

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE  
HAMBURG

M. BORN  
GÖTTINGEN

C. RUNGE  
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT  
GÖTTINGEN

BAND XV

ELEMENTARMATHEMATIK II

VON

FELIX KLEIN



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1925

FELIX KLEIN  
ELEMENTARMATHEMATIK  
VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS

DRITTE AUFLAGE

ZWEITER BAND  
GEOMETRIE

AUSGEARBEITET VON  
E. HELLINGER

FÜR DEN DRUCK FERTIG GEMACHT  
UND MIT ZUSÄTZEN VERSEHEN VON  
FR. SEYFARTH

NACHDRUCK

1968

MIT 157 ABBILDUNGEN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1925

## Vorwort zur ersten Auflage.

In dem Vorwort zu Teil I der vorliegenden Vorlesungen (Arithmetik, Algebra, Analysis) bezeichnete ich es noch als zweifelhaft, ob der der Geometrie gewidmete Teil II so bald werde erscheinen können. Nun ist es doch gelungen, ihn fertigzustellen, wozu die Arbeitskraft von Herrn *Hellinger*, wie ich gern hervorhebe, ihr wesentliches Teil beigetragen hat.

Über Entstehung und Zweck der ganzen Vorlesungsserie habe ich hier dem, was in der Vorrede von I gesagt ist, nichts Besonderes mehr hinzuzufügen. Wohl aber scheint ein Wort nötig über die neue Form, welche dieser zweite Teil angenommen hat.

Diese Form ist in der Tat eine ganz andere wie bei Teil I. Ich habe mich entschlossen, vor allen Dingen einen *Gesamtüberblick* über das Gebiet der Geometrie zu geben, in dem Umfange, wie ich ihn jedem Lehrer an einer höheren Schule wünschen möchte; die Erörterungen über den geometrischen *Unterricht* wurden also zurückgedrängt und zum Schluß, soweit noch Raum blieb, nun aber im Zusammenhange gegeben.

In einem gewissen Maße hat bei der so charakterisierten Neuordnung der Wunsch mitgewirkt, nicht in eine zu stereotype Form zu verfallen. Es lassen sich aber auch wichtigere innere Gründe anführen. Wir haben in der Geometrie keine solchen einheitlichen, dem allgemeinen Stande der Wissenschaft entsprechenden Lehrbücher, wie wir sie für Algebra und Analysis dank dem Vorbilde der französischen Cours besitzen; vielmehr findet man hier diese, dort jene einzelne Seite des viel umfassenden Gegenstandes dargestellt, wie sie gerade von der einen oder anderen Gruppe von Forschern zur Entwicklung gebracht worden ist. Demgegenüber schien es bei den pädagogischen und allgemein wissenschaftlichen Zwecken, die ich verfolge, ein wesentliches Erfordernis, eine mehr einheitliche Zusammenfassung zu versuchen.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß die beiden einander ergänzenden, nun vollendet vorliegenden Teile der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ in der Lehrerwelt dieselbe freundliche Aufmerksamkeit finden mögen, wie die im Vorjahre von Herrn *Schimmack* und mir herausgegebenen Vorträge über die Organisation des mathematischen Unterrichts.

Göttingen, Weihnachten 1908.

Klein.

## Vorwort zur dritten Auflage.

Gemäß dem Gesamtplane, den ich im Vorwort zur dritten Auflage des ersten Bandes über die Neuherausgabe meiner autographierten Vorlesungen entwickelte, sind Text und Darstellung des vorliegenden zweiten Bandes bis auf kleine Änderungen im einzelnen und wenige Einschreibungen ungeändert geblieben<sup>1)</sup>. Die beiden Zusätze, die sich auf im ursprünglichen Texte nicht berücksichtigte Literatur wissenschaftlicher und pädagogischer Art beziehen, wurden nach wiederholter Rücksprache mit mir auch dieses Mal von Herrn *Seyfarth* verfaßt. Dieser nahm wiederum den größten Teil der für die Herausgabe notwendigen Arbeit auf sich. Beim Korrekturenlesen halfen ihm die Herren *E. Hellinger*, *H. Vermeil* und *A. Walther*. Herr *Vermeil* übernahm die Herstellung der beiden Register. Den genannten Herren und der Verlagsfirma Julius Springer, die bei jeder Gelegenheit bereitwilliges Entgegenkommen zeigte, bin ich zu großem Danke verpflichtet.

Göttingen, Mai 1925.

**Klein.**

---

<sup>1)</sup> Neu hinzugefügte Anmerkungen sind durch *eckige* Klammern kenntlich gemacht worden.

# Inhaltsverzeichnis.

## Einleitung.

Zweck und Form der Vorlesung . . . . .	1
Die „Fusionsbestrebungen“ . . . . .	2

## Erster Teil: Die einfachsten geometrischen Gebilde.

<b>I. Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt als relative Größen.</b> . . . . .	3
Definition durch Determinanten; Deutung der Vorzeichen . . . . .	3
Einfachste Anwendungen, insbesondere Doppelverhältnis . . . . .	6
Inhalt geradliniger Polygone . . . . .	7
Krummlinig begrenzte Flächenstücke . . . . .	10
Theorie des Amalerschen Polarplanimeters . . . . .	11
Inhalte von Polyedern, das Kantengesetz . . . . .	17
Einseitige Polyeder . . . . .	19
<b>II. Das Graßmannsche Determinantenprinzip für die Ebene</b> . . . . .	22
Linienteile (Vektoren) . . . . .	23
Anwendung in der Statik starrer Systeme . . . . .	24
Klassifikation geometrischer Größen nach ihrem Verhalten bei Transformation der rechtwinkligen Koordinaten . . . . .	26
Anwendung des Klassifikationsprinzips auf die Elementargeößen . . . . .	28
<b>III. Das Graßmannsche Prinzip für den Raum.</b> . . . . .	34
Linien- und Ebenenteil . . . . .	31
Anwendung in der Statik starrer Körper . . . . .	33
Die Beziehungen zum Moebius'schen Nullsystem . . . . .	35
Geometrische Veranschaulichung des Nullsystems . . . . .	37
Zusammenhang mit der Schraubentheorie . . . . .	40
<b>IV. Klassifikation der räumlichen Elementargebilde nach ihrem Verhalten bei rechtwinkligen Koordinatentransformationen</b> . . . . .	42
Allgemeines über Transformationen der rechtwinkligen Raumkoordinaten . . . . .	42
Die Transformationsformeln einiger Elementargeößen . . . . .	46
Kräftepaar und freie Plangröße als äquivalente Gebilde . . . . .	48
Freier Linienteil und freie Plangröße („polarer“ und „axialer“ Vektor) . . . . .	50
Skalare erster und zweiter Art . . . . .	51
Grundzüge einer rationalen Vektoralgebra . . . . .	52
Das Fehlen einer einheitlichen Bezeichnungsweise in der Vektorrechnung . . . . .	55

<b>V. Erzeugnisse der Grundgebilde</b> . . . . .	58
Erzeugnisse von Punkten (Kurven, Flächen, Punktmengen) . . . . .	58
Vom Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie . . . . .	59
Die projektive Geometrie und das Prinzip der Dualität . . . . .	61
Plückers analytische Auffassung und Weiterbildung des Dualitätsprinzips (Geradenkoordinaten) . . . . .	63
Graßmanns Ausdehnungslehre; die mehrdimensionale Geometrie . . . . .	66
Skalar- und Vektorfelder; rationale Vektoranalysis . . . . .	68
 <b>Zweiter Teil: Die geometrischen Transformationen.</b>	
Allgemeines über Transformationen und ihre analytische Darstellung . . . . .	74
<b>I. Affine Transformationen</b> . . . . .	75
Analytische Definition und Grundeigenschaften . . . . .	75
Anwendung auf die Theorie der Ellipsoide . . . . .	81
Parallelprojektion einer Ebene in eine andere . . . . .	83
Axonometrische Abbildung des Raumes (Affinität mit verschwindender Determinante) . . . . .	85
Der Fundamentalsatz von Pohlke . . . . .	89
<b>II. Projektive Transformationen</b> . . . . .	92
Analytische Definition; Einführung homogener Koordinaten . . . . .	92
Geometrische Definition: Jede Kollineation ist eine Projektivität . . . . .	95
Verhalten der Grundgebilde gegenüber Projektivitäten . . . . .	98
Zentralprojektion des Raumes in eine Ebene (Projektivität mit verschwindender Determinante) . . . . .	101
Reliefperspektive . . . . .	102
Anwendung des Projizierens zur Ableitung von Kegelschnitteigenschaften . . . . .	104
<b>III. Höhere Punkttransformationen</b> . . . . .	105
1. Die Transformation durch reziproke Radien . . . . .	105
Die Peaucelli'sche Geradenführung . . . . .	108
Stereographische Projektion der Kugel . . . . .	109
2. Einige allgemeinere Kartenprojektionen . . . . .	110
Die Merkatorprojektion . . . . .	110
Die Tissotschen Sätze . . . . .	112
3. Die allgemeinsten eindeutigen stetigen Punkttransformationen . . . . .	113
Geschlecht und Zusammenhang von Flächen . . . . .	114
Der Eulersche Polyedersatz . . . . .	116
<b>IV. Transformationen mit Wechsel des Raumelementes</b> . . . . .	117
1. Die dualistischen Transformationen . . . . .	117
2. Die Berührungstransformationen . . . . .	119
3. Einige Beispiele . . . . .	122
Gestalt algebraischer Ordnungs- und Klassenkurven . . . . .	122
Anwendung der Berührungstransformationen auf die Zahnradtheorie . . . . .	123
<b>V. Die Imaginärtheorie</b> . . . . .	126
Die imaginären Kreispunkte und der imaginäre Kugelkreis . . . . .	126
Imaginärtransformation . . . . .	129

v. Staudts Deutung sich selbst konjugierter imaginärer Gebilde  
 durch reelle Polarsysteme . . . . . 129  
 v. Staudts volle Deutung einzelner imaginärer Elemente . . . . . 133  
 Die Lagenbeziehungen imaginärer Punkte und Geraden . . . . . 137

**Dritter Teil: Systematik und Grundlegung der Geometrie.**

**I. Die Systematik . . . . . 140**

1. Überblick über die Gliederung der Geometrie . . . . . 140  
 Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip . . . . . 140  
 Cayleys Grundsatz: projective geometry is all geometry . . . . . 145

2. Exkurs über die Invariantentheorie der linearen Substitutionen . . 146  
 Die Systematik der Invariantentheorie . . . . . 146  
 Erläuterung an einfachen Beispielen . . . . . 151

3. Anwendung der Invariantentheorie auf die Geometrie . . . . . 155  
 Deutung der Invariantentheorie von  $n$  Variablen in der affinen  
 Geometrie des  $R_n$  mit festem Nullpunkt . . . . . 155  
 ihre Deutung in der projektiven Geometrie des  $R_{n-1}$  . . . . . 156

4. Die Systematisierung der affinen und metrischen Geometrie auf Grund  
 des Cayleyschen Prinzips . . . . . 159  
 Einordnung der Grundbegriffe der affinen Geometrie in das pro-  
 jektive System . . . . . 160  
 Einordnung des Graßmannschen Determinantenprinzips in die in-  
 variantentheoretische Auffassung der Geometrie. Exkurs über  
 Tensoren . . . . . 161  
 Einordnung der Grundbegriffe der metrischen Geometrie in das  
 projektive System . . . . . 168  
 Projektive Behandlung der Dreiecksgeometrie . . . . . 170

**II. Grundlagen der Geometrie . . . . . 171**

Allgemeine Fragestellung; Stellungnahme zur analytischen Geometrie 172  
 Andeutung über den Aufbau der rein projektiven Geometrie mit nach-  
 träglichem Anschluß der metrischen . . . . . 172

1. Aufbau der ebenen Geometrie unter Voranstellung der Bewegungen 174  
 Aufbau der affinen Geometrie aus den Parallelverschiebungen . . 175  
 Hinzunahme der Drehungen zum Aufbau der metrischen Geometrie 180  
 Endgültige Herstellung der Ausdrücke für Entfernung und Winkel 185  
 Einordnung der Allgemeinbegriffe Flächeninhalt und Kurvenlänge 186

2. Andere Begründung der metrischen Geometrie; die Rolle des Paral-  
 lelenaxioms . . . . . 188  
 Entfernung, Winkel, Kongruenz als Grundbegriffe . . . . . 189  
 Parallelenaxiom und Parallelentheorie (nicht-euklidische Geometrie) 189  
 Bedeutung der nicht-euklidischen Geometrie nach philosophischer  
 Seite . . . . . 192  
 Einordnung der nicht-euklidischen Geometrie in das projektive  
 System . . . . . 194  
 Allgemeines über moderne geometrische Axiomatik . . . . . 200

3. Euklids Elemente . . . . . 203  
 Kritisches über die geschichtliche Stellung und wissenschaftliche  
 Bedeutung der Elemente . . . . . 204  
 Inhalt der 13 Bücher Euklids . . . . . 207  
 Die Grundlegung der Geometrie bei Euklid . . . . . 212  
 Der Anfang des ersten Buches . . . . . 215

Das Fehlen der „Zwischenaxiome“ bei Euklid; die Möglichkeit der sog. geometrischen Sophismen . . . . .	217
Das „Archimedische Axiom“ bei Euklid; Exkurs über die „horn- förmigen Winkel“ als Beispiel eines durch dieses Axiom aus- geschlossenen Größensystems . . . . .	220

## Schlußkapitel: Einiges über den Unterricht in der Geometrie.

Bedeutung des historischen Untergrundes . . . . .	226
Entgegenstellung moderner Anforderungen . . . . .	227
Kritisches zum traditionellen Unterrichtsbetriebe . . . . .	228
<b>I. Der Unterricht in England . . . . .</b>	<b>231</b>
Der traditionelle Typus des Unterrichts und der Examina . . . . .	231
Die Association for the improvement of geometrical teaching . . . . .	232
Perry und seine Tendenzen . . . . .	233
Einige die Anforderungen der Reform berücksichtigende Lehrbücher . . . . .	235
<b>II. Der Unterricht in Frankreich . . . . .</b>	<b>236</b>
Petrus Ramus und Clairaut . . . . .	237
Legendres Elemente und ihre Bedeutung . . . . .	238
Exkurs über Legendres Parallelen-theorie . . . . .	240
Legendres Nachfolger . . . . .	241
Die Unterrichtsreform von 1902 . . . . .	243
Die Einwirkung von Mérays „nouveaux éléments“ . . . . .	244
<b>III. Der Unterricht in Italien . . . . .</b>	<b>245</b>
Der Einfluß Cremonas . . . . .	245
Ältere geometrische Lehrbücher . . . . .	246
Neuere Forderungen erhöhter Strenge; Veronese . . . . .	247
Die Peanosche Schule . . . . .	248
Reformbestrebungen . . . . .	249
<b>IV. Der Unterricht in Deutschland. . . . .</b>	<b>250</b>
Der Einfluß des Volksschulunterrichtes (Pestalozzi und Herbart) . . . . .	250
Der österreichische Lehrplan von Exner und Bonitz (1849); selbständige Pflege der Raumschauung . . . . .	252
Übertragung dieser Tendenzen nach Norddeutschland; Holzmüllers Lehrbücher . . . . .	253
Anregungen seitens der experimentellen Psychologie . . . . .	254
Verhältnis zur modernen Kunsterziehung . . . . .	256
Schopenhauers Kritik der Mathematik; Exkurs über die Beweise des Pythagoräischen Satzes . . . . .	257
Neuere Einwirkungen seitens der Hochschule . . . . .	259
Der österreichische Lehrplan von 1900 und das Werk von Henrici und Treutlein . . . . .	260
<b>Zusatz I: Ergänzende Bemerkungen über einige Fragen der Elementar- geometrie . . . . .</b>	<b>263</b>
Enzyklopädiereferate . . . . .	263
Die Klassifikation geometrischer Konstruktionsaufgaben . . . . .	264
Über den Konstruktionsbereich der gebräuchlichsten Zeichenhilfsmittel	265



Über die Anwendung von Transformationen zur Vereinfachung geometrischer Aufgaben . . . . .	269
Neuere Literatur über die Durchführung des Erlanger Programms . .	272
Zur darstellenden Geometrie . . . . .	273
Die Nepersche Regel und das Pentagramma mirificum . . . . .	273
Zusatz II: Ergänzungen über den geometrischen Unterricht in den einzelnen	
Ländern . . . . .	277
Allgemeines über die Schulreformen der Gegenwart. . . . .	277
Ergänzungen zu England. . . . .	279
Ergänzungen zu Frankreich . . . . .	283
Ergänzungen zu Italien . . . . .	286
Ergänzungen zu Deutschland (Preußen) . . . . .	289
Namenverzeichnis . . . . .	294
Sachverzeichnis . . . . .	296



## Einleitung.

Meine Herren! Die Vorlesung, die ich heute beginne, soll die unmittelbare Fortsetzung und Ergänzung meines Kollegs vom letzten Winter<sup>1)</sup> bilden. Hier wie dort ist die Absicht, alles, was Sie in Ihren Studienjahren an Mathematik getrieben haben, soweit es für den künftigen Lehrer nur irgend von Interesse sein kann, zusammenzufassen und insbesondere auch in seiner Tragweite für den Betrieb des mathematischen Schulunterrichts zu erläutern. Im Winter habe ich dieses Programm der Reihe nach für die *Arithmetik*, *Algebra*, *Analysis* durchgeführt; im laufenden Semester soll die *Geometrie* zu Ehren kommen, die damals beiseite geblieben war. Dabei sollen unsere Betrachtungen natürlich auch unabhängig vom vorigen Kolleg verständlich sein, und ich will übrigens auch den Ton des Ganzen ein wenig anders nehmen: Im Vordergrund soll das — ich will einmal sagen — *enzyklopädische Moment* stehen; Sie sollen einen *Überblick über das Gesamtgebiet der Geometrie* erhalten, in den Sie alle Einzelkenntnisse, die Sie im Laufe Ihres Studiums gewonnen haben, wie in einen festen Rahmen einordnen können, um sie so zu jeder Anwendung bereit zu halten. Erst hinterher wird ganz von selbst auch das *Interesse am mathematischen Schulunterricht* hervorkommen, von dem ich im Winter immer ausging.

Ich nehme noch gern Bezug darauf, daß in den Osterferien 1908 hier in Göttingen ein *Ferienkursus* für Oberlehrer der Mathematik und Physik stattgefunden hat; dort habe ich über meine Wintervorlesung berichtet, und im Anschluß daran sowie an den Vortrag von Professor *Behrendsen* vom hiesigen Gymnasium ergaben sich sehr interessante, angeregte Diskussionen über die Neugestaltung des Schulunterrichts in Arithmetik, Algebra und Analysis sowie insbesondere über die Einführung der Differential- und Integralrechnung auf der Schule<sup>2)</sup>. Die Teilnehmer zeigten dabei ein äußerst erfreuliches Interesse an diesen Fragen, wie überhaupt an unseren Bestrebungen,

<sup>1)</sup> [Erschienen als Teil I dieser Vorlesungen über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“. Berlin 1924, 3. Auflage. Die Zitate „Teil I“ beziehen sich auf die 3. Aufl.]

<sup>2)</sup> Vgl. das freie Referat von *R. Schimmack*: „Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen“ in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Bd. 39, S. 513—527. 1908. (Auch separat: Leipzig 1908.)

Universität und Schule in lebendige Berührung zu bringen. Im Sinne dieser Bestrebungen soll auch meine gegenwärtige Vorlesung wirken; hoffen wir, daß sie ihren Teil zur Abstellung der alten Klagen beiträgt, die wir — und leider oft mit Recht — von der Schule her immer hören mußten: der Hochschulunterricht bringe zwar vieles Spezielle, aber er lasse den angehenden Lehrer durchaus unorientiert über so manche allgemeinen wichtigen Dinge, die er später tatsächlich brauchen könne.

Was nun den *Stoff der Vorlesung* anlangt, so bemerke ich nur, daß ich wie in der vorigen Vorlesung gelegentlich Hauptsätze aus allen Gebieten der Mathematik, wie sie Ihnen sonst vorgetragen werden, als bekannt werde voraussetzen müssen, um den Nachdruck auf den *Überblick über das Ganze* legen zu können; dabei werde ich freilich Ihrer Erinnerung immer so weit durch kurze Angaben nachzuhelfen suchen, daß Sie sich in der Literatur leicht vollständig orientieren können. Demgegenüber will ich — gleichfalls ganz wie im ersten Teil — viel mehr, als es sonst geschieht, auf die *historische Entwicklung der Wissenschaft*, auf die Leistungen ihrer großen Pfadfinder, hinweisen. Durch Erörterungen dieser Art denke ich, wie ich gerne sage, Ihre *mathematische Allgemeinbildung* zu fördern: neben die Kenntnis der Einzelheiten, wie sie die Spezialvorlesungen liefern, soll die Erfassung des sachlichen und historischen Zusammenhanges treten.

Noch eine letzte allgemeine Bemerkung gestatten Sie, um ein Mißverständnis zu vermeiden, wie es die äußere Trennung dieses „geometrischen“ Teiles meiner Vorlesungen vom ersten „arithmetischen“ sonst vielleicht hervorrufen könnte. Ich vertrete dieser Trennung ungeachtet hier wie überhaupt stets in solchen allgemeinen Vorlesungen eine Tendenz, die ich am liebsten mit dem Stichwort „*Fusion der Arithmetik und Geometrie*“ bezeichne — Arithmetik dabei in dem auf der Schule üblichen Sinne verstanden, als Gebiet, zu dem nicht nur die Lehre von den ganzen Zahlen, sondern auch die gesamte Algebra und Analysis gehören. Man gebraucht sonst, besonders in Italien, dieses Wort „*Fusion*“ als Schlagwort für Bestrebungen, die sich auf die Geometrie beschränken. Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Universität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgesondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die Raumgeometrie aber leider oft zu kurz, und das edle Organ der Raumanschauung, das wir von Hause aus besitzen, verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten“ von vornherein Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken. Auch diesen Bestrebungen schließe ich mich hier an, denke aber, wie gesagt, gleichzeitig an eine noch weitergehende Fusion: Im vorigen Semester habe ich die abstrakten Erörterungen der Arithmetik, Algebra und Analysis stets durch Figuren und graphische Methoden belebt, die einem die Dinge viel näher

bringen und vielfach erst verständlich machen, warum man sich mit ihnen beschäftigt; analog will ich jetzt die Raumschauung, die natürlich an erster Stelle stehen bleiben muß, von vornherein durch analytische Formeln begleiten, welche in höchstem Maße die präzise Formulierung geometrischer Tatsachen erleichtern.

Wie das gemeint ist, werden Sie am besten sehen, wenn ich mich sogleich unserem Gegenstande zuwende; da soll uns zuerst die Betrachtung einer Reihe einfacher geometrischer Grundgebilde beschäftigen.

### Erster Teil.

## Die einfachsten geometrischen Gebilde.

### I. Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt als relative Größen.

Sie sehen bereits an dieser Kapitelüberschrift, daß ich getreu der soeben allgemein ausgesprochenen Absicht von Anfang an die entsprechenden Größen auf der Geraden, in der Ebene, im Raum nebeneinander behandle; gleichzeitig wollen wir aber auch der allgemeineren Tendenz der Fusion Rechnung tragen, indem wir uns zur analytischen Formulierung von vornherein prinzipiell des gewöhnlichen *rechtwinkligen Koordinatensystems* bedienen.

Haben wir nun zunächst eine *Strecke*, so denken wir sie auf die  $x$ -Achse gelegt; sind die Abszissen ihrer Endpunkte  $x_1$  und  $x_2$ , so ist ihre *Länge*  $x_1 - x_2$ , und diese Differenz kann man offenbar als folgende Determinante schreiben:

$$(1, 2) = x_1 - x_2 = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ganz analog ist der *Inhalt eines Dreiecks* der  $x$ - $y$ -Ebene, das von den 3 Punkten 1, 2, 3 mit den Koordinaten  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  gebildet wird:

$$(1, 2, 3) = \frac{1}{1 \cdot 2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

und endlich hat man für den *Rauminhalt des Tetraeders* aus den 4 Punkten 1; 2; 3; 4 mit den Koordinaten  $x_1, y_1, z_1; \dots; x_4, y_4, z_4$ :

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Gewöhnlich sagt man nun, daß die Länge bzw. der Inhalt gleich dem *absoluten Werte* der angegebenen Größen ist, während doch tatsächlich unsere Formeln noch darüber hinaus ein ganz *bestimmtes Vorzeichen* liefern, das von der Reihenfolge abhängt, in der die Punkte gegeben sind. Wir wollen uns zum Grundsatz machen, solche Vorzeichen, welche die analytischen Formeln liefern, durchweg auch in der Geometrie zu verwenden; demgemäß haben wir zu fragen, *was bei diesen Inhaltsbestimmungen das Vorzeichen geometrisch bedeuten mag.*

Dafür ist es von Wichtigkeit, wie wir das *rechtwinklige Koordinatensystem* wählen, und darüber wollen wir vorab eine ein für alle Mal bindende, an sich natürlich willkürliche Verabredung treffen. Im Falle *einer Dimension* zunächst möge die positive  $x$ -Achse immer nach rechts hin zeigen. In der *Ebene* sei die positive  $x$ -Achse nach rechts, die positive  $y$ -Achse nach oben gerichtet (vgl. Abb. 1); würde man diese nach unten

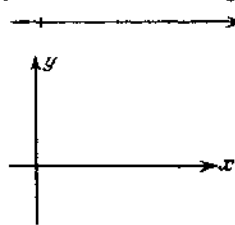


Abb. 1.

hin weisen lassen, so ergäbe sich ein wesentlich anderes Koordinatensystem, das zu dem ersten spiegelbildlich ist und das man mit ihm durch bloße Bewegung in der Ebene, d. h. ohne in den Raum hinaus zu gehen, nicht zur Deckung bringen

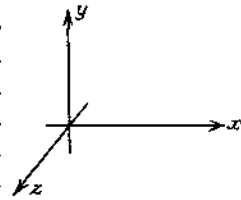


Abb. 2.

kann. Das *räumliche Koordinatensystem* endlich möge aus jenem ebenen entstehen, indem man eine nach *vorn* positiv gerichtete  $z$ -Achse hinzunimmt (vgl. Abb. 2); die Wahl der entgegengesetzten Richtung ergäbe wieder ein wesentlich anderes Koordinatensystem, das man mit dem unsrigen durch keine Bewegung im Raume zur Deckung bringen könnte<sup>1)</sup>.

Indem wir immer an diesen Verabredungen festhalten, werden wir nun die *Deutung unserer Vorzeichen in einfachen geometrischen Eigenschaften der durch die gegebene Numerierung bedingten Reihenfolge der Punkte* finden.

Für die *Strecke* (1, 2) ist diese Eigenschaft fast selbstverständlich: *Der Ausdruck  $x_1 - x_2$  der Länge fällt positiv oder negativ aus, je nachdem der Punkt 1 rechts oder links von 2 liegt.*

Für das *Dreieck* ergibt sich: *Die Formel liefert für den Inhalt einen positiven oder negativen Wert, je nachdem der Umlaufungssinn, der auf dem Dreiecksumfange von der Ecke 1 über 2 zu 3 führt, dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt oder gleich ist.* Wir werden das beweisen, indem wir bei einem möglichst bequem gelegenen speziellen Dreieck die den Inhalt ausdrückende Determinante unmittelbar ausrechnen,

<sup>1)</sup> Man unterscheidet diese beiden Systeme als „rechtshändiges“ und „linkshändiges“, da sie der Stellung der ersten 3 Finger an der rechten und linken Hand entsprechen. (Vgl. Teil I, S. 70.)

und mit Hilfe einer Stetigkeitsbetrachtung den allgemeinen Fall erledigen: Wir betrachten das Dreieck, das zur ersten Ecke den Einheitspunkt der  $x$ -Achse ( $x_1 = 1, y_1 = 0$ ), zur zweiten den der  $y$ -Achse ( $x_2 = 0, y_2 = 1$ ), zur dritten den Nullpunkt ( $x_3 = 0, y_3 = 0$ ) hat. Nach unseren Verabredungen über das Koordinatensystem ist dieses Dreieck entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne zu umlaufen (vgl. Abb. 3), und unsere Formel ergibt für seinen Inhalt den positiven Wert:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{2}.$$

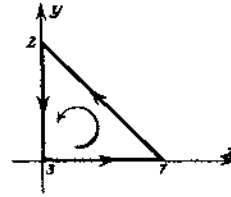


Abb. 3.

Wir können die Ecken dieses Dreiecks nun gewiß durch stetige Deformation in die Ecken jedes andern in demselben Sinne umlaufenen Dreiecks überführen, ohne daß sie dabei jemals alle drei in eine Gerade zu liegen kommen. Dabei ändert sich aber unsere Determinante stetig, und da sie bekanntlich nur verschwindet, wenn die Punkte 1, 2, 3 auf einer Geraden liegen, muß sie bei diesem Prozeß stets positiv bleiben. Damit ist in der Tat bewiesen, daß der Inhalt jedes entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne umlaufenen Dreiecks positiv ist. Vertauscht man zwei Ecken des Ausgangsdreiecks, so sieht man sofort, daß jedes *im* Uhrzeigersinne umlaufene Dreieck unserer Formel zufolge negativen Inhalt bekommt.

Ganz analog können wir nun das *Tetraeder* behandeln. Wir gehen wieder von einem möglichst bequem gelegenen Tetraeder aus: zur ersten, zweiten, dritten Ecke möge es bzw. den Einheitspunkt der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse, zur vierten den Anfangspunkt haben (vgl. Abb. 4). Sein Inhalt ist daher:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{6},$$

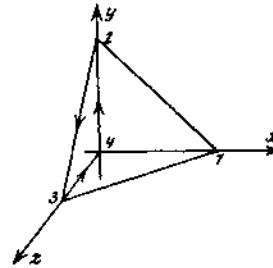


Abb. 4.

und wie vorhin folgt, daß jedes Tetraeder, das man durch stetige Deformation aus ihm herleiten kann, ohne daß die vier Ecken jemals in eine Ebene fallen (d. h. die Determinante verschwindet), positiven Inhalt besitzt. Alle diese Tetraeder kann man aber durch den Umlaufssinn charakterisieren, den das eine Seitendreieck (2, 3, 4) von der Ecke 1 aus betrachtet aufweist. Solcherweise ergibt sich folgendes Resultat: *Der durch unsere Formel bestimmte Inhalt des Tetraeders (1, 2, 3, 4) ist positiv, wenn von der Ecke 1 aus betrachtet die Ecken 2, 3, 4 entgegen dem Sinne des Uhrzeigers aufeinander folgen; andernfalls ist er negativ.*

Wir haben so aus den analytischen Formeln tatsächlich geometrische Regeln gewonnen, die jeder Strecke, jedem Dreieck, jedem Tetraeder ein bestimmtes Vorzeichen zuzuordnen gestatten, wenn die Ecken in einer bestimmten Reihenfolge gegeben sind. Damit sind große Vorteile gegenüber der gewöhnlichen Elementargeometrie gewonnen, die Länge und Inhalt als absolute Größen betrachtet; wir werden nämlich allgemeine einfache Theoreme auch da aufstellen können, wo jene Elementargeometrie je nach dem besonderen Aussehen der Figuren zahlreiche Fälle unterscheiden muß.

Lassen Sie mich mit einem ganz primitiven Beispiele beginnen, dem *Schnittverhältnis* dreier Punkte auf einer Geraden, etwa der  $x$ -Achse. Bezeichnen wir die drei Punkte (vgl. Abb. 5), wie es in Rücksicht auf das folgende am bequemsten ist, mit 1, 2 und 4, so ist ihr Schnittverhältnis gegeben durch:

$$S = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4},$$

und es ist klar, daß dieser Quotient positiv oder negativ ist, je nachdem der Punkt 1 außerhalb oder innerhalb der Strecke (2, 4) liegt. Gibt man, wie in den elementaren Darstellungen üblich, nur den ab-

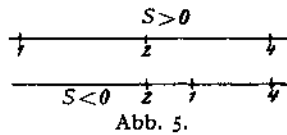


Abb. 5.

soluten Wert  $|S| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_4|}$ , so muß man

stets noch ausdrücklich auf die Figur verweisen oder in Worten hinzufügen, ob man einen Punkt innerhalb oder außerhalb im Sinne hat, und das ist natürlich viel umständlicher. *Die Einführung des Vorzeichens trägt also den verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung der Punkte auf einer Geraden Rechnung* — eine Tatsache, auf die wir im Laufe der Vorlesung noch öfters hinzuweisen haben werden.

Nehmen wir nun einen vierten Punkt 3 hinzu, so können wir das *Doppelschnittverhältnis* der vier Punkte bilden, das man meist kurz als *Doppelverhältnis* bezeichnet:

$$D = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}.$$

Dieser Ausdruck besitzt wiederum ein bestimmtes Vorzeichen, und zwar sieht man unmittelbar, daß  $D < 0$  ist, wenn die Punktepaare 1

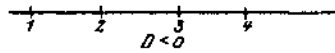


Abb. 6.

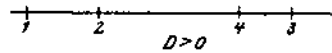


Abb. 7.

und 3 einerseits und 2, 4 andererseits sich gegenseitig trennen,  $D > 0$  aber im entgegengesetzten Falle, d. h., wenn 1 und 3 gleichzeitig außerhalb oder innerhalb der Strecke 2, 4 liegen (vgl. Abb. 6 und 7). So gibt es wieder immer zwei wesentlich voneinander verschiedene



Lagen, die denselben Absolutwert von  $D$  liefern. Wenn man nur diesen gibt, muß man daher die Lagenbestimmung noch ausdrücklich angeben; definiert man z. B. harmonische Punkte durch  $|D| = 1$ , wie es leider auf der Schule noch meist üblich ist, so muß man unbedingt die Forderung getrennter Lage der beiden Punktepaare in die Definition aufnehmen, während wir mit der *einen* Angabe  $D = -1$  auskommen. — Besonders nützlich ist die Berücksichtigung des Vorzeichens in der *projektiven Geometrie*, in der das Doppelverhältnis bekanntlich eine maßgebende Rolle spielt. Wie man weiß, besteht da der Satz, daß 4 Punkte einer Geraden dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die aus ihnen durch Projektion von einem beliebigen Zentrum aus (Perspektive) auf einer

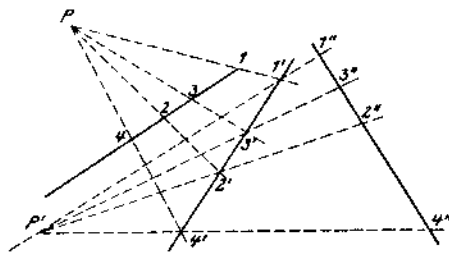


Abb. 8.

anderen Geraden entstehenden Punkte (vgl. Abb. 8). Betrachtet man nun das Doppelverhältnis als relative, mit einem Vorzeichen versehene Größe, so gilt auch die folgende ausnahmelose Umkehrung dieses Theorems: Zwei Punktequadrupel auf zwei Geraden, die das gleiche Doppelverhältnis  $D$  haben, lassen sich stets durch einmalige oder durch wiederholte Perspektive auseinander ableiten — so zum Beispiel in Abb. 8 die Quadrupel  $1, 2, 3, 4$  und  $1'', 2'', 3'', 4''$  durch Projektion aus den Zentren  $P$  und  $P'$ . Kennt man jedoch nur den absoluten Wert von  $D$ , so gilt das entsprechende Theorem nicht in dieser einfachen Form; man müßte vielmehr noch eine besondere Voraussetzung über die Lage der Punkte aufnehmen.

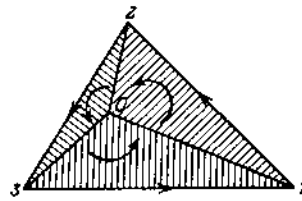


Abb. 9.

Ein weit ergiebigeres Feld haben wir vor uns, wenn wir zu *Anwendungen unserer Dreiecksformel* aufsteigen. Legen wir (vgl. Abb. 9) zunächst einmal in das Innere eines Dreiecks  $(1, 2, 3)$  irgendwie einen Punkt  $0$  und verbinden ihn mit den drei Ecken, so ist die Summe der in elementarem Sinne als absolute Größen aufgefaßten Inhalte der entstehenden Teildreiecke gleich dem Inhalt des Ausgangsdreiecks:

$$|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| + |(0, 1, 2)|.$$

Bei den Lageverhältnissen der Figur folgen die Ecken in der angegebenen Reihenfolge allemal entgegen dem Uhrzeigersinne aufeinander; die Dreiecksinhalte  $(1, 2, 3), (0, 2, 3), (0, 3, 1), (0, 1, 2)$  — im Sinne unserer allgemeinen Definition mit Vorzeichen versehen —

sind also sämtlich positiv, und wir können unsere Formel auch wie folgt schreiben:

$$(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (0, 3, 1) + (0, 1, 2).$$

Ich behaupte aber nun, daß dieselbe Formel auch gilt, wenn 0 außerhalb des Dreiecks liegt, und überhaupt, wenn 0, 1, 2, 3 irgend vier beliebige Punkte der Ebene sind. In der Tat, wenn wir beispielsweise die Lage der Abb. 10 nehmen, ist (0, 2, 3) und (0, 3, 1) entgegen, (0, 1, 2) aber entsprechend dem Uhrzeigersinne umlaufen, so daß unsere Formel für die absolut gerechneten Inhalte ergeben würde:

$$|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| - |(0, 1, 2)|.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung bestätigt die Figur sofort.

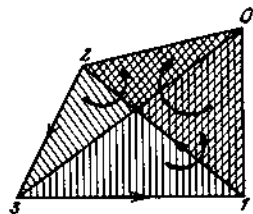


Abb. 10.

Allgemein werden wir unsere Behauptung aus der *analytischen Definition* beweisen, wobei wir in unserer Formel einen bekannten Satz der Algebra bzw. Determinantenlehre erkennen werden. Wir nehmen der Bequemlichkeit halber — was offenbar keine wesentliche Spezialisierung ist — 0 als Koordinatenanfang  $x = 0, y = 0$  und tragen für die 4 Dreiecksinhalte die betreffenden Determinanten ein; dann ist also, wenn wir noch überall den Faktor  $\frac{1}{2}$  fortlassen, zu beweisen, daß für beliebige Werte  $x_1, \dots, y_3$  die Beziehung gilt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Der Wert jeder auf der rechten Seite stehenden Determinante wird nicht geändert, wenn wir die zweite und dritte 1 der letzten Kolonne durch Nullen ersetzen, da diese Elemente bei Entwicklung nach Unterdeterminanten der ersten Zeile nur in die mit den beiden Nullen multiplizierten Unterdeterminanten eingehen; vertauschen wir in den beiden letzten Determinanten die Zeilen noch zyklisch, was bei Determinanten dritter und überhaupt ungerader Ordnung ja erlaubt ist, so können wir unsere Gleichung in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Das ist aber eine identisch richtige Gleichung: rechts stehen lediglich die Unterdeterminanten der letzten Kolonne der linken Determinante, und es liegt sonach nur die bekannte Entwicklung dieser Determinante nach Elementen einer Kolonne vor. Damit ist unser Satz mit einem Schlage für alle möglichen Lagen der 4 Punkte bewiesen.

Wir können nun diese Formel sofort dahin verallgemeinern, daß sie den *Inhalt beliebiger Polygone* gibt. Denken Sie dabei etwa an eine Aufgabe der Geodäsie: Es sei der Flächeninhalt eines Grundstückes mit geradlinigen Seiten zu bestimmen, nachdem man die Koordinaten der Ecken  $1, 2, \dots, n-1, n$  gemessen hat (vgl. Abb. 11). Wer nicht gewohnt ist, mit Vorzeichen zu operieren, der wird sich die Gestalt des Polygons danach skizzieren müssen, es etwa durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen und dann je nach der besonderen Gestalt — speziell in Rücksicht darauf, welche Winkel überstumpf sind — den Inhalt als Summe oder Differenz der einzelnen Dreiecksinhalte bestimmen müssen. Wir aber können sofort eine allgemeine Formel angeben, die das Richtige ganz mechanisch liefert, ohne einen Blick auf die Figur zu verlangen: Ist  $O$  irgendein Punkt der Ebene, etwa der Koordinatenanfang, so ist der Inhalt unseres im Sinne  $1, 2, \dots, n$  umlaufenen Polygons:

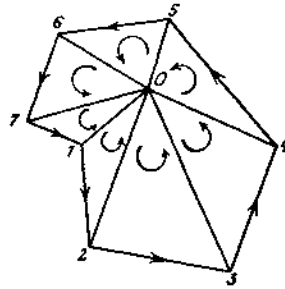


Abb. 11.

$$(1, 2, 3, \dots, n) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, n-1, n) + (0, n, 1),$$

wobei die Dreiecke mit dem durch den angegebenen Umlaufssinn bestimmten Vorzeichen zu nehmen sind. Die Formel liefert den *Polygoninhalt positiv oder negativ, je nachdem die Umlaufung des Polygons im Sinne  $1, 2, \dots, n$  eine solche entgegen oder entsprechend dem Uhrzeigersinn ist*. Die Angabe dieser Formel mag hier genügen. Den Beweis werden Sie sich leicht selbst zurechtlegen können.

Ich möchte hier lieber noch auf einige besonders interessante Fälle eingehen, die beim Feldmessen freilich nicht vorkommen können, nämlich auf *Polygone, die sich selbst überschlagen*, wie etwa nebenstehendes Viereck (vgl. Abb. 12). Wollen wir hier überhaupt von einem bestimmten Inhalt reden, so wird es nur der Wert sein können, den unsere Formel liefert; wir haben uns zu überlegen, was dieser Wert geometrisch bedeutet. Zunächst macht man sich leicht klar, daß er selbstverständlich unabhängig von der speziellen Lage von  $O$  ist. Legen wir  $O$  also, möglichst bequem, in den Überschlagungspunkt des Vierecks, so werden die Dreiecke  $(0, 1, 2)$  und  $(0, 3, 4)$  Null, und es bleibt:

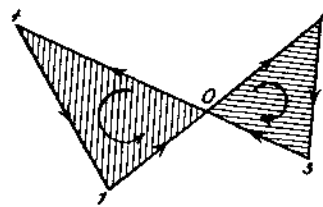


Abb. 12.

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3) + (0, 4, 1);$$

das erste Dreieck hat negativen, das zweite positiven Inhalt, und daher ist der Inhalt unseres sich überschlagenden Vierecks, wenn

wir ihm den Umlaufssinn (1, 2, 3, 4) zuschreiben, gleich dem absoluten Inhalt des entgegen dem Uhrzeigersinne umlaufenen Teiles (0, 4, 1), *vermindert* um den des im Uhrzeigersinne umlaufenen Teiles (0, 2, 3).

Als zweites Beispiel betrachten wir das nebenstehende *Sternfünfeck* (vgl. Abb. 13). Legen wir 0 in den mittleren Teil, so sind in der Summe:

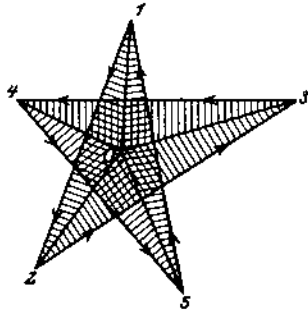


Abb. 13.

$$(0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, 5, 1)$$

alle Teildreiecke positiv umlaufen; ihre Summe bedeckt den Inhalt des fünfeckigen Kernes unserer Figur doppelt, jeden der 5 Zipfel einfach. Halten wir wieder den einmaligen Umlauf auf unserem Polygon (1, 2, 3, 4, 5, 1) daneben, so sehen wir, daß jeder Teil entgegen dem Uhrzeigersinne, und zwar der bei der Inhaltsbestimmung doppelt zu rechnende zweimal, der einfach zu rechnende einmal umlaufen wird.

Aus diesen beiden Beispielen abstrahieren wir sogleich die folgende *allgemeine Regel*: Für jedes geradlinige, sich beliebig oft überschlagende ebene Polygon liefert unsere Formel als Inhalt die algebraische Summe der einzelnen Flächenstücke, die der Polygonzug begrenzt, wobei jedes Stück so oft in Rechnung zu stellen ist, als es bei einmaliger Durchlaufung des Umfanges (1, 2, 3, ..., n, 1) umlaufen wird, und zwar jedesmal mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem es entgegengesetzt oder entsprechend dem Uhrzeigersinne umlaufen wird. Auch diesen Satz mögen Sie selbst allgemein bestätigen. Sie werden dabei keinerlei Schwierigkeiten haben. Um so mehr empfehle ich Ihnen, sich diese interessanten Inhaltsformeln an einzelnen Beispielen ganz zu eigen zu machen. —

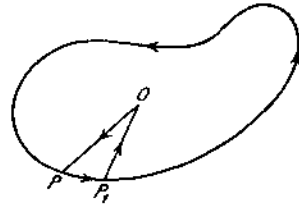


Abb. 14.

Wir wollen nun, meine Herren, von Polygonen zu *krümmelig begrenzten Flächenstücken* übergehen. Wir betrachten also irgendeine geschlossene Kurve, die sich noch beliebig oft überschlagen kann; wir geben auf ihr einen *bestimmten Umlaufungssinn* und fragen, welchen Inhalt sie begrenzt. Natur-

gemäß finden wir ihn, wenn wir die Kurve (vgl. Abb. 14) durch Polygone mit sehr vielen, sehr kleinen Seiten annähern und den Grenzwert des in der soeben erörterten Weise bestimmten Polygoninhaltes bilden. Sind  $P(x, y)$  und  $P_1(x + dx, y + dy)$  zwei benachbarte Eckpunkte eines solchen Näherungspolygones auf unserer Kurve, so setzt sich sein Inhalt aus einer Summe von Elementardreiecken ( $O, P, P_1$ ) zusammen, also aus lauter Summanden:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + dx & y + dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x dy - y dx).$$

In der Grenze geht diese Summe über in das längs der Kurve im gegebenen Sinne erstreckte Linienintegral:

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx),$$

und dadurch ist der von der Kurve begrenzte Flächeninhalt definiert. Wollen wir diese Definition geometrisch interpretieren, so können wir das für Polygone ausgesprochene Resultat auf den neuen Fall sofort übertragen: *Jedes von der Kurve umschlossene Flächenstück kommt in dem*

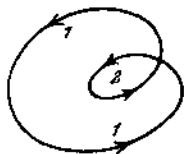


Abb. 15.

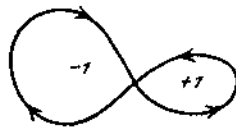


Abb. 16.

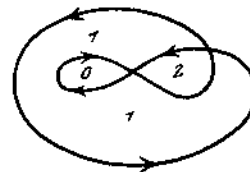


Abb. 17.

*Integrale so oft positiv zur Geltung, als es entgegen dem Uhrzeigersinne, und so oft negativ, als es im Uhrzeigersinne umlaufen wird, während man die Kurve einmal im vorgeschriebenen Sinne durchläuft.* Bei einer einfachen Kurve wie in Abb. 14 erhalten wir demnach durch das Integral genau den von ihr umschlossenen Flächeninhalt mit positivem Vorzeichen. In Abb. 15 ist der äußere Teil einmal, der innere zweimal positiv gerechnet, in Abb. 16 der linke negativ, der rechte positiv, so daß im ganzen ein negativer Inhalt herauskommt; in Abb. 17 ist gar ein Teil gar nicht zu rechnen, da er einmal positiv, einmal negativ umlaufen ist. Natürlich können so auch Kurven vom Inhalt Null entstehen, zum Beispiel, wenn man die Kurve der Abb. 16 symmetrisch zum Überschlagungspunkt annimmt; dieser Fall hat nichts Absurdes an sich, wenn man bedenkt, daß die ganze Inhaltsbestimmung nur auf zweckmäßigen Verabredungen beruht.

Wie zweckmäßig aber diese Begriffsbestimmungen sind, will ich Ihnen jetzt zeigen, indem ich Ihnen das

*Polarplanimeter von Amster*

vorführe. Dieser in der Praxis sehr viel gebrauchte, höchst sinnreiche Apparat, der 1854 von dem Schaffhausener Mechaniker *Jakob Amster* konstruiert wurde, führt in der Tat die Bestimmung von Flächeninhalten gerade in dem erörterten Sinne aus. Lassen Sie mich zunächst den *theoretischen Grundgedanken der Konstruktion* besprechen!

Wir denken uns eine Stange  $A_1 A_2$  (vgl. Abb. 18) von der Länge  $l$  so über die Ebene hingeführt, daß  $A_1$

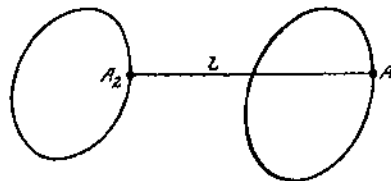


Abb. 18.

und  $A_2$  je eine geschlossene Kurve beschreiben und die Stange selbst wieder in ihre Ausgangslage zurückkehrt. Wir wollen den Inhalt der Fläche bestimmen, die sie dabei überstreicht, und zwar rechnen wir dabei naturgemäß in einer sogleich näher festzusetzenden Weise die einzelnen Teile dieser Fläche positiv oder negativ, je nachdem sie von der Stange im einen oder anderen Sinne überstrichen werden. Wir ersetzen zu diesem Ende entsprechend dem bei jeder Integration vorzunehmenden Grenzprozeß die kontinuierliche Bewegung durch eine Folge beliebig kleiner, ruckweiser „Elementarbewegungen“ aus einer Lage 1 2 in eine benachbarte 1' 2'. Die während der Bewegung tatsächlich überstrichene Fläche ist dann gleich dem Grenzwert der Summe aller bei diesen Elementarbewegungen beschriebenen

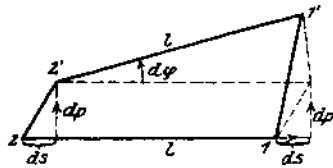


Abb. 19.

„Elementarvierecke“ (1, 1', 2', 2), und zwar kommt — wie leicht zu sehen — der Sinn der Bewegung der Stange gerade richtig zur Geltung, wenn jedes Elementarviereck mit dem diesem Umlaufungssinne 1, 1', 2', 2 entsprechenden Vorzeichen genommen wird.

Wir können nun jede Elementarbewegung der Stange  $A_1A_2$  aus drei Schritten zusammensetzen (vgl. Abb. 19):

1. einer Verschiebung *in* der Richtung der Stange um ein Stück  $ds$ ,
2. einer Verschiebung *normal* zu ihrer Richtung um ein Stück  $dp$ ,
3. einer Drehung um das Ende  $A_2$  durch einen Winkel  $d\varphi$ .

Dabei werden bzw. die Flächen  $0 \cdot ds$ ,  $l \cdot dp$ ,  $\frac{l^2}{2} d\varphi$  überstrichen; man wird das Elementarviereck (1, 1', 2', 2) einfach durch die Summe dieser Flächen ersetzen können, da die hierbei begangenen Fehler klein von höherer Ordnung sind und beim Grenzübergange (der ja ein einfacher Integrationsprozeß ist) verschwinden. Wesentlich ist, daß diese Summe:

$$l \cdot dp + \frac{l^2}{2} \cdot d\varphi$$

auch im Vorzeichen mit dem Vierecksinhalt (1, 1', 2', 2) übereinstimmt, wenn man  $d\varphi$  stets entgegen dem Uhrzeigersinne positiv mißt und  $dp$  bei Verschiebung nach der Seite wachsender  $\varphi$  hin positiv nimmt.

Die Integration über die Bewegungsbahn ergibt hieraus für das ganze von  $A_1A_2$  bestrichene Flächenstück den Inhalt:

$$J = l \int dp + \frac{l^2}{2} \int d\varphi.$$

Hier stellt  $\int d\varphi$  den ganzen Winkel dar, um den sich die Stange gegen ihre Ausgangslage gedreht hat. Da wir sie in ihre Ausgangslage zurück-

führen, so ist, wenn sie sich inzwischen nicht etwa um einen vollen Winkel gedreht hat,  $\int d\varphi = 0$ , und unser Flächenstück ist:

$$(1) \quad J = l \int d\varphi.$$

Sollte aber, was ja bei passenden Wegkurven von  $A_1$  und  $A_2$  wohl möglich wäre, die Stange ein oder mehrere Male sich um einen vollen Winkel gedreht haben, ehe sie in die Ausgangslage zurückkehrt, so ist  $\int d\varphi$  ein Vielfaches von  $2\pi$ , und es ist daher für jede volle Umdrehung in positivem Sinne rechts der Wert  $+\pi l^2$ , für jede in negativem Sinne dagegen der Wert  $-\pi l^2$  hinzuzufügen. Wir wollen jedoch der Einfachheit halber diese kleine Komplikation hier beiseite lassen.

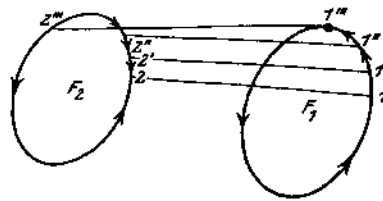


Abb. 20.

Nun können wir aber weiterhin diesen selben Flächeninhalt  $J$  in etwas anderer Weise bestimmen (vgl. Abb. 20). Möge die Stange bei der Folge der Elementarbewegungen der Reihe nach die Lagen  $12, 1'2', 1''2'', \dots$  annehmen, so wird  $J$  gleich der Summe der Elementarvierecke:

$$J = (1, 1', 2', 2) + (1', 1'', 2'', 2') + (1'', 1''', 2''', 2'') + \dots,$$

oder, genauer gesagt, gleich dem den Grenzwert dieser Summe darstellenden Integral; dabei ist jedes Elementarviereck genau wie oben mit dem bestimmten hier angedeuteten Umlaufssinn zu nehmen. Nach unserer früheren Polygonformel haben wir daher, wenn 0 der irgendwie gelegene Koordinatenanfang ist:

$$\begin{aligned} J = & (0, 1, 1') + (0, 1', 2') + (0, 2', 2) + (0, 2, 1) \\ & + (0, 1', 1'') + (0, 1'', 2'') + (0, 2'', 2') + (0, 2', 1') \\ & + (0, 1'', 1''') + (0, 1''', 2''') + (0, 2''', 2'') + (0, 2'', 1'') \\ & + \dots \end{aligned}$$

Hier tritt in jeder Zeile an zweiter Stelle dasselbe Dreieck auf, wie in der folgenden an vierter Stelle, jedoch mit entgegengesetztem Umlaufsinne,  $[(0, 1', 2') = -(0, 2', 1'), (0, 1'', 2'') = -(0, 2'', 1''), \dots]$ , so daß sich diese Summanden sämtlich fortheben; ferner aber tritt, da sich die Reihe der Elementarvierecke schließt, in der letzten Zeile noch der Summand  $(0, 1, 2)$  auf, der den Summanden  $(0, 2, 1)$  der ersten Zeile zu Null ergänzt. Es bleiben also nur die ersten und dritten Dreiecke jeder Zeile übrig; die ersten geben aber zusammen nach dem früheren gerade das Polygon  $(1, 1', 1'', 1''', \dots)$ , und das ist in der Grenze der Inhalt  $F_1$  der vom Stabende  $A_1$  beschriebenen Kurve. Ebenso ergeben die dritten Summanden, wenn man überall ein Minuszeichen herausnimmt,

(2, 2', 2'', 2''', ...), das heißt in der Grenze den *Inhalt*  $F_2$  der von  $A_2$  durchlaufenen Kurve. Es folgt also schließlich:

$$(2) \quad J = F_1 - F_2,$$

und dabei können offenbar beide Kurven sich ganz beliebig überschlagen, wenn wir nur  $F_1$  und  $F_2$  unter genauer Beachtung unserer Vorzeichenregel definieren.

