ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА

СА ПРИМЕНАМА ИЗ ТЕОРИСКЕ ФИЗИКЕ

Ђор. Ј. Пујић, проф.

Векторска анализа

са применама из Теориске физике

Предавања
Д[р] Мил. Миланковића,
проф. Универзитета

Елементи рачуна са тачкама

Оно што бројеве карактерише јесу закони који за њих важе. Ти се закони могу свести на неколико главних формула и у Алгебарској Анализи ти су закони овако формулисани и класифицирани:

1° Сабирање:

а) асоцијативни закон

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

б) комутативни закон

$$a+b = b+a$$

2° Множење:

а) асоцијативни закон

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$$

б) комутативни закон

$$a\cdot b = b\cdot a$$

в) дистрибутивни закон

$(a+b)c = ac + bc$

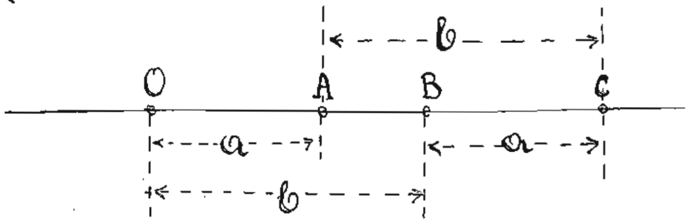
Бројеви, који овим законима одговарају, дају се представити тачкама једне праве. Одаберемо ли на једној правој једну сталну тачку О и одаберемо ли једну јединичну дужину, то можемо одстојање једне произвољне тачке А те праве, дакле дужину ОА, да

меримо са јединичном дужином. Резултату мерења даћемо знак + или − према томе: да ли се тачка А налази на позитивној или на негативној страни од тачке О. Свакој тачки ове праве одговара један известан број. Обратно: сваком реалном броју одговара једна тачка ове праве. Посматрану праву називамо: *бројном скалом реалних бројева*.

Узмимо да тачки А одговара општи број $\underline{a}$ или обратно онда је са тим бројем a одређена не само тачка А него и дужина ОА. Но не само то. Бројем a и дужином ОА можемо представити и сваку физикалну величину која је величином својом одређена т.ј. бројем a можемо одредити квантитативно својство једне физикалне величине. При томе можемо да разликујемо још и позитивно и негативно квантитативно својство, а смисао негативнога знака познат нам је из Математике и Геометрије.

Ма које физикалне величине које се могу одредити прецизно и једнозначно једним реалним бројем или једном дужином бројевне скале зовемо *скаларима*. Такве су н.пр. величине: маса, температура, рад и т.д.

Вратимо се бројевној скали. Дужина ОА нека представља број $\underline{a}$, дужина ОВ број $\underline{b}$. Којом је дужином представљен број $(a+b)$? Да на то питање одговорићемо ми ћемо на дужину ОА надовезати ду-



жину АС која је равна дужини b. Онда велимо да дужина ОС представља број a+b. Број b представили смо у овом случају са дужином АС која је равна но није идентична са дужином ОВ. Зато можемо сваки реалан број на бескрајно много начина представити комадима бројевне скале који су једнаки но нису идентични. Но обратно: једноме комаду бројевне скале одговара само један једини реалан број.

Из комутативног закона

$$a+b=b+a$$

следује да је

$$BC = a$$

Из слике следује

$$\bar{OA} + \bar{AC} = \bar{OC} \qquad 1)$$

$$\bar{OB} + \bar{BC} = \bar{OC}$$

и у опште за сваку произвољну тачку Е бројевне скале важи релација

$$\bar{OE} + \bar{EC} = \bar{OC}$$

Пођимо сада један корак даље, па дефинишимо дужину ОА као диференцију тачака А и О

$$\bar{OA} = A - O$$

Ово је једна конвенција, једна погодба, а морамо сада да испитамо да ли та дефиниција прецизно и једнозначно опредељује оно што смо њоме хтели да изразимо и да ли за знак — који смо сада употребили важе исти они закони које смо упознали у Алгебарској Анализи т.ј. да ли је потребно овај знак — који смо сада написали разликовати од знака − Алгебарске Анализе. Ако према постављеној дефиницији диференција тачака A и O представља само величину њиховог одстојања, онда је

$$A - O = O - A$$

Ова се једначина у животу често пута изражава н. пр.: „колико је од мене до тебе, толико је од тебе до мене". То можемо да кажемо само у оном случају, када нас интересује само величина одстојања а не и правац. Но у овом случају за знак − не важе закони Алгебарске Анализе, па морамо или тај знак разликовати од знака − или нашу конвенцију променити. Ми чинимо ово друго па допуњавамо нашу дефиницију: диференција двеју тачака $A - O$ представља величину њиховог одстојања (дужину) и правац, а смисао те дужине је од тачке O до тачке A. Сада диференције $A - O$ и $O - A$ не значе више једно исто, јер ова друга има противни смисао првој. Зато постоји једначина:

$$A - O = -(O - A)$$

Ова је једначина идентички задовољена и зато можемо остати при уговореној дефиницији.

Употребимо ли ову дефиницију, то можемо једначине 1.) да пишемо и овако:

$$\left.\begin{array}{l} A - O + C - A = C - O \\ B - O + C - B = C - O \\ E - O + C - E = C - O \end{array}\right\} \quad 2.)$$

Претпоставимо ли да за знаке + и − које смо сад написали важе познати закони Алгебарске Анализе, то су ове једначине идентички задовољене. Тако н. пр. следује из последње једначине помоћу асоцијативног и комутативног закона

$$\mathcal{E}-\mathcal{E}+C-O=C-O$$

Наша конвенција не побија се дакле оним законима који карактеришу знакове + и −.

Лежи ли тачка $\mathcal{E}$ изван дужине OC, то је очевидно

да постоји

$$OC+C\mathcal{E}=O\mathcal{E}$$

или

$$C-O+\mathcal{E}-C=\mathcal{E}-O$$

а одавде

$$\mathcal{E}-O+C-\mathcal{E}=C-O$$

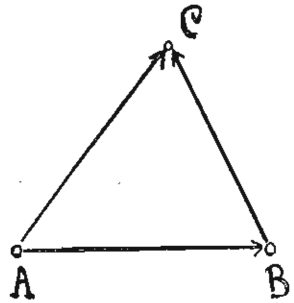
Последња једначина из једначина 2) задовољена је за сваки случај макар где тачка $\mathcal{E}$ на бројној скали лежала.

Пођимо сада за један важан корак даље тиме што ћемо под тачком $A, B, C, \ldots$ разумевати не само тачке бројевне скале него тачке нашег тродимензионалног простора. Када дакле кажемо тачка A, то имамо под тим да разумемо једну извесну одређену тачку нашега простора, као што у алгебри под бројем a разумемо један известан одређени број. Да би поједине тачке нашег простора могли сравњивати, одаберимо у њему једну непомичну тачку O, коју називамо тачком сравњивања. Симбол A означава дакле једну тачку простора. На који је начин та тачка одређена, то је за сада споредно. Ова би тачка могла бити н. пр. одређена са две координате, а могла би бити одређена и једним јединим бројем кад би простор био простор дискретних тачака и када би свака тачка била нумерисана.

Шта сада означава диференција $A-O$? Ми можемо нашу пређашњу дефиницију да раширимо и на овај начин:

случај: диференција тачака A−O представља управљену дужину која иде од тачке O ка тачки A. Та диференција представља дакле дужину OA и њену оријентацију. Док смо пре имали два смисла: + и − сада их имамо бесконачно много.

Одаберемо ли три произвољне тачке нашег простора: A, B и C, то нам диференција



B−A представља управљену дужину $\vec{AB}$; диференција C−B представља управљену дужину $\vec{BC}$, а диференција C−A управљену дужину $\vec{AC}$. Ако за знаке важе закони Алгебарске Анализе, то мора постојати једначина

$$B-A+C-B=C-A$$

јер је она идентички задовољена.

Шта казује ова једначина? Она казује да је збир управљених дужина $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ раван управљеној дужини $\vec{AC}$ тј.

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$

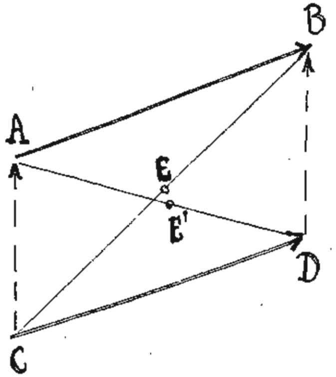
Из уговорених конвенција следује дакле да се две управљене дужине тако сабирају, кад се на једну од њих надовеже друга, при чему онда она управљена дужина, која иде од почетне тачке прве дужине до крајње тачке друге дужине представља збир првих двеју.

Леже ли ове три тачке A, B и C у једној правој, онда се геометриска адиција дужина своди на обичну адицију истоветних дужина. Закони дакле, које смо сада поставили нису у контрадикцији са досадањим законима геометрије, него само представљају њихово раширење.

Рекли смо да диференција тачака B−A представља једну управљену дужину простора дужине AB са смисла од A ка B. Исто тако представља диференција $D-C$ управљену дужину $\overrightarrow{CD}$. Што значи једначина

$$B-A = D-C$$

Наше досадање конвенције допуњавамо још овим: Диференције тачака $B-A$ и $D-C$ једнаке су, ако су управљене дужине које су њима одређене једнаке, паралелне и истога смисла. Те дужине не морају лежати једна на другој као што су и диференције на бројној скали једнаке и кад се не поклапају.



Из последње једначине следује

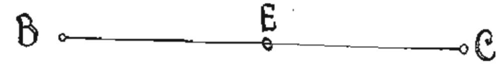
$$B-D = A-C$$

Тиме смо добили једну нову једначину између тачака. Она казу је да су управљене дужине $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CA}$ једнаке, паралелне и истога смисла, особина која следује и из својства паралелограма.

Но из ових једначина следује и ова:

$$B+C = A+D$$

Овде нам је потребна једна нова конвенција, јер збир тачака нисмо досад дефинисали. Та конвенција мора бити таква да са прећашњим не долази у колизију. Ми дефинишемо збир тачака $B+C$ као двоструку тачку E која лежи у половини праве BC.



$B+C$ представља двоструку тачку E која лежи у половини дијагонале BC; збир тачака $A+D$ одређује двоструку тачку E' која лежи у половини дијагонале AD. Из последње једначине следује да је:

$$2E = 2E'$$

или

$$E = E'$$

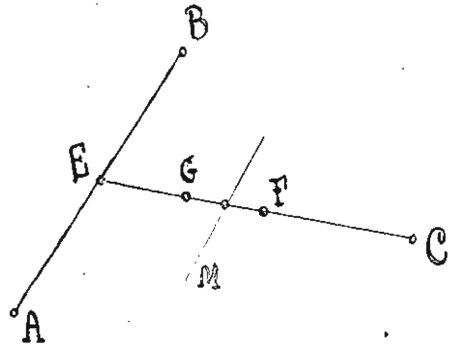
или

$$E - E' = 0$$

из чега следује да је управљена

дужина која спаја тачке E и E' равна нули, због чега се те тачке поклапају. И овој резултат следује из својства паралелограма: да му се дијагонале међу собом полове.

Имамо ли три тачке: A, B и C, то је збир тих трију тачака представљен са:



$$A+B+C=(A+B)+C=$$

збир $A+B$ представља двоструку тачку E која полови дужину AB те је стога горња једначина

$$=2E+C=$$

Употребљујући правило асоцијације можемо овај збир да трансформишемо даље овако

$$=E+(E+C)=$$

двоструку тачку E раставили смо дакле у две једноставне, па смо једну од њих сабрали са тачком C. Тај збир $E+C$ раван је двострукој тачки F која полови дужину EC, те је

$$E+(E+C)=E+2F=(E+F)+F$$

Збир $E+F$ представља двоструку тачку G која полови дужину EF т.ј.

$$(E+F)+F=2G+F=G+(G+F)$$

Продужимо ли досадање операције, то ће се те три тачке на које редукујемо збир $A+B+C$ бесконачно међусобно приближавати и тежити једном граничном положају M, па ћемо зато као резултат добити једну троструку тачку која лежи у тачки M. Положај те тачке M одредићемо ако уочимо да посматрамо кретање једне од задатих тачака при предузетим трансформацијама. Тако се н.пр. тачка C помакла у положај F, из положаја F у положај G .... при чему F полови дужину EC, G дужину EF.... Означимо ли дужину EC са k, то видимо да ће бити

$$\varepsilon M = \lim\left\{\frac{h}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h}{8}-\frac{h}{16}+\dots\right\} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{h}{2}\cdot\frac{(-\frac{1}{2})^n-1}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{h}{2}\cdot\frac{1}{3/2}=\frac{h}{3}$$

Тачка M лежи дакле у трећини дужине EC, зато можемо да кажемо да: збир тачака A, B и C раван је трострукој тачки M, која лежи у тежишту тих трију тачака.

Имамо ли збир од четри тачке

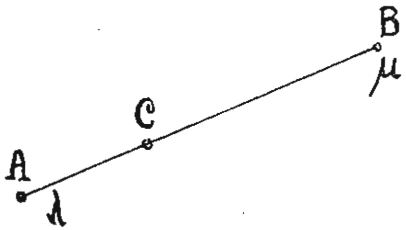
$$A+B+C+D$$

то ћемо саставити сада прво прве три а тако добијени резултат са четвртом тачком. Индуктивним закључивањем можемо се уверити да ће та четворострука тачка лежати у тежишту тачака A, B, C и D.

Истим тим закључивањем долазимо до резултата да ће збир од n тачака бити једнак n-тострукој тачки која лежи у тежишту тих n тачака. Разуме се само по себи да морамо претпоставити да су те тачке тачке једне исте равни. Можемо претпоставити да су неке од заданих тачака двоструке, троструке и n-тоструке тачке, а можемо досадање појмове тако раширити да узмемо да ти бројеви $m, n, \dots$ који нам означују многострукост тачака нису цели бројеви већ произвољни реални бројеви. Те бројеве називамо мултипликитетима тачака, па ћемо нашу дефиницију о сабирању тачака овако да раширимо: збир $\lambda A+\mu B$, дакле збир двеју тачака A и B од којих прва има мултипликитет λ а друга μ, је тачка C која има мултипликитет $\lambda+\mu$. Дакле

$$\lambda A+\mu B=(\lambda+\mu)C$$

1.)



и која дели дужину AB у размери $\lambda:\mu$ т.ј.

$$AC : CB = \mu : \lambda$$

Збир трију тачака A, B и C са мултипликитетима λ, μ и ν

представља тачку D која има мултиплицитет $\lambda+\mu+\nu$ а лежи у тежишту тачака A, B и C, ако супонирамо да ове тачке имају масе λ, μ, ν, т.ј.

$$\lambda A + \mu B + \nu C = (\lambda+\mu+\nu) D \qquad 2)$$

Појам адиције тачака поклапа се дакле потпуно са тражењем њихова тежишта и зато је Möbius, оснивалац овога рачуна са тачкама, назвао тај рачун барицентричким (Der baryzentrische Kalkül).

Индуктивним закључивањем лако је проверити, а следи је у осталом директно из елементарног принципа Механике, да је

$$\lambda A + \mu B = \mu B + \lambda A$$

$$(\lambda A + \mu B) + \nu C = \lambda A + (\mu B + \nu C)$$

јер кад тражимо тежиште трију тачака, то можемо одредити прво тежиште првих двеју, па тражити тежиште тако добивене тачке и треће тачке; а можемо одредити тежиште друге и треће тачке па добијени резултат саставити с првом. Зато важи за адицију тачака комутативни и асоцијативни закон адиције и зато не морамо знак + који смо при том употребили разликовати од обичног знака +.

Важно је приметити да је у једначинама 1) и 2) збир коефицијената леве стране раван коефицијенту десне стране. Ти коефицијенти могу бити и негативни, па ће збир

$$\lambda A - \mu B = (\lambda - \mu) C$$

представљати тачку C мултиплицитета $\lambda - \mu$ која лежи на правој AB изван дужине AB тако да буде

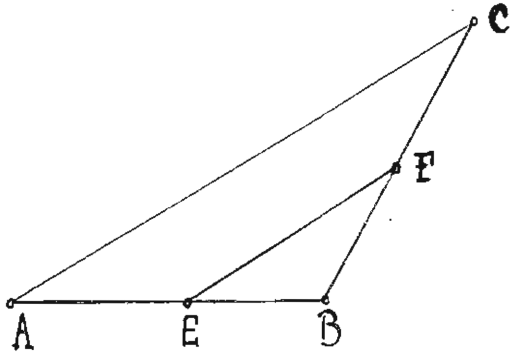
$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\mu}{\lambda}$$

Имали смо једначину

$$B - A + C - B = C - A$$

која је идентички задовољена и која у овом облику казује да је збир управљених дужина $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ раван управљеној дужини $\vec{AC}$ т.ј.

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$$



Горњу једначину можемо написати у овом облику

$$(B+C)-(A+B)=C-A$$

Збир $B+C$ представља двоструку тачку F која полови дужину BC; збир $A+B$ представља двоструку тачку E која полови дужину AB, па је зато

$$2F-2E=C-A$$

или

$$2(F-E)=C-A$$

диференција $F-E$ представља управљену дужину EF, па је зато

$$2\vec{EF}=\vec{AC}$$

Ова једначина казује да је управљена дужина EF два пута узета равна, паралелна и истога смисла са дужином AC. Ово својство следује и из принципа елементарне геометрије.

Једначину 1)

$$\lambda A+\mu B=(\lambda+\mu)C$$

можемо и у овом облику написати

$$\lambda A+\mu B+\nu C=0$$

одакле

$$\lambda+\mu+\nu=0$$

Ова друга једначина уједно је и услов да те три тачке A, B и C леже у истој правој. Ако збир $\lambda+\mu+\nu$ није раван нули, онда збир тих трију тачака представља једну четврту тачку P, па је

$$\lambda A+\mu B+\nu C=(\lambda+\mu+\nu)P$$

или

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu}A+\frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu}B+\frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu}C=P$$

Ставимо ли

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu}=x_1 \qquad \frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu}=x_2 \qquad \frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu}=x_3$$

то је

$$x_1A+x_2B+x_3C=P$$

Величине x_1, x_2 и x_3 називају се <u>барицентричким координатама</u> тачке Р.

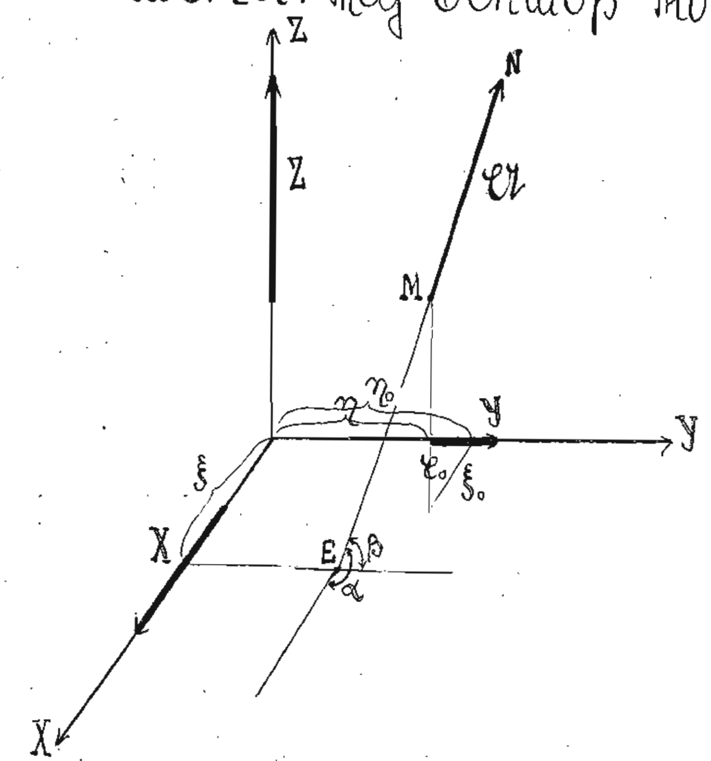
Ако су задане у равни три сталне тачке A, B и C то помоћу тих координата x_1, x_2 и x_3 које су коефицијенти без димензија можемо да одредимо сваку произвољну тачку праве линије (равнине). Отступимо ли у простору, то ћемо морати одабрати четри сталне тачке. Видимо сада шта представља у смислу Möbius-овог барицентричног рачуна дужина A-B. Мултиплицитет тачке A је 1 а тачке B је -1; зато би резултат представљао једну тачку мултиплицитета 1-1 т.ј. нула а та тачка лежала би у бескрајности. Према томе овај збир не представља никакву тачку, те му зато можемо супонирати значење Грасманове диференције са којом дакле Möbius-ов рачун сабирања тачака не долази у колизију.

Увод

<u>Дефиниција скалара и вектора</u>. Величине које нам се указују у физици можемо груписати у разне групе. Најјединственије су од тих величина т. зв. <u>скаларне величине</u> или <u>скалари</u>. То су такве величине које су са једним јединим бројем, који даје њихов однос према једној одабраној јединици, потпуно одређене. Такве су величине н. пр. запремина, маса, температура и т. д.

Осим ових величина, које можемо такође назвати: величинама са једном карактерном особином, имамо у физици још и управљених величина т. зв. <u>вектора</u>. За одређивање вектора није довољан један једини број. Они дакле имају више карактерних особина и према броју тих особина делимо векторе у следеће групе:

<u>1° Слободни вектори</u>. То су такве величине за чију је одредбу потребно: њихова апсолутна величина, смисао и правац у простору, правац који није везан за једну фиксирану праву досада, него се може паралелно самоме себи на произвољно место простора да помакне. Ови вектори идентични су дакле са Грасмановим диференцијама тачака. За разлику од скалара, које ћемо означавати са латинским словима, означиваћемо векторе готским словима. Један слободан вектор $\mathfrak{A}$ биће према томе одређен, ако знамо његову апсолутну величину $|\mathfrak{A}|$, и углове α и β што их правац тог вектора заклапа са осама једног произвољно изабраног координатног система. Тај вектор може бити одређен такође са његовим трима пројекцијама X, Y, Z на коорд. осама тога коорд. система.



Слободни вектор је дакле једна <u>величина са три карактерне особине.</u> Ако је слободни вектор везан за једну познату раван, онда су за његову одредбу довољне две величине н. пр. његове пројекције X и Y на осе једног коорд. система у равнини. Слободни вектор везан за равнину је према томе једна величина са две карактерне особиће. Један типични репрезентант слободних вектора то је оса једног спрега сила, које утичу на једно круто тело. Ми смо у Рационалној Механици учили, да је један спрег сила које утичу на круто тело потпуно одређен њиховом осом. То је једна управљена величина чији је износ раван статичком моменту спрега, чији је правац нормалан на равнину и које смисао показује на ону страну те равнине са које посматрани спрег заокреће у позитивном смислу. Показали смо да се такав спрег сила може произвољно помицати у његовој равнини и да се и та равнина може помицати паралелно самој себи. Зато можемо и осу тога спрега помицати на произвољно место простора. Оса спрега сила је дакле један слободан вектор.

2° Вектори везани за праву

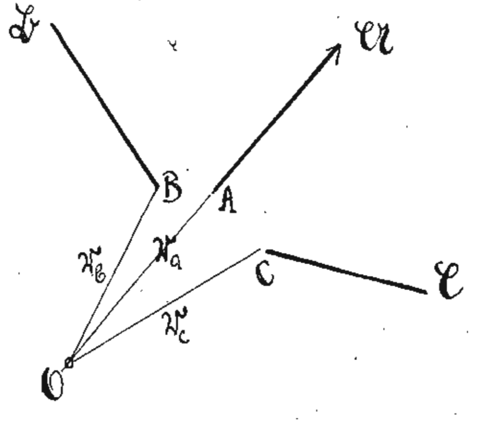
. То су такве управљене величине за чију је одредбу потребна њихова апсолутна величина, права простора у којој они дејствују и смисао. Ти се вектори могу дакле у правој, у којој они дејствују, произвољно помицати, зато се често пута и каже да су то такви вектори, који клизе по правој. Такав је један вектор биће н. пр. одређен његовом апсолутном величином $|\mathfrak{V}|$, угловима α и β што га његов правац склапа са коорд. осама и са координатама ξ и η његове продорне тачке. Овакав је вектор одређен са пет величина и ми га можемо назвати *вектором са пет карактерних особина*. Један типични репрезентант вектора везаних за праву то је сила која дејствује на круто тело. Зна се да се таква сила може произвољно да помиче у својој правој.

3° Вектори везани за тач-

ку. То су такве управљене величине које су одређене својом нападном тачком, правцем, смислом и величином. Такав један вектор може бити одређен координатама ξ_0, η_0 и ζ_0 своје нападне тачке и са своје три пројекције X, Y и Z. Такав вектор може бити одређен и са координатама своје почетне тачке M и своје крајње тачке N. Означимо координате тачке N са ξ_1, η_1 и ζ_1, то постоје једначине

$$X = \xi_1 - \xi_0 \quad Y = \eta_1 - \eta_0 \quad Z = \zeta_1 - \zeta_0$$

Вектор везан за тачку је према томе једна _величина са шест карактерних особина_. Посматрамо ли систем вектора $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ .... који су везани за тачке A, B, C ... простора и одаберемо ли у простору једну



тачку сравњивања O, то се диференције тачака

$$A - O = r_a \quad B - O = r_b \quad C - O = r_c$$

могу сматрати опет као вектори. Сваки од тих вектора одређен је са три величине, јер је уговорено да имају заједничку нападну тачку O. Ти вектори играју дакле улогу слободних вектора и један од посматраних вектора н. пр. $\mathfrak{A}$ биће одређен ако будемо познавали вектор r_a и три пројекције вектора $\mathfrak{A}$ т.ј. везани вектор $\mathfrak{A}$ можемо представити и са два слободна вектора.

Сваком вектору $\mathfrak{A}$ можемо доделити једну скаларну величину A која представља његову величину према одабраној јединици. Ту величину A називамо _износом вектора_. Вектор чији је износ раван јединици зовемо _јединичним вектором_ а пишемо га са $\mathfrak{A}_0$. Вектор којега је износ A биће једнак

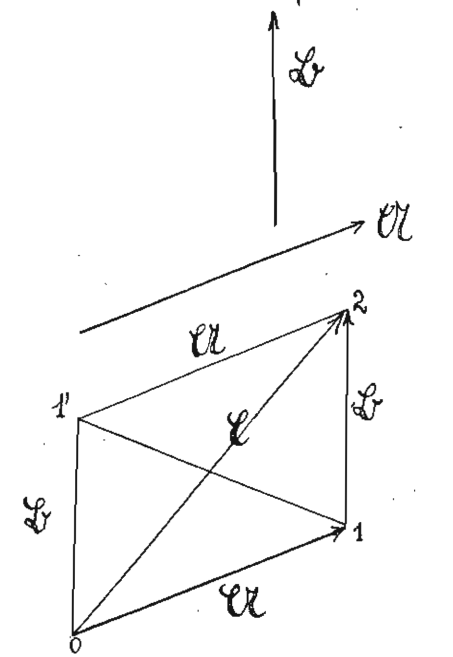
$$\mathfrak{a} = A \cdot \mathfrak{a}_0$$

Димензију вектора (ако је вектор н. пр. брзина, онда има димензију $\frac{cm}{sec}$; ако је акцелерација $\frac{cm}{sec^2}$ и т. д.) приписујемо увек износу вектора тако да је јединични вектор без димензија.

Ми ћемо се сад забавити само са слободним векторима.

Сабирање слободних вектора

Два слободна вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ сабирају се тако, да се на вектор $\mathfrak{a}$ надовеже вектор $\mathfrak{b}$ тако да почетна тачка његова коинцидира са крајњом тачком вектора $\mathfrak{a}$. Вектор $\mathfrak{c}$ који иде од почетне тачке 0 вектора $\mathfrak{a}$ до крајње тачке 2 вектора $\mathfrak{b}$ представља векторски збир вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.



Ова конвенција поклапа се потпуно са конвенцијом о сабирању управљених дужина, коју смо упознали у Елементима Грасманове теорије. Да смо на тачку 0 били надовезали прво вектор $\mathfrak{b}$ па на овај надовезали вектор $\mathfrak{a}$, добили би исти резултат јер је опет паралелограм. Из тога следује

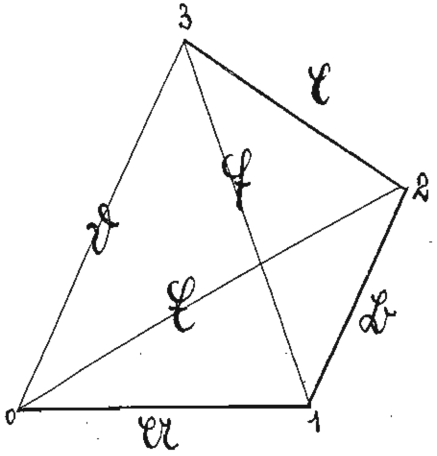
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

или

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

Ми смо увели за сабирање вектора знак + и за тај знак важи комутативни закон.

Имамо још да испитамо да ли за тај знак + важи и закон асоцијацивни. Ако је то случај, онда уведени знак + не морамо да разликујемо од знака + Алгебре.



Имамо ли да саберемо векторе $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, то ћемо збир тих трију вектора добити ако збиру првих двају $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ додамо вектор $\mathfrak{c}$.

Збир $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ представљен је вектором $\mathfrak{e}$. Надовежимо вектору $\mathfrak{e}$ онда вектор $\mathfrak{c}$. Онда нам вектор $\mathfrak{d}$ представља збир вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ т.ј.

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$$

Вектор $\mathfrak{f}$ представља нам збир вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ т.ј.

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

па из троугла 013 следује да је

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{f}$$

или

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$$

Зато је

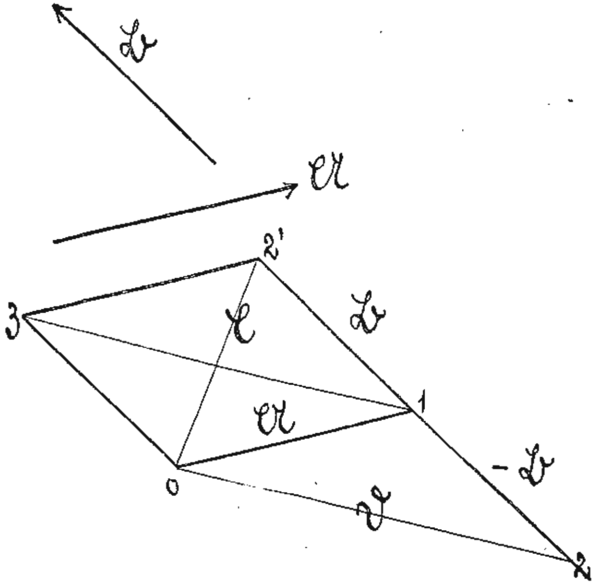
$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$$

Из овога видимо да за сабирање вектора важи и асоцијацивни закон и зато знак + не морамо разликовати од обичног знака + Алгебре. Неки научари уводају за сабирање вектора, које називају геометриском адицијом, засебан знак који неки означују са $\dotplus$ а неки са (+). Ми специјалног знака нећемо уводити, јер нам тачка слова већ казују да имамо посла са векторима.

