Бор. Ј. Пујић, проф

Геометријске примене диференцијалних једначина

Предавања
Д-р Мих. Петровића,
проф. Универзитета.

Увод

Свака линија или површина било у равни било у простору дефинисана је извесном особином. Ове се изражавају рачунски помоћу релација између дужина и углова. У аналитичким изразима како за дужине тако и за углове могу фигурисати или непосредно координате тачака или изводи првог, другог, ... реда. У случају кад у таквим изразима што улазе у такве релације фигуришу само комбинације координата, те релације представљају обичне једначине које или непосредно дају једначину криве линије или површине, или се до такве једначине долази једнам низом елиминација. Међутим кад у изразима дужине и углова фигуришу изводи, такве релације представљају диференцијалне једначине и то онолико реда колики је највиши ред извода што у поменутим изразима фигурише.

Тако н. пр. основна особина кугле да су растојања ма које њене тачке од једне сталне тачке. Пошто растојање има за израз

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

претпоставивши да је та стална тачка у координатном почетку, то се за дефиницију кугле има обична једначина

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Тако исто и круг се може дефинисати као линија за коју је $\sqrt{x^2+y^2}$ стално, па ћемо имати опет обичну једначину

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

Међутим круг се може дефинисати и на тај начин ако се изрази да је полупречник кривине ма које његове тачке сталан. Изразивши тај факт рачунски добија се једначина

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=a$$

или

$$a^2\frac{d^2y}{dx^2}-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3=0$$

која представља диференцијалну једначину круга. Из ње се тек интеграцијом долази до једначине круга у обичном облику.

Пошто се врло велики број особина које служе као дефиниције кривих линија и површина изражавају баш оваквим диференцијалним једначинама, то се из тога може видети колику улогу играју диференцијалне једначине при одређивању кривих линија или површина које ће имати да задовоље какве унапред дате услове. Ми ћемо трећи неколико задатака такве врсте.

Задаци који се своде на диференцијалне једначине првог реда.

Најобичнија класа таквих задатака јесу задаци у којима се тражи крива линија на основу какве дате особине у чији аналитички израз улазе координате и елементи дирке. Зна се да се ма какав елеменат дирке изражава помоћу координата и првог извода; према томе такви се задаци своде на једну релацију

$$F(x, y, \frac{dy}{dx})=0$$

која није ништа друго него диференцијална једначина првог реда. Њеном би се интеграцијом добило у као функција x-а и једне константе C т.ј.

$$y = F(x, C)$$

Линија ће бити потпуно одређена ако се поред облика функције F буде знала и вредност константе C. За одредбу те константе потребни су још извесни суплементарни услови који је прецизирају. Ти су услови најчешће овакви:

а) Може се тражити да крива линија пролази кроз дату тачку (a, b) тада се добија условна једначина

$$b = F(a, C)$$

која одређује вредност константе C.

б) Може се тражити да крива линија у тачки чија је апсциса $x = a$ има један унапред дати нагиб дирке. Ако се тангента тог нагиба означи са λ из једначине

$$y = F(x, C)$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dx} = \varphi(x, y, C)$$

имамо

$$y = F(a, C)$$

$$\lambda = \varphi(a, y, C)$$

Елиминацијом y-а из тих двеју једначина добила би се извесна једначина

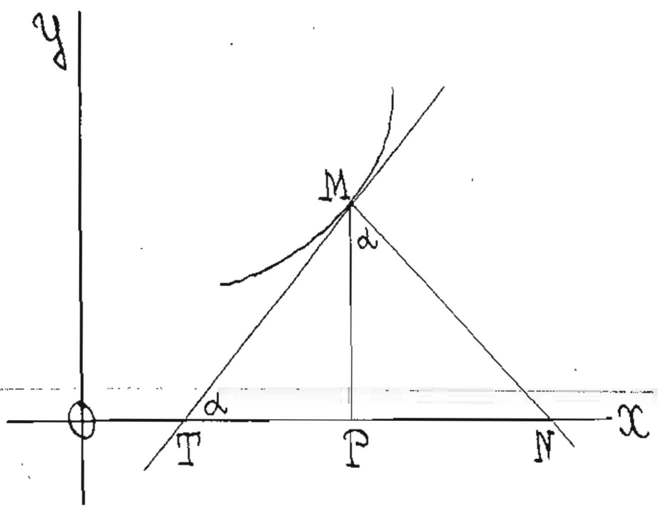
$$\psi(a, C) = 0$$

из које се може израчунати константа C.

и т. д.

1° Задатак.

Тражи се крива линија која има ту особину да јој је дужина PT за све тачке стална и равна k.



Из слике је

$$\frac{y}{TP} = tg\alpha = \frac{dy}{dx}$$

Отуда условна једначина

$$k\frac{dy}{dx} = y$$

Из ове једначине је

$$k\log y = x + C$$

или

$$y = Ce^{\frac{x}{k}}$$

Ако се тражи да крива пролази кроз тачку $x=0$ $y=3$ добили би условну једначину

$$3 = C$$

и према томе тражена крива била би

$$y = 3e^{\frac{x}{k}}.$$

2° Задатак.

Траже се криве линије за које је дужина PN стална и равна k.

Из слике је

$$\frac{PN}{y} = tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}$$

одакле се добија условна једначина

$$y\frac{dy}{dx} = k$$

из које је

$$\frac{y^2}{2} = kx + C$$

Према томе тражене криве су параболе.

3° Задатак.

Траже се криве линије за које је дужина MN пропорционална апсциси тачке N.

Из слике је

$$\frac{y}{MN} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

а одатле

$$MN = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = kx$$

или

$$y^2(1+y'^2) - k^2x^2 = 0$$

Ова једначина је хомогена по x и y и према томе се може интегралити.

4° Задатак.

Траже се криве линије за које је дужина MN пропорционална одстојању тачке M од почетка.

Пошто је

$$MN = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

то се добија условна једначина

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k\sqrt{x^2+y^2}$$

или

$$y^2(1+y'^2) - k^2(x^2+y^2) = 0$$

Једначина је опет хомогена по x и y и према томе се може интегралити.

5° Задатак изогоналних трајекторија.

