кб који пролази кроз пресеке правих $\alpha\beta\gamma\delta$ или кроз тачке $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta$ и $\delta\alpha$.

Ако су S и S_1 Кб у тангенцијалним координатама, онда нам $S-kS'=0$ представља једначину свију Кб тангенцијалних на 4. заједничке тангенте, бројкова S и S', јер је $S-kS'$ задовољено истим вредностима $\lambda\ \mu\ \nu$ које задовољавају у исто време S и S_1. У триниеарним

Расуђивање $S-KS'=0$ значи да ово пролази кроз пресечне тачке S и S', из сличних разлога.

Према овоме одмах из једне особине, која је дата у хомогеној једначини или нехомогеној, можемо другу извести само ако реч тачка заменимо речју права и обратно. Ако смо добили какву особину у нехомогеним координатама, из ње реципрочну добијамо ако уместо $\alpha\beta\gamma\delta$ ставимо њихов реципрочни [illegible] ит.д. у овим другим размислима права се не тачка и обратно.

-23- Да би ово што смо довде изнели било разумљивије, да ћемо неколико примера. Узмимо овај:

Кад се 3 брака секу у једној тачки [illegible], онда се [illegible] тачке заједничке секу у једној тачки. Ово се врло лако доказује.

Ако означимо са S један од ова 3 брака, т.ј. са S означимо ову једначину:

$$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2gxz+2fyz=0 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

онда ће ова друга два брака бити означена са:

$$S+LM=0 \quad \text{и} \quad S+LN=0 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

где нам L значи једначину заједничке тетиве, а M и N једначине других тетива између ~~них~~ обе друге пресечних бракова и брака $S=0$

Заједничке тетиве бракова мог 2 су:

L и $M-N=0$ што се одузимањем ових једначина добија једначина $L(M-N)=0$, која нам даје заједничке тетиве. Као што се јасно види тетива $M-N=0$ пролази кроз пресек тетива $M=0$ и $N=0$

Кад би сад ову особину (т.ј. уместо брагуна) [illegible] на реципрочну особину одговорно [illegible], онда би уместо брагуна [illegible] 1 и 2 одговарала [illegible] 3 брака — но само реципрочна. Између [illegible] дана би одговарале тачке а пресечним тачкама [illegible] одговарале праве које би додиривале [illegible], и ми би имали само реч супротну [illegible] реципрочно [illegible], реципрочном особину овако исказану:

Кад 3. [illegible] имају две заједничке тангенте, пресечне тачке заједничких тангената ових пресечних [illegible] леже на једној правој.

Ово исто се је особина могла представити из реципрочне једначине. Да нам је једначина брака дата у нехомогеним координатама L би била једначина тачке, а то пресечна тачка заједничких тангената [illegible] $\Sigma=0$ (3) $\Sigma+LM=0$ и $\Sigma+LN=0$ (где смо са Σ означили нехомогену једначину брака 1). M, N и $M-N$ су пресечне тачке других заједничких тангената ових [illegible] бракова, и то пресечне тачке 2 и 2 од заједничких тангената. Једначина $M-N$ би нам [illegible] да се све пресечне тачке нанесе на исту праву, на којој и тачке $M=0$ и $N=0$, јер је $M=0$ и $N=0$ задовољено истим вредн. непознатих λ, μ и ν једне праве, као и $M=0$ и $N=0$

-24- Добићемо тако из истих неколико реципрочних теорема, да би се видео о принципу реципроцитета доле ређамо. Свакој теореми на супрот ћемо изнети реципрочну теорему:

1. Знамо из I-ог одељка: да се зна, да једне сталне тачке у односу система КВ, кроз 4. сталне тачке, секу у једној тачки.

Теорема под 1) је реципрочна. Полови једне сталне праве у односу система КВ уписаних у четвороуганику, налазе се на правој линији.

2. Место полова једне сталне праве у односу система КВ кроз 4. тачке, је сама КВ.

Анвелопа полара једне сталне тачке у односу КВ уписаних на 4 праве сталне је сама КВ

3. Праве што спајају темена једног троугла са супротним теменима другог троугла, секу се у једној тачки (пол хомологије)

Тачке пресека страна једног троугла са супротним странама другог троугла, леже у тачкама што леже на једној прави. (оса хомологије)

-4- Кроз стране једног троугла описане око три сталне тачке, док 2 темена клизе по једној правој; треће теме описује КВ

Ако темена једног троугла клизе по сталним правама, док друге 2 стране пролазе кроз две сталне тачке, трећа страна обвија једну КВ.

-5- Ако су A и Б два КВ, који имају двојни контакт са КВ S, корде контакта A и Б са S, и корде пресека A и Б секу се у једној тачки и образују прамен хармонијско

Ако су A и Б два КВ, који имају двојни контакт са S, пресеци тангената ~~са~~ повучених у додирним тачкама A и Б са S, са пресечним тачкама заједничких тангената, које на A и Б леже на правој линији, и чине систем хармонијских тачака.

Ми смо све ове теореме изузев оне под 5, доказали у I-ом одељку и зато их смо изоставили задржавајући се на тих овде. За ту ћемо се позабавити само са теоремом под 5.

Ако означимо корде контакта између S и A са L између S и Б са M онда су једначине кривих S A и Б: $S=0$ $S+L^2=0$ и $S+M^2=0$

Из последњих двеју једначина одузимањем добијамо $(L+M)(L-M)=0$ за корде пресека између кривих A и Б.

Обе две корде $L+M$ и $L-M$, са корд. L и M секу се у једној тачки, и јасно је да образују хармонијски прамен.

По доказаном ако су две једначине теорема једне, онда нам L и M представљају праве тачке заједничких тангенцијала на праве S и A и S и B, које имају по две заједничке тачке тј. по две аналитичка доказ реципроцитета између ова две тачака. Геометријски доказ многих реципрочних правила из овај:

Ако нам S, A и B представљају три КВ онда су S' A' B' три таква реципрочна праве. Заједничким тачкама ових одговарају заједничке тангенције, тачкама хармонијским одговарају тачке хармонијске, које се налазе на правој нису одговарајуће у. т. д.

-25- Два КВ који имају двојни контакт, имају исти контакт и код реципрочних КВ.

Из једначине исто те нам обе показане доказаћемо изражењем реципрочне праве тачку $S+(\lambda'x+\mu'y+\nu'z)^2=0$ права, одакле је $x^2+y^2+z^2$ једне тачке реципрочне праве $\lambda x+\mu y+\nu z=0$, онда ћемо добити изражењем услова контакта обе реципрочне праве и тачке тачкама реципрочне праве. Или ако ставимо тангенцијалну једначину тачке.

Ако са Σ означимо тангенцијалну једначину тачке S онда је

$$\Sigma+[a(\mu\nu'-\mu'\nu)^2+\dots]=0 \quad \dots \quad (1)$$

тангенцијална једначина тачке $S+(\lambda'x+\mu'y+\nu'z)^2=0$, а иначе се добија заменом a, b, c са $a+\lambda'^2$, $b+\mu'^2$, $c+\nu_1^2$ у $\Sigma=0$

Израз у загради у једначини 1. су замена x y и z са $\mu\nu'-\mu'\nu$, $\nu\lambda'-\nu'\lambda$, $\lambda\mu'-\lambda'\mu$ у првобитној једначини тачке $S=0$

Ако се једначина тачке: $S+(\lambda'x+\mu'y+\nu'z)^2=0$ облико напише:

$$(ax^2+by^2+\dots)(ax'^2+by'^2+\dots)-(axx'+byy'+\dots)^2=$$
$$=A(yz'-y'z)^2+\dots \quad (2)$$

где нам A значи извод дискриминанте $S=0$ по a и т. д. Онда се једначина може и облико написати:

$$(A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2+2H\lambda\mu+\dots)(A\lambda'^2+B\mu'^2+\dots)-(A\lambda\lambda'+\dots)^2$$
$$=\Delta[a(\mu\nu'-\mu'\nu)^2+\dots] \quad \dots \quad (3)$$

где нам $A\lambda\lambda'$ означава збир знак овог израза:

$$A\lambda\lambda'+B\mu\mu'+C\nu\nu'+F(\mu\nu'+\mu'\nu)+G(\nu\lambda'+\nu'\lambda)+H(\lambda\mu'+\lambda'\mu)=0$$

или овог

$$\lambda'\Sigma_1+\mu'\Sigma_2+\nu_1\Sigma_3=0$$ или овог $\lambda\Sigma'_1+\mu\Sigma'_2+\nu\Sigma'_3 \dots$

а које нам израз изражава услов конјугованости двеју права $\lambda x+\mu y+\nu z$ и $\lambda' x+\mu' y+\nu' z$, као што смо у I одељку видели.

Означимо са $\Sigma' = A\lambda'^2 + B\mu'^2 + \dots$ са $\Pi = A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + \dots$ и кад се израз на десној страни једначине 3 сведе, онда нам једначина под 3, која изражава услов контакта између праве и криве, узима облик

$$(\Delta + \Sigma')\Sigma - \Pi^2 = 0 \quad \dots\dots \quad 4.$$

Ако се сад λ, μ, ν схвате за коорд. једне тачке на једн. поларно реципрочној кривој, онда нам услов под 5 исказује особину: да се [illegible] реципрочне поларе двеју кр. које имају двојни контакт, секу и две реципрочне кр. са двојним контактом.

−26− Ако имамо две кр. $S = ax^2+by^2+cz^2$ и $S' = x^2+y^2+z^2$ то смо у овоме изразили поларно реципрочни криве криве S односно криве S', као директрисе, обзиром једначине криве S и једначине F, које смо значај видели у I ом одељку.

На основу тога што се значај инваријаната θ и θ' кривих S и S', и коваријанте F не мења, променом коорд. система, то смо узели заједнички аутополарни троугао кривих S и S' за основни троугао. Једначина је коваријанте F сад:

$$F = a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 \quad \dots \quad 1$$

Реципрочна полара криве S у односу криве S' је $bcx^2+cay^2+abz^2$, рец. поларе а добија се из услова конјугованости $xx'+yy'+zz'=0$ (поларе тачке $(x_1 y_1 z_1)$ у односу криве S') и једначине криве $S=0$. Означимо рецип. полару криве S са Σ

$$\Sigma = bcx^2+cay^2+abz^2 = 0 \quad \dots\dots \quad 2$$

Из 1 и 2 имамо, пошто је $\theta = bc+ca+ab$

$$F+\Sigma = (bc+ca+ab)(x^2+y^2+z^2)$$

из чега је $F=0$ или $\Sigma=0$ имамо $\underline{F = \theta S'}$ или $\underline{\Sigma = \theta S'}$. $\dots$ 3

На исти би начин могли наћи за једначину реципрочне поларе криве S' односно S као директрисе:

$$\theta' S = F = \Sigma' \quad \dots\dots\dots \quad 4$$

— Пета глава —

Однос између реципрочних полара, за случај кад је директриса круг.

§-27 — Из примера 3 ми смо видели да је поларно реципрочна фигура једне линије у општем случају другојачије сложена но према што и сама та линија; и да је ова разлика све већа и већа, што је директриса алгебарска линија вишег степена.

Но да би што више о односу ових реципрочно поларних фигура дознали, ми ћемо узети најпростији случај, а тај је кад је директриса круг.