In den beiden Formeln (1) und (2) ist nun die *geometrische Theorie* des Planimeters enthalten. Lassen wir nämlich  $A_2$  auf einer Kurve bekannten Flächeninhaltes  $F_2$  laufen und den „Fahrstift“  $A_1$  auf der den gesuchten Flächeninhalt  $F_1$  umschließenden Kurve gleiten, so können wir:

$$(2') \quad F_1 = F_2 + l \int d\phi$$

sofort bestimmen, wenn wir eine *Vorrichtung* haben, die  $\int d\phi$  zu messen gestattet. Eine solche Vorrichtung hat nun Amsler — und das ist der zweite, *mechanische Teil* seiner Erfindung — geschaffen, indem er auf

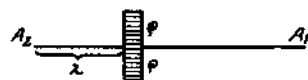


Abb. 21.

der Stange  $A_1A_2$  als Achse eine Rolle anbrachte, die bei der Bewegung der Stange auf dem Papier abrollt. Ihre Entfernung von  $A_2$  sei  $\lambda$ , ihr Radius  $\rho$  (vgl. Abb. 21).

Ihr Drehungswinkel  $\psi$  während der Bewegung wird sich additiv aus ihren Drehungen  $d\psi$  während der Elementarbewegungen zusammensetzen; ein jedes  $d\psi$  wiederum können wir additiv zusammensetzen aus den Drehungen  $d\psi_1, d\psi_2, d\psi_3$  bei den drei einfachen Bewegungen der Stange, aus denen wir jede Elementarbewegung oben (S. 12) konstruierten. Bei der Längsverschiebung 1 zunächst wird sich die Rolle nicht drehen:  $d\psi_1 = 0$ ; bei der Verschiebung 2 von  $A_1A_2$  normal zu sich um  $d\phi$  rollt ein Stück  $d\phi = \rho d\psi_2$  der Rolle ab, also ist  $d\psi_2 = \frac{1}{\rho} d\phi$ ; bei der Drehung 3 um  $A_2$  durch den Winkel  $d\phi$  endlich muß ein Stück  $\lambda d\phi = \rho d\psi_3$  der Rolle abrollen, so daß  $d\psi_3 = \frac{\lambda}{\rho} d\phi$  wird. Wir erhalten also schließlich:

$$d\psi = \frac{1}{\rho} d\phi + \frac{\lambda}{\rho} d\phi.$$

Integrieren wir über die gesamte Bewegungsbahn, so ist  $\int d\phi = 0$ , wenn  $A_1A_2$  ohne Totaldrehung in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, und der gesamte Drehungswinkel der Amslerschen Rolle wird also:

$$(3) \quad \psi = \frac{1}{\rho} \int d\phi.$$

Sollte sich aber die Stange einmal oder mehrmals um einen vollen Winkel drehen, so treten rechts noch geeignete Vielfache von  $2\pi \frac{\lambda}{\rho}$  hinzu, wovon wir jedoch, wie oben, wieder absehen wollen.



Halten wir nun die Formeln (2') und (3) zusammen, so ergibt sich schließlich:

$$F_1 - F_2 = l \cdot \varrho \cdot \psi$$

d. h. der Unterschied der von den beiden Enden der Stange umfahrenen Flächeninhalte wird durch den Drehungswinkel  $\psi$  der Rolle gemessen.

Bei der Ausführung des Instrumentes wird man nun zweckmäßig  $F_2$  zu Null machen. Das erreichte Amsler in konstruktiv ausgezeichneter Weise dadurch, daß er  $A_2$  an einem Arme befestigt, der um einen festgehaltenen Punkt  $M$  drehbar ist (vgl. Abb. 22).  $A_2$  kann dann nur auf einer Kreisperipherie hin und her laufen und daher keinen Inhalt umschließen — wenn wir auf die mögliche Komplikation, daß es den Kreis

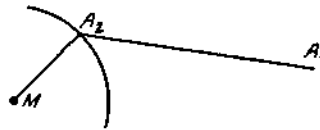


Abb. 22.

in dem einen oder andern Sinne, evtl. auch mehrfach, umläuft, keine Rücksicht nehmen wollen. Im Hinblick auf diesen „Pol“  $M$  spricht man vom *Polarplanimeter*. Man verwendet den Apparat nun einfach so, daß man mit dem durch einen „Fahrstift“ markierten Punkte  $A_1$  den auszumessenden Inhalt umfährt, an der Rolle den Winkel  $\psi$  abliest und dann als umschlossenen Flächeninhalt:

$$F_1 = l \cdot \varrho \cdot \psi$$

hat; die Apparatkonstante  $l\varrho$  bestimmt man durch Ausmessen einer bekannten Fläche, etwa des Einheitsquadrates.

Ich kann Ihnen hier ein Bild des Polarplanimeters vorführen (vgl. Abb. 23); natürlich müssen Sie sich dann den Apparat selbst ansehen und ihn zu handhaben versuchen, wenn Sie ihn völlig verstehen wollen. Damit der Apparat wirklich zuverlässig funktioniert, muß er selbstverständlich etwas komplizierter aufgebaut sein, als es die theoretische Grundlage allein fordern würde. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur noch einiges Wenige: Der Punkt  $M$  ist an einer schweren Masse festgelegt, und von ihm läuft eine Stange zum Punkte  $A_2$  hinüber; die theoretisch wichtige Stange  $A_1A_2$ , von der wir immer sprachen, ist nicht der zweite Metallstab, den Sie am Apparat bemerken, sondern die diesem Stabe parallele ideelle Verlängerung der Achse der neben ihm angebrachten Rolle  $R$ , die durch den Fahrstift  $A_1$  geht. Letzterer ist noch von einem unten stumpfen Parallelstift begleitet, der ein Eindringen der Spitze von  $A_1$  ins Papier

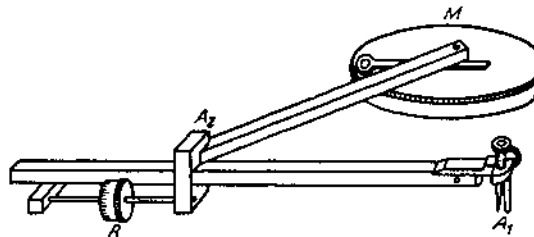


Abb. 23.

verhindern soll. Die Rolle ist mit einem Nonius zur feineren Ablesung sowie einem Zählrade für volle Umdrehungen versehen.

Ich möchte jedoch hier, statt weitere Einzelheiten aufzuführen, noch gern allgemein davor warnen, bei der Betrachtung solcher Apparate über der Theorie die wirkliche *praktische Ausführung* zu vernachlässigen, wozu der reine Mathematiker leider oft gar zu sehr neigt; das ist eine ebenso unberechtigte Einseitigkeit wie der entgegengesetzte extreme Standpunkt des Mechanikers, der, ohne an der Theorie Interesse zu nehmen, sich in konstruktiven Einzelheiten verliert. Hier soll die *angewandte Mathematik* das Bindeglied herstellen; sie soll insbesondere dem Rechnung tragen, daß die theoretische Formulierung des Prinzipes am Apparat in Wahrheit nie genau zutrifft; denn stets werden z. B. die Gelenke des Apparates etwas schlottern, die Rolle wird auf dem Papier auch gleiten, statt nur abzurollen, schließlich ist das Zeichenpapier selbst keine gleichmäßige Ebene, und man wird auch nie mit dem Fahrstift ganz genau die Kurve entlang fahren können. In welchem Maße solche Momente Einfluß haben, auf wieviel Stellen infolgedessen das an der Rolle abgelesene Resultat genau sein kann, das ist natürlich für die Praxis von allergrößter Bedeutung, und das hat die angewandte Mathematik zu untersuchen.

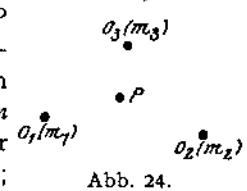
Ich will im Anschluß an diesen Exkurs die gegenwärtige Vorlesung abgrenzen gegen zwei frühere Vorlesungen ähnlichen Titels, die gleichfalls autographiert vorliegen: „*Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien*“ [S.-S. 1901; ausgearbeitet von C. H. Müller<sup>1)</sup>] und „*Einleitung in die höhere Geometrie*“ [W.-S. 1892/93 u. S.-S. 1893; ausgearbeitet von Fr. Schilling<sup>2)</sup>]. In der ersten Vorlesung steht nämlich der soeben berührte Unterschied zwischen abstrakter und praktischer Geometrie im Vordergrund; wir haben damals im Seminar geradezu einen Vortrag über die Fehlerquellen beim Amslerschen Polarplanimeter gehabt. In der andern Vorlesung hingegen habe ich die Theorien der abstrakten Geometrie weitergehend ausgebaut, so wie sie der Spezialist braucht, der im Sinne der heutigen Forschung selbständig auf diesem Gebiete arbeiten will. In dem gegenwärtigen Kolleg endlich will ich ein drittes: ich möchte sozusagen das *Elementartheoretische der Geometrie* darstellen, das, was jeder Lehramtskandidat unbedingt wissen sollte, insbesondere auch das, was für die Anwendungen in Physik und Mechanik von fundamentaler Wichtigkeit ist; auf Dinge, die zu jenen ersten beiden Gebieten gehören, werde ich jeweils nur gelegentlich hinweisen können. —

Wenn ich nun wieder zu unseren allgemeinen Betrachtungen über Flächen- und Rauminhalte zurückkehren darf, so will ich zunächst

<sup>1)</sup> Neuer Abdruck, Leipzig 1907. [Erscheint in Kürze als Bd. III der vorliegenden Auflage der „Elementarmathematik“.]

<sup>2)</sup> 2 Teile. Neuer Abdruck, Leipzig 1907. [Vergriffen. Wegen des Planes einer neuen Herausgabe vgl. die Vorrede zu Bd. I, S. VII.]

eine *historische Notiz* nachholen. Ich will Ihnen den Mann nennen, der zuerst das Prinzip der Vorzeichen in der Geometrie konsequent angewendet hat, den großen Geometer *A. F. Möbius* in Leipzig. Das Buch, in dem er diesen bahnbrechenden Fortschritt macht, ist ein Jugendwerk aus dem Jahre 1827: „*Der barycentrische Calcul*“<sup>1)</sup>, eines der Werke, die überhaupt für die neuere Geometrie grundlegend sind. Seine Lektüre bietet auch schon der schönen Darstellung wegen besonderen Genuß. Der Titel bezieht sich darauf, daß Möbius von der folgenden, mit Schwerpunkten operierenden Betrachtung ausgeht. In irgend drei feste Punkte  $O_1, O_2, O_3$  der Ebene seien drei Massen  $m_1, m_2, m_3$  gelegt (vgl. Abb. 24), die wie im Falle elektrischer Ladungen positiv oder negativ sein können; dann ist ihr Schwerpunkt  $P$  eindeutig bestimmt, und zwar kann er bei Variation von  $m_1, m_2, m_3$  die ganze Ebene überstreichen. Die 3 Massen  $m_1, m_2, m_3$  werden nun als Koordinaten von  $P$  aufgefaßt, wobei klar ist, daß  $P$  nur von den Verhältnissen dieser 3 Größen abhängt; damit ist zum ersten Male das, was wir heute *Dreieckskoordinaten* nennen, in die Geometrie eingeführt. So viel zur Erklärung des Titels jenes Möbiusschen Buches; von seinem sonstigen, sehr interessanten Inhalt kommen für uns an dieser Stelle vor allem die §§ 17–20 in Betracht, wo das Vorzeichenprinzip auf die Inhaltsbestimmung von Dreieck und Tetraeder angewandt wird und genau die Definitionen geschaffen werden, die ich Ihnen vortrug.



Ich muß noch erwähnen, daß Möbius als alter Mann im Jahre 1858 diese Resultate durch eine weittragende Entdeckung ergänzt hat, die aber erst in der Arbeit: „*Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*“<sup>2)</sup> aus dem Jahre 1865 veröffentlicht wurde. Dort hat er nämlich gezeigt, daß es Polyeder gibt, denen man auf keine Weise einen bestimmten Rauminhalt beilegen kann, während man doch, wie wir früher sahen, für jedes sich noch so kompliziert durchsetzende Polygon der Ebene einen bestimmten Flächeninhalt definieren kann. Auf diese merkwürdige Erscheinung müssen wir nun noch eingehen.

Ich gehe dabei von der früher aufgestellten Formel für den Inhalt des Tetraeders aus:

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

<sup>1)</sup> Leipzig 1827 = Gesammelte Werke I (Leipzig 1885), 633 Seiten.

<sup>2)</sup> Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (mathematisch-physikalische Klasse), Bd. 17 (1865), S. 31 = Gesammelte Werke II (Leipzig 1886), S. 473.

Entwickeln wir die vorstehende Determinante nach Unterdeterminanten der letzten Kolonne, so kommt das — genau wie wir es früher (S. 7f.) beim Dreieck sahen — darauf hinaus, daß wir unser Tetraeder in 4 andere zerlegen, die seine 4 Seitenflächen zu Grundflächen und den Koordinatenanfang 0 zur Spitze haben. Nach den Vorzeichenregeln der Determinantentheorie ergibt sich dabei, wenn wir auf die zyklische Reihenfolge von 1, 2, 3, 4, achten, folgende Formel:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) - (0, 3, 4, 1) + (0, 4, 1, 2) - (0, 1, 2, 3);$$

daß dabei Minuszeichen auftreten, während beim Dreieck nur Pluszeichen vorkamen, hat darin seinen Grund, daß Determinanten gerader Ordnung bei zyklischer Vertauschung ihr Zeichen wechseln, Determinanten ungerader aber nicht. Natürlich können wir durch geeignete Zeilenvertauschungen auch hier die Minuszeichen fortschaffen, müssen aber dann auf die zyklische Reihenfolge verzichten, z. B. können wir schreiben:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) + (0, 4, 3, 1) + (0, 4, 1, 2) + (0, 2, 1, 3).$$

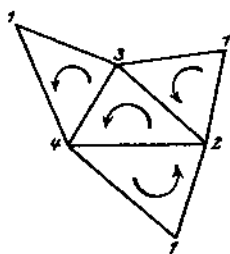


Abb. 25.

Um die hierin enthaltene Gesetzmäßigkeit zu durchschauen, denken wir uns die Tetraederoberfläche etwa aus Papier ausgeschnitten und in die Ebene 2, 3, 4 hineingeklapppt, wodurch die Ecke 1 drei verschiedene Lagen erhält (vgl. Abb. 25). Dann gehen in die letzte Formel die Ecken jedes Seitendreiecks in einer Reihenfolge ein, die in Abb. 25 einem Umlauf entgegen dem Sinne des Uhrzeigers entspricht, also dem gleichen Sinne in allen Dreiecken.

Diesen Sachverhalt können wir natürlich auch ohne jene Umklappung für die räumliche Figur aussprechen. Da gehört jede der 6 Kanten 2 Seitendreiecken an, und man sieht, daß bei Umlaufung aller Dreiecke im angegebenen Sinne jede Seite das eine Mal im einen, das andere Mal im andern Sinne durchlaufen wird. Durch diese Regel, die Möbius das *Kantengesetz* genannt hat, ist offenbar ein Umlaufssinn aller Seitendreiecke bestimmt, wenn man ihn in einem Dreieck willkürlich festlegt. Und nun besagt unsere Formel: *Ein Tetraeder (1, 2, 3, 4) kann als Summe von 4 Teiltetraedern mit derselben ersten Ecke 0 aufgefaßt werden, indem man je 3 Ecken in der Reihenfolge auf 0 folgen läßt, wie sie sich durch Fortsetzung des Umlaufssinnes (2, 3, 4) nach dem Möbiusschen Kantengesetz ergibt.*

Ganz wie wir früher (S. 9) die Zerlegungsformel für Dreiecke zur Definition des Inhaltes beliebiger Polygone verallgemeinerten, werden wir jetzt von dem letzten Resultat aus zur *Definition des Rauminhaltes beliebiger Polyeder* aufzusteigen versuchen. Hierbei müssen wir sowohl zulassen, daß die Seiten eines einzelnen das Polyeder begrenzenden Polygons sich durchdringen, als auch, daß die Flächen verschiedener solcher

Polygone sich irgendwie durchsetzen. Man wird nun irgendeinen Hilfspunkt  $O$  hinzunehmen und zunächst einmal den *Inhalt einer einzelnen Pyramide* definieren, die von  $O$  aus ein Seitenpolygon projiziert.

Dazu muß man erst auf ihrer Grundfläche [es sei etwa die Seitenfläche  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$  des Polyeders der Abb. 26] einen Umlaufungsinn haben. Jetzt hat dies Polygon nach dem früheren einen bestimmten Inhalt, und wir werden wie in der Elementargeometrie den Rauminhalt der Pyramide  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$  gleich dem durch 3 dividierten Produkte dieser Grundfläche in die Höhe setzen und nur ein positives oder negatives Vorzeichen hinzufügen, je nachdem der Umlauf  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$  von  $O$  aus entgegen oder übereinstimmend mit dem Uhrzeigersinn erscheint. Man sieht unmittelbar, daß diese Definition die früheren das Tetraeder betreffenden Festsetzungen als Spezialfall enthält; man kann sie übrigens naturgemäß aus jenen herleiten, indem man das Polygon, wie zu seiner eigenen Inhaltsbestimmung, durch eine Summe passend umlaufener Dreiecke ersetzt und die Pyramide als Summe der diese Dreiecke projizierenden Tetraeder definiert.

Um nun im allgemeinen Fall das Polyeder als Summe solcher Teilpyramiden darstellen zu können, wird man auf *jeder* Seitenfläche einen bestimmten Umlaufsinne festlegen müssen, und dafür kann nach dem Vorausgeschickten nur das

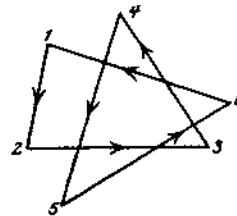


Abb. 26.

Kantengesetz maßgebend sein: *Man bestimme für ein Polygon den Umlaufungssinn beliebig und setze ihn dann so fort, daß jede Kante in beiden angrenzenden Polyederflächen in verschiedenem Sinne durchlaufen wird.* Läßt sich diese Bestimmung auf der ganzen Oberfläche widerspruchlos durchführen, so ist der *Polyederinhalt als Summe der von  $O$  ausgehenden Teilpyramiden nach den so umlaufenden Begrenzungs-polygonen bestimmt*, und man sieht leicht, daß diese Bestimmung eindeutig und von der Lage von  $O$  unabhängig ist.

Nun ist es aber äußerst merkwürdig, daß sich dieses Kantengesetz nicht notwendig für jede geschlossene Polyederoberfläche widerspruchlos durchführen läßt, d. h. daß es Polyeder gibt, bei denen jede bestimmte Vorzeichendefinition versagt und denen man daher auf keine Weise einen bestimmten Inhalt zuordnen kann. Dies ist die große Entdeckung,

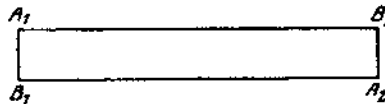


Abb. 27.

die Möbius 1865 veröffentlicht hat. Er bespricht da unter anderem die später als *Möbiussches Blatt* bezeichnete Fläche, die man so erhält. An einem langen schmalen Rechteck  $A_1 B_1 A_2 B_2$  (vgl. Abb. 27) aus Papier hefte man, indem man es einmal tordiert, die schmalen Seiten  $A_1 B_1, A_2 B_2$  so zusammen, daß  $A_1$  auf  $A_2, B_1$  auf  $B_2$  fällt; dabei kommt offenbar die

Vorderseite des Blattes mit der Rückseite in Zusammenhang, so daß eine *Fläche mit nur einer Seite* entsteht. Etwas drastisch gesagt: ein Maler, der das Blatt einmal herum anstreichen soll, würde gerade doppelt so viel Farbe brauchen, als er nach der Länge des Blattes vermutet; denn hat er einmal das Blatt seiner Länge angestrichen, so ist er der Ausgangsstelle gegenüber angelangt und muß noch einmal herumgehen, ehe er wirklich zu ihr zurückkommt.

Statt dieses gekrümmten Blattes kann man sich auch eine (nicht geschlossene) Polyederfläche mit lauter ebenen Teilen derselben Eigen-

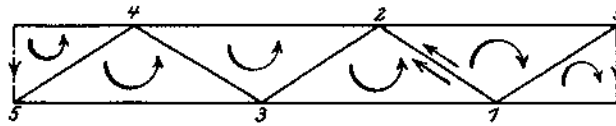


Abb. 28.

schaft herstellen, indem man das Rechteck etwa mit einer Dreiecks-  
teilung versieht und längs deren Kanten knickt; für die entstehende  
*Dreieckszone* läßt sich dann bereits das *Kantengesetz* nicht mehr durch-  
führen. Man braucht dazu mindestens 5 Dreiecke, die man wie in  
der beistehenden Abb. 28 anzuordnen hat; dabei sind die Halbdrei-  
ecke rechts und links bei der Zusammenfaltung zu einem Dreieck  
(4, 5, 1) vereinigt. Setzt man da den positiven Umlaufssinn von (1, 2, 3)  
nach links hin nach dem Kantengesetz fort, so hat man der Reihe nach die

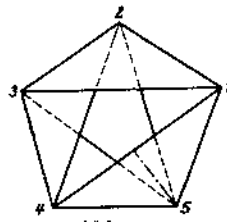


Abb. 29.

Sinne (3, 2, 4), (3, 4, 5), (5, 4, 1), (5, 1, 2), und so  
wird 1 2 schließlich wieder im *selben* Sinne durch-  
laufen, wie bei (1, 2, 3), entgegen dem Kantengesetz.

Von oben gesehen erscheint das gefaltete Blatt als  
eine fünfeckige Figur, deren Diagonalen die 5 Seiten  
1 3, 3 5, 5 2, 2 4, 4 1 werden, wie nebenstehend (vgl.  
Abb. 29) skizziert. Aus dieser Dreieckszone stellt  
nun Möbius weiter ein *geschlossenes Polyeder* her,  
indem er ihre freien Kanten — eben jene 5 Diago-

nalen — mit irgendeinem, am besten symmetrisch über der Mittel-  
linie des Fünfecks gelegenen Raumpunkte 0 durch Dreiecke ver-  
bindet —, mit andern Worten, eine überschlagene fünfseitige Pyramide  
aufsetzt. Auf diesem geschlossenen, aus 10 Dreiecken gebildeten Polyeder  
läßt sich das *Kantengesetz* natürlich gleichfalls nicht durchführen, und  
man kann daher bei ihm von einem Inhalt nicht sprechen<sup>1)</sup>.

Ein weiteres einseitiges Polyeder, das geschlossen und von sehr  
einfacher Bauart ist, erhält man leicht auf folgende Weise aus

<sup>1)</sup> Man vergleiche die Anwendung dieses einseitigen Polyeders in der graphi-  
schen Statik in meiner Arbeit: „Über Selbstspannungen ebener Diagramme“,  
Mathematische Annalen Bd. 67, S. 438. [= Klein, F.: Gesammelte Mathematische  
Abhandlungen Bd. II, S. 692. Berlin 1922.]

einem Oktaeder  $ABCDEF$  (vgl. Abb. 30). Man wählt von den Seitenflächen des Oktaeders vier aus, die nicht benachbart sind, also keine Kante gemeinsam haben, aber in je einer Ecke zusammenstoßen (etwa:  $AED$ ,  $EBC$ ,  $CFD$ ,  $ABF$ ) und nimmt die drei Diagonalebene  $ABCD$ ,  $EBFD$ ,  $AECF$  hinzu. Das so entstehende „Heptaeder“<sup>1)</sup> hat dieselben Kanten wie das Oktaeder, denn in jeder Seitenkante des letzteren stoßen, wie man unmittelbar sieht, zwei benachbarte Seitenflächen des Heptaeders (nämlich je eine Seiten- und Diagonalfäche des Oktaeders) aneinander. Die Diagonalen des Oktaeders sind nicht als Kanten des Heptaeders anzusprechen, da für dieses die Diagonalebene nicht benachbart sind; die Diagonalen  $AC$ ,  $BD$ ,  $EF$  sind vielmehr Linien, längs deren das Polyeder sich selbst durchdringt. Den Nachweis der Einseitigkeit dieses Heptaeders liefern wir ohne weiteres wieder mit Hilfe des Kantengesetzes. Greifen wir nämlich die aufeinanderfolgenden Flächen  $AED$ ,  $EDFB$ ,  $ECB$ ,  $ABCD$  heraus, legen für die erste einen Umlaufsinn fest und bestimmen für die folgenden den dem Kantengesetz entsprechenden, so zeigt sich, daß die Kante  $AD$  zuletzt zweimal in demselben Sinne durchlaufen wird.

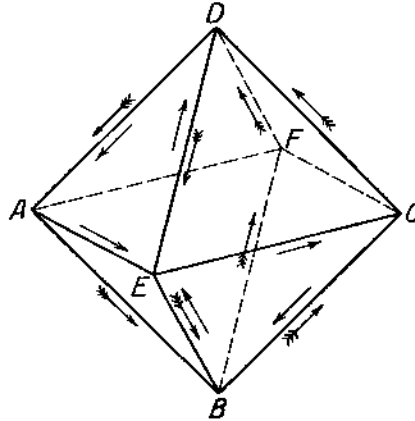


Abb. 30.

Damit beende ich die Behandlung der Inhaltszahlen und will nun zu der Betrachtung *weiterer geometrischer Elementargrößen* übergehen. Wie uns bisher der Name Möbius leitete, so werden wir jetzt an die Gedanken des großen Stettiner Geometers *Hermann Graßmann* anschließen, die er zuerst 1844 in seiner „*linealen Ausdehnungslehre*“<sup>2)</sup> niedergelegt hat. Dieses Buch ist wie das Möbiussche äußerst ideenreich, aber im Gegensatz zu ihm ganz ungewöhnlich dunkel und undurchsichtig geschrieben, so daß es jahrzehntelang unbeachtet und unverstanden blieb; erst als man anderweitig auf ähnliche Gedankengänge gekommen war, erkannte man sie nachträglich in Graßmanns Buch wieder. Wollen Sie einen Eindruck von dieser abstrakten Schreibweise erhalten, so betrachten Sie nur die Kapitelüberschriften der Einleitung

<sup>1)</sup> [In der Literatur zuerst erwähnt bei Reinhardt, C.: Zu Möbius' Polyedertheorie. Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (mathematisch-physikalische Klasse) Bd. 37, 1885.]

<sup>2)</sup> Leipzig 1844. Vgl. Gesammelte mathematische und physikalische Werke I, (Leipzig 1894), — 2. Aufl. Leipzig 1898.

dieses Buches. Sie lauten: Ableitung des Begriffes der reinen Mathematik, Ableitung des Begriffes der Ausdehnungslehre, Darlegung des Begriffes der Ausdehnungslehre, Form der Darstellung — dann folgt noch „Übersicht der allgemeinen Formenlehre“, und erst, nachdem man sich durch diese allgemeinen Darlegungen durchgekämpft hat, kommt man zu der immer noch sehr schwer verständlichen, rein begrifflichen Darstellung des eigentlichen Stoffes. Erst in einer späteren Neubearbeitung, der „*Ausdehnungslehre*“<sup>1)</sup> von 1862 benutzt Graßmann eine ein wenig leichter zugängliche, analytische Darstellung mit Koordinaten. Das Wort „Ausdehnungslehre“ übrigens hat sich Graßmann neu gebildet, um anzudeuten, daß sich seine Entwicklungen auf beliebig viele Dimensionen beziehen, während „Geometrie“ für ihn nur die Anwendung dieser neuen, ganz abstrakten Disziplin auf den gewöhnlichen Raum von 3 Dimensionen ist. Dieses neue Wort hat sich jedoch nicht eingebürgert, sondern man spricht heutzutage kurzweg von *n-dimensionalen Geometrie*.

Wir wollen hier von der uns geläufigen analytischen Koordinatendarstellung aus die Graßmannschen Begriffe kennen lernen. Indem wir uns zunächst auf die ebene Geometrie beschränken, überschreiben wir das nächste Kapitel:

## II. Das Graßmannsche Determinantenprinzip für die Ebene.

Wir knüpfen wieder an die Grundlage der Erörterungen des ersten Kapitels an; da hatten wir aus den Koordinaten dreier Punkte uns die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

gebildet und als doppelten Inhalt eines Dreiecks, d. h. als Inhalt eines Parallelogrammes gedeutet. Nunmehr wollen wir außerdem auch die aus den Koordinaten zweier bzw. eines Punktes gebildeten Schemata:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad |x_1 \ y_1 \ 1|$$

betrachten, die wir *Matrizen* nennen; jede solche Matrix soll die *Gesamtheit der Determinanten repräsentieren, die sich aus ihr durch Fortlassen einer bzw. zweier Kolonnen ergeben*. So erhalten wir aus der ersten Matrix durch Fortlassen der ersten bzw. zweiten Kolonne die zwei-reihigen Determinanten:

$$Y = y_1 - y_2, \quad X = x_1 - x_2$$

und durch Fortlassen der dritten ebenso:

$$N = x_1 y_2 - x_2 y_1;$$

<sup>1)</sup> Berlin 1862. Vgl. Werke I., Leipzig 1896.



die Bezeichnungen sind so gewählt, wie es sich für die Raumgeometrie als zweckmäßig erweisen wird. Wir haben zu untersuchen, was für ein geometrisches Gebilde durch diese 3 Determinanten  $X, Y, N$  festgelegt wird; dieses Gebilde werden wir dann mit derselben Berechtigung wie bisher den Dreiecksinhalt als eine neue geometrische Elementargröße auffassen. Bei der zweiten einreihigen Matrix entstehen als einreihige Determinanten neben der Zahl 1 die Koordinaten  $x_1, y_1$  selbst; sie bestimmen den Punkt mit diesen Koordinaten als einfachste Elementargröße und verlangen also keine weitere Untersuchung mehr.

Es wird danach jetzt verständlich sein, wenn ich sogleich das *Graßmannsche Prinzip* allgemein ausspreche: *Es sollen in der Ebene wie im Raume alle Matrizen (mit weniger Zeilen als Kolonnen) betrachtet werden, deren Zeilen je aus den Koordinaten eines Punktes und einer 1 gebildet sind, es soll sodann untersucht werden, welche geometrischen Gebilde durch die Determinanten festgelegt sind, die man aus ihnen durch Wegstreichen hinreichend vieler Kolonnen erhält.* Wir werden in diesem Prinzip, das hier gewissermaßen willkürlich aufgestellt wird und sich nur allmählich als ein zweckmäßiger Wegweiser durch die Menge der geometrischen Grundgebilde erweist, später einen naturgemäßen Ausfluß eines großen, die ganze geometrische Systematik umfassenden Ideenkreises erkennen.

Doch nun wieder zum konkreten ebenen Problem: Was ist an der Figur (vgl. Abb. 31) zweier Punkte 1, 2 gegeben, wenn man die Determinanten  $X, Y, N$  kennt? Offenbar bleibt alsdann in der Lage der Punkte noch eine Freiheit, da sie vollständig erst durch 4 Größen bestimmt ist. Ich behaupte: *man erhält dann und nur dann dasselbe Wertetripel  $X, Y, N$ , wenn 1 der End-, 2 der Anfangspunkt einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung ist, die auf einer bestimmten Geraden sonst beliebig verschoben werden kann; den die Richtung andeutenden Pfeil denken wir uns hier wie im folgenden stets so gesetzt, daß er von 2 als Anfangspunkt nach 1 als Endpunkt zeigt.*

Daß durch  $X, Y, N$  zunächst die Verbindungsgerade 1 2 bestimmt ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß man ihre Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

auch in der Form schreiben kann:

$$Y \cdot x - X \cdot y + N = 0;$$

hieraus erkennt man noch weiter, daß diese Gerade bereits durch die Verhältnisse  $X : Y : N$  bestimmt ist. Ferner aber entnehmen wir

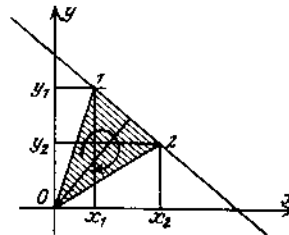


Abb. 31.

unseren früheren Betrachtungen über Streckenlängen und Dreiecksinhalte, daß  $X$  und  $Y$  die Projektionen der Strecke  $(1, 2)$  mit der Richtung von 2 nach 1 auf die  $x$ - und  $y$ -Achse,  $N$  aber den doppelten Inhalt des Dreiecks  $(0, 1, 2)$  mit dem Umlaufsinne  $0, 1, 2$  darstellt; offenbar sind daher die einzigen Lageänderungen der Punkte 1, 2, bei denen diese drei Größen sämtlich ungeändert bleiben, die Verschiebungen der Strecke  $(1, 2)$  unter Erhaltung ihrer Länge und ihres Sinnes längs ihrer Geraden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Graßmann nannte eine solche Strecke bestimmter Richtung und Länge auf einer bestimmten Geraden einen *Linienteil*; jetzt ist in der deutschen Literatur der Name *Vektor* üblicher, und zwar genauer „*linienflüchtiger Vektor*“ – von einem Vektor schlechtweg oder einem „*freien Vektor*“ spricht man, wenn der Strecke jede Parallelverschiebung (unter Erhaltung von Länge und Sinn) auch aus ihrer Geraden heraus gestattet ist. *Ein linienflüchtiger Vektor, bestimmt durch die Matrix*  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$  *bzw. die Determinanten*  $X, Y, N$ , *ist also das erste geometrische Elementargebilde, das wir nach dem Graßmannschen Prinzip in Betracht ziehen.*

Ich bemerke hier sogleich, daß die Größen  $X, Y$  für sich einen *freien Vektor* bestimmen, da sie auch bei Parallelverschiebung der Strecke aus ihrer Geraden heraus ungeändert bleiben – analog wie die zwei Größen äquivalenten Verhältnisse  $X : Y : N$  nur die *unbegrenzte Gerade* bestimmen, nicht die Länge einer Strecke auf ihr. Der freie Vektor und die unbegrenzte Gerade sind also zwei Nebengebilde, auf die wir hier stoßen; das Prinzip, das für die Einführung solcher Nebengebilde maßgebend ist, wird erst später entwickelt werden.

Diese Begriffsbildungen spielen in der Mechanik bei den *Elementen der Statik* eine äußerst wichtige Rolle; sie haben sich dort schon von altersher ganz naturgemäß von selbst dargeboten. Es kommt hier zunächst, solange wir in der Ebene operieren, die *Statik ebener starrer Systeme* in Betracht. Man kann da nämlich den Linienteil für die



Abb. 32.

geometrische Behandlung als vollständiges Äquivalent der am System angreifenden Kraft auffassen, deren Angriffspunkt man eben wegen der Starrheit des Körpers beliebig in der Krafrichtung verschieben kann. Stellen Sie sich hier die Kraft ganz im Sinne der alten Mechanik vor: Am Punkte 2 ist ein Seil angebracht, an dem ein durch die Länge der Strecke 1 2 repräsentierter Zug ausgeübt wird (vgl. Abb. 32); ich hebe gern als ein Beispiel der lebendigen Denkweise der alten Mechanik im Gegensatz zu der abstrakten modernen Darstellung hervor, daß man früher immer eine an dem Seile ziehende Hand mit abzubilden pflegte<sup>1)</sup>. Von den

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. die Tafeln in Varignon: Nouvelle mécanique ou statique. Paris 1775.

Koordinaten des Linienteils heißen nun  $X, Y$  die *Komponenten der Kraft*,  $N$  das *Drehmoment um den Anfangspunkt  $O$* ; denn aus der Gleichung der Geraden folgt als ihr Abstand von  $O$ :  $p = \frac{N}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ , und daher ist  $N$  tatsächlich gleich dem Produkt aus  $p$  in die Länge  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  der Strecke, d. i. die Größe der Kraft. Die 3 Größen zusammen kann man die Koordinaten der Kraft nennen; die analytische Definition ergibt für sie – und das ist besonders wichtig – in jedem Falle wohlbestimmte Vorzeichen, die man natürlich wie früher auch geometrisch deuten kann. Hierbei ist freilich anzumerken, daß wir in Rücksicht auf die Symmetrie der Formeln von der in der Mechanik meist gebräuchlichen Bestimmung des Vorzeichens des Drehmomentes abgewichen sind; sonst verwendet man nämlich die aus den Koordinaten des Anfangspunktes 2 und den beiden Koordinaten  $X, Y$  des freien Vektors gebildete Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix},$$

die offenbar unserem  $N$  entgegengesetzt gleich ist. Diese kleine Diskrepanz wird indessen, nachdem sie einmal hervorgehoben ist, zu Verwechslungen wohl kaum Anlaß geben.

Die erste Aufgabe der Mechanik starrer Körper ist nun, ein beliebiges System solcher Kräfte  $X_i, Y_i, N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) zu einer Resultante zusammensetzen; das kommt analytisch darauf hinaus, den linienflüchtigen Vektor mit den Koordinaten  $\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n N_i$  zu bilden. Die *graphische Statik* entwickelt zur geometrischen Lösung dieser Aufgabe ihre sehr eleganten Methoden; bei 2 Kräften benutzt man einfach den bekannten Parallelogrammsatz, während man sonst mit „Kräftepolygon“ und „Seilpolygon“ vorgeht und im allgemeinen zu jedem Kräftesystem einen eindeutig bestimmten linienflüchtigen Vektor als Resultante findet. Es gibt indessen Ausnahmen, z. B. schon, wenn das Kräftesystem aus zwei parallelen, entgegengesetzt gleichen, in verschiedenen Geraden wirkenden Kräften  $X, Y, N_1$  und  $-X, -Y, N_2 (N_1 \neq -N_2)$  besteht; die Resultante hat die Komponenten  $0, 0, N_1 + N_2$ , das sind Zahlenwerte, die offenbar niemals Koordinaten eines Linienteiles sein können. Die elementare Darstellung weiß mit dieser Erscheinung nichts rechtes anzufangen, sie muß daher immer mit dem Auftreten solcher nicht weiter reduzierbaren sog. „*Kräftepaare*“ rechnen, welche die Einfachheit und Allgemeingültigkeit der Theoreme störend beeinträchtigen. Man kann jedoch diese scheinbaren Ausnahmen nun auch leicht unserem System einordnen, wenn man davon ausgeht, daß unsere früheren Formeln – rein formal auf die

Komponenten  $0, 0, N_1 + N_2$  angewandt — für die Intensität der Resultierenden  $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$  und für ihren Abstand vom Anfangspunkt  $p = \frac{N_1 + N_2}{0} = \infty$  ergeben würden. Läßt man also bei einer gewöhnlichen Kraft den Abstand  $p$  vom Anfangspunkt  $0$  so unendlich und ihre Intensität  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  so Null werden, daß das Produkt  $p \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}$ , welches das Drehmoment darstellt, endlich bleibt, so gehen die Komponenten gerade in jene Ausnahmewerte über, und *man darf daher die Resultierende  $0, 0, N_1 + N_2$  eines Kräftepaares als unendlich kleine, unendlich entfernt wirkende Kraft von endlichem Drehmoment ansprechen*. Diese Fiktion ist für die fortschreitende Wissenschaft äußerst bequem und nützlich, sie entspricht ja ganz der sonst gebräuchlichen Einführung unendlich ferner Elemente in die Geometrie. Vor allem aber können wir auf Grund dieser Erweiterung des Begriffes der Kraft den *ausnahmelos gültigen Satz aussprechen, daß beliebig viele in ein und derselben Ebene wirkende Kräfte in jedem Falle eine Kraft zur Resultierenden haben*, während die elementare Darstellung hierbei stets noch die Alternative des Kräftepaares mitschleppen muß.

Ich will nun unsere Erörterungen dadurch vervollständigen, daß ich das *Verhalten unserer Elementargrößen bei Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems* untersuche; das wird uns dann ein wertvolles Klassifikationsprinzip liefern, durch welches die Graßmannsche Systematik erst ihre feinere Ausführung erhält.

Die *Formeln der Koordinatenänderung*, d. h. die Ausdrücke der Koordinaten  $x', y'$  eines Punktes in bezug auf die neue Lage der Achsen durch die ursprünglichen Koordinaten  $x, y$  lauten bekanntlich für die vier fundamentalen Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems folgendermaßen:

1. für die *Parallelverschiebung*:

$$(A_1) \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b; \end{cases}$$

2. für die *Drehung um den Winkel  $\varphi$* :

$$(A_2) \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi; \end{cases}$$

3. für die *Spiegelung an der  $x$ -Achse*:

$$(A_3) \begin{cases} x' = x \\ y' = -y; \end{cases}$$

4. für die *Veränderung des Maßstabes*:

$$(A_4) \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

Setzt man Transformationen dieser vier Arten für alle möglichen Werte der Parameter  $a, b, \varphi, \lambda$  miteinander zusammen, so entstehen die Gleichungen für den *allgemeinsten möglichen Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zu einem anderen* bei gleichzeitigem Wechsel des Maßstabes; die Zusammensetzung aller möglichen Verschiebungen und Drehungen entspricht den sämtlichen *eigentlichen Bewegungen* des Koordinatensystems innerhalb der Ebene. Die Gesamtheit aller dieser Transformationen bildet eine „Gruppe“, d. h. irgend 2 von ihnen zusammengesetzt geben wieder eine Transformation derselben Gesamtheit und die Inverse jeder Transformation ist immer vertreten. Die speziellen Transformationen ( $A$ ), aus denen man alle andern zusammensetzen kann, heißen die *Erzeugenden der Gruppe*.

Bevor wir nun zusehen, wie diese einzelnen Transformationen unsere Determinanten  $X, Y, N$  verändern, will ich *zwei allgemeine Prinzipien* aussprechen, die ich bei diesen grundlegenden geometrischen Erörterungen von jeher mit besonderem Nachdruck an die Spitze gestellt habe; mögen sie auch in dieser Allgemeinheit zunächst etwas dunkel klingen, so sollen sie doch bei den konkreten Erörterungen sogleich ganz deutlich werden. Das eine ist, *daß die geometrischen Eigenschaften irgendwelcher Figuren sich stets in Formeln aussprechen müssen, die nicht geändert werden, wenn man das Koordinatensystem abändert*, d. h. die Koordinaten sämtlicher Punkte der Figur gleichzeitig einer unserer Transformationen unterwirft; *und daß umgekehrt auch jede Formel, die in diesem Sinne invariant gegen die Gruppe dieser Koordinatentransformationen ist, eine geometrische Eigenschaft darstellen muß*. Als einfachste Beispiele, wie sie jeder kennt, sei da nur an den Ausdruck der Entfernung oder des Winkels in der Figur zweier Punkte oder zweier Geraden erinnert; von diesen und vielen andern ähnlichen Formeln wird ja im folgenden immer wieder zu handeln sein. Hier nur noch zur Verdeutlichung auch ein ganz triviales Beispiel für nicht invariante Formeln: die Gleichung  $y = 0$  für die aus einem Punkt  $x, y$  der Ebene bestehende Figur sagt aus, daß dieser Punkt auf der  $x$ -Achse liegt, die doch eigentlich eine ganz willkürliche, dem Wesen der Figur fremde, nur ihrer bequemen Beschreibung dienende Zutat ist. So wird jede nicht invariante Gleichung irgendeine Beziehung der Figur zu äußeren willkürlich hinzugefügten Dingen, insbesondere dem Koordinatensystem, aber keine geometrischen Eigenschaften der Figur selbst darstellen.

Das *zweite Prinzip* bezieht sich darauf, daß man ein System von analytischen Größen hat, die aus den Koordinaten mehrerer Punkte  $1, 2, \dots$  gebildet sind — wie z. B. unsere 3 Größen  $X, Y, N$ . *Hat dies System die Eigenschaft, daß es sich bei allen unseren Koordinatentransformationen in bestimmter Weise in sich selbst transformiert*, d. h., daß sich das aus den neuen Koordinaten der Punkte  $1, 2, \dots$  in gleicher

Weise gebildete Größensystem *allein* durch die aus den alten Koordinaten gebildeten Größen ausdrückt (ohne daß man die Koordinatenwerte selbst hinzunehmen muß), so sagen wir, es definiert ein neues geometrisches, d. h. ein vom Koordinatensystem unabhängiges Gebilde; ja wir werden sogar alle analytischen Ausdrücke geradezu nach der Art klassifizieren, wie sie sich bei Koordinatentransformationen verhalten und zwei Serien von Ausdrücken, die sich in gleicher Weise transformieren, auch geometrisch als gleichwertig, d. h. als gleichartige geometrische Gebilde definierend ansehen.

Das alles wollen wir nun sogleich an dem von den Graßmannschen Elementargrößen gelieferten Material näher erläutern. Wir unterwerfen dazu unsere beiden Punkte  $x_1, y_1; x_2, y_2$  der gleichen Koordinatentransformation; beginnen wir mit der Parallelverschiebung ( $A_1$ ) und setzen also:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + a, & x'_2 &= x_2 + a \\ y'_1 &= y_1 + b, & y'_2 &= y_2 + b.\end{aligned}$$

Vergleichen wir die Koordinaten des Linienteils vor und nach der Transformation:

$$\begin{aligned}X &= x_1 - x_2, & Y &= y_1 - y_2, & N &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ X' &= x'_1 - x'_2, & Y' &= y'_1 - y'_2, & N' &= x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1,\end{aligned}$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$(B_1) \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ N' = N + bX - aY. \end{cases}$$

Ganz genau so erhält man als Transformationsformeln:

2. bei der Drehung ( $A_2$ ):

$$(B_2) \begin{cases} X' = X \cos \varphi + Y \sin \varphi \\ Y' = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi \\ N' = N. \end{cases}$$

3. bei der Spiegelung ( $A_3$ ):

$$(B_3) \begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y \\ N' = -N \end{cases}$$

4. bei der Maßstabänderung ( $A_4$ ):

$$(B_4) \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \lambda Y \\ N' = \lambda^2 N. \end{cases}$$

In den letzten Formeln ( $B_4$ ) tritt ein Unterschied in dem Verhalten der einzelnen Größen auf, indem der Exponent der Potenz von  $\lambda$ , mit

der sie multipliziert werden, nicht überall derselbe ist. Diesem Unterschied wird man in der Physik durch die Einführung des Dimensionsbegriffes gerecht:  $X, Y$  haben die Dimension 1 einer Linie,  $N$  hat die Dimension 2 eines Flächeninhalts.

Wir bemerken zunächst, indem wir diese 4 Formelgruppen überblicken, daß der durch die 3 Determinanten  $X, Y, N$  definierte Linienteil tatsächlich unserer allgemeinen Definition der geometrischen Größe genügt: die neuen Koordinaten  $X', Y', N'$  drücken sich allemal lediglich durch die alten  $X, Y, N$  aus.

Aber noch mehr: Betrachten wir überall nur die beiden ersten Gleichungen. In sie geht  $N$  gar nicht ein; die beiden ersten Koordinaten  $X', Y'$  des Linienteils im neuen Koordinatensystem sind also lediglich von den ursprünglichen Werten  $X, Y$  dieser Koordinaten abhängig, und zwar ändern sie sich bei Parallelverschiebungen gar nicht, bei allen andern Transformationen stehen  $X, Y$  zu  $X', Y'$  in genau derselben Beziehung wie die alten Koordinaten  $x, y$  eines Punktes zu den neuen  $x', y'$ . Wir können also dem soeben ausgesprochenen zweiten Prinzip gemäß behaupten, daß bereits die zwei Koordinaten  $X, Y$  vom Koordinatensystem unabhängig ein geometrisches Gebilde festlegen, und wir wissen ja bereits, daß dies Gebilde der freie Vektor ist. Wir haben hier also das früher angekündigte systematische Prinzip gefunden, das die Einführung dieses Gebildes neben dem Linienteil veranlaßt.

Auf demselben Gebiete liegt auch die folgende Betrachtung: Da in allen 4 Formelgruppen  $X', Y', N'$  als *homogene* lineare Funktionen von  $X, Y, N$  auftreten, so ergibt sich durch Division je zweier Gleichungen, daß die Verhältnisse  $X' : Y' : N'$  auch nur von den Verhältnissen  $X : Y : N$  abhängen. Also müssen auch diese Verhältnisse  $X : Y : N$  ohne Rücksicht auf die wirklichen Werte der drei Größen ein geometrisches Gebilde unabhängig vom Koordinatensystem bestimmen, und in der Tat stellten wir ja schon früher dieses Gebilde als die *unbegrenzte Gerade* fest.

Wenden wir nun unsere Formeln (B) insbesondere auf ein „Kräftepaar“ an, für das ja  $X = Y = 0$  zu setzen ist, dann ergeben sie natürlich  $X' = Y' = 0$ , während in den 4 einzelnen Fällen:

$$(C_1) \quad N' = N$$

$$(C_2) \quad N' = \dot{N}$$

$$(C_3) \quad N' = -N$$

$$(C_4) \quad N' = \lambda^2 N$$

wird. Indem wir den üblichen Ausdruck *Invariante* für eine Größe benutzen, die bei den Operationen einer Transformationsgruppe sich höchstens um einen Faktor ändert, und die Invariante noch eine *absolute* oder *relative* nennen, je nachdem dieser Faktor 1 ist oder nicht, können wir die Formeln (C) in die Worte fassen: *Das Drehmoment*

eines Kräftepaars ist gegenüber allen rechtwinkligen Koordinatentransformationen der Ebene eine relative Invariante.

Vergleichen wir damit das Verhalten der am Anfang unserer Betrachtungen studierten geometrischen Elementargröße, des Dreiecksinhaltes:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

bei unsern Koordinatentransformationen! Die Verschiebung ( $A_1$ ) ändert diese Determinante nicht, da sie nur zu den Elementen der ersten Kolonne  $a$ , zu denen der zweiten  $b$ , d. h. das  $a$ -fache bzw.  $b$ -fache der Elemente der letzten Kolonne addiert.:

$$(D_1) \quad \Delta' = \Delta.$$

Ebenso ergibt sich ganz leicht bei den anderen drei Arten von Transformationen:

$$(D_2) \quad \Delta' = \Delta$$

$$(D_3) \quad \Delta' = -\Delta$$

$$(D_4) \quad \Delta' = \lambda^2 \Delta,$$

was man natürlich alles auch aus der geometrischen Bedeutung des Dreiecksinhaltes unmittelbar schließen könnte. Diese Formeln stimmen nun aber genau mit (C) überein: *Ein Dreiecksinhalt und so schließlich jeder Flächeninhalt* (der ja als Summe von Dreiecken darstellbar ist) *verhält sich bei beliebigen Koordinatentransformationen genau so, wie das Drehmoment eines Kräftepaars*. Nach unserem zweiten allgemeinen Prinzip haben wir beide Dinge daher geometrisch als gleichwertig anzusehen, und wir können uns den Sinn dieser Aussage in folgender Weise verdeutlichen: Haben wir irgendein Kräftepaar mit dem Drehmoment  $N$  in der Ebene und definieren wir irgendwie einen Dreiecksinhalt  $\Delta = N$ , so bleibt gegenüber jeder Koordinatentransformation diese Gleichheit erhalten, d. h. wir können *das Drehmoment eines Kräftepaars unabhängig vom Koordinatensystem durch den Flächeninhalt eines Dreiecks oder Parallelogrammes oder sonst einer Figur versinnlichen*. Wie diese Zuordnung geometrisch zu geschehen hat, werden wir später bei den ganz analogen, nur etwas komplizierteren und daher lehrreicheren Verhältnissen im Raume sehen.

Ich will damit die Geometrie der Ebene verlassen, in der diese Begriffsbildungen ja eine nahezu triviale Einfachheit haben. Allen analytischen Formeln läßt sich unmittelbar ihre gute geometrische Bedeutung zuweisen, wobei von selbst auch die volle analytische Allgemeinheit in die Geometrie hineinkommt. Eine wesentliche Voraussetzung ist dabei immer, wie noch einmal betont sei, daß ein für allemal die richtigen Verabredungen über die Vorzeichen der geometrischen Gebilde getroffen sind.



### III. Das Grassmannsche Prinzip für den Raum.

Wir wollen nun die entsprechenden Untersuchungen für den Raum in völliger Analogie zu den vorhergehenden Betrachtungen durchführen und gehen daher aus von den Matrizen, die aus den Koordinaten von 1, 2, 3 oder 4 Punkten gebildet sind:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten der ersten Matrix stellen die Punktkoordinaten selbst dar und erfordern keine weiteren Erörterungen. Die vierte Matrix ist bereits eine vierreihige Determinante und gibt, wie wir wissen, den sechsfachen Tetraederinhalt (1, 2, 3, 4), den wir in Übereinstimmung mit den im folgenden eingeführten Benennungen als *Raumteil* bezeichnen können; wir dürfen sie übrigens auch einfach als Inhalt des Parallelepipedes mit den Kanten 41, 42, 43 ansprechen (vgl. Abb. 33), das Grassmann *Spat* nennt (das Wort *Spat* ist der Bergmannsprache — Kalkspat! — entnommen).

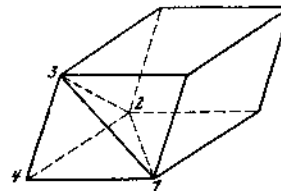


Abb. 33.

Die *neuen Gebilde* liefert die zweite und die dritte Matrix. Die zweireihige Matrix stellt den Inbegriff der folgenden 6 *Determinanten zweiter Ordnung* dar, die sich durch Wegstreichen je zweier Kolonnen bilden lassen:

$$(1) \quad \begin{cases} X = x_1 - x_2, & Y = y_1 - y_2, & Z = z_1 - z_2, \\ L = y_1 z_2 - y_2 z_1, & M = z_1 x_2 - z_2 x_1, & N = x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{cases}$$

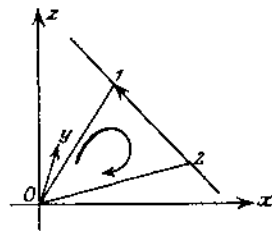
und ebenso repräsentiert die dreireihige Matrix folgende 4 *Determinanten dritter Ordnung*:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, & \mathfrak{M} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, & \mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ & \mathfrak{P} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Was zunächst die 6 Determinanten (1) anlangt, so können wir aus den entsprechenden Erörterungen für die Ebene leicht entnehmen, daß  $X, Y, Z$  die Projektionen der von 2 nach 1 reichenden Strecke auf die Koordinatenachsen sind,  $L, M, N$  aber die doppelten Inhalte der Projek-

tionen des Dreiecks  $(0, 1, 2)$  mit dem Umlaufungssinne  $0, 1, 2$  (vgl. Abb. 34) auf die Koordinatenebenen. Alle diese Größen bleiben offenbar ungeändert, wenn man die Strecke  $(1, 2)$  unter Erhaltung ihrer Länge und ihres Sinnes längs ihrer Geraden verschiebt, sie stellen also das dar, was wir einen *Linienteil oder linienflüchtigen Vektor* des Raumes nennen werden.  $X, Y, Z$  bleiben selbst noch ungeändert, wenn man den Vektor aus seiner Geraden heraus parallel mit sich verschiebt, und bestimmen also für sich genommen einen *freien Vektor*; ähnlich bleiben die fünf Verhältnisse  $X : Y : \dots : N$  ungeändert, wenn man Länge und Sinn des Linienteils auf der festgehaltenen Geraden beliebig verändert, sie bestimmen also die *unbegrenzte Gerade*.

Die 4 Determinanten (2) bestimmen vor allem einmal die Ebene der drei Punkte  $1, 2, 3$ ; denn deren Gleichung:



$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

kann man offenbar schreiben:

Abb. 34.

$$\mathfrak{L}x + \mathfrak{M}y + \mathfrak{N}z + \mathfrak{P} = 0,$$

so daß bereits die Verhältnisse  $\mathfrak{L} : \mathfrak{M} : \mathfrak{N} : \mathfrak{P}$  die *unbegrenzte Ebene* festlegen. Weiterhin aber sehen wir sofort, daß  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  gleich den doppelten Inhalten der Projektionen des Dreiecks  $(1, 2, 3)$  in die Koordinatenebenen, stets mit dem Umlaufssinne  $1, 2, 3$  genommen, sind und daß  $\mathfrak{P}$  gleich dem sechsfachen Volumen des Tetraeders  $(0, 1, 2, 3)$  ist, wiederum mit dem dieser Reihenfolge der Ecken entsprechenden Vorzeichen. Diese 4 Größen bleiben nun offenbar dann und nur dann unverändert, wenn man das Dreieck  $(1, 2, 3)$  derart in seiner Ebene verschiebt und deformiert, daß sein Inhalt und sein Umlaufungssinn ungeändert bleibt, und sie bestimmen also ein Dreieck oder ein ebenes Flächenstück von dieser Beweglichkeit, was Graßmann einen *Ebenenteil* oder eine *Plangröße* nennt. Die drei ersten Koordinaten  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  des Ebenenteils bleiben auch dann ungeändert, wenn man noch die Dreiecksebene parallel mit sich verschiebt; sie bestimmen also ein frei im Raume parallel mit sich verschiebbares Dreieck nach Inhalt und Umlaufssinn, eine sog. *freie Plangröße*.

Wollen wir nun mit dem *Linienteil* uns näher beschäftigen, so haben wir zuerst zu bemerken, daß er im Raume durch 5 frei variable Parameter festgelegt wird, da seine beiden Endpunkte zusammen zwar 6 Koordinaten haben, aber der eine Endpunkt nur längs einer Geraden beliebig bewegt werden kann. Also können die 6 Koordinaten  $X, Y, Z, L, M, N$  des Linienteils, die wir oben definierten, keine voneinander unabhängigen Größen sein, sondern sie müssen einer Bedingung

genügen. Wir leiten diese am einfachsten aus der Determinantenlehre her, die ja überhaupt stets der Schlüssel zu unseren Theorien ist. Wir betrachten die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die gewiß identisch verschwindet, da zwei Zeilen Element für Element übereinstimmen. Wir entwickeln sie als Summe von Produkten entsprechender Unterdeterminanten der ersten und letzten beiden Zeilen: der erste Summand enthält die beiden durch Umrahmung angedeuteten Unterdeterminanten, ist also einfach gleich  $N \cdot Z$ , und analog ergibt sich für die ganze Determinante der Wert  $2(N \cdot Z + M \cdot Y + L \cdot X)$ . Daher besteht die Identität:

$$(3) \quad X \cdot L + Y \cdot M + Z \cdot N = 0$$

als notwendige Bedingung für die 6 Koordinaten eines jeden Linienteils. Man kann sich leicht überzeugen, daß das Bestehen der Gleichung (3) zwischen 6 Größen auch gerade hinreicht, damit man sie durch die Formeln (1) als Koordinaten eines Linienteils darstellen kann; ich brauche auf die Durchführung dieser ganz elementaren Überlegung hier wohl nicht erst einzugehen.

Ich will nun wieder zur *Anwendung dieser Begriffe auf die Mechanik* übergehen. Als Repräsentanten einer *am starren räumlichen Körper angreifenden Kraft* haben wir genau wie in der Ebene (S. 24) einen Linienteil, der Angriffslinie, Größe und Richtung der Kraft darstellt. Von den Koordinaten des Linienteils heißen  $X, Y, Z$  die *Komponenten der Kraft parallel zu den Koordinatenachsen*,  $L, M, N$  ihre *Drehmomente um diese*<sup>1)</sup>. Die 3 Komponenten  $X, Y, Z$  legen außer der Größe die Richtung der Kraft bzw. des Linienteils fest, deren Richtungskosinus gegen die Achsen sich wie  $X : Y : Z$  verhalten; man erhält sie als Diagonale des Parallelflachs, das die auf den Koordinatenachsen abgetragenen Stücke  $X, Y, Z$  zu Kanten hat. Durch dieselbe Konstruktion kann man aus den drei Größen  $L, M, N$  eine bestimmte Richtung gewinnen, die *Richtung der Achse des resultierenden Drehmomentes* heißt. Die Bedingungsgleichung (3) bedeutet nun nach einer bekannten Formel der Raumgeometrie, daß die *Richtung der Kraft und die der Achse des resultierenden Drehmomentes aufeinander senkrecht stehen*. Genau wie in der Ebene werden wir auch hier als „*Kräftepaar*“ den Grenzfall, daß  $X = Y = Z = 0$  ist, während  $L, M, N$  nicht sämtlich verschwin-

<sup>1)</sup> Wiederum haben wir hier das entgegengesetzte Vorzeichen von dem, welches man in der Mechanik gewöhnlich gebraucht (vgl. S. 25).

den, in den Begriff des Linienteils einschließen; ein einfacher Grenzübergang ergibt, daß man darunter eine *unendlich ferne, unendlich kleine Kraft zu verstehen hat, deren Drehmomente endlich bleiben*. Die elementare Theorie scheut wieder diese Sprechweise und kennt das Kräftepaar nur als Zusammenwirken zweier gleich großer paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte längs verschiedener Geraden:  $X, Y, Z, L_1, M_1, N_1$ , und  $-X, -Y, -Z, L_2, M_2, N_2$ , deren Summe in der Tat gerade solche Koordinaten  $0, 0, 0, L_1 + L_2, M_1 + M_2, N_1 + N_2$  ergibt, wie wir sie soeben annahmen.

Wir haben nun von der *Zusammensetzung eines Systems irgendwie gegebener Kräfte am starren Körper*:

$$X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

zu sprechen. Auf dieses Problem pflegt man in elementaren Büchern und Vorlesungen lange Zeit zu verwenden, während wir es hier sehr schnell werden erledigen können, da unsere analytischen Formeln alle die in der schwerfälligen elementaren Darstellung beim Nichtgebrauch der Vorzeichenregeln nötig werdenden Fallunterscheidungen überflüssig machen. Das Grundprinzip der Zusammensetzung ist, daß wir die Summen:

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{i=1}^n X_i, & H &= \sum_{i=1}^n Y_i, & Z &= \sum_{i=1}^n Z_i, \\ \Lambda &= \sum_{i=1}^n L_i, & M &= \sum_{i=1}^n M_i, & N &= \sum_{i=1}^n N_i \end{aligned}$$

bilden und sie als *Koordinaten des Kraftsystems* oder nach einem von *Plücker* eingeführten zweckmäßigen Ausdruck als *Koordinaten der Dyname* bezeichnen; wir unterscheiden dabei wieder die drei *Komponenten längs der Achsen* und die drei *Drehmomente um die Achsen*. Nun wird aber diese Dyname im allgemeinen *keine Einzelkraft* sein, denn die 6 Summen werden nicht notwendig wieder der für die Koordinaten eines einzelnen Linienteils geltenden Bedingung:

$$\Xi \cdot \Lambda + H \cdot M + Z \cdot N = 0$$

genügen. Das ist also gegenüber der Ebene das Neue, daß sich ein *System von Kräften am starren Körper nicht notwendig wieder auf eine Kraft reduziert*.

Um nun vom Wesen einer Dyname eine konkrete Vorstellung zu gewinnen, wollen wir sie in möglichst übersichtlicher Weise als Resultierende möglichst weniger Kräfte darzustellen versuchen. *In der Tat kann man jede Dyname auffassen als Resultierende einer Einzelkraft und eines Kräftepaares, dessen Achse der Wirkungsgeraden jener Einzelkraft, der sog. Zentralachse der Dyname, parallel ist, und zwar ist diese Zerlegung nur auf eine Art möglich*. Diese Theorie der Kräftezusammensetzung am starren Körper hat ihre klassische

Darstellung gefunden in *Poinsot's Eléments de statique*, die 1804 zum ersten Male erschienen sind und seitdem zahlreiche neue Auflagen<sup>1)</sup> erlebt haben; man spricht daher auch wohl von der *Poinsotschen Zentralachse*. Übrigens behandelt Poinsot die Theorie sehr umständlich elementargeometrisch, wie sich das bis heute im Anfangsunterricht erhalten hat.

Um nun das ausgesprochene Theorem zu *beweisen*, bemerken wir, daß jede Einzelkraft, die nach Abzug eines Kräftepaars aus der Dynamie entsteht, jedenfalls die Achsenkomponenten  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  haben muß; also müssen die Drehmomente des Kräftepaars proportional  $\Xi : H : Z$  sein, wenn anders seine Achse der Zentralachse parallel ist. Wir haben seine 6 Koordinaten demnach anzusetzen als:

$$0, 0, 0, k\Xi, kH, kZ,$$

wobei  $k$  ein noch zu bestimmender Parameter ist. Zu unserer gegebenen Dynamie  $\Xi, H, Z, \Lambda, M, N$  wird dieses Kräftepaar ergänzt durch die folgende Dynamie:

$$\Xi, H, Z, \Lambda - k\Xi, M - kH, N - kZ.$$

und der Satz wäre bewiesen, wenn man  $k$  so bestimmen könnte, daß dieses Größensystem eine Einzelkraft darstellt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Koordinaten der Bedingung (3) genügen, d. h. daß:

$$\Xi(\Lambda - k\Xi) + H(M - kH) + Z(N - kZ) = 0.$$

Hieraus folgt eindeutig:

$$k = \frac{\Xi\Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2},$$

denn den Nenner können wir von 0 verschieden annehmen, da sonst bereits ein Kräftepaar statt einer eigentlichen Dynamie vorläge. Erteilt man  $k$  diesen Wert, den Plücker *Parameter der Dynamie* nennt, so hat man in der Tat die gewünschte Zerlegung der Dynamie in Kräftepaar und Einzelkraft erhalten, und der Beweisgang läßt zugleich die Eindeutigkeit dieser Zerlegung erkennen.

Nun ist die Frage, was für *geometrische Vorstellungen* man mit dieser Zerlegung verbinden kann. Auch diese Untersuchungen gehen wieder auf *Möbius* zurück, und zwar auf sein *Lehrbuch der Statik*<sup>2)</sup> von 1837. In diesem stellt er die Frage nach den *Achsen* voran, *in bezug auf welche die Dynamie das Drehmoment Null hat*, den sogenannten *Nullachsen*; das System aller dieser Nullachsen bezeichnet er als *Nullsystem*, und in diesem Zusammenhang hat dieses Ihnen gewiß bekannte Wort seine Wurzel.

<sup>1)</sup> 12. édition par J. Bertrand. Paris 1877.

<sup>2)</sup> Leipzig 1837, vgl. Werke III, Leipzig 1886.

Wir müssen nun erst den hier zur Verwendung kommenden *allgemeinen Begriff des Drehmomentes oder Momentes* definieren. Es seien zunächst zwei Linienteile  $(1, 2)$  und  $(1', 2')$  im Raume gegeben (vgl. Abb. 35). Wir bilden aus ihren 4 Ecken das Tetraeder  $(1, 2, 1', 2')$ , dessen Rauminhalt:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \end{vmatrix}$$

ist. Diese Determinante rechnen wir nun so als Summe von Produkten der Unterdeterminanten des ersten und des letzten Zeilenpaares aus, wie wir das oben mit der identisch verschwindenden Determinante (S. 33) taten, und erhalten:

$$\frac{1}{6}(XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'),$$

wobei  $X', \dots, N'$  die Koordinaten des Linienteiles  $(1', 2')$  sind. Die hier auftretende bilineare Kombination der Koordinaten der beiden Linienteile:

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'$$

nennen wir das *Moment des einen Linienteiles in bezug auf den anderen*; es ist gleich dem *6-fachen Inhalt des von den Endpunkten beider Linienteile gebildeten Tetraeders* und daher eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Größe.

Sind  $r$  und  $r'$  die Längen der Linienteile,  $\varphi$  ihr Winkel und  $\rho$  der kürzeste Abstand (gemeinsames Lot) ihrer beiden Geraden, so sieht man elementargeometrisch leicht ein, daß das Moment gleich  $r \cdot r' \cdot \rho \cdot \sin \varphi$  ist, wenn man über das Vorzeichen von  $\varphi$  passend verfügt.

Geben wir nun statt des Linienteils  $(1, 2)$  eine *unbegrenzte Gerade*, so werden wir unter dem *Moment des Linienteils  $(1', 2')$  in bezug auf sie* sein Moment im vorigen Sinne verstehen, bezogen auf einen in der unbegrenzten Geraden liegenden Linienteil von der Länge  $r = 1$ , also den Ausdruck  $r' \rho \sin \varphi$ . Er geht aus dem vorigen Ausdruck nach Division durch  $r = |\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|$  hervor, so daß schließlich das *Moment eines Linienteiles  $X', Y', Z', L', M', N'$  in bezug auf eine unbegrenzte, den Linienteil  $X, Y, Z, L, M, N$  enthaltende Gerade* gleich:

$$\frac{XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|}$$

wird; dieser Wert hängt in der Tat nur von den Verhältnissen der 6 Größen  $X, \dots, N$  sowie einem ihnen gemeinsamen Vorzeichen ab, so daß er völlig bestimmt ist, wenn nur *die unbegrenzte Gerade und*

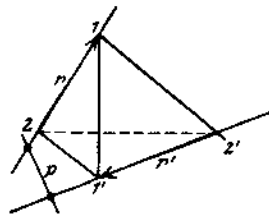


Abb. 35.

eine Richtung auf ihr gegeben ist. Dieses Moment eines Linienteiles ist genau das, was man in der Statik *Drehmoment der durch den Linienteil repräsentierten Kraft um die Gerade als Achse* nennt, wobei man nur oft wiederum (vgl. S. 33) ein abweichendes Vorzeichen verwendet.

Wir wollen nun zu dem *Momente oder Drehmomente eines Kräfte-systems, einer Dyname*  $\Xi = \sum_{i=1}^n X'_i, \dots, N = \sum_{i=1}^n N'_i$  aufsteigen; wir werden darunter naturgemäß die Summe der Momente der Einzelkräfte verstehen, also den Ausdruck:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{XL'_i + YM'_i + ZN'_i + LX'_i + MY'_i + NZ'_i}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|} \\ = \frac{X\Lambda + YM + ZN + L\Xi + MH + NZ}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|} \end{array} \right.$$

Identifiziert man hierin die unbegrenzte Gerade von  $X, \dots, N$  der Reihe nach mit den 3 positiven Achsen, so nimmt der Ausdruck die Werte  $\Lambda, M, N$  an, womit die für diese Größen früher (S. 34) eingeführten Bezeichnungen gerechtfertigt sind.

Nun können wir die oben angegebene Möbiussche Fragestellung in Angriff nehmen. Eine gegebene Dyname  $\Xi, H, \dots, N$  hat in bezug auf eine Gerade  $X:Y:\dots:N$  das Moment 0 (diese ist *Nullachse*), wenn:

$$\Lambda X + MY + NZ + \Xi L + HM + ZN = 0$$

ist. Also ist das *Nullsystem der Dyname die Gesamtheit der durch diese Gleichung dargestellten Geraden*  $X:Y:\dots:N$ . Das ist aber die allgemeinste lineare homogene Gleichung für die 6 Größen  $X, \dots, N$ , da die Koeffizienten  $\Lambda, \dots, Z$  als Koordinaten einer Dyname 6 willkürliche Größen sein können. Genau solche Gesamtheiten gerader Linien, die durch eine willkürliche lineare homogene Gleichung definiert sind, hat Plücker, neben Möbius der bahnbrechende Pfadfinder in der analytischen Geometrie des 19. Jahrhunderts, in einem Zusammenhange, über den wir später noch ausführlicher zu reden haben, unter dem Namen *lineare Komplexe* untersucht. *Das Möbiussche Nullsystem ist also genau dasselbe wie der Plückersche lineare Komplex.*

Wir wollen uns nun von diesem Nullsystem ein *möglichst deutliches Bild* zu machen suchen, wobei freilich von einer geometrischen „Gestalt“ im eigentlichen Sinne dieses Wortes keine Rede sein kann, da die Nullgeraden den ganzen Raum unendlich oft überdecken. Trotzdem wird sich ihre Gruppierung sehr einfach verstehen lassen. Wir wollen dabei, wie es im Sinne der in dieser Vorlesung immer einzuschlagenden Methode liegt, das Koordinatensystem in eine möglichst bequeme

Lage bringen, und das ist erreicht, wenn wir die *Zentralachse unserer Dyname als z-Achse* wählen. Da die Dyname, wie wir wissen, sich als Resultierende einer Einzelkraft längs der Zentralachse und eines Kräftepaars mit zu ihr paralleler Achse darstellt, müssen bei dieser Wahl der z-Achse die 4 Koordinaten  $\Xi$ , H,  $\Lambda$ , M der Dyname verschwinden, während Z die Größe der Einzelkraft, N das Drehmoment des Kräftepaars um seine Achse darstellt. Der Parameter der Dyname ist daher:

$$k = \frac{\Xi\Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2} = \frac{N}{Z}.$$

Die Gleichung des linearen Komplexes hat in diesem neuen Koordinatensystem einfach die Form:

$$NZ + ZN = 0$$

oder nach Division durch Z:

$$(1) \quad k \cdot Z + N = 0.$$

Diese Gestalt legen wir der weiteren Diskussion zugrunde. Sind  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  und  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  zwei Punkte auf einer Geraden  $X:Y:Z:L:M:N$  des Nullsystems, so ist ja  $Z = z_1 - z_2$  und  $N = x_1y_2 - x_2y_1$ , und daher ergibt (1) für die Koordinaten je zweier Punkte einer Nullgeraden die Bedingung:

$$(2) \quad k(z_1 - z_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Halten wir nun  $P_2$  fest, so ist (2) eine Gleichung für die Koordinaten  $x_1, y_1, z_1$  aller Punkte  $P_1$ , die mit  $P_2$  auf einer Geraden des Nullsystemes liegen; schreiben wir der Deutlichkeit halber an Stelle von  $x_1, y_1, z_1$  laufende Koordinaten  $x, y, z$ , so erkennen wir, daß alle jene Punkte  $P_1$  eine Ebene mit der Gleichung:

$$(2') \quad y_2x - x_2y + k \cdot z = k z_2$$

erfüllen. Diese Ebene geht durch den Punkt  $P_2$  selbst hindurch, da die Gleichung durch  $x = x_2, y = y_2, z = z_2$  befriedigt wird. — Wir haben damit gezeigt, daß durch jeden Raumpunkt  $P_2$  unendlich viele Nullgeraden gehen, die ein die Ebene (2') erfüllendes ebenes Strahlenbüschel bilden. Unsere Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir uns von der Lage dieser jedem Punkte  $P_2$  zugehörenden Ebene („Nullebene“) ein deutliches Bild gemacht haben.

Die beiden in (2) eingehenden Ausdrücke  $N = x_1y_2 - y_1x_2$ ,  $Z = z_1 - z_2$  haben die Eigenschaft, bei Parallelverschiebungen des Raumes parallel der z-Achse sowie bei Drehungen um diese ungeändert zu bleiben; denn die Verschiebungen lassen  $x$  und  $y$ , also auch  $N$ , und außerdem auch die Differenz  $z_1 - z_2$  ungeändert, die Drehungen aber haben auf die z-Koordinaten, also auch auf  $Z$  gar keinen Einfluß und lassen ebenfalls  $N$  als Flächeninhalt in der  $x$ - $y$ -Ebene ungeändert.



Mithin wird die Gleichung (2) und daher auch das durch sie bestimmte Nullsystem bei Schraubenbewegungen des Raumes um die Zentralachse — denn das ist ja die Bedeutung der  $z$ -Achse — und Verschiebungen längs ihr in sich übergeführt.

Dieser Satz erleichtert nun unsere Aufgabe ungemein: Wissen wir nur, welche Ebene im Nullsystem jedem Punkte der positiven  $x$ -Halbachse zugehört, so kennen wir damit ganz von selbst auch die jedem beliebigen Raumpunkte zugehörige Nullebene; denn durch Verschiebung jener Halbachse längs der  $z$ -Achse und Drehung um sie kann man jeden Raumpunkt mit einem ihrer Punkte zur Deckung bringen, wobei dann nach unserem Satze die zugehörigen Nullebenen ineinander übergehen müssen. Mit anderen Worten: Die Nullebenen der Punkte eines jeden zur Zentralachse senkrechten Halbstrahles haben zu diesem und der Zentralachse eine von der besonderen Wahl des Strahles unabhängige Lage.

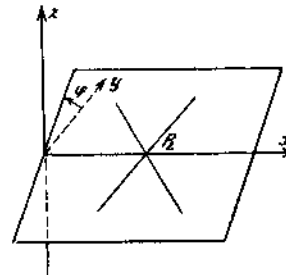


Abb. 36.

Indem wir uns nun auf die  $x$ -Achse beschränken, setzen wir  $y_2 = z_2 = 0$  und erhalten aus (2') als Gleichung der zum Punkte  $P_2$  mit der Abszisse  $x_2$  gehörigen Ebene:

$$kz - x_2y = 0;$$

sie geht durch die  $x$ -Achse selbst hindurch, da die Gleichung durch  $y = z = 0$  identisch befriedigt ist (vgl. Abb. 36).

Indem wir die Gleichung in der Form  $\frac{z}{y} = \frac{x_2}{k}$  schreiben, schließen wir, daß der Neigungswinkel  $\varphi$  der Ebene gegen die Horizontalebene ( $x$ - $y$ -Ebene) die trigonometrische Tangente:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{k}$$

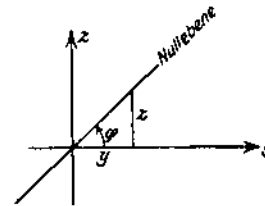


Abb. 37.

hat, und dadurch ist jetzt die Lage unserer Ebene völlig bestimmt; in Abb. 37 ist ihre Spur in der vertikalen  $y$ - $z$ -Ebene skizziert.

Wir können das Resultat nach dem oben Gesagten auch ganz unabhängig vom speziell gewählten Koordinatensystem aussprechen: Zu jedem im Abstände  $r$  von der vertikal gedachten Zentralachse liegenden Punkte gehört im Nullsystem eine das Lot von diesem Punkte auf die Zentralachse enthaltende Ebene, deren Neigungswinkel gegen die Horizontalebene die trigonometrische Tangente  $\frac{r}{k}$  hat; bewegt man den Punkt also auf irgendeinem zur Zentralachse senkrechten Halbstrahle, so liegt die zugehörige

Ebene des Nullsystems für  $r = 0$  selbst horizontal und richtet sich mit wachsendem  $r$  nach der einen oder anderen Seite hin auf (je nachdem  $k \geq 0$ ), um sich mit unbegrenzt wachsendem  $r$  schließlich asymptotisch der vertikalen Lage zu nähern. Ich kann Ihnen diese Verhältnisse an einem *Schillingschen Modelle* näher erläutern (vgl. Abb. 38); hier ist an einem beweglichen, um die Zentralachse drehbaren und verschiebbaren Arme ein ebenes Blatt angebracht, das bei Verschiebung nach außen hin sich in richtiger Weise aufrichtet.

Wir wollen jetzt noch besonders die *Normalenrichtung* auffassen, die zu der Ebene durch den Punkt  $P_2$  gehört; ihre Richtungskosinus gegen die drei Achsen verhalten sich bekanntlich wie die Koeffizienten der Ebenengleichung (2'), d. h. wie:

$$(3) \quad y_2 : (-x_2) : k.$$

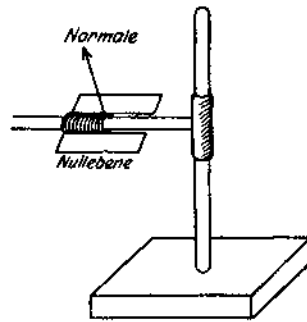


Abb. 38.

Diese selbe Richtung können wir auch dem Punkte  $P_2$  als Bewegungsrichtung einer gewissen *unendlich kleinen Schraubung* des Raumes zugeordnet denken. Drehen wir nämlich den ganzen Raum wie einen starren Körper um die  $z$ -Achse durch den endlichen Winkel  $\omega$  und verschieben ihn gleichzeitig parallel der  $z$ -Achse um ein

Stück  $c$ , so wird jeder Punkt  $x, y, z$  übergeführt in die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega - y \sin \omega \\ y' &= x \sin \omega + y \cos \omega \\ z' &= z + c \end{aligned}$$

gegebene neue Lage. Wir gehen von dieser endlichen Schraubung zu einer unendlichkleinen über, indem wir  $\omega$  durch die unendlichkleine Größe  $-d\omega$  ersetzen und gleichzeitig  $c = kd\omega$  annehmen. Das Minuszeichen bedeutet, daß bei  $k > 0$  die Drehung in der  $x$ - $y$ -Ebene negativ ist, wenn die Translation in der positiven  $z$ -Richtung erfolgt, d. h. daß der Schraubungssinn negativ ist (Linksschraubung). Wir haben nun Größen zweiter und höherer Ordnung in  $d\omega$  zu vernachlässigen, also  $\cos d\omega = 1$ ,  $\sin d\omega = d\omega$  zu setzen und erhalten daher:

$$\begin{aligned} x' &= x + y d\omega \\ y' &= -x d\omega + y \\ z' &= z + k d\omega. \end{aligned}$$

Die Inkremente der Koordinaten eines bestimmten Punktes  $P_2$  bei dieser unendlich kleinen Schraubung sind also:

$$dx_2 = y_2 d\omega, \quad dy_2 = -x_2 d\omega, \quad dz_2 = k d\omega,$$

d. h.  $P_2$  wird in der Richtung:

$$dx_2 : dy_2 : dz_2 = y_2 : (-x_2) : k$$

verschoben. Das ist in der Tat genau die Normalenrichtung (3). Nimmt man also mit dem Raume eine solche unendlich kleine Schraubung um die Zentralachse vor, daß die Verschiebung das  $k$ -fache des (negativ genommenen) Drehwinkels ist, so ist die im Nullsystem mit dem Parameter  $k$  zu jedem Raumpunkte gehörige Ebene normal zu dem von ihm durchlaufenen Bogenstück.

Da die Vorstellung der Schraubenbewegung eine sehr anschauliche ist, kann man sich hiernach ein lebendiges Bild von der Anordnung der Ebenen des Nullsystems machen. Je größer z. B. der Abstand  $r$  eines Punktes von der Zentralachse ist, um so länger ist die Horizontalprojektion  $r d\omega$  des Bogenelementes, das er bei der Schraubung durchläuft, um so flacher verläuft daher dieses selbst, da seine Höhe  $k \cdot d\omega$  konstant ist, — um so steiler steht also die zum Bogenelement normale Ebene des Nullsystemes. Setzt man unendlich viele solche unendlich kleine Schraubungen zu einer kontinuierlichen Schraubenbewegung des Raumes zusammen, so durchläuft jeder Punkt in der Entfernung  $r$  von der Zentralachse eine Schraubenlinie, deren

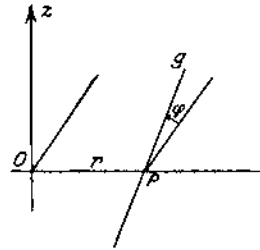


Abb. 39.

Neigung gegen die Horizontale die trigonometrische Tangente  $-\frac{k}{r}$  hat, und deren Ganghöhe daher stets denselben von  $r$  unabhängigen Wert  $2\pi k$  besitzt; die Normalebenen dieser Schraubenlinien sind die Ebenen des Nullsystems.

Wir wollen jetzt zum Schluß, nachdem wir bisher nur von den Ebenen des Nullsystems gesprochen haben, uns auch ein unmittelbar anschauliches Bild von den Nullachsen selbst zu machen suchen. Nehmen wir irgendeine Nullachse  $g$  (vgl. Abb. 39) und konstruieren ihre kürzeste Entfernung von der Zentralachse, d. h. die gemeinsame Senkrechte, die die Zentralachse in  $O$  und  $g$  in  $P$  treffen möge. Dann gehört  $PO$  als senkrechter Halbstrahl von  $P$  auf die Zentralachse dem Nullsystem an, und daher muß  $OPg$  die zu  $P$  gehörige Ebene des Nullsystems sein. Da aber  $g$  senkrecht auf  $PO$  steht, muß es mit der Horizontalen denselben Winkel  $\varphi$  bilden, wie jene Nullebene, d. h. es ist  $\text{tg } \varphi = \frac{r}{k}$ , wobei  $r = OP$  ist.

Wir erhalten also alle Nullachsen, indem wir durch jeden Punkt  $P$  eines jeden auf der Zentralachse senkrechten Halbstrahles dasjenige Lot auf ihm errichten, dessen Neigungswinkel gegen die Horizontale die trigonometrische Tangente  $\text{tg } \varphi = \frac{r}{k}$  besitzt, wobei  $r$  der Abstand des Punktes  $P$  von der Zentralachse ist.

Noch ein wenig anschaulicher können wir diese Konstruktion so darstellen: *Wir stellen uns den Kreiszyylinder mit dem Radius  $r$  um die Zentralachse als Achse her und zeichnen auf ihm alle Schraubenlinien* (vgl. Abb. 40), *welche die aus  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{k}$  bestimmte Neigung  $\varphi$  gegen die Horizontale haben; dann ist offenbar die Gesamtheit der Tangenten dieser Schraubenlinien identisch mit der Gesamtheit der Nullachsen im Abstand  $r$  von der Zentralachse. Durch Variation von  $r$  erhält man dann sämtliche Nullachsen.* Diese Schraubenlinien werden nach außen hin offenbar immer steiler; sie haben in jedem Punkte die zugehörige Nullebene zur Schmiegungeebene und verlaufen daher senkrecht zu den vorhin erwähnten Schraubenlinien, die in jedem Punkte normal zu der Nullebene stehen.

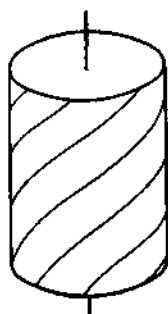


Abb. 40.

Wir können es nach diesen Erörterungen, die einen doppelten Zusammenhang des Nullsystems mit den Schrauben gelehrt haben, verstehen, daß man diese ganze Theorie auch kurzweg als *Schraubentheorie* bezeichnet hat; diese Bezeichnung hat besonders *Sir Robert Ball* in seiner „*theory of screws*“<sup>1)</sup> angewandt, wo er in der Tat alle mit einer gegebenen Dynamie an einem starren Körper in Zusammenhang stehenden geometrischen Verhältnisse behandelt.

Lassen Sie uns nun zu unsern systematischen Entwicklungen zurückgehen. Wir hatten nach dem Graßmannschen Prinzip als die 4 geometrischen Elementargebilde des Raumes den *Punkt*, den *Linienteil*, den *Ebenteil* und den *Raumteil* erhalten. Genau wie in der Ebene ist es unsere nächste Aufgabe, das Verhalten dieser Gebilde bei Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems zu untersuchen und sie gemäß dem früher ausgesprochenen allgemeinen Prinzip danach zu klassifizieren.

#### IV. Klassifikation der räumlichen Elementargebilde nach ihrem Verhalten bei rechtwinkligen Koordinatentransformationen.

Vor allem müssen wir natürlich einen Überblick über alle möglichen Transformationen eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems gewinnen; sie sind überhaupt fundamental für die gesamte Raumgeometrie, so daß wir schon deshalb in dieser Vorlesung nicht an ihnen vorbeigehen könnten. Die allgemeinste in Betracht kommende Änderung des Koordinatensystems setzt sich wie in der Ebene zusammen aus: 1. Parallelverschiebung; 2. Drehung um den Anfangspunkt; 3. Spiegelung; 4. Änderung des Maßstabes.

<sup>1)</sup> Dublin 1876.

Die Gleichungen der *Parallelverschiebung* sind natürlich:

$$(A_1) \quad x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

Die Gleichungen der *Drehung* haben jedenfalls die Form:

$$(A_2) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

auf die Bestimmung der Koeffizienten, die hier wesentlich verwickelter als in der Ebene ist, werden wir sogleich eingehen. Die Zusammensetzung aller möglichen Transformationen dieser beiden Arten liefert die sämtlichen *eigentlichen Bewegungen* des räumlichen Koordinatensystems.

Die *Spiegelung* können wir, wie in der Ebene an einer Achse, so hier *an einer Koordinatenebene*, etwa der  $x$ - $y$ -Ebene, vornehmen und erhalten:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z.$$

Wir können diese Formeln aber auch symmetrischer gestalten, indem wir *drei* Minuszeichen verwenden:

$$(A_3) \quad x' = -x \quad y' = -y \quad z' = -z;$$

das ist eine *Spiegelung am Anfangspunkte  $O$*  selbst, die man auch wohl als *Inversion*<sup>1)</sup> bezeichnet. In der Ebene stellt  $x' = -x$ ,  $y' = -y$  keine Spiegelung, sondern eine Drehung um  $180^\circ$  dar, und so ist überhaupt die Inversion am Anfangspunkt nur in Räumen ungerader Dimensionenzahl eine Spiegelung, bei solchen gerader Dimensionenzahl aber eine Drehung.

Die *Maßstabänderung* endlich wird einfach durch:

$$(A_4) \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \\ z' = \lambda z \end{cases} \quad \text{wobei } \lambda > 0 \text{ ist,}$$

dargestellt; für  $\lambda < 0$  enthält diese Transformation außer der Maßstabänderung noch eine Spiegelung.

Wir haben uns nun noch mit den *Formeln der Drehung* näher zu beschäftigen. Die allgemeine Drehung um den Anfangspunkt  $O$  hängt bekanntlich von *3 Parametern* ab, da einmal die drei Richtungskosinus der Drehungsachse zwei voneinander unabhängige Größen repräsentieren und dann der Drehwinkel willkürlich ist. Eine symmetrische Darstellung aller Drehungen durch *3* voneinander unabhängige Parameter liefert die *Quaternionentheorie*, wie ich das in der Vorlesung vom Wintersemester gelegentlich ausgeführt habe<sup>2)</sup>; übrigens hat schon

<sup>1)</sup> Gelegentlich wird die Bezeichnung „Inversion“ auch für die von der obigen Spiegelung ganz verschiedene Transformation durch reziproke Radien gebraucht.

<sup>2)</sup> Siehe Teil I, S. 64 ff.

*Euler* die in Betracht kommenden Formeln aufgestellt. Hier will ich die Darstellung geben, die man gewöhnlich auch in den Lehrbüchern der Mechanik findet und die die 9 Richtungskosinus der neuen Achsen gegen die alten benutzt. Wir gehen von der oben angegebenen Gestalt ( $A_2$ ) der Transformationsgleichungen aus:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Betrachten wir einen Punkt  $x, y = 0, z = 0$  der alten  $x$ -Achse, so hat er in bezug auf das neue System die Koordinaten  $x' = a_1 \cdot x, y' = a_2 \cdot x, z' = a_3 \cdot x$ , d. h.  $a_1, a_2, a_3$  sind die Kosinus der Winkel der drei neuen Achsen gegen die alte  $x$ -Achse, und ebenso sind  $b_1, b_2, b_3$  und  $c_1, c_2, c_3$  ihre Richtungskosinus gegen die  $y$ - und  $z$ -Achse.

Diese 9 Koeffizienten der Transformationsgleichungen sind nun durchaus nicht unabhängig voneinander. Man kann die Beziehungen zwischen ihnen entweder aus der soeben angegebenen Deutung erhalten, oder auch von der bekannten Relation aus, die bei jeder „*orthogonalen Substitution*“, d. h. bei jeder Drehung oder Spiegelung mit festbleibendem Anfangspunkt besteht:

$$(2) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und die *Invarianz der Entfernung* von  $O$  aussagt. Wir schlagen hier den zweiten Weg ein:

$\alpha$ ) Indem wir (1) in (2) einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleich folgende 6 Relationen zwischen den 9 Größen  $a_1, \dots, c_3$ :

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 & c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \end{cases}$$

$\beta$ ) Multiplizieren wir nun die drei Gleichungen (1) mit den drei Größen  $a$  bzw.  $b$  bzw.  $c$  und addieren, so folgt auf Grund von (3) ihre Auflösung in der Gestalt:

$$(4) \quad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'; \end{cases}$$

das ist ersichtlich die sogenannte *transponierte lineare Substitution* zu (1), die durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen des Koeffizientenschemas entsteht.

$\gamma$ ) Andererseits ergibt sich nach den Regeln der Determinantentheorie als Lösung der Gleichungen (1):

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \dots, \text{ wobei } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

die Determinante des Gleichungssystemes ist. Der Koeffizient von  $x'$  hierin muß derselbe sein wie in der ersten Gleichung (4), d. h.:

$$(5) \quad \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1,$$

und ebenso muß jeder Koeffizient der orthogonalen Substitution gleich sein der zugehörigen Unterdeterminante des Koeffizientenschemas, dividiert durch die Determinante  $\Delta$ .

δ) Wir wollen nun diese Determinante  $\Delta$  des Koeffizientensystems selbst berechnen, und bilden dazu nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ihr Quadrat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix},$$

wobei die Kolonnen der ersten mit den Kolonnen der zweiten Determinante multipliziert sind. Nach den Formeln (3) ist die Produktdeterminante einfach gleich:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

so daß schließlich:

$$\Delta = \pm 1$$

folgt. Um uns nun für eine dieser beiden Möglichkeiten zu entscheiden, bedenken wir, daß wir bisher nur die Relation (2) benutzt haben, die bei Drehung und Spiegelung gleichmäßig erfüllt ist. Unter allen diesen orthogonalen Transformationen sind nun die *Drehungen* dadurch ausgezeichnet, daß sie *durch kontinuierliche Variation der Koeffizienten aus der „identischen Transformation“*  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  hervorgehen, entsprechend einer stetigen Bewegung des Koordinatensystems aus der ursprünglichen in die neue Lage; dementgegen entsteht die Substitution, die wir allgemein Spiegelung nennen, durch kontinuierliche Abänderung aus der einen Inversion  $x' = -x$ ,  $y' = -y$ ,  $z' = -z$ , während sich die Inversion selbst nicht stetig aus der identischen Transformation erzeugen läßt. Nun ist die Substitutionsdeterminante eine stetige Funktion der Koeffizienten und muß sich also stetig ändern, wenn wir die identische Transformation kontinuierlich in irgendeine Drehung überführen; bei dieser Ausgangstransformation hat sie aber den Wert:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1,$$

und da sie, wie wir sahen, überhaupt nur  $+1$  oder  $-1$  sein kann, muß sie notwendig stets  $+1$  bleiben. Denn ein plötzlicher Übergang in  $-1$

würde eine Unstetigkeit bedeuten. *Bei jeder Drehung ist also die Determinante:*

$$(6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1,$$

und ganz ebenso ergibt sich, daß *bei jeder Spiegelung*  $\Delta = -1$  ist. Die Formel (5) nimmt jetzt die einfache Gestalt an:

$$(7) \quad a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

und so ist *jeder Koeffizient im Schema der Drehungssubstitutionen des rechtwinkligen Koordinatensystems gleich der zugehörigen Unterdeterminante.*

Wir kommen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe, festzustellen, wie sich die Koordinaten der räumlichen Elementargebilde, des Linienteils  $X, Y, Z, L, M, N$ , des Ebenenteils  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$  und schließlich des Raumteiles  $T$  bei den vier Arten der Änderung des rechtwinkligen Koordinatensystems verhalten.

Die Transformationsformeln sämtlich hinzuschreiben, würde zu viel Raum beanspruchen und schließlich auch langweilig sein; ich will daher nur einige Punkte hervorheben, die besonderes Interesse verdienen. Zunächst bemerke ich, wie Sie selbst leicht bestätigen werden, daß in allen Transformationsformeln der Koordinaten eines Linienteils die ersten drei Koordinaten  $X', Y', Z'$  im neuen System sich allein und zwar homogen linear durch  $X, Y, Z$  ausdrücken, ohne daß die  $L, M, N$  eingehen; *also muß dem früher (S. 271.) ausgesprochenen allgemeinen Prinzip zufolge der Inbegriff der 3 Größen  $X, Y, Z$  bereits für sich ein vom Koordinatensystem unabhängiges, geometrisches Gebilde bestimmen.* Es ist der *freie Vektor*, den wir ja schon erwähnten (S. 32). Ebenso transformieren sich auch bei der Plangröße die drei Koordinaten  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  für sich, ohne Rücksicht auf die vierte  $\mathfrak{P}$ , *so daß auch sie eine geometrische, von den Koordinaten unabhängige Bedeutung haben:* sie stellen die gleichfalls schon genannte *freie Plangröße* dar (S. 32).

Wir wollen nun speziell ausrechnen, wie sich die *drei Koordinaten des freien Vektors*  $X, Y, Z$  bei unseren Transformationen  $(A_1), \dots, (A_4)$  (S. 43) verhalten; wir ersetzen dazu nur in  $X' = x'_1 - x'_2, \dots$  die  $x'_1, \dots$  vermöge der Substitutionsformeln  $(A_2)$  durch  $x, y, z$  und erhalten ohne weiteres:

1. bei Parallelverschiebung:

$$(B_1) \quad X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z;$$

2. bei Drehung:

$$(B_2) \quad \begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases};$$



3. bei Inversion:

$$(B_3) \quad X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = -Z;$$

4. bei Maßstabänderung:

$$(B_4) \quad X' = \lambda X, \quad Y' = \lambda Y, \quad Z' = \lambda Z.$$

Bei Verschiebung des Koordinatensystems ändern sich also die Koordinaten des freien Vektors gar nicht, sonst aber verhalten sie sich genau wie die Punktkoordinaten selbst.

Damit wollen wir nun die Transformationsformeln für ein Kräftepaar vergleichen, die wir aus den Transformationsformeln der Koordinaten eines Linienteils erhalten, indem wir nachträglich  $X = Y = Z = 0$  setzen; es wird dann natürlich  $X' = Y' = Z' = 0$ , und für die Drehmomente in bezug auf die neuen Achsen ergeben sich die Formeln:

1. bei Verschiebung:

$$(C_1) \quad L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N;$$

2. bei Drehung:

$$(C_2) \quad \begin{cases} L' = a_1 L + b_1 M + c_1 N \\ M' = a_2 L + b_2 M + c_2 N \\ N' = a_3 L + b_3 M + c_3 N \end{cases}$$

3. bei Inversion:

$$(C_3) \quad L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N;$$

4. bei Maßstabänderung:

$$(C_4) \quad L' = \lambda^2 L, \quad M' = \lambda^2 M, \quad N' = \lambda^2 N.$$

Die Koordinaten eines Kräftepaares ändern sich also bei Verschiebung des Koordinatensystems und bei Inversion nicht, sie verhalten sich bei Drehung wie Punktkoordinaten und multiplizieren sich bei Maßstabänderung mit dem Faktor  $\lambda^2$ , d. h. sie haben die Dimension 2 (eines Flächeninhalts), während der freie Vektor, wie die Punktkoordinaten, die Dimension 1 hat.

Die Herleitung der Formeln  $(C_1)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_4)$  macht gar keine Schwierigkeit; nur für  $(C_2)$  sind vielleicht einige Erläuterungen angebracht. Man erhält nämlich mit Hilfe der Drehungsformeln  $(A_2)$ :

$$L' = \begin{vmatrix} y'_1 & z'_1 \\ y'_2 & z'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 & a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplizieren wir die letzte Determinante aus, so ergeben sich  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$  Glieder, von denen sich offenbar dreimal je 2 (z. B.  $a_2 x_1 \cdot a_3 x_2 - a_3 x_1 \cdot a_2 x_2, \dots$ ) gegenseitig fortheben; die übrigbleibenden 12 Terme fassen sich zu folgender Summe von Determinantenprodukten zusammen:

$$L' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Die ersten Faktoren sind nach der Formel (7) für die Unterdeterminanten des Koeffizientensystems einer Drehung (S. 46) gerade gleich  $a_1, b_1, c_1$ , während die zweiten Faktoren gleich  $L, M, N$  sind. Damit ist in der Tat die vorhin für  $L'$  angegebene Formel gewonnen, und ebenso folgen die beiden anderen Formeln für  $M'$  und  $N'$ .

Als drittes Gebilde ziehen wir endlich die *freie Plangröße* heran; ganz einfache, der obigen ähnliche Rechnungen, die ich Ihnen wohl selbst überlassen darf, führen zu dem Ergebnis, *daß sich die Komponenten  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  der freien Plangröße in allen Fällen genau so wie die Koordinaten  $L, M, N$  eines Kräftepaars transformieren.*

Fassen wir der besseren Übersicht halber diese Ergebnisse in eine *kleine Tabelle* zusammen. Sie gibt die transformierten ersten Koordinaten an, aus denen die anderen durch zyklische Vertauschung entstehen:

	Verschiebung	Drehung	Inversion	Maßstabänderung
freier Vektor	$X$	$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$	$-X$	$\lambda X$
Kräftepaar	$L$	$a_1 L + b_1 M + c_1 N$	$L$	$\lambda^2 L$
freie Plangröße	$\mathfrak{L}$	$a_1 \mathfrak{L} + b_1 \mathfrak{M} + c_1 \mathfrak{N}$	$\mathfrak{L}$	$\lambda^2 \mathfrak{L}$

Damit haben wir nun die präzise Grundlage für eine Reihe geometrischer Aussagen gewonnen, die in den Lehrbüchern vielfach gar nicht oder doch nur beiläufig und in einer Form herauskommen, in der man ihren einfachen geometrischen Inhalt nicht so leicht auffassen kann. Häufig werden die verschiedenen geometrischen Gebilde, die wir hier betrachten, durchaus nicht in dieser reinlichen Weise getrennt, wie wir es für erforderlich halten, und dadurch wird dann eine ganze Reihe interessanter Beziehungen vollkommen verwischt. So sind z. B. schon bei Poincot die Begriffe Kräftepaar („couple“) und freie Plangröße („aire“) stets von vornherein miteinander verkoppelt, was natürlich das Verständnis notwendig erschwert; für uns hier zeigt erst der Vergleich der letzten beiden Zeilen unserer Tabelle nach einem früher ausgesprochenen allgemeinen Prinzip, *daß Kräftepaar und freie Plangröße als geometrische Grundbegriffe derselben Art anzusehen sind*, weil sie sich bei allen Änderungen des rechtwinkligen Koordinatensystems genau übereinstimmend verhalten. Machen wir uns den Inhalt dieser Aussage näher klar: Ist etwa ein Kräftepaar  $L, M, N$  gegeben und ordnen wir ihm eine Plangröße  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  durch:

$$\mathfrak{L} = L, \quad \mathfrak{M} = M, \quad \mathfrak{N} = N$$

zu (oder machen wir dasselbe in umgekehrter Reihenfolge, von  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  ausgehend), so bleibt diese Übereinstimmung der Koordinaten bei jeder Koordinatentransformation erhalten und muß sich daher auch rein geometrisch ohne Benutzung des Koordinatensystems beschreiben lassen. Zu diesem Ende wollen wir von der Plangröße  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  ausgehen und werden nun am bequemsten das Koordinatensystem so spezialisieren,

daß  $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0$  wird; dann stellt die freie Planggröße ein parallel der  $x$ - $y$ -Ebene oder speziell in ihr liegendes Dreieck  $(1, 2, 3)$  dar, derart, daß  $\mathfrak{N}$  gleich dem doppelten Dreiecksinhalt, d. h. gleich dem Inhalte des Parallelogramms  $(1, 1', 2, 3)$  wird, das mit dem durch den Umlaufssinn  $1' 1' 2$  bestimmten Vorzeichen zu versehen ist (vgl. Abb. 41). Ich behaupte nun, daß das zugehörige Kräftepaar mit den Momenten  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = \mathfrak{N}$  aus zwei gegenüberliegenden Parallelogrammseiten  $(1, 1')$  und  $(2, 3)$  mit den Pfeilspitzen in 1 und 2 zusammengesetzt werden kann. Zum Beweise lege ich das Koordinatensystem in der  $x$ - $y$ -Ebene noch bequemer, nämlich die  $y$ -Achse in die Gerade  $1' 1'$  und die  $x$ -Achse durch den Punkt 2 (in der Abb. 41 punktiert gezeichnet). Dann haben zunächst die beiden Linienteile  $(1, 1')$  und  $(2, 3)$  und daher auch das aus ihnen zusammengesetzte Kräftepaar die Drehmomente  $L = 0$  und  $M = 0$ . Ferner ist für den Linienteil  $(1, 1')$  auch das dritte Drehmoment Null, so daß schließlich  $N$  gleich wird dem Drehmoment von  $(2, 3)$ :

$$N = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3.$$

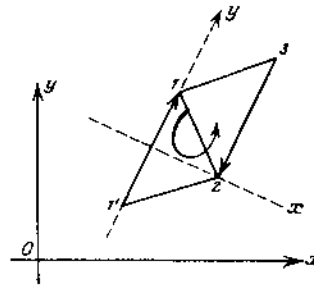


Abb. 41.

(denn nach unserer Annahme ist  $x_2 = x_3$  und  $y_2 = 0$ ). Andererseits ist aber für diese Lage des Koordinatensystems die dritte Koordinate der Planggröße:

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3$$

(d. h. gleich Grundlinie  $y_3$  mal Höhe  $x_2$  des Parallelogramms); also ist tatsächlich, auch im Vorzeichen,  $N = \mathfrak{N}$  und damit ist unsere ganze Behauptung bewiesen.

Wir können dieses Resultat sofort auch allgemein ohne Rücksicht auf ein spezielles Koordinatensystem aussprechen: *Eine durch ein Parallelogramm von bestimmtem Umlaufssinne repräsentierte freie Planggröße, sowie das Kräftepaar, das aus zwei gegenüberliegenden Parallelogrammseiten mit je einer jenem Umlaufssinne entgegengerichteten Pfeilspitze besteht, sind geometrisch äquivalente Gebilde, d. h. sie haben in bezug auf jedes rechtwinklige Koordinatensystem gleiche Komponenten.* Dieser Satz gestattet also sowohl ein Kräftepaar durch ein Parallelogramm, als auch ein solches durch ein Kräftepaar jederzeit zu ersetzen.

Wir brauchen uns jetzt um die zweite Zeile unserer Tabelle (S. 48) nicht mehr zu kümmern und wollen die erste und dritte, also den *freien*

*Vektor und die freie Plangröße*, vergleichen. Da sehen wir zuerst, daß beide sich bei Verschiebungen und Drehungen genau gleich verhalten, daß aber ein Unterschied auftritt, sowie wir Spiegelungen oder gar Maßstabsänderungen hinzunehmen. Um das im einzelnen zu verfolgen, denken wir in dem uns geläufigen (rechtshändigen) Koordinatensystem eine Plangröße  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  gegeben und koppeln mit ihr einen freien Vektor durch die Gleichungen  $X = \mathfrak{L}$ ,  $Y = \mathfrak{M}$ ,  $Z = \mathfrak{N}$ . Diese Gleichungen werden zwar bestehen bleiben, wenn wir uns auf Bewegungen des Koordinatensystems beschränken, aber bei Spiegelungen oder Maßstabsänderungen werden sie sich modifizieren, und wenn wir sie geometrisch aussprechen wollen, werden wir daher ohne Benutzung des Sinnes des Koordinatensystems und des Maßstabes nicht auskommen. In der Tat, legen wir das Koordinatensystem wieder wie vorhin so, daß  $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0$

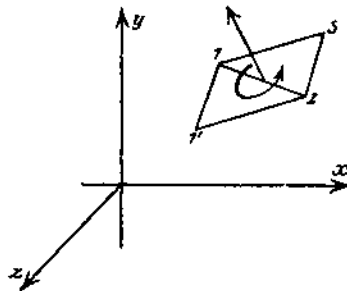


Abb. 42.

und daß  $\mathfrak{N}$  gleich dem Inhalt des Parallelogrammes (1, 1', 2, 3) der  $x$ - $y$ -Ebene wird, dann wird bei den Verhältnissen der Figur (vgl. Abb. 42)  $\mathfrak{N} > 0$ , und der Vektor  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = \mathfrak{N}$  hat die positive Richtung der  $z$ -Achse. Diese Tatsache kann man unabhängig von der speziellen Lage des Koordinatensystems offenbar so aussprechen: *Um bei rechtshändigem Koordinatensystem zu einer gegebenen freien Plangröße den freien Vektor mit den gleichen Koordinaten zu*

*erhalten, errichte man in ihrer Ebene ein Lot nach der Seite, von der aus die Umlaufrichtung des repräsentierenden Parallelogrammes dem Uhrzeiger entgegengerichtet erscheint und trage auf ihm eine Strecke gleich dem Inhalt des Parallelogrammes ab.* Die Übereinstimmung der Koordinaten dieses Vektors und der Plangröße bleibt erhalten, wie man auch das Koordinatensystem verschiebt und dreht; sie hört indessen auf, sowie man Maßstabänderungen oder Inversionen vornimmt; mißt man z. B. in Dezimetern, statt vorher in Zentimetern, so geht die Maßzahl des Inhalts in ihren 100-sten Teil über, die Maßzahl der als Vektor abgetragenen Strecke aber nur in ihren 10-ten Teil, und ebenso wird bei Inversion der Vektor das Vorzeichen wechseln, nicht aber die Plangröße.

Die freie Plangröße und den freien Vektor kann man also nur dann völlig identifizieren, wenn man sich ein für alle Male auf einen bestimmten Sinn des Koordinatensystems und eine bestimmte Längeneinheit festlegt. Eine solche Beschränkung bleibt natürlich jedem einzelnen für seinen Gebrauch unbenommen, nur muß er sich ihrer Willkürlichkeit immer bewußt bleiben, um sich mit anderen verständigen zu können. Alle diese Dinge sind, wie Sie sehen, äußerst klar und einfach, und doch muß man immer wieder auf sie zurückkommen, da in der heutigen

Physik die historische Entwicklung vielfach eine gewisse Verwirrung zurückgelassen hat. Ein Wort daher noch über die *Geschichte dieser Sachen*.

Graßmanns Ausdehnungslehre von 1844 hat wegen ihrer schon hervorgehobenen schwer lesbaren Darstellung auf unsere Physik und Mechanik sehr wenig eingewirkt. Viel mehr Einfluß hat über England die von *W. R. Hamilton* in Dublin um dieselbe Zeit inaugurierte Entwicklung gewonnen; Hamilton ist der Erfinder der *Quaternionen*, über die ich in der Wintervorlesung ja ausführlich gesprochen habe<sup>1)</sup>. Hier brauche ich nur zu erwähnen, daß er auch das Wort *Vektor* geschaffen hat für das, was wir *freien Vektor* nannten, während er den Begriff des linienflüchtigen Vektors nicht ausdrücklich gebraucht. Ferner aber kennt er *keinen Unterschied zwischen freier Plangröße und freiem Vektor*, indem er eben von vornherein eine bestimmte Festsetzung über Sinn und Maßstab der Koordinaten getroffen denkt. Dieser Gebrauch ist nun in die Physik übergegangen, und man hat dort lange Zeit eigentliche Vektoren und Plangrößen nicht unterschieden. Freilich machte sich allmählich bei feineren Untersuchungen doch die Notwendigkeit einer Scheidung je nach dem Verhalten der gleichmäßig als Vektoren bezeichneten Gebilde gegenüber Inversionen geltend, und dazu hat man denn die Adjektive „*polar*“ und „*axial*“ benutzt: *Ein polarer Vektor ändert sein Vorzeichen bei Spiegelungen, ist also genau mit unserem freien Vektor identisch, ein axialer ändert es nicht und stimmt daher mit unserer freien Plangröße überein* (wobei wir auf die „*Dimension*“ nicht achten). Die Physik mußte also hier — und sie tut es noch heute in den üblichen Darstellungen — hinterher eine gewissermaßen überraschende Unterscheidung konstatieren, die sich bei unserer allgemeinen Auffassung ganz naturgemäß von vornherein ergibt. Um es zum Schluß noch ganz präzise an einem Beispiele auszusprechen: Die Aussage, daß die elektrische Erregung ein polarer Vektor ist, bedeutet, daß sie durch 3 Größen *X, Y, Z* gemessen wird, die sich nach der ersten Zeile unserer Tabelle (S. 48) transformieren; und daß die magnetische Feldstärke ein axialer Vektor ist, soll besagen, daß ihre 3 Bestimmungsstücke sich nach dem Schema der letzten Zeile der Tabelle substituieren. Dabei lasse ich freilich noch dahingestellt, wie es mit der Dimension dieser Bestimmungsstücke steht, denn das würde uns zu weit in die physikalischen Einzelheiten hineinführen.

Hamilton hat nun neben dem Wort *Vektor* auch das Wort *Skalar* geschaffen, das gleichfalls noch heute in der Physik eine große Rolle spielt. *Ein Skalar ist nichts als eine Invariante gegenüber allen unseren Koordinatentransformationen*, d. i. eine Größe, die sich bei Änderungen des Koordinatensystems nicht oder nur um einen Faktor ändert. Im

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 64 ff.

einzelnen kann man danach *verschiedene Schattierungen des Skalarbegriffes* unterscheiden. Betrachten wir zuerst als Beispiel den *Raumteil oder Tetraederinhalt*:

$$T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

er geht, wie man leicht durch Rechnung bestätigt,

bei	Verschiebung	Drehung	Inversion	Maßstabänderung
über in	$T$	$T$	$-T$	$\lambda^3 T$

Eine solche Größe, die bei Verschiebungen und Drehungen ungeändert bleibt, bei Spiegelung aber ihr Vorzeichen ändert, nennt man einen *Skalar zweiter Art*, während ein *Skalar erster Art* auch bei Inversion ungeändert bleiben soll. Dabei ist die aus der vierten Kolonne sich ergebende Dimension wieder beiseite gelassen.

Wir können leicht auch *Skalare erster Art* bilden; die einfachsten Beispiele sind  $X^2 + Y^2 + Z^2$ , wo  $X, Y, Z$  die Koordinaten eines freien Vektors sind, und  $\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2$ , wo  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  die Koordinaten einer freien Plangröße sind. Daß diese Größen in der Tat bei allen Bewegungen und Spiegelungen (nicht bei Maßstabänderungen) ungeändert bleiben, ist aus der Tabelle von S. 48 sofort zu entnehmen, wenn wir noch die Gleichungen (3) (S. 44) für die Koeffizienten der Drehung berücksichtigen; es muß ihnen daher auch eine rein geometrische Bedeutung zukommen, und wir wissen in der Tat, daß sie das Quadrat der Länge des Vektors bzw. des Flächeninhalts des Ebenenteils darstellen.

Wir wollen nun zusehen, *wie man durch Kombination aus gegebenen Grundgebilden (Vektoren und Skalaren beider Arten) weitere Gebilde derselben Gattungen gewinnen kann*. Zunächst ein ganz einfaches Beispiel:  $T$  sei ein Skalar zweiter Art, also etwa ein Tetraederinhalt, und  $X, Y, Z$  seien die Koordinaten eines polaren Vektors; wir betrachten das Größentripel  $T \cdot X, T \cdot Y, T \cdot Z$ . Bei Bewegungen werden sich diese drei Größen genau so transformieren wie die Vektorkomponenten  $X, Y, Z$  selbst; bei Inversion aber bleiben sie ungeändert, da beide Faktoren das Zeichen wechseln. Also stellen die drei Größen einen *axialen* Vektor dar, und ebenso erkennt man, daß man von einem axialen Vektor  $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  ausgehend einen *polaren*  $T \cdot \mathfrak{L}, T \cdot \mathfrak{M}, T \cdot \mathfrak{N}$  erhält.

Nun wollen wir 2 *polare Vektoren*  $X_1, Y_1, Z_1$  und  $X_2, Y_2, Z_2$  nehmen und allerlei charakteristische Kombinationen aus ihnen bilden, wobei wir zunächst rein analytisch verfahren. Wir untersuchen das Verhalten der neu gebildeten Größen bei Koordinatentransformationen und schließen daraus, was für eine Art geometrischer Größen sie vorstellen:

1. Wir beginnen mit den 3 Summen:

$$X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2;$$

sie transformieren sich offenbar genau in derselben Weise, wie die Vektorkomponenten selbst, und stellen daher einen neuen *polaren Vektor* dar, der mit jenen beiden gegebenen Vektoren in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen rein geometrischen Beziehung steht.

2. Die bilineare Kombination beider Vektorkomponenten:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

bleibt, wie die Rechnung ergibt, bei allen Bewegungen und Spiegelungen ungeändert und stellt also einen *Skalar erster Art* dar, der als solcher wiederum rein geometrisch sich definieren lassen muß.

3. Die 3 Unterdeterminanten der aus den Komponenten gebildeten Matrix:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

verhalten sich, wie leicht auszurechnen, genau wie die Koordinaten einer freien Plangröße oder eines axialen Vektors; auch dieser muß unabhängig vom Koordinatensystem mit den gegebenen Vektoren verknüpft sein.

4. Wir betrachten endlich 3 *polare Vektoren* und bilden aus ihren 9 Komponenten die Determinante:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix};$$

sie bleibt bei allen Bewegungen ungeändert, wechselt aber bei Spiegelungen das Vorzeichen, so daß sie einen *Skalar zweiter Art* definiert.

Ich gebe nunmehr die geometrische Deutung dieser Gebilde an; die Beweise werden Sie, nachdem einmal das Resultat ausgesprochen ist, sich leicht selbst ergänzen können, wenn Sie nur immer von passend spezialisierter Lage des Koordinatensystems ausgehen.

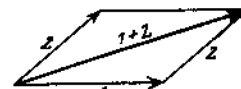


Abb. 43.

Zu 1. Die Deutung der hier definierten sog. *Summe der beiden Vektoren* ist allbekannt; läßt man die beiden Vektoren von demselben Punkt ausgehen, so stellt sie die *Diagonale des von ihnen gebildeten Parallelogrammes*, von jenem Punkt weg gerichtet, dar [Regel vom „*Kräfteparallelogramm*“ (vgl. Abb. 43)].

Zu 2. Haben die Vektoren die Länge  $r_1, r_2$  und bilden ihre Richtungen den Winkel  $\varphi$  (vgl. Abb. 44), so ist jene *bilineare Kombination* gleich  $r_1 r_2 \cos \varphi$ .

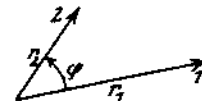


Abb. 44.

Zu 3. Wir betrachten wiederum ein *Parallelogramm*, dessen Seiten den Vektoren 1 und 2 parallel

sind, und denken es in dem durch die Aufeinanderfolge der Richtungen der Vektoren 1 und 2 gegebenen Sinne umlaufen (vgl. Abb. 45); dann hat

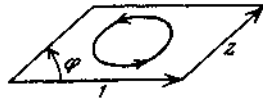


Abb. 45.

man eine vollständig bestimmte freie Plangröße, und das ist gerade die oben durch ihre drei Koordinaten definierte. Übrigens ist der absolute Betrag ihres Flächeninhaltes durch  $r_1 \cdot r_2 |\sin \varphi|$  gegeben.

Zu 4. Verlegt man die 3 Vektoren an einen Punkt, so bilden sie 3 Kanten eines Parallelepipedes (vgl. Abb. 46); sein Inhalt — mit einem geeignet bestimmten Vorzeichen — wird jenem durch die Determinante definierten Skalar zweiter Art gleich.

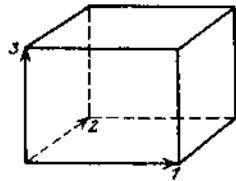


Abb. 46.

Lassen Sie mich nun davon sprechen, in welcher Form diese Prozesse sonst in der Literatur auftreten, wo man nicht, wie wir es hier tun, die Untersuchung des Verhaltens gewisser analytischer Ausdrücke gegenüber Koordinatentransformationen, d. h. eine rationale und einfache

Invariantentheorie an die Spitze stellt. Man hat da in der Mechanik und Physik nach dem Vorgange von Graßmann und Hamilton eine besondere Sprechweise ausgebildet und redet von der sog. Vektoralgebra und Vektoranalysis, die jene Neubildung von Vektoren und Skalaren aus gegebenen Vektoren mit den elementaren Rechenoperationen der gewöhnlichen Zahlen vergleicht.

Das erste ist, wie schon angedeutet, daß man die unter Nr. 1 aufgeführte Operation schlechtweg als *Addition der beiden Vektoren 1 und 2* bezeichnet. Die Berechtigung dieser Benennung findet man in der Gültigkeit gewisser formaler Gesetze, welche die Addition der gewöhnlichen Zahlen charakterisieren, so insbesondere des *kommutativen und des assoziativen Gesetzes*: Das erste besagt, daß die Definition der „Summe“ unabhängig von der Reihenfolge ist, in der man die beiden Vektoren 1, 2 verwendet, das zweite, daß die Addition der Summe von 1 und 2 zu einem Vektor 3 dasselbe Resultat ergibt, wie die Addition von 1 zur Summe von 2 und 3. — In sehr viel freierer Weise hat man die unter 2 und 3 definierten Operationen *Multiplikation* genannt, und zwar unterscheidet man sie als *innere oder skalare* (Nr. 2) und *äußere oder vektorielle Multiplikation* (Nr. 3). Hier trifft nämlich die wichtige Eigenschaft zu, die man als *Distributivität der Multiplikation in bezug auf die Addition* bezeichnet und die in der Gleichung  $a_1(a_2 + a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3$  enthalten ist; in der Tat hat man ja für die innere Multiplikation:

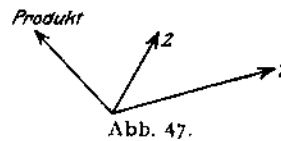
$$X_1(X_2 + X_3) + Y_1(Y_2 + Y_3) + Z_1(Z_2 + Z_3) = (X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2) + (X_1 X_3 + Y_1 Y_3 + Z_1 Z_3),$$

und ähnlich einfach ist die analoge Eigenschaft für die äußere Multipli-



kation abzuleiten. Was die anderen formalen Gesetze der Multiplikation angeht, — ich habe in der letzten Wintervorlesung<sup>1)</sup> ausführlich von ihnen gehandelt —, so will ich nur noch erwähnen, daß für die innere Multiplikation auch das kommutative Gesetz gilt ( $a \cdot b = b \cdot a$ ), für die äußere aber nicht; denn die kleinen Determinanten der das äußere Produkt definierenden Matrix wechseln bei Vertauschung der Vektoren 1 und 2 ihr Vorzeichen.

Ich möchte hier noch bemerken, daß man vielfach das äußere Produkt zweier polarer Vektoren schlechtweg als „Vektor“ definiert, ohne seinen axialen Charakter hinreichend zu betonen. Natürlich können wir auch sofort auf Grund der oben (S. 50) gegebenen allgemeinen Zuordnung die freie Plangröße durch einen Vektor ersetzen und erhalten folgende Regel: *Das äußere Produkt zweier Vektoren 1 und 2 ist ein Vektor 3 von der Länge  $r_1 r_2 |\sin \varphi|$ , der auf der Ebene von 1 und 2 senkrecht steht und so gerichtet ist, daß 1 zu 2 zu 3 liegt, wie die positive x-, y- und z-Achse zueinander* (vgl. Abb. 47). Man darf aber keinesfalls vergessen, daß diese Definition von der Art des Koordinatensystems und dem Maßstab ganz wesentlich abhängt.



Warum sich diese *Sprechweise der Vektoranalysis* so eingebürgert hat, kann ich nicht ganz verstehen; es mag aber wohl damit zusammenhängen, daß vielen Leuten solche formale Analogien mit den gewöhnlichen von alters her üblichen Rechenoperationen großes Vergnügen machen. Jedenfalls sind diese Namen für die Vektoroperationen wenigstens leidlich allgemein angenommen; was aber eine weitgehende Divergenz der Meinungen hervorgerufen hat, das ist die Festlegung einer bestimmten symbolischen Schreibweise für diese Operationen und insbesondere für die verschiedenen Arten der Multiplikation. Ich habe Ihnen schon in der vorhergehenden Vorlesung<sup>2)</sup> erzählt, wie weit man trotz aller Bemühungen hier von einer Einigung entfernt ist. Unterdessen hat man neuerdings auf dem Mathematikerkongreß in Rom gar eine internationale Kommission eingesetzt, die eine einheitliche Bezeichnungsweise vorschlagen soll; aber ob auch nur innerhalb der Kommission überhaupt eine Einigung zustande kommen wird und ob dann die Gesamtheit der Mathematiker solche Vorschläge auch annehmen wird, das muß man erst abwarten. Es ist nun einmal ungeheuer schwer, eine größere Zahl einzelner Menschen, die nur möglichst bequem ihrer Gewohnheit folgen wollen, unter einen Hut zu bringen, wenn nicht die zwingende Gewalt einer Legislative oder materieller Interessen dahinter steht. — Ich ziehe es hier vor, von der Bezeichnungsweise der Vektoranalysis gar nicht zu reden — sonst schaffe ich unversehens noch eine neue!

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 10.

<sup>2)</sup> Teil I, S. 71.

Ich möchte diesen Exkurs nicht abschließen, ohne mit allem Nachdruck darauf hinzuweisen, daß für unseren allgemeinen Standpunkt die *Fragestellungen der gewöhnlichen Vektoranalysis nur einen Ausschnitt* darstellen aus einer Fülle allgemeiner Probleme. Denn z. B. die *linienflüchtigen Vektoren*, die *gebundenen Plangrößen*, die *Schrauben und Dynamen* finden in der Vektoranalysis zunächst keine Berücksichtigung. Aber auch schon für das wirkliche Verständnis der Operationen der Vektoralgebra selbst ist es notwendig, sie in einem größeren Zusammenhang zu sehen; erst dann kommt das ihnen innewohnende Prinzip, die Definition geometrischer Größen durch ihr Verhalten gegen die einzelnen Arten rechtwinkliger Koordinatentransformationen, klar zum Ausdruck. — Was Literatur zu all diesen Fragen anlangt, so nenne ich Ihnen einmal die Arbeit, in der ich letzthin unser allgemeines Klassifikationsprinzip erneut dargestellt habe: „*Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball*“<sup>1)</sup>, sowie andererseits die Enzyklopädiereferate von *E. Timerding* („*Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers*“, *Enz. IV, 2*) und *M. Abraham* („*Geometrische Grundbegriffe der Mechanik deformierbarer Körper*“, *Enz. IV, 14*).

[Auch die in Rom zur Vereinheitlichung der Vektorbezeichnungen eingesetzte Kommission hat, wie zu erwarten war, nicht den geringsten Erfolg gehabt. Auf dem folgenden internationalen Kongreß zu Cambridge (1912) mußte sie erklären, daß sie mit ihren Arbeiten nicht fertig geworden sei, und um eine Verlängerung ihres Mandats bis zum nächsten Kongreß bitten, der 1916 in Stockholm stattfinden sollte, aber infolge des Krieges nicht zustande kam. Ein ähnliches Schicksal scheint dem Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen (AEF genannt) beschieden zu sein. Dieser veröffentlichte 1921 einen Entwurf zur Bezeichnung von Vektorgrößen und weckte damit sofort auf vielen Seiten den schärfsten Widerspruch. Der Entwurf ist in Band I (1921) der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik auf S. 421 f. abgedruckt, die Erwiderungen der Gegner im zweiten Bande (1922) derselben Zeitschrift. — Die in der Vektorrechnung heute üblichen Terminologien entspringen historisch im wesentlichen zwei Quellen, dem Hamiltonschen Quaternionenkalkül und der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Die schwer lesbaren Ausführungen Graßmanns blieben, wie schon erwähnt wurde, den deutschen Physikern unbekannt; sie bildeten lange Zeit eine Art Geheimlehre enger mathematischer Kreise. Die Hamiltonschen Ideen dagegen drangen vor allem durch *Maxwell* in die englische Physik ein. In seinem „*Treatise on Electricity and Magnetism*“ (2 Bde., Oxford 1873) wählt jedoch Maxwell für Vektorgleichungen fast durchweg die Komponentendarstellung. Aus Furcht, nicht verstanden zu werden, macht

<sup>1)</sup> Zeitschrift für Mathematik und Physik 47, S. 237 ff. und Mathematische Annalen. 67, S. 419. = *F. Klein*: Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. 1, S. 503 ff.

er von einer besonderen Bezeichnungsweise nur wenig Gebrauch, obwohl es nach seiner Meinung für viele Zwecke der physikalischen Überlegung wünschenswert ist, die Einführung der Koordinaten zu vermeiden und von vornherein die Aufmerksamkeit auf einen Punkt im Raum anstatt auf seine drei Koordinaten und auf die Richtung und Größe einer Kraft zu lenken statt auf ihre drei Komponenten. Das, was man heute die Vektorrechnung der Physiker nennt, geht auf die Arbeiten des englischen Telegrapheningenieurs *Heaviside* und des Amerikaners *J. W. Gibbs* zurück. Der letztere gab 1881 seine „Elements of Vector-Analysis“ heraus. Obwohl *Heaviside* sowohl wie *Gibbs* von Haus aus Hamiltonianer sind, nehmen beide in ihren Kalkül *Graßmanns*che Ideen auf. Auf dem Umwege über die Arbeiten dieser Autoren dringt nun die Vektorrechnung und damit *Graßmanns*che Ausdehnungslehre wie Hamiltonscher Quaternionenkalkül in die deutsche Physik ein. Das erste Buch, welches in den Kreisen deutscher Physiker die Vektorrechnung bekannt machte, und zwar in der Art, wie sie *Heaviside* ausgestaltete, war die 1894 erschienene „Einführung in die Maxwellsche Theorie“ von *A. Föppl*. — Bei *Graßmann* und *Hamilton* läßt sich zunächst in der Hinsicht eine Übereinstimmung konstatieren, daß beide sich zum Ziele setzen, mit den gerichteten Größen selbst zu operieren und erst später zu den Komponenten überzugehen. Merkwürdig ist, daß beide die Bedeutung des Wortes „Produkt“ verallgemeinern. Das mag damit zusammenhängen, daß sie ihre Theorien von vornherein mit der Lehre von den mehrgliedrigen komplexen Zahlen verbinden (vgl. unsere Darstellung der Quaternionentheorie in Bd. I, S. 64 ff.). Sonst aber sind die Kunstausrücke beider vollständig verschieden, wie bereits ausgeführt wurde. Von *Graßmann* stammen die Bezeichnungen Linienteil, Ebenenteil, Plangröße, inneres und äußeres Produkt, während von *Hamilton* die Worte Skalar, Vektor, skalares und vektoriell Produkt herrühren. Indem von den sonst strenggläubigen Jüngern *Graßmanns* die sehr zweckmäßigen Bezeichnungen des Meisters zum Teil durch andere ersetzt werden, von den Physikern die bestehenden Terminologien verschmolzen oder modifiziert werden, ebenso hinsichtlich der Zeichen, welche die einzelnen Operationen andeuten, die größte Willkür geübt wird, entsteht schließlich eine selbst für den Fachmann große Unübersichtlichkeit auf dem mathematisch durchaus einfachen Gebiete. Ein durch diesen Wirrwarr sicher hindurchführender Leitstern ist das auf S. 27 ausgesprochene Prinzip. Nach ihm lassen sich die Theorien *Hamiltons* und *Graßmanns* so charakterisieren: Während *Graßmann* in seiner „linealen Ausdehnungslehre“ die Theorie der Invarianten betreibt, welche zur Gruppe der den Koordinatenanfangspunkt festlassenden affinen<sup>1)</sup> Transformationen gehören, legen der spätere *Graßmann* in seiner

<sup>1)</sup> Im vorliegenden Buche werden diese Transformationen erst später (vgl. S. 75 ff.) besprochen.

„vollständigen Ausdehnungslehre“ und Hamilton in seinem „Quaternionenkalkül“ ihren Betrachtungen die Gruppe der Drehungen zugrunde. Dabei verfährt Hamilton in durchaus naiver Weise; daß in der Auswahl der orthogonalen Gruppe eine Willkür liegt, weiß er nicht. Daneben können, wie bereits erläutert wurde, noch weitere Unterschiede dadurch zustande kommen, daß die Inversion, d. i. die Spiegelung der sämtlichen Koordinatenachsen an dem Anfangspunkt, das eine Mal zugelassen, das andere Mal als überflüssig weggelassen ist. Den ganzen Sachverhalt kann man sich am besten klar machen an den Begriffen „äußeres Produkt“ (freie Plangröße), „Vektorprodukt“ und „Vektor“. Wer die Gruppe der orthogonalen Transformationen auswählt, dabei aber die Inversion ausschließt, macht zwischen den drei Größen keinen Unterschied. Daher stellt auch Graßmann in seiner „vollständigen Ausdehnungslehre“ die freie Plangröße (das mit einem Drehsinn versehene Parallelogramm) durch einen Vektor dar, den er die „Ergänzung“ der Plangröße nennt und der vollständig dem Vektor entspricht, welcher als das Vektorprodukt der Physiker bezeichnet wird. Wird aber die Inversion zugelassen, so sind „Plangröße“ und „Vektorprodukt“ als gleichartige, aber vom „Vektor“ verschiedene geometrische Gebilde aufzufassen. Dies entspricht der in der Physik üblichen Unterscheidung zwischen skalaren und axialen Vektoren. Geht man nun zur Gruppe der affinen Transformationen über, so kann man auch die Graßmannsche freie Plangröße und das Vektorprodukt nicht mehr als geometrische Größen von derselben Art bezeichnen.]

## V. Erzeugnisse der Grundgebilde.

Damit ist das beendet, was ich hier über die Elementargebilde der Geometrie sagen wollte, und ich habe nun noch über die *höheren Gebilde zu reden, die sich aus ihnen zusammensetzen lassen*. Ich will das in *historischer Form* tun, damit Sie ein gewisses Bild der Entwicklung der Geometrie in den verschiedenen Jahrhunderten bekommen.

A. *Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts* benutzte man als *Elementargebilde im wesentlichen nur Punkte*, andere kamen wohl gelegentlich, nie aber systematisch vor. Als Erzeugnisse von Punkten betrachtete man *Kurven und Flächen* sowie allgemeinere aus Stücken verschiedener Kurven und Flächen bestehende *Konfigurationen*. Lassen Sie uns ganz kurz überlegen, wie mannigfach das damit bezeichnete Gebiet ist:

1. Im *elementaren Unterricht* und manchmal auch in der Anfangsvorlesung über analytische Geometrie sieht es so aus, als ob sich die ganze Geometrie auf *Gerade und Ebene, Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung* beschränkte. Natürlich ist das ein recht ärmlicher Standpunkt, und schon das Wissen der alten Griechen erstreckte sich zum Teil weiter auf einzelne höhere Kurven, die sie als „geometrische Örter“ betrach-

teten; freilich waren diese Dinge wohl noch nicht in den regulären Unterricht eingedrungen.

2. Vergleichen wir damit den Stand der Kenntnis um 1650, als die analytische Geometrie mit *Fermat* und *Descartes* einsetzte. Man unterschied damals *geometrische und mechanische Kurven*; erstere waren besonders Kegelschnitte, aber auch einzelne höhere Kurven der Art, die man heute *algebraische Kurven* nennt; mit der zweiten Benennung meinte man Kurven, die man durch irgendeinen *Mechanismus* definierte, z. B. *Zykloiden*, die durch das Abrollen eines Rades entstehen; sie gehören meist zu den „*transzendenten Kurven*“.

3. Beide Arten von Kurven ordnen sich dem Begriff der *analytischen Kurve* unter, den man später aufstellte; das sind Kurven, deren *Koordinaten*  $x, y$  sich als *analytische Funktionen eines Parameters*  $t$ , d. h. kurzweg als Potenzreihen in  $t$  darstellen lassen.

4. Neuerdings hat man vielfach Betrachtungen über *nichtanalytische Kurven* angestellt, deren Koordinaten  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  sich nicht mehr in Potenzreihen entwickeln lassen, z. B. stetige Funktionen ohne Differentialquotienten sind; hiermit ist dann ein *allgemeinerer Kurvenbegriff* gegeben, von dem jene *analytischen Kurven* nur ein besonders einfacher Spezialfall sind.

5. Endlich ist in neuester Zeit durch die Entwicklung der Mengenlehre, von der wir ja bereits<sup>1)</sup> sprachen, noch ein früher gar nicht gekanntes Objekt hinzugetreten, nämlich die *unendlichen Punktmengen*. Das sind *Gesamtheiten von unendlich vielen Punkten*, Punkthaufen, die nicht gerade eine Kurve bilden, aber doch durch ein bestimmtes Gesetz definiert sind. Will man in unserer konkreten Anschauung etwas diesen Punktmengen ungefähr Entsprechendes finden, so mag man z. B. an die Milchstraße des Sternhimmels denken, in der man ja bei genauerem Hinsehen immer mehr Sterne erblickt — natürlich ist bei diesem Bilde das exakte Unendlich der abstrakten Punktmengenlehre durch das Unendlich der Approximationsmathematik ersetzt.

Für die mit dieser kurzen Aufzählung umschriebenen Disziplinen, insbesondere die *Infinitesimalgeometrie*, die *Punktmengenlehre*, wird im Rahmen dieser Vorlesung leider kein Raum mehr bleiben, obgleich sie natürlich gleichfalls wichtige Teilgebiete der Geometrie sind<sup>2)</sup>. Sie werden indessen in besonderen Vorlesungen und Büchern häufig eingehend gelehrt, so daß wir uns hier mit diesem Hinweis auf ihre Stellung innerhalb der gesamten Geometrie begnügen können, um uns lieber ausführlicher mit anderwärts seltener behandelten Dingen beschäftigen zu können.

Vorher knüpfe ich jedoch an diese Aufzählung gern eine Erörterung über den *Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geome-*

<sup>1)</sup> Vgl. Teil I, S. 271ff.

<sup>2)</sup> Über diese Dinge wird Bd. III der Elementarmathematik einiges enthalten.

*trie*, der ja in jene Gebiete immer wieder hineinspielt. Ihrer ursprünglichen Bedeutung nach sind Synthese und Analyse verschiedene Arten der Darstellung: Die Synthese beginnt mit den Einzelheiten und setzt daraus allgemeinere und schließlich allgemeinste Begriffe zusammen, die Analyse im Gegenteil stellt das Allgemeinste an die Spitze und zergliedert es feiner und immer feiner in seine Einzelheiten. Genau diesen Sinn hat auch der Unterschied, der in den Bezeichnungen synthetische und analytische Chemie zum Ausdruck kommt. Auch in der Schulgeometrie redet man entsprechend von einer *Analysis geometrischer Konstruktionen*: Man nimmt da an, das gesuchte Dreieck sei gefunden, und zergliedert nun die gestellte Aufgabe in einzelne Teilaufgaben. In der höheren Mathematik haben diese Worte aber merkwürdigerweise einen ganz anderen Sinn angenommen: Da ist die *synthetische Geometrie die, welche die Figuren als solche ohne Hinzunahme von Formeln studiert, während die analytische Geometrie sich konsequent der nach Einführung eines passenden Koordinatensystems hinschreibbaren Formeln bedient*. Richtig verstanden besteht freilich zwischen beiden Arten von Geometrie nur ein *gradueller Unterschied*, je nachdem man *mehr die Formeln* oder *mehr die Figuren* voranstellt; analytische Geometrie, die ganz von geometrischer Vorstellung abstrahiert, kann man kaum mehr Geometrie nennen, und die synthetische Geometrie kommt nicht weit, wenn sie nicht zum präzisen Ausdruck ihrer Resultate eine zweckmäßige Formelsprache heranzieht. Nach dieser Erkenntnis haben wir im vorigen gehandelt, wenn wir von Anfang an die Formeln benutzten und dann nach ihrer geometrischen Deutung fragten.

Doch auch in der Mathematik neigen, wie überall, die Menschen zur Parteibildung, und so entstanden *Schulen reiner Synthetiker und reiner Analytiker*, die auf absolute „Reinheit der Methode“ den Hauptwert legten und die also einseitiger waren, als es die Natur der Sache verlangt. Da verloren sich denn die analytischen Geometer oft in ein blindes Rechnen ohne jede geometrische Vorstellung, während die Synthetiker in einer gekünstelten Vermeidung jeder Formel alles Heil sahen und dabei doch schließlich nichts taten, als daß sie eine eigene, von der gewöhnlichen abweichende Formelsprache entwickelten. Solche Übertreibungen der zugrunde liegenden sachlichen Prinzipien in wissenschaftlichen Schulen führen allemal zu einem *gewissen Versteinerungsprozeß*, und eine neue, die Wissenschaft wesentlich weiter fördernde Anregung kommt dann meist von „Outsidern“. So haben hier in der Geometrie erst die Funktionentheoretiker z. B. den Unterschied zwischen analytischen und nichtanalytischen Kurven klar herausgebracht, der weder bei den wissenschaftlichen Vertretern noch in den Lehrbüchern der beiden Schulen jemals hinreichend zur Geltung kam. Und ebenso haben erst, wie schon erwähnt wurde, die Physiker die Vektoranalysis

in Gang gebracht, wenn sich auch die Grundbegriffe schon bei Graßmann finden; ist doch in geometrischen Lehrbüchern heute noch von Vektoren als selbständigen Dingen häufig kaum die Rede!

Man ist verschiedentlich dafür eingetreten, die Geometrie als selbständigen Lehrgegenstand von der Mathematik abzutrennen und überhaupt die Mathematik für den Lehrbetrieb in ihre einzelnen Disziplinen aufzulösen; in der Tat hat man besonders an ausländischen Hochschulen eigene Professuren für Geometrie, Algebra, Differentialrechnung usw. geschaffen. Ich möchte aus den letzten Erörterungen gerade die Folgerung ziehen, daß sich die Aufrichtung so enger Schranken nicht empfiehlt, sondern daß nach Möglichkeit eine lebendige Wechselwirkung der verschiedenen in einer Wissenschaft zusammenwirkenden Interessenzweige zugelassen werden soll, indem jeder einzelne sich im Prinzip als Vertreter der gesamten Mathematik fühlt. Ich rede sogar, derselben Idee folgend, auch möglichst lebendigen Beziehungen der Mathematiker zu den Vertretern der verschiedensten anderen Wissenschaften das Wort.

Beenden wir damit diesen Exkurs und betrachten, der geschichtlichen Entwicklung weiter nachgehend

B. *den gewaltigen Impuls, den die geometrische Forschung von 1800 an erhielt*, als die sogenannte *neuere Geometrie* in den Vordergrund trat. Wir nennen sie heute lieber *projektive Geometrie*, da in ihr die Operation des Projizierens — wir werden später ausführlich von ihr zu reden haben — eine Hauptrolle spielt; die Bezeichnung „neuere“ ist zwar heute noch vielfach im Gebrauch, aber eigentlich unangebracht, da seither viele abermals „neuere“ Tendenzen dazu gekommen sind. Als den ersten bahnbrechenden Forscher habe ich hier *J. V. Poncelet* zu nennen, der 1822 seinen „*Traité des propriétés projectives des figures*“<sup>1)</sup> erscheinen ließ.

In der weiteren Entwicklung dieser projektiven Geometrie spielte auch wieder von vornherein der *Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Richtung* eine Rolle; als Vertreter der ersteren nenne ich von deutschen Forschern *J. Steiner* und *Ch. v. Staudt*, als Vertreter der letzteren neben *A. F. Möbius* vor allem *J. Plücker*. Ich lege Ihnen hier die Fundamentalwerke auch dieser Männer vor, die ja heute noch lebendig nachwirken: Es sind Steiners „*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*“<sup>2)</sup>, Staudts „*Geometrie der Lage*“<sup>3)</sup>, Möbius', „*Baryzentrischer Kalkül*“<sup>4)</sup> und endlich Plückers „*Analytisch-geometrische Entwicklungen*“<sup>5)</sup>.

Soll ich nun die wichtigsten leitenden Gesichtspunkte dieser „*neueren*“ Geometrie hervorheben, so nenne ich an erster Stelle

<sup>1)</sup> 2. éd. Paris 1865/66.

<sup>2)</sup> Berlin 1832 = Gesammelte Werke Bd. I (Berlin 1884), S. 229ff. Abgedruckt in Nr. 82 und 83 von Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

<sup>3)</sup> Nürnberg 1847.

<sup>4)</sup> Zitiert S. 17.

<sup>5)</sup> 2 Bde. Essen 1828, 1831.

1. als Hauptleistung von *Poncelet* die erstmalige Hervorkehrung des Gedankens, daß es *dem Punkte gleichberechtigte Gebilde gibt, und zwar, daß innerhalb der Ebene dem Punkt die unbegrenzte Gerade, im Raume aber die unbegrenzte Ebene* entgegengestellt werden darf, daß man in einem großen Teile der geometrischen Sätze stets das Wort „Punkt“ mit „Gerade“ bzw. mit „Ebene“ vertauschen kann. Das ist die Aussage des *Prinzips der Dualität*.

Poncelet knüpft seine Entwicklungen an die „*Théorie des polaires réciproques*“, die *Polarentheorie der Kegelschnitte* an. In bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt gehört bekanntlich jedem Punkt  $p$  eine Gerade  $\pi$  als Polare zu, die etwa als Verbindungsgerade der Berührungspunkte der von  $p$  aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten definiert

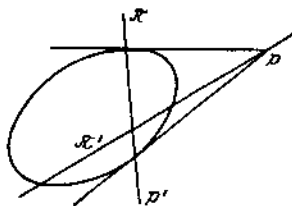


Abb. 48.

ist (vgl. Abb. 48); umgekehrt gehört dann auch jeder Geraden  $\pi$  ein Pol  $p$  zu, und es besteht die „*Reziprozitätsbeziehung*“, daß die Polare  $\pi'$  eines auf  $\pi$  gelegenen Punktes  $p'$  durch  $p$  geht. Aus dieser speziellen durch einen Kegelschnitt bewirkten Zuordnung von Geraden und Punkten der Ebene sowie der analogen Beziehung von Punkten und Ebenen im Raume in bezug auf eine Fläche zweiter Ord-

nung erschloß nun Poncelet, daß man alle Sätze der Geometrie, die sich nur auf Lageeigenschaften, das Ineinanderliegen von Punkten, Geraden, Ebenen beziehen, in der oben bezeichneten Weise „*dualisieren*“ darf. Ein berühmtes Beispiel ist der *Pascalsche Satz* über das dem Kegelschnitte eingeschriebene Sechseck, der durch Dualisierung in den *Brianchonschen Satz* über das ihm umgeschriebene Tangentensechseck übergeht.

2. In der Folge hat man sehr bald das *Dualitätsprinzip tiefer aufgefaßt*, indem man es von der Polarentheorie ablöste und als einen *Ausfluß des ganzen eigenartigen Aufbaues der projektiven Geometrie* erkannte. Diese schöne Systematik tritt zuerst bei *Gergonne* und *Steiner* auf; Sie müssen nur lesen, wie Steiner in der Vorrede seiner „*systematischen Entwicklung*“<sup>1)</sup> in begeisterten Worten schildert, wie erst die projektive Geometrie Ordnung in das Chaos der geometrischen Sätze bringe und wie sich in ihr alles in natürlicher Weise aneinanderreihe.

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch oft von dieser Systematik zu reden haben; einen *kurzen Überblick* über sie möchte ich schon jetzt geben. Dabei wird das Prinzip der Dualität darin zum Ausdruck kommen, daß *in die Grundbegriffe und Grundsätze („Axiome“) der Geometrie stets Punkt und Ebene bzw., wenn wir uns auf die Ebene beschränken, Punkt und Gerade ganz symmetrisch eingehen*, d. h. daß diese Axiome und also auch die aus ihnen logisch abzuleitenden Sätze stets paarweise

<sup>1)</sup> a. a. O. S. 233.



dualistisch sind. Die sogenannten „Maßbeziehungen“ der elementaren Geometrie wie Entfernung, Winkel usw. treten zunächst in dieser Systematik gar nicht auf; wir werden später sehen, wie sie sich nachträglich einordnen.

Des näheren gestaltet sich der Aufbau so:

a) *Drei Arten von Gebilden* werden als einfachste zugrunde gelegt: *der Punkt, die (unbegrenzte) Gerade, die (unbegrenzte) Ebene.*

b) Zwischen diesen Grundgebilden bestehen folgende Beziehungen (*Verknüpfungssätze* oder „*Axiome der Verknüpfung*“ genannt), deren *ausnahmslose Gültigkeit* durch geschickte, später noch näher zu erörternde Einführung uneigentlicher (unendlich ferner) Elemente erreicht wird: *2 Punkte bestimmen eine Gerade, 3 nicht zufällig in einer Geraden gelegene Punkte eine Ebene; 2 Ebenen bestimmen eine Gerade, 3 nicht durch eine Gerade gehende Ebenen einen Punkt.*

c) Wir bilden nun die *linearen Grundgebilde* (d. h. diejenigen, die analytisch durch lineare Gleichungen definiert sind):

I. *Die Grundgebilde 1. Stufe* aus je  $\infty^1$  Elementen:

- a) die Gesamtheit der Punkte einer Geraden: *gerade Punktreihe.*
- $\beta$ ) Die Gesamtheit der Ebenen durch eine Gerade: *Ebenenbüschel.*
- $\gamma$ ) Die Geraden durch einen Punkt in einer Ebene: *(ebenes) Geradenbüschel.*

II. *Grundgebilde 2. Stufe* aus je  $\infty^2$  Elementen:

- a) Die Ebene als Ort ihrer Punkte: *Punktfeld.*
- a') Die Ebene als Ort ihrer Geraden: *Geradenfeld.*
- $\beta$ ) Die Ebenen durch einen festen Punkt: *Ebenenbündel.*
- $\beta'$ ) Die Geraden durch einen festen Punkt: *Geradenbündel.*

III. *Grundgebilde 3. Stufe* von je  $\infty^3$  Elementen:

- a) Der Raum als Ort seiner Punkte: *Punktraum.*
- $\beta$ ) Der Raum als Ort seiner Ebenen: *Ebenenraum.*

In diesem ganzen Aufbau tritt in der Tat überall vollkommene Dualität zutage, und man kann auch von den damit gegebenen Grundlagen aus das ganze Gebäude der projektiven Geometrie auf zwei zueinander duale Arten aufführen, indem man einmal von den Punkten, das andere Mal von den Geraden ausgeht, wenn es sich um die Geometrie der Ebene handelt, oder von den Ebenen, wenn man Raumgeometrie treibt.

3. Dieser Aufbau läßt sich wieder bequemer darstellen, wenn wir weiterhin den *analytischen Weg* einschlagen und dazu zunächst einmal zusehen, in welcher Form das *Prinzip der Dualität bei Plücker* erscheint. Man kann in der Ebene die *Gleichung einer geraden Linie*, wenn das konstante Glied nicht gerade Null ist, bekanntlich wie folgt schreiben:

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Die Gerade ist bestimmt, wenn man die Werte der Koeffizienten  $u, v$  kennt, die übrigens bei dieser Schreibweise ganz symmetrisch mit den laufenden Koordinaten  $x, y$  auftreten. Es ist nun Plückers Gedanke,

diese  $u, v$  als „Koordinaten der Geraden“ mit den Punktkoordinaten  $x, y$  als gleichberechtigt anzusehen und sie unter Umständen statt dieser als variabel gelten zu lassen. Bei dieser neuen Auffassung sind  $x, y$  feste Werte, und unsere Gleichung drückt die Bedingung aus, daß eine variable Gerade durch einen festen Punkt  $x, y$  geht: sie ist die *Gleichung dieses Punktes in Geradenkoordinaten*. Schließlich braucht man auch keines der beiden Gebilde in der Ausdrucksweise zu bevorzugen und kann ganz unentschieden lassen, welches Größenpaar man als konstant und welches man als variabel ansieht: dann stellt die Gleichung die *Bedingung für „vereinigte Lage“ von Punkt und Gerade dar*. Das Prinzip der Dualität beruht nun darauf, daß jene Gleichung in  $x, y$  einerseits und  $u, v$  andererseits genau symmetrisch ist, und in dieser Eigenschaft liegt alles, was wir vorhin als die in den Sätzen der Verknüpfung liegende Dualität aussprachen.

Im Raume tritt natürlich an Stelle der Geradengleichung die Ebenengleichung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Infolge dieser Betrachtungen kann man die Geometrie analytisch sowohl so entwickeln, daß man  $x, y, z$ , als auch so, daß man  $u, v, w$  als grundlegende Variable auffaßt, wobei sich die Worte Punkt und Ebene einfach vertauschen. So entsteht der bekannte *doppelte Aufbau der Geometrie*, den Sie in vielen Lehrbüchern in der Gestalt ausgeprägt finden, daß links und rechts von einem vertikalen Striche die zueinander dualen Theoreme stehen. Werfen wir rasch einen Blick auf die so entstehenden, immer *einander dualen höheren Gebilde*, wodurch wir gewissermaßen eine Fortsetzung des obigen in sich dualen Schemas der linearen Gebilde erhalten!

Wir beginnen damit, daß wir  $x, y, z$  als *bestimmte, nicht konstante Funktionen*  $\varphi, \chi, \psi$  eines Parameters  $t$  auffassen. Durch die drei Funktionen wird dann eine *Raumkurve* dargestellt, die speziell (wenn die Funktionen  $\varphi, \chi, \psi$  identisch einer linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten genügen) eine *ebene Kurve* sein kann, oder endlich (wenn sie zwei solche lineare Gleichungen befriedigen) in eine *Gerade* ausartet. Sehen wir ebenso  $u, v, w$  als Funktionen von  $t$  an, so erhalten wir eine *einfach unendliche Aufeinanderfolge von Ebenen*, die wir uns am bequemsten durch die von ihnen umhüllte *abwickelbare Fläche* vergegenwärtigen. Als Spezialfälle erhalten wir hier erstens den, daß alle Ebenen durch einen Punkt gehen, d. h. daß sie einen *Kegel* umhüllen, und zweitens den, daß sie gar alle durch eine *feste Gerade* gehen.

Betrachten wir zweitens  $x, y, z$  als Funktionen *zweier* Parameter  $t, t'$ , so erhalten wir eine *Fläche*, die insbesondere in eine Ebene ausarten kann; das Duale dazu ist die *Gesamtheit der zweifach unendlich vielen eine Fläche umhüllenden Ebenen*, deren Ausartung das durch einen festen Punkt gehende *Ebenenbündel* ist.

Schreiben wir diese Ergebnisse in eine kleine Tabelle zusammen:

$x = \varphi(t)$	}	<b>Kurve</b>		$u = \varphi(t)$	}	<b>Abwickelbare Fläche</b>
$y = \chi(t)$		( <i>ebene Kurve</i> )		$v = \chi(t)$		( <i>Kegel</i> )
$z = \psi(t)$		( <i>Gerade</i> )		$w = \psi(t)$		( <i>Gerade</i> )
$x = \varphi(t, t')$	}	<b>Fläche</b>		$u = \varphi(t, t')$	}	<b>Fläche</b>
$y = \chi(t, t')$		( <i>Ebene</i> )		$v = \chi(t, t')$		( <i>Punkt</i> )
$z = \psi(t, t')$				$w = \psi(t, t')$		

Das genüge als Beispiel eines solchen dualen Schemas, wie man sie lange Zeit hindurch gern entwickelt hat.

4. Bereits bei *Plücker* findet sich eine sehr *wesentliche Weiterbildung dieses ganzen Ansatzes*. Genau so, wie er die 3 Koeffizienten der Ebenengleichung als variable Ebenenkoordinaten ansieht, erfaßt er die Idee, *ganz allgemein die Konstanten, von denen irgendein geometrisches Gebilde abhängt* — z. B. die 9 Koeffizienten der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung — *als variable Koordinaten dieses Gebildes anzusehen und zu untersuchen, was irgendwelche Gleichungen zwischen ihnen bedeuten mögen*. Von „Dualität“ im eigentlichen Sinne ist jetzt freilich nicht mehr die Rede; sie beruhte auf der speziellen Eigenschaft der Ebenen- bzw. der Geradengleichung (S. 63f.), symmetrisch in Koeffizienten und Koordinaten zu sein.

Plücker selbst hat diesen Gedanken besonders für die *Geraden des Raumes* ausgeführt. Eine Raumgerade ist in Punktkoordinaten durch 2 Gleichungen bestimmt, die Plücker in der Form schreibt:

$$\begin{cases} x = rz + \varrho \\ y = sz + \sigma \end{cases}$$

Die 4 Konstanten  $r, s, \varrho, \sigma$  dieser Gleichungen werden als *Koordinaten der Geraden im Raume* zu bezeichnen sein; es ist leicht festzustellen, wie sie mit den früher (S. 32ff.) benutzten, nach dem Graßmannschen Prinzip aus zwei Punkten der Geraden hergeleiteten Bestimmungsstücken  $X : Y : \dots : N$  zusammenhängen. Nun betrachtet Plücker zunächst eine *Gleichung*  $f(r, s, \varrho, \sigma) = 0$  zwischen den vier Koordinaten; sie scheidet aus den sämtlichen vierfach unendlich vielen Geraden dreifach unendlich viele aus, deren Inbegriff er einen *Linienkomplex* nennt; den einfachsten Fall eines solchen, den *linearen Komplex*, haben wir bereits früher besprochen (S. 37ff.). *Zwei Gleichungen*  $f(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ ,  $g(r, s, \varrho, \sigma) = 0$  bestimmen eine *Linienkongruenz*, wofür manche auch *Strahlensystem* sagen; das erste Wort soll besagen, daß es sich um die Geraden handelt, in denen die beiden Komplexe  $f = 0$ ,  $g = 0$  übereinstimmen. Endlich wird durch 3 Gleichungen  $f = g = h = 0$  derselben Art eine einfach unendliche Schar von Geraden bestimmt, die eine gewisse Fläche überdecken, eine *Linien- oder Regelfläche*.

Diese Darstellung hat Plücker in seinem Werke: „*Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*“<sup>1)</sup> von 1868/69 gegeben; er starb, als die Drucklegung des ersten Teiles dieses Werkes fast beendet war, und ich durfte mir als sein damaliger Assistent die Sporen mit der Herausgabe des zweiten Teiles verdienen.

Das allgemeine Plücker'sche Prinzip, irgendwelche Gebilde als Raumelemente, ihre Konstanten als Koordinaten zu verwenden, hat auch weiterhin zu interessanten Entwicklungen Anlaß gegeben. So hat der hervorragende norwegische Mathematiker *Sophus Lie*, der lange in Leipzig gewirkt hat, mit seiner *Kugelgeometrie* großen Erfolg gehabt. Hier wird die Kugel als Raumelement benutzt, die wie die Gerade von 4 Parametern abhängt. Ich erwähne ferner noch aus späterer Zeit *Study's „Geometrie der Dynamen“*<sup>2)</sup>, wo an den uns bereits geläufigen Begriff der Dynamen eine ganze Reihe hierher gehöriger interessanter Untersuchungen geknüpft werden.

C. Über diese im vorigen behandelte „neuere Geometrie“, die im Grunde doch auf der Hervorhebung der unbegrenzten Geraden und der unbegrenzten Ebene als Raumelement beruht, hinaus geht die von *Graßmann* 1844 eingeleitete Entwicklung, die den *begrenzten Linienteil, Ebenenteil, Raumteil* voranstellt und ihnen Komponenten nach dem „*Determinantenprinzip*“ beilegt; wir haben ja ausführlich davon gesprochen. Das Schöne daran ist, daß so den Bedürfnissen der Mechanik und Physik in ungleich wirksamerer Weise entsprochen wird, als es z. B. durch die Liniengeometrie und das Prinzip der Dualität geschieht.

Natürlich sind diese verschiedenen Richtungen keineswegs so scharf voneinander getrennt, wie ich das hier der besseren Übersicht halber darstelle. In der Tat verhält es sich nur so, daß Plücker *mehr* auf die unbegrenzte Gerade, *Graßmann mehr* auf den Linienteil Gewicht legte, während bei jedem auch gelegentlich das andere Gebilde vorkommt. Namentlich *Study* könnte eigentlich ebenso wie in der vorigen Rubrik auch in dieser angeführt werden.

Nun habe ich aber zu betonen, daß sich *Graßmann* keineswegs auf unmittelbar anwendbare Dinge beschränkt hat, vielmehr frei schaffend weit darüber hinausgegangen ist. Das wichtigste ist, daß er allgemein *n Punktkoordinaten*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  statt dreier  $x, y, z$  einführte und so zur *Geometrie des Raumes  $R_n$  von  $n$  Dimensionen* aufstieg, deren eigentlicher Schöpfer er ist. Nach seinem allgemeinen Prinzip betrachtet er in einem solchen höheren Raume die Matrizen aus den Koordinaten von  $2, 3, \dots, n + 1$  Punkten, deren Unterdeterminanten ihm dann eine ganze Reihe fundamentaler, dem Linienteil und Ebenenteil entsprechen-

<sup>1)</sup> Abt. 1. 2. Leipzig 1868 u. 1869.

<sup>2)</sup> Leipzig 1903.

der Grundgebilde des  $R_n$  liefern. Ich erwähnte schon, daß Graßmann die so entstehende abstrakte Disziplin als *Ausdehnungslehre* bezeichnete.

Diese Auffassung des  $R_n$  hat in neuerer Zeit eine Erweiterung dahin erfahren, daß man *unendlich viele Koordinaten*  $x_1, x_2, x_3, \dots$  *in infin.* in Betracht zieht und demgemäß vom *unendlich-dimensionalen Raume*  $R_\infty$  spricht. Daß solche Betrachtungen einen Sinn haben, erkennen Sie, wenn Sie etwa an das Operieren mit Potenzreihen denken: Eine Potenzreihe ist festgelegt durch den Inbegriff ihrer unendlich vielen Koeffizienten und kann insofern durch einen Punkt im  $R_\infty$  gedeutet werden.

Das Merkwürdige und heute bei den Mathematikern allgemein Anerkannte ist dabei nur, daß eine solche geometrische Sprechweise bei  $n$  und sogar bei unendlich vielen Variablen einen wirklichen Nutzen gewährt; die Überlegungen werden dadurch viel lebendiger, als wenn man bei abstrakt analytischen Ausdrücken bleibt, und man eignet sich bald eine solche Gewandtheit im Gebrauche der neuen geometrischen Vorstellungen an, als ob man in  $R_n$  oder  $R_\infty$  zu Hause wäre. Was freilich in Wahrheit hinter dieser Erscheinung steckt, ob dabei gar eine natürliche Veranlagung des Menschen zutage tritt, die nur durch die Begrenztheit unserer Erfahrung für gewöhnlich allein in 2 und 3 Dimensionen ausgebildet wird, das mögen die Psychologen und Philosophen entscheiden!

Wenn ich Sie hier aber auch über die Rolle der Mathematik in der allgemeinen Kultur orientieren soll, so muß ich noch mit einem Worte die Wendung berühren, die diese mehrdimensionale Geometrie 1873 durch den Leipziger Astronomen *Zöllner* erhielt. Hier liegt einer der seltenen Fälle vor, daß eine mathematische Sprechweise ins allgemeine Bewußtsein überging — Redensarten mit der „vierten Dimension“ gebraucht ja heutzutage jeder Mensch. Diese *Popularisierung der „vierten Dimension“* ging von Versuchen aus, die der Spiritist *Slate Zöllner* vormachte. *Slate* gab sich als ein Medium aus, das in direktem Verkehr mit den Geistern stünde, und seine Vorführungen bestanden unter anderem darin, daß er Gegenstände verschwinden und wieder auftauchen ließ. *Zöllner* glaubte an diese Experimente und stellte zu ihrer Erklärung eine physikalisch-metaphysische Theorie auf, die Verbreitung erlangt hat: Für das wirkliche physikalische Geschehen soll ein vier- oder mehrdimensionaler Raum in Betracht kommen, von dem wir kraft unserer Veranlagung aber nur einen dreidimensionalen Ausschnitt  $x_4 = 0$  wahrnehmen können; ein besonders veranlagtes Medium, das etwa mit außerhalb dieses unseres Raumes lebenden Wesen in Verbindung steht, kann beliebig Gegenstände aus ihm entfernen, die uns dann unsichtbar werden, oder sie wieder zurückbringen. Man macht sich diese Verhältnisse gern am Bilde von Wesen klar, die an eine zweidimensionale Fläche gebunden sind und nur innerhalb dieser ihre Wahrnehmungen machen können; man denke z. B. an die Lebensweise ge-

wisser Tiere, etwa der Milben. Nimmt man aus der Fläche, in der diese Wesen leben, einen Gegenstand fort, so scheint er für sie (so denkt man sich die Sache) gänzlich zu verschwinden, und ganz analog stellt sich Zöllner Slaters Experimente vor. Man hat sich vielfach die Existenz dieser zweidimensionalen Wesen näher ausgemalt; besonders amüsant ist das in einer anonym erschienenen englischen Schrift „*Flatland*“<sup>1)</sup> geschehen. Da schildert der Autor ganz genau das Aussehen einer zweidimensionalen Welt; die einzelnen Wesen unterscheiden sich durch ihre geometrische Gestalt, die um so verwickelter ist, je höher organisiert sie sind. Reguläre Polygone sind die höchsten Wesen; die Frauen, von denen der Autor eine sehr geringe Meinung hat, haben einfach die Gestalt eines Striches, und so geht das weiter.

Ich brauche hier wohl nicht ausdrücklich auszuführen, daß die mathematisch aufgefaßte mehrdimensionale Geometrie mit Zöllners metaphysischen Betrachtungen nichts zu schaffen hat; die Mathematik erweist sich hier, um ein modernes Wort zu gebrauchen, als *rein normative Wissenschaft*, welche die formal möglichen Verknüpfungen der Dinge betrachtet und ganz unabhängig von naturwissenschaftlichen oder metaphysischen Tatsachen besteht.

Nach diesem Exkurs möchte ich nun noch etwas näher auf die höheren Gebilde eingehen, die sich als *Erzeugnisse der Graßmannschen Elementargebilde* — insbesondere der Vektoren — den im vorangehenden aufgeführten Erzeugnissen von Punkten, Ebenen usw. an die Seite stellen lassen. Wir kommen hier zu der weiteren *Ausgestaltung der eigentlichen Vektoranalysis*, die namentlich durch Hamilton ja eines der wertvollsten Instrumente der Mechanik und Physik geworden ist; ich lege Ihnen *Hamiltons* ins Deutsche übertragene „*Elemente der Quaternionen*“<sup>2)</sup> sowie die bereits früher (S. 57) erwähnte „*Vector Analysis*“<sup>3)</sup> des gleichfalls sehr verdienten Amerikaners *J. W. Gibbs* vor.

Der neue Gedanke, der hier namentlich zu den uns schon bekannten Begriffsbildungen von Vektor und Skalar hinzukommt, ist der, *diese Größen an die Punkte des Raumes anzuknüpfen*: Man ordnet jedem Raumpunkte  $(x, y, z)$  einen bestimmten Skalar zu:

$$S = f(x, y, z)$$

und spricht dann von einem *Skalarfeld*; andererseits heftet man jedem Raumpunkte einen bestimmten Vektor an:

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = \chi(x, y, z)$$

und nennt die Gesamtheit dieser Vektoren *Vektorfeld*.

<sup>1)</sup> A romance of many dimensions. By a Square. London 1884. Der Autor verfolgt hier im Grunde den Zweck, die Möglichkeit einer mehrdimensionalen Geometrie begreiflich zu machen.

<sup>2)</sup> Deutsch von P. Glan. 2 Bde. Leipzig 1882/84.

<sup>3)</sup> Ed. by E. B. Wilson. New York 1901.

Hierdurch sind zwei der wichtigsten geometrischen Begriffe bezeichnet, die man in der modernen Physik überall benutzt; es genügt wohl, wenn ich durch ganz wenige Stichproben an ihre große Verbreitung erinnere: Die Dichte einer *Massenverteilung*, die *Temperatur*, die *potentielle Energie* eines kontinuierlich ausgedehnten Systems, immer als Funktion des Ortes aufgefaßt, sind Beispiele von Skalarfeldern. Das *Kraftfeld*, in dem an jedem Punkte eine bestimmte Kraft angreift, ist das typische Beispiel eines Vektorfeldes. Weitere Beispiele sind in der Elastizitätslehre das *Feld der Verschiebungen* eines deformierten Körpers, wenn man jedem Punkte die Strecke seiner Verschiebung zugeordnet denkt, ähnlich in der Hydrodynamik das *Geschwindigkeitsfeld*, endlich in der Elektrodynamik das *elektrische und magnetische Feld*, in dem jedem Punkte ein bestimmter elektrischer und ein magnetischer Vektor zugeordnet ist. Da man für jeden Punkt den Vektor der magnetischen Feldstärke, welcher axialer Natur ist, mit dem polaren Vektor der elektrischen Feldstärke zu einer *Schraube* zusammenfassen kann, läßt sich das elektromagnetische Feld auch als das Beispiel eines *Schraubensfeldes* deuten.

*Hamilton* hat nun gezeigt, wie man diese Felder in einfachster Weise den Methoden der Differential- und Integralrechnung zugänglich machen kann.

Dabei ist die eine zugrunde liegende Bemerkung die, daß die *Differentiale*:

$$dx, \quad dy, \quad dz,$$

deren Verhältnisse eine Fortschreitungsrichtung durch einen Raumpunkt bestimmen, einen *freien Vektor* darstellen, d. h. daß sie sich bei *Koordinatentransformationen wie freie Vektorkomponenten verhalten*. Das folgt leicht daraus, daß sie durch Grenzübergang aus den Koordinaten einer kleinen, durch den Punkt  $x, y, z$  gehenden Strecke entstehen.

Wichtiger, aber auch schwerer aufzufassen, ist die zweite Bemerkung, daß auch die Symbole der partiellen Differentiation  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  den Charakter von *freien Vektorkomponenten haben*, d. h. daß beim Übergang zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem  $x', y', z'$  die neuen Symbole  $\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}$  sich aus den alten ergeben wie die transformierten Koordinaten eines Vektors (und zwar eines *polaren Vektors*).

Das wird sofort deutlich, wenn wir die betreffende Rechnung für eine Drehung des Koordinatensystems:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

wirklich durchführen. Diese Drehungsformeln sind, wie wir früher ausführlich darlegten (S. 44), dadurch charakterisiert, daß ihre Auflösung einfach durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen des Koeffizientensystems erhalten wird:

$$(2) \quad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \end{cases}$$

Haben wir nun irgendeine Funktion von  $x, y, z$ , so können wir sie mittels (2) auch als Funktion von  $x', y', z'$  darstellen, und nach den bekannten Regeln partieller Differentiation wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y'}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z'}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $x, y, z$  nach  $x', y', z'$  kann man sofort aus (2) entnehmen und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_2 \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_3 \frac{\partial}{\partial x} + b_3 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

und der Vergleich mit (1) ergibt in der Tat Übereinstimmung mit den Transformationsformeln der Punktkoordinaten, also auch der Vektorkomponenten.

Eine wesentlich einfachere Rechnung würde ebenso zeigen, daß bei *Verschiebung* des Koordinatensystems die 3 Symbole  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  sich überhaupt nicht ändern, daß sie bei *Inversion* aber das Vorzeichen wechseln, womit die Behauptung bewiesen ist. Freilich haben wir dabei Maßstabänderungen nicht berücksichtigt, d. h. auf die Dimension keine Rücksicht genommen; tun wir das noch, so ergibt sich, daß unsere Symbole die Dimension  $-1$  haben, da die Differentiale der Koordinaten im Nenner auftreten.

Mit diesem Hamiltonschen Vektorsymbol  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  wollen wir nun die Operationen vornehmen, die wir früher mit Vektoren vorgenommen haben. Ich schicke die Bemerkung voraus, daß man das Resultat der Anwendung der Operation  $\frac{\partial}{\partial x}$  auf eine Funktion  $f(x, y, z)$ ,



also  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , symbolisch als *Produkt von*  $\frac{\partial}{\partial x}$  *und*  $f$  bezeichnen kann, da die formalen Gesetze der Multiplikation, soweit sie für das Folgende in Betracht kommen, insbesondere die Distributivität  $\left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)$  für diese Zusammensetzung gelten.

Es sei nun ein *Skalarfeld*  $S = f(x, y, z)$  gegeben, und wir wollen im soeben festgelegten Sinne diesen Skalar mit den Komponenten des Hamiltonschen Vektorsymbols multiplizieren, d. h. wir bilden den Vektor:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Wir haben früher gesehen (S. 52), daß das Produkt eines Skalars in einem Vektor wiederum ein Vektor ist, und da beim Beweise dieses Satzes nur solche Eigenschaften der Multiplikation heranzuziehen sind, die bei unserer symbolischen Multiplikation auch bestehen, folgt, daß *jene 3 partiellen Ableitungen des Skalarfeldes einen Vektor definieren, der noch vom Punkt  $x, y, z$  abhängt, also ein Vektorfeld; dieses Vektorfeld hängt mit dem Skalarfeld in einer vom speziell gewählten Koordinatensystem unabhängigen Weise zusammen*. Man nennt dieses Vektorfeld, noch mit negativem Zeichen versehen, mit einem aus der Meteorologie stammenden Worte den *Gradienten des Skalarfeldes*. So finden Sie z. B. in den bekannten Wetterkarten der Zeitungen als Skalarfeld  $S$  den Luftdruck an jedem Orte dargestellt, indem die Kurven  $S = \text{Konst.}$  ausgezogen und die zugehörigen Werte von  $S$  angeschrieben sind; der Gradient gibt dann die Richtung der schnellsten Abnahme des Luftdruckes an und zeigt stets normal zu jenen Niveaukurven.

Aus 3 Vektorkomponenten  $X, Y, Z$  kann man nun stets (vgl. S. 52) einen Skalar  $X^2 + Y^2 + Z^2$  bilden; danach erhalten wir hier aus den Gradienten eines Skalars *ein neues Skalarfeld*:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

das mit jenem und daher auch mit dem ursprünglichen Skalarfelde in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise zusammenhängen muß. Dieser Skalar ist bekanntlich gleich dem *Quadrat der Länge des Gradienten* oder, wie man sagt, gleich dem *Quadrat des Gefälles des Skalarfeldes  $f$* .

Unter Anwendung desselben Satzes wollen wir weiter aus dem Vektorsymbol  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  selbst einen symbolischen Skalar bilden, indem wir jede Komponente symbolisch mit sich selbst multiplizieren, d. h. die durch sie bezeichnete Operation zweimal anwenden. Das gibt dann die *Operation*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

die also skalaren Charakter hat, d. h. bei Koordinatentransformationen invariant bleibt. „Multiplizieren“ wir dieses skalare Symbol mit einem Skalarfeld  $f$ , so ergibt sich notwendig wieder ein Skalarfeld:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

das mit jenem ersten in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise zusammenhängt. Denkt man sich im Feld eine Flüssigkeit strömen, deren Dichte anfänglich gleich 1 ist und deren Geschwindigkeit an jedem Orte durch den Gradienten von  $f$  gegeben sein soll, so nimmt an jeder Stelle im ersten Zeitmoment  $dt$  die Dichte der Flüssigkeit um einen Betrag zu, der gleich jenem Skalar multipliziert mit  $dt$  ist. Man nennt daher  $-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$  die *Divergenz des Gradienten von  $f$* .

Man bezeichnete früher nach einer von Lamé herrührenden Ausdrucksweise ein Skalarfeld  $S = f(x, y, z)$  auch wohl als eine *Punktfunktion (fonction du point)* und nannte dann das erste damit verbundene Skalarfeld  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$  den *ersten Differentialparameter*, das zweite  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$  den *zweiten Differentialparameter*.

Wir wollen nun in ähnlicher Weise unser Vektorsymbol  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  mit einem gegebenen (*polaren*) Vektorfelde:

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \chi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z)$$

kombinieren, und zwar mit Hilfe der beiden Arten von Multiplikation zweier Vektoren, die wir kennengelernt haben:

a) Durch *innere Multiplikation* entsteht ein Skalar, der hier bei der bereits geläufigen Deutung der symbolischen Multiplikation mit  $\frac{\partial}{\partial x}$  heißen wird:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Er ist natürlich wiederum von  $x, y, z$  abhängig, stellt also ein *skalares Feld* dar, das mit dem gegebenen Vektorfelde in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Beziehung steht; es heißt in dem vorhin definierten Sinne seine *Divergenz*.

b) Die *äußere Multiplikation* liefert die Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

deren drei Determinanten zu lesen sind als:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Sie definieren nach dem Früheren eine *Plangröße* oder einen *axialen Vektor* bzw. ein *axiales Vektorfeld*, und der Zusammenhang der beiden Vektorfelder ist wieder unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Nach Maxwell nennt man dieses Vektorfeld den *Curl* des gegebenen, wofür man in Deutschland wohl auch das auf die gleiche germanische Wurzel zurückgehende deutsche Wort *Quirl* gebraucht; gelegentlich sagt man dafür wohl auch *Rotor* oder *Rotation*.

So haben wir jetzt durch *systematische geometrische Untersuchung* alle die Größen erhalten, die der Physiker bei seinen Untersuchungen der verschiedensten Vektorfelder stets zur Hand haben muß. Es ist *reine Geometrie*, was wir hier treiben. Das muß ich um so mehr betonen, als man diese Dinge vielfach als zur Physik gehörig ansieht und sie demgemäß in den physikalischen statt in den geometrischen Büchern und Vorlesungen behandelt. Das ist aber sachlich durchaus unbegründet und nur als ein Residuum der historischen Entwicklung zu verstehen; denn die Physik mußte sich hier seinerzeit erst das Rüstzeug schaffen, das sie notwendig brauchte und in der Mathematik nicht fertig vorfand.

Es waltet hier dasselbe *Mißverhältnis* ob, auf das ich Sie schon im vorigen Semester auf dem Gebiete der Analysis mehrfach aufmerksam machen mußte. Die Physik hat im Laufe der Zeit allerlei mathematische Bedürfnisse entwickelt und dadurch der mathematischen Wissenschaft vielfach äußerst wertvolle Anregungen gegeben. Der mathematische Unterricht aber, wie er besonders auf Schulen noch meist erteilt wird, berücksichtigt diese Änderungen nicht er geht in den alten seit Jahrhunderten eingefahrenen Gleisen weiter fort und überläßt es der Physik, sich ihre Hilfsmittel mühsam selbst zurechtzumachen, obwohl ihm deren mathematische Verarbeitung einen viel geeigneteren Stoff abgeben würde als die herkömmlichen Gegenstände. Sie sehen, meine Herren, auch im geistigen Leben gibt es ein Trägheitsgesetz; alles geht auf seiner alten Bahn geradlinig weiter, und jeder Änderung, jedem Übergang auf neue moderne Wege wird ein großer Widerstand entgegengesetzt.

Ich verlasse damit den ersten Hauptteil, der uns die verschiedensten Arten geometrischer Gebilde, die *Objekte der Geometrie*, kennen gelehrt hatte. Nunmehr soll uns eine besondere *Methode* beschäftigen, die für die genauere Erforschung dieser Gebilde von größter Bedeutung ist.

## Zweiter Teil.

### Die geometrischen Transformationen.

Es ist eines der wichtigsten Kapitel der wissenschaftlichen Geometrie, das wir jetzt beginnen. In seinen Grundideen und seinen einfacheren Teilen liefert es aber — und darauf möchte ich in dieser Vorlesung besonders hinweisen — auch für den *Schulunterricht* sehr anregendes Material; sind doch die geometrischen Transformationen schließlich nichts als eine *Verallgemeinerung des einfachen Funktionsbegriffes*, den unsere modernen Reformtendenzen durchaus in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts stellen wollen.

Ich beginne mit der Behandlung der *Punkttransformationen*, welche die einfachste Klasse der geometrischen Transformationen ausmachen. Sie lassen den Punkt als Raumelement bestehen, d. h. sie ordnen jedem Punkte wieder einen Punkt zu — gegenüber solchen Transformationen, die den Punkt in andere Raumelemente, wie Gerade, Ebenen, Kugeln u. dgl. überführen. Ich stelle auch hier wieder die *analytische Behandlung* voran, da sie jeweils den genauesten Ausdruck der Tatsachen gestattet.

Das analytische Abbild einer Punkttransformation ist das, was die Analysis *Einführung neuer Veränderlicher*  $x', y', z'$  nennt, die als Funktionen der alten Variablen  $x, y, z$  gegeben sind:

$$\begin{cases} x' = \varphi(x, y, z) \\ y' = \chi(x, y, z) \\ z' = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

Ein solches Gleichungssystem kann man freilich in der Geometrie auf zweierlei Arten, ich möchte sagen *aktiv* und *passiv*, interpretieren: *Passiv stellt es eine Änderung des Koordinatensystems dar*, d. h. dem Punkte mit den Koordinaten  $x, y, z$  werden die neuen Koordinaten  $x', y', z'$  zugeschrieben. Von dieser Deutung haben wir bisher stets bei dem Studium der Änderungen des rechtwinkligen Koordinatensystems Gebrauch gemacht; für allgemeine Funktionen  $\varphi, \chi, \psi$  ist natürlich in jenen Formeln darüber hinaus auch der Übergang zu ganz andersartigen Koordinatensystemen, wie z. B. Dreieckskoordinaten, Polarkoordinaten, elliptischen Koordinaten u. dgl. einbegriffen. *Demgegenüber hält die aktive Auffassung das Koordinatensystem fest und gestaltet den Raum*

um: Jedem Punkte  $x, y, z$  wird der Punkt  $x', y', z'$  zugeordnet, und damit ist tatsächlich eine *Transformation der Raumpunkte* gegeben; diese Deutung ist es, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Die *ersten Beispiele* von Punkttransformationen werden wir diesen Erörterungen gemäß natürlich erhalten, indem wir die Formeln hernehmen, die uns früher (S. 43f.) — passiv aufgefaßt — eine Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Maßstabänderung des rechtwinkligen Koordinatensystems darstellten, und sie nun aktiv deuten. Man überzeugt sich ganz leicht, daß die ersten beiden jener Formelgruppen eine *Verschiebung des Raumes* — als starres Gebilde aufgefaßt — bzw. eine *Drehung um  $O$*  gegen das festgehaltene Koordinatensystem darstellen; die dritte Gruppe gibt eine *Inversion der Raumpunkte* am Nullpunkt  $O$  [jedem Punkt  $x, y, z$  wird der symmetrisch zu  $O$  gelegene  $-x, -y, -z$  zugeordnet (vgl. Abb. 49)], die letzte endlich stellt eine sogenannte *Ähnlichkeitstransformation des Raumes* vom Nullpunkt  $O$  aus dar.

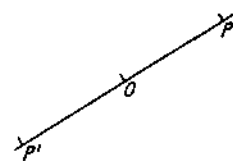


Abb. 49.

Unsere eigentlichen Untersuchungen beginnen wir nunmehr mit einer besonders einfachen Gruppe von Punkttransformationen, welche die genannten Transformationen sämtlich als Unterfälle umfaßt, mit derjenigen der *affinen Transformationen*.

### I. Affine Transformationen.

Eine affine Transformation ist analytisch dadurch definiert, daß  $x', y', z'$  beliebige ganze lineare Funktionen von  $x, y, z$  sind:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3. \end{cases}$$

Der Name, der übrigens auf *Möbius* bzw. *Euler* zurückgeht, soll besagen, daß bei einer solchen Transformation unendlich fernen Punkten stets wieder unendlich ferne entsprechen, also gewissermaßen die „Enden“ des Raumes erhalten bleiben; in der Tat ergeben die Formeln sofort, daß  $x', y', z'$  gleichzeitig mit  $x, y, z$  unendlich werden. Das ist ein Gegensatz zu den später zu behandelnden allgemeinen projektiven Transformationen, bei denen  $x', y', z'$  gebrochene lineare Funktionen von  $x, y, z$  werden und demgemäß gewisse im Endlichen gelegenen Punkte ins Unendlichweite transformiert werden. In der Physik spielen diese affinen Transformationen unter dem Namen *homogene Deformationen* eine große Rolle; das Wort „homogen“ bringt hier (im Gegensatz zu heterogen) die Unabhängigkeit der Koeffizienten von der betrachteten Raumstelle zum Ausdruck, das Wort „Deformation“ erinnert daran, daß im allgemeinen die Gestalt eines jeden Körpers durch die Transformation geändert wird.

Die Transformation (1) kann man offenbar zusammensetzen aus je einer Verschiebung des Raumes um die Größen  $d_1, d_2, d_3$  parallel zu den 3 Koordinatenrichtungen und der keine konstanten Terme mehr enthaltenden homogenen linearen Transformation:

$$(2) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

welche die Lage des Nullpunktes ungeändert läßt (zentroaffine Transformation) und die etwas bequemer zu untersuchen ist. Wir beginnen die Betrachtung dieses Typus (2)

1. mit der Frage, wie es mit der *Auflösbarkeit* des Gleichungssystems (2) steht. Wie die Determinantentheorie lehrt, kommt es dabei wesentlich darauf an, ob die *Determinante* des Koeffizientensystems der Transformation:

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet oder nicht. Der erste Fall wird uns später noch besonders beschäftigen; *vorläufig nehmen wir  $\Delta \neq 0$  an*. Dann ist (2) *eindeutig lösbar, und zwar in der Form:*

$$(4) \quad \begin{cases} x = a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z' \\ y = a'_2 x' + b'_2 y' + c'_2 z' \\ z = a'_3 x' + b'_3 y' + c'_3 z', \end{cases}$$

wobei  $a'_1, \dots, c'_3$  die durch  $\Delta$  dividierte Unterdeterminanten von  $\Delta$  selbst sind. Es entspricht also jedem Punkte  $x, y, z$  nicht nur *einer*, sondern auch *nur ein* Punkt  $x', y', z'$ , und der Übergang von  $x', y', z'$  zu  $x, y, z$  ist wieder eine affine Transformation.

2. Wir können nun fragen, *wie sich die Raumgebilde bei diesen Affinitäten verändern*. Haben wir zunächst eine Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so ergibt sich, indem wir die Ausdrücke (4) für  $x, y, z$  eintragen, als Gleichung des entsprechenden Gebildes:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

wo sich die  $A', \dots, D'$  in gewisser Weise aus den  $A, \dots, D$  und den Transformationskoeffizienten zusammensetzen. In Hinblick auf Nr. 1 entsteht dabei *jeder* Punkt der zweiten Ebene aus einem passenden Punkt der ersten; *einer jeden Ebene entspricht also wieder eine Ebene*. Da eine Gerade der Schnitt zweier Ebenen ist, *muß weiterhin notwendig jeder Geraden auch wieder eine Gerade entsprechen*; Transformationen dieser letzteren Eigenschaft nennt Möbius *Kollineationen*, da sie die „Kollinearität“ dreier Punkte, d. h. die Eigenschaft, auf einer Geraden zu liegen, erhalten. *Die Affinität ist also gewiß eine Kollineation*.

Untersucht man ebenso eine *Fläche 2. Grades*:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0,$$

so ergibt sich, wenn wir vermöge der Gleichungen (4)  $x, y, z$  durch  $x', y', z'$  ersetzen, ebenfalls eine quadratische Gleichung, d. h. *die Affinität führt jede Fläche zweiten Grades wieder in eine solche und ebenso jede Fläche n-ter Ordnung wieder in eine n-ter Ordnung über.*

Es werden später die Flächen besonderes Interesse haben, die einer *Kugel* entsprechen. Zunächst sind es nach dem vorigen Flächen 2. Grades, da die Kugel eine spezielle Fläche dieser Art ist; da aber ferner alle Punkte der Kugel im Endlichen liegen und daher keiner ins Unendliche geworfen werden kann, müssen es notwendig ganz im Endlichen gelegene Flächen 2. Grades, das heißt *Ellipsoide* sein.

3. Wir wollen nun zusehen, was aus einem *freien Vektor* mit den Komponenten  $X = x_1 - x_2, Y = y_1 - y_2, Z = z_1 - z_2$  wird. Indem wir für die Koordinaten der Punkte 1 und 2 die Transformationsformeln (2) ansetzen, erhalten wir für die Komponenten  $X' = x'_1 - x'_2, Y' = y'_1 - y'_2, Z' = z'_1 - z'_2$  der entsprechenden Strecke 1'2':

$$(5) \quad \begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z. \end{cases}$$

Diese neuen Komponenten hängen also nur von den  $X, Y, Z$ , nicht von den Einzelwerten der Koordinaten  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$  ab, d. h. sämtlichen Strecken 1 2 mit den gleichen Komponenten  $X, Y, Z$  entsprechen Strecken 1'2' mit den gleichen Komponenten  $X', Y', Z'$ , oder mit anderen Worten: *Jedem freien Vektor entspricht bei der Affinität wieder ein freier Vektor.* In dieser Aussage ist wesentlich mehr enthalten, als in der, daß

jeder Geraden eine Gerade entspricht. Nehmen wir nämlich auf zwei parallelen Geraden gleiche und gleichgerichtete Abschnitte an, so stellen diese denselben freien Vektor dar, also müssen auch die entsprechenden Strecken einen

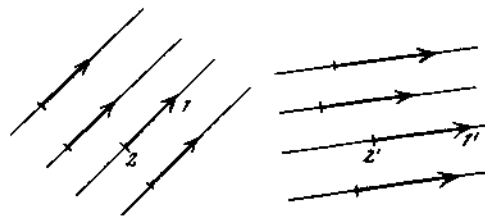


Abb. 50.

und denselben Vektor darstellen, d. h. parallel, unter sich gleichgerichtet und gleich sein (vgl. Abb. 50). *Jedem Systeme paralleler Geraden entsprechen also wieder parallele Geraden, und gleichen Abschnitten auf ihnen entsprechen gleiche Abschnitte.* Diese Eigenschaften sind recht merkwürdig, da — wie man sich leicht überzeugen kann — die absolute Länge einer Strecke und die absolute Größe des Winkels zweier Geraden durch affine Transformation im allgemeinen geändert werden.

4. Betrachten wir jetzt *zwei ungleich lange Vektoren auf derselben Geraden*. Diese gehen bekanntlich durch Multiplikation mit einem Skalar auseinander hervor; da  $X', Y', Z'$  in den Formeln (5) homogene lineare Funktionen von  $X, Y, Z$  sind, unterscheiden sich auch die entsprechenden Vektoren lediglich durch genau den gleichen Faktor, und das heißt, daß ihre Längen sich verhalten wie die Längen der ersten Vektoren. Wir können das auch so aussprechen: *Zwei in einer Affinität einander entsprechende Geraden sind „ähnlich“ aufeinander bezogen, d. h. entsprechende Strecken der beiden Geraden haben je dasselbe Verhältnis.*

5. Endlich wollen wir noch zwei entsprechende Tetraederinhalte  $T = (1, 2, 3, 4)$  und  $T' = (1', 2', 3', 4')$  vergleichen.

Es ist:

$$6T' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 & 1 \\ x'_4 & y'_4 & z'_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 & a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 & a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 & 1 \\ a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 & a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 & a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2 & 1 \\ a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 & a_2x_3 + b_2y_3 + c_2z_3 & a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 & 1 \\ a_1x_4 + b_1y_4 + c_1z_4 & a_2x_4 + b_2y_4 + c_2z_4 & a_3x_4 + b_3y_4 + c_3z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

oder nach Anwendung des bekannten Multiplikationstheorems der Determinanten:

$$6T' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

der erste Faktor ist  $\Delta$ , der zweite  $6T$ , so daß wir haben:

$$T' = \Delta \cdot T.$$

*Bei affinen Transformationen multiplizieren sich also alle Tetraederinhalte und so überhaupt alle Rauminhalte (als Summen von Tetraederinhalten oder Grenzwerten solcher Summen) mit einem konstanten Faktor, nämlich der Substitutionsdeterminante  $\Delta$ .*

Diese wenigen Sätze, die wir so aus der analytischen Definition der Affinität gewonnen haben, reichen nun hin, um uns eine durchaus *anschauliche geometrische Vorstellung* von dieser Transformation zu verschaffen. Dabei hat sich ihre Ableitung einfacher gestaltet, als man sie sonst vielfach zu geben pflegt, da wir in dem Vektorbegriff das zu ihrer Darstellung richtige Hilfsmittel zur Hand hatten.

Das deutlichste geometrische Bild der affinen Transformation erhalten wir, wenn wir von einer *Kugel* im Raum  $R$  der  $x, y, z$  ausgehen; ihr wird, wie wir wissen, im Raume  $R'$  der  $x', y', z'$  ein *Ellipsoid* entsprechen. Betrachten wir nun *ein System paralleler Sehnen der Kugel*, so müssen diesen nach Nr. 3 auch *parallele Sehnen des Ellipsoids* entsprechen (vgl. Abb. 54). Ferner müssen, da entsprechende Punktreihen ähnlich sind (Nr. 4), den *Halbierungspunkten der Kugelsehnen* auch



die *Halbierungspunkte der Ellipsoidsehnen* entsprechen, und da jene auf einer Ebene liegen, müssen endlich wegen der Fundamentealeigenschaft Nr. 2 auch diese auf einer Ebene liegen, die eine *Diametralebene des Ellipsoids* heißt. Nun enthalten bekanntlich alle Diametralebenen der Kugel deren *Mittelpunkt  $M$* , der jede durch ihn gehende Sehne (*Kugeldurchmesser*) halbiert; daher liegt der entsprechende Punkt  $M'$  (*Mittelpunkt des Ellipsoids*) in allen Diametralebenen und halbiert jede durch ihn gehende Sehne (*Durchmesser des Ellipsoids*).

Es ist weiter von Wichtigkeit, zu sehen, was einem System von 3 *aufeinander senkrechten Diametralebenen der Kugel* entspricht. Ein solches hat offenbar die charakteristische Eigenschaft, daß jede der 3 Ebenen die der Schnittgeraden der beiden anderen parallelen Sehnen halbiert. Diese Eigenschaft bleibt bei der affinen Transformation erhalten, und daher *entspricht jedem*

*der unendlich vielen Tripel von aufeinander senkrechten Diametralebenen der Kugel ein Tripel von Diametralebenen des Ellipsoids von der Beschaffenheit, daß die der Schnittlinie irgend zweier der Ebenen parallelen Sehnen von der dritten Ebene halbiert werden.* Solche drei Ebenen heißen *Tripel konjugierter Diametralebenen*, ihre drei Schnittlinien *Tripel konjugierter Durchmesser*.

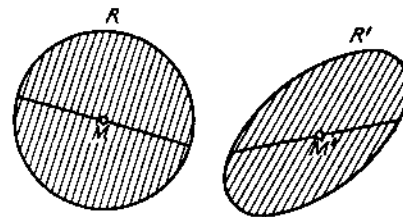


Abb. 51.

Nun besitzt — ich darf das hier wohl als bekannt voraussetzen — ein Ellipsoid 3 sogenannte *Hauptachsen*, das ist ein *Tripel konjugierter Durchmesser*, von denen jeder auf den beiden andern senkrecht steht. Ihnen entsprechen nach dem soeben Ausgeführten vermöge unserer Affinität in  $R$  drei aufeinander senkrechte Durchmesser der Kugel. Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß die Mittelpunkte des Ellipsoids und der Kugel Koordinatenanfangspunkte in  $R'$  bzw.  $R$  sind und machen alsdann durch geeignete Drehung die genannten beiden senkrechten Achsentripel zur  $x'$ -,  $y'$ -,  $z'$ - bzw.  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse in  $R'$  bzw.  $R$ ; dabei bleibt es der Willkür überlassen, ob wir uns den Raum oder das Koordinatensystem gedreht denken. Jedenfalls werden beide Operationen durch lineare homogene Koordinatensubstitutionen der früher ausführlich betrachteten speziellen Art dargestellt, und da die Aufeinanderfolge mehrerer linearer homogener Substitutionen stets wieder eine Substitution derselben Art ergibt, so werden die Gleichungen unserer  $R$  in  $R'$  überführenden Transformation auch in den neuen Koordinaten wieder von der Form (2) sein:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z.\end{aligned}$$

Nun entspricht aber nach unserer Wahl des neuen Koordinatensystems der  $x$ -Achse die  $x'$ -Achse, d. h. für  $y = z = 0$  ist stets auch  $y' = z' = 0$ ; daraus folgt aber  $a_2 = a_3 = 0$ , und ebenso folgt auch  $b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$ . *Jede Affinität ist daher, abgesehen von passenden Drehungen, nichts als eine sog. „reine Affinität“:*

$$(6) \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y, & \text{wobei } \Delta \geq 0 \\ z' = \nu z \end{cases}$$

oder, wie die Physiker sagen, eine *reine homogene Deformation* (englisch: *pure strain*). Den Inhalt dieser Gleichungen kann man offenbar in einfachster Weise geometrisch interpretieren: *Der Raum wird parallel der  $x$ -Achse auf das  $\lambda$ -fache ausgedehnt (bzw. komprimiert, wenn  $|\lambda| < 1$ ) und außerdem noch gespiegelt, wenn  $\lambda < 0$  und ebenso parallel den anderen beiden Koordinatenrichtungen auf das  $\mu$ - bzw.  $\nu$ -fache; wir können die reine Affinität also kurz als *gleichförmige Streckung des Raumes nach drei zueinander senkrechten Richtungen bezeichnen* und haben damit ein geometrisches Bild, wie man es anschaulicher kaum verlangen kann.*

Wollen wir *schiefwinklige Parallelkoordinaten* zulassen, so gestalten sich die Verhältnisse noch einfacher. Wir nehmen im Raume  $R$ , ohne die Lage des Nullpunktes zu ändern, irgendein beliebiges, recht- oder schiefwinkliges Achsensystem  $x, y, z$  an und benutzen im  $R'$  die 3 diesen Achsen vermöge der Affinität entsprechenden Geraden als Achsen eines — allgemein zu reden — schiefwinkligen Koordinatensystems  $x', y', z'$ . Nun sind die Übergangsformeln von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Parallelkoordinaten bei festem Nullpunkt bekanntlich lineare homogene Gleichungen von der Form (2), und da die Zusammensetzung solcher Substitutionen stets zu Substitutionen derselben Art führt, müssen die Gleichungen der Affinität auch bei Verwendung der soeben festgelegten schiefwinkligen Koordinaten die Gestalt (2) haben. Nach unserer Koordinatenbestimmung führen sie aber die 3 Achsen von  $R$  in die von  $R'$  über, und daher können wir durch genaue Wiederholung der vorhin angestellten Überlegung schließen, daß die Gleichungen tatsächlich sich auf die zuletzt angegebene Form (6) reduzieren. *Verwenden wir also (schiefwinklige) Parallelkoordinaten in bezug auf irgend zwei korrespondierende Achsentripel, so haben die Gleichungen der Affinität ohne weiteres diese einfache spezielle Form (6).*

Im Anschluß an unsere Erörterungen ergibt sich eine sehr schöne Lösung der Aufgabe, einen Mechanismus zu finden, mit dessen Hilfe man affin transformieren kann. Diese Aufgabe stellte ich im Wintersemester 1908/09 in einer Vorlesung über Mechanik. Die beste Lösung, sowohl im Hinblick auf den Grundgedanken als auch hinsichtlich der zweckmäßigen technischen Ausgestaltung des Mechanismus, brachte *R. Remak*. Das

von Remak benutzte kinematische Grundelement ist eine sog. „Nürnberg-berger Schere“, d. i. eine Kette von gelenkig verbundenen Stäben, die eine Reihe von einander ähnlichen Parallelogrammen bilden. Die je zwei aufeinanderfolgenden dieser Parallelogramme gemeinsamen Eckpunkte  $S_0, S_1, S_2, \dots$  durchlaufen dann bei allen Deformationen des Gelenksystems *ähnliche Punktreihen* auf ihrer Verbindungsgeraden  $g$ , der gemeinsamen Diagonale der Parallelogramme (vgl. Abb. 52). Bildet man aus drei solcher Scheren ein Dreieck, indem man sie an irgendwelchen der Eckpunkte  $S$  gelenkig verbindet, so wird sich das aus sämtlichen Gelenkpunkten  $S$  bestehende Punktsystem bei jeder Veränderung des gesamten Gelenksystems

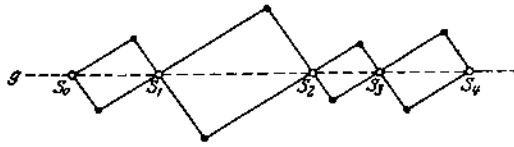


Abb. 52.

affin transformieren; man erkennt das unmittelbar (vgl. Abb. 53), indem man die Diagonalgeraden zweier der Scheren zu Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems macht. Weitere Punkte, die gleichzeitig derselben affinen Transformation unterliegen, erhält man, indem man zwischen irgend zwei Gelenkpunkten des Dreiecks weitere Scheren derselben Art einspannt und deren Gelenkpunkte  $S$  betrachtet (in der Figur sind die Scheren durch ihre Diagonalgeraden angedeutet). Nach diesem Prinzip lassen sich die verschiedensten ebenen und auch räumlichen Modelle affin veränderlicher Systeme aufbauen<sup>1)</sup>.

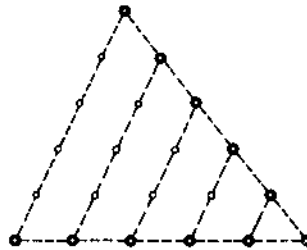


Abb. 53.

Ich will hier nicht weiter auf die Diskussion aller Eigenschaften der Affinitäten eingehen, sondern will Ihnen lieber zeigen, wozu man diese Transformationen gebrauchen kann.

Zunächst ein Beispiel dafür, wie sie ein ausgezeichnetes *Hilfsmittel zur Ableitung neuer geometrischer Theoreme* bilden; die oben erörterte affine Umwandlung der Kugel in ein Ellipsoid gestattet nämlich, aus bekannten Eigenschaften der Kugel neue *Sätze über das Ellipsoid* zu gewinnen. Konstruieren wir beispielsweise drei auf einander senkrechte Durchmesser der Kugel und in ihren Endpunkten die 6 Tangentialebenen, so entsteht *ein der Kugel umgeschriebener Würfel* vom Rauminhalt  $J = 8r^3$ , wenn  $r$  der Kugelradius ist. Unsere affine Transformation führt jede Tangentialebene der Kugel offenbar in eine Tangentialebene des Ellip-

<sup>1)</sup> Eine Reihe derartiger Modelle sind im Verlage der Firma Martin Schilling in Leipzig erschienen. Vgl. *F. Klein* und *Fr. Schilling*, Modelle zur Darstellung affiner Transformationen in der Ebene und im Raume. Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 58, S. 311. 1910.

soids über, und daher folgt mit Hilfe der besprochenen Sätze, daß jenem Würfel des Raumes  $R$  im Raume  $R'$  ein dem Ellipsoid umschriebenes Parallelfach entspricht, dessen Seitenflächen an den Endpunkten dreier zueinander konjugierter Durchmesser berühren und

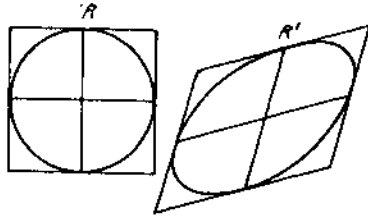


Abb. 54.

den zugehörigen Diametralebenen parallel sind und dessen Kanten jenen Durchmessern bezüglich parallel sind. (In der Ebene gilt Entsprechendes für Kreis und Ellipse; vgl. Abb. 54.) Diese Schlußweise läßt sich offenbar sofort auch umkehren: Jedem dem Ellipsoide umschriebenen Parallelfach der bezeichneten Art entspricht

ein der Kugel umschriebener Würfel, da drei einander konjugierten Durchmessern des Ellipsoids drei aufeinander senkrecht stehende Kugeldurchmesser entsprechen. Nun wissen wir aber (S. 78), daß bei der Affinität jeder Rauminhalt sich mit der Substitutionsdeterminante  $\Delta$  multipliziert, und daher gilt für den Inhalt eines jeden dem Ellipsoid umschriebenen Parallelfachs jener Art:

$$J' = J \cdot \Delta = 8r^3 \cdot A.$$

Diese Formel ist offenbar unabhängig davon, wie das Parallelfach liegt; das Parallelfach hat mithin immer denselben *konstanten Rauminhalt*, gleichgültig zu welchem Tripel konjugierter Durchmesser es gehört. Verwenden wir insbesondere das Hauptachsentripel, dessen Geraden rechte Winkel miteinander bilden, so erhalten wir ein rechtwinkliges Parallelfach, dessen Inhalt offenbar  $8abc$  ist, wenn  $2a, 2b, 2c$  die Längen der Hauptachsen sind. Damit haben wir jenen konstanten Rauminhalt bestimmt, und unser Theorem lautet also schließlich: *Alle einem Ellipsoid umschriebenen Parallelfache, deren Seitenflächen drei inander konjugierten Diametralebenen parallel sind, haben ein und denselben Rauminhalt  $J' = 8abc$ , wenn  $a, b, c$  die Längen der halben Hauptachsen sind.* Um die Allgemeingültigkeit dieses Satzes für jedes Ellipsoid zu zeigen, hat man noch zu überlegen, daß sich jedes beliebige Ellipsoid aus einer Kugel durch affine Transformation erzeugen läßt. Das ergibt sich aber sogleich aus der Form (6) der Gleichungen der Affinität; sie lassen nämlich erkennen, daß die Achsen des aus der Kugel entstehenden Ellipsoids sich wie  $\lambda : \mu : \nu$  verhalten, wobei  $\lambda, \mu, \nu$  drei willkürliche Zahlen sind.

Wenn ich mich auf dieses kleine Beispiel für die Anwendungen der Affinitäten in der theoretischen Geometrie beschränke, so will ich nun um so mehr betonen, daß die Affinitäten auch in der *Praxis* die größte Bedeutung haben.

Was da zunächst das Bedürfnis des Physikers angeht, so ist zu erwähnen, daß die affinen Transformationen in der *Elastizitätslehre*, der

*Hydrodynamik*, überhaupt in jedem Zweige der *Mechanik der Kontinua* eine grundlegende Rolle spielen. Ich brauche das wohl kaum näher zu erläutern. Denn wer sich nur einmal mit diesen Disziplinen beschäftigt hat, weiß ja zur Genüge, daß man es da immer, sowie man die Betrachtung auf hinreichend kleine Raumelemente beschränkt, mit homogenen linearen Deformationen zu tun hat.

Ausführlicher will ich hier lieber die *Anwendung auf das richtige Zeichnen* behandeln, das ja der Physiker ebenso wie der Mathematiker braucht. *Soweit es sich da um Parallelprojektionen handelt, liegen nämlich immer nur affine Transformationen des Raumes zugrunde.* Auf diesem Gebiete des richtigen Zeichnens wird nun leider ungemein viel gesündigt; Sie können sowohl in mathematischen Büchern bei der Abbildung räumlicher Konfigurationen als auch in Physikbüchern bei der Darstellung von Apparaten ganz unglaubliche Fehler finden. Besonders häufig trifft man, um nur ein Beispiel zu nennen, daß bei der Abbildung einer Kugel der Äquator als Kreisbogenzweieck (vgl. Abb. 55 links) gezeichnet wird.

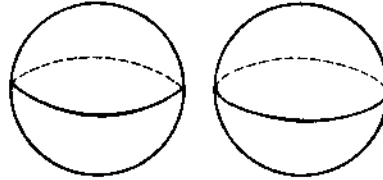


Abb. 55.

Natürlich ist das durchaus verkehrt; denn in Wahrheit muß er sich, wie wir sogleich sehen werden, stets als Ellipse darstellen.

Das Prinzip des geometrisch richtigen Zeichnens besteht nun darin, daß die abzubildende Figur durch geradlinige Strahlen von einem Punkt aus auf die Zeichenebene projiziert wird. Am einfachsten werden die Verhältnisse, wenn man sich jenen Zentralpunkt ins Unendliche hinausgerückt denkt, d. h. die *Abbildung durch ein paralleles Strahlenbündel* vollzieht; dies ist der Fall, der uns hier interessiert. Übrigens betreten wir mit diesen Erörterungen das *Gebiet der darstellenden Geometrie*. Ich will sie hier keineswegs systematisch vortragen, sondern will Ihnen nur zeigen, wie sie sich in das Gebäude der allgemeinen Geometrie einordnet. Daher werde ich auch auf die Einzelheiten der Beweise nicht immer eingehen können.

Beginnen wir damit, die Abbildung einer ebenen Figur, d. h. die *Projektion einer Ebene E auf eine andere E' vermöge eines Parallelstrahlenbündels* zu untersuchen. Wir legen dazu den Koordinatenanfang  $O$  in die Schnittgerade von  $E$  und  $E'$  (vgl. Abb. 56) und die  $x$ -Achse in ihre Richtung; die  $y$ -Achse legen wir in  $E$  beliebig, z. B. senkrecht zur  $x$ -Achse, durch  $O$  und bestimmen die  $y'$ -Achse als ihre durch die Strahlen des projizierenden

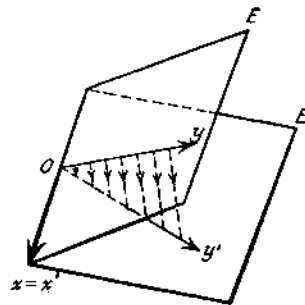


Abb. 56.

Parallelstrahlenbündels auf  $E'$  entstehende Projektion, so daß wir in  $E'$  gegebenenfalls ein schiefwinkliges Parallelkoordinatensystem haben. Dann stehen die Koordinaten zweier korrespondierender Punkte von  $E$  und  $E'$  in der Beziehung:

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= \mu \cdot y,\end{aligned}$$

wo  $\mu$  eine von der gegebenen Lage der Ebenen und des Parallelstrahlenbündels abhängige Konstante ist; es liegt also tatsächlich eine affine Transformation vor. Der Beweis dieser Gleichungen ist so einfach, daß ich mich bei ihm kaum aufzuhalten brauche. Übrigens sind diese Gleichungen gegenüber der allgemeinen Form (6) der Affinitätsgleichungen insofern spezialisiert, als  $\lambda = 1$ , also  $x'$  gleich  $x$  ist. Das liegt natürlich daran, daß die  $x$ -Achse Schnittgerade von Original- und Bildebene ist, also jeder Punkt auf ihr mit seinem Bilde zusammenfällt. Alle wesentlichen Eigenschaften unserer Abbildung erhalten wir sofort, wenn wir die früher für den Raum abgeleiteten Sätze für die Ebene spezialisieren; so entspricht z. B. jedem Kreis in  $E$  eine Ellipse in  $E'$  usw.

Es liegt nun nahe, die umgekehrte Frage aufzuwerfen: Kann man irgend zwei in gegebener Weise affin aufeinander bezogene Ebenen  $E, E'$  in solche Lage zueinander bringen, daß die eine durch Parallelprojektion aus der anderen entsteht? Um das zu entscheiden, gehen wir von einem beliebigen Kreis in  $E$  und der entsprechenden Ellipse in  $E'$  aus (wir könnten statt dessen auch zwei beliebige entsprechende Ellipsen verwenden). Es entspricht dann dem Kreismittelpunkt  $M$  der Ellipsenmittelpunkt  $M'$  (vgl. Abb. 57). Wir legen nun den Kreis von  $E$  in die Ebene  $E'$  mit dem Zentrum nach  $M'$ , so wird er die Ellipse entweder in 4 Punkten schneiden oder

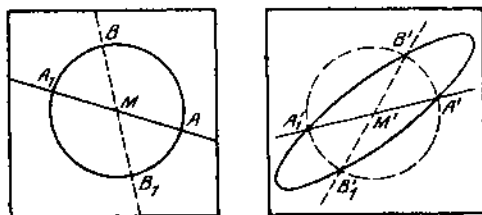


Abb. 57.

keinen Punkt mit ihr gemein haben. Den Übergangsfall der Berührung wollen wir hier der Einfachheit halber nicht ausdrücklich berücksichtigen.

Im ersten Falle, den die Abbildung zeigt, betrachten wir die beiden

Ellipsendurchmesser  $A'A'_1$  und  $B'B'_1$ , die durch die 4 in  $E'$  liegenden Schnittpunkte hindurchgehen; ihnen entsprechen vermöge unserer Affinität zwei Kreisdurchmesser  $AA_1$  und  $BB_1$  in  $E$ , denen sie — so haben wir sie ja konstruiert — obendrein noch gleich sind. Daher sind nach einer allgemeinen Eigenschaft der Affinitäten (Nr. 4, S. 78) überhaupt entsprechende Strecken auf den Geraden  $AA_1$  und  $A'A'_1$  bzw.  $BB_1$  und  $B'B'_1$  gleich. Legen wir nun die Ebene  $E$  so auf  $E'$ , daß  $M$  nach  $M'$  fällt und eines dieser Geradenpaare, etwa  $AA_1$  und  $A'A'_1$ , zusammenfallen, und

drehen  $E$  um diese Gerade als Achse in den Raum hinaus, so haben wir eine affine Transformation der beiden Ebenen, bei der jeder Punkt der Schnittgeraden sich selbst entspricht. Man kann dann leicht zeigen — ich führe wiederum den Beweis nicht im einzelnen aus —, daß, gleichgültig welchen Winkel die Ebenen bilden, die Verbindungslinien entsprechender Punkte sämtlich untereinander parallel sind, d. h. daß sich die Affinität der Ebenen in der Tat durch Parallelprojektion erzeugen läßt.

Schneidet aber unser Kreis die Ellipse nicht, d. h. ist sein Radius kleiner als die kleine oder größer als die große Halbachse der Ellipse, so werden — in der Sprache der Analysis — jene beiden gemeinsamen Durchmesser imaginär, und für den Zeichner sind sie überhaupt nicht vorhanden; die ganze Konstruktion ist unmöglich. Dann bleibt, wenn man doch zu einer Herstellung durch Parallelprojektion gelangen will, nichts übrig, als eine Ähnlichkeitstransformation zu Hilfe zu nehmen und den Kreis so weit zu vergrößern oder zu verkleinern, bis der vorige Fall eintritt; solche Ähnlichkeitstransformationen verwendet man ja als „Umzeichnen des Bildes in einen anderen Maßstab“ beim Entwerfen von Bildern ohnehin stets. Wir gelangen so schließlich zu dem *Haupttheorem*, daß sich jede affine Verwandtschaft zweier Ebenen auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Kombination einer Ähnlichkeitstransformation und einer Parallelprojektion herstellen läßt.

Viel interessanter und wichtiger als diese Abbildung einer Ebene auf eine andere ist das *Problem der Abbildung des ganzen Raumes auf eine Ebene durch Parallelprojektion*, zu dem wir jetzt übergehen; wir wollen dabei, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, von vornherein eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Bildes durch Ähnlichkeitstransformation stets mit zulassen. So entsteht das in der darstellenden Geometrie als *Axonometrie* bezeichnete Verfahren, das in der Praxis eine außerordentlich bedeutende Rolle spielt. Jede Photographie ist nahezu eine axonometrische Abbildung, wenn der abgebildete Gegenstand nur hinreichend weit vom Apparat entfernt war (genau genommen ist sie eine Zentralprojektion); vor allem aber wird die genaue Axonometrie in den meisten Fällen benutzt, wenn man räumliche geometrische Figuren, physikalische Apparate, Architekturteile u. dgl. abbilden will. Sehr interessante Beispiele von allen möglichen solchen axonometrischen Darstellungen, die auch für den Unterricht unmittelbar brauchbar sind, finden Sie in dem *Leitfaden der Projektionslehre von C. H. Müller und O. Pressler*<sup>1)</sup>; da sehen Sie z. B., wie man eine Tangentenbussole, einen Trommelanker, Kristalle der verschiedensten Art oder, um noch Beispiele aus einem ganz anderen Gebiet, der Biologie, anzuführen, Zellgewebe, einen Bienenstock und vieles andere axonometrisch richtig zeichnet.

<sup>1)</sup> Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Leipzig 1903.

Lassen Sie mich nun sogleich den Satz angeben, der diese Axonometrie mit unsern vorhergehenden Erörterungen über Affinitäten in Zusammenhang bringt: *Die Abbildung des Raumes mittels Parallelprojektion und Ähnlichkeitstransformation (Axonometrie) auf eine Ebene wird analytisch durch eine affine Transformation mit verschwindender Determinante dargestellt:*

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases} \quad \text{wobei: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist also gerade der Ausnahmefall, dessen Behandlung wir uns noch vorbehalten hatten. Sie sehen, wie wichtig diese „ausgearteten“ Transformationen sind, die man leider vielfach ungebührlich vernachlässigt. Es gilt weiter auch die Umkehrung, daß *jede solche Substitution mit  $\Delta = 0$  eine axonometrische Abbildung ergibt*. Dabei sollen allerdings nicht etwa gar alle Koeffizienten der Substitution oder auch nur alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung aus ihnen verschwinden; denn dann würden sich noch weitere Ausartungen ergeben, die ich hier übergehen darf, da sie leicht nach dem folgenden Muster untersucht werden können.

Überzeugen wir uns, um den Beweis unserer Behauptung zu führen, zunächst, daß *tatsächlich alle durch (1) gelieferten Punkte  $x', y', z'$  (für beliebige  $x, y, z$ ) in einer Ebene liegen*, d. h. daß es drei Zahlen  $k_1, k_2, k_3$  gibt, so daß identisch in  $x, y, z$ :

$$(2) \quad k_1x' + k_2y' + k_3z' = 0 \quad \text{ist.}$$

Diese Identität ist nämlich vermöge (1) äquivalent mit den 3 homogenen linearen Gleichungen:

$$(2') \quad \begin{cases} k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0 \\ k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3 = 0 \\ k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3 = 0, \end{cases}$$

und diese bestimmen bekanntlich gerade dann die Verhältnisse  $k_1 : k_2 : k_3$  eindeutig, wenn die Koeffizientendeterminante  $\Delta$  verschwindet, ohne daß alle 9 Unterdeterminanten Null sind. Daher liegen tatsächlich alle Bildpunkte  $x', y', z'$  in der durch die Gleichungen (2') bestimmten Ebene (2).

Wir wollen nun im Raume  $R'$  ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem derart einführen, daß die Ebene (2) zur  $x'-y'$ -Ebene ( $z' = 0$ ) wird. Dann muß jedem Punkte von  $R$  ein Punkt aus  $z' = 0$  entsprechen, und die Gleichungen unserer Affinität haben daher in den neuen Koordinaten notwendig die Form:

$$(3) \quad \begin{cases} x' = A_1x + B_1y + C_1z \\ y' = A_2x + B_2y + C_2z \\ z' = 0. \end{cases}$$



Hierbei sind die 6 Konstanten  $A_1, \dots, C_2$  durchaus willkürlich, da wegen der speziellen Form der letzten Zeile die Substitutionsdeterminante ohnehin verschwindet; nur dürfen deren 3 Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden (d. h. es darf nicht  $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$  sein), da sonst die anfangs ausgeschlossene weitere Ausartung vorliegt.

Ich will nun den Beweis, daß die so analytisch definierten Abbildungen des Raumes  $R$  auf die  $x'$ - $y'$ -Ebene  $E'$  geometrisch tatsächlich mit den oben definierten axonometrischen Projektionen identisch sind, in einzelnen Schritten darstellen, indem ich zugleich die Haupteigenschaften dieser Abbildung (3) ähnlich wie früher (S. 75 ff.) die der Affinitäten mit nichtverschwindender Determinante entwickle:

1. Zunächst ist klar, daß jedem Punkte  $x, y, z$  des  $R$  eindeutig ein Punkt  $x', y'$  in  $E'$  entspricht. Geben wir umgekehrt einen Punkt  $x', y'$  in  $E'$ , so besagen die Gleichungen (3), daß der entsprechende Punkt  $x, y, z$  in  $R$  auf 2 bestimmten Ebenen liegt, deren Koeffizienten unserer Annahme nach nicht proportional sind und die daher eine im Endlichen gelegene Schnittgerade haben; die sämtlichen Punkte dieser Geraden müssen in unserer Transformation dem gegebenen Punkte  $x', y'$  entsprechen. Variieren wir nun  $x', y'$ , so verschieben sich jene beiden Ebenen je parallel mit sich selbst, da die Koeffizienten  $A_1, B_1, C_1$  bzw.  $A_2, B_2, C_2$  ungeändert bleiben. Also bleibt auch ihre Schnittgerade sich selbst parallel, und wir haben das Resultat, daß jedem Punkte von  $E'$  die sämtlichen Punkte je einer von zweifach unendlich vielen Parallelgeraden in  $R$  entsprechen. Hierin ist der Zusammenhang unserer Abbildung mit der Parallelprojektion des Raumes bereits angedeutet.

2. Genau wie unter Nr. 3 (S. 77) bei der allgemeinen Affinität finden wir jetzt für die Komponenten der einem freien Vektor  $X, Y, Z$  von  $R$  entsprechenden Strecke  $X', Y'$  in  $E'$  die Formeln:

$$(4) \quad \begin{cases} X' = A_1 X + B_1 Y + C_1 Z \\ Y' = A_2 X + B_2 Y + C_2 Z \\ Z' = 0. \end{cases}$$

Das besagt aber wiederum, daß jedem freien Vektor in  $R$  ein freier Vektor  $X', Y'$  der Bildebene  $E'$  entspricht, oder genauer: Verschiebt man eine Strecke im Raume  $R$  irgendwie parallel mit sich unter Aufrechterhaltung ihrer Größe und ihres Sinnes, so bewegt sich die entsprechende Strecke in der Ebene  $E'$  gleichfalls parallel mit sich und behält ihre Länge und ihren Sinn bei.

3. Wir betrachten speziell den Einheitsvektor  $X = 1, Y = Z = 0$  auf der  $x$ -Achse, der vom Punkte  $0, 0, 0$  nach dem Punkte  $1, 0, 0$  geht. Ihm entspricht in  $E'$  nach (4) der Vektor:

$$X' = A_1, \quad Y' = A_2,$$

der vom Anfangspunkte  $O'$  nach dem Punkt mit den Koordinaten  $A_1, A_2$  geht. Genau ebenso entsprechen den Einheitsvektoren der  $y$ - und  $z$ -Achse

die beiden Vektoren von  $O'$  nach den Punkten  $B_1, B_2$  bzw.  $C_1, C_2$ . Diese drei Vektoren in  $E'$  — nennen wir sie kurz  $(A), (B), (C)$  (vgl. Abb. 58) — können nun ganz beliebig angenommen werden, denn sie legen durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gerade die willkürlichen 6 Parameter der Affinität (3) fest, so daß durch sie die Abbildung voll-

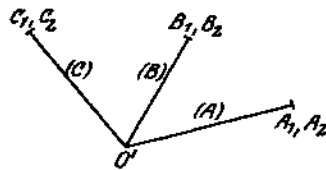


Abb. 58.

kommen bestimmt ist; nur dürfen sie nicht etwa alle drei in die gleiche Gerade fallen, und wir wollen uns der Einfachheit halber vorstellen, daß auch keine zwei von ihnen in einer Geraden liegen. Die 3 Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen von  $R$  werden also —

das ist das Resultat — auf 3 beliebige Vektoren durch den Anfangspunkt  $O'$  in  $E'$  abgebildet, die ihrerseits die Affinität vollkommen bestimmen.

4. Um nun auch geometrisch die Abbildung aus  $(A), (B), (C)$  herzustellen, gehen wir zunächst von irgendeinem Punkte  $p(x, y, z=0)$  der  $x$ - $y$ -Ebene aus; wir erhalten den Vektor von  $O$  nach  $p$ , indem wir den Einheitsvektor der  $x$ -Achse mit der skalaren Zahl  $x$  und den der  $y$ -Achse mit der Zahl  $y$  multiplizieren und die Produktvektoren addieren (vgl. Abb. 59). Diese Konstruktion können wir aber sofort auf  $E'$  übertragen, da die Beziehung zwischen der  $x$ - $y$ -Ebene und  $E'$  offenbar eine gewöhnliche zweidimensionale Affinität (mit nichtverschwindender Determinante) ist. Wir erhalten also den Bildpunkt  $p'$  von  $p$ , indem wir den Vektor  $(A)$  mit  $x$ , den Vektor  $(B)$  mit  $y$  skalar multiplizieren und die Produkte nach dem Parallelogrammgesetz addieren (Abb. 60). So können wir in  $E'$  das Abbild jedes Punktes der  $x$ - $y$ -Ebene und so jeder Figur in ihr punktweise konstruieren.

5. Übertragen wir diese Überlegungen auf einen beliebigen Punkt des Raumes  $R$ , so ergibt sich leicht (vgl. Abb. 61): das Bild  $p'$  eines Punktes  $p$

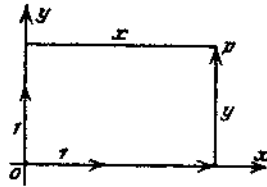


Abb. 59.

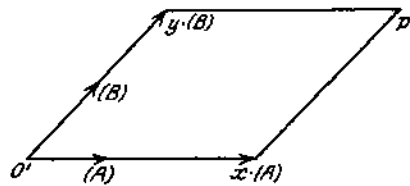


Abb. 60.

mit den Koordinaten  $x, y, z$  entsteht durch nach dem Parallelogrammgesetz vorgenommener Vektoraddition der bezüglich mit  $x, y, z$  multiplizierten Vektoren  $(A), (B), (C)$ . Wegen der Kommutativität der Addition kann man diese Konstruktion auf  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  verschiedene Arten ausführen, und man erhält  $p'$  so als Endpunkt von 6 verschiedenen, aus parallelen und gleichen Stücken bestehenden Linienzügen. Die von ihnen gebildete Figur (vgl. Abb. 61) ist offenbar das Abbild desjenigen rechtwinkligen Parallelellachs des Raumes  $R$ , das von den 3 Koordi-

natenebenen und den durch  $p$  zu ihnen parallel gelegten Ebenen begrenzt wird. Wir sind von Jugend auf gewohnt, derartige ebene Figuren sogleich als Bilder räumlicher Figuren aufzufassen, besonders wenn dem Anschein noch durch Verstärkung der vorn gelegenen Kanten nachgeholfen ist. Diese Gewohnheit ist so stark, daß uns diese Abbildung des Parallellachs fast trivial erscheint, während sie tatsächlich doch ein sehr bemerkenswertes Theorem darstellt.

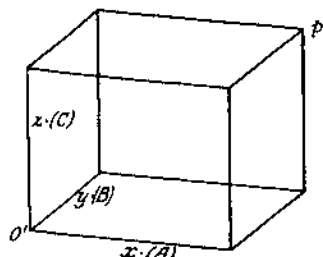


Abb. 61.

6. Mit Hilfe dieser letzten Konstruktion können wir nun in  $E'$  das Bild jeder Raumfigur, d. h. aller ihrer Punkte herstellen. Ich will nur ein Beispiel betrachten: Haben wir eine Kugel mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt  $O$ , so werden wir vor allen Dingen die Kreise betrachten, in denen sie die Koordinatenebenen schneidet. Der Schnittkreis in der  $x$ - $y$ -Ebene beispielsweise hat die Einheitsvektoren der  $x$ - und  $y$ -Achse zu konjugierten, d. h. aufeinander senkrechten Halbmessern; da eine affine Beziehung statt hat, entspricht ihm also eine Ellipse, (vgl. Abb. 62) die  $O'$  zum Mittelpunkt und die Vektoren  $(A)$  und  $(B)$  zu konjugierten Halbmessern hat, die also dem aus den Vektoren  $2(A)$  und  $2(B)$  gebildeten Parallelogramm eingeschrieben ist. Ebenso haben die den anderen beiden Schnittkreisen entsprechenden Ellipsen  $O'$  zum Mittelpunkt und  $(B)$  und  $(C)$  bzw.  $(A)$  und  $(C)$  zu konjugierten Halbmessern.

7. Nachdem wir uns so von der Natur dieser Affinitäten (3) mit verschwindender Determinante ein vollständiges Bild gemacht haben, haben wir noch den letzten entscheidenden Schritt in unserer Betrachtung zu tun, nämlich zu zeigen, daß jene Affinitäten tatsächlich in der früher behaupteten Weise durch axonometrische Projektion entstehen. Dabei kommt hauptsächlich der sog. *Fundamentalsatz der Axonometrie von Pohlke* in Betracht, den K. Pohlke, Professor der darstellenden Geometrie an der Bauakademie in Berlin, 1853 entdeckt und 1860 in seinem *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*<sup>1)</sup> veröffentlicht hat. In einer Arbeit vom Jahre 1863<sup>2)</sup> hat H. A. Schwarz zum ersten Male einen elementaren Beweis dieses Satzes veröffentlicht und gleichzeitig dessen interessante Entdeckungsgeschichte ausführlich geschildert, die Sie dort nachlesen mögen.

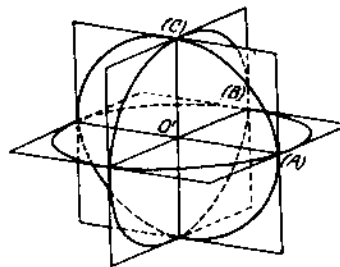


Abb. 62.

<sup>1)</sup> 2 Abteilungen, 4. Aufl. Berlin 1876. — Der Satz findet sich in Abteil. 1, S. 109.

<sup>2)</sup> Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 63, S. 309 = Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. II, S. 1. Berlin 1890.

Pohlke selbst definiert die Axonometrie nicht analytisch, sondern geometrisch als Abbildung des Raumes durch Parallelstrahlen (unter Umständen noch verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation); sein Theorem sagt dann aus, daß durch eine solche Abbildung die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen des Raumes in 3 beliebige, durch  $O'$  gehende Vektoren der Ebene  $E'$  übergehen können. Daß unsere analytisch definierte Abbildung tatsächlich zu 3 beliebigen solchen Vektoren führt, konnten wir in Nr. 3 leicht einsehen; für uns ist daher die tiefliegende Aussage des Pohlkeschen Satzes, daß man unsere analytisch definierte Abbildung (3) (S. 86) geometrisch durch Parallelprojektion und Maßstabänderung erhält, wobei die in Nr. 1 erwähnten Parallelgeraden zu Projektionsstrahlen werden.

8. Ich möchte hier noch den ungefähren Gang für einen direkten analytischen Beweis des so formulierten Satzes andeuten. Richten wir unser Augenmerk auf die beiden Scharen von Parallelebenen von  $R$ :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= \xi \\ A_2x + B_2y + C_2z &= \eta \end{aligned}$$

(wo  $\xi, \eta$  variable Parameter), so bestimmt jedes Wertepaar  $\xi, \eta$  eine der genannten Parallelgeraden. Gelänge es nun, in den Raum  $R$  eine Bildebene  $E'$  und in sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x', y'$  mit einem passenden Maßstab so zu legen, daß jeder Strahl  $\xi, \eta$  die Bildebene  $E'$  im Punkte  $x' = \xi, y' = \eta$  durchstößt, dann wäre die Abbildung (3) tatsächlich in der gewünschten Weise geometrisch hergestellt.

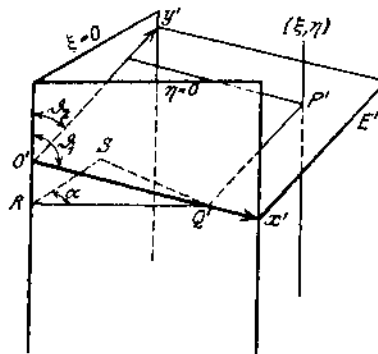


Abb. 63.

Zu diesem Ende müssen zunächst die Ebenen  $\xi = 0, \eta = 0$  jene Ebene  $E'$  in den Koordinatenachsen  $O'y'$ , bzw.  $O'x'$ , d. h. in aufeinander senkrechten Geraden schneiden; sind  $\vartheta_1, \vartheta_2$  die (die Lage von  $E'$  bestimmenden) Winkel dieser Achsen gegen die Gerade  $\xi = \eta = 0$  (vgl. Abb. 63) und bezeichnen wir mit  $\alpha$  den (bekannten) Winkel der Ebenen  $\xi = 0, \eta = 0$ , so ist nach dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, wenn dieser auf das von den Ebenen  $\xi = 0, \eta = 0$  und  $E'$  gebildete Drei-

kant angewandt wird, der Cosinus des Winkels der Geraden  $O'x', O'y'$  gleich  $\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \alpha$ , und daher ist dieser Winkel ein Rechter, wenn:

$$(a) \quad \text{ctg } \vartheta_1 \cdot \text{ctg } \vartheta_2 = -\cos \alpha.$$

Nun schneidet jede Ebene  $A_1x + B_1y + C_1z = \xi$  in  $E'$  eine Gerade  $x' = \text{konst ein}$ ; ist  $Q'$  ihr Schnitt mit der  $x'$ -Achse, so ist der zugehörige

$x'$ -Wert bis auf den noch zu bestimmenden Maßstabfaktor  $\lambda$  des Koordinatensystems in  $E'$  gleich  $O'Q'$ . Fällern wir die Lote  $Q'S$  und  $Q'R$  auf die Ebene  $\xi = 0$  bzw. die Gerade  $\xi = \eta = 0$ , so ist:

$$O'Q' = \frac{Q'R}{\sin \vartheta_1}, \quad Q'R = \frac{Q'S}{\sin \alpha},$$

und da  $Q'S$  sich als senkrechter Abstand der beiden Ebenen  $A_1x + B_1y + C_1z = 0$  und  $A_1x + B_1y + C_1z = \xi$  nach einer bekannten Formel der analytischen Raumgeometrie leicht ausdrückt, so folgt schließlich:

$$x' = \lambda \cdot O'Q' = \lambda \frac{\xi}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sin \vartheta_1 \cdot \sin \alpha}.$$

Ganz analog ergibt sich als  $y'$ -Koordinate der von der Ebene  $A_2x + B_2y + C_2z = \eta$  in  $E'$  eingeschnittenen Punkte:

$$y' = \lambda \cdot \frac{\eta}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \cdot \sin \vartheta_2 \cdot \sin \alpha}.$$

Damit nun, wie wir es ja wünschen, jeder durch die Parameterwerte  $\xi, \eta$  bestimmte Parallelstrahl die Ebene  $E'$  in dem Punkte  $x' = \xi, y' = \eta$  durchstößt, muß:

$$(b) \quad \lambda = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sin \vartheta_1 \cdot \sin \alpha = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \cdot \sin \vartheta_2 \cdot \sin \alpha$$

sein, woraus sich für  $\vartheta_1, \vartheta_2$  die zweite Gleichung:

$$(c) \quad \sin \vartheta_1 \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = \sin \vartheta_2 \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$$

ergibt. Eine sehr einfache Rechnung zeigt, daß die Gleichungen (a), (c) nur ein einziges reelles, bis aufs Vorzeichen bestimmtes Lösungspaar  $\text{ctg } \vartheta_1, \text{ctg } \vartheta_2$  besitzen, d. h. *es gibt im wesentlichen nur eine (und natürlich in bezug auf die gemeinsame Normalebene von  $\xi = 0, \eta = 0$  symmetrische) Lage der Ebene  $E'$ , in der die Affinität  $x' = \xi, y' = \eta$  axonometrisch realisiert ist*, wofern man den Maßstab des rechtwinkligen Koordinatensystems in  $E'$  gemäß (b) wählt. Man kann diesen ganzen Gedankengang auch mehr geometrisch fassen, wenn man von der Bedingung ausgeht, daß die Einheitspunkte der  $x'$ - und  $y'$ -Achse auf die Geraden  $\xi = 1, \eta = 0$  und  $\xi = 0, \eta = 1$  fallen. Dann liegt die Aufgabe vor, eine Ebene  $E'$  zu finden, die ein gegebenes dreiseitiges Prisma in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck schneidet.

Nach dieser ausführlichen Darlegung brauche ich auf die früher gleichfalls schon ausgesprochene *Umkehrung*, daß jede axonometrische Projektion eine affine Transformation mit verschwindender Determinante darstellt, wohl kaum noch näher einzugehen. Man wird diese Umkehrung bestätigen, indem man ähnlich wie früher (S. 83) in der Projektionsebene  $E'$  zunächst das durch die Parallelprojektion aus der  $x$ - und  $y$ -Achse von  $R$  entstehende schiefwinklige Koordinatensystem benutzt und dann nachträglich durch eine lineare Substitution zu dem in  $E'$  von vornherein gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem übergeht.

Indem ich damit dieses Kapitel von den Affinitäten beschließe, weise ich Sie noch darauf hin, daß man das Entstehen der axonometrischen Abbildung gewissermaßen experimentell sich dadurch anschaulich machen kann, daß man durch eine Projektionslampe (die wir uns unendlich fern denken müssen) *Schattenbilder einiger einfacher Modelle*, (Quadrat, Kreis, Ellipse, Würfel) auf den Projektionsschirm wirft; Sie werden da genau unsere Resultate und Figuren bestätigt finden und können insbesondere auch den Pohlkeschen Satz leicht experimentell nachprüfen, indem Sie das Schattenbild dreier aufeinander senkrechter Stangen durch Bewegung des Modells sowohl wie auch der Projektionsebene allen möglichen Änderungen unterwerfen.

Wir gehen jetzt zu einem neuen Kapitel über, das von allgemeineren, die Affinitäten als Spezialfälle umfassenden Transformationen handelt, nämlich von den *projektiven Transformationen*.

## II. Projektive Transformationen.

Auch hier möchte ich von vornherein den dreidimensionalen Raum vornehmen und stelle wieder

1. die *analytische Definition der projektiven Transformation* an die Spitze. Wir setzen jetzt  $x', y', z'$  nicht mehr als ganze, sondern als *gebrochene lineare Funktionen* von  $x, y, z$  an, die nur sämtlich — das ist ganz wesentlich — *einen und denselben Nenner* haben müssen:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \end{cases}$$

Jedem Punkte  $x, y, z$  entspricht danach ein bestimmter endlicher Punkt  $x', y', z'$ , wofern nur der gemeinsame Nenner von Null verschieden ist. Nähert sich aber  $x, y, z$  der Ebene  $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$ , so entfernt sich — das ist gegenüber der Affinität das Neue — der entsprechende Punkt  $x', y', z'$  ins Unendliche, er „entflieht“ gewissermaßen; man nennt jene Ebene daher *Fluchtebene*, ihre Punkte *Fluchpunkte* und sagt, daß sie in der projektiven Transformation dem Unendlichweiten des Raumes, der sog. unendlichfernen Ebene bzw. den unendlichfernen Punkten entsprechen.

2. Bei der Behandlung der hier entstehenden Probleme ist es bekanntlich sehr zweckmäßig, *homogene Koordinaten* einzuführen, d. h. an Stelle der drei Punktkoordinaten  $x, y, z$  vier Größen  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  zu setzen, die durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau}$$

definiert werden; diese vier Größen sollen *unabhängig voneinander veränderlich* sein, nur sollen sie *nicht alle 4 gleichzeitig verschwinden*, und *keine von ihnen soll jemals unendlich* werden. Jedem Punkte  $x, y, z$  gehören dann noch unendlich viele Wertsysteme  $\varrho\xi, \varrho\eta, \varrho\zeta, \varrho\tau$  zu, wo  $\varrho$  ein willkürlicher Faktor ( $\neq 0$ ) ist; umgekehrt legt jedes Wertsystem  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ , wo  $\tau \neq 0$ , einen bestimmten endlichen Punkt  $x, y, z$  fest (und alle Wertsysteme  $\varrho \cdot \xi, \varrho \cdot \eta, \varrho \cdot \zeta, \varrho \cdot \tau$  denselben Punkt). Nur wenn  $\tau = 0$  ist, wird mindestens einer der Quotienten  $x, y, z$  unendlich, und man setzt demgemäß fest, daß jedes Wertsystem  $\xi, \eta, \zeta, \tau = 0$  einen „unendlichfernen Punkt“ bedeuten soll, und zwar alle Systeme  $\varrho \cdot \xi, \varrho \cdot \eta, \varrho \cdot \zeta, 0$  einen und denselben Punkt; hiermit sind in präziser analytischer Weise die Punkte eingeführt, die man als „unendlichferne“ den gewöhnlichen endlichen Punkten hinzuzufügen pflegt.

Das Operieren mit homogenen Koordinaten hat erfahrungsgemäß jedenfalls für den Anfänger etwas Unbehagliches; ich glaube, daß das gewissermaßen Unbestimmte, Fließende dieser Größen, das der willkürliche Faktor  $\varrho$  mit sich bringt, daran schuld ist, und es mag vielleicht zur Beseitigung dieses Unbehagens beitragen, wenn das einmal deutlich ausgesprochen wird.

Zu demselben Zwecke wird es gut sein, hier einige Erörterungen über gewisse geometrische Vorstellungen einzuschalten, die man mit den homogenen Koordinaten verbinden kann. Ich spreche da zunächst nur von einer Ebene  $E$ . In diesem Falle setzen wir für die beiden rechtwinkligen Koordinaten:

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}.$$

Wir wollen nun  $\xi, \eta, \tau$  als *rechtwinklige Koordinaten eines Raumes* deuten und in diesem Raume die Parallelebene  $\tau = 1$  zur  $\xi$ - $\eta$ -Ebene als die Ebene  $E$  auffassen (vgl. Abb. 64), indem wir in ihr  $x = \xi, y = \eta$  setzen. Verbinden wir nun den Punkt  $x, y$  von  $E$  mit  $O$  durch einen geradlinigen Strahl, so ist bekanntlich auf ihm  $\frac{\xi}{\tau}$  und  $\frac{\eta}{\tau}$  konstant, und zwar muß:

$$\frac{\xi}{\tau} = x, \quad \frac{\eta}{\tau} = y$$

sein, da ja für  $\tau = 1$  gerade  $\xi = x$  und  $\eta = y$  sein sollte. Die Einführung homogener Koordinaten bedeutet hiernach einfach die Abbildung der Ebene  $E$  auf das sie aus dem Nullpunkt  $O$  des dreidimensionalen Hilfsraumes projizierende Strahlenbündel: die homogenen Koordinaten eines Punktes sind die Raumkoordinaten der Punkte des ihn projizierenden Strahles dieses Bündels; da jedem Punkt von  $E$  die unendlich vielen Punkte des Strahles zugehören, ist die Bedeutung der Unbestimmtheit

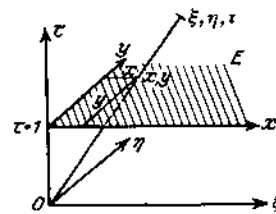


Abb. 64.

der homogenen Koordinaten völlig klargelegt. Daß das Wertesystem  $\xi = \eta = \tau = 0$  ausgeschlossen ist, hat seinen geometrischen Grund darin, daß durch den Punkt  $O$  allein noch kein Strahl und daher kein Punkt in  $E$  bestimmt ist. Auch daß wir keine unendlichen Werte  $\xi, \eta, \tau$  brauchen, ist selbstverständlich, da wir alle Strahlen bereits durch Verbindung von  $O$  mit im Endlichen gelegenen Punkten erhalten. Und endlich wird anschaulich, wie wir unendlich große Werte der Koordinaten vermeiden, indem wir das Unendlichferne der Ebene durch die in  $\tau = 0$  gelegenen Parallelstrahlen durch  $O$  ersetzen.

Auch die bekannte *Sprechweise von der unendlich fernen Geraden* erhält hier einen anschaulichen geometrischen Inhalt. Analytisch ist sie nur der Ausdruck der abstrakten Analogie, daß alle „unendlich fernen Punkte“ der linearen Gleichung  $\tau = 0$  genügen, genau wie jede endliche Gerade eine lineare Gleichung besitzt. Jetzt können wir aber ganz geometrisch sagen: jeder Geraden von  $E$  gehört im Bündel  $O$  ein ebenes Strahlenbüschel zu, und umgekehrt bestimmt jedes ebene Strahlenbüschel im Bündel  $O$  eine Gerade in  $E$  — abgesehen von dem ebenen Büschel  $\tau = 0$ ; darum erscheint es zweckmäßig, auch den Inbegriff der ihm in der Parallelebene  $E$  zugehörigen Punkte als eine Gerade zu bezeichnen, und damit hat man eben „die unendlich ferne Gerade“.

Ganz analoge Vorstellungen können wir uns bilden, wenn wir in einem *dreidimensionalen Raume* homogene Koordinaten einführen. Wir denken ihn uns als Ausschnitt  $\tau = 1$  eines vierdimensionalen Hilfsraumes  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  und beziehen ihn auf das Strahlenbündel, das ihn aus dem Nullpunkt des Hilfsraumes projiziert. Wir können dann alle weiteren Betrachtungen in fast wörtlicher Analogie zum vorigen ohne jede Schwierigkeit durchführen und insbesondere auch die Deutung der unendlich fernen Elemente übertragen. Natürlich ist dabei die Benutzung des vierdimensionalen Raumes lediglich ein Mittel der bequemen Ausdrucksweise, dem keineswegs irgend eine mystische Meinung beizumessen ist.

3. Führen wir nun in den Gleichungen (1) der projektiven Transformation für beide Räume  $R, R'$  *homogene Koordinaten* ein, so können wir sie, da allemal derselbe Nenner auftritt, unter Einführung eines willkürlichen Proportionalitätsfaktors  $\varrho'$  in die folgenden 4 Gleichungen zerpalten:

$$(2) \quad \begin{cases} \varrho' \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \varrho' \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \varrho' \zeta' = a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\ \varrho' \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau. \end{cases}$$

Das ist, abgesehen vom willkürlichen Faktor  $\varrho'$ , die allgemeinste homogene lineare Substitution in 4 Variablen und stellt also eine *affine Verwandtschaft der beiden vierdimensionalen Hilfsräume*  $P_4, P'_4$  dar, in denen wir nach dem Verfahren von Nr. 2 die homogenen Koordinaten deuten.



Konkreter läßt sich das wieder vorstellen, wenn wir uns von Haus aus auf eine Ebene beschränken: Die allgemeinste projektive Transformation einer Ebene erhalten wir, indem wir den Raum des sie projizierenden Strahlenbündels bei festgehaltenem Anfangspunkt  $O$  einer sonst willkürlichen affinen Transformation unterwerfen und hinterher die Ebene mit dem transformierten Bündel schneiden. Dabei erhalten wir allemal dieselbe Projektivität, wenn wir, dem Faktor  $g'$  entsprechend, eine beliebige Ähnlichkeitstransformation des Raumes von  $O$  aus hinzufügen; denn diese führt jeden der durch  $O$  gehenden Strahlen, auf deren Schritte mit der Ebene es für die Projektivität allein ankommt, in sich über.

Das Verfahren, das wir hier verwandt haben, indem wir die Hilfsräume  $P, P'$  benutzen, nennt man *Prinzip des Projizierens und Schneidens*; es erweist sich auch sonst vielfach als sehr nützlich, indem es — allgemein zu reden — *kompliziertere Verhältnisse in Räumen von  $n$  Dimensionen durch Hilfsbetrachtungen in Räumen von  $n + 1$  Dimensionen einfacher und verständlicher erscheinen läßt*.

4. Wir haben nun die Transformationsgleichungen (2) umzukehren; die Determinantentheorie lehrt, daß auch  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  lineare homogene Kombinationen von  $\xi', \eta', \zeta', \tau'$  sind, natürlich wieder mit einem willkürlichen Proportionalitätsfaktor  $g$ :

$$(3) \quad \begin{cases} g\xi = a_1\xi' + b_1\eta' + c_1\zeta' + d_1\tau' \\ g\eta = a_2\xi' + b_2\eta' + c_2\zeta' + d_2\tau' \\ g\zeta = a_3\xi' + b_3\eta' + c_3\zeta' + d_3\tau' \\ g\tau = a_4\xi' + b_4\eta' + c_4\zeta' + d_4\tau' \end{cases}$$

vorausgesetzt nur, daß die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

von (2) nicht verschwindet. Die Wertsysteme  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  und  $\xi', \eta', \zeta', \tau'$  entsprechen dann also einander *eindeutig* (bis auf jene gemeinsamen willkürlichen Faktoren).

Ich bemerke sogleich, wie Sie nach unsern Erfahrungen bei der Affinität sofort glauben werden, daß auch hier der Fall  $\Delta = 0$  tatsächlich besonders interessant ist und nicht übergangen werden darf; er stellt eine Abbildung des Raumes auf eine Ebene dar, wie wir sie bei jeder Zentralprojektion, z. B. bei der Photographie, haben. Zunächst wollen wir jedoch den allgemeinen Fall  $\Delta \neq 0$  erledigen.

5. Aus (2) und (3) geht sofort hervor, daß jedesmal, wenn zwischen  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  eine lineare Gleichung besteht, eine solche auch zwischen  $\xi', \eta', \zeta', \tau'$  besteht, und umgekehrt. *Jeder Ebene entspricht also eine Ebene, ins-*

besondere z. B. entspricht der unendlichfernen Ebene von  $R'$  eine bestimmte im allgemeinen endliche Ebene in  $R$ , d. i. die früher bereits genannte *Fluchtebene*. So erweist sich die Sprechweise von der unendlich fernen Ebene als äußerst zweckmäßig, da nur sie den Ausspruch solcher ausnahmslos gültigen Sätze gestattet. Weiter folgt unmittelbar, daß *jeder Geraden notwendig eine Gerade entspricht*. Nach der Möbiusschen Terminologie (S. 76) ist also *jede projektive Transformation eine Kollineation*.

6. Nun ist aber das Schöne, daß dieser Satz umkehrbar ist: *Jede Kollineation des Raumes, d. h. jede eineindeutige Transformation, die jeder Geraden eine Gerade zuordnet und die noch gewissen, fast selbstverständlichen Bedingungen genügt, ist eine Projektivität* (d. h. eine analytisch durch die Gleichungen (1) bzw. (2) definierte Transformation).

Ich führe den von *Möbius* herrührenden Beweis dieses Satzes hier der Bequemlichkeit halber nur für die Ebene aus; für den Raum würde er ganz analog verlaufen. Der *Gedankengang des Beweises* ist der: Wir entnehmen einer beliebigen vorgelegten Kollineation 2 entsprechende Punktquadrupel und werden zunächst unter a) zeigen, daß es stets eine Projektivität gibt, die zwei beliebige solche Quadrupel ineinander überführt. Eine Projektivität ist aber gleichfalls eine Kollineation, und wir werden ferner unter b) beweisen, daß es unter gewissen Bedingungen nur *eine* Kollineation geben kann, in der sich dieselben Punktquadrupel entsprechen. Also muß die Projektivität mit der vorgelegten Kollineation tatsächlich identisch sein, und das enthält die Behauptung. Nun zur *Einzelanführung* der beiden Beweisteile!

a) Wir bemerken, daß die Gleichungen der Projektivität in der Ebene:

$$\varrho' \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 \tau$$

$$\varrho' \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + d_2 \tau$$

$$\varrho' \tau' = a_3 \xi + b_3 \eta + d_3 \tau$$

$9 - 1 = 8$  Konstante enthalten (die Abänderung von  $\varrho'$  ändert die Transformation nicht). Daß zwei vorgegebene Punkte einander in einer Projektivität entsprechen, sind nun 2 lineare Bedingungen für die Konstanten der Projektivität, da es nur auf die *Verhältnisse* der 3 homogenen Koordinaten ankommt. Das Entsprechen zweier Punktquadrupel stellt also  $2 \cdot 4 = 8$  lineare Bedingungen dar, genauer gesagt, 8 lineare homogene Gleichungen für die 9 Größen  $a_1, \dots, d_3$ . Solche Gleichungen haben bekanntlich stets eine Lösung, und *man hat damit die Konstanten einer Projektivität gewonnen, die die gegebenen Quadrupel ineinander überführt*. Daß dies freilich eine *eigentliche* Projektivität von *nichtverschwindender* Determinante und daß sie *eindeutig* bestimmt ist, kann man — wie leicht zu sehen — nur garantieren, wenn jedes der beiden gegebenen Punktquadrupel „in allgemeiner Lage“ sich befindet, d. h. wenn keine 3 Punkte des einzelnen Quadrupels in gerader Linie liegen; nur für diesen Fall brauchen wir hier den Satz.

b) Wir denken uns nun eine beliebige Kollineation der Ebenen  $E, E'$  gegeben. Sind dann 1, 2, 3, 4 irgend vier Punkte in  $E$ , von denen keine drei in gerader Linie liegen, und sind  $1', 2', 3', 4'$  die entsprechenden der gleichen Bedingung genügenden Punkte in  $E'$ , so lautet unsere Behauptung, daß die Kollineation durch das Entsprechen dieser beiden Punktquadrupel völlig eindeutig festgelegt ist. Den Beweis führen wir, indem wir zeigen, daß sich die Kollineation aus diesen beiden entsprechenden Quadrupeln allein unter Benutzung ihrer beiden charakteristischen Eigenschaften (Eineindeutigkeit und gegenseitiges Entsprechen von Geraden) auf eine und nur eine Weise aufbauen läßt. Als Haupt Hilfsmittel verwenden wir die sogenannten *Möbiusschen Netze*, das sind

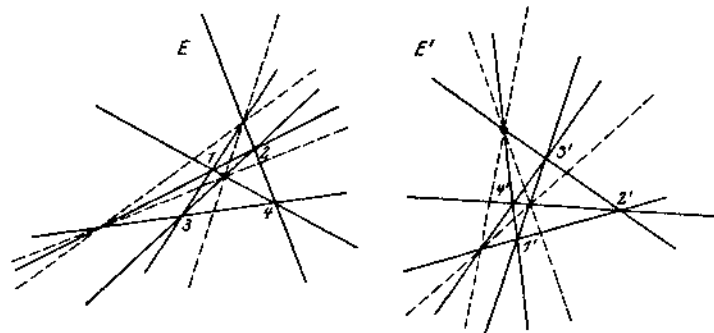


Abb. 65.

Systeme von Geraden, die wir gleichsam wie die Netze einer Spinne über die Ebene ausspannen.

Zunächst ziehen wir in jeder Ebene (vgl. Abb. 65) die 6 Geraden, welche die 4 gegebenen Punkte paarweise verbinden; sie müssen einander in der Kollineation entsprechen, denn z. B. der Geraden 1 2 muß in  $E'$  genau eine Gerade zugeordnet sein, die sowohl den Bildpunkt  $1'$  von 1 als auch den Bildpunkt  $2'$  von 2 enthält, und das kann nur die Gerade  $1'2'$  sein. Ebenso müssen aber nun auch notwendig die neben den 4 Grundpunkten neu entstehenden Schnitte entsprechender Geraden einander zugeordnet sein, z. B. der Punkt (1 4, 2 3) dem Punkte ( $1' 4', 2' 3'$ ); auch das folgt sofort aus der Kollinearität und der Eineindeutigkeit. Verbinden wir diese neuen Punkte miteinander wieder durch Geraden, schneiden sie mit den früheren Geraden, verbinden abermals und setzen dieses Verfahren immer fort, so entsteht schließlich in jeder Ebene ein immer dichter werdendes Netz von Punkten und Geraden, und diese Punkte und Geraden müssen in der gesuchten Kollineation notwendig einander paarweise zugeordnet sein.

Hat man nun einen beliebigen vorgegebenen Punkt etwa in  $E$ , so wird er entweder selbst einmal ein Eckpunkt des Netzes, oder man kann ihn, wie man sich leicht klarmacht, in unbegrenzt enger werdende Ma-

schen des Netzes einschließen, d. h. als Grenzpunkt von Netzecken darstellen. Im ersten Falle ist sofort der entsprechende Punkt in  $E'$  als entsprechende Netzecke eindeutig bestimmt. Um den zweiten Fall zu erledigen, müssen wir aber noch einen *Zusatz zur Definition* der Kollineation machen, der Möbius so selbstverständlich erschien, daß er ihn ausdrücklich auszusprechen nicht für nötig hielt. *Sie soll nämlich eine stetige Abbildung sein, d. h. jedem Grenzpunkt einer Punktmenge in  $E$  soll der Grenzpunkt der entsprechenden Punktmenge in  $E'$  zugeordnet sein.* Daraus folgt dann auch im zweiten Falle nach der vorhergehenden Bemerkung offenbar eindeutig der entsprechende Punkt in  $E'$ . Damit ist dann schließlich unsere *Behauptung 6. für eine stetige Kollineation als richtig erkannt.* Übrigens würde man ebenso beweisen, daß eine stetige Kollineation im Raume durch 5, allgemein im  $n$ -dimensionalen Raume durch  $n + 2$  Paare entsprechender Punkte bestimmt ist.

Rufen wir uns nun die Überlegung vom Beginn dieser Nr. 6 zurück (S. 96), so haben wir als Resultat folgendes präzise Theorem gewonnen: *Die projektiven Transformationen sind die einzigen stetigen eineindeutigen Transformationen, die ausnahmslos Gerade in Gerade überführen.*

Nach dieser Abschweifung setzen wir die in Nr. 5 (S. 95 u. 96) begonnene *Untersuchung des Verhaltens der geometrischen Grundgebilde* bei einer projektiven oder, wie wir jetzt auch sagen können, kollinearen Transformation fort. Wir hatten da gesehen, daß eine unbegrenzte Ebene oder Gerade durch eine Projektivität in ein Gebilde der gleichen Art übergeführt wird, so daß diese Begriffe also den Projektivitäten gegenüber eine unveränderliche bestimmte Bedeutung haben. In dieser Eigenschaft stimmen die allgemeinen Projektivitäten mit den affinen Transformationen überein; sie unterscheiden sich aber von diesen bereits durch ihr

*7. Verhalten gegenüber dem Begriffe des Parallelismus.* Bei projektiven Transformationen bleibt nämlich der Parallelismus zweier Geraden nicht mehr notwendig erhalten, wie das bei affinen noch der Fall war (vgl. S. 77). Vielmehr kann ja die unendlich ferne Ebene des einen Raumes in irgendeine im Endlichen gelegene Ebene des anderen, dessen Fluchtebene, übergehen, und dabei entspricht dem zwei Parallelen gemeinsamen unendlichfernen Punkte im allgemeinen ein im Endlichen gelegener Punkt der Fluchtebene, in dem sich dann die den beiden Parallelen entsprechenden Geraden schneiden; man kann das etwa mit Hilfe der homogenen Koordinaten genau verfolgen. Freilich sehen wir dabei auch, daß der Begriff des Parallelismus nicht sinnlos zerstört wird, sondern daß er in einer ganz bestimmten allgemeinen Anschauung aufgeht: *Die unendlich fernen Punkte des Raumes erfüllen eine Ebene, die projektiv in jede andere (endliche) Ebene des Raumes übergeführt werden kann und insofern mit allen diesen Ebenen durchaus gleichberechtigt erscheint; sie ist nur gewissermaßen willkürlich durch das Prädikat „die unendlich*

ferne“ ausgezeichnet. *Parallel* heißen dann Geraden (oder auch Ebenen), deren Schnitt auf dieser ausgezeichneten Ebene liegt; eine projektive Umformung kann bewirken, daß sie sich auf einer anderen festen Ebene treffen, und dann nennt man sie eben nicht mehr parallel.

Mit dieser Eigenschaft steht nun im Zusammenhange, daß auch die Grassmannschen Grundgebilde den Projektivitäten gegenüber keine invariante Bedeutung mehr haben; der freie Vektor wird keineswegs mehr in einen freien Vektor, der linienflüchtige nicht mehr in einen linienflüchtigen übergeführt, usw. In der Tat, betrachten wir einen Linienteil des Raumes  $R$  mit den 6 Koordinaten:

$$\begin{aligned} X &= x_1 - x_2, & Y &= y_1 - y_2, & Z &= z_1 - z_2, \\ L &= y_1 z_2 - y_2 z_1, & M &= x_2 z_1 - z_2 x_1, & N &= x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{aligned}$$

und bilden die analogen Größen  $X', \dots, N'$  aus den Koordinaten der vermöge der projektiven Transformationen (4) (S. 92) den Punkten  $x_1, y_1; x_2, y_2$  entsprechenden Punkte  $x'_1, y'_1; x'_2, y'_2$ :

$$x'_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d}{a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4} \text{ usw.}, \quad x'_2 = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1}{a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4} \text{ usw.}$$

Durch diese Formeln werden  $X', \dots, N'$  zu Brüchen, deren Zähler sich zwar als lineare Kombinationen der 6 Größen  $X, \dots, N$  allein mit konstanten Koeffizienten darstellen, während der allen gemeinsame Nenner:

$$(a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4) (a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4)$$

die Punktkoordinaten selbst enthält und sich nicht durch  $X, \dots, N$  allein ausdrücken läßt. Die Koordinaten des transformierten Linienteils hängen also nicht nur von denen des ursprünglichen ab, sondern auch von der speziellen Lage seines Anfangs- und Endpunktes, und wenn wir die Strecke (1, 2) längs ihrer Geraden verschieben, so daß sich  $X, \dots, N$  nicht ändern, so werden sich im allgemeinen  $X', \dots, N'$  doch ändern, d. h. die Strecke (1', 2') ist kein Linienteil im Grassmannschen Sinne.

Daß demgegenüber die unbegrenzte Gerade bei projektiven Transformationen als solche erhalten bleibt, erklärt sich in diesem Zusammenhange so, daß sie durch die Verhältnisse der Größen  $X' : Y' : \dots : N'$  dargestellt wird, aus denen sich der allen 6 Größen gemeinsame störende Nenner wieder forthebt; es drücken sich also diese Verhältnisse tatsächlich allein durch die Verhältnisse  $X : Y : \dots : N$  aus.

8. Ich habe nun noch einige wichtige Gebilde zu nennen, die durch projektive Transformationen wieder in Gebilde derselben Art übergehen. Zunächst geht jede quadratische Gleichung in  $x', y', z'$ , wie man durch Multiplikation mit dem Quadrat des gemeinsamen Nenners  $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4$  sieht, aus einer quadratischen Gleichung in  $x, y, z$  hervor und umgekehrt. Das besagt, daß jeder Fläche zweiter Ordnung in einem Raume  $R$  eine ebensolche in  $R'$  entspricht. Daher wird auch der

Schnitt einer solchen Fläche mit einer Ebene, d. h. *eine Kurve zweiter Ordnung gleichfalls in eine Kurve zweiter Ordnung übergeführt. Ebenso wird überhaupt jedes algebraische Gebilde, das durch eine oder mehrere Gleichungen in den Koordinaten definiert ist, in ein gleichartiges Gebilde derselben Ordnung transformiert*; die Art dieser Gebilde ist also gegenüber projektiven Umformungen invariant.

9. Neben diesen durch Gleichungen definierten invarianten Gebilden muß ich noch eine *zahlenmäßige Größe* hervorheben, deren Wert bei allen projektiven Transformationen ungeändert bleibt; sie bietet einen gewissen Ersatz des Begriffes der Entfernung und des Winkels, deren Werte ja bekanntlich schon nicht einmal bei affinen Transformationen, geschweige denn bei projektiven invariant sind. Es handelt sich hier, um zuerst von der *Geraden* zu reden, um eine *gewisse Funktion der Entfernungen von 4 irgendwie gelegenen Punkten 1, 2, 3, 4*, nämlich das schon früher erwähnte *Doppelschnittverhältnis* oder *Doppelverhältnis*<sup>1)</sup> (vgl. S. 6):

$$\frac{\overline{12} \cdot \overline{32}}{\overline{14} \cdot \overline{34}} = \frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{14} \cdot \overline{32}}.$$

In der Tat kann man die Invarianz dieser Größe gegenüber projektiven Transformationen leicht rechnerisch bestätigen, was wir übrigens später noch einmal von anderen Gesichtspunkten aus tun werden (vgl. S. 157f.).

Ganz analog ist es bei den *Strahlenbüscheln*, nur müssen wir da nicht die Winkel selbst, sondern ihre *Sinus* verwenden. Wir bekommen also, wenn 1, 2, 3, 4 Strahlen oder Ebenen eines Büschels sind, für ihr Doppelverhältnis den Ausdruck:

$$\frac{\sin(1, 2) \cdot \sin(3, 2)}{\sin(1, 4) \cdot \sin(3, 4)} = \frac{\sin(1, 2) \sin(3, 4)}{\sin(1, 4) \sin(3, 2)}.$$

Da das die ersten zahlenmäßigen Invarianten projektiver Transformationen waren, die man kennen lernte, betrachteten es die projektiven Geometer vielfach als erstrebenswertes Ziel, alle weiteren Invarianten der Projektivitäten auf Doppelverhältnisse zurückzuführen, wenn das auch manchmal nur sehr künstlich ging. Wir werden später auf diese Beziehungen eingehender zurückkommen.

Diese wenigen Andeutungen werden genügen, um Ihnen zu zeigen, wie man das ganze Material der Geometrie nach ihrem Verhalten gegenüber den projektiven Transformationen streng scheiden kann. Alles, was bei solchen Umformungen erhalten bleibt, bildet den Gegenstand jener im letzten Jahrhundert entstandenen *projektiven Geometrie*, von der ich früher schon sprach und auf die wir weiterhin noch tiefer einzugehen haben werden. Dieser Name, der jetzt allgemein üblich ist, ist besser als der früher viel gebrauchte „*Geometrie der Lage*“, mit dem man den

<sup>1)</sup> Der erste Name stammt von Möbius, der zweite von Steiner.

Gegensatz zu der die sämtlichen, auch die nicht projektiv invarianten, geometrischen Eigenschaften umfassenden „*Geometrie des Maßes*“ oder „*elementaren Geometrie*“ bezeichnen wollte. Denn der ältere Name verdeckt ganz und gar, daß auch manche Maßeigenschaften, insbesondere die Werte des Doppelverhältnisses, hierher gehören.

Ich möchte nun noch, genau wie früher bei den Affinitäten, über die *Anwendungen der projektiven Transformationen* sprechen. Ich beginne hier mit Ausführungen zur

I. *darstellenden Geometrie* und kann da natürlich lediglich unter Verzicht auf jede Systematik einige charakteristische Beispiele hervorheben. Das erste sei

a) die *Abbildung des Raumes auf eine Ebene durch Zentralperspektive*, die die direkte Verallgemeinerung der Axonometrie (Parallelperspektive) ist; hier gehen die Projektionsstrahlen von einem beliebigen endlichen statt von einem unendlich fernen Punkte aus. Wir wollen das Projektionszentrum speziell in den Koordinatenanfang  $O$  legen und die Bildebene zur Ebene  $z = 1$  machen (vgl. Abb. 66). Dann ist für den Bildpunkt  $p'(x', y', z')$  jedes Punktes  $p(x, y, z)$  jedenfalls:

$$z' = 1,$$

und ferner ist, da  $p, p'$  auf demselben Strahl durch  $O$  liegen:

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Daher lauten die Gleichungen unserer Abbildung:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{z} \\ y' &= \frac{y}{z} \\ z' &= \frac{z}{z}. \end{aligned}$$

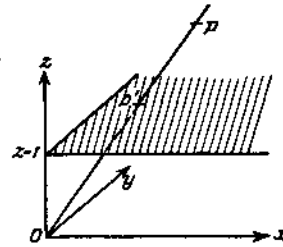


Abb. 66.

Das ist also eine *spezielle projektive Transformation*, und die Analogie zu den Verhältnissen bei der Axonometrie läßt bereits vermuten, daß sie eine *verschwindende Determinante* besitzen wird. In der Tat, gehen wir zu homogenen Koordinaten über, so wird:

$$\begin{cases} \varrho' \xi' = \xi \\ \varrho' \eta' = \eta \\ \varrho' \zeta' = \zeta \\ \varrho' \tau' = \zeta, \end{cases}$$

und die Substitutionsdeterminante ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die einzelnen Eigenschaften dieser Transformation werden Sie sich nach Analogie unserer früheren Betrachtungen leicht ableiten können, wenn sie nur beachten, daß jede Ebene auf die Bildebene im allgemeinen durch eine projektive (zweidimensionale) Transformation von nichtverschwindender Determinante bezogen ist. Daraus folgt insbesondere z. B., daß das Doppelverhältnis von je 4 Punkten einer Geraden oder je 4 Strahlen durch einen Punkt bei der Transformation ungeändert bleibt.

b) Das zweite Beispiel betrifft eine die Zentralperspektive als Grenzfall einschließende Projektivität von nichtverschwindender Determinante, die sog. *Reliefperspektive*. Ein Relief eines Gegenstandes soll so gearbeitet sein, daß es nach dem an einem bestimmten Punkte aufgestellten Auge des Beschauers dieselben Strahlen sendet, wie sie das Original nach dem entsprechend aufgestellten Beobachter gehen lassen würde. Für ein geeignet orientiertes Koordinatensystem besagt das wieder, daß Originalpunkt und Bildpunkt je auf demselben Strahle durch den Anfangspunkt liegen:

$$(1) \quad x' : y' : z' = x : y : z.$$

Der Unterschied gegen den vorigen Fall ist aber, daß das Original nicht in eine Ebene abgebildet, sondern nur auf ein gewisses schmales Raumstück endlicher Breite komprimiert wird.

Ich behaupte sogleich, daß das durch die folgenden Formeln:

$$(2) \quad x' = \frac{(1+k)x}{z+k}, \quad y' = \frac{(1+k)y}{z+k}, \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

geleistet wird, die zunächst jedenfalls eine Projektivität darstellen und offenbar den Gleichungen (1) genügen. Wir bilden ihre *Determinante* aus den zugehörigen homogenen Gleichungen:

$$\begin{cases} \varrho' \xi = (1+k)\xi \\ \varrho' \eta = (1+k)\eta \\ \varrho' \zeta = (1+k)\zeta \\ \varrho' \tau = \zeta + k\tau; \end{cases}$$

sie lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k(1+k)^3$$

und ist also von Null verschieden, außer wenn  $k = 0$  oder  $k = -1$  ist.

Für  $k = 0$  geht (2) genau in die obigen Formeln der Zentralperspektive über, d. h. das Relief artet vollständig zur Ebene aus;  $k = -1$  ergibt aber  $x' = y' = z' = 0$ , d. h. jeder Raumpunkt wird in den Nullpunkt abgebildet — eine offenbar gänzlich unbrauchbare triviale Ausartung.



Wir nehmen der Bestimmtheit halber  $k > 0$  an. Um die Abbildung (2) uns geometrisch klarzumachen, bemerken wir zunächst, daß jede Ebene  $z = \text{konst}$  in eine Parallelebene mit dem Koordinatenwert:

$$(3) \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

übergeht. Die durch Projektionsstrahlen aus  $O$  erfolgende Abbildung beider Ebenen aufeinander ist durchaus anschaulich, und nur das Gesetz (3) selbst muß noch verdeutlicht werden.

Für  $z = \infty$  (bzw.  $z = 0$ ) wird  $z' = 1 + k$ . Die Parallelebene zur  $x$ - $y$ -Ebene im Abstände  $1 + k$  ist mithin die Fluchlebene des Bildraumes und bildet gewissermaßen den Hintergrund des Reliefs, auf den der unendlich ferne Hintergrund des Objektraumes abgebildet erscheint. Eine wichtige Rolle spielt noch die Ebene  $z = 1$ , in der Objekt und Bild zusammenfallen; denn tatsächlich wird für  $z = 1$  auch  $z' = 1$ . Läuft nun  $z$  von 1 wachsend bis zu  $\infty$ , so wächst  $z'$  monoton von 1 bis  $1 + k$ , d. h. beschränken wir uns auf Objekte hinter der Ebene  $z = 1$ , so erhalten wir tatsächlich ein Relief von endlicher Tiefe  $k$  als Bild. Eine solche Beschränkung wird in der Praxis stets stattfinden können und müssen (vgl. Abb. 67).

Was sonst die Zuordnung (3) angeht, so gilt für das Doppelverhältnis der Punkte  $z, 1, z', 0$ :

$$\frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{z'-0}{z'-1} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1+k)z}{k(z-1)} = \frac{1+k}{k}.$$

Allgemein gehören also zwei solche Werte  $z, z'$  zusammen, die mit den Punkten 1 und 0 ein Doppelverhältnis von festem Betrage bilden.

In unserer mathematischen Sammlung haben wir ein Modell, das eine Kugel auf einem Würfel, einen Rotationskegel und einen Rotationszylinder in Reliefperspektive darstellt; aus der richtigen Entfernung betrachtet vermittelt es in der Tat einen sehr deutlichen Eindruck der Originalkörper. Hierbei spielen natürlich psychologische Momente sehr stark mit. Denn die Tatsache, daß die gleichen Lichtstrahlen in ein Auge treten, vermag allein den körperlichen Eindruck nicht zu bestimmen; sehr maßgebend ist dabei jedenfalls auch die Gewöhnung. Da wir nämlich weit öfter eine Kugel auf einem Würfel als ein schmales Ellipsoid auf einem schmalen Hexaeder gesehen haben (das ist die Gestalt des reliefperspektivischen Bildes), so sind wir von vornherein geneigt, den Lichteindruck auf die erstere Ursache zurückzuführen. Die nähere Zergliederung der hierbei in Betracht kommenden Momente möge indessen dem Psychologen überlassen bleiben.

Das mag genügen, um Ihnen einen ersten Einblick in die Verwendung der projektiven Transformationen in der darstellenden Geometrie zu

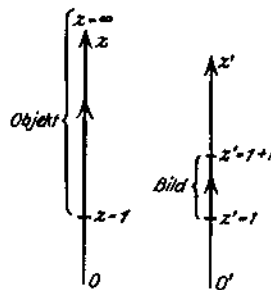


Abb. 67.

geben. Natürlich bedürfen diese Ansätze dringend der Vertiefung, und ich möchte dies Gebiet nicht verlassen, ohne Sie zu einem eingehenden Studium der darstellenden Geometrie aufzufordern, die, wie mir scheint, für jeden Lehrer der Mathematik unentbehrlich ist.

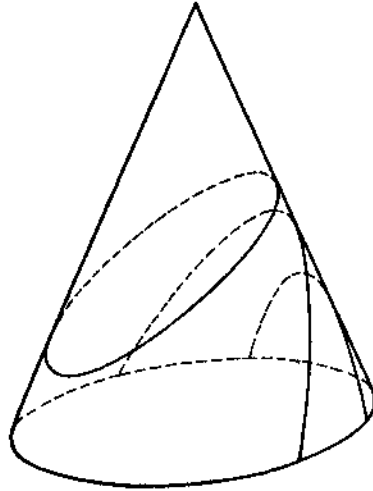


Abb. 68.

habe hier ein Modell, das in dieser Weise die Entstehung von Ellipse, Hyperbel, Parabel zeigt (vgl. Abb. 68).

b) Für die projektive Geometrie gibt es also nur einen einzigen Kegelschnitt, denn je zwei lassen sich in den Kreis und daher auch ineinander projektiv überführen. Die Einteilung in Ellipse, Parabel, Hyperbel bezeichnet von diesem Standpunkt aus aber keinen absoluten inneren Unterschied, sondern betrifft nur die zufällige Lage gegen die eine Gerade, die man als „unendlich fern“ für gewöhnlich auszeichnet.

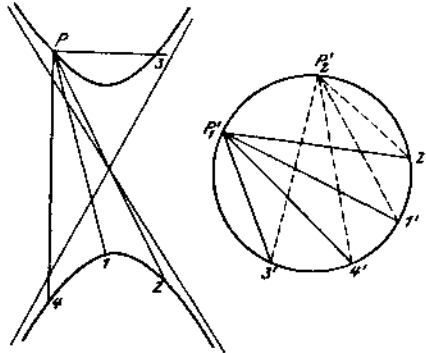


Abb. 69.

*Kegelschnittes durch 4 Strahlen projiziert, die ein festes, von der speziellen Lage von P unabhängiges Doppelverhältnis haben.*

Zum Beweise gehen wir auf den Kreis zurück, aus dem der betrachtete Kegelschnitt durch Zentralperspektive entsteht; da dabei die Dop-

2. Die zweite Anwendung der projektiven Transformationen, von der ich nun noch reden will, betrifft die *Herleitung geometrischer Sätze und Auffassungen*. Zu demselben Zwecke hatten wir ja früher (S. 81 ff.) die affinen Transformationen verwendet.

a) Wir gehen davon aus, daß ein Kreis, wenn wir ihn projektiven Umformungen bzw. Zentralperspektiven unterwerfen, in einen beliebigen „Kegelschnitt“ übergeht, d. h. in den Schnitt des Kegels, dessen Mantel aus den nach den Punkten der Kreisperipherie laufenden Projektionsstrahlen gebildet wird, mit einer beliebigen Ebene;

c) Nun soll der folgende *Fundamentalsatz vom Doppelverhältnis bei Kegelschnitten* abgeleitet werden: *Irgend 4 feste Punkte eines Kegelschnittes 1, 2, 3, 4 werden von einem fünften beweglichen Punkte P desselben*

pelverhältnisse ungeändert bleiben, ist unser Satz allgemein jedenfalls richtig, wenn nur beim Kreise die 4 entsprechenden Punkte  $1', 2', 3', 4'$  (vgl. Abb. 69) aus zwei beliebigen weiteren Punkten  $P'_1, P'_2$  durch Strahlen desselben Doppelverhältnisses projiziert werden. Das ist aber unmittelbar klar, denn nach dem Satze vom Peripheriewinkel sind die Winkel des Strahlenbüschels  $P'_1(1', 2', 3', 4')$  einerseits und  $P'_2(1', 2', 3', 4')$  andererseits paarweise gleich, und also sind es gewiß auch die aus den Sinus dieser Winkel gebildeten Doppelverhältnisse der beiden Strahlenquadrupel.

d) Diesem Satze gemäß hat nun Steiner überhaupt die Kegelschnitte definiert, indem er von zwei „projektiv aufeinander bezogenen“ Strahlenbüscheln ausging, in denen zwei entsprechende Strahlenquadrupel gleiches Doppelverhältnis haben; *der Kegelschnitt ist dann der geometrische Ort der Schnitte korrespondierender Strahlen dieser projektiv aufeinander bezogenen Büschel.*

Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen, um Ihnen die große Bedeutung der projektiven Transformationen für die Theorie der Kegelschnitte verständlich zu machen. Näheres darüber können Sie in jedem Lehrbuche der projektiven Geometrie finden.

Wir gehen jetzt in dem großen Gedankengange dieses Hauptteiles weiter zu neuen Klassen geometrischer Transformationen, die nicht mehr zu den linearen Transformationen gehören, welche wir bisher von den Bewegungen bis zu den allgemeinsten Projektivitäten aufsteigend betrachtet haben.

### III. Höhere Punkttransformationen.

Wir werden nämlich jetzt solche Transformationen untersuchen, die nicht mehr durch lineare, sondern durch höhere *rationale, algebraische oder auch transzendente Funktionen* dargestellt werden:

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

Gemäß der Tendenz dieser Vorlesung will ich hier keine allgemeine Systematik geben, sondern nur eine Reihe besonderer Beispiele hervorheben, die in der reinen Mathematik sowie vor allem auch in den Anwendungen eine allgemeine Bedeutung haben.

Zunächst werde ich von der wohl am meisten gebrauchten derartigen Transformation reden, *der Transformation durch reziproke Radien.*

#### 1. Die Transformation durch reziproke Radien.

Bei dieser Transformation wird bekanntlich *jedem Punkte  $p$  derjenige Punkt  $p'$  auf seiner Verbindungsgeraden  $Op$  mit dem Koordinatenanfang  $O$  zugeordnet, für den das Produkt  $Op \cdot Op'$  gleich einer gegebenen Konstanten ist* (vgl. Abb. 70); diese Gleichung gibt der Transformation auch ihren Namen.

Sie wissen, daß diese Transformationen in der reinen Mathematik vor allem in der *Funktionentheorie komplexer Variabler* eine große

Rolle spielen. Nicht minder häufig kommen sie aber in der Physik und anderen Anwendungen — von *einer* Anwendung werden wir noch ganz besonders sprechen — vor.

Bei der Behandlung unserer Transformation gehe ich wiederum aus

1. von der Aufstellung ihrer Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten. Da  $p$  und  $p'$  auf derselben Geraden durch  $O$  liegen, muß:

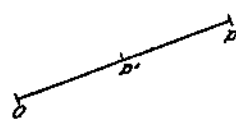


Abb. 70.

$$(1) \quad x' : y' : z' = x : y : z$$

sein, und die Relation für die Entfernungen  $Op$ ,  $Op'$  ergibt, wenn wir die Konstante der Einfachheit halber gleich 1 setzen:

$$(2) \quad (x^2 + y^2 + z^2) (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1.$$

Demnach lauten die Gleichungen der Transformation:

$$(3) \quad x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

und genau so ergibt sich, daß auch umgekehrt:

$$(4) \quad x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad z = \frac{z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \text{ ist.}$$

Somit werden sowohl die Koordinaten von  $p$  durch diejenigen von  $p'$  als auch umgekehrt die Koordinaten von  $p'$  durch die von  $p$  als rationale Funktionen, und zwar beide Male durch dieselben Funktionen dargestellt. Der Nenner ist ein quadratischer Ausdruck; es liegt hier ein *besonderer Fall einer sog. quadratischen birationalen Transformation* vor. Übrigens gibt es eine ausgedehnte Klasse solcher birationaler (im allgemeinen eineindeutiger) Transformationen, die in beiden Richtungen sich durch rationale Funktionen darstellen; sie sind unter dem Namen *Cremonatransformationen* Gegenstand einer weit ausgebildeten Theorie geworden, auf die ich hier bei der Behandlung ihres einfachsten Repräsentanten wenigstens hinweisen will.

2. Die Gleichungen (3), (4) zeigen, daß jedem Raumpunkt  $p$  ein Punkt  $p'$  und umgekehrt jedem Punkte  $p'$  ein Punkt  $p$  zugeordnet ist, mit Ausnahme zunächst des Nullpunktes. Läßt man aber  $x, y, z$  gleichzeitig sich der 0 nähern, so verschwindet der Nenner in (3) von höherer Ordnung als die Zähler, und daher werden  $x', y', z'$  unendlich; wir könnten den Nullpunkt also einen *Fluchtpunkt* der Transformation nennen. Gehen umgekehrt  $x', y', z'$  irgendwie ins Unendliche, so werden nach (4) stets  $x, y, z$  gleich Null; wollten wir uns also der früher eingeführten Terminologie bedienen, so müßten wir sagen, daß ein einziger Punkt der ganzen unendlich fernen Ebene entspricht. Aber diese „unendlich ferne Ebene“ war ja nur eine bequeme Ausdrucksweise, die den projektiven Transformationen angepaßt war; sie deutete an, daß sich bei diesen Transfor-

mationen das Unendlichweite des Raumes wie eine Ebene verhält, d. h. in die Punkte irgendeiner endlichen Ebene übergeführt wird, und sie ermöglichte es, die Theoreme ohne Fallunterscheidungen und Angabe von Ausnahmen auszusprechen. Es liegt kein Grund vor, der uns hindert, hier eine davon verschiedene Ausdrucksweise einzuführen und durch sie für unseren jetzigen Zweck zu ebenso ausnahmslos gültigen Sätzen zu gelangen: Das Unendlichweite wird durch unsere Transformation in einen Punkt übergeführt; also sagen wir einfach, *es gibt nur einen unendlich fernen Punkt, und der entspricht bei unserer Transformation eben dem Koordinatenanfangspunkt. Dann ist unsere Transformation tatsächlich ausnahmslos eineindeutig.*

Man kann nicht genug betonen, daß an metaphysische Vorstellungen über die wahre Natur des Unendlichfernen hier ebenso wie früher nicht im entferntesten gedacht werden soll. Es gibt allerdings immer wieder Menschen, die, an die eine oder andere Redeweise einseitig gewöhnt, ihr einen transzendenten Sinn unterlegen möchten, und solche Vertreter der beiden Anschauungen geraten auch wohl manchmal miteinander in Streit. Tatsächlich haben sie beide unrecht: sie vergessen, daß es sich um willkürliche, nur für den einen oder anderen Zweck jeweils geeignete Festsetzungen handelt.

3. Die hauptsächlichste Eigenschaft unserer Transformation ist, daß sie — allgemein zu reden — *Kugeln in Kugeln überführt*. Die Gleichung jeder Kugel hat nämlich die Form:

$$(5) \quad A(x'^2 + y'^2 + z'^2) + Bx' + Cy' + Dz' + E = 0;$$

indem wir hierin  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  selbst aus den Transformationsgleichungen (3) und den quadratischen Term  $x'^2 + y'^2 + z'^2$  aus der Relation (2) (S. 106) ersetzen, folgt nach Multiplikation mit  $x'^2 + y'^2 + z'^2$ :

$$A + Bx + Cy + Dz + E(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

also tatsächlich wieder eine Kugelgleichung. Dabei ist freilich zu bemerken, daß in (5) für  $A = 0$  auch die Ebenen mit einbegriffen sind, und wir werden sie zweckmäßigerweise hier als *spezielle Kugeln* ansprechen, und zwar als solche, die *den unendlich fernen Punkt* enthalten. Sie verwandeln sich bei unserer Transformation in Kugeln durch den dem unendlich fernen Punkt entsprechenden Nullpunkt; ebenso gehen umgekehrt solche Kugeln in Kugeln durch den unendlich fernen Punkt, das sind Ebenen, über. Mit diesen Festsetzungen gilt demnach das Theorem, daß Kugeln Kugeln entsprechen, tatsächlich *ausnahmslos*.

Da sich 2 Kugeln (und ebenso Kugel und Ebene) in einem Kreise schneiden, so gilt auch weiterhin, daß *jedem Kreise ein Kreis entspricht*; dabei sind *gerade Linien* insbesondere als „*Kreise durch den unendlich fernen Punkt*“, denen vermöge der Transformation Kreise durch den Nullpunkt entsprechen, mit einbegriffen.

5. Dieser letzte Satz bleibt natürlich auch bestehen, wenn man die Transformation durch reziproke Radien nur *innerhalb einer Ebene* vornimmt, und er liefert da eine *elegante Lösung des Problems der Geradföhrung*, das ja äußerst elementar ist und eigentlich auch dem Interessengebiet des Nichtmathematikers angehört. Es handelt sich dabei um die Aufgabe, durch gelenkig verbundene starre Stangen einen Punkt so zu föhren, daß er eine Gerade beschreibt; früher legte man bei der Konstruktion von Dampfmaschinen besonderes Gewicht auf solche Mechanismen, die die Vermittelung zwischen dem geradlinig hin und her gehenden Kolben und dem auf einem Kreise oszillierenden Endpunkt der Kurbel übernehmen sollten.

Hier interessiert uns der *Inversor*, den *Peaucellier*, ein französischer Offizier, 1864 konstruierte und der damals großes Aufsehen erregte, obwohl seine Konstruktion sehr einfach und ziemlich naheliegend ist. Es

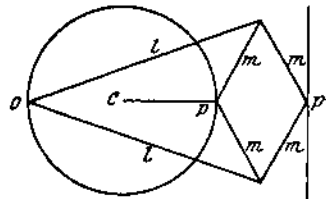


Abb. 71.

sind bei diesem Apparat zunächst *6 Stangen* durch Gelenke verbunden (vgl. Abb. 71): zwei von der Länge  $l$  sind an einem festen Punkte  $O$  angebracht, die anderen 4, die die Länge  $m$  haben, bilden einen mit 2 gegenüberliegenden Ecken an den Enden der Stangen  $l$  befestigten Rhombus; die beiden freien Ecken dieses Rhombus mögen  $p$  und  $p'$  heißen. Dieser Apparat hat 2 Freiheitsgrade: erstens kann man die beiden Stangen  $l$  beliebig gegeneinander neigen und zweitens kann man sie gemeinsam beliebig um  $O$  drehen. Bei jeder solchen Bewegung bleibt aber stets, wie eine ganz einfache geometrische Betrachtung lehrt,  $Op p'$  eine Gerade, und es ist das Produkt:

$$Op \cdot Op' = l^2 - m^2 = \text{konst.}$$

unabhängig von der jeweiligen Lage von  $p$ ; *der Apparat vermittelt also tatsächlich eine Transformation durch reziproke Radien mit  $O$  als Zentrum*. Nun braucht man nur  $p$  auf einem Kreise durch  $O$  laufen zu lassen, um — nach den Sätzen von Nr. 4 —  $p'$  wirklich zu einer Bewegung auf einer Geraden zu zwingen; das erreicht man aber sofort, wenn man an  $p$  noch einen *siebenten Arm*  $pC$  anbringt, dessen zweiter Endpunkt  $C$  in der Mitte zwischen  $O$  und der Anfangslage von  $p$  befestigt ist; dann bleibt nur noch ein Freiheitsgrad übrig, und  $p'$  *wird in der Tat auf einer Geraden geföhrt*. Übrigens muß man bemerken, daß der Punkt  $p'$  nicht etwa die ganze unbegrenzte Gerade durchlaufen kann; vielmehr ist er in seiner Bewegungsfreiheit so auf ein Stück von ihr beschränkt, daß seine Entfernung von  $O$  immer kleiner als  $l + m$  bleibt, da die gegebenen Stangenzlängen eine weitere Bewegung nicht gestatten. Bei manchen Modellen kann man übrigens auch  $C$  ein wenig verschieben; dann geht der Kreis, den  $p$  durchläuft, dicht an  $O$  vorbei, und daher beschreibt  $p'$

keine Gerade mehr, sondern einen *Kreis von sehr großem Radius*; auch diese Anwendung des Apparats kann gelegentlich nützlich sein <sup>1)</sup>).

6. Von allgemeinen Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radien habe ich endlich noch die der *Winkeltreue* hervorzuheben, die darin besteht, daß *der Winkel, den irgend zwei Flächen an einer beliebigen Stelle ihrer Schnittkurve miteinander bilden, vor und nach der Transformation derselbe ist*. Auf den Beweis gehe ich nicht ein, da es mir hier für diesen Überblick auf die Durchführung von Einzelheiten nicht ankommt.

Als ein besonderer Ausschnitt der Transformation durch reziproke Radien kann die *stereographische Projektion*, die gerade auch in den Anwendungen die größte Rolle spielt, angesehen werden. Man erhält sie folgendermaßen:

7. Wir wollen die Kugel betrachten, die durch unsere Transformation (3) in die  *feste Ebene  $z' = 1$*  übergeführt wird. Nach der dritten der Substitutionsformeln (3) ist die Gleichung dieser Kugel:

$$1 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Das gesuchte Original der Ebene  $z' = 1$  ist also eine *Kugel mit dem Radius  $\frac{1}{2}$  um den Punkt  $z = \frac{1}{2}$*  der  $z$ -Achse, die durch den Nullpunkt geht und die Bildebene  $z' = 1$  berührt (vgl. Abb. 72). Die Einzelheiten der Beziehung zwischen Ebene und Kugel können wir uns nun unmittelbar vor Augen führen, wenn wir das vom Nullpunkt ausgehende Strahlenbündel zum Aufsuchen entsprechender Punkte zu Hilfe nehmen; ich hebe hier nur ohne Beweis folgendes hervor:

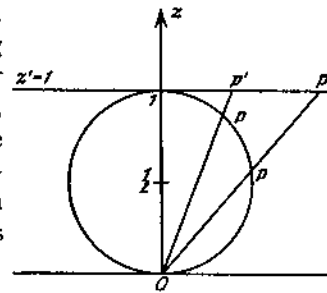


Abb. 72.

1. Die Abbildung ist *ausnahmelos ein-eindeutig*, wenn wir das Unendlichweite der Ebene als einen Punkt auffassen, der dann auf den Kugelpunkt  $O$  abgebildet wird.

2. *Kreisen der Kugel entsprechen Kreise der Ebene*, insbesondere entsprechen Kreisen durch  $O$  Kreise durch den unendlich fernen Punkt, das sind Gerade.

3. Die Beziehung beider Flächen ist *winkeltreu oder* — wie man auch sagt — *konform*.

<sup>1)</sup> [Vgl. auch A. B. Kempe, How to draw a straight line, London 1877 und G. Hessenberg, Gelenkmechanismen zur Kreisverwandtschaft, Heft 6 der Naturwissenschaftlich-medizinischen Abhandlungen der Württembergischen Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, Abteilung Tübingen 1924.]

Daß diese stereographische Projektion in der *Funktionentheorie* die größte Bedeutung hat, dürfte Ihnen allen bekannt sein; haben wir sie doch schon in der vorigen Vorlesung<sup>1)</sup> häufig mit Vorteil angewandt. Von den Anwendungen, in denen sie eine nicht minder wichtige Rolle spielt, möchte ich hier besonders die *Geographie* und *Astronomie* hervorheben; schon den antiken Astronomen war sie bekannt, und noch heute finden Sie in jedem Atlas Darstellungen der Halbkugeln und der Polar-gegenden der Erde in stereographischer Projektion.

Dem zuletzt bezeichneten Anwendungsgebiet will ich noch einige weitere Beispiele entnehmen:

## 2. Einige allgemeinere Kartenprojektionen.

Ein Exkurs in dieser Richtung scheint mir gerade in der gegenwärtigen Vorlesung besonders angebracht. Ist doch die *Theorie der geographischen Karten* ein Gebiet, das im Rahmen des Schulunterrichts von größter Bedeutung ist; gewiß wird es jedem Knaben interessant sein, zu hören, nach welchen Gesichtspunkten eigentlich die Karten in seinem Atlas gezeichnet sind, und der Mathematiklehrer wird für seinen Unterricht sicher größere Teilnahme erzielen können, wenn er hierüber gelegentlich den erwünschten Aufschluß gibt, als wenn er ausschließlich abstrakte Fragen behandelt. So sollte jeder Lehramtskandidat von jenem Gebiete Kenntnis haben, das überdies auch dem Mathematiker interessante Beispiele von Punkttransformationen liefert.

Es wird am zweckmäßigsten sein, wenn wir uns von vornherein die Erdkugel stereographisch auf die  $x$ - $y$ -Ebene abgebildet denken; dann ist von einem Pol aus jede andere Abbildung auf eine  $\xi$ - $\eta$ -Ebene durch 2 Gleichungen:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y)$$

gegeben.

Eine erste in der Praxis oft gebrauchte Art von Abbildungen sind die *winkeltreuen*; man erhält sie, wie die Funktionentheorie lehrt, wenn man die *komplexe Variable*  $\xi + i\eta$  als *analytische Funktion der komplexen Variablen*  $x + iy$  auffaßt:

$$\xi + i\eta = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Ich möchte aber hier ausdrücklich betonen, daß gerade in der geographischen Praxis auch *sehr vielfach nicht winkeltreue Abbildungen* verwandt werden, so daß man keineswegs, wie es manchmal geschieht, diese als die allein wichtigen ansehen darf.

Unter den *konformen* Abbildungen kommt ganz besonders die sog. *Merkatorprojektion* in Betracht, die der Mathematiker *Gerhard Merkator*, der eigentlich den guten deutschen Namen *Kremer* führte, ums Jahr 1550

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 113ff.



entdeckt hat. Merkatorkarten der Erde finden Sie bekanntlich ebenfalls in jedem Atlas.

Die Merkatorprojektion ist dadurch bestimmt, daß unsere analytische Funktion  $f$  speziell der Logarithmus ist. Sie wird also dargestellt durch die Gleichung:

$$\xi + i\eta = \log(x + iy).$$

Wir können als Mathematiker die Eigenschaften der Projektion aus dieser kurzen Formel sofort ableiten, während für den nicht mathematisch gebildeten Geographen die Behandlung der Merkatorpro-

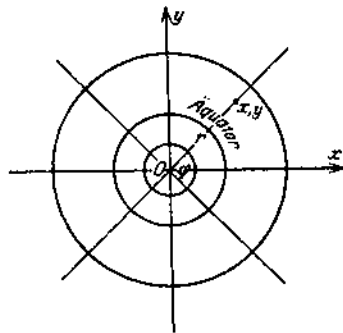


Abb. 73.

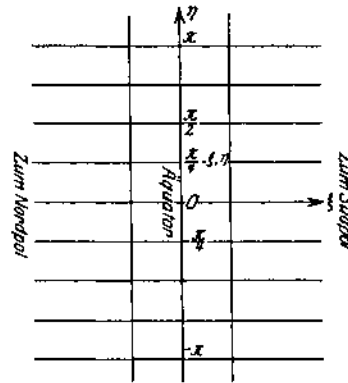


Abb. 74.

jektion natürlich recht schwer ist. Führen wir in der  $x$ - $y$ -Ebene Polarkoordinaten (vgl. Abb. 73) ein, d. h. setzen wir  $x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$ , so wird:

$$\xi + i\eta = \log(r \cdot e^{i\varphi}) = \log r + i\varphi,$$

also:

$$\xi = \log r, \quad \eta = \varphi.$$

Wir nehmen an, daß der Südpol der Erde das Zentrum der verwendeten stereographischen Projektion ist; dann entspricht der Nullpunkt  $O$  der  $x$ - $y$ -Ebene dem Nordpol und die durch  $O$  gehenden Strahlen  $\varphi = \text{konst.}$  der  $x$ - $y$ -Ebene entsprechen den Erdmeridianen. Daher werden (vgl. Abb. 74) diese in der Merkatorprojektion zu Parallelen  $\eta = \text{konst.}$  zur  $\xi$ -Achse; der Nordpol ( $\xi = -\infty$ ) liegt auf ihnen links, der Südpol ( $\xi = +\infty$ ) rechts im Unendlichen. Da der Winkel  $\varphi$  bis auf Vielfache von  $2\pi$  unbestimmt ist, ist die Abbildung unendlich vieldeutig, und jeder Parallelstreifen von der Breite  $2\pi$  parallel zur  $\xi$ -Achse stellt bereits ein Bild der ganzen Erdoberfläche dar. Die Breitenkreise, denen in der stereographischen Projektion die Kreise  $r = \text{konst.}$  entsprechen, werden in der Merkatorprojektion zu den Parallelen  $\xi = \text{konst.}$  also, wie das ja auch der Winkeltreue halber selbstverständlich ist, zu senkrechten Trajektorien der Bildgeraden der Meridiane; dem Äquator ( $r = 1$ ) insbesondere entspricht die  $\eta$ -Achse ( $\xi = 0$ ).

Dieses eine Beispiel mag genügen, um Sie zu weiterer Beschäftigung mit den zahlreichen Transformationen der geographischen Kartenlehre anzuregen; ich will hier lieber noch auf einen *allgemeineren Satz* dieser Theorie eingehen. Wer sich von Ihnen mit Geographie beschäftigt hat, hat dort gewiß von den *Tissotschen Sätzen* gehört, die Tissot in seinem von *Hammer* in Stuttgart übersetzten Lehrbuch<sup>1)</sup> entwickelt hat. Wir werden von unserem Standpunkte aus ihren Inhalt uns sehr einfach klar-machen können.

Es mögen 2 *geographische Karten*, Abbildungen der Erdkugel auf eine  $x$ - $y$ -Ebene und eine  $\xi$ - $\eta$ -Ebene, vorliegen, die beide ganz beliebig sein können, also auch nicht konform sein müssen. Diese beiden Abbildungen stehen dann jedenfalls in einer Beziehung:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y)$$

zueinander.

Wir wollen nun nur die Umgebung zweier korrespondierender Stellen  $x_0, y_0$  und  $\xi_0, \eta_0$  untersuchen, wo also:

$$\xi_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0).$$

Dazu führen wir neue Variable  $x', y', \xi', \eta'$  durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', & y &= y_0 + y'; \\ \xi &= \xi_0 + \xi', & \eta &= \eta_0 + \eta'. \end{aligned}$$

ein und haben dann als Entwicklungen von  $\varphi, \chi$  nach dem Taylorschen Satze:

$$\begin{aligned} \xi' &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots, \\ \eta' &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots, \end{aligned}$$

wobei die Ableitungen für die Stelle  $x = x_0, y = y_0$  zu berechnen sind und durch die Punkte Glieder höherer Ordnung in  $x', y'$  angedeutet werden. Wir beschränken uns nun auf eine so *kleine Umgebung der Stelle*  $x_0, y_0$ , daß die angeschriebenen linearen Glieder bereits eine hinreichende Annäherung an die wirklichen Werte von  $\xi', \eta'$  geben; dabei schließen wir natürlich solche singuläre Stellen  $x_0, y_0$  aus, bei denen eine derartige Umgebung nicht existiert, also z. B. solche, an denen alle 4 ersten partiellen Ableitungen gleichzeitig verschwinden, so daß die linearen Glieder gar keine brauchbare Annäherung liefern. Sehen wir uns nun die so entstehenden linearen Gleichungen zwischen  $x', y', \xi', \eta'$  an, so haben wir unmittelbar den fundamentalen Satz, der die Grundlage der Tissotschen Betrachtungen bildet: *Zwei geographische Abbildungen desselben Terrains hängen in der Umgebung einer beliebigen nicht gerade singulären Stelle*

<sup>1)</sup> Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Stuttgart 1887.

angenähert durch eine affine Transformation zusammen. Wendet man nun unsere früheren Theoreme über die affinen Transformationen an, so erhält man tatsächlich alle die sogenannten Tissotschen Sätze.

Ich will nur an wenige Hauptpunkte erinnern. Wir wissen, daß es vor allem auf die Determinante der affinen Transformationen, hier also auf:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}$$

ankommt, die man bekanntlich als *Funktionaldeterminante der Funktionen*  $\varphi, \chi$  an der Stelle  $x = x_0, y = y_0$  bezeichnet. Den Fall  $\Delta = 0$  wird man bei diesen Anwendungen stets vermeiden; denn in ihm wird das kleine den Punkt  $x_0, y_0$  umgebende Flächenstück der  $x$ - $y$ -Ebene auf ein Kurvenstück der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene abgebildet, und derartiges wird der Geograph kaum als brauchbare Karte ansehen. Wir haben hier also *stets*  $\Delta \neq 0$  *anzunehmen*. Das Zustandekommen einer solchen affinen Transformation hatten wir uns aber früher (S. 78 f.) ausführlich veranschaulicht, und wir können daher jetzt aus dem Früheren sofort den Satz übernehmen: *Man erhält die Umgebung des Punktes  $\xi_0, \eta_0$  aus der des Punktes  $x_0, y_0$  mit der hier in Betracht kommenden Genauigkeit, indem man die letztere nach zwei zueinander senkrechten Richtungen reinen Deformationen unterwirft und sie dann noch um einen passenden Winkel dreht.* Sie werden bei Tissot finden, daß er tatsächlich diesen Satz ad hoc in anschaulicher Weise ableitet, und Sie haben hier ein interessantes Beispiel dafür, wie die Vertreter der Anwendungen von sich aus den mathematischen Anforderungen ihrer Disziplinen genügen; dem Mathematiker erscheint die Sache natürlich dann immer sehr einfach, aber es ist doch für ihn lehrreich zu wissen, was jenen Anwendungen not tut.

Ich will nun endlich noch eine letzte allgemeine Klasse von Punkttransformationen erörtern:

### 3. Die allgemeinsten eindeutigen stetigen Punkttransformationen.

Alle bisher zur Verwendung gelangten abbildenden Funktionen waren stetig und beliebig oft differenzierbar, ja sogar analytisch (in eine Taylorsche Reihe entwickelbar); dafür ließen wir aber auch mehrdeutige, sogar unendlichvieldeutige Funktionen (z. B. den Logarithmus) zu. Jetzt wollen wir gerade das Hauptgewicht darauf legen, *daß unsere abbildenden Funktionen ausnahmslos umkehrbar eindeutig seien, und im übrigen von ihnen nur Stetigkeit verlangen*, über die Existenz von Differentialquotienten usw. aber nichts voraussetzen; wir fragen dann nach den Eigenschaften von geometrischen Figuren, die bei diesen allgemeinsten eindeutigen und stetigen Transformationen ungeändert bleiben.

Denken Sie etwa, daß Sie eine Fläche oder ein Raumstück aus Kautschuk hergestellt und irgendwelche Figuren in ihm markiert haben. Was bleibt von diesen Figuren erhalten, wenn sie den Kautschuk in ganz willkürlicher Weise verzerren, ohne ihn zu zerreißen?

Die Gesamtheit der Eigenschaften, die man bei der Behandlung dieser Frage erhält, bildet das Gebiet der sog. *Analysis situs*, man könnte sagen, der *Lehre von den reinsten von Größenbeziehungen ganz unabhängigen Lageverhältnissen*. Jener Name rührt von Riemann her, der sich in seiner berühmten Arbeit von 1857 über die „*Theorie der Abelschen Funktionen*“<sup>1)</sup> von funktionentheoretischen Interessen aus zu solchen Untersuchungen veranlaßt sah. Übrigens hält man es seitdem oft so, daß man von der *Analysis situs* in der Geometrie ganz schweigt und sie nur in der Funktionentheorie heranzieht, wenn man sie braucht. Anders macht es jedoch Möbius, der sich in einer Arbeit vom Jahre 1863<sup>2)</sup> von rein geometrischem Interesse aus mit der *Analysis situs* beschäftigt; er nennt dort Figuren, die durch eineindeutige stetige Verzerrungen auseinander hervorgehen, *elementarverwandt*, weil die gegenüber diesen Transformationen invarianten Eigenschaften die einfachsten überhaupt möglichen sind.

Wir wollen uns nun hier auf die *Untersuchung von Flächen* beschränken. Da ist zunächst eine erst von Möbius entdeckte Eigenschaft zu nennen, die Riemann noch entgangen war: *Die Unterscheidung nämlich, ob eine Fläche einseitig oder zweiseitig ist*. Wir hatten ja schon früher (S. 19 f.) von dem *einseitigen Möbiusschen Blatte* gesprochen, auf dem man durch stetiges Hinwandern längs der Fläche unvermerkt von der einen Seite nach der anderen gelangen konnte, so daß eine Unterscheidung zweier Seiten keinen Sinn mehr hat. Es ist klar, daß diese Eigenschaft bei allen stetigen Verzerrungen erhalten bleibt und *daß man daher tatsächlich in der Analysis situs von vornherein einseitige und zweiseitige Flächen zu unterscheiden hat*.

Wir wollen uns hier der Einfachheit halber *nur mit zweiseitigen Flächen* beschäftigen, zumal sie allein in der Funktionentheorie benutzt zu werden pflegen; übrigens ist die Theorie der einseitigen Flächen nicht etwa wesentlich schwieriger. Da ergibt sich denn, daß für eine Fläche im Sinne der *Analysis situs* *2 ganze natürliche Zahlen* vollkommen charakteristisch sind: die *Anzahl  $\mu$  ihrer Randkurven* und die *Anzahl  $p$  ihrer sie nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte* (das sog. „*Geschlecht*“); genauer gesagt, *zwei*

<sup>1)</sup> Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 54 = Gesammelte mathematische Werke (2. Aufl. Leipzig 1892), S. 88. — Das Wort „*Analysis*“ gebraucht Riemann hier an Leibniz anknüpfend in seinem ursprünglichen methodischen Sinne, nicht in dem Sinne, den es als mathematischer Terminus angenommen hat.

<sup>2)</sup> „*Theorie der elementaren Verwandtschaft*.“ Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse, Bd. 15, S. 18 ff. = Gesammelte Werke Bd. II (Leipzig 1886), S. 433 ff.

zweiseitige Flächen können dann und nur dann aufeinander eineindeutig und stetig bezogen werden, sie sind „elementarverwandt“ oder – wie man heute sagt – *homöomorph*, wenn jene beiden Zahlen  $p$  und  $\mu$  für sie übereinstimmen. Es würde zu weit führen, wenn ich dieses Theorem hier beweisen wollte; ich kann nur an *einigen Beispielen* die Bedeutung der beiden Zahlen  $\mu$  und  $p$  erläutern.

Stellen wir uns nebeneinander eine *Kugel*, eine *Ringfläche* und endlich eine *Doppelringfläche* (von der Form einer Brezel) vor, wie sie in Abb. 75 schematisch angedeutet sind. Alle drei sind ge-

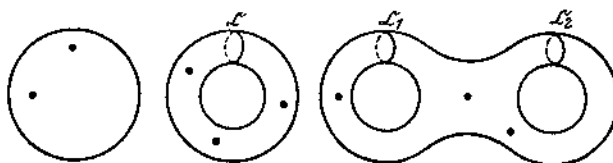


Abb. 75.

schlossene Flächen, d. h. sie haben keine Randkurve:  $\mu = 0$ . Im ersten Falle zerfällt durch jeden geschlossenen Schnitt die Fläche in 2 getrennte Teile, d. h. es ist auch  $p = 0$ . Im zweiten Falle stellt eine Meridiankurve  $\mathcal{C}$  einen in sich zurücklaufenden Schnitt dar, der die Fläche nicht zerlegt; ist er aber einmal gezogen, so zersstückelt jeder weitere Rückkehrschnitt tatsächlich die Fläche, und das meinen wir, wenn wir  $p = 1$  sagen. Im dritten Beispiele endlich ist  $p = 2$ , wie die beiden verschiedenen Meridiankurven  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  auf den getrennten Henkeln zeigen. Durch Anfügung weiterer Henkel können wir nun sofort zu Flächen mit beliebigem  $p$  aufsteigen. Wollen wir aber auch noch  $\mu$  einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert erteilen, so brauchen wir nur in diesen Flächen  $\mu$  kleine Löcher, sog. „*Punktierungen*“, anzubringen, die jedesmal eine Randkurve liefern. So können wir tatsächlich Flächen mit beliebigen Werten von  $p$  und  $\mu$  herstellen, und diesen müssen dann alle anderen Flächen mit demselben  $p, \mu$  homöomorph sein, wenn sie auch ein von jenen noch so verschiedenes Aussehen haben. Die Funktionentheorie liefert ja viele Beispiele solcher Flächen.

Ich muß noch hier den weiteren Terminus *Zusammenhang* erklären, den Riemann einführt; er versteht darunter die Zahl  $2p + \mu$  und nennt die Fläche  $(2p + \mu)$ -fach *zusammenhängend*. Ist eine Fläche *einfach zusammenhängend* ( $2p + \mu = 1$ ), so folgt  $p = 0, \mu = 1$ , d. h. sie ist einer Kugel mit einer Punktierung homöomorph, die man durch Verbreiterung dieses Loches auch stetig in eine *ebene Kreisscheibe* verwandeln kann (vgl. Abb. 76).

Weiterhin führt nun Riemann den Begriff des *Querschnittes* ein, d. i. eines Schnittes, der von einem Randpunkt zu einem anderen führt. Man kann von

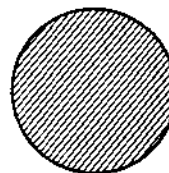


Abb. 76.

Querschnitten also nur reden, wenn tatsächlich Randkurven vorhanden sind, also  $\mu > 0$  ist. Es gilt der Satz, daß jeder Querschnitt den Zusammenhang um 1 vermindert, so daß man insbesondere jede Fläche mit  $\mu > 0$  durch  $2p + \mu - 1$  Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann. Nehmen wir z. B. eine Ringfläche (vgl. Abb. 77) mit einer Punktierung ( $p = \mu = 1$ ), so legen wir erst den Querschnitt  $q_1$  von dieser Punktierung aus und dann den Querschnitt  $q_2$ , der von jenem ersten Schnitt ausgeht und wieder in ihn einmündet und übrigens genau wie der frühere nicht zerstückelnde Rückkehrschnitt verläuft. Dann ist der Zusammenhang tatsächlich von  $2 \cdot 1 + 1 = 3$  auf 1 erniedrigt.

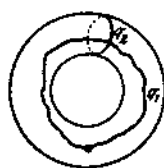


Abb. 77.

Was Literatur zur Analysis situs anlangt, so ist eine zusammenfassende Darstellung nicht nur für Flächen, sondern auch für beliebig ausgedehnte Gebilde in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften in dem Referat von M. Dehn und P. Heegaard (III A B 3) gegeben, das freilich sehr abstrakt geschrieben ist. Eine leichter lesbare, auch dem Neuling zugängliche Darstellung, die der abstrakten Theorie eine Entwicklung der allgemeinen Ideen an einfachen Beispielen vorausschickt, wäre sehr wünschenswert<sup>1)</sup>.

Daß die Analysis situs in der Physik, insbesondere in der Potentialtheorie, Anwendung findet, ist bekannt. Aber auch in den Schulunterricht greift sie ein, und zwar mit dem Eulerschen Polyedersatz, über den ich zum Schluß noch ein Wort sagen will. Euler bemerkte, daß für ein ebenflächiges gewöhnliches Polyeder mit  $E$  Ecken,  $K$  Kanten und  $F$  Seitenflächen stets die Gleichung:

$$E + F = K + 2$$

gilt. Wenn man nun das Polyeder irgendwie eineindeutig und stetig deformiert, so wird an jenen 3 Zahlen und daher an dieser Gleichung nichts geändert, und sie gilt daher schließlich noch, wenn  $E, F, K$  die Anzahlen der Ecken, Flächen, Kanten einer beliebigen Einteilung der Kugel oder überhaupt einer dieser homöomorphen Fläche bezeichnen, wofür nur jedes Teilgebiet einfach zusammenhängend ist. Nun kann man das Theorem aber sogleich auf Flächen beliebigen Geschlechts verallgemeinern: Teilt man irgend eine Fläche, die genau  $p$  nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte zuläßt, durch  $K$  Linienstücke in  $F$  einfach zusammenhängende Flächenstücke, wobei  $E$  Ecken auftreten, so gilt:

$$E + F = K + 2 - 2p.$$

<sup>1)</sup> [Eine neuere Darstellung ist: B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (bisher erschien Bd. I). Berlin: Springer 1923. — In der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften wird demnächst von H. Tietze ein weiteres Referat über Analysis situs erscheinen.]

Ich überlasse es Ihnen, sich hierfür Beispiele zurechtzulegen und sich den Beweis selbst zu überlegen oder bei Dehn-Heegaard nachzulesen; natürlich gibt es noch sehr viel weitergehende Verallgemeinerungen dieses Satzes. —

Wir verlassen damit endlich die Lehre von den Punkttransformationen überhaupt und wollen nunmehr einen Überblick über die wichtigsten Klassen solcher Transformationen zu gewinnen versuchen, die Punkte in andersartige Raumelemente überführen.

#### IV. Transformationen mit Wechsel des Raumelements.

##### 1. Die dualistischen Transformationen.

Als erste Klasse bieten sich da die Zuordnungen dar, die im zwei-dimensionalen Gebiete Punkt und Gerade, im dreidimensionalen Punkt und Ebene vertauschen. Ich beschränke mich hier auf den ersten Fall und folge im übrigen dem Gedankengange, den zuerst *Plücker 1831* im zweiten Teile seiner bereits früher (S. 61) genannten „*Analytisch-geometrischen Entwicklungen*“ benutzt hat. Bei diesem liefert die analytische Formulierung den Ausgangspunkt.

Die erste dort verwendete Idee ist, wie ich es ja schon früher (S. 63 f.) ausführte, die, die Konstanten  $u, v$  der etwa in der Form:

$$(1) \quad ux + vy = 1$$

geschriebenen Geradengleichung als *Geradenkoordinaten* mit den gewöhnlichen Punktkoordinaten durchaus in Parallele zu stellen und mit beiden Koordinatenarten in ganz analoger, „dualer“ Weise das Gebäude der analytischen Geometrie aufzuführen. So entsprechen sich insbesondere in der Ebene die durch die Punktgleichung  $f(x, y) = 0$  als *geometrischer Ort von Punkten dargestellte Kurve* und die durch die Geradengleichung  $g(u, v) = 0$  als *Umhüllungsgebilde einer einfach unendlichen Geradenschar definierte Kurve*.

Eine eigentliche *Transformation*, wie wir sie jetzt betrachten wollen, erhalten wir natürlich erst, wenn wir neben die bisher betrachtete eine Ebene  $E$  noch eine zweite  $E'$  stellen und die Geradenkoordinaten  $u, v$  in  $E$  zu den Punktkoordinaten  $x', y'$  in  $E'$  in Beziehung setzen. Die allgemeinste Transformation dieser Art wäre also durch 2 Gleichungen:

$$(2) \quad u = \varphi(x', y'), \quad v = \chi(x', y')$$

gegeben, d. h. jedem Punkt  $x', y'$  in  $E'$  wird die Gerade in  $E$  zugeordnet, deren Gleichung sich durch Eintragen dieser Worte in (1) ergibt. Betrachten wir zunächst

1. das *einfachste Beispiel einer solchen Transformation*, das durch die Gleichungen:

$$(3) \quad u = x', \quad v = y'$$

gegeben ist; durch sie wird also dem Punkte  $x', y'$  der Ebene  $E'$  in  $E$  einfach die Gerade:

$$(3a) \quad x'x + y'y = 1$$

zugeordnet. Es ist bekannt, daß dies diejenige Gerade ist, die dem Punkte  $x', y'$  (wir denken uns jetzt die Ebenen  $E, E'$  so aufeinandergelegt, daß ihre Koordinatensysteme sich decken) in bezug auf den Einheitskreis um den Nullpunkt ( $x^2 + y^2 = 1$ ) als Polare zugehört, so daß unsere Transformation also die bekannte Polarenverwandtschaft des Kreises ist (vgl. Abb. 78).

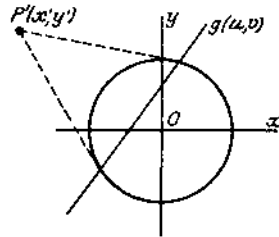


Abb. 78.

Wir bemerken, daß an Stelle der beiden Gleichungen (3) auch die eine Gleichung (3 a) allein zur Definition der Verwandtschaft hinreicht, da sie die Gleichung der jedem Punkt  $x', y'$  entsprechenden Geraden dar-

stellt. Da sie in  $x, y$  einerseits,  $x', y'$  andererseits völlig symmetrisch ist, so müssen die beiden Ebenen  $E, E'$  für unsere Verwandtschaft genau die gleiche Rolle spielen, d. h. es muß auch jedem Punkte von  $E$  eine Gerade in  $E'$  entsprechen, und bei aufeinandergelegten Ebenen muß einem Punkte dieselbe Gerade entsprechen, gleichgültig, ob wir ihn nach  $E$  oder nach  $E'$  rechnen. Im Hinblick auf die erste Eigenschaft bezeichnet man die Transformation im engeren Sinne als dualistisch, im Hinblick auf die zweite als reziprok. Man kann also, ohne die beiden Ebenen zu unterscheiden, schlechtweg von der Zuordnung einer bestimmten Polare zu einem Pole sprechen und dann die Reziprozitätseigenschaft in der bereits früher (S. 62) angegebenen Weise ausdrücken.

Hinsichtlich der weiteren Eigenschaften dieser Transformation bemerke ich hier nur, daß wir einer vom Punkte  $x', y'$  durchlaufenen Kurve der Ebene  $E'$  gemäß dem Dualitätsprinzip als entsprechendes Gebilde die von den entsprechenden Geraden  $u, v$  umhüllte Kurve der Ebene  $E$  zuordnen werden.

2. Man kann nun leicht ganz analog zu unseren früheren Erörterungen über die allgemeinsten „Kollineationen“ beweisen, daß die allgemeinste dualistische Verwandtschaft entsteht, wenn man in Verallgemeinerung des Ansatzes (3)  $u, v$  gleich allgemeinen linear gebrochenen Funktionen von  $x', y'$  mit dem gleichen Nenner setzt:

$$(4) \quad \begin{cases} u = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3}, \\ v = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3}. \end{cases}$$

Führt man diese Ausdrücke für  $u$  und  $v$  in die Gleichung (1) ein, so entsteht nach Heraufmultiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner wegen



der Willkürlichkeit der 9 Koeffizienten  $a_1, \dots, c_3$  die *allgemeinste sowohl in  $x, y$  als auch in  $x', y'$  lineare Gleichung*:

$$(4a) \quad a_1 x x' + b_1 x y' + c_1 x + a_2 y x' + b_2 y y' + c_2 y - a_3 x' - b_3 y' - c_3 = 0.$$

Umgekehrt stellt aber auch jede solche in  $x, y$  und  $x', y'$  „bilineare“ Gleichung eine dualistische Transformation zwischen den Ebenen  $E, E'$  dar; denn so wie man das eine Koordinatenpaar festhält, d. h. einen festen Punkt in einer der beiden Ebenen betrachtet, ist die Gleichung eine lineare Funktion in den anderen beiden Koordinaten und stellt daher eine jenem Punkte zugeordnete Gerade der anderen Ebene dar.

3. Diese Verwandtschaft ist aber im allgemeinen nicht auch *reziprok* im oben definierten Sinne, vielmehr ist sie das nur dann, wenn immer zwei symmetrische Terme in (4a) denselben Koeffizienten haben, wenn jene Gleichung also lautet:

$$(5) \quad A x x' + B(x y' + y x') + C y y' + D(x + x') + E(y + y') + F = 0.$$

Die hierdurch bestimmte Transformation ist wieder aus der Kegelschnittlehre wohl bekannt; sie ist die *Zuordnung von Pol und Polare in bezug auf den Kegelschnitt*:

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0.$$

Jede solche Polarenverwandtschaft ist eine dualistische reziproke Verwandtschaft.

Man kann hieran die Betrachtung einer wesentlich allgemeineren Klasse von Transformationen mit Wechsel des Raumelements unmittelbar anschließen, nämlich die der Berührungstransformationen.

## 2. Die Berührungstransformationen.

Man erhält diese von *Sophus Lie* so benannten Transformationen, wenn man statt der bilinearen Gleichung (4a) irgendeine beliebige, selbstverständlich den notwendigen Stetigkeitsbedingungen genügende höhere Gleichung in den 4 Punktkoordinaten beider Ebenen:

$$(1) \quad \Omega(x, y; x', y') = 0$$

an die Spitze stellt, die man nach *Plücker* als *Aequatio directrix* oder *Leitgleichung* bezeichnet. Für die Ebene sind die in Betracht

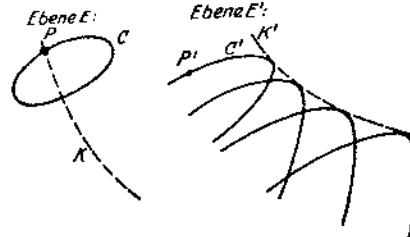


Abb. 79.

kommenden Entwicklungen bereits sämtlich in *Plücker's* oben genanntem Werke<sup>1)</sup> enthalten. Halten wir zunächst  $x, y$  fest, d. h. betrachten wir einen bestimmten Punkt  $P(x, y)$  in  $E$  (vgl. Abb. 79), so stellt  $\Omega = 0$  als Gleichung für die laufenden Koordinaten  $x', y'$  eine be-

<sup>1)</sup> a. a. O. S. 259–265.

stimmte Kurve  $C'$  in der Ebene  $E'$  dar, und diese Kurve ordnen wir als neues Element der Ebene  $E'$  — so wie bisher die Gerade — dem Punkte  $P$  zu. Nehmen wir aber nun einen festen Punkt  $P'(x', y')$  in  $E'$ , etwa auf der Kurve  $C'$  an, so bestimmt dieselbe Gleichung  $\Omega = 0$ , in der wir jetzt dem zweiten Variablenpaare  $x', y'$  feste Werte erteilen und  $x, y$  als laufende Koordinaten auffassen, eine bestimmte Kurve  $C$  in  $E$ , die natürlich durch jenen ersten Punkt  $P$  gehen muß. Damit haben wir die Punkte  $P$  in  $E$  den  $\infty^2$  Kurven  $C'$  in  $E'$  und die Punkte  $P'$  von  $E'$  den  $\infty^2$  Kurven  $C$  von  $E$  zugeordnet, genau wie vorhin die Punkte den Geraden.

Bewegt sich nunmehr ein Punkt  $P$  in  $E$  auf einer ganz beliebigen (gestrichelt gezeichneten) Kurve  $K$ , so entspricht jeder einzelnen Lage von  $P$  eine bestimmte Kurve  $C'$  in  $E'$ . Um aber aus der von diesen Kurven  $C'$  gebildeten einfach unendlichen Kurvenschar eine einzige Kurve in  $E'$  zu erhalten, die wir der Kurve  $K$  in  $E$  entsprechen lassen können, übertragen wir das allgemeine, schon bei der dualistischen Verwandtschaft angewandte „Umhüllungsprinzip“ auf unsern gegenwärtigen Fall: *Wir ordnen  $K$  diejenige Kurve  $K'$  in  $E'$  zu, die von den vermöge  $\Omega = 0$  den einzelnen Punkten von  $K$  entsprechenden Kurven  $C'$  umhüllt wird.* So haben wir aus der Leitgleichung  $\Omega = 0$  tatsächlich eine Transformation der Ebenen gewonnen, in der jeder Kurve der einen eine bestimmte Kurve der andern entspricht; denn ganz dieselben Erörterungen können wir auch von einer beliebigen Kurve  $K'$  in  $E'$  ausgehend anstellen.

Um diese Betrachtungen *analytisch* zu verfolgen, denken wir uns die Kurve  $K$  durch ein geradliniges Polygon mit lauter sehr kleinen Seiten ersetzt, wie man das in der Differentialrechnung der Anschaulichkeit halber gern tut, und fragen erst einmal, was einer einzigen solchen Polygonseite denn entspricht. Hierbei ist natürlich immer an den Grenzübergang zur Kurve zu denken, so daß wir unter der Polygonseite schließlich nichts als den Inbegriff eines *Punktes  $P$  und seiner Fortschreitungs-*

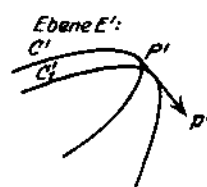
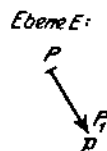


Abb. 80.

*richtung* (die Tangentenrichtung von  $K$  in ihm), ein sog. *Linienelement*, zu verstehen haben. Wir nehmen nun in dieser Richtung von  $P$  einen Punkt  $P_1$  (vgl. Abb. 80) mit den Koordinaten  $x + dx, y + dy$  an, wobei  $dx, dy$  beliebig klein sind und schließlich gegen Null konvergieren, aber  $\frac{dy}{dx}$

stets den bestimmten, die gegebene Richtung charakterisierenden Wert  $\rho$  besitzt. Dem Punkte  $P$  entspricht in  $E'$  die Kurve  $C'$ , deren Gleichung in laufenden Koordinaten  $x', y'$ :

$$\Omega(x, y; x', y') = 0$$

ist, dem Punkte  $P_1$  aber entspricht die Kurve  $C'_1$  mit der Gleichung:

$$\Omega(x + dx, y + dy; x', y') = 0,$$

oder wenn wir nach  $dx$  und  $dy$  entwickeln und wegen des schließlichen Grenzüberganges nur die linearen Glieder berücksichtigen:

$$\Omega(x, y; x', y') + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die Koordinaten  $x', y'$  des Schnittes  $P'$  von  $C'$  und  $C'_1$ , der in der Grenze der Berührungspunkt von  $C'$  mit der Enveloppe  $K'$  ist; wir können die Gleichungen, da  $\frac{dy}{dx} = p$  war, auch ersetzen durch:

$$(2) \quad \begin{cases} \Omega(x, y; x', y') = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} p = 0. \end{cases}$$

Weiterhin aber haben  $C'$  und  $C'_1$  im Punkte  $P'$  in der Grenze die Tangentenrichtung  $p' = \frac{dy'}{dx'}$  gemein, die gleichzeitig auch die Richtung der Enveloppe  $K'$  in  $P'$  ist. Da  $\Omega = 0$  die Gleichung von  $C'$  in laufenden Koordinaten  $x', y'$  ist, bestimmt diese Tangentenrichtung sich aus der Gleichung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} dy' = 0$$

oder:

$$(3) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} p' = 0.$$

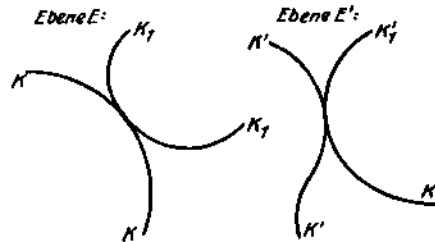


Abb. 81.

Kennt man von  $K$  also nur einen Punkt  $P$  und die Tangentenrichtung  $p$  in ihm, so ist bereits ein Punkt  $P'$  der entsprechenden Kurve  $K'$  nebst deren Richtung  $p'$  in ihm bestimmt. Man sagt daher, daß unsere Transformation jedem Linienelement  $x, y, p$  der Ebene  $E$  ein bestimmtes Linienelement  $x', y', p'$  der Ebene  $E'$  vermöge der Gleichungen (2), (3) zuordnet.

Indem wir diese Betrachtung auf jede Seite des die Kurve  $K$  annähernden Polygons bzw. auf jedes ihrer Linienelemente anwenden, erhalten wir in  $E'$  die Seiten eines die entsprechende Kurve  $K'$  annähernden Polygons bzw. die Linienelemente dieser Kurve. Die Gleichungen (2) stellen daher nach  $x', y'$  aufgelöst die Kurve  $K'$  analytisch dar, wenn man  $x, y, p$  die Werte der Koordinaten bzw. der Tangentenrichtung aller Punkte von  $K$  durchlaufen läßt (vgl. Abb. 81).

Nun wird auch klar, warum Lie diese Transformationen Berührungstransformationen nannte. Denn berühren sich 2 Kurven in  $E$ , so heißt

das nichts anderes, als daß sie ein Linienelement gemein haben; also müssen auch die entsprechenden Kurven in  $E'$  ein Linienelement, d. h. einen Punkt und die Richtung in ihm gemein haben. *Die Berührung zweier Kurven ist also eine bei der Transformation invariante Eigenschaft*, und das soll jener Name aussagen. Lie hat die Lehre von diesen Berührungstransformationen namentlich im *Raume* wesentlich weiter entwickelt; eine zusammenfassende Darstellung hat er gemeinsam mit *G. Scheffers* 1896 in der „*Geometrie der Berührungstransformationen*“ begonnen, die leider nicht weit über den ersten Band herausgekommen ist<sup>1)</sup>.

Nachdem ich so die *Theorie* der Transformationen mit Wechsel des Raumelements kurz dargelegt habe, will ich sie wenigstens durch einige wenige Beispiele anschauungsmäßig beleben, um zu zeigen, was man in den Anwendungen mit diesen Dingen anfangen kann.

### 3. Einige Beispiele.

Lassen Sie mich zunächst von den *dualistischen Transformationen* reden und der Rolle, die sie in der *Lehre von den Gestalten algebraischer Kurven* spielen. Wir wollen zusehen, wie sich typische Kurvengestalten bei dualistischen Umformungen, etwa bei der reziproken Polarenverwandtschaft in bezug auf einen Kegelschnitt, verändern, wobei wir uns natürlich auf ganz wenige charakteristische Fälle beschränken müssen. So hebe ich zunächst bei der *Kurve dritter Ordnung* den Typus des *unpaaren Zuges* hervor, der von jeder Geraden in einem oder drei reellen Punkten geschnitten wird. In der nebenstehenden Skizze (vgl.

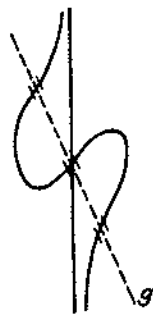


Abb. 82.

Abb. 82) hat er *1 Asymptote*; man kann daraus aber sofort eine Gestalt mit *3 Asymptoten* herleiten, indem man die Ebene derart projektiv transformiert, daß eine die Kurve dreimal schneidende Gerade in die unendlich ferne Gerade übergeht. Jedenfalls aber hat die Kurve *3 reelle Wendepunkte*, und diese haben die besondere Eigenschaft, *in einer Geraden* zu liegen. Bei der Dualisierung entsteht nun aus dieser Kurve eine *Kurve dritter Klasse*, an die von jedem Punkt

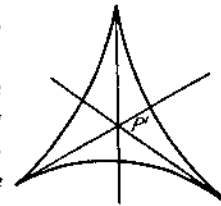


Abb. 83.

aus eine oder drei reelle Tangenten gehen. Dem Wendepunkt entspricht dabei eine *Spitze*, was man freilich sich durch eingehende Überlegung klarmachen muß; Sie finden solche Betrachtungen übrigens ausführlich in meinen früheren geometrischen Vorlesungen. Die Kurve dritter Klasse, die hier entsteht (vgl. Abb. 83), hat also im ganzen *3 Spitzen*, und die *Tangenten dasebst müssen*

<sup>1)</sup> Bd. I. Leipzig 1896. Die drei ersten Kapitel des zweiten Bandes sind posthum in den *Mathematischen Annalen* Bd. 59 (1904) abgedruckt worden.

durch ein und denselben Punkt  $P'$  gehen, welcher dual der die 3 Wendepunkte enthaltenden Geraden  $g$  entspricht.

Analoge kurze Angaben will ich noch über die *Kurve vierter Ordnung und vierter Klasse* machen. Bei einer Kurve vierter Ordnung kann die Gestalt eines *Ovales mit einer Einbuchtung* auftreten; ja es können sogar *Gestalten mit 2, 3 und 4 Einbuchtungen* auftreten (vgl. Abb. 84). Im

ersten Falle sind im Reellen 2 Wendepunkte und 1 Doppeltangente, in den weiteren bis zu 8 Wendepunkten und 4 Doppeltangenten vorhanden. Dualisieren wir, so haben wir dem oben bereits Gesagten noch die Überlegung hinzuzufügen, daß einer Doppel-

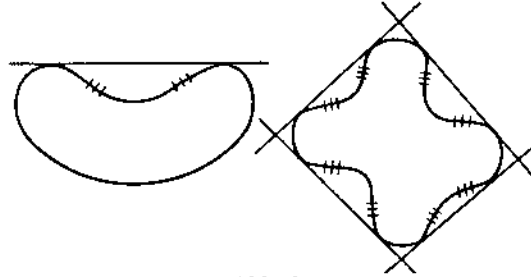


Abb. 84.

tangente dual ein *Doppelpunkt* entspricht. Es entstehen also Typen von *Kurven vierter Klasse mit 2 bis 8 Spitzen und 1 bis 4 Doppelpunkten*, wie skizziert in Abb. 85. Es hat einen eigenen Reiz, die Gestalten der algebraischen Kurven eingehender durchzuarbeiten; ich kann sie hier leider nicht näher verfolgen und muß mich mit diesen kurzen Hinweisen begnügen<sup>1)</sup>. Sie zeigen aber wohl hinreichend, wie unsere dualistischen Transformationen Dinge unter das gleiche Gesetz bringen, die für die naive Anschauung so verschieden wie nur möglich sind.

Ich komme nun zu den *Anwendungen der Theorie der Berührungstransformationen*; hier zeigt es sich interessanterweise, daß die Idee der Berührungstransformation wie die meisten theoretisch wirklich guten Gedanken in der Praxis ein weites Anwendungsfeld findet, ja daß man sie dort schon lange vor ihrer theoretischen Durcharbeitung wirklich gehandhabt hat. Es ist die alte *Lehre von den Zahnrädern*, die ich hier besonders im Auge habe. Sie bildet ein *spezielles Kapitel der*



Abb. 85.

*Kinematik*, der allgemeinen Lehre von den Bewegungsmechanismen, die von zentraler Bedeutung z. B. für die Maschinentechnik ist. In diese Kinematik gehören ja auch die Geradfürungen hinein, von denen wir neulich ein Beispiel hatten. Auch für die Kinematik gilt, was ich Ihnen schon oft in dieser Vorlesung sagen mußte: Ich kann hier natürlich immer nur kleine

<sup>1)</sup> [Siehe F. Klein: Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. II, S. 89 ff., S. 136 ff., S. 99 ff., Berlin: Springer 1922, die beiden Arbeiten „Über eine neue Art Riemannscher Flächen“ und die erste Arbeit „Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven 4. Grades“.]

Teile jeder einzelnen Disziplin herausgreifen und an einfachen Beispielen ihren Sinn und ihre Bedeutung möglichst handgreiflich schildern. Im einzelnen müssen Sie sich dann nach diesen Anregungen in Spezialdarstellungen zurechtzufinden suchen; als Hauptorientierungsmittel in dem Gesamtgebiet der Kinematik empfehle ich das einschlägige *Enzyklopädiereferat von A. Schoenflies (IV 3)*, das auch über die gewaltige Literatur gut Auskunft gibt.

Die Aufgabe der Zahnradkonstruktionen ist, *gleichförmige Bewegung von einem Rade auf ein anderes zu übertragen*. Da dabei aber auch Kräfte übertragen werden sollen, so genügt es nicht, die Räder aufeinander abrollen zu lassen (vgl. Abb. 86), sondern man muß dem einen Rade Vorsprünge, Zähne, geben, die in Lücken des anderen eingreifen. Das

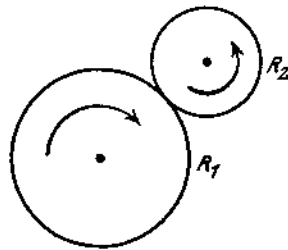


Abb. 86.

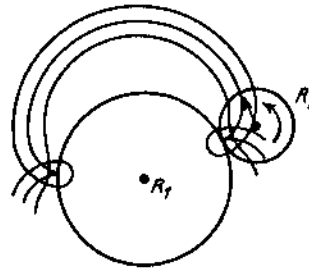


Abb. 87.

Problem ist daher, *die Profile oder Flanken dieser Zähne so zu gestalten, daß eine gleichförmige Drehung des einen Rades auch eine gleichförmige Drehung des anderen bewirkt*. Das ist gewiß eine auch geometrisch sehr interessante Fragestellung. Ich gebe sogleich den wichtigsten Teil der Lösung dieses Problems an. *Die Zähne des einen Rades können wesentlich willkürlich gewählt werden, mit den selbstverständlichen durch die praktische Verwertbarkeit bedingten Beschränkungen, daß die einzelnen Zähne nicht miteinander kollidieren u. dgl., die Zähne des zweiten Rades sind aber dann notwendig bestimmt, und zwar leiten sie sich durch eine ein für allemal feststehende Berührungstransformation aus den Zähnen des ersten Rades ab.*

Es mag hier genügen, wenn ich das Zustandekommen dieses Theorems kurz erläutere, ohne es vollständig zu beweisen. Man bemerkt unmittelbar, daß es nur auf die Relativbewegung beider Räder gegeneinander ankommt. Man darf also etwa das eine Rad  $R_1$  überhaupt festgehalten denken, während das andere  $R_2$  neben seiner Drehung um  $R_1$  herumläuft. Dabei beschreibt jeder Punkt, der mit  $R_2$  fest verbunden ist, in der ruhenden Ebene von  $R_1$  eine Epizykloide (vgl. Abb. 87), und zwar ist diese gestreckt, hat Spitzen oder ist verschlungen, je nachdem der betrachtete Punkt innerhalb, auf oder außerhalb der Peripherie von  $R_2$  liegt. *Damit ist jedem Punkt der beweglichen Ebene von  $R_2$  in der festen*

Ebene von  $R_1$  eine bestimmte Kurve zugeordnet, und wenn wir zu der diese Zuordnung vermittelnden Gleichung nach dem vorhin angegebenen Verfahren die *Berührungstransformation* ermitteln, so haben wir gerade die in Aussicht gestellte, für die Zahnräder charakteristische *Berührungstransformation*. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß zwei einander vermöge dieser *Berührungstransformation* entsprechende Kurven bei der Bewegung tatsächlich aufeinander abschroteten.

Endlich noch ein Wort darüber, wie sich das hiermit angedeutete theoretische Prinzip bei der praktischen Konstruktion der Zahnräder gestaltet. Ich rede nur von dem einfachsten Fall, der sog. *Triebstockverzahnung*. Da sind die Zähne von  $R_2$  einfach *Punkte* (vgl. Abb. 88) oder vielmehr, da diese keine Kraftübertragung geben würden, kleine *kreisförmige Zapfen*, die sog. *Triebstöcke*. Jedem solchen kleinen Kreis entspricht durch die *Berührungstransformation* eine Kurve, die sich sehr wenig von einer Epizykloide unterscheidet, nämlich eine Parallelkurve zu ihr in einem dem Radius des Triebstockes gleichen Abstände. Auf diesen Kurven rollen die Kreise bei der Drehung von  $R_2$  ab, sie bilden also die Flanken der Zähne, die man auf  $R_1$  aufsetzen muß, damit die kreisförmigen Zähne, die Triebstöcke, von  $R_2$  gerade richtig eingreifen. In dem Modell, das ich Ihnen hier vorlege, sehen Sie in der Tat jeweils die Anfänge dieser Kurven als Profile der Zähne von  $R_1$  realisiert — jede Kurve so weit, daß immer gerade ein Zahn nach dem andern eingreift.

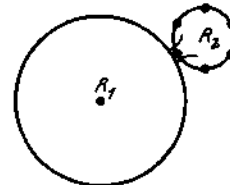


Abb. 88.

Ich zeige Ihnen noch die Ausführungen zweier gleichfalls in der Praxis viel benutzter Verzahnungen, der *Evolventen- und der Zykloidenverzahnung*<sup>1)</sup>. Bei der ersten bestehen, wie ich hier nur ganz kurz berichten will, die Zahnprofile beider Räder aus *Kreisevolventen* (vgl. Abb. 89), das sind Kurven, die durch das Abwickeln eines gespannten Fadens von einem Kreise entstehen und deren Evoluten also Kreise sind; bei der andern sind sie aus *Zykloidenstücken* zusammengesetzt.

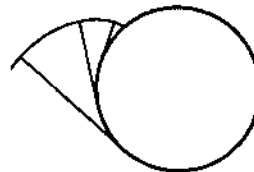


Abb. 89.

Ich hoffe Ihnen damit wenigstens eine erste Orientierung darüber gegeben zu haben, um welche Probleme es sich in der Lehre von den Transformationen mit Wechsel des Raumelements handelt; ich habe jetzt, bevor wir diesen zweiten von den Transformationen überhaupt handelnden Hauptteil verlassen, nur noch anhangsweise über ein wichtiges Kapitel zu reden, das in einer Enzyklopädie der Geometrie nicht fehlen darf, nämlich über die Benutzung *imaginärer Elemente*.

<sup>1)</sup> Alle diese Modelle sind von F. Schilling konstruiert (Verlag von M. Schilling, Leipzig).

### V. Die Imaginärtheorie.

Die Lehre vom Imaginären ist bekanntlich zuerst in der Algebra und Analysis ausgebildet worden, insbesondere in der Gleichungslehre und der Funktionentheorie komplexer Variabler, wo sie ja ihre größten Triumphe gefeiert hat. Weiterhin hat man aber auch frühzeitig in der analytischen Geometrie den Variablen  $x, y$  komplexe Werte  $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$  erteilt und damit — zunächst ohne mit dieser der Analysis entnommenen Sprechweise irgendeinen eigentlichen geometrischen Sinn zu verbinden — den reellen Punkten eine große Mannigfaltigkeit komplexer Punkte hinzugefügt.

Der Nutzen dieser Neueinführungen soll natürlich darin bestehen, daß sie die bei Beschränkung auf reelle Variable nötigen Fallunterscheidungen überflüssig machen und das Aussprechen allgemeiner, ausnahmsloser Sätze gestatten. Ganz analoge Überlegungen hatten uns ja bereits in der projektiven Geometrie zur Einführung der unendlich fernen Punkte sowie der von ihnen erfüllten unendlich fernen Ebene bzw. Geraden geführt. Das eine wie das andere Mal tun wir das, was man passend als „Adjunktion uneigentlicher Punkte“ zu den eigentlichen, anschaulich erfaßbaren Punkten des Raumes bezeichnet.

Wir wollen nunmehr beide Adjunktionen gleichzeitig vollziehen. Zu diesem Zweck führen wir, wie früher, *homogene Koordinaten* ein, setzen also, um zunächst in der Ebene zu bleiben,  $x : y : 1 = \xi : \eta : \tau$  und lassen für  $\xi, \eta, \tau$  auch komplexe Werte zu. Das Wertesystem  $0, 0, 0$  schließen wir aus. Betrachten wir dann beispielsweise eine homogene quadratische Gleichung:

$$(1) \quad A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0,$$

so werden wir den Inbegriff aller ihr genügenden reellen und komplexen Wertesysteme  $\xi, \eta, \tau$  (gleichgültig, ob sie endliche oder unendlich ferne Punkte darstellen) eine *Kurve zweiter Ordnung* nennen. Man sagt dafür auch wohl manchmal einfach *Kegelschnitt*, aber das kann, wenn nicht bei den Leuten, die die Sache kennen, so doch bei den vielen, denen die Betrachtung imaginärer Elemente nicht geläufig ist, Mißverständnisse hervorrufen; braucht doch z. B. eine Kurve nach dieser Definition keinen einzigen reellen Punkt zu enthalten.

Kombinieren wir nun (1) mit einer *linearen Gleichung*:

$$(2) \quad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\tau = 0,$$

die wir als Definition einer *Kurve erster Ordnung*, d. h. einer *Geraden*, auffassen. Diese beiden Gleichungen haben dann genau 2 Lösungstriple  $\xi : \eta : \tau$  gemein, d. h. *eine Kurve erster und eine zweiter Ordnung „schneiden“ sich stets genau in 2 Punkten, die freilich reell oder komplex, endlich oder unendlich fern, getrennt oder zusammenfallend sein können*. Freilich sind Ausartungen, die Ausnahmen von diesem Satze herbeiführen,



denkbar. Zerfällt die linke Seite von (1) in 2 Linearfaktoren und ist der eine von ihnen mit der linken Seite von (2) identisch, d. h. ist die Kurve zweiter Ordnung ein „Geradenpaar“ und (2) mit einer ihrer Geraden identisch, so ist eben jeder Punkt von (2) gemeinsamer Punkt. Das kommt darauf hinaus, daß die quadratische Gleichung, die durch Elimination einer Variablen aus den beiden gegebenen Gleichungen entsteht, in diesem Falle durchweg verschwindende Koeffizienten hat. Noch weitergehende Ausartungen treten natürlich ein, wenn die linke Seite einer oder gar beider gegebenen Gleichungen selbst identisch verschwindet ( $A = B = \dots = F = 0$  oder  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ). Ich will jedoch alle diese und ähnliche Besonderheiten, die dem Wesen der Sache nach sämtlich trivial sind, im folgenden ganz beiseite lassen. Dann dürfen wir z. B., wenn wir zur Betrachtung *zweier Kurven zweiter Ordnung* aufsteigen, den Satz aussprechen, daß sie stets gerade *4 Punkte* gemein haben.

Führen wir nunmehr auch im *Raume* homogene Koordinaten  $x : y : z : 1 = \xi : \eta : \zeta : \tau$  ein und erteilen ihnen, wieder von dem Wertesystem  $0 : 0 : 0 : 0$  abgesehen, beliebige komplexe Werte; die Gesamtheit der Lösungen einer in diesen 4 Variablen linearen bzw. quadratischen homogenen Gleichung werden wir dann *Fläche erster Ordnung (Ebene)* bzw. *Fläche zweiter Ordnung* nennen. Dann gilt wiederum allgemein — von trivialen Ausnahmen abgesehen —, daß eine *Fläche zweiter Ordnung von einer Ebene in einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten wird, und daß zwei Flächen zweiter Ordnung sich in einer Raumkurve vierter Ordnung schneiden, die ihrerseits mit jeder Ebene 4 Punkte gemein hat*. Dabei ist es unentschieden, ob diese Schnittkurven reelle Äste haben oder nicht, ob sie im Endlichen oder Unendlichfernen verlaufen.

Nun hat bereits *Poncelet* 1822 in seinem schon genannten „*Traité des propriétés projectives des figures*“ diese Begriffe auf *Kreise und Kugeln* angewandt; freilich benutzte er nicht homogene Koordinaten und die durch sie ermöglichten präzisen analytischen Formulierungen, sondern er folgte mehr seinem starken Gefühle für geometrische Kontinuität. Gehen wir, um seine merkwürdigen Resultate in genauer Form kennenzulernen, von der *Kreisgleichung*:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

aus, die wir homogen schreiben:

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0.$$

Der Schnitt mit der unendlich fernen Geraden  $\tau = 0$  wird also gegeben durch:

$$\xi^2 + \eta^2 = 0, \quad \tau = 0.$$

Aus diesen Gleichungen sind die den zugrunde gelegten Kreis charakterisierenden Konstanten  $a, b, r$  herausgefallen. *Jeder beliebige Kreis schneidet also die unendlich ferne Gerade in denselben beiden festen Punkten:*

$$\xi : \eta = \pm i, \quad \tau = 0,$$

die man kurz die (*imaginären*) *Kreispunkte* nennt. Ganz genau so leitet man ab, daß alle *Kugeln des Raumes die unendlichferne Ebene in ein und demselben imaginären Kegelschnitt schneiden*:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0.$$

den man auch schlechtweg (*imaginären*) *Kugelkreis* nennt.

Es gilt aber auch das Umgekehrte: *Jede Kurve zweiter Ordnung, die durch die beiden Kreispunkte der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene geht, ist ein Kreis, und jede Fläche zweiter Ordnung, die die unendlich ferne Ebene im Kugelkreis schneidet, ist eine Kugel*, so daß wir hier charakteristische Eigenschaften von Kreis und Kugel haben.

Ich habe absichtlich nicht gesagt „unendlich ferne“ Kreispunkte und „unendlich ferner“ Kugelkreis, wie es wohl manchmal geschieht. Der *Abstand der Kreispunkte vom Koordinatenanfangspunkt* ist nämlich nicht bestimmt unendlich, wie man zunächst vielleicht glauben möchte, sondern er hat die Form  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\tau} = \frac{0}{0}$  und ist demnach *unbestimmt*; je nach dem Grenzübergang zu den Kreispunkten kann man ihm jeden beliebigen Wert erteilen. Ebenso ist die Entfernung der Kreispunkte von *jedem* endlichen Punkte unbestimmt, und dasselbe gilt auch für die Entfernung eines jeden Punktes des Kugelkreises von einem endlichen Raumpunkte. Das ist nun keineswegs wunderbar, denn wir haben ja von den Kreispunkten gleichzeitig verlangt, daß sie von einem endlichen Punkte den Abstand  $r$  haben (auf dem Kreis mit  $r$  um ihn liegen, wobei  $r$  einen beliebig gegebenen Wert haben kann) und unendlich fern von ihm sein sollen; diesen scheinbaren Widerspruch kann die analytische Formel nur dadurch ausgleichen, daß sie jene Unbestimmtheit liefert. Man muß sich diese einfachen Dinge einmal ganz klarmachen, um so mehr, als häufig Falsches darüber geredet und geschrieben wird.

Die Kreispunkte und der Kugelkreis gestatten es, *die Theorie der Kreise und Kugeln der allgemeinen Theorie der Gebilde zweiter Ordnung aufs schönste unterzuordnen*, während für die elementare Betrachtung gewisse Verschiedenheiten zu bestehen scheinen. So spricht man in der elementaren analytischen Geometrie immer nur von *zwei* Schnittpunkten zweier Kreise, da die Elimination einer Unbekannten aus ihren Gleichungen nur auf eine quadratische Gleichung führt. Nun haben die beiden Kreise aber noch auf der unendlichfernen Geraden die beiden Kreispunkte gemein, die die elementare Darstellung nicht berücksichtigt, und so kommen wir tatsächlich auf die durch das oben genannte allgemeine Theorem für 2 Kurven zweiter Ordnung erforderliche Anzahl von 4 *Schnittpunkten*. Ganz analog spricht man zunächst immer nur von *einem* Kreise, in dem 2 Kugeln sich treffen und der übrigens reell oder imaginär sein kann; wir wissen aber jetzt, daß die Kugeln in der unendlichfernen Ebene noch überdies den *Kugelkreis* gemein haben, und dieser ergänzt jenen

endlichen Kreis zu der Raumkurve vierter Ordnung, die unser allgemeiner Satz als Schnittkurve fordert.

Ich möchte nun im Anschluß daran einige Worte über die sogenannte *Imaginärtransformation* sagen. Man versteht darunter *Kollineationen mit imaginären Koeffizienten*, die imaginäre Punkte, für die man sich gerade vorzugsweise interessiert, in reelle Punkte überführen. So wird man hier in der Theorie der Kreispunkte mit Vorteil die Transformation:

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = i\eta, \quad \tau' = \tau$$

verwenden; denn durch sie geht die Gleichung  $\xi^2 + \eta^2 = 0$  in  $\xi'^2 - \eta'^2 = 0$  über, und daher werden die *Kreispunkte*  $\xi : \eta = \pm i, \tau = 0$  in die reellen unendlich-fernen Punkte:

$$\xi' : \eta' = \pm 1, \quad \tau = 0$$

verwandelt, das sind die unendlich fernen Punkte der beiden um  $45^\circ$  gegen die Achsen geneigten Richtungen. Alle Kreise werden also in Kegelschnitte übergeführt, die durch diese beiden reellen unendlichfernen Punkte gehen, und das sind einfach *sämliche gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten jene Winkel  $\pm 45^\circ$  mit den Achsen bilden* (vgl. Abb. 90). An dem Bilde dieser Hyperbeln kann man sich nun alle Theoreme über Kreise anschaulich klar machen, was für viele Zwecke — besonders auch bei den analogen Entwicklungen im Raume — äußerst bequem und nützlich ist. Im Rahmen dieser Vorlesung muß ich es jedoch mit diesen Andeutungen genug sein lassen; nähere Ausführungen pflegt man in den Vorlesungen und Büchern über „projektive Geometrie“ zu geben.

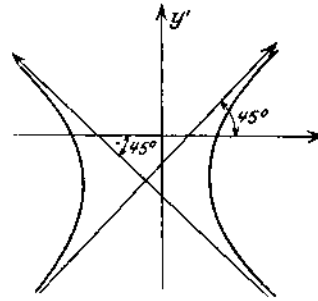


Abb. 90.

Es entsteht nun die Frage, ob man diesen imaginären Punkten, Ebenen, Kegelschnitten usw. nicht auch *rein geometrisch* nahe kommen kann, ohne sie — wie wir es bisher taten — gewaltsam aus den Formeln der Analysis zu übernehmen. Die älteren Geometer, Poncelet und auch Steiner, hatten hierüber noch keine Klarheit gewonnen; bei Steiner sind die imaginären Größen in der Geometrie noch „Gespenster“, die gleichsam aus einer höheren Welt heraus sich in ihren Wirkungen bemerkbar machen, ohne daß wir von ihrem Wesen eine klare Vorstellung gewinnen können. Erst v. Staudt hat in seinen schon früher genannten Werken, der „*Geometrie der Lage*“<sup>1)</sup> und den „*Beiträgen zur Geometrie der Lage*“<sup>2)</sup>, jene Frage vollkommen gelöst, und mit seinen Betrachtungen müssen wir uns noch ein wenig befassen. Übrigens sind diese Staudtschen Bücher recht schwer lesbar, da er seine Theorien ohne Bezugnahme auf analytische Formeln und ohne induktive Hinweise sogleich in ihrer end-

<sup>1)</sup> Nürnberg 1846.    <sup>2)</sup> Nürnberg 1856—1860.

gültigen Form deduktiv entwickelt. Bequem verständlich ist ja immer nur die genetische Darstellung, die dem vom Autor bei der Entstehung seiner Ideen vermutlich eingeschlagenen Wege folgt.

Den beiden Werken v. Staudts entsprechen *zwei verschiedene Stadien der Entwicklung seiner Theorie*, die ich nun beide kurz darlegen will. In dem Werke von 1846 handelt es sich zunächst nur um die Betrachtung irgend welcher *Gebilde zweiten Grades mit reellen Koeffizienten* — ich sage Gebilde, weil ich die Anzahl der Dimensionen (Gerade, Ebene oder Raum) unentschieden lassen will. Betrachten wir etwa eine *Kurve* zweiter Ordnung in der Ebene, d. h. irgend eine in drei Variablen homogene quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0.$$

Für die analytische Behandlung ist es dann völlig gleichgültig, ob diese Gleichung überhaupt reelle Lösungen hat oder nicht, d. h. ob die Kurve zweiter Ordnung einen reellen Zug besitzt oder nur komplexe Punkte aufweist. Die Frage ist, was sich im letzteren Falle der reine Geometer Anschauliches unter einer solchen Kurve denken, wie er sie mit geometrischen Mitteln definieren soll. Dieselbe Frage entsteht im eindimensionalen Gebiet, wenn wir die Kurve mit irgend einer Geraden, etwa der  $x$ -Achse  $\eta = 0$  schneiden; dann werden die Schnitte — gleichgültig, ob sie reell oder imaginär sind — durch die folgende Gleichung mit reellen Koeffizienten:

$$A\xi^2 + 2D\xi\tau + F\tau^2 = 0$$

geliefert, und die Frage ist, ob man im Falle komplexer Wurzeln irgend einen geometrischen Sinn damit verbinden kann.

Staudts Idee ist nun zunächst folgende: Er betrachtet statt der Kurve zweiter Ordnung das ihr zugehörige *Polarsystem*, von dem wir ja früher (S. 119) sprachen, d. h. eine dualistische reziproke durch die Gleichung:  $A\xi\xi' + B(\xi\eta' + \xi'\eta) + C\eta\eta' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + E(\eta\tau' + \eta'\tau) + F\tau\tau' = 0$  dargestellte Verwandtschaft. Wegen der Realität der Koeffizienten ist das eine *durchaus reelle Beziehung, die jedem reellen Punkte eine reelle Gerade zuordnet* — mag nun der Kurvenzug selbst reell sein oder nicht. Das Polarsystem bestimmt aber seinerseits die Kurve vollkommen als *Gesamtheit der Punkte, die auf ihren eigenen Polaren liegen*, wobei es von vornherein unentschieden bleibt, ob solche Punkte im Reellen existieren. In jedem Falle bildet aber das Polarsystem einen *stets reellen Repräsentanten der durch die Gleichung definierten Kurve zweiter Ordnung*, der statt der Kurve zweckmäßig an die Spitze der Untersuchung gestellt werden kann.

Schneiden wir nun die Kurve mit der  $x$ -Achse, d. h. setzen wir  $\eta$  und  $\eta'$  gleich 0, so haben wir ganz analog auf ihr eine *eindimensionale stets reelle Polarverwandtschaft*, die durch die Gleichung:

$$A\xi\xi' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + F\tau\tau' = 0$$

dargestellt wird und immer 2 reelle Punkte einander reziprok zuordnet. Die Schnittpunkte der  $x$ -Achse mit der Kurve sind die beiden in dieser Polarenverwandtschaft sich selbst entsprechenden Punkte, ihre sogenannten *Grund- oder Ordnungspunkte*. Sie können reell oder imaginär sein, jedenfalls wird auf sie selbst das Interesse erst in zweiter Linie gerichtet, und voran steht wieder die Polarenverwandtschaft als ihr stets reeller Repräsentant.

Man nennt die Paare  $\left(\frac{\xi}{x}, \frac{\xi'}{x'}\right)$  zweier sich in einer solchen eindimensionalen Polarenverwandtschaft entsprechenden Punkte mit einem aus dem 17. Jahrhundert von *Desargues* herrührenden Ausdruck *Punktepaare einer „Involution“*, und zwar unterscheidet man 2 *Hauptarten* solcher Involutionen, je nachdem die *Grundpunkte reell oder imaginär* sind, und einen *Übergangsfall*, in dem sie zusammenfallen. Die Hauptsache aber ist für uns hier der Involutionsbegriff schlechtweg; die Unterscheidung von Fällen, d. h. die Frage nach der Natur der Wurzeln der quadratischen Gleichung, hat erst sekundäres Interesse.

Mit diesen Betrachtungen, die sich natürlich unmittelbar auf 3 Dimensionen übertragen lassen, ist zwar das Imaginäre nicht gedeutet, aber doch — was Gebilde zweiter Ordnung angeht — ein *Standpunkt oberhalb des Unterschiedes von Reell und Imaginär* gewonnen. *Jedes Gebilde zweiter Ordnung wird durch ein reelles Polarsystem dargestellt*, und man kann mit diesen Polarsystemen geometrisch ebenso operieren wie analytisch mit den reellen Gleichungen der Gebilde.

Ein *Beispiel* soll das näher zeigen. Denken wir uns eine Kurve zweiter Ordnung, d. h. also ein Polarsystem in der Ebene gegeben und nehmen eine Gerade hinzu. Da sind für die unmittelbare Anschauung sehr viele verschiedene Fälle möglich, je nachdem die Kurve überhaupt reelle Punkte hat oder nicht und im ersten Falle die Gerade reell schneidet oder nicht. Jedenfalls aber wird durch das ebene Polarsystem auf der Geraden  $g$  (vgl. Abb. 91) ein lineares Polarsystem, d. h. eine Involution festgelegt: Jedem Punkte  $P$  von  $g$  entspricht in ersterem eine Polare  $p'$ , und diese schneidet in  $g$  einen Punkt  $P'$  ein; die Punkte  $(P, P')$  durchlaufen die in Rede stehende Involution. Nachträglich kann man dann nach deren Grundpunkten fragen und sehen, ob sie reell oder imaginär sind. Wir haben damit in geometrischer Sprache genau das zum Ausdruck gebracht, was wir zu Beginn dieser Erörterungen aus den Gleichungen schlossen.

Wir wollen nun diese Betrachtungen insbesondere auf die *imaginären Kreispunkte und den Kugelkreis* anwenden. Wir sagten früher, daß 2 beliebige Kreise die unendlichferne Gerade in denselben beiden Punkten, eben den Kreispunkten, schneiden; das wird jetzt also geometrisch be-

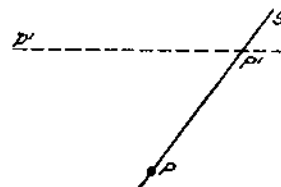


Abb. 91.

deuten, daß ihre Polarsysteme auf der unendlichfernen Geraden ein und dasselbe eindimensionale Polarsystem, dieselbe Involution hervorrufen. In der Tat, ziehen wir (vgl. S. 62) die Tangenten von einem unendlichfernen Punkte  $P$  an einen Kreis, so steht dessen Polare  $p'_1$  als Verbindung der Berührungspunkte der von  $P$  ausgehenden Tangenten auf ihrer gemeinsamen Richtung senkrecht (vgl. Abb. 92). Da alle nach demselben unendlichfernen Punkte gehenden Geraden parallel sind, steht auch dessen Polare  $p'_2$  in bezug auf irgend einen zweiten Kreis auf derselben Richtung

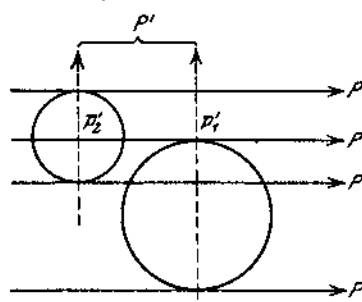


Abb. 92.

senkrecht wie  $p'_1$  und ist daher zu  $p'_1$  parallel; mit anderen Worten,  $p'_1$  und  $p'_2$  schneiden die unendlichferne Gerade ihrerseits in demselben Punkte  $P'$ . Die Polarsysteme aller Kreise schneiden also — das ist das Resultat — in die unendlichferne Gerade ein und dasselbe Polarsystem, die sogenannte „absolute Involution“ ein, deren Punktepaare, von einem beliebigen endlichen Punkte aus betrachtet, jeweils in zueinander senkrechten Richtungen erscheinen.

Wir wollen diese Überlegung nun ins Analytische übertragen. Gehen wir von der homogenen Kreisgleichung:

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0$$

oder:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a\xi\tau - 2b\eta\tau + (a^2 + b^2 - r^2)\tau^2 = 0$$

aus, so ist die zugehörige Polarenverwandtschaft:

$$\xi\xi' + \eta\eta' - a(\xi\tau' + \xi'\tau) - b(\eta\tau' + \eta'\tau) + (a^2 + b^2 - r^2)\tau\tau' = 0;$$

wir erhalten daraus die auf der unendlichfernen Geraden erzeugte Verwandtschaft, wenn wir  $\tau = \tau' = 0$  setzen:

$$\xi\xi' + \eta\eta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0.$$

Diese Gleichungen sind in der Tat von den speziellen Konstanten  $a, b, r$  des Ausgangskreises unabhängig. Dazu lehrt aber die analytische Geometrie, daß wegen der ersten Gleichung zwei nach den Punkten  $\xi, \eta, 0$  und  $\xi', \eta', 0$  gehende Geraden aufeinander senkrecht stehen, so daß wir wirklich wieder den oben ausgesprochenen Satz erhalten haben.

Ganz analoges gilt auch für die Kugeln des Raumes. Sie alle legen auf der unendlichfernen Ebene ein und dieselbe, die sogenannte absolute Polarenverwandtschaft fest, die durch die Gleichungen:

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0$$

gegeben ist; da die erste Gleichung aussagt, daß die Richtungen  $\xi : \eta : \zeta$  und  $\xi' : \eta' : \zeta'$  aufeinander senkrecht stehen, so entspricht dabei jedem

unendlichfernen Punkte  $P$  diejenige unendlichferne Gerade, die von einer auf der nach  $P$  weisenden Richtung senkrechten Ebene ausgeschnitten wird. Damit haben wir ein reelles geometrisches Äquivalent der Sätze über den imaginären Kugelkreis.

Man kann freilich sagen, daß in diesen Betrachtungen das Imaginäre mehr umgangen als gedeutet wird. Eine wirkliche Interpretation einzelner imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen hat *v. Staudt* erst in seinen „Beiträgen“ von 1856/60 durch Weiterbildung jenes Ansatzes gegeben. Ich will auch diese Interpretation hier auseinandersetzen, weil sie im Grunde höchst einfach und sinnreich ist und nur in der abstrakten Darstellung Staudts äußerst fremdartig und schwierig erscheint. Dabei schließe ich mich durchaus der analytischen Darstellung an, wie sie *Stolz* 1871<sup>1)</sup> gegeben hat. *Stolz*, der damals mit mir zusammen in Göttingen war, hatte *Staudt* gelesen, was ich selbst nie fertig gebracht habe. Von ihm lernte ich dann im persönlichen Verkehr die verschiedenen auch in anderer Hinsicht sehr interessanten Staudtschen Ansätze kennen, über die ich späterhin vielfach gearbeitet habe. Ich möchte im folgenden nur wieder die wichtigsten Züge des Gedankenganges hervortreten lassen, ohne alle Einzelheiten vollständig auszuführen; dabei wird es vollkommen genügen, wenn ich mich auf die Ebene beschränke.

Es sei also zunächst einmal ein imaginärer Punkt  $P$  durch seine drei komplexen Koordinaten  $\xi, \eta, \tau$  gegeben; es sei, in die reellen und imaginären Bestandteile getrennt:

$$(1) \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2.$$

Wir wollen nun eine reelle Figur konstruieren, durch die dieser Punkt  $P$  seine Deutung findet, und zwar soll der Zusammenhang ein projektiver sein, d. h. genauer gesagt, er soll durch beliebige reelle projektive Umformungen nicht geändert werden. Der erste Schritt dazu ist, daß wir

1. die beiden reellen Punkte  $P_1, P_2$  ins Auge fassen, deren homogene Koordinaten die reellen bzw. die mit  $-i$  multiplizierten imaginären Bestandteile der gegebenen Koordinaten von  $P$  sind:

$$(1a) \quad P_1: \xi_1, \eta_1, \tau_1; \quad P_2: \xi_2, \eta_2, \tau_2.$$

Diese beiden Punkte sind verschieden, d. h. es ist nicht  $\xi_1 : \eta_1 : \tau_1 = \xi_2 : \eta_2 : \tau_2$ , da sonst  $\xi : \eta : \tau$  sich wie drei reelle Größen verhalten und daher einen reellen Punkt darstellen würden. Daher bestimmen  $P_1, P_2$  eine reelle Gerade  $g$ , deren Gleichung bekanntlich:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0$$

<sup>1)</sup> „Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie.“ *Mathematische Annalen* Bd. 4, S. 416. 1871.

ist; auf ihr liegen sowohl der gegebene imaginäre Punkt  $P$  als auch sein „konjugiert imaginärer Punkt“  $\bar{P}$  mit den Koordinaten:

$$(1) \quad \bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \bar{\eta} = \eta_1 - i\eta_2, \quad \bar{\tau} = \tau_1 - i\tau_2,$$

denn beide Koordinatentripel (1),  $(\bar{1})$  genügen ersichtlich der Geradengleichung (2).

2. Natürlich wird das so konstruierte Punktepaar  $P_1, P_2$  keineswegs als reeller Repräsentant des imaginären Punktes  $P$  gelten können, denn es hängt ganz wesentlich von den Einzelwerten von  $\xi, \eta, \tau$  selbst ab, während für den Punkt  $P$  nur die Verhältnisse dieser Zahlen charakteristisch sind. Es wird also genau derselbe Punkt  $P$  dargestellt, wenn wir statt  $\xi, \eta, \tau$  ihre Produkte mit einer beliebigen komplexen Konstanten:

$$\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$$

schreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho\xi = \varrho_1\xi_1 - \varrho_2\xi_2 + i(\varrho_2\xi_1 + \varrho_1\xi_2), \\ \varrho\eta = \varrho_1\eta_1 - \varrho_2\eta_2 + i(\varrho_2\eta_1 + \varrho_1\eta_2), \\ \varrho\tau = \varrho_1\tau_1 - \varrho_2\tau_2 + i(\varrho_2\tau_1 + \varrho_1\tau_2); \end{cases}$$

dann erhalten wir aber, indem wir wieder den reellen von dem imaginären Teil trennen, statt der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  andere reelle Punkte  $P'_1$  und  $P'_2$  mit den Koordinaten:

$$(3a) \quad \begin{cases} P'_1: \xi'_1: \eta'_1: \tau'_1 = \varrho_1\xi_1 - \varrho_2\xi_2: \varrho_1\eta_1 - \varrho_2\eta_2: \varrho_1\tau_1 - \varrho_2\tau_2, \\ P'_2: \xi'_2: \eta'_2: \tau'_2 = \varrho_2\xi_1 + \varrho_1\xi_2: \varrho_2\eta_1 + \varrho_1\eta_2: \varrho_2\tau_1 + \varrho_1\tau_2. \end{cases}$$

Betrachten wir die *Gesamtheit* der so für alle Werte von  $\varrho_1, \varrho_2$  entstehenden Punktepaare  $P'_1, P'_2$ , so haben wir ein geometrisches Gebilde, in dem nur mehr die Verhältnisse  $\xi: \eta: \tau$ , d. h. der „geometrische“ Punkt  $P$  zur Geltung kommen, das also zur Repräsentation von  $P$  durchaus geeignet ist. Überdies ist der Zusammenhang mit  $P$  in der Tat projektiv, denn transformiert man  $\xi, \eta, \tau$  irgendwie reell linear, so erleiden sowohl  $\xi'_1, \eta'_1, \tau'_1$  als auch  $\xi'_2, \eta'_2, \tau'_2$  offenbar die gleiche Substitution.

3. Um nun die geometrische Natur dieser Gesamtheit von Punktepaaren näher zu untersuchen, bemerken wir zunächst, daß die Punkte

$P'_1, P'_2$  jedenfalls (vgl. Abb. 93), was auch  $\varrho$  sei, auf der Geraden  $P_1P_2$  liegen, da ihre Koordinaten offenbar die Gleichung (2) befriedigen. Lassen wir weiter  $\varrho$  alle komplexen,

d. h.  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  alle reellen Werte durchlaufen (wobei es auf einen gemeinsamen reellen Faktor nicht wesentlich ankommt), so durchläuft  $P'_1$  alle reellen Punkte von  $g$ , und  $P'_2$  stellt jedesmal einen ihm eindeutig zugeordneten zweiten reellen Punkt von  $g$  dar; so entstehen z. B. (für  $\varrho_1 = 1, \varrho_2 = 0$ )  $P_1$  und  $P_2$  als zugeordnete Punkte. Die Zuordnung wird übersichtlicher, wenn wir das Verhältnis:

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = -\lambda$$

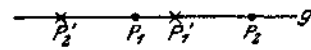


Abb. 93.



einführen; dann wird nämlich:

$$(3b) \quad \begin{cases} \text{für } P'_1: & \xi'_1 : \eta'_1 : \tau'_1 = \xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2; \\ \text{für } P'_2: & \xi'_2 : \eta'_2 : \tau'_2 = \xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda} \eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2. \end{cases}$$

4. Aus diesen Formeln kann man weiter leicht folgern, daß bei variablem  $\lambda$  die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gerade die sämtlichen *Punktepaare einer Involution auf der Geraden  $g$*  durchlaufen. Denn führt man auf  $g$  ein eindimensionales Koordinatensystem ein, so werden die homogenen Koordinaten eines jeden Punktes  $P'_1$  bzw.  $P'_2$  bekanntlich ganze lineare Funktionen des Parameters  $\lambda'_1 = \lambda$  bzw.  $\lambda'_2 = -\frac{1}{\lambda}$  der Gleichungen (3 b). Daher liefert die Gleichung  $\lambda'_1 \cdot \lambda'_2 = -1$  zwischen den beiden Parametern eine symmetrische bilineare Relation zwischen den linearen Koordinaten von  $P'_1$  und  $P'_2$ , und damit ist gemäß der Definition von S. 131 (vgl. auch S. 119) die Behauptung erwiesen.

5. Die *Grundpunkte*, d. h. die sich selbst entsprechenden Punkte *dieser Involution* erhalten wir für  $\lambda = -\frac{1}{\lambda}$ , also für  $\lambda = \pm i$ ; sie sind beide *imaginär*, und zwar ist der eine gerade der Punkt  $P$ , von dem wir ausgingen, der andere der konjugiert imaginäre  $\bar{P}$ . Wir haben also bisher lediglich eine neue Darstellung des alten Staudtschen Ansatzes erreicht. *Wir haben außer  $P$  den Punkt  $\bar{P}$  in Betracht gezogen, der  $P$  zu einem durch eine reelle quadratische Gleichung bestimmten eindimensionalen Gebilde zweiten Grades ergänzt, und haben dann als reellen Repräsentanten die zugehörige Involution konstruiert.* Ich bemerke noch, daß eine solche Involution bestimmt ist, wenn man *zwei ihrer Punktepaare*, etwa  $P_1, P_2$  und  $P'_1, P'_2$  kennt; damit diese Involution imaginäre Grundpunkte hat, ist notwendig und hinreichend, daß sich diese Punktepaare „in verschränkter Lage“ befinden, d. h. daß der eine der Punkte  $P'_1, P'_2$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$ , der andere außerhalb von ihnen liegt.

6. Zur vollständigen Lösung unserer gegenwärtigen Aufgabe fehlt nun nur noch ein Mittel, diesen gemeinsamen Repräsentanten von  $P$  und  $\bar{P}$  in einen *Repräsentanten von  $P$  allein* (oder von  $\bar{P}$  allein) zu verwandeln, und dieses hat v. Staudt erst 1856 durch einen sehr feinen Gedanken gefunden. Der Punkt  $P'_1$  mit den Koordinaten  $\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2$  durchläuft nämlich die Gerade  $g$  in einer *ganz bestimmten Richtung* (vgl. Abb. 94), wenn wir  $\lambda$  von 0 durch positive reelle Werte nach  $+\infty$  und dann wieder durch negative zurück nach 0 laufen lassen. Man überzeugt sich leicht, daß man zu genau demselben Sinn auf  $g$  geführt würde, wenn man von den mit einem beliebigen  $q$  multiplizierten Koordinaten von  $P$  ausginge, d. h. den Punkt  $\xi'_1 + \lambda \xi'_2, \dots$  betrachtete,

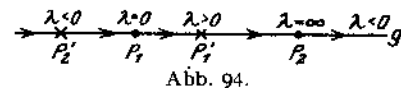


Abb. 94.

und daß ferner bei reeller projektiver Transformation von  $P$  die Pfeilrichtung des Bildpunktes durch dieselbe Transformation aus der soeben bestimmten hervorgeht. Wir treffen daher eine unseren Anforderungen genügende Festsetzung, wenn wir ein für alle Male dem ursprünglichen Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $\xi_1 + i\xi_2, \dots$  diese Pfeilrichtung zuordnen. Da der konjugiert imaginäre Punkt  $\bar{P}$  die Koordinaten  $\xi_1 + i(-\xi_2), \dots$  hat, so ist ihm danach der Bewegungssinn des Punktes  $\xi_1 + \lambda(-\xi_2), \dots$  bei positiv wachsendem  $\lambda$ , also gerade der dem vorhergehenden entgegengesetzte Sinn der Geraden  $g$  zuzuordnen, und damit ist die gewünschte Unterscheidung erreicht: Wir unterscheiden, kurz gesagt, einfach zwischen  $+i$  und  $-i$ , indem wir zwischen der positiven und der negativen Durchlaufung der reellen  $\lambda$ -Werte unterscheiden.

Damit haben wir schließlich folgende Regel für die eindeutige und projektiv invariante Bildung einer den imaginären Punkt  $\xi_1 + i\xi_2 : \eta_1 + i\eta_2 : \tau_1 + i\tau_2$  repräsentierenden reellen geometrischen Figur gewonnen: Man konstruiere die Punkte  $P_1(\xi_1 : \eta_1 : \tau_1)$  und  $P_2(\xi_2 : \eta_2 : \tau_2)$ , ihre Verbindungsgerade  $g$  und diejenige Punktinvolution auf  $g$  (bzw. noch ein weiteres ihrer Punktepaare), in der immer die Punkte:

$$P'_1(\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2) \text{ und } P'_2\left(\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2\right)$$

gepaart sind; man füge endlich den Pfeil bei, der der Bewegungsrichtung von  $P'_1$  bei positiv wachsendem  $\lambda$  entspricht.

7. Es bleibt nun nur noch zu überlegen, daß auch umgekehrt jede solche reelle Figur, bestehend aus einer Geraden, 2 auf ihr verschränkt liegenden Punktepaaren  $P_1, P_2$  und  $P'_1, P'_2$  (bzw. einer Punktinvolution ohne reelle Doppelpunkte) sowie einer Pfeilrichtung, einen und nur einen imaginären Punkt repräsentiert. In der Tat kann man leicht — ich brauche wohl auch das hier nicht im einzelnen auszuführen — durch Hinzufügung eines passenden reellen konstanten Faktors den Koordinaten von  $P_2$  solche Werte  $\xi_2, \eta_2, \tau_2$  erteilen, daß die Koordinaten von  $P'_1$  und  $P'_2$  proportional  $\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2$  und  $\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2$  sind, oder, was dasselbe ist, daß die Doppelpunkte der angegebenen Involution die Koordinaten  $\xi_1 \pm i\xi_2, \dots$  haben; über das Vorzeichen von  $\lambda$ , das danach noch willkürlich bleibt, verfüge man so, daß die Bewegungsrichtung des Punktes  $\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2$  bei von 0 aus positiv wachsendem  $\lambda$  dem Sinne des gegebenen Pfeiles entspricht. Dann wird dem Punkte  $P$  mit den Koordinaten  $\xi_1 + i\xi_2, \dots$  auf Grund der vorangehenden Entwicklungen tatsächlich gerade die gegebene Involution mit der gegebenen Pfeilrichtung als reeller Repräsentant entsprechen. Man überzeugt sich weiterhin, daß man auf die gleichen Koordinatenverhältnisse, d. h. auf denselben Punkt  $P$  geführt wird, wenn man von einem anderen Punktepaar der Involution ausgeht.

Nachdem wir so unser Problem für den *Punkt* erledigt haben, können wir für die Ebene die Lösung nach dem Prinzip der Dualität sofort auch auf die *Gerade* übertragen. *Danach wird eine komplexe Gerade im Reellen eindeutig repräsentiert durch einen reellen Punkt, zwei dem Strahlenbüschel durch ihn entnommene, verschränkt liegende Strahlenpaare (bzw. eine Strahleninvolution ohne reelle Doppelstrahlen) sowie endlich einen bestimmten Umlaufssinn im Büschel* (vgl. Abb. 95).

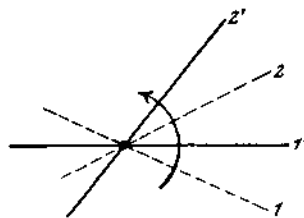


Abb. 95.

Diese Darstellungen gestatten, und darin liegt ihr großer Wert, auch alle Beziehungen zwischen komplexen Elementen oder zwischen komplexen und reellen Elementen durch greifbare Eigenschaften durchaus reeller geometrischer Figuren darzustellen. Um das an einem konkreten Beispiele deutlich zu machen, will ich Ihnen darlegen, was es in dieser Repräsentation heißt, daß ein (reeller oder imaginärer) Punkt  $P$  auf einer (reellen oder imaginären) Geraden  $g$  liegt. Wir haben da natürlich 4 Fälle zu unterscheiden:

1. reeller Punkt und reelle Gerade;
2. reeller Punkt und imaginäre Gerade;
3. imaginärer Punkt und reelle Gerade;
4. imaginärer Punkt und imaginäre Gerade.

Der Fall 1. bedarf keiner besonderen Erläuterung; hier haben wir eine Grundbeziehung der gewöhnlichen Geometrie vor uns. — Im Falle 2. muß durch den gegebenen reellen Punkt neben der gegebenen imaginären Geraden notwendig auch die konjugiert imaginäre gehen, und er muß daher mit dem Scheitel des Strahlenbüschels identisch sein, das wir zur Darstellung der imaginären Geraden benutzen. Ebenso muß im Falle 3. die reelle Gerade identisch mit dem Träger der geradlinigen Punktinvolution sein, die den gegebenen imaginären Punkt repräsentiert. — Am interessantesten ist der Fall 4 (vgl. Abb. 96); bei ihm muß offenbar der konjugiert imaginäre Punkt auch auf der konjugiert imaginären Geraden liegen, und daraus folgt, daß jedes Punktepaar der  $P$  darstellenden Punktinvolution auf einem Strahlenpaar der  $g$  repräsentierenden Geradeninvolution liegen muß, d. h. daß diese beiden repräsentierenden Involutionen perspektiv zueinander liegen müssen; überdies ergibt sich noch, daß die Pfeile der beiden Involutionen gleichfalls perspektiv liegen.

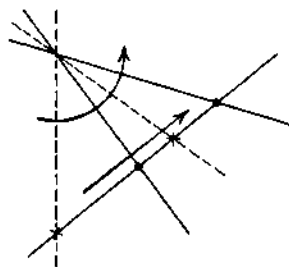


Abb. 96.

Überhaupt bekommt man in der allgemeinen, auch das Komplexe berücksichtigenden analytischen Geometrie der Ebene ein vollständiges reelles Bild der Ebene, wenn man der Gesamtheit der reellen Punkte und Geraden

der Ebene die Gesamtheit der in Rede stehenden Involutionen mit Pfeilrichtung als neue Elemente adjungiert. Es mag hier genügen, wenn ich nur in großen Umrissen andeute, wie sich der Aufbau dieses reellen Bildes der komplexen Geometrie gestalten würde. Ich folge dabei derjenigen Anordnung, in der man die ersten Sätze der elementaren Geometrie jetzt gewöhnlich darzustellen pflegt. Man beginnt da

1. mit den *Existenzsätzen*, welche das Vorhandensein der soeben angedeuteten Elemente eines gegen die gewöhnliche Geometrie erweiterten Bereiches genau zu umschreiben haben.

2. Hierauf folgen die *Sätze der Verknüpfung*, die aussagen, daß auch in dem in 1. definierten erweiterten Bereiche durch 2 Punkte eine und nur eine Gerade geht, und daß 2 Gerade einen und nur einen Punkt gemein haben. Man hat dabei je nach der Realität der gegebenen Elemente ganz wie soeben jedesmal 4 Fälle zu unterscheiden, und es ist sehr interessant, genau durchzudenken, in welchen reellen Konstruktionen mit Punkt- und Geradeninvolutionsen jene komplexen Beziehungen ihr Abbild finden.

3. Was nun die *Gesetze der Anordnung* angeht, so treten hier gegenüber den reellen Verhältnissen *völlig neue Umstände* auf; insbesondere bilden die sämtlichen reellen und komplexen Punkte auf einer festen Geraden und ebenso die sämtlichen Strahlen durch einen festen Punkt je ein *zweidimensionales Kontinuum*. Jedermann ist ja auch von der Funktionentheorie her gewohnt, die Gesamtheit der Werte einer komplexen Variablen durch die sämtlichen Punkte einer Ebene darzustellen.

4. Was die *Sätze der Stetigkeit* angeht, so will ich hier nur hervorheben, wie sich die in beliebiger Nähe eines reellen Punktes liegenden komplexen Punkte repräsentieren werden. Man hat dazu durch den reellen Punkt  $P$  (oder durch einen reellen Nachbarpunkt) eine reelle Gerade zu legen und

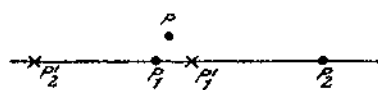


Abb. 97.

auf dieser zwei solche Punktepaare  $P_1P_2$  und  $P'_1P'_2$  in verschränkter Lage zu betrachten (vgl. Abb. 97), daß zwei Punkte  $P_1, P'_1$  verschiedener Paare nahe aneinander und an  $P$

liegen; läßt man nun  $P_1$  und  $P'_1$  zusammenrücken, so artet die durch jene Paare bestimmte Involution aus, d. h. ihre beiden vorher komplexen Doppelpunkte fallen mit  $P_1 \equiv P'_1$  zusammen. Jeder der beiden durch die Involution (mit dem einen oder anderen Pfeile) dargestellten imaginären Punkte geht also stetig in einen Punkt in der Nähe von  $P$  oder gar in  $P$  selbst über. Man muß sich in diese Stetigkeitsvorstellungen natürlich erst besonders hineinarbeiten, um sie mit Nutzen gebrauchen zu können.

Ist dieser ganze Aufbau auch, verglichen mit der gewöhnlichen reellen Geometrie, recht umständlich und beschwerlich, so kann er doch unvergleichlich viel mehr leisten; insbesondere kann er *algebraische Gebilde* als

Gesamtheit ihrer reellen *und* komplexen Elemente zu voller geometrischer Anschaulichkeit erheben, und man kann mit ihm an den Figuren selbst Sätze wie den *Fundamentalsatz der Algebra* oder das *Bezoutsche Theorem*, daß 2 Kurven  $m^{\text{ter}}$  und  $n^{\text{ter}}$  Ordnung im allgemeinen gerade  $m \cdot n$  Punkte gemein haben, sich anschaulich deutlich machen. Zu diesem Ziele müßte man die Ansätze freilich viel genauer anschaulich durcharbeiten, als das bisher wohl geschehen ist; übrigens findet sich alles wesentliche Material zu solchen Untersuchungen bereits in der Literatur vor.

In den meisten Fällen dürfte allerdings die Anwendung dieser geometrischen Deutung bei allen ihren theoretischen Vorzügen doch solche Komplikationen mit sich bringen, daß man sich mit ihrer prinzipiellen Möglichkeit zufrieden geben und sich tatsächlich auf den mehr naiven Standpunkt zurückziehen wird: ein komplexer Punkt ist der Inbegriff komplexer Koordinatenwerte, