Теориjа

АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

Увод. Под алгебарским једначинама разумеју се једначине облика:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

где је x непозната количина, $A_0, A_1, A_2 \dots A_n$ коефицијенти независни од x-а, а n цео и позитиван број, који се назива степеном горње једначине. За једначину се каже да је првог, другог ... степена према томе колико је n. Најопштији облик једначине првог степена био би

$$A_0x + A_1 = 0$$

другог степена

$$A_0x^2 + A_1x + A_2 = 0$$

трећег

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

и т. д. Поједини од коефицијената A могу бити равни нули, у свима тим случајевима под степеном једначине има се разумети највиши степен x-а.

Решити једну дату алгебарску једначину значи наћи све оне вредности

-и кад сменимо у једначини, она је идентички задовољена.

Полином на левој страни дате једначине звађемо полиномом саме једначине и кад буде требало означаваћемо га краткоће ради са $F(x)$, $\varphi(x)$, ...

Под кореном једне дате алгебарске једначине разуме се таква једна вредност x_a која дату једначину задовољава. За све алгебарске једначине вреди ова основна теорема: свака алгебарска једначина мора имати бар један корен т.ј. мора постојати бар једна вредност x_a која је задовољава. То је D'Hambert-ова теорема чији су докази (око тридесет) веома тешки и компликовани.

Сматрајући ову теорему као утврђену, може се одмах помоћу ње доказати ова још општија теорема: свака алгебарска једначина n-тог степена има тачно n корена. Да би ову теорему доказали нека је

$$F(x)=0$$

дата алгебарска једначина n-тог степена. Према D'Alembert-овој теореми та једначина мора имати бар један корен; означимо тај корен са α_1 и поделимо полином $f(x)$ изразом $(x-\alpha_1)$. Резултат ће бити извесан количник који ћемо означити са $f_1(x)$ и извесан остатак, који ћемо означити са R_1. Тај остатак не зависи од x_a јер ако би зависио, ми би могли деобу са $(x-\alpha_1)$ продужити још и даље и тако на послетку морали би доћи до остатка који не зависи од x_1. Пошто је дељеник раван производу из количника и делитеља више остатак, то је

$$f(x) = (x-\alpha_1) f_1(x) + R_1 \qquad 2$$

Пошто једначина 2 вреди за ма какво x, то ће она вредети и за $x=\alpha_1$. Сменивши ту вредност x_a у једначини 2 долазимо до једначине

$$f(\alpha_1) = R_1 \qquad 3$$

али пошто је α_1 корен једначине 1 то је и $f(\alpha_1)=0$ па дакле према једначини 3 и $R_1=0$. Заменивши ову вредност R_1

у једначини 2. добијамо једначину

$$f(x) = (x-\alpha_1)\, f_1(x) \qquad 4.$$

Ова једначина казује ово правило: кад год је α_1 какав корен једначине 1, полином $f(x)$ мора бити дељив са $(x-\alpha_1)$. Из истог се разлога $(x-\alpha_1)$ назива кореним чиниоцем полинома $f(x)$. У једначини 4. $f_1(x)$ према самом начину на који је постало биће извесан полином $(n-1)^{\text{ог}}$ степена. Према томе ако образујемо једначину

$$f_1(x) = 0$$

то ће бити извесна алгебарска једначина $(n-1)^{\text{ог}}$ степена, која по D'Alembert-овој теореми мора такође имати бар један корен. Ако тај корен означимо са α_2 и ако поделимо $f_1(x)$ са $(x-\alpha_2)$ према горњем правилу та ће се деоба извршити увек без остатка, тако да ако се са $f_2(x)$ означи количник те деобе, имаћемо

$$f_1(x) = (x-\alpha_2)\, f_2(x) \qquad 5.$$

$f_2(x)$ биће очевидно извесни полином $(n-2)^{\text{ог}}$ степена и према D'Alembert-овој теореми једначина

$$f_2(x) = 0$$

мора имати бар један корен на пр. α_3 те бисмо на горњи начин имали

$$f_2(x) = (x-\alpha_3)\, f_3(x) \qquad 6.$$

где је $f_3(x)$ полином $(n-3)^{\text{ег}}$ степена. Продуживши ово резоновање докле год је могућно, а то значи докле год се не дође до једног количника који више не зависи од x, имаћемо низ једначина

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha_1)\, f_1(x) \\ f_1(x) &= (x-\alpha_2)\, f_2(x) \\ f_2(x) &= (x-\alpha_3)\, f_3(x) \\ &\;\;\vdots \\ f_{n-1}(x) &= (x-\alpha_n)\, f_n(x) \end{aligned}\right\} \qquad 7.$$

Пошто последњи количник $f_n(x)$ не зависи од x, то ће он бити један сталан број на пр. H т.ј.

$$f_n(x) = H \qquad 8.$$

Ако једначине под 7 измножимо међу собом добићемо као резултат

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)\, H \qquad 9.$$

Ако у овој једначини сменимо $f(x)$ његовим прецизираним изразом добићемо једначину коефицијентима има имагинарних корена, број имагинарних корена увек је паран и то тако, да ако је $(a+bi)$ један имагинаран корен увек и $(a-bi)$ мора бити један имагинаран корен. Да би теорему доказали, нека је дата једначина

$$f(x)=0$$

и нека је $(a+bi)$ један њен корен. Ако тај корен сменимо у прецизираном полиному једначине у место x, имаћемо

$$f(a+bi)=A_0(a+bi)^n+A_1(a+bi)^{n-1}+\dots+A_{n-1}(a+bi)+A_n.$$

Ако сваки од степена количине $(a+bi)$ развијемо по биномном обрасцу па групишемо за себе чиниоце што садрже i а за себе оне који га не садрже, имаћемо

$$f(a+bi)=P+Qi$$

где је P скуп чланова без i, а Qi скуп чланова са i пошто се у њему извуче i као заједничко. Пошто је по претпоставци $(a+bi)$ један корен једначине, то је

$$f(a+bi)=0$$

или према последњој једначини

$$P+Qi=0$$

Међутим знамо да ће једна имагинарна количина бити онда равна нули, кад су јој понаособ реални и имагинарни делови равни нули; последња једначина захтева дакле да буде $P=0$ и $Q=0$. Претпоставимо сад да смо у место x у полином $f(x)$ сменили $(a-bi)$. Пошто се ова количина разликује од $(a+bi)$ само знаком од i, то је очевидно да ће се и резултат ове смене разликовати од малопређашњег резултата само знаком од i т.ј. да ће бити

$$f(a-bi)=P-Qi$$

Мало пре смо видели да је $P=0$ и $Q=0$, те је према последњој једначини

$$f(a-bi)=0$$

што показује да је и $(a-bi)$ такође корен једначине $f(x)=0$. Дакле кад је $(a+bi)$ корен једне алгебарске једначине, увек мора бити и $(a-bi)$ корен те једначине. Тиме је у исто време доказано да је број имагинарних корена увек паран, чиме је горња теорема доказана.

Из те су теореме ове последице.

1. Код ма какве алгебарске једначине

... мањи број реалних корена увек је паран;

2. Код једначина непарних степена број реалних корена увек је непаран т.ј. свака једначина непарног степена мора имати бар један реалан корен а може их имати и више али увек у непарном броју;

3. ако су $(a+bi)$ и $(a-bi)$ два корена једначине, кад се полином једначине буде расклопио на корене чиниоце који су $(x-a-bi)$ и $(x-a+bi)$, чији је производ $(x-a)^2+b^2$, то се види и ово правило: кад једначина има један пар имагинарних корена и њен полином расклопимо на корене чиниоце, увек се јавља чинилац $(x-a)^2+b^2$, где a означује реални а b имагинарни део тих корена

Примедба: Ова последња теорема важи само за једначине код којих су коефицијенти реални, а не важи за једначине имагинарних коефицијената. Код оваквих једначина могућан је и тај случај, да број имагинарних корена буде непаран. Тако на пр. квадратна једначина

$$x^2 \pm (1+i)x + i = 0$$

има један реалан корен $x = \pm 1$ и један имагинарни корен $x = \pm i$

Из основне теореме о растављању полинома једначине на корене чиниоце могу се извести и ове последице:

1° кад год знамо један корен алгебарске једначине можемо увек степен једначине смањити за јединицу. Јер ако је x_1 један такав корен, деобом полинома једначине са кореним чиниоцем $(x-x_1)$ једначина се своди на другу чији ће степен бити за јединицу мањи. Н. пр. нека је дата једначина

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

за коју унапред знамо да има као корен $x=1$. Деобом са кореним чиниоцем $(x-1)$ имаћемо

$$(x^3 - x^2 + x - 1) : (x-1) = x^2 + 1$$

Дакле том деобом добија се нова једначина

$$x^2 + 1 = 0$$

која је другог степена. Ако би знали још нађемо корен н. пр. $x=\alpha_2$, онда би деобом нове једначине са $(x-\alpha_2)$ свели ову на једначину која би била $(n-2)^{ге}$ степена. У опште ако знамо k корена $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_k$, делећи узастопце једначину са $(x-\alpha_1)$ свешћемо је да буде $(n-1)^{ог}$ степена; затим делећи је са $(x-\alpha_2)$ свешћемо ју на $(n-2)^{ги}$ степен и т. д. док последњом деобом са $(x-\alpha_k)$ не буде на послетку сведена на једначину $(n-k)^{тога}$ степена. Последње свођење можемо вршити и у један пут делећи првобитну једначину производом $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_k)$. Ово правило јако олакшава решавање једначине у случају кад се буде унапред знало известан број њених корена. Тако н. пр. ако за једну једначину петог степена знамо њена три корена $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ деобом једначине са $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$ свешћемо ју на једну квадратну једначину коју свагда знамо решити и према томе тачно нам је одредити све корене дате једначине.

2° Помоћу коренах чинитеља долази се до извесних односа између корена једначине и њених коефицијената, који односи обухватају све из квадратних једначина. Нека је дата једначина

$$F(x)=0$$

или у развијеном облику

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n=0$$

и нека су $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n$ њени корени, то ћемо имати према горњој теореми

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n=A_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \quad 13)$$

Ако изможимо све чиниоце на десној страни, добија се као резултат множења:

$$A_0x^n+A_0(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)x^{n-1}+A_0(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+)x^{n-2}-$$
$$-A_0(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots)x^{n-3}+\cdots+A_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n$$

Ако овај резултат упоредимо са левом страном једначине 13) и уједначимо коефицијенте истог степена x-а, добија се

$$A_1=-A_0(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)$$
$$A_2=A_0(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\cdots)$$
$$A_3=-A_0(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots)$$
$$\cdots\cdots \quad 14)$$
$$A_n=\pm A_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n$$

деобом једначине са A_0 може се увек учи-

... да коефицијенат највишег степена x-а буде раван јединици. Обрасци 14) та да исказују ову теорему: кад год је коефицијенат највишег степена x-а у једначини сведен на јединицу, тако да једначина буде написана у облику

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

коефицијенат A_1 раван је збиру корена са промењеним знаком, коефицијенат A_2 раван је збиру комбинација друге класе истих корена; коефицијенат A_3 раван је збиру комбинација треће класе истих корена узетих са промењеним знаком и т. д. На послетку последњи коефицијенат A_n раван је производу корена узетог са знаком + или − према томе да ли је степен једначине паран или непаран. Ово правило игра врло важну улогу у теорији алгебарских једначина и на њему је основано решавање великог броја задатака из те теорије. Тако н. пр. њиме се треба користити кад год се траже услови које требају задовољити коефицијенти неке дате једначине те да између њених корена постоје унапред дате релације. Водећи рачуна о тим датим релацијама ваља према њима изменити обрасце 14. и онда елиминацијом корена из тих релација добијају се тражене релације између коефицијената.

Примери

1. Образовати једначину чији су корени: 0, 1, −1, 2 и −2.

Према обрасцима 14 имаћемо да су коефицијенти тражене једначине

$$A_1 = -A_0(0+1-1+2-2) = 0$$

$$A_2 = A_0(0+0+0+0-1+2-2-4) = -5A_0$$

$$A_3 = -A_0(0+0+0+0+0+0-2+2-4+4) = 0$$

$$A_4 = A_0(0+0+0+4) = 4A_0$$

$$A_5 = -A_0 \cdot 0 \cdot = 0$$

Зато је тражена једначина

$$A_0 x^5 - 5A_0 x^3 + 4A_0 x = 0$$

или

$$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$$

Да би се уверили да су горњи корени одиста корени ове једначине решићемо добијену једначину. Имали би

$$x(x^4-5x^2+4)=0$$

одакле је или

$$x=0$$

или

$$x^4-5x^2+4=0$$

а одатле

$$x^2=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}$$

т. ј. или

$$x^2=4 \quad \text{а одатле} \quad x=\pm 2$$

или

$$x^2=1 \quad " \quad " \quad x=\pm 1$$

чиме смо се уверили да добијена једначина одиста има као корене дате бројеве.

— 2. Образовати једначину чији су корени: $(1+i)$, $(1-i)$ и 1.

Коефицијенти тражене једначине су

$$A_1=-A_0(1+i+1-i+1)=-3A_0$$
$$A_2=A_0(1-i^2+1+i+1-i)=4A_0$$
$$A_3=-A_0(1-i^2)=-2A_0$$

зато је тражена једначина

$$A_0x^3-3A_0x^2+4A_0x-2A_0=0$$

или

$$x^3-3x^2+4x-2=0$$

3 Написати једначину чији су корени $(1+i)$, $(1+3i)$, $(1+2i)$ и $(1-6i)$

Коефицијенти тражене једначине су

$$A_1=-A_0(1+i+1+3i+1+2i+1-6i)=-4A_0$$
$$A_2=A_0(1+i+3i+3i^2+1+i+2i+2i^2+1+i-6i-$$
$$-6i^2+1+3i+2i+6i^2+1+3i-6i-18i^2+$$
$$+1+2i-6i-12i^2)=31A_0$$
$$A_3=-A_0(1+4i+3i^2+2i+8i^2+6i^3+1+4i+3i^2-$$
$$-6i-24i^2-18i^3+1+3i+2i^2-6i-18i^2-$$
$$-12i^3+1+5i+6i^2-6i-30i^2-36i^3)=$$
$$=-A_0(54+60i)$$
$$A_4=A_0(1+4i+3i^2-4i-16i^2-12i^3-12i^2-48i^3-$$
$$-36i^4)=A_0(60i-10)$$

тако да је тражена једначина

$$A_0x^4-4A_0x^3+31A_0x^2-A_0(54+60i)x+A_0(60i-10)=0$$

или

$$x^4-4x^3+31x^2-(54+60i)x+(60i-10)=0$$

4. Образовати једначину чији су корени 3, 1 и −4.

Коефицијенти тражене једначине биће

$$A_1=-A_0(3+1-4)=0$$
$$A_2=A_0(3-12-4)=-13A_0$$
$$A_3=-A_0\cdot -12=12A_0$$

Зато је тражена једначина

$$A_0 x^3 - 13 A_0 x + 12 A_0 = 0$$

или

$$x^3 - 13 x + 12 = 0$$

5. Образовати једначину чији су корена: 1, 2, (1+i) и (1−i).

Коефицијенти тражене једначине биће

$$A_1 = -A_0(1+2+1+i+1-i) = -5A_0$$

$$A_2 = A_0(2+1+i+1-i+2+2i+2-2i+1+1) = 10A_0$$

$$A_3 = -A_0(2+2i+2-2i+1+1+2+2) = -10A_0$$

$$A_4 = A_0(2+2) = 4A_0$$

тако да је тражена једначина

$$A_0 x^4 - 5A_0 x^3 + 10A_0 x^2 - 10A_0 x + 4A_0 = 0$$

или

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$$

6. Какав услов треба да задовоље коефицијенти $A_1 A_2 A_3$ дате једначине трећег степена

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

па да један корен те једначине буде раван квадрату другог корена, а трећи корен буде раван кубу тога истог корена.

Ако корене те једначине означимо са $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, по услову задатка треба да је

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 \quad \alpha_3 = \alpha_1^3$$

Међутим су према пређашњем коефицијенти дате једначине дати обрасцима

$$-A_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3$$

$$A_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \alpha_1^3 + \alpha_1^4 + \alpha_1^5 = \alpha_1^2(\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^3)$$

$$-A_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1^6$$

Из трећег обрасца добија се да је

$$\alpha_1 = \sqrt[6]{-A_3}$$

а из другог, водећи рачуна о првом

$$A_2 = -A_1\alpha_1^2$$

или

$$A_2^3 = -A_1^3\alpha_1^6$$

одакле је водећи рачуна о последњем од трију образаца

$$A_2^3 - A_1^3 A_3 = 0$$

из чега видимо ово: да би једначина задовољила постављене услове, треба да њени коефицијенти задовоље релацију

$$A_2^3 - A_1^3 A_3 = 0$$

и онда ће један корен бити дат изразом

$$\alpha_1 = \sqrt[6]{-A_3}$$

други ће бити раван квадрату тога израза а трећи његовом кубу.

На пр. једначина

$$x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$$

има ту особину да јој коефицијенти задовољавају пређни услов и зато њени корени морају задовољавати услов, да је један раван квадрату другог, а трећи кубу тог истог корена. И заиста њени корени, који су 2, 4 и 8 задовољавају те услове, јер је $4 = 2^2$ а $8 = 2^3$.

7. Какве услове треба да задовоље коефицијенти једначине

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

па да њени корени буду чланови једног аритметичког реда.

Нека су њени корени

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \delta \quad \alpha_3 = \alpha_1 + 2\delta.$$

онда ће бити

$$-p = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_1 + \delta + \alpha_1 + 2\delta = 3(\alpha_1 + \delta)$$

$$q = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \alpha_1^2 + \alpha_1\delta + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\delta + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\delta + \alpha_1\delta + 2\delta^2 = 3\alpha_1^2 + 6\alpha_1\delta + 2\delta^2$$

$$-r = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1^3 + \alpha_1^2\delta + 2\alpha_1^2\delta + 2\alpha_1\delta^2 = \alpha_1^3 + 3\alpha_1^2\delta + 2\alpha_1\delta^2$$

Из прве једначине је

$$\alpha_1 = -\frac{p}{3} - \delta$$

а заменом у друге две добијамо

$$q = 3\left(-\frac{p}{3} - \delta\right)^2 + 6\delta\left(-\frac{p}{3} - \delta\right) + 2\delta^2 = 3\left(\frac{p^2}{9} + 2\frac{p}{3}\delta + \delta^2\right) - 2p\delta - 6\delta^2 + 2\delta^2 = \frac{p^2}{3} + 2p\delta + 3\delta^2 - 2p\delta - 6\delta^2 + 2\delta^2 = \frac{p^2}{3} - \delta^2$$

одакле је

$$\delta = \sqrt{q - \frac{p^2}{3}}$$

и заменом у изразу за r добијамо

$$-r = \left(-\frac{p}{3} - \delta\right)^3 + 3\delta\left(-\frac{p}{3} - \delta\right)^2 + 2\delta^2\left(-\frac{p}{3} - \delta\right) =$$

$$= \left[-\frac{p}{3} - \sqrt{q - \frac{p^2}{3}}\right]^3 + 3\sqrt{q - \frac{p^2}{3}}\left[-\frac{p}{3} - \sqrt{q - \frac{p^2}{3}}\right]^2 + 2\left(q - \frac{p^2}{3}\right)\left[-\frac{p}{3} - \sqrt{q - \frac{p^2}{3}}\right]$$

и то је тражени однос између коефицијената.

8. Дата је једначина

$$x^3 + 3x^2 + 3x + r = 0$$

одредити r тако да ова једначина има три корена који чине аритметичку прогресију и решити једначину.

Према задатку 7. имамо

$$-r = \left[-\frac{3}{3} - \sqrt{3 - \frac{9}{3}}\right]^3 + 3\sqrt{3 - \frac{9}{3}}\left[-\frac{3}{3} - \sqrt{3 - \frac{9}{3}}\right]^2 + 2\left(3 - \frac{9}{3}\right)\left[-\frac{3}{3} - \sqrt{3 - \frac{9}{3}}\right]$$

$$= -1$$

или

$$r = 1$$

Дакле тражена једначина је
$$x^3+3x^2+3x+1=0$$
Према задатку 7. је
$$\delta=\sqrt{q-\frac{p^2}{3}}=\sqrt{3-\frac{9}{3}}=0$$
па је зато
$$\alpha_1=-\frac{p}{3}-\delta=-\frac{3}{3}=-1$$
а тако исто је и
$$\alpha_2=\alpha_3=-1$$

9. Какве услове требају да задовоље коефицијенти једначине
$$x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0$$
па да њени корени буду чланови једног геометријског реда.

Нека су корени дате једначине
$$\alpha_1 \quad \alpha_2=\alpha_1 q \quad \alpha_3=\alpha_1 q^2$$
онда је према претходнем
$$-A_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{\alpha_2}{q}+\alpha_2+\alpha_2 q=\alpha_2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)$$
$$A_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{\alpha_2^2}{q}+\alpha_2^2+\alpha_2^2 q=\alpha_2^2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)$$
$$-A_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=\alpha_2^3$$
Из последње једначине је
$$\alpha_2=\sqrt[3]{-A_3}$$
а из прве и друге
$$\frac{A_2}{-A_1}=\alpha_2$$
или
$$\frac{A_2}{-A_1}=\sqrt[3]{-A_3}$$
и то је тражени однос.

Још само требамо да нађемо q. Њега ћемо наћи из израза
$$\frac{-A_1}{\sqrt[3]{-A_3}}=\frac{1}{q}+1+q$$

10. Ако полином $f(x)$ има све реалне корене, доказати да полином
$$ff''-f'^2$$
има све уображене корене.

Уочимо на пр. једну једначину другог степена н. пр.
$$x^2-3x+2=0$$
која има два реална корена. Изводи ће бити
$$f'(x)=2x-3$$
$$f''(x)=2$$
и према томе једначина
$$2(x^2-3x+2)-(2x-3)^2=0$$
треба да има уображене корене. Ако ју уредимо по степенима x, добијамо
$$x^2-3x+\frac{5}{2}=0$$
одакле је
$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}i$$

дакле заиста има обадва корена имагинарна. Али да ли то важи за сваку једначину другог степена! Узмимо општу једначину другог степена

$$x^2+2ax+b=0$$

Да би њена два корена били реални, треба да је

$$a^2-b>0$$

то је дакле претпоставка. Изводи дате једначине су

$$f'(x)=2x+2a$$

$$f''(x)=2$$

и према томе тражена једначина је

$$2(x^2+2ax+b)-(2x+2a)^2=0$$

или

$$x^2+2ax+2a^2-b=0$$

и да би ова једначина имала оба корена имагинарна треба да је

$$a^2-2a^2+b<0$$

или

$$a^2-b>0$$

а то је био услов и за реалности корена дате једначине, те према томе мора ова последња једначина да има оба корена имагинарна.

То је све било за једначину другог степена али да ли то важи за ма какву једначину! Да би доказали да то важи за ма какву једначину, претпоставићемо да важи за једначину $n^{тог}$ степена па ћемо доказати да важи за једначину $(n+1)^{ог}$ степена. Нека је $f(x)$ полином $(n+1)^{ог}$ степена и a један његов корен; тада је

$$f(x)=(x-a)\varphi(x)$$

где је $\varphi(x)$ полином $n^{тог}$ степена. Претпостављамо дакле да $\varphi(x)$ има све корене реалне, а $\varphi\cdot\varphi''-\varphi'^2$ све корене имагинарне; а према томе кад $\varphi(x)$ има све корене реалне, има и $f(x)$ све корене реалне; имамо да докажемо да израз $ff''-f'^2$ има све корене имагинарне. Из последње једначине је

$$f'(x)=(x-a)\varphi'(x)+\varphi(x)$$

$$f''(x)=(x-a)\varphi''(x)+\varphi'(x)+\varphi'(x)$$

те је према томе тражена једначина

$$(x-a)\varphi(x)\left[2\varphi'(x)+(x-a)\varphi''(x)\right]-\left[\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)\right]^2=0$$

или одатле

$$2(x-a)\varphi(x)\varphi'(x)+(x-a)^2\varphi(x)\varphi''(x)-\varphi^2(x)-2(x-a)\varphi(x)\varphi'(x)-$$

$$-(x-a)^{-}\varphi'(x)=0$$

или на послетку

$$\varphi(x)\varphi''(x)-\varphi'^2(x)=\left[\frac{\varphi(a)}{x-a}\right]^2$$

Претпостављено је да израз на десној страни има све корене имагинарне а израз на десној страни за неку реалну вредност x_a било би равно нули. Према томе ако ту исту вредност x_a заменимо у изразу на левој страни треба да је

$$ff''-f'^2=(\varphi\varphi''-\varphi'^2)(x-a)^2-\varphi^2=0$$

Израз

$$(\varphi\varphi''-\varphi'^2)(x-a)^2$$

ни за какву реалну вредност x_a не може бити равно нули док φ^2 може бити равно нули. Према томе цео израз на левој страни последње једначине не може никад бити раван нули за реалне вредности x_a што значи да израз тај нема ни један реалан корен.

11. Доказати образац

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6}+\dots$$

Да извршимо неколико проба:

за $n=1$ имамо $\quad x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}$

" $n=2$ " " $\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$

за $n=3$ имамо $\quad x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

и т. д.

дакле горњи образац важи кад се у место n стави $1, 2, 3, \dots$ Да бисмо доказали да важи и за n, претпоставићемо да важи за n, па ћемо доказати за $(n+1)$. Према томе имали би да докажемо да важи образац

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-(n+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\frac{(n+1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}-\frac{(n+1)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-5}+\dots$$

ако важи образац 1. Питање је сад, како би дошли од обрасца 1. на образац 2. Имали би

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

или

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Према томе имамо само да докажемо да важи ова последња једначина, јер кад смо претпоставили да важи горњи образац за n важиће и за $(n-1)$, те имамо да докажемо још само да важи и за $(n+1)$ т. ј. последњу једначину. Имамо дакле ове три једначине

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}-\dots \qquad I$$

$$x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}-(n-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}+\frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-5}-\dots$$

$$\dots(-1)^p\frac{n-1}{n-p-1}C_{n-p-1,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p-1}\pm\dots \qquad \text{II}$$

$$\dots(-1)^p C_{n-p,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p}\pm\dots \qquad \text{I}$$

а ако образац важи и за $(n+1)$ биће

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-(n+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\frac{(n+1)(n-2)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-3}+\dots$$

$$\dots+(-1)^p\frac{n+1}{n-p+1}C_{n-p+1,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p+1}\pm\dots \qquad \text{III}$$

Према претходним испитивањима треба I помножити са $x+\frac{1}{x}$ и од тога одузети II па да се добије III. Ако помножимо први члан из I са $x+\frac{1}{x}$ имаћемо ово

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left[x^n+nx^{n-2}+\binom{n}{2}x^{n-4}+\binom{n}{3}x^{n-6}+\dots\right]\left[x+\frac{1}{x}\right]=$$

$$=x^{n+1}+nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-3}+\binom{n}{3}x^{n-5}+\dots+$$

$$+x^{n-1}+nx^{n-3}+\binom{n}{2}x^{n-5}+\binom{n}{3}x^{n-7}+\dots=$$

$$=x^{n+1}+(n+1)x^{n-1}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^{n-3}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-5}+\dots$$

а то је даље

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$$

т.ј. првом члану из III. Други члан из I помножен са $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ а од тога одузет први члан из II даје

$$-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}-\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}=-(n+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

и т.д. у опште члан на $(p+1)^{вом}$ месту из I помножен са $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ а од тога одузет $p^{ти}$ члан из II треба да да $(p+1)^{ви}$ члан из III т.ј.

$$(-1)^p\frac{n}{n-p}C_{n-p,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p}\left(x+\frac{1}{x}\right)-(-1)^{p-1}\frac{n-1}{n-p}C_{n-p,p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p+1}=$$

$$=(-1)^p\frac{p+1}{n-p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p+1}C_{n-p+1,p}$$

или

$$(-1)^p\frac{n}{n-p}C_{n-p,p}-(-1)^{p-1}\frac{n-1}{n-p}C_{n-p,p}=(-1)^p\frac{n+1}{n-p+1}C_{n-p+1,p}.$$

Разлика на левој страни може се написати у облику

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!}(n-p-1)\dots(n-2p+2)\left[\frac{n(n-2p+1)}{p}+n-1\right]=$$

$$=(-1)^p(n+1)\frac{(n-p)(n-p-1)\dots(n-2p+2)}{p!}$$

а то је израз

$$(-1)^p\frac{n+1}{n-p+1}C_{n-p+1,p}$$

Тако образац који смо претпоставили да важи за n важи и за $(n+1)$ т.ј. он је општи.

12. Означимо са ${}^n[m]$ производ $m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$ дакле

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)={}^n[m]$$

Доказати да важи и

$${}^n[(a+b)]={}^n[a]+n\,{}^{n-1}[a]\,b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,{}^{n-2}[a]\,{}^2[b]+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}\,{}^{n-p}[a]\,{}^p[b] \qquad \text{I}.$$

узимо неколико специјалних случајева
за $n=1$ имамо $a+b=a+b$

" $n=2$ " " $(a+b)(a+b-1)=(a+b)^2-(a+b)$

" $n=3$ " " $(a+b)(a+b-1)(a+b-2)=(a+b)^3-2(a+b)^2+2(a+b)$

и т. д.

дакле образац важи кад се у место n стави $1,2,3,\ldots$, да видимо да ли важи и у опште. Да би то доказали претпоставићемо да важи за n па ћемо доказивати да важи за $(n+1)$. Имали би

$${}^{n+1}[(a+b)] = {}^{n+1}[a]+(n+1)\,{}^{n}[a]\,b+\binom{n+1}{2}\,{}^{n-1}[a]\,{}^{2}[b]+\cdots \qquad \text{II}$$

Међутим питање је како би из обрасца I добили образац II. Добили би га на тај начин, кад би I помножили са $(a+b-n)$. Дакле имаћемо ово

$${}^{n}[(a+b)](a+b-n)=\Big\{{}^{n}[a]+n\,{}^{n-1}[a]\,b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,{}^{n-2}[a]\,{}^{2}[b]+\cdots$$

$$\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}\,{}^{n-p}[a]\,{}^{p}[b]\Big\}(a+b-n)=$$

(Примедба: први члан из I множићемо са $(a-n)+b$, други са $a-(n-1)+(b-1)$, трећи са $a-(n-2)+(b-2)$ и т. д.)

$$={}^{n+1}[a]+n\,{}^{n}[a]\,b+\binom{n}{2}\,{}^{n-1}[a]\,{}^{2}[b]+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+{}^{n}[a]\,b+n\,{}^{n-1}[a]\,{}^{2}[b]+\binom{n}{2}\,{}^{n-2}[a]\,{}^{3}[b]+\cdots$$

а кад ово саберемо добићемо II. Дакле кад образац важи за n важи и за $(n+1)$ т. ј. он је општи.

13. Одредити производ квадрата корених чинилаца једначине.

$$x^m+px^{m-1}+q=0$$

Нека је у опште

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-n)$$

Ако образујемо извод, имали би

$$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots$$

али је у исто време и

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\cdots+\frac{1}{x-n}\right)$$

Међутим за

$$x=a,\ b,\ c,\ \ldots$$

имаћемо

$$f(a)=(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\cdots(a-n)$$
$$f(b)=(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)\cdots(b-n)$$
$$f(c)=(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)\cdots(c-n)$$
$$\cdots\cdots$$

Ако измножимо ове једначине међу собом добијамо

$$f(a)\,f(b)\,f(c)\cdots=(a-\alpha)(a-\beta)\cdots(a-n)(b-\alpha)(b-\beta)\cdots(b-n)\cdots$$

Међутим је

$$f'(\alpha)=(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\cdots$$
$$f'(\beta)=(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\cdots$$

$$f(y)=(y-a)(y-b)(y-c)\ \dots$$

. . . .