Ако је на пр. у слици (8) директриса круг са центром у O и ако је његов полупречник R, онда је фигури S, реципрочно поларна фигура S'. Код круга нам је познато из I-ог одељка, да је производ из отстојања пола од центра и отстојања његове поларе од центра стални и раван квадрату полупречника.

А то нам и слика 8-ма показује. Ако је права a полара тачке A онда је троугао AOT правоугли, код T је прав угао, и по познатој теореми имамо:

$$\overline{TO}^2 = OM \cdot OA \quad \ldots \quad (1)$$

У слици 8 имамо да је p поларна права PT, односно pt је полара тачке T. На основу напред реченог особине имамо:

$$OT \cdot Op = R^2 \quad \ldots \quad (2)$$

Помоћу ове особине, можемо дефинисати реципрочну полару S', као геометријско место тачака, код којих је производ из отстојања од центра раван квадрату полупречника оног круга, што је узет за директрису.

На основу овога, ако нам је дата једна линија S, њој тражимо реципрочну полару у односу круга полупречника R; нађе у тачкама њеним њихове нормале, а из центра дизаћемо нормале, и на тим нормалама одредимо тачке p, p' p², које одговарају условима исказаним под 2. Те тачке одговараће тачкама T T'... линије S. Лако је све ово видети, увиђа се из тога што сваком полу код круга одговара полара на линији што спаја пол са ~~[illegible]~~ центром круга; и што пол према реципрочној тачки поларе и линије што спаја пол са центром, одговара закону под 2.

Димензије линије S' зависе од величине директрисе — т.ј. од полупречника R; но облик њен не зависи од тога, јер би тачке p p'... за R ма како велико задовољавале услов 2. Због овога ћемо ми S' звати реципрочном поларом линија S односно круга

О или краће односно тачке О, коју ћемо звати од сада полом.

3-28-. На основу ове особине ми можемо сад лако одредити једначину реципрочне поларе ма какве криве, и то овако. Ако у слици 8 означимо са h' од нормалу из О на тангенту у тачки P и са ρ, потег тачке p на реципрочној полари бранке S т.ј. на њеној S'. Онда по једначини другој имамо:

$$\rho h' = \rho' h = R^2 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

Из једначине 1. видимо сад, да је потег реципрочне криве раван реципрочној вредности нормале на тангенти у одговарајућој тачки бранке S, коме се прави реципрочна полара, помножен са квадратом полупречника; или само раван реципрочној вредности нормале, ако се полупречник директрисе означи са јединицом.

Помоћу овога се врло лако налази реципрочна крива ма какве криве, која је дата у поларним координатама, односно криве у централном облику. Треба знати једначину нормале на дату криву, па онда одредити нормалу из пола на тангенти у тој тачки и то ће бити потег (радијус вектор) реципрочне поларе.

-28а- Овај ће нам пример расјаснити пропис 3.

Правимо се реципрочна полара једне Кл. (0) у односу на тачку (знаш у односу круга, чији је ~~тачка~~ центар у центру бракобом)

Нека је полупречник тог круга R, онда је нормала из центра О на тангенту у извесној тачки браковој:

$$p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \quad \ldots\ldots \quad 1$$

θ је угао између нормале и $X^{ск}$ осе; p је дужина нормале; a и b су велика и мала полуоса конусног брака.

Једначина му 1 је иначе h^2. Ако означимо са ρ_1 ~~потег~~ потег реципрочне поларе, онда по изложеном имамо:

$$\rho_1^2 h^2 = R^4 \quad \ldots\ldots \quad 2$$

Из 1 и 2 имамо:

$$\frac{R^4}{\rho_1^2} = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \quad \ldots\ldots \quad 3$$

или у Cartesi-јевим координатама имамо:

$$\frac{a^2x^2}{R^4} + \frac{b^2y^2}{R^4} = 1 \quad \ldots\ldots \quad 4$$

за једначину реципрочне поларе Кл. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

—28б— Но ми можемо на основу и свих метода наћи педи-
ропну површину и односу површка на оси у равни влаковој.

Нека се површак налази у тачки x, y,
Једначина нормале из $x'y'$ на тангенту влака контурког је

$$p = \frac{R^2}{\rho} = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} - x'\cos\theta - y'\sin\theta \ldots 1$$

Контура је влака дата у поларним координатама. Ако ту се ... θ знати угао између нормале $x'y'$ и x-ове осе.

Из једначине 1 кад се изврши множење са ρ и кошине $\rho\cos\theta$ и $\rho\sin\theta$ ~~замене~~ са X и Y имамо за једначину педалне површине:

$$\left(Xx' + Yy' + R^2\right)^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 \ldots 2$$

—28с— По наведеном примеру можемо извести једначину педалне површине код кв, кад је дирекциона ... са површком у тачки x, y, и ово из једначине педалне површине исто влака у ... дирекције ... са површком у центру влаковом.

Ако нам сад у слици 8 OT представља нормалу на тангенту у тачки P влака S — које можемо узети да је кв — онда на основу примера 28а имамо:

$$OT^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = Q \ldots 1$$

Ако са d означимо отстојање тачке $x'y'$ од тангенте 1 онда је по једначини 1 § 28б

$$d = \sqrt{Q} - x'\cos\theta - y'\sin\theta \ldots 2$$

Поларна једначина педалне површине S' криве S, је, ако са h означимо оно исто и § 28а

$$h = \frac{R^2}{\rho} = \frac{R^2}{R} - x'\cos\theta - y'\sin\theta \ldots 3$$

где нам ρ и R значе отстојање тачака i', одн. површка ... система у центру влаковом и у тачки $x'y'$.

Једначина под 3 је у Cartesi-јевим координатама

$$R^2 = \frac{R^2\rho}{R} - x'X - y'Y \ldots 4$$

Из 4 имамо $\frac{R^2}{R} = \frac{Xx' + Yy' + R^2}{\rho}$ или

$$\frac{R\cos\theta}{R^2} = \frac{\rho\cos\theta}{Xx' + Yy' + R^2}$$

$$\frac{R\sin\theta}{R^2} = \frac{\rho\sin\theta}{Xx' + Yy' + R^2} \ldots 5$$

Једначине од 5 овим кругу имамо везива радиом односно круга са центром у центру вектором са корд. ρ у једначини реципрочне тачке, па да се добије реципрочне тачке односно круга са центром у тачци $x'y'$. Исто ћемо једначине кад се преобразе у Cartesi-јеве корд. кажемо да се x и y, у једначини реципрочне тачке веома замењени са $\frac{xx'+yy'+R^2}{xR^2}$ и $\frac{yy'+xx'+R^2}{yR^2}$, па да се из једначине реципрочне тачке, односно круга са центром у центру вектором, нађе реципрочна, односно дирекције круга са центром у тачци $x'y'$.

Тако у опште, ако је дата једначина реципрочне тачке односно почетка у центру вектором, овом једначином:

$$u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots = 0 \dots (6)$$

где нам u_n значи функцију $x\,y$ у n°, u_{n-1} у $(n-1)^{\circ}$ и т.д., онда се по доказаном добија једначина реципрочне тачке замењени x и y у 6 вредностима $\frac{xR^2}{xx'+yy'+R^2}$, $\frac{yR^2}{xx'+yy'+R^2}$. Кад се ово последње изврши и једначина сведе, онда за једначину реципрочне тачке односно круга са центром у $x'y'$ имамо ову једначину:

$$u_n + u_{n-1}\frac{xx'+yy'+R^2}{R^2} + u_{n-2}\left(\frac{xx'+yy'+R^2}{R^2}\right)^2 + \dots = 0 \dots 7.$$

Криве 6 и 7 су истог степена, и отуда изводимо ово правило. Једначине реципрочне тачке ~~оне~~ једног ~~вектора~~ односно вектора круга, ма где се он налазио у равни, јесу истог степена.

—29— Помоћу доказаног ми смо у стању врло лако наћи реципрочну тачку једне криве, кад нам је она дата у поларним координатама, ваља све свести одредимо једначину поларне вредности реципрочну вредност исте и то је поларне тачке — кад је полупречник дирекције раван јединици, т.ј. $R = 1$

Нека нам у слици ... представља вектор, чији је поларни систем са почетком у O, а то је и центар круга дирекције. Означимо са ρ потег једне тачке P, начинимо дужину $OP = OQ$ бесконачно малом потегу OQ. Очевидно је из слике:

$$PP' = d\rho \quad P'Q = \rho\, d\omega \quad tg\, OPQ = \frac{P'Q}{PP'} = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} \dots (1)$$

Ако са θ означимо угао између тангенте (а) у P са потегом ρ /OP онда је $\theta = 90 - m\omega$ ако са $m\omega$ означимо угао између потега OP и нормале PN. Према овоме је нормала из O на тангенту а у P: $\rho \sin\theta$ или $\rho \cos m\omega$.

Угао ~~ψ~~ између нормале Ok и линије OX од које се мере углови ω је $(m+1)\omega$, што је довољно сугласно нашим § 28, 28a ... .

На овај начин знајући једначину брзина S на што нека је сад $\rho^m = a^m \cos m\omega$ онда с обзиром на једначине под 1 и једначину $\rho \cos m\omega$, које нам даје нормалу из O на тангенту a, имамо да је хидродинамичка (вектор) брзина друге криве $\frac{1}{h}$ т.ј. реципрочна вредност нормале h из O на тангенту у P. Ово се добија из једначине $h\rho = 1$ јер је R сад равно 1.

Кад се по показаном узме реципрочна вредност нормале $\rho \cos m\omega$, и узме у обзир све што ово даје сличности о углови између вектора брзина $\rho^m = a^m \cos m\omega$ и нормала у тангентама на њих, онда се за једначину реципрочне криве брзина $\dot\rho^m = a^m \cos$ налази

$$\rho^{-\frac{m}{m+1}} = a^{-\frac{m}{m+1}} \cos\left(\frac{m}{m+1}\,\omega\right) \quad \ldots\ldots \quad (2$$

Из једначине $\rho^m = a^m \cos m\omega$ добијамо десетак разних крива, тако за $m=1$ имамо круг, за $m=-1$ праву линију, за $m=2$ обичну лемнискату, за $m=-2$ равнострану хиперболу, за $m=1/2$ кардиоиду, за $m=-1/2$ параболу и т. д. Свима је овим брзинама сад лако наћи реципрочне криве из једначине под 2.

\+ Ја се овим нисам користио у овоме извођењу ове једначине пошто мени је било стало са њиховим исказима у § 28, 28a, 28b и 28c; узимао сам нумеричке вредности у једначинама под 2 а иначе је извођење врло лако.

— 30 — Ми смо у § ове главе, добде извели само добијали једначине реципрочних кривих, кад је директриса круг. У овом и следећим § ми ћемо се и са другим особинама реципрочних крива упознати. Специјално ћемо се бавити линијама 2°.

Из показаног је јасно да од положаја једне кб према директриси зависи облик њене реципрочне криве. Да изведемо тачака њених кроз бесконачност у ∞, које се десило да се кб и њена реципрочна крива секу, додирују и т. д.

Ради бољег објашњења ове теорије узећемо један пример. Полазимо од два круга на тако узајамном положају, реципрочну поларну у односу другог круга.

Нека нам у слици 9. С представља центар круга S чију реципрочну поларну тражимо, о центар директрисе K (која је такође круг). Онда за реципрочну поларну круга S добијамо по познатом особину линију S_1. Каква је та линија видећемо сад.