Субтракција вектора. Имамо

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B})$$

Ова нам једначина своди одбијање вектора на сабирање; ваља само другом вектору да променимо знак тј. смисао. Ако имамо да



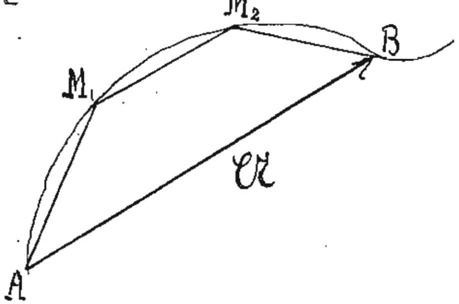
одбијемо вектор $\mathfrak{B}$ од вектора $\mathfrak{A}$ ми ћемо на крајњу тачку 1 вектора $\mathfrak{A}$ надовезати вектор $-\mathfrak{B}$ који је паралелан и једнак вектору $\mathfrak{B}$ а противнога смисла. Онда нам вектор $\mathfrak{D}$ који иде од тачке 0 до тачке 2 представља диференцију вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Вектор $\mathfrak{C}$ нам представља према пређашњем збир вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тј.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

Конструишемо ли паралелограм 012'3 то видимо да је дијагонала 31 тога паралелограма једнака, паралелна и истога смисла вектору $\mathfrak{D}$. Зато можемо да кажемо: дијагонале паралелограма што га два вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одређују представљају нам једна збир а друга разлику тих двају вектора.

Ако вектори имају исти правац, онда је њихово сабирање и одбијање идентично са сабирањем и одбијањем скаларних величина.

Уочимо ли



једну криву, то је вектор $\mathfrak{A} = AB$ једнак збиру вектора $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_2B}$. Тај збир остаје непрожењен за сваки полигон што га нацртамо између A и B. Повећано ли број страна тога полигона, то ће њихова величина бити све мања. Непрестаним повећавањем добијамо бескрајан број бескрајно малих вектора, које ћемо означивати са dl. Такав бескрајно мали вектор зовемо <u>линиским елементом</u>. Збир тих бескрајно много бескрајно малих вектора између тачака A и B представљен је интегралом између граница A и B. Зато можемо да кажемо

$$\mathfrak{A} = \int_A^B dl$$

Уочимо једну затворену криву.

То је интеграл линиских елемената дуж целе те криве раван нули, јер у томе случају тетива AB изчезне. Ми ћемо то да означимо овако

$$\int_L dl = 0$$

где индекс L означава да се интеграл има протегнути на једну затворену криву.

<u>Множење вектора са скаларним величинама</u>. Дефинисали смо

$$\mathfrak{A} = A \cdot \mathfrak{A}_0$$

где $\mathfrak{A}_0$ означава јединични вектор а вектор $\mathfrak{A}$ вектор истог правца но A пута већи од јединичног вектора. Скалар A можемо представити као продукт других двају скалара m и n т.ј.

$$A = mn$$

па је зато

$$\mathfrak{A} = mn\mathfrak{A}_0$$

Продукт $n\mathfrak{A}_0$ представља опет један вектор $\mathfrak{B}$ т.ј.

$$n\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}$$

истог правца као јединични вектор но n-пута већи. Зато је

$$\mathfrak{A} = m\cdot(n\cdot\mathfrak{A}_0) = m\cdot\mathfrak{B}$$

Рекли смо да вектор $\mathfrak{A}$ има исти правац као јединични вектор $\mathfrak{A}_0$.

Исто тако и вектор $\mathfrak{B}$. Зато вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имају такође исте правце. Последња једначина казује нам да се множењем вектора са скаларним величинама његов правац не мења. У овоме случају је дакле множење исто тако као и множење на једној одређеној скали и зато за множење вектора са скаларним величинама важе закони обичне Алгебре. Тако је н. пр.

$$m \cdot n \cdot \mathfrak{A} = m(n \cdot \mathfrak{A}) = (m \cdot n) \cdot \mathfrak{A}$$

тј. важи асоцијативни закон мултипликације. Исто тако утварамо да је

$$m \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot m$$

т. зн. да важи и комутативни закон мултипликације. Такође

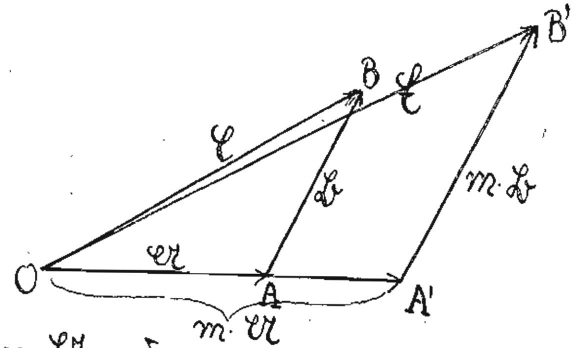
$$(m+n) \cdot \mathfrak{A} = m \cdot \mathfrak{A} + n \cdot \mathfrak{A}$$

Сви ови закони излазе из тога што је мултипликација сведена на мултипликацију на једној фиксираној скали. Овај последњи закон казује да у овом случају важи дистрибутивни закон мултипликације ако се множени збир састоји из скаларних величина. Имамо још да испитамо да ли важи дистрибутивни закон мултипликације ако се множени збир састоји из вектора т.ј. да ли важи закон

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})m = m\mathfrak{A} + m\mathfrak{B}$$

Сада није множење дужина истог правца. Означимо

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$



Умножимо ли вектор $\mathfrak{A}$ са фактором m то нека вектор $m \cdot \mathfrak{A}$ буде представљен дужином OA'; вектор $m \cdot \mathfrak{B}$ нека буде представљен дужином $A'B'$. Онда је збир тих двају вектора раван вектору $\mathfrak{C}'$, дакле

$$m\mathfrak{A} + m\mathfrak{B} = \mathfrak{C}'$$

Троуглови OAB и OA'B' су слични јер

су им стране OA и OA' и AB и A'B' паралелне и пропорционалне. фактор тога капацитета раван је m. Зато страна OB' мора бити паралелна или боље рећи мора се поклапати са правцем стране OB и мора бити m-пута већа. Зато је

$$\mathfrak{c} = m \cdot \mathfrak{C}$$

па је зато

$$m \cdot \mathfrak{a} + m \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = m \cdot \mathfrak{C} = m \cdot (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$$

чиме је доказано да и у овом случају важи дистрибутивни закон. Ваља имати на уму да дистрибутивни закон важи онда, ако је један од фактора скаларна величина. Да ли ће тај закон важити ако су оба фактора скаларне величине ми ћемо се касније уверити.

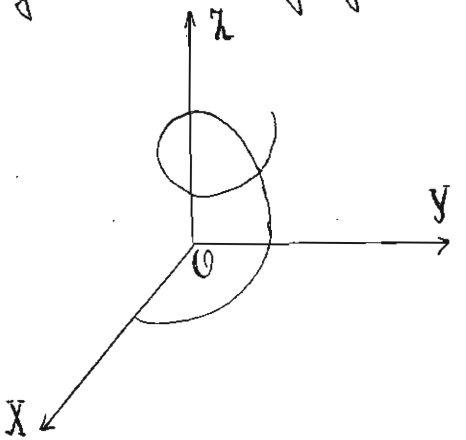
Темељни (основни) вектори.

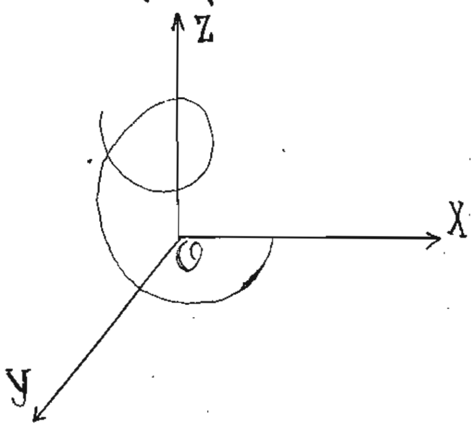
Према пређашњем добијамо сабирањем вектора опет један вектор и зато можемо сваки вектор на бесконачно много начина представити као збир других вектора. Но често је пута од користи одабрати те векторе у које посматране векторе растварамо тако да им је правац фиксиран у простору. Од користи је такође одабрати те векторе тако да стоје нормално један на други. Јединичне векторе у тим правцима нормалне један на други означаваћемо увек са овим словима

$$\mathfrak{i},\ \mathfrak{j},\ \mathfrak{k}$$

Врло је важна конвенција о међусобном положају тих темељних вектора. У Аналитич. Геометрији употребљавају се два различна ортогонална коорд. система који се називају: <u>енглески</u> и <u>француски</u>

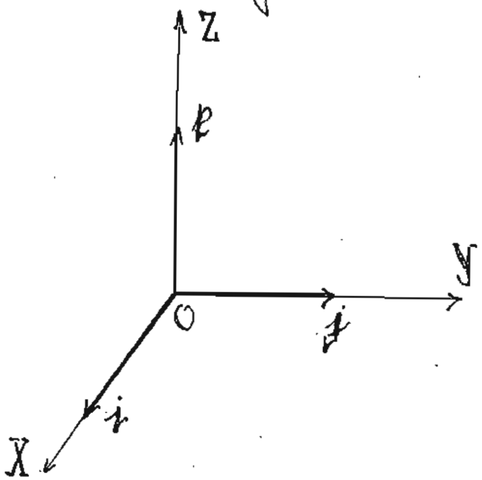
Сада ћемо да промотримо њихове основне разлике и да се одлучимо за један или други.





енглески - десни   француски - леви

Окренемо ли те системе око осе z у томе смислу да позитивна страна осе x допази најкраћим путем у позитивну страну осе y и извађамо ли при томе транслацију у позитивни правац осе z, то ћемо у првом случају код првог десно а у другом један лево завијени хеликс добити. Први од ова два система зове се такође <u>десни</u>, а други <u>леви</u>. Немци их зову често пута: први <u>вајнкоординатни</u> а други <u>хопфенкоординатни</u>. Десни систем може се представити са палцем (x), великим прстом (y) и кажипрстом (z) леве руке; леви систем може бити представљен истим прстима на десној руци. Огледањем оса на једној од коорд. равнина прелази леви систем у десни и обратно. Исто тако инверсијом смисла коорд. оса настаје из десног система леви и обратно. Ми ћемо се у будуће увек служити <u>десним</u> системом и одабраћемо наше јединичне векторе тако да се подударају са осама нашег десног система. Вектори i, j, k имају једнаке дужине. Онда можемо произвољни вектор a да пред-



ставимо помоћу та три основна вектора

$$\mathfrak{A} = A_1 \cdot i + A_2 \cdot j + A_3 \cdot k$$

Скаларне величине A_1, A_2 и A_3 зовемо <u>компонентама</u> вектора.

Ова читава метода растављања вектора у три основна правца простора није ништа друго него представљање вектора помоћу Аналит. Геометрије. Ми смо на овај начин представили вектор $\mathfrak{A}$ помоћу три скаларне величине A_1, A_2, A_3 које одговарају компонентама x, y, z Аналит. Геометрије.

Други један вектор $\mathfrak{B}$ може бити изражен овако

$$\mathfrak{B} = B_1 \cdot i + B_2 \cdot j + B_3 \cdot k$$

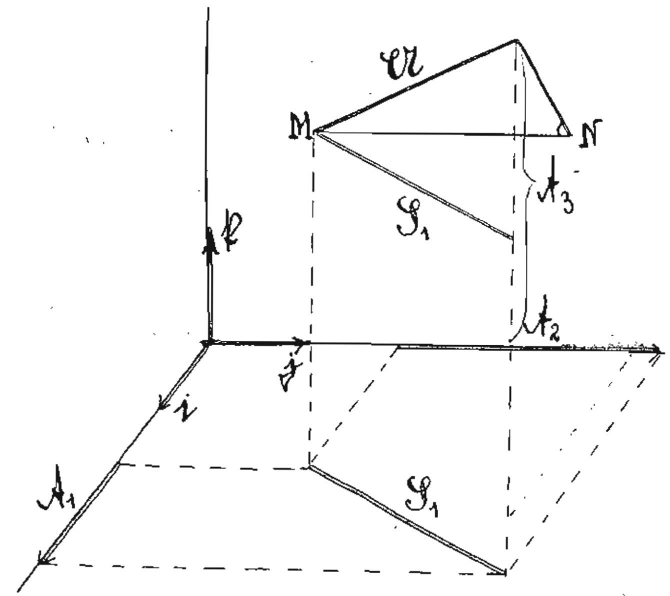
Оћемо ли да изразимо да су та два вектора једнака т.ј. исте величине, правца и смисла, то онда морају бити задовољене једначине

$$A_1 = B_1 \quad A_2 = B_2 \quad A_3 = B_3$$

Векторска једначина

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

изражена је према томе са три скаларне једначине, зато Енглези, специјално Гибс, пишу ову једначину овако



$$\mathfrak{A} \overset{3}{=} \mathfrak{B}$$

Из слике имамо

$$S_1^2 = A_1^2 + A_2^2$$

$$|\mathfrak{A}|^2 = S_1^2 + A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$\cos(\mathfrak{A}, j) = \frac{A_2}{|\mathfrak{A}|}$$

$$\cos(\mathfrak{A}, i) = \frac{A_1}{|\mathfrak{A}|} \qquad \cos(\mathfrak{A}, k) = \frac{A_3}{|\mathfrak{A}|}$$

Квадрирањем и сабирањем добијамо

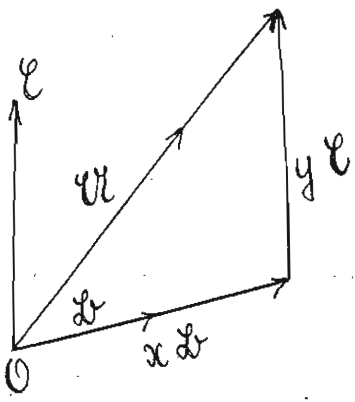
$$\cos^2(\mathfrak{A}, i) + \cos^2(\mathfrak{A}, j) + \cos^2(\mathfrak{A}, k) =$$

$$= \frac{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}{|\mathfrak{A}|^2} = 1$$

Значење неких векторских једначина

1° $\mathfrak{a} = x\mathfrak{b} + y\mathfrak{c}$

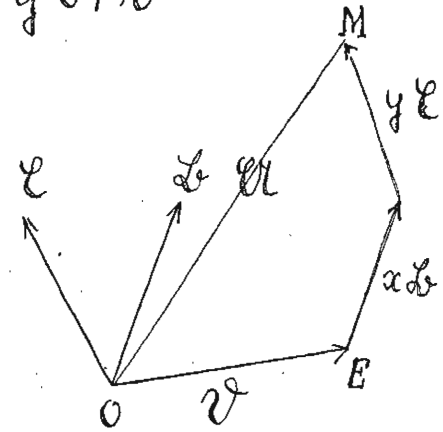
Шта представља ова једначина ако су x и y променљиве скаларне величине? $x\mathfrak{b}$ означава један вектор истог правца као и вектор $\mathfrak{b}$; $y\mathfrak{c}$ означава један вектор истог правца као вектор $\mathfrak{c}$. Вектор $\mathfrak{a}$ представља збир вектора $x\cdot\mathfrak{b}$ и $y\cdot\mathfrak{c}$. Ако се x и y мењају



онда вектор $\mathfrak{a}$ описује једну равнину, која пролази кроз тачку O и садржи векторе $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ у себи. Једначина 1° може се дакле сматрати као <u>векторско-аналитички представник једне равнине</u>. Како су вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ слободни, то се могу паралелно самом себи да помакну, па се и равнина представљена једначином 1° може паралелно самој себи да помакне.

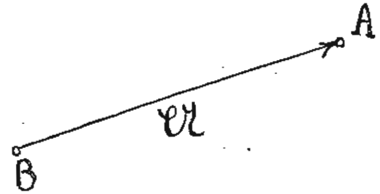
2° $\mathfrak{a} = x\mathfrak{b} + y\mathfrak{c} + \mathfrak{d}$

Мења ли се x и y, то крајња тачка M вектора $\mathfrak{a}$ описује једну равнину која иде кроз крајњу тачку E вектора $\mathfrak{d}$ а паралелна је векторима $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.



3° $A = B + \mathfrak{a}$

Шта представља горња једначина ако A и B према пређашњим конвенцијама означавају тачке тродимензионалног простора? Из горње јед-

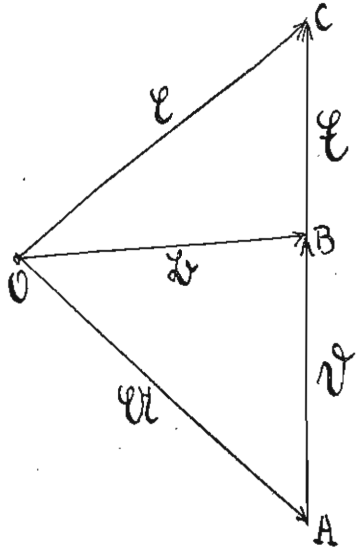


начине следује

$$A - B = \mathfrak{A}$$

а та једначина казује да је управљена величина која иде од тачке B ка тачки A равна вектору $\mathfrak{A}$. Тачка A дакле представља тачку простора која је удаљена од тачке B за вектор $\mathfrak{A}$.

4° Посматрамо ли три вектора $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ који леже у истој равнини и који су надовезани на тачку O; питамо за услове кад ће крајње тачке A, B и C тих трију вектора лежати у истој правој. Означимо векторе



$$B - A = \mathfrak{d} \qquad C - B = \mathfrak{e}$$

онда је

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$$

(следује из слике и дефиниције $\mathfrak{B} = B - O$, $\mathfrak{A} = A - O$ одакле је $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = B - A = \mathfrak{d}$) Исто је тако

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{C} - \mathfrak{B}$$

Услов да тачке A, B и C леже у истој правој можемо изразити захтевом да су вектори $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{e}$ истог правца т.ј. разликују се само за једну извесну скаларну величину т.ј.

$$\mathfrak{d} = x \cdot \mathfrak{e}$$

дакле имамо

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = x \cdot (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})$$

или

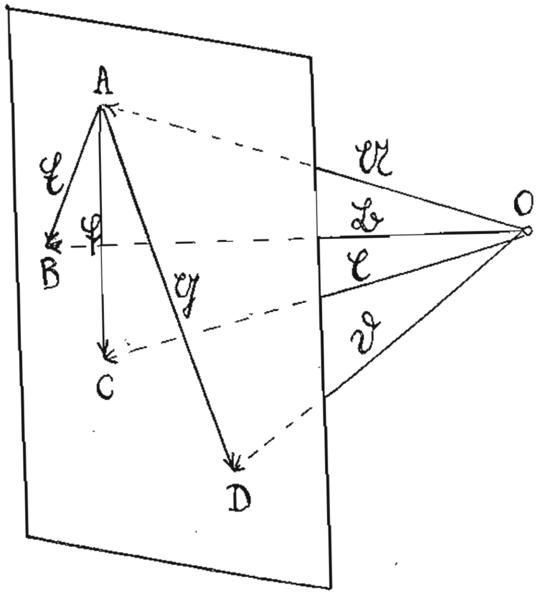
$$(1+x)\,\mathfrak{B} - \mathfrak{A} - x \cdot \mathfrak{C} = 0$$

У овој једначини задовољавају скаларни коефицијенти вектора једначину идентично јер је

$$1 + x - 1 - x = 0$$

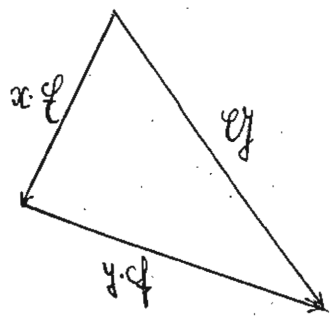
за све вредности x. Зато можемо услов да крајње тачке вектора $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ леже у истој правој дефинисати тиме да у једначини која одређује однос тих вектора скаларни коефицијенти те једначине морају идентички задовољавати.

5° Надовежемо ли на једну тачку простора O четри вектора $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$, па питамо за услове кад ће крајње тачке тих вектора A, B, C и D лежати у истој равнини, то ћемо те услове дефинисати овако:



$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{C} - \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} - \mathfrak{A}$$

Услов да A, B, C и D леже у истој равнини може се изразити захтевом да вектори $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ буду компланарни а то значи да се од њихових праваца може сложити троугао т.ј.



$$x\cdot\mathfrak{E} + y\cdot\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$$

Одакле

$$x\cdot(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) - y\,(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{D} - \mathfrak{A}$$

одакле је

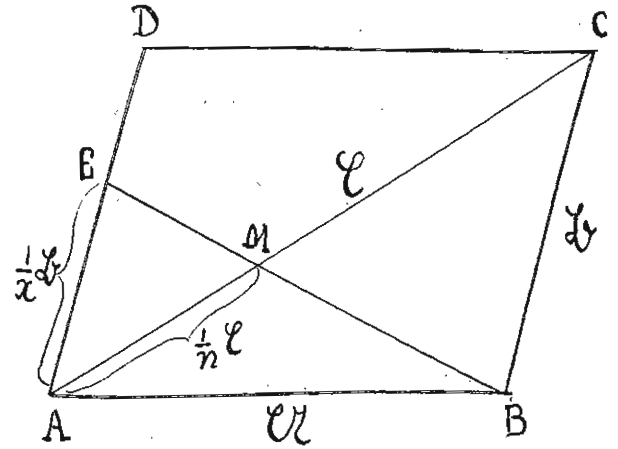
$$(1 - x - y)\,\mathfrak{A} = \mathfrak{D} - x\,\mathfrak{B} - y\,\mathfrak{C}$$

И у овој једначини скаларни коефицијенти вектора задовољавају једначину идентички. Зато услов да крајње тачке четри вектора леже у истој равнини изражен је тиме да у једначини која дефинише одношај тих вектора скаларни коефицијенти морају једначину идентички задовољавати.

6° Пренесемо ли у паралелограм на дијагоналу AC дужину

$$AM = \frac{1}{n} AC$$

па спојимо тачку M са тачком B и продужимо до тачке E, па питајмо у којој ће размери делити тачка E ду-



жину AD. Означимо стране паралелограма као векторе $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ а дијагоналу као вектор $\mathfrak{C}$, то је

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$$

Дужина AM представља вектор $\frac{1}{n}\mathfrak{C}$, а дужина AE представља вектор $\frac{1}{x}\mathfrak{B}$, где је x скаларна непозната коју тражимо. Онда је

$$\frac{1}{nx}\mathfrak{A}+\frac{1}{nx}\mathfrak{B}=\frac{1}{nx}\mathfrak{C}$$

т.ј.

$$\frac{1}{nx}\mathfrak{A}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\mathfrak{B}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{n}\mathfrak{C}\right) \qquad 1)$$

Крајње тачке вектора $\mathfrak{A}$, $\frac{1}{x}\mathfrak{B}$ и $\frac{1}{n}\mathfrak{C}$ морају лежати у истој правој и зато у једначини 1) која даје однос тих вектора морају њихови коефицијенти једначину идентично задовољавати т.ј.

$$\frac{1}{nx}+\frac{1}{n}=\frac{1}{x}$$

или

$$1+x=n$$

или

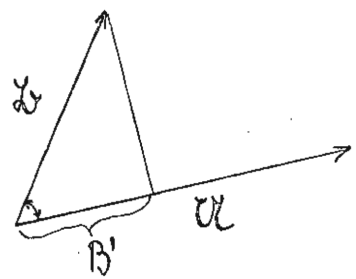
$$x=n-1$$

Скаларни продукат двају вектора.

У теориској физици при рачунању са векторима често пута је од велике важности она скаларна величина коју добијамо ако износе двају вектора које посматрамо помножимо међусобом и са косинусом угла што га они заклапају. Ту величину

$$|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cdot\cos(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=AB\cos(\mathfrak{A},\mathfrak{B})=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$$

називамо <u>скаларним продуктом</u> вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и означавамо га овако: $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ или $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$



Примедба: Hamilton је тај продукат означавао негативно узет са $S(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, дакле

$$S\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cdot\cos(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$$

Од њега потиче назив скаларни продукт. Grassmann је независно од Hamilton-а такође увео тај појам у Векторску Анализу и назвао тај продукт: унутрашњим продуктом и означавао га $[\mathfrak{A}|\mathfrak{B}]$. Gibbs назива тај продукт директним продуктом и обележава га $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ или $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. Heaviside га пише просто $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

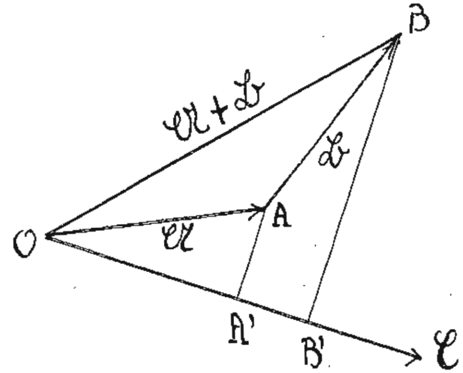
Скаларни продукт је дакле једна скаларна величина а геометриски представља величину површине правоугаоника чија је једна страна равна износу A вектора $\mathfrak{A}$, а друга страна равна пројекцији B_1 вектора $\mathfrak{B}$ у правац $\mathfrak{A}$.

Ми смо за скаларни продукт употребили исти знак као у Алгебри за обичан алгебарски продукт и имамо да испитамо да ли за тај продукат важе исти они закони који важе и за алгебарски продукат. Из саме дефиниције следује

$$\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A} = |\mathfrak{B}|\cdot|\mathfrak{A}|\cdot\cos(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) = B\cdot A\cdot\cos(\mathfrak{B},\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$$

За скаларни продукат важи дакле комутативни закон мултипликације.

$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ представља према дефиницији површину правоугаоника чија је једна страна равна дужини вектора $\mathfrak{C}$ а друга страна равна пројекцији OB' вектора $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ на правац вектора $\mathfrak{C}$.



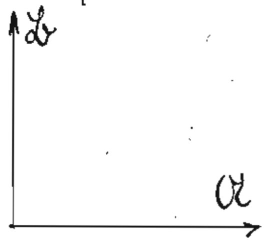
Како је пројекција OB' збира вектора $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ једнака збиру пројекција $A_1O + A_1B_1$ вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то из тога следује да ће скаларни продукат $(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ бити једнак збиру продуката $\mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ т.ј.

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}+\mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

Последња једначина казује да за скаларни продукат важи и дистрибутивни закон мултипликације.

Имали би још да испитамо да ли за скаларни продукат важи и асоцијацивни закон мултипликације, но о томе ћемо говорити кад будемо говорили о скаларним продуктима трију вектора. Док рачунамо само са два вектора тај закон не долази у обзир, па зато при рачунању са два вектора важе за скаларни продукат исти закони као и у Алгебри.

Ако су вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ нормални један на други, онда је



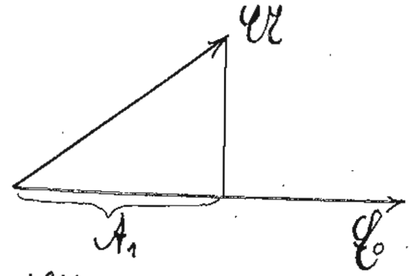
$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = 0$$

Ова једначина казује дакле да су та два вектора или нормални један на други или да је бар један од њих раван нули.

Из дефиниције следује да је

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = |\mathfrak{a}|^2 = A^2$$

Представља ли $\mathfrak{e}_0$ јединични вектор у правцу $\mathfrak{e}$, то представља скаларни продукат



$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{e}_0 = A_1$$

пројекцију вектора $\mathfrak{a}$ у правцу јединичног вектора $\mathfrak{e}_0$.

Јасно је такође да је

$$\mathfrak{e}_0 \cdot \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0^2 = 1$$

Из тога следује да за јединичне векторе i, j и k који су нормални један на други постоје ове релације

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1$$

а такође

$$ij = jk = ki = 0$$

Ако сад представимо два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ помоћу јединичних вектора т.ј. ако је

$$\mathfrak{a} = A_1 \cdot i + A_2 \cdot j + A_3 \cdot k$$

и

$$\mathfrak{b} = B_1 i + B_2 j + B_3 k$$

то је скаларни продукат тих двају вектора представљен са

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \qquad 2)$$

A_1 представља пројекцију вектора $\mathfrak{a}$ на правац јединичног вектора i, па је дакле

$$A_1 = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, i)$$

Тако исто је

$$A_2 = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, j)$$
$$A_3 = |\mathfrak{a}| \cos(\mathfrak{a}, k)$$
$$B_1 = |\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{b}, i)$$
$$B_2 = |\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{b}, j)$$
$$B_3 = |\mathfrak{b}| \cos(\mathfrak{b}, k)$$

А како је према дефиницији

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

то добијамо, ако ове последње вредности ставимо у једначини 2) и скратимо са $|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}|$:

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{a}, i)\cos(\mathfrak{b}, i) + \cos(\mathfrak{a}, j)\cos(\mathfrak{b}, j) + \cos(\mathfrak{a}, k)\cos(\mathfrak{b}, k)$$

Ова једначина представља познато правило Аналитичне Геометрије у простору, јер углови $\mathfrak{a}i$, $\mathfrak{b}i$, ... представљају углове што их праве вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ затварају са осама ортогоналног система i, j, k.

Из једначине

$$\mathfrak{a} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

следује ако је квадрирамо т.ј. ако јој обе стране сваку помножимо скаларно са самом собом,

$$|\mathfrak{a}|^2 = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

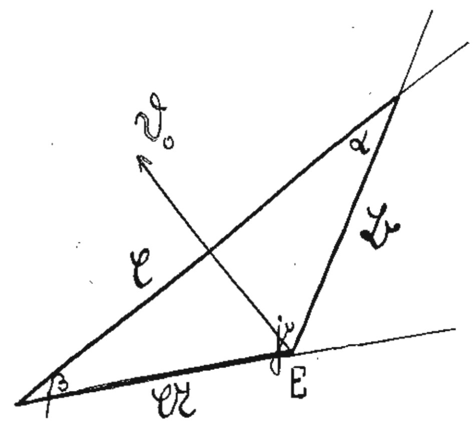
одакле следује да је

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Неке примене досадање теорије

1° Сачињавају ли три вектора један троугао, онда је

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \qquad 1)$$



Квадрирањем ове једначине т.ј. скаларним множењем са самом собом добијамо

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

Одавде следује скаларна једначина, јер су сада сви чланови ове једначине скаларне величине,

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) =$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

Помножимо ли обе стране једначине 1) скаларно са $\mathfrak{c}$, то добијамо

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

Ова је једначина такође скаларна једначина, па се може написати

$$C^2 = 2AC\cos\beta + 2BC\cos\alpha$$

Повучемо ли из тачке C вектор $\mathfrak{v}_0$ који је нормалан на вектор $\mathfrak{c}$ и чији је интензитет раван јединици, па помножимо ли једначину 1) са тим вектором, добијамо

$$\mathfrak{c}\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{a}\mathfrak{v}_0 + \mathfrak{b}\mathfrak{v}_0$$

И ово је скаларна једначина, па се може написати

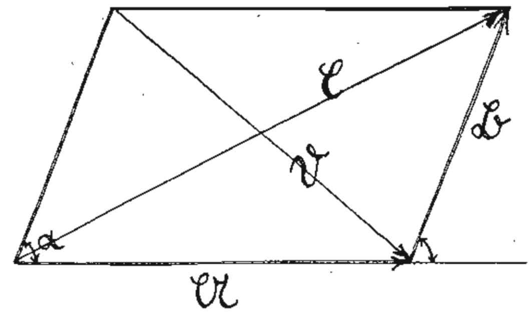
$$0 = A\sin\beta + B\sin\alpha$$

Из чега следује

$$A : B = \sin\alpha : \sin\beta$$

2° У паралелограму постоје према пређашњем између дијагонала и страна ове релације:

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$
$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$$



Квадрирањем ових једначина добијамо

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2$$
$$\mathfrak{d}^2 = \mathfrak{a}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2$$

Сабирањем и одузимањем ових једначина добијамо

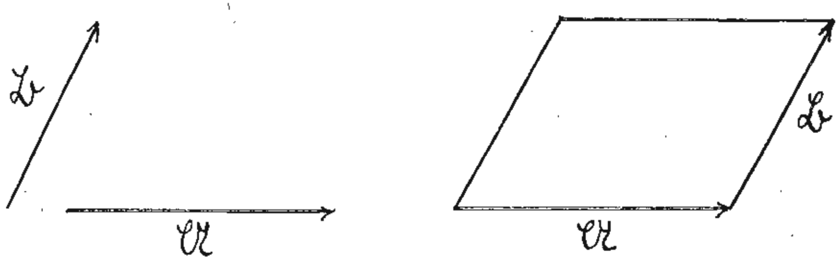
$$\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 = 2\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{b}^2$$
$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{d}^2 = 4\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

Ово су скаларне једначине, па се могу да пишу

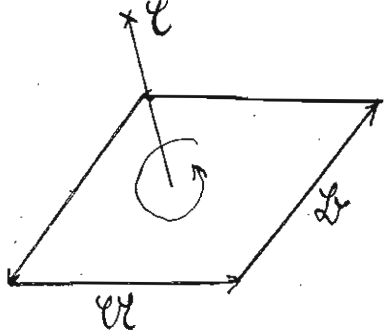
$$C^2 + D^2 = 2A^2 + 2B^2$$
$$C^2 - D^2 = 4AB\cos\alpha$$

Векторијелни продукат.

Два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ одређују, ако их један на други надовежемо,



и надопунимо на паралелограму, једну управљену равнину простора, која се међутим може паралелно самој себи да помакне на сваком месту простора. Осим тога одређују та два вектора у тој равнини један део површине обухваћен њиховим паралелограмом. Та два вектора одређују дакле један управљени елеменат површине. Тај елеменат површине могао би се да представи помоћу једног вектора. Одаберемо ли један вектор чији је правац нормалан на ту управљену површину и чији је интензитет раван величини те површине, то би таквим вектором био одређен положај равнине и величина њеног ограниченог елемента. Но такав вектор не би имао смисао правца, јер нисмо још никакву конвенцију учинили на коју страну те управљене површине треба да направимо тај вектор. Зато ћемо да учинимо још ову конвенцију: Два вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, од којих $\mathfrak{a}$ зовемо првим а $\mathfrak{b}$ другим, одређују, ако се надовежу други на први, један управљени елеменат површине са позитивном и негативном страном. Позитивну страну те површине зовемо унутрашњом, са које посматрани правац обилажења одређен векторима закреће у позитивном смислу т.ј. противно сказаљци на сату. Сада имамо све потребне конвенције да управљени елемент једне површине представимо једним вектором $\mathfrak{C}$.



Тај вектор $\mathfrak{C}$ дефинишемо овако:

Вектор $\mathfrak{C}$ је онај вектор чији је правац нормалан на оријентирану површину вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, чији је интензитет раван величини површине паралелограма што га вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ограничавају т.ј.

$$|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cdot\sin(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$$

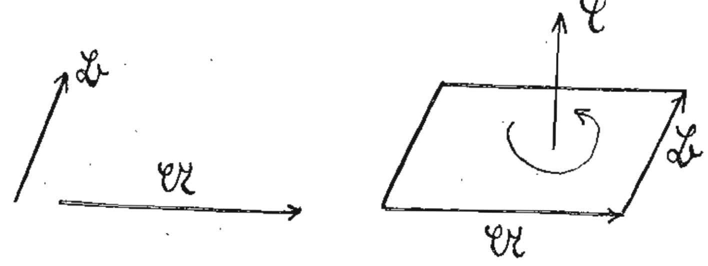
и који је наперен на позитивну страну управљене равнине.

Тај вектор $\mathfrak{C}$ називамо <u>векторијелним продуктом</u> вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и пишемо

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

Grassmann је назвао тај вектор спољним продуктом и писао овако исто, док је за скаларни продукат употребљавао знак $[\mathfrak{A}|\mathfrak{B}]$. Hamilton је означавао векторијелни продукат са $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; Gibbs пак пише $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$.

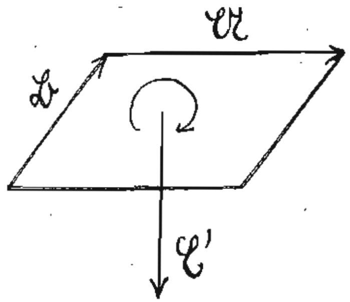
Пошто смо тако поставили дефиницију векторијелног продукта морамо сада испитати да ли за њега важе закони обичне мултипликације. Уочимо ли два вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то је према



дефиницији вектор

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

представљен на слици вектором $\mathfrak{C}$, наперен на позитивну страну површине $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Према тој истој дефиницији биће вектор $[\mathfrak{B}\mathfrak{A}]$ представљен другим једним



вектором, јер сада је $\mathfrak{B}$ први вектор а $\mathfrak{A}$ други, па имамо да надовежемо на вектор $\mathfrak{B}$ вектор $\mathfrak{A}$, а тиме добијамо други смисао обилажења

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}'$$

Јасно је увидети да су вектори $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$ паралелни и исте величине, само се разликују знаком, те је

$$\mathfrak{C} = -\mathfrak{C}'$$

Зато је

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = -[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

За векторијелни продукат не важи дакле комутативни закон мултипликације, па зато морамо имати на уму да са мењањем реда фактора мења се и његов знак. До овога смо резултата могли доћи из дефиниције интензитета вектора $\mathfrak{C}$

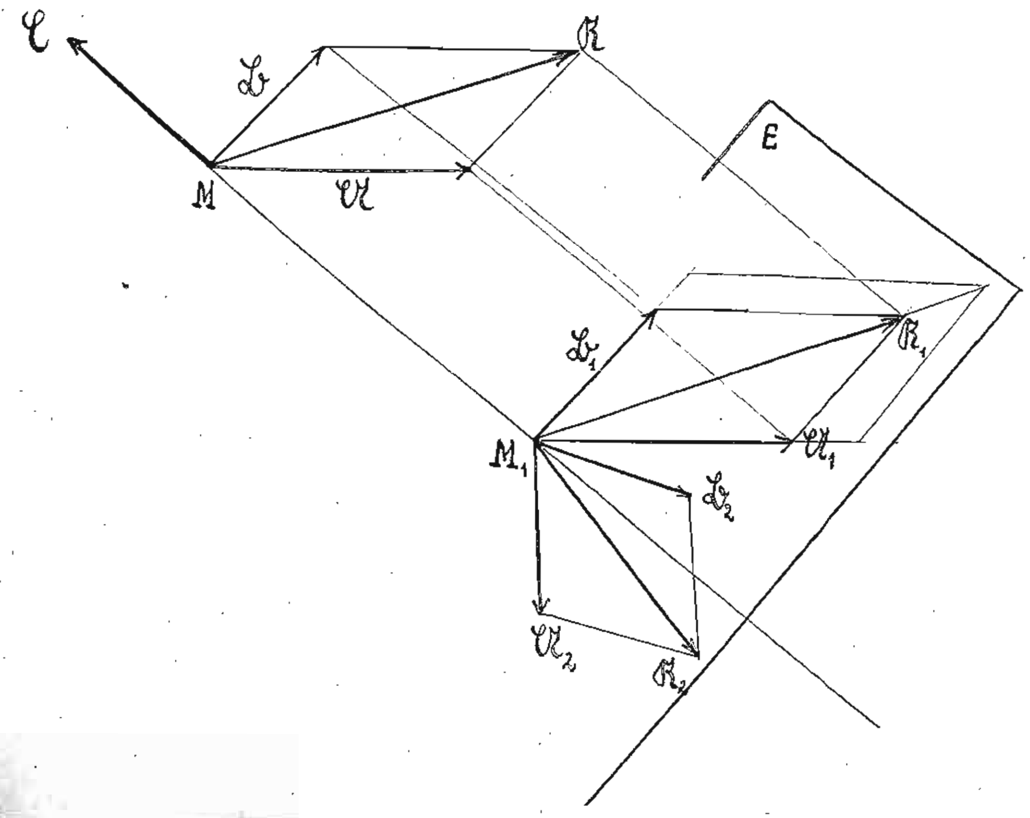
$$|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

Променимо ли ред вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то управо угао $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ мења свој знак, па према томе и његов синус, па и интензитет вектора $\mathfrak{C}$.

Из горње дефиниције следује и ово: Ако један произвољни вектор помножимо векторијелно самим собом, то је тај векторијелни продукат раван нули т.ј.

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{A}] = 0$$

Имамо још да испитамо да ли за векторијелну мултипликацију важи дистрибутивни закон мул-



типликације т.ј. да ли постоји једначина

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

Да то испитамо уочимо три вектора $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ надовезана у истој тачки M. Векторе $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ саберимо у вектор $\mathfrak{R}$ тако да је

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=\mathfrak{R} \qquad 1)$$

У правац вектора $\mathfrak{C}$ одаберимо једну произвољну тачку M_1, положимо кроз њу једну равнину ε нормалну на вектор $\mathfrak{C}$, па пројицирајмо у тој равнини векторе $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{R}$. Пројекције тих вектора означимо са $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{R}_1$. Интензитети тих вектора су

$$|\mathfrak{A}_1| = |\mathfrak{A}| \sin(\mathfrak{A},\mathfrak{C})$$
$$|\mathfrak{B}_1| = |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$$
$$|\mathfrak{R}_1| = |\mathfrak{R}| \sin(\mathfrak{R},\mathfrak{C})$$

па постоји опет релација

$$\mathfrak{A}_1+\mathfrak{B}_1=\mathfrak{R}_1$$

Помножимо ова три вектора интензитетом $|\mathfrak{C}|$ вектора $\mathfrak{C}$. Онда ће паралелограм тих нових вектора бити сличан паралелограму вектора $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{R}_1$, јер смо помножили са једном скаларном величином која не мења правац вектора. Замислимо сада да смо тај паралелограм заокренули у равнини ε око тачке M_1 за $90°$. Вектори $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{R}_2$ имају дакле ове интензитете

$$|\mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{A}_1|\cdot|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{C}|\cdot \sin(\mathfrak{A},\mathfrak{C})$$
$$|\mathfrak{B}_2| = |\mathfrak{B}_1|\cdot|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{B}|\cdot|\mathfrak{C}|\cdot \sin(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$$
$$|\mathfrak{R}_2| = |\mathfrak{R}_1|\cdot|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{R}|\cdot|\mathfrak{C}|\cdot \sin(\mathfrak{R},\mathfrak{C})$$

и опет постоји релација

$$\mathfrak{A}_2+\mathfrak{B}_2=\mathfrak{R}_2 \qquad 2.)$$

Вектор $\mathfrak{A}_2$ лежи у равни ε дакле нормално на вектор $\mathfrak{C}$ т.ј.

$$\mathfrak{A}_2 \perp \mathfrak{C}$$

Тај је вектор нормалан и на вектор $\mathfrak{A}_1$ јер смо га добили кад смо вектор $\mathfrak{A}_1$ помножен са $|\mathfrak{C}|$ заокренули за $90°$; дакле

$$\mathfrak{A}_2 \perp \mathfrak{A}_1$$

Зато је $\mathfrak{A}_2$ нормално и на $\mathfrak{A}$, т.ј.

$$\mathfrak{A}_2 \perp \mathfrak{A}$$

јер је вектор $\mathfrak{A}_1$ пројекција вектора

$\mathfrak{A}$ па лежи са векторима $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{A}$ у истој равни. Интензитет вектора $\mathfrak{A}_2$ једнак је

$$|\mathfrak{A}_2| = |\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{C}|\sin(\mathfrak{A},\mathfrak{C})$$

а и правац вектора $\mathfrak{A}_2$ наперен је на позитивну страну равнине $\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}$. Зато је вектор $\mathfrak{A}_2$ раван

$$\mathfrak{A}_2 = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}]$$

Исто се тако може да докаже да је

$$\mathfrak{B}_2 = [\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}]$$

и

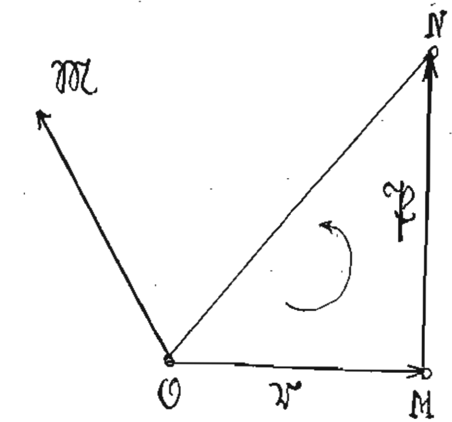
$$\mathfrak{R}_2 = [\mathfrak{R}\,\mathfrak{C}] = [(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}]$$

Ставимо ли ове вредности у једначину 2) добијамо

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}] = [(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}]$$

Овом једначином доказан је дистрибутивни закон мултипликације. О асоцијативном закону векторијелне мултипликације говорићемо кад будемо испитивали продукте из више од два фактора.

Пре но што пођемо даље протумачимо значење векторијелног продукта у Механици. Уочимо ли једну силу $\mathfrak{P}$ која дејствује на тачку M, то смо њеним статичким моментом с обзиром на тачку O назвали онај вектор који стоји нормално на равнини која пролази кроз O и $\mathfrak{P}$, чија је величина равна двострукој површини троугла OMN и који је наперен на ону страну са које посматрана сила $\mathfrak{P}$ заокреће у позитивном смислу.



Означимо тај вектор са $\mathfrak{M}$ а вектор M-O означимо са $\mathfrak{r}$, онда је према дефиницији статичког момента

$$|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{r}|\cdot|\mathfrak{P}|\cdot\sin(\mathfrak{r},\mathfrak{P})$$

Лако је увидети да је вектор $\mathfrak{M}$ раван векторијелном продукту вектора $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{P}$ т.ј.

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{P}]$$

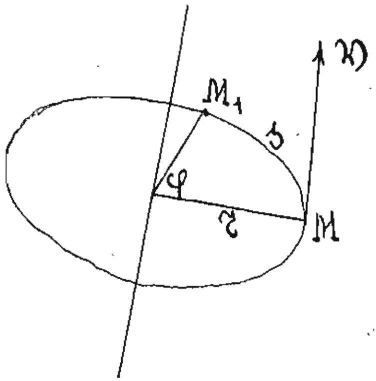
јер задовољава свима условима које

сно при дефиницији векторијелног продукта поставили.

Други пример за значење вектор продукта у Механици: Вектор који тангира путању а чији је износ

$$v = \frac{ds}{dt}$$

зовемо вектором брзине ротирања једног крутог тела око једне осе, па ако је одстојање једне тачке M од те осе равно r, то је пут у једном извесном времену



$$s = r\cdot\varphi$$

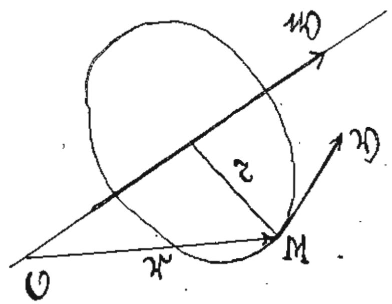
где φ означава управо радиус-вектор почетног и крајњег положаја. Из ове једначине следује

$$v = \frac{ds}{dt} = r\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

Коефицијенат $\frac{d\varphi}{dt}$ означава угловну брзину. Она је у истом моменту за све тачке једна константа, па је брзина произвољне тачке M равна

$$v = r\cdot\omega$$

r се мења од тачке до тачке, а ω од момента до момента ако кретање није једнолико. Вектор брзине у тачки M означен са v је према томе вектор који тангира путању, дакле стоји нормално на радиус-вектор r а има интензитет $v = r\omega$. У Рационалној Механици може се кретање крутог тела које ротира око једне осе које може од момента до момента да мења свој положај представити са вектором ротације. То је вектор чији се правац подудара са правцем осе ротације, чији је интензитет једнак угловној брзини ω и који је наперен на ону страну са које следује кретање у позитивном смислу.



Вектор ротације нека буде дакле вектор w па је према предњем

$$|\mathfrak{w}| = \omega$$

Величина брзине произвољне тачке M равна је према пређашњем

$$v = r \cdot \omega$$

Означимо ли вектор OM са $\mathfrak{r}$, то је

$$r = |\mathfrak{r}| \sin(\mathfrak{w}, \mathfrak{r})$$

па је зато

$$v = |\mathfrak{w}| \cdot |\mathfrak{r}| \cdot \sin(\mathfrak{w}, \mathfrak{r})$$

Вектор брзине $\mathfrak{v}$ има дакле интензитет

$$|\mathfrak{v}| = |\mathfrak{w}| \cdot |\mathfrak{r}| \cdot \sin(\mathfrak{w}, \mathfrak{r})$$

нормалан је на радиус-вектор $\mathfrak{r}$, па према томе и на равнину вектора $\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}$ и наперен је на ону страну, са које посматрани смисао обилажења ако вектор $\mathfrak{r}$ надовежемо на вектор $\mathfrak{w}$ следује у позитивном смислу. Зато можемо вектор $\mathfrak{v}$ представити као векторпродукат вектора $\mathfrak{w}$ и $\mathfrak{r}$ т.ј.

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}]$$

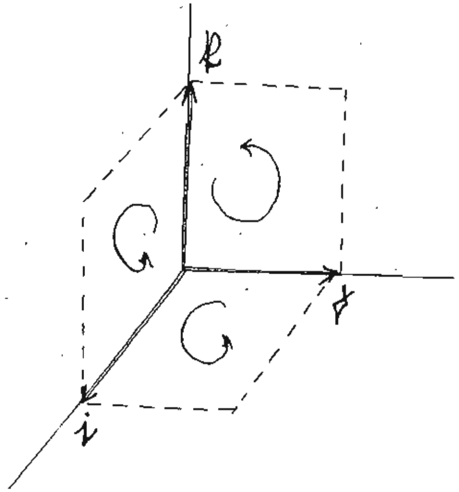
Из пређашњих дефиниција о векторијелном продукту следују ови односи између јединичних вектора

$$[i\,i] = 0$$
$$[j\,j] = 0$$
$$[k\,k] = 0$$

$[i\,j] = k \quad [j\,i] = -k$

$[j\,k] = i \quad [k\,j] = -i$

$[k\,i] = j \quad [i\,k] = -j$



Ако су два вектора изражена помоћу јединичних вектора

$$\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$
$$\mathfrak{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k$$

то употребив пређашње релације добијамо за векторијелни продукат тих двају вектора овај израз:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -A_2B_1 k + A_3B_1 j + A_1B_2 k - A_3B_2 i - A_1B_3 j + A_2B_3 i$$
$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\, i + (A_3B_1 - A_1B_3)\, j + (A_1B_2 - A_2B_1)\, k$$

Изрази $(A_2B_3 - A_3B_2)$, $(A_3B_1 - A_1B_3)$, $(A_1B_2 - A_2B_1)$ представљају компоненте векторијелног продукта $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Тај вектор. продукат може се представити и у облику детерминанте на овај начин:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Субдетерминанта члана i једнака је

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

а њена је вредност $A_2B_3 - A_3B_2$ Овај израз раван је компоненти векторијелног продукта $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Исто то важи и за компоненте у правцима j и k. Дакле компонента вектор. продукта $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ у правцу i равна је субдетерминанти члана i т.ј. равна

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} = A_2B_3 - A_3B_2$$

у правцу j је равна

$$-\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} = -A_1B_3 + A_3B_1$$

а у правцу k је равна

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1$$

Продукат трију вектора

1° Скаларни продукат једног вектора са скаларним продуктом других двају вектора: $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ Овај израз значи ово: имамо прво да помножимо векторе $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ скаларно један са другим, па тако добијени резултат да помножимо са вектором $\mathfrak{A}$. Место заграде пишу неки и тачку т.ј. $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}$

Продукат

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = |\mathfrak{B}|\cdot|\mathfrak{C}|\cdot\cos(\mathfrak{B},\mathfrak{C}) = m$$

представља један скалар, па је зато

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = m\,\mathfrak{A}$$

један вектор који има исти правац као и вектор $\mathfrak{A}$ а од којега је m-пута већи.

Посматрајмо сада израз

$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$. Имаћемо

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = |\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{b}|\cdot\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = n$$

па дакле

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = n\mathfrak{c}$$

представља један вектор истог правца као и вектор $\mathfrak{c}$ само n-пута већи од њега.

Изрази $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ и $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$ представљају према томе сасвим различите векторе по правцу и интензитету, зато за скаларну мултипликацију не важи асоцијативни закон мултипликације.

Јасно је међутим да је

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{c}\mathfrak{b})\mathfrak{a} = (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathfrak{a}.$$

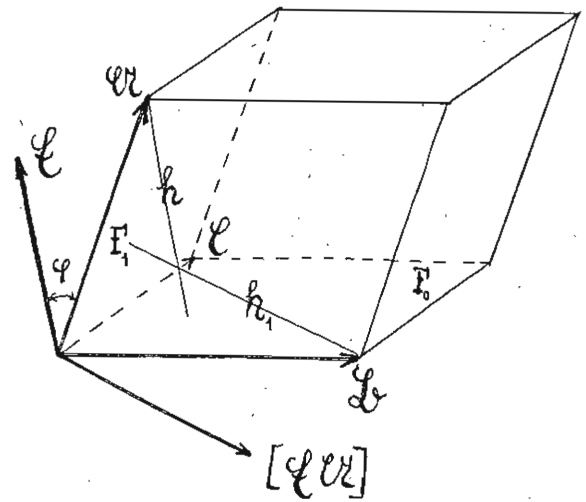
2° <u>Скаларни продукат једног вектора са векторијелним продуктом других двају вектора: $\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$.</u> Израз $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ представља један вектор $\mathfrak{f}$

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \mathfrak{f}$$

чији је интензитет

$$|\mathfrak{f}| = |\mathfrak{b}|\cdot|\mathfrak{c}|\cdot\sin(\mathfrak{b},\mathfrak{c})$$

дакле једнак површини паралелограма што га ограничавају вектори $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$.



Означимо га са F_0 т.ј.

$$|\mathfrak{f}| = F_0$$

Осим тога стоји вектор $\mathfrak{f}$ нормално на равнину тога паралелограма и наперен је на позитивну страну његову.

Имамо дакле

$$\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \mathfrak{a}\mathfrak{f}$$

$\mathfrak{a}\mathfrak{f}$ представља један скалар и то

$$\mathfrak{a}\mathfrak{f} = |\mathfrak{a}|\cdot|\mathfrak{f}|\cdot\cos\varphi = F_0|\mathfrak{a}|\cdot\cos\varphi$$

Пустимо ли из крајње тачке вектора $\mathfrak{a}$ нормалу h на равнину вектора $\mathfrak{b},\mathfrak{c}$, то је величина те нормале

$$h = |\mathfrak{a}|\cos\varphi$$

и зато је

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = F_0 \cdot h$$

$F_0 \cdot h$ представља запремину V паралелопипеда вектора $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$.

Исто се тако може доказати да је $\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$ опет један скалар који представља запремину истог паралелопипеда, дакле

$$\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = F_1 \cdot h = V$$

На тај начин доказали смо ове релације

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \qquad 1.)$$

Ови продукти представљају запремину паралелопипеда вектора $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ позитивно узету ако вектори истим овим редом којим су написани сматрани за осе X, Y, Z једног координатног система дају десни систем. У противном имаћемо

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{C}\mathfrak{B}] = -V$$

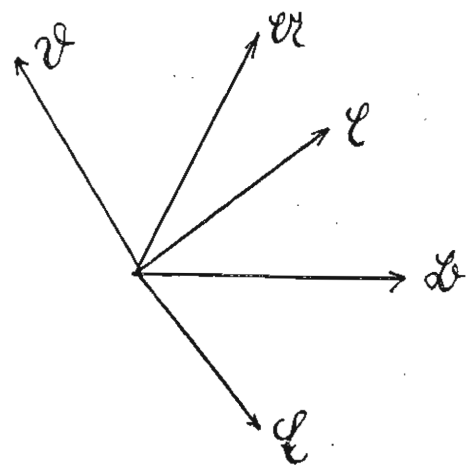
Ако су вектори $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ представљени помоћу јединичних вектора са својим компонентама, то су изрази једначине 1.) једнаки вредности ове детерминанте

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

о чему се можемо лако уверити.

3° Векторијелни продукат једног вектора са векторијелним продуктом других двају вектора: $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]$. Испитајмо шта значи израз $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]$. Израз

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{v}$$



представља један вектор који је нормалан на равнину вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Онда горњи израз представља векторијелни продукат двају вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{v}$ т.ј. вектор $\mathfrak{E}$

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{v}] = \mathfrak{E}$$

Вектор $\mathfrak{E}$ нормалан је на равнину вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ и лежи зато у равни вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Ако је вектор $\mathfrak{A}$ нормалан на равнини вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, онда је вектор $\mathfrak{E}$ раван нули.

Имамо дакле

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]$$

Ако ставимо

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{D}$$

онда је

$$\mathfrak{E} = [\mathfrak{A}\mathfrak{D}]$$

Означимо са $A_1\, A_2\, A_3\, D_1\, D_2\, D_3$ компоненте вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$; онда је

$$\mathfrak{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}$$

Компонента E_1 вектора $\mathfrak{E}$ у правцу i једнака је

$$E_1 = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ D_2 & D_3 \end{vmatrix} = A_2 D_3 - A_3 D_2 \qquad 1.)$$

Означимо ли са

$$B_1\; B_2\; B_3\; C_1\; C_2\; C_3$$

компоненте вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, то је вектор

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Компоненте D_3 и D_2 једнаке су

$$D_3 = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = B_1 C_2 - B_2 C_1$$

$$D_2 = -\begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} = B_3 C_1 - B_1 C_3$$

Заменимо ли те вредности у једначини 1) и додамо ли и одузмемо у тој једначини чланове $A_1 B_1 C_1$, добијамо

$$E_1 = B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

или према пређашњем

$$E_1 = B_1(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - C_1(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

Како у скаларном продукту можемо да променимо ред фактора, то можемо написати

$$E_1 = B_1(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) - C_1(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

Исто тако можемо доказати да је

$$E_2 = B_2(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) - C_2(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$
$$E_3 = B_3(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) - C_3(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

Како је

$$\mathfrak{q} = \varepsilon_1 i + \varepsilon_2 j + \varepsilon_3 k =$$
$$= (B_1 i + B_2 j + B_3 k)(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) - (C_1 i + C_2 j + C_3 k)(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

то је
$$\mathfrak{q} = [\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

Из ове једначине видимо да ако вектор $\mathfrak{a}$ стоји нормално на векторима $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}$, вектор $\mathfrak{q}$ је раван нули, јер је у том случају $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 0$.

Исто је тако
$$[\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]] = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$$
$$[\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]] = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a})$$

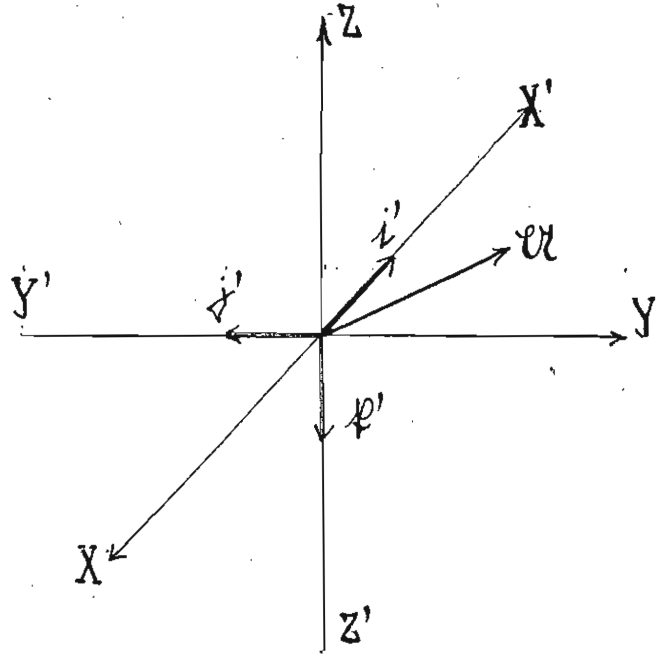
Из ових једначина следује
$$[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] + [\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}]] + [\mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]] = 0$$

4° Скаларни продукат двају векторијелних продуката: $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\cdot[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$

Ставимо ли
$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{q}$$
то је
$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\cdot[\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \mathfrak{q}\cdot[\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \mathfrak{c}[\mathfrak{d}\mathfrak{q}] =$$
$$= \mathfrak{c}[\mathfrak{d}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]] = \mathfrak{c}\{\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{d}\mathfrak{a})\} =$$
$$= (\mathfrak{c}\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{d}\mathfrak{a})$$

Класификација вектора.

Према томе како се вектори понашају при инверзији система чинимо њихову класификацију.



Проведемо ли инверзију десног система, добијамо из њега леви. Означимо ли јединичне или основне векторе у првом систему са: i, j, k а у другом са: i', j', k', то је
$$i = -i' \quad j = -j' \quad k = -k'$$

Посматрамо ли један вектор $\mathfrak{a}$ чије су компоненте у првом систему означене са A_1, A_2, A_3 т.ј.

$$\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k \qquad 1)$$

и означимо ли компоненте тога вектора у другом систему са A_1', A_2', A_3', то је очевидно

$$A_1 = -A_1' \quad A_2 = -A_2' \quad A_3 = -A_3'$$

Сменимо ли вредности i, j, k, A_1, A_2, A_3 вредностима $i', j', k', A_1', A_2', A_3'$ у једначини 1), добијамо

$$\mathfrak{A} = A_1' i' + A_2' j' + A_3' k'$$

Видимо да се облик једначине за вектор $\mathfrak{A}$ инверзијом система није промено. Овакве векторе код којих се облик њихове једначине при инверзији система не мења зовемо <u>поларним векторима</u>.

Посматрајмо сада један вектор $\mathfrak{A}$ који је једнак векторијелном продукту других двају вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ т.ј.

$$\mathfrak{A} = [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [(B_1 i + B_2 j + B_3 k)(C_1 i + C_2 j + C_3 k)]$$

где B и C означавају компоненте вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Проведемо ли сада инверзију система добијамо

$$\mathfrak{A} = [(B_1' i' + B_2' j' + B_3' k')(C_1' i' + C_2' j' + C_3' k')]$$

Изведемо ли сада назначену мултипликацију, то морамо узети у обзир да је сада

$$[i'j'] = -k' \quad [j'k'] = -i' \quad [k'i'] = -j'$$

па, док је у првом случају вектор $\mathfrak{A}$ био представљен детерминантом

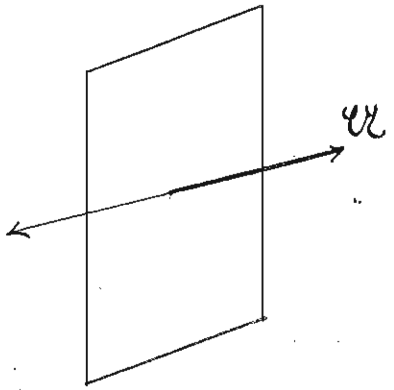
$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

он ће бити сада представљен детерминантом

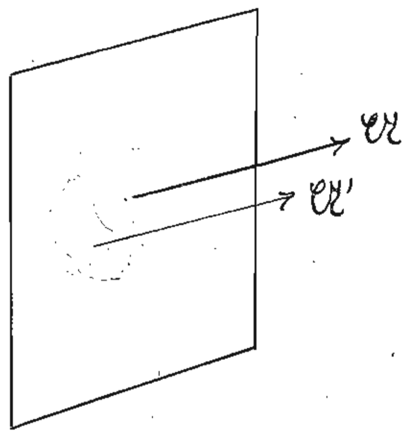
$$\mathfrak{A} = -\begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ B_1' & B_2' & B_3' \\ C_1' & C_2' & C_3' \end{vmatrix}$$

Вектор је дакле при инверзији система променио свој знак. Овакве векторе који при инверзији система мењају свој знак зовемо <u>аксијалним векторима</u>, па видимо да векторијелни продукат двају поларних вектора даје један аксијални вектор. Вектори: силе, брзине, акцелерације и т. д. су поларни вектори, а вектори који представљају статичке моменте, стретве и т. д. су аксијални вектори.

Разлика између поларних и аксијалних вектора види се из њиховог понашања при огледању у каквој равнини. Огледамо ли један поларни вектор у равнини која је нормална на њему, то тај вектор мења огледањем свој правац.



Огледамо ли један аксијалан вектор у равнини која је нормална на њему, мораћемо имати на уму да тај вектор представља један елеменат равнине са одређеним смислом обилажења.



Огледамо ли тај елеменат равнине, то се смисао обилажења неће променити и зато ће вектор $\mathfrak{A}'$ који представља тај огледани елеменат бити наперен на исту страну као и вектор $\mathfrak{A}$. Поларни вектори мењају дакле свој правац при огледању, а аксијални не мењају.

Уочимо један скалар m који је једнак скаларном продукту двају вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$

$$m = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$$

Вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ нека буду поларни вектори. Проведемо ли сада инверзију система, то ни $\mathfrak{A}$ ни $\mathfrak{B}$ неће мењати свој знак, а услед тога неће ни скалар m променити свој знак. Исто би то било кад би оба вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ били аксијални вектори; онда би при инверзији система сваки од њих променио свој знак а скалар би остао непромењен. Такве скаларе који при инверзији система не мењају свој знак зовемо скаларима прве врсте.

Узмимо сада да је један вектор од вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ поларан а други аксијалан. Онда ће при инверзији система овај други променити свој знак док први не; зато ће и скалар m променити свој знак. Овакве скаларе који при инверзији система мењају свој знак зовемо скаларима друге врсте или псеудоскаларима.

Као што у теориској физици морамо увек пазити да у свакој једначини имамо лево и десно величине исте димензије, тако морамо код векторских једначина осим те димензије пазити и на то да у једначини имамо лево и десно векторе исте врсте или скаларе исте врсте, јер би се иначе са променом координатног система вредности тих једначина поништиле.

Из претходних извођења следује директно ово правило: помножимо ли поларан (аксијалан) вектор са скаларом прве (друге) врсте, то добијамо поларан вектор; помножимо ли поларан (аксијалан) вектор са скаларом друге (прве) врсте, то добијамо аксијалан вектор.

Уочимо једначину

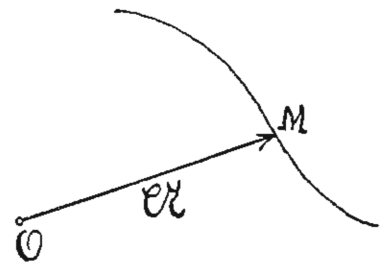
$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

Ако су $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ поларни вектори, онда су величине $(\mathfrak{C}\mathfrak{A})$ и $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ скалари прве врсте, па зато при инверзији система неће десна страна а услед тога ни лева ове једначине мењати свој знак. Из тога закључујемо да: векторијелни продукат поларног вектора $\mathfrak{A}$ и аксијалног вектора $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ даје један поларни вектор.

Узмимо сада да је вектор $\mathfrak{a}$ аксијалан вектор; онда ће величине $(\mathfrak{c}\mathfrak{a})$ и $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ бити скалари друге врсте, па ће зато вектори $\mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ као продукти поларног вектора са псеудоскаларима бити аксијални вектори. Зато видимо да: векторијелни продукат двају аксијалних вектора даје аксијалан вектор.

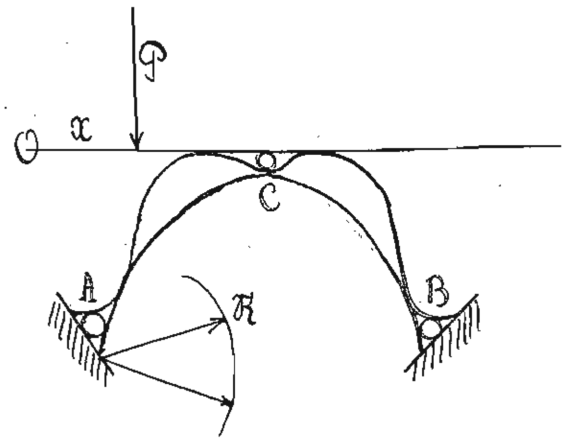
Диференцијација вектора.

Узмимо да је вектор $\mathfrak{a}$ функција једне скаларне величине т.ј. када се та скаларна величина мења, мења се и вектор $\mathfrak{a}$. Вектор $\mathfrak{a}$ мењаће свој правац и своју величину а могуће и своју нападну тачку. Но док говоримо о слободним векторима можемо их надовезати све на једну тачку сравњивања O, те ће према томе вектор $\mathfrak{a}$ мењати само свој правац и своју величину. При томе ће његова крајња тачка M описати једну просторну криву. Ту криву зовемо кривом инфлуенције.



Независно скаларно-променљива у теориској физици обично је време t, но може бити и која друга скаларна величина.

Пример: један носач. Оптеретимо ли га са једном силом P, то ће та сила изазивати у краку A реакцију R. Положај силе P дат је са одстојањем x од једне тачке O. Ако је носач раван т.ј. ако се сила креће само равнином слике, то је величина x скаларна величина. Она представља једну дужину, али нема разноврсности правца. Мења ли се сада x, то ће се мењати и вектор R и његова крајња тачка описаће једну криву.

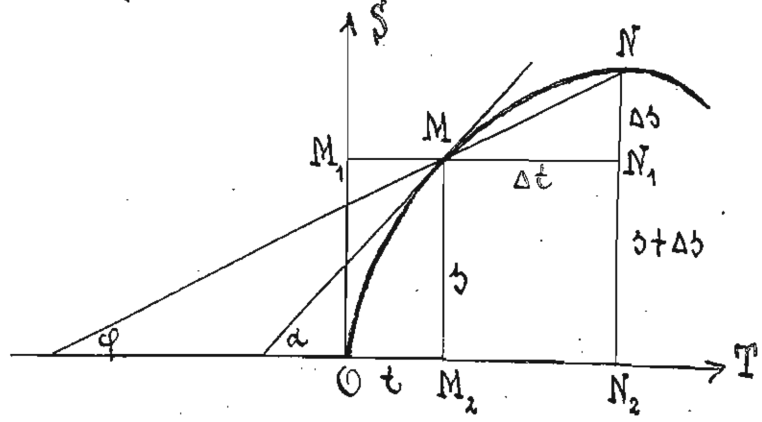


Скаларна вредност брзине

Једна мобилна тачка M нека се креће у једној правој OS. Онда њено одстојање MO означимо са s т.ј. пређеним путем од тачке O. s је у овом случају једна скаларна величина јер нема разноврсности правца, пошто се тачка креће у једној утврђеној правој. Кретање тачке нека буде иначе произвољно т.ј. s нека буде једна произвољна функција времена t:

$$s = f(t)$$

Ту функцију $f(t)$ можемо геометриски представити овако: Замислимо да док се мобилна тачка креће по правој OS, да се ова креће једнаком брзином па-



паралелно самој себи и да јој тачка О клизи по једној правој нормалној на OS. Услед оба та кретања описаће тачка М једну криву, код које апсциса даје оно време које је протекло од момента у ком се је мобилна тачка М налазила у OS. Ордината те криве даје пређени пут. У времену t_0 налазила се је тачка у положају О. Кад се права OS не би кретала, налазила би се тачка М после времена t у положају M_1 па би s израчунали из једначине

$$s = f(t)$$

Но за то време t прешла је права пут OM_2, зато се мобилна тачка налази у положају М. Ову криву која нам одређује пут s као функцију времена t зовемо дијаграмом пута. Пређени пут у времену t представљен је дакле ординатом $MM_2 = s$. У времену $t+\Delta t$ прећи ће мобилна тачка пут

$NN_2 = s + \Delta s$

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$

У времену Δt превалила је мобилна тачка пут $N_1N = \Delta s$. Количник $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ називамо средњом брзином мобилне тачке на путу Δs. Тај количник представљен је тангенсом угла φ што га склапа сечица MN са осом OT, дакле

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = tg\,\varphi$$

Узмимо сада да величина Δt бива све мања и мања т.ј. да се приближује нули. Онда ће се тачка М приближавати бесконачно тачки N а угао φ приближаваће се бесконачно углу α што га тангента у тачки М на дијаграму заклапа са осом OT, па зато можемо написати

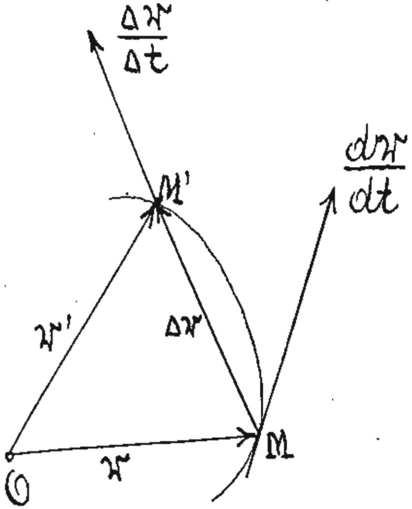
$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = tg\,\alpha$$

Ту вредност називамо брзином мобилне тачке у времену t и означујемо са v. По Вишој Математици је

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Овај израз називамо диференцијалним количником пута Δs. Он нам представља граничну вредност којој се приближује количник $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

1° Вектор је функција времена t. Мења ли се време t, онда описује крајња тачка тога вектора једну произвољну криву.



Зато можемо тај вектор да сматрамо као радијус-вектор r једне мобилне тачке

$$r = f(t)$$

Времену t нека одговара вектор $OM = r$, времену $t+\Delta t$ нека одговара вектор $OM' = r'$

$$r' - r = \Delta r$$

где Δr представља вектор

$$\Delta r = M' - M$$

Количник $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ представља један вектор јер је Δt једна скаларна величина. Тај вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ имаће исти правац као и вектор Δr јер се дељењем са скаларном величином правац вектора не мења. Гранична вредност којој се приближује количник $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ кад Δt бива бескрајно малено назива се диференцијалним количником (квоцијентом) вектора r у времену t и пише

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Та гранична вредност биће један вектор који ће тангирати криву инфлуенције у тачки M. Означимо ли дужину MM' са Δs, то је интензитет вектора $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ једнак $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, па дакле тај вектор представља средњу брзину крајње тачке M на путу MM'. Интензитет вектора $\frac{dr}{dt}$ биће представљен са граничном вредношћу $\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ којој се приближава количник $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Тај ће интензитет бити према прећашњем раван скаларној величини брзине тачке M у времену t т.ј.

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

Вектор $\frac{dr}{dt}$ чији је интензитет раван брзини v и који тангира путању у додирној тачки назива се <u>вектором брзине</u> и означава

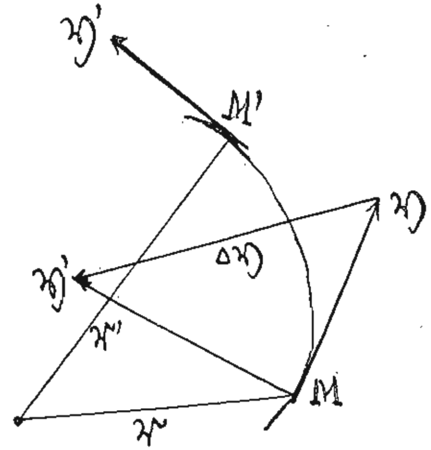
$$\frac{dr}{dt} = v$$

Зато можемо да кажемо: диференцијални количник вектора r по времену t раван је вектору брзине фиктивне мобилне тачке M у времену t. Енглески научари пишу место њега диференцијални количник по Њутновом примеру

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

и називају тај израз вектора r <u>флуксијом</u>.

Казали смо да први извод једног слободног вектора по времену представља по правцу и по величини брзину којом се крајња тачка његова креће у посматраном моменту, ако почетну тачку векторову сматрамо за непомичну. Тај нови вектор назвали смо флуксијом првог вектора и означили са $\dot{r}$. И овај вектор флуксије $\dot{r}$ биће такође функција времена и можемо опет питати за његов извод по времену. Вредност вектора $\dot{r}$ у моменту t представљена је вектором v, а у моменту $t+\Delta t$ вектором v'.



Према дефиницији извода биће извод вектора $\dot{r} = v$ представљен граничном вредношћу

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{v'-v}{\Delta t}$$

Диференција

$$v'-v = \Delta v$$

представљена је вектором Δv на

спизи. Та диференција је такође вектор, па зато израз

$$\frac{\mathfrak{v}'-\mathfrak{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathfrak{v}}{\Delta t}$$

представља такође један вектор који има исти правац као и вектор $\Delta \mathfrak{v}$. Тај вектор зовемо <u>средњом акцелерацијом</u> крајње тачке M вектора $\mathfrak{v}$ у времену Δt. Граничну вредност тога вектора кад Δt бива бесконачно мало зовемо <u>акцелерацијом</u> крајње тачке M у моменту t и пишемо

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\mathfrak{v}'-\mathfrak{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \dot{\mathfrak{v}} = \ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{g}$$

При прелазу на границу приближаваће се равнина вектора $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}'$ и $\Delta \mathfrak{v}$ оној равнини криве MM' која пролази кроз две бесконачно блиске тангенте. Ту равнину називамо <u>оскулационом равнином</u> криве MM' па зато можемо да кажемо: Акцелерација $\mathfrak{g}$ пада у оскулациону равнину криве што ју описује крајња тачка M вектора $\mathfrak{r}$.

Примедба: посматрамо ли кретање једне мобилне тачке масе m то ће тој тачки одговарати у сваком моменту један вектор акцелерације $\mathfrak{g}$. Продукат

$$m\,\mathfrak{g} = \mathfrak{F}$$

зовемо <u>силом</u>. У Механици се дефинише сила као узрок акцелерације. Сила $\mathfrak{F}$ има исти правац као и акцелерација $\mathfrak{g}$. Дејствује ли сила $\mathfrak{F}$ на једну мобилну тачку масе m_1, то ће тој маси дати акцелерацију $\mathfrak{g}_1$, па је

$$\mathfrak{F} = m_1 \mathfrak{g}_1$$

Дејствује ли та иста сила на другу мобилну тачку масе m_2, даће јој акцелерацију $\mathfrak{g}_2$, па је

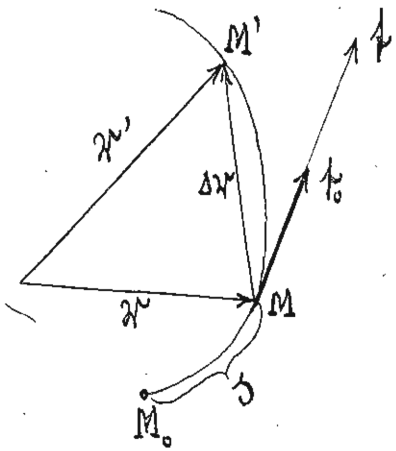
$$\mathfrak{F} = m_2 \mathfrak{g}_2$$

или

$$\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Иста сила даје према томе различним масама акцелерације које стоје инверзно у односају њихових маса. То нам даје могућност да меримо масе и сравњујемо их.

2° Ако је вектор r функција неког произвољног скаларног аргумента, то ће, ако се тај аргуменат мења, описивати крајња тачка M вектора r једну просторну криву. Узмимо једноставности ради да крајња тачка описује једну равну криву. Ту криву назвали смо кривом инфлуенције. Одаберемо ли на тој кривој једну непомичну тачку M_0 и означимо дужину лука M_0M са s, то можемо питати за извод вектора r по луку s т.ј. $\frac{dr}{ds}$ јер је s једна скаларна величина. У близини једног другог положаја вектора у M' биће



$$r' - r = \Delta r$$

а то је равно вектору MM' или боље рећи вектору $M' - M$. Промени вектора r за величину Δr одговара промена лука

$$\Delta s = \mathrm{arc}\ MM'$$

Количник $\frac{\Delta r}{\Delta s}$ биће један вектор истог правца као и вектор Δr. Извод вектора r по s биће гранична вредност тога количника т.ј.

$$\frac{dr}{ds} = \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$$

Кад s бива бесконачно мало приближује се тачка M' тачки M и зато се вектор $\frac{dr}{ds}$ приближава вектору t који тангира криву инфлуенције у тачки M. Правац тога вектора $\frac{dr}{ds}$ познат нам је; дакле имамо само да одредимо његов интензитет. Интензитет тога вектора представљен је граничном вредношћу којој се приближује количник $\frac{|\Delta r|}{\Delta s}$ а она је једнака јединици. Зато је

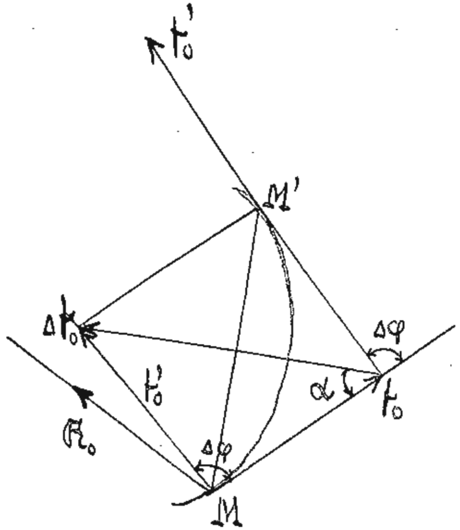
$$\frac{dr}{ds} = t_0$$

а то представља јединични вектор у правцу тангенте у M.

Шта представља израз

$$\frac{dt_0}{ds} = \frac{d^2 r}{ds^2}$$

Према дефиницији извода то је гранична вредност којој се приближује количник $\frac{t_0'-t_0}{\Delta s}$ где t_0' означава јединични вектор у правцу тангенте у тачки M' а



$$\Delta s = \text{arc } MM'$$

Диференција $t_0'-t_0$ је вектор Δt_0 који је дијагонала ромбуса чије су стране вектори t_0 и t_0'. Стране тога ромбуса имају дужине једнаке јединици. Угао што га вектор Δt_0 заклапа са вектором t_0 означимо са α. Онда је

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}$$

и вектор

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta s} = \frac{t_0'-t_0}{\Delta s}$$

биће вектор који има исти правац као и вектор Δt_0. Приближавањем ли се тачка M' тачки M, то ће тај вектор пасти у оскулаторну раван криве MM' у тачки M, а заклапаће са тангентом у тачки M угао

$$\lim_{\Delta s=0}\alpha = \lim_{\Delta s=0}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\varphi}{2}\right\} = \frac{\pi}{2}$$

Зато ће други извод вектора r по s бити један вектор нормалан на тангенту у тачки M и који лежи у оскулаторној равни. Имамо још да одредимо интензитет тога вектора. Из ромбуса следује

$$|\Delta t_0| = 2|t_0|\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{dt_0}{ds} = \lim_{\Delta s=0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Количник $\frac{d\varphi}{ds}$ зове се у Анализи кривином криве у тачки M и означује се са k т.ј.

$$\frac{d\varphi}{ds} = k$$

јер нам тај количник даје јачину криве у тачки M. Реципрочна вредност тога количника

$$\frac{ds}{d\varphi} = \rho$$

зове се полупречником кривине у тачки M, па је зато

$$\left|\frac{dt_0}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$$

други извод вектора $\mathfrak{r}$ по s представља дакле опет један вектор има ове особине: тај вектор лежи у оскулаторној равни криве инфлуенције у тачки M, наперен је на конкавну страну те криве, стоји нормално на тангенти а има интензитет који је раван $\frac{1}{\rho}$ где је ρ полупречник кривине. Означимо ли јединични вектор нормалан на тангенту у тачки M и који лежи у оскулаторној равни са $\mathfrak{n}_0$, то можемо да кажемо

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{\mathfrak{n}_0}{\rho}$$

Диференцијација продукта једног вектора са једним скаларом. Ако су у продукту $m\mathfrak{a}$ и скалар m и вектор $\mathfrak{a}$ функције једне скаларне величине x, то је према дефиницији извода

$$\frac{d(m\mathfrak{a})}{dx} = \lim_{\Delta x=0} \frac{(m+\Delta m)(\mathfrak{a}+\Delta\mathfrak{a}) - m\mathfrak{a}}{\Delta x}$$

За скаларну мултипликацију важе сви закони обичне мултипликације, зато је горњи количник даље

$$= \lim_{\Delta x=0} \frac{m\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\Delta m + m\Delta\mathfrak{a} + \Delta m\cdot\Delta\mathfrak{a} - m\mathfrak{a}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x=0} \left\{ \frac{\Delta m}{\Delta x}\mathfrak{a} + m\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Delta x} + \frac{\Delta m\,\Delta\mathfrak{a}}{\Delta x} \right\}$$

последњи члан је при прелазу на границу бесконачно мала величина вишег реда, па је зато

$$\frac{d(m\mathfrak{a})}{dx} = \frac{dm}{dx}\mathfrak{a} + m\frac{d\mathfrak{a}}{dx}$$

За диференцијацију важе дакле исти закони као и за диференцијацију скаларних величина.

Диференцијација скаларног продукта двају вектора. Исто тако као и у пређашњем извађању имамо

$$\frac{d(\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{dx} = \lim \frac{(\mathfrak{a}+\Delta\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\Delta\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\Delta x}$$

И за скаларну мултипликацију двају вектора важи дистрибутиван закон мултипликације, па је зато горњи количник једнак

$$=\lim\left\{\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Delta x}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\frac{\Delta\mathfrak{b}}{\Delta x}-\frac{\Delta\mathfrak{a}\cdot\Delta\mathfrak{b}}{\Delta x}\right\}=$$

$$=\frac{d\mathfrak{a}}{dx}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dx}$$

Диференцијација векторијелног продукта двају вектора. Имаћемо

$$\frac{d[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\frac{[(\mathfrak{a}+\Delta\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\Delta\mathfrak{b})]-[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{dx}$$

И за векторијелни продукат двају вектора важи дистрибутиван закон мултипликације, па је зато горњи количник даће

$$=\lim_{\Delta x=0}\left\{\left[\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Delta x}\mathfrak{b}\right]+\left[\mathfrak{a}\frac{\Delta\mathfrak{b}}{\Delta x}\right]+\frac{1}{\Delta x}\left[\Delta\mathfrak{a}\cdot\Delta\mathfrak{b}\right]\right\}=$$

$$=\left[\frac{d\mathfrak{a}}{dx}\mathfrak{b}\right]+\left[\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dx}\right]$$

Диференцијација вектора израженог помоћу јединичних вектора. Имамо ли да диференцијамо вектор

$$\mathfrak{a}=A_1 i+A_2 j+A_3 k$$

по једној скаларној величини x, то морамо имати на уму да се при мењању те скаларне величине неће јединични вектори i, j, k променити јер су они фиксирани у простору; ваља дакле само диференцирати компоненте A_1, A_2, A_3 па је зато

$$\frac{d(\mathfrak{a})}{dx}=\frac{dA_1}{dx}i+\frac{dA_2}{dx}j+\frac{dA_3}{dx}k$$

Ако је вектор $\mathfrak{a}$ функција од више скаларних величина: $x, y, z, \ldots$ то је

$$\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial x}=\frac{\partial A_1}{\partial x}i+\frac{\partial A_2}{\partial x}j+\frac{\partial A_3}{\partial x}k$$

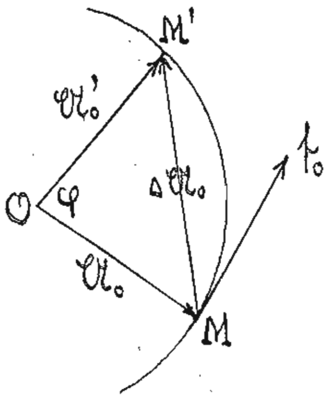
Поновивши диференцијалење добијамо

$$\frac{\partial^2\mathfrak{a}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}i+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}j+\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}k$$

Поновимо ли то n-пута добијамо

$$\frac{\partial^n\mathfrak{a}}{\partial x^n}=\frac{\partial^n A_1}{\partial x^n}i+\frac{\partial^n A_2}{\partial x^n}j+\frac{\partial^n A_3}{\partial x^n}k$$

Диференцијација јединичног вектора. Јединични вектор има константну дужину 1, зато се мења само његов правац а не његов интензитет. Како почетну тачку његову можемо фиксирати, то ће крајња тачка његова описивати једну сферну криву. Јединични вектор нека буде функција једног скаларног аргумента.



Означимо га са t, но задржимо у виду да t не мора бити време. Кад скаларни аргумент има вредност t (или: у времену t) нека јединични вектор има правац OM, а кад он има вредност $t+\Delta t$ нека тај вектор има правац OM'. Диференцијални количник јединичног вектора по аргументу t представљен је изразом

$$\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt} = \lim_{\Delta t=0} \frac{\mathfrak{e}_0' - \mathfrak{e}_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta\mathfrak{e}_0}{\Delta t}$$

Количник $\frac{\Delta\mathfrak{e}_0}{\Delta t}$ има правац MM', јер је Δt скалар. При прелазу на границу имаће дакле диференцијални количник правац тангенте t_0. Имамо још да испитамо колики ће бити интензитет тога диференцијалног количника. Означимо ли угао MOM' са φ то је

$$|\Delta\mathfrak{e}_0| = 2|\mathfrak{e}_0|\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{|\Delta\mathfrak{e}_0|}{\Delta t} = \lim \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

Диференцијални количник јединичног вектора је према томе један вектор који стоји нормално на правац јединичног вектора и чији је интензитет раван диференц. количнику угла за који се јединични вектор заокренуо.

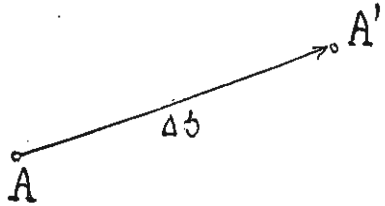
Да вектори $\mathfrak{e}_0$ и $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ стоје нормално један на другом можемо се и овако уверити: дефиниција јединичног вектора је $\mathfrak{e}_0^2=1$ диференцијалимо ли ову једначину то добијамо $2\mathfrak{e}_0\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}=0$ или $\mathfrak{e}_0\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}=0$ Ова једначина казује да су вектори $\mathfrak{e}_0$ и $\frac{d\mathfrak{e}_0}{dt}$ нормални један на другом. То важи само за векторе константне дужине иначе не јер је н. пр.

$$\frac{dr}{dt}=\frac{d(Ar_0)}{dt}=\frac{dA}{dt}r_0+A\frac{dr_0}{dt}$$

Диференцијални количник $\frac{dr}{dt}$ је према томе векторски збир двају вектора који су нормални један на други.

Диференцијација тачака

Тачка A нашега тродимензионалног простора нека буде функција времена t. У времену t нека има та тачка положај A а у времену $t+\Delta t$ положај A'. Онда је диференцијални количник те тачке по времену представљен изразом

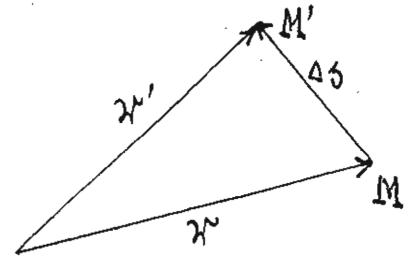


$$\frac{dA}{dt}=\lim_{\Delta t=0}\frac{A'-A}{\Delta t}=\lim_{\Delta t=0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v$$

Тај диференцијални количник представља дакле брзину којом се уочена тачка креће. Количник

$$\frac{d^2A}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=g$$

представља нам акцелерацију.

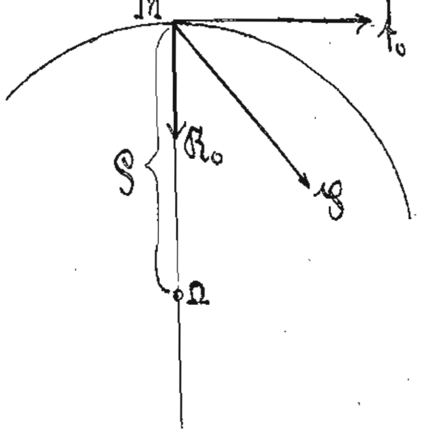


Диференцијални количници једне тачке и њених радиус вектора од једне чврсте тачке једнаки су. То следује отуда што је н. пр.

$$M'-M=r'-r=\Delta s.$$

Некоје примене Векторске Анализе у Рационалној Механици

Тангенцијална и нормална акцелерација. Описује ли једна мобилна тачка једну криву путању, па налази ли се у времену t у тачки M, то је вектор њезине брзине у том времену представљен са



$$\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{t}_0$$

где v означава скаларну величину брзине а $\mathfrak{t}_0$ јединични вектор у правцу тангенте. Из ове једначине следује диференцијацијом

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{g} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t}_0 + v\frac{d\mathfrak{t}_0}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t}_0 + v\frac{d\mathfrak{t}_0}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

где ds означује скаларни елеменат пута. Знамо да је

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{и} \quad \frac{d\mathfrak{t}_0}{ds} = \frac{\mathfrak{n}_0}{\rho}$$

где ρ означује радијус кривине а $\mathfrak{n}_0$ јединични вектор у правцу тога радиуса. Зато је

$$\mathfrak{g} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t}_0 + \frac{v^2}{\rho}\mathfrak{n}_0$$

Акцелерацију $\mathfrak{g}$ раставимо сто-према томе у две компоненте: једна од њих има правац $\mathfrak{t}_0$ т.ј. пада у правац тангенте; њен интензитет је

$$p_t = \frac{dv}{dt}$$

Друга компонента пада у правац главног радиуса кривине и има интензитет

$$p_\rho = \frac{v^2}{\rho}$$

Прву компоненту зовемо <u>тангенцијалном акцелерацијом</u> мобилне тачке, а другу <u>нормалном</u> или <u>центрипеталном акцелерацијом</u> мобилне тачке јер је наперена према центру оскулационог круга у тачки M.