а производ свега тога

$$f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)\cdots=(\alpha-a)(\alpha-b)\cdots(\beta-a)(\beta-b)\cdots(\gamma-a)\cdots$$

има свега $n(n-1)$ чинилаца а то је паран број те можемо ставити

$$f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)\cdots=f(a)f(b)f(c)\cdots$$

Према томе биће

$$P=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)\cdots=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a)f(b)f(c)\cdots$$

ако можемо наћи корене изводне једначине

Узмимо сада дату једначину

$$x^m+px^{m-1}+q=0$$

њен извод је

$$mx^{m-1}+p(m-1)x^{m-2}=0$$

или

$$x^{m-2}[mx+p(m-1)]=0$$

те је или

$$mx+p(m-1)=0 \quad \text{тј} \quad x_1=\frac{p(1-m)}{m}$$

или

$$x^{m-2}=0 \quad \text{т.ј} \quad x_2=x_3=\dots=0$$

Отуда заменом вредности за $x, x_1 x_3\cdots$ у дату једначини, имамо

$$f(a)=\left[\frac{p(1-m)}{m}\right]^m+p\left[\frac{p(1-m)}{m}\right]^{m-1}+q$$

$$f(b)=f(c)=f(d)=\dots=q$$

те је зато тражени производ

$$P=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\left\{\left[\frac{p(1-m)}{m}\right]^m+p\left[\frac{p(1-m)}{m}\right]^{m-1}+q\right\}q^{m-2}$$

14. Дате су једначине

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots+A_{m-1}x+A_m=0 \qquad 1.$$

$$A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}+A_{m-2}x^{m-2}+\dots+A_1x+A_0=0 \qquad 2.$$

од којих је друга постала кад је у првој учињена смена $x=\frac{1}{x}$. Претпоставимо да знамо производ P квадрата разлика два и два корена прве једначине; израчунати одговарајуће P_1 друге једначине.

Ако су корени прве једначине: $a, b, c, d, \dots$, онда ће корени друге једначине бити $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \dots$, па је зато

$$P_1=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)^2\cdots\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)^2\cdots$$

$$P=(a-b)^2(a-c)^2\cdots(b-c)^2(b-d)^2\cdots$$

Међутим је

$$P_1=\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2\left(\frac{c-a}{ac}\right)^2\cdots\left(\frac{b-c}{bc}\right)^2\left(\frac{b-d}{bd}\right)^2\cdots=$$

$$=\frac{P}{a^{2(m-1)}b^{2(m-1)}c^{2(m-1)}\cdots}=\frac{P}{[a\cdot b\cdot c\cdots]^{2(m-1)}}=$$

$$= \frac{P}{\left[(-1)^m \frac{A_m}{A_0}\right]^{2(m-1)}} = P\left(\frac{A_0}{A_m}\right)^{2(m-1)}$$

15. Какав услов требају да задовоље коефицијенти једначине

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

па да један корен њен буде бесконачан. Знамо да је

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

и да би један корен био бесконачан треба да је $x=\infty$ а то је могуће само тако, ако је бројитељ различан од нуле а именитељ раван нули т.ј. $2a_0=0$ или

$$a_0=0$$

и једначина у том случају постаје:

$$a_1x+a_2=0$$

дакле кад год у ма каквој једначини коефицијенат највишег степена x_0 постане раван нули, један корен те једначине је бескрајан.

16. Образовати једначину трећег степена која има коефицијенте као своје корене.

Општа једначина трећег степена је

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

У њој имамо да одредимо p q и r тако да они у исто време буду и коефицијенти и корени те једначине. Према томе услову имаћемо према пређашњем

$$\left.\begin{aligned} -p &= p+q+r \\ q &= pq+pr+qr \\ -r &= pqr \end{aligned}\right\}$$

из прве једначине је

$$p = -\frac{q+r}{2}$$

а заменом у другој и трећој добијамо две једначине

$$\left.\begin{aligned} q^2+2q+r^2 &= 0 \\ q^2+qr-2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Из друге од њих је

$$r = \frac{2-q^2}{q}$$

а заменом у првој имамо једначину

$$q^4+q^3-2q^2+2=0$$

Она има само један корен који је цео број: то је

$$q=-1$$

Отуда је

$$r=-1 \qquad p=1$$

па је тражена једначина

$1=0$

И заиста њени су коефицијенти $1, -1, -1$ а то су у исто време и њени корени

17. Дата је једначина

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

Нека је $x=a$ корен те једначине; ако је задовољен услов

$$ab=a+b$$

какав услов треба да задовоље коефицијенти једначине, па да и b буде њен корен?

Пошто је a корен горње једначине, то постоји однос

$$a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0 \qquad 1$$

а да би b био корен те исте једначине треба да буде и

$$b^4+pb^3+qb^2+rb+s=0 \qquad 2.$$

Постављени задатак сад можемо решити на овај начин:

Да нађемо из горњег односа b помоћу a и заменимо га у 2 па онда из те једначине и једначине 1. да избацимо a и одредимо коефицијенте.

Из горњег односа је

$$b=\frac{a}{a-1}$$

и заменом у 2 добијамо

$$\left(\frac{a}{a-1}\right)^4+p\left(\frac{a}{a-1}\right)^3+q\left(\frac{a}{a-1}\right)^2+r\frac{a}{a-1}+s=0$$

или

$$a^4+pa^3(a-1)+qa^2(a-1)^2+ra(a-1)^3+s(a-1)^4=0$$

или ако извршимо множење и уредимо једначину по степенима од a

$$(1+p+q+r+s)a^4-(p+2p+3r+4s)a^3+$$
$$+(q+3r+6s)a^2-(r+4s)a+s=0$$

или

$$a^4-\frac{p+2p+3r+4s}{1+p+q+r+s}a^3+\frac{q+3r+6s}{1+p+q+r+s}a^2-\frac{r+4s}{1+p+q+r+s}a+\frac{s}{1+p+q+r+s}=0$$

Ако упоредимо ову једначину са једначином 1 видимо да, да би оне биле једнаке, мора пре свега због последњег члана у њима бити

$$1+p+q+r+s=1$$

или

$$p+q+r+s=0$$

и зато можемо избрисати све имениоце у последњој једначини и она постаје

$$a^4-(p+2q+3r+4s)a^3+(q+3r+6s)a^2-$$
$$-(r+4s)a+s=0$$

и да би ова једначина била једнака са

једначином 1. мора бити

$$-(p+2q+3r+4s)=p$$

$$\left.\begin{aligned} q+3r+6s&=q \\ -(r+4s)&=s \end{aligned}\right\} \quad r=-2s$$

а већ имали смо услов

$$p+q+r+s=0$$

Из ових четири услова добијамо ова два

$$\left.\begin{aligned} p+q-s&=0 \\ r+2s&=0 \end{aligned}\right\}$$

О заједничким коренима двеју једначина.

Дешава се да две дате алгебарске једначине буду задовољене једним истим вредношћу x_a. Питање је како се може распознати да ли две дате једначине имају каквих заједничких решења и у случају кад их имају, како се сва та решења могу израчунати, другим речима како се траже заједнички корени двеју алгебарских једначина.

Нека су дате две једначине

$$f(x)=0$$

$$\varphi(x)=0$$

и претпоставимо да оне имају један заједнички корен на пр. $x=a$. Очевидно је да се тада израз $(x-a)$ мора јављати као корени чинилац и у полиному $f(x)$ и у полиному $\varphi(x)$. Ако поред те вредности $x=a$ горње једначине имају још који заједнички корен н. пр. $x=b$, онда се и израз $(x-b)$ јавља као корени чинилац у оба полинома. Исто то вреди и за ма који други заједнички корен. Из тога се види да у опште, ако су: $a, b, c, \ldots$ заједнички корени горњих једначина, у полиному и једне и друге једначине јавља се као чинилац производ

$$(x-a)(x-b)(x-c)\cdots \qquad 1.$$

свију заједничких корених чинилаца. Према томе оба полинома морају бити дељива изразом 1, тај израз је дакле један заједнички делитељ оба полинома. Међутим лако се увиђа да ће то у исто време бити њихов највећи заједнички делитељ. Јер кад он то не би био значило би, да се у томе највећем заједничком делитељу поред производа 1 јавља још који корени чинилац, који не улази у 1. Такав би корени чинилац морао учинити да и полином $f(x)$ и полином $\varphi(x)$ постају равни нули за онај корен што томе чиниоцу одговара и тај би корен био такође заједнички корен за оба полинома, што би било очевидно немогуће, јер су у изразу 1. прикупљени сви заједнички корени, тако да нема никако још неки нови заједнички чинитељ. Тада израз 1. представља највећи заједнички делитељ а из тога се изводе ова правила:

1. кад год две дате једначине имају заједничке корене, њихови полиноми морају имати један заједнички делитељ;
2. да би израчунали заједничке корене двеју једначина, требамо наћи највећи заједнички делитељ полинома тих двеју једначина и он ће тада бити раван производу свих заједничких корених чинилаца тих полинома. Ако ставимо да је једнак нули тако нађени највећи заједнички делитељ и решимо тако добијену једначину, корени те једначине јесу заједнички корени датих алгебарских једначина.

Примери:

1. Наћи заједничке корене једначина

$$\left.\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2&=0\\ x^3-3x^2-x+3&=0 \end{aligned}\right\}$$

Према предњем правилу имамо да нађемо највећи заједнички делитељ тих двеју једначина. Имамо дакле

$$(x^3+2x^2-x-2):(x^3-3x^2-x+3)=1$$
$$\underline{-x^3 \mp 3x^2 \mp x \pm 3}$$
$$5x^2-5$$

$$(x^3-3x^2-x+3):(-5x^2+5)=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$$
$$\underline{-x^3 \mp 5x}$$
$$-3x^2+4x+3$$
$$\underline{-3x^2 \qquad +15}$$
$$4x-12$$

Према томе највећи заједнички делитељ датих једначина јесте $-5x^2+5$ и ако га ставимо да је раван нули, добијамо једначину

$$x^2-1=0$$

одакле је

$$x=\pm 1$$

и то су заједнички корени датих једначина.

2. Наћи заједничке корене једначина:

$$\left.\begin{array}{r} x^3+5x^2-2x-24=0 \\ x^3-7x+6=0 \end{array}\right\}$$

Имамо

$$(x^3+5x^2-2x-24):(x^3-7x+6)=1$$
$$\underline{-x^3 \qquad \mp 7x \pm 6}$$
$$5x^2+5x-30$$

$$(x^3-7x+6):(-5x^2-5x+30)=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$$
$$\underline{-x^3 \pm x^2 \mp 6x}$$
$$-x^2-x+6$$
$$\underline{\mp x^2 \mp x \pm 6}$$
$$= \quad = \quad =$$

Према томе највећи заједнички делитељ датих једначина је: $-5x^2-5x+30$ и ако га ставимо раван нули добијамо једначину

$$x^2+x-6=0$$

која има као корене

$$x_1=2 \quad x_2=3$$

и то су заједнички корени датих једначина.

3. Наћи заједничке корене једначина

$$\left.\begin{array}{r} x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4=0 \\ x^4-x^3-7x^2+13x-6=0 \end{array}\right\}$$

Имамо

$$(x^5-7x^4+19x^3-25x^2+16x-4):(x^4-x^3-7x^2+13x-6)=x-6$$
$$\underline{-x^5 \mp x^4 \mp 7x^3 \pm 13x^2 \mp 6x}$$
$$-6x^4+26x^3-38x^2+22x-4$$
$$\underline{\mp 6x^4 \pm 6x^3 \pm 42x^2 \mp 78x \pm 36}$$
$$20x^3-80x^2+100x-40$$

$$(x^4-x^3-7x^2+13x-6):(-20x^3+80x^2-100x+40)=-\frac{1}{20}x-\frac{3}{20}$$
$$\underline{-x^4 \mp 4x^3 \pm 5x^2 \mp 2x}$$
$$3x^3-12x^2+15x-6$$
$$\underline{-3x^3 \mp 12x^2 \pm 15x \mp 6}$$
$$= \quad = \quad = \quad =$$

Дакле највећи заједнички делитељ датих једначина је: $-20x^3+80x^2-100x+40$ и он уједначен са нулом даје једначину

$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

која има као корене

$$x_{1,2}=1 \quad x_2=2$$

и то су заједнички корени датих једначина.

<u>Одређивање вишеструких корена дате алгебарске једначине</u>. Нека је дата алгебарска једначина

$$f(x)=0$$

$n^{ти}$ степена. Видели смо да она мора имати тачно n корена било реалних било имагинарних. Свакоме од тих корена одговара по један корени чинилац облика $(x-a)$, тако да ће полином једначине бити раван производу свих n корених чинилаца. Међутим може се десити да су два или више корена једнаки међу собом. Очевидно је да се тада корени чинилац $(x-a)$, који је један исти за све такве једнаке корене, мора јавити у полиному $f(x)$ онолико пута, колико има таквих једнаких корена. Ако је број једнаких корена k и ако је заједничка вредност тих k корена a, у полиному $f(x)$ јавиће се као корени чинилац $(x-a)^k$. Ако поред групе корена који имају заједничку вредност a имамо још неку групу једнаких корена који имају заједничку вредност на пр. $x=\text{в}$, онда ће се у полиному $f(x)$ очевидно јавити поред чиниоца $(x-a)^k$ још и чинилац $(x-\text{в})^{\text{р}}$, где р представља број ових заједничких корена. И у опште егзистенција једнаких корена једне дате алгебарске једначине карактерисана је тим фактом, што се у полиному $f(x)$ јављају као чиниоци изрази облика $(x-a)$ подигнути на неки степен.

Питање је сад како се може распознати, да ли у датој једначини има једнаких корена, колико има корена који имају једну исту заједничку вредност и како се сви такви корени могу израчунати. Да би задатак решили, уочимо једну групу таквих међу собом једнаких корена, чија је заједничка вредност a и нека је k број таквих међу собом једнаких корена. Тада се полином $f(x)$ може написати у облику

$$f(x)=(x-a)^k\varphi(x) \qquad 1.$$

где $\varphi(x)$ означује полином који више не садржи $(x-a)$ као чинилац. Ако из 1. образујемо извод, налази се да је

$$f'(x)=(x-a)^k\varphi'(x)+k(x-a)^{k-1}\varphi(x)$$

или

$$f'(x)=(x-a)^{k-1}\left[(x-a)\varphi'(x)+k\varphi(x)\right] \qquad 2.$$

Заграда у изразу 2. очевидно не садржи

више $(x-a)$ као чинилац, јер кад би то био случај, та би заграда морала бити равна нули за $x=a$, што није случај, пошто се та заграда за $x=a$ своди на $k\cdot\varphi(a)$, а тај израз није раван нули, пошто $x=a$ не поништава $\varphi(x)$. Образац 2 показује ово: кад год се у полиному $f(x)$ јавља као чинилац какав израз $(x-a)^n$, и у изводу тог полинома мора се јавити као чинилац $(x-a)^{n-1}$. Према томе полиноми $f(x)$ и $f'(x)$ имају као заједнички делитељ $(x-a)^{n-1}$. Ако уочимо друге какве опет једнаке корене првобитне једначине и ако је њихова заједничка вредност на пр. $x=b$ а број тих корена ако је p, онда се из малопређашњег види, да ће полиноми $f(x)$ и $f'(x)$ имати као заједнички делитељ $(x-b)^{p-1}$, а очевидно је да ће то вредети и за све остале групе заједничких корена. Из тога добијамо ово правило: ако једначина $f(x)=0$ има k међу собом једнаких корена чија је заједничка вредност a, затим p међу собом једнаких корена чија је заједничка вредност b, r међу собом једнаких корена чија је заједничка вредност c и т.д., онда полином $f(x)$ и његов први извод $f'(x)$ морају бити дељиви са: $(x-a)^{k-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{r-1}\dots$ Овај је израз у исто време и њихов највећи заједнички делитељ. Ако ставимо да је тај делитељ једнак нули и тако добијену једначину решимо по x, добићемо низ вредности: $a, b, c, \dots$ т.ј. једнаке корене. Међутим ако $f(x)$ и $f'(x)$ немају заједничке чинитеље, једначина $f(x)=0$ не може ни имати међу собом једнаких корена.

За сваку тако нађену вредност $a, b, c, \dots$ остаје још да се види, колико има међу собом једнаких корена који имају ту вредност. Приметићемо да ако једначина има на пр. k корена чија је заједничка вредност a, онда се каже, да једначина има k међу собом једнаких корена чија је заједничка вредност a, или да једначина има један корен $k^{\text{тог}}$ реда чија је вредност a. Број k зове се редом таквог једног корена и, ако је $k=1$, каже се да је то један прост корен или корен првог реда, ако је $k=2$, каже се да је то један двогуби корен или корен другог реда; и т. д.

Остаје још да се реши ово питање: кад смо на поменути начин тражили највећи заједнички делитељ, нашли смо да једначина има међу собом једнаких или вишеструких корена; одредимо ред тих корена. Уочимо један тако нађени корен $x=a$ и претпоставимо да је то корен $k^{тог}$ реда. Тада, као што је показано у полиному $f(x)$ фигурише као чинилац $(x-a)^k$, а у полиному $f'(x)$ фигурише $(x-a)^{k-1}$. Према томе пошто је $f''(x)$ извод од $f'(x)$ у томе ће другом изводу фигурисати као чинилац $(x-a)^{k-2}$. Тако исто ће у $f'''(x)$ фигурисати као чинилац $(x-a)^{k-3}$ и т. д. На последку у $f^{(k)}(x)$ фигурисаће као чинилац $(x-a)^{k-k}=(x-a)^0=1$ т. ј. у $k^{том}$ изводу неће бити више $(x-a)$ као чинилац, према томе $k^{ти}$ извод неће бити раван нули за $x=a$. Из тога се види ово правило: да би одредили ред једног већ нађеног вишеструког корена са једначине $f(x)=0$, треба образовати низ узастопних извода $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ низ продужити све дотле, док се не дође до једног извода, који више није раван нули за $x=a$. Ред тога извода биће у исто време и ред посматраног вишеструког корена a, чиме је дати задатак решен.

Примери:

1. Наћи вишеструки корен једначине

$$x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32=0$$

и одредити његов ред. Овде је

$$f(x)=x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$$
$$f'(x)=5x^4+40x^3+120x^2+160x+80$$

па зато имамо

$$(x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32):(5x^4+40x^3+120x^2+160x+80)=\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$$
$$-x^5 \pm 8x^4 \pm 24x^3 \pm 32x^2 \pm 16x$$
$$2x^4+16x^3+48x^2+64x+32$$
$$-2x^4 \pm 16x^3 \pm 48x^2 \pm 64x \pm 32$$

Дакле највећи заједнички делитељ је $5x^4+40x^3+120x^2+160x+80$ и он изједначен са нулом даје једначину

$$x^4+8x^3+24x^2+32x+16=0$$

Ову можемо написати у облику

$$(x+2)^5=0 .$$

одакле је

$$x=-2$$

и то је тражени вишеструки корен.
Да би нашли ред тога вишеструког корена имаћемо

$$f'(x)=20x^3+120x^2+240x+160 \underset{x=-2}{=} 0$$
$$f''(x)=60x^2+240x+240 \underset{x=-2}{=} 0$$
$$f'''(x)=120x+240 \underset{x=-2}{=} 0$$
$$f^{IV}(x)=120$$

одакле видимо да је вишеструки корен $x=-2$ петог реда.

2. Наћи вишеструки корен једначине

$$x^3+4x^2+5x+2=0$$

и одредити његов степен.

Овде је

$$f(x)=x^3+4x^2+5x+2$$
$$f'(x)=3x^2+8x+5$$

па је отуда

$$(6x^3+24x^2-30x+12):(18x^2+48x-30)=\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$$
$$\underline{-6x^3+16x^2+10x}$$
$$8x^2-20x+12$$
$$\underline{8x^2+36x-\frac{20}{3}}$$
$$-56x+\frac{56}{3}$$

$$(x^3+4x^2+5x+2):(3x^2+8x+5)=\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}$$
$$\underline{x^3+\frac{8}{3}x^2+\frac{5}{3}x}$$
$$\frac{4}{3}x^2+\frac{10}{3}x+2$$
$$\underline{\frac{4}{3}x^2+\frac{32}{9}x+\frac{20}{9}}$$
$$-\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}$$

$$(3x^2+8x+5):\left(\frac{2}{9}x+\frac{2}{9}\right)=\frac{27}{2}x+\frac{45}{2}$$
$$\underline{3x^2+3x}$$
$$5x+5$$
$$\underline{5x+5}$$

Дакле највећи заједнички делитељ је $\frac{2}{9}x+\frac{2}{9}$ и он уједначен са нулом даје једначину

$$x+1=0$$

одакле је

$$x=-1$$

и то је тражени вишеструки корен.
Да би нашли његов ред имаћемо

$$f''(x)=6x+8 \underset{x=-1}{=} 2$$

што значи да је вишеструки корен $x=-1$ другог реда.

3. Наћи вишеструки корен једначине

$$x^4-5x^3+9x^2-7x+2=0$$

и одредити његов ред.

Имамо

$$f(x)=x^4-5x^3+9x^2-7x+2$$

$$f'(x)=4x^3-15x^2+18x-7$$

па је зато

$$(x^4-5x^3+9x^2-7x+2):(4x^3-15x^2+18x-7)=\frac{1}{4}x-\frac{5}{16}$$

$$\underline{x^4-\frac{15}{4}x^3+\frac{18}{4}x^2-\frac{7}{4}x}$$

$$-\frac{5}{4}x^3+\frac{18}{4}x^2-\frac{21}{4}x+2$$

$$\underline{-\frac{5}{4}x^3+\frac{75}{16}x^2-\frac{90}{16}x+\frac{35}{16}}$$

$$-\frac{3}{16}x^2+\frac{6}{16}x-\frac{3}{16}$$

$$(4x^3-15x^2+18x-7):\left(\frac{3}{16}x^2-\frac{6}{16}x+\frac{3}{16}\right)=\frac{64}{3}x-\frac{112}{3}$$

$$\underline{4x^3-8x^2+4x}$$

$$-7x^2+14x-7$$

$$\underline{-7x^2+14x-7}$$

Дакле највећи заједнички делитељ је $\frac{3}{16}x^2-\frac{6}{16}x+\frac{3}{16}$ и уједначен са нулом даје једначину

$$x^2-2x+1=0$$

одакле је

$$x=1$$

и то је тражени вишеструки корен. Да би одредили његов ред, имамо

$$f''(x)=12x^2-30x+18 \underset{x=1}{=} 0$$

$$f'''(x)=24x-30 \underset{x=1}{=} 6$$

што значи да је вишеструки корен $x=1$ трећег реда.

4. Доказати да је израз

$$\frac{x-a}{2}\left[f'(x)+f'(a)\right]-f(x)+f(a)$$

где је $f(x)$ ма какав полином по x, дељив са $(x-a)^3$.

Ако ставимо да је горњи израз раван нули добијамо једначину

$$\frac{x-a}{2}\left[f'(x)+f'(a)\right]-f(x)+f(a)=0$$

и да би њена лева страна била дељива са $(x-a)^3$, мора та једначина да има један троструки корен и то $x=a$. Да би се уверили да ли она доиста има $x=a$ као троструки корен, имамо

$$\varphi(x)=\frac{x-a}{2}\left[f'(x)+f'(a)\right]-f(x)+f(a)\underset{x=a}{=}0$$

$$\varphi'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)+\left[f'(x)+f'(a)\right]\frac{1}{2}-f'(x)\underset{x=a}{=}0$$

$$\varphi''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)-f''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x)\underset{x=a}{=}0$$

$$\varphi'''(x) = \frac{x-a}{2} f'''(x) + \frac{1}{2} f''(x) \underset{x=a}{=} \frac{1}{2} f''(a)$$

што значи да наша једначина има заиста $x=a$ као троструки корен или другим речима, да је дати израз дељив са $(x-a)^3$.

Трансформација алгебарских једначина. Под задатком трансформације једне дате алгебарске једначине разуме се задатак овакве врсте: кад је дата једна алгебарска једначина

$$f(x)=0$$

образовати нову једну алгебарску једначину

$$\varphi(y)=0$$

такву, да између корена прве и корена друге једначине постоји какав унапред дат однос. Према природи тога датог односа можемо имати и разне врсте тих трансформација. Ми ћемо прећи неколико најпростијих.

1° Образовати једначину

$$\varphi(y)=0$$

чији ће корени бити за један сталан број h већи или мањи од корена дате једначине

$$f(x)=0$$

По услову задатка, ако се са

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

означе корени дате једначине, а са

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n$$

корени једначине

$$\varphi(y)=0$$

онда треба да буде

$$\beta_1=\alpha_1 \pm h \quad \beta_2=\alpha_2 \pm h \quad \ldots \quad \beta_n=\alpha_n \pm h$$

Ако ставимо да је

$$x=y \pm h$$

и сменимо у датој једначини, очевидно је да ће корени нове једначине

$$\varphi(y)=0$$

задовољавати горњи услов, само пред h ваља разумевати знак $+$ или $-$ према томе, да ли по услову задатка треба h одузети или сабрати. Према томе тражена једначина

$$\varphi(y)=0$$

добија се, кад се смени

$$x = y \pm h$$

у прекашњој једначини

$$f(x) = 0$$

па тако добијена једначина уреди по степенима од y.

Примери:

1. Дата је једначина

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

Образовати једначину

$$\varphi(y) = 0$$

чији ће корени бити за јединицу већи од корена дате једначине. По услову треба да буде

$$\beta_1 = \alpha_1 + 1 \qquad \beta_2 = \alpha_2 + 1 \qquad \beta_3 = \alpha_3 + 1$$

према томе треба у датој једначини ставити

$$y = x + 1$$

т. ј.

$$x = y - 1$$

и једначина тада постаје

$$(y-1)^3 + a_1(y-1)^2 + a_2(y-1) + a_3 = 0$$

или ако ју уредимо по степенима од y

$$y^3 + (a_1 - 3)y^2 + (3 - 2a_1 + a_2)y + (1 - a_1 - a_2 + a_3) = 0$$

и то је тражена једначина.

2. Образовати једначину чији ће корени бити за један сталан број a мањи од корена једначине

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

Према услову задатка треба да буде

$$x = y + a$$

па зато имамо трансформацију

$$(y+a)^5 + a_1(y+a)^4 + a_2(y+a)^3 + a_3(y+a)^2 + a_4(y+a) + a_5 = 0$$

или

$$\begin{aligned} y^5 + 5y^4a + 10y^3a^2 + 10y^2a^3 + 5ya^4 + a^5 &+ \\ + a_1y^4 + 4a_1y^3a + 6a_1y^2a^2 + 4a_1ya^3 + a_1a^4 &+ \\ + a_2y^3 + 3a_2y^2a + 3a_2ya^2 + a_2a^3 &+ \\ + a_3y^2 + 2a_3ya + a_3a^2 &+ \\ + a_4y + a_4a &+ \\ + a_5 &= 0 \end{aligned}$$

Нова би једначина била

$$y^5 + b_1y^4 + b_2y^3 + b_3y^2 + b_4y + b_5 = 0$$

где је

$$b_1 = 5a + a_1 \quad = \frac{1}{24} f^{IV}(a) = \frac{1}{4!} f^{IV}(a)$$

$$b_2 = 10a^2 + 4a_1a + a_2 = \frac{1}{6} f'''(a) = \frac{1}{3!} f'''(a)$$

$$b_3 = 10a^3 + 6a_1a^2 + 3a_2a + a_3 = \frac{1}{2} f''(a) = \frac{1}{2!} f''(a)$$

$$b_4 = 5a^4 + 4a_1a^3 + 3a_2a^2 + 2a_3a + a_4 = f'(a) = \frac{1}{1!} f'(a)$$

$$b_5 = a^5 + a_1 a^4 + a_2 a^3 + a_3 a^2 + a_4 a + a_5 = f(a)$$

3. Трансформисати једначину

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

у нову, тако да буде

$$x = y+2$$

Имали би

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) - 6 = 0$$

или

$$\begin{aligned} y^3 + 6y^2 + 12y + 8 & \\ -6y^2 - 24y - 24 & \\ +11y + 22 & \\ -6 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$y^3 - y = 0$$

или

$$y(y^2-1) = 0$$

Њени корени су

$$y = 0, +1, -1$$

и према томе корени дате једначине су

$$x = 2, 3, 1.$$

4. Трансформисати једначину

$$x^4 - 8x^3 + 6x^2 - x + 10 = 0$$

у нову тако да буде

$$x = y + a \quad \text{и} \quad b_1 = 0$$

Имаћемо

$$(y+a)^4 - 8(y+a)^3 + 6(y+a)^2 - (y+a) + 10 = 0$$

или

$$\begin{aligned} y^4 + 4y^3a + 6y^2a^2 + 4ya^3 + a^4 & - \\ -8y^3 - 24y^2a - 24ya^2 - 8a^3 & + \\ +6y^2 + 12ya + 6a^2 & - \\ -y - a & + \\ +10 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$y^4 + (4a-8)y^3 + (6a^2 - 24a + 6)y^2 + (4a^3 - 24a^2 + 12a - 1)y + (a^4 - 8a^3 + 6a^2 - a + 10) = 0$$

Како по услову задатка треба да буде $b_1 = 0$, то је

$$4a - 8 = 0$$

или одатле

$$a = 2$$

па зато последња једначина прелази у

$$y^4 - 18y^2 - 41y - 16 = 0$$

и то је тражена једначина.

Примедба: видели смо у теорији развијања функција у редове, да кад се функција $f(y+h)$ развије по степенита од y, добија се као резултат

$$f(y+h) = y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \cdots + A_{n-1} y + A_n$$

где се коефицијенти $A_1 A_2 \cdots A_n$ могу израчунати помоћу извода полинома f тако да би добили

$$A_n = f(h) \quad A_{n-1} = \frac{1}{1!} f'(h) \quad A_{n-2} = \frac{1}{2!} f''(h) \cdots A_1 = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(h)$$

2° Образовати једначину

$$\varphi(y) = 0$$

која ће бити таква, да су јој корени k-пута веди или мањи од корена првобитне једначине

$$f(x) = 0.$$

Према услову задатка треба да је:

$$\beta_1 = k\alpha_1 \quad \beta_2 = k\alpha_2 \quad \cdots \beta_n = k\alpha_n$$

или

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{k} \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{k} \cdots \quad \beta_n = \frac{\alpha_n}{k}$$

Ако у датој једначини ставимо

$$y = hx$$

где је

$$h = k \quad \text{или} \quad h = \frac{1}{k}$$

(према услову задатка), одакле је

$$x = \frac{y}{h}$$

нова једначина биће

$$f\left(\frac{y}{h}\right) = 0$$

Ову једначину још ваља уредити по степенима од y па је задатак решен.

Примери:

1. Дата је једначина

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

образовати нову једначину

$$\varphi(y) = 0$$

чији ће корени бити трипута мањи од корена дате једначине. По условy задатка треба да је

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{3} \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{3} \quad \beta_3 = \frac{\alpha_3}{3}$$

према томе треба ставити

$$y = \frac{x}{3} \quad \text{или} \quad x = 3y.$$

у датој једначини па добијамо

$$27 y^3 + 9 a_1 y^2 + 3 a_2 y + a_3 = 0$$

и то је тражена једначина.