Тачки P одговара тангента у тачки p на врачу S_1, као што тачки p одговара тангента у P; центру врача S одговара а P' поларa тачке O. Из слике и из одељка имамо, пошто је MN поларa тачке C

$$\frac{OC}{CP} = \frac{OP}{PN}$$

$\frac{OC}{CP}$ је стално, мора и $\frac{OP}{PN}$ бити стално, а ово карактерише тачке кривих, којих је O жижа а MN директриса, $\frac{OC}{CP}$ је њихов ексцентрицитет. Одатле изводимо да је реципрочна поларa врача S т.ј. линија S_1, геометријско место тачака p — т.ј. тачака конусног пресека.

$\frac{OC}{CP}$ може бити равно ~~јед~~ јединици, веће или мање од ње. Први је случај за O на периферији круга S, други за O ван круга, трећи за O у кругу. У првом је случају S_1 парабола, у другом елипса у трећем хипербола.

—§ 31— Ово што смо рекли о реципрочним кривама конусних пресека, изнећемо и аналитички извести. Ако у слици 9 означимо полупречник круга K са R, а полупречник круга S са l, онда су њихове једначине:

$$x^2+y^2=R^2 \quad \dots\dots \quad 1$$

$$(d+x)^2+y^2=l^2 \quad \dots\dots \quad 2$$

где нам d значи OC, а почетак је коорд. система у O.

Једначина реципрочне поларе врача S је по већ познатом начину израчунавања:

$$(-d^2+l^2)x^2+l^2y^2-2dR^2x-R^2=0 \quad \dots\dots \quad 3$$

То је једначина врача S', а она нам потпуно даје све случаје, које смо ми од ока извели у § 30.

Тако за $d=l$ рекли смо да је S' парабола. Из једначине 3 за $d=l$ имамо

$$x=\frac{l}{2R^2}y^2-\frac{1}{2l} \quad \dots\dots$$

а то је једначина параболе, кад се почетак пренесе у жижу.

Из једначине се може 3 видети да нам она представља елипсу или хиперболу, како је код $d < l$ или $d > l$, као што смо то и пре видели.

Једначина 3 може бити и круг. То је онда случај кад је $d = 0$. Отуда извлачимо ово правило:

Реципрочна раван круга може бити круг, ако се центар директрисе круга поклапа са центром круга коме се директриса односи; у сваком другом случају реципрочне равни круга су различити конусни пресеци.

§ 32 — Све ове особине, што се тичу одлика реципрочних равни, ми смо у смислу показаном, извесном [illegible] реципрочних уређења, које се односе на линије и тачке код ових [illegible]. Таква уређења која би важила и односно [illegible] у једној фигури (код [illegible] 2°, 3° .. n°), могла би се извести да важи између тангената, код реципрочне фигуре датог [illegible].

У овој [illegible] овог одељка ми смо показали да је веза ових реципрочних уређења врло проста ствар, показао на односе који постоје између тангенцијалних и ординарних једначина.

Са тим на овом месту завршићемо још о карактеристичним особинама реципрочних равни КВ, и са овим завршити излагање о реципрочним равнима.

Ако из О у слици 9 повучемо тангенте на круг С и потражимо њима одговарајуће тачке на реципрочној равни S, видећемо да се ове тачке налазе у ∞. Дакле двема тангентама из О на криву С одговарају 2 тачке у ∞ на кривој S'. Ако се из О могу повући две реалне тангенте онда S' има 2 тачке у ∞ и онда је крива S' хипербола, као што смо видели у § 31. Ако се из О може повући само једна тангента, што је случај кад се О налази на кругу S, онда је само једна тачка Σ' у ∞ и S' је парабола; или се из О не може ниједна тангента повући на криву S, и онда линија S' нема тачака у ∞, т.ј. она је елипса.

Као што правима кроз тачку (О) одговарају тачке у ∞ исто тако и правима у ∞ одговарају тачке у тачки (О). Кад се О налази на кругу, онда њој одговара права која је у тачки О' на кривој S' у ∞ тангента. Зато се и каже да све параболе имају једну заједничку тангенту у ∞.

Тачкама а и b у слици 9 одговарају тангенте повучене из тачке О ка тачкама у ∞ на кривој S', т.ј. одговарају асимптоте линије S'.

—33— Ради усавршавања њихових особина код реципрочних полара кругова, може се згодним избирањем тачке О задатак јако упростити. (слика 9)

Ми можемо О изабрати тако да су реципрочне криве двају кругова односно ове тачке, два хомофокална конусна пресека. Када ово може бити испуњено? Кв. су хомофокални кад им се жиже поклапају. Реципрочни кв. имају једну жижу једнаку, то је као што смо видели полoвиште О, да би се и друге жиже поклапале треба да оба реципрочни кв. имају и центар заједнички, другим речима да је полара тачке О у односу оба круга иста права; а то може бити ако половиште пада у једну од граничних тачака двају кругова, које смо ми видели у I^ом одељку.

Узимајући једну од ових тачака за половиште -I.j за центар дирекције R — кругова са једном осом радикалном заједничком, реципрочне поларе обих кругова ће бити хомофокални конусни пресеци.

Ако се за половиште узме једна од других конјугованих тачака, реципрочне криве двају кв. биће конфокални кв, ово се лако увиђа из природе самих конјугованих тачака.

Проблеми из реципрочних полара су неисцрпљиви, но ја мислим да сам основне принципе о реципрочним поларама, овим довде изложене, довољно објаснио, и с тиме са овим завршујем и трећи одељак писања о полу и полари.

Сад овим завршујем писање о полу и полари код кривих линија алгебарских, спомињући да сам у другом одељку изнео опште принципе, који се односе на алгебарске линије виших степена, а који се према томе могу применити на све линије алгебарске, које леже у равни.

./.

Дела којим сам се служио при изради ове расправе ~~[illegible]~~ јесу поглавито ова:

1) Traité de Géométrie analytique (Sections coniques) par G. Salmon. 1870. année

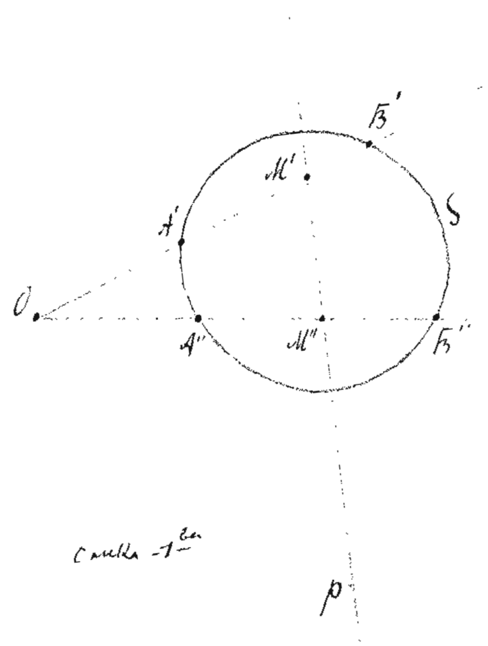
2) Traité de Géometrie analytique (Courbes planes) par. G. Salmon. 1884. année

-3- Lehrbuch der Analytischen Geometrie I Theil O. Fort und O. Schlömilch.

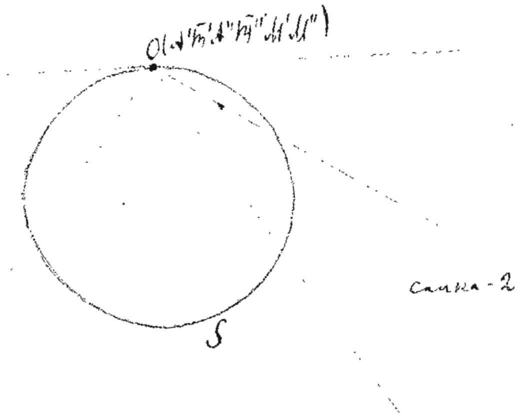
-4- Lehrbuch der analy. geometrie Dr. Josef Herr

-5- Leçons de géométrie analytique par MM. C. Briot et J-C Bouquet.

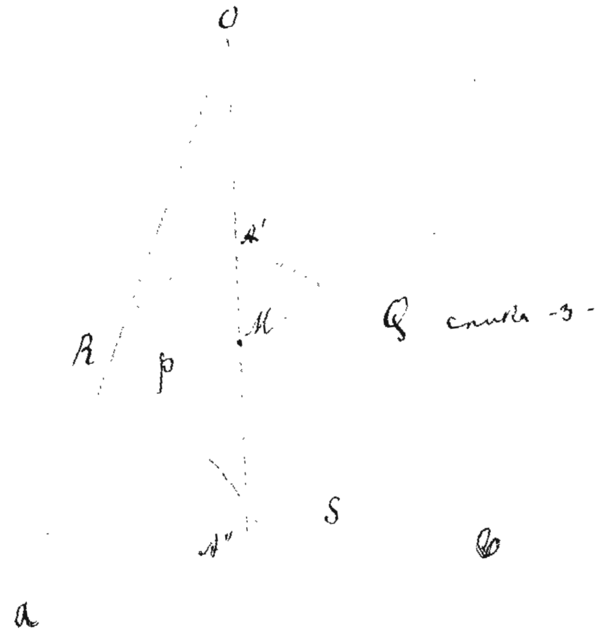
-//-



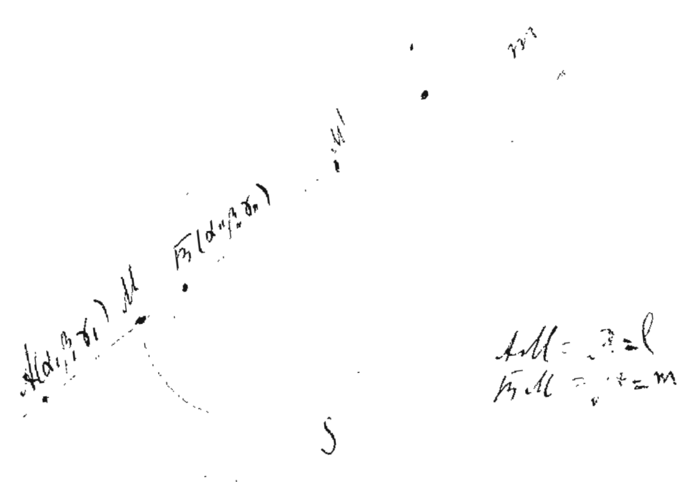
слика -1-ва



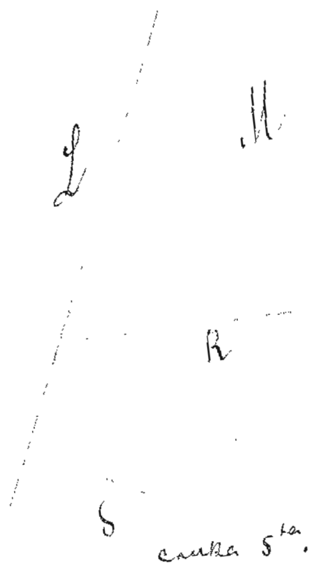
слика -2-



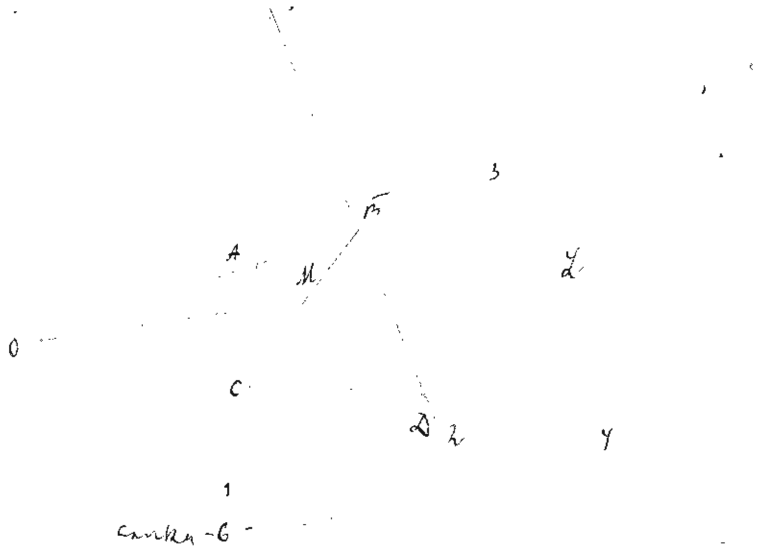
слика -3-



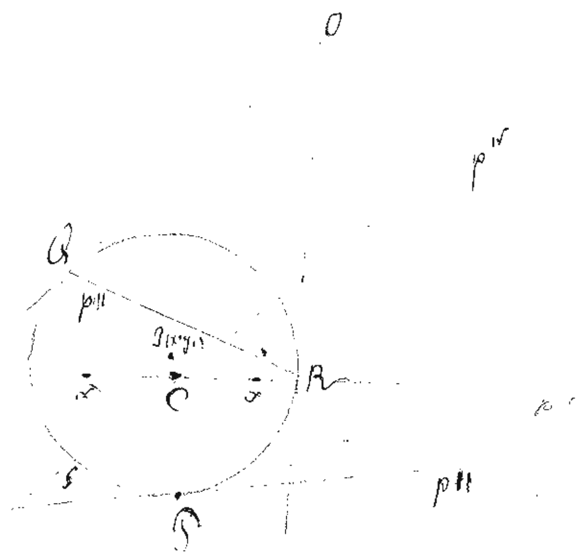
слика 4-



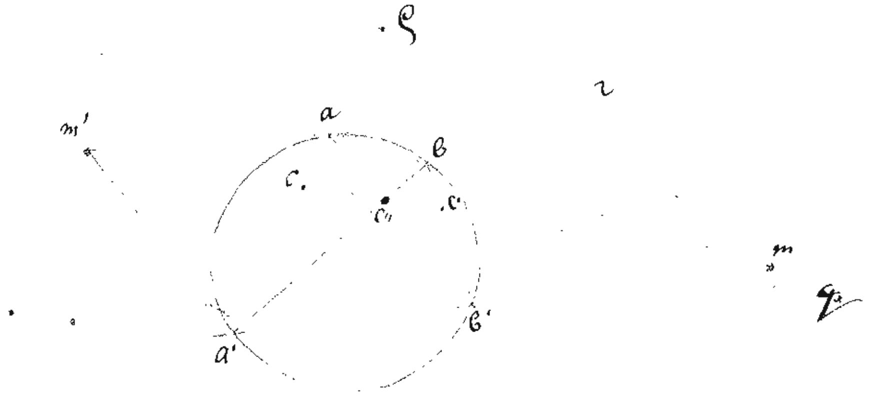
слика 5-та.