Из прећашњих једначина следује такође

$$m\gamma = m\frac{dv}{dt}t_0 + m\frac{v^2}{\rho}n_0$$

Величина $m\gamma$ представља нам силу P

$$m\gamma = P$$

која утиче на ову тачку. Ту силу можемо такође раставити у две компоненте: прва од њих има интензитет

$$P_t = m\frac{dv}{dt}$$

и пада у правац тангенте; друга има интензитет

$$P_\rho = m\frac{v^2}{\rho}$$

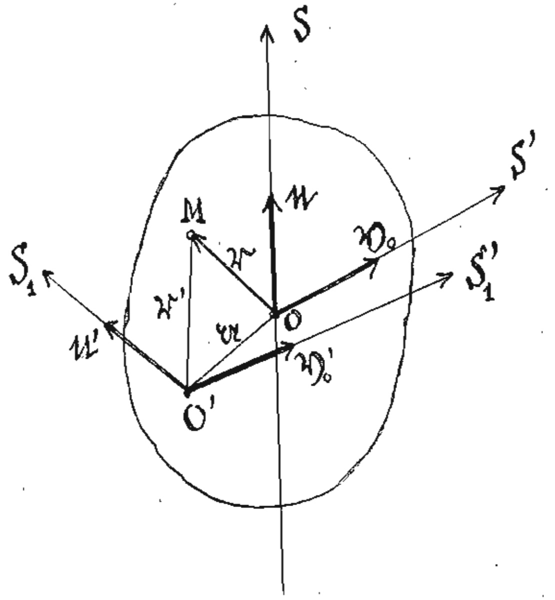
Ове силе зовемо: *тангенцијалном* и *нормалном* или *центрипеталном силом*.

Креће ли се мобилна тачка у једној правој, то је радиус кривине бесконачно велики т.ј. $\rho=\infty$ и зато је $P_\rho=0$. Остаје дакле само једна сила која дејствује у самој тој правој. Зато можемо да кажемо да је центрипетална сила она сила која изазива кривину путање.

Креће ли се мобилна тачка у произвољној кривој но константном брзином, то је $v=\text{const.}$ из чега опет следује $P_t=0$. Тангенцијална сила је према томе она сила или онај део резултујуће силе који изазива промену величине брзине.

О општем кретању крутог тела. Рационална Механика учи да свако кретање крутог тела можемо у посматраном моменту заменити са његовом *ротацијом* око једне осе OS и једном *транслацијом* у правцу OS'. Ротацију тела можемо представити према прећашњем са вектором u који пада у правац осе ротације и чији је интензитет $|u|=\omega$ т.ј.

раван угловној брзини. Транслацију можемо представити вектором $\mathfrak{v}_0$ који има правац транслације и чији је интензитет раван брзини транслације. Онда ће произвољно одабрана тачка M удаљена за вектор $\mathfrak{r}$ од тачке O чинити у истом моменту два кретања: једно транслаторно кретање у



правцу $\mathfrak{v}_0$ (јер све тачке тога тела имају транслаторно кретање исте брзине) а осим тога имаће услед ротације око осе OS брзину $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ као што смо то пре доказали. Брзина $\mathfrak{v}$ тачке M равна је према томе

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}] \qquad 1)$$

Питамо сад да ли је могуће кретање крутог тела у посматраном моменту заменити са једним другим кретањем т.ј. са ротацијом око једне друге осе OS_1 и транслацијом у другом правцу OS_1'. Променимо ли дакле тачку O коју називамо <u>тачком редукције</u>, то ће се променити и вектори $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}_0$ у векторе $\mathfrak{u}'$ и $\mathfrak{v}_0'$. Означимо

$$O' - O = \mathfrak{a}$$
$$M - O' = \mathfrak{r}'$$

одакле сабирањем

$$M - O = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$$

Захтевамо да се услед промене ротације и транслације брзина тачака крутог тела не промени т.ј. да је и у овом случају брзина тачке M једнака $\mathfrak{v}$, дакле

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + [\mathfrak{u}'\mathfrak{r}'] \qquad 2.)$$

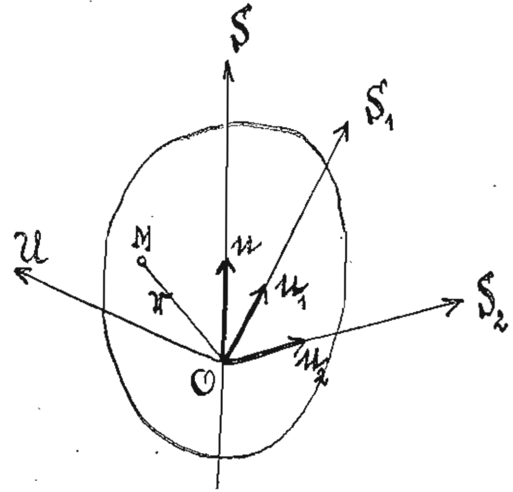
Тачка O' не ротира у новом систему јер кроз њу пролази оса ротације; зато је њена брзина равна $\mathfrak{v}_0'$. Та брзина мора бити равна брзини коју је тачка O' имала и у

првом систему, дакле
$$v_0' = v_0 + [u a]$$
или
$$v_0 = v_0' - [u a]$$
Заменимо ли ову вредност у једначини 1.) то добијамо
$$v = v_0' - [u a] + [u r] = v_0' + [u (r - a)] = v_0' + [u r']$$
а с обзиром на једначину 2.)
$$v_0' + [u r'] = v_0' + [u' r']$$
Из ове једначине следује
$$u' = u$$
Променом ротационе осе дакле не мења се ротација него се мења само транслација и та промена дата је једначинама
$$u' = u$$
$$v_0' = v_0 + [u a]$$
Мењамо ли дакле положај ротационе тачке O то се тиме вектор u неће променити.

Посматрани простор са свима својим тачкама и са свима векторима који тим тачкама одговарају зовемо <u>векторским пољем</u> па зато можемо да кажемо: тај вектор u у посматраном пољу је константан. Језиком нове геометрије можемо такође да кажемо да: вектори u који одговарају тачкама посматраног простора сачињавају један геометриски сноп јер су паралелни и једнаке дужине.

Мењамо ли редукциону тачку O то ће се мењати вектор v_0' и зато тај вектор није константан у посматраном пољу.

Из изведених једначина можемо исказати још једно правило Рационалне Механике: Чини ли круто тело више ротација т. ротира ли око осе OS и са



обрт око осе OS', са обрт око осе OS_2 и т. д. што можемо доказати следеће: ротације око тих оса нека буду представљене векторима: $u, u_1, u_2, \ldots$ Произвољна тачка M имаће услед ротације око осе OS брзину

$$v_0 = [u r]$$

услед ротације око осе OS_1 брзину

$$v_1 = [u_1 r]$$

услед ротације око осе OS_2 брзину

$$v_2 = [u_2 r]$$

и т. д. Из тих брзина резултоваће брзина:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = \\ &= [u r] + [u_1 r] + [u_2 r] + \cdots = \\ &= [(u + u_1 + u_2 + \cdots) r] \end{aligned}$$

Саберемо ли ротације и означимо ли

$$u + u_1 + u_2 + \cdots = U$$

то је

$$v = [U r]$$

Резултујуће кретање тела добијамо дакле ако посматране ротације саберемо у вектор U, онда ће се тело кретати као кад би ротирало око једне осе U угловном брзином $\omega_0 = |U|$.

Главне једначине динамике и теореме о импулсима.

Дејствује ли на материјалну тачку масе m сила F што јој она даје акцелерацију w па је

$$F = m w = m \frac{dv}{dt}$$

или

$$F - m \frac{dv}{dt} = 0 \qquad 1.)$$

Силу која је представљена изразом $m \frac{dv}{dt}$ зовемо ефективном силом, па можемо једначину 1.) тако интерпретисати да кажемо: Спољна сила F и негативно узета ефективна сила $-m \frac{dv}{dt}$ држе се на материјалној тачки у равнотежу, јер је њихов векторски збир раван нули. Тиме смо динамичкој једначини 1.) дали статичку интерпретацију.

Ово је основна идеја Даламберовог принципа који се у Рационалној Механици раширује и на систем материјалних тачака или крутог тела у овом облику: Дејствују ли на круто тело или на систем материјалних тачака један систем сила $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$ то ће тај систем изазвати кретање материјал. система, па ће у посматраном моменту тачке $m_1, m_2, \dots$ имати брзине $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \dots$ Даламберов принцип казује да се систем сила $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$ држи у равнотежи са негативно узетим ефективним силама $-m_1\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt}$, $-m_2\frac{d\mathfrak{v}_2}{dt}, \dots$ матер. система. На тај начин сведен је основни проблем Динамике на основни проблем Статике. Статика учи да је потребан услов да се систем сила држи у равнотежи:

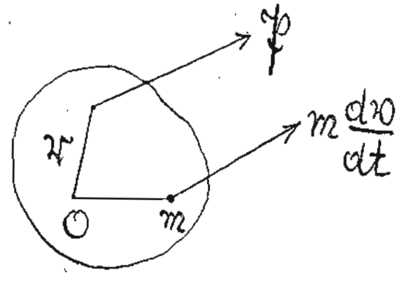
1° да је векторски збир тих сила раван нули

2° да је збир статичких момената тих сила с обзиром на једну тачку простора такође раван нули.

Употребимо ли ове услове на наш проблем т.ј. формулишемо ли да се спољне силе $\mathfrak{P}$ и ефективне силе $-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ држе у равнотежи, то добијамо ове једначине

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\mathfrak{P} - \Sigma m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} &= 0 \\ \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}] - \Sigma\left[\mathfrak{r}m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 2.)$$

Ово су основне једначине Динамике. У Механици имамо шест оваквих једначина, овди само две.



Овим једначинама можемо дати други облик: Вектор $m\mathfrak{v}$ називамо вектором квантитета кретања материјалне тачке m. Векторски збир тих вектора читавог система даће величину

$$\mathfrak{K} = \Sigma m\mathfrak{v} \quad 3.)$$

називамо потпуним квантитетом

кретања посматраног матер. система или тела или импулсом система.
Аксијални вектор $[\mathfrak{r} m \mathfrak{v}]$, где $\mathfrak{r}$ означава векторско одстојање тачке m од тачке O, називамо статичким моментом квантитета кретања с обзиром на тачку O. Збир свих таквих аксијалних вектора система даје величину

$$\mathfrak{U} = \Sigma[\mathfrak{r} m \mathfrak{v}] \qquad 4.)$$

називамо тоталним статичким моментом вектора квантитета кретања или импулсом обртања око тачке O.

Диференцијалимо ли једначину 3.) по времену то добијамо

$$\frac{d\mathfrak{W}}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \Sigma \mathfrak{P}$$

Исто тако следује из једначине 4.)

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \Sigma\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt} m \mathfrak{v}\right] + \Sigma\left[\mathfrak{r} m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right]$$

Први члан десне стране ове једначине раван је

$$\Sigma[\mathfrak{v} m \mathfrak{v}] = 0$$

па је зато десна страна те једначине даље $= \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$.

Једначине

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{W}}{dt} &= \Sigma \mathfrak{P} \\ \frac{d\mathfrak{U}}{dt} &= \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}] \end{aligned}\right\} \qquad 5.)$$

су основне једначине динамике у Grassmann-овом облику. Оне се могу формулисати речима овако: Диференцијални количник импулса по времену раван је векторском збиру спољних сила; диференцијални количник импулса обртања око тачке O по времену t раван је векторском збиру статичких момената спољних сила с обзиром на ту исту тачку.

Не дејствују ли на систем никакве спољне силе, онда је

$$\Sigma \mathfrak{P} = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}] = 0$$

зато је

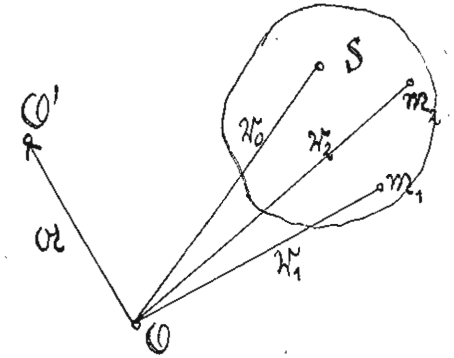
$$\frac{d\mathfrak{W}}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\mathfrak{U}}{dt} = 0$$

Интеграцијом ових величина добијамо

$v = const \qquad u = const$

За време целог кретања не мењају се импулси.

Посматрамо ли један материјални систем тачака $m_1, m_2, \dots$



којих су одстојања од једне тачке сравњивања O: r_1, r_2, ... то називамо величину $\Sigma m r$ моментом маса посматраног тела с обзиром на тачку O. Величину

$$\Sigma m = M$$

називамо тоталном масом система. Ону тачку S система која има од тачке O такво одстојање r_0 да је

$$M r_0 = \Sigma m r \qquad 6.)$$

т.ј.

$$r_0 = \frac{1}{M} \Sigma m r$$

називамо тежиштем посматраног тела. Положај тога тежишта S не зависи од тачке O него само од облика тела. Јер одаберемо ли једну другу тачку сравњивања O' удаљену за a од тачке O и означимо ли одстојања тачака $m_1, m_2 \dots$ од те тачке сравњивања са $r_1', r_2' \dots$ а одстојање тачке S од тачке O' са r_0' то постоје ове релације

$$r_1 = r_1' + a$$
$$r_2 = r_2' + a$$
$$\dots\dots\dots$$
$$r_0 = r_0' + a$$

Ставимо ли ове вредности у једначини 6.) то добијамо

$$M r_0' + M a = \Sigma m (r' + a) =$$
$$= \Sigma m r' + a \Sigma m = \Sigma m r' + a M$$

или

$$M r_0' = \Sigma m r'$$

Диференцијалимо ли једначину 6.) по времену то добијамо

$$M \frac{dr_0}{dt} = \Sigma m v$$

Израз $\frac{dr_0}{dt} = v_0$ представља брзину којом се креће тежиште, те је

$$M v_0 = \Sigma m v$$

диференцијалимо ли поново, добијамо

$$\mathcal{M}\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \Sigma \mathfrak{P}$$

Означимо ли векторски збир спољних сила $\Sigma\mathfrak{P}$ са $\mathfrak{R}$, то имамо

$$\mathcal{M}\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \mathfrak{R}$$

Кад би посматрали једну материјалну тачку која има масу $\mathcal{M}$ и на коју дејствује сила $\mathfrak{R}$, то би кретање те матер. тачке било одређено истом оваквом једначином. Тежиште система креће се према томе тако као кад би у њему била сконцентрисана сва маса система и као кад би на њега дејствовале све спољне силе без промене величина и правца. Не дејствују ли на матер. систем никакве спољне силе т.ј. ако је $\Sigma\mathfrak{P}=0$, онда је $\mathcal{M}\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}=0$ или интеграцијом $\mathfrak{v}_0=\mathrm{const.}$ т.ј. тежиште система креће се у истом правцу константном брзином. Креће ли се тачка O са брзином $\mathfrak{v}_e$, онда је релативна брзина једне тачке матер. система равна векторској диференцији $(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_e)$ па је зато

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_e$$

$$\mathfrak{U} = \Sigma[\mathfrak{r} m \mathfrak{v}]$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \Sigma\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt} m \mathfrak{v}\right] + \Sigma\left[\mathfrak{r} m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] =$$

$$= \Sigma[(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_e) m \mathfrak{v}] + \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}] =$$

$$= -[\mathfrak{v}_e \Sigma m \mathfrak{v}] + \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$$

тако да је

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} + \mathfrak{v}_e \times \overbrace{\Sigma m \mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}} = \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$$

Одаберемо ли за тачку сравњивања O тежиште система S т.ј. посматрамо ли релативно кретање система око тежишта, онда је

$$\mathfrak{v}_e = \mathfrak{v}_0$$

и горње једначине добијају овај облик

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} + [\mathfrak{v}_0 \mathfrak{v}] = \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$$

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{1}{\mathcal{M}}\Sigma m \mathfrak{v} = \frac{1}{\mathcal{M}}\mathfrak{v}$$

Ставимо ли ову вредност у горњу једначину, то ће други члан леве стране исчезнути, па добијамо

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \Sigma[\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$$

Ова једначина казује да релативно кретање система око тежишта зависи само од статичког момента спољних сила с обзиром на тежиште.

Векторско и скаларно поље.

Векторско поље смо већ дефинисали као део нашега тродимензионалног простора у коме свакој тачки одговара по један известан вектор. Посматрамо ли н. пр. кретање крутог тела које смо свели на ротацију око осе $\mathfrak{u}$ и на транслацију у правцу $\mathfrak{v}_0$, то је брзина произвољне тачке тога тела одређена једначином

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$$

Свакој тачки крутог тела одговара дакле у посматраном моменту по један известан вектор $\mathfrak{v}$. Тај вектор функција је вектора положаја $\mathfrak{r}$. У спец. случају могли смо вектор $\mathfrak{v}$ одредити помоћу вектора $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{r}$; $\mathfrak{r}$ је променљива а $\mathfrak{v}_0$

и и играју улогу константата. Својство крутог тела да се одстојања његових матер. тачака за време кретања не мењају узрок је да смо вектор у могли изразити помоћу три основна вектора. Но замислимо да место крутог тела имамо течност; поједини делови те течности нису везани један за другог па се могу сваки за себе кретати. Додамо ли тој течности још и својство дилатације, то можемо свагда свако векторско поље представити као векторе брзина појединих делова те течности. Представљање векторског поља помоћу течности зове се хидродинамичка слика векторског поља. Такве хидродинамичке представе служиле су Maxwell-у при развијању његове теорије, па су се и многи називи из хидродинамике одомаћили у Векторској Анализи.

Одговара ли свакој тачки нашег тродимензионалног простора једна одређена вредност једнога скалара, то такво поље зовемо скаларним пољем. Посматрамо ли н. пр. једно угрејано тело, то свака тачка тога тела има своју извесну температуру, па према томе распоред тих температура представља једно скаларно поље. Потенцијал и функција сила са којим смо се појмовима у Рационалној Механици упознали такође су скалари, па је зато потенцијално поље и поље функција сила такође скаларно.

Линеарна векторска функција

Посматрамо ли вектор $\mathfrak{v}$ који се у посматраном пољу континуално мења, па претпоставимо ли да су његове компоненте $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ у правцу јединичних вектора i, j, k линеарне функције координата тачке којој вектор одговара, то велимо да је вектор $\mathfrak{v}$ *линеарна векторска функција*. Његове компоненте су према томе представљене једначинама

$$\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_x^0 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_y^0 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$
$$\mathfrak{v}_z = \mathfrak{v}_z^0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

Ово је векторска функција сасвим специјалне врсте, но од важности је због тога што помоћу ње можемо представити сваку другу континуалну векторску функцију. Ако се ограничимо на врло мален простор око тачке O, компоненте вектора $\mathfrak{v}$ у тачки O су $\mathfrak{v}_x^0, \mathfrak{v}_y^0, \mathfrak{v}_z^0$. Посматрамо ли врло мален простор који обухвата тачку O, то можемо векторску функцију развити у Маклоренов ред и ако је посматрани простор довољно ограничен, тај је ред прекинут већ код првих линеарних чланова. Тако ће компоненте те функције $\mathfrak{v}$ бити представљене једначинама:

$$\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_x^0 + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}x + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}y + \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z}z$$
$$\mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_y^0 + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x}x + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial y}y + \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}z$$
$$\mathfrak{v}_z = \mathfrak{v}_z^0 + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}x + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}y + \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial z}z$$

Парцијалним диференцијалним количницима $\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}, \dots$ дајемо оне вредности које има векторска функција у тачки O. Величине x, y, z сматрамо за скаларе.

<u>Hamilton-ов оператор</u>

Ако је вектор $\mathfrak{y}$ функција вектора положаја $\mathfrak{r}$ т.ј. ако је

$$\mathfrak{y} = f(\mathfrak{r})$$

то онда прираштају $\Delta\mathfrak{r}$ вектора $\mathfrak{r}$ одговара прираштај $\Delta\mathfrak{y}$ вектора $\mathfrak{y}$ па је

$$\mathfrak{y} + \Delta\mathfrak{y} = f(\mathfrak{r} + \Delta\mathfrak{r})$$

Количник $\frac{\Delta\mathfrak{y}}{\Delta\mathfrak{r}}$ нема одређеног значења јер представља количник двају вектора, па према томе ни његова гранична вредност $\lim\limits_{\Delta\mathfrak{r}=0}\frac{\Delta\mathfrak{y}}{\Delta\mathfrak{r}}$ неће имати одређеног значења. Из тога узрока не можемо говорити о диференцијалном количнику једног вектора са једним другим вектором, па се при диференцирању вектора морамо ограничити на диференцирање по скаларним величинама са којим релацијом смо се већ упознали.

Но, испитујући векторска поља имамо да испитујемо зависност вектора $\mathfrak{y}$ од вектора $\mathfrak{r}$, па у многим проблемима нећемо моћи избећи инфинитезимална разматрања. Зато смо присиљени да уведемо једну нову операцију која та разматрања дозвољава и која има одређено значење. Та операција представљена је симболички <u>Hamilton-овим оператором</u> који пишемо

$$\nabla$$

Тај оператор назива се, због своје сличности са једним старо-јеврејским инструментом „<u>набла</u>". Неки аутори називају га: „<u>дел</u>" скраћено од „делта", а неки: „<u>атлед</u>".

Примењује ли се операција представљена хамилтоновим оператором на један скалар U скаларног поља $U(x,y,z)$, то она значи

значи ову одређену операцију

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$$

где $\frac{\partial U}{\partial x}$ ... представљају парцијалне диференц. количнике скалара U у правцима јединичних вектора i, j, k. Резултат те операције представља дакле један вектор чије су компоненте $\frac{\partial U}{\partial x}, \dots$

Примењује ли се операција представљена Хамилтоновим оператором на један вектор

$$v = v_x i + v_y j + v_z k$$

то она означава ову одређену операцију

$$\nabla v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Резултат те операције представља дакле један скалар.

Ове операције можемо сматрати: прву као продукат симбола

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

сматраног за вектор са скаларом U, другу операцију можемо сматрати за скаларни продукат тога истога симбола сматраног за вектор са вектором v. Заиста је

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y} j + \frac{\partial U}{\partial z} k$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right)(v_x i + v_y j + v_z k) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Оператор ∇ нема сам за себе никаквог значења као и знак „d" из диференц. рачуна, него само у вези са скаларима или векторима. Операција ∇ независна је од координатног система. Пре но што докажемо ову важну особину те операције, извешћемо правила за трансформацију координата. Јединични вектори i, j, k нека сачињавају један систем јединичних вектора нормалних један на другом, а вектори i', j', k' други један систем таквих јединичних вектора. Косинуси углова што их ти вектори граде међу собом нека буду представљени у следећој табели. Ако су компоненте вектора $\mathfrak{A}$ у првом систему: A_1, A_2, A_3, а у другом: A_1', A_2', A_3' т.ј.

	i	j	k
i'	α_1	α_2	α_3
j'	β_1	β_2	β_3
k'	γ_1	γ_2	γ_3

$$\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k = A_1' i' + A_2' j' + A_3' k'$$

то добијамо, употребив познато правило: да је пројекција збира од више познатих вектора равна збиру пројекција тих вектора, ове једначине за трансформацију

$$A_1' = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3$$
$$A_2' = A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + A_3 \beta_3$$
$$A_3' = A_1 \gamma_1 + A_2 \gamma_2 + A_3 \gamma_3$$

Исто је тако

$$i' = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$
$$j' = \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$$
$$k' = \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3 k$$

Косинуси табеле нису независни међу собом него постоје познате једначине

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$
$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

. . . .

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0$$

. . . .

Применимо ове једначине на трансформацију операције ∇ из једног система у други. У првом систему је

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

а у другом

$$\nabla' = i'\frac{\partial}{\partial x'} + j'\frac{\partial}{\partial y'} + k'\frac{\partial}{\partial z'}$$

Трансформишемо ли компоненте $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ на први систем, то је

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x}\beta_1 + \frac{\partial}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial}{\partial z}\beta_3$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x}\gamma_1 + \frac{\partial}{\partial y}\gamma_2 + \frac{\partial}{\partial z}\gamma_3$$

Зато је

$$\nabla' = (\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_3\right) +$$

$$+(\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k)\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta_1+\frac{\partial}{\partial y}\beta_2+\frac{\partial}{\partial z}\beta_3\right)+$$

$$+(\gamma_1 i+\gamma_2 j+\gamma_3 k)\left(\frac{\partial}{\partial x}\gamma_1+\frac{\partial}{\partial y}\gamma_2+\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)$$

Изведемо ли мултипликацију и саберемо ли све чланове који одговарају истом јединичном вектору, то добијамо

$$\nabla' = i\left\{(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)\frac{\partial}{\partial x}+(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)\frac{\partial}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+(\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)\frac{\partial}{\partial z}\right\}+j\{\cdots\}+k\{\cdots\}$$

или

$$\nabla' = i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}=\nabla$$

т.ј. операција ∇ не зависи од координатног система.

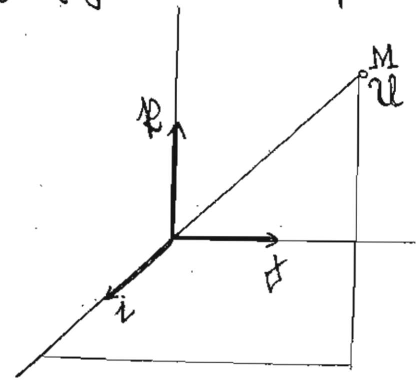
Аналитичко значење израза ∇U

Аналитичко значење израза ∇U може се растумачити на следећи начин: Нека је функција U функција трију координата x, y, z

$$U = U(x, y, z)$$

т.ј. функција тродимензионалног простора, онда U можемо сматрати и као функцију вектора

$$r = ix + jy + kz$$



Диференцијалимо ли ову једначину, добијамо

$$dr = i\,dx + j\,dy + k\,dz$$

Помножимо ли ову једначину скаларно прво са i, па са j, па са k, то добијамо

$$dx = i\,dr$$
$$dy = j\,dr$$
$$dz = k\,dr$$

Из анализе следује да је

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

Субституишемо ли ову једначину кад заменимо вредности dx, dy, dz, то имамо

$$dU = dr\left(\frac{\partial U}{\partial x}i + \frac{\partial U}{\partial y}j + \frac{\partial U}{\partial z}k\right)$$

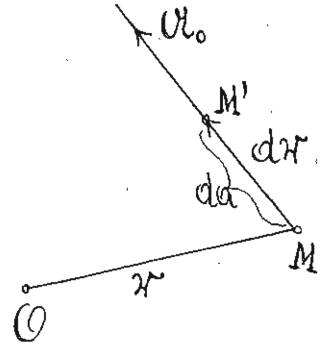
или

$$dU = dr\,\nabla U \qquad 1.)$$

Из ове једначине следује значење израза ∇U: ∇U је онај вектор који умножен скаларно са померањем dr даје промену скалара U која одговара том померању.

Небисмо смели написати $\nabla U = \frac{dU}{dr}$ јер десна страна ове једначине у којој долази вектор dr у именитељу, нема значења. Али ми смемо једначину 1.) поделити са интензитетом da вектора dr па добијамо

$$\frac{dU}{da} = \frac{dr}{da}\nabla U$$



Нека a_0 представља јединични вектор у правцу вектора dr; онда је

$$dr = a_0\,da$$

и зато је

$$\frac{dr}{da} = a_0$$

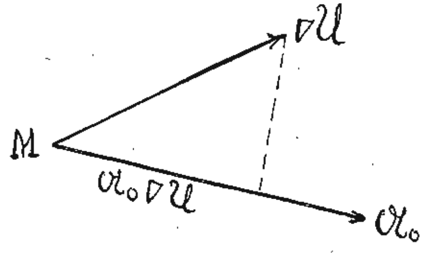
те је

$$\frac{dU}{da} = a_0\,\nabla U$$

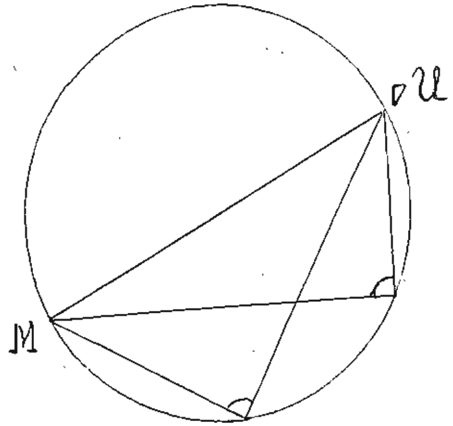
Зато можемо израз ∇U дефинисати и овако: ∇U је онај вектор који помножен скаларно са јединичним вектором a_0 даје диференцијални количник скалара U у правцу вектора a_0 или величину промене скалара U у том правцу.

Рекли смо пре да вектор ∇U не зависи од коорд. система. То је један вектор који у свакој тачки скаларног поља U има своју одређену вредност. Величина $a_0\,\nabla U$

представља пројекцију вектора ∇U на правац јединичног вектора a_0. Конструишемо ли у тачки M скаларног поља



те пројекције на све могуће праве које пролазе кроз тачку M, то ће крајње тачке тих пројекција лежати на површини једне кугле чији је дијаметар вектор ∇U.



Вектор ∇ представља према томе по свом правцу и величини највећу промену скалара U. Зато можемо израз ∇U да дефинишемо овако: ∇U је вектор чији се правац подудара са правцем у коме се скалар U највише мења а чији је интензитет раван величини промене скалара U у томе правцу.

Градиент скаларног поља

Уочимо поље скалара

$$U = U(x, y, z)$$

Свакој тачки тога поља одговара једна извесна вредност тога скалара. Претпостављамо као и код свих следећих испитивања да се скалар у томе пољу континуирно мења. Величина промене у правцу x (јединичног вектора $\mathfrak{i}$) представљена је са $\frac{\partial U}{\partial x}$; величина промене у правцу јединичног вектора $\mathfrak{j}$ је $\frac{\partial U}{\partial y}$, а у правцу јединичног вектора $\mathfrak{k}$ је $\frac{\partial U}{\partial z}$. Сматрамо ли ове величине као компоненте вектора $\mathfrak{v}$ т.ј.

$$\mathfrak{v} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathfrak{k}$$

то је тај вектор према претходном идентичан са вектором ∇U т.ј.

$$v = \nabla U$$

Тај вектор v називамо <u>градиентом</u> скаларног поља U у тачки (x,y,z). Пише се често пута

$$v = \text{grad}\, U$$

Градиент скаларног поља даје нам према томе правац и величину најјаче промене скалара U. Свакој тачки скаларног поља U одговара један известан вектор v а сви ти вектори представљају опет једно векторско поље. Интензитет од $\text{grad}\, U$ представљен је изразом

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

На тај начин смо из скаларног поља извели једно векторско поље. То векторско поље карактерише скаларно поље из којега смо га извели.

Једну другу карактеристику скаларног поља U можемо добити на овај начин: Једначина

$$U(x,y,z) = C$$

где C означава једну константу, представља једну површину скаларног поља у којој скалар U има свуда исту константну вредност C. Две површине које одговарају истој константи C сматрамо као листове једне те исте површине. Таква два листа могу се додиривати а могу се и сећи што није никакав случај код површина које одговарају двема различних константама C.

Одаберемо ли две површине које се разликују за једну константну диференцију ΔC константе C, то такве две површине ограничавају један слој скаларног поља. Одаберемо ли читаву серију таквих површина које одговарају константама $C, C+\Delta C, C+2\Delta C, \ldots$ то можемо на тај начин читаво скаларно поље разделити у слојеве. Дебљина слојева не мора бити

$$\mathfrak{y} = \nabla U$$

Тај вектор $\mathfrak{y}$ називамо градиентом скаларног поља U у тачки (x,y,z). Пише се често пута

$$\mathfrak{y} = \mathrm{grad}\, U$$

Градиент скаларног поља даје нам према томе правац и величину најјаче промене скалара U. Свакој тачки скаларног поља U одговара један известан вектор $\mathfrak{y}$ а сви ти вектори представљају опет једно векторско поље. Интензитет од $\mathrm{grad}\, U$ представљен је изразом

$$|\mathfrak{y}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

На тај начин смо из скаларног поља извели једно векторско поље. То векторско поље карактерише скаларно поље из којега смо га извели.

Једну другу карактеристику скаларног поља U можемо добити на овај начин: Једначина

$$U(x,y,z) = C$$

где C означава једну константу, представља једну површину скаларног поља у којој скалар U има свуда исту константну вредност C. Две површине које одговарају истој константи C сматрамо као листове једне те исте површине. Таква два листа могу се додиривати а могу се и сећи што није никако случај код површина које одговарају двема различним константама C.

Одаберемо ли две површине које се разликују за једну константну диференцију ΔC константе C, то такве две површине ограничавају један слој скаларног поља. Одаберемо ли читаву серију таквих површина које одговарају константама $C, C+\Delta C, C+2\Delta C, \dots$ то можемо на тај начин читаво скаларно поље разделити у слојеве. Дебљина слојева не мора бити свуда иста. Где је слој дебљи, онде је промена скалара U мања. Такве површине у којима скалар U има сталну вредност зовемо <u>површинама једнаког нивоа</u>. Косинуси углова што их нормала такве једне површине заклапа са коорд. осама представљени су са

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} = \frac{v_x}{|v|}$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} = \frac{v_y}{|v|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} = \frac{v_z}{|v|}$$

Исте углове заклапа према осе и вектор v т.ј. градиент скаларног поља, те можемо да кажемо: Градиент скаларног поља нормалан је на површинама једнаког нивоа.

Кажемо да је скалар U у пољу једнолично размештен, ако је његов градиент константан вектор. Онда су површине једнаког нивоа површине (равнине) паралелне једна другој. Слојеви који одговарају једнаким диференцијама ΔC једнаке су дебљине. Такво је поље н. пр. поље теже, ако сматрамо да су правци теже паралелни а тежа константна.

Из дефиниције Хамилтоновог оператора следују ове једначине

$$\nabla(cU) = \frac{\partial(cU)}{\partial x}i + \frac{\partial(cU)}{\partial y}j + \frac{\partial(cU)}{\partial z}k = c\nabla U$$

ако c представља једну константу. Исто је тако

$$\nabla(U_1+U_2) = \frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial x}i + \frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial y}j + \frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial z}k = \nabla U_1 + \nabla U_2$$

$$\nabla(U_1U_2) = \frac{\partial(U_1U_2)}{\partial x}i + \frac{\partial(U_1U_2)}{\partial y}j + \frac{\partial(U_1U_2)}{\partial z}k = U_1\left\{\frac{\partial U_2}{\partial x}i + \frac{\partial U_2}{\partial y}j + \frac{\partial U_2}{\partial z}k\right\} + U_2\left\{\frac{\partial U_1}{\partial x}i + \frac{\partial U_2}{\partial y}j + \frac{\partial U_1}{\partial z}k\right\} = U_1\nabla U_2 + U_2\nabla U_1$$

За операцију ∇ на скаларним величинама важе дакле закони обичне диференцијације.

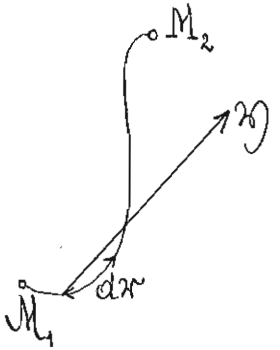
Из једначине

$$dU = d\mathfrak{r}\,\nabla U = \mathfrak{y}\,d\mathfrak{r}$$

следује

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathfrak{y}\,d\mathfrak{r} = U_2 - U_1$$

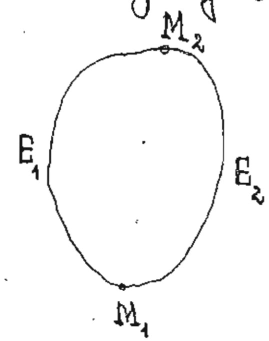
где U_2 и U_1 представљају величине скалара U у тачкама M_1 и M_2. Ако према томе у пољу градијента $\mathfrak{y}$ једнога скалара U изведемо $\int \mathfrak{y}\,d\mathfrak{r}$ дуж једне линије која



спаја тачке M_1 и M_2, то вредности тога интеграла зависи само од вредности скалара U у тачкама M_1 и M_2 а не зависи од пута којим се из тачке M_1 у тачку M_2 дошло, где $d\mathfrak{r}$ значи елеменат пута. Зато ће вредност $\int \mathfrak{y}\,d\mathfrak{r}$ према томе дуж једног затвореног пута бити равна нули т.ј.

$$\int_L \mathfrak{y}\,d\mathfrak{r} = 0$$

Такво векторско поље у коме линиски интеграл $\int \mathfrak{y}\,d\mathfrak{r}$ дуж једне затворене линије исчезава зовемо: <u>безвртложним векторским пољем</u>. Одатле можемо доказати да свако безвртложно поље можемо сматрати као поље градијента једнога скалара. Дефиниција безвртложног поља је да линиски интеграл на затвореној линији исчезава, дакле



$$\int_{M_1 M_2 M_1} = 0 = \int_{M_1 E_1 M_2} + \int_{M_2 E_2 M_1}$$

или

$$\int_{M_1 E_1 M_2} = \int_{M_1 E_2 M_2}$$

Вредност интеграла је према томе константна и непромењена ишли ми преко тачке E_1 или преко друге које тачке E_2, зато тај интеграл може зависити само од вредности скалара у тачкама M_1 и M_2, па је зато

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$$

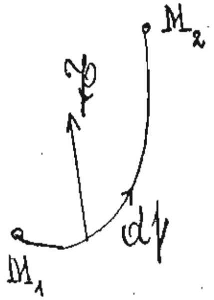
Приближују ли се границе M_1 и M_2 бесконачно једна другој, то је

$$\mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = dU$$

Сравнимо ли ову једначину са једначином 1) то видимо да вектор $\mathfrak{v}$ можемо сматрати као градиент једнога скалара U

$$\mathfrak{v} = \nabla U$$

Ако вектор $\mathfrak{v}$ представља једну силу $\mathfrak{F}$ а вектор $d\mathfrak{r}$ елемент вектора пута ds, то линиски интеграл

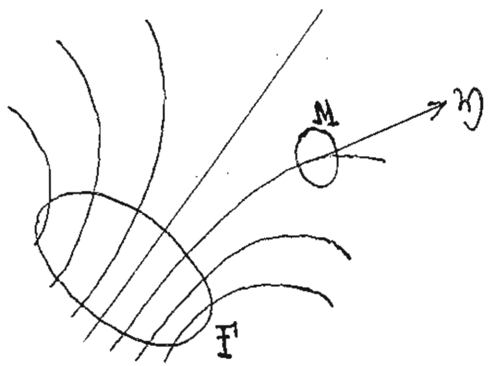


$$\int_{M_1}^{M_2} \mathfrak{F}\, ds$$

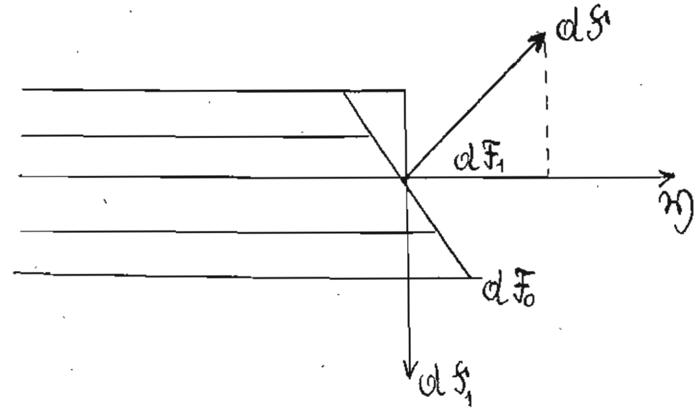
представља радњу коју обавља сила $\mathfrak{F}$ на путу s. Услов да тај линиски интеграл дуж затворене линије исчезне значи у овом случају да сила $\mathfrak{F}$ на једном затвореном путу не обавља никакву радњу. Ако такво поље постоји, онда можемо силу $\mathfrak{F}$ сматрати као градиент једнога скалара U. У механици смо се упознали са таквим пољем, па смо скалар U назвали функцијом сила а његову негативну вредност потенцијалом.

Дивергенција векторског поља

Уочимо једно векторско поље у коме је вектор $\mathfrak{w}$ континуирно поразмештен. Вектор $\mathfrak{w}$ нека представља по своме правцу и величини ток топлоте да би у таквом конкретном примеру лакше растумачили сложене појмове: Вектор $\mathfrak{w}$ нека дакле представља ону количину топлоте која протиче у јединици времена кроз јединицу пресека нормалног на правац $\mathfrak{w}$ у његовој нападној тачки.



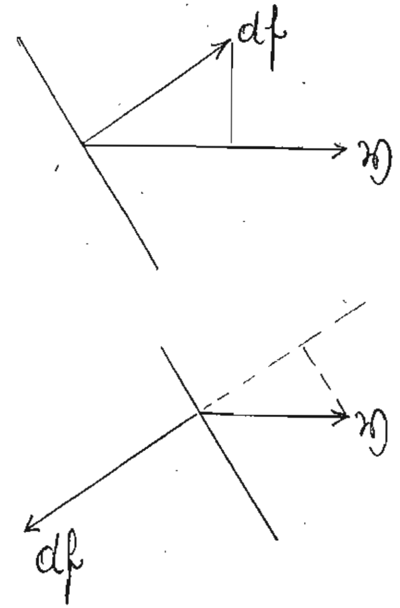
Кроз површину $d\mathfrak{f}$ представљену аксијалним вектором $d\mathfrak{f}$ протиче у јединици времена као што се из слике види количина $\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$. Кроз површину $d\mathfrak{f}_1$ протиче у јединици времена количина $\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}_1$. Површина dF_1



представљена је вектором $d\mathfrak{f}_1$; $d\mathfrak{f}_1$ је пројекција вектора $d\mathfrak{f}$ на правац $\mathfrak{w}$ зато протиче кроз површину dF_1 $\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$. Иста та количина која протиче кроз dF_1 протиче и кроз dF_0 и зато је количина топлоте која протиче кроз коси пресек представљена вектором $dF = \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$.

$$|d\mathfrak{f}| : |d\mathfrak{f}_1| = dF_0 : dF_1$$

Узмимо сад у пољу једну затворену површину F. Кроз елеменат те површине $d\mathfrak{f}$ протиче у јединици времена количина топлоте $\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$. Ако је вектор $\mathfrak{w}$ наперен на конвексну страну наше површине F, онда $\mathfrak{y}\,df$ представља ону количину топлоте која кроз тај елеменат из затворене површине F истече; ако је вектор $\mathfrak{y}$ наперен на негативну страну површине df (конкавну), онда израз $\mathfrak{y}\,df$ представља количину топлоте која у затворену површину F уђе. Но у томе случају је



скаларни продукат $\mathfrak{y}\,df$ негативан. Позитивни продукти $\mathfrak{y}\,df$ представљају према томе топлоту која изађе а негативни топлоту која уђе. Зато ће $\int_F \mathfrak{y}\,df$ узет по читавој површини F представљати ону количину топлоте која је из затворене површине F више изашла него ушла; представљаће према томе мањак количине топлоте у запремини обухваћеној површином F. Израз

$$\frac{\int_F \mathfrak{y}\,df}{V}$$

где V означује запремину обухваћену површином F представља према томе средњи мањак топлоте у површини F по јединици волумена. Замислимо сада да површина F бива све више сужавана тако да њена запремина V конвергира нули. Онда ће израз

$$\lim_{v=0}\frac{\int_F \mathfrak{y}\,df}{v}$$

приближавати се једној коначној вредности. Та вредност биће једна скаларна величина јер је $\mathfrak{y}\,df$ скалар а и v је скалар. Граничну вредност тога количника зовемо <u>дивергенцијом векторског поља</u> у тачки M која је обухваћена са бесконачно малом површином F. Зато је дефиниција дивергенције означена са

$$\operatorname{div}\mathfrak{y} = \lim_{v=0}\frac{\int_F \mathfrak{y}\,df}{v}$$

При читавом овом изва-
ђању могли смо апстраховати
представе вектора $\mathfrak{h}$ са током
топлоте, но задржимо ту пред-
ставу још један моменат да би
могли боље растумачити важност
новог појма дивергенције. Из
бесконачно мале запремине dV
изашла је количина топлоте

$$\operatorname{div} \mathfrak{h} \cdot dV = dQ$$

јер $\operatorname{div} \mathfrak{h}$ представља према самој
дефиницији количину топлоте
која је у тачки M векторског поља
у јединицу волумена више изаш-
ла него ушла. Зато ће

$$-\operatorname{div} \mathfrak{h}\, dV$$

представљати прираст топлоте
у запремини dV. Ако се у тој за-
премини не обавља никаква ме-
ханичка радња, то ће се та
топлота dQ употребити на пове-
ћавање температуре. Топлота
dQ је она топлота која је у једи-
ници времена ушла у запремину
dV јер смо казали да вектор $\mathfrak{h}$
представља количину топлоте у
јединици времена. Нека је специ-
фична густина медијума у запре-
мини dV једнака ρ онда та за-
премина обухвата масу ρdV. Ако
је c специфична топлота тога ме-
дијума т.ј. она топлота која је
потребна да температуру једини-
це масе повиси за 1°, онда ће за
повишење температуре у запре-
мини dV бити потребна количи-
на топлоте: $c\rho dV$. Ако је прираст
температуре у јединици времена
раван $\frac{du}{dt}$, где u означава темпе-
ратуру а t време, онда је потреб-
на топлота да температуру за-
премине dV повиси једнака $c\rho dV \frac{du}{dt}$.
Та топлота мора бити једнака
топлоти dQ која је у запремину
dV допрла т.ј.

$$c\rho dV \frac{du}{dt} = dQ$$

или топлота dQ биће у стању да
температуру запремине dV повиси

за $\frac{du}{dt}$. Зато је

$$-\operatorname{div}\mathfrak{w}\, dV = c\varrho\, dV \frac{du}{dt}$$

или

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} + c\varrho \frac{du}{dt} = 0$$

Ово је основна једначина за провођење топлоте.

Наведимо још један пример: Вектор $\mathfrak{w}$ нека представља брзину струјања једнога гаса а ϱ нека означава спец. густину гаса у посматраној тачки M. Та густина мења се. Онда $\varrho\mathfrak{w}$ представља масу гаса која протече у јединици времена кроз јединицу пресека нормалног на вектор $\mathfrak{w}$. Кроз коси пресек представљен аксијалним вектором $d\mathfrak{f}$ протећи ће у јединици времена маса $\varrho\mathfrak{w}\,d\mathfrak{f}$. У запремину dV ући ће у јединицу времена маса: $-\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{w})\, dV$. Тај прираст масе употребиће се на то да се у тој запремини густина гаса повећа. Ако је прираст густине у јединици времена представљен са $\frac{d\varrho}{dt}$, онда ће тај прираст масе изазвати повећање густине $\frac{d\varrho}{dt}\, dV$ у запремини dV, па је зато

$$-\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{w})\, dV = \frac{d\varrho}{dt}\, dV$$

или

$$\operatorname{div}(\varrho\mathfrak{w}) + \frac{d\varrho}{dt} = 0$$

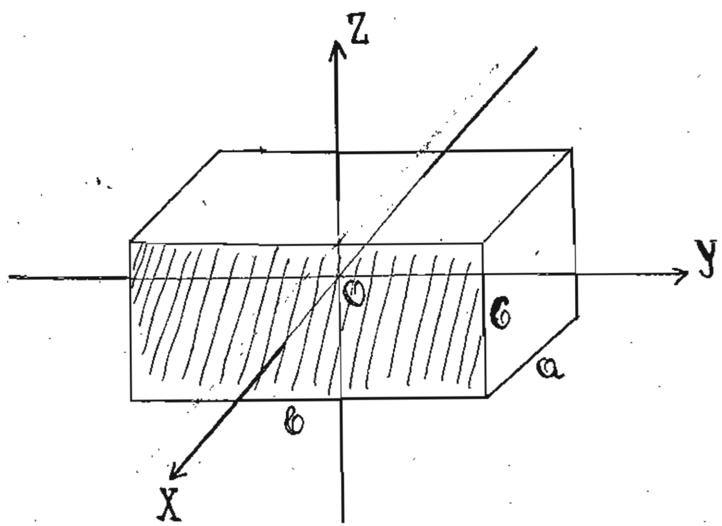
Ова једначина одређује распоред густине посматранога гаса.

Ми смо у ова два примера узели да се прираст у првом случају топлоте а у другом случају масе у запремини dV употреби за повишење температуре односно на повишење густине. Представља ли нам посматрано векторско поље ток течности т.ј. вектор $\mathfrak{w}$ представља ли брзину течности у посматраној тачки поља, то из својства инкомпресибилитета (нестишљивости) следује да у једној тачки неће бити прираштаја материје и зато за течност важи једначина

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} = 0$$

Ми ћемо поред свега тога за представљање векторског поља послужити се једном идеалном течношћу, па ћемо замислити да се на оним местима на којима је дивергенција поља позитивна течност ствара, а на местима где је дивергенција негативна течност уништава. У првом случају таква места зваћемо <u>изворима</u> а у другом <u>понорима</u> (или често пута <u>негативним изворима</u>) Величину дивергенције зваћемо <u>издашност извора</u>

Када смо тако разјаснили појам дивергенције векторског поља, пређимо на математичко формулисање тога поља. Посматрану тачку векторског поља одаберимо за почетну тачку координатног система. Око те тачке положимо један мали паралелопипед чије су стране паралелне са осама коорд. система, чији је центар у тачки O и чије су ивице a, b и c. Тај паралелопипед нека буде тако мали да вектор $\mathfrak{w}$ можемо у његовој запремини сматрати као



независну функцију и да према томе можемо употребити једначине што смо их већ извели. То су једначине:

$$\mathfrak{w}_x = \mathfrak{w}_x^0 + \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x}x + \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y}y + \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial z}z$$

$$\mathfrak{w}_y = \mathfrak{w}_y^0 + \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial x}x + \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial y}y + \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial z}z$$

$$\mathfrak{w}_z = \mathfrak{w}_z^0 + \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial x}x + \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial y}y + \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial z}z$$

Израчунајмо сада ону количину идеалне течности која у јединици времена више истече него утече из паралелопипеда. Кроз осенчену страну паралелопипеда пролази у јединици времена ова количина

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} w_x\,dy\,dz = \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left[w_x^0 + \frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{a}{2} + \frac{\partial w_x}{\partial y}y + \frac{\partial w_x}{\partial z}z\right]dy\,dz$$

Величине

$$w_x^0,\ \frac{\partial w_x}{\partial x},\ \frac{\partial w_x}{\partial y},\ \frac{\partial w_x}{\partial z}$$

су при овој интеграцији константе, јер њима дајемо према пређашњем оне вредности које има вектор w у тачки О. Зато је горњи интеграл даље

$$= w_x^0\,bc + \frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{a}{2}bc + \frac{\partial w_x}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{b^2}{8}-\frac{b^2}{8}\right)}_{0}z\Big\}_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} +$$

$$+ \frac{\partial w_x}{\partial z}\underbrace{\left(\frac{c^2}{8}-\frac{c^2}{8}\right)}_{0}\cdot y\Big\}_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}$$

и количина која према томе кроз шрафирану страну истече је

$$= bc\left[w_x^0 + \frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{a}{2}\right]$$

Кроз другу страну која је паралелна овој првој страни, протећи ће количина

$$bc\left[w_x^0 - \frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{a}{2}\right]$$

јер x има вредност $-\frac{a}{2}$ у случају на другој страни а све остало остаје исто. Ваља узети још у обзир да прва количина, ако је вектор w наперен на позитивну страну x-а, истиче а друга количина утиче у паралелопипед. Зато је заостала количина у паралелопипеду равна диференцији ових двеју количина т.ј.

$$= abc\,\frac{\partial w_x}{\partial x}$$

На исти начин можемо наћи да су количине идеалне течности које заостану у паралелопипеду услед протицаја у правцима y и z једнаке

$$abc\,\frac{\partial w_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad abc\,\frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Из паралелопипеда истече према томе у јединици времена количина

$$abc\left[\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right]$$

средњи мањак у јединици запремине добићемо ако ову количину поделимо запремином паралелопипеда т.ј. са: abc, те тако добијамо да је средњи мањак

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Дивергенција векторског поља је скаларна величина јер је продукат $\mathfrak{v}\, d\mathfrak{f}$ скалар. Због тога можемо из векторског поља извести увек једно скаларно поље ако одредимо дивергенцију тога векторског поља. Позитивне вредности дивергенције одређују она места векторског поља на којима се налазе извори, а негативне вредности она места на којима се налазе понори или негативни извори. Такво скаларно поље које смо извели из векторског поља зовемо <u>поље извора</u>.

Из аналитичког израза за дивергенцију векторског поља видимо да се дивергенција може и тако добити ако се вектор

$$\mathfrak{v} = v_x i + v_y j + v_z k$$

помножи скаларно са Хамилтоновим оператором, јер је у том случају

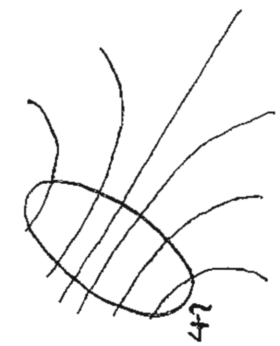
$$\nabla \mathfrak{v} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_x i + v_y j + v_z k) = $$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Зато можемо да пишемо

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla \mathfrak{v} = (\nabla \mathfrak{v})$$

<u>Gauss-ова теорема</u>. Уочимо једно векторско поље, поље вектора $\mathfrak{v}$ и у том пољу једну затворену површину F. Протицај вектора $\mathfrak{v}$ кроз ту површину т.ј. она количина идеалне течности (којом је векторско поље представљено) која кроз површину F више истече него утече



представљена је изразом

$$\int_F \eta \, df$$

где df представља елеменат површине F. Посматрамо ли један бескрајно мали волуменски елеменат dV запремине обухваћене површином F, то је количина идеалне течности што из тога елемента више истече него утече представљена према прећашњем са $\mathrm{div}\,\eta \cdot dV$, па ће зато укупна множина (количина) идеалне течности што из запремине V више истече него утече бити такође представљена изразом

$$\int_F \mathrm{div}\,\eta \, dV$$

где знак F казује да се интеграција има извести на свима волуменским елементима који су обухваћени површином F. Зато је

$$\int_F \eta \, df = \int_F \mathrm{div}\,\eta \, dV$$

Ова једначина изражава Gauss-ову теорему коју можемо овако да формулишемо:

Продукат протицаја векторског поља кроз једну затворену површину представљен је интегралом волуменских елемената помножених са дивергенцијом векторског поља на месту волуменског елемента.

Ова теорема дозвољава да један интеграл узет по површини заменимо са интегралом узетим по запремини или обратно.

Ротација векторског поља.

Поље безвртлова назвали смо оно векторско поље у коме линиски интеграл $\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{l}$ узет дуж једне затворене криве изчезава на сваком месту тога векторског поља. Показали смо такође да је нужни и довољни критеријум за то да је једно векторско ово поље безвртлова био тај: да то поље можемо сматрати као поље градиента једнога скалара. Ако је поље вектора $\mathfrak{v}$ једнако

$$\mathfrak{v} = v_x \mathfrak{i} + v_y \mathfrak{j} + v_z \mathfrak{k}$$

поље градиента једнога скалара U, онда је, као што смо показали

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

т.ј. компоненте вектора $\mathfrak{v}$ могу се представити као парцијални диференцијални количници једне исте функције U. Како је

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$$

то из горњих једначина следује

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Ове једначине су према томе критериум за то да је поље вектора $\mathfrak{v}$ поље безвртлова. Тим једначинама можемо дати и овај облик

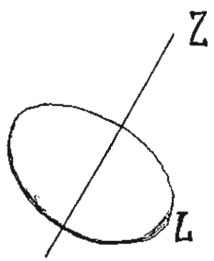
$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$$

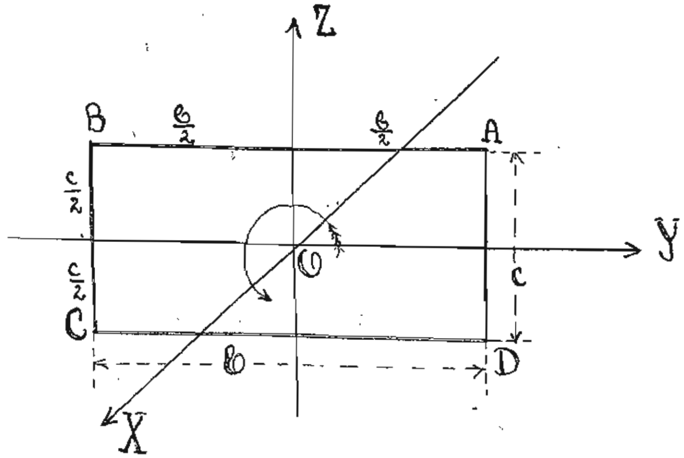
$$\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

Ако ове једначине нису задовољене т.ј. ако линиски интеграл $\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{l}$ не исчезава, онда поље зовемо <u>вртложним пољем</u>. Уочимо ли у таквом вртложном пољу једну затворену равну криву L

нормалну на једну осу Z, па израчунамо ли вредност линиског интеграла дуж те криве и поделимо ту вредност са равном површином



захваћеном линијом L и израчунамо граничну вредност тога количника кад се L бескрајно сужава, онда тако добијену вредност називамо <u>ротацијом векторског поља</u> $\mathfrak{H}$ око осе Z. Израчунамо ли на тај начин ротацију векторског поља око три осе нормалне једна на другу, па сматрамо ли тако добијене ротације као компоненте једнога вектора, то тај вектор називамо једноставно ротацијом векторског поља на посматраном месту. Доказаћемо да је ротација векторског поља независна од координатног система. Према томе ћемо аналитички израз за ротацију векторског поља извести на овај начин: Ограничимо у равни YZ један паралелограм са странама b и c паралелним са осама Y и Z а положаја осим тога такве да тачка O лежи у средини тога паралелограма.



Стране b и c нека буду тако мале да за компоненте вектора $\mathfrak{H}$ можемо употребити познате једначине

$$\mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_x^\circ + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} y + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} z$$

$$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_y^\circ + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} x + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} z$$

$$\mathfrak{H}_z = \mathfrak{H}_z^\circ + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} x + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} y + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} z$$

Израчунајмо сада вредност линиског интеграла $\int \mathfrak{H}\, dl$. Ако обилазимозито у позитивном смислу око овог четвороугла, на путу AB биће вредност тога интеграла

$$\int_{+\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} w_y\, dl = \int_{+\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}}\left(w_y^0 + \frac{\partial w_y}{\partial y}y + \frac{\partial w_y}{\partial z}\frac{c}{2}\right)dy$$

(Остале компоненте не улазе у обзир јер су нормалне на путу). Вредност интеграла на путу CD једнака је

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\left(w_y^0 + \frac{\partial w_y}{\partial y}y - \frac{\partial w_y}{\partial z}\frac{c}{2}\right)dy$$

Према томе на оба пута AB и CD биће вредност линиског интеграла равна збиру ова два интеграла а тај је збир једнак

$$\frac{\partial w_y}{\partial z}\frac{c}{2}\left[y\right]_{+\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\frac{c}{2}\left[y\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = -2\frac{\partial w_y}{\partial z}\frac{c}{2}b = -bc\frac{\partial w_y}{\partial z}$$

На путевима BC и DA биће вредност линиског интеграла једнака

$$\int_{+\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}}\left(w_z^0 - \frac{\partial w_z}{\partial y}\frac{b}{2} + \frac{\partial w_z}{\partial z}z\right)dz + \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\left(w_z^0 + \frac{\partial w_z}{\partial y}\frac{b}{2} + \frac{\partial w_z}{\partial z}z\right)dz$$

$$= 2\frac{\partial w_z}{\partial y}\frac{b}{2}\left\{z\right\}_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} = bc\frac{\partial w_z}{\partial y}$$

Обилажењем око целог четвороугла добијамо да је вредност линиског интеграла једнака

$$bc\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)$$

Сужавамо ли четвороугаоник, то ће ова вредност конвертирати нули. Но поделимо ли са површином bc, то ће се приближавати граничној вредности

$$\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

Ту вредност називамо ротацијом поља око осе x, а означујемо

$$\mathfrak{w}_x = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

На исти начин добијамо ротације око оса Y и Z

$$\mathfrak{w}_y = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}$$

$$\mathfrak{w}_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}$$

Сматрамо ли ове вредности као компоненте једног вектора, то тај вектор називамо ротацијом у такки O и пишемо

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right) j +$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right) k$$

Исту ту вредност добијамо ако вектор $\mathfrak{v}$ помножимо по правилима векторијелне мултипликације са Хамилтоновим оператором, јер је

$$[\nabla \mathfrak{v}] = \left[\left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\mathfrak{v}_x i + \mathfrak{v}_y j + \mathfrak{v}_z k\right)\right] =$$

$$= -k\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y} + j\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} + k\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - i\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z} - j\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x} + i\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{v}_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial y}\right) k$$

$$= \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}$$

Горњи векторијелни продукат можемо према пређашњем да представимо и са детерминантом т.ј.

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = [\nabla \mathfrak{v}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathfrak{v}_x & \mathfrak{v}_y & \mathfrak{v}_z \end{vmatrix}$$

Примедба: Место назива ротације употребљавају многи научари енглески назив: curl (кёр) т.ј.