2. Образовати једначину чији ће корени бити пет пута веће од корена једначине

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

По условy задатка треба да буде

$$\beta_1 = 5\alpha_1 \quad \beta_2 = 5\alpha_2 \quad \beta_3 = 5\alpha_3$$

зато што у датој једначини ставити

$$y = 5x \quad \text{или} \quad x = \frac{y}{5}$$

па добијамо

$$\frac{y^3}{125} - 5 \cdot \frac{y^2}{25} + 8\frac{y}{5} - 4 = 0$$

или одатле

$$y^3 - 25y^2 + 200y - 500 = 0$$

и то је тражена једначина.

3° Образовати једначину

$$\varphi(y) = 0$$

која ће бити таква да су јој корени равни коренима првобитне једначине

$$f(x) = 0$$

са промењеним знаком. Треба просто у датој једначини сменити

$$x = -y$$

па ће добијена на тај начин једначина задовољавати постављени услов.

4° Образовати једначину

$$\varphi(y) = 0$$

која ће бити таква да су јој корени равни реципрочним вредностима корена првобитне једначине. Према услову задатка треба да је

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} \quad \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2} \quad \cdots \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$$

према томе треба ставити

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{или} \quad x = \frac{1}{y}$$

и нова једначина биће дакле

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

и само је још ваља ослободити именитеља.

На пример: образовати једначину чији ће корени бити реципрочне вредности корена једначине

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Ако ставимо

$$x = \frac{1}{y}$$

дата једначина постаје

$$\frac{1}{y^3} + a_1\frac{1}{y^2} + a_2\frac{1}{y} + a_3 = 0$$

или

$$a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + 1 = 0$$

и то је тражена једначина.

5° Образовати једначину

$$\varphi(y) = 0$$

чији ће корени бити равни квадратима корена првобитне једначине. По услову задатка треба да буде

$$\beta_1=\alpha_1^2 \quad \beta_2=\alpha_2^2 \quad \beta_n=\alpha_n^2$$

према томе треба ставити

$$y=x^2 \quad \text{или} \quad x=\sqrt{y}$$

и нова једначина биће

$$f(\sqrt{y})=0$$

и само је још ваља ослободити корено знака и уредити по степенима y-а. Што се најлакше може учинити на овај начин: групишимо у полиному $f(x)$ за себе чланове парног а за себе чланове непарног степена. Очевидно је да кад у збиру чланова парног степена сменимо $x=\sqrt{y}$ у томе ће збиру нестати квадратног корена само по себи. У збиру пак чланова непарног степена можемо извући x као заједничко, те ће тај збир бити облика: x · једна функција парног степена. Кад будемо сменили $x=\sqrt{y}$, тај ће збир постати производ из $\sqrt{y}$ и једног полинома по y. Према томе целокупни резултат биће облика

$$P(y)+\sqrt{y}\,Q(y)=0$$

где су P и Q полиноми по y где више нема квадратног корена. Одатле је

$$\sqrt{y}=-\frac{P(y)}{Q(y)}$$

и квадрирањем нестаће потпуно квадратног корена тако, да остаје да се само резултат уреди по степенима од y. Н. пр. дата је једначина

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

па се тражи једначина

$$\varphi(y)=0$$

чији ће корени бити квадрати корена прве једначине. Дату једначину можемо написати у облику

$$(a_1x^2+a_3)+x(x^2+a_2)=0$$

и ако сменимо $x=\sqrt{y}$ она постаје

$$(a_1y+a_3)+\sqrt{y}(y+a_2)=0$$

или

$$a_1y+a_3=-\sqrt{y}(y+a_2)$$

Квадрирањем добијамо

$$a_1^2y^2+2a_1a_3y+a_3^2=y^3+2a_2y^2+a_2^2y$$

или најпосле

$$y^3+(2a_2-a_1)y^2+(a_2-2a_1a_3)y-a_3^2=0$$

и то је тражена једначина.

Оваквих трансформација тоже бити бескрајно много и бескрајно разноврсних. Међутим разни задаци могу се комбиновати на разне начине, те на тај начин долазимо до компликованијих задатака. Тако ако би се тражило

$$\beta_1 = k\alpha_1 + h$$

ми би најпре извршили другу а затим са добијеном једначином извршили би прву трансформацију и задатак би био решен.

Примери:

1. Трансформисати једначину

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$$

у нову, тако да буде

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}$$

Имаћемо

$$\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)^3 + A_1\left(\frac{ay+b}{cy+d}\right)^2 + A_2\frac{ay+b}{cy+d} + A_3 = 0$$

или

$$\frac{a^3y^3+3a^2by^2+3ab^2y+b^3}{(cy+d)^3} + A_1\frac{a^2y^2+2aby+b^2}{(cy+d)^2} + A_2\frac{ay+b}{cy+d} + A_3 = 0$$

или множењем целе једначине са $(cy+d)^3$

$$a^3y^3+3a^2by^2+3ab^2y+b^3+$$
$$+A_1a^2cy^3+2A_1abcy^2+A_1b^2cy+$$
$$+A_1a^2dy^2+2A_1abdy+A_1b^2d+$$
$$+A_2ac^2y^3+A_2bc^2y^2+$$
$$+2A_2acdy^2+2A_2cdby+$$
$$+A_2ad^2y+A_2bd^2+$$
$$+A_3c^3y^3+3A_3c^2dy^2+3A_3cd^2y+A_3d^3=0$$

Нова би једначина била

$$B_0y^3+B_1y^2+B_2y+B_3=0$$

где је

$$B_0 = a^3+A_1a^2c+A_2ac^2+A_3c^3$$
$$B_1 = 3a^2b+2A_1abc+A_1a^2d+A_2bc^2+2A_2acd+3A_3c^2d$$
$$B_2 = 3ab^2+A_1b^2c+2A_1abd+2A_2bcd+A_2ad^2+3A_3cd^2$$
$$B_3 = b^3+A_1b^2d+A_2bd^2+A_3d^3$$

2. Трансформисати једначину

$$x^4-2x^3-3x^2+4=0$$

тако да буде

$$x=\frac{y}{y-1}$$

Имаћемо

$$\frac{y^4}{(y-1)^4}-2\frac{y^3}{(y-1)^3}-3\frac{y^2}{(y-1)^2}+4=0$$

Множењем целе ове једначине са $(y-1)^4$ добијамо

$$y^4-2y^4+2y^3-3y^4+6y^3-3y^2+4y^4-16y^3+24y^2-16y+4=0$$

или

$$-8y^3+21y^2-16y+4=0$$

или најпосле

$$y^3-\frac{21}{8}y^2+2y-\frac{1}{2}=0$$

и то је тражена једначина. Међутим пошто сваком корену дате једначине мора да одговара по један корен новодобијене једначине и пошто је ова трећег степена а дата једначина четвртог, значи, да нова једначина има један бескрајан корен. Међутим је за $y=\infty$ из постављеног услова $x=1$ што значи да дата једначина треба да има као корен $x=1$ јер томе корену одговара корен $y=\infty$ нове једначине. Из дате једначине видимо да она заиста има као корен $x=1$, што значи да је наш резултат добар.

Примена задатка трансформације.

Задатак трансформације поред осталих примена има и ту, да се њиме упрости првобитна једначина. Тако, згодно изабраном трансформацијом може се учинити да у једначини нестане један или више чланова, што је за многе рачуне од велике користи. Н. пр. дата је једначина n-тог степена

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0 \qquad 1.$$

па се тражи да се образује нова једначина $n-1^{\text{ва}}$ степена. Ако извршимо трансформацију

$$x = y + h$$

резултат ће бити једначина облика

$$y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \cdots + B_{n-1} y + B_n = 0 \qquad 2.$$

где се, према ономе што је казано у првом задатку трансформације, коефицијенти $B_1, B_2, B_3 \ldots B_n$ добијају на овај начин

$$B_n = f(h) \quad B_{n-1} = f'(h) \quad B_{n-2} = \frac{f''(h)}{2!} \quad \cdots \quad B_1 = \frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!} \qquad 3.$$

Међутим у нашем задатку имамо да је

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \cdots \\
f'(x) &= n x^{n-1} + A_1(n-1) x^{n-2} + A_2(n-2) x^{n-3} + A_3(n-3) x^{n-4} + \cdots \\
f''(x) &= n(n-1) x^{n-2} + A_1(n-1)(n-2) x^{n-3} + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)(n-2) \cdots 2x + A_1(n-1)(n-2) \cdots 1
\end{aligned}\right\} \qquad 4.$$

У тим изразима ваља сменити још $x=h$, поделити са одговарајућим факторијелом, па ћемо имати израчунате све коефицијенте $B_1 B_2 \ldots B_n$. Н. пр. коефицијент B_1 имаће за вредност

$$B_1 = \frac{f^{n-1}(k)}{(n-1)!} = nk + A_1$$

Према томе једначина 2 постаје

$$y^n + (nk + A_1)y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \cdots + B_{n-1} y + B_n = 0 \qquad 5.$$

а казано је како се остали коефицијенти B израчунавају. Пошто по услову нашег задатка у једначини 5. треба да нестане члан x^{n-1}, то треба да је

$$nk + A_1 = 0$$

или одатле

$$k = -\frac{A_1}{n}$$

из чега се изводи овај резултат. Ако у једначини n-тог степена

$$f(x) = 0$$

хоћемо да избацимо члан са $(n-1)^{вим}$ степеном, треба извршити трансформацију

$$x = y - \frac{A_1}{n}$$

и уредити новодобијену једначину по степенима од y. У таквој новој једначини неће бити члана са y^{n-1}.

Примери

1 Дата је једначина

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

избацити члан са x^2. Према горњем резултату извршићемо трансформацију

$$x = y - \frac{a_1}{3}$$

па добијамо

$$\begin{aligned} y^3 - a_1 y^2 + \frac{a_1^2}{9} y - \frac{a_1^3}{27} + a_1 y^2 - 2\frac{a_1^2}{3} y + \frac{a_1^3}{9} &+ \\ + a_2 y - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$y^3 + \left(\frac{a_1^2}{9} - 2\frac{a_1^2}{3} + a_2\right) y + \left(a_3 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{a_1^3}{9} - \frac{a_1^3}{27}\right) = 0$$

Дакле отпао је члан са x^2

2. Дата је једначина

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

избацити члан са x^3. Сад ћемо извршити трансформацију

$$x = y - \frac{a_1}{4}$$

па добијамо

$$\begin{aligned} y^4 - a_1 y^3 + 6\frac{a_1^2}{16} y^2 - \frac{a_1^3}{16} y + \frac{a_1^4}{256} &+ \\ + a_1 y^3 - 3\frac{a_1^2}{4} y^2 + 3\frac{a_1^3}{16} y + \frac{a_1^4}{64} &+ \\ + a_2 y^2 - \frac{a_1 a_2}{2} y + \frac{a_1^2 a_2}{16} &+ \\ + a_3 y - \frac{a_1 a_3}{4} &+ \\ + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

или одатле

$$y^4+\left(a_2-\frac{6}{16}a_1^2\right)y^2+\left(a_3-\frac{a_1a_2}{2}+\frac{2}{16}a_1^3\right)y+\left(a_4-\frac{a_1a_3}{4}+\frac{a_1^2a_2}{16}-\frac{3}{256}a_1^3\right)=0$$

Дакле отпао је члан са x^3.

Учинити да у новој једначини

$$\varphi(y)=0$$

нестане члана са $(n-2)^{тим}$ степеном. Ако опет извршимо трансформацију

$$x=y+h$$

тако да се добије нова једначина 8.

$$y^n+B_1y^{n-1}+B_2y^{n-2}+\dots+B_{n-1}y+B_n=0$$

и према услову задатка треба да буде

$$B_2=0$$

Међутим према обрасцима 4. и 3. лако се налази да ће коефицијенат B_2 бити полином другог степена по h т. ј. облика

$$mh^2+ph+q$$

где ће нам m, p и q бити познати. Ако би хтели да буде $B_2=0$, треба за h узети један или други корен квадратне једначине

$$mh^2+ph+q=0$$

Ако је један корен те једначине $h=\alpha$, онда ће према томе бити

$$x=y+\alpha$$

што ће нас довести до нове једначине $\varphi(y)=0$, код које неће бити члана са $(n-2)^{тим}$ степеном. Приметимо само да се у општем случају, изузимајући неке специјалне случајеве, не могу у исто време избацити чланови са $(n-1)^{вим}$ и $(n-2)^{тим}$ степеном, јер услов $B_1=0$ тражи да h има једну, а услов $B_2=0$ тражи да h има другу вредност.

Овако би могли уклањати редом сваки коефицијенат који се хоће, само с том напоменом, да за уклањање коефицијента B_1 има да се реши једначина првог степена по h, за уклањање коефицијента B_2 има да се реши квадратна једначина по h и т. д. на послетку да би се уклонио последњи коефицијенат B_n, треба нам решити једну једначину n-тог степена по h, а та једначина према првом од образаца 3. није ништа друго до првобитна дата једначина 1. Према томе уклањање тог коефицијента у опште је без смисла, јер би зато имали да решимо сату првобитну једначину.

Примедба може се итати поеле и са задацима овакве врсте пита се какве услове треба да задовоље коефицијенти једне дате једначине, па да се подесном трансформацијом

$$x = y + h$$

може у једначини уклонити из ње 2, 3, 4, ... члана.

Примери:

1. Дата је једначина

$$x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

одредити a, b и c тако, да се трансформацијом

$$x = y + 1$$

добије једначина

$$y^4 + y - 5 = 0$$

Ако извршимо тражену смену, добијамо

$$\begin{aligned} y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 &+ \\ -4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 &+ \\ + ay^2 + 2ay + a &+ \\ + by + b &+ \\ + c &= 0 \end{aligned}$$

или

$$y^4 + (a-6)y^2 + (b+2a-8)y + (c+b+a-3) = 0$$

Да би добили тражену једначину треба да буде

$$a - 6 = 0$$

$$b + 2a - 8 = 1$$

$$c + b + a - 3 = -5$$

одакле налазимо

$$a = 6 \quad b = -3 \quad c = 5$$

и према томе једначина

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x - 5 = 0$$

траженом сменом

$$x = y + 1$$

своди се на

$$y^4 + y - 5 = 0$$

2. Какве услове треба да задовоље коефицијенти једначине

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

па да се она сменом

$$x = y + h$$

може свести на једначину облика

$$y^3 + b = 0$$

Ако би извршили тражену смену, добили би једначину облика

$$y^3+b_1y^2+b_2y+b_3=0$$

где је

$$b_1=f(h) \quad b_2=f'(h) \quad b_3=\frac{f''(h)}{2!}$$

По услову задатка треба да буде

$$b_1=0 \quad и \quad b_2=0$$

па зато су услови

$$f'(h)=0 \quad и \quad f(h)=0$$

или у прецизираном облику

$$h^3+a_1h^2+a_2h+a_3=0$$
$$3h^2+2a_1h+a_2=0$$

Решавање једначина.

Решити једну једначину значи: одредити такву вредност x-а коју кад ставимо у једначини, ова бива задовољена. Код алгебарских једначина $n^{тог}$ степена имамо n таквих решења и према томе решити такву једначину значи наћи n вредности x-а које ју задовољавају. Такве вредности x-а могу бити или одређени апсолутни бројеви или какве комбинације оних писмена што циркулишу у коефицијентима једначине. Први ћемо случај имати код оних једначина, код којих су и сами коефицијенти апсолутни бројеви, као што су н. пр. једначине

$$x^3-2x^2-7x+5=0$$
$$x^8-5x^4+x-1=0$$

и т. д.

— То су т. зв. бројне једначине. Други ћемо случај имати, ако коефицијенти нису прецизирани, већ изражени као писмена, па дакле могу бити ма какви као што су н. пр. једначине

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0$$
$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

и т. д.

— То су т. зв. опште једначине.

Опште једначине

Увод. Општа једначина првог степена била би

$$a_0x + a_1 = 0$$

а другог степена

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

Зна се како се оне решавају па ма какви били коефицијенти a_0, a_1 и a_2.

Општа једначина трећег степена је

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \qquad 1.$$

И ова се једначина може решити па ма какви били коефицијенти и то на овај начин: деобом са a_0 добија се једначина

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0 \qquad 2.$$

Видели смо код трансформација да ако се стави

$$x = y - \frac{b_1}{3} \qquad 3.$$

у новој једначини нестаје члан са квадратом непознате, тако да ће ова бити

$$y^3 + py + q = 0 \qquad 4.$$

где ће p и q бити извесне комбинације коефицијената b па према томе и комбинације коефицијената a. Ако у 4. извршимо смену

$$y = u + v \qquad 5.$$

где су u и v две за сада произвољне количине, заменом једначина 4. постаје

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0 \qquad 6.$$

Изаберимо сад произвољне количине u и v тако, да буде

$$3uv + p = 0 \qquad 7.$$

те наша једначина тада постаје

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad 8.$$

Ако дакле непознате u и v задовољавају једначине 7. и 8., онда ћемо њиховом заменом у 5. имати ону вредност y-а, што задовољава једначину 4. Према томе решење једначине 4. своди се на решавање система једначина 7. и 8. по u и v. Једначину 7. можемо написати у облику

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \tag{9.}$$

и према томе ако ставимо да је

$$u^3 = \alpha_1, \quad v^3 = \alpha_2 \tag{10.}$$

једначине 7. и 8. дају једначине

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -q$$
$$\alpha_1 \alpha_2 = -\frac{p^3}{27} \tag{11}$$

Једначине 11. показују да α_1 и α_2 нису ништа друго него два корена квадратне једначине

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{12.}$$

и према томе бројеве α_1 и α_2 имаћемо решењем квадратне једначине 12. Кад те вредности будемо нашли, заменом у 10. моћи ћемо израчунати u и v. Знајући u и v, из 5. ћемо имати y, које кад заменимо у 3, добијамо и само x, па ма какви били коефицијенти $a_0\, a_1, a_2$ и a_3. Тако добијени образац за x зове се Кардановим обрасцем за решавање једначина трећег степена и он има овакав облик

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Има један т. зв. несводљив облик где су корени имагинарни па да су реални и није се могло никад свести да израз буде реалан. Постоје и тригонометриска решавања једначине трећег степена помоћу синуса и косинуса и ако се не траже тачне вредности корена употребљује се тај начин. За нас је важно да је увек могуће решити једначину трећег степена па ма какви били коефицијенти.

Трансформацију Кардановог обрасца у тригонометријски облик извршићемо на овај начин: ако извршимо у њему ову смену

$$\varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \qquad + \frac{q}{2} = \varrho\cos\theta$$

тај образац добија овај облик

$$\sqrt[3]{-\varrho\cos\theta + \sqrt{\varrho^2\cos^2\theta - \varrho^2}} + \sqrt[3]{-\varrho\cos\theta - \sqrt{\varrho^2\cos^2\theta - \varrho^2}} =$$
$$= \sqrt[3]{-\varrho\cos\theta + \varrho\sqrt{\cos^2\theta - 1}} + \sqrt[3]{-\varrho\cos\theta - \varrho\sqrt{\cos^2\theta - 1}} =$$
$$= \sqrt[3]{\varrho} \cdot \left[\sqrt[3]{\cos\theta + i\sin\theta} + \sqrt[3]{\cos\theta - i\sin\theta}\right] =$$
$$= \sqrt[3]{\varrho} \cdot \left[\sqrt[3]{e^{\theta i}} + \sqrt[3]{e^{-\theta i}}\right] = \sqrt[3]{\varrho}\left[e^{\frac{\theta}{3}i} + e^{-\frac{\theta}{3}i}\right] =$$

$$= \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3} + \cos\frac{\theta}{3} - i\sin\frac{\theta}{3}\right] = \sqrt[3]{\rho}\cdot 2\cos\frac{\theta}{3}$$

Према свему трансформисан Карданов образац је

$$y = \sqrt[3]{\rho}\cdot 2\cos\frac{\theta}{3}$$

који се употребљује у великом броју случајева.

Примери

1. Решити једначину

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Ако нашу једначину трансформишемо у нову смењом

$$x = y + \frac{6}{3} = y + 2$$

добијамо нову једначину

$$y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0$$

где је

$$b_1 = f(2) = 0$$

$$b_2 = f'(2) = -1$$

$$b_3 = f''(2) = 0$$

тако да је нова једначина

$$y^3 - y = 0$$

Њени су корени

$$0, +1 \text{ и } -1$$

и према томе корени дате једначине су

$$2, 3 \text{ и } 1.$$

2. Решити једначину

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Према трансформисаном Кардановом обрасцу имаћемо

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{343}{27}}\ 3$$

$$\log\rho = \frac{\log 343 - \log 27}{2} = \frac{2{,}535294 - 1{,}431364}{2} =$$

$$= \frac{1{,}103930}{2} = 0{,}551965$$

$$-\frac{q}{2} = \rho\cos\theta \quad \text{или} \quad -3 = \rho\cos\theta \text{ или } 3 = \rho\cos(180-\theta)$$

а одатле

$$\log\cos(180-\theta) = \log 3 - \log\rho = 0{,}477121 - 0{,}551965 =$$

$$= \bar{1}{,}925156$$

Одатле

$$180 - \theta = 32^\circ 40' 50'' \quad \text{или} \quad \theta = 147^\circ 19' 10''$$

Према томе биће

$$x = \sqrt[3]{\rho}\ 2\cos\frac{\theta}{3}$$

или

$$\log x = \frac{\log\rho}{3} + \log 2 + \log\cos\frac{\theta}{3} =$$

$$= \frac{0{,}551965}{3} + 0{,}301030 + \log\cos 49^\circ 6' 23''$$

$$= 0{,}183988 + 0{,}301030 + \bar{1}{,}816215 = 0{,}300182$$

$$x = 2{,}0007$$

Ово је приближна вредност једног корена. Изаиста из једначине видимо да је њен један корен

$$x=2$$

Остале корене наћи ћемо на овај начин

$$x = \sqrt[3]{\rho}\left[\sqrt[3]{e^{\theta i}} + \sqrt[3]{e^{-\theta i}}\right] = \sqrt[3]{\rho}\left[\sqrt[3]{e^{(2k\pi+\theta)i}} + \sqrt[3]{e^{-(2k\pi+\theta)i}}\right]$$

$$= \sqrt[3]{\rho}\left[e^{\frac{2k\pi+\theta}{3}i} + e^{-\frac{2k\pi-\theta}{3}i}\right] =$$

$$= \sqrt[3]{\rho}\, 2\cos\frac{2k\pi+\theta}{3}$$

И одатле

ако је $k=0$ онда је $x=\sqrt[3]{\rho}\,2\cos\frac{\theta}{3} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$

" " $k=1$ " " $x = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2\pi+\theta}{3}$

" " $k=2$ " " $x = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{4\pi+\theta}{3}$

" " $k=3$ " " $x = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{6\pi+\theta}{3} =$

$$= 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(2\pi+\frac{\theta}{3}\right) = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\theta}{3}$$

и т. д.

дакле имамо свега три разноврсна корена. Остали се поклапају.

Општа једначина четвртог степена је облика

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \qquad 1.$$

Деобом са a_0 можемо је свести на облик

$$x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4=0 \qquad 2.$$

Познато је из трансформација једначина, да ако се стави

$$x = y - \frac{b_1}{4} \qquad 3.$$

у новој једначини неће бити члана са y^3, те ће тако једначина прећи у

$$y^4+py^2+qy+r=0 \qquad 4.$$

где ће p, q и r бити извесне комбинације првобитних коефицијената a. Ако ставимо да је

$$y = u+v+w \qquad 5$$

квадрирањем ове једначине имаћемо

$$y^2 = u^2+v^2+w^2+2uv+2uw+2vw$$

или

$$y^2-(u^2+v^2+w^2) = 2(uv+uw+vw)$$

Ако квадрирамо и ову једначину можемо резултат написати у облику

$$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2+(u^2+v^2+w^2)^2 =$$
$$= 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+8uvw(u+v+w)$$

Ако ову једначину сведемо на нулу и извршимо у њој смену 5. имаћемо

$$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-8uvwy+\left[(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)\right]=0 \qquad 6.$$

где су u, v и w произвољне количине. Изаберимо их сад тако, да се једначина 6 подудари са једначином 4. т. ј. да им буду једнаки коефицијенти што ће бити ако учинимо да буде

$$\left.\begin{aligned} -2(u^2+v^2+w^2) &= p \\ -8\,uvw &= q \\ (u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2) &= r \end{aligned}\right\} \quad 7.$$

Ако смо у стању изабрати вредности u, v и w тако, да једначине 7. буду задовољене, па такве вредности, сменимо у 5., добијемо у задовољите једначину 4 а из тога би лако имали само x. Према томе задатак је сведен на то да се реши систем од три једначине 7 по трима непознатима u, v и w. Међутим једначине 7. можемо друкчије написати. Ако ставимо да је

$$u^2=\alpha_1 \quad v^2=\alpha_2 \quad w^2=\alpha_3 \qquad 8.$$

једначине 7. можемо написати у облику

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= -\frac{p}{2} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \frac{q^2}{64} \\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-4(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3) &= r \end{aligned}\right\}$$

а из тих једначина добијамо заменом прве вредности у трећој

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= -\frac{p}{2} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 &= \frac{p^2-4r}{16} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \frac{q^2}{64} \end{aligned}\right\} \quad 9.$$

Обрасци 9. показују како ћемо одредити α_1, α_2 и α_3 т. ј. α_1, α_2 и α_3 су корени једначине

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{p^2-4r}{16}t-\frac{q^2}{64}=0 \qquad 10.$$

по непознатој t. Према томе свели смо решавање једначине четвртог степена на решавање једначине трећег степена, што смо мало пре показали. Ако једначину 10. решимо по t, имаћемо сва три њена корена α_1, α_2 и α_3 који, кад заменимо у 8., имаћемо израчунато u, v и w, а ове кад сменимо у 5. добијамо y, чијом заменом у 3. добијамо на послетку x, чиме је дата једначина четвртог степена решена. Као што се види могуће је за x написати један општи образац, који ће важити за какви било коефицијента. Тај образац нашао је Tartaglia, али њега никаква интереса, док је с теориске стране врло важан, јер доказује, да је могуће решити ма какву општу једначину четвртог степена. И ове се једначине могу решавати тригонометријски.

За једначине вишег степена од четри потпуно је доказана немогућност њиховог алгебарског решења, подразумевајући под алгебарским решењем то, да се нађе образац, који би изражавао x помоћу оних писмена, што фигуришу као коефицијенти једначине. Ову је немогућност доказао шведски научник Abel у почетку XIX века.

Међутим има велики број једначина свију степена, којима је, ма да сви коефицијенти нису прецизирани, ипак могућно решење, као н. пр. што су биномне и реципрочне једначине.

<u>Биномне једначине</u>. То су једначине облика

$$x^n + a = 0 \tag{1.}$$

где је a ма какав реалан или имагинаран број. Ако се стави да је

$$x = t\sqrt[n]{-a} \tag{2.}$$

једначина 1. своди се на облик

$$t^n = 1 \tag{3}$$

а одатле је

$$t = 1$$

Али пошто је једначина 3. n-тог степена, то она мора да има n корена. Они се сви изналазе помоћу једног од основних образаца у математици, помоћу т. зв. Euler-овог обрасца. Основа теорије биномних једначина лежи у том Euler-овом обрасцу који је облика

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

у коме се изражава веза између експоненцијалних и трансцедентних функција. Ако у њему ставимо $x = 2k\pi$ где је k ма какав број, тај се образац претвара у

$$e^{2k\pi i} = 1$$

Према томе једначина 3. може се

написати у облику
$$t^n = e^{2k\pi i}$$
или
$$t = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad 4.$$
Што је образац који нам даје решење биномне једначине. У њему к може бити ма какав цео број и према томе изгледало би на први поглед да требало да имамо бесконачно много решења, од којих би свако одговарало једној вредности к. Ми ћемо показати да то није у ствари, већ да имамо свега n решења која су једно од другог различита, а да се сва остала решења поклапају са којим од ових n. Да би се о томе уверили стављајмо узастопце $k=1,2,3,\dots(n-1)$ па ћемо добити као низ решења што одговарају таквим вредностима

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= 1\\ t_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\\ t_2 &= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}\\ &\dots\dots\dots\\ t_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} \end{aligned}\right\} \qquad 5.$$

Ако би се броју к дала друга вредност различита од малопређашњих, лако се уверити, да би се одговарајућа вредност t поклопила са којом од пређашњих вредности. Тако н. пр. ако је $k=n$, имали би $t_n=1$, а та се вредност поклапа са првом од вредности 5. Тако исто ако ставимо $k=n+1$ добили би решење
$$t_{n+1} = \cos\frac{2(n+1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n+1)\pi}{n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$
а та се вредност поклапа са другом од вредности 5. Тако би се исто уверили редом и за све остале вредности за к па и ако узмемо за к и негативне вредности. Према томе низ 5. представља нам одиста она решења једначине на која се сва остала безбројна многа своде. Тако исто лако се уверити да су у низу 5. све вредности $t_0, t_1, t_2 \cdots t_{n-1}$ различите међу собом. Из свега се овог види да биномна једначина 3. има n корена један од другог различите и сви ти корени су представљени низом 5.

Ако се сад вратимо првобитној једначини

$$x^n + a = 0$$

пошто је

$$x = t\sqrt[n]{-a}$$

то да би добили све корене по x-у, треба нам t смењивати редом његовим вредностима 5. На тај начин корени по x биће

$$x_0 = t_0\sqrt[n]{-a} \quad x_1 = t_1\sqrt[n]{-a} \quad x_2 = t_2\sqrt[n]{-a} \cdots x_{n-1} = t_{n-1}\sqrt[n]{-a} \quad -6$$

Ако би се желели ослободити синуса и косинуса, онда треба у горњим обрасцима изразити синусе и косинусе непосредно у бројевима што ћемо учинити непосредно знајући синусе и косинусе за извесне углове или помоћу тригонометриских таблица.