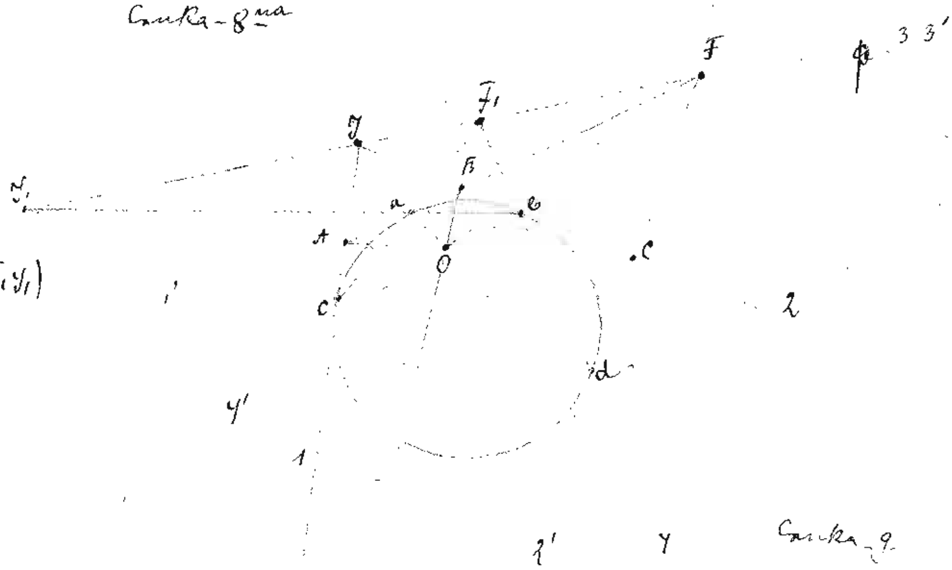
Слика-6-



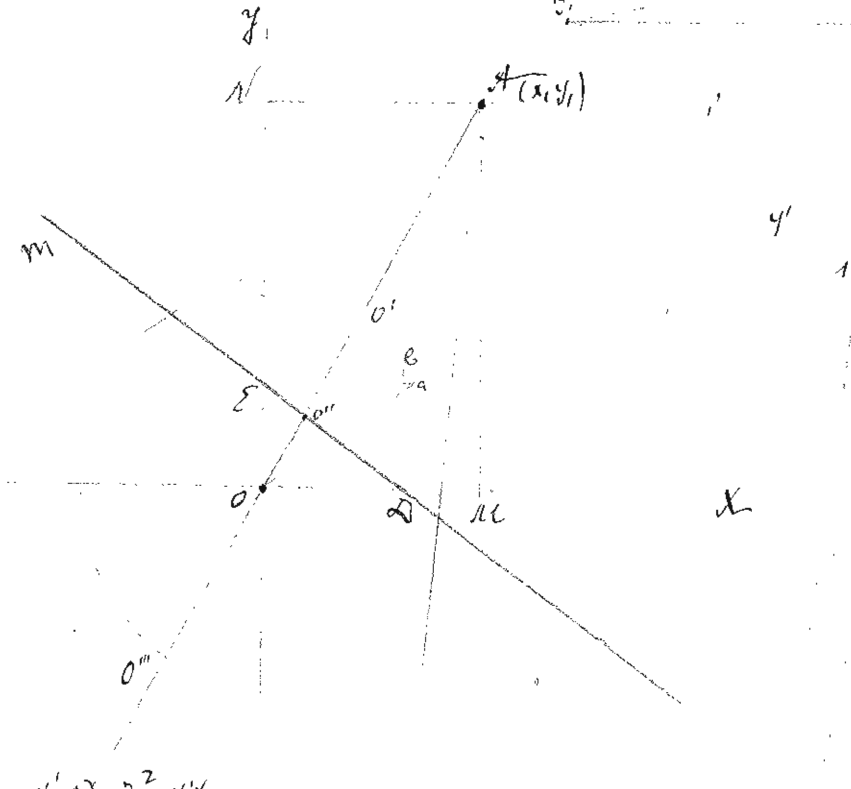
Слика-7-



Слика-8-ма



Слика-9

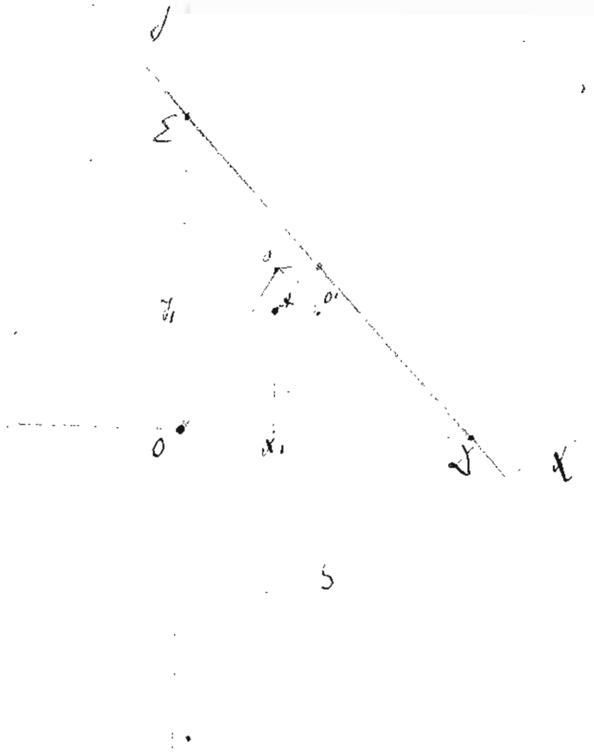


$x' O \mathfrak{J} = r^2 = x'X$

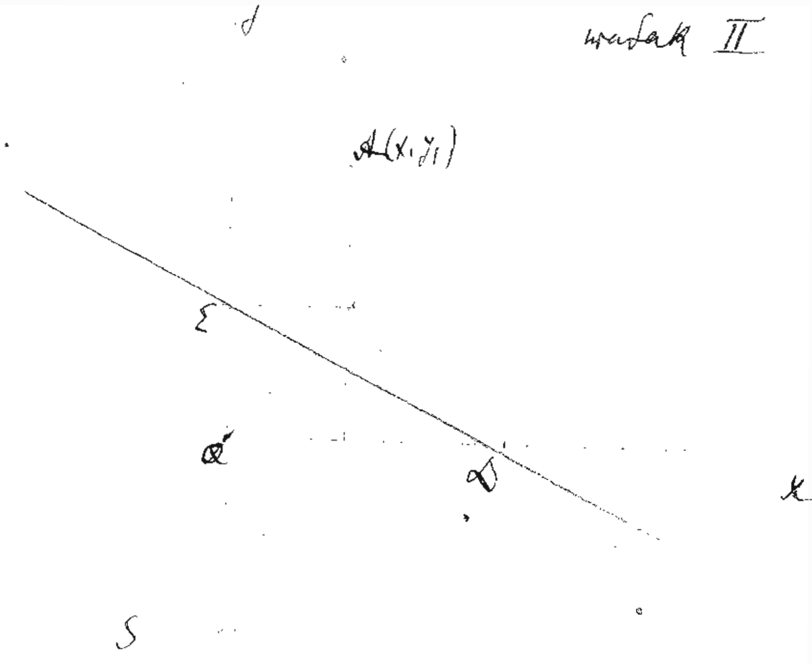
$y' O \mathfrak{Y} = r^2 = yy'$

Слика 10

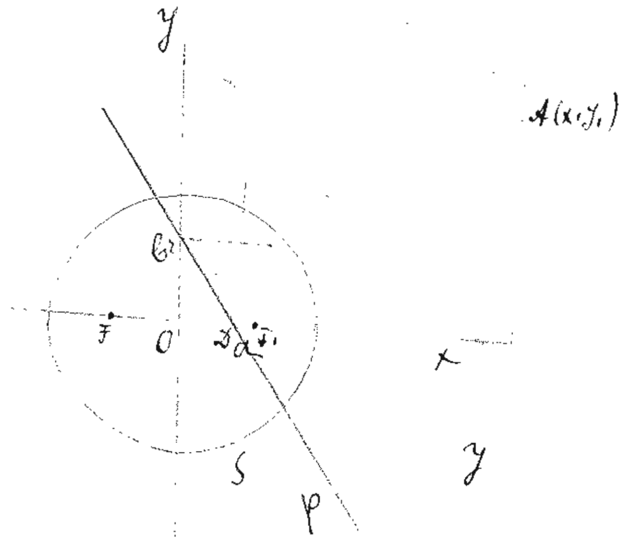
прилог II



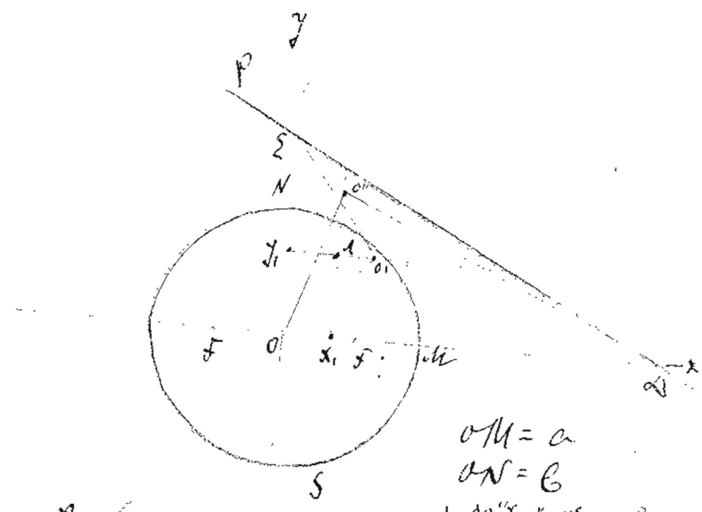
слика 11ᵃ



слика 11ₐ

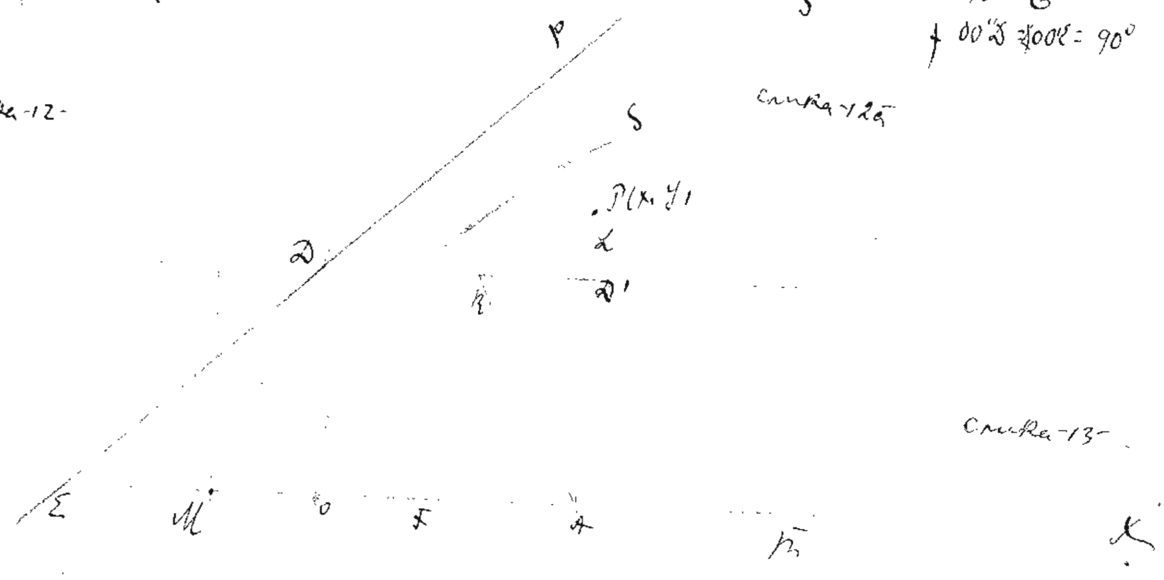


слика 12



$OM = a$
$ON = b$
$\measuredangle OO'D \; \measuredangle OOE = 90^\circ$

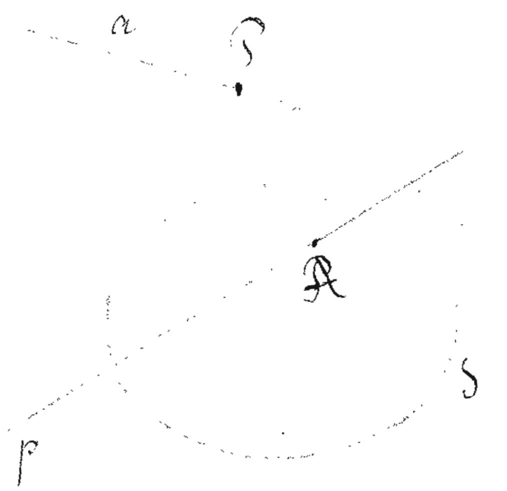
слика 12б



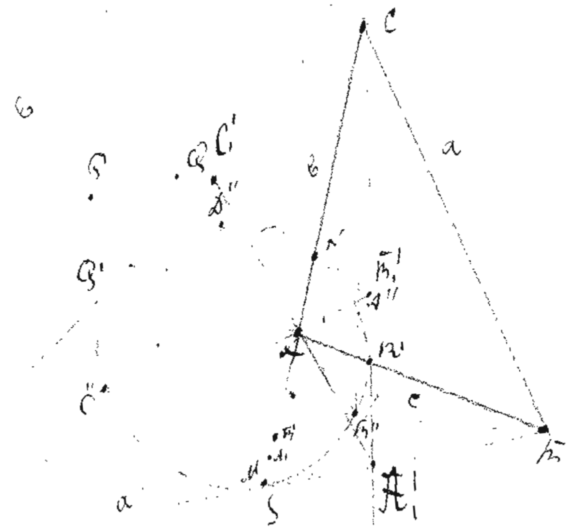
слика 13

$AR_1 = FM = 2MO = \frac{p}{2}$
$AL = AR$
$x' = 0 \quad \Sigma = OA$

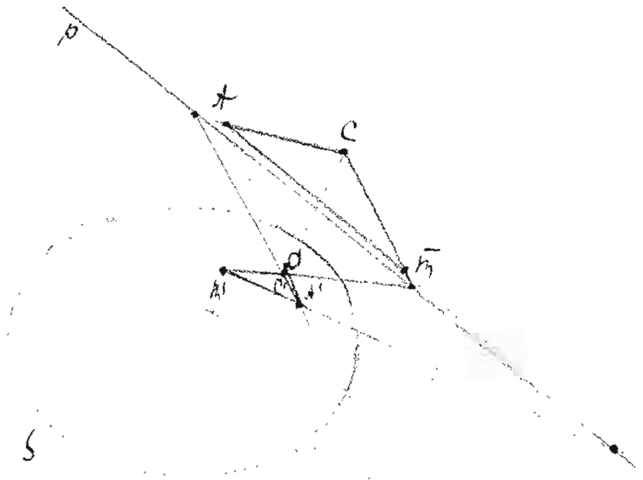
$AL^2 = AO \cdot AR = x_1 \frac{p}{2} = y'y = OD \cdot AP$