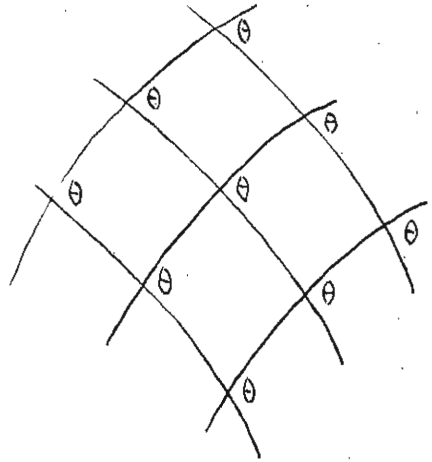
Нека је дата једна класа кривих линија

$$F(x,y,\lambda)=0 \qquad 1)$$

чија једначина садржи један произвољан параметар λ тако да се варијацијом тога параметра добијају све могуће криве те класе. Изогоналним трајекторијама класе кривих линија 1) назива се таква једна класа кривих линија

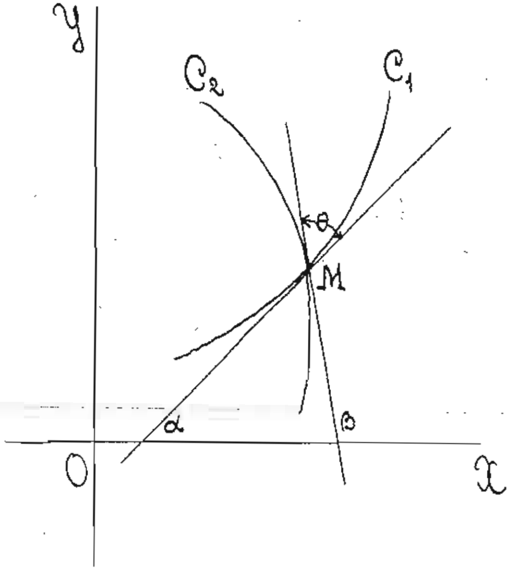
$$\Phi(x,y,\mu)=0 \qquad 2)$$

да свака крива 2) сече сваку криву 1) под једним сталним



и датим углом θ. Задатак је да се, кад се зна класа кривих 1) одреди одговарајућа класа кривих 2).

Уочимо једну произвољну тачку M у равни и нека кроз њу пролази једна крива C_1 што припада класи 1) и једна крива C_2 што припада класи 2).



Те ће се криве сећи под датим углом θ ако им се дирке у тој тачки секу под тим углом. Означимо са α и β углове које граде те дирке са x-осовином. Тада ће бити

$$tg\theta = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta\, tg\alpha}$$

Међутим $tg\beta$ јесте непознати извод $\frac{dy}{dx}$ што одговара класи 2) тако да у једначини 3) треба ставити

$$tg\beta = \frac{dy}{dx} \qquad 4)$$

С друге стране $tg\alpha$ је извод $\frac{dy}{dx}$ али израчунат из једначине 1) диференцијаљењем, пошто он карактерише једну криву те класе. Диференцијаљењем једначине 1) добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

одакле је

$$tg\alpha = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad 5)$$

Пошто је $tg\theta$ познато и стално, то ако га означимо са k, па га као и изразе 4) и 5) сменимо у изразу 3), добићемо једначину

$$k = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}}{1 + \frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

или

$$k\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Пошто је F позната и дата функција,

то ће ова последња једначина бити извесна диференцијална једначина

$$\Psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

и то ће бити диференцијална једначина класе линија 2). Њеном интеграцијом добили би y као функцију x-а и једне произвољне константе C; тај интеграл није ништа друго до једначина класе линија 2) у којој ће улогу параметра μ играти интеграциона константа C или чиме је задатак решен.

Н. пр. дата је класа парабола чије је теме у почетку и које додирују y-осовину; тражи се она класа кривих линија које ће све те параболе сећи под углом од 60°.

Општа једначина класе тих парабола јесте

$$y^2 - \lambda x = 0$$

Овде ћемо имати

$$tg\,\theta = tg\,60° = \sqrt{3}$$

$$tg\,\alpha = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\lambda}{2y} = \frac{\lambda}{2y}$$

$$tg\,\beta = \frac{dy}{dx}$$

и према томе диференцијална једначина трајекторија је

$$\sqrt{3} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{\lambda}{2y}}{1 + \frac{\lambda}{2y}\frac{dy}{dx}}$$

$$2y\sqrt{3} + \lambda\sqrt{3}\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} + \lambda = 0$$

6° Задатак ортогоналних трајекторија.

Овај се задатак решава на исти начин као прошли задатак, само што се релација 3) има сменити простијом релацијом

$$1 + tg\alpha \, tg\beta = 0$$

која изражава то да су криве линије представљене једначинама 1) и 2) једне на другим управне. У овој једначини треба сменити

$$tg\beta = \frac{dy}{dx}$$

$$tg\alpha = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}$$

па се добија као диференцијална једначина тражених трајекторија

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dy}{dx} = 0$$

Интеграцијом ове једначине добило би се y као функција од x и C и тај интеграл представљаће класу линија које ће бити ортогоналне трајекторије дате класе. Улогу параметра λ опет игра интеграциона константа C.

Примери:

1. Одредити ортогоналне трајекторије за једнопарамет. класу парабола. Класа 1) онда је опет

$$y^2 - \lambda x = 0$$

и према томе

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

тако да је диференцијална једначина тражених трајекторија

$$2y + \lambda\frac{dy}{dx} = 0$$

2. Одредити ортогоналне трајекторије за дату класу конфокалних елипса (тј. елипса које имају исте жиже). Општа једначина конфокалних елипса кад средиште лежи у координатном почетку јесте

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a-\lambda} = 1$$

где је λ параметар а a утврђена количина која представља заједнички ексцентрицитет елипсе.

Радећи као и малочас налази се да су ортогоналне трајекторије такве класе елипса хиперболе које имају заједничке жиже са елипсама.

7° Задатак.

Траже се криве линије које имају ту особину да постоји извесна дата релација између координата тачака и лука.

Задаци овакве врсте своде се на једначину

$$s = F(x, y)$$

где је F дата функција. Диференцирањем добијамо

$$ds = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

или

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

Квадрирањем и водећи рачуна о томе да је

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

добија се једначина

$$(1+y'^2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y'\right)^2$$

Та једначина није ништа друго до извесна релација између x, y, y'. Она дакле представља једну диференцијалну једначину првог реда чијом се интеграцијом добијају тражене криве линије.

Н. пр. тражи се крива чији је лук пропорционалан апсциси. Тада је

$$s = xk$$

одакле

$$ds = k\,dx$$

или

$$ds^2 = k^2 dx^2$$

или

$$dx^2 + dy^2 = k^2 dx^2$$

ако означимо

$$\sqrt{k^2-1} = \lambda$$

последња једначина даје

$$dy = \lambda dx$$

одакле интеграцијом

$$y = \lambda x + C$$

из чега се види да су тражене линије праве. У исти мах се види да задатак има смисла само ако је $k > 1$ што је у осталом и само по себи очевидно.

Задаци који се своде на диференцијалне једначине другог реда.

1° Тип.

Тражи се крива линија за коју ће постојати једна дата релација између координата тачака, елемената дирке и лука криве линије.

Задаци овакве врсте своде се на једначину

$$s = F(x, y, y')$$

Диференцијалењем добијамо

$$ds = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy'$$

или деобом са dx

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''$$

квадрирањем и водећи рачуна о томе да је

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

добија се једначина

$$1+y'^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''\right]^2$$

што представља једну диференцијалну једначину другог реда. Интеграцијом ове једначине имали би општу једначину тражених кривих линија и у овој ће фигурисати као параметри две интеграционе константе. Ако је потребно да се ове прецизирају, онда морају бити дата два почетна услова који могу бити разне врсте. Тако н. пр. може се тражити да крива пролази кроз две дате тачке што даје две условне једначине или да пролази кроз једну дату тачку и да у овој дирка има нарочити дати правац или да у тачкама које одговарају двема датим апсцисама дирка има унапред дате праве и т.д.

Један од најважнијих задатака такве врсте био би онај у коме се траже криве линије код којих постоји једна дата релација између лука и дирке. Ако се са α означи угао који дирка гради са x-осовином, задаци се такве врсте увек могу свести на једну једначину облика

$$s = F(\alpha)$$

Пошто је

$$\operatorname{tg} \alpha = y'$$

то ће ова једначина бити облика

$$s = \varphi(y')$$

и потпада према томе под горњи тип. Али задаци се те врсте могу решити лакше на овај начин: Пошто је из примена диференцијалног рачуна познато да између косинуса и синуса угла α и лука постоје релације

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

одакле је

$$dx = ds \cos\alpha$$

$$dy = ds \sin\alpha$$

Пошто је према услову задатка

$$s = F(\alpha)$$

то је

$$ds = F'(\alpha)\, d\alpha$$

па горње две једначине постају

$$dx = F'(\alpha) \cos\alpha \, d\alpha$$

$$dy = F'(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha$$

Из њих имамо интеграцијом

$$x = C_1 + \int F'(\alpha) \cos\alpha \, d\alpha$$

$$y = C_2 + \int F'(\alpha) \sin\alpha \, d\alpha$$

Кад ове интеграције буду извршене имаћемо x и y изражене као функције параметра α и то ће бити параметарске једначине тражених кривих.

Н. пр. тражи се крива чији је лук пропорционалан углу α или у опште линеарна функција угла α. Тада је

$$s = \lambda\alpha + \mu$$

одакле

$$ds = \lambda\, d\alpha$$

и према томе

$$dx = ds \cos\alpha = \lambda \cos\alpha\, d\alpha$$

$$dy = ds \sin\alpha = \lambda \sin\alpha\, d\alpha$$

Отуда

$$x = C_1 + \lambda \sin\alpha$$

$$y = C_2 - \lambda \cos\alpha$$

а одатле је

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$$

- Тражене криве су кругови чији је по-лупречник λ.

2° Тип.

Траже се криве линије које имају ту особину да за сваку тачку постоји релација између координата тачке, елемента дирке и полупречника кривине.

Такви се задаци своде на једначину

$$\rho = F(x, y, y')$$

а пошто је

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

то имамо посла са диференцијалном једначином другог реда чијом се интеграцијом налазе тражене криве.

Најважнији задатак овакве врсте био би овај: наћи криве линије које имају ту особину да постоји једна дата релација између полупречника кривине и елемента дирке. Такви се задаци своде на једначине облика

$$\rho = F(\alpha)$$

где је α угао дирке са x-осовином. Познато је из теорије полупречника кривине да постоји релација

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

одакле је

$$ds = \rho\, d\alpha = F(\alpha)\, d\alpha .$$

Заменом у једначинама

$$dx = ds \cos\alpha$$
$$dy = ds \sin\alpha$$

добија се

$$dx = F(\alpha) \cos\alpha\, d\alpha$$
$$dy = F(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha$$

одакле интеграцијом

$$x = C_1 + \int F(\alpha) \cos\alpha\, d\alpha$$
$$y = C_2 + \int F(\alpha) \sin\alpha\, d\alpha$$

и то су параметарске једначине тражених кривих.

Н. пр. тражи се таква крива линија да је за сваку тачку њен полупречник кривине пропорционалан синусу угла α. Тада је

$$F(\alpha) = \lambda \sin\alpha$$

Параметарске једначине тражене криве биће

$$x = C_1 + \lambda \int \sin\alpha \cos\alpha\, d\alpha$$
$$y = C_2 + \lambda \int \sin^2\alpha\, d\alpha$$

или

$$x = C_1 + \frac{\lambda}{2} \int \sin 2\alpha\, d\alpha$$
$$y = C_2 + \frac{\lambda}{2} \int d\alpha - \frac{\lambda}{2} \int \cos 2\alpha\, d\alpha$$

или најзад

$$x = C_1 - \frac{\lambda}{4} \cos 2\alpha$$
$$y = C_2 + \frac{\lambda\alpha}{2} - \frac{\lambda}{4} \sin 2\alpha$$

Задаци који се своде на диференцијалне једначине трећег реда.

Такве би врсте био задатак: одредити криве линије за које постоји једна унапред дата релација између координата тачака, елемената дирке, полупречника кривине и лука. Такви се задаци своде на једначину

$$F(x, y, y', \rho, s) = 0$$

Њеним диференцијаљењем добија се

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' + \frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F}{\partial s} ds = 0$$

Међутим је

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$$

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

према чему је

$$d\rho = \frac{y'' \cdot \frac{3}{2}(1+y'^2)^{1/2} \cdot 2y'y'' - (1+y'^2)^{3/2} \cdot y'''}{y''^2}$$

или

$$d\rho = \frac{3y'(1+y'^2)^{1/2} y''^2 - (1+y'^2)^{3/2} y'''}{y''^2}$$

Заменом ds и $d\rho$ у горњој једначини ова постаје једна једначина која садржи: x, y, y', y'' и y'''. Такви се задаци дакле своде на једну диференцијалну једначину трећег реда и њеном интеграцијом добијају се криве линије које се траже. У интегралу ће фигурисати три интеграционе константе које, ако је то потребно, треба прецизирати помоћу три дата почетна услова.

Најважнији задатак овакве врсте јесте овај: одредити криве линије за које постоји једна дата релација између полупречника кривине и лука. Такви се задаци своде на јед. начину

$$\rho = F(s)$$

и потпадају под горњи тип. Међутим они се простије решавају овако: из релације

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

добија се

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho} = \frac{ds}{F(s)}$$

одакле је

$$\alpha = C_1 + \int \frac{ds}{F(s)}$$

Претпоставимо да је ова интеграција извршена, па ћемо имати да је

$$\alpha = \varphi(s, C_1)$$

где ће φ бити позната функција. Израчунајмо из те релације s као функцију од α и нека је н. пр.

$$s = \psi(\alpha, C_1)$$

Одатле је

$$ds = \psi'(\alpha, C_1)\, d\alpha$$

и онда заменом у обрасцима

$$dx = ds \cos\alpha$$

$$dy = ds \sin\alpha$$

добија се

$$dx = \psi'(\alpha, C_1) \cos\alpha\, d\alpha$$

$$dy = \psi'(\alpha, C_1) \sin\alpha\, d\alpha$$

одакле је интеграцијом

$$x = C_2 + \int \psi'(\alpha, C_1) \cos\alpha\, d\alpha$$

$$y = C_3 + \int \psi'(\alpha, C_1) \sin\alpha\, d\alpha$$

Кад ове интеграције буду извршене имаћемо параметарске једначине тражених кривих линија у којима ће фигурисати три интеграционе константе.

Н. пр. наћи криве линије за које је полупречник кривине пропорционалан луку криве линије рачунатом од једне тачке. Овде је

$$\rho = ks$$

и према томе

$$d\alpha = \frac{ds}{\rho} = \frac{1}{k}\frac{ds}{s}$$

или

$$\alpha = C_1 + \frac{1}{k}\log s$$

или

$$s = Ce^{\alpha k}$$

Одавде је

$$ds = Cke^{k\alpha}\, d\alpha$$

па отуда

$$dx = Cke^{k\alpha} \cos\alpha\, d\alpha$$

$$dy = Cke^{k\alpha} \sin\alpha\, d\alpha$$

а одатле

$$x = C_2 + Ck\int e^{k\alpha} \cos\alpha\, d\alpha$$

$$y = C_3 + Ck\int e^{k\alpha} \sin\alpha\, d\alpha$$

Обе се ове интеграције могу извршити и према томе задатак се може решити.

Једначине

$$\rho = F(s)$$

играју врло важну улогу у Аналитичкој Геометрији. Очевидно је да се свака крива у равни може дефинисати релацијом која постоји између њеног лука и полупречника кривине у тој тачки лука. Једначине такве врсте потпуно су независне од избора координатног система, јер ма како се тај систем премештао или мењао у равни дужина лука и полупречник кривине као интимне особине те криве тиме се ни у колико не мењају. Релација дакле

$$\rho = F(s)$$

написана за једну дату криву остаје иста било да се мења координатни систем било да се сама крива креће на све могуће начине. Та се релација може мењати само онда кад би крива мењала облик т.ј. кад би се деформисала. Због тога се та релација за једну дату криву може сматрати као једначина те криве и пошто она зависи само од интимних особина криве а никако од координатних особина то се она и назива природном или интимном једначином криве линије (équation intrinsèque). Постоји читав један одељак Аналитичке Геометрије у коме се особине кривих линија испитују једино помоћу оваквих једначина. Два основна проблема који имају да се реше у таквој Геометрији јесу ова:

1° Знајући једначину криве у једном ма ком координатном систему наћи њену природну једначину;
2° Знајући природну једначину једне криве наћи једначину криве у другом каквом датом координатном систему.
Ми ћемо претпоставити да се има посла увек са правоуглим координатним системом, јер се из њега може прећи на сваки други.

1° задатак.

Дата је једначина криве у облику

$$y = F(x)$$

наћи њену једначину у облику

$$\rho = F(s).$$

ако у обрасцима

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

$$s = \int dx\sqrt{1+y'^2}$$

сменимо y' са $F'(x)$, y'' са $F''(x)$, ρ постаје једна позната функција x-а н. пр.

$$\rho = \varphi(x)$$

а s постаје известан интеграл у коме ће под интегралним знаком фигурисати опет једна позната функција x-а н. пр.

$$s = \psi(x)$$

Елиминацијом x-а из ових двеју једначина имаћемо једну релацију између ρ и s која ће представљати природну једначину криве.

Примедба: Кад у једначини

$$\rho = F(s)$$

не фигурише ρ једначина може представљати само изоловане тачке, а кад не фигурише s онда само кругове.

2° задатак

Нека је дата природна једначина криве

$$\rho = F(s).$$

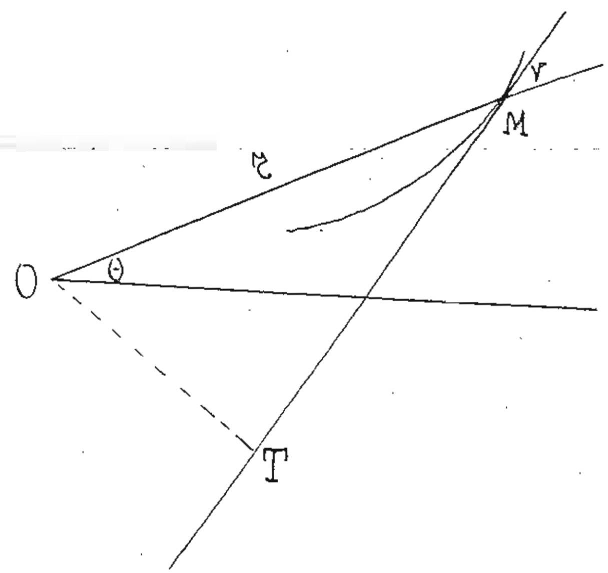
Начин на који се од ове једначине прелази на једначину у правоуглом координатном систему јесте онај исти који смо мало час имали одређујући криве линије за које постоји релација

$$\rho = F(\mathfrak{z})$$

ако би се сад место правоуглих координата имале узети које друге, задатак се лако решава знајући релације између правоуглих и тих других координата.

Решавање задатака у поларним координатама.

Уочимо једну криву и нека су r и θ поларне координате једне ма које њене тачке M. Означимо са r' извод потега r по углу θ. Из Аналитичке Геометрије позната су ова три обрасца. Ако се са V означи угао који прави дирка у тачки M са потегом, са s дужина лука



криве рачунат од једне утврђене тачке на криву, а са ρ полупречник кривине у тачки M, зна се да је

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 + rr''}$$

Помоћу тих елемената може се решавати велики број задатака у поларним координатама. Они се своде на обичне диференцијалне једначине између r и θ.

1) ...

2) ...

3) ...

1° Тип.

Одредити криве линије такве да између угла V и потега r постоји дата релација. Такви се задаци увек могу свести на условну једначину

$$\operatorname{tg} V = F(r)$$

где је F дата функција. Према једначини 1) тада је

$$\frac{r}{r'} = F(r)$$

или

$$r' = \frac{r}{F(r)}$$

или

$$\frac{r\,dr}{F(r)} = d\theta$$

одакле

$$\theta = \int \frac{r\,dr}{F(r)} + C$$

Кад је ова интеграција свршена, имаћемо једну релацију између r и θ која садржи једну произвољну константу C и која даје тражене криве. Константа ће бити прецизирана датим почетним условима који могу бити разне врсте.

Н. пр. нађи криве линије чија дирка у свакој тачки заклапа са потегом један сталан угао. Ако се тангента тога угла означи са λ биће

$$\frac{r}{r'} = \lambda$$

или

$$\frac{\lambda dr}{r} = d\theta$$

одакле

$$\theta = \lambda \log r + C$$

или

$$r = C e^{\frac{\theta}{\lambda}}$$

оваква једначина дефинише једну нарочиту врсту спирала.

2° Шип.

Одредити криве линије за које је угао између дирке и потега у датој релацији са поларним углом θ.

Имаћемо условну једначину

$$\operatorname{tg} V = F(\theta)$$

или према једначини 1)

$$\frac{r}{r'} = F(\theta)$$

одакле

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{F(\theta)}$$

или

$$\log r = \int \frac{d\theta}{F(\theta)} + C$$

или

$$r = C e^{\int \frac{d\theta}{F(\theta)}}$$

што је поларна једначина тражених кривих.

Н. пр. тражи се крива за коју је угао између дирке и потега ма које тачке пропорционалан поларном углу. Имаћемо једначину

$$\operatorname{tg} V = \lambda\theta$$

или

$$\frac{r}{r'} = \lambda\theta$$

одакле

$$\lambda \frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\theta}$$

а одатле

$$\lambda \log r = \log\theta + C$$

или

$$r = C\sqrt[\lambda]{\theta}$$

Те криве представљају једну врсту спирале, а специјалан им је случај Архимедова спирала којој одговара

$$\lambda = 1$$

и чија је једначина

$$r = C\theta$$

3° Тип.

Нека је угао V дата функција координата r и θ. Тада је

$$\operatorname{tg} V = F(r,\theta)$$

или

$$\frac{r}{r'} = F(r,\theta)$$

или

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{F(r,\theta)}$$

Задатак се дакле своди на једну диференцијалну једначину првог реда.

4° Тип.

Траже се криве за које је одстојање дирке од пола т.ј. OT дата функција координата.

Условна је једначина

$$OT = F(r, \theta)$$

Међутим је из слике

$$OT = OM \sin V$$

а пошто је

$$OM = r$$

$$\sin V = \frac{\operatorname{tg} V}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V}} = \frac{\frac{r}{r'}}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

то добијамо условну једначину:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+r'^2}} = F(r, \theta)$$

која је такође диференцијална једначина првог реда чијом интеграцијом добијамо тражене криве.

5° Тип.

Траже се криве за које је одстојање нормале од пола једна дата функција поларних координата.

Условна једначина је

$$ON = F(r, \theta)$$

Међутим из слике је

$$ON = OM \cos V$$

а пошто је

$$OM = r$$

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 V}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}} = \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}}$$

па је условна једначина

$$\frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}} = F(r, \theta)$$

и представља такође једну диференцијалну једначину првог реда чијом се интеграцијом добијају тражене криве.

6° Тип.

Одредити криве линије чији је лук дата функција потега.

Условна једначина је

$$s = F(r)$$

одакле је

$$ds = F'(r)\,dr$$

или

$$ds^2 = F'^2(r)\,dr^2$$

или према обрасцу 2)

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2 = F'^2(\theta)\,dr^2$$

или

$$d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{F'^2(r)-1}$$

одакле

$$\theta = C + \int \frac{dr}{r}\sqrt{F'^2(r)-1}$$

и то је поларна једначина тражених кривих.

Н. пр. траже се криве чији је лук пропорционалан потегу. Условна једначина је

$$s = \lambda r$$

одакле је

$$ds = \lambda\,dr$$

или

$$ds^2 = \lambda^2\,dr^2$$

или према обрасцу 2)

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \lambda^2\,dr^2$$

одакле

$$d\theta = \frac{dr}{r}\sqrt{\lambda^2-1}$$

а одатле

$$\theta = C + \sqrt{\lambda^2-1}\,\log r$$

или

$$r = C_1\, e^{\frac{\theta}{\sqrt{\lambda^2-1}}}$$

- дакле опет једна врста спирале. Као што се види задатак има смисла само ако је $\lambda > 1$ што је и иначе очевидно.

7° Пут.

Одредити криве линије за које је пут дата функција поларног угла.

Условна једначина је

$$s = F(\theta)$$

одакле је

$$ds = F'(\theta)\, d\theta$$

или

$$ds^2 = F'^2(\theta)\, d\theta^2$$

или према обрасцу 2)

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 = F'^2(\theta)\, d\theta^2$$

или

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = F'^2(\theta)$$

– дакле задатак се своди на диференцијалну једначину оваквог облика. Таква се једначина може интегралити у врло ретким случајевима као н. пр.

кад је

$$F(\theta) = a\theta + b$$

или

$$F(\theta) = a e^{k\theta} + b$$

и т. д.

Примена на геометријске задатке у простору.

Поменућемо пре свега неколико основних појмова из Аналитичке Геометрије у простору.

Једна површина дефинисана је једном релацијом облика

$$F(x,y,z)=0$$

Кроз једну дату тачку M на површини може се повући бескрајно много дирака. Геометријско место тих дирака јесте додирна раван површине у тачки M чија је једначина

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

где су x, y, z координате тачке M а X, Y, Z координате ма које тачке додирне равни.

Нормала на површини у тачки M јесте права која пролази кроз тачку M а управна је на додирној равни. Њене су једначине

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Једна крива у простору дефинисана је увек системом од две једначине н. пр.

$$F(x,y,z)=0$$
$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad 1)$$

Пројекција те криве у равни XOY добија се елиминацијом z-а из тих једначина. Ако је резултат те елиминације

$$\Theta(x,y)=0$$

то ће бити једначина пројекције у тој равни. Тако се исто пројекција у равни XOZ добија елиминацијом y-а, а пројекција у равни YOZ елиминацијом x-а из горњих двеју једначина.

Дирка на кривој 1) у њеној тачки (x,y,z) има за једначину

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

где ваља имати на уму да су dx, dy, dz везани релацијама

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0 \qquad 3)$$

које се добијају диференцирањем једначина 1).

Нормална раван у једној тачки M криве јесте раван кроз M управна на дирци у M. Она има за једначину

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0 \qquad 4)$$

где су dx, dy и dz опет везани релацијама 3).

Оскулаторна раван криве у тачки M јесте гранична раван која пролази кроз тачку M и њој две бескрајно блиске тачке M_1 и M_2 кад се ове стално бескрајно приближавати тачки M. Та раван има, као што је познато, за једначину

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \qquad 5)$$

Елеменат лука дате криве дефинисан је једначином

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad 6)$$

На послетку косинуси углова α, β и γ које гради дирка са координатним осовинама дефинисани су обрасцима

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$$
$$\cos\beta=\frac{dy}{ds} \qquad 7)$$
$$\cos\gamma=\frac{dz}{ds}$$

Помоћу ових елемената могу се склопити бескрајно разноврсни задаци који се своде на обичне диференцијалне једначине. Ми ћемо третирати неколико типова таквих задатака.

1° Тип.

Одредити на датој површини

$$\Phi(x,y,z)=0$$

криве у простору код којих постоји једна дата релација између лука и координата.

Условна се једначина може увек написати у облику

$$s=F(x,y,z)$$

одакле је

$$ds=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$$

Квадрирањем и помоћу обрасца 6) биће

$$dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)^2 \qquad 8)$$

Међутим dx, dy и dz везани су релацијом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial \Phi}{\partial z}dz=0 \qquad 9)$$

Из једначина 8) и 9) може се елиминисати један од диференцијала н. пр. dz и онда се добија као резултат једначина облика

$$M dx^2+N dx\,dy+P dy^2=0$$

где су M, N и P познате функције од x, y и z. Међутим z се може елиминисати помоћу једначине

$$\Phi(x,y,z)=0$$

тако да ће у M, N и P имати само x и y. Деобом са dx^2 добија се

$$P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+N\frac{dy}{dx}+M=0$$

а то је једна обична диференцијална једначина између x и y и ако је

$$Q(x,y,C)=0 \qquad 10)$$

њен интеграл, једначина 10) представља пројекцију тражених кривих у равни XOY. Скуп једначина 10) и $\Phi=0$ представља саме тражене криве на површини $\Phi=0$.

2° Тип.

На једној датој површини

$$\Phi(x,y,z)=0$$

одредити такву криву чије ће дирке са једном правом L градити један сталан угао λ.

Ако се права L узме за осовину Oz, онда λ није ништа друго до угао који граде дирке са осовином Oz. Према томе је условна једначина

$$\cos\lambda = k$$

где је k дати сталан број. Међутим према обрасцима 7) биће

$$\cos\lambda = \frac{dz}{ds}$$

одакле је

$$\frac{dz}{ds} = k$$

или

$$dz^2 = k^2 ds^2$$

или

$$dz^2 = k^2(dx^2+dy^2+dz^2)$$

или

$$k^2(dx^2+dy^2) + dz^2(k^2-1)=0 \qquad 11)$$

Међутим из једначине површине имамо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0 \qquad 12)$$

Из 11) и 12) можемо елиминисати један од диференцијала н. пр. dz па ће резултат бити облика

$$M dx^2 + N dx\,dy + P dy^2 = 0$$

где ће M, N и P бити функције од x и y пошто се z смени вредношћу израчунатом из једначине површине $\Phi=0$. Деобом са dx^2 добија се

$$P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + N\frac{dy}{dx} + P = 0$$

а то је обична диференцијална једначина првог реда и ако је

$$Q(x,y,C)=0$$

њен интеграл, он дефинише пројекцију тражених кривих у равни XOY, а саме криве дефинисане су скупом једначина

$$\Phi(x,y,z)=0$$
$$\Theta(x,y,C)=0$$

Н. пр. одредити на кугли

$$x^2+y^2+z^2=1$$

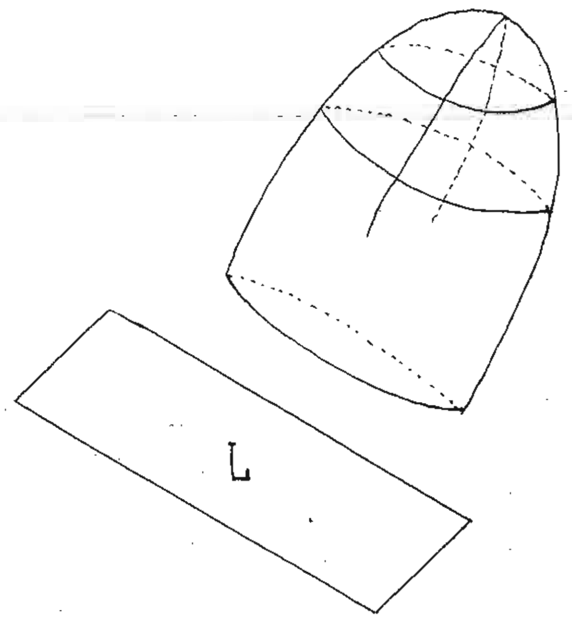
такву криву чија дирка са z-осовином
гради угао од 45°.

3° Тип: Линије највећег нагиба на површини.

Кад је дата једна површина

$$\Phi(x,y,z)=0$$

и једна утврђена раван L, па ту површину пресецамо равнинама паралелним равнини L, пресечне линије на површини називају се *нивоским линијама површине према равни L*. Под *линијама највећег нагиба* на површини са



према равни L разумеју се линије на површини управне на нивоске линије.