Примери:

1. Решити једначину

$$x^5 = 32$$

Што је биномна једначина и зато ћемо извршити смену

$$x = y\sqrt[5]{32} = 2y$$

па добијамо

$$y^5 = 1 = e^{2k\pi i}$$

Одатле

$$y = e^{\frac{2k\pi i}{5}} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$$

Стављајући узастопце $k = 0, 1, 2, \dots$ добијамо

за $k=0$ $\quad y_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

" $k=1$ $\quad y_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} =$

" $k=2$ $\quad y_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} =$

" $k=3$ $\quad y_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} =$

" $k=4$ $\quad y_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} =$

Ако би давали још какву вредност за k, видели би да би се оне поклопиле са горњим вредностима y_n, зато су ово тражени корени. Саме пак корене даће једначине добили би помоћу горње смене, јер је иње

$$x = 2y$$

па су зато тражени корени

$x_0 = 2y_0 = 2$

$x_1 = 2y_1 =$

$x_2 = 2y_2 =$

$x_3 = 2y_3 =$

$x_4 = 2y_4 =$

2. Решити једначину

$$x^3 - 27 = 0$$

Ако ставимо
$$x = t\sqrt[3]{27} = 3t$$
добија се једначина
$$t^3 = 1 = e^{2k\pi i}$$
или одатле
$$t = e^{\frac{2k\pi}{3}i} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$
и стављајући узастопце $k=0,1$ и 2 добијамо корене нове једначине и то

за $k=0$ $\quad t_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

" $k=1$ $\quad t_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

" $k=2$ $\quad t_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

а према горњој смени сами тражени корени биће
$$x_0 = 3t_0 = 3$$
$$x_1 = 3t_1 = -\frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$$
$$x_2 = 3t_2 = -\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$$

3. Решити једначину
$$x^4 - 16 = 0$$
Извршићемо смену
$$x = t\sqrt[4]{16} = 2t$$
па добијамо нову једначину
$$t^4 = 1 = e^{2k\pi i}$$
одакле је
$$t = e^{\frac{2k\pi i}{4}} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$$

Стављајући узастопце $k=0,1,2$ и 3 добијамо

за $k=0$ $\quad t_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

" $k=1$ $\quad t_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

" $k=2$ $\quad t_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

" $k=3$ $\quad t_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

а према средњој смени сами тражени корени биће
$$x_0 = 2t_0 = 2 \quad x_1 = 2t_1 = 2i \quad x_2 = 2t_2 = -2 \quad x_3 = 2t_3 = -2i$$

Примедба: постоји велики број једначина које се каквом трансформацијом своде на биномне једначине. Такви су н. пр. ови примери:

1° Једначине облика
$$a_0x^{2m} + a_1x^m + a_2 = 0$$
јер ако се стави
$$x^m = z$$
добијамо једначину
$$a_0z^2 + a_1z + a_2 = 0$$
одакле ћемо лако наћи z. Нека су н. пр. z_1 и z_2 њена два корена; да би нашли x треба нам решити две биномне једначине
$$x^m = z_1 \quad \text{и} \quad x^m = z_2$$
које умемо решити

Примери

1. Решити једначину

$$x^6+7x^3-8=0$$

Ако извршимо смену

$$x^3=z$$

добијамо нову једначину

$$z^2+7z-8=0$$

одакле је

$$z_1=1 \qquad z_2=-8$$

те зато имамо да решимо ове две биномне једначине

$$x^3=1 \quad \text{и} \quad x^3=-8$$

Из прве од њих добијамо

$$x^3=1=e^{2k\pi i}$$

или одатле

$$x=e^{\frac{2k\pi i}{3}}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

а одатле

за $k=0 \qquad x_1=1$

" $k=1 \qquad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

" $k=2 \qquad x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

У другој од њих извршићемо смену

$$x=t\sqrt[3]{-8}=+2ti$$

па добијамо једначину

$$t^3=1=e^{2k\pi i}$$

или одатле

$$t=e^{\frac{2k\pi i}{3}}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

а одатле добијамо

за $k=0 \qquad t_0=1$

" $k=1 \qquad t_1=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

" $k=2 \qquad t_2=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

и према томе је

$$x_4=+2t_0 i=2i$$

$$x_5=2t_1 i=\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$$

$$x_6=2t_2 i=-\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})$$

Тако смо нашли свих шест корена x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 дате једначине

2. Решити једначину

$$x^8-15x^4-16=0$$

Ако извршимо смену

$$x^4=z$$

добијамо нову једначину

$$z^2-15z-16=0$$

Њени корени су

$$z_1=16 \qquad z_2=-1$$

и зато имамо да решимо ове две биномне једначине

$$x^4=-1 \quad \text{и} \quad x^4=16$$

Прву од њих можемо написати у облику

$$x^4 = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$$

а одатле је

$$x = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}$$

Отуда имамо

за $k=0$ $\quad x_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

" $k=1$ $\quad x_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

" $k=2$ $\quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$

" $k=3$ $\quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Ако у другој од горњих двеју биномних једначина извршимо смену

$$x = t\sqrt[4]{16} = 2t$$

добијамо једначину

$$t^4 = 1 = e^{2k\pi i}$$

а одатле

$$t = e^{\frac{k\pi i}{2}} = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}$$

па зато

за $k=0$ $\quad t_0 = 1$

" $k=1$ $\quad t_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

" $k=2$ $\quad t_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

" $k=3$ $\quad t_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

Отуда, према смени,

$$x_5 = 2t_0 = 2$$

$$x_6 = 2t_1 = 2i$$

$$x_7 = 2t_2 = -2$$

$$x_8 = 2t_3 = -2i$$

Тако смо нашли свих осам корена: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 и x_8 дате једначине.

2° Једначине облика

$$a_0x^{3m} + a_1x^{2m} + a_2x^m + a_3 = 0$$

јер ако се стави

$$x^m = z$$

добија се кубна једначина

$$a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$$

и ако су њена три корена z_1, z_2 и z_3, да би нашли x, треба решити три биномне једначине

$$x^m = z_1 \quad x^m = z_2 \quad x^m = z_3$$

Примери:

1. Решити једначину

$$x^9 + 6x^6 - 15x^3 + 8 = 0$$

Ако извршимо смену

$$x^3 = z$$

добијамо нову једначину трећег степена

$$z^3 + 6z^2 - 15z + 8 = 0$$

Њена три корена су

$$z_{1,2} = 1 \quad \text{и} \quad z_3 = -8$$

и зато имамо да решимо ове три биномне једначине

$$x^3=1 \qquad x^3=1 \qquad x^3=-8$$

Прву од њих можемо писати у облику

$$x^3=1=e^{2k\pi i}$$

а одатле

$$x=e^{\frac{2k\pi i}{3}}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

и зато

за $k=0$ $\quad x_1=1$

" $k=1$ $\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

" $k=2$ $\quad x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{3}=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

Како је друга једначина једнака са првом то су и њена три корена

$$x_4=1 \qquad x_5=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \qquad x_6=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

У трећој ћемо извршити смену

$$x=t\sqrt[3]{-8}=2ti$$

па добијамо једначину

$$t^3=1$$

чији су корени, према горњем

$$t_0=1 \qquad t_1=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \qquad t_2=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

па су зато остала три корена дате једначине

$$x_7=2t_0i=2i$$

$$x_8=2t_1i=-\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})$$

$$x_9=2t_2i=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$$

2. Решити једначину

$$x^9-34x^6+197x^3-216=0$$

Ако извршимо смену

$$x^3=z$$

добијамо нову једначину

$$z^3-34z^2+197z-216=0$$

Њена три корена су

$$z_1=-1 \qquad z_2=8 \qquad z_3=27$$

и зато имамо да решимо ове три биномне једначине

$$x^3=-1 \qquad x^3=8 \qquad x^3=27$$

Из прве је

$$x^3=-1=e^{(2k+1)\pi i}$$

а одатле

$$x=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3}}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$$

Отуда

за $k=0$ $\quad x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$

" $k=1$ $\quad x_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

" $k=2$ $\quad x_3=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

У другој од горњих биномних једначина извршићемо смену

$$x=t\sqrt[3]{8}=2t$$

па добијамо нову биномну једначину

$$t^3=1$$

чији су корени (према горњем)

$$t_0=1 \quad t_1=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \quad t_2=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

па су зато друга три корена дате једначине

$$x_4=2t_0=2$$
$$x_5=2t_1=-(1-i\sqrt{3})$$
$$x_6=2t_2=-(1+i\sqrt{3})$$

У трећој биномној једначини извршићемо смену

$$x=t\sqrt[3]{27}=3t$$

па добијамо опет једначину

$$t^3=1$$

чији су корени

$$t_0=1 \quad t_1=-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \quad t_2=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

тако да су остала три корена дате једначине

$$x_7=3t_0=3$$
$$x_8=3t_1=-\frac{3}{2}(1-i\sqrt{3})$$
$$x_9=3t_2=-\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$$

Тако смо нашли свих девет корена дате једначине.

3. Тако исто постоји велики број трансцедентних једначина које се своде на биномне. Н. пр. ако је дата једначина

$$a^{x^m}=b$$

логаритмовањем можемо ју претворити у биномну једначину

$$x^m=\frac{\log b+2k\pi}{\log a+2k\pi}$$

коју већ знамо решити.

Реципрочне једначине

Реципрочним једначинама називају се оне једначине које имају ту особину, да ако је α један њен корен у исто је време и $\frac{1}{\alpha}$ њен корен. Питање је сад како се на једној датој алгебарској једначини може распознати, да ли је она реципрочна или не. Тога ради ваља испитати да ли једначина има као корен +1 или −1. У случају ако их има, треба је деобом са кореним чиниоцем $(x-1)$ или $(x+1)$ ослободити таквих корена, тако да увек можемо претпоставити да задата једначина

$$f(x)=0$$

нема као корен ни +1 ни −1, или да их је бар ослобођена. Тада се мора претпоставити да једначина, ако је реципрочна, има ове особине:

1° Степен сваке такве једначине је паран број. То изађе непосредно отуда, што сваком корену α одговара корен $\frac{1}{\alpha}$, тако да корене све имамо по паровима и њихов је број дакле паран, па је дакле и степен једначине паран.

2° Све по два и два коефицијента једначине и то они, који су подједнако удаљени од средњег члана једначине, једнаки су међу собом и исто означени. О томе се уверавамо на овај начин: означимо са $2m$ степен такве једначине и нека је она

$$A_0x^{2m}+A_1x^{2m-1}+A_2x^{2m-2}+\dots+A_{2m-2}x^2+A_{2m-1}x+A_{2m}=0 \quad 1$$

Нека је α један њен корен, по дефиницији такве једначине мора и $\frac{1}{\alpha}$ бити њен корен па према томе имамо ове две једначине:

$$A_0\alpha^{2m}+A_1\alpha^{2m-1}+A_2\alpha^{2m-2}+\dots+A_{2m-2}\alpha^2+A_{2m-1}\alpha+A_{2m}=0 \quad 2$$

$$\frac{A_0}{\alpha^{2m}}+\frac{A_1}{\alpha^{2m-1}}+\frac{A_2}{\alpha^{2m-2}}+\dots+\frac{A_{2m-2}}{\alpha^2}+\frac{A_{2m-1}}{\alpha}+A_{2m}=0 \quad 3$$

Ако једначину 3 помножимо са α^{2m} она прелази у једначину

$$A_{2m}\alpha^{2m}+A_{2m-1}\alpha^{2m-1}+A_{2m-2}\alpha^{2m-2}+\dots+A_2\alpha^2+A_1\alpha+A_0=0 \quad 4.$$

Пошто једначине 2 и 4 морају вредети за све корене а то може само тако бити, ако су им коефицијенти истог степена од α међу собом пропорционални т.ј. ако постоји

$$\frac{A_0}{A_{2m}}=\frac{A_1}{A_{2m-1}}=\frac{A_2}{A_{2m-2}}=\dots=\lambda$$

а одатле добијамо

$$A_0=\lambda A_{2m} \quad A_1=\lambda A_{2m-1} \quad A_2=\lambda A_{2m-2} \dots A_{2m}=\lambda A_0 \quad 5$$

Међутим прва и последња једначина из 5. могуће су само тако, ако је

$$\lambda=1.$$

те се према томе добија

$$A_0=A_{2m} \quad A_1=A_{2m-1} \quad A_2=A_{2m-2} \dots$$

чиме је горња особина доказана.

3° Степен једне реципрочне једначине може се увек снизити за половину. Нека је дата једначина

$$A_0x^{2m}+A_1x^{2m-1}+A_2x^{2m-2}+\dots+A_{2m-2}x^2+A_{2m-1}x+A_{2m}=0$$

Водећи рачуна о томе да је, као што је раније казано

$$A_0=A_{2m} \quad A_1=A_{2m-1} \quad A_2=A_{2m-2}$$

можемо дату једначину написати у облику

$$A_0(x^{2m}+1)+A_1(x^{2m-1}+x)+A_2(x^{2m-2}+x^2)+\dots=0$$

Ако ову једначину поделимо са x^m добијамо

$$A_0\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+A_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+A_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\dots=0 \qquad 6$$

Уведимо сад уместо x нову променљиву t тако да је

$$t=x+\frac{1}{x} \qquad 7.$$

одакле квадрирањем добијамо

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2 \qquad 8.$$

а ако ову једначину помножимо са једначином 7. добијамо

$$x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t \qquad 9$$

Ако исти посао продужимо и даље, лако се уверавамо да се у опште израз $x^k+\frac{1}{x^k}$ може изразити као известан полином k-тог степена по променљивој t. Тако би дошли до обрасца

$$x^k+\frac{1}{x^k}=t^k-kt^{k-2}+\frac{k(k-3)}{1\cdot 2}t^{k-4}-\frac{k(k-4)(k-5)}{1\cdot 2\cdot 3}t^{k-6}+\dots \qquad 10.$$

(види II. пример у Уводу). Дајући у обрасцу 10 броју k поступно вредности: 1, 2, 3, … m и смењујући тако добијене изразе у 6. очевидно је, да се ова једначина претвара у извесну једначину m-тог степена по непознатој t, која ће, пошто у њој будемо груписали чланове по степенима непознате t добити облик

$$B_0t^m+B_1t^{m-1}+B_2t^{m-2}+\dots+B_{m-1}t+B_m=0 \qquad 11$$

На тај начин првобитна једначина која је била $2m$-тог степена сведена је на ту једначину која је m-тог степена. Претпоставимо да можемо решити ту једначину 11. и нека су $p_1\, p_2\, p_3 \dots p_m$ њени корени. Заменом тих корена у једначини

$$t=x+\frac{1}{x}$$

т.ј.

$$x^2-tx+1=0$$

добија се низ од m квадратних једначина по x,

$$\left.\begin{aligned} x^2-p_1x+1&=0\\ x^2-p_2x+1&=0\\ &\;\vdots\\ x^2-p_mx+1&=0 \end{aligned}\right\} \qquad 12.$$

Решењем сваке од ових једначина 12. по

x_4 добили би свих $2m$ корена првобитне једначине. Према томе решавање једне реципрочне једначине, пошто је ова ослобођена корена $+1$ и -1, своди се увек на решавање друге једне једначине, чији је степен два пут мањи, и једнога система квадратних једначина.

Примери:

1. Решити реципрочну једначину

$$x^4+5x^3-7x^2+5x+1=0$$

Једначину можемо написати у облику

$$(x^4+1)+5(x^3+x)-7x^2=0$$

или деобом са x^2

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$$

Ако сад извршимо смену

$$x+\frac{1}{x}=t$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

добијамо квадратну једначину

$$t^2+5t-9=0$$

Њена два корена су

$$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{61}}{2}$$

Из прве смене добијамо

$$x^2-xt+1=0$$

одакле је

$$x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

и према томе тражена четри корена дате једначине су

$$x_{1,2}=\frac{\frac{-5+\sqrt{61}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{61}}{2}\right)^2-4}}{2}$$

$$x_{3,4}=\frac{\frac{-5-\sqrt{61}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-5-\sqrt{61}}{2}\right)^2-4}}{2}$$

2. Решити реципрочну једначину

$$x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1=0$$

Чланове ове једначине можемо овако груписати

$$(x^6+1)+2(x^5+x)+3(x^4+x^2)+4x^3=0$$

или деобом са x^3

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

Ако извршимо смену

$$x+\frac{1}{x}=t$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$$

добијамо нову једначину по t

$$t^3+2t^2=0$$

или

$$t^2(t+2)=0$$

Њени корени су

$$t_{1,2}=0 \quad t_3=-2$$

Из њих имамо

$$x^2 - xt + 1 = 0$$

одакле је

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}$$

Заменом горњих вредности за t добијамо да су корени дате једначине

$$x_{1,2}=i \quad x_{3,4}=-i \quad x_{5,6}=-1$$

3. Испитати да ли је једначина

$$x^{2n} - n^2 x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n^2 x^{n-1} + 1 = 0$$

дељива са

$$(x-1)$$

[као и решити дату једначину]

Дата једначина је реципрочна. Да би она била дељива са $(x-1)$ значи да она треба да има $x=1$ као корен. И заиста ако у њу сменимо ту вредност $x=1$, видећемо да је она идентички њоме задовољена, што значи да дата једначина има $x=1$ као корен, а тиме смо у исто време доказали да је она дељива са $(x-1)$

4. Наћи остатак који се добија кад се израз

$$x^m \sin\varphi - r^{m-1} x \sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi$$

подели са

$$x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$$

Да испитамо прво да није тај остатак раван нули. Што би било само у том случају, ако би корени једначине

$$x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2 = 0$$

задовољавали идентички први израз уједначен са нулом. Ако решимо ову једначину, имаћемо

$$x = r\cos\varphi \pm \sqrt{r^2\cos^2\varphi - r^2} = r\cos\varphi \pm$$
$$\pm r\sqrt{\cos^2\varphi - 1} = r\cos\varphi \pm ir\sin\varphi =$$
$$= r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = re^{\pm\varphi i}$$

т.ј. њена два корена су

$$x_1 = re^{\varphi i} \quad x_2 = re^{-\varphi i}$$

и кад их заменимо у датом изразу добијамо

$$r^m e^{m\varphi i}\sin\varphi - r^m e^{\varphi i}\sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi$$
$$r^m e^{-m\varphi i}\sin\varphi - r^m e^{-\varphi i}\sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi$$

Међутим из ових израза видимо да ако је један од њих раван нули мора бити и други, зато ћемо ми испитати само један од њих и то први. Ми га можемо написати у облику

$$r^m[\sin q(\cos mq + i\sin mq) - \sin mq(\cos q + i\sin q) + \sin mq\cos q - \sin q\cos mq] =$$
$$= r^m[\sin q\cos mq + i\sin q\sin mq - \sin mq\cos q - i\sin mq\sin q + \sin mq\cos q - \sin q\cos mq] = 0$$
што значи да је заиста први дати израз дељив са другим и остатак да је раван нули.

Примедба: Често се дата каква једначина која није реципрочна може нарочитом згодном трансформацијом свести на другу која ће бити реципрочна. Тако н. пр. има једначина четвртог степена које се трансформацијом
$$x = \frac{y}{k}$$
где је k згодно изабрани број могу свести на реципрочне једначине. Потражимо какав однос треба да постоји између коефицијената опште једначине четвртог степена
$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$
па да се она може сменом
$$x = \frac{y}{k}$$
свести на реципрочну. Ако извршимо ову смену и помножимо добијену једначину са k^4 добијамо нову једначину
$$y^4 + a_1ky^3 + a_2k^2y^2 + a_3k^3y + a_4k^4 = 0$$
Да би ова једначина била реципрочна потребно је да буде
$$a_4k^4 = 1 \qquad a_3k^3 = a_1k \text{ или } a_3k^2 = a_1$$
Квадрирањем другог од ових израза и деобом са првим добијамо
$$\frac{a_4}{a_3^2} = \frac{1}{a_1^2}$$
или
$$a_4 = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2$$
и то је тражени услов. Кад буде он задовољен, увек је могуће наћи такав број k да кад се буде извршила смена
$$x = \frac{y}{k}$$
новодобијена једначина по y биће реципрочна. Вредност коју ваља дати броју k добијамо из горњих израза из којих је
$$k = \frac{1}{\sqrt[4]{a_4}}$$
Примери

1. Решити једначину
$$x^4 + 2x^3 + 48x^2 + 8x + 16 = 0$$
Коефицијенти ове једначине задовољавају први услов и зато је можемо претворити у реципрочну. Овди је

$$k = \frac{1}{2}$$

те ћемо извршити смену

$$x = 2y$$

па добијамо једначину

$$16y^4 + 16y^3 + 192y^2 + 16y + 16 = 0$$

или деобом са 16

$$y^4 + y^3 + 12y^2 + y + 1 = 0$$

Деобом са y^2 и груписањем чланова добијамо

$$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 12 = 0$$

или сменом

$$y + \frac{1}{y} = t$$
$$y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 - 2$$

добијамо

$$t^2 + t + 10 = 0$$

одакле је

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2}$$

А из смене је

$$y^2 - yt + 1 = 0$$

или одатле

$$y = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$$

па је зато

$$y_{1,2,3,4} = \frac{\frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2}\right)^2 - 4}}{2}$$

а потому прве смене изгато

$$x = 2y = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{2}\right)^2 - 4}$$

чиме смо нашли тражене корене.

2. У једначини

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + \lambda x + 16 = 0$$

одредити λ тако, да се она може сменом

$$x = \frac{y}{k}$$

свести на реципрочну. Да би то могло бити мора према предњем постојати однос

$$a_4 = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2$$

или овди

$$16 = \left(\frac{\lambda}{-3}\right)^2$$

одакле је

$$\lambda = \sqrt{7}$$

k пак равно је

$$k = \frac{1}{\sqrt[4]{a_4}} = \frac{1}{2}$$

3. Испитати какве услове треба да задовоље коефицијенти једначине

$$x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = 0$$

па да се она сменом

$$x = \frac{y}{k}$$

може свести на реципрочну. Ако извршимо

предњу смену и помножимо добијену једначину са k^6 добијамо једначину

$$y^6+a_1ky^5+a_2k^2y^4+a_3k^3y^3+a_4k^4y^2+a_5k^5y+a_6k^6=0$$

и да би она била реципрочна мора да постоје ови односи:

$$\left.\begin{aligned}1&=a_6k^6\\ a_1k&=a_5k^5\\ a_2k^2&=a_4k^4\end{aligned}\right\}\quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned}1&=a_6k^6\\ a_1&=a_5k^4\\ a_2&=a_4k^2\end{aligned}\right\}$$

Из првог од ова три односа добијамо вредност за k. Она је

$$k=\frac{1}{\sqrt[6]{a_6}}$$

Друга два можемо писати у облику

$$\left.\begin{aligned}k^4&=\frac{a_1}{a_5}\\ k^2&=\frac{a_2}{a_4}\end{aligned}\right\}\quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned}k^4&=a_1/a_5\\ k^4&=(a_2/a_4)^2\end{aligned}\right\}$$

одакле добијамо тражени услов. Он је

$$\frac{a_1}{a_5}=\left(\frac{a_2}{a_4}\right)^2$$

Бројне једначине

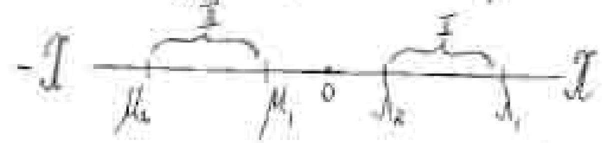
Увод. Казали смо да се под бројном једначином разуме једначина код које су сви коефицијенти прецизирани и изражени у бројевима. Решавање ових једначина разликује се од решавања општих једначина у овоме:

1° Док се код општих једначина тражи образац који би нам дао све корене као функције коефицијената дате опште једначине, дотле се код бројних једначина траже такви бројеви који кад сменимо у једначини ова бива идентички задовољена.

2° Казали смо за опште једначине да се, ако им степен прелази 4, не могу решити и да се могу решити само у извесним случајевима, а да им је у општем случају решење немогућно. Међутим те неточности потпуно нестаје код бројних једначина. Као што ћемо видети ма какав био степен дате бројне једначине, свака се таква једначина може увек решити.

Решавање бројних једначина своди се на мноштво разних операција које ћемо одмах видети. Прво се одређују границе између којих треба да леже позитивни и негативни корени једначине. Кад су оне нађене, испитује се, да ли између тих граница једначина има какав корен који ће бити цео број. Ако таквих корена има, онда се деобом са одговарајућим кореним чиниоцем једначина ослобођава таквих корена. Затим се тражи, да ли једначина у истим границама има корена који су рационални бројеви и ако их има, онда се нађу и једначина се опет деобом са одговарајућим кореним чиниоцем ослобођава таквих корена. Затим се приступа израчунавању ирационалних корена. На послетку кад се и они нађу, једначина се ослободи тих корена деобом са кореним чиниоцима и приступа се тражењу имагинарних корена. Ми ћемо овде прећи све те операције редом.

Одређивање граница корена. Замислимо бројну линију $(X,-X)$. Сви реални корени морају на њој лежати.



Наћи границе тих реалних корена значи одредити на тој бројној линији таква два размака I и II да сви позитивни корени леже у размаку I, а сви негативни у размаку II. Границе $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1$ и μ_2 таквих размака називају се тада границама корена и то λ_1 назива се горња граница позитивних а μ_1 горња граница негативних корена; λ_2 доња граница позитивних а μ_2 доња граница негативних корена.

Питање је сад како се одређују бројеви $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1$ и μ_2. Пре свега очевидно је, да што тај је број λ_1 ближи нули а број λ_2 даљи од нуле, да ће тим размак I бити све ужи, па дакле у толико и пробитачнији. Тако исто у колико тај је μ_1 даље од нуле а μ_2 ближе нули, у толико је размак II ужи па дакле и пробитачнији. А пошто ми имамо рачуна да те размаке што више сузимо, то ћемо посматрати ону методу одређивања граница, која нам даје бројеве λ_1 и μ_1, што је могуће мање, а λ_2 и μ_2 што је могуће веће. Таквих метода има разних, од којих ћемо неке навести.

Одређивање броја λ_1

1° Mac-Laurin-ова метода. Нека је дата једначина

$$f(x)=0$$

Очевидно је да ако смо успели наћи такав један позитиван број λ, да $f(x)$ буде непрестано позитивно за $x \geqq \lambda$ и да за такве вредности не може никада бити равно нули, што значи да горња једначина нема никакав корен већи од λ. Према томе такве вредности λ може се узети за број λ_1. Потражимо дакле такав један број λ. Напишимо горњу једначину у развијеном облику

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

претпоставивши да је коефицијенат од x^n сведен на јединицу. Пре свега очевидно је ако једначина нема негативних коефицијената, она не може имати ни један позитиван корен. У том случају размака I не би ни било. Претпоставимо да има негативних коефицијената и означимо са A_k апсолутну вредност оног негативног коефицијента, који по таквој вредности буде највећи. Тада је очевидно да ако у горњем полиному сменимо све коефицијенте сем првог тим негативним коефицијентом са x на каквим позитивним бројем, тако добијени резултат мора бити мањи него онај који се добија кад у првобитном полиному сменимо x истом позитивном вредношћу а коефицијенте оставимо онакве какви су другим речима увек ће бити за позитивну вредност x-а

$$f(x) > x^n - A_1(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) \qquad 1.$$

или

$$f(x) > x^n - A_1\frac{x^n-1}{x-1} \qquad 2.$$

Неједначина 2 важи за ма какво позитивно x. Претпоставимо да смо успели наћи такав један позитиван број $x=\lambda$ да буде

$$x^n - A_1\frac{x^n-1}{x-1} > 0 \quad \text{за } x \geqq \lambda \qquad 3.$$

Тада ће према неједначини 2. бити у толико пре

$$f(x) > 0 \quad \text{за } x \geqq \lambda$$

Према томе такав број λ могли би узети за број Λ_1. Остаје још дакле да се одреди λ тако да неједначина 3 буде задовољена. Ту неједначину можемо написати у облику

$$\frac{x^n}{x^n-1} > \frac{A_1}{x-1} \qquad 4.$$

Лако је уверити се да ће неједначина 4. бити задовољена ако је

$$x > 1+A_1 \qquad 5.$$

јер одатле добијамо

$$\frac{A_1}{x-1} < 1 \qquad 6.$$

а међутим кад је задовољена неједначина 5. биће очевидно

$$\frac{x^n}{x^n-1} > 1 \qquad 7.$$

Из неједначина 6 и 7 добија се непосредно неједначина 4. а та је неједначина задовољена за

$$x > 1+A_1$$

Према томе ће бити задовољена и неједначина 3. што значи да се за λ може узети сваки број већи од $1+A_1$ и да при бирању броја λ можемо узети ма који број који лежи између $+\infty$ и $1+A_1$. Према томе можемо узети и сам тај број и тада ће он играти улогу броја λ.

Отуда се добија ово Mac-Laurin-ово правило: треба написати једначину у таквом облику да је коефицијент од x^n сведен на јединицу, па ако се онда означи са A_1 апсолутна вредност највећег негативног коефицијента једначине, за број Λ_1 можемо узети вредност $1+A_1$.

2° Newton-ова метода. И у овој се методи полази од ове тачке, да ако смо успели наћи такав један број λ, да је $f(x) > 0$ за све вредности $x \geqq \lambda$, онда се λ може узети за λ_1. Развимо полином $f(x)$ у Taylor-ов ред уређен по степенима од $(x-\lambda)$ па ће бити

$$f(x) = B_0 + B_1(x-\lambda) + B_2(x-\lambda)^2 + \dots + B_n(x-\lambda)^n \qquad 1.$$

где је као што се зна

$$B_0 = f(\lambda) \quad B_1 = f'(\lambda) \quad B_2 = \frac{f''(\lambda)}{2!} \quad \dots \quad B_n = \frac{f^n(\lambda)}{n!} \qquad 2.$$

Претпоставимо да смо нашли такав један позитиван број λ да су функција $f(x)$ и сви њени узастопни изводи позитивни за $x \geqq \lambda$. Из образаца 2. очевидно је да ће тада и сви коефицијенти $B_0\, B_1\, B_2 \dots$ бити позитивни за такву вредност λ и пошто су сви степени разлике $(x-\lambda)$ тада такође позитивни, образац 1. показује да ће и $f(x)$ бити позитивно за $x \geqq \lambda$. Према томе тако одређен број λ игра улогу онога броја који смо и тражили.

Из тога се изводи ово упутство за тражење броја λ_1 које се назива Newton-овим правилом: Кад је дата једначина $f(x)=0$, треба образовати низ узастопних извода до n-ог закључно, где n означава степен једначине, наћи такав један позитиван број λ што је могуће мањи, за који ће полином $f(x)$ и сви његови изводи бити позитивни. Такав број λ биће тада тражени број λ. При тражењу броја λ најбоље је поступити овако: поћи од извода најнижег реда и тражити број α_1 такав да је тај извод позитиван за $x \geqq \alpha_1$; затим између бројева већих од α_1 одредити такав број α_2, да идући по реду извод буде позитиван за $x \geqq \alpha_2$; затим међу бројевима већим од α_2 наћи такав један број α_3 да идући по реду извод буде позитиван за $x \geqq \alpha_3$, и т. д. док се не дође до првобитне функције $f(x)$. Очевидно је да ће за последњи тако нађени број бити функција и сви њени узастопни изводи позитивни. Према томе такво α игра улогу броја λ па дакле и улогу траженог броја λ.

Одређивање броја λ_2.

Ако у датој једначини ставимо:

$$x = \frac{1}{y} \qquad 1$$

и ослободимо је именилаца, добија се нова једначина

$$\varphi(y)=0$$

која има ту особину, да најмањем позитивном корену првобитне једначине

$$f(x)=0 \qquad 2$$

одговара највећи позитивни корен једначине

$$\varphi(y)=0 \qquad 3$$

Према томе ако смо одредили λ_1 за једначину 3., вредност $\frac{1}{\lambda_1}$ представљаће број λ_2 за првобитну једначину 2., чиме је дакле посао сведен на први задатак.

Одређивање бројева μ_1 и μ_2

Ако се у датој једначини

$$f(x)=0 \qquad 1$$

стави

$$x=-z \qquad 2$$

добија се једначина

$$\psi(z)=0 \qquad 3$$

која има ту особину, да је њен најмањи позитиван корен у исто време највећи негативни корен првобитне једначине 1., и обрнуто, да је њен највећи позитиван корен у исто време најмањи негативан корен прве једначине. Према томе одредба бројева μ_1 и μ_2 у првобитној једначини сведена је на одредбу бројева λ_1 и λ_2 нове једначине 3., што се све, као што је показано своди на први задатак.

Примери.

1. Дата је једначина

$$x^3-3x^2-4x+12=0$$

одредити границе њених корена.

Апсолутна вредност највећег негативног коефицијента је 4 т.ј. овде је $A_1=4$. Зато је горња граница позитивних корена

$$\lambda_1=5$$

Ако извршимо у датој једначини смену $x=\frac{1}{y}$, добијамо нову једначину

$$\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{y^2}-4\frac{1}{y}+12=0$$

или

$$y^3-\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}=0$$

За њу је $\lambda_1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$ па је зато доња граница позитивних корена

$$\lambda_2 = \frac{3}{4}$$

Ако у датој једначини сменимо $x=-z$ добијамо нову једначину

$$-z^3-3z^2+4z+12=0$$

или

$$z^3+3z^2-4z-12=0$$

За њу је $\lambda_1=13$ па је зато доња граница негативних корена

$$\mu_2=-13$$

Ако у последњој једначини извршимо смену $z=\frac{1}{y}$, добијамо једначину

$$\frac{1}{y^3}+3\frac{1}{y^2}-4\frac{1}{y}-12=0$$

или

$$y^3+\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{4}y-\frac{1}{12}=0$$

За њу је $\lambda_1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ па је зато горња граница негативних корена

$$\mu_1=-\frac{4}{5}$$

2. Дата је једначина

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$$

Одредити границе њених корена.

Овди је $\lambda_1=7$ па је зато

$$\lambda_1=8$$

Кад извршимо смену $x=\frac{1}{y}$ добијамо једначину

$$y^4-\frac{1}{6}y^3-\frac{7}{6}y^2+\frac{1}{6}y+\frac{1}{6}=0$$

За њу је $\lambda_1=\frac{7}{6}$; зато је

$$\lambda_2=\frac{6}{13}$$

Сменом у датој једначини $x=-z$ добијамо једначину

$$z^4-z^3-7z^2+z+6=0$$

у којој је $\lambda_1=7$ па је зато

$$\mu_2=-8$$

Ако у последњој једначини извршимо смену $x=\frac{1}{y}$ добијамо

$$y^4-\frac{1}{6}y^3-\frac{7}{6}y^2+\frac{1}{6}y+\frac{1}{6}=0$$

у којој је $\lambda_1=\frac{7}{6}$ па је зато

$$\mu_1=-\frac{6}{7}$$

3. Одредити границе корена једначине

$$x^3-3x^2-14x+12=0$$

по Newton-овој методи.

Овди је

$$f(x)=x^3-3x^2-14x+12$$
$$f'(x)=3x^2-6x-14$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$f'''(x)$ је позитивно за ма какво x, $f''(x)$ н. пр. за $x=2$, $f'(x)$ н. пр. за $x=3$ а само

$f(x)$ за $x=6$ зато је

$$\lambda_1 = 6$$

Ако у датој једначини извршимо смену $x=\frac{1}{y}$, добијамо једначину

$$y^3-\frac{7}{6}y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}=0$$

и за њу је

$$\varphi(y)=y^3-\frac{7}{6}y^2-\frac{1}{4}y+\frac{1}{12}$$

$$\varphi'(y)=3y^2-\frac{7}{3}y-\frac{1}{4}$$

$$\varphi''(y)=6y-\frac{7}{3}$$

$$\varphi'''(y)=6$$

$\varphi'''(y)$ је позитивно само по себи, $\varphi''(y)$ је позитивно за $y=\frac{1}{3}$, $\varphi'(y)$ за $y=1$ а само $\varphi(y)$ за $y=\frac{5}{3}$, зато је

$$\lambda_2=\frac{3}{5}$$

Ако у датој једначини извршимо смену $x=-z$, добијамо једначину

$$z^3+3z^2-14z-12=0$$

и зато је

$$\psi(z)=z^3+3z^2-14z-12$$

$$\psi'(z)=3z^2+6z-14$$

$$\psi''(z)=6z+6$$

$$\psi'''(z)=6.$$

$\psi'''(z)$ је позитивно само по себи, $\psi''(z)$ за $z=0$; $\psi'(z)$ за $z=\frac{3}{2}$, а само $\psi(z)$ за $z=4$ зато је

$$\mu_2=-4$$

Ако у последњој једначини извршимо смену $z=\frac{1}{u}$, добијамо једначину

$$u^3+\frac{7}{6}u^2-\frac{1}{4}u-\frac{1}{12}=0$$

и како је

$$\varphi(u)=u^3+\frac{7}{6}u^2-\frac{1}{4}u-\frac{1}{12}$$

$$\varphi'(u)=3u^2+\frac{7}{3}u-\frac{1}{4}$$

$$\varphi''(u)=6u+\frac{7}{3}$$

$$\varphi'''(u)=6$$

$\varphi'''(u)$ је само по себи позитивно, $\varphi''(u)$ за $u=0$, $\varphi'(u)$ за $u=1$, $\varphi(u)$ за $u=2$, зато је

$$\mu_1=-1\frac{1}{2}$$

4. Наћи границе корена једначине

$$x^3+6x^2+5x-12=0$$

(по Newton-овој методи).

Овди је

$$f(x)=x^3+6x^2+5x-12$$

$$f'(x)=3x^2+12x+5$$

$$f''(x)=6x+12$$

$$f'''(x)=6$$

и $f'''(x)$ је по себи позитивно, $f''(x)$ и за $x=0$, $f'(x)$ опет за $x=0$, $f(x)$ за $x=\frac{3}{2}$, зато је

$$\lambda_1'=\frac{3}{2}$$

Ако у једначини извршимо смену $x=\frac{1}{y}$, добијамо нову једначину

$$y^3-\frac{5}{12}y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}=0$$

и како је

$$\varphi(y)=y^3-\frac{5}{12}y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{12}$$

$$\varphi'(y)=3y^2-\frac{5}{6}y-\frac{1}{2}$$

$$\varphi''(y)=6y-\frac{5}{6}$$

$$\varphi'''(y)=6$$

и $\varphi'''(y)$ је позитивно само по себи, $\varphi''(y)$ за $y=\frac{1}{4}$, $\varphi'(y)$ за $x=\frac{3}{4}$, $\varphi(y)$ за $x=1$, зато је

$$\lambda_2=1$$

Ако у датој једначини извршимо смену $x=-z$ добијамо једначину

$$z^3-6z^2+5z+12=0$$

и зато имамо

$$\psi(z)=z^3-6z^2+5z+12$$

$$\psi'(z)=3z^2-12z+5$$

$$\psi''(z)=6z-12$$

$$\psi'''(z)=6$$

$\psi'''(z)$ је позитивно само по себи, $\psi''(z)$ за $z=\frac{5}{2}$, $\psi'(z)$ за $z=4$, $\psi(z)$ за $z=9/2$ зато је

$$\mu_2=-\frac{9}{2}$$

Ако у последњој једначини извршимо смену $z=\frac{1}{y}$ добијамо једначину

$$y^3+\frac{5}{12}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{12}=0$$

и зато имамо

$$\varphi(y)=y^3+\frac{5}{12}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{12}$$

$$\varphi'(y)=3y^2+\frac{5}{6}y-\frac{1}{2}$$

$$\varphi''(y)=6y+\frac{5}{6}$$

$$\varphi'''(y)=6$$

$\varphi'''(y)$ је позитивно за ма какво y, $\varphi''(y)$ за $y=0$, $\varphi'(y)$ за $y=1$, $\varphi(y)$ за $y=2$, зато је

$$\mu_1=-\frac{1}{2}$$

Одређивање корена који су цели бројеви. Дешава се да једна дата једначина

$$f(x)=0$$

има за корен и какав цео број. Пошто се такви корени лакше налазе но други, то ваља прво покушати са њиховим тражењем. Овакво се тражење покушава само онда, кад су сви коефицијенти једначине цели бројеви а бива овако: кад би се полином једначине

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_1x^{n-2} + \cdots \qquad 1$$

поделимо кореним чиниоцем $(x-a)$, где је a такав један цео број т.ј. корен, добио би се као количник полином $(n-1)^{ог}$ степена

$$B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3} \qquad 2$$

где ће коефициенти $B_0, B_1, B_2 \cdots$ имати следеће вредности

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= A_0 \\ B_1 &= A_1 + aA_0 \\ B_2 &= A_2 + aA_1 + a^2A_0 \\ B_3 &= A_3 + aA_2 + a^2A_1 + a^3A_0 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad 3$$

тако да је у опште сваки коефицие-нат B известан полином по количи-нама a и A. Остатка при деоби неће бити, пошто је $(x-a)$ корени чиниоц. Из израза 3. види се у исто време то, да су сви коефициенти B цели бројеви, из чега се долази до овог првог правила или резултата:

кад год је a какав цео корен једначине $f(x)=0$ израз

$$\frac{f(x)}{x-a} \qquad 4$$

биће известан полином $P(x)$ чији су кое-фициенти цели бројеви.

Претпоставимо да се у изразу 4. смени x са ма каквим целим бројем. Очевидно је да ће полином $P(x)$ пошто су му сви коефициенти цели бројеви постати и сам известан цео број, из чега се добија овај други резултат:

ако је $x=a$ какав цео корен једначине $f(x)=0$, онда ако у изразу 4. сменимо x ма каквим целим бројем, добиће се као резултат опет цео број.

Из овога последњег резултата могу се извести разноврсна правила за тражење оних корена који су цели бројеви. Тако ако се у изразу 4. смени $x=0$ добија се као резултат $\frac{A_n}{-a}$. Пошто тај резултат мора бити цео број, то значи да A_n мора бити дељиво са a. Из тога се изводи овај резултат:

ако једначина $f(x)=0$ у опште има целих корена, те корене треба тражити међу оним целим бројевима са којима је дељив последњи коефицијенат једначине.

У том резултату садржи се практично правило за одређивање целих корена а састоји се у овоме: треба потражити све бројеве са којима је дељив последњи коефицијенат једначине, подразумевајући међу тим бројевима и број 1; узети сваки такав број једанпут са знаком +, једанпут са знаком − и пробати да ли ће задовољити једначину. За оне од таквих бројева који буду задовољили једначину знаћемо да су то њени цели корени и да других целих корена нема осим њих.

При тим пробама треба употребљавати све могуће олакшице, које даје теорија алгебарских једначина као н. пр. ове:

1° Ако смо унапред одредили границе корена, онда треба пробати само оне чиниоце коефицијента A_n, који се налазе у тим границама.

2° Ако се има података о броју позитивних или негативних корена, треба се и њима користити. Тако н. пр. ако су сви коефицијенти једначине позитивни, очевидно је да не може бити позитивних корена и према томе треба пробати чиниоце коефицијента A_n узети само са знаком −.

Примери:

1. Одредити целе корене једначине

$$x^3-3x^2-4x+12=0$$

Овди је $A_n=12$ а његови чиниоци су: 1, 2, 3, 4, 6, и 12. Пошто су границе корена (види пример 1. у „одређивању граница корена"): $5 \ldots \frac{3}{4}$ и $-13 \ldots -\frac{4}{5}$, то имамо да вршимо пробање са чиниоцима: 1, 2, 3, 4, −1, −2, −3, −4, −6 и −12. Тим пробање налазимо да су тражени корени: 2, −2 и 3.

2. Одредити целе корене једначине

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$$

Овди је $A_n=6$ а његови чиниоци су: 1, 2, 3 и 6. Пошто су границе корена (в. пр. 2. у „одр. гр. к."): $8 \ldots 6/7$ и $-8 \ldots -6/7$ то имамо да вршимо пробање са свима чиниоцима узетим прво са знаком + а после са знаком −. Тим пробањем налазимо да су тражени корени: 1, −1, 2 и −3.

3. Одредити целе корене једначине

$$x^3-3x^2-14x+12=0$$

Овди је $A_n=12$ а његови чиниоци су: 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Пошто су границе корена (в. пр. 3. у „одр. гр. кор.“): $6 \cdots \frac{3}{5}$ и $-4 \cdots -\frac{1}{2}$, то имамо да вршимо пробу са чиниоцима: 1, 2, 3, 4 и 6, и -1, -2, -3 и -4. Том пробом налазимо да дата једначина има само један корен који је цео број и то -3.

4. Одредити целе корене једначине

$$x^3+6x^2+5x-12=0$$

Овди је $A_n=12$ а његови чиниоци су: 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Како су границе корена (в. пр. 4. у „одр. гр. кор.“): $\frac{3}{2} \cdots 1$ и $-\frac{9}{2} \cdots -\frac{1}{2}$, то имамо пробу да вршимо само са чиниоцима: 1, -1, -2, -3 и -4. Том пробом налазимо да су тражени корени: 1, -3 и -4.

Одређивање корена који су рационални бројеви. Дешава се да једначина има као корен какав број $\frac{p}{q}$, где су p и q цели бројеви недељиви један с другим. Пошто су такви корени најпростији после целих корена то се треба прво покушати са њиховим одређивањем. И то се ради само онда, кад су сви коефицијенти једначине цели бројеви. Та је одредба основана на овим резултатима: ако је дата једначина

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n=0$$

ако у њој учинимо смену

$$x=\frac{p}{q}$$

па тако добијени резултат помножимо са q^{n-1}, једначина се може написати у облику

$$\frac{A_0p^n}{q}=-A_1p^{n-1}-A_2qp^{n-2}-A_3q^2p^{n-3}-\cdots$$

Пошто је p цео број, а тако исто су и сви коефицијенти A цели бројеви, то је дакле цела десна страна овог израза цео број. И пошто p^n није дељиво са q, то последњи резултат показује да $\frac{A_0}{q}$ мора бити цео број. Према томе ако у првобитној једначини извршимо смену

$$x=\frac{y}{A_0}$$

тако да се добије једначина

$$\varphi(y)=0$$

корени ће те једначине имати за вредност

$$y=xA_0$$

тако да корену

$$x=\frac{p}{q}$$

првобитне једначине одговара корен

$$y=\frac{pA_0}{q}$$

друге једначине. Почито су p и $\frac{A_0}{q}$ цели бројеви то и y мора бити цео број. Према томе тражење рационалних корена првобитне једначине

$$f(x)=0$$

сведено је на тражење целих корена једначине

$$\varphi(y)=0$$

т.ј. на малопређашњи задатак.

Из тога добијамо ово упутство за тражење рационалних корена: треба у једначини

$$f(x)=0$$

сменити

$$x=\frac{y}{A_0}$$

и тражити целе корене нове једначине

$$\varphi(y)=0$$

Ако су

$$m_1\ m_2\ m_3\ \dots$$

тако добијени цели корени, одговарајући рационални корени првобитне једначине биће

$$\frac{m_1}{A_0},\ \frac{m_2}{A_0},\ \frac{m_3}{A_0},\ \dots$$

Примедба: кад год је коефицијенат $A_0=1$ а остали коефицијенти цели бројеви, сваки рационалан корен у исто је време и цео број. То излази непосредно отуда, што горњи низ рационалних бројева прелази за $A_0=1$ у низ целих бројева.

Примери:

1. Наћи рационалне корене једначине

$$48x^3+20x^2-16x-3=0$$

Ако у датој једначини извршимо смену

$$x=\frac{y}{48}$$

добијамо нову једначину

$$\frac{y^3}{48^2}+20\frac{y^2}{48^2}-16\frac{y}{48}-3=0$$

или

$$y^3+20y^2-768y-6852=0$$

Њени корени су

$$24,\ -36,\ -8$$

и зато су тражени рационални корени

$$\frac{24}{48},\ -\frac{36}{48},\ -\frac{8}{48}$$

или

$$\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{1}{6}$$

2. Наћи рационалне корене једначине

$$12x^3+8x^2-13x+3=0$$

Ако извршимо смену

$$x=\frac{y}{12}$$

добијамо једначину

$$\frac{y^3}{12^2}+8\,\frac{y^2}{12^2}-13\,\frac{y}{12}+3=0$$

или

$$y^3+8y^2-156y+432=0$$

Њени корени су

$$6,\ -18,\ 4$$

зато су тражени рационални корени

$$\frac{6}{12},\ -\frac{18}{12},\ \frac{4}{12}$$

или

$$\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}$$

3. Наћи рационалне корене једначине

$$90x^3-19x+9=0$$

Ако извршимо смену

$$x=\frac{y}{90}$$

добијамо једначину

$$\frac{y^3}{90^2}-19\frac{y^2}{90}+9=0.$$

или

$$y^3-1710y^2+72900=0$$

Њени корени су

$$+30,\ +81,\ -30$$

зато су тражени рационални корени

$$\frac{30}{90},\ \frac{81}{90},\ -\frac{30}{90}$$

или

$$\frac{1}{3},\ \frac{9}{10},\ -\frac{1}{3}$$

Тражење ирационалних корена. Претпоставимо да смо за једну дату једначину нашли да ли има целих и рационалних корена и у случају ако их има, да смо их одредили и деобом са одговарајућим кореним чиниоцем ослободили се таквих корена. Тада реални корени који су још остали у траженој једначини могу бити још само ирационални. При одређивању таквих ирационалних корена иде се поступно т.ј. извршује се један низ операција, који се састоји у овоме: прво се треба приближно оријентисати о броју таквих корена, или о броју позитивних и негативних таквих корена, или о броју таквих корена што леже између два дата броја a и b; затим настаје раздвајање корена, где се под раздвајањем разуме овај посао: тражи се за сваки такав корен два броја a и b таква, да смо сигурни да између a и b лежи један и то само један корен једначине; на последку после свега тога приступа се приближном израчунавању сваког од тако раздвојених корена, што бива постепеним сужавањем граница између којих смо нашли да се он налази. Ми ћемо прећи редом све те операције.

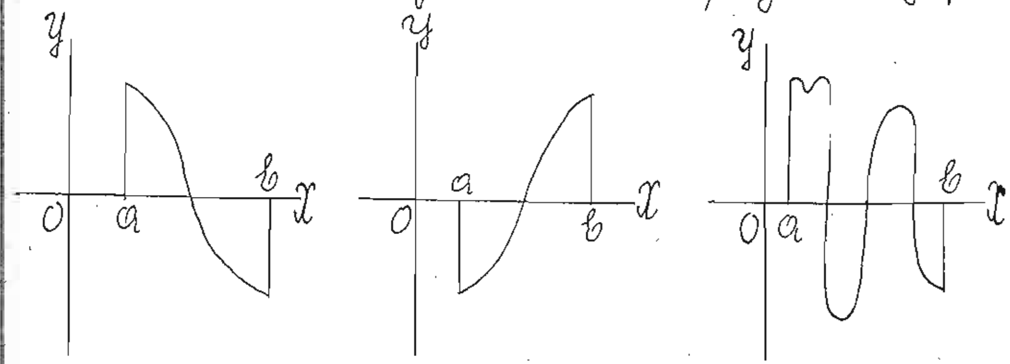
I. Приближно оријентисање о коренима и њихово раздвајање.

Постоји велики број правила више или мање практичних, која служе за тај посао и од којих је неко сигурније неко несигурније. Најпростија и у исто време најнесигурнија од тих правила била би ова два:

Прво правило: Ако се у полиному $f(x)$ једначине

$$f(x)=0$$

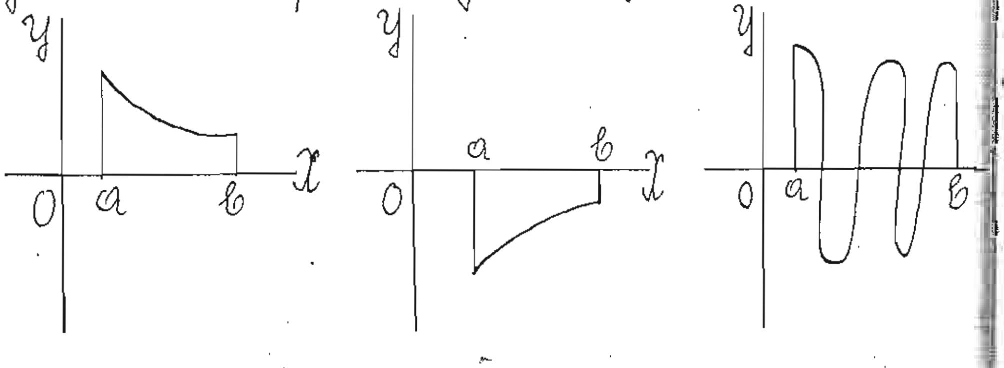
смени x најпре једним датим бројем $x=a$ затим другим једним датим бројем $x=b$, па ако су добијени резултати $f(a)$ и $f(b)$ супротни знаком, онда се између a и b мора налазити бар један корен једначине а ако их има више, мора их бити у непарном броју. Правило је очевидно ако се примети, да пошто, кад x варира од a до b, $f(a)$ и $f(b)$ су супротних знакова, па да би функција за то време променила знак, она мора између тих граница бар једанпут проћи кроз нулу или ако пропази више пута, мора проћи непаран број пута. Правило је тако исто очевидно и геометријски: јер



ако замислимо конструисану криву

линију
$$y = f(x)$$
корени једначине
$$f(x) = 0$$
нису ништа друго до апсцисе тачака у којима крива линија сече X-ску осовину. Исто је тако очевидно да ће крајње ординате бити само онда супротно означене, ако крива линија сече X-ску осовину бар једанпут или ако више пута, онда непаран број пута.

Друго правило: Ако се у полином $f(x)$ смени најпре $x=a$ па затим $x=b$ и ако су добијени резултати $f(a)$ и $f(b)$ истих знакова, онда се између a и b или не налази ни један корен једначине или ако у опште има таквих корена, број је њихов паран. Доказ је исти као и



за прво правило.

У примени ових правила при приближном оријентисању о коренима ради се овако: претпоставимо да смо претходно одредили границе $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2$ позитивних и негативних корена; затим се узме н. пр. размак $\lambda_1 \lambda_2$ и нека су m_1, m_2, m_3, ... разни узастопни цели бројеви који се у том размаку налазе. Помоћу њих образује се двоструки низ

$$\begin{array}{ccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ f(m_1) & f(m_2) & f(m_3) & f(m_4) & \dots \end{array} \qquad 1.$$

и испод сваког члана доњег реда испише се његов знак. Где год у томе низу буде промене знака, ту између одговарајућих бројева m горњег реда имамо насигурно бар један корен једначине.

Правило је као што се види врло просто али врло несигурно, јер нас у најбољем случају може довести само до тог закључка, да између два броја m мора лежати бар један корен једначине али не казује ништа о томе, да ли има више таквих корена као и то, да ли у опште има корена између ових бројева m, код којих нема промене знака. Међутим поред све те несигурности и неодређености правило ипак у многим случајевима има стварну улогу, јер доводи до корисних података о коренима. Шта више има специјалних случајева, кад се помоћу овог простог правила корени могу брзо и потпуно пораздвајати. Тако н. пр. ако би се десило да у доњем низу буде случајно онолико промена знака, колики је степен једначине, онда можемо бити сигурни, да између свака два узастопна броја горњег низа лежи по један и и то само један корен дате једначине, јер кад би их било више, њихов би број био већи од степена једначине, што би било немогуће. У таквим специјалним случајевима сви би корени били пораздвајани.

Примедба: при смењивању бројева а и в у полиному $f(x)$ једначине треба имати на уму, ради олакшице смене, да кад су то врло велики бројеви, резултат смене имаће увек онакав знак, какав буде има члан са x-ом на највишем степену. Према томе кад су а и в врло велики бројеви, довољно је сменити их само у том члану једначине.

Примери:

1. Пораздвајати корене једначине

$$x^3-7x^2+6x+14=0$$

Одредићемо прво границе корена. Пошто је овди $A_k=7$ то је

$$\Lambda_1=8$$

Сменом у једначини $x=\frac{1}{y}$ добијамо једначину

$$y^3+\frac{3}{7}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{14}=0$$

У њој је $A_k=\frac{1}{2}$ па је зато

$$\lambda_2=\frac{2}{3}$$

Ако у датој једначини извршимо смену $x=-z$ добијамо једначину

$$z^3+7z^2+6z-14=0$$

у којој је $A_k=14$ па је зато

$$\mu_2=-15$$

Сменом у последњој једначини $z=\frac{1}{u}$ добијамо једначину

$$u^3 - \frac{3}{7}u^2 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{14} = 0$$

у којој је $A_k = \frac{1}{2}$ па је зато

$$\mu_1 = -\frac{2}{3}$$

Кад смо тако одредили границе корена добијамо ова два низа

-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0

1	2	3	4	5	6	7
+	+	+	-	-	+	+

5,4142
2,5858

Помоћу предња два правила нашли смо дакле, да је један корен дате једначине $x=-1$, други да се налази између 3 и 4, а трећи између 5 и 6.

2. Наћи границе за сваки корен једначине

$$x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 44x - 28 = 0$$

0,73205
-2,73205

Опет ћемо одредити прво границе позитивних и негативних корена. Пошто је у датој једначини $A_k = 28$ то је

$$\lambda_1 = 29$$

Ако у једначини сменимо $x = \frac{1}{y}$ добијамо једначину

$$y^4 - \frac{11}{7}y^3 + \frac{1}{7}y^2 + \frac{3}{14}y - \frac{1}{28} = 0$$

у којој је $A_k = \frac{11}{7}$ па је зато

$$\lambda_2 = \frac{7}{18}$$

Ако у датој једначини сменимо $x = -z$ добијамо једначину

$$z^4 + 6z^3 - 4z^2 - 44z - 28 = 0$$

за коју је $A_k = 44$ па је зато

$$\mu_2 = -45$$

На послетку ако у последњој једначини сменимо $z = \frac{1}{u}$ добијамо једначину

$$u^4 + \frac{11}{7}u^3 + \frac{1}{7}u^2 - \frac{3}{14}u - \frac{1}{28} = 0$$

у којој је $A_k = \frac{3}{14}$ па је зато

$$\mu_1 = -\frac{14}{17}$$

Према томе имаћемо ова два низа:

-45	-44	…	-5	-4	-3	-2	-1
+	+	…	+	+	+	-	-

$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	…	29
-	+	+	-	-	-	+	+	+	…	+

Дакле дата једначина има један негативан корен који се налази између -3 и -2, и три позитивна корена од којих се први налази између $\frac{1}{2}$ и 1, други између 2 и 3, а трећи између 5 и 6.

3. Пораздвајати корене једначине

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

Пре свега пошто су сви знаци у једначини позитивни значи да нема ни једног позитивног корена. Зато имамо да одредимо само границе негативних корена. Ако у датој једначини сменимо $x=-z$ добијамо једначину

$$z^3-3z^2+4z-1=0$$

и како је у њој $A_k=3$ то је

$$\mu_2=-4$$

Ако у последњој једначини извршимо смену $z=\frac{1}{u}$, добијамо једначину

$$u^3-4u^2+3u-1=0$$

у којој је $A_k=4$ па је зато

$$\mu_1=-\frac{1}{5}$$

Отуда имамо ова два низа

$$\begin{array}{cccccc} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & -3 \\ + & - & - & - & - & - \end{array}$$

и према томе могућа су ова два случаја: или се сва три корена налазе између $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{3}$; или се између $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{3}$ налази само један корен а два се налазе између нека два броја у првом реду горњег низа.

4. Пораздвајати корене једначине

$$x^5-x^4+2x^3-7x^2-x-1=0$$

Одредићемо прво границе корена. Пошто је овди $A_4=7$ то је

$$\lambda_1=8$$

Кад у једначини извршимо смену $x=\frac{1}{y}$ добијамо једначину

$$y^5+y^4+7y^3-2y^2+y-1=0$$

у којој је $A_k=2$ па је

$$\lambda_2=\frac{1}{3}$$

Ако у датој једначини извршимо смену $x=-z$ добијамо једначину

$$z^5+z^4+2z^3+7z^2-z+1=0$$

у којој је $A_k=1$ па је зато

$$\mu_2=-2$$

Ако у последњој једначини извршимо смену $z=\frac{1}{u}$ добијамо једначину

$$u^5-u^4+7u^3+2u^2+u+1=0$$

у којој је $A_k=1$ па је зато

$$\mu_1=-\frac{1}{2}$$

Отуда имамо ова два низа

$$\begin{array}{cccccccccccc} -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ - & - & - & - & - & - & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

одакле се види да се или свих пет корена налазе између 1 и 2, или да се између 1 и 2 налазе 3 (или 1) корена, а остала 2 (или 4) на другом неком месту, које нисмо могли одредити, као што се види, помоћу овог правила.

<u>Rolle-ова теорема.</u> Ова теорема доводи наступно до раздвајања корена, кадгод је могућно решити изводну једначину дате једначине.

<u>Прва Rolle-ова теорема.</u> Између два узастопна корена дате једначине

$$f(x)=0$$

мора се увек налазити бар један корен изводне једначине

$$f'(x)=0$$

а ако их има више, број њихов увек је непаран.

Да би теорему доказали, нека је $x=a$ један корен дате једначине

$$f(x)=0$$

и нека је то корен p-тог реда. Тада ће бити

$$f(x)=(x-a)^p\varphi(x) \qquad 1.$$

где је $\varphi(x)$ извесан полином по x, који не постаје раван нули за $x=a$. Узимајући извод обе стране једначине 1. добија се

$$f'(x)=(x-a)^p\varphi'(x)+p(x-a)^{p-1}\varphi(x) \qquad 2.$$

Ако једначину 2. поделимо једначином 1. добићемо

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\frac{p}{x-a} \qquad 3.$$

Пустимо да се x постепено мења, почевши од једне вредности $a-\varepsilon$ мало мање но што је a, до друге вредности $a+\varepsilon$ мало веће но што је a и посматрајмо како ће се том приликом мењати знак израза

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad 4.$$

Пре свега за саму вредност $x=a$ према обрасцу 3. израз 4. постаје бескрајан. За вредност $x=a-\varepsilon$ врло блиску вредности a, а према обрасцу 3. израз 4. ће имати исти знак који има количник

$$\frac{p}{x-a}$$

пошто тај количник има врло велику вредност за вредност x у близини тачке a. Међутим то није случај са изразом

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

јер $\varphi(x)$ не постаје равно нули за $x=a$. Да би дакле нашли знак израза 4. за $x=a-\varepsilon$ довољно је наћи знак израза

$$\frac{p}{x-a}$$

за $x=a-\varepsilon$. Овај последњи израз за $x=a-\varepsilon$ своди се на

$$\frac{p}{a-\varepsilon-a}=\frac{p}{-\varepsilon}=-\frac{p}{\varepsilon}$$

па пошто су p и ε позитивни бројеви, то ће тај израз бити негативан. Дакле за $x=a-\varepsilon$ израз 4. увек је негативан.

Потражимо знак тога израза за $x=a+\varepsilon$. Из истог разлога као и мало час, знак тога израза биће онај исти, који буде имао израз

$$\frac{p}{x-a}$$

а тај пак израз за $x=a+\varepsilon$ постаје

$$\frac{p}{a+\varepsilon-a}=\frac{p}{\varepsilon}$$

па дакле је позитиван те је и знак израза 4. позитиван.

Израз 4. је логаритамски извод функције $f(x)$ и према томе добијамо ово прво правило, које је основа Rolle-овој теореми:

Ако је $x=a$ један корен једначине

$$f(x)=0$$

онда је увек за вредност $x=a-\varepsilon$ мало мању од a логаритамски извод негативан, а за вредност $x=a+\varepsilon$ мало већу од a, логаритамски извод је позитиван.

Употребимо то правило за доказ Rolle-овој теореми. Нека су a и b два узастопна корена једначине

$$f(x)=0$$

тако да између a и b не постоји никакав други корен. Обележимо на бројној линији знаке које ће добити логаритамски извод

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

за време док x буде постепено расло од $x=a-\varepsilon$ до $x=b+\varepsilon$. Према горњем правилу ти ће знаци бити они који смо назначили на слици. Из те се слике види да ако се пусти да x варира од $x=a+\varepsilon$ до $x=b-\varepsilon$ израз 4. прелази од знака $+$ на знак $-$. Пошто између a и b нема никакве вредности која поништава $f(x)$, то дакле при том прелазу не може мењати знак $f(x)$ и да би израз 4. променио знак, мора $f'(x)$ променити знак у том размаку, а то може бити само тако, ако једначина

$$f'(x)=0$$

има бар један корен у том размаку, или, ако их има више, онда у непарном броју. Тиме је доказана прва Rolle-ова теорема.

Друга Rolle-ова теорема. Између два узастопна корена изводне једначине

$$f'(x)=0$$

налази се или ни један или само један корен једначине

$$f(x)=0$$

Ова је теорема непосредна последица прве, јер ако су $x=\alpha$ и $x=\beta$ два узастопна корена једначине

$$f'(x)=0$$

и ако се стави да се између њих налазе два корена $x=a$ и $x=b$ једначине

$$f(x)=0$$

онда би се према првој Rolle-овој теореми морао налазити бар један корен изводне једначине а то је супротно претпоставци, јер смо ми претпоставили да су α и β два узастопна корена те једначине. Тиме је доказана и друга Rolle-ова теорема.*)

Начин на који се Rolle-ова теорема примењује на раздвајање корена састоји се у овоме: нека је дата једначина

$$f(x)=0$$

образујмо њену изводну једначину

$$f'(x)=0$$

и претпоставимо да се она може решити и нека су

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \ldots$$

њени узастопни реални корени. Помоћу тих корена и помоћу вредности $-\infty$ и $+\infty$ образујмо двоструки низ

$-\infty$	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	$+\infty$	1.
$f(-\infty)$	$f(b_1)$	$f(b_2)$	$f(b_3)$	$\ldots$	$f(+\infty)$	2.
$-$	$-$				$+$	3.

где у низу 2. треба сменити поједине чланове резултатима који се добијају кад се у функцији $f(x)$ смени x одговарајућим чланом низа 1. Испод сваког члана

*) Геометријски докази Rolle-ових теорема налазе се у Теорији Извода.

низа 2. треба потписати његов знак тако да се н. пр. добије низ 3. тада ћемо имати следеће:

1° између свака два узастопна броја низа 1. код којих нема промене знака једначина

$$f(x)=0$$

нема ни један корен.

2° између свака два узастопна броја низа 1. код којих имамо промену знака постоји насигурно један и то само један корен горње једначине.

На тај начин корени су потпуно пораздвајани а у исти мах је одређен и њихов број а тако исто и границе између којих се сваки од њих налази. То је у исти мах и практично правило које се употребљује при раздвајању корена применом Rolle-ове теореме. Тачност је овог правила очевидна као последица горњих Rolle-ових теорема. У практичној примени правила ваља имати на уму да у низ 1. улазе само реални корени изводне једначине, а да се о имагинарним коренима не води рачуна, као и то, да у том низу све вредности морају бити уређене по реду своје величине. Горњи низови 1. 2. и 3. називају се Rolle-овим низовима.

Примедба: Rolle-ова теорема може се увек са сигурношћу и са великом лакоћом применити кад год је могуће решити изводну једначину. Ми ћемо навести неколико општих типова алгебарских једначина, код којих је такво решење па дакле и примена могућна.

1° Примена на општу једначину трећег степена. Нека је дата једначина

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \qquad 1.$$

Изводна једначина је

$$3x^2+2a_1x+a_2=0 \qquad 2.$$

Што је квадратна једначина и може се увек решити. Разликоваћемо ова три случаја:

1. ако су оба корена те једначине има-

гинарна о њима се не води рачуна и према томе Rolle-ови низови биће:

$$\begin{array}{cc} -\infty & +\infty \\ f(-\infty) & f(+\infty) \\ - & + \end{array}$$

Према томе дата једначина има свега један реалан корен а два уображена. Ако би хтели да видимо да ли је тај реалан корен позитиван или негативан, треба у Rolle-овом низу уметнути још и нулу и

$$\begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ f(-\infty) & f(0) & f(+\infty) \\ - & a & + \end{array}$$

ако је a позитивно корен је негативан, и обрнуто ако је a негативно корен је позитиван.

2. Ако су корени једначине 2. α_1 и α_2 реални и неједнаки, у том случају Rolle-ови низови биће

$$\begin{array}{cccc} -\infty & \alpha_1 & \alpha_2 & +\infty \\ f(-\infty) & f(\alpha_1) & f(\alpha_2) & f(+\infty) \\ - & & & + \end{array}$$

и према томе знаци од $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$ решиће задатак.

3. Ако су оба корена једначине 2. реална и једнака и равна α, Rolle-ови низови биће

$$\begin{array}{ccc} -\infty & \alpha & +\infty \\ f(-\infty) & f(\alpha) & f(+\infty) \\ - & & + \end{array}$$

и према томе задатак ће бити решен знаком од $f(\alpha)$.

Дакле као што се види Rolle-ова теорема увек се може применити на ма какву једначину трећег степена.

2° Примена на општу једначину четвртог степена. Нека је дата једначина

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \qquad 1.$$

Раније у трансформацијама једначина показано је да ако се изврши смена

$$x=y-\frac{a_1}{4}$$

добија се нова једначина по y у којој неће фигурисати члан са трећим степеном. Нова једначина у том случају била би облика

$$y^4+py^2+qy+r=0 \qquad 2.$$

Ако у овој извршимо смену

$$y=\frac{1}{t}$$

па се ослободимо именитеља t, једна-чија постаје

$$rt^4+qt^3+pt^2+1=0 \qquad 3.$$

Изводна једначина једначине 3. биће

$$4rt^3+3qt^2+2pt=0$$

или

$$t(4rt^2+3qt+2p)=0$$

а та једначина има као корене: 0, α_1 и α_2, где су α_1 и α_2 корени квадратне једначине

$$4rt^2+3qt+2p=0$$

На тај начин знаћемо увек Rolle-ов низ што одговара једначини 3. и према томе Rolle-ова теорема може се увек применити на ма коју једначину четвртог степена. Остаје још да се од једначине 3. врати на једначину 1. Из горње две смене добија се

$$x=\frac{1}{t}-\frac{a_1}{4} \qquad 4.$$

Претпоставимо сад да смо нашли да једначина 3. има један корен између граница $t=\lambda_1$ и $t=\lambda_2$. Из односа 4. између x и t очевидно је, да ће једначина 1. имати корен који лежи између $\frac{1}{\lambda_1}-\frac{a_1}{4}$ и $\frac{1}{\lambda_2}-\frac{a_1}{4}$. Тако можемо учинити са сваким кореном једначине 3. и пораздвајати све корене дате једначине.

3° Тако се исто Rolle-ова теорема може применити и на општу једначину петог степена, јер је њена изводна једначина четвртог степена и може се решити.

4° Примена Rolle-ове теореме на једначине облика

$$ax^m+bx^n+c=0 \qquad m>n$$

Изводна једначина је

$$max^{m-1}+nbx^{n-1}=0$$

или

$$(max^{m-n}+nb)x^{n-1}=0$$

а ова једначина има као корене: нулу и корене једначине

$$max^{m-n}+nb=0$$

који су очевидно сви могућни. Према томе се увек може образовати Rolle-ов низ и корени првобитне једначине пораздвајати.

5° Примена Rolle-ове теореме на једначине облика

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+d=0$$

Извод је

$$nax^{n-1}+(n-1)bx^{n-2}+(n-2)cx^{n-3}=0$$

или

$$[nax^2+(n-1)bx+(n-2)c]x^{n-3}=0$$

Она има као корене нулу и корене квадратне једначине

$$nax^2+(n-1)bx+(n-2)c=0$$

и према томе задатак се опет може решити.

Примери:

1. Поразговајати помоћу Rolle-ових теорема корене једначине

$$x^3-5x^2+7x+2=0$$

Изводна једначина је

$$3x^2-10x+7=0$$

или

$$x^2-\frac{10}{3}x+\frac{7}{3}=0$$

а њени корени су: $x_1=1$ и $x_2=\frac{7}{3}$ зато ће Rolle-ови низови бити

$-\infty$	1	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$-$	$+$	$+$	$+$

Имамо дакле само један реалан корен који се налази између $-\infty$ и 1.

2. У једначини

$$x^5+10x^4+\lambda x^3-10=0$$

одредити λ тако, да она има само један реалан корен; затим одредити, ако је могуће, λ тако, да дата једначина има три реална корена и на послетку одредити га тако да има пет реалних корена.

Изводна једначина је

$$5x^4+40x^3+3\lambda x^2=0$$

или

$$x^2(5x^2+40x+3\lambda)=0$$

и њени корени су: $x_{1,2}=0$ и корени једначине

$$5x^2+40x+3\lambda=0$$

који су

$$x_{3,4}=\frac{-20\pm\sqrt{400-15\lambda}}{5}$$

и ако је

$$400-15\lambda<0$$

т. ј.

$$\lambda>\frac{400}{15}$$

корени $x_{3,4}$ биће уображени па ће Rolle-ови низови бити

$-\infty$	0	$+\infty$
$-$	$-$	$+$.

т.ј. дата једначина имаће свега један реалан корен и то позитиван.

Ако је

$$\lambda < \frac{400}{15}$$

разликоваћемо ова три случаја:

1° ако је поред тога још и

$$\lambda > 0$$

корени квадратне једначине

$$5x^2 + 40x + 3\lambda = 0$$

биће

$$\alpha_1 < 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2 < 0$$

па ће Rolle-ови низови бити

$-\infty$	α_1	α_2	0	$+\infty$
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

т.ј. опет ћемо имати свега један реалан и то позитиван корен, а остала четри биће уображена.

2° ако је

$$\lambda < 0$$

корени горње квадратне једначине биће

$$\alpha_1 < 0 \qquad \alpha_2 > 0$$

па ће Rolle-ови низови бити

$-\infty$	α_1	0	α_2	$+\infty$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

т.ј. опет ће дата једначина имати свега један реалан позитиван корен, који лежи између 0 и α_2.

3. ако је

$$\lambda = 0$$

корени предње квадратне једначине су

$$\alpha_1 = -8 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 0$$

а Rolle-ови низови

$-\infty$	-8	0	$+\infty$
$-$	$-$	$-$	$+$

па дакле дата једначина која у овом случају прелази у

$$x^5 + 10x^4 - 10 = 0$$

има опет свега један реалан позитиван корен.

Из свега овог видимо да дата једначина, на какву вредност имало λ, увек има свега један реалан позитиван корен, а остала четри су увек уображена.

3. Одредити a и b тако, да једначина

$$x^3 + ax^2 + bx = 0$$

има:

1° један реалан и два имагинарна корена;

2° један реалан прост и један реалан двојни корен;
3° три реална проста корена
Осим тога наћи максималне и минималне вредности горње функције.

Дату једначину можемо написати у облику:

$$x(x^2+ax+b)=0$$

па зато она има као корене $x_1=0$ и корене квадратне једначине

$$x^2+ax+b=0$$

т.ј.

$$x_{2,3}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

и онда:
ако је

$$a^2-4b<0$$

корени x_2 и x_3 су имагинарни па имамо случај 1°;
ако је

$$a^2-4b=0$$

онда су корени x_2 и x_3 реални и једнаки па имамо случај 2°; и
ако је

$$a^2-4b>0$$

корени x_2 и x_3 су реални и неједнаки, па имамо случај 3°.

Максималне и минималне вредности добићемо кад први извод ставимо да је раван нули и решимо добијену једначину, те ћемо имати

$$3x^2+2ax+b=0$$

а њени корени су

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

и према томе:
ако је

$$a^2-3b>0 \quad \text{и} \quad a>0$$

максимум ћемо имати за

$$x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

а минимум за

$$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

а саме максималне и минималне вредности добићемо заменом тих вредности за x у датој једначини.
ако је

$$a^2-3b>0 \quad \text{и} \quad a<0$$

имаћемо обрнути случај, тј. масимум за x_2 а минимум за x_1.
ако је

$$a^2-3b=0$$

максимум је раван минимуму а сама вредност је

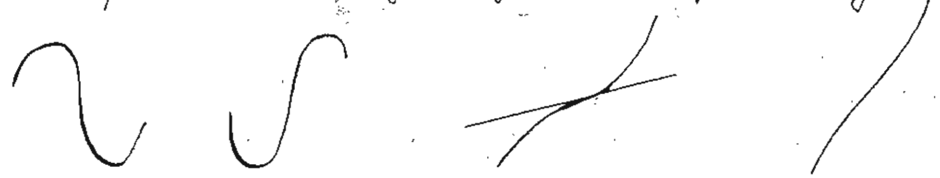
$$max. = min. = -a\left[(-a)^3+a(-a)^2+b\right] = -ab$$

3° ако је

$$a^2-3b<0$$

онда нема ни максимума ни минимума

Крива линија у ова три случаја:



случај 1° а.и в. случај 2° случај 3°

изгледа као што је насликано у горњим сликама. Случај 2° је хорд. зв. превојне тачке.

4. Одредити λ и потребне услове између а и в тако, да једначина

$$x^3+ax^2+bx+\lambda=0$$

има:

1° три реална корена;

2° један реалан прост и један реалан двојни корен;

3° један реалан и два имагинарна корена.

Какав однос између а и в треба да постоји па да може то бити.

Изводна једначина је

$$3x^2+2ax+b=0$$

одакле је

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3b}}{3}$$

и да би могли наставити дискусију потребно је да буде

$$a^2-3b>0$$

па могу наступити ова три случаја:

ако је $a^2-3b>0$ и $a>0$

заменом горњих вредности за x у датој једначини добијамо ове две количине

$$A=\frac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}\left[\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)^2+a\frac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}+b\right]+\lambda$$

$$B=\frac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}\left[\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}\right)^2+a\frac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}+b\right]+\lambda$$

ако је $a^2-3b>0$ $a<0$

заменом добијамо опет горње две количине A и B.

Према томе имаћемо ова три случаја:

1° да би сва три корена била реална потребно је да буде

за $a>0$ $A>0$ $B<0$

" $a<0$ $A<0$ $B>0$

јер су у том случају Rolle-ово низови

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$-$	$+$	$-$	$+$

тј. имамо три промене знака.

2° да би била два корена имагинарна а један реалан, потребно је да буде

за $a>0$ или $A<0$ или $B>0$

" $a<0$ " $A>0$ " $B<0$

јер су у том случају Rolle-ови низови

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
или	$-$	$-$	$+$	$+$
"	$-$	$-$	$+$	$+$

т.ј. имамо свега једну промену знака

3° да би био један прост и један двојни корен потребно је да буде

или $A=0$ или $B=0$

јер у том случају Rolle-ови низови су

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
или	$-$	$+$	$-$	$+$

т.ј. имамо три промене знака.

Из свега овог може се извести ово практично упутство за распознавање корена једначине трећег степена: образује се израз

$$a^2-3b$$

па ако је овај раван нули или мањи од ње, једначина има само један реалан корен; ако је тај израз већи од нуле, једначина може али не мора имати три реална корена. Да би се то распознало треба образовати изразе A и B и онда разликовати ова два случаја:

1° ако је $a>0$

онда:

а) ако је $A>0$ и $B<0$

имамо три реална корена;

б) ако је $A=0$ или $B=0$

једначина има један прост и један двојни корен;

в) ако је $A<0$ или $B>0$

једначина има један реалан и два имагинарна корена.

2° ако је $a<0$

онда:

а) ако је $A<0$ и $B>0$

једначина има три реална корена;

б) ако је $A=0$ и $B=0$

једначина има један прост и један двојни корен;

c) ако је $A>0$ или $B<0$
једначина има један реалан и два имагинарни корен.

5. Наћи какав услов треба да задовоље коефицијенти једначине

$$x^7+ax^4+bx+c=0$$

па да она има што већи број реалних корена.

Изводна једначина је

$$7x^6+4ax^3+b=0$$

Ако у њој извршимо смену

$$x^3=y$$

добијамо једначину

$$7y^2+4ay+b=0$$

или

$$y^2+\frac{4a}{7}y+\frac{b}{7}=0$$

Њени корени су

$$y_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-7b}}{7}$$

и према томе

$$x_1=\sqrt[3]{\frac{-2a+\sqrt{4a^2-7b}}{7}} \qquad x_2=\sqrt[3]{\frac{-2a-\sqrt{4a^2-7b}}{7}}$$

Разликоваћемо ова три случаја:

1° ако је

$$4a^2-7b<0$$

онда су корени x_1 и x_2 имагинарни, па је Rolle-ов низ

$-\infty$	$+\infty$
$-$	$+$

што значи да дата једначина има свега један реалан корен.

2° ако је

$$4a^2-7b=0$$

онда је

$$x_1=x_2=\sqrt[3]{-\frac{2a}{7}}$$

па је Rolle-ов низ

	$-\infty$	x_1	$+\infty$
или	$-$	$-$	$+$
"	$-$	$+$	$+$
"	$-$	0	$-$

што значи да у сваком случају имамо свега једну промену знака т.ј. дата једначина има само један реалан корен.

3° ако је

$$4a^2-7b>0$$

изводна једначина има два реална корена н. пр. x_1 и x_2, па ће у том случају Rolle-ови низови бити

		$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a.	или	−	+	+	+
b.	"	−	0	0	+
c.	"	−	−	−	+
d.	"	−	+	0	+
e.	"	−	+	−	+
f.	"	−	0	+	+
g.	"	−	0	−	+
h.	"	−	−	+	+
i.	"	−	−	0	+

т.ј. имамо у случају
a. један реалан корен;
b. два реална корена;
c. један реалан корен;
d. два реална корена;
e. три реална корена;
f. један реалан корен;
g. два реална корена;
h. један реалан корен;
i. " " "

Према томе да би дата једначина могла имати три реална корена, потребно је да буде

$$4a^2-7b>0$$

али то није и довољно. Довољан би услов би да буде поред тога $f(x_1)$, где x_1 представља мањи корен, позитивно, а $f(x_2)$, где x_2 представља већи корен, позитивно. Увек је могуће наћи такву вредност c, да ова два потребна и довољна услова буду задовољена. У истом случају, пошто једначина непарног степена мора имати непаран број реалних корена, то ако је $f(x_1)=0$ или $f(x_2)=0$, једначина има један прост и један двојни корен.

6. Наћи услов за коефицијенте једначине

$$x^2+2ax+b=0$$

па да она има два реална корена
Изводна једначина је

$$2x+2a=0$$

одакле је

$$x=-a$$

па су Rolle-ови низови

$-\infty$	$-a$	$+\infty$
+	+, 0, −	+

према томе да би дата једначина имала два реална корена, потребно је да буде $f(-a)<0$ тј. $b-a^2<0$ или

$$a^2-b>0$$

а тај би услов нашли и решењем једначине, јер је из ње

$$x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$$

и да би корени били реални потребно је да буде

$$a^2-b>0$$

7. Пораздвајати помоћу Rolle-ове теореме корене једначине

$$x^5-25x^3-25x^2+120x-50=0$$

Изводна једначина је

$$5x^4-25\cdot 3x^2-25\cdot 2x+120=0$$

или

$$x^4-15x^2-10x+24=0$$

Њени корени су

$$1 \quad 4 \quad -2 \quad -3$$

па ће зато Rolle-ови низови бити

$-\infty$	-3	-2	0	1	4	$+\infty$
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Дакле види се да дата једначина има свега три реална корена и то сва три позитивна, која се налазе први између 0 и 1, други између 1 и 4 а трећи између 4 и ∞. Два корена су имагинарна.

II Преглед других метода за оријентацију о коренима.

Кад год је могуће решити изводну једначину, биће потпуно решено питање о раздвајању корена, па пошто је примена Rolle-ове теореме врло проста, то није потребно прибегавати никаквим другим методама. Међутим кад није могуће решити изводну једначину, Rolle-ова метода је неупотребљива и тада се прибегава другим методама. Између ових других метода има их које нас обавештавају само о томе, колико дата једначина може имати највише или најмање корена дате врсте, н. пр. колико може имати највише или најмање реалних, имагинарних, позитивних или негативних корена, или корена који се налазе између два дата броја a и b. Такве методе за приближно оријентисање о броју корена дате врсте обично су у применама просте али обавештења која оне дају само су приближна. Међутим постоји метода за тачно оријентисање о броју корена дате врсте т.ј. помоћу којих се тачно може знати број реалних корена дате једначине, број имагинарних, број позитивних или негативних корена, број корена који се налазе између два дата броја a и b и т.д. само ове методе толико су заметне у примени, да имају више теоријског него практичног значаја, што чини да се оне обично избегавају ако нису неизбежне. Ми ћемо навести само кратак преглед разних тих метода како приближних тако и тачних и то у оном облику у коме се оне могу непосредно у задацима примењивати.

<u>Fourier-ово правило</u>. Ако је дата једначина

$$f(x)=0$$

n-тог степена, образујмо низ извода

$$f(x) \quad f'(x) \quad f''(x) \quad \dots \quad f^{(n)}(x) \qquad 1.$$

Нека су дата два броја a и b где је

$$a < b$$

Ако у низу 1. ставимо најпре $x=a$ па затим $x=b$ добићемо два низа

$$f(a) \quad f'(a) \quad f''(a) \quad \dots \quad f^{(n)}(a) \qquad 2.$$

$$f(b) \quad f'(b) \quad f''(b) \quad \dots \quad f^{(n)}(b) \qquad 3.$$

испод сваког члана напишимо његов знак онда Fourier-ово правило гласи:

ако се са λ означи број промена знака у низу 2. идући с лева на десно, а са μ број промена знака у низу 3., једначина

$$f(x)=0$$

може имати највише

$$\lambda-\mu$$

корена између бројева a и b.

У применама Fourier-овог правила за раздвајање корена ради се овако: кад се већ нашло колико највише може бити корена у размаку (a,b), тај се размак постепено смањује, док се не добије

$$\lambda-\mu=1$$

Ако сада имамо границе (a_1, b_1), онда између a_1 и b_1 може бити највише један корен т.ј. или један или ни један. Да би се питање могло решити ваља нам само испитати знаке израза $f(a_1)$ и $f(b_1)$. Ако су ти резултати супротних знакова једначина има тачно један корен између a_1 и b_1, а ако су они истих знакова, једначина нема ни један корен између њих.

Примери:

1. Дата је једначина

$$x^3 + x - 1 = 0$$

наћи број корена који се налазе између $\frac{1}{2}$ и 1.

Образоваћемо низ извода

$f(x) = x^3 + x - 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 1 \quad f''(x) = 6x \quad f'''(x) = 6$

па ће према томе Fourrier-ови низови бити.

$$\begin{array}{cccc} -\frac{3}{8} & +\frac{7}{4} & +3 & +6 \\ +1 & +4 & +6 & +6 \end{array}$$

дакле $\lambda = 1$ $\mu = 0$, те је $\lambda - \mu = 1$. Према томе дата једначина може имати највише један корен између $\frac{1}{2}$ и 1. Ако ћемо да знамо да ли има један или ни један такав корен, треба наћи знаке израза $f(\frac{1}{2})$ и $f(1)$. Пошто је $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$ а $f(1) = 1$ т.ј. знаци су супротни то једначина има тачно један корен између $\frac{1}{2}$ и 1.

2. Наћи по Fourrier-овом правилу број реалних корена једначине

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$$

и видети колико има позитивних а колико негативних реалних корена.

Овде је

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x - 1$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 6$

$f'''(x) = 24x - 24$

$f^{IV}(x) = 24$

па ћемо према томе ако у тим изразима смењујемо x са $-\infty$, 0, $+\infty$, добити ове Fourrier-ове низове

$$\begin{array}{lcccccl} (-\infty) & + & - & + & - & + & 4 \\ (0) & - & - & + & - & + & 3 \\ (+\infty) & + & + & + & + & + & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \}\ 1 \\ \}\ 3 \end{array}$$

Према томе дата једначина има највише један реалан негативан корен а највише три позитивна корена. Како су $f(-\infty)$ и $f(0)$, и $f(0)$ и $f(+\infty)$ супротних знакова, значи да има тачно један негативан корен, а један или три позитивна корена.

3. Помоћу Fourier-овог правила наћи број позитивних и негативних корена једначине

$$x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6=0$$

Имамо

$$f(x)=x^5+2x^4+3x^3+4x^2+5x+6$$
$$f'(x)=5x^4+8x^3+9x^2+8x+5$$
$$f''(x)=20x^3+24x^2+18x+8$$
$$f'''(x)=60x^2+48x+18$$
$$f^{IV}(x)=120x+48$$
$$f^{V}(x)=120$$

Стављајући у тим изразима x са $-\infty$, 0, $+\infty$, добијамо низове

$$\begin{array}{cccccccc} (-\infty) & - & + & - & + & - & + & 5 \\ (0) & + & + & + & + & + & + & 0 \\ (+\infty) & + & + & + & + & + & + & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \}\,5 \\ \}\,0 \end{array}$$

т.ј. дата једначина нема ни један позитиван корен а има највише пет негативних корена.

4. Помоћу Fourier-овог правила видети колико има корена између 0 и 10 једначина

$$x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

Имамо

$$f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$$
$$f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1$$
$$f''(x)=12x^2-6x+2$$
$$f'''(x)=24x-6$$
$$f^{IV}(x)=24$$

па ћемо имати ове низове

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (0) & + & - & + & - & + & 4 \\ (10) & + & + & + & + & + & 0 \end{array}\right\} 4$$

дакле има највише четри корена између 0 и 10.

Ако у горњим функцијама ставимо $-\infty$ и 0, добијамо низове

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (-\infty) & + & - & + & - & + & 4 \\ (0) & + & - & + & - & + & 4 \end{array}\right\} 0$$

т.ј. нема ни један негативан корен.

5. Помоћу Fourier-овог правила видети колико највише реалних корена може имати једначина

$$x^5-1=0$$

између -1 и 0, и 0 и 1.

Имаћемо

$$f(x)=x^5-1 \quad f'(x)=5x^4 \quad f''(x)=20x^3 \quad f'''(x)=60x^2 \quad f^{IV}(x)=120x$$

$$f^{V}(x)=120$$

па ћемо према томе имати низове

(-1)	−	+	−	+	−	+	5	} 4
(0)	−	+	+	+	+	+	1	} 1
(1)	+	+	+	+	+	+	0	

Дакле између -1 и 0 има највише четри корена а између 0 и 1 највише један корен.

<u>Descartes-ово правило</u>: Ако у датој једначини

$$f(x)=0$$

написаној у развијеном облику

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n=0$$

испод сваког коефицијента напишемо његов знак, једначина може имати највише онолико позитивних корена, колико има промена у том низу знакова идући с лева на десно.

Ако се у датој једначини смени

$$x=-t$$

тако да се добије нова једначина

$$\varphi(t)=0$$

онда једначина

$$f(x)=0$$

може имати највише онолико негативних корена, колико буде промена знакова у Descartes-овом низу једначине

$$\varphi(t)=0$$

Ако се са λ означи број промена знакова у Descartes-овом низу знакова једначине

$$f(x)=0$$

а са μ број промена знакова у Descartes-овом низу знакова једначине

$$\varphi(t)=0$$

једначина

$$f(x)=0$$

мора имати најмање

$$n-\lambda-\mu$$

имагинарних корена.

Као што се види примена је Descartes-овог правила веома проста и лака. Међутим дешава се да се употребом самог тог правила може некад тачно решити питање о броју позитивних или негативних или имагинарних или реалних корена дате једначине. Шта бива у овим случајевима:

1. Претпоставимо да смо у задатку нашли $\lambda=1$, тада према првом Descartes-овом правилу једначина може имати или само један или ни један позитиван корен. Које ће бити од тога двога може се тачно решити посматрајући знаке резултата од $f(0)$ и $f(+\infty)$.

2. Претпоставимо да смо нашли $\mu=1$. Једначина онда може имати или један или ни један негативан корен. Које ће бити од тога двога решиће тачно знаци резултата $f(0)$ и $f(-\infty)$.

3. Очевидно је да ако је $\lambda=0$, једначина нема ни један позитиван корен.

4. Кад је $\mu=0$, једначина не може имати ни један негативан корен.

5. Ако смо нашли да има тачно један позитиван а ни један негативан корен број имагинарних корена биће $n-1$.

6. Ако смо нашли да нема ни један позитиван корен а само један негативан корен, број имагинарних корена биће $n-1$.

7. Ако смо нашли да има један позитиван и један негативан корен, број имагинарних корена биће $n-2$.

Примери:

1. Применити ова три Descartes-ова правила на једначину

$$x^4-7x^3+8x^2+x-3=0$$

Први Descartes-ов низ знакова је

$$+ \quad - \quad + \quad + \quad -$$

дакле $\lambda=3$ што значи да има највише три позитивна корена.

Ако извршимо у једначини смену

$$x=-t$$

добијамо једначину

$$t^4+7t^3+8t^2-t-3=0$$

и Descartes-ов низ знакова је

$$+ \quad + \quad + \quad - \quad -$$

т. ј. $\mu=1$ што значи да има највише један негативан корен, а пошто су $f(0)$ и $f(-\infty)$ различитог знака значи да има тачно један негативан корен.

Израз $n-\lambda-\mu = 4-3-1=0$ т. ј. једначина нема ни један имагинаран корен.

2. Применити сва три Descartes-ова правила на једначину

$$x^8 - 19x^6 + 14x^3 - 5x + 7 = 0$$

Descartes-ов низ знакова је

+ − + − +

т. ј. $\lambda = 4$ што значи да дата једначина има највише четри позитивна корена.

Сменом $x = -t$ добијамо једначину

$$t^8 - 19t^6 - 14t^3 + 5t + 7 = 0$$

и ~~њен~~ низ знакова је

+ − − + +

т. ј. $\mu = 2$ или, дата једначина може имати највише два негативна корена.

Израз $n-\lambda-\mu$ раван је 2 што значи да дата једначина мора имати најмање два имагинарна корена.

3. Применити сва три Descartes-ова правила на једначину

$$x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$$

Descartes-ов низ знакова је

+ + + + + +

т. ј. $\lambda = 0$ или дата једначина нема ни један позитиван корен.

Сменом $x = -t$ добијамо једначину

$$t^{10} + t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + 1 = 0$$

и њен низ знакова је

+ + + + + +

т. ј. $\mu = 0$ или дата једначина нема ни један негативан корен.

Израз $n-\lambda-\mu$ раван је 10 што значи да су свих десет корена дате једначине имагинарни.

4. Применити сва три Descartes-ова правила на једначину

$$x^{10} + 5x^8 - 7x^7 + 5x^5 + 19x^3 + x - 2 = 0$$

Descartes-ов низ знакова је

+ + − + + + −

т. ј. $\lambda = 3$ што значи да једначина има највише три позитивна корена.

Сменом $x = -t$ добијамо једначину

$$t^{10} + 5t^8 + 7t^7 - 5t^5 - 19t^3 - t - 2 = 0$$

и њен низ знакова је

+ + + − − − −

т. ј. $\mu = 1$ или, једначина може имати највише један негативан корен, а како су $f(0)$ и $f(-\infty)$ различити знаком, то дата једначина има тачно један негативан корен.

Израз $n-1-m$ раван је 6 т.ј. дата једначина има најмање шест имагинарних корена.

Descartes-ово правило може се употребити и за оријентисање о броју корена дате једначине који се налазе између два дата броја a и b. Ако у место x уведемо нову непознату t такву да је

$$t = \frac{a-x}{x-b} \qquad (1.)$$

одакле је

$$x = \frac{a+bt}{t+1}$$

па то сменимо у датој једначини

$$f(x)=0$$

и уредимо ју по степенима од t, добићемо нову једначину

$$\varphi(t)=0$$

опет n-тог степена. Из 1. је очевидно да док се t мења од 0 до ∞, x варира од a до b. Према томе кад год t варирајући од 0 до ∞ наиђе на један корен једначине

$$\varphi(t)=0$$

промењљива x наићиће на један од корена једначине

$$f(x)=0$$

који се налази између a и b. То показује да се број позитивних корена једначине $\varphi(t)=0$ поклапа са бројем корена једначине $f(x)=0$ у размаку (a,b). Према томе питање о броју корена једначине $f(x)=0$ у размаку (a,b) своди се на питање о броју позитивних корена једначине $\varphi(t)=0$. Из тога се изводи ово правило:

ако у датој једначини

$$f(x)=0$$

извршимо смену

$$x = \frac{a+bt}{t+1}$$

па једначину уредимо по степенима од t, тако да се добије нова једначина

$$\varphi(t)=0$$

првобитна једначина може имати највише онолико корена између бројева a и b, колико буде промена знакова у Descartes-овом низу знакова једначине

$$\varphi(t)=0$$

Дешава се да се и овим правилом може тачно решити питање о броју корена између a и b. Тако, ако смо нашли да Descartes-ов низ једначине $\varphi(t)=0$ нема ни једну промену, очевидно је да једначина $f(x)=0$ нема ни један корен између a и b. Ако смо нашли да Descartes-ов низ једначине $\varphi(t)=0$ има једну промену знака, једначина $f(x)=0$ може имати или један или ни један корен између a и b. Питање ће бити тачно решено упоређењем знакова резултата $f(a)$ и $f(b)$.

Примери:

1. Наћи број корена једначине

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$$

који се налазе између 1 и 3.

Извршићемо смену

$$x = \frac{1+3t}{t+1}$$

па добијамо нову једначину по t

$$\left(\frac{1+3t}{t-1}\right)^3 - \left(\frac{1+3t}{t-1}\right)^2 - 3\,\frac{1+3t}{t-1} + 2 = 0$$

или

$$(1+3t)^3 - (1+3t)^2(t-1) - 3(1+3t)(t-1)^2 + 2(t-1)^3 = 0$$

или на послетку

$$11t^3 + 39t^2 + 17t - 3 = 0.$$

Њен Descartes-ов низ знакова је

$$+ \quad + \quad + \quad -$$

т.ј. имамо свега једну промену, и према томе дата једначина може да има највише један корен између 1 и 3. Али ако у датој једначини ставимо најпре $x=1$ па затим $x=3$, добијамо као резултат -1 и $+11$ што значи да дата једначина има тачно један корен између 1 и 3.

2. Наћи број корена једначине

$$x^3 - x^2 + x - 2 = 0$$

који се налазе између -1 и $+1$.

Ако извршимо смену

$$x = \frac{t-1}{t+1}$$

добијамо једначину

$$\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3 - \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2 + \frac{t-1}{t+1} - 2 = 0$$

или

$$(t-1)^3 - (t-1)^2(t+1) + (t-1)(t+1)^2 - 2(t+1)^3 = 0$$

или на послетку

$$t^3 + 7t^2 + 3t + 5 = 0$$

Њен Descartes-ов низ је

$$+ \quad + \quad + \quad +$$

и пошто он нема ни једну промену, значи да дата једначина нема ни један корен између -1 и +1.

Sturm-ова метода. Означимо са X полином дате једначине n-тог степена, са X_1 његов први извод и извршимо деобу $X : X_1$, продужимо је докле док је она могућна т.ј. док се не дође до остатка који је нижег степена но што је делитељ. Том остатку променимо знак и са тако промењеним знаком означимо га са X_2 и извршимо деобу $X_1 : X_2$ док се не дође до остатка који је нижег степена но што је делитељ и тај остатак означимо, пошто му променимо знак, са X_3 и извршимо деобу $X_2 : X_3$ док се не дође до остатка нижег степена но што је делитељ и т.д. Тај низ операција продужимо све дотле, док се у низу деоба на које се буде наилазило не наиђе на један остатак који је или раван нули или у опште независан од x и нека је тај остатак X_p. Уочимо сада низ тако добијених функција

$$X \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \quad X_p$$

који се назива Sturm-овим низом функција. Сменимо у њима најпре $x=a$ затим $x=b$ тако да онда добијемо два низа количина

$$X(a) \quad X_1(a) \quad X_2(a) \quad X_3(a) \quad \dots \quad X_p(a) \qquad 1.$$

$$X(b) \quad X_1(b) \quad X_2(b) \quad X_3(b) \quad \dots \quad X_p(b) \qquad 2.$$

и код сваке од тих количина напишимо њен знак. Означимо број промена знакова у низу 1. са λ а у низу 2. са μ. Sturm-ова теорема тада гласи:

једначина

$$f(x) = 0$$

има тачно

$$\lambda - \mu$$

корена у размаку (a, b) рачунајући при том сваки вишеструки корен по један пут.

Теорема је дакле генерална и обухвата све случајеве, било да размак (a, b) садржи само просте било да има вишеструких корена. Овде је потпуно решен задатак да се одреди тачан број корена једначине између два дата броја и кад би она и у применама била проста, свака би друга метода била излишна. Међутим у применама је ова метода, нарочито за једначине вишег степена и кад су мало већи коефицијенти једначине, веома заметна због великог броја рачунских операција које захтева. С тога се она употребљује само онда кад је неизбежна.

Ако се помоћу Sturm-ове методе тражи број реалних корена, треба само узети $a=-\infty$ $b=+\infty$; ако се тражи број позитивних корена, треба узети $a=0$ и $b=+\infty$; ако се тражи број негативних корена, треба узети $a=-\infty$ $b=0$. Ако би хтели помоћу ње раздвојити корена, онда, пошто смо већ нашли да у опште има корена између a и b, треба размак (a,b) постепено сужавати, док се не добије $\lambda-\mu=1$. Тада ћемо знати да између a и b има само један корен и ако тако будемо учинили са свима реалним коренима једначине, они ће бити сви пораздвајани.

Примери:

1. Пораздвајати корене једначине

$$x^4-3x^2+1=0$$

Овди је

$$X=x^4-3x^2+1$$
$$X_1=4x^3-6x$$

па ћемо имати

$$(x^4-3x^2+1):(4x^3-6x)=\frac{1}{4}x$$
$$\underline{-x^4 \mp \frac{6}{4}x^2}$$
$$-\frac{6}{4}x^2+1$$

зато је

$$X_2=\frac{6}{4}x^2-1$$

па имамо

$$(4x^3-6x):\left(\frac{6}{4}x^2-1\right)=\frac{16}{6}x$$
$$\underline{-4x^3 \mp \frac{16}{6}x}$$
$$-\frac{20}{6}x$$

отуда

$$X_3=\frac{20}{6}x$$

па је даље

$$\left(\frac{6}{4}x^2-1\right):\frac{20}{6}x=\frac{36}{80}x$$
$$\underline{-\frac{6}{4}x^2}$$
$$-1$$

отуда

$X_4 = 1$

Према томе имамо овај шему

	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2
X	+	+	+	−	+	−	+
X_1	−	−	−	+	+	−	+
X_2	+	+	+	+	−	+	+
X_3	−	−	−	−	+	+	+
X_4	+	+	+	+	+	+	+
број промена знака	4	4	4	3	2	1	0

−1,6180
−0,6180
0,6180
1,6180

Из те шеме видимо да имамо два негативна и два позитивна корена, а њихове границе су (−2,−1), (−1,0), (0,1) и (1,2), чиме је задатак решен

2. Пораздвајати корене једначине

$$x^4-16x^2+8=0$$

Овди је

$$X = x^4-16x^2+8$$
$$X_1 = 4x^3-32x$$

па је зато

$$(x^4-16x^2+8):(4x^3-32x)=\frac{1}{4}x$$
$$\underline{-x^4 \mp 8x^2}$$
$$-8x^2+8$$

отуда

$$X_2 = 8x^2-8$$

па је зато

$$(4x^3-32x):(8x^2-8)=\frac{1}{2}x$$
$$\underline{-4x^3 \mp 4x}$$
$$-28x$$

према томе

$$X_3 = 28x$$

па је даље

$$(8x^2-8):28x=\frac{2}{7}$$
$$\underline{-8x^2}$$
$$-8$$

или

$$X_4 = 8$$

Отуда ова шема

	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
X	+	+	−	−	−	+	−	−	−	+
X_1	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+
X_2	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+
X_3	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+
X_4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
број промена	4	4	3	3	3	2	1	1	1	0

3,2261
−3,2261

Дакле дата једначина има два позитивна и два негативна корена, а њихове границе су: (−4,−3), (−1,0), (0,1) и (3,4).

3. Пораздвајати корене једначине

$$x^4-2x^3-11x^2-6x+2=0$$

Овди је

$$X = x^4-2x^3-11x^2-6x+2$$
$$X_1 = 4x^3-6x^2-22x-6$$

па имамо

$$(x^4-2x^3-11x^2-6x+2):(4x^3-6x^2-22x-6)=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$$
$$\underline{-x^4 \mp \frac{3}{2}x^3 \mp \frac{11}{2}x^2 \mp \frac{3}{2}x}$$
$$-\frac{1}{2}x^3-\frac{11}{2}x^2-\frac{9}{2}x+2$$
$$\underline{\mp\frac{1}{2}x^3 \pm \frac{3}{4}x^2 \pm \frac{11}{4}x \pm \frac{3}{4}}$$
$$-\frac{25}{4}x^2-\frac{29}{4}x+\frac{5}{4}$$

зато је

$$X_2 = \frac{25}{4}x^2+\frac{29}{4}x-\frac{5}{4}$$

па имамо даље

$$(4x^3-6x^2-22x-6):\left(\frac{25}{4}x^2+\frac{29}{4}x-\frac{5}{4}\right)=\frac{16}{25}x-\frac{1064}{625}$$
$$\underline{-4x^3 \mp \frac{116}{25}x^2 \pm \frac{4}{5}x}$$
$$-\frac{266}{25}x^2-\frac{106}{25}x-6$$
$$\underline{\mp\frac{266}{25}x^2 \mp \frac{7714}{625}x \pm \frac{266}{125}}$$
$$\frac{5064}{625}x-\frac{1016}{125}$$

зато је

$$X_3 = -\frac{5064}{625}x+\frac{1016}{125}$$

па је према томе

$$\left(\frac{25}{4}x^2+\frac{29}{4}x-\frac{5}{4}\right):\left(-\frac{5064}{625}x+\frac{1016}{125}\right)=-\frac{15625}{20256}x-\frac{2674375}{1402756}$$
$$\underline{-\frac{25}{4}x^2 \pm \frac{15875}{2532}x}$$
$$\frac{8558}{633}x-\frac{5}{4}$$
$$\underline{-\frac{8558}{633}x \pm \frac{5434340}{350689}}$$
$$\frac{19983915}{1402756}$$

Зато је

$$X_4 = -\frac{19983915}{1402756}$$

Отуда имамо ову шему

	$-\infty$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
X	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−
X_1	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
X_2	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+
X_3	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−
X_4	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
број промена	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2

Даље имамо један позитиван корен који се налази између 0 и 1.

4. Издвојити корене једначине

$$x^4+x^3-5x^2+2=0$$

Овди је

$$X = x^4+x^3-5x^2+2$$
$$X_1 = 4x^3+3x^2-10x$$

па зато имамо

$$(x^4+x^3-5x^2+2):(4x^3+3x^2-10x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$$

$$\underline{-x^4 \mp \frac{3}{4}x^3 \pm \frac{10}{4}x^2}$$

$$\frac{1}{4}x^3-\frac{10}{4}x^2 \qquad +2$$

$$\underline{-\frac{1}{4}x^3 \mp \frac{3}{16}x^2 \pm \frac{10}{16}x}$$

$$-\frac{43}{16}x^2+\frac{10}{16}x+2$$

отуда

$$X_2=\frac{43}{16}x^2-\frac{10}{16}x-2$$

па имамо

$$(4x^3+3x^2-10x):\left(\frac{43}{16}x^2-\frac{10}{16}x-2\right)=\frac{64}{43}x+\frac{2704}{1849}$$

$$\underline{-4x^3 \mp \frac{40}{43}x^2 \mp \frac{128}{43}x}$$

$$\frac{169}{43}x^2-\frac{302}{43}x$$

$$\underline{-\frac{169}{43}x^2 \pm \frac{1690}{1849}x \pm \frac{5408}{1849}}$$

$$-\frac{11296}{1849}x+\frac{5408}{1849}$$

зато

$$X_3=\frac{11296}{1849}x-\frac{5408}{1849}$$

па је даље

$$\left(\frac{43}{16}x^2-\frac{10}{16}x-2\right):\left(\frac{11296}{1849}x-\frac{5408}{1849}\right)=\frac{79507}{180736}x+\frac{37388629}{51039848}$$

$$\underline{-\frac{43}{16}x^2 \mp \frac{193844}{180736}x}$$

$$\frac{80884}{180736}x-2$$

$$\underline{-\frac{80884}{180736}x \pm \frac{13669396}{63799408}}$$

$$-\frac{13929420}{63799408}$$

зато је

$$X_4=\frac{13929420}{63799408}$$

Отуда имамо ову шему

	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2
X	+	+	−	−	+	−	+
X_1	−	−	+	+	+	+	+
X_2	+	+	+	+	−	+	+
X_3	−	−	−	−	−	+	+
X_4	+	+	+	+	+	+	+
број промена	4	4	3	3	2	1	0

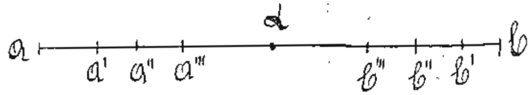
−2,73205
0,5180
0,73205

Из ње видимо да дата једначина има два позитивна и два негативна корена, а њихове границе су: $(-3,-2)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ и $(1,2)$.

III Методе за приближно израчунавање корена.

Претпоставимо да смо према ранијим упутствима испитали да ли дата једначина има целих и рационалних корена и у случају ако их има, да смо се деобом са одговарајућим коренским чиниоцем ослободили тих корена. Тако исто претпоставимо да смо према ранијим упутствима испитали да ли једначина има вишеструких корена и у случају ако их има, да смо те корене одредили и једначину ослободили тих корена опет деобом са њиховим одговарајућим коренским чиниоцем. Тада ће нам остати једна једначина у којој ће сви корени бити прости и то ирационални или имагинарни. Обратимо најпре пажњу на ирационалне корене и замислимо да смо их, опет према ранијим упутствима, све пораздвајали, тако, да за сваки корен н. пр. $x=\alpha$ знамо тачно по две границе а и в између којих се само он налази. Тада се приступа приближном одређивању корена.

То одређивање бива на овај начин: прво се гледа да се границе а и в у колико се може више сузе т. ј. гледа се да се од границе а идући на десно а од границе в идући на лево колико је могуће више приближимо самом корену α. То приближавање бива простим пробама. Пошто између а и в има само један корен α, то су резултати $f(a)$ и $f(b)$ супротних знакова. Ако сад на место а узмемо један број а' десно од а, а место

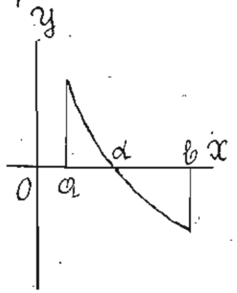


в узмемо један број в' лево од в, па нађемо да су ови резултати супротних знакова, очевидно је да границе а и в можемо тада сменити границама а'в'. Тај посао очевидно можемо продужити даље узимајући вредности (а'',в''), (а''',в''')... све дотле док су резултати супротних знакова. Кад смо на тај начин донекле и у довољној мери сузили границе између којих смо сигурни да се налази корен α, онда се приступа нарочитим методама за приближно израчунавање корена, којима је циљ да се то сужавање што више убрза. Тим се методама приступа онда кад су границе довољно сужене, а те су границе довољно сужене онда, ако између тих граница, на којима смо се зауставили, н. пр. а и в функција

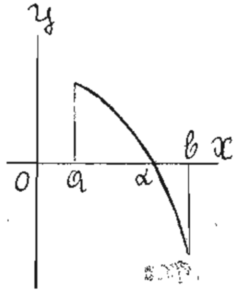
$f(x)$ или непрестано расте или непрестано опада т.ј. ако крива

$$y = f(x)$$

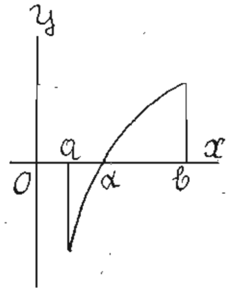
у размаку (a,b) има један од ова четри облика:



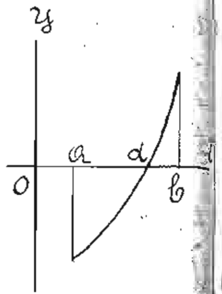
Слика 1°



Слика 2°



Слика 3°



Слика 4°

Потражимо најпре како се може распознати са којим се од ова четри случаја има посла:

1° случај (слика 1°): из слике је очевидно да је прва крајња ордината позитивна друга негативна. Угаони коефицијенат дирке непрестано је негативан и расте кад се иде од a ка b. Према томе први случај карактерисан је овим:

$$f(a)\ + \ ; \ f(b)\ - \ ; \ f''(a)\ + \ ; \ f''(b)\ +$$

2° случај (слика 2°): прва ордината је позитивна, друга негативна; угаони коефицијенат дирке негативан и опада. Према томе овај је случај карактерисан на овај начин:

$$f(a)\ + \ ; \ f(b)\ - \ ; \ f''(a)\ - \ ; \ f''(b)\ - .$$

3° случај (слика 3°): прва ордината негативна, друга позитивна; угаони коефицијенат дирке позитиван и опада. Према томе карактеристика је ова:

$$f(a)\ - \ ; \ f(b)\ + \ ; \ f''(a)\ - \ ; \ f''(b)\ - .$$

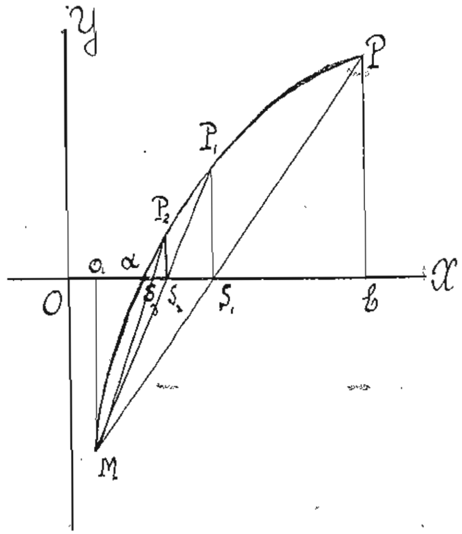
4° случај (слика 4°): прва ордината негативна, друга позитивна; угаони коефицијенат дирке негативан и расте. Према томе карактеристика овог случаја је

$$f(a)\ - \ ; \ f(b)\ + \ ; \ f''(a)\ + \ ; \ f''(b)\ + .$$

Претпоставимо сад да смо нашли који од ова четри случаја имамо у датом примеру. Приближне методе које сад треба употребити јесу ове две, које се најчешће употребљују а међусобно се допуњују.

1. Метода пропорционалних прираштаја или Regula falsi. Уочимо један ма који од тих четри примера или облика н. пр. облик 3°. Корен α јесте тачка у којој крива сече x-ску осовину. Са-

ставимо крајње тачке M и P криве ли-



није правом линијом и нека је S_1 њена пресечна тачка са X-ском осовином. Из слике је очевидно да корен α, који је лежао између a и b, лежи сада између a и $OS_1 = b_1$. Ако смо у стању израчунати вредност b_1 онда место старих граница a и b имамо нове границе a и b_1. Међутим број b_1 можемо израчунати овако: права MP има за једначину

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

где су $x_0\, y_0$ координате тачке M а $x_1\, y_1$ координате тачке P. Према томе је $x_0 = a$, $x_1 = b$, $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(b)$ и према томе једначина праве MP биће

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \tag{1.}$$

Вредност b_1 је вредност x која се добија кад се у 1. стави $y=0$. Та је вредност

$$b_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)} \tag{2.}$$

Знајући на тај начин тачку S_1 подигнимо ординату S_1P_1 и са њом учинимо оно исто што смо учинили са тачком P т.ј. повуцимо праву MP_1 па ћемо у пресеку са X-ском осовином добити тачку S_2 која ће бити таква да корен α лежи између a и $OS_2 = b_2$. На тај начин ако знамо величину b_2 границе корена биће још више сужене. Међутим b_2 добија се очевидно ако у 2. сменимо b са b_1 т.ј.

$$b_2 = a - \frac{(b_1-a)\,f(a)}{f(b_1)-f(a)} \tag{3.}$$

Тај посао можемо продужити даље и сваком таквом релацијом приближаваћемо се све више корену α. У случају слике 3° корену се као што се види приближавамо непрестано са његове десне стране. Такав би исто случај био и са сликом 1° Међутим у сликама 2° и 4° био би обрнут случај т.ј. овом би се методом приближавали корену непрестано са његове леве стране.

Практично пак упутство за ову

методу било би ово: ако се зна да корен α лежи између граница a и b, треба образовати израз 2. па ћемо место старих граница a и b имати нове границе a и b_1. Затим помоћу тако израчунатог b_1 ваља образовати израз 3. па ћемо место граница a и b_1 имати нове границе a и b_2 и т. д. Из бројева

$$b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n$$

бићемо све ближе и ближе корену α и то тај се низ приближује корену α од његове десне стране, ако имамо случај слике 1° и 3°, а са његове леве стране, ако имамо случај слике 2° и 4°. Као што се види за један одређен случај приближавање се увек од једне стране. Метода носи име: метода пропорционалних прираштаја зато што је она основана на једначини 1. према којој су прираштаји ордината пропорционални прираштајима апсциса. Она се зове Regula falsi зато што у неким изузетним случајевима кад нису задовољени услови слика 1°, 2°, 3° и 4° може довести до погрешних резултата.

Примери:

1. За једначину

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + 2 = 0$$

нашли смо да има један негативан корен који лежи између $(-1,0)$ [St. m. pr. 4].

Пошто је

$$f(-1) = -3 \quad f(0) = +2 \quad f''(-1) = -4 \quad f''(0) = -10$$

то крива има између -1 и 0 облик слике 3° па ћемо се корену приближавати с његове десне стране.

Како је овди

$$a = -1 \quad b = 0$$

то је према упуству

$$b_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} = -1 - \frac{(0+1)\cdot -3}{2+3} = -1 + \frac{3}{5} = -1 + 0{,}6 = -0{,}4$$

$$b_2 = a - \frac{(b_1-a)\,f(a)}{f(b_1) - f(a)} = -1 - \frac{(-0{,}4+1)\cdot -3}{-4{,}08+3} = -1 - \frac{1{,}8}{1{,}08} = -1 - 1{,}66\ldots = -2{,}66\ldots$$

Метода је као што се види довела до погрешног резултата, јер је граница b

прешла границу a, а то се у осталом види и из тога што су резултати $f(a)$ и $f(b_1)$ истог знака, па према томе између њих нема корена.

2. Код једначине

$$x^4-3x^2+1=0$$

нашли смо да има један корен који лежи између 1 и 2. [St. м. пр. 1.]

Како је

$$f(1)=-1 \quad f(2)=5 \quad f''(1)=6 \quad f''(2)=42$$

то имамо 4° случај, па ћемо се корену приближавати с леве стране.

Овде је

$$a=1 \qquad b=2$$

па је према упутству

$$a_1=a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}=1-\frac{(2-1)\cdot-1}{5+1}=1+\frac{1}{6}=1{,}166\ldots$$

$$a_2=a_1-\frac{(b-a_1)\,f(a_1)}{f(b)-f(a_1)}=1{,}166\ldots-\frac{(2-1{,}166\ldots)\cdot-1{,}230\ldots}{5+1{,}230\ldots}=$$

$$=1{,}166+\frac{1{,}025820}{6{,}230}=1{,}166+0{,}164=1{,}33$$

$$a_3=a_2-\frac{(b-a_2)\,f(a_2)}{f(b)-f(a_2)}=1{,}33-\frac{(2-1{,}33)\cdot-1{,}178}{5+1{,}178}=$$

$$=1{,}33+\frac{0{,}78926}{6{,}178}=1{,}33+0{,}12=1{,}45$$

и т. д.

Ако се зауставимо овде имаћемо као границе једног корена дате једначине: 1,45 и 2.

3. Код једначине

$$x^4-16x^2+8=0$$

нашли смо да има један корен између граница: 3 и 4. [St. м. пр. 2.]

Како је

$$f(3)=-55 \quad f(4)=8 \quad f''(3)=4 \quad f''(4)=16$$

то имамо опет случај слике 4°.

Овде је

$$a=3 \qquad b=4$$

па ће према томе бити

$$a_1=a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}=3-\frac{(4-3)\cdot-55}{8+55}=3+\frac{55}{63}=$$

$$=3+0{,}87301=3{,}87301$$

Корен би сад требао да лежи између 3,87301 и 4 али како су $f(3{,}87301)$ и $f(4)$ истог знака значи да смо дошли до погрешног резултата.

4. Код једначине

$$x^3+x-1=0$$

нашли смо да има један корен између $\frac{1}{2}$ и 1. [Fourr. пр. пр. 1.]

Овди је

$$a = \frac{1}{2} \quad b = 1$$

па како је

$$f(a) = -\frac{3}{8} \quad f(b) = 1 \quad f''(a) = 3 \quad f''(b) = 6$$

то имамо опет случај слике 4° па ћемо се дакле корену приближавати с леве стране. Имаћемо дакле

$$a_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} = 0,5 - \frac{(1-0,5)\cdot -0,375}{1+0,375} =$$

$$= 0,5 + \frac{0,1875}{1,375} = 0,5 + 0,13 = 0,63$$

$$a_2 = a_1 - \frac{(b-a_1)\,f(a_1)}{f(b) - f(a_1)} = 0,63 - \frac{(1-0,63)\cdot -0,120}{1+0,120} =$$

$$= 0,63 + \frac{0,04440}{1,120} = 0,63 + 0,03 = 0,66$$

$$a_3 = a_2 - \frac{(b-a_2)\cdot f(a_2)}{f(b) - f(a_2)} = 0,66 - \frac{(1-0,66)\cdot -0,0525}{1+0,0525} =$$

$$= 0,66 + \frac{0,017850}{1,0525} = 0,66 + 0,016 = 0,676$$

и т. д.

Ако се зауставимо овди, границе корена биће 0,676 и 1.

5. За једначину

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

нашли смо да има један негативан корен који лежи између -1 и 0. [Ал. м. пр. 1]

Како је овди

$$a = -1 \quad b = 0$$

то је

$$f(a) = -1 \quad f(b) = 1 \quad f''(a) = -18 \quad f''(b) = -6$$

па дакле имамо случај слике 3° Према томе корену ћемо се приближавати с десне стране, па имамо

$$b_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)} = -1 - \frac{(0+1)\cdot -1}{1+1} = -1 + \frac{1}{2} =$$

$$= -1 + 0,5 = -0,5$$

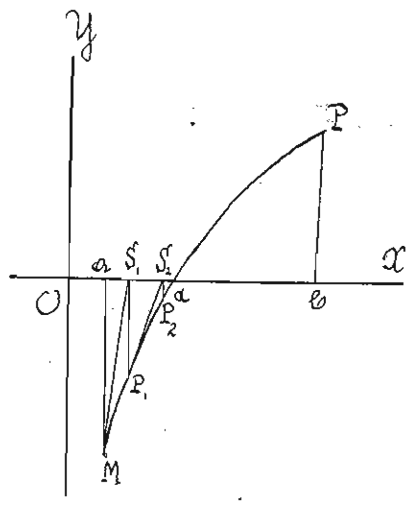
$$b_2 = a - \frac{(b_1 - a)\,f(a)}{f(b_1) - f(a)} = -1 - \frac{(-0,5+1)\cdot -1}{0,3125+1} = -1 + \frac{0,5}{1,3125}$$

$$= -1 + 0,38009 = -0,61991$$

и т. д.

и ако се зауставимо овде, границе тога корена биће -1 и -0,61991.

2. Newton-ова метода. Уочимо опет случај слике 3°. Повуцимо из M дирку MS_1 па је очевидно да ће тачка S_1 бити таква да ако су првобитне границе биле a и в, сад ће те границе бити $OS_1 = a_1$ и в. Повуцимо из S_1 ординату S_1P_1 па опет из



из тачке P_1 повуцимо дирку P_1S_2 па је очевидно да ће сад нове границе бити $OS_2=a_2$ и $в$ и т. д. На тај начин из вредности:

$$a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n$$

приближаваћемо се корену α овог пута са његове леве стране, дакле са супротне стране оној којој смо се мало пре приближавали. Приметимо сад да ће то бити случај са ма којим од она четри случаја, али само под условом да првобитна повучена дирка падне између граница a и $в$.

Остаје дакле да се израчунају вредности

$$a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n$$

а то се добија помоћу једначина горњих дирки. Једначина дирке у тачки M биће као што знамо

$$y - f(a) = \lambda (x-a) \qquad 2$$

где је λ угаони коефицијенат дирке т. ј.

$$\lambda = f'(a)$$

Према томе једначина дирке биће

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad 3$$

Вредност a_1 није ништа друго до вредности x која се добија кад се у 3. стави $y=0$ па се једначина реши по x. На тај начин добија се

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad 4.$$

Број a_2 добијамо кад у овом обрасцу сменимо a_1 са a_2, a са a_1. Према томе је

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \qquad 5.$$

и т. д.

из чега се изводи ово практично упутство за употребу Newton-ове методе:

кад је дата једначина

$$f(x) = 0$$

треба из 4. израчунати вредност a_1, помоћу тако израчунатог a_1 израчунати вредност a_2 из 5. и т. д.; низ количина

$$a_1, \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n$$

приближаваће се све више корену са једне стране и то са леве стране у случају слика 1° и 3°, а са десне стране у случају слика 2° и 4°.

Као што се види приближавање се увек са супротне стране оној која одговара првој методи. Према томе

метода Regula falsi и Newton-ова ме-
тода се међу собом допуњују и с тога
је најбоље употребити обе у исто време.
Помоћу једне добијамо постепено низ
бројева

$$b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n$$

а помоћу друге низ бројева

$$a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

или обратно. Ти низови бројева све ће
више и више сужавати размак у коме
се налази корен и ако будемо опера-
ције у оба правца продужили довле
док размак

$$a_n - b_n$$

по својој апсолутној вредности не буде
мањи од оне допуштене погрешке у из-
рачунавању корена, можемо узети као
довољно тачну вредност корена

$$x = a_n + \varepsilon$$

где ће ε бити мање од допуштене по-
грешке. Очевидно је да што тај се
већа тачност тражи у толико број
оваквих операција треба да је већи.

Сада ћемо прећи редом све при-
мере које смо имали код методе Regula
falsi.

Примери:

1. Код једначине

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + 2 = 0$$

прва метода нас је довела до погрешног ре-
зултата. Да видимо шта ћемо добити
другом методом. Границе траженог корена
су

$$a = -1 \quad b = 0$$

па ћемо по Newton-овој методи имати

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -1 - \frac{-3}{9} = -1 + \frac{1}{3} = -1 + 0{,}33\ldots = -0{,}67$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = -0{,}67 - \frac{-0{,}53331179}{6{,}843648} = -0{,}67 + 0{,}07 = -0{,}60$$

и т. д.

дакле све се више и више приближавамо
корену с леве стране.

2. Код једначине

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

приближили смо се довољно с леве стра-
не тако да смо нашли да корен лежи из-
међу граница

$$a = 1{,}45 \quad \text{и} \quad b = 2$$

Сада ћемо се помоћу Newton-ове методе

приближити томе корену с десне стране.
Имаћемо:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \frac{5}{20} = 2 - 0,25 = 1,75$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1,75 - \frac{1,19140625}{10,9375} = 1,75 - 0,10 = 1,65$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 1,65 - \frac{0,24450625}{8,0685} = 1,65 - 0,03 = 1,62$$

$$b_4 = b_3 - \frac{f(b_3)}{f'(b_3)} = 1,62 - \frac{0,01427536}{7,286112} = 1,62 - 0,001 = 1,619$$

и. т. д.

Међутим ако продужимо сужавање са леве стране добијамо

$$a_4 = a_3 - \frac{(b_4 - a_3)\, f(a_3)}{f(b_4) - f(a_3)} = 1,45 - \frac{(1,619 - 1,45)\cdot -0,887}{-4,760 + 0,887} =$$

$$= 1,45 + 0,03 = 1,48$$

и т. д.

дакле границе се све више и више приближавају једна другој т.ј. корену и ако се овде зауставимо оне су 1,48 и 1,619.

3. И код једначине

$$x^4 - 16x^2 + 8 = 0$$

приближавајући се корену с леве стране дошли смо до погрешног резултата. Покушајмо сад приближавање с десне стране. Овде је

$$a = 3 \qquad b = 4$$

па је према томе

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 4 - \frac{8}{138} = 4 - 0,05 = 3,95$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 3,95 - \frac{1,79800625}{120,1195} = 3,95 - 0,01 = 3,94$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 3,94 - \frac{0,60455696}{118,571936} = 3,94 - 0,005 = 3,935$$

и. т. д.

4. Код једначине

$$x^3 + x - 1 = 0$$

приближавали смо се корену с леве стране и зауставили се на границе

$$a = 0,676 \qquad b = 1$$

Сада ћемо се приближавати корену са десне стране, па имамо

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 0,75 - \frac{0,171875}{2,6875} = 0,75 - 0,06 = 0,69$$

$$b_3 = b_2 - \frac{f(b_2)}{f'(b_2)} = 0,69 - \frac{0,018509}{2,4283} = 0,69 - 0,007 = 0,683$$

$$b_4 = b_3 - \frac{f(b_3)}{f'(b_3)} = 0,683 - \frac{0,001611987}{2,399467} = 0,683 - 0,0006 = 0,6824$$

и. т. д.

Видимо да се границе све више и више приближавају једна другој.

5. Код једначине

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

приближавали смо се корену с десне стране и зауставили смо се на граница

$$b = -0{,}61991 \qquad a = -1$$

Сада ћемо се приближавати с леве стране па имамо

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -1 - \frac{-1}{2} = -1 + 0{,}5 = -0{,}5$$

али овај резултат је погрешан.

<u>Имагинарни корени алгебарских једначина</u>. Видели смо да свака алгебарска једначина са реалним коефицијентима или нема ни један имагинарни корен или, ако их има, њихов је број паран. Има велики број специјалних правила по којима се на самој датој једначини још пре њеног решавања може распознати да ли она има имагинарних корена.

Имагинарни корени обично се траже онда, кад су већ одређени сви реални корени једначине и кад је ова, деобом са одговарајућим кореним чиниоцима ослобођена свих реалних корена. Тада једначина која остаје и која је очевидно простија од првобитне једначине има све своје корене имагинарне. Одређивање ових корена може бити на два начина: рачунски и графички.

Нека је дата једначина

$$f(x) = 0$$

Одредити њене имагинарне корене значи одредити све њене вредности a и b које ће бити такве, да вредност

$$x = a \pm bi$$

задовољава једначину. Ако ту вредност сменимо у полиному једначине, овај ће постати

$$f(a \pm bi)$$

и ако у њему раздвојимо реални и имагинарни део, добијамо

$$P(a,b) \pm i\, Q(a,b)$$

Да би једначина била задовољена, потребно је и довољно да буде у исто време

$$P(a,b) = 0 \qquad Q(a,b) = 0$$

Ако у овим двема једначинама смарато а и в као координате неке тачке, онда те једначине дефинишу две криве линије. Очевидно је да тражене вредности а и в нису ништа друго до координате пресечних тачака тих двеју кривих линија и то а апсциса а в ордината те пресечне тачке. Према томе да ли су те две криве линије конструисане само овлаш или прецизно имаћемо само овлашне податке о траженим имагинарним коренима или баш њихове прецизне вредности.

Ако би хтели чисто рачунски да одредимо а и в, имали би да решимо две једначине

$$P(a,b)=0 \qquad Q(a,b)=0$$

по двема непознатим а и в.

Примедба: Дешава се, да кад се једначина ослободи реалних корена, онда она буде сведена на квадратну, биквадратну и т. д. једначину, или биномну или реципрочну једначину, или у опште на какву једначину, која се може просто решити на раније показане начине; онда је најподесније решити тако добијену једначину.

Примери:

1. Наћи имагинарне корене једначине

$$x^2-2x+10=0$$

Ако извршимо смену

$$x=a+bi$$

добијамо једначину

$$(a+bi)^2-2(a+bi)+10=0$$

или ако ју уредимо

$$(a^2-b^2-2a+10)+i(2ab-2b)=0$$

и да би она могла постојати треба да је у исто време

$$a^2-b^2-2a+10=0$$

$$2ab-2b=0$$

Другу од ове две једначине можемо написати у облику

$$(a-1)b=0$$

одакле је или

$$a-1=0$$

или

$$b=0$$

Али пошто су корени дате једначине имагинарни, то $b=0$ отпада, па је дакче из друге једначине

$$a=1$$

а заменом у прву, добијамо једначину

$$b^2-9=0$$

одакле је

$$b=\pm 3$$

Према томе тражени корени су

$$x=1\pm 3i$$

2. Решити графички једначину

$$x^3-1=0$$

Ако извршимо смену

$$x=a+bi$$

добијамо једначину

$$(a+bi)^3-1=0$$

или ако ју уредимо

$$(a^3-3ab^2-1)+i(3a^2b-b^3)=0$$

и да би она могла постојати, мора у исто време да буде

$$a^3-3ab^2-1=0$$

$$3a^2b-b^3=0$$

Једначину 2. можемо написати у облику

$$(a\sqrt{3}+b)(a\sqrt{3}-b)b=0$$

и према томе се она распада на ове три једначине

$$a\sqrt{3}+b=0 \qquad a\sqrt{3}-b=0 \qquad b=0$$

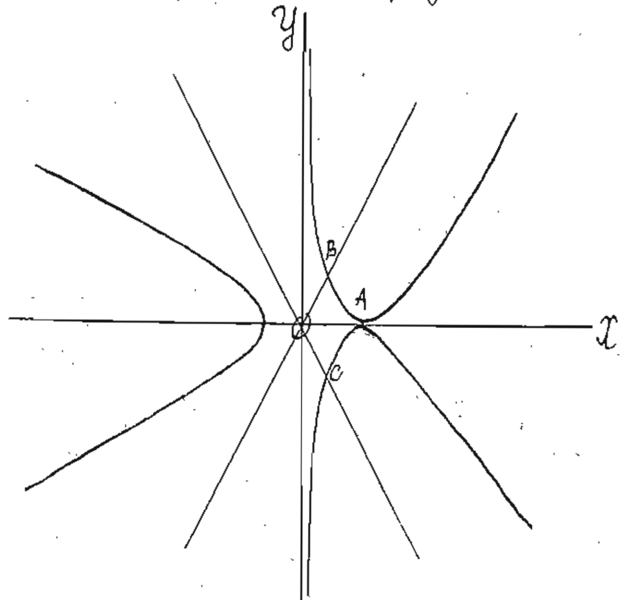
Сада имамо да конструишемо криве линије представљене једначинама 1. и 3. За криву линију 1. из које је

$$b^2=\frac{a^3-1}{3a}$$

имамо ову шему

a	0	1	2	3	4	−1	−2	−3	−4
b^2	$\pm\infty$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{26}{9}$	$\frac{63}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{28}{9}$	$\frac{65}{12}$
b	$\pm\infty$	0	±1	±1,6	±2,..	±0,..	±1,..	±1,7	±2,..

и према томе ако ју конструишемо видимо да она има три гране. Прве две од једначина 3. представљају две праве које се секу у координатном почетку, а трећа $b=0$ представља x-ну осовину.



Из слике видимо, да имамо три пресека једначина 1. и 3. и то: A, B и C а њихове координате су: $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, 0{,}8..)$ и $(\frac{1}{2}, -0{,}8...)$. За-

то су тражени корени
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{2} \pm i \cdot 0{,}8\ldots$$

Решавање алгебарских једначина код којих лева страна није полином.

Дешава се да једна алгебарска једначина непосредно дата у таквом облику да на њеној левој страни не стоји какав полином, већ какав израз по x-у који садржи н. пр. квадратне, кубне … корене или какве имениоце у којима кружи x. У таквим случајевима треба у опште пре сваког рада ослободити једначину таквих квадратних, кубних … корена и имениоца тако, да лева страна постане полином. Такво свођење може бити на разноврсне начине. Тако ако у једначини фигурише само један квадратни, кубни … корен, ваља га изоловати т.ј. члан који га садржи оставити на једну страну а све остале на другу, па ћемо се онда степеновањем ослободити таквог корена. Ако би имали више таквих корена, треба овако поступити најпре с једним, па с другим, … докле се свих не ослободимо. У по неким случајевима ово ослобођавање корена може бити на разне друге начине који ће зависити од природе задатка.

Имениоца се ослобођавамо простим множењем.

<u>Увод</u> Трансцендентне једначине су једначине у којима непозната количина x фигурише у таквом облику да су са њом извршене трансцедентне операције, као што су н. пр. једначине

$$a + b \log x = 0$$
$$1 - 3 \sin x = 0$$
$$x - e^{3x} = 0$$
и т. д.

Овакве се једначине у нечему разликују од алгебарских једначина, а у нечему се са њима подударају. Од разлика поменућемо н. пр. ове: зна се да свака алгебарска једначина има бар један коначан корен, међутим то не важи за сваку трансцедентну једначину. Тако н. пр. једначина

$$e^{x} = 0$$

нема ни један коначан корен, јер је она задовољена само за $x = -\infty$. Осим тога све особине алгебарских једначина које стоје у вези са степеном једначине, не важе више за трансцедентне једначине. Тако исто има велики број трансцедентних једначина за које не важи Rolle-ова теорема.

Међутим извесне особине алгебарских једначина важе и за трансцедентне једначине. Такве би особине биле ове:

1° ако су сви коефицијенти једначине бројни и то реални бројеви, онда, ако је $a+bi$ један имагинарни корен једначине, увек ће бити и $a-bi$ корен исте једначине. Доказ је апсолутно исти као код алгебарских једначина.

2° ако се на левој страни трансцедентне једначине

$$f(x)=0 \qquad 1.$$

смени најпре $x=a$ па онда $x=b$ и ако су добијени резултати $f(a)$ и $f(b)$ супротних знакова, једначина 1. мора имати између a и b бар један реалан корен; а ако су ти резултати истог знака, између a и b или нема ни један корен или је број тих корена паран. Доказ је опет исти онакав као код алгебарских једначина.

3° Descartes-ово, Fourier-ово и Sturm-ово правило у опште не важи за трансцедентне једначине, али Rolle-ова теорема важи у великом броју случајева, премда има изузетака кад не важи.

4° Целокупна теорија вишеструких корена коју смо имали код алгебарских једначина важи и за трансцедентне једначине. Тако н. пр. један корен

$$x=a$$

једначине 1. биће корен n-тога реда те једначине, ако је у исто време

$$f(a)=0 \quad f'(a)=0 \quad f''(a)=0 \quad \cdots \quad f^{n-1}(a)=0$$

а међутим

$$f^{n}(a) \gtrless 0$$

другим речима: један прост корен једначине 1. поништава само функцију f; један двојни корен једначине 1. поништава функцију f и њен први извод f'; један тројни корен поништава функције f и њен први и други извод и т. д.

Има велики број трансцедентних једначина које се каквом згодном сменом непознате количине могу свести на алгебарске.

Примери:

1. једначина

$$(\log x)^2+2\log x+1=0$$

сменом

$$\log x = y$$

даје нову једначину

$$y^2+2y+1=0$$

одакле је

$$y_{1,2}=-1$$

Решења по x-у добијају се решењем једначине

$$\log x=-1$$

одакле је

$$x_{1,2}=e^{-1} \quad \text{или} = 10^{-1}$$

2. једначина

$$\sin x=57$$

не може имати реалне корене али има имагинарне које треба наћи. Зна се да је

$$\sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

па је дакле

$$\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=57$$

или сменом

$$e^{xi}=t$$

добијамо једначину

$$t+\frac{1}{t}=114i$$

или

$$t^2-114it-1=0$$

а то је квадратна једначина коју умемо решити и ако су њени корени α_1 и α_2, за x добијамо вредности из

$$e^{xi}=\alpha_1, \quad e^{xi}=\alpha_2$$

При одређивању корена трансцедентне једначине може се наћи на ове разноврсне случајеве:

1° може се десити да једначина нема никакав коначан корен ни реалан ни имагинаран. Тако н. пр. једначина

$$e^{x}=0$$

задовољена је само вредношћу

$$x=-\infty$$

једначина

$$e^{-x}=0$$

задовољена је само вредношћу

$$x = \infty$$

и т. д.

2° дешава се да једначина има бескрајно много реалних а ни један имагинарни корен. Тако н. пр. једначина

$$\sin x = 0$$

има бескрајно много реалних корена а то су

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

а нема ни један имагинарни корен.

3° дешава се да једначина има бескрајно много имагинарних а ни један реалан корен, као н. пр. једначина

$$\sin x = 57.$$

4° дешава се да су решења једначине неодређена.

Кад има да се реши једна трансцедентна једначина прво што треба гледати јесте то, да ли се она каквом згодном сменом може свести или на алгебарску или на какву другу трансцедентну једначину, али која би била лакша за решавање. Ако је то немогуће, прибегава се непосредном решавању саме дате једначине. Ово је решавање двојако: графичко и рачунско.

Графичко решавање. Нека је дата једначина

$$f(x) = 0 \qquad 1.$$

Она се на разноврсне начине може написати у облику

$$\varphi(x) = \psi(x) \qquad 2.$$

где су φ и ψ две функције које зависе од природе случаја. При том треба гледати да те функције φ и φ буду што простије. Конструишимо сада две криве линије

$$y = \varphi(x) \qquad y = \psi(x) \qquad 3.$$

па потражимо њихове пресеке. Тада се може доказати ово: реални корени једначине 1. нису ништа друго до апсцисе тих пресечних тачака. Јер ако су: a и b апсциса и ордината једне пресечне тачке M, пошто та тачка задовољава у исто време обе једначине 3., биће

$$b = \varphi(a) \qquad b = \psi(a)$$

а одатле

$$\varphi(a) = \psi(a)$$

што значи да апсциса a задовољава једначину 2. која није ништа друго до другчије написана првобитна једначина 1 чиме је горње тврђење доказано.

Из тога се изводи ово упутство за графичко решавање једначине: треба да ту једначину 1. написати у облику

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

при том тежати, да функције φ и ψ буду што простије. Затим конструисати две криве линије

$$y = \varphi(x) \qquad y = \psi(x)$$

и наћи њихове пресечне тачке. Апсцисе тих пресечних тачака даће нам све реалне корене дате једначине.

Ако су криве прецизно конструисане, имаћемо прецизне вредности корена, а ако су оне само овлаш конструисане, имаћемо на тај начин само овлашна обавештења о реалним коренима и пр. о томе, колико свега има реалних корена, колико позитивних колико негативних, између којих се граница они налазе и т. д. и т. д.

Примери:

1. Дата је једначина

$$x - \cos x = 0$$

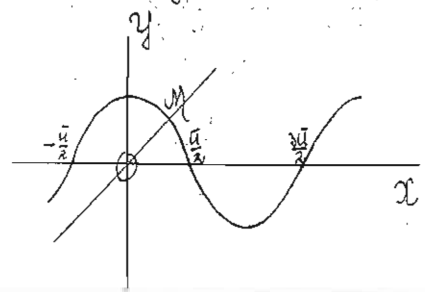
Ако ју напишемо у облику

$$x = \cos x$$

треба конструисати криве линије

$$y = x$$
$$y = \cos x$$

Прва од њих је права линија што пролази кроз координатни почетак и полови угао од 90° код O; друга пак је косинусна таласаста крива линија.



Ове две линије имају свега једну пресечну тачку M чија се апсциса налази између нуле и $\frac{\pi}{2}$. Дакле дата једначина има свега један реалан корен и он се налази између 0 и $\frac{\pi}{2} = 1{,}5708\ldots$

2. Дата је једначина

$$x^x = k$$

Логаритмисањем имамо

$$x \log x = \log k$$

или

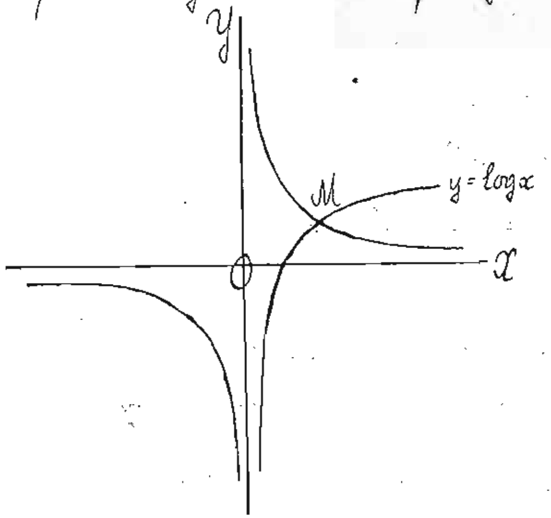
$$\log x = \frac{\log k}{x}$$

Конструисаћемо криве линије

$$y = \log x$$

$$y = \frac{\log k}{x}$$

Прва од њих представља логаритамску криву линију а друга хиперболу чије су асимптоте координатне осовине.



Као што се види постоји само једна пресечна тачка M чија је апсциса увек позитивна и већа од један и према томе дата једначина има свега један реалан корен, позитиван и већи од један.

3. Спец. случај примера 2.

$$x^x = 100$$

Одатле је

$$x \log x = 2$$

или

$$\log x = \frac{2}{x}$$

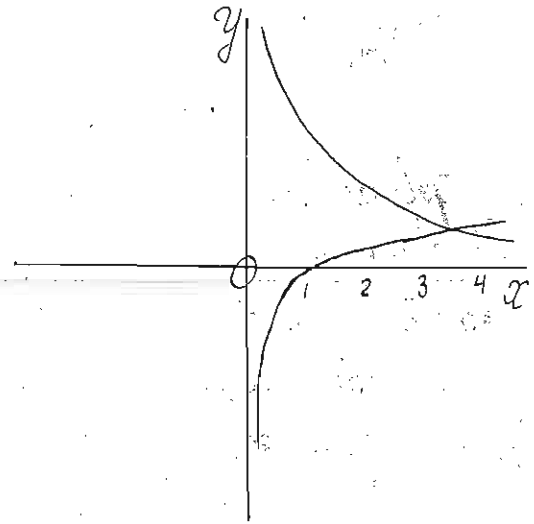
Имамо дакле да конструишемо ове две криве линије

$$y = \log x$$

$$y = \frac{2}{x}$$

Ради тачне конструкције имаћемо ову шему

x	0	1	2	3	4	∞
$\log x$	$-\infty$	0	0,..	0,47	0,6.	∞
$\frac{2}{x}$	∞	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0



Као што се из конструкције види имамо свега један реалан позитиван корен а његова се вредност, као што се из слике види, налази између 3 и 4.

4. Дата је једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\log x)^2}{b^2} = 1$$

Ако ову једначину решимо по $\log x$, добијамо

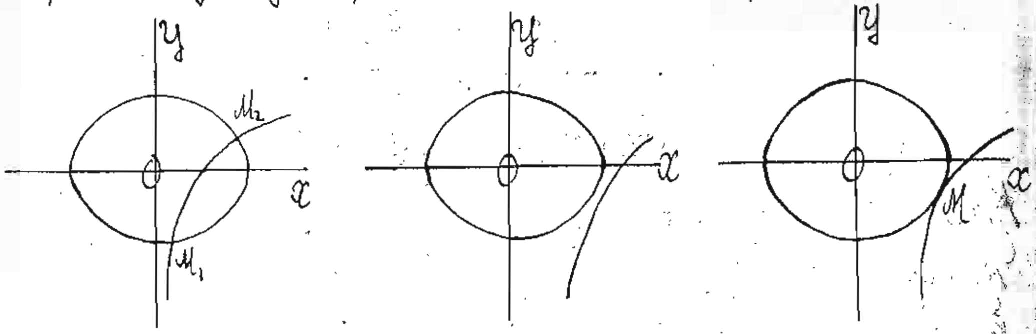
$$\log x = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

и према томе имамо да конструишемо ове две криве линије

$$y=\log x$$

$$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

При тој конструкцији могу наступити три случаја, као што се види из слика



У првом случају имамо свега два реална позитивна корена од којих један лежи између 0 и 1 а други је већи од један; у другом случају једначина нема ни један реалан корен; а у трећем има један двоструки реалан корен, јер се у M поклапају две пресечне тачке. Који ће од ова три случаја у датом примеру наступити зависи од величине a и b.

5. Дата је једначина

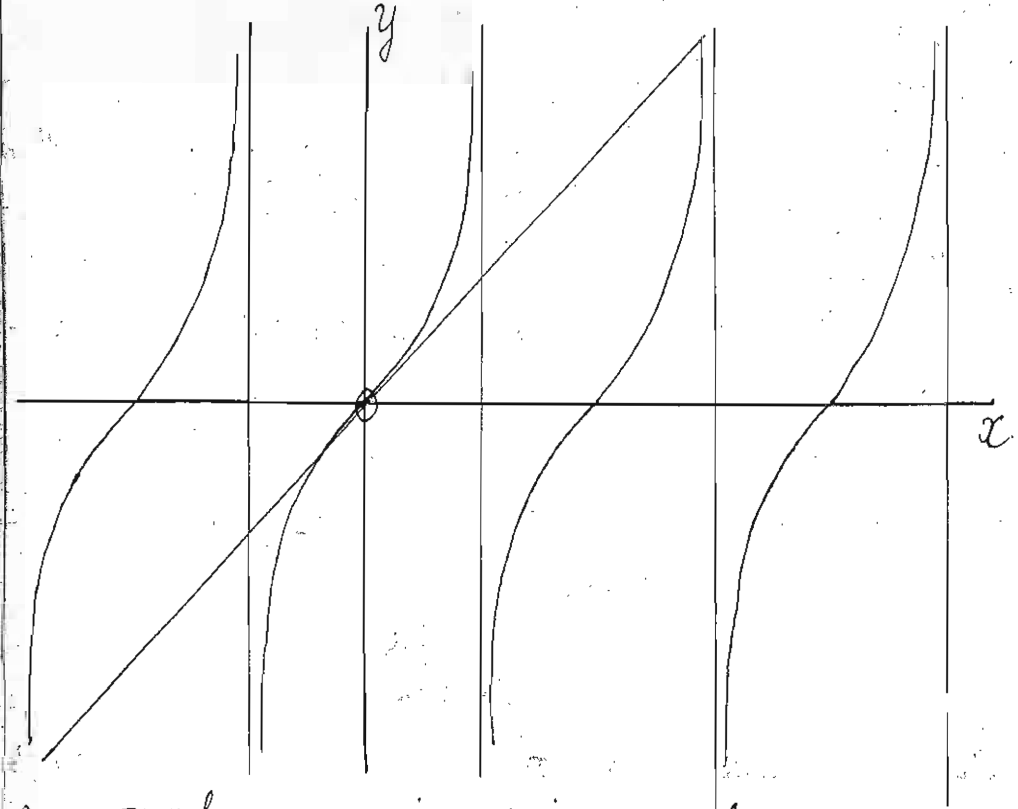
$$x=\operatorname{tg} x$$

Онда имамо да конструишемо ове две криве линије

$$y=x$$

$$y=\operatorname{tg} x$$

Прва од ових двеју једначина представ-



ља праву линију која полови угао од 90° код O, друга представља скуп од више кривих линија. Као што се види из слике линије представљене тим једначинама имају бескрајно много пресека а апсцисе тих пресека су и позитивне и негативне; према томе дата једначина има бескрајно много реалних, позитивних и негативних, корена. Имагинарне корене нашли би, кад у датој једначини извршимо смену

$$x = a + bi$$

и уредивши новодобијену једначину, уједначимо са нулом њен реални и имагинарни део, па решимо тако добијене једначине по a и b.

6. Колико реалних решења има једначина

$$\log x = x^2 - 10$$

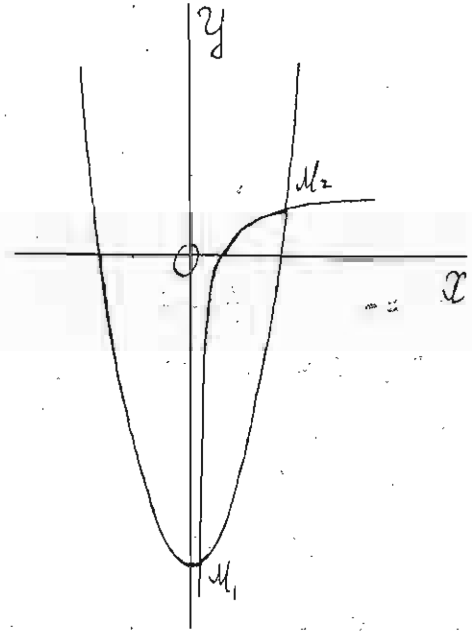
Овди имамо да конструишемо ове две криве линије

$$y = \log x$$
$$y = x^2 - 10$$

Пре но што приступимо тој конструкцији морамо да видимо какве вредности добија y за извесне специјалне вредности x-a. Према томе имаћемо ову шему

x	0	1	2	3	4	∞	-1	-2	-3	-4
$\log x$	$-\infty$	0	0,...	0,47	0,6	∞	уображено			
x^2-10	-10	-9	-6	-1	6	∞	-9	-6	-1	6

Према тој шеми имаћемо ову конструкцију:



Из ње видимо да конструисане криве линије имају свега две пресечне тачке: M_1 и M_2 чије су апсцисе позитивне и према томе дата једначина има свега два реална позитивна корена од којих је први мањи од један а други лежи између 3 и 4.

Рачунско решавање. И овди се ради на начин сличан ономе код алгебарских једначина. Прво се тежи да се за корене који се мисле одредити нађу границе између којих они леже. То се најлакше ради помоћу простог правила које смо имали код алгебарских једначина: ако су a и b таква два броја да $f(a)$ и $f(b)$ буду супротних знакова, онда једначина

$$f(x)=0$$

има бар један корен између a и b. Тако н. пр. ако је дата једначина

$$x - \cos x = 0$$

и ако на њеној левој страни ставимо x прво нулом па после са $\frac{\pi}{2}$ добијамо

$f(0) = -1$ $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ и пошто су ови резултати супротних знакова, то једначина има један корен између 0 и $\frac{\pi}{2}$.

За овај посао може се у многим случајевима употребити и Rolle-ова теорема и то онда кад се изводна једначина може решити. Тада Rolle-ова теорема потпуно решава задатак, тако да се сви корени могу пораздвајати и да се може тачно знати колико има реалних корена. И сама ова Rolle-ова теорема и њена употреба иста је онаква као код алгебарских једначина.

Кад су корени пораздвајани или бар кад за један корен који нас интересује знамо границе, онда се приступа приближеном одређивању тога корена.

За тај посао могу служити исте оне методе које смо имали код алгебарских једначина а то су: Regula falsi и Newton-ова метода. Ми ћемо навести још једну методу за то израчунавање, која се врло често употребљује. То је:

<u>Метода узастопних приближавања.</u> Нека је дата једначина

$$f(x)=0$$

Напишимо је, што је увек могуће, у облику

$$x = \varphi(x) \qquad 1.$$

Претпоставимо сад да знамо једну приближну вредност корена дате једначине н. пр.

$$x = x_0$$

и нека је

$$x = a$$

тачна вредност корена. Очевидно је да ће вредност a задовољавати једначину

$$a = \varphi(a)$$

Ставимо у функцији $\varphi(x)$ $x = x_0$ и означимо добијени резултат са x_1 тако да је

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

Ставимо опет у функцији $\varphi(x)$ $x=x_1$ и добијени резултат означимо са x_2 тако да је

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

Ставимо сада $x=x_2$ у функцији $\varphi(x)$ и означимо добијени резултат са x_3 тако да је

$$x_3 = \varphi(x_2)$$

и т.д. На тај начин тим узастопним стављањем добијамо низ вредности

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \qquad 2.$$

Означимо са α и β два броја између којих се налази цео низ бројева 2. Ми ћемо доказати ову теорему: ако је извод $\varphi'(x)$ мањи од један за све вредности x_a које се налазе између α и β низ узастопних количина 2. биће све ближе и ближе тачној вредности a траженог корена.

Да би теорему доказали приметићемо да у теорији извода постоји овакав образац

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

где c значи број који лежи између a и b и који се зове: образац за коначне прираштаје. Ако на место b узмемо вредност x_{n-1} где x_{n-1} означује један члан низа 2. и ако на место функције f узмемо функцију φ, образац за коначне прираштаје даће нам

$$\varphi(x_{n-1}) - \varphi(a) = (x_{n-1}-a)\varphi'(c) \qquad 3.$$

где c означује известан број који се налази између x_{n-1} и a. Пошто се c налази у поменутом размаку (α,β) за који смо претпоставили да је у њему

$$\varphi'(x) < 1$$

то ће бити

$$\varphi'(c) < 1$$

Образац 3. показује да ће тада бити

$$\varphi(x_{n-1}) - \varphi(a) < (x_{n-1}-a) \qquad 4.$$

Међутим по начину како смо дошли до x_n имаћемо

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

а тако исто видели смо напред да је

$$\varphi(a) = a$$

Заменом тога у неједначини 4. добија се ово:

$$x_n - a < x_{n-1} - a \qquad 5.$$

Неједначина 5. показује да је број x_n ближи тачној вредности корена a него што је број x_{n-1}, па пошто то вреди за ма какво n, то је тиме доказано да ће се низ бројева 2 све више и више приближавати тачној вредности корена a, што смо и хтели доказати.

На томе је основана метода узастопних приближавања при решавању једначина, која се састоји у овоме: треба дату једначину написати у облику

$$x = \varphi(x)$$

и на ма који начин одредити једну приближну вредност корена x_0, потом ће израчунати количину $\varphi(x_0)$ и означити је са x_1; потом x_1 израчунати количину $\varphi(x_1)$ и означити је са x_2 и исти посао продужити и даље. Ако је извод $\varphi'(x)$ позитиван за све тако нађене вредности $x_1 x_2 x_3 \dots$, онда ћемо бити сигурни да свака од њих ако је сматрамо као корен једначине даје већу тачност него претходни и да што даље с тим будемо ишли, имаћемо све тачније вредности корена. Имагинарни корени се већином одређују графички и то на исти начин који смо имали код алгебарских једначина, тражећи пресечне тачке двеју кривих линија које смо тако прецизирали. Тада ће нам апсцисе a тих пресечних тачака и ординате b представљати реалне и имагинарне делове тражених имагинарних корена.