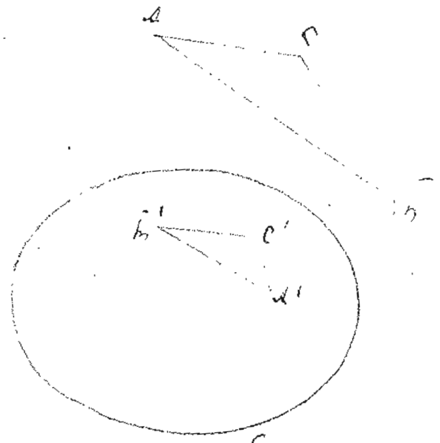
Слика -14-



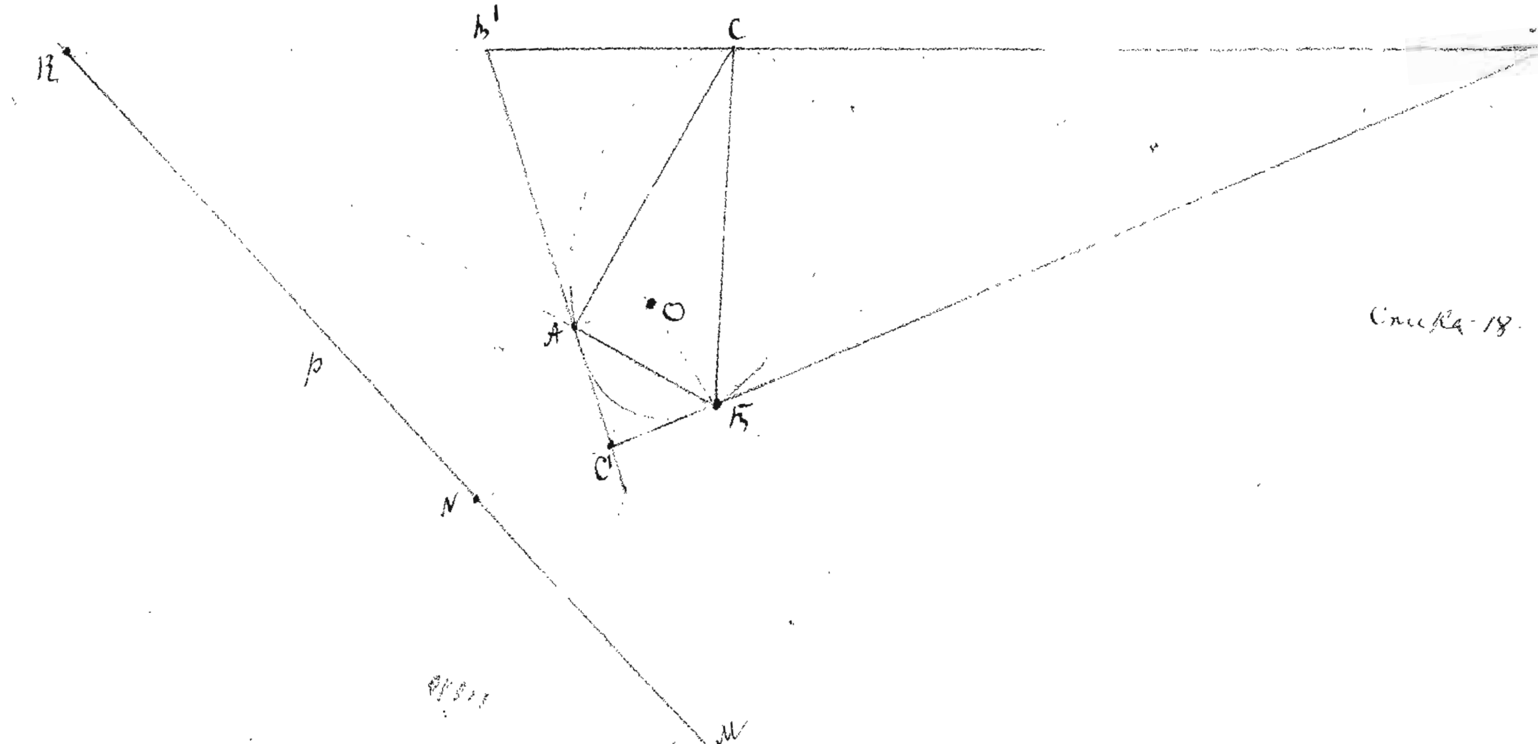
Слика -15-



Слика -17-

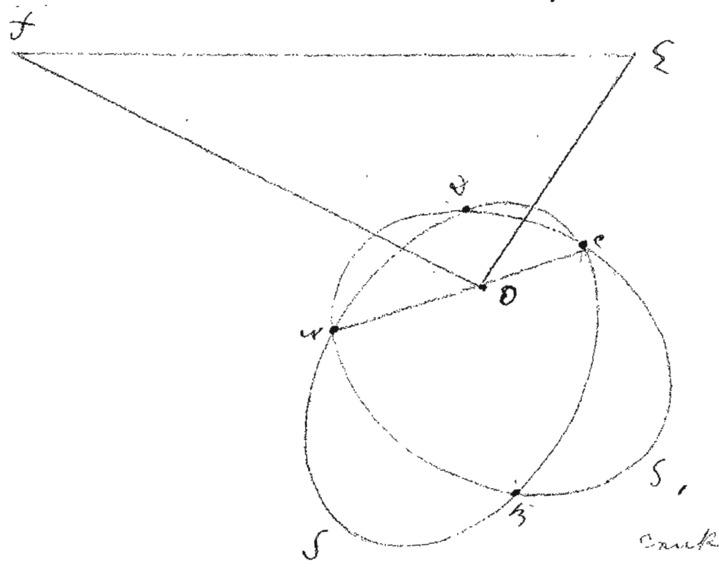


Слика -16-

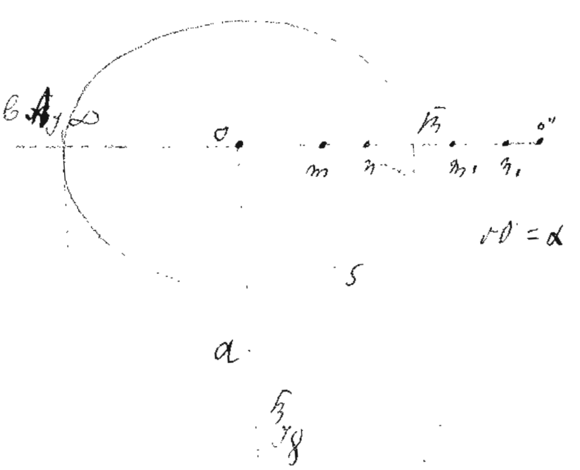


Слика -18-

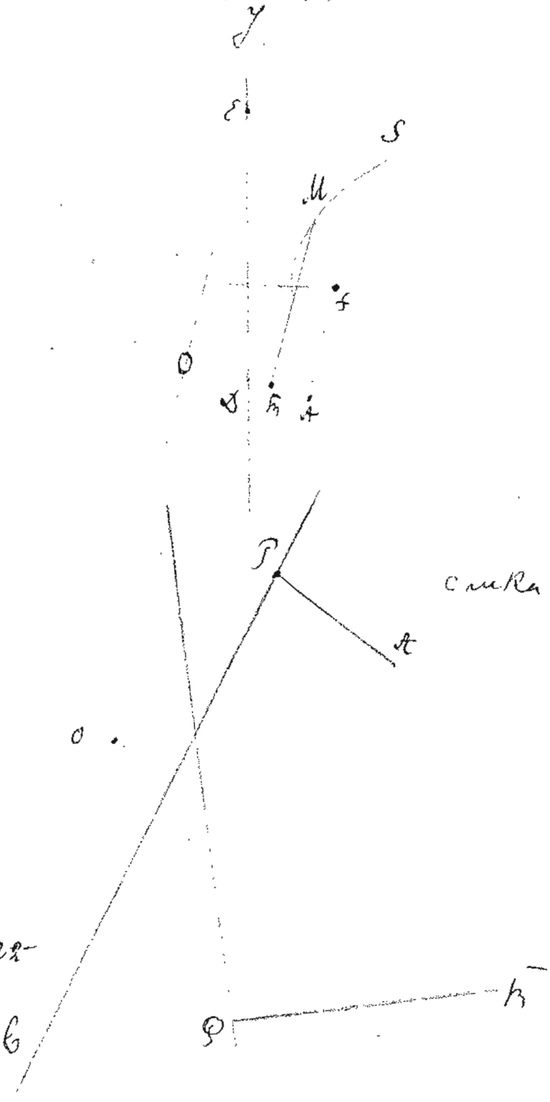
таблица III-та



Слика -19



Слика 20 -

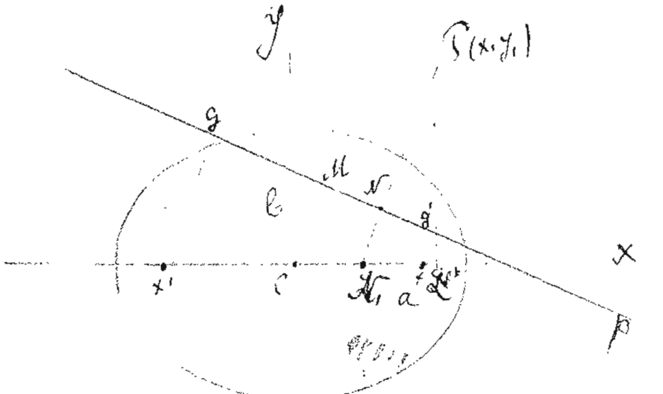


$\left.\begin{matrix} f, A & B \\ AO = R \end{matrix}\right\} T$

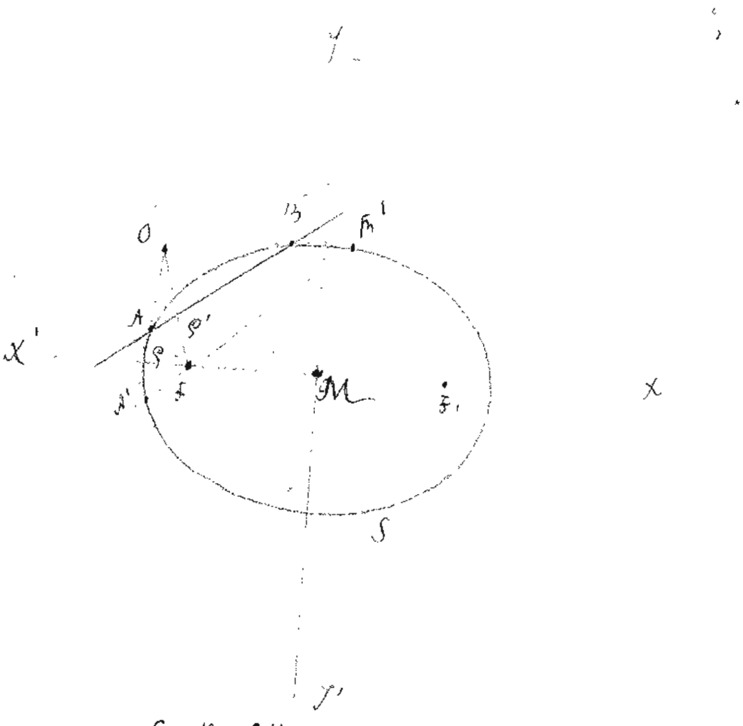
$\left.\begin{matrix} MN = y \\ ON = x \end{matrix}\right\} M$

Слика 21

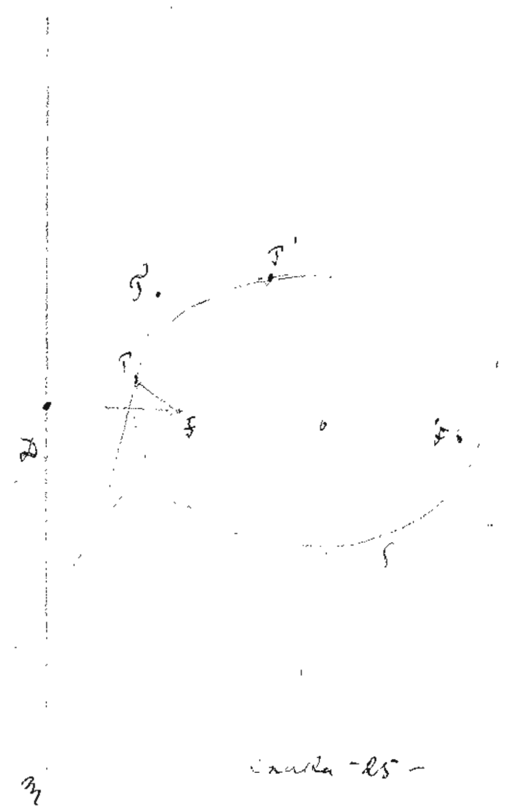
Слика-22-



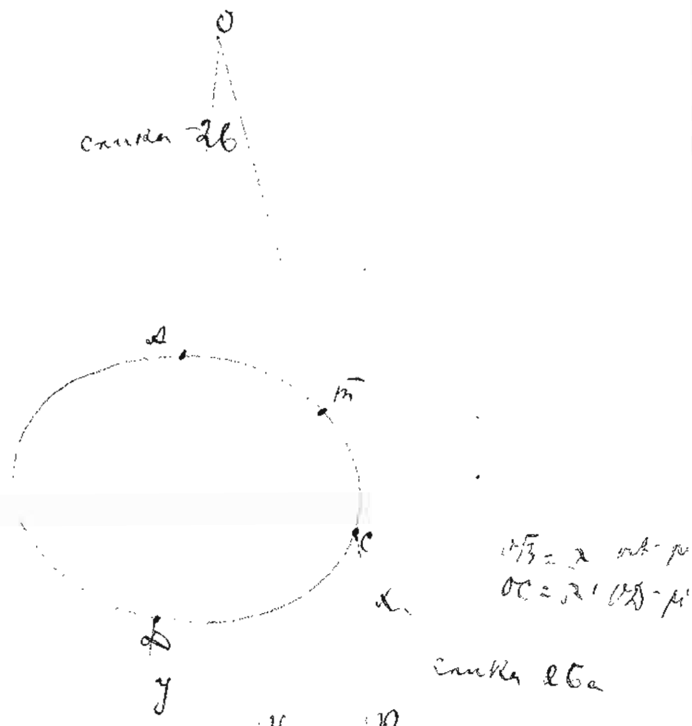
Слика -23-



Слика -24-

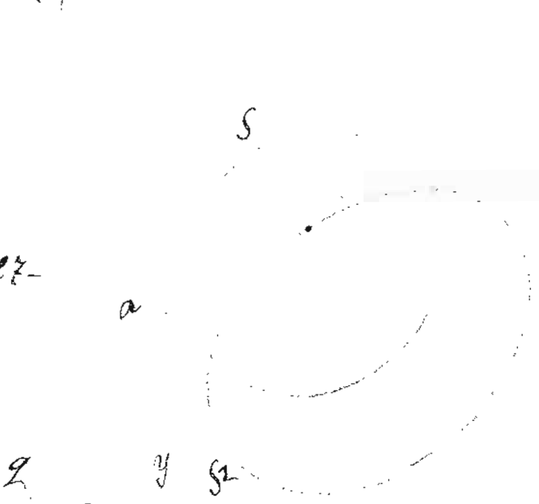


слика -25-



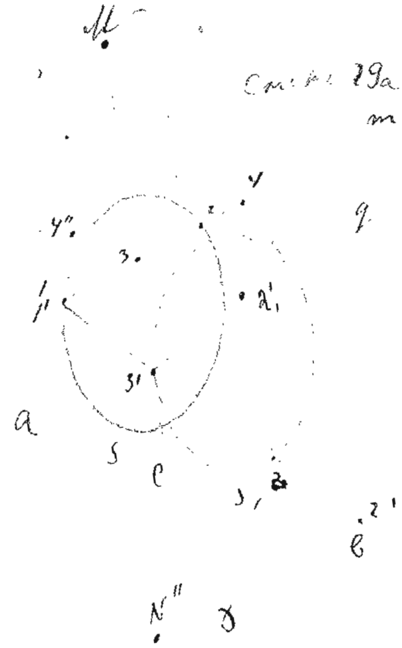
слика -26

слика 26а

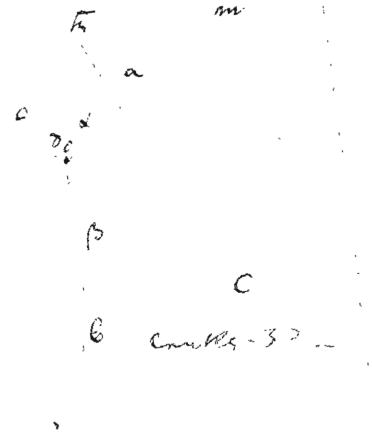


слика -27-

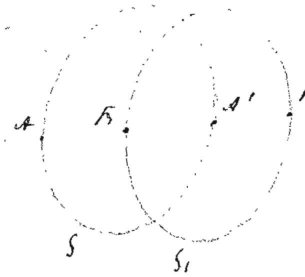
слика -29-



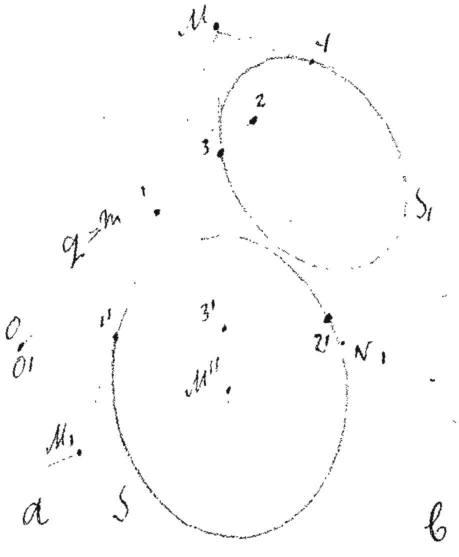
Слика 29а



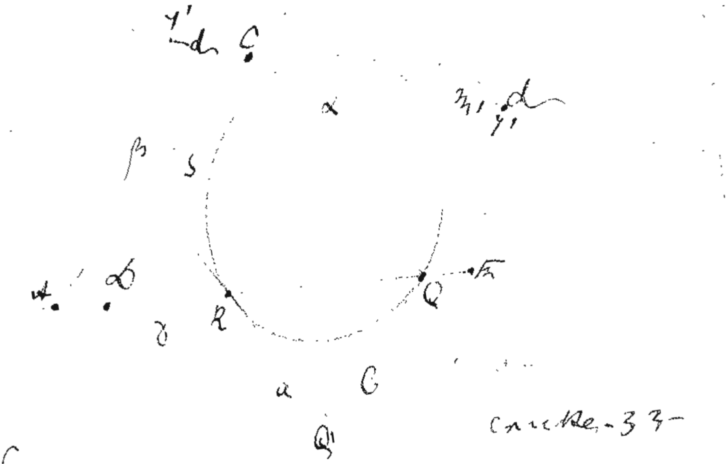
Слика 32



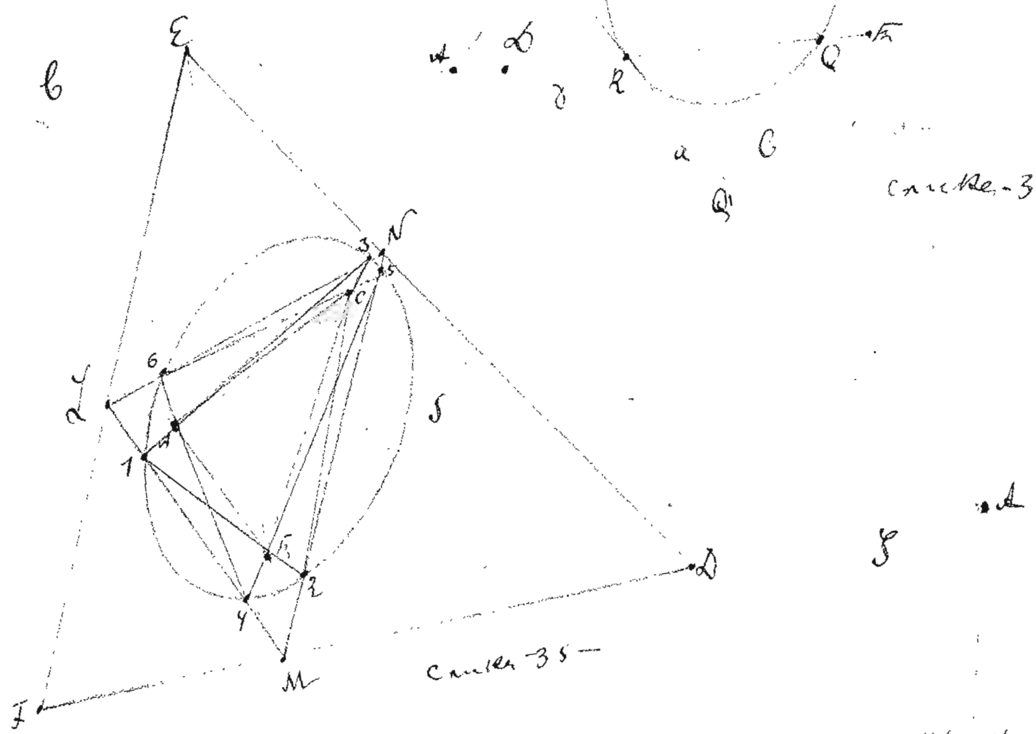
Слика 29



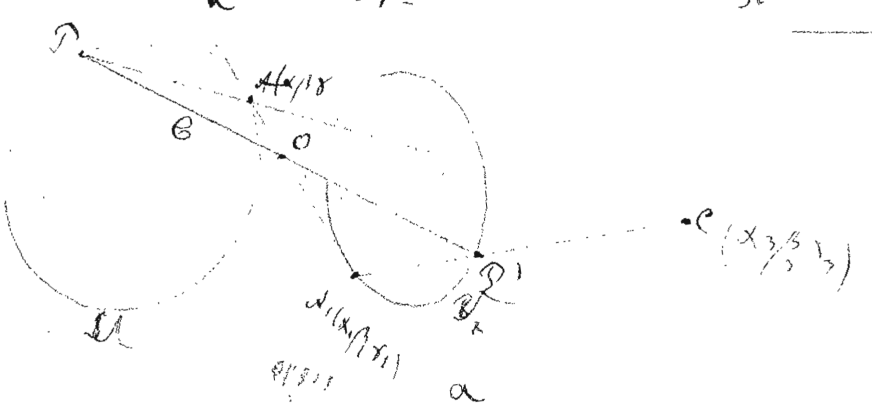
Слика 30



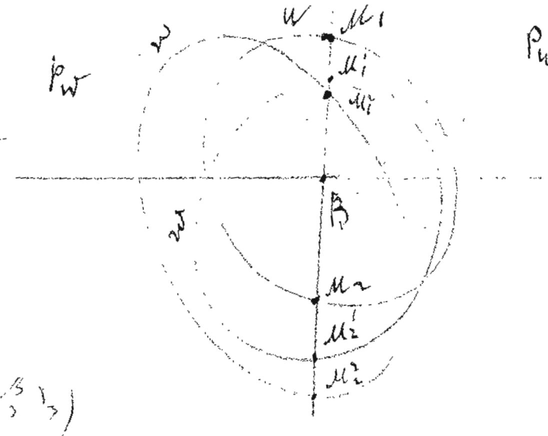
Слика 33



Слика 35

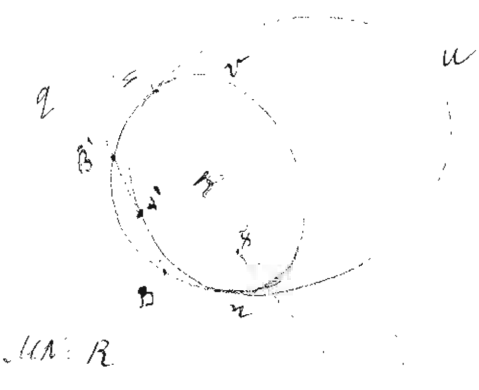


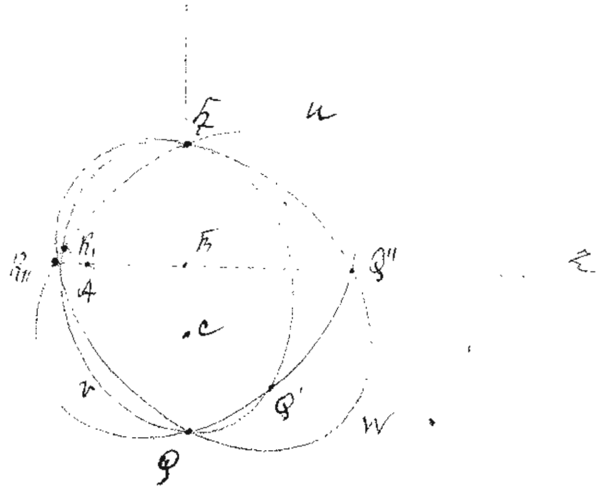
Слика 34



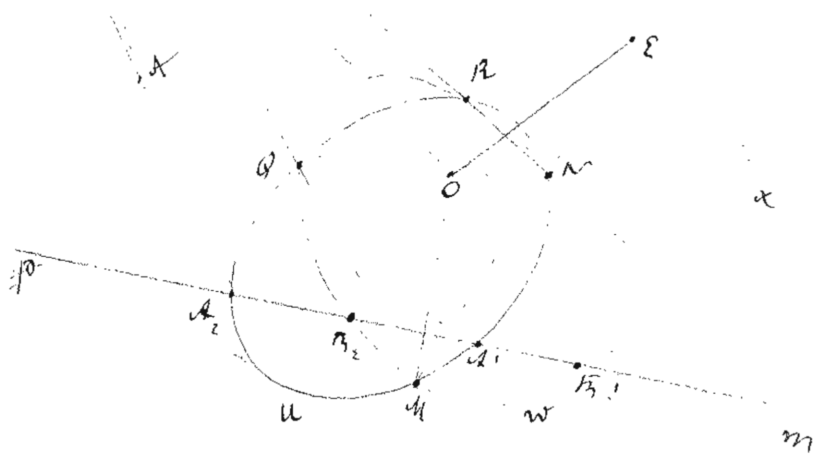
-37-

-36-





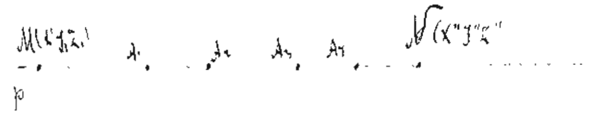
-38-

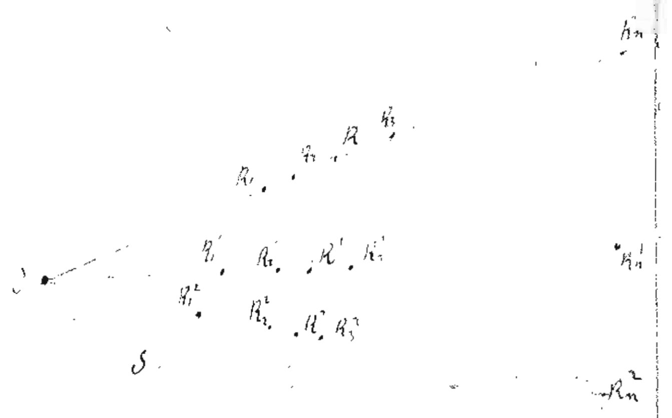


Слика -37-

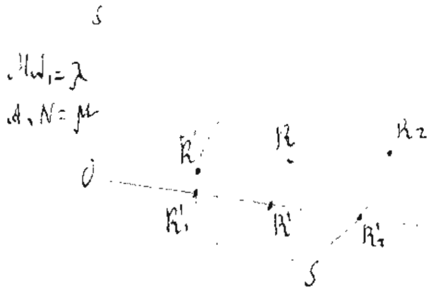
Слике II-ог одељка

Слика-1-

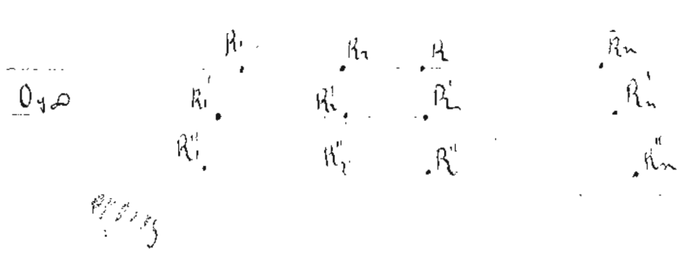




Слика-3-

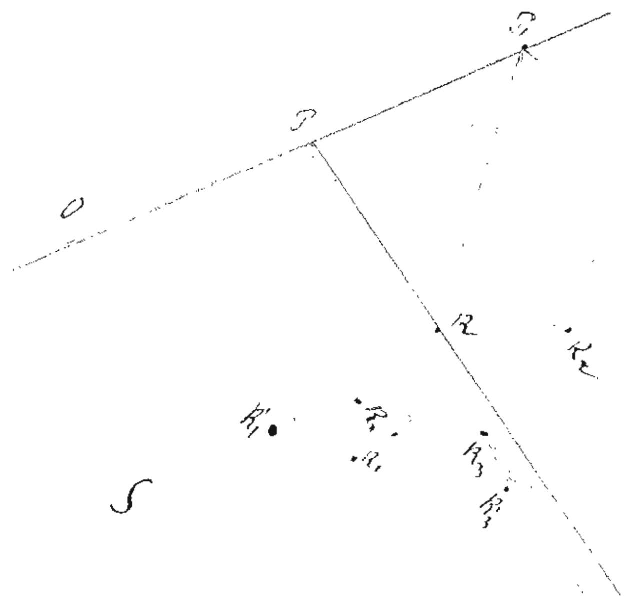


Слика-2-

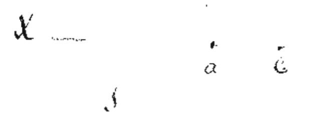


Слика-4-

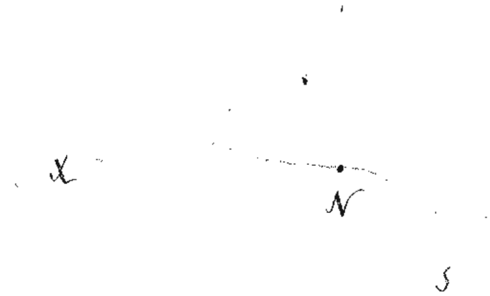
одељак V-ти



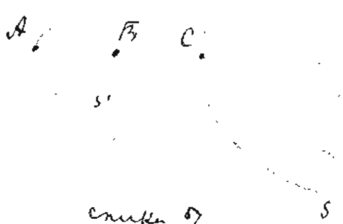
Слика 5 -



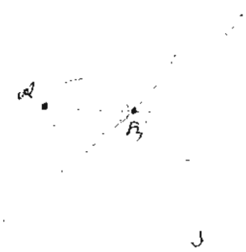
Слика 6



Слика 7

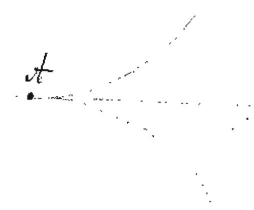


Слика 7a

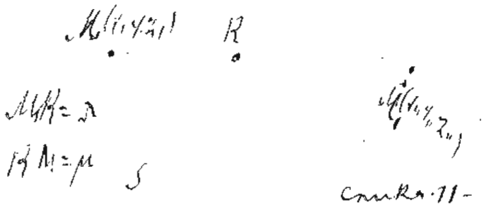


Слика 8

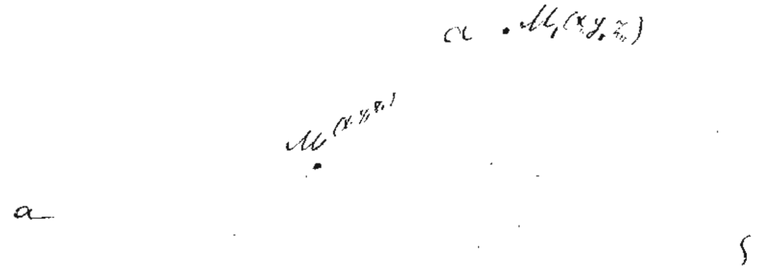
Слика 9 -



Слика 10 -



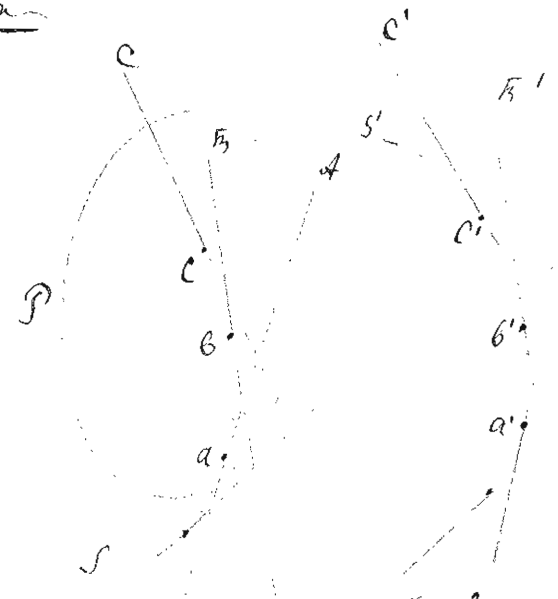
Слика 11 -

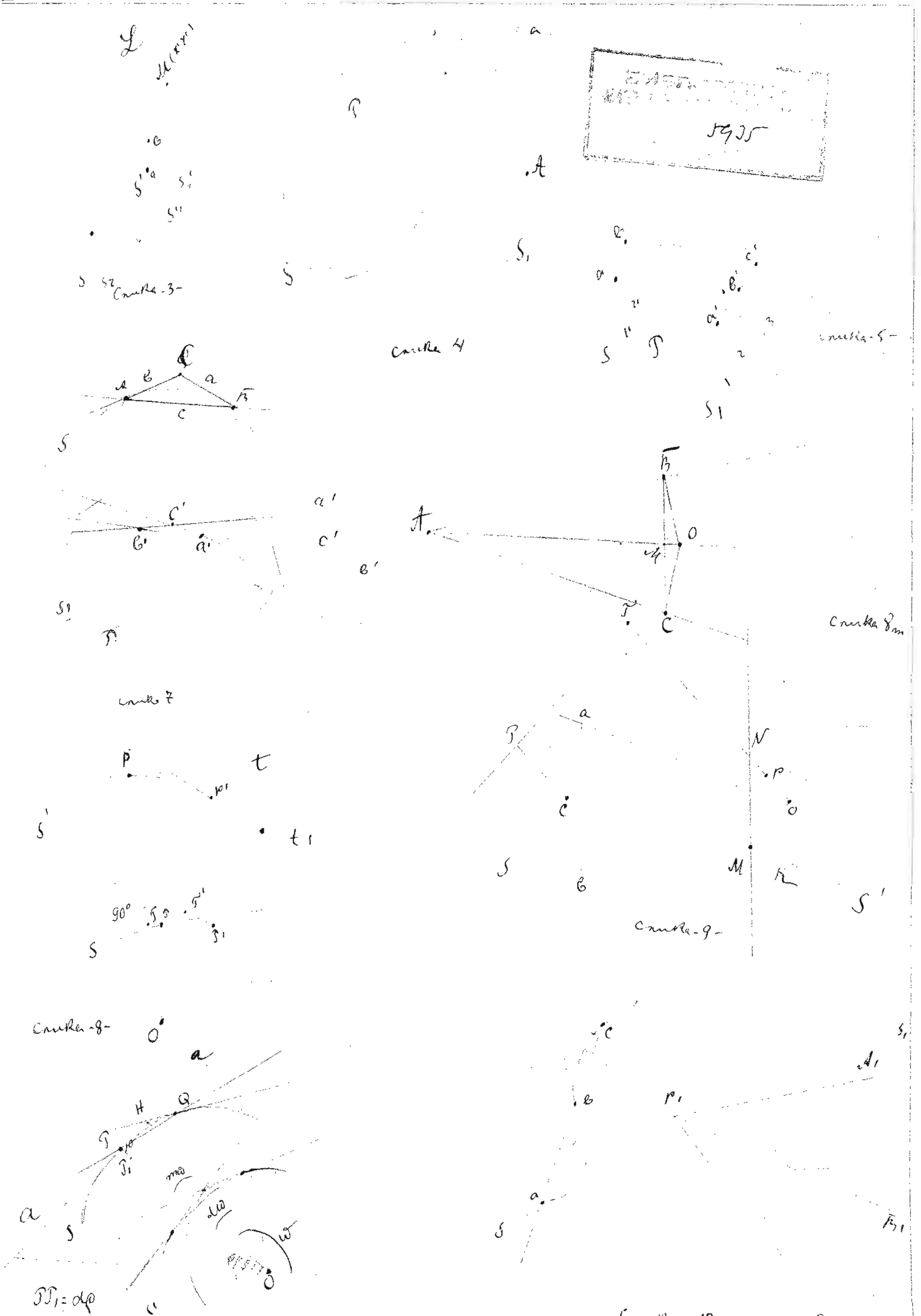


Слика 12 -

Слике III одељка

Слика -1-





Слика-3-

Слика 4

Слика-5-

Слика 7

Слика 8

Слика-9-

Слика-8-