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}$$

Диференцијација вектора по једној скаларној величини у једном одређеном правцу

Имали смо једначину

$$\frac{dU}{da} = a_0 \nabla U \qquad 1)$$

Операцију коју она одређује можемо назвати такође: диференцијалом скалара U по скаларној величини a у правцу вектора a_0. Питамо да ли можемо исту такву операцију извести на једном вектору. Операција ће бити могућна јер се вектор може диференцирати по једној скаларној величини. Пита се дакле само за аналитички израз те операције. Диференцирамо ли вектор

$$\mathfrak{v} = v_x i + v_y j + v_z k$$

по скаларној величини a, то је

$$\frac{d\mathfrak{v}}{da} = \frac{dv_x}{da} i + \frac{dv_y}{da} j + \frac{dv_z}{da} k$$

v_x, v_y, v_z су скаларне величине и зато можемо за њих употребити једначину 1) коју ћемо писати у облику

$$\frac{dU}{da} = (a_0 \nabla) U$$

да би тиме векторске чланове оделили од скаларног члана U. Зато је

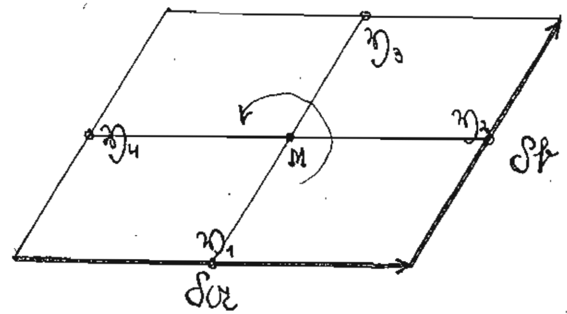
$$\begin{aligned}\frac{d\mathfrak{v}}{da} &= (a_0 \nabla) v_x i + (a_0 \nabla) v_y j + (a_0 \nabla) v_z k = \\ &= (a_0 \nabla)(v_x i + v_y j + v_z k) = \\ &= (a_0 \nabla)\mathfrak{v}\end{aligned}$$

Диференцијални количник вектора $\mathfrak{v}$ у правцу a_0 добијамо ако јединични вектор a_0 помножимо скаларно прво са Хамилтоновим оператором, ~~та~~ тако добијени скаларни продукат помножимо са вектором $\mathfrak{v}$.

Stokes-ова теорема

Показали смо да се ротација векторског поља добија ако се вектор помножи са Хамилтоновим оператором по правилима векторијелне мултипликације. Ово својство ротације могли смо употребити као дефиницију. Из те дефиниције следовао би директно аналитички израз ротације са о њезином векторском значењу могли би се и на следећи начин информисати:

У посматраном векторском пољу уочимо око тачке M у којој вектор има вредност $\mathfrak{v}$ бесконачно мали паралелограм који је тако положен да се тачка M налази у његовој средини. Стране четвороугла нека буду представљене са бескрајно малим векторима $\delta\mathfrak{a}$ и $\delta\mathfrak{b}$.



У средини страна паралелограма нека вектор $\mathfrak{v}$ има вредности: $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$. Израчунајмо сада вредност линиског интеграла $\int_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s}$, када обилазимо око контуре паралелограма; онда је

$$\int_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}_1\,\delta\mathfrak{a} + \mathfrak{v}_2\,\delta\mathfrak{b} - \mathfrak{v}_3\,\delta\mathfrak{a} - \mathfrak{v}_4\,\delta\mathfrak{b}$$

или

$$-\int_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{s} = (\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1)\,\delta\mathfrak{a} - (\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_4)\,\delta\mathfrak{b}$$

$\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1$ представља промену вектора $\mathfrak{v}$ у правцу $\delta\mathfrak{b}$. Имали смо једначину

$$\frac{d\mathfrak{v}}{d\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}\circ\nabla)\mathfrak{v}$$

зато је

$$\frac{\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1}{d\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}\circ\nabla)\mathfrak{v}$$

где db означава интензитет вектора δb а b_0 јединични вектор у правцу b. Пренесемо ли скалар db на другу страну једначине и помножимо са њиме јединични вектор b_0 то је

$$b_0\, db = \delta b$$

па због тога

$$\mathfrak{v}_3 - \mathfrak{v}_1 = (\delta b\, \nabla)\, \mathfrak{v}$$

Исто тако добијамо, јер је $\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_4$ промена вектора $\mathfrak{v}$ у правцу δa,

$$\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_4 = (\delta a\, \nabla)\, \mathfrak{v}$$

Зато је

$$-\int_L \mathfrak{v}\, d\ell = (\delta b\, \nabla)\, \mathfrak{v}\, \delta a - (\delta a\, \nabla)\, \mathfrak{v}\, \delta b$$

$(\delta a\, \nabla)$ и $(\delta b\, \nabla)$ играју улоге скаларних величина; зато можемо чланове $\mathfrak{v}\,\delta a$ и $\mathfrak{v}\,\delta b$ да метнемо у заграде, па је горњи интеграл даље

$$= (\delta b\, \nabla)(\mathfrak{v}\, \delta a) - (\delta a\, \nabla)(\mathfrak{v}\, \delta b)$$

Доказали смо ову једначину

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}][\mathfrak{C}\mathfrak{D}] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

па је зато горњи израз даље

$$= [\nabla \mathfrak{v}][\delta b\, \delta a]$$

како је

$$[\nabla \mathfrak{v}] = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

а

$$[\delta b\, \delta a] = -\delta \sigma$$

представља дакле негативно узет аксијални вектор $\delta \sigma$ који представља површину четвороугла, или

$$[\delta b\, \delta a] = -\sigma_0\, d\sigma$$

где σ_0 представља јединични вектор нормалан на површину паралелограма и наперен на позитивну страну његову, а $d\sigma$ скаларну вредност површине паралелограма, то је горњи израз даље

$$= -\operatorname{rot} \mathfrak{v}\, \sigma_0\, d\sigma$$

или одатле

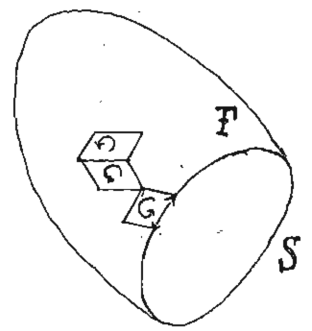
$$\sigma_0 \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \frac{\int_L \mathfrak{v}\, d\ell}{d\sigma}$$

Претпостављено је да је паралелограм $\delta a\, \delta b$ бесконачно мали и зато је боље писати десну страну горње једначине као граничну вредност кад се паралелограм бескрајно сужава, дакле

$$\sigma_0 \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \lim_{do=0} \frac{\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}}{do}$$

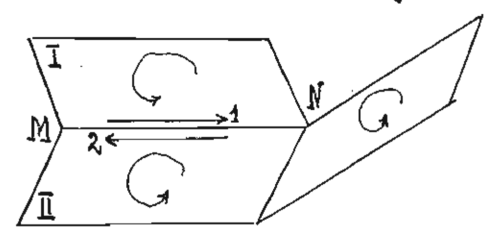
Израз $\sigma_0 \operatorname{rot} \mathfrak{v}$ представља пројекцију вектора $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ на правац јединичног вектора σ_0 т.ј. на правац нормалан на раван паралелограма. Зато можемо ротацију да дефинишемо и овако: то је вектор чија је пројекција на правац σ_0 равна граничној вредности $\lim\limits_{do=0} \frac{\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}}{do}$ паралелограма који лежи у равни нормалној на σ_0. Како су пројекције вектора $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ увек мање него сам вектор, то можемо да кажемо да вектор $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ даје онај правац који има то својство да ако се на њега постави једна управна раван, за ту раван има израз $\lim\limits_{do=0} \frac{\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}}{do}$ своју највећу вредност.

Уочимо сада једну произвољну површину F са контуром S. Одаберемо ли на површини један елеменат, то за тај елеменат важи једначина



$$\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, do$$

Замислимо да смо овакве једначине написали за све елементе површине F па сабрали, једном речи да смо интеграцију извели на целој површини F. Десни члан горње једначине биће онда једнак $\int \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, do$



При конструисању леве стране једначине имамо да узмемо ово у обзир: линиски интеграл $\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r}$ ће се на границама од два паралелограма међусобно поништити, јер су обилажења у два противна смисла. Н.пр. линиски интеграл дуж границе MN узет је као део паралелограма I у смислу стрелице 1 а као део паралелограма II обилажење је у смислу стрелице 2. Зато интеграл дуж те границе исчезава. Тако ће се сви линиски интеграли дуж граница које деле поједине елементе поништити и остаће само линиски интеграл дуж контуре. Зато ће горња једначина ако се примени на читаву површину F имати облик

$$\int_S \mathfrak{v}\, dl = \int_F \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\sigma$$

Ова једначина изражава Stokes-ову теорему. Она своди линиске интеграле на интеграле по површинама и обратно.

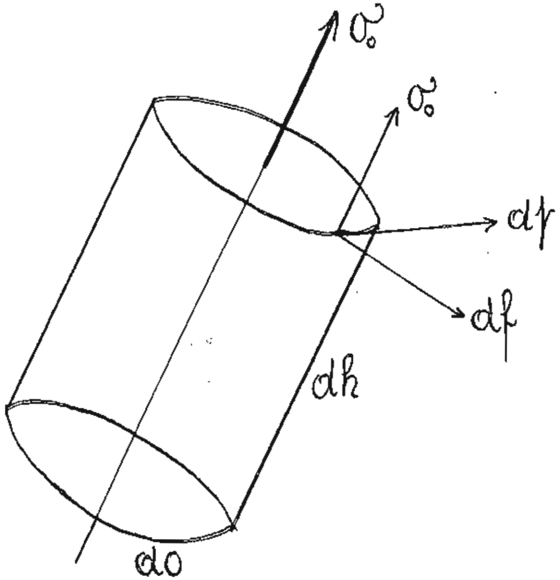
Ако је површина F потпуно затворена, онда контура S исчезава, па је лева страна горње једначине равна нули. Зато је на једној затвореној површини F

$$\int_F \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\sigma = 0.$$

Модерне дефиниције градијента, ротације и дивергенције.

При извођењу појмова градијента, дивергенције и ротације ми смо узели у обзир историски развитак тих величина. То је био узрок да смо се чешће пута служили ортогоналним координатним системом. При томе смо опазили да између тих величина постоје формалне сродности и да се све добијају ако се Хамилтонов оператор примени на скалар и на вектор скаларно или векторијелно. Те сродности нису међутим само формалне него имају други значај и ми ћемо да покажемо да се за градијент, дивергенцију и ротацију може формулисати једна општа заједничка дефиниција.

Уочимо у пољу вектора $\mathfrak{v}$ један цилиндричан волумски елеменат. Оса тога цилиндра нека пада у правац јединичног вектора o_0; висина његова нека буде бескрајно мала величина dh, а база произвољна бескрајно мала површина do. Бескрајно мали вектор df нека представља елеменат контуре базине. Онда за сваку базу важе једначине



$$o_0 \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \lim_{do=0} \frac{\int_c \mathfrak{v}\, df}{do}$$

Израчунајмо вредност продукта $\int \mathfrak{v} [o_0\, df]$ где df представља елеменат површине посматраног цилиндра. Ако интеграл узмемо по целој површини цилиндра, за обе базе је тај интеграл раван нули јер за њих су вектори o_0 и df паралелни. За омотач биће интеграл једнак $\mathfrak{v}\, df\, dh$ јер векторски продукат $[o_0\, df]$ представља вектор који је нормалан на векторима o_0 и df; правац тога вектора подудара се дакле са правцем вектора df; интензитет тога вектора једнак је елементу површине дакле $= |df|\, dh$. Зато је горњи интеграл узет по целој површини цилиндра једнак

$$\int_F \mathfrak{v} [o_0\, df] = \int_c \mathfrak{v}\, df\, dh$$

Место левог интеграла можемо писати $\int [df\, \mathfrak{v}] o_0$ а фактор o_0 можемо као константан извадити пред знак интеграла; dh је константна скаларна величина и зато је можемо пребацити на другу страну једначине. Зато је

$$\int_L \eta\, df = \frac{\sigma_0 \int_F [df\, \eta]}{dh}$$

Цилиндар на коме смо наведене операције извели претпостављен је да је бескрајно мали, па је зато

$$\lim_{do=0}\frac{\int_L \eta\, df}{do} = \sigma_0 \lim \frac{\int_F [df\, \eta]}{dh\, do}$$

Продукат скаларних величина

$$dh\, do = dV$$

једнак је запремини посматраног цилиндра, па је зато

$$\sigma_0 \operatorname{rot} \eta = \sigma_0 \lim_{dV=0}\frac{\int_F [df\, \eta]}{dV}$$

Ова једначина казује да је пројекција вектора $\operatorname{rot} \eta$ на правац σ_0 једнака пројекцији вектора представљеног са $\lim\limits_{dV=0}\frac{\int_F [df\, \eta]}{dV}$ на исти правац σ_0, па како је правац σ_0 произвољан, то ће и та два вектора бити једнака. Зато је

$$\operatorname{rot} \eta = \lim_{V=0}\frac{\int_F [df\, \eta]}{V}$$

Ако f_0 представља јединични вектор нормалан на елеменат површине df, онда је

$$df = f_0\, df$$

где је df једна скаларна величина. Уведимо нов један вектор

$$t = [f_0\, \eta]$$

Тај вектор t тангира површину F јер је нормалан на нормалу површине f_0, исто тако тангира и вектор $[df\, \eta]$ површину F. Вектор t је према томе тангенцијални вектор који одговара јединици површине, па би се могао назвати и специфичним тангенцијалним вектором површине F. Како је

$$[df\, \eta] = [f_0\, df\, \eta] = [f_0\, \eta]\, df = t\, df$$

то је зато

$$\operatorname{rot} \eta = \lim_{V=0}\frac{\int_F t\, df}{V}$$

Зато можемо и да кажемо да је ротација средњи специфични тангенцијални вектор t узет по затвореној површини а израчунат на јединицу волумена.

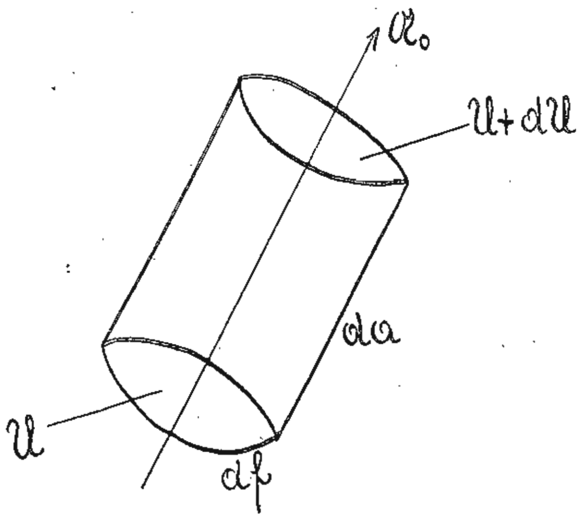
Питајмо сада шта значи израз

$$\lim_{v=0} \frac{\int_F \mathfrak{U}\, df}{v}$$

где $\mathfrak{U}$ означава један скалар, чији је интеграл узет преко једне затворене површине F. Како $\mathfrak{U}\, df$ представља један вектор, то ће и горњи гранични израз представљати такође један вектор н. пр. $\mathfrak{J}$ т.ј.

$$\lim_{v=0} \frac{\int_F \mathfrak{U}\, df}{v} = \mathfrak{J}$$

Као затворену површину по којој ћемо да узмемо интеграл узмимо



једну цилиндричну површину чије директрисе имају правац вектора $\mathfrak{a}_0$. Висина цилиндра нека буде da а базе произвољне бескрајно мале површине df.

Видећемо доцније да резултат не зависи од облика те затворене површине. Помножимо ли горњу једначину са јединичним вектором $\mathfrak{a}_0$, то добијамо

$$\mathfrak{a}_0 \mathfrak{J} = \lim_{v=0} \frac{\int_F \mathfrak{U}\, \mathfrak{a}_0\, df}{v}$$

Ми смо јединични вектор $\mathfrak{a}_0$ могли да метнемо под знак интеграла зато јер је то једна константна величина. Израчунајмо вредност тога интеграла ако га узмемо преко површине цилиндра. Чланови интеграла који се односе на омотач цилиндра изчезнуће јер је за њих $(\mathfrak{a}_0\, df)=0$ пошто су у том случају вектори $\mathfrak{a}_0$ и df нормални један на другом. Имамо дакле да се бринемо само за оне чланове интеграла који се односе на базе. Вредност скалара $\mathfrak{U}$ нека буде на доњој бази равна $\mathfrak{U}$ а на горњој бази $\mathfrak{U}+d\mathfrak{U}$. Онда је

$$\int_F \mathfrak{U}\, \mathfrak{a}_0\, df = -\mathfrak{U}\, a\, df + (\mathfrak{U}+d\mathfrak{U})\, a\, df =$$

$$= dU\, a\, df$$

Запремина цилиндра је једнака

$$v = da\, df$$

и зато је

$$\lim \frac{\int_F U a_0\, df}{v} = \frac{dU\, df}{da\, df}$$

па је зато

$$a_0 \mathfrak{w} = \frac{dU}{da}$$

Ова нам једначина казује да је вектор $\mathfrak{w}$ онај вектор чија је пројекција у правцу a_0 једнака промени $\frac{dU}{da}$ скалара U у правцу тога вектора. Како је тај вектор $\mathfrak{w}$ већи од свих својих пројекција, то он сам даје по правцу и по својој величини највећу промену скалара U. Вектор $\mathfrak{w}$ је идентичан према томе са градиентом скаларног поља U. Добили смо дакле ове једначине

$$\nabla U = \lim_{v=0} \frac{\int_F U\, df}{v} = \mathrm{grad}\, U$$

$$\nabla \mathfrak{w} = \lim_{v=0} \frac{\int_F df\, \mathfrak{w}}{v} = \mathrm{div}\, \mathfrak{w}$$

$$[\nabla \mathfrak{w}] = \lim_{v=0} \frac{\int_F [df\, \mathfrak{w}]}{v} = \mathrm{rot}\, \mathfrak{w}$$

Сравнимо ли ове три једначине то видимо да за изразе ∇U, $\nabla \mathfrak{w}$ и $[\nabla \mathfrak{w}]$ који се изрази често пута називају и продукти можемо дати ову заједничку дефиницију: У тим изразима замени се ∇ са елементом df једне затворене површине, па се добија у првом случају продукат једног вектора и једног скалара, у другом случају скаларни продукат двају вектора, а у трећем случају векторијелни продукат двају вектора; вредност тих продуката израчуна се преко целе затворене површине и раздели са запремином површином F обухваћеног простора. Гранична вредност тога количника представља вредности ∇U, $\nabla \mathfrak{w}$, $[\nabla \mathfrak{w}]$. Ову дефиницију надопуњавамо још са следећом конвенцијом: све величине које стоје пред оператором ∇ имају се при тој операцији сматрати као константе.

Ми у горњим изразима нисмо имали још никакве величине пред ∇ па ћемо значај ове конвенције увидети тек доцније. Ми смо при овим операцијама оператор ∇ заменили са вектором $\mathfrak{A}$, па је зато оправдано сматрати ∇ као вектор и због тога има и израз $[\nabla\mathfrak{v}]$ смисла.

Рачунање са оператором ∇.

Сменимо ли у пред. једначинама вектор $\mathfrak{v}$ са другим једним вектором $c\mathfrak{v}$, где c означава једну константну скаларну величину, по из досадањих дефиниција следује да је

$$\nabla(c\mathfrak{v}) = c\nabla\mathfrak{v}$$

Исто је тако

$$[\nabla c\mathfrak{v}] = c[\nabla\mathfrak{v}]$$

јер и у једном и у другом случају можемо константу c извадити пред знак интеграла и пред limes.

Испитајмо сада шта представља израз $\nabla p\mathfrak{v}$, где p означава једну скаларну величину која се мења у посматраном пољу заједно са вектором $\mathfrak{v}$. У то име о-одаберимо у том пољу једну произвољну тачку M и означимо вредности скалара p и вектора $\mathfrak{v}$ у тој тачки са p_1 и $\mathfrak{v}_1$. Око те тачке M нека буде обавијена једна затворена површина F коју ћемо касније бесконачно да сузимо. Вредности скалара p и вектора $\mathfrak{v}$ на тој површини нека буду p_1+dp и $\mathfrak{v}_1+d\mathfrak{v}$, тако дакле да су p_1 и $\mathfrak{v}_1$ константе а dp и $d\mathfrak{v}$ променљиве, дакле

$$p = p_1 + dp$$
$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + d\mathfrak{v}$$

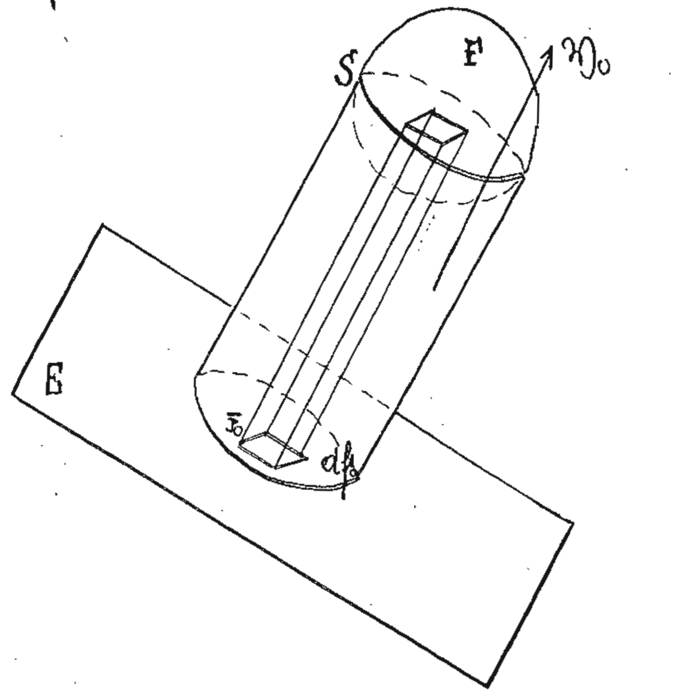
Онда је

$$\nabla p\mathfrak{v} = \lim_{v=0} \frac{\int_F df\, p\mathfrak{v}}{v} = \lim \frac{\int_F df\,(p_1+dp)(\mathfrak{v}_1+d\mathfrak{v})}{v}$$

Величине p_1 и $\mathfrak{v}_1$ су константне, зато их можемо извадити пред знак интеграла па добијамо

$$= \lim\left\{p_1\mathfrak{v}_1 \frac{\int df}{v} + \mathfrak{v}_1 \frac{\int df\, dp}{v} + p_1 \frac{\int df\, d\mathfrak{v}}{v} + \frac{\int df\, d\mathfrak{v}\, dp}{v}\right.$$

Последњи члан овога израза ишчезава јер је вишег реда, а тако исто и први члан ишчезава као што се можемо на следећи начин уверити: ако је $\mathfrak{v}_0$ један константан вектор, онда израз $\int_F \mathfrak{v}_0\, df$ преко једне затворене површине можемо изразити на овај начин: обавијемо ли око те затворене површине F један цилиндар који ју тангира и чије генератрисе имају правац вектора $\mathfrak{v}_0$ то је елеменат $\mathfrak{v}_0\, df$ за сваки део површине једнак пројекцији df_0 те површине на раван E која је нормална на вектор $\mathfrak{v}_0$. Они елементи затворене површине F који стоје под кривим додира S биће-



негативни и њихов збир даће површину $-F_0$ коју исеца цилиндар у равни ε. Елементи који се налазе изнад криве S даће површину $+F_0$, па ће зато вредност целог интеграла бити

$$\int_F \mathfrak{w}_0\, d\mathfrak{f} = F_0 - F_0 = 0$$

или

$$\mathfrak{w}_0 \int_F d\mathfrak{f} = 0$$

или

$$\int_F d\mathfrak{f} = 0$$

Једном речи интеграл $\int d\mathfrak{f}$ преко једне затворене површине увек је раван нули, аналого као што је линиски интеграл по једној затвореној линији такође раван нули. Зато је

$$\nabla p\mathfrak{w} = \lim\left\{\mathfrak{w}_1 \frac{\int d\mathfrak{f}\, dp}{v} + p_1 \frac{\int d\mathfrak{f}\, d\mathfrak{w}}{v}\right\} =$$

$$= \lim\left\{\mathfrak{w}_1 \frac{\int d\mathfrak{f}\,(p-p_1)}{v} + p_1 \frac{\int d\mathfrak{f}\,(\mathfrak{w}-\mathfrak{w}_1)}{v}\right\}$$

Изведимо опет мултипликације и извадимо константе пред интеграл, па добијамо

$$\nabla p\mathfrak{w} = \lim\left\{\mathfrak{w}_1 \frac{\int d\mathfrak{f}\, p}{v} - \cancel{\mathfrak{w}_1 p_1 \frac{\int d\mathfrak{f}}{v}} + p_1 \frac{\int d\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}}{v} - \cancel{\mathfrak{w}_1 p_1 \frac{\int d\mathfrak{f}}{v}}\right\}$$

Пређемо ли на границу, то се вредност $\mathfrak{w}$ приближује вредности $\mathfrak{w}_1$ а вредност p вредности p_1, па их можемо заменити једне с другим. Зато је

$$\nabla p\mathfrak{w} = \mathfrak{w} \lim \frac{\int d\mathfrak{f}\, p}{v} + p \lim \frac{\int d\mathfrak{f}\,\mathfrak{w}}{v}$$

или

$$\nabla p\mathfrak{w} = \mathfrak{w}\nabla p + p\nabla\mathfrak{w}$$

или

$$\operatorname{div}(p\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}\operatorname{grad} p + p\operatorname{div}\mathfrak{w}$$

Слично се може доказати да ако имамо два скалара U_1 и U_2, да је

$$\nabla(U_1U_2) = U_1\nabla U_2 + U_2\nabla U_1$$

Ову једначину смо у осталом већ имали.

Даље имамо за рачунање са оператором ∇ до сада ове једначине: ако је c један константан скалар а $\mathfrak{c}$ један константан вектор, онда је

$$\nabla c = \lim \frac{c \int_F \overset{=0}{df_1}}{v} = 0$$

$$\nabla \mathfrak{r} = \lim \frac{\mathfrak{r} \int_F \overset{=0}{df_1}}{v} = 0$$

$$[\nabla \mathfrak{r}] = \lim \frac{[\mathfrak{r} \int_F \overset{=0}{df_1}]}{v} = 0$$

$$\nabla c\mathfrak{U} = c\nabla\mathfrak{U}$$

$$\nabla c\mathfrak{w} = c\nabla\mathfrak{w}$$

$$[\nabla c\mathfrak{w}] = c[\nabla\mathfrak{w}]$$

$$\nabla p\mathfrak{w} = p\nabla\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\nabla p$$

$$\nabla \mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1\nabla\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{U}_2\nabla\mathfrak{U}_1$$

Знак ∇ впада се у свима овим операцијама исто тако као знак d диференцијалног рачуна:

$$dc = 0$$

$$dcx = c\,dx$$

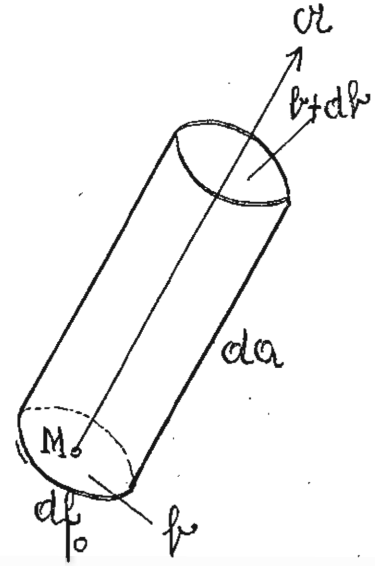
$$d(xy) = x\,dy + y\,dx$$

Долази ли знак ∇ у везу са више вектора или ако је у изразу $[\nabla p\mathfrak{w}]$ p једна променљива скаларна величина, онда важе за рачунске радње други закони које ћемо сад да изведемо.

Употребимо модерне дефиниције векторских диференцијалних продуката прво на то да изведемо значење продукта $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$. Имаћемо

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} = \lim_{v=0} \frac{\int_F (\mathfrak{a}\,df_1)\mathfrak{b}}{v}$$

Вектор $\mathfrak{a}$ стоји пред оператором ∇ и зато га према уговореној конвенцији имамо сматрати за константу при операцији $\lim_{v=0}$. Макар да је при тој операцији $\mathfrak{a}$ константно, не можемо га изводити пред знак интеграла због облика интегралног који има правац вектора $\mathfrak{b}$. Конструишимо око посматране тачке M једну цилиндричну површину чије генератрисе имају правац вектора $\mathfrak{a}$. Базе тога цилиндра нека буду



нормалне на вектор a. Величина базе нека буде df_0 а висина цилиндра da. Изведимо сада назначену операцију преко целе површине цилиндра. Они делови интеграла који се односе на омотач цилиндра исчезавају јер су вектори a и df нормални један на другом, па је зато њихов скаларни продукат раван нули. Вредност вектора b на бази цилиндра нека буде b а на темену $b+db$. Онда је

$$\int_F (a\,df)\,b = -a\,df_0\,b + (a\,df_0)(b+db) =$$

$$= a\,df_0\,db$$

Волумен цилиндра је

$$v = df_0\,da$$

па је зато

$$(a\nabla)\,b = a\frac{db}{da}$$

а ову смо једначину раније аналитички извели.

Испитајмо сада значење векторског продукта $a(\nabla b)$. Према дефиницији је

$$a(\nabla b) = \lim_{v=0}\frac{\int_F a(df\,b)}{v}$$

a стоји пред ∇ и зато се има сматрати као константа при операцији limes. Ми у овом случају можемо изводити вектор a пред знак интеграла јер се тиме склоп продукта под интегралом не мења. Како је a константно, то га можемо метнути и пред limes, па је горњи израз даље

$$= a\lim_{v=0}\frac{\int_F (df\,b)}{v} = a\,\mathrm{div}\,b$$

Трансформишимо сада продукат $(\nabla a)\,b$. Овај израз није једнак изразу $(a\nabla)\,b$ зато јер за оператор ∇ не важи комутативни закон мултипликације као што смо пре казали и као што ћемо сада увидети. Према дефиницији је

$$(\nabla a)\,b = \lim_{v=0}\frac{\int_F (df\,a)\,b}{v} =$$

Сада оба вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ стоје иза оператора ∇ и зато се морају при операцији limes сматрати за променљиве. У површини F коју ћемо бескрајно да сузимо одаберимо једну чврсту тачку M у којој вектори $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ имају вредности $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$. Вредности вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ на површини нека буду $\mathfrak{a}_1+d\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}_1+d\mathfrak{b}$; величине $d\mathfrak{a}$ и $d\mathfrak{b}$ су променљиве. Онда добијамо да је горњи израз даље

$$=\lim_{v=0}\frac{\int_F d\mathfrak{f}\cdot(\mathfrak{a}_1+d\mathfrak{a})(\mathfrak{b}_1+d\mathfrak{b})}{v}=$$

Тачка означује да се има вектор $d\mathfrak{f}$ да помножи прво са вектором $\mathfrak{a}_1+d\mathfrak{a}$ и онда тај скаларни продукт има да се помножи са вектором $\mathfrak{b}_1+d\mathfrak{b}$. Место тачке могли смо метнути такође још једне мале заграде. Константне чланове можемо да извадимо пред знак интеграла, па ћемо имати да је горњи израз

$$=\lim_{v=0}\left\{\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\frac{\overset{=0}{\int_F d\mathfrak{f}}}{v}+\mathfrak{b}_1\frac{\int_F d\mathfrak{f}\, d\mathfrak{a}}{v}+\frac{\int_F d\mathfrak{b}\,(d\mathfrak{f}\,\mathfrak{a}_1)}{v}+\frac{\int_F (d\mathfrak{f}\, d\mathfrak{a})\, d\mathfrak{b}}{v}\right\}=$$

Први и последњи члан исчезавају: први је раван нули а други је вишег реда. У заостала два члана сменимо сада $d\mathfrak{a}=\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1$ и $d\mathfrak{b}=\mathfrak{b}-\mathfrak{b}_1$ па имамо

$$=\lim_{v=0}\left\{\mathfrak{b}_1\frac{\int_F d\mathfrak{f}(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)}{v}+\frac{\int_F(\mathfrak{b}-\mathfrak{b}_1)(d\mathfrak{f}\,\mathfrak{a}_1)}{v}\right\}=$$

$$=\lim_{v=0}\left\{\mathfrak{b}_1\frac{\int d\mathfrak{f}\,\mathfrak{a}}{v}-\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\frac{\int d\mathfrak{f}}{v}+\frac{\int(\mathfrak{a}_1 d\mathfrak{f})\,\mathfrak{b}}{v}-\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\frac{\int d\mathfrak{f}}{v}\right\}=$$

Други и четврти члан исчезавају. Величине $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$ можемо сада при прелазу на границу сменити са $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, па је зато

$$=\mathfrak{b}\lim_{v=0}\frac{\int_F d\mathfrak{f}\,\mathfrak{a}}{v}+\lim_{v=0}\frac{\int_F(\mathfrak{a}\, d\mathfrak{f})\,\mathfrak{b}}{v}=$$

$$=\mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a})+(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$$

$\mathfrak{b}$ смо у другом сабирку морали писати иза $d\mathfrak{f}$ јер није константа а $\mathfrak{a}$ пишемо пред $d\mathfrak{f}$ јер је константа. Према горњем је

$$(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$$

Ова једначина јасно показује да су изрази $(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b}$ и $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$ сасвим различни.

Сменимо ли у горњој једначини $\mathfrak{b}$ са $\mathfrak{a}$, то добијамо

$$(\nabla\mathfrak{b})\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\nabla\mathfrak{b}) + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a}$$

Одузмемо ли доњу једначину од горње, добијамо

$$(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b} - (\nabla\mathfrak{b})\mathfrak{a} = \lim_{v=0}\left\{\frac{S_F(df\,\mathfrak{a})\mathfrak{b}}{v} - \frac{S_F(df\,\mathfrak{b})\mathfrak{a}}{v}\right\} =$$
$$= \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} - \mathfrak{a}(\nabla\mathfrak{b}) - (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} =$$
$$= \lim_{v=0}\frac{S_F\{(df\,\mathfrak{a})\mathfrak{b} - (df\,\mathfrak{b})\mathfrak{a}\}}{v} =$$

Имали смо ову векторску једначину

$$[\underset{df}{\mathfrak{A}}[\underset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{B}}\underset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{C}}]] = \underset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{B}}(\underset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{C}}\underset{df}{\mathfrak{A}}) - \underset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{C}}(\underset{df}{\mathfrak{A}}\underset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{B}})$$

па је зато горњи израз

$$= \lim_{v=0}\frac{S_F[df[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]]}{v} = [\nabla[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]] = \mathrm{rot}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}]$$

Тако добијамо једначину

$$\mathrm{rot}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{b}$$

Питајмо сада за значење израза

$$[\nabla\mathfrak{a}]\mathfrak{b} = \lim_{v=0}\frac{S_F[df\,\mathfrak{a}]\mathfrak{b}}{v} =$$

Интегранту можемо дати према пређашњим правилима и облик $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]df$ јер можемо циклички да пермутирамо. Но како $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ нису константе то треба да дођу иза df па место овог израза треба да пишемо $df[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ што је дозвољено. Зато је горњи израз

$$= \lim_{v=0}\frac{S_F\,df[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}{v} = \nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathrm{div}\,[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] =$$

Овај израз можемо даље да трансформишемо овако: ставимо према пређашњем $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + d\mathfrak{b}$ где $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$ означују константне векторе, па имамо

$$= \lim_{v=0}\frac{S_F\,df[(\mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a})\times(\mathfrak{b}_1 + d\mathfrak{b})]}{v} =$$
$$= \lim_{v=0}\left\{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\frac{S_F\,df^{=0}}{v} + \frac{S_F\,df[d\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1]}{v} + \frac{S_F\,df[\mathfrak{a}_1 d\mathfrak{b}]}{v} + \frac{S_F\,df[d\mathfrak{a}\,d\mathfrak{b}]}{v}\right\} =$$

Први члан је раван нули а и последњи члан исчезава јер је вишег реда, па је

$$= \lim_{v=0} \left\{ \frac{\int_F df\,[(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)\times\mathfrak{b}_1]}{v} + \frac{\int_F df\,[\mathfrak{a}_1\times(\mathfrak{b}-\mathfrak{b}_1)]}{v} \right\} =$$

$$= \lim_{v=0} \left\{ \mathfrak{b}_1 \frac{\int_F [df\,\mathfrak{a}]}{v} - [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}] \frac{\int_F df}{v} - \mathfrak{a}_1 \frac{\int_F [df\,\mathfrak{b}]}{v} - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \frac{\int_F df}{v} \right\} =$$

Други и четврти члан су равни нули; $\mathfrak{b}_1$ и $\mathfrak{a}_1$ можемо сада да сменимо са $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$, па је зато

$$\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{b} \lim_{v=0} \frac{\int_F [df\,\mathfrak{a}]}{v} - \mathfrak{a} \lim_{v=0} \frac{\int_F [df\,\mathfrak{b}]}{v}$$

јер смо могли векторе $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{b}_1$ пре него што смо их сменили са $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ да метнемо пред знак limes. Из горње једначине следује

$$\operatorname{div}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}] - \mathfrak{a}[\nabla\mathfrak{b}] =$$
$$= \mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}$$

Ми смо из досадањег видели да и ако се оператор ∇ понаша у главноме као вектор, да ипак за њега не важе сва правила која важе за обичне векторе; специјално смо видели да за операцију са вектором ∇ не важи комутативни закон мултипликације ни за скаларне продукте. Тако н. пр. $(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b}$ није било равно $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$. Кад би ∇ био обичан вектор, онда би лева и десна страна неједначине

$$(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b} \neq (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$$

биле једнаке. У нашем случају биће једнаке само онда, ако је $\mathfrak{a}$ константно, јер из једне пређашње једначине следује да је

$$(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$$

Ако је $\mathfrak{a}$ константа, онда је према пређашњем $\operatorname{div}\mathfrak{a} = 0$, па у том случају прелази горња неједначина у једначину.

Извели смо једначину

$$[\nabla\mathfrak{a}]\mathfrak{b} = \nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$$

За ову једначину изгледа да важи комутативни закон и циклички закон скаларног продукта једног вектора са векторијелним продуктом, јер кад би ∇ био обичан вектор то би могли да пишемо место леве стране горње једначине $\mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}]$ и по цикличком правилу ово би било једнако $\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, што би задовољило горњу једначину.

Имали смо неједначину

$$\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \neq \mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}]$$

Ова неједначина прелази у једначину ако је вектор $\mathfrak{b}$ константан, јер је онда према једном пређашњем правилу

$$\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{b}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{b}$$

Ако је $\mathfrak{b}$ константа, онда је $\mathrm{rot}\,\mathfrak{b} = 0$ и горња неједначина прелази у једначину.

Ваља дакле да се нађе једно такво правило помоћу кога се могу све пређашње једначине, које смо ми доста компликовано извели, да одмах напишемо. Сравњивањем свих једначина у којима долази оператор ∇ једанпут, дошло се до овог <u>правила</u>:

Оператор ∇ влада се као обичан вектор и за њега важе сва правила векторске алгебре, ако се при томе овако поступа: све величине које стоје иза оператора сматрају се редом као константе, па се једна по једна обичним векторским операцијама доводе пред ∇. Све тако добијене изразе у којима увек једна величина стоји пред оператором ∇ ваља сабрати.

Примери:

1° $\nabla[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$. Сматрамо ли вектор $\mathfrak{b}$ као константан, то га можемо цикличком пермутацијом довести пред оператором ∇, па добијамо $\mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}]$. Сматрамо ли вектор $\mathfrak{a}$ као константан то би опет цикличком операцијом добили израз $\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\nabla]$, али тај израз не можемо употребити јер стоје две величине пред оператором ∇, по обичним правилима векторске алгебре овај је израз једнак изразу $-a[\nabla b]$ и зато је

$$\nabla[ab] = b[\nabla a] - a[\nabla b]$$

2° $[\nabla[ba]]$ Овај израз има облик $[a[bc]]$. Конструишимо један израз који је опште једнак а да вектор a стоји опет на првом месту. Имали би

$$[a[bc]] = b(ca) - c(ab) = (ac)b - (ab)c$$

Применимо ли ову једначину на наш пример, то видимо да при том нећемо имати ни један од вектора b и a да доведемо пред ∇ и зато се у овом случају влада ∇ као обичан вектор, па ову једначину можемо директно да применимо

$$[\nabla[ba]] = (\nabla a)b - (\nabla b)a$$

Овај израз можемо даље да трансформишемо. Сматрамо ли у првом члану десне стране a као константно, то га можемо довести пред ∇ обичним операцијама, па добијамо $(a\nabla)b$. Сматрамо ли b као константно, то га можемо обичном операцијом довести пред ∇, па добијамо $b(\nabla a)$. Сматрамо ли у другом члану b као константно, то га можемо довести пред ∇, па добијамо $-(b\nabla)a$; а сматрамо ли a као константно, добијамо $-a(\nabla b)$. Наш члан раван је збиру

$$[\nabla[ab]] = (a\nabla)b + b(\nabla a) - (b\nabla)a - a(\nabla b)$$

3° $\nabla(ab)$. Применимо векторску једначину

$$[a[bc]] = b(ca) - c(ab)$$

тако да помоћу ње можемо у нашем изразу увек један фактор a или b довести пред ∇. Ову једначину можемо писати

$$b(ac) = [a[bc]] + (ab)c$$

Ова једначина изводи ону операцију којом мећемо један фактор пред ∇. Сматрамо ли a као константно, то добијамо $[a[\nabla b]] +$

$+ (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$. Сматрамо ли сад $\mathfrak{b}$ као константно, то можемо исту ову једначину употребити ако само $\mathfrak{a}$ асимилирамо са $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}$ са $\mathfrak{a}$, па тако добијамо $[\mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}]] + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a}$. Саберемо ли све ове чланове, то добијамо једначину

$$\nabla(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = [\mathfrak{a}[\nabla\mathfrak{b}]] + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + [\mathfrak{b}[\nabla\mathfrak{a}]] + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a}$$

или

$$\mathrm{grad}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b} = [\mathfrak{a}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}] + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a}$$

4° Трансформишимо израз $[\nabla\mathfrak{a}p]$ у коме p представља један произвољни скалар. Кад би p било константно, онда би га могли извадити пред оператором ∇, па би добили $p[\nabla\mathfrak{a}]$; кад би $\mathfrak{a}$ било константно, онда би могли употребити на горњи израз комутативни закон па би добили $-[\mathfrak{a}\nabla p]$. Зато је

$$[\nabla\mathfrak{a}p] = p[\nabla\mathfrak{a}] - [\mathfrak{a}\nabla p]$$

или

$$\mathrm{rot}(p\mathfrak{a}) = p\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{a} - [\mathfrak{a}\,\mathrm{grad}\,p]$$

Диференцијални продукти другог реда.

Нашли смо да је $\nabla\mathfrak{A}$ један скалар а ∇U и $[\nabla\mathfrak{A}]$ вектори. На овој скалар и на ове векторе можемо применити опет Хамилтонов оператор, па ћемо добити диференцијалне продукте вишег реда. Како оператор ∇ игра улогу вектора, то ће и израз $(\nabla\nabla)$ имати свога смисла — биће један скалар, па ћемо га моћи скаларно да помножимо са U и $\mathfrak{A}$. На тај начин добијамо ове изразе:

$$\nabla(\nabla\mathfrak{A}) = \mathrm{grad.\ div.}\,\mathfrak{A}$$
$$\nabla(\nabla U) = \mathrm{div\ grad}\,U$$
$$\nabla[\nabla\mathfrak{A}] = \mathrm{div\ rot}\,\mathfrak{A}$$
$$[\nabla(\nabla U)] = \mathrm{rot\ grad}\,U$$
$$[\nabla[\nabla\mathfrak{A}]] = \mathrm{rot\ rot}\,\mathfrak{A}$$
$$(\nabla\nabla)U = \nabla^2 U$$

$$(\nabla\nabla)\mathfrak{v} = \nabla^2\mathfrak{v}$$

Ми би ове изразе могли да изведемо помоћу модерне дефиниције векторијелних и диференцијалних продуката, тако, да први оператор ∇ заменимо са df па тражимо онда граничну вредност количника интеграла тако добијеног израза по једној затвореној површини и запремине обухваћене том површином. При тој операцији морамо вектор df, јер стоји пред другим оператором ∇, сматрати као константан с обзиром на тај други оператор. Но ми се можемо послужити такође и аналитичком дефиницијом оператора ∇, па ћемо тако аналитичке изразе диференцијалних продуката другог реда лакше извести. Како су нам ти аналитички изрази такође потребни, то ћемо ударити другим путем.

Према тој аналитичкој дефиницији оператора ∇ имамо

$$\nabla(\nabla\mathfrak{v}) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) =$$

$$= i\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

$$\nabla(\nabla U) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Овај израз добијамо такође, ако уведемо један нови оператор

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

па га помножимо скаларно са U. Овај други оператор називамо Лапласовим оператором или Лапласијентом. Он се често пута пише по Lamé-у и овако

$$\nabla^2 = \Delta$$

Тај оператор игра улогу скалара, па кад се примени на скалар, даје скалар, а кад се примени на вектор, даје вектор. Једначина

$$\nabla^2 U = 0$$

зове се <u>Лапласова једначина</u>. Из дефиниције Лапласовог оператора следује да се он добија ако се Хамилтонов оператор сам са собом скаларно помножи. Зато је

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

па је због тога

$$(\nabla\nabla) U = \nabla^2 U$$

- Претпоследњи члан наше табеле једнак је дакле са другим.

Свршимо одмах испитивање и последњег члана табеле. Тај члан је

$$(\nabla\nabla)\mathfrak{v} = \nabla^2\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathfrak{v} =$$

$$= \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial z^2}$$

Овај израз можемо даље трансформисати ако вектор $\mathfrak{v}$ изразимо помоћу његових компонената т.ј.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i} v_x + \mathfrak{j} v_y + \mathfrak{k} v_z$$

Онда је

$$\nabla^2\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(\mathfrak{i} v_x + \mathfrak{j} v_y + \mathfrak{k} v_z) =$$

$$= \mathfrak{i}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \mathfrak{i}\,\nabla^2 v_x + \mathfrak{j}\,\nabla^2 v_y + \mathfrak{k}\,\nabla^2 v_z$$

За трећи члан табеле имамо

$$\nabla[\nabla\mathfrak{v}] = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{div}\mathfrak{w} =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial z}$$

Било је

$$\mathfrak{w} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Компоненте вектора $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w}_x \quad \mathfrak{w}_y \quad \mathfrak{w}_z$$

су субдетерминанте првог реда ове детерминанте, па је према томе

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0$$

Зато је

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$$

Испитајмо четврти члан табеле: $[\nabla(\nabla U)]$. Овај израз можемо сматрати као векторијелни продукат двају вектора, од којих први ∇ има компоненте $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, а други grad U има компоненте $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ и зато је горњи израз једнак

$$[\nabla(\nabla U)] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Зато је

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = 0$$

До овог резултата могли смо и овако доћи: U је скалар, па га зато можемо извадити пред средњу заграду, па је због тога

$$[\nabla(\nabla U)] = [\nabla\nabla]U = 0$$

Испитајмо још и пети члан табеле: $[\nabla[\nabla\mathfrak{v}]]$. Употребимо опет једначину

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$$

Ако је $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ онда је

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - (\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{C}$$

Употребив ову једначину на горњи израз, то она не мења ред чланова и не доноси ни пред један од оператора ∇ вектор $\mathfrak{v}$. Зато се ова једначина може директно применити на наш израз па добијамо

$$[\nabla[\nabla\mathfrak{v}]] = \nabla(\nabla\mathfrak{v}) - (\nabla\nabla)\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \nabla^2\mathfrak{v}$$

Неке интегралне једначине

Извели смо до сада две интегралне једначине и то: Stokes-ову и Gauss-ову. Оне се могу писати у облику:

$$\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{l} = \int_F \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} \qquad 1.)$$

$$\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = \int_V \mathrm{div}\,\mathfrak{v}\, dV \qquad 2.)$$

Оне ће нам послужити да помоћу њих изведемо једну серију нових интегралних једначина.

Питамо ли н. пр. за вредност линиског интеграла

$$\mathfrak{a} = \int_L p\, d\mathfrak{l}$$

где p означава један скалар, то ћемо тај линиски интеграл на овај начин израчунати. Помножимо ли лево и десно скаларно са константним вектором $\mathfrak{c}$, то добијамо

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \int_L p\mathfrak{c}\, d\mathfrak{l} =$$

$p\mathfrak{c}$ представља опет један вектор па зато можемо употребити Stokes-ову теорему, па је горњи израз даље

$$= \int_F \mathrm{rot}(p\mathfrak{c})\, d\mathfrak{f} = \int_F [\nabla p\mathfrak{c}]\, d\mathfrak{f} =$$

Употребимо ли цикличку пермутацију и како је $\mathfrak{c}$ један константан вектор, то га можемо извадити пред оператор ∇ и пред знак интеграла, па имамо

$$= \int_F \mathfrak{c}\,[d\mathfrak{f}\,\nabla p] = \mathfrak{c}\int_F [d\mathfrak{f}\,\nabla p] =$$

а како је вектор $\mathfrak{c}$ био произвољан вектор, то га можемо у левој и десној страни горње једначине испустити, јер лева и десна страна представљају пројекције вектора $\mathfrak{a}$ и вектора $\int_F [df\,\nabla p]$ на вектор $\mathfrak{c}$. Пројекције тих вектора на један произвољан вектор биће само тако једнаке, ако су оба та вектора једнака. Зато је

$$\int_L p\,dl = \int_F [df\,\nabla p] = \int_F [df\,\mathrm{grad}\,p] \qquad 3.)$$

На сличан начин можемо извести вредност површинског интеграла

$$\mathfrak{a} = \int_F p\,df$$

Помножимо скаларно и ову једначину са константним вектором $\mathfrak{c}$, онда је

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \int_F p\mathfrak{c}\,df =$$

$p\mathfrak{c}$ је опет један вектор, па можемо употребити Gauss-ову теорему т.ј.

$$= \int_V \mathrm{div}(p\mathfrak{c})\,dV = \int_V \nabla p\mathfrak{c}\,dV =$$

$\mathfrak{c}$ је константан вектор па га можемо извадити пред знак ∇ и пред знак интеграла, па је

$$= \mathfrak{c}\int_V \nabla p\,dV$$

па како је он произвољан вектор, то га можемо лево и десно испустити, па добијамо

$$\int_F p\,df = \int_V \mathrm{grad}\,p\,dV \qquad 4.)$$

Ова једначина казује да је површински интеграл једнога скалара једнак волумском интегралу његовог градиента.

Исто тако можемо извести други израз за интеграл

$$\mathfrak{a} = \int_F [\mathfrak{v}\,df]$$

Помножимо лево и десно са вектором $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \int_F \mathfrak{c}[\mathfrak{v}\,df] = \int_F df\,[\mathfrak{c}\mathfrak{v}] =$$

а по Gauss-овој теореми, јер $[\mathfrak{c}\mathfrak{v}]$ представља опет један вектор, је

$$= \int_V \operatorname{div}[\vec{v}\,\mathfrak{v}]\,dV = \int_V \nabla[\vec{v}\,\mathfrak{v}]\,dV =$$

$$= \int_V \vec{v}\,[\mathfrak{v}\nabla]\,dV = -\vec{v}\int_V [\nabla\mathfrak{v}]\,dV$$

$\vec{v}$ смо метли пред интеграл јер је константан вектор, а како је произвољан, то је

$$\int_F [\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}] = -\int_V \operatorname{rot}\mathfrak{v}\,dV \qquad 5.)$$

Векторијелни површински интеграл једнога вектора једнак је негативном скаларном волуменском интегралу његове ротације.

Имали смо једначину

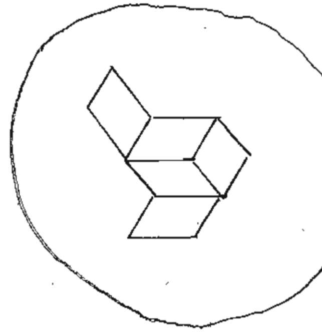
$$\nabla^2\mathfrak{v} = (\nabla\nabla)\mathfrak{v} = \lim_{V=0}\frac{\int_F (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{v}}{V}$$

Узмемо ли волумен V и површину F бесконачно малу, то можемо горњу једначину да пишемо у облику

$$\nabla^2\mathfrak{v}\,dV = \int_{dF}(d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{v}$$

где је површински интеграл узет по бесконачно малој површини dF

Замислимо да смо једну коначну запремину V површине F разделили у произвољне елементарне запремине, да смо за сваку такву запремину горњу једначину написали, па онда све те једначине сабрали;



онда ће лева страна тога израза (збира) да буде $\int_V \nabla^2\mathfrak{v}\,dV$ а десна $\int_F (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{v}$, где је интеграл узет по спољашњој површини F јер се на додирним површинама елементарних запремина добијају увек по два једнака члана а супротна знака, јер што је на једној од тих елементарних површина спољашња страна, то је за другу елементарну површину која је додирује унутарња. Зато добијамо једначину

$$\int_V \nabla^2\mathfrak{v}\,dV = \int_F (d\mathfrak{f}\nabla)\mathfrak{v} \qquad 6.)$$

На исти начин можемо извести из диференц. једначина

$$\mathrm{grad}\, U = \lim_{v=0} \frac{\int_F U\, df}{v}$$

$$(\nabla \mathfrak{A})\mathfrak{B} = \lim_{v=0} \frac{\int_F (df\, \mathfrak{A})\mathfrak{B}}{v}$$

једначине

$$\int_v \mathrm{grad}\, U\, dV = \int_F U\, df$$

$$\int_v (\nabla \mathfrak{A})\mathfrak{B}\, dV = \int_F (df\, \mathfrak{A})\mathfrak{B}$$

Сменимо ли у једначини 2) вектор $\mathfrak{N}$ са

$$q \nabla p = q\, \mathrm{grad}\, p$$

где су q и p скалари (смена је дозвољена јер је $\mathrm{grad}\, p$ или ∇p вектор, па према томе је и $q\nabla p$ један вектор), онда добијамо

$$\int_F q \nabla p\, df = \int_v \mathrm{div}(q \nabla p)\, dV = \int_v \nabla (q \nabla p)\, dV$$

Имали смо једначину

$$\nabla p_1 \mathfrak{N}_1 = p_1 \nabla \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_1 \nabla p_1 =$$

$$= p_1\, \mathrm{div}\, \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_1\, \mathrm{grad}\, p_1$$

па зато добијамо место горње једначине

$$\int_F q\, \mathrm{grad}\, p\, df = \int_v q\, \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, p\, dV + \int_v \mathrm{grad}\, p\, \mathrm{grad}\, q\, dV \qquad 7)$$

Имали смо једначину

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}]$$

и осим тога

$$(\nabla \mathfrak{A})\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{A} + (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$$

$$(\nabla \mathfrak{B})\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}$$

Из ове последње две једначине следује

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = (\nabla \mathfrak{A})\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{A}$$

$$(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} = (\nabla \mathfrak{B})\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{B}$$

Сменимо ли ове две једначине у прву, то добијамо

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - (\nabla \mathfrak{A})\mathfrak{B} - (\nabla \mathfrak{B})\mathfrak{A} =$$

$$= -\mathfrak{B}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{B} + [\mathfrak{A}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{A}]$$

Ако ову једначину помножимо са dV па интегралимо преко једне коначне запремине V која има коначну површину F, то ћемо добити

$$\int_v \mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\, dV - \int_v (\nabla \mathfrak{A})\mathfrak{B}\, dV - \int_v (\nabla \mathfrak{B})\mathfrak{A}\, dV =$$

$$= -\int_V \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,dV - \int_V \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}\,dV +$$

$$+\int_V [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]\,dV + \int_V [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]\,dV$$

чланове на левој страни ове једначине можемо увек написати према изведеним формулама овако

$$\int_V \mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,dV = \int_F df(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

$$\int_V (\nabla\mathfrak{A})\mathfrak{B}\,dV = \int_F (df\,\mathfrak{A})\mathfrak{B}$$

$$\int_V (\nabla\mathfrak{B})\mathfrak{A}\,dV = \int_F (df\,\mathfrak{B})\mathfrak{A}$$

Ова, на тај начин добијена, прва два члана једначине могу се опет даље трансформисати и свести у један

$$\int_F df(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - \int_F (df\,\mathfrak{A})\mathfrak{B} = -\int_F \{\mathfrak{B}(df\,\mathfrak{A}) - df(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\} =$$

$$= -\int_F [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,df]]$$

Зато добијамо једначину

$$\int_F [\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\,df]] + \int_F (df\,\mathfrak{B})\mathfrak{A} =$$

$$= \int_V \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,dV + \int_V \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}\,dV -$$

$$- \int_V [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]\,dV - \int_V [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]\,dV \qquad 8.)$$

Понашање градијента, дивергенције и ротације према инверзији координатног система

Показали смо да продукат

$$\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = V$$

представља волумен паралелопипеда који је векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ одређен. Тај израз мења свој знак ако пређемо од десног система на леви или обратно, па је према томе V псеудоскалар и исто тако његова реципрочна вредност.

Градијент је дефинисан једначином

$$\mathrm{grad}\, U = \lim_{V=0} \frac{\int_F U\, df}{V}$$

Ако је U обичан скалар, онда је $U\,df$ аксијалан вектор јер је df аксијалан вектор а

$$\frac{U\,df}{V} = U\,df\,\frac{1}{V}$$

је поларан вектор. Градијент обичног скалара је према томе поларан вектор.

Ако је U псеудоскалар, онда је $U\,df$ поларан вектор, а $U\,df\,\frac{1}{V}$ је аксијалан вектор.

На исти начин можемо испитати и понашање дивергенције према инверзији.

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{v} = \lim_{V=0} \frac{\int_F \mathfrak{v}\, df}{V}$$

Ако је $\mathfrak{v}$ поларан вектор, онда је $\mathfrak{v}\,df$ псеудоскалар а $\mathfrak{v}\,df\,\frac{1}{V}$ је обичан скалар. Ако је $\mathfrak{v}$ аксијалан вектор, онда је $\mathfrak{v}\,df$ обичан скалар, а $\mathfrak{v}\,df\,\frac{1}{V}$ је псеудоскалар.

$$\mathrm{rot}\, \mathfrak{v} = \lim_{V=0} \frac{\int_F [df\,\mathfrak{v}]}{V}$$

Ако је $\mathfrak{v}$ поларан вектор, онда је $[df\,\mathfrak{v}]$ поларан вектор, а $[df\,\mathfrak{v}]\,\frac{1}{V}$ аксијалан вектор. Ако је $\mathfrak{v}$ аксијалан вектор, онда је $[df\,\mathfrak{v}]$

опет аксијалан вектор, а $[d\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}]\frac{1}{v}$ је поларан вектор.

Зато можемо да формулишемо ова правила:

1° Градиент обичног (псеудо) скалара је поларан (аксијалан) вектор;

2° Дивергенција поларног (аксијалног) вектора је обичан (псеудо) скалар;

3° Ротација поларног (аксијалног) вектора је аксијалан (поларан) вектор.

Ова су правила важна за контролу векторских једначина.

Табела

формула и једначина Вектор. Анализе.

1° $\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] = \mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{a}] = \mathfrak{c}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$

2° $[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]] = \mathfrak{b}(\mathfrak{c}\mathfrak{a}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$

3° $\frac{d}{dt}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{d\mathfrak{a}}$

4° $\frac{d}{dt}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \left[\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b}\right] + \left[\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}\right]$

5° $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

6° $\nabla U = \operatorname{grad} U = i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z}$

7° $\nabla\mathfrak{v} = \operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

8° $[\nabla\mathfrak{v}] = \operatorname{rot}\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

9° $\frac{dU}{da} = \mathfrak{a}_0\nabla U$

10° $\dfrac{d\mathfrak{w}}{da} = (\mathfrak{a}_0\nabla)\mathfrak{w}$

11° $\nabla pq = p\nabla q + q\nabla p$

12° $\nabla p\mathfrak{w} = p\nabla\mathfrak{w} + \mathfrak{w}\nabla p$

13° $\nabla[\nabla\mathfrak{w}] = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{w} = 0$

14° $[\nabla(\nabla\mathfrak{U})] = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathfrak{U} = 0$

15° $\nabla(\nabla\mathfrak{U}) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\mathfrak{U} = \nabla^2\mathfrak{U} = \Delta\mathfrak{U}$

16° $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} = \mathfrak{s}\,\dfrac{d\mathfrak{b}}{d\mathfrak{s}}$

17° $(\nabla\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b}$

18° $\operatorname{rot}[\mathfrak{b}\mathfrak{a}] = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b}$

19° $\operatorname{div}[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}$

20° $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\nabla)\mathfrak{a} + [\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}]$

21° $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{w} - \nabla^2\mathfrak{w}$

22° $\operatorname{rot} p\mathfrak{w} = p\operatorname{rot}\mathfrak{w} - [\mathfrak{w}\operatorname{grad} p]$

23° $\int_{\mathfrak{L}} \mathfrak{w}\, d\mathfrak{l} = \int_{\mathfrak{F}} \operatorname{rot}\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$ (Stokes)

24° $\int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{div}\mathfrak{w}\, dV$ (gauss)

25° $\int_{\mathfrak{L}} p\, d\mathfrak{l} = \int_{\mathfrak{F}} [d\mathfrak{f}\,\nabla p]$

26° $\int_{\mathfrak{F}} p\, d\mathfrak{f} = \int_V (\nabla p)\, dV$

27° $\int_{\mathfrak{F}} [\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}] = -\int_V \operatorname{rot}\mathfrak{w}\, dV$

28° $\int_V \nabla^2\mathfrak{w}\, dV = \int_{\mathfrak{F}} (d\mathfrak{f}\,\nabla)\mathfrak{w}$

29° $\int_{\mathfrak{F}} d\mathfrak{f}\, q\nabla p = \int_V q\operatorname{div}\operatorname{grad} p\, dV + \int_V \operatorname{grad} p\operatorname{grad} q\, dV$

30° $\int_{\mathfrak{F}} [\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\, d\mathfrak{f}]] + \int_{\mathfrak{F}} (d\mathfrak{f}\,\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \int_V \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a}\, dV + \int_V \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b}\, dV - \int_V [\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{b}]\, dV - \int_V [\mathfrak{b}\operatorname{rot}\mathfrak{a}]\, dV$