Prirodno-matematički fakultet

Univerzitet u Beogradu

LAMINARNI GRANIČNI SLOJ NA TANKIM OBRTNIM TELIMA

(doktorska disertacija)

Magistar mehanike
VLADAN D. DJORDJEVIĆ,

diplomirani mašinski inženjer

asistent Mašinskog fakulteta
u Beogradu

SADRŽAJ

PREGLED VAŽNIJIH OZNAKA I SIMBOLA

s, $r = r_0(x)+y$ – cilindrične koordinate

V_s, V_r – projekcije brzine u pravcima s i r

x, y – koordinate teorije graničnog sloja

u, v – projekcije brzine u pravcima x i y

p – pritisak

ρ – gustina

ν – koeficijent kinematičke viskoznosti

μ – koeficijent dinamičke viskoznosti

$r_0(x)$ – poluprečnik poprečnog preseka tela

a – poluprečnik poprečnog preseka kružnog cilindra

L – karakteristična dimenzija tela

$U(x)$ – brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja

$\tau_w(x)$ – tangencijalni napon na površini tela

$c_f = \dfrac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ – lokalni koeficijent otpora

$\delta(x)$ – debljina graničnog sloja

$\delta_1(x)$ – debljina istiskivanja

$\delta_2(x)$ – debljina pada impulsa

$A_1(x)$ – površina istiskivanja

$A_2(x)$ – površina pada impulsa

$\xi, \eta, \zeta, \varphi$ – nove promenljive

$\psi(x,y)$ – strujna funkcija

$F(\xi,\eta), W(\xi,\varphi)$ – bezdimenzione strujne funkcije

$\alpha(\xi)$ – pomoćna glavna funkcija

$\beta(\xi)$ – glavna funkcija

$\gamma(\xi)$ – nova glavna funkcija

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 0, 1/2, 1, \ldots)$ – koeficijenti redova za odgovaraju-će glavne funkcije

$\Delta(\xi)$ – karakteristični parametar

a_i, r_i, s_i $(i = 0, 1/2, 1, \ldots\ldots)$ – koeficijenti redova za $U(x), r_o(x)$ i $\Delta(\xi)$

$x, y, z, \eta, \zeta, \varphi$ – odgovarajući parcijalni izvodi

$'$ – odgovarajući obični izvod

Objašnjenje ostalih oznaka i simbola dato je u tekstu.

1. UVOD

Kada je 1904.g. PRANDTL izveo svoje poznate jednačine graničnog sloja, uprostivši na taj način, u velikoj meri komplikovane i nedostupne za rešavanje opšte jednačine NAVIER-STOKES-a, stvorile su se vrlo povoljne mogućnosti za rešavanje čitavog niza praktično veoma značajnih, ali do tada nerešenih problema, tako da je teorija graničnog sloja, za nekoliko decenija svoga postojanja, doživela izvanredno veliki napredak, razvivši se za to vreme u potpuno samostalnu oblast opšte mehanike fluida.

Prvo egzaktno rešenje PRANDTLovih jednačina dao je BLASIUS 1907.g. pri rešavanju problema opstrujavanja ravne ploče i tada je prvi put u istoriji mehanike fluida tačno izračunat otpor trenja. Zatim je dobijeno još mnogo takvih rešenja, kao što su na pr. rešenja automodelnih strujanja, kod kojih su profili brzina medjusobno slični, zatim rešenja BLASIUS-HOWARTHa, koja su se odnosila na probleme opstrujavanja simetričnih tela cilindričnog oblika itd., pri čemu se sve više uvidjala neophodnost da se stvori jedna opšta metoda, koja bi se mogla primeniti i kod opstrujavanja tela proizvoljnog oblika, uz minimalni broj relativno prostih računskih operacija u svakom konkretnom slučaju. Takvu metodu, koja je zadovoljavala sve stroge matematičke zahteve, a pored toga je bila i veoma jednostavna sa gledišta primene u praksi, dao je 1957. g. GÖRTLER (4). Njome su bili obuhvaćeni svi praktično značajni ravanski problemi nestišljivog graničnog sloja. 1960.g. je [illegible]NOV (3) metodu GÖRTLERa proširio i na slučaj osnosimetričnih problema kod kojih je odnos debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela mnogo manji od jedinice. To proširivanje je izvršeno korišćenjem transformacija MANGLER-STEPANOVa, kojima su jednačine osnosimetričnog graničnog sloja, za slučaj malog odnosa debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela, svode na jednačine ravanskog problema.

Medjutim, praktično veliki značaj imaju i oni osnosimetrični problemi kod kojih pomenuti odnos nije mnogo manji od jedinice, nego je reda veličine jedinice, ili čak veći od nje, kao što su na pr. problemi opstrujavanja izduženih i vrlo tankih obrtnih tela. Kod ovih problema ne važe transformacije MANGLER-STEPANOVa i njima odgovarajuće jednačine se ne mogu svesti na jednačine ravanskog graničnog sloja. Prema tome, da bi se kompletirala rešenja opštih jednačina osnosimetričnog graničnog sloja, neophodno je da se, na isto tako zadovoljavajući način kao što je to postignuto u [3], reše i problemi kod kojih je odnos debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela potpuno proizvoljan. To, upravo, predstavlja cilj ovog rada.

Istina, kada se govori o praktičnom značaju problema opstrujavanja tankih obrtnih tela, onda prvenstveno treba imati na umu njihovo opstrujavanje stišljivim fluidom. Mi smo se u ovome radu ograničili samo na probleme strujanja nestišljivog fluida, ali radovi PROBSTEIN-ELLIOTTa [9], PAIa [10], WRAGGa [19], YASUHARAa [20] i WEIa [21] ukazuju na to, da bi se slična metoda mogla formulisati i u slučaju strujanja stišljivog fluida i to kako pri nadzvučnim, tako i pri hiperzvučnim brzinama. Pored toga, jedan naš raniji rad [22], a takodje i rad BOURNE-DAVIESa [23] ukazuju na mogućnost relativno jednostavnog izračunavanja temperaturskog polja pri strujanju nestišljivog fluida.

Za slučaj odnosa debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela manjeg od jedinice, rešenje problema je dobijeno uopštavanjem promenljivih SALJNIKOVa [3], pri čemu se, razume se, njegovo rešenje dobija kao poseban slučaj ako je pomenuti odnos mnogo manji od jedinice. U slučaju kada je odnos debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela veći od jedinice, uvedene su sasvim nove promenljive, a rešenje je dato u vidu jednog asimptotskog reda, čiji je specifični oblik uslovljen logaritamskim ponašanjem profila brzine u blizini tela. Pri tome je, pored već poznate tzv. "glavne" funkcije $\beta(\xi)$ (3), uvedena još jedna "glavna" funkcija $\gamma(\xi)$, u kojoj je sadržan uticaj promene poprečne krivine tela.

Pored toga, izvedeni su neki opšti zaključci koji slede iz ovih jednačina osnosimetričnog graničnog sloja i definisana su njihova slična rešenja.

Na kraju je izložena metoda primenjena u nekoliko praktično značajnih primera, a u dodacima su dati numerički rezultati dobijeni pri njihovom izračunavanju i postavljene su jednačine za univerzalne funkcije.

Za rukovodjenje disertacijom, kao i za veliku pomoć koju mi je ukazao ne samo ovoga puta, želim da se zahvalim prof. Dr. Viktoru Saljnikovu.

Za celokupno sprovedeni rad na elektronskoj računskoj mašini, zahvaljujem se Dipl. Math. Velimiru Simonoviću, Dipl. Ing. Grigoriju Grnilović i Dipl. Ing. Draganu Živkoviću, koji su uložili vrlo veliki trud u uslovima još nedovoljno razvijenog rada na elektronskim računarima kod nas.

Takodje se zahvaljujem savetu Matematičkog instituta u Beogradu, koji je obezbedio neophodna materijalna sredstva za dobijanje numeričkih rezultata.

2. IZVODJENJE OSNOVNIH JEDNAČINA

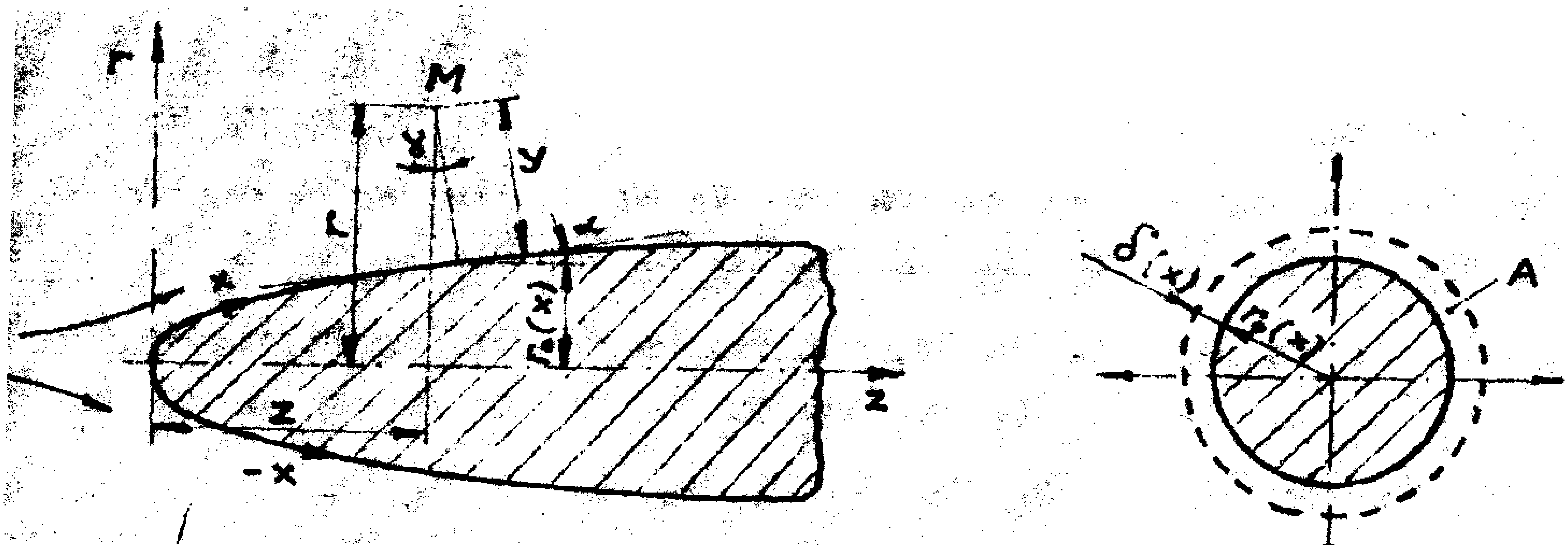
Pri stacionarnom, osnosimetričnom strujanju nestišljivog fluida jednačine NAVIER-STOKES-a i jednačina kontinuiteta glase:

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$

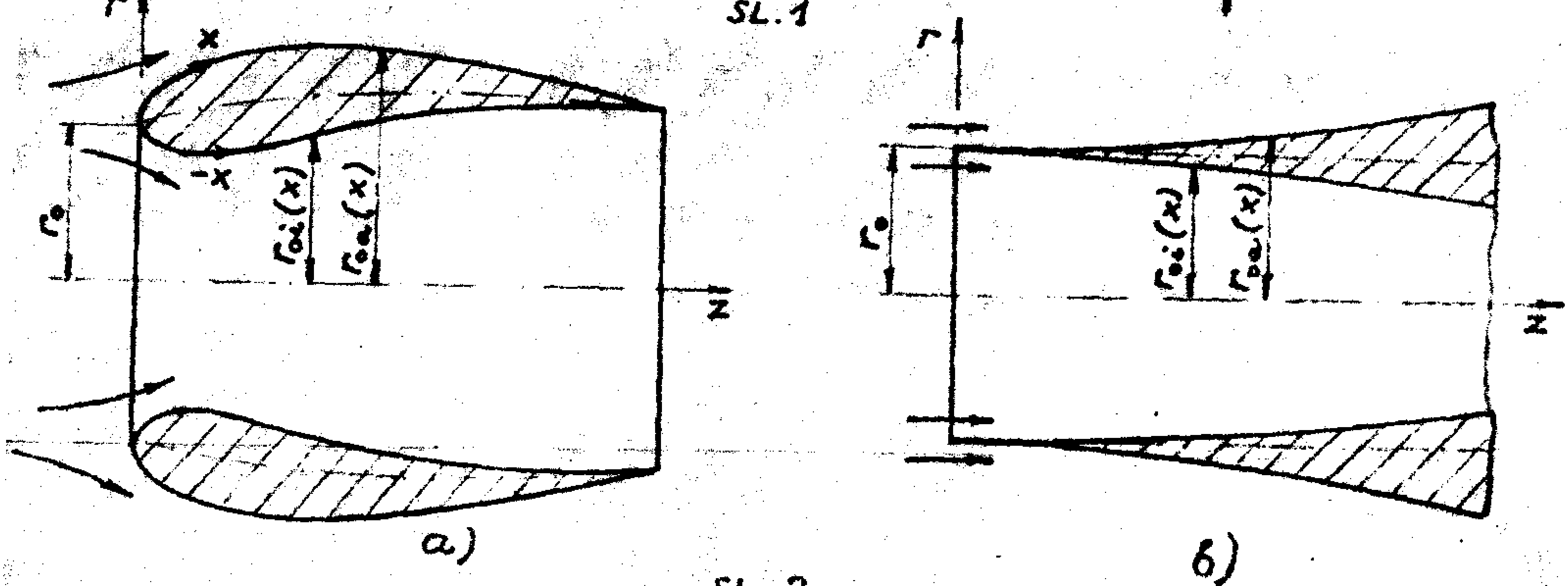
$$v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2}\right) \quad \ldots (1)$$

$$\frac{\partial (r v_z)}{\partial z} + \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0$$

Sistem (1) odredjuje nam pr. polje brzine i polje pritiska pri opstrujavanju u pravcu ose z jednog punog obrtnog tela proizvoljnog oblika prikazanog na slici 1, ili prstenastih obrtnih tela, takodje proizvoljnog oblika, prikazanih na slici 2.



SL. 1



SL. 2

Pretpostavićemo da su poznata tela jako izdužena, odnosno smatraćemo da je ugao α, koji tangenta povučena na meridijanski presek u proizvoljnoj tački gradi sa osom x, mali. Ova pretpostavka neće biti opravdana kod tela koja počinju zaustavnom tačkom (sl.1) u neposrednoj njenoj okolini i naročito u blizini vrha punog obrtnog tela ili prednje ivice protočnog obrtnog tela kod koga je prednji ugao nagiba konture prema osi x blizak $\pi/2$. Medjutim, u teoriji graničnog sloja je poznato ((1) str.142) da netačnost rešenja u oblasti u kojoj dolazi do stvaranja graničnog sloja, ima vrlo malo uticaja na njegov dalji razvitak nizvodno. Zbog toga ćemo smatrati da je pretpostavka o veličini ugla α opravdana sa dovoljno tačnosti kod svih obrtnih tela koja nalaze primenu u aerodinamici. Pored toga, u teoriji graničnog sloja, bez obzira da li se radi o ravanskom ili osnosimetričnom strujanju, uobičajeno je da se pretpostavi da je debljina graničnog sloja zanemarljivo mala u odnosu na poluprečnik uzdužne krivine tela (poluprečnik krivine meridijanskog preseka u slučaju opstrujavanja obrtnih tela) i da on predstavlja neprekidnu funkciju koordinate x, odnosno da telo nigde ne raspolaže oštrom ivicom. Ova pretpostavka ekvivalentna je zanemarivanju uticaja uzdužne (longitudinalne) krivine tela na razvitak graničnog sloja.

Ako je ugao α mali, onda se projekcije brzine V_s i V_r mogu zameniti projekcijama u i v, a diferenciranje po s i r, diferenciranjem po x i y. Takodje se može staviti da je $r = r_0(x) + y$. Sistem (1) će postati:

$$uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu\left(u_{xx} + u_{yy} + \frac{1}{r_0+y}u_y\right)$$

$$uv_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p_y + \nu\left[v_{xx} + v_{yy} + \frac{1}{r_0+y}v_y - \frac{v}{(r_0+y)^2}\right] \quad \dots (2)$$

$$\left[(r_0+y)u\right]_x + \left[(r_0+y)v\right]_y = 0$$

Da bi se dobile jednačine teorije graničnog sloja, potrebno je da se jednačine (2) napišu u bezdimenzionom obliku na taj način, što će se uvesti konstantne razmere X i U_∞ za koordinatu x, odnosno brzinu u i iz njih izvesti razmera za pritisak p: $P = \rho U_\infty^2$, a takodje i razmere za koordinatu y i brzinu v: $Y = X/\sqrt{Re}$ i $V = U_\infty/\sqrt{Re}$, gde je $Re = U_\infty X/\nu$ – Rejnoldsov broj. Kada se to učini, potražiće se rešenja sistema (2) u vidu potencijalnih redova po stepenima malog parametra $1/\sqrt{Re}$. Za prve članove tih redova dobiće se baš jednačine teorije graničnog sloja. One će, sa istim oznakama sa kojima su napisane jednačine (2), u dimenzionom obliku glasiti:

$$uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu\left(u_{yy} + \frac{1}{r_0+y}u_y\right)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}p_y \qquad \ldots (3)$$

$$\left[(r_0+y)u\right]_x + \left[(r_0+y)v\right]_y = 0$$

ili, ako se uvede brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja $U(x)$:

$$uu_x + vu_y = UU' + \nu\left(u_{yy} + \frac{1}{r_0+y}u_y\right)$$

$$\left[(r_0+y)u\right]_x + \left[(r_0+y)v\right]_y = 0 \qquad \ldots (4)$$

Jednačine (3) ne sadrže nikakvu pretpostavku u pogledu veličine odnosa debljine graničnog sloja $\delta(x)$ i odgovarajućeg poluprečnika poprečnog preseka tela (poprečne, transverzalne krivine tela) $r_0(x)$. On, dakle, može biti proizvoljan. Ukoliko bi se učinila dopunska pretpostavka da je pomenuti odnos mnogo manji od jedinice, jednačine (3) bi mogle, pošto je $y \leq \delta(x)$, da se uproste utoliko što bi se stavilo da je $r_0 + y(x) \approx r_0(x)$, a pored toga, u jednačini kretanja bi mogao da se zanemari član u_y/r_0 u odnosu na znatno veći član u_{yy}. Tako uprošćene jednačine bi glasile:

$$uu_x + vu_y = UU' + \nu u_{yy}$$

$$(r_0u)_x + (r_0v)_y = 0 \qquad \ldots (5)$$

U jednačinama (5), prema tome, pored pretpostavke o zanemarivanju uticaja uzdužne krivine tela, održana je još i pretpostavka da je: $\delta(x)/r_o(x) \ll 1$. U literaturi je uobičajeno [9] da se ova poslednja pretpostavka identifikuje sa pojmom zanemarivanja poprečne (transverzalne) krivine tela. Zbog jednostavnosti izražavanja mi ćemo ovakvu identifikaciju prihvatiti, mada smatramo da ona nije u potpunosti opravdana, zbog toga što poprečna krivina, odredjena poluprečnikom poprečnog preseka $r_o(x)$, ipak ulazi u račun u jednačinama (5), za razliku od na pr. poluprečnika uzdužne krivine tela, koji se nigde ne uzima u obzir. Pomenuta pretpostavka nije, medjutim, uvek u potpunosti opravdana. Naime, u aerodinamici veliku praktičnu primenu nalaze vrlo izdužena i tanka obrtna tela. Kod njih je tačka odvajanja graničnog sloja pomerena znatno nizvodno i debljina graničnog sloja, naročito u njenoj okolini, narasta do te mere da postaje reda veličine odgovarajućeg poluprečnika poprečnog preseka tela, ili čak veća od njega. Ova pojava naročito dolazi do izražaja kod graničnih slojeva koji se uopšte ne odvajaju i o kojima će biti reči kasnije. Posebno kod prstenastih obrtnih tela (sl. 2) pri proračunu spoljašnjeg graničnog sloja ($r_{oa}(x)$) mogućnost da odnos $\delta(x)/r_o(x)$ postane reda veličine jedinice je mala, ali je zato veoma realna pri proračunu unutrašnjeg graničnog sloja ($r_{oi}(x)$).

Neopravdanost pretpostavke o zanemarivanju uticaja poprečne krivine tela u pojedinim slučajevima strujanja, naročito se jasno može uočiti na primeru podužnog opstrujavanja polubeskonačnog kružnog cilindra. U tome slučaju je: $r_o(x) = a = \text{const.}$, pa sistem (5) prelazi u:

$$uu_x + vu_y = UU' + \nu u_{yy}$$

$$u_x + v_y = 0 \qquad \ldots (5')$$

Dobijene jednačine, medjutim, predstavljaju osnovne jednačine pri ravanskom strujanju([1] str.23), pa se tako, na pr., u slučaju strujanja sa gradijentom pritiska jednakim nuli, rešenje opstrujavanja kružnog cilindra svodi se na poznato Blasiusovo rešenje opstrujavanja ravne ploče, što može imati smisla jedino ako je poluprečnik cilindra beskonačno veliki!

Jednačine (5), uz granične uslove:

za $y = 0$ $u = v = 0$

za $y \to \infty$ $u \to U(x)$

koji ostaju nepromenjeni i pri tretiranju jednačina (4), rešene su u najopštijem slučaju strujanja (3), a to znači pri opstrujavanju tela proizvoljnog oblika odredjenog poluprečnikom poprečnog preseka $r_0(x)$, proizvoljnim rasporedom brzina $U(x)$ na spoljašnjoj granici graničnog sloja. Cilj ovoga rada je da se u isto tako opštem slučaju strujanja reše jednačine (4) i da se na taj način odredi uticaj poprečne krivine tela na razvitak graničnog sloja.

Medjutim, do nekih čisto kvalitativnih zaključaka u pogledu uticaja poprečne krivine može se doći i bez prethodnog integraljenja osnovnih jednačina (4).

§ 3. NEKE OSOBINE OSNOVNIH JEDNAČINA

Iz osnovnih jednačina (3) sledi da je:

$$\mu (u_{yy})_{y=0} = p'(x) - \tau_w(x)/r_0(x) \qquad \ldots (6)$$

gde je $\tau_w(x) = \mu (u_y)_{y=0}$ – tangencijalni napon na površini tela.

Odgovarajuća veza u slučaju ako bi odnos $\delta(x)/r_0(x)$ bio mnogo manji od jedinice dobila bi se iz jednačina (5) i glasila bi:

$$\mu (u_{yy})_{y=0} = p'(x) \qquad \ldots (7)$$

U jednačinama (6) i (7) izdvojili smo član $\mu (u_{yy})_{y=0}$ na leve strane zbog toga što imamo nameru da proanaliziramo uticaj poprečne krivine tela na položaj tačke odvajanja graničnog sloja. Ustvari član $(u_{yy})_{y=0}$ karakteriše krivinu profila brzine na telu, medjutim poznato je ((2) str. 114) da do odvajanja graničnog sloja ne može doći u tačkama u kojima je profil brzine na telu konveksan, odnosno u kojima je $(u_{yy})_{y=0} < 0$, nego samo u tačkama u kojima je $(u_{yy})_{y=0} > 0$, tj. u kojima profil raspolaže prevojnom tačkom. Iz jednačine (7) sledi da je znak krivine profila brzine na telu uvek jednak znaku gradijenta pritiska, što znači da u slučaju $\delta(x)/r_0(x) \ll 1$, do odvajanja graničnog sloja može doći jedino u oblasti usporenog strujanja, odnosno u oblasti u kojoj pritisak raste nizvodno. Takodje je poznato ((2) str. 142) da je granični sloj u stanju da savlada bez odvajanja veoma male pozitivne gradijente pritiska.

Nešto drukčije stoji stvar kod graničnog sloja na tankim telima kod kojih mora da se uzme u obzir uticaj poprečne krivine tela. Iz jednačine (6), pošto je za svako x $\tau_w(x) > 0$, sledi da je za

$$0 < p'(x) \leq \tau_w(x)/r_0(x),$$

$(u_{yy})_{y=0} \leq 0$, što znači da i pored pozitivnog gradijenta pritiska profil brzine nema prevojnu tačku i ne postoji opasnost da dodje do odvajanja graničnog sloja. Do odvajanja može doći jedino u oblasti u kojoj je $\dot{p}(x) > \tau_w(x)/r_0(x)$. Prema tome, za granični sloj na tankim obrtnim telima može se reći da je otporniji prema delovanju porasta pritiska nizvodno, pa se može očekivati da će i tačka odvajanja biti pomerena nizvodno. Delovanje poprečne krivine tela na položaj tačke odvajanja je, prema tome, veoma povoljno.

Iz osnovnih jednačina se takodje mogu izvesti i neki opšti zaključci u vezi sa veličinom tangencijalnog napona na površini tela. Desna strana prve od jednačina (1) može se napisati u obliku:

$$-\frac{1}{\varrho}\left[\dot{p}(x) - \frac{\mu}{r_0 \cdot y} u_y\right] + \nu u_{yy}.$$

dok bi se u slučaju zanemarenog uticaja poprečne krivine dobilo:

$$-\frac{1}{\varrho}\dot{p}(x) + \nu u_{yy}.$$

Iz uporedjivanja ova dva izraza sledaje da uvek pozitivni član $\frac{\mu}{r_0 \cdot y} u_y$ u jednačinama (3) deluje tako, što smanjuje onaj gradijent pritiska koji bi se imao u slučaju da se zanemari uticaj poprečne krivine tela. Prema tome, strujanje pri proizvoljnom odnosu debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela, odredjeno jednačinama (3), odnosno (4), ponaša se kao strujanje sa manjim gradijentom pritiska, kod kogа je pomenuti odnos mnogo manji od jedinice. S obzirom da se pri smanjenju gradijenta pritiska tangencijalni napon na površini tela povećava, sledaje da će jednačine (3) dati nešto veću vrednost za tangencijalni napon, a samim tim i za otpor tela, od one koja bi se dobila pri integraljenju jednačina (5).

Pošto će nam kasnije biti potrebni izrazi za debljinu istiskivanja i debljinu pada impulsa daćemo ih na ovome mestu. Ustvari, kada se uzima u obzir uticaj poprečne krivine tela, celishodnije je ([1] str.163) upotrebljavati izraze za tzv. površinu istiskivanja A_1 i površinu pada impulsa A_2:

$$A_1 = 2\int_{r_0(x)}^{\infty}\left(1-\frac{u}{U}\right)r\,dr = 2\bar{u}\int_{0}^{\infty}\left(1-\frac{u}{U}\right)(r_0+y)\,dy \qquad \ldots(8)$$

$$A_2 = 2\bar{u}\int_{r_0(x)}^{\infty}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)r\,dr = 2\bar{u}\int_{0}^{\infty}\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)(r_0+y)\,dy \qquad \ldots(9)$$

Debljina istiskivanja δ_1 i debljina pada impulsa δ_2 povezane su sa izrazima (8) i (9) na sledeći način (sl.1):

$$A_1 = \bar{u}\left[(r_0+\delta_1)^2 - r_0^2\right]$$

$$A_2 = \bar{u}\left[(r_0+\delta_2)^2 - r_0^2\right]$$

§ 4. PREGLED I KOMENTAR RANIJIH RADOVA

U oblasti teorije graničnog sloja pri osnosimetričnom strujanju, u najvećem broju radova zanemaruje se uticaj poprečne krivine tela i rešavaju se jednačine (5). Razlog za to leži u činjenici da se jednačine (5) mogu pomoću poznatih transformacija MANGLER-STEPANOVA ([2] str.148) svesti na jednačine ravanskog problema. Ove transformacije su omogućile primenu mnogih metoda, razradjenih za proračun ravanskih problema, kod osnosimetričnih. Tako na pr. radovi FRÖSSLING-SCHOLKEMEYER-a ([1] str.144) predstavljaju primenu kod osnosimetričnih problema poznate metode BLASIUS-HOWARTH-a ([1] str.78), dok rad SALJNIKOVa (3) predstavlja primenu metode GÖRTLER-a (4). Pošto je rad SALJNIKOVa najopštiji, jer su njime obuhvaćena tela proizvoljnog oblika i raspored brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja je takodje proizvoljan, a pored toga je konvergencija redova koji predstavljaju rešenje problema znatno bolja od konvergencije redova u radovima FRÖSSLING-SCHOLKEMEYER-a, zadržaćemo se na njegovoj analizi detaljnije, tim pre, što u našem radu imamo u vidu upravo proširenje metode GÖRTLER-a na slučaj osnosimetričnih problema kod kojih se ne može zanemariti uticaj poprečne krivine tela.

Umesto promenljivih x i y u jednačine (5) uvedene su promenljive ξ i η na sledeći način:

$$\xi = \frac{1}{\nu^2}\int_0^x U r_0^2\,dx \qquad \eta = \frac{U r_0 y}{\nu\sqrt{2\xi}} \qquad \ldots(10)$$

a umesto strujne funkcije $\psi(x,y)$, odredjene izrazima:

$$r_0 u = \psi_y \qquad r_0 v = -\psi_x \,,$$

uvedena je bezdimenziona strujna funkcija $F_0(\xi,\eta)$ na sledeći način:

$$\psi(x,y) = \nu\sqrt{2\xi}\,F_0(\xi,\eta) \qquad \ldots(11)$$

Za nju je dobijena tada diferencijalna jednačina:

$$F_{o\eta\eta\eta} + F_o F_{o\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_{o\eta}^2) = 2\xi(F_{o\eta} F_{o\xi\eta} - F_{o\xi} F_{o\eta\eta}) \quad ...(12)$$

sa univerzalno formulisanim graničnim uslovima:

za $\eta = 0$ $\quad F_o = F_{o\eta} = 0$

za $\eta \to \infty$ $\quad F_{o\eta} \to 1$

U jednačini (12) je:

$$\beta(\xi) = \frac{2\xi L^2 U'}{U^2 r_o^2} \quad ...(13)$$

tzv. glavna funkcija i kojoj su jedino skoncentrisani podaci karakteristični za svaki pojedini problem: $U(x)$ i $r_o(x)$.

Zatim je pokazano da se kod svih praktično značajnih osnosimetričnih problema glavna funkcija $\beta(\xi)$ može predstaviti u jednom od sledeća dva oblika:

$$\beta(\xi) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + ... \quad ...(14)$$

$$\beta(\xi) = \beta_0 + \beta_{\frac{1}{2}} \xi^{1/2} + \beta_1 \xi + \beta_{\frac{3}{2}} \xi^{3/2} + ... \quad ...(15)$$

Oblik (14) odgovara prstenastim obrtnim telima sa oštrom prednjom ivicom (sl.2b), pri čemu je $\beta_0 = 0$, a oblik (15) odgovara punim obrtnim telima (sl.1) koja počinju zaustavnom tačkom i prstenastim krilima (sl.2a), pri čemu je respektivno $\beta_0 = 1/2$ i $\beta_0 = 1$.