Питање је сад како се, кад је дата површина $\Phi=0$ и утврђена раван L одређују линије највећег нагиба према тој равни. Узмимо раван L за раван XOY. Тада су нивоске линије у равнинама које су паралелне равни XOY и према томе су једначине нивоских линија

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,y,z)&=0\\ z&=C\end{aligned}\right\}$$

Пројектујмо једну нивоску линију у раван XOY и уочимо у пројекцији једну тачку M. Повуцимо у M дирку на пројекцију нивоске линије а у исто време и на пројекцији линије највећег нагиба што кроз M пролази. Те се две линије секу под правим углом и према томе ако се коефицијенти правца означе: прве са λ друге са μ, биће

$$1+\lambda\mu=0 \qquad 14)$$

Међутим коефицијенат λ добија се кад се једначина $\Phi=0$ диференцијали тако да је

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=0$$

па се стави да је

$$z=C$$

према чему је

$$dz=0$$

Последња једначина тада постаје

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=0$$

и $\frac{dy}{dx}$ израчунато из ње даје λ, дакле

$$\lambda=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad 15)$$

Из једначина 14) и 15) добија се тада

$$\mu=-\frac{1}{\lambda}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad 16)$$

Ако сад x и y сматрамо као координате једне тачке пројекције линије највећег нагиба, онда се μ има сматрати као $\frac{dy}{dx}$ и једначина 16) тада прелази у једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

Десна страна је једна позната функција у којој можемо увек претпоставити да не фигурише, јер се оно може сменити својом вредношћу из једначине површине. Према томе једначина 17) биће једна диференцијална једначина облика

$$M\frac{dy}{dx} + N = 0$$

где су M и N функције x_a и y_a. Интеграцијом те једначине добиће се н. пр.

$$y = \varphi(x, C)$$

и та једначина представља пројекцију линије највећег нагиба у равни xoy саме те линије дефинисане су групом једначина

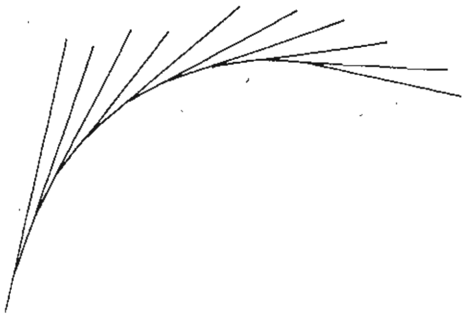
$$y = \varphi(x, C)$$
$$\Phi(x, y, z) = 0$$

Н. пр. одредити линију највећег нагиба за површину другог реда

$$z = axy$$

4° Тип: Линије кривина на површинама.

Ако се узму у опште две бескрајно блиске праве у простору, оне се у опште не могу сећи, према томе и ако се на једној површини уоче нормале у двема бескрајно блиским тачкама, оне се у опште не секу међу собом. Međутим на свакој површини постоје нарочите такве криве линије да се две и две нормале у бескрајно блиским тачкама међу собом секу. Криве на површини са таквом особином називају се линије кривина те површине. Отуда ова прва дефиниција линија кривине: то су такве криве линије на датој површини да се нормале у двема на којим бескрајно блиским тачкама те линије међу собом секу. Из те дефиниције лако се увиђа да нормале обавијају једну извесну криву линију у којој су оне дирке. Познато је међутим



да један систем правих које додирују једну исту криву у простору састављају једну развојну површину т.ј. површину која се може развити у једну раван. Отуда ова друга дефиниција линија кривина: то су такве криве на датој површини чије нормале образују једну развојну површину.

Питање је сад како се могу кад је дата површина

$$F(x,y,z)=0$$

одредити њене линије кривина. Опоменимо се пре свега овог податка из Аналитичке Геометрије: да би се две праве чије су једначине

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$

секле међу собом, потребно је и довољно да буде задовољен услов

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0$$

Применимо то на две међу собом бескрајно блиске нормале у тачки M и у њој бескрајно блиској тачки M'. Нормала у тачки M има за једначину

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Да би од те нормале прешли ка нормали у M' треба у горњој једначини сменити x са $x+dx$, y са $y+dy$, z са $z+dz$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ са $\frac{\partial F}{\partial x}+d\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ са $d\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ са $\frac{\partial F}{\partial z}+d\frac{\partial F}{\partial z}$. Према томе нормала у тачки M' имаће за једначину

$$\frac{X-x-dx}{\frac{\partial F}{\partial x}+d\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y-dy}{\frac{\partial F}{\partial y}+d\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z-dz}{\frac{\partial F}{\partial z}+d\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Према томе да би се те две нормале међу собом секле треба да буде

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x}+d\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}+d\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}+d\frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0$$

што се може написати у облику

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ d\frac{\partial F}{\partial x} & d\frac{\partial F}{\partial y} & d\frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}=0 \qquad 18)$$

Међутим диференцијалењем имамо

$$d\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dz$$

$$d\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dz$$

$$d\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz$$

Заменом тих вредности у једначини 18) и пошто ту детерминанту развијемо добијамо израз облика

$$A\,dx^2+B\,dx\,dy+C\,dy^2+D\,dx\,dz+ \\ +E\,dy\,dz+F\,dz^2=0 \qquad 19)$$

Ако из једначине 19) и једначина

$$F(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

елиминишемо z и dz, једначина 19) добија облик

$$M\,dx^2+N\,dx\,dy+Q\,dy^2=0$$

где су M, N и Q функције само x-а и y-а. Деобом са dx^2 добија се

$$Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+N\frac{dy}{dx}+M=0$$

и то је диференцијална једначина линија кривина на површини и она је као што се види првог реда. Њеном интеграцијом налази се н. пр.

$$y=\lambda(x,C)$$

и та једначина представља пројекцију линија кривина у равни XOY. Саме те линије дефинисане су једначинама

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ y=\lambda(x,C) \end{array}\right\}$$

Н. пр. одредити линије кривина на површини другог реда

$$z = axy.$$

Примедба: Има површина код којих се линије кривина могу одредити геометријски без икакве интеграције. Такав је случај н. пр.:

1° за ротационе површине линије кривина су паралелни кругови, јер се све нормале у њима секу на обртној осовини и меридијански пресеци дуж којих се нормале опет секу;

2° за развојне површине линије кривина су генератрисе и линије на површинама управне на генератрисама.

Практично упутство за одређивање линија кривина на дату површини

$$F(x,y,z)=0$$

било би ово: Треба формирати изразе

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, d\frac{\partial F}{\partial x}, d\frac{\partial F}{\partial y}, d\frac{\partial F}{\partial z}$$

и помоћу њих формирати једначину (18) развити детерминанту, па из добијених резултата и једначина

$$F(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

елиминисати z и dz. Резултат ће бити известна диференцијална једначина првог реда између x и y и то ће бити диференцијална једначина линија кривина.

5° Тип: Асимптотне линије површина.

Ако се на једној површини уочи једна произвољна тачка, у њој уочимо једну ма какву произвољну криву линију, додирна раван површине у тачки M и оскулаторна раван те криве у тачки M у опште се неће међу собом поклапати. Међутим за извесне нарочите криве линије ове површине те се две равни поклапају. Такве криве линије називају се асимптотним кривим линијама површина. Према томе имали би овакву дефиницију асимптотних линија: то су на датој површини такве линије да се за ма коју тачку на њој додирна раван површине у тој тачки и оскулаторна раван криве у тој тачки међу собом поклапају.

Питање је сад како се могу, кад је дата површина

$$F(x,y,z)=0$$

одредити њене асимптотне линије. Опоменимо се пре свега да додирна раван површине у тачки $M(x,y,z)$ има једначину

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0 \qquad 20)$$

Уочимо сад две бескрајно блиске тачке M' и M'' које су такође бескрајно блиске и тачки M. Нека су $x+dx, y+dy, z+dz$ координате тачке M', а $x+dx+d^2x$, $y+dy+d^2y$, $z+dz+d^2z$ координате тачке M''. Изразити да се оскулаторна раван поклапа са додирном равнином значи изразити да тачке M' и M'' задовољавају једначину 20). Отуда ова два услова

$$(X-x-dx)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y-dy)\frac{\partial F}{\partial y}+(Z-z-dz)\frac{\partial F}{\partial z}=0 \qquad 21)$$

$$(X-x-dx-d^2x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y-dy-d^2y)\frac{\partial F}{\partial y}+$$
$$+(Z-z-dz-d^2z)\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{22}$$

Водећи рачуна о једначини 20) једначине се 21) и 22) упрошћавају и постају: једначина 21) постаје

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

и не казује ништа ново пошто је та једначина идентички задовољена диференцирањем једначине површине

$$F(x,y,z)=0$$

Једначина се 22) своди на

$$\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z=0 \tag{23}$$

и у тој једначини садржан је прави услов за поклапање додирне са оскулаторном равни. Међутим поновним диференцирањем једначине

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

добија се

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y+\frac{\partial F}{\partial z}d^2z\right]+\left[Mdx^2+Ndy^2+\right.$$
$$\left.+Pdz^2+Q\,dx\,dy+R\,dx\,dz+S\,dy\,dz\right]=0 \tag{24}$$

где су M, N, P, Q, R и S функције x_a, y_a и z_a. Прва заграда у једначини 24) је сама по себи равна нули због једначине 23). Према томе једначина се 24) своди на

$$Mdx^2+Ndy^2+Pdz^2+Q\,dx\,dy+R\,dx\,dz+S\,dy\,dz=0$$

ако из ње и из једначина

$$F(x,y,z)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

елиминишемо z и dz, добија се извесна једначина облика

$$K\,dx^2+H\,dx\,dy+L\,dy^2=0$$

или

$$L\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+H\frac{dy}{dx}+K=0$$

и то је тражена диференцијална једначина асимптотних линија на површини и она је као што се види првог реда. Њеном се интеграцијом добија н. пр.

$$y=\lambda(x,C)$$

што ће представљати пројекцију асимптотних линија у равни XOY. Саме ове линије дефинисане су скупом једначина

$$\left.\begin{array}{r}F(x,y,z)=0\\ y=\lambda(x,C)\end{array}\right\}$$

Н. пр. одредити асимптотне линије за површину

$$z=axy.$$

Практично упутство: да би се одредиле асимптотне линије површине

$$F(x,y,z)=0$$

треба формирати једначину

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

диференцијалити ју и у добијеној једначини избрисати скуп свију чланова што садрже d^2x, d^2y и d^2z. Из тако добијене једначине и предњих двеју једначина елиминисати z и dz, па поделити резултујућу једначину са са онолиним степеном од dx који буде највећи. Резултат ће бити извесна диференцијална једначина првог реда по x и y и то је диференц. једначина тражених асимптотних линија.

6. Тип: Геодезијске линије површина.

Ако се на датој површини уочи једна тачка M и кроз њу повуче једна произвољна крива, онда у општем осгулаторна раван криве у тачки M не садржи нормалу површине у тој тачки M. Међутим постоје нарочите криве линије у свакој површини такве да нормала на површину у једној ма којој тачки криве лежи у осгулаторној равни те криве у тој тачки. Такве нарочите криве на датој површини зову се геодезиским линијама на површини. Као што ће се видети кроз ма који пар тачака на површини пролази по једна таква линија. Ове криве имају ту особину да оне у опште представљају најкрај пут којим се може прећи од једне тачке површине на другу (осим ретких изузетака).

Питање је сад како се могу за једну дату површину

$$F(x,y,z)=0$$

одредити њене геодезиске линије. Из геометрије је познато да, да би једна права, чије су једначине

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

лежала у равни

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0$$

потребно је и довољно да буде задовољен услов

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}=0$$

применимо то на нормалу и оскулаторну раван. Једначине нормале су као што се зна

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

а једначина оскулаторне равни је

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0$$

према томе услов да нормала лежи у оскулаторној равни изражен је овом детерминантом

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \qquad 25)$$

Ако сад једначину $F=0$ диференцирамо два пута узастопце, добијају се две једначине које садрже $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$. Из тих двеју једначина и једначине $F=0$ можемо израчунати z, dz и d^2z и сменити их у једначини 25). Кад се

детерминанта буде развијена и подеље-
на потребним степеном од dx, добиће
се извесна једначина која садржи x,
y, $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ и то ће бити тражена ди-
ференцијална једначина геодезијских
линија на површини. Она је као што се
види другог реда и према томе има
као интеграл

$$y = \lambda(x, C_1, C_2)$$

Ова последња једначина представља
пројекцију геодезијских линија у равни
XOY. Пошто она садржи две интегра-
ционе константе C_1 и C_2, то су потреб-
на два услова за потребну потпуну
одредбу таквих линија. Таква се два
услова добијају н. пр. тражећи да
геодезиска линија пређе кроз две
дате тачке на површини. Саме геоде-
зиске линије су одређене скупом јед-
начина

$$\left.\begin{array}{l} y = \lambda(x, C_1, C_2) \\ F(x, y, z) = 0 \end{array}\right\}$$

Практично упутство: треба о-
бразовати парцијалне изводе $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$,
$\frac{\partial F}{\partial z}$ и помоћу њих образовати једначи-
ну 25). Диференцијалити два пута јед-
начину $F=0$ и из тих двеју једначина,
једначине 25) и једначине $F=0$ елими-
нисати z, dz и d^2z. Поделити резул-
тујућу једначину са потребним сте-
пеном од dx, па се добија извесна
диференцијална једначина другог
реда и то ће бити тражена ди-
ференцијална једначина геодезиских
линија на површини.

Примедба: За куглу су гео-
дезиске линије кругови који спајају
две тачке; за развојне површине то су
линије које кад се површина развије
у раван постају праве.