Ako je $\beta(\xi)$ zadato u obliku (14) rešenje jednačine (12) traži se u obliku sledećeg reda po ξ sa koeficijentima-funkcijama od η:

$$F_o(\xi, \eta) = F_{oo}(\eta) + F_{o1}(\eta)\xi + F_{o2}(\eta)\xi^2 + F_{o3}(\eta)\xi^3 + ... \quad ...(16)$$

a ako je $\beta(\xi)$ dato oblikom (15), rešenje je:

$$F_o(\xi, \eta) = F_{oo}(\eta) + F_{o\frac{1}{2}}(\eta)\xi^{1/2} + F_{o1}(\eta)\xi + ... \quad ...(17)$$

U oba slučaja za prvi član reda dobija se poznata jednačina FALKNER-SKAN [5], koja je numerički rešio HARTREE[6].

$$F_{00}''' + F_{00}F_{00}'' + \beta_0(1 - F_{00}'^2) = 0 \qquad \ldots(18)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_{00}(0) = F_{00}'(0) = 0 \text{ i } F_{00}'(\infty) = 1$$

za ostale koeficijente-funkcije dobija se jedan rekurzivni sistem linearnih diferencijalnih jednačina trećeg reda. Taj sistem dozvoljava da se umesto koeficijenata-funkcija uvedu tzv. univerzalne funkcije $f_i(\eta)$ pomoću sledećih linearnih kombinacija:

$$F_{01} = \beta_1 f_1$$
$$F_{02} = \beta_1^2 f_{11} + \beta_2 f_2$$
$$F_{03} = \beta_1^3 f_{111} + \beta_1\beta_2 f_{12} + \beta_3 f_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

za red (16) i:

$$F_{0\frac{1}{2}} = \beta_{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}}$$
$$F_{01} = \beta_{\frac{1}{2}}^2 f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \beta_1 f_1$$
$$F_{0\frac{3}{2}} = \beta_{\frac{1}{2}}^3 f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \beta_{\frac{1}{2}}\beta_1 f_{\frac{1}{2}1} + \beta_{\frac{3}{2}} f_{\frac{3}{2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

za red (17), sa sledećim graničnim uslovima:

$$f_{\ldots}(0) = f_{\ldots}'(0) = f_{\ldots}'(\infty) = 0$$

Na taj način se postiže potpuna nezavisnost rešenja sistema jednačina za univerzalne funkcije od koeficijenata $\beta_{\frac{1}{2}}, \beta_1, \beta_{\frac{3}{2}}, \ldots$ koji su različiti u svakom konkretnom problemu. To pruža mogućnost da se pomenuti sistem reši jedanput za uvek i to je za vrednosti koeficijenta β_0 koje praktično dolaze u obzir i učinjeno (7),(8).

Izrazi za debljinu istiskivanja i debljinu gubitka impulsa bili su pri tome:

$$\delta_1 = \frac{\nu_0}{U}\frac{\sqrt{2\xi}}{r_0}\,\eta_0(\xi) \qquad ...(19)$$

$$\delta_2 = \frac{\nu_0}{U}\frac{\sqrt{2\xi}}{r_0}\int_0^\infty F_{0\eta}(1 - F_{0\eta})d\eta$$

gde je $\eta_0(\xi) = \lim_{\eta\to\infty}\left[\eta - F_0(\xi,\eta)\right]$ dok se glavna funkcija $\beta(\xi)$ mogla predstaviti u obliku:

$$\beta(\xi) = \frac{1}{\eta_0^2}\frac{\delta_1^2 U'}{\nu}$$

iz koga se vidi da ona u radu igra istu ulogu koju ima parametar oblika kod približnih metoda.

Osnovna prednost rada SALJNIKOVa nad radovima FRÖSSLING-SCHOLKEMEYERa je u tome, što je bez uvodjenja novih univerzalnih funkcija, a korišćenjem samo onih koje je uveo još GÖRTLER [4], rešen ogroman broj do tada nerešenih osnosimetričnih problema. Pored toga, konvergencija redova (26) i (27), zbog toga što su već prvim članom reda: $F_{00}(\eta)$ tačno zadovoljeni granični uslovi za bezdimenzionu strujnu funkciju, znatno je bolja od kovergencije odgovarajućih redova radova FRÖSSLING-SCHOLKEMAYERa.

Tako se problemi osnosimetričnog graničnog sloja za zanemareni uticaj poprečne krivine tela mogu smatrati rešenim na zadovoljavajući način, kako sa čisto teoretskog gledišta, tako i sa gledišta primene dobijenih rezultata u praksi.

Drukčije stoji stvar sa problemima kod kojih se uzima u obzir uticaj poprečne krivine tela, odnosno kod kojih nije ispunjena pretpostavka da je $\delta(x)/r_0(x) \ll 1$. U tome slučaju važe jednačine (4) a one se transformacijama MANGLER-STEPANOVa ne svode na jednačine ravanskog problema. Istina, postoje tzv. uopštene transformacije MANGLER-STEPANOVa [9], [10] kojima se to svodjenje formalno ostvaruje, ali u jednačinama odgovarajućeg ravanskog problema kinematička vis-

gustost nije konstanta,nego sledeća funkcija koordinata:
$\bar{\gamma} = r^2/r_0^2$. Kako međutim ovakav ravanski problem nije rešen,to i same transformacije nemaju praktičnog značaja. To je verovatno bio razlog da je broj radova iz ove oblasti teorije graničnog sloja relativno mali i što su u njima tretirani uglavnom samo pojedini specijalni problemi.Može se reći da je u potpunosti rešen jedino problem podužnog opstrujavanja polubeskonačnog kružnog cilindra pri gradijentu pritiska jednakom nuli.Na njemu ćemo se zadržati malo detaljnije.

Neka je poluprečnik cilindra a i neka je brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja U_∞. Osnovne jednačine (4) će glasiti:

$$uu_x + vu_y = \nu\left(u_{yy} + \frac{1}{a+y}u_y\right)$$

$$\left[(a+y)u\right]_x + \left[(a+y)v\right]_y = 0 \qquad \ldots(20)$$

sa graničnim uslovima:

za $y = 0$ $\quad u = v = 0$

za $y \to \infty$ $\quad u \to U_\infty$

Pošto je gradijent pritiska jednak nuli,granični sloj se nigde ne odvaja,nego neprestano naraste nizvodno i to proporcionalno sa $\sqrt{x}$. Prema tome, na površini cilindra će sigurno postojati mesto u kome će debljina graničnog sloja postati jednaka poluprečniku a,dok će nizvodno od toga mesta biti $\delta(x) > a$. Samo u neposrednoj blizini prednje ivice cilindra biće $\delta(x) \ll a$ i samo u toj oblasti će zadovoljavajuću predstavu o graničnom sloju pružiti pomenuto Blasiusovo rešenje.

Jednačine (20), kao što je već istaknuto,ne mogu se transformacijama MANGLER-STEPANOVA svesti na neki ravanski problem,a pored toga, zbog postojanja dva međusobno nezavisna parametra a i U_∞,

...ujanje nije autonodelno to se, prema tome, ne može očekivati da se problem svede na jednu običnu diferencijalnu jednačinu. Kao jedina mogućnost za rešavanje problema preostaje traženje rešenja u vidu reda po pozitivnim ili negativnim stepenima neke male ili pak velike veličine karakteristične za problem. U ovom slučaju normalno je da ulogu te veličine preuzme odnos debljine graničnog sloja i poluprečnika cilindra, tj. veličina proporcionalna odnosu $\sqrt{\nu x/U_\infty}$/a, ili neka funkcija tog odnosa.

Na ovaj način rešili su jednačine (20) SEBAN-BOND [11] i to u oblasti u kojoj je $\delta(x) < a$. Prilikom izračunavanja debljine istiskivanja SEBAN-BOND su načinili grešku jer su koristili netačnu definiciju debljine istiskivanja. Ovu grešku ispravio je nešto kasnije KELLY [12], tako da konačna rešenja SEBAN-BOND-KELLYja za lokalni koeficijent otpora i debljinu istiskivanja, data u odnosu na odgovarajuća rešenja Blasiusa, glase:

$$c_f/c_{f\,Bl.} = 1 + 0{,}525\left(16\,\nu x/U_\infty a^2\right)^{1/2} - 0{,}120\left(16\,\nu x/U_\infty a^2\right) + \ldots \quad (21)$$

$$\delta^*/\delta^*_{Bl.} = 1 - 0{,}204\left(16\,\nu x/U_\infty a^2\right)^{1/2} + 0{,}146\left(16\,\nu x/U_\infty a^2\right) + \ldots \quad \ldots(22)$$

Očigledno je da su izračunata prva tri člana pretpostavljenih redova i da je za prvi član, kao što je i trebalo očekivati, dobijeno u stvari rešenje Blasiusa.

Da bi se stekla realnija slika o uticaju poprečne krivine cilindra na razvitak graničnog sloja, proanaliziraćemo izraze (21) i (22).

Ako bi se zahtevalo da greška pri izračunavanju lokalnog koeficijenta otpora po obrascu Blasiusa, dakle uz zanemareni uticaj poprečne krivine cilindra, bude manja od 5%, trebalo bi na osnovu (21) da bude $\nu x/U_\infty a^2 < 0{,}0006$, što bi za odnos debljine istiskivanja i poluprečnika cilindra iz (22) dalo: δ^*/a 0,0[illegible]. Obrnuto, pri

$\delta_1/a = 0,06$, odnosno $\nu x/U_\infty a^2 = 0,0025$, greška bi iznosila čitavih 10%. Prema tome, uticaj poprečne krivine je veliki čak i pri vrlo malim iznosima δ_1/a, odnosno i u neposrednoj blizini prednje ivice cilindra. U verodostojnost navedenih rezultata ne treba sumnjati jer je konvergencija redova (21) i (22) sasvim zadovoljavajuća. Na primer pri $\nu x/U_\infty a^2 = 0,04$, odnosno pri $\delta_1/a = 0,32$, treći član reda (21) čini tek 5,41% od prva dva uzeta zajedno. Ova poslednja vrednost za odnos $\nu x/U_\infty a^2$ može se smatrati istovremeno i gornjom granicom primenljivosti rešenja SEBAN-BOND-KELLY-ja.

Jednačinu (20) u oblasti u kojoj je $\delta(x) > a$ rešili su GLAUERT-LIGHTHILL (13). Oni su ustanovili da je ponašanje profila brzine u neposrednoj blizini cilindra logaritamsko (koordinata brzine u proporcionalna je logaritmu rastojanja od ose cilindra). To je uslovilo upotrebu specijalnog asimptotskog reda za beskonačno strujnu funkciju. Rezultati GLAUERT-LIGHTHILL-a za tangencijalni napon na cilindru i površinu istiskivanja glase

$$\frac{a\tau_w}{\mu U_\infty} = \frac{2}{\ln\frac{4\nu x}{U_\infty a^2}} + \frac{2\gamma}{\ln^2\frac{4\nu x}{U_\infty a^2}} + \frac{2\gamma^2 - \pi^2/2 - 4\ln 2}{\ln^3\frac{4\nu x}{U_\infty a^2}} + \ldots \qquad \ldots(23)$$

$$\frac{A}{\bar{u}\, a^2} = \frac{4\nu x}{U_\infty a^2}\left(\frac{1}{\ln\frac{4\nu x}{U_\infty a^2}} + \frac{1 - \gamma + 2\ln 2}{\ln^2\frac{4\nu x}{U_\infty a^2}} + \ldots\right) \qquad \ldots(24)$$

gde je $\gamma = 0,5772\ldots$ – Ojlerova konstanta;

Neki brojni rezultati na osnovu kojih se može suditi o konvergenciji gornjih redova izgledaju ovako. Za $\nu x/U_\infty a^2 = 10$ treći član izraza (23) čini 24% od prva dva, dok za $\nu x/U_\infty a^2 = 100$ on iznosi 9% od prva dva. Za $\nu x/U_\infty a^2 = 100$ izraz (24) daje $\delta_1/a = 9,2$. GLAUERT-LIGHTHILL su rezultate svoga reda koristili u oblasti u kojoj je $\nu x/U_\infty a^2 > 100$. Već smo ranije napomenuli da se rešenje SEBAN-BOND-KELLY-ja može koristiti ako je $\nu x/U_\infty a^2 < 0,04$. Rešenje u oblas za 0,04 < $x/U\delta_\infty^2$ < 100 može se dobiti interpolacijom. Medjutim, GLAUERT-LIGHTHILL su postupili na drugi način. Uporedo sa radom na tačnom rešenju u vidu asimptotskog reda, oni su razvili i jednu približnu metodu tipa Polhausena (11) i dobili rešenje koje je bilo jednoobrazno i važilo za sve odnose $\delta(x)/a$, odnosno za sve odnose $x/U\delta_\infty^2$. Ovo rešenje, u odnosu na rešenje SEBAN-BOND-KELLY-ja i asimptotsko rešenje, pokazivalo je sistematsko, ali ne tako veliko odstupanje. Odstupanje za $x/U\delta_\infty^2 = 0{,}04$ i $x/U\delta_\infty^2 = 100$ bila su data i iznosila 3%. Interpolaciju unutar intervala 0,04 < $x/U\delta_\infty^2$ < 100 GLAUERT-LIGHTHILL su izvršili na taj način, što su pretpostavili da odstupanje i unutar intervala iznosi takodje 3%.

Nezavisno od rada GLAUERT-LIGHTHILL-a, STEWARTSON (14) je posmatrao isti problem i došao do sličnih rezultata. U radu PROBSTEIN-ELLIOTT-a (9) posmatran je opštiji problem kod koga su brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja i poluprečnik poprečnog preseka tela dati izrazima $U(x) = cx^m$ i $r_0(x) = ax^n$ ($c, a > 0$; $n \geq 0$). Izvedene su jednačine za prva dva člana reda za bezdimenzionu strujnu funkciju u oblasti u kojoj je $\delta(x) \ll r_0(x)$ i data je definicija sličnih rešenja, ali nisu dati nikakvi brojni rezultati.

U daljem radu mi ćemo problem opstrujavanja tankih tela rešiti korišćenjem ideje o traženju rešenja u vidu reda po stepenima parametra proporcionalnog odnosu $\delta(x)/r_0(x)$, ali zadržavajući pri tome opštost karakterističnu za metodu GÖRTLER-a.

§ 5. TRANSFORMACIJA OSNOVNIH JEDNAČINA I DEFINICIJA SLIČNIH REŠENJA

Osnovne jednačine osnosimetričnog graničnog sloja pri proizvoljno velikom odnosu $\delta(x)/r_0(x)$ smo već izveli. One glase (4):

$$uu_x + vu_y = UU' + \nu\left(u_{yy} + \frac{1}{r_0+y}u_y\right) \qquad ...(4)$$

$$\left[(r_0+y)u\right]_x + \left[(r_0+y)v\right]_y = 0$$

sa univerzalno formulisanim graničnim uslovima:

za $y = 0$ $\qquad u = v = 0$

za $y \to \infty$ $\qquad u \to U(x)$

Transformaciju ovih jednačina izvršićemo na sledeći način. Uvešćemo nove promenljive ξ i η zadržavajući za ξ isti izraz (10) koji je uveo SALJNIKOV (3), dok ćemo drugu promenljivu SALJNIKOVa "dopuniti" činiocem $(1 + y/2r_0)$. Tako će nove promenljive glasiti:

$$\xi = \frac{1}{\nu L^2}\int_0^x U r_0^2\,dx \qquad \eta = \frac{U r_0 y}{\nu L\sqrt{2\xi}}\left(1 + \frac{y}{2r_0}\right) \qquad ...(25)$$

Pored toga, umesto strujne funkcije $\psi(x,y)$ odredjene izrazima:

$$(r_0+y)u = \psi_y \qquad (r_0+y)v = -\psi_x$$

uvešćemo bezdimenzionu strujnu funkciju $F(\xi,\eta)$:

$$\psi(x,y) = \nu L\sqrt{2\xi}\,F(\xi,\eta) \qquad ...(26)$$

Uzdužna koordinata brzine biće sada odredjena izrazom $u = UF_\eta$, dok će bezdimenziona strujna funkcija zadovoljavati jednačinu:

$$F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_\eta^2) = 2\xi(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}) - \Delta(\xi)(\eta F_{\eta\eta\eta} + F_{\eta\eta}) \qquad ...(27)$$

sa graničnim uslovima:

za $\eta = 0$ $\qquad F = F_\eta = 0$

za $\eta \to \infty$ $\qquad F_\eta \to 1$

U jednačini (27) je $\beta(\xi)$ dobro poznata glavna funkcija odredjena izrazom (13), dok je $\Delta(\xi)$ sledeća funkcija:

$$\Delta(\xi) = \frac{2\nu L\sqrt{2\xi}}{U r_o^2} \qquad \ldots(28)$$

Ako se uporede izrazi (13) za karakteristične debljine graničnog sloja sa izrazom (28), primetiće se da je $\Delta(\xi)$ ustvari veličina proporcionalna odnosu debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela. Pošto mi imamo nameru, kao što smo već naglasili, da rešenje problema tražimo u vidu reda po pozitivnim ili negativnim stepenima jedne takve veličine, nazvaćemo je karakterističnim parametrom.

Ako bi smo zanemarili uticaj poprečne krivine tela, mogli bi smo u izrazima (25) i (27) staviti da je:

$$y \leq \delta(x) \ll r_o(x) \quad i \quad \Delta(\xi) \ll 1$$

pri čemu bi se oni u potpunosti sveli na odgovarajuće izraze SALJNIKOVa (10) i (12).

Pre nego što predjemo na rešavanje jednačine (27) ispitaćemo pod kojim uslovima mogu postojati tzv. slična rešenja te jednačine. Poznato je da će slična rešenja postojati u slučaju kada je bezdimenziona strujna funkcija, funkcija samo od η. U našem slučaju to će biti ostvareno ako su u jednačini (27) istovremeno:

$$\beta(\xi) = \beta_o = \mathrm{const.} \quad i \quad \Delta(\xi) = \Delta_o = \mathrm{const.}$$

odnosno ako je:

$$\frac{2\xi r_o^2 U'}{U r_o^2} = \beta_o \quad i \quad \frac{2\nu\sqrt{2\xi}}{U r_o^2} = \Delta_o \qquad \ldots(29)$$

Eliminacijom promenljive ξ iz ovih jednačina, u slučaju da je $\beta_o \neq 0$, dobija se:

$$U' r_o^2 = \frac{4\nu\beta_o}{\Delta_o^2} \qquad \ldots(30)$$

S druge strane, iz druge od jednačina (29), posle uvodjenja izraza za ζ(25), dobiće se:

$$\int_0^x Ur_o^2\,dx = \frac{\Delta_o^2}{8\nu}(Ur_o^2)^2$$

ili posle diferenciranja i izvesnog sredjivanja:

$$Ur_o'^2\left(1 + 2\frac{Ur_o'}{U' r_o}\right) = \frac{4\nu}{\Delta_o^2}$$

Ako se uzme u obzir jednačina (30), konačno će se iz druge od jednačina (29) dobiti da je:

$$1 + 2\frac{Ur_o'}{U' r_o} = \frac{1}{\beta_o} \qquad ...(31)$$

Prva od jednačina (29) može se napisati u obliku:

$$\int_0^x Ur_o^2\,dx = \frac{\beta_o}{2}\,\frac{(Ur_o)^2}{U'}$$

Posle diferenciranja i sredjivanja dobićemo da je:

$$\frac{UU''}{U'^2} = 2\frac{Ur_o'}{U' r_o} + 2\left(1 - \frac{1}{\beta_o}\right)$$

Ako sada u ovu jednačinu unesemo izraz za $2Ur_o'/U'r_o$ koga daje jednačina (31), dobićemo konačno jednačinu koja će sadržati samo brzinu na spoljašnjoj granici graničnog sloja:

$$\frac{UU''}{U'^2} = 1 - \frac{1}{\beta_o} \qquad ...(32)$$

Integracija ove jednačine je laka. Dobiće se:

$$U(x) = \left(\frac{D}{\beta_o}\right)^{\beta_o} x^{\beta_o} \qquad ...(33)$$

gde je D - konstanta integracije koja je uvek istog znaka kao i konstanta β_o.

Ako je U(x) poznato, iz (30) se odredjuje i poluprečnik poprečnog preseka tela:

$$r_o(x) = \frac{2}{\Delta_o}\sqrt{\left(\frac{\beta_o}{2}\right)^{\beta_o}}\; x^{(1-\beta_o)/2} \qquad ...(34)$$

Izrazi (33) i (34) predstavljaju ustvari onaj raspored brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja i onaj oblik tela, pri kojima će , u slučaju da je $\beta_o \neq 0$, postojati slična rešenja osnovnih jednačina.

U slučaju da je $\beta_o = 0$ iz prve od jednačina (29) sledi da je: $U(x) = U_\infty = const.$ pa onda druga od jednačina (29) dovodi do:

$$\int_0^x r_o^2\,dx = \frac{U_\infty \Delta_o^2}{8\nu} r_o^4$$

Rešenje ove integro-diferencijalne jednačine je:

$$r_o(x) = \frac{2}{\Delta_o}\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty}}\, x^{1/2}$$

Što znači da će u ovome slučaju profili brzina biti slični na telu koje približno ima oblik obrtnog paraboloida.

Može se kraće pisati da će bez obzira na vrednost konstante β_o, pri osnosimetričnom opstrujavanju tankih obrtnih tela profili brzina biti slični, ako je:

$$U(x) = cx^n \text{ i } r_o(x) = ax^m \quad (a, c > 0; n \geq 0)$$

Pri čemu mora biti: $n + 2m = 1$.

Do istog ovog rezultata došli su i PROBSTEIN-ELLIOTT [9], ali na drugi način.

Prema tome, na kružnom cilindru ($m = 0$) profili brzina će biti slični u slučaju linearnog rasporeda brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja: $U(x) = cx$; na telu koje približno ima oblik obrtnog paraboloida ($m = 1/2$) slični profili brzina ostvariće se pri njegovom opstrujavanju sa gradijentom pritiska jednakim nuli: $U(x) = c = \text{const.}$, dok će na konusu ($n = 1$) profili brzina biti slični ako je raspored spoljašnje brzine hiperboličan: $U(x) = c/x$, odnosno ako je $n = -1$. Kasnije će biti pokazano (§ 10) da će zbog vrlo velikog porasta pritiska nizvodno u ovom poslednjem slučaju sigurno doći do odvajanja graničnog sloja na celoj površini konusa. Zato se izvodi zaključak da je na konusu praktično nemoguće ostvariti slične profile brzine.

Idealni raspored brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja na kružnom cilindru može se približno ostvariti ako se cilindar postavi u konfuzor (sl.3a) čiji je oblik dat izrazom

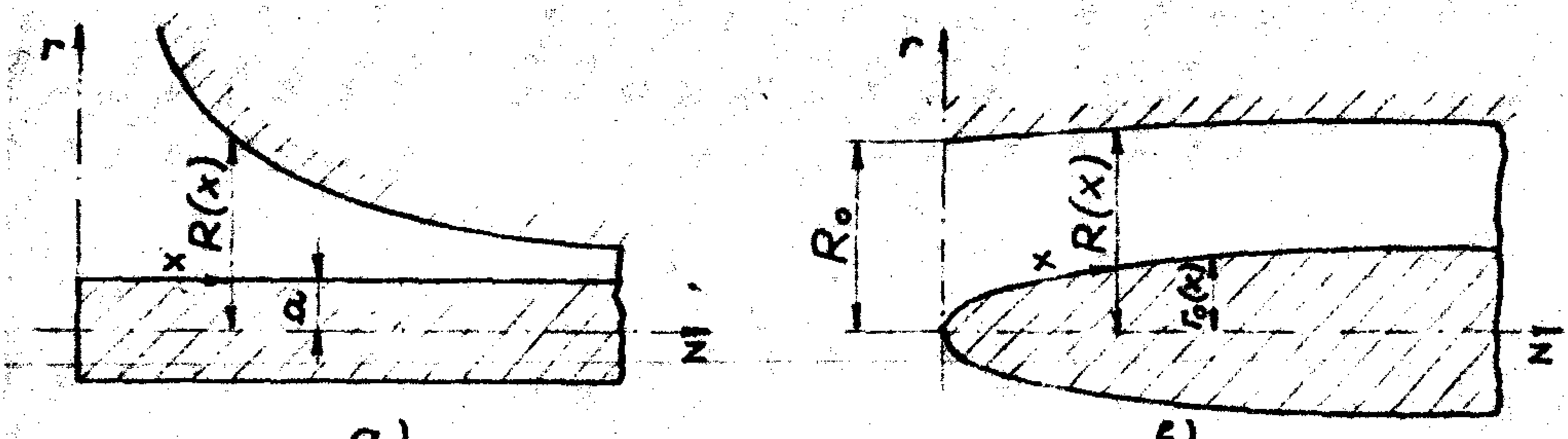
$$R(x) = \sqrt{a^2 + \frac{Q}{\pi c x}}$$

gde je Q - protok kroz konfuzor. Ovaj izraz je dobijen primenom jednačine kontinuiteta i pod pretpostavkom da su, pri strujanju savršenog fluida, srednja brzina u proizvoljnom preseku konfuzora i brzina na površini cilindra u istom preseku, približno jednake.

Na isti način se može dobiti i oblik difuzora (sl.3b) kojim će se na površini obrtnog paraboloida ($n = 1/2$) indukovati konstantni raspored brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja:

$$R(x) = R_o \sqrt{1 + \frac{a^2}{R_o^2} x}$$

gde je $R_o = R(0)$ - poluprečnik ulaznog preseka difuzora.



SL.3

§ 6. REŠENJE PROBLEMA U SLUČAJU KADA JE $\Delta(\xi) < 1$

Pretpostavićemo da je karakteristični parametar $\Delta(\xi)$ manji od jedinice za sve, ili bar za neke vrednosti x, odnosno ξ, iz intervala između prednje zaustavne tačke, ili prednje ivice tela i tačke odvajanja. Za te vrednosti promenljive ξ rešenje jednačine (27) potražićemo u vidu potencijalnog reda po parametru $\Delta(\xi)$:

$$F(\xi,\eta) = F_0(\xi,\eta) + \Delta F_1(\xi,\eta) + \Delta^2 F_2(\xi,\eta) + \dots \qquad ...(35)$$

Nalaženjem potrebnih izvoda i upoređivanjem članova uz iste stepene parametra Δ u jednačini (27), dobiće se sledeće jednačine za prva dva koeficijenta $F_0(\xi,\eta)$ i $F_1(\xi,\eta)$ reda (35):

$$F_{0\eta\eta\eta} + F_0 F_{0\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_{0\eta}^2) = 2\xi(F_{0\eta}F_{0\xi\eta} - F_{0\xi}F_{0\eta\eta}) \qquad ...(36)$$

sa graničnim uslovima:

za $\eta = 0$ $\qquad F_0 = F_{0\eta} = 0$

za $\eta \to \infty$ $\qquad F_{0\eta} \to 1$

$$F_{1\eta\eta\eta} + (F_0 + 2\xi F_{0\xi})F_{1\eta\eta} - 2\xi F_{0\eta}F_{1\xi\eta} - \left\{2\xi F_{0\xi\eta} + \left[2\beta(\xi) + \gamma(\xi)\right]F_{0\eta}\right\}F_{1\eta} + 2\xi F_{0\eta\eta}F_{1\xi} + \left[1 + \gamma(\xi)\right]F_{0\eta\eta}F_1 =$$
$$= -(\eta F_{0\eta\eta\eta} + F_{0\eta\eta}) \qquad ...(37)$$

sa graničnim uslovima:

za $\eta = 0$ $\qquad F_1 = F_{1\eta} = 0$

za $\eta \to \infty$ $\qquad F_{1\eta} \to 0$

Jednačina za prvi član reda poklapa se sa jednačinom SALJNIKOVA [12], što i treba očekivati, pošto iz (35) za $\Delta(\xi) \ll 1$ sledi da je $F(\xi,\eta) \approx F_0(\xi,\eta)$. U jednačini (37) za drugi član reda, pored glavne funkcije $\beta(\xi)$, pojavljuje se još jedna nova glavna funkcija $\gamma(\xi)$ određena izrazom:

$$\gamma(\xi) = \frac{2\xi\,\Delta'(\xi)}{\Delta(\xi)} \qquad ...(38)$$

Ako se ovde na osnovu (28) uvede izraz za $\Delta'(\xi)$ dobiće se:

$$\gamma(\xi) = 1 - \beta(\xi)\,\alpha(\xi)$$

gde se $\alpha(\xi)$ može nazvati pomoćnom glavnom funkcijom:

$$\alpha(\xi) = 1 + 2\frac{U r_o'}{U' r_o}$$

U slučaju da je novaglavna funkcija $\gamma(\xi)$ poznata, iz (38) bi se moglo izračunati karakteristični parametar $\Delta(\xi)$:

$$\Delta(\xi) = \Delta_o \exp\int_{\xi_o}^{\xi}\frac{\gamma(\xi)}{2\xi}\,d\xi \qquad ...(41)$$

gde je: $\Delta_o = \Delta(\xi_o)$. Ako bi se sada, kao kod sličnih rešenja, zahtevalo da bude: $\Delta(\xi) = \Delta_o$ = const., iz (41) bi se dobilo:

$$\int_{\xi_o}^{\xi}\frac{\gamma(\xi)}{2\xi}\,d\xi = 0$$

Pošto ova jednačina mora da bude zadovoljena za svako ξ, biće:

$$\gamma(\xi) \equiv 0$$

što znači da sličnim rešenjima graničnog sloja na tankim obrtnim telima odgovara vrednost nove glavne funkcije $\gamma(\xi)$ jednaka nuli. Pošto je kod sličnih rešenja $\beta(\xi) = \beta_o$ = const., to iz (39) i (40) sledi da je:

$$1 + 2\frac{U r_o'}{U' r_o} = \frac{1}{\beta_o}$$

Čime je potvrdjen rezultat (31) dobijen ranije.

U slučaju kada je bio zanemaren uticaj poprečne krivine tela [3], podaci karakteristični za svaki pojedini problem: $U(x)$ i $r_o(x)$ uticali su na rešenje samo preko koeficijenata glavne funkcije $\beta(\xi)$, koja je fizikalno predstavljala [3] odnos pritisnih sila i sila trenja. Ako se uticaj poprečne krivine uzme u obzir, vidi se da je tom prilikom pojavljuje još jedna glavna funkcija $\gamma(\xi)$ u kojoj je baš sadržan uticaj promene poprečne krivine tela: $r_o'(x)$.

Pomoćna glavna funkcija $\alpha(\xi)$ može da se razvije u redove potpuno istog oblika kao što su redovi (14) i (15) za glavnu funkciju $\beta(\xi)$. Ako su koeficijenti reda za funkciju $\alpha(\xi)$ poznati, iz (39) mogu se onda lako izračunati i koeficijenti reda za novu glavnu funkciju $\gamma(\xi)$. Kako je njihovo poznavanje neophodno za rešavanje jednačine (37), preći ćemo sada na izračunavanje koeficijenata pomoćne glavne funkcije $\alpha(\xi)$ u svim onim slučajevima u kojima su već izračunati (3) koeficijenti redova (14) i (15).

a) U slučaju opstrujavanja punih obrtnih tela sa prednjom zaustavnom tačkom, brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja i poluprečnik poprečnog preseka tela dati su u obliku (3):

$$U(x) = u_o x + u_{1/2}x^3 + u_1 x^5 + u_{3/2}x^7 + u_2 x^9 + \dots$$

$$r_o(x) = x + r_{1/2}x^3 + r_1 x^5 + r_{3/2}x^7 + r_2 x^9 + \dots$$

U ovom slučaju se $\beta(\xi)$ razvija u red (15), pri čemu je $\beta_o = 1/2$. Pretpostavićemo isti oblik reda i za pomoćnu glavnu funkciju ( ), pa ćemo koeficijente α_o, $\alpha_{1/2}$, α_1, ... dobiti upoređivanjem izraza uz iste stepene x-a sledeće jednačine:

$$1 + 2\frac{U' r_o}{U\, r_o'} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{i/2}\left\{\frac{1}{x^2}\int_0^x r_o^2\,dx\right\}^{i/2}$$

Tom prilikom će se za prva 4 koeficijenta dobiti

$$\alpha_o = 3$$

$$\alpha_{1/2} = -8r_{1/2} + 8u_{1/2}$$

$$\alpha_1 = -32r_1 + \frac{160}{3}r_{1/2}^2 - \frac{80}{3}r_{1/2}u_{1/2} - \frac{80}{3}u_{1/2}^2 + 32u_1$$

$$\alpha_{3/2} = -96r_{3/2} + \frac{1208}{3}r_1 r_{1/2} - \frac{1216}{3}r_{1/2}^3 - \frac{152}{3}r_1 u_{1/2} + 96r_{1/2}^2 u_{1/2} +$$

$$+\frac{488}{3}V_{1/2}R^2_{1/2} - \frac{464}{3}V_{1/2}R_1 + \frac{920}{9}R^3_{1/2} - \frac{592}{3}V_1R_{1/2} + 96R_{3/2}$$

gde su:

$$V_{k/2} = \frac{u_{k/2}L^{2k}}{u_0 Re^{k/2}}, \quad R_{k/2} = \frac{r_{k/2}L^{2k}}{Re^{k/2}} \quad i \quad Re = \frac{u_0 L^2}{\nu} \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

b) U slučaju opstrujavanja prstenastih krila $U(x)$ i $r_0(x)$ dati su izrazima (3):

$$U(x) = u_0 x + u_{1/2}x^2 + u_1x^3 + u_{3/2}x^4 + u_2x^5 + \ldots$$

$$r_0(x) = r_0 + r_{1/2}x + r_1x^2 + r_{3/2}x^3 + r_2x^4 + \ldots$$

U tom slučaju se $\beta(\xi)$ takodje razvija u red (19), pri čemu je $\beta_0 = 1$. Ako se za pomoćnu glavnu funkciju pretpostavi red istog oblika, onda se za odredjivanje koeficijenata reda može upotrebiti ista jednačina kao pod a). U njoj se samo umesto proizvoljne karakteristične dužine L, može staviti poluprečnik otvora krila r_0 (sl.2a).

Dobiće se:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_{1/2} = 2\sqrt{2R_{1/2}}$$

$$\alpha_1 = -\frac{16}{3}V_{1/2}R_{1/2} - \frac{20}{3}V^2_{1/2} + 8R_1$$

$$\alpha_{3/2} = 15\sqrt{2}V_1R_{1/2} + \frac{106\sqrt{2}}{9}V^2_{1/2}R_{1/2} + \frac{130\sqrt{2}}{9}V_{1/2}R^2_{1/2} -$$

$$-\frac{40\sqrt{2}}{3}V_{1/2}R_1 + \frac{115\sqrt{2}}{9}R^3_{1/2} - \frac{74\sqrt{2}}{3}R_1R_{1/2} + 12\sqrt{2R_{3/2}}$$

gde su:

$$V_{k/2} = \frac{u_{k/2}L^k}{u_0 Re^{k/2}}, \quad R_{k/2} = \frac{r_{k/2}L^k}{r_0 Re^{k/2}} \quad i \quad Re = \frac{u_0 L^2}{\nu} \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

c) Pri opstrujavanju prstenastih obrtnih tela sa oštrom prednjom ivicom, izrazi za $U(x)$ i $r_0(x)$ glase (3):

$$U(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4 + \ldots$$

$$r_0(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 + \ldots$$

$\beta(\xi)$ se može razviti u red (14) sa $\beta_0 = 0$. Ako se red istog oblika pretpostavi i za ponodjenu glavnu funkciju $\alpha(\xi)$, jednačina za odredjivanje koeficijenata reda će biti:

$$1 + 2\frac{Ur_0'}{U r_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left\{ \frac{1}{r_0^2} \int_0^x U r_0^2 dx \right\}^i$$

Za prvu 4 koeficijenta će se dobiti:

$$\alpha_0 = 2 + 2\frac{R_1}{V_1}$$

$$\alpha_1 = 2\left(1 - \frac{R_2}{V_1} - 2\frac{V_2}{V_1^2}\right)R_1 + 4\frac{R_2}{V_1}$$

$$\alpha_2 = -6\frac{R_2}{V_1}\frac{V_2}{V_1} - \left(1 - 8\frac{V_2^2}{V_1^2}\right)V_2R_1 - \left(3 - 4\frac{R_2}{V_1} - 8\frac{V_2}{V_1^2}\right)R_1^2 +$$

$$+ 2\left(1 - 3\frac{R_2}{V_1} - 4\frac{V_2}{V_1^2}\right)R_2 + 6\frac{R_3}{V_1}$$

$$\alpha_3 = -8\frac{R_2}{V_1}\frac{V_3}{V_1} + \left[2\frac{R_2}{V_1}\left(1 - 9\frac{R_2}{V_1} + 12\frac{V_2^2}{V_1^4}\right) - 12\frac{R_2}{V_1^2}\right]V_3 -$$

$$- 2\left[\frac{1}{3}\left(1 - 13\frac{R_2}{V_1} + 4\frac{V_2}{V_1^2}\right) + 4\frac{R_2}{V_1}\left(\frac{R_2}{V_1} + 2\frac{V_2}{V_1^2}\right) + 8\frac{V_2^2}{V_1^2}\right]V_2R_1 + V_1^2R_1 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(11 - 13\frac{R_2}{V_1} - 30\frac{V_2}{V_1^2} - 88\frac{V_2^2}{V_1^4}\right)V_2R_1^2 - 2\left(1 - 3\frac{R_2}{V_1} - 6\frac{V_2}{V_1^2}\right)V_1R_2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(27 - 20\frac{R_2}{V_1} + 32\frac{V_2}{V_1^2}\right)R_1^3 - \frac{8}{3}\left(11 + 42\frac{R_2}{V_1} - 16\frac{V_2}{V_1^2}\right)R_2R_1 -$$

$$- 4\left(3\frac{R_2}{V_1} - 3\frac{V_2}{V_1^2}\right)R_3 - \frac{1}{3}\left(4 - 13\frac{R_2}{V_1} + 12\frac{V_2}{V_1^2}\right)\frac{V_2R_2}{V_1} - \frac{20}{3}\frac{R_2^2}{V_1} + 8\frac{R_4}{V_1}$$

gde su:

$$V_k = \frac{u_k\, L^k}{u_o\, Re^k}\ ,\quad D_k = \frac{x_k\, L^k}{x_o\, Re^k}\quad i\quad Re = \frac{u_o L}{\nu}\qquad (k = 1,2,3,\ldots\ldots)$$

Kada su koeficijenti α_i poznati, onda se koeficijenti nove glavne funkcije $\gamma(\xi)$ u slučajevima a) i b) mogu izračunati na osnovu (39), prema sledećim formulama:

$$\gamma_0 = 1 - \alpha_0 \beta_0$$

$$\gamma_{1/2} = -(\alpha_0 \beta_{1/2} + \alpha_{1/2} \beta_0)$$

$$\gamma_1 = -(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_{1/2} \beta_{1/2} + \alpha_1 \beta_0)$$

$$\gamma_{3/2} = -(\alpha_0 \beta_{3/2} + \alpha_{1/2} \beta_1 + \alpha_1 \beta_{1/2} + \alpha_{3/2} \beta_0)$$

pri čemu je u slučaju a) $\gamma_0 = -1/2$, a u slučaju b) $\gamma_0 = 0$.

U slučaju c) će odgovarajuće formule biti:

$$\gamma_0 = 1 - \alpha_0 \beta_0$$

$$\gamma_1 = -(\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0)$$

$$\gamma_2 = -(\alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0)$$

$$\gamma_3 = -(\alpha_0 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_0)$$

gde je: $\gamma_0 = 1$.

Pošto smo na ovaj način izračunali koeficijente nove glavne funkcije, možemo preći na rešavanje jednačine (37).

U slučaju c) rešenje ćemo pretpostaviti u vidu sledećeg reda:

$$F_1(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{1k}(\eta)\, \xi^k \qquad \ldots(42)$$

pa ćemo, uzimanjem u obzir odgovarajućih redova za $F_0(\xi, \eta)$ i glavne funkcije $\gamma(\xi)$ i $\beta(\xi)$ i izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene promenljive ξ u jednačini (37), za prvi član reda (42) dobiti:

$$F_{10}''' + F_{00}F_{10}'' - (2\beta_0 + \gamma_0)F_{00}'F_{10}' + (1 + \gamma_0)F_{00}''F_{10} =$$

$$= -\left(\eta F'''_{oo} + F''_{oo}\right) \qquad \ldots(43)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_{1o}(0) = F'_{1o}(0) = F'_{1o}(0) = F'_{1o}(\infty) = 0$$

Za ostale koeficijente dobiće se sledeće rekurzivni sistem jednačina:

$$L_k\left[F_1\right] = -\sum_{j=1}^{k}(1+2j)F_{oj}F''_{1k-j} + \sum_{j=1}^{k}\left[(2k+2\beta+\gamma)F'_{oj} + \sum_{i=1}^{j}(2\beta_i+\gamma_i)F'_{oj-i}\right]F'_{1k-j} - \sum_{j=1}^{k}\left[(1+2k+2j+\gamma)F''_{oj} + \sum_{i=1}^{k}\gamma_i F''_{oj-i}\right]F_{1k-j} - \left(\eta F'''_{ok} + F''_{ok}\right) \qquad \ldots(44)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_{1k}(0) = F'_{1k}(0) = F'_{1k}(\infty) = 0 \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

u kome je $L_k\left[F_1\right]$ linearni diferencijalni operator oblika:

$$L_k\left[F_1\right] = F'''_{1k} + F_{oo}F''_{1k} - (2k+2\beta+\gamma)F'_{oo}F'_{1k} + (1+2k+\gamma)F''_{oo}F_{1k} \qquad \ldots(45)$$

Sistem (44) dopušta da se umesto koeficijenata-funkcija uvedu univerzalne funkcije $p_{\ldots}(\eta)$, $q_{\ldots}(\eta)$ i $t_{\ldots}(\eta)$ pomoću sledećih linearnih kombinacija:

$$F_{11} = \beta_1 p_1 + \gamma_1 q_1$$

$$F_{12} = \beta_1^2 p_{11} + \beta_2 p_2 + \beta_1\gamma_1 t_{1,1} + \gamma_1^2 q_{11} + \gamma_2 q_2$$

$$F_{13} = \beta_1^3 p_{111} + \beta_1\beta_2 p_{12} + \beta_3 p_3 + \beta_1^2\gamma_1 t_{11,1} + \beta_2\gamma_1 t_{2,1} + \beta_1\gamma_1^2 t_{1,11} + \beta_1\gamma_2 t_{1,2} + \gamma_1^3 q_{111} + \gamma_1\gamma_2 q_{12} + \gamma_3 q_3$$

....

Granični uslovi za univerzalne funkcije će biti:

$$p_{\ldots}(0) = p'_{\ldots}(0) = p'_{\ldots}(\infty) = 0$$

$$q_{\ldots}(0) = q'_{\ldots}(0) = q'_{\ldots}(\infty) = 0$$

$$t_{...}(0) = t'_{...}(0) = t'_{...}(\infty) = 0$$

sistem jednačina za njihovo odredjivanje neće više sadržati koeficijente β_i i γ_i $(i = 1,2,3,...)$ karakteristične za svaki posebni problem. To pruža mogućnost da se sistem reši jednaput za uvek i da se rešenja daju u vidu tabela.

Sistem jednačina za odredjivanje univerzalnih funkcija dat je u dodatku I. Primećuje se da je za izračunavanje prva 4 člana reda (42) potrebno 18 univerzalnih funkcija, dok je za isti broj članova reda (16) bilo potrebno svega 7 univerzalnih funkcija. Do ovako povećanog broja univerzalnih funkcija dolazi zbog toga, što jednačina (37) za razliku od jednačine (36), sadrži dve glavne funkcije, a samim tim i znatno veći broj koeficijenata koji su karakteristični za svaki pojedini problem i u odnosu na koje se rešenje problema mora učiniti nezavisnim.

GÖRTLER je [4] izveo jednačine za univerzalne funkcije koje su bile dovoljne za izračunavanje prvih 5 članova reda (16). Mi ćemo se zadržati na već navedenom broju univerzalnih funkcija (dodatak I) zbog toga, što bi samo za peti član reda (42) bilo potrebno novih 20 funkcija! Ako bi bilo potrebno izračunati $F_1(\xi,\eta)$ sa većom tačnošću i ukoliko bi tabulacija tako velikog broja univerzalnih funkcija bila ekonomična, ne bi bilo teško da se iz rekurentnog izraza (44) izvedu jednačine potrebne za izračunavanje i petog člana reda (42).

U slučajevima a) i b) rešenje jednačine (37) potražićemo u obliku:

$$F_1(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k/2}(\eta)\,\xi^{k/2} \qquad ...(46)$$

pa ćemo, na isti način kao i u slučaju c), za prvi član reda (46) dobiti jednačinu (43) sa istim graničnim uslovima.

Za ostale članove reda (46) dobiće se sledeći rekurzivni sistem jednačina:

$$L_{\frac{k}{2}}\left[F_1\right] = -\sum_{j=1}^{k}(1+j)F_{o\frac{j}{2}}F''_{1\frac{k-j}{2}} + \sum_{j=1}^{k}\Big[(k+2\beta_o+\gamma_o)F'_{o\frac{j}{2}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{j}(2\beta_{\frac{i}{2}}+\gamma_{\frac{i}{2}})F'_{o\frac{j-i}{2}}\Big]F'_{1\frac{k-j}{2}} - \sum_{j=1}^{k}\Big[(1+k-j+\gamma_o)F''_{o\frac{j}{2}} +$$

$$+\sum_{i=1}^{j}\gamma_{\frac{i}{2}}F''_{o\frac{j-i}{2}}\Big]F_{1\frac{k-j}{2}} - \left(F'''_{o\frac{k}{2}} + F''_{o\frac{k}{2}}\right)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_{1\frac{k}{2}}(0) = F'_{1\frac{k}{2}}(0) = F'_{1\frac{k}{2}}(\infty) = 0 \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

gde je operator $L_{\frac{k}{2}}\left[F_1\right]$ potpuno istog oblika kao i operator (45).

Odgovarajući sistem univerzalnih funkcija će biti:

$$F_{1\frac{1}{2}} = \beta_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}} + \gamma_{\frac{1}{2}}q_{\frac{1}{2}}$$

$$F_{11} = \beta^2_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \beta_1 p_1 + \beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}}t_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \gamma^2_{\frac{1}{2}}q_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \gamma_1 q_1$$

$$F_{1\frac{3}{2}} = \beta^3_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \beta_{\frac{1}{2}}\beta_1 p_{\frac{1}{2}1} + \beta_{\frac{3}{2}}p_{\frac{3}{2}} + \beta^2_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}}t_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + \beta_1\gamma_{\frac{1}{2}}t_{1,\frac{1}{2}} +$$

$$+\beta_{\frac{1}{2}}\gamma^2_{\frac{1}{2}}t_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \beta_{\frac{1}{2}}\gamma_1 t_{\frac{1}{2},1} + \gamma^3_{\frac{1}{2}}q_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \gamma_{\frac{1}{2}}\gamma_1 q_{\frac{1}{2}1} + \gamma_{\frac{3}{2}}q_{\frac{3}{2}}$$

Granični uslovi će glasiti:

$$p_{\ldots}(0) = p'_{\ldots}(0) = p'_{\ldots}(\infty) = 0$$

$$q_{\ldots}(0) = q'_{\ldots}(0) = q'_{\ldots}(\infty) = 0$$

$$t_{\ldots}(0) = t'_{\ldots}(0) = t'_{\ldots}(\infty) = 0$$

Same jednačine za univerzalne funkcije biće date u dodatku II.

Stvarni broj univerzalnih funkcija u slučajevima a) i b) je nešto manji, jer se jednačine za funkcije sa celim indeksima: p_1 i q_1, poklapaju sa odgovarajućim jednačinama u slučaju c).

Na taj način pripremljene su jednačine za univerzalne funkcije koje su potrebne da bi se moglo izračunati drugi član reda (35) za bezdimenzionu strujnu funkciju. Kao što smo već naglasili, univerzalne funkcije potrebne za izračunavanje prvog člana reda (35) u svim praktično značajnim slučajevima a), b) i c) su već tabulisane (7), (8). Izračunavanje drugog člana reda (35) pruža mogućnost da se stekne osnovna predstava o uticaju poprečne krivine tela na razvitak graničnog sloja. Ako bi se želelo da se uticaj poprečne krivine izračuna sa većom tačnošću i ako bi, razume se, tabulacija univerzalnih funkcija na elektronskim digitalnim računskim mašinama bila ekonomična, moglo bi se, na isti način kao što je to učinjeno za drugi član reda (35), izvesti jednačine za univerzalne funkcije, koje bi omogućile izračunavanje i trećeg člana reda (35).

Zadržavajući se, za sada, samo na prva dva člana reda (35), dajemo formule za izračunavanje tangencijalnog napona na telu, površine istiskivanja i površine pada impulsa.

$$\frac{r_0(x)\,\tau_w(x)}{2\mu U(x)} = \frac{1}{\Delta(\xi)}F_{0\,\eta\eta}(\xi,0) + F_{1\,\eta\eta}(\xi,0) \qquad \ldots(47)$$

$$\frac{A_1}{\pi r_0^2} = \Delta(\xi)\left[\eta_0(\xi) + \Delta(\xi)\,\eta_1(\xi)\right] \qquad \ldots(48)$$

gde su:

$$\eta_0(\xi) = \lim_{\eta\to\infty}\left[\eta - F_0(\xi,\eta)\right] \quad \text{i} \quad \eta_1(\xi) = \lim_{\eta\to\infty} F_1(\xi,\eta)$$

$$\frac{A_2}{\pi r_0^2} = \Delta(\xi)\left[\int_0^\infty F_{0\,\eta}(1-F_{0\,\eta})\,d\eta - \Delta(\xi)\int_0^\infty F_{1\,\eta}(2F_{0\,\eta}-1)\,d\eta\right] \quad \ldots(49)$$

§7. JEDNA DRUGA MOGUĆNOST ZA REŠENJE PROBLEMA U SLUČAJU KADA JE $\Delta(\xi) < 1$

Transformisana jednačina graničnog sloja (27) je glasila:

$$F_{\eta\eta\eta} + FF_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_\eta^2) = 2\xi(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}) - \Delta(\xi)(\eta F_{\eta\eta\eta} + F_{\eta\eta}) \qquad \dots(27)$$

sa graničnim uslovima:

za $\eta = 0$ $\qquad F = F_\eta = 0$

za $\eta \to \infty$ $\qquad F_\eta \to 1$

i mi smo rešenje te jednačine u slučaju kada je $\Delta(\xi) < 1$ tražili u vidu potencijalnog reda (35) po karakterističnom parametru $\Delta(\xi)$. Druga mogućnost za rešenje problema sastojala bi se u tome, što bi se rešenje jednačine (27) tražilo u vidu reda po promenljivoj ξ, dok bi se $\Delta(\xi)$ smatrala glavnom funkcijom i tretirala na isti način kao i funkcija $\beta(\xi)$. Da bi smo ovu mogućnost razmotrili, neophodno je prvo da vidimo na koji se način $\Delta(\xi)$ može razviti u red po ξ. Podjimo od izraza (41):

$$\Delta(\xi) = \Delta_0 \exp \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\gamma(\xi)}{2\xi} d\xi \qquad \dots(41)$$

U slučaju c) (§6), uzimajući u obzir red u koji se tada razvija nova glavna funkcija $\gamma(\xi)$, dobiće se

$$\frac{\Delta(\xi)}{\Delta_0} = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\gamma_0/2} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots) \qquad \dots(50)$$

gde se koeficijenti a_i izračunavaju pomoću koeficijenata glavne funkcije $\gamma(\xi)$. Pošto je praktično u slučaju c) $\gamma_0 = 1$, biće zapravo

$$\Delta(\xi) = \Delta_{1/2}\xi^{1/2} + \Delta_{3/2}\xi^{3/2} + \Delta_{5/2}\xi^{5/2} + \dots \qquad \dots(51)$$

Zbog toga ćemo rešenje jednačine (27) tražiti u obliku:

$$F(\xi,\eta) = F_o(\eta) + F_{1/2}(\eta)\xi^{1/2} + F_1(\eta)\xi + \dots \qquad \dots(52)$$

Za koeficijente-funkcije dobiće se rekurzivni sistem diferencijalnih jednačina u koji će se moći uvesti univerzalne funkcije. Broj univerzalnih funkcija biće isti kao i u slučaju kada se rešenje traži u obliku (35). Prednost rešenja (52) nad rešenjem (35) je dvostruka. S jedne strane, brzina konvergencije reda (52) zavisiće samo od njegove konvergencije po ξ, dok će brzina konvergencije reda (35) zavisiti, pored konvergencije po ξ njegovih članova $F_o(\xi,\eta), F_1(\xi,\eta), \dots,$ još i od konvergencije reda po karakterističnom parametru $\Delta(\xi)$, a s druge strane, što je još značajnije, rešenje (52) važi za bilo koje $\Delta(\xi)$, dakle i za $\Delta(\xi) > 1$, dok rešenje (35) ima smisla samo za $\Delta(\xi) < 1$.

Prema tome, ova mogućnost je u slučaju c) znatno povoljnija od one na koju smo se mi opredelili (§ 6). Medjutim, drukčije stoji stvar sa slučajevima a) i b). Kod njih se iz (41) dobija:

$$\frac{\Delta(\xi)}{\Delta_o} = \left(\frac{\xi}{\xi^o}\right)^{\gamma_o/2}(a_o + a_{1/2}\xi^{1/2} + a_1\xi + a_{3/2}\xi^{3/2} + \dots) \qquad \dots(53)$$

U slučaju a) je $\gamma_o = -1/2$, pa će biti:

$$\Delta(\xi) = \Delta_{-1/4}\xi^{-1/4} + \Delta_{1/4}\xi^{1/4} + \Delta_{3/4}\xi^{3/4} + \dots$$

U ovome slučaju se rešenje jednačine (27) mora tražiti u obliku:

$$F(\xi,\eta) = \dots + F_{-1/2}(\eta)\xi^{-1/2} + F_{-1/4}(\eta)\xi^{-1/4} + F_o(\ ) + F_{1/4}(\eta)\xi^{1/4} + F_{1/2}(\eta)\xi^{1/2} + \dots \qquad \dots(54)$$

Tada se za koeficijente-funkcije neće dobiti rekurzivni sistem diferencijalnih jednačina i zbog toga ne bi praktično imalo nikakvog smisla uvoditi univerzalne funkcije i vršiti njihovu tabulaciju.

U slučaju b) je $\gamma_0 = 0$, pa iz (53) sledi:

$$\Delta(\xi) = \Delta_0 + \Delta_{1/2}\xi^{1/2} + \Delta_1\xi + \Delta_{3/2}\xi^{3/2} + \dots \qquad \dots(55)$$

Ako za rešenje jednačine (27) potražimo u istom obliku (52) kao i u slučaju a), dobićemo za koeficijente-funkcije rekurzivni sistem diferencijalnih jednačina, ali se neće moći uvesti sistem univerzalnih funkcija. Naime, za prvi član reda (52) dobiće se jednačina:

$$(2+\Delta_0\eta)F_0''' + (F_0 + \Delta_0)F_0'' + \beta_0(1 - F_0'^2) = 0 \qquad \dots(56)$$

i dok je $\beta_0 = 1$, dotle Δ_0 nije formulisano univerzalno, nego iznosi (§ 6, b):

$$\Delta_0 = 2\sqrt{\frac{\nu}{u_0 r_0^2}}$$

Pošto je jednačina (56) nelinearna, ne može se osloboditi uticaja koeficijenta Δ_0 i zato bi nju, a takođe i jednačine za ostale koeficijente funkcije, trebalo rešavati posebno u svakom konkretnom problemu, odnosno za svako ν, u_0 i r_0. To, razume se, nema praktičnog smisla.

Prema tome, mogućnost za rešenje problema, o kojoj je reč, dovodi do rezultata u slučajevima a) i b). Zato smo se upravo odlučili kada smo se pri rešavanju jednačine (27) opredelili za varijantu u kojoj smo $\Delta(\xi)$ smatrali karakterističnim parametrom i rešenje tražili u vidu reda (35).

§ 8. REŠENJE PROBLEMA U SLUČAJU KADA JE $\Delta(\xi) > 1$

Već smo ranije, analizirajući primer opstrujavanja kružnog cilindra pri gradijentu pritiska jednakom nuli (§ 4), pokazali da će u tome slučaju sigurno postojati mesto na površini cilindra u kome će biti $\delta(x) = a$, a da će nizvodno od toga mesta biti $\delta(x) > a$. I pri opstrujavanju drugih obrtnih tela sa gradijentima pritiska koji omogućavaju odvajanje graničnog sloja, postoji mogućnost da debljina graničnog sloja postane veća od odgovarajućeg poluprečnika poprečnog preseka. Ova mogućnost postoji čak i u slučajevima kod kojih dolazi do odvajanja, ali je tačka odvajanja pomerena znatno nizvodno, odnosno telo je takvog oblika da se, kako se to obično kaže "dobro opstrujava".

Prema tome, realno je pretpostaviti da će u opštem slučaju za neke vrednosti promenljive ξ biti $\Delta(\xi) > 1$ i za te vrednosti rešenje transformisane jednačine graničnog sloja (27) ne može se tražiti u obliku (35). Normalno je, zato, potražiti rešenje u obliku asimptotskog reda po karakterističnom parametru $\Delta(\xi)$, ili po nekoj funkciji toga parametra, pri čemu bi koeficijenti reda, kao i kod rešenja (35), bili funkcije promenljivih ξ i η. Ako se jednačina (27) napiše u obliku:

$$\eta F_{\eta\eta\eta} + F_{\eta\eta} + \frac{1}{\Delta(\xi)}\Big[F_{\eta\eta\eta} + F F_{\eta\eta} + \beta(\xi)(1 - F_\eta^2) - 2\xi\,(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta})\Big] = 0 \qquad \dots(27)$$

onda je očigledno da će se, bez obzira kakav oblik ima asimptotski red, za prvi (slobodni, vodeći) član $F_0(\xi,\eta)$ reda moći pretpostaviti da predstavlja funkciju samo od η i dobiti sledeća diferencijalna jednačina:

$$\eta \dddot{F}_0 + \ddot{F}_0 = 0 \qquad \dots(57)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_o(0) = F_o'(0) = 0 \quad \text{i} \quad F_o'(\infty) = 1$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$F_o'(\eta) = C + D\ln\eta$$

gde su C i D konstante integracije. Rešenje je neograničeno za $\eta = 0$ i $\eta = \infty$ pa mora biti $D = 0$, a onda se jednom jedinom konstantom C ne mogu zadovoljiti oba granična uslova za $F_o'(\eta)$. Prema tome, jednačina (57) sa navedene univerzalno formulisane granične uslove nema rešenje i rešenje jednačine (27) ne može se tražiti u obliku bilo kakvog asimptotskog reda po karakterističnom parametru $\Delta(\xi)$. Uzrok nepostojanja rešenja u ovom obliku je baš univerzalna formulacija graničnih uslova, koja čini neograničenost rešenja kako na površini tela, tako i u beskonačnosti.

Zbog toga ćemo u slučaju kada je $\Delta(\xi) > 1$ transformaciju osnovnih jednačina graničnog sloja morati da izvršimo na sasvim drugi način, koristeći pri tome neuniverzalno formulisani unutrašnji granični uslov. Neuniverzalno formulisani unutrašnji granični uslov pojaviće se u slučaju kada se umesto promenljive y koristi promenljiva $r = r_o(x) + y$, koja predstavlja rastojanje proizvoljne tačke graničnog sloja od ose tela. Ako se osnovne jednačine (4) napišu korišćenjem nezavisno promenljivih x i r, dobiće se:

$$uu_x + vu_r = UU' + \nu\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right)$$

$$(ru)_x + (rv)_r = 0 \qquad \ldots(58)$$

sa graničnim uslovima:

za $r = r_o(x)$ $\quad u = v = 0$

za $r \to \infty$ $\quad u \to U(x)$

Jednačine (58) transformisaćemo na taj način što ćemo uvesti nove promenljive ξ i φ i novu bezdimenzionu strujnu funkciju $W(\xi,\varphi)$. Promenljivu ξ ćemo zadržati u istom obliku u kome smo je koristili i pri transformaciji osnovnih jednačina u slučaju kada je bilo $a(\xi) < 1$:

$$\xi = \frac{1}{\nu L^2}\int_0^x U r_0^2 dx$$

dok ćemo za promenljivu φ predpostaviti da je oblika:

$$\varphi = \frac{U r^2}{2 f(x)}$$

gde je $f(x)$ za sada neodredjena funkcija. Novu bezdimenzionu strujnu funkciju uvešćemo na sledeći način:

$$\psi(x,r) = f(x) W(\xi,\varphi)$$

gde je strujna funkcija $\psi(x,r)$ odredjena izrazima:

$$r u = \psi_r \quad \text{i} \quad r v = -\psi_x$$

Za uzdužnu projekciju brzine dobiće se : $u = U W_\varphi$, a bezdimenziona strujna funkcija $W(\xi,\varphi)$ zadovoljavaće jednačinu:

$$\varphi W_{\varphi\varphi\varphi} + W_{\varphi\varphi} + \frac{f'(x)}{2\nu} W W_{\varphi\varphi} + \frac{U' f(x)}{2\nu U}(1 - W_\varphi^2) =$$
$$= \frac{U r_0^2 f(x)}{2\nu^2 L^2}(W_\varphi W_{\xi\varphi} - W_\xi W_{\varphi\varphi}) \qquad \ldots(59)$$

sa graničnim uslovima:

$$\text{za } \varphi = \frac{U r_0^2}{2 f(x)} \qquad W = W_\varphi = 0$$

$$\text{za } \varphi \to \infty \qquad W_\varphi \to 1$$

Ovako transformisana jednačina graničnog sloja može sadržati jedino nove promenljive ξ i φ, funkciju $W(\xi,\varphi)$ kao i njene izvode po ξ i φ, i neke poznate funkcije novih promenljivih, na pr.

glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$, ili karakteristični parametar $\Delta(\xi)$. Može se zapaziti da je izvod brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja $U'(x)$ sadržan jedino u okviru glavne funkcije $\beta(\xi)$. Zato ćemo da sada neodredjenu funkciju $f(x)$ odrediti tako, da činilac uz $(1 - W_\varphi^2)$ u jednačini (59) bude jednak ( ). Imaćemo:

$$\frac{U' f(x)}{2\nu U} = \frac{2\xi\nu L^2 U'}{U^2 r_0^2}$$

odakle je:

$$f(x) = \nu L\,\Delta(\xi)\sqrt{2\xi} = \frac{\Delta^2(\xi)}{2}\,U r_0^2 \qquad \ldots(60)$$

Sada možemo izračunati i ostale nepoznate funkcije koja ulaze u jednačinu (59) i granične uslove.

$$\frac{U r_0^2 f(x)}{2\nu^2 L^2} = 2\xi$$

$$\frac{U r_0^2}{2 f(x)} = \frac{1}{\Delta^2(\xi)}$$

$$\frac{f'(x)}{2\nu} = 1 + \gamma(\xi)$$

Prema tome, ako se transformacija osnovnih jednačina (52) izvrši pomoću smene promenljivih:

$$\xi = \frac{1}{\nu L^2}\int_0^x U r_0^2\,dx \qquad \varphi = \frac{1}{\Delta^2(\xi)}\,\frac{r^2}{r_0^2} \qquad \ldots(61)$$

i

$$\psi(x,y) = \frac{\Delta^2(\xi)}{2}\,U r_0^2\, W(\xi,\varphi) \qquad \ldots(62)$$

dobiće se sledeća transformisana jednačina graničnog sloja:

$$\varphi W_{\varphi\varphi\varphi} + \left\{1 + \left[1 + \gamma(\xi)\right] W\right\} W_{\varphi\varphi} + \beta(\xi)(1 - W_\varphi^2) = 2\xi\left(W_\varphi W_{\xi\varphi} - W_\xi W_{\varphi\varphi}\right) \qquad \ldots(63)$$

sa univerzalno formulisanim graničnim uslovima:

za $\varphi = \frac{1}{\Delta^2(\xi)}$ $\qquad W = W_\varphi = 0$

za $\varphi \to \infty$ $\qquad W_\varphi \to 1$

Može se uočiti da ova jednačina, za razliku od jednačine (27), ne sadrži eksplicitno karakteristični parametar $\Delta(\xi)$. On ulazi samo u formulaciju unutrašnjeg graničnog uslova, ali zaključci u pogledu postojanja sličnih rešenja izvedeni u §5 ostaju, razume se, i ovde nepromenjeni: slična rešenja će postojati pri $\Delta(\xi) = \text{const.}$, odnosno $\gamma(\xi) = 0$ (§6) i $\beta(\xi) = \text{const.}$

Rešenje jednačine (63) tražićemo u vidu asimptotskog reda po nekoj funkciji parametra $\Delta(\xi)$, sa koeficijentima koji će biti funkcije promenljivih ξ i φ. Opšti oblik toga reda će biti:

$$W(\xi, \varphi) = W_0(\xi, \varphi) + \frac{W_1(\xi, \varphi)}{f(\Delta)} + \frac{W_2(\xi, \varphi)}{f^2(\Delta)} + \dots, \qquad \dots(64)$$

pri čemu ćemo, za sada, za funkciju $f(\Delta)$ pretpostaviti jedino da je neprekidna i monotono rastuća u intervalu $1 < \Delta < \infty$ i da je $\lim\limits_{\Delta \to \infty} f(\Delta) = \infty$. Prvi član jednog ovakvog reda pružiće tačno rešenje u slučaju kad $\Delta \to \infty$, a ostali članovi dolaziće do izražaja utoliko više, ukoliko je Δ manje. Pri odredjenom broju članova reda tačnost će biti utoliko veća, ukoliko je Δ veće.

Zamenom rešenja (64) u jednačini (63), za koeficijente reda trebalo bi da se dobije rekurzivni sistem diferencijalnih jednačina u kojima će se pojavljivati glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$. Rešenja ovih jednačina bi se zatim pretpostavljala u vidu redova po ξ sa koeficijentima-funkcijama od φ, a oblik tih redova zavisio bi od oblika odgovarajućih redova za glavne funkcije. Sada ćemo iz razmatranja da isključimo pretenaste obrtna tela, pošto je malo verovatno da će pri proračunu spoljašnjeg graničnog sloja za neko ξ biti $\Delta(\xi) > 1$, dok je takva mogućnost pri proračunu unutrašnjeg graničnog sloja čak sasvim isključena. Ograničićemo se samo na puna obrtna tela, a kod njih se glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\delta(\xi)$ razvijaju u redove oblika (15). Zato će redovi za koeficijente reda (64) imati oblik:

$$w_0(\xi,\varphi) = w_{00}(\varphi) + w_{0\frac{1}{2}}(\varphi)\,\xi^{1/2} + w_{01}(\varphi)\,\xi + \dots \qquad \dots(65)$$

$$w_1(\xi,\varphi) = w_{10}(\varphi) + w_{1\frac{1}{2}}(\varphi)\,\xi^{1/2} + w_{11}(\varphi)\,\xi + \dots \qquad \dots(66)$$

$$w_2(\xi,\varphi) = w_{20}(\varphi) + w_{2\frac{1}{2}}(\varphi)\,\xi^{1/2} + w_{21}(\varphi)\,\xi + \dots \qquad \dots(67)$$

....

pa će izraz za uzdužnu projekciju brzine biti:

$$\frac{u}{U} = w_\varphi = w'_{00} + w'_{0\frac{1}{2}}\,\xi^{1/2} + w'_{01}\,\xi + \dots + \frac{w'_{10} + w'_{1\frac{1}{2}}\,\xi^{1/2} + w'_{11}\,\xi + \dots}{f(\Delta)} + \frac{w'_{20} + w'_{2\frac{1}{2}}\,\xi^{1/2} + w'_{21}\,\xi + \dots}{f^2(\Delta)} + \dots \qquad \dots(68)$$

Pri rešavanju problema opstrujavanja kružnog cilindra GLAUERT-LIGHTHILL[13], a takođe i STEWARTSON[14], su otkrili da je u oblasti u kojoj je $\delta(x) >$ a uzdužna projekcija brzine u blizini površine cilindra bila proporcionalna logaritmu rastojanja od ose cilindra. Mi ćemo sada pretpostaviti da će uzdužna projekcija brzine u blizini tela biti proporcionalna logaritmu rastojanja od ose tela i pri opstrujavanju tela proizvoljnog oblika. Kako bi ova pretpostavka bila opravdana, to znači da bi se svaki od koeficijenata-funkcija reda (68) za male vrednosti promenljive φ mogao podeliti na sledeći način:

$$W^{*}_{i\frac{j}{2}}(\varphi) \sim C_{i\frac{j}{2}} + D_{i\frac{j}{2}} \ln \varphi \qquad (i,j = 0,1,2,\ldots) \qquad \ldots(69)$$

gde su $C_{i\frac{j}{2}}$ i $D_{i\frac{j}{2}}$ proizvoljne konstante, a na samoj površini tela, tj. za $\varphi = 1/\Delta^2$ bi bilo:

$$W^{*}_{i\frac{j}{2}}(1/\Delta^2) = C_{i\frac{j}{2}} - 2D_{i\frac{j}{2}} \ln \Delta \qquad \ldots(70)$$

Ako bi smo sada želeli da zadovoljimo unutrašnji granični uslov: za $\varphi = 1/\Delta^2$ $W_{\varphi} = 0$, trebalo bi da izraze (70) zamenimo u (68) i da odatle uporedjivanjem koeficijenata uz iste stepene do sada neodredjene funkcije f( ) dobijemo jednačine koje će morati da zadovoljavaju konstante $C_{i\frac{j}{2}}$ i $D_{i\frac{j}{2}}$. Da bi smo to uporedjivanje mogli da sprovedemo, a s obzirom da se u svakom od koeficijenata-funkcija javlja $\ln \Delta$, očigledno je da funkcija $f(\Delta)$ po kojoj se vrši razvijanje u asimptotski red bezdimenzione strujne funkcije $W(\xi, \varphi)$ ne može biti proizvoljna funkcija sa navedenim osobinama, nego mora biti:

$f(\Delta) = \ln \Delta$

Prema tome, asimptotski red za bezdimenzionu strujnu funkciju $W(\xi, \varphi)$ će biti:

$$W(\xi, \varphi) = W_0(\xi, \varphi) + \frac{W_1(\xi, \varphi)}{\ln \Delta} + \frac{W_2(\xi, \varphi)}{\ln^2 \Delta} + \ldots \qquad \ldots(71)$$

pa će se primenom unutrašnjeg graničnog uslova za W_{φ} i uzimanjem u obzir da je pretpostavljeno logaritamsko ponašanje profila brzine u blizini tela, dobiti:

$$C_{00} - 2D_{00} \ln \Delta + (C_{0\frac{1}{2}} - 2D_{0\frac{1}{2}} \ln \Delta)\,\xi^{1/2} + (C_{01} - 2D_{01} \ln \Delta)\,\xi + \ldots +$$

$$\frac{C_{10} - 2D_{10} \ln \Delta + (C_{1\frac{1}{2}} - 2D_{1\frac{1}{2}} \ln \Delta)\,\xi^{1/2} + (C_{11} - 2D_{11} \ln \Delta)\,\xi + \ldots}{\ln \Delta} +$$

$$\frac{\ldots 2D_{20}\ln\Delta + \left(C_{2\frac{1}{2}} - 2D_{2\frac{1}{2}}\ln\Delta\right)\xi^{1/2} + \left(C_{21} - 2D_{21}\ln\Delta\right)\xi + \ldots}{\ln^2\Delta} + \ldots = 0$$

Uporedjivanjem koeficijenata uz iste stepene od $\ln\Delta$, sledeće će se dobiti:

$$\ldots - 2D_{0\frac{1}{2}}\,\xi^{1/2} - 2D_{01}\,\xi - \ldots = 0$$

$$\ldots D_{10} + \left(C_{0\frac{1}{2}} - 2D_{1\frac{1}{2}}\right)\xi^{1/2} + \left(C_{01} - 2D_{11}\right)\xi + \ldots = 0$$

$$\ldots D_{20} + \left(C_{1\frac{1}{2}} - 2D_{2\frac{1}{2}}\right)\xi^{1/2} + \left(C_{11} - 2D_{21}\right)\xi + \ldots = 0$$

....

Kako badijene jednačine moraju biti zadovoljene za svako ξ koje je, razume se, $\Delta(\xi) > 1$, imaćemo konačno sledeće veze izmedju koeficijenata $C_{i\frac{j}{2}}$ i $D_{i\frac{j}{2}}$ koje obezbedjuju zadovoljenje unutrašnjeg graničnog uslova za W:

$$D_{0\frac{j}{2}} = 0 \qquad (i,j = 0,1,2,\ldots) \qquad \ldots(72)$$

$$C_{i\frac{j}{2}} = 2D_{i+1,\frac{j}{2}}$$

Ako rešenje pretpostavljeno u vidu asimptotskog reda (71) unesemo u transformisanoj jednačini graničnog sloja (63) i sprovedemo uporedjivanje koeficijenata uz iste stepene od $\ln$, dobićemo rekurzivni sistem jednačina za odredjivanje koeficijenata $W_o(\xi,\varphi)$, $W_1(\xi,\varphi)$, ... Jednačine za prva dva koeficijenta će biti:

$$W_{o\varphi\varphi\varphi} + \left\{1 + \left[1 + \gamma(\xi)\right] W_o\right\} W_{o\varphi\varphi} + \beta(\xi)\left(1 - W_{o\varphi}^2\right) = 2\xi\left(W_{o\varphi} W_{o\xi\varphi} - W_{o\xi} W_{o\varphi\varphi}\right) \qquad \ldots(73)$$

$$\varphi W_{1\varphi\varphi\varphi} + \left\{1+2\xi W_{0\xi} + \left[1+\gamma(\xi)\right] W_0\right\} W_{1\varphi\varphi} - 2\xi W_{0\varphi} W_{1\xi\varphi} - \qquad \ldots(74)$$
$$- 2\left[\beta(\xi) W_{0\varphi} + \xi W_{0\xi\varphi}\right] W_{1\varphi} + 2\xi W_{0\varphi\varphi} W_{1\xi} + \left[1+\gamma(\xi)\right] W_{0\varphi\varphi} W_1 = 0$$

S obzirom da je unutrašnji granični uslov za W_φ već zadovoljen jednačinama (72), preostali granični uslovi će za koeficijente $W_0(\xi,\varphi)$ i $W_1(\xi,\varphi)$ dati:

za $\varphi = 1/\Delta^2$ $\qquad W_0 = W_1 = 0$

za $\varphi \to \infty$ $\qquad W_{0\varphi} \to 1$ i $W_{1\varphi} \to 0$

Asimptotski red (71) pruža rešenje problema za velike vrednosti karakterističnog parametra $\Delta(\xi)$. Bez obzira koliko članova reda pozadržavali, mi ćemo uvek operisati sa konačnim brojem od na pr. n članova (n = 1,2,3,....). Prvi sledeći član će biti reda veličine $1/\ln^n \Delta$, pa će istog reda veličine biti i greška koju činimo ako se ograničimo na prvih n članova reda (71). Ispitaćemo sada mogućnost da unutrašnji granični uslov za $W(\xi,\varphi)$ umesto za $\varphi = 1/\Delta^2$, definišemo za $\varphi = 0$. Ako to učinimo, načinićemo grešku koja će biti reda veličine $1/\Delta^2$, a može se pokazati da će u slučaju velikih vrednosti parametra $\Delta(\xi)$, o kojima je baš reč, ona biti manja od greške koja se čini, ako se u izrazu (71) ograničimo na prvih n članova i to bez obzira koliko n bilo veliko. Naime, može se pokazati da je:

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1/\Delta^2}{1/\ln^n \Delta} = 0$$

za svako n, odnosno da je za svako n, $1/\Delta^2$ beskonačno mala veličina višeg reda u odnosu na beskonačno malu veličinu $1/\ln^n \Delta$:
$1/\Delta^2 = o(1/\ln^n \Delta)$.

Prema tome, opravdano je unutrašnji granični uslov za $W(\xi,\varphi)$ definisati na pomenuti način, pa će i granični uslovi za koeficijente $W_0(\xi,\varphi)$ i $W_1(\xi,\varphi)$ ubuduće biti:

za $\varphi \to 0$ $\quad w_0 \to 0$ i $w_1 \to 0$

Sada možemo preći na izračunavanje koeficijenata-funkcija redova (65) i (66) za prva dva člana asimptotskog reda (71). Za razliku od jednačina koje smo dobili za koeficijente-funkcije reda (35) u slučaju kada je $\Delta(\xi) < 1$, koje se mogu rešavati jedino numeričkim metodama, jednačine koje ćemo sada dobiti mogu se rešiti u zatvorenom obliku.

Zamenom rešenja u obliku (65) u jednačini (73) i upoređivanjem koeficijenata uz iste stepene od ξ, za prvi član reda će se dobiti:

$$\varphi w_{oo}''' + \left[1 + (1+\gamma_o) w_{oo}\right] w_{oo}'' + \beta_o (1 - w_{oo}'^2) = 0$$

ili, pošto smo se ograničili samo na puna obrtna tela kod kojih je ($\S$ 6) $\beta_o = 1/2$ i $\gamma_o = -1/2$:

$$\varphi w_{oo}''' + (1 + \frac{1}{2} w_{oo}) w_{oo}'' + \frac{1}{2}(1 - w_{oo}'^2) = 0 \qquad \ldots(75)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\quad w_{oo} \to 0, w_{oo}' \sim C_{oo}$

za $\varphi \to \infty$ $\quad w_{oo}' \to 1$

pri čemu je C_{oo} proizvoljna konstanta. Rešenje ove jednačine u okolini tačke $\varphi = 0$ potražićemo u vidu sledećeg potencijalnog reda:

$$w_{oo}(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \varphi^k$$

Zamenom u jednačinu (75) i primenom prva dva granična uslova dobiće se za koeficijente h_k:

$h_o = 0$, $h_1 = C_{oo}$, $h_2 = (C_{oo}^2 - 1)/4$, $h_3 = C_{oo} h_2/12$,

$h_4 = h_2^2/36$, $h_5 = C_{oo} h_2^2/720$, ...

može se primetiti da se za odredjeno C_{oo} mogu izračunati svi koeficijenti reda i to bez obzira da li je pri tome zadovoljen granični uslov u beskonačnosti, ili ne! Svakako da se ne može očekivati da ovaj granični uslov bude automatski ispunjen za bilo koje C_{oo} i zato se normalno nameće zaključak da jednačina (75) nema rešenja za svako C_{oo}. Očigledno je da će granični uslov u beskonačnosti biti ispunjen ako je $C_{oo} = 1$. Svi koeficijenti h_k za $k \geq 2$ biće tada jednaki nuli, pa će rešenje jednačine (75) biti veoma jednostavno:

$$W_{oo}(\varphi) = \varphi \qquad \ldots(76)$$

Jednačina za drugi član reda (65) će biti:

$$\varphi W'''_{o\frac{1}{2}} + \left[1+(1+\gamma_o) W_{oo}\right] W''_{o\frac{1}{2}} - (2\beta_o+1) W'_{oo} W'_{o\frac{1}{2}} + (2+\gamma_o) W''_{oo} W_{o\frac{1}{2}} =$$

$$= -\beta_{\frac{1}{2}}(1-W'^{2}_{oo}) - \gamma_{\frac{1}{2}} W_{oo} W''_{oo}$$

ili, posle uzimanja u obzir vrednosti za β_o i γ_o i (76):

$$\varphi W'''_{o\frac{1}{2}} + (1+\frac{\varphi}{2}) W''_{o\frac{1}{2}} - 2W'_{o\frac{1}{2}} = 0 \qquad \ldots(77)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\quad W_{o\frac{1}{2}} \to 0, \; W'_{o\frac{1}{2}} \sim C_{o\frac{1}{2}}$

za $\varphi \to \infty$ $\quad W'_{o\frac{1}{2}} \to 0$

Jednačine istog tipa će nam se i ubuduće često javljati, pa ćemo sada posebno da se zadržimo na nalaženju opšteg rešenja sledeće jednačine:

$$\varphi f''' + (1+\frac{\varphi}{2}) f'' - hf' = 0 \qquad \ldots(78)$$

gde je h — proizvoljna realna konstanta. Ako uvedemo smenu promenljivih:

$$\frac{\rho}{2} = \zeta \qquad i \; f^* = e^{-\zeta}\Phi(\zeta)$$

dobićemo:

$$\zeta\Phi'' + (1-\zeta)\Phi' - (2h+1)\Phi = 0$$

Ova jednačina je konfluentna hipergeometrijska jednačina i njeno opšte rešenje u slučaju da je:

$2h+1 \neq 0,-1,-2,\ldots$, odnosno $h \neq -1/2,-1,-3/2,\ldots$
biće ([15], str. 315):

$$\Phi(\zeta) = M\Phi(2h+1,1;\zeta) + NG(2h+1,1;\zeta)$$

gde su M i N proizvoljne konstante, $\Phi(2h+1,1;\zeta)$ i $G(2h+1,1;\zeta)$ konfluentne hipergeometrijske funkcije respektivno prve i druge vrste.

Prema tome, opšte rešenje jednačine (78) za $h \neq -1/2,-1,-3/2,\ldots$ je:

$$f^*(\rho) = Me^{-\rho/2}\Phi(2h+1,1;\rho/2) + Ne^{-\rho/2}G(2h+1,1;\rho/2) \qquad \ldots(79)$$

U jednačini (77) je $h = 2$, pa će njeno opšte rešenje biti:

$$V^*_{d\frac{1}{2}} = M_{d\frac{1}{2}}e^{-\rho/2}\Phi(5,1;\rho/2) + N_{d\frac{1}{2}}e^{-\rho/2}G(5,1;\rho/2) \qquad \ldots(80)$$

Konstante integracije $M_{d\frac{1}{2}}$ i $N_{d\frac{1}{2}}$ odredićemo iz graničnih uslova.

Poznata su ([16], str. 308-316) sledeća asimptotska ponašanja pri $\rho\to\infty$ konfluentnih hipergeometrijskih funkcija:

$$\Phi(d,1;x) \to \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(d)}e^{x}x^{d-1}, \quad d \neq 0,-1,-2,\ldots$$
$$\ldots(81)$$
$$G(d,1;x) \to x^{-d}$$

gde je $\Gamma(x)$ - poznata gama funkcija.

U našem slučaju će biti:

$$\Phi(5,1;\ \varphi/2) \to \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(5)}\, e^{\varphi/2}(\varphi/2)^4 \quad \text{i} \quad G(5,1;\ \varphi/2) \to (\varphi/2)^{-5}$$

Sada će se primenom spoljašnjeg graničnog uslova za $W'_{\sigma\frac{1}{2}}$ dobiti:

za $\varphi \to \infty$

$$M_{\sigma\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(5)} (\varphi/2)^4 + N_{\sigma\frac{1}{2}} e^{-\varphi/2}(\varphi/2)^{-5} \to 0$$

Očigledno je da će ova jednačina biti zadovoljena ako je $M_{\sigma\frac{1}{2}} = 0$, dok $N_{\sigma\frac{1}{2}}$ može biti proizvoljno.

Za primenu unutrašnjeg graničnog uslova neophodno je poznavati ponašanje funkcije $G(d,1;x)$ pri $\varphi \to 0$. Ono je [16] :

$$G(d,1;x) \to -\frac{1}{\Gamma(d)}\Big[\psi(d) - 2\psi(1) + \ln x\Big] , \quad d \neq 0,-1,-2,\dots \qquad \dots(82)$$

ili, u našem slučaju:

$$G(5,1;\ \varphi/2) \to -\frac{1}{\Gamma(5)}\Big[\psi(5) - 2\psi(1) + \ln(\varphi/2)\Big]$$

gde je $\psi(x)$ - tzv. logaritamski izvod gama funkcije; $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$. Za $x = 1$ je $\psi(1) = -\gamma$ gde je $\gamma = 0.5772\dots$ - Ojlerova konstanta. Sada će unutrašnji granični uslov dati:

$$-\frac{N_{\sigma\frac{1}{2}}}{\Gamma(5)}\Big[\psi(5) - 2\psi(1) + \ln(\varphi/2)\Big] \sim C_{\sigma\frac{1}{2}} \qquad \text{pri } \varphi \to 0.$$

Ova jednačina može biti zadovoljena samo ako su istovremeno: $N_{\sigma\frac{1}{2}} = 0$ i $C_{\sigma\frac{1}{2}} = 0$.

Prema tome, rešenje jednačine (77) će biti $W'_{\sigma\frac{1}{2}} = 0$, ili ako se uzme u obzir i granični uslov za $W_{\sigma\frac{1}{2}}$:

$$W_{\frac{1}{2}}(\varphi) \equiv 0$$

što znači da jednačina, uz navedene granične uslove, ima samo trivijalno rešenje.

Ako se napišu jednačine i za ostale koeficijente reda (65) i reše, videće se da i one imaju samo trivijalna rešenja:

$$W_{\frac{j}{2}}(\varphi) \equiv 0 \qquad (j = 1,2,3,\ldots)$$

Prema tome, prvi član asimptotskog reda (71) zavisiće samo od promenljive φ i svešće se na prvi član reda (65):

$$W_o(\xi,\varphi) = W_{oo}(\varphi) = \varphi \qquad \ldots(83)$$

Kao što smo već naglasili, prvi član reda (71) predstavlja ustvari rešenje problema u slučaju kada $\Delta(\xi) \to \infty$. U tome slučaju će uzdužne projekcija brzine biti:

$$\frac{u}{U} \to W_{o\varphi} = W'_{oo} = 1$$

Što znači da u tzv. "prvoj aproksimaciji" red (71) daje na odredjenom mestu na telu konstantni raspored brzine, koja je ista u svim tačkama normale na površini tela i jednaka brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja.

S obzirom da su svi koeficijenti reda (65), osim prvog, identički jednaki nuli, biće i :

$$C_{\frac{j}{2}} = 0 \qquad (j = 1,2,3,\ldots)$$

a onda se iz (72) dobija da je:

$$D_{1\frac{j}{2}} = 0 \qquad (j = 1,2,3,\ldots) \qquad \ldots(84)$$

Pošto je $C_{oo} = 1$, biće:

$$D_{10} = 1/2 \qquad \ldots(85)$$

Sada možemo preći na izračunavanje koeficijenata-funkcija reda (66). Pre svega, s obzirom da je $W_0(\xi, \varphi) = \varphi$, jednačina (74) da se znatno uprostiti i biće:

$$\varphi W_{1\varphi\varphi\varphi} + \left\{ 1 + \left[1 + \gamma(\xi) \right] \varphi \right\} W_{1\varphi\varphi} - 2\xi W_{1\xi\varphi} - 2\beta(\xi) W_{1\varphi} = 0 \qquad \ldots(86)$$

Ako se rešenje ove jednačine pretpostavi u obliku (66) i uzmu u obzir odgovarajući redovi za glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$, izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od ξ, dobiće se za prvi član reda:

$$\varphi W_{10}''' + \left[1 + (1+\gamma_0)\varphi \right] W_{10}'' - 2\beta_0 W_{10}' = 0 \qquad \ldots(86^*)$$

dok će se za ostale članove imati:

$$\varphi W_{1\frac{k}{2}}''' + \left[1 + (1+\gamma_0)\varphi \right] W_{1\frac{k}{2}}'' - (k+2\beta_0) W_{1\frac{k}{2}}' = 2 \sum_{j=1}^{k} \beta_{\frac{j}{2}} W_{1\frac{k-j}{2}}' -$$

$$- \varphi \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\frac{j}{2}} W_{1\frac{k-j}{2}}'' \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Pošto je kod punih obrtnih tela $\beta_0 = 1/2$ i $\gamma_0 = -1/2$ biće ustvari:

$$\varphi W_{10}''' + (1 + \frac{\varphi}{2}) W_{10}'' - W_{10}' = 0 \qquad \ldots(87)$$

$$\varphi W_{1\frac{k}{2}}''' + (1 + \frac{\varphi}{2}) W_{1\frac{k}{2}}'' - (k+1) W_{1\frac{k}{2}}' = 2 \sum_{j=1}^{k} \beta_{\frac{j}{2}} W_{1\frac{k-j}{2}}' -$$

$$- \varphi \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\frac{j}{2}} W_{1\frac{k-j}{2}}'' \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \ldots(88)$$

sa graničnim uslovima, koji uzimanjem u obzir (84) i (85), glase:

za $\varphi \to 0$ $\quad W_{10} \to 0$, $W_{10} \sim C_{10} + D_{10} \ln \varphi = C_{10} + \frac{1}{2} \ln \varphi$

za $\varphi \to \infty$ $\quad W_{10}' \to 0$

za $\varphi \to 0$ $\quad W_{1\frac{k}{2}} \to 0,\ W^{*}_{1\frac{k}{2}} \sim C_{1\frac{k}{2}} + D_{1\frac{k}{2}} \ln\varphi = C_{1\frac{k}{2}}$

za $\varphi \to \infty$ $\quad W^{*}_{1\frac{k}{2}} \to 0 \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$

Opšte rešenje jednačine (87) će se dobiti iz (79) za $k = 1$:

$$W^{*}_{10} = M_{10} e^{-\varphi/2} \Phi(3,1;\varphi/2) + N_{10} e^{-\varphi/2} G(3,1;\varphi/2)$$

Pri $\varphi \to \infty$ će biti (81):

$$\Phi(3,1;\varphi/2) \to \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} e^{\varphi/2} (\varphi/2)^2$$

$$G(3,1;\varphi/2) \to (\varphi/2)^{-3}$$

pa će se primenom spoljašnjeg graničnog uslova dobiti:

$$M_{10} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} (\varphi/2)^2 + N_{10} e^{-\varphi/2} (\varphi/2)^{-3} = 0$$

Očigledno je da mora biti $M_{10} = 0$, dok konstanta N_{10} može biti proizvoljna.

Pošto je pri $\varphi \to 0$ (82):

$$G(3,1;\varphi/2) = -\frac{1}{\Gamma(3)} \left[\psi(3) - 2\psi(1) + \ln(\varphi/2) \right]$$

Unutrašnji granični uslov će dati:

$$-\frac{N_{10}}{\Gamma(3)} \left[\psi(3) - 2\psi(1) + \ln(\varphi/2) \right] \sim C_{10} + \frac{1}{2} \ln\varphi$$

odakle se izjednačavanjem slobodnih članova i članova uz $\ln\varphi$ dobija:

$$N_{10} = -\frac{\Gamma(3)}{2}$$

i:

$$C_{10} = \frac{1}{2} \left[\psi(3) - 2\psi(1) - \ln 2 \right]$$

ili, ako se uzme u obzir da je (16) $\Gamma(3) = 2$ i $\psi(3) = 3/2 - \gamma$;

$$N_{10} = -1 \text{ i } C_{10} = \frac{1}{4}(3 + 2\gamma - 2\ln 2) \qquad \ldots(89)$$

Prema tome, rešenje jednačine)87) će biti:

$$W'_{1o} = -e^{-\varphi/2}G(3,1;\varphi/2) \qquad ...(90)$$

Ako se sada izvrši još jedna integracija i primeni granični uslov za W_{1o}, konačno će se dobiti:

$$W_{1o}(\varphi) = -\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2}G(3,1;\varphi/2)d\varphi \qquad ...(91)$$

Iz (88) za k = 1 sledi jednačina za odredjivanje drugog člana reda (66):

$$\varphi W'''_{1\frac{1}{2}} + (1+\frac{\varphi}{2})W''_{1\frac{1}{2}} - 2W'_{1\frac{1}{2}} = 2\beta_{\frac{1}{2}}W'_{1o} - \varphi W''_{1o}\cdot\gamma_{\frac{1}{2}} \qquad ...(92)$$

a iz (90) diferenciranjem dobijamo da je:

$$\varphi W''_{1o} = \frac{\varphi}{2}e^{-\varphi/2}\left[G(3,1;\varphi/2)-G'(3,1;\varphi/2)\right]$$

Dalje, koristeći sledeću rekurentnu formulu koju zadovoljavaju konfluentne hipergeometrijske funkcije druge vrste ((17), str. 507):

$$G(d-1,b;x) = (d-b+x)G(d,b;x) - xG'(d,b;x) \qquad ...(93)$$

za d = 3 i b = 1, dobićemo:

$$\varphi/2\left[G(3,1;\varphi/2)-G'(3,1;\varphi/2)\right] = G(2,1;\varphi/2)-2G(3,1;\varphi/2)$$

pa će, posle izvesnog sredjivanja, jednačina (92) preći u:

$$\varphi W'''_{1\frac{1}{2}} + (1+\frac{\varphi}{2})W''_{1\frac{1}{2}} - 2W'_{1\frac{1}{2}} = -2(\beta_{\frac{1}{2}} - \gamma_{\frac{1}{2}})e^{-\varphi/2}G(3,1;\varphi/2) -$$

$$- \gamma_{\frac{1}{2}}e^{-\varphi/2}G(2,1;\varphi/2) \qquad ...(94)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\quad W_{1\frac{1}{2}} \to 0,\ W'_{1\frac{1}{2}} \sim C_{1\frac{1}{2}}$

za $\varphi \to \infty$ $\quad W'_{1\frac{1}{2}} \to 0$

Smenom promenljivih:

$$\varphi/2 = \zeta \quad \text{i} \quad W^{*}_{1\frac{1}{2}} = e^{-\zeta}\Phi_{1\frac{1}{2}}(\zeta)$$

jednačina (94) može se svesti na jednačinu:

$$\zeta\ddot{\Phi}_{1\frac{1}{2}} + (1-\zeta)\dot{\Phi}_{1\frac{1}{2}} - 5\Phi_{1\frac{1}{2}} = -4(\beta_{\frac{1}{2}} - \gamma_{\frac{1}{2}})G(3,1;\zeta) - 2\gamma_{\frac{1}{2}}G(2,1;\zeta) \qquad \ldots(95)$$

čije je opšte rešenje:

$$\Phi_{1\frac{1}{2}}(\zeta) = M_{1\frac{1}{2}}\Phi(5,1;\zeta) + N_{1\frac{1}{2}}G(5,1;\zeta) + \Phi_{1\frac{1}{2}p}(\zeta)$$

gde je $\Phi_{1\frac{1}{2}p}(\zeta)$ - jedan partikularni integral.

S obzirom na izgled desne strane jednačine (95), partikularni integral ćemo pretpostaviti u sledećem obliku:

$$\Phi_{1\frac{1}{2}p}(\zeta) = P^{1}_{1\frac{1}{2}}G(3,1;\zeta) + P^{2}_{1\frac{1}{2}}G(2,1;\zeta)$$

pa ćemo zamenom u jednačini (95) i uzimanjem u obzir jednačina koje zadovoljavaju funkcije $G(3,1;\zeta)$ i $G(2,1;\zeta)$ dobiti sledeće vrednosti za konstante $P^{1}_{1\frac{1}{2}}$ i $P^{2}_{1\frac{1}{2}}$:

$$P^{1}_{1\frac{1}{2}} = 2(\beta_{\frac{1}{2}} - \gamma_{\frac{1}{2}}) \quad \text{i} \quad P^{2}_{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\gamma_{\frac{1}{2}}$$

Sada će opšte rešenje jednačine (94) biti:

$$W^{*}_{1\frac{1}{2}}(\varphi) = M_{1\frac{1}{2}}e^{-\varphi/2}\Phi(5,1;\varphi/2) + N_{1\frac{1}{2}}e^{-\varphi/2}G(5,1;\varphi/2) + 2(\beta_{\frac{1}{2}} - \gamma_{\frac{1}{2}})e^{-\varphi/2}G(3,1;\varphi/2) + \frac{2}{3}\gamma_{\frac{1}{2}}e^{-\varphi/2}G(2,1;\varphi/2) \qquad \ldots(96)$$

a primenom spoljašnjeg graničnog uslova će se dobiti: $N_{1\frac{1}{2}} = 0$.

Primena unutrašnjeg graničnog uslova, uz korišćenje asimptotskog ponašanja pri $\varphi \to 0$ odgovarajućih konfluentnih hipergeometrijskih funkcija druge vrste (82), dovešće do:

$$-N_{1\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(5)}\left[\psi(5)-2\psi(1)+\ln(\varphi/2)\right]-2(\beta_{\frac{1}{2}}-\gamma_{\frac{1}{2}})\frac{1}{\Gamma(3)}\left[\psi(3)-2\psi(1)+\ln(\varphi/2)\right]-\frac{2}{3}\gamma_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(2)}\left[\psi(2)-2\psi(1)+\ln(\varphi/2)\right]\sim C_{1\frac{1}{2}}$$

odakle se, upoređivanjem koeficijenata uz $\ln\varphi/2$ s jedne strane i slobodnih članova s druge strane, kao i uzimanjem u obzir vrednosti potrebnih gama funkcija i njihovih logaritamskih izvoda, dobija:

$$N_{1\frac{1}{2}}=-8(3\beta_{\frac{1}{2}}-\gamma_{\frac{1}{2}}) \quad \text{i} \quad C_{1\frac{1}{2}}=-\frac{1}{36}(21\beta_{\frac{1}{2}}+5\gamma_{\frac{1}{2}}) \qquad \ldots(97)$$

Konstanta $C_{1\frac{1}{2}}$ biće prema (72) potrebna za određivanje drugog člana reda (67), dok će, uz određenu konstantu $N_{1\frac{1}{2}}$ i granični uslov za $W_{1\frac{1}{2}}$, konačno rešenje jednačine (94) biti:

$$W_{1\frac{1}{2}}(\varphi)=-8(3\beta_{\frac{1}{2}}-\gamma_{\frac{1}{2}})\int_0^{\varphi}e^{-\rho/2}G(5,1;\rho/2)d\rho+2(\beta_{\frac{1}{2}}-\gamma_{\frac{1}{2}})\cdot\int_0^{\varphi}e^{-\rho/2}G(3,1;\rho/2)d\rho+\frac{2}{3}\gamma_{\frac{1}{2}}\int_0^{\varphi}e^{-\rho/2}G(2,1;\rho/2)d\rho$$

Dalje se iz (68) za $k=2$ dobija jednačina za određivanje trećeg člana reda (66):

$$\varphi\dddot{W}_{11}+(1+\frac{\varphi}{2})\ddot{W}_{11}-3\dot{W}_{11}=2\beta_{\frac{1}{2}}\dot{W}_{1\frac{1}{2}}+2\beta_{1}W_{10}-\gamma_{\frac{1}{2}}\ddot{W}_{1\frac{1}{2}}-\gamma_{1}\varphi\ddot{W}_{10} \qquad \ldots(99)$$

Ako se izračunaju potrebni izvodi na desnoj strani i više puta primeni rekurentna formula (93), dobiće se jednačina oblika:

$$\varphi W_{11}''' + \left(1+\frac{\varphi}{2}\right)W_{11}'' - 3W_{11}' = e^{-\varphi/2}\sum_{i=1}^{5} a_i G(i,1;\varphi/2) \qquad \dots(100)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\quad W_{11} \to 0,\ W_{11}' \sim C_{11}$

za $\varphi \to \infty$ $\quad W_{11}' \to 0$

u kojoj su a_i $(i = 1,2,3,4,5)$ konstante, koje se na određeni način izračunavaju pomoću koeficijenata $\beta_{1/2}$, β_2, $\gamma_{1/2}$ i γ_2. Rešenje ove jednačine dobija se na potpuno isti način kao i u slučaju jednačine (94). Ono glasi:

$$\begin{aligned} W_{11}(\varphi) = {} & C_{11}\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2} G(7,2;\varphi/2)\,d\varphi + \\ & + 15\left(3\beta_{\frac{1}{2}}^{2} - 7\beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}} + 2\gamma_{\frac{1}{2}}^{2}\right)\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2} G(5,1;\varphi/2)\,d\varphi + \\ & + \frac{16}{3}\left(3\beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}} - \gamma_{\frac{1}{2}}^{2}\right)\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2} G(4,2;\varphi/2)\,d\varphi - \\ & - \left(2\beta_{\frac{1}{2}}^{2}\beta_2 - 4\beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}} + 2\gamma_{\frac{1}{2}}^{2} + \gamma_2\right)\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2} G(3,1;\varphi/2)\,d\varphi - \\ & - \frac{2}{3}\left(10\beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}} - 6\gamma_{\frac{1}{2}}^{2} - 3\gamma_2\right)\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2} G(2,1;\varphi/2)\,d\varphi - \\ & - \frac{2}{3}\gamma_{\frac{1}{2}}^{2}\int_0^{\varphi} e^{-\varphi/2} G(1,1;\varphi/2)\,d\varphi \end{aligned} \qquad \dots(101)$$

gde je :

$$K_{11} = -720\beta_{\frac{1}{2}}^{2} - 360\beta_1 + 960\beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}} - 208\gamma_{\frac{1}{2}}^{2} + 72\gamma_1$$

dok pri tome mora biti:

$$C_{11} = -\frac{11}{60}\beta_{\frac{1}{2}}^{2} + \frac{19}{48}\beta_1 - \frac{1}{16}\beta_{\frac{1}{2}}\gamma_{\frac{1}{2}} - \frac{241}{1350}\gamma_{\frac{1}{2}}^{2} + \frac{21}{200}\gamma_1 \quad \dots(102)$$

Na isti način mogu se izvesti i rešiti jednačine za ostale koeficijente reda (66), koja računi postaju već kod sledećeg koeficijenta veoma komplikovani. U dodatku III biće data jednačina za određivanje $W_{\frac{3}{2}}(\varphi)$ i njeno rešenje. Ukoliko se zahteva veća tačnost, verovatno je ekonomičnije da se ostali koeficijenti reda (66) odrede numeričkim metodama.

Što se tiče koeficijenata reda (67) za određivanje trećeg člana reda (71) za bezdimenzionu strujnu funkciju $W(\xi,\varphi)$, onda se one mogu dobiti u zatvorenom obliku, ali, kao što će se odmah videti, za nalaženje najvažnijeg podatka teorije graničnog sloja – tangencijalnog napona na površini tela, uzimanjem u obzir prva tri člana reda (71), uopšte nije potrebno izračunati koeficijente reda (67)!

Tangencijalni napon u bezdimenzionom obliku će biti:

$$\frac{r_0(x)\,\tau_w(x)}{2\mu U(x)} = \frac{1}{\Delta^{2}(\xi)}\,W_{\varphi\varphi}\Big|_{\varphi=1/\Delta^{2}(\xi)}$$

ili, ako se uzmu u obzir logaritamska ponašanja pojedinih funkcija u blizini tela, kao i (84):

$$\frac{r_0(x)\,\tau_w(x)}{2\mu U(x)} = \frac{1}{\ln\Delta}\left(D_{10} + \frac{D_{20} + D_{\frac{3}{2}}\,\xi^{3/2} + D_{21}\,\xi + \dots}{\ln\Delta}\right) \quad \dots\dots\dots(103)$$

Ovde su (85), (72):

$$D_{10} = 1/2,\quad D_{20} = C_{10}/2,\quad D_{\frac{3}{2}} = C_{\frac{3}{2}}/2,\quad D_{21} = C_{11}/2,\quad \dots$$

$= C_{10}, C_{1\frac{1}{2}}, C_{11}, \ldots$ odredjeni izrazima (89),(97),(102),.... Očigledno je da za odredjivanje tangencijalnog napona zaista nije potrebno izračunavanje koeficijenata reda (67).

Izrazi za površinu istiskivanja i površinu pada impulsa će na (8) i (9) biti:

$$= -\frac{\Delta^2(\xi)}{\ln \Delta(\xi)} \left[W_1(\xi,\infty) + \frac{W_2(\xi,\infty)}{\ln \Delta(\xi)} + \ldots \right] \qquad \ldots(104)$$

$$= -\frac{\Delta^2(\xi)}{\ln \Delta(\xi)} \left\{ W_1(\xi,\infty) + \frac{1}{\ln \Delta(\xi)} \left[W_2(\xi,\infty) + \int_{1/\Delta^2(\xi)}^{\infty} W_{1\varphi}^2 \, d\varphi \right] + \ldots \right\} \qquad \ldots(105)$$

smo se zadržali na odredjivanju samo prva dva člana reda (71). Može se primetiti da će on u tome slučaju za karakteristične površine graničnog sloja dati jednu istu vrednost:

$$= \frac{A_2}{\bar{u} r_0^2} = -\frac{\Delta^2(\xi)}{\ln \Delta(\xi)} W_1(\xi,\infty) \qquad \ldots(106)$$

Na ovaj način dobijeno je rešenje osnovnih jednačina teorije osnosimetričnog graničnog sloja u slučaju velikih vrednosti karakterističnog parametra $\Delta(\xi)$ pri proizvoljnom obliku tela i proizvoljnom gradijentu pritiska. Rešenje je dato u obliku asimptotskog reda (71) čiji se koeficijenti mogu izračunati u zatvorenom obliku. Specifični oblik asimptotskog reda je uslovljen pretpostavljenim logaritamskim ponašanjem profila brzine u blizini tela. Kako se koeficijenti reda (71) izražavaju pomoću konfluentnih hipergeometrijskih funkcija druge vrste, a poznato je da je njihovo ponašanje pri malim vrednostima argumenta baš logaritamsko (82), vidi se da je učinjena pretpostavka bila opravdana.

Prema tome, pomenuti rezultat rada GLAUERT-LIGHTHILL-a[13], a takodje i STEWARTSON-a [14], koji se odnosio na logaritamsko ponašanje profila brzine u blizini kružnog cilindra pri gradijentu pritiska jednakom nuli, može se proširiti i na opstrujavanje tela proizvoljnog oblika pri proizvoljnom gradijentu pritiska.

JEDNA DRUGA MOGUĆNOST ZA REŠENJA PROBLEMA U SLUČAJU KADA JE $\Delta(\xi) > 1$

U slučaju kada je $\Delta(\xi) > 1$ mi smo rešenje problema tražili u vidu asimptotskog reda (71) po $\ln \Delta$, dok su koeficijenti toga reda bili funkcije nezavisno promenljivih (61) ξ i φ, koje su bile uvedene umesto promenljivih x i r. Može se postaviti ovakvo pitanje. Da li se može pronaći rešenje osnovnih jednačina (58) u vidu nekog asimptotskog reda po karakterističnom parametru $\Delta(\xi)$, pri čemu bi koeficijenti reda bili funkcije samo jedne nezavisno promenljive? Ako bi to bilo moguće, onda bi za pr. za prva dva člana reda trebalo rešiti samo dve jednačine, dakle mnogo manje nego u našem slučaju (§8), pa ne bi bilo teško izračunati više članova reda, čime bi se postigla znatno veća tačnost. S obzirom da bi u ovome slučaju koeficijenti reda bili funkcije samo jedne promenljive, $\Delta(\xi)$ ne bi igralo ulogu karakterističnog parametra, nego bi ulazilo u račun kao druga nezavisna promenljiva. Da bi smo ovu mogućnost ispitali, izvršićemo transformaciju osnovnih jednačina (58) na sledeći način.

Umesto nezavisno promenljivih x i r i strujne funkcije $\psi(x,r)$ uvodićemo nove promenljive:

$$\zeta = \ln \Delta(\xi) \qquad \varphi = \frac{1}{\Delta^2(\xi)} \frac{r^2}{r_0^2} \qquad \ldots(107)$$

i

$$\psi(x,r) = \frac{\Delta^2(\xi)}{2} U r_0^2 \, \overline{W}(\zeta, \varphi) \qquad \ldots(108)$$

pa ćemo za novu bezdimenzionu strujnu funkciju $\overline{W}(\zeta, \varphi)$ dobiti sledeću jednačinu:

$$\varphi \overline{W}_{\varphi\varphi\varphi} + \left\{1 + \left[1 + \gamma(\xi)\right]\overline{W}\right\}\overline{W}_{\varphi\varphi} + \beta(\xi)(1 - \overline{W}_{\varphi}^2) = \gamma(\xi)\left(\overline{W}_{\varphi}\overline{W}_{\zeta\varphi} - \overline{W}_{\zeta}\overline{W}_{\varphi\varphi}\right) \qquad \ldots(109)$$

sa graničnim uslovima:

$$\text{za} \quad \varphi = 1/\Delta^2(\xi) \qquad \overline{W} = \overline{W}_\varphi = 0$$

$$\text{za} \quad \varphi \rightarrow \infty \qquad \overline{W}_\varphi \rightarrow 1$$

koja se razlikuje od njoj odgovarajuće jednačine (63). Rešenje ove jednačine tražićemo u vidu asimptotskog reda po nezavisno promenljivoj ζ, sa koeficijentima-funkcijama od φ:

$$\overline{W}(\zeta,\varphi) = \overline{W}_0(\varphi) + \frac{\overline{W}_1(\varphi)}{\zeta} + \frac{\overline{W}_2(\varphi)}{\zeta^2} + \ldots\ldots \qquad \ldots(110)$$

Da bi se sada u jednačini (109) moglo izvršiti upoređivanje koeficijenata uz iste stepene promenljive ζ, očigledno je da je neophodno i zadane funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$ predstaviti u vidu sličnih asimptotskih redova:

$$\beta(\xi) = b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \ldots\ldots$$

$$\gamma(\xi) = g_0 + \frac{g_1}{\zeta} + \frac{g_2}{\zeta^2} + \ldots\ldots \qquad \ldots(111)$$

u kojima bi koeficijenti b_i i g_i $(i = 0,1,2,\ldots.)$ bili konstante, koje bi ustvari sadržale podatke karakteristične za svaki pojedini problem.

Ako bi to bilo moguće, onda bi se prvi član reda (110) dobili:

$$\varphi\overline{W}_0'' + [1+(1+g_0)]\overline{W}_0' + b_0(1-\overline{W}_0^2) = 0 \qquad \ldots(112)$$

Granični uslovi za pojedine koeficijente-funkcije dobili bi se iz (110) pretpostavljanjem logaritamskog ponašanja profila brzine u blizini tela. Naime, za:

$$\overline{W}_i \sim C_i + K_i \ln\varphi \qquad (i=0,1,2,\ldots.) \qquad \ldots(113)$$

primenom unutrašnjeg graničnog uslova bi se dobilo:

$$\overline{D}_o = 0 \text{ i } \overline{C}_i = 2\overline{D}_{i+1} \qquad (i = 0,1,2,....) \qquad ...(114)$$

pa bi granični uslovi za $\overline{W}_o(\varphi)$ bili

za $\varphi \to 0$ $\quad \overline{W}_o \to 0 \quad \overline{W}'_o \sim \overline{C}_o$

za $\varphi \to \infty$ $\quad \overline{W}'_o \to 1$

Sada bi rešenje jednačine (112), pri $\overline{C}_o = 1$, bilo:

$$\overline{W}_o(\varphi) = \varphi \qquad ....(115)$$

Jednačine za sledeća dva člana reda (110), uzimajući u obzir (115), bi glasile:

$$\varphi\overline{W}_1''' + \left[1+(1+g_o)\varphi\right]\overline{W}_1'' - 2b_o\overline{W}_1' = 0 \qquad ...(116)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\quad \overline{W}_1 \to 0, \quad \overline{W}_1' \sim \overline{C}_1 + \frac{b_o}{2}\ln\varphi$

za $\varphi \to \infty$ $\quad \overline{W}_1' \to 0$

i:

$$\varphi\overline{W}_2''' + \left[1+(1+g_o)\varphi\right]\overline{W}_2'' - 2b_o\overline{W}_2' = (1+g_o)\overline{W}_1\overline{W}_1'' - g_1\varphi\overline{W}_1'' +$$

$$+ b_o\overline{W}_1'^2 + (2b_1 - g_o)\overline{W}_1' \qquad ...(117)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\quad \overline{W}_2 \to 0, \quad \overline{W}_2' \sim \overline{C}_2 + \frac{b_o}{2}\overline{C}_1\ln\varphi$

za $\varphi \to \infty$ $\quad \overline{W}_2' \to 0$

Ove jednačine su istog tipa kao što je i jednačina (78) i njihova rešenja se mogu dobiti u zatvorenom obliku, ali pod uslovom da su prethodno poznati koeficijenti redova (111), odnosno da je razvijanje glavnih funkcija u takve redove moguće.

Poznato je da se glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$ u slučajevima kada je brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja $U(x)$ i poluprečnik poprečnog preseka tela $r_o(x)$ predstavljeni u vidu potencijalnih redova po x (§ 6 ;a,b,c) razvijaju u redove oblika (14) i (15). Prema tome, mogućnost da se one u tome slučaju razvijaju u redove (111) je sasvim isključena. Medjutim, možda bi se funkcije $U(x)$ i $r_o(x)$ mogle razviti u redove nekog drugog oblika, na pr. u redove po nekom ortonormiranom sistemu funkcija, koji bi omogućili razvijanje glavnih funkcija $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$ baš u redove (111)! U tome slučaju bi primena transformacija (107) i (108) potpuno uspela. U okviru ovoga rada se nećemo dalje upuštati u razradu ove ideje, s obzirom da smo rešenje problema kada su $U(x)$ i $r_o(x)$ predstavljeni u vidu potencijalnih redova po x, što je praktično najčešći slučaj, već dobili.

§ 10. NEKI PRIMERI GRANIČNIH SLOJEVA NA TANKIM OBRTNIM TELIMA

Sada ćemo se zadržati na primeni dobijenih opštih rezultata u nekim specijalnim slučajevima opstrujavanja tankih obrtnih tela. Proanaliziraćemo one slučajeve kod kojih su teškoće čisto numeričke prirode najmanje, a to su svakako slučajevi kod kojih su koeficijenti redova (35) i (71) za bezdimenzionu strujnu funkciju funkcije samo od nezavisne promenljivih η, odnosno φ. Pomenuti koeficijenti, prema tome, neće zavisiti od promenljive ξ, a to će biti moguće jedino u slučaju ako su obe glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$ konstantne. Potražićemo sada one brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja $U(x)$ i one poluprečnike poprečnog preseka tela $r_o(x)$ pri kojima će biti:

$$\beta(\xi) = \frac{2\xi\nu^{2}U'}{U^{2}r_o^{2}} = \beta_o = \mathrm{const.} \qquad \ldots(118)$$

$$\text{i}\ \gamma(\xi) = 1 - \alpha(\xi)\beta(\xi) = \beta_o = \mathrm{const.} \qquad \ldots(119)$$

$$\text{odnosno}\ \alpha(\xi) = 1 + 2\frac{U r_o'}{U' r_o} = \frac{1-\gamma_o}{\beta_o} = \mathrm{const.}\ (\beta_o \neq 0) \qquad \ldots(120)$$

U slučaju kada je $\beta_o \neq 0$, iz (118) se uzimanjem u obzir izraza za (25) i diferenciranjem može dobiti:

$$\frac{UU''}{U'^{2}} = 2\frac{U r_o'}{U' r_o} + 2\left(1 - \frac{1}{\beta_o}\right)$$

ili, ako se uzme u obzir (120):

$$\frac{UU''}{U'^{2}} = 1 - \frac{1+\gamma_o}{\beta_o} \qquad \ldots(121)$$

Integraljenje ove diferencijalne jednačine je jednostavno. Ako je $\gamma_o \neq -1$, dobiće se:

$$U(x) = cx^{m}$$

gde je $n = \frac{\beta_0}{1+\gamma_0}$ i c proizvoljna konstanta, a ako je $\gamma_0 = -1$, dobiće se:

$$U(x) = E_1 \exp B_1 x$$

gde su A_1 i B_1 - proizvoljne konstante.

Kada je U(x) poznato, onda se iz (120) može dobiti i $r_o(x)$. U slučaju kada je $\gamma_o \neq -1$ dobiće se:

$$r_o(x) = ax^n$$

a ako je $\gamma_o = -1$, biće:

$$r_o(x) = E_2 \exp B_2 x$$

pri čemu su a, B_2, E_2 - proizvoljne konstante, a $n = \frac{1-\gamma_o-\beta_o}{2(1+\gamma_o)}$.

Ako je $\beta_o = 0$ iz (118) se dobija da je $U(x) = c$, dok iz (119) sledi da je, za $\gamma_o \neq -1, r_o(x) = ax^n$, a za $\gamma_o = -1, r_o(x) = E_2 \exp B_2 x$. Očigledno je da se slučaj $\beta_o = 0$ može obuhvatiti prethodnim (za n = 0, ili $B_1 = 0$) i zato se kratko može napisati da će glavne funkcije $\beta(\xi)$ i $\gamma(\xi)$ biti konstante jedino u slučajevima kada su:

$$U(x) = cx^n \quad i \quad r_o(x) = ax^n \qquad \ldots(122)$$

ili:

$$U(x) = E_1 \exp B_1 x \quad i \quad r_o(x) = E_2 \exp B_2 x \qquad \ldots(123)$$

Tada će koeficijenti redova (35) i (71) biti funkcije samo od η, odnosno φ i svešće se na prve članove redova (16), (17), (42), (46), (65) i (66):

$$F_o(\xi,\eta) \equiv F_o(\eta) = F_{oo}(\eta) \; ; \; F_1(\xi,\eta) \equiv F_1(\eta) = F_{1o}(\eta)$$

$$W_o(\xi,\eta) \equiv W_o(\eta) = W_{oo}(\eta) \; ; \; W_1(\xi,\varphi) \equiv W_1(\varphi) = W_{1o}(\varphi)$$

Slučajevi (123) i (122) pri n < 0 su praktično beznačajni i zato ćemo se ubuduće zadržati jedino na problemima kod kojih je $U(x) = cx^m$ i $w_0(x) = ax^n$ $(a,c > 0)$ za $n \geq 0$, imajući u vidu prvenstveno probleme opstrujavanja kružnog cilindra $(n = 0)$, tela koje približno ima oblik obrtnog paraboloida $(n = 1/2)$ i konusa $(n = 1)$. Primećuje se još da su m i n medjusobno nezavisne konstante, pošto se iz navedenih izraza za njihovo odredjivanje ne mogu istovremeno eliminisati obe konstante β_0 i γ_0. Kada su bila definisana slična rešenja osnovnih jednačina (§ 5), došlo se do zaključka da će ona postojati pri $U(x) = cx^m$ i $w_0(x) = ax^n$, ako je samo $m + 2n = 1$. Isto tako je ustanovljeno (§ 6) da je u slučaju postojanja sličnih rešenja glavna funkcija $\gamma(\xi)$ identički jednaka nuli: $\gamma(\xi) \equiv 0$. Navedena veza izmedju konstanti m i n može se i sada dobiti ako se stavi da je $\gamma_0 = 0$, i iz odgovarajućih izraza eliminiše β_0.

Kod problema koje posmatramo je promenljiva ξ (25):

$$\xi = \frac{ac^2}{\nu E^2}\int_0^x x^{m+2n}dx$$

pa je očigledno da će transformacija promenljivih imati smisla samo ako je:

$$m + 2n > -1 \qquad \ldots(124)$$

Ovaj izraz predstavlja izvesno ograničenje za moguće brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja i oblike tela, ali videće se kasnije da ono praktično neće imati značaja.

Glavne funkcije će biti:

$$\beta(\xi) = \beta_0 = \frac{2n}{m+2n+1} \qquad \ldots(125)$$

$$\gamma(\xi) = \gamma_0 = -\frac{m+2n-1}{m+2n+1} \qquad \ldots(126)$$

a karakteristični parametar je:

$$\Delta(\xi) = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{2\nu}{c(m+2n+1)}}\; x^{\frac{1-m+2n}{2}}$$

ili

$$\Delta(\xi) = \frac{2}{ax^{n}}\sqrt{\frac{2\nu}{c(m+2n+1)}}\; x^{\frac{1-m}{2}} \qquad \ldots(127)$$

ovog poslednjeg oblika za karakteristični parametar se vidi da je debljina graničnog sloja proporcionalna sa $x^{(1-m)/2}$, da opada x rastom, ako je $m>1$. Kako istovremeno poluprečnik poprečnog preseka tela raste ili bar ostaje konstantan ($n \geq 0$), očigledno je da će uticaj poprečne krivine tela slabiti sa porastom x, pa će i slučajevi $m>1$ biti manje interesantni.

Sada ćemo posebno proanalizirati slučajeve kod kojih je $\Delta(\xi) < 1$ i $\Delta(\xi) > 1$.

a) Neka je za neke vrednosti x karakteristični parametar (127) manji od jedinice. Za te vrednosti x će bezdimenziona strujna funkcija (35) biti :

$$F(\xi,\eta) = F_0(\eta) + \Delta(\xi)F_1(\eta) + \ldots \qquad \ldots(128)$$

gde će $F_0(\eta)$ zadovoljavati poznatu jednačinu FALKNER-SKAN (5) (18):

$$F_0''' + F_0F_0'' + \beta_0(1-F_0'^2) = 0 \qquad \ldots(18)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0 \quad \text{i} \quad F_0'(\infty) = 1$$

a će jednačina za $F_1(\eta)$ biti (43):

$$F_1''' + F_0F_1'' - (2\beta_0+\gamma_0)F_0'F_1' + (1+\gamma_0)F_0''F_1 = -(\eta F_0''' + F_0'') \qquad \ldots(43)$$

sa graničnim uslovima:

$$F_1(0) = F_1'(0) = F_1'(\infty) = 0$$

Poznato je da jednačina (18) predstavlja tzv. slična rešenja ravanskih graničnih slojeva kod kojih je brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja oblika $U(x) = cx^m$. Tom prilikom je: $\beta_e = 2m/(m+1)$. Jednačinu (18) je rešio HARTREE (6) za niz vrednosti parametra β_e i došao do zaključka da će do odvajanja graničnog sloja doći pri $\beta_e = -0,1988$, odnosno $m = -0,0904$. U našem slučaju jednačina (18) daje rešenje problema u tzv. "prvoj aproksimaciji" i kod nas je (125):

$$\beta_e = \frac{2m}{m+2n+1} \leq \frac{2m}{m+1} \qquad (n \geq 0)$$

pa je za $n > 0$ i $\beta_e = -0,1988$, $m < -0,0904$. Kako je konstanta m povezana sa veličinom gradijenta pritiska, sleduje zaključak da će u slučaju $n > 0$ granični sloj biti u stanju da savlada bez odvajanja veće poraste pritiska nizvodno, nego što je to bio slučaj sa sličnim rešenjima ravanskog problema. Na pr. za $n = 1/2$ i $n = 1$ biće odgovarajuće vrednosti za m respektivno: $m = -0,1816$ i $m = -0,2724$. Na taj način je već u "prvoj aproksimaciji" potvrđen opšti zaključak izveden ranije (§ 3).

I pored toga što je bez sumnje granični sloj na tankome obrtnom telu otporniji prema delovanju porasta pritiska nizvodno u odnosu na slučaj kada bi bio zanemaren uticaj poprečne krivine tela, ipak ne treba očekivati da će takav granični sloj biti u stanju da bez odvajanja savlada i vrlo velike gradijente pritiska. Konkretno, u problemu koga posmatramo, teško je poverovati da bi granični sloj bio u stanju da savlada tako velike poraste pritiska nizvodno, koji bi odgovarali na pr. vrednostima konstante $m \leq -0,5$! Zato ćemo ubuduće smatrati da praktično u obzir dolaze jedino vrednosti $m > -0,5$. Pri ovim vrednostima konstante n zadovoljena je nejednačina (124) i o njoj više nećemo voditi računa.

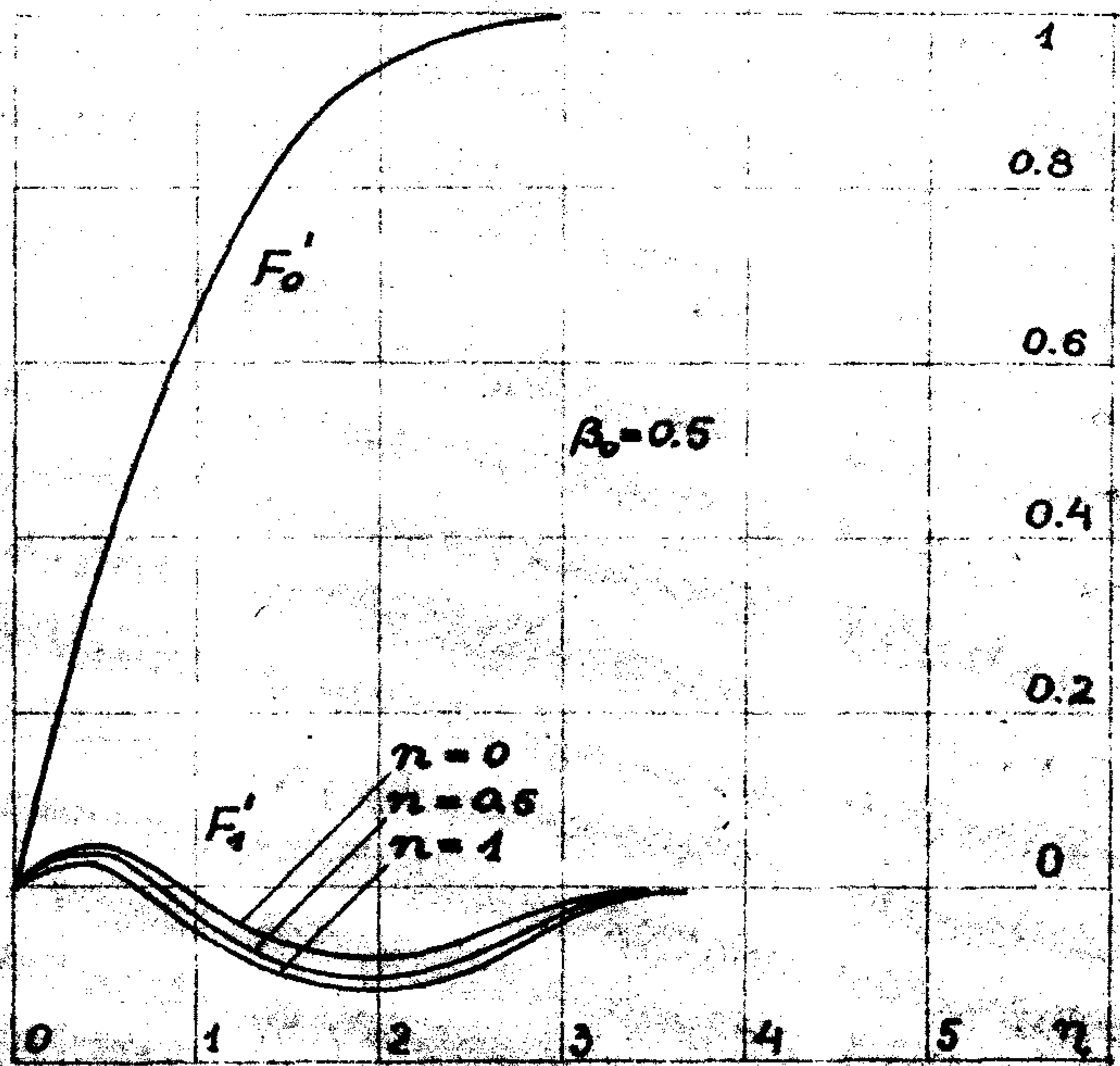
Pri integraljenju jednačine (43) na raspolaganju su nam stajala rešenja jednačine (18) (6) samo za odredjene vrednosti parametra β_o. Mi smo izabrali 4 vrednosti: $\beta_o = 0.5;0;-0.14$ i -0.18, od kojih prva odgovara ubrzanom strujanju, ili strujanju sa negativnim gradijentom pritiska, druga-strujanju sa gradijentom pritiska jednakim nuli, a zadnje dve-strujanju sa pozitivnim gradijentom pritiska, ali ne tako velikim da izazove odvajanje graničnog sloja. Za svaku od navedenih vrednosti parametra β_o integracija je sprovedena pri n = 0;0.5 i 1. Pri integraciji je korišćena metoda RUNGE-KUTTA-MERSON (18) na elektronskoj digitalnoj računskoj mašini NATIONAL ELLIOTT 803 B, pri zahtevanoj tačnosti od tri tačne decimale. Medjutim, prema nekim medjurezultatima koji su dobijeni, može se sa sigurnošću tvrditi da je postignuta tačnost od pet tačnih decimala. Za neophodnu redukciju graničnih uslova na jednu tačku korišćena je formula HELLER-a (8). Rezultati integracije dati su u vidu tabela u dodatku IV, a takodje i u vidu grafika na sl. 4 - 7. Kada su oni poznati, mogu se formirati svi izrazi potrebni za izračunavanje karakterističnih veličina graničnog sloja:

$$\frac{F_o(x)\tau_w(x)}{2\mu\, U(x)} = \frac{1}{\Delta(\xi)} \ddot{F}_o(0;\beta_o) + \ddot{F}_1(0;\beta_o,n) \qquad \ldots(129)$$

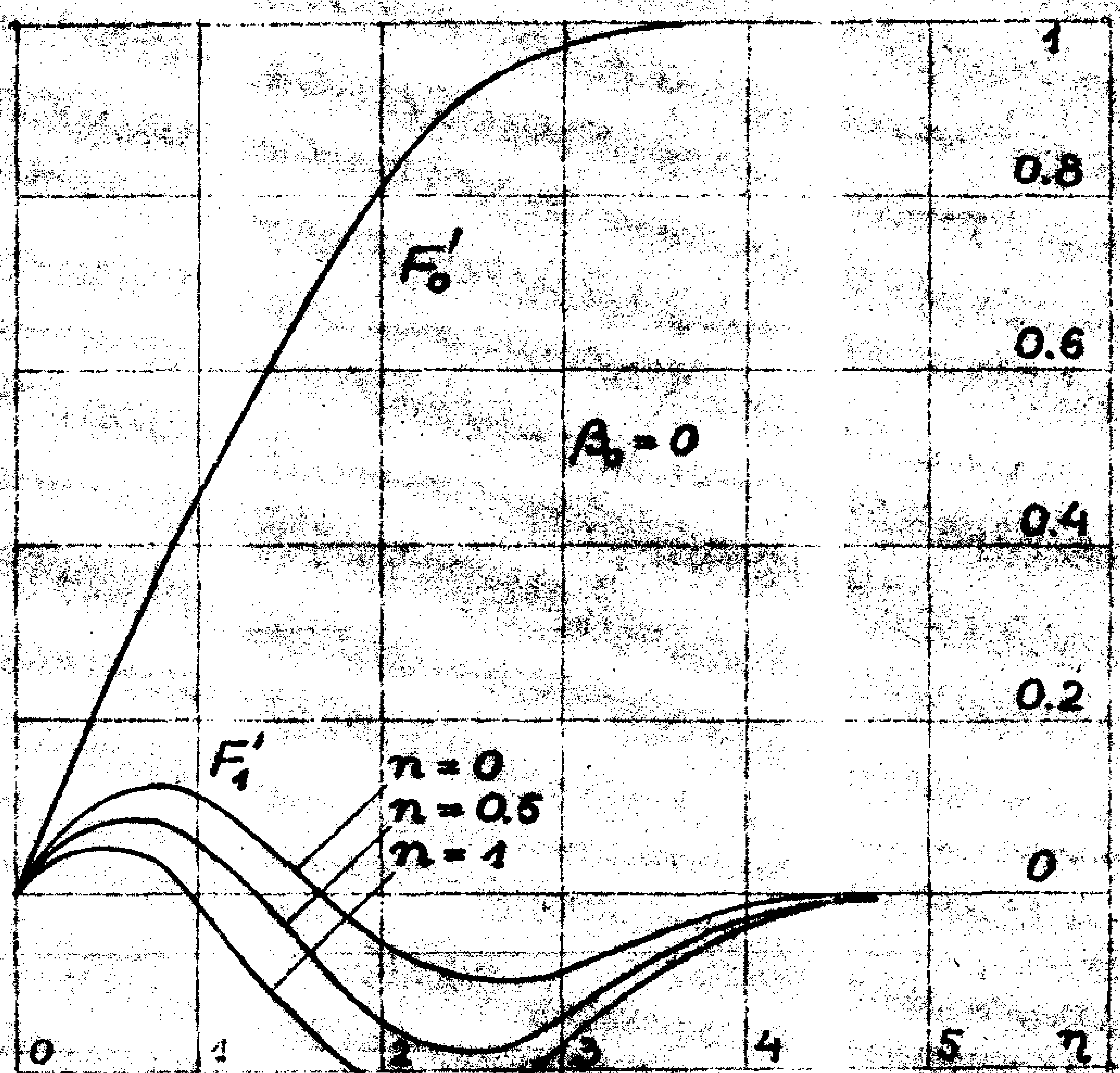
$$\frac{\Delta}{\bar{u}\, F_o^{2}} = \Delta(\xi)\left[\eta_o - \Delta(\xi)\eta_1\right] \qquad \ldots(130)$$

gde su:

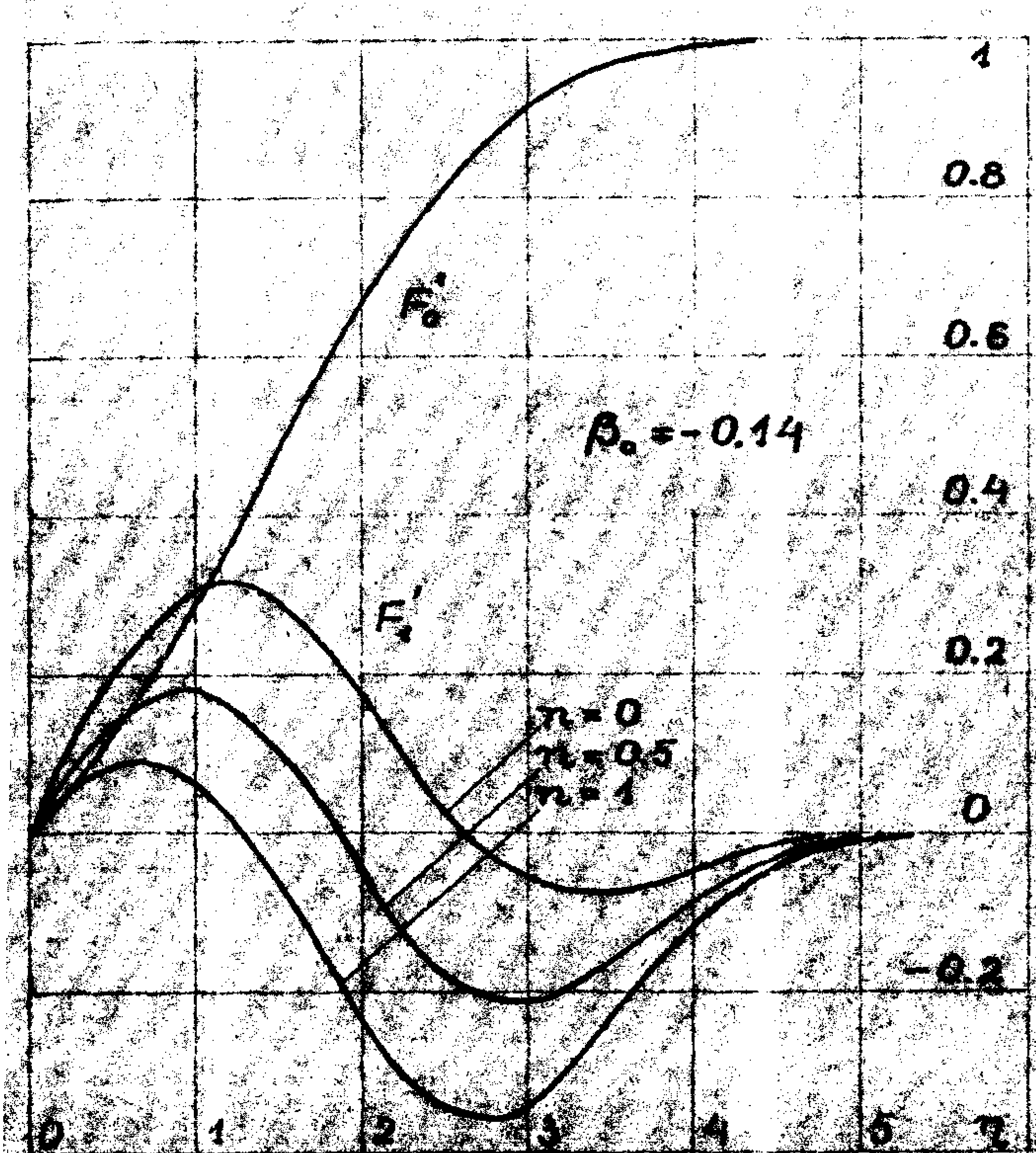
$$\eta_o = \lim_{\eta \to \infty}\left[\eta - F_o(\eta;\beta_o)\right]$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
F_0'
$\beta_0=0.5$
F_1'
n = 0
n = 0.5
n = 1
0
1
2
3
4
5
η

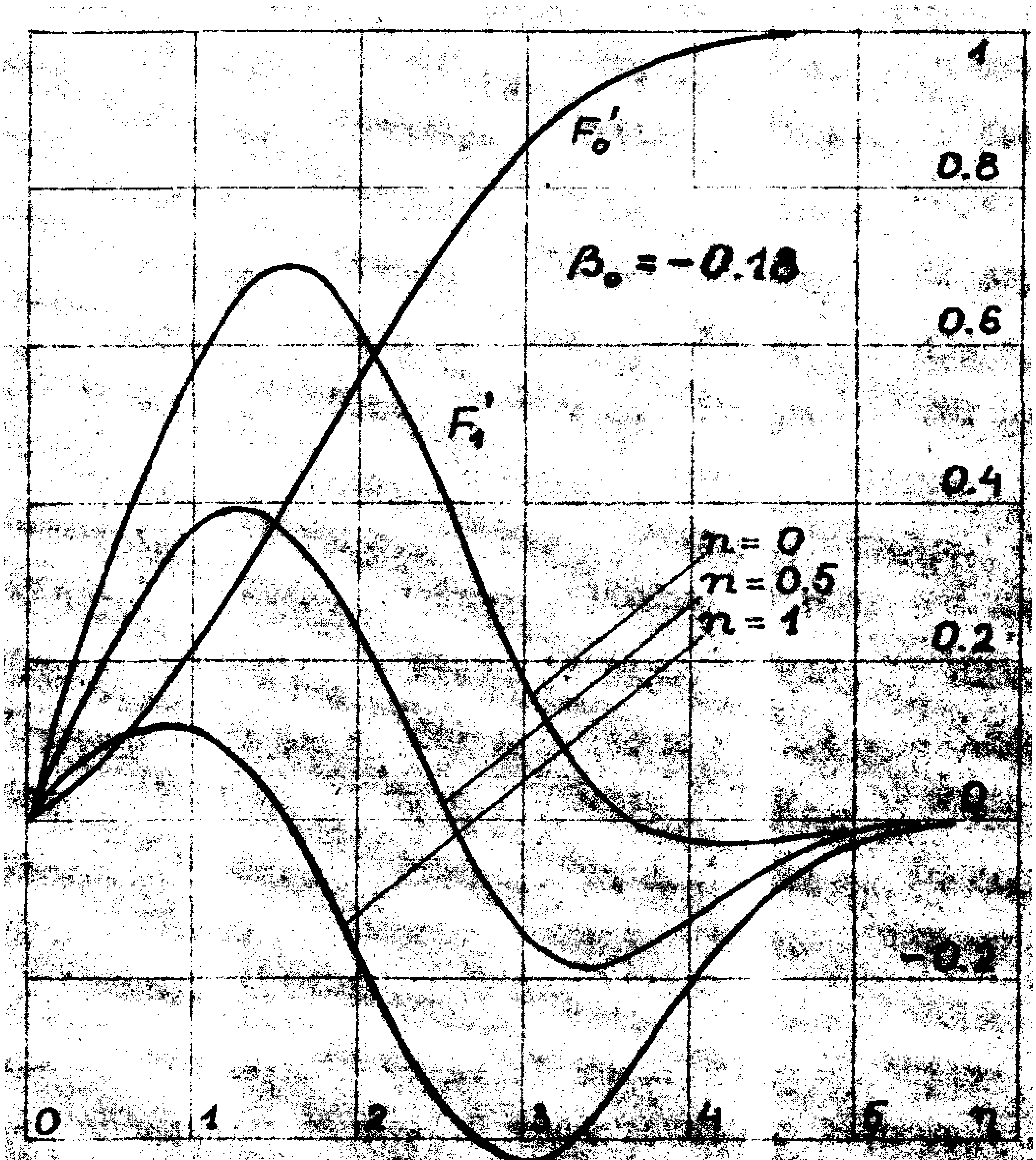
SL.4


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
F_0'
$\beta_0=0$
F_1'
n = 0
n = 0.5
n = 1
0
1
2
3
4
5
η

SL.5



Зк. 6



SL. 7

i: $\eta_1 = \lim_{\eta \to \infty} F_1(\eta; \beta_0, n)$

$$\frac{\Delta_2}{\bar{u}x_0^2} = \Delta(\xi)\left[\int_0^\infty F_0'(1-F_0')d\eta - \Delta(\xi)\int_0^\infty F_0'(2F_0'-1)d\eta\right. \qquad ...(131)$$

Posmatranjem grafika funkcije $F_1'(\eta; \beta_0, n)$ može se zaključiti da će drugi član u navedenim izrazima, pri određenom $\Delta(\xi)$, dolaziti do izražaja utoliko više, ukoliko je β_0 manje, pa se iz toga može izvesti zaključak da će i konvergencija odgovarajućih redova pri manjim β_0 biti lošija. Na pr. pri opstrujavanju kružnog cilindra, na mestu na kome je $\Delta(\xi) = 0.01$, u izrazu (128) za tangencijalni napon na površini cilindra, drugi član u ukupnom rezultatu pri $\beta_0 = 0.5$ čini 0.3%, dok pri $\beta_0 = -0.18$ njegov udeo u ukupnom rezultatu iznosi već 5.4%.

Prema literaturi kojom smo raspolagali, izgleda da je rešen jedino slučaj opstrujavanja kružnog cilindra ($n = 0$) pri gradijentu pritiska jednakom nuli ($\beta_0 = 0$). To je poznato rešenje SEBAN-BOND-KELLYja (12) prema kome je $F_1'(0) = 0.348$ i $F_1(\infty) = -0.019$. Mi smo u istom slučaju dobili da je $F_1'(0) \approx 0.346$ i $F_1(\infty) = -0.022$ i s obzirom da je rešenje SEBAN-BOND-KELLYja dobijeno na analognoj računskoj mašini, a verovatno uz primenu neke druge numeričke metode, može se reći da odstupanja nisu velika.

Može se još uočiti da jedan od rešenih slučajeva pripada klasi sličnih rešenja. To je slučaj opstrujavanja tela koje približno ima oblik obrtnog paraboloida ($n = 1/2$) pri gradijentu pritiska jednakim nuli ($m = 0$), jer je u tome slučaju ispunjen uslov $m + n = 1$. Lako se proverava da je tada $\Delta(\xi) = \text{const.}$, pa sve karakteristične veličine graničnog sloja (129) – (131) postaju funkcije samo promenljive η.

Sada ćemo preći na rešenje problema u slučaju kada je $\Delta(\xi) > 1$.

b) Ako je za neke vrednosti x $\Delta(\xi) > 1$, bezdimenziona strujna funkcija će biti:

$$W(\xi, \varphi) = W_0(\varphi) + \frac{W_1(\varphi)}{\ln \Delta(\xi)} + \cdots \qquad \ldots(132)$$

pri čemu je (83): $W_0(\varphi) = \varphi$, dok će $W_1(\varphi)$ zadovoljavati jednačinu (86):

$$\varphi W_1''' + \left[1 + (1+\gamma_0)\varphi\right] W_1'' - 2\beta_0 W_1' = 0 \qquad \ldots(133)$$

sa graničnim uslovima:

za $\varphi \to 0$ $\qquad W_1 \to C, \; W_1' \sim C_1 + \frac{1}{2}\ln\varphi$

za $\varphi \to \infty$ $\qquad W_1' \to 0$

Ova jednačina se može rešiti na sličan način kao i jednačina (78). Smenom promenljivih:

$$(1+\gamma_0)\varphi = \zeta \quad \text{i} \quad W_1'(\varphi) = e^{-\zeta}\Phi(\zeta)$$

ona se svodi na konfluentnu hipergeometrijsku jednačinu:

$$\zeta\Phi'' + (1-\zeta)\Phi' - \left(\frac{2\beta_0}{1+\gamma_0} + 1\right)\Phi = 0$$

ili ako se uzmu u obzir (125) i (126):

$$\zeta\Phi'' + (1-\zeta)\Phi' - (2m+1)\Phi = 0$$

Pri $m \neq -1/2, -1, -3/2, \ldots$ opšte rešenje ove jednačine će biti sledeća linearna kombinacija konfluentnih hipergeometrijskih funkcija prve i druge vrste:

$$\Phi(\zeta) = M\,\Phi(2m+1, 1; \zeta) + N\Psi(2m+1, 1; \zeta)$$

Pošto smo već došli do zaključka da će biti $m > -1/2$, smatraćemo da

Dobijeno rešenje važi za svako m koje praktično dolazi u obzir. Rešenja jednačine (113) će onda biti:

$$w_1(\varphi) = Me^{-\zeta}\Phi(2m+1,1;\zeta) + Ne^{-\zeta}\Psi(2m+1,1;\zeta)$$

gde je: $\zeta = \frac{2}{m+2n+1}\varphi$

Primenom spoljašnjeg graničnog uslova dobiće se da za $m \geq 0$ mora biti $M = 0$, a za $m < 0$ može biti M proizvoljno, dok N u oba slučaja može biti proizvoljno. Ne ograničavajući opštost, usvojićemo da za svako m bude $M = 0$, pa ćemo onda, primenom unutrašnjeg graničnog uslova na $w_1(\varphi)$, dobiti:

$$N = -\frac{\Gamma(2m+1)}{2}$$

i :

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[\psi(2m+1) + 2\gamma + \ln\frac{2}{m+2n+1}\right] \qquad \dots(134)$$

Prema tome, konačno će rešenje jednačine (113) biti:

$$w_1(\varphi) = -\frac{\Gamma(2m+1)}{2}e^{-\zeta}\Psi(2m+1,1;\zeta)$$

gde je: $\zeta = \frac{2}{m+2n+1}\varphi$; ili:

$$w_1(\varphi) = -\frac{m+2n+1}{4}\Gamma(2m+1)\int_0^{\frac{2}{m+2n+1}\varphi} e^{-\zeta}\Psi(2m+1,1;\zeta)\,d\zeta \qquad \dots(135)$$

Ako je ovo poznato, onda će izraz (103) za tangencijalni napon biti:

$$\frac{x_w(x)\;\tau_w(x)}{2\mu U(x)} = \frac{1}{\ln\Delta}\left(D_1 + \frac{D_2}{\ln\Delta}\right) \qquad \dots(136)$$

gde su: $D_1 = 1/2$ i $D_2 = C_1/2$, dok će karakteristične površine graničnog sloja biti:

$$\frac{A_1}{\mu r_0^2} - \frac{A_2}{\mu r_0^2} = - \frac{\Delta^2(\xi)}{\ln \Delta(\xi)} W_1(\infty) \qquad ...(137)$$

U posebnom slučaju, koga su posmatrali GLAUERT-LIGHTHILL (11), je m = n = 0, odnosno $r_0(x) = a = const.$ i $U(x) = U_\infty = const.$ U tom slučaju će izraz (136) postati:

$$\frac{a\tau_w}{\mu U_\infty} = \frac{2}{\ln \frac{8\nu x}{U_\infty a^2}} \left(1 + \frac{\pm \ln 2}{\ln \frac{8\nu x}{U_\infty a^2}} + ...\right)$$

Ako se on uporedi sa prva dva člana reda (23) koji je dobijen od strane GLAUERT-LIGHTHILL-a, videće se da izvesna odstupanja postoje. Medjutim, ona su brojno neznatna i svakako bi imala još manje uticaja ako bi se uzeo u obzir veći broj članova reda.

Pošto nam je za izračunavanje tangencijalnog napona neophodno da u svakom konkretnom slučaju imamo vrednost konstante C_1, u tabeli 1 su te vrednosti date u slučajevima koje mi posmatramo.

n \ β_0	0.5	0	-0.14	-0.18
0	0.8703	0.6352	0.4388	0.4368
0.5	0.7423	0.2886	-0.0380	-0.1390
1	0.6921	0.0899	-0.4349	-0.5623

TABELA 1

Pored toga, za izračunavanje karakterističnih površina graničnog sloja, potrebno je poznavati $W_1(\infty)$, odnosno raspolagati vrednostima integrala:

$$I(2m+1) = \int_0^\infty e^{-\zeta} G(2m+1, 1; \zeta) d\zeta$$

U slučajevima koje posmatramo su maksimalna i minimalna vrednost parasetuma 2m+1 : $(2m+1)_{max} = 2{,}3332$ i $(2m+1)_{min} = 0{,}5044$. Za odredjivanje svih potrebnih integrala odredjeni su samo I(0), I(1), I(2) i I(3), a ostali su dobijeni linearnom interpolacijom. Integral I(0) se lako dobija jer je $G(0,1;\zeta) \equiv 1$, pa je I(0) = 1. Integrali I(1), I(2), i I(3) su izračunati na pomenutoj računskoj mašini primenom Simpsonovog pravila. Tom prilikom su korišćene tabele tzv. eksponencijalnog integrala:

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

sa kojim su nama potrebne konfluentne hipergeometrijske funkcije druge vrste mogu, korišćenjem rekurentne formule ([17] str. 507):

$$G(d-1,b;x)+(b-2d-x)G(d,b;x)+d(1+d-b)G(d+1,b;x) = 0$$

i uzimanjem u obzir da je ([17] str. 510):

$$e^{-x}G(1,1;x) = E_1(x)$$

povezati na sledeći način:

$$e^{-x}G(2,1;x) = (x+1)E_1(x)-e^{-x}$$

$$e^{-x}G(3,1;x) = \frac{(x+2)^2-2}{4}E_1(x)-\frac{x+1}{4}e^{-x}$$

Dobijeni su ovi rezultati:

I(1) = 1,004699

I(2) = 0,504321

I(3) = 0,168666

pa su onda izračunate i vrednosti $W_1(\infty)$. One su date u tabeli 2.

n \ β_0	0.5	0	-0.14	-0.18
0	-0.202	-0.251	-0.263	-0.265
0,5	-0.312	-0.503	-0.575	-0.624
1	-0.338	-0.755	-1.119	-1.373

TABELA 2

Na taj način su pripremljeni svi podaci potrebni za kompletni proračun graničnog sloja, kako za $\Delta(\xi) < 1$, tako i za $\Delta(\xi) > 1$. Rasume se, konvergencija redova (128) i (132) otkazivaće u oblasti u kojoj je $\Delta(\xi) \approx 1$. U ovoj oblasti rezultati se mogu dobiti interpolacijom.

U tabelama 3,4 i 5 date su veličine sile otpora po jedinici dužine tela: $F_1 = 2\pi r_0(x)\tau_w(x)$ i površine istiskivanja. Vrednosti za $\lg\Delta(\xi) = 0$ ($\Delta(\xi) = 1$) dobijene su kvadratnom interpolacijom.

n = 0

$\lg\Delta(\xi)$	$\beta_0 = 0.5$		$\beta_0 = 0$		$\beta_0 = -0.14$		$\beta_0 = -0.18$	
	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$
-3	4.066	-3.094	3.771	-2.915	3.473	-2.797	3.221	-2.728
-2	3.058	-2.051	2.774	-1.915	1.468	-1.797	2.232	-1.731
-1	2.080	-1.009	1.802	-0.914	1.558	-0.808	1.403	-0.742
0	1.197	-0.137	1.080	0.000	0.881	0.061	0.922	0.048
1	0.574	0.949	0.543	1.040	0.521	1.058	0.512	1.062
2	0.211	2.639	0.191	2.737	0.178	2.758	0.174	2.761
3.	0.010	4.463	-0.002	4.561	-0.011	4.582	-0.015	4.584

TABELA 3

	n = 0.5							
	$\beta_0=0.5$		$\beta_0=0$		$\beta_0=-0.14$		$\beta_0=-0.18$	
$\lg\Delta(\xi)$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$
-3	4.066	-3.094	3.771	-2.915	3.479	-2.797	3.210	-2.728
-2	3.068	-2.092	2.773	-1.914	1.485	+1.798	2.225	-1.729
-1	2.078	-1.086	1.797	-0.906	1.519	-0.793	1.352	-0.736
0	1.181	-0.039	1.033	0.154	0.899	0.240	0.820	0.285
1	0.555	1.112	0.480	1.340	0.430	1.392	0.410	1.434
2	0.200	2.832	0.162	3.039	0.132	3.097	0.122	3.232
3	0.003	4.656	-0.023	4.863	-0.043	4.921	-0.049	4.957

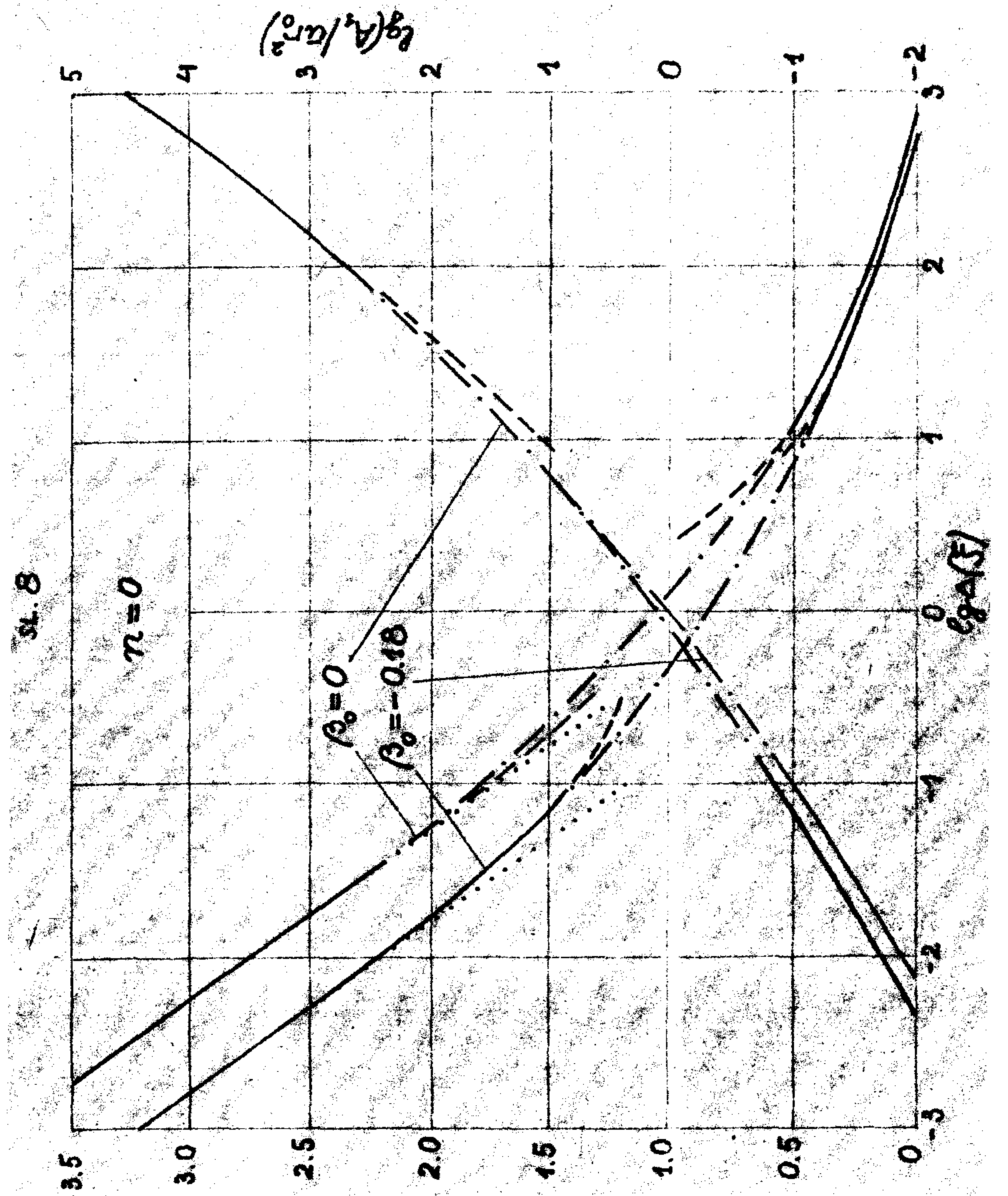
TABELA 4

	n = 2							
	$\beta_0=0.5$		$\beta_0=0$		$\beta_0=-0.24$		$\beta_0=-0.18$	
$\lg\Delta(\xi)$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$	$\lg\frac{F_1}{\mu U}$	$\lg\frac{A_1}{\pi r_0^2}$
-3	4.066	-3.094	3.771	-2.915	3.479	-2.797	3.208	-2.728
-2	3.068	-2.092	2.773	-1.914	1.482	-1.795	2.216	-1.726
-1	2.078	-1.084	1.782	-0.900	1.518	-0.780	1.285	-0.712
0	1.177	-0.021	0.998	0.425	0.821	0.391	0.726	0.469
1	0.559	1.167	0.452	1.526	0.346	1.687	0.314	1.776
2	0.198	2.866	0.144	3.215	0.093	3.386	0.079	3.475
3	0.000	4.690	-0.034	5.039	-0.069	5.218	-0.077	5.300

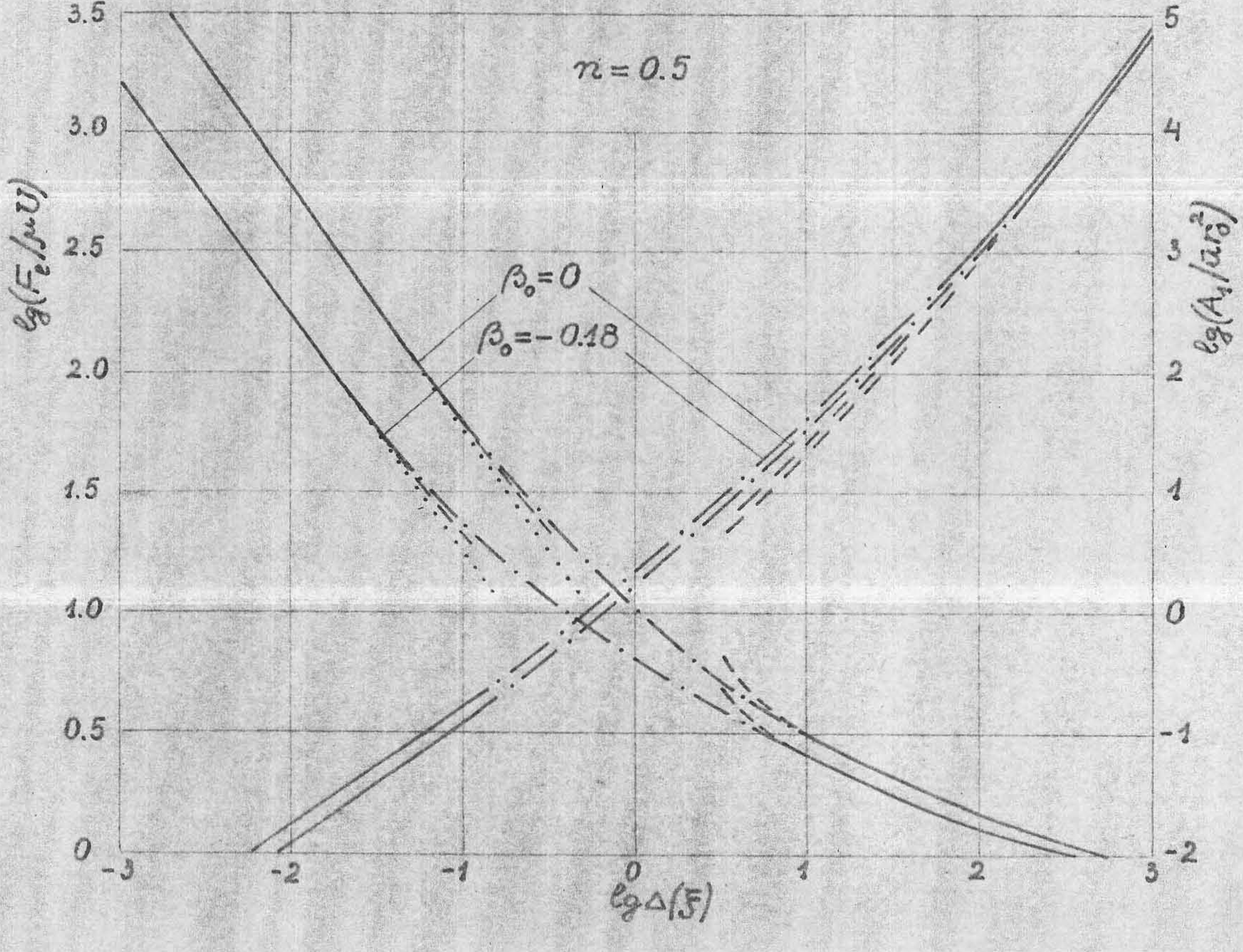
TABELA 5

Na osnovu ovih tabela napravljeni su grafici na sl.8,9 i 10. Da se ne bi preopterećivali crteži date su krive samo za $\beta_0 = 0$ i $\beta_0 = -0.18$. Punom linijom su izvučena rešenja koja daju redovi (128) i (132) dok je linija -.-.-.-. dobijena kvadratnom interpolacijom u oblasti u kojoj je $\Delta(\xi) \approx 1$. Očigledno je da se oba rešenja prosto nadovezuju jedno na drugo i da se njihovo "spajanje" u oblasti $\Delta(\xi) \approx 1$ može vrlo lako izvršiti. Linijom ——— je predstavljeno odstupanje koje bi se dobilo ako bi se u ovoj oblasti primenili redovi (128) i (132), čija konvergencija unjoj svakako ne može zadovoljavati. Tačkasta linija .... predstavlja rešenje koje bi se dobilo uzimanjem u obzir samo prvog člana reda (128 koji, kao što je već naglašeno, zadovoljava jednačinu FALKNER-SKAN (18) i odgovara problemu kod koga bi bio zanemaren uticaj poprečne krivine. U ovakvom logaritamskom dijagramu je to rešenje prava linija i jasno se vidi da ona u oblasti $\Delta(\xi) \approx 1$ i $\Delta(\xi) > 1$, kao što i treba očekivati u velikoj meri odstupa od rešenja koje smo mi dobili.

Pored toga, grafici na sl.8,9 i 10 u potpunosti potvrđuju opšte zaključke u pogledu uticaja poprečne krivine izvedene ranije (§3) tako se poprečna krivina tela uzme u obzir, dobiće se veća vrednost za tangencijalni napon na površini tela, a samim tim i za otpor; isto tako, otpor će biti veći ukoliko je veći gradijent pritiska nizvodno.

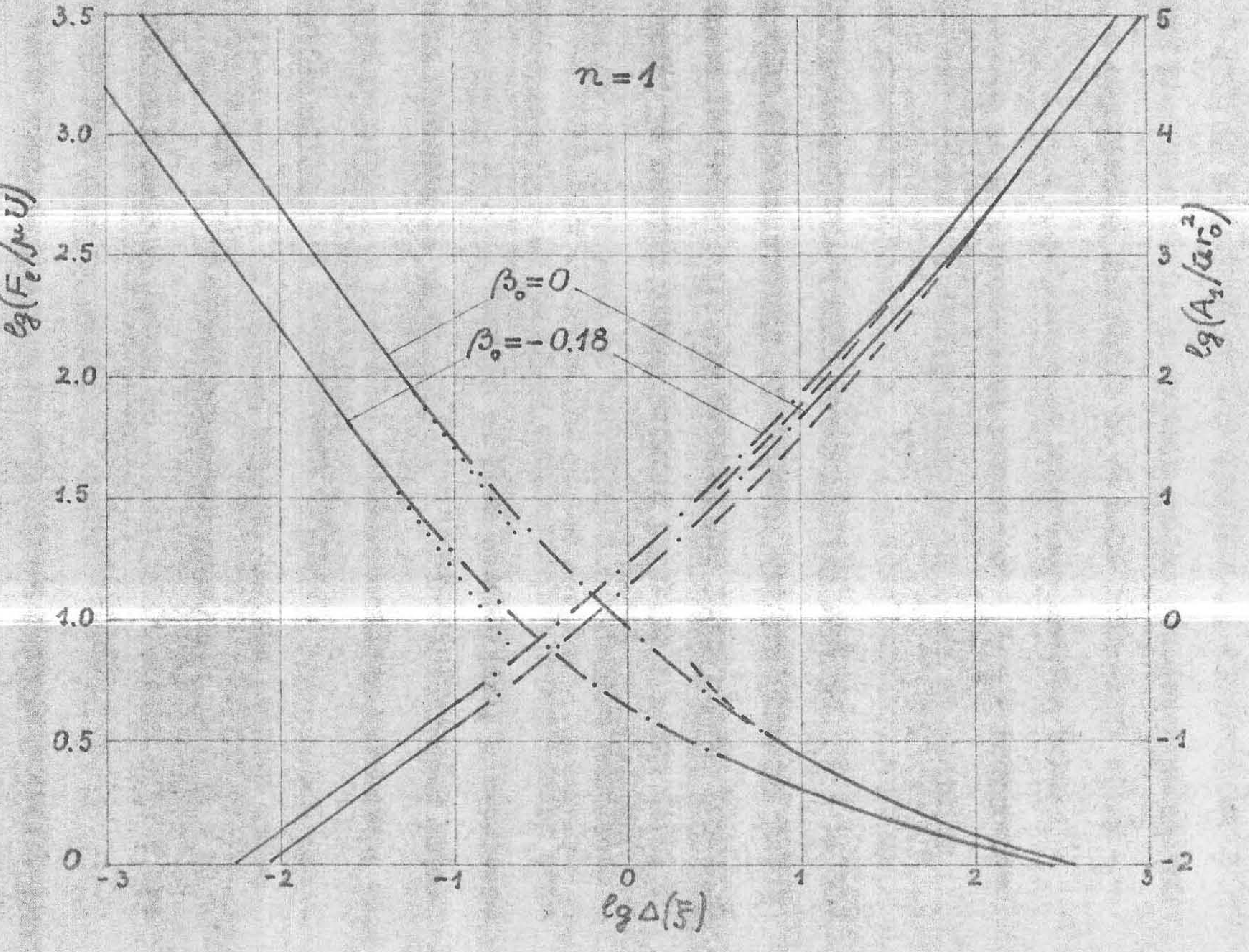

n=0
β₀=0
β₀=-0.18
lg(A₁/ur₀²)
lg(F₀/μU)
lg α(ξ)

SL. 9



n = 0.5
β₀ = 0
β₀ = −0.18
lg(F_e/μU)
lg(A₁/μr₀²)
lgΔ(ξ)
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
−3
−2
−1
0
1
2
3
5
4
3
2
1
0
−1
−2

SL. 10



$n = 1$
$\beta_o = 0$
$\beta_o = -0.18$
$lg(F_e/\mu U)$
$lg(A_1/\bar{u}r_o^2)$
$lg\,\Delta(\xi)$
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
5
4
3
2
1
0
-1
-2

REZIME

U radu je posmatran problem laminarnog, stacionarnog i nestišljivog graničnog sloja na obrtnim telima pri osnosimetričnom strujanju, u slučajevima kod kojih se ne može zanemariti odnos debljine graničnog sloja i poluprečnika poprečnog preseka tela.

Uveden je karakteristični parametar $\Delta(\xi)$ proporcionalan pomenutom odnosu i u slučaju kada je on manji od jedinice uopštene su promenljive SALJNIKOVa [3], a bezdimenziona strujna funkcija je predstavljena u vidu potencijalnog reda po $\Delta(\xi)$, čiji se prvi član svodi na rešenje SALJNIKOVa. Tom prilikom je, pored poznate glavne funkcije $\beta(\xi)$, uvedena još jedna glavna funkcija $\gamma(\xi)$ u kojoj je sadržan uticaj promene poprečne krivine tela. U slučaju kada je $\Delta(\xi)$ veće od jedinice, logaritamsko ponašanje profila brzine uslovilo je upotrebu neuniverzalno formulisanog unutrašnjeg graničnog uslova. Uvedene su nove promenljive, a bezdimenziona strujna funkcija je predstavljena u obliku specifičnog asimptotskog reda po stepenima logaritma karakterističnog parametra, čiji su koeficijenti izračunati u zatvorenom obliku.

Pri svemu tome je sačuvana osnovna osobina poznate opšte metode GÖRTLERa [4] za proračun ravanskih graničnih slojeva – mogućnost i praktičnost primene metode su nezavisni od oblika tela i brzine na spoljašnjoj granici graničnog sloja.

Pored toga, definisana su tzv. slična rešenja osnovnih jednačina i izračunato je nekoliko interesantnijih primera.

VLADAN D. DJORDJEVIĆ

LITERATURA

(1) L.G.LOJTSYANSKIĬ: Laminarnyĭ pogranichnyĭ sloĭ - FM, Moskva 1962.

(2) H.SCHLICHTING: Grenzschicht-Theorie - G.Braun, Karlsruhe 1965.

(3) V.SALJNIKOV: Übertragung der GÖRTLERschen Reihe auf die Berechnung von Grenzschichten an Rotationskörpern - DVL Bericht Nr.133, 1960.

(4) H.GÖRTLER: A New Series for the Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows - Journal of Mathematics and Mechanics, Vol 6, No.1, 1957.

(5) FALKNER,V.M. and SKAN,S.W.: Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations - Rep.Memor.aero.Res.Coun.,Lond.No.1314, 1930.

(6) D.R.HARTREE: On the Equation Occuring in Falkner and Skan's Approximate Treatment of the Equations of the Boundary Layer - Proc. Cambridge Philos.Soc. 33, 1937.

(7) H.GÖRTLER: Zahlentafeln universeller Funktionen zur neuen Reihe für die Berechnung laminarer Grenzschichten - DVL Bericht 34, 1957.

(8) G.HEIKE: Zahlentafeln universeller Funktionen zur Berechnung rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichten - DVL Bericht 135, 1960.

(9) R.F.PROBSTEIN and D.ELLIOTT: The Transverse Curvature Effect in Compressible Axially Symmetric Laminar Boundary-Layer Flow - Journal of the Aeronautical Sciences, No.3, 1956.

(10) S.I.PAI: On the Boundary-Layer Equations of a Very Slender Body of Revolution, Journal of the Aeronautical Sciences, No. 8, 1956.

(11) R.A.SEBAN and R.BOND: Skin-Friction and Heat-Transfer Characteristics of a Laminar Boundary Layer on a Cylinder in Axial Incompressible Flow, Journal of the Aeronautical Sciences, No.10,1951.

(12) H.R.KELLY: A Note on the Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder in Axial Incompressible Flow, Journal of the Aeronautical Sciences, No.9, 1954.

(13) M.B.GLAUERT and M.J.LIGHTHILL: The Axisymmetric Boundary Layer on a Long Thin Cylinder, Proceedings of the Royal Society, Ser.A, Vol.230, No.1181, 1955.

(14) K.STEWARTSON: The Asymptotic Boundary Layer on a Circular Cylinder in Axial Incompressible Flow, Quarterly of Applied Mathematics, Vol.13, No.2, 1955.

(15) N.N.LEBEDEV: Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya, FM, Moskva, 1963.

(16) E.YANKE,F.EMDE,F.LESH: Spetsial'nye funktsii - Nauka,Moskva,1964.

(17) HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS......U.S.Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964.

(18) 803 LIBRARY SUBROUTINES I 5 (Runge-Kutta-Merson integration), biblioteka "Energoprojekt"-a.

(19) E.WRAGE: Entwicklung und Anwendung einer allgemeinen Reihenmethode zur Berechnung laminarer, kompressibler Grenzschichten - disertacija.

(20) M.YASUHARA: Axisymmetric Viscous Flow Past Very Slender Bodies of Revolution - Journal of the Aerospace Sciences, No.6, 1962.

(21) M.H.WEI: Asymptotic Boundary Layer over a Slender Body of Revolution in Axial Compressible Flow, AIAA Journal, No.5, 1965.

(22) V.D.DJORDJEVIĆ: Übertragung der GÖRTLERschen Reihe auf dir Berechnung von Temperaturgrenzschichten an Rotationskörpern - Publications de l'institut mathématique, T.5(19), 1965.

(23) D.E.BOURNE and D.R.DAVIES: Heat Transfer through the Laminar Boundary Layer on a Circular Cylinder in Axial Incompressible Flow - Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol.11, Pt.1, 1958.

DODATAK I

Sistem jednačina za određivanje univerzalnih funkcija u slučaju c) (§6) :

$$L_1\left[p_1\right] = -3f_1F_{10} + \left[2(1+\beta_0)+\gamma_0\right] f_1'F_{00}'F_{10}' -$$
$$-(1+\gamma_0)f_1''F_{10} - (\eta f_1''' + f_1'')$$

$$L_1\left[q_1\right] = F_{00}'F_{10}' - F_{00}''F_{10}$$

$$L_2\left[p_{11}\right] = -3f_1p_1'' + (4+2\beta_0+\gamma_0)f_1'p_1' + 2F_{00}'p_1' - (3+\gamma_0)f_1''p_1 -$$
$$-5f_{11}F_{10}'' + (4+2\beta_0+\gamma_0)f_{11}'F_{10}' + 2f_1'F_{10} -$$
$$-(1+\gamma_0)f_{11}''F_{10} - (\eta f_{11}''' + f_{11}'')$$

$$L_2\left[p_2\right] = -5f_2F_{10}'' + (4+2\beta_0+\gamma_0)f_2'F_{10}' + 2F_{00}'F_{10}' -$$
$$-(1+\gamma_0)f_2''F_{10} - (\eta f_2''' + f_2'')$$

$$L_2\left[p_{1.1}\right] = -3f_1q_1'' + (4+2\beta_0+\gamma_0)f_1'q_1' + 2F_{00}'q_1' + F_{00}'p_1' -$$
$$-F_{00}''p_1 - (3+\gamma_0)f_1''q_1 + f_1'F_{10}' - f_1''F_{10}$$

$$L_2\left[q_{11}\right] = F_{00}'q_1' - F_{00}''q_1$$

$$L_2\left[q_2\right] = F_{00}'F_{10}' - F_{00}''F_{10}$$

$$L_3\left[p_{111}\right] = -3f_1p_{11}'' - 5f_{11}p_1'' - 7f_{111}F_{10}'' + (6+2\beta_0+\gamma_0)f_1'p_{11}' +$$
$$+2F_{00}'p_{11}' + (6+2\beta_0+\gamma_0)f_{11}'p_1' + 2f_1'p_1' +$$
$$+(6+2\beta_0+\gamma_0)f_{111}'F_{10}' + 2f_{11}'F_{10} - (5+\gamma_0)f_1''p_{11} -$$
$$-(3+\gamma_0)f_{11}''p_1 - (1+\gamma_0)f_{111}''F_{10} - (\eta f_{111}''' + f_{111}'')$$

$$
\begin{aligned}
L_3\left[p_{12}\right] = & -3f_1\ddot{p}_2 - 5f_2\ddot{p}_1 - 7f_{12}\ddot{F}_{10} + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_1\dot{p}_2 + 2\dot{F}_{00}\dot{p}_2 + \\
& + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_2\dot{p}_1 + 2\dot{F}_{00}\dot{p}_1 + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_{12}\dot{F}_{10} + 2\dot{f}_2\dot{F}_{10} + \\
& + 2\dot{f}_1\dot{F}_{10} - (5+\gamma_0)\ddot{f}_1 p_2 - (3+\gamma_0)\ddot{f}_2 p_1 - \\
& - (1+\gamma_0)\ddot{f}_{12}F_{10} - (\eta\dddot{f}_{12} + \ddot{f}_{12})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3\left[p_3\right] = & -7f_3\ddot{F}_{10} + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_3\dot{F}_{10} + 2\dot{F}_{00}\dot{F}_{10} - \\
& - (1+\gamma_0)\ddot{f}_3 F_{10} - (\eta\dddot{f}_3 + \ddot{f}_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3\left[t_{11,1}\right] = & -3f_1\ddot{t}_{1,1} - 5f_{11}\ddot{q}_1 + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_1\dot{t}_{1,1} + 2\dot{F}_{00}\dot{t}_{1,1} + \\
& + \dot{F}_{00}\dot{p}_{11} + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_{11}\dot{q}_1 + 2\dot{f}_1\dot{q}_1 + \dot{f}_1\dot{p}_1 + \dot{f}_{11}\dot{F}_{10} - \\
& - (5+\gamma_0)\ddot{f}_1 t_{1,1} - \ddot{F}_{00}p_{11} - (3+\gamma_0)\ddot{f}_{11}q_1 - \ddot{f}_1 p_1 - \ddot{f}_{11}F_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3\left[t_{2,1}\right] = & -5f_2\ddot{q}_1 + \dot{F}_{00}\dot{p}_2 + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_2\dot{q}_1 + 2\dot{F}_{00}\dot{q}_1 + \dot{f}_2\dot{F}_{10} - \\
& - \ddot{F}_{00}p_2 - (3+\gamma_0)\ddot{f}_2 q_1 - \ddot{f}_2 F_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3\left[t_{1,11}\right] = & -3f_1\ddot{q}_{11} + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_1\dot{q}_{11} + 2\dot{F}_{00}\dot{q}_{11} + \dot{F}_{00}\dot{t}_{1,1} + \\
& + \dot{f}_1\dot{q}_1 - (5+\gamma_0)\ddot{f}_1 q_{11} - \ddot{F}_{00}t_{1,1} - \ddot{f}_1 q_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_3\left[t_{1,2}\right] = & -3f_1\ddot{q}_2 + (6+2\beta_0+\gamma_0)\dot{f}_1\dot{q}_2 + 2\dot{F}_{00}\dot{q}_2 + \dot{F}_{00}\dot{p}_1 + \dot{f}_1\dot{F}_{10} - \\
& - (5+\gamma_0)\ddot{f}_1 q_2 - \ddot{F}_{00}p_1 - \ddot{f}_1 F_{10}
\end{aligned}
$$

$$L_3\left[q_{111}\right] = 2\dot{F}_{00}\dot{q}_{11} - \ddot{F}_{00}q_{11}$$

$$L_3\left[q_{12}\right] = 2\dot{F}_{00}\dot{q}_2 + \dot{F}_{00}\dot{q}_1 - \ddot{F}_{00}q_2 - \ddot{F}_{00}q_1$$

$$L_3\left[q_3\right] = \dot{F}_{00}\dot{F}_{10} - \ddot{F}_{00}F_{10}$$

gdje je $L_k\left[X\right]$ - linearni diferencijalni operator oblika:

$$L_k\left[X\right] \equiv \dddot{X} + F_{00}\ddot{X} - (2k+2\beta_0+\gamma_0)\dot{F}_{00}\dot{X} + (1+2k+\gamma_0)\ddot{F}_{00}X$$

DODATAK II

Sistem jednačina za odredjivanje univerzalnih funkcija u slučajevima a) i b) ($\xi 6$):

$$L_{\frac{1}{2}}\left[P_{\frac{1}{2}}\right] = -2f_{\frac{1}{2}}F''_{10} + (1+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{1}{2}}F'_{10} + 2F'_{00}F'_{10} -$$

$$-(1+\gamma_0)f''_{\frac{1}{2}}F_{10} - (\gamma f'''_{\frac{1}{2}} + f''_{\frac{1}{2}})$$

$$L_{\frac{1}{2}}\left[Q_{\frac{1}{2}}\right] = F'_{00}F'_{10} - F''_{00}F_{10}$$

$$L_1\left[P_{\frac{11}{22}}\right] = -2f_{\frac{1}{2}}P''_{\frac{1}{2}} - 3f_{\frac{11}{22}}F''_{10} + (2+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{1}{2}}P'_{\frac{1}{2}} + 2F'_{00}P'_{\frac{1}{2}} +$$

$$+(2+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{11}{22}}F'_{10} + 2f'_{\frac{1}{2}}F'_{10} - (2+\gamma_0)f''_{\frac{11}{22}}P_{\frac{1}{2}} -$$

$$-(1+\gamma_0)f''_{\frac{11}{22}}F_{10} - (\gamma f'''_{\frac{11}{22}} + f''_{\frac{11}{22}})$$

$$L_1\left[P_1\right] = -3f_1F''_{10} + (2+2\beta_0+\gamma_0)f'_1F'_{10} + 2F'_{00}F'_{10} -$$

$$-(1+\gamma_0)f''_1F_{10} - (\gamma f'''_1 + f''_1)$$

$$L_1\left[Q_{\frac{11}{22}}\right] = -2f_{\frac{1}{2}}Q''_{\frac{1}{2}} + (2+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{1}{2}}Q'_{\frac{1}{2}} + 2F'_{00}Q'_{\frac{1}{2}} + 2F'_{00}Q'_{\frac{1}{2}} + F' \ldots$$

$$+ f'_{\frac{1}{2}}F'_{10} - (2+\gamma_0)f''_{\frac{1}{2}}Q_{\frac{1}{2}} - F''_{00}Q_{\frac{1}{2}} - f''_{\frac{1}{2}}F_{10}$$

$$L_1\left[Q_{\frac{11}{22}}\right] = F'_{00}Q'_{\frac{1}{2}} - F''_{00}Q_{\frac{1}{2}}$$

$$L_1\left[Q_1\right] = F'_{00}F'_{10} - F''_{00}F_{10}$$

$$L_{\frac12}\left[D_{\frac{111}{222}}\right] = -2f_{\frac12}D''_{\frac{11}{22}} - 3f_{\frac{11}{22}}D''_{\frac12} - 4f_{\frac{111}{222}}F''_{10} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac12}D'_{\frac{11}{22}} +$$

$$+ 2F'_{00}D'_{\frac{11}{22}} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{11}{22}}D'_{\frac12} + 2f'_{\frac12}D'_{\frac12} +$$

$$+ (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{111}{222}}F'_{10} + 2f'_{\frac{11}{22}}F'_{10} - (3+\gamma_0)f''_{\frac12}D_{\frac{11}{22}} -$$

$$- (2+\gamma_0)f''_{\frac{11}{22}}D_{\frac12} - (1+\gamma_0)f''_{\frac{111}{222}}F_{10} - (\eta f'''_{\frac{111}{222}} + f''_{\frac{111}{222}})$$

$$L_{\frac12}\left[D_{\frac12 1}\right] = -2f_{\frac12}D''_1 - 3f_1D''_{\frac12} - 4f_{\frac12 1}F''_{10} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac12}D'_1 + 2F'_{00}D'_1 +$$

$$+ (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_1D'_{\frac12} + 2F'_{00}D'_{\frac12} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac12 1}F'_{10} +$$

$$+ 2f'_1F'_{10} + 2f'_{\frac12}F'_{10} - (3+\gamma_0)f''_{\frac12}D_1 - (2+\gamma_0)f''_1D_{\frac12} -$$

$$- (1+\gamma_0)f''_{\frac12 1}F_{10} - (\eta f'''_{\frac12 1} + f''_{\frac12 1})$$

$$L_{\frac12}\left[D_{\frac12}\right] = -4f_{\frac12}F''_{10} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac12}F'_{10} + 2F'_{00}F'_{10} -$$

$$- (1+\gamma_0)f''_{\frac12}F_{10} - (\eta f'''_{\frac12} + f''_{\frac12})$$

$$L_{\frac12}\left[t_{\frac{11}{22},\frac12}\right] = -2f_{\frac12}t''_{\frac12,\frac12} - 3f_{\frac{11}{22}}Q''_{\frac12} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac12}t'_{\frac12,\frac12} + 2F'_{00}t'_{\frac12,\frac12} +$$

$$+ F''_{00}D'_{\frac{11}{22}} + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_{\frac{11}{22}}Q'_{\frac12} + 2f'_{\frac12}Q'_{\frac12} + f'_{\frac12}D'_{\frac12} + f'_{\frac{11}{22}}F'_{10} -$$

$$- F''_{00}D_{\frac{11}{22}} - (3+\gamma_0)f''_{\frac12}t_{\frac12,\frac12} - (2+\gamma_0)f''_{\frac{11}{22}}Q_{\frac12} - f''_{\frac12}Q_{\frac12} - f''_{\frac{11}{22}}F_{10}$$

$$L_{\frac12}\left[t_{1,\frac12}\right] = -3f_1Q''_{\frac12} + F'_{00}D'_1 + (3+2\beta_0+\gamma_0)f'_1Q'_{\frac12} + 2F''_{00}Q'_{\frac12} + f'_1F'_{10} -$$

$$- F''_{oo} p_1 - (2+\gamma_o) f''_1 q_{\frac{1}{2}} - f''_1 F_{1o}$$

$$L_{\frac{1}{2}}\left[t_{\frac{1}{2},\frac{11}{222}}\right] = - 2f_{\frac{1}{2}} q''_{\frac{11}{22}} + (3+2\beta_o+\gamma_o) f'_{\frac{1}{2}} q'_{\frac{11}{22}} + 2F'_{oo} q'_{\frac{11}{22}} + F'_{oo} t'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} +$$

$$+ f'_{\frac{1}{2}} q'_{\frac{1}{2}} - (3+\gamma_o) f''_{\frac{1}{2}} q_{\frac{11}{22}} - F''_{oo} t_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} - f''_{\frac{1}{2}} q_{\frac{1}{2}}$$

$$L_{\frac{1}{2}}\left[t_{\frac{1}{2},1}\right] = - 2f_{\frac{1}{2}} q''_1 + (3+2\beta_o+\gamma_o) f'_{\frac{1}{2}} q'_1 + 2F'_{oo} q'_1 + F'_{oo} p'_{\frac{1}{2}} + f'_{\frac{1}{2}} F'_{1o} -$$

$$- (3+\gamma_o) f''_{\frac{1}{2}} q_1 - F''_{oo} p_{\frac{1}{2}} - f''_{\frac{1}{2}} F_{1o}$$

$$L_{\frac{1}{2}}\left[q_{\frac{111}{222}}\right] = F'_{oo} q'_{\frac{11}{22}} - F''_{oo} q_{\frac{11}{22}}$$

$$L_{\frac{1}{2}}\left[q_{\frac{1}{2}1}\right] = F'_{oo} q'_1 + F'_{oo} q'_{\frac{1}{2}} - F''_{oo} q_1 - F''_{oo} q_{\frac{1}{2}}$$

$$L_{\frac{1}{2}}\left[q_{\frac{1}{2}}\right] = F''_{oo} F'_{1o} - F''_{oo} F_{1o}$$

gde je $L_{\frac{k}{2}}\left[X\right]$ – linearni diferencijalni operator oblika:

$$L_{\frac{k}{2}}\left[X\right] \equiv X''' + F_{oo} X'' - (k+2\beta_o+\gamma_o) F'_{oo} X' + (1+k+\gamma_o) F''_{oo} X$$

DODATAK III

Ako su:

$$a_2 = 10\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{\frac{1}{2}} - 8\,\gamma_{\frac{1}{2}}^2 - 3\,\gamma_1$$

$$a_3 = 2\,\beta_{\frac{1}{2}}^2 - \beta_1 - 4\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{\frac{1}{2}} + 2\,\gamma_{\frac{1}{2}}^2 + \gamma_1$$

$$a_4 = 3\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{\frac{1}{2}} - \gamma_{\frac{1}{2}}^2$$

$$a_5 = 3\,\beta_{\frac{1}{2}}^2\,\gamma_{\frac{1}{2}} + 2\,\gamma_{\frac{1}{2}}^2$$

onda je diferencijalna jednačina za odredjivanje $W_{1\frac{1}{2}}(\varphi)$:

$$\varphi W_{1\frac{1}{2}}''' + \left(1+\frac{\varphi}{2}\right) W_{1\frac{1}{2}}'' - 4W_{1\frac{1}{2}}' = b_7 e^{-\varphi/2} G(7,1;\varphi/2) +$$

$$+ b_6 e^{-\varphi/2} G(6,1;\varphi/2) + b_5 e^{-\varphi/2} G(5,1;\varphi/2) + b_4 e^{-\varphi/2} G(4,1;\varphi/2) +$$

$$+ b_3 e^{-\varphi/2} G(3,1;\varphi/2) + b_2 e^{-\varphi/2} G(2,1;\varphi/2) + b_1 e^{-\varphi/2} G(1,1;\varphi/2) +$$

$$+ b_0 e^{-\varphi/2} G(0,1;\varphi/2) \qquad (G(0,1;x) \equiv 1)$$

sa graničnim uslovima:

$$\text{za} \quad \varphi \to 0 \qquad W_{1\frac{1}{2}} \to 0, \; W_{1\frac{1}{2}}' \sim c_{1\frac{1}{2}}$$

$$\text{za} \quad \varphi \to \infty \qquad W_{1\frac{1}{2}}' \to 0$$

gde su:

$$b_0 = -\frac{2}{9}\,\gamma_{\frac{1}{2}}^3$$

$$b_1 = -\frac{4}{9}\beta_{\frac12}\gamma^2_{\frac12} + \gamma_{\frac12}\left(\frac43\beta_1 - \frac{2}{15}a_2\right) + \frac23\gamma_{\frac12}\gamma_1$$

$$b_2 = -\frac{4}{15}\beta_{\frac12}a_2 + \gamma_{\frac12}\left(\frac43\beta_1 - a_3 + \frac{2a_2}{15}\right) + \gamma_1\left(2\beta_{\frac12} - \frac83\gamma_{\frac12}\right) - \gamma_{\frac12}$$

$$b_3 = -2\beta_{\frac12}a_3 + 4\beta_1(\beta_{\frac12} - \gamma_{\frac12}) - 2\beta_{\frac12} + \frac{16}{3}a_4\gamma_{\frac12} + 2a_3\gamma_{\frac12} -$$

$$- 4\gamma_1(\beta_{\frac12} - \gamma_{\frac12}) + 2\gamma_{\frac12}$$

$$b_4 = \frac{32}{3}\beta_{\frac12}a_4 + 16\gamma_{\frac12}a_5 - 16\gamma_{\frac12}a_4 - 8\gamma_1(3\beta_{\frac12} - \gamma_{\frac12})$$

$$b_5 = 32\beta_{\frac12}a_5 + 2\beta_1 N_{1\frac12} - 64\gamma_{\frac12}a_5 + 32\gamma_1(3\beta_{\frac12} - \gamma_{\frac12})$$

$$b_6 = 2\gamma_{\frac12}N_{11}$$

$$b_7 = 2\beta_{\frac12}N_{11} - 6\gamma_{\frac12}N_{11}$$

a $N_{1\frac12}$ i N_{11} su odredjeni na str. 56 i 58.

Rešenje ove diferencijalne jednačine će biti:

$$W^*_{1\frac12}(\varphi) = N_{1\frac12}e^{-\varphi/2}G(9,11,\varphi/2) - b_7e^{-\varphi/2}G(7,11,\varphi/2) -$$

$$- \frac23 b_6e^{-\varphi/2}G(6,11,\varphi/2) - \frac12 b_5e^{-\varphi/2}G(5,11,\varphi/2) -$$

$$- \frac25 b_4e^{-\varphi/2}G(4,11,\varphi/2) - \frac13 b_3e^{-\varphi/2}G(3,11,\varphi/2) -$$

$$- \frac27 b_2e^{-\varphi/2}G(2,11,\varphi/2) - \frac14 b_1e^{-\varphi/2}G(1,11,\varphi/2) -$$

$$- \frac29 b_0e^{-\varphi/2}G(0,11,\varphi/2)$$

gdje je:

$$N_{1\frac{1}{2}} = -26880\,\beta_{\frac{1}{2}}^{3} - 40320\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\beta_{1} - 13440\,\beta_{\frac{1}{2}} + 80640\,\beta_{\frac{1}{2}}^{2}\,\gamma_{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 53760\,\beta_{1}\,\gamma_{\frac{1}{2}} + 626200\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{\frac{1}{2}}^{2} + 16128\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{1} +$$

$$+ 11264\,\gamma_{\frac{1}{2}}^{3} - 9216\,\gamma_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{1} + 1920\,\gamma_{\frac{1}{2}}$$

dok istovremeno mora biti:

$$C_{1\frac{1}{2}} = 0.039131\,\beta_{\frac{1}{2}}^{3} - 0.299632\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\beta_{1} + 0.411253\,\beta_{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 0.021980\,\beta_{\frac{1}{2}}^{2}\,\gamma_{\frac{1}{2}} - 1.000469\,\beta_{1}\,\gamma_{\frac{1}{2}} - 29.658640\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{\frac{1}{2}}^{2} -$$

$$- 0.070213\,\beta_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{1} - 0.004973\,\gamma_{\frac{1}{2}}^{3} + 0.090725\,\gamma_{\frac{1}{2}}\,\gamma_{1} +$$

$$+ 0.084107\,\gamma_{\frac{1}{2}}$$

DODATAK IV

$m = 0\ ,\ \beta_0 = 0.5 \quad (n = 0.333)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.264866
0.2	0.004527	0.039754	0.119430
0.4	0.013968	0.050515	-0.004980
0.6	0.023347	0.040493	-0.088564
0.8	0.029314	0.017676	-0.133497
1.0	0.030054	-0.010635	-0.144493
1.2	0.025105	-0.036333	-0.128756
1.4	0.015065	-0.060950	-0.095260
1.6	0.001242	-0.075888	-0.053504
1.8	-0.014723	-0.082379	-0.012083
2.0	-0.031194	-0.081181	0.022538
2.2	-0.046800	-0.074069	0.046692
2.4	-0.060576	-0.063267	0.059506
2.6	-0.072006	-0.050938	0.062318
2.8	-0.080968	-0.038633	0.057772
3.0	-0.087693	-0.028120	0.048897
3.2	-0.092349	-0.019384	0.038390
3.4	-0.095527	-0.012741	0.028222
3.6	-0.097572	-0.007996	0.019543
3.8	-0.098829	-0.004796	0.012800
4.0	-0.099567	-0.002750	0.007952
4.2	-0.099982	-0.001509	0.004696
4.4	-0.100206	-0.000792	0.002641
4.6	-0.100321	-0.000398	0.001416
4.8	-0.100377	-0.000191	0.000724
5.0	-0.100404	-0.000087	0.000353
5.2	-0.100416	-00000038	0.000164
5.4	-0.100421	-0.000015	0.000073
5.6	-0.100423	-0.000005	0.000030
5.8	-0.100423	-0.000002	0.000012
6.0	-0.100424	-0.000000	0.000005

$n = 0 \, , \beta_e = 0 \quad (m = 0)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.345738
0.2	0.006288	0.058742	0.251628
0.4	0.022640	0.100649	0.157548
0.6	0.045301	0.122882	0.065361
0.8	0.070595	0.127285	-0.021073
1.0	0.095083	0.115193	-0.096409
1.2	0.115771	0.089731	-0.154698
1.4	0.130347	0.054810	-0.190665
1.6	0.137368	0.015187	-0.201844
1.8	0.136452	-0.024003	-0.186697
2.0	0.128124	-0.058083	-0.151103
2.2	0.113800	-0.083525	-0.101778
2.4	0.095419	-0.098479	-0.047750
2.6	0.075115	-0.102898	0.002242
2.8	0.054864	-0.098299	0.041583
3.0	0.036230	-0.087209	0.066863
3.2	0.020221	-0.072504	0.077967
3.4	0.007292	-0.056810	0.077326
3.6	-0.002971	-0.042113	0.068667
3.8	-0.009761	-0.029626	0.055930
4.0	-0.014507	-0.019798	0.042328
4.2	-0.017795	-0.012599	0.030003
4.4	-0.019787	-0.007641	0.020086
4.6	-0.020960	-0.004417	0.012633
4.8	-0.021616	-0.002434	0.007553
5.0	-0.021996	-0.001276	0.004289
5.2	-0.022181	-0.000633	0.002317
5.4	-0.022270	-0.000293	0.001194
5.6	-0.022305	-0.000212	0.000568
5.8	-0.022324	-0.000039	0.000278
6.0	-0.022327	-0.000000	0.000126

$n = 0 \, , \beta_0 = -0.14 \qquad (x = -0.0654)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.483597
0.2	0.009333	0.092537	0.429789
0.4	0.035816	0.171091	0.363829
0.6	0.076832	0.236130	0.284665
0.8	0.129134	0.284167	0.193913
1.0	0.189292	0.313083	0.094023
1.2	0.252996	0.321496	-0.010034
1.4	0.316411	0.309294	-0.110751
1.6	0.375437	0.278034	-0.199225
1.8	0.426565	0.232040	-0.266234
2.0	0.467243	0.173468	-0.304162
2.2	0.499665	0.111999	-0.308978
2.4	0.512935	0.052025	-0.283897
2.6	0.517016	0.004539	-0.228397
2.8	0.512971	-0.038738	-0.161888
3.0	0.502460	-0.065020	-0.091376
3.2	0.488269	-0.075031	-0.028444
3.4	0.472888	-0.076424	0.019584
3.6	0.458228	-0.069195	0.049808
3.8	0.445493	-0.057699	0.063129
4.0	0.435262	-0.044788	0.064298
4.2	0.427534	-0.032535	0.057095
4.4	0.422096	-0.022217	0.045778
4.6	0.418688	-0.014255	0.034022
4.8	0.416265	-0.008827	0.023695
5.0	0.414948	-0.004725	0.014943
5.2	0.414257	-0.002385	0.008890
5.4	0.413925	-0.001072	0.004680
5.6	0.413784	-0.000416	0.002264
5.8	0.413735	-0.000124	0.000926
6.0	0.413724	-0.000000	0.000386

$n = 0 \,, \beta_0 = -0.18 \qquad (m = -0.0826)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.728030
0.2	0.014364	0.142530	0.694705
0.4	0.0560863	0.276818	0.645405
0.6	0.124319	0.399505	0.578287
0.8	0.215241	0.506815	0.491411
1.0	0.325750	0.594699	0.384019
1.2	0.451595	0.659126	0.257253
1.4	0.587598	0.696554	0.124884
1.6	0.728206	0.704501	−0.036079
1.8	0.867373	0.682272	−0.184746
2.0	0.999224	0.631634	−0.317955
2.2	1.118426	0.556995	−0.422684
2.4	1.220865	0.469241	−0.457400
2.6	1.303963	0.365118	−0.506088
2.8	1.366969	0.265819	−0.479833
3.0	1.410906	0.175656	−0.416658
3.2	1.438254	0.100710	−0.330213
3.4	1.452420	0.044085	−0.233981
3.6	1.457124	0.005891	−0.148025
3.8	1.455853	−0.016205	−0.076069
4.0	1.451471	−0.025896	−0.024438
4.2	1.446045	−0.027327	0.007249
4.4	1.440855	−0.024097	0.023089
4.6	1.436559	−0.018842	0.027545
4.8	1.433326	−0.013471	0.025325
5.0	1.431110	−0.008879	0.019848
5.2	1.429686	−0.005567	0.013591
5.4	1.4288813	−0.003309	0.009125
5.6	1.428317	−0.001744	0.006480
5.8	1.428082	−0.000674	0.004294
6.0	1.428021	−0.000000	0.002506

$n = 0.5$, $\beta_0 = 0.5$ $(m = 0.6666)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.265692
0.2	0.004243	0.035911	0.100993
0.4	0.012425	0.042760	-0.025039
0.6	0.019842	0.028621	-0.109405
0.8	0.023016	0.001627	-0.194273
1.0	0.020143	-0.030652	-0.163148
1.2	0.010842	-0.061692	-0.143840
1.4	-0.004119	-0.086989	-0.103434
1.6	-0.023185	-0.102435	-0.054346
1.8	-0.044427	-0.108361	-0.005707
2.0	-0.065924	-0.103260	0.034929
2.2	-0.086067	-0.096832	0.061103
2.4	-0.103732	-0.080932	0.077696
2.6	-0.118330	-0.064962	0.080235
2.8	-0.129748	-0.049434	0.073883
3.0	-0.138829	-0.035758	0.062327
3.2	-0.144223	-0.024635	0.048838
3.4	-0.148262	-0.016189	0.035870
3.6	-0.150860	-0.010158	0.024829
3.8	-0.152456	-0.006092	0.016259
4.0	-0.153335	-0.003494	0.010101
4.2	-0.153922	-0.001918	0.005966
4.4	-0.154206	-0.001007	0.003355
4.6	-0.154352	-0.000506	0.001799
4.8	-0.154424	-0.000243	0.000920
5.0	-0.154458	-0.000111	0.000449
5.3	-0.154472	-0.000048	0.000209
5.4	-0.154479	-0.000019	0.000093
5.6	-0.154482	-0.000007	0.000039
5.8	-0.154482	-0.000002	0.000015
6.0	-0.154483	-0.000000	0.000006

n = 0.5 β_0 = 0   (m = 0)

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.283289
0.2	0.005039	0.047248	0.189088
0.4	0.017639	0.075604	0.094496
0.6	0.034025	0.085155	0.001605
0.8	0.050495	0.076669	-0.084902
1.0	0.063613	0.052062	-0.158393
1.2	0.070464	0.014673	-0.211512
1.4	0.068943	-0.030754	-0.237982
1.6	0.058008	-0.078472	-0.234165
1.8	0.037805	-0.122463	-0.208244
2.0	0.009631	-0.157403	-0.144991
2.2	-0.024297	-0.179584	-0.075227
2.4	-0.061228	-0.187373	-0.003640
2.6	-0.098336	-0.181621	0.058076
2.8	-0.133246	-0.164955	0.104559
3.0	-0.163841	-0.141156	0.130045
3.2	-0.189400	-0.114227	0.136289
3.4	-0.209550	-0.087651	0.127408
3.6	-0.224658	-0.064904	0.108966
3.8	-0.235402	-0.044335	0.086455
4.0	-0.242691	-0.029305	0.064170
4.2	-0.247404	-0.018471	0.044807
4.4	-0.250311	-0.011108	0.029548
4.6	-0.252022	-0.006374	0.018455
4.8	-0.252983	-0.003485	0.010940
5.0	-0.253498	-0.001816	0.006168
5.2	-0.253759	-0.000894	0.003308
5.4	-0.253884	-0.000411	0.001692
5.6	-0.253939	-0.000168	0.000825
5.8	-0.253960	-0.000053	0.000384
6.0	-0.253965	-0.000000	0.000170

$n = 0.5$, $\beta_0 = -0.24$ $(m = -0.1308)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.358067
0.2	0.006822	0.066430	0.304227
0.4	0.025772	0.120853	0.237852
0.6	0.054193	0.160719	0.158752
0.8	0.088927	0.183615	0.068636
1.0	0.126382	0.187694	-0.028582
1.2	0.162692	0.172146	-0.126258
1.4	0.193979	0.137769	-0.215245
1.6	0.216721	0.087325	-0.285104
1.8	0.228156	0.025662	-0.326810
2.0	0.226671	-0.040675	-0.331045
2.2	0.212072	-0.104236	-0.298513
2.4	0.185642	-0.157886	-0.233287
2.6	0.149959	-0.196073	-0.146026
2.8	0.108453	-0.215796	-0.051297
3.0	0.064872	-0.217101	0.035905
3.2	0.022664	-0.202719	0.104005
3.4	-0.015472	-0.177221	0.146478
3.6	-0.047836	-0.145884	0.162762
3.8	-0.073761	-0.113532	0.157885
4.0	-0.093418	-0.083564	0.139026
4.2	-0.107538	-0.058414	0. 112761
4.4	-0.117153	-0.038655	0.085016
4.6	-0.123356	-0.024206	0.060252
4.8	-0.127134	-0.014249	0.040116
5.0	-0.129291	-0.007839	0.024902
5.2	-0.130436	-0.003968	0.014437
5.4	-0.130991	-0.001810	0.007657
5.6	-0.131231	-0.000720	0.003655
5.8	-0.131318	-0.000218	0.001621
6.0	-0.131337	-0.000000	0.000688

$n = 0.5\ ,\ \beta_0 = -0.18 \qquad (m = -0.1652)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.504288
0.2	0.009889	0.097781	0.470955
0.4	0.038563	0.187319	0.421679
0.6	0.084047	0.265296	0.355072
0.8	0.143672	0.328128	0.270212
1.0	0.214047	0.372212	0.167881
1.2	0.291090	0.394124	0.051260
1.4	0.370154	0.392161	−0.073989
1.6	0.446278	0.364953	−0.197392
1.8	0.514551	0.314086	−0.307997
2.0	0.570893	0.243532	−0.392152
2.2	0.611077	0.159756	−0.438947
2.4	0.634270	0.071182	−0.439913
2.6	0.639818	−0.013185	−0.398103
2.8	0.629150	−0.084788	−0.324718
3.0	0.607271	−0.137[illegible]	−0.[illegible]55
3.2	0.576[illegible]3	−0.[illegible]	−0.20[illegible]55
3.4	0.541[illegible]7	−0.178[illegible]78	−0.0[illegible]
3.6	0.506077	−0.170197	0.074892
3.8	0.473855	−0.150269	0.121621
4.0	0.446404	−0.123621	0.140421
4.2	0.424494	−0.095585	0.137034
4.6	0.408[illegible]	−0.069729	0.119991
4.6	0.39[illegible]	−0.048[illegible]7	0.096196
4.8	0.38[illegible]	−0.031[illegible]	0.071768
5.0	0.3[illegible]	− 0.019197	0.049[illegible]
5.2	0.3[illegible]	−0.011240	0.031[illegible]
5.4	0.378[illegible]	−0.006[illegible]	0.019705
5.6	0.377905	−0.003073	0.0125[illegible]
5.8	0.377502	−0.001127	0.007[illegible]
6.0	0.377400	−0.000000	0.0040[illegible]

$n = 1\ ,\ \beta_e = 0.5\quad (m = 1)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.255968
0.2	0.003948	0.033964	0.090326
0.4	0.011645	0.030886	-0.036976
0.6	0.018079	0.022705	-0.119429
0.8	0.019671	-0.006262	-0.163782
1.0	0.015234	-0.040357	-0.171538
1.2	0.003637	-0.072874	-0.149372
1.4	-0.013466	-0.098734	-0.106698
1.6	-0.035004	-0.114901	-0.054282
1.8	-0.058726	-0.120487	-0.002397
2.0	-0.082553	-0.116443	0.040896
2.2	-0.104800	-0.105828	0.070818
2.4	-0.124063	-0.089090	0.086374
2.6	-0.140188	-0.072489	0.088836
2.8	-0.152978	-0.054338	0.082382
3.0	-0.162290	-0.037275	0.068902
3.2	-0.168773	-0.027052	0.053649
3.4	-0.173208	-0.017776	0.039390
3.6	-0.176081	-0.011154	0.027261
3.8	-0.177814	-0.006690	0.017052
4.0	-0.178844	-0.003817	0.011091
4.2	-0.179423	-0.002106	0.006351
4.4	-0.179735	-0.001106	0.003684
4.6	-0.179895	-0.000856	0.001976
4.8	-0.179974	-0.000267	0.001041
5.0	-0.180011	-0.000122	0.000493
5.2	-0.180028	-0.000053	0.000229
5.4	-0.180036	-0.000022	0.000102
5.6	-0.180038	-0.000008	0.000042
5.8	-0.180039	-0.000002	0.000016
6.0	-0.180039	-0.000000	0.000007

$n = 1 \quad \beta_0 = 0 \quad (m = 0)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.234249
0.2	0.004058	0.037442	0.140085
0.4	0.013718	0.0560442	0.045742
0.6	0.025216	0.059869	-0.046278
0.8	0.0348087	0.038008	-0.130708
1.0	0.039379	0.004597	-0.200266
1.2	0.035937	-0.040576	-0.247042
1.4	0.022712	-0.0922[illegible]	-0.266434
1.6	-0.000980	-0.144164	-0.249233
1.8	-0.034538	-0.189876	-0.203193
2.0	-0.076143	-0.223848	-0.133425
2.2	-0.123043	-0.242636	-0.051276
2.4	-0.171997	-0.244411	0.030[illegible]
2.6	-0.219789	-0.231218	0.09[illegible]
2.8	-0.263696	- 0.*o6259	0.1[illegible]
3.0	-0.301811	-0.174084	[illegible]
3.2	-0.333162	-0.139357	[illegible]
3.4	-0.357648	-0.106002	[illegible]
3.6	-0.375838	-0.076728	[illegible]
3.8	-0.388706	-0.052922	[illegible]
4.0	-0.397385	-0.034799	[illegible]
4.2	-0.402969	-0.021831	[illegible]
4.4	-0.406399	-0.013076	[illegible]
4.6	-0.408421	-0.007[illegible]	[illegible]
4.8	-0.409537	-0.004076	[illegible]359
5.0	-0.410237	-0.00[illegible]	[illegible]
5.2	-0.410442	[illegible]	[illegible]
5.4	-0.410[illegible]	[illegible]	0.002967
5.6	-0.410652	[illegible]	0.000955
5.8	-0.410618	[illegible]	0.000442
6.0	-0.410679	[illegible]	0.000193

$n = 1 \quad \beta_0 = -0.14 \quad (m = -0.1962)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0.0	0.000000	0.000000	0.230631
0.2	0.004274	0.040949	0.17[illegible]
0.4	0.015584	0.069960	0.111811
0.6	0.031304	0.084671	0.034160
0.8	0.048161	0.083040	-0.0[illegible]
1.0	0.063342	0.063797	-0.149983
1.2	0.072700	0.026935	-0.[illegible]
1.4	0.073095	-0.025795	-0.297444
1.6	0.061996	-0.090390	-0.343941
1.8	0.036493	-0.161057	-0.356446
2.0	-0.002737	-0.230344	-0.325727
2.2	-0.055085	-0.290367	-0.264588
2.4	-0.117784	-0.334140	-0.169324
2.6	-0.187872	-0.356907	-0.057484
2.8	-0.259037	-0.357027	0.054335
3.0	-0.328605	-0.336305	0.148979
3.2	-0.392470	-0.299387	0.215478
3.4	-0.447747	-0.252139	0.260832
3.6	-0.493377	-0.201099	0.250903
3.8	-0.528649	-0.153950	0.229882
4.0	-0.554998	-0.111095	0.193937
4.2	-0.573596	-0.076[illegible]	0.152700
4.4	-0.586087	-0.049[illegible]	0.112583
4.6	-0.594096	-0.030029	0.078[illegible]
4.8	-0.598866	-0.018073	0.051389
5.0	-0.601597	-0.009896	0.031873
5.2	-0.603046	-0.005407	0.0[illegible]
5.4	-0.603747	-0.002308	0.009[illegible]
5.6	-0.604053	-0.000986	0.004[illegible]
5.8	-0.604165	-0.000282	0.00[illegible]
6.0	-0.604190	-0.000000	0.00[illegible]

$n = 1 \quad \beta_0 = -0,18 \quad (\alpha = -0,[illegible]478)$

η	F_1	F_1'	F_1''
0,0	0,000000	0,000000	[illegible],246732
0,2	0,004738	0,046279	[illegible],213549
0,4	0,017969	0,084412	[illegible],165271
0,6	0,037758	0,111367	[illegible],101728
0,8	0,061568	0,124128	[illegible],023610
1,0	0,086283	0,120014	−0,066390
1,2	0,108318	0,097188	−0,163139
1,4	0,123833	0,054839	−0,2586[illegible]2
1,6	0,129038	−0,005984	−0,342644
1,8	0,120617	−0,080635	−0,402899
2,0	0,096198	−0,164393	−0,428017
2,2	0,054803	−0,248951	−0,409986
2,4	−0,002839	−0,325161	−0,346862
2,6	−0,074223	−0,385067	−0,244555
2,8	−0,155302	−0,421463	−0,116654
3,0	−0,241025	−0,431286	0,017851
3,2	−0,326079	−0,415179	0,139111
3,4	−0,405695	−0,377475	0,232229
3,6	−0,476072	−0,324861	0,287088
3,8	−0,535134	−0,265239	0,303126
4,0	−0,582173	−0,205688	0,287134
4,2	−0,617791	−0,151754	0,249499
4,4	−0,643461	−0,106546	0,201746
4,6	−0,661066	−0,071137	0,152698
4,8	−0,672545	−0,045111	0,108928
5,0	−0,679642	−0,027072	0,072555
5,2	−0,683807	−0,015482	0,045180
5,4	−0,686131	−0,008151	0,027557
5,6	−0,687312	−0,004017	0,016620
5,8	−0,687854	−0,001441	0,009641
6,0	−0,687983	−0,000000	0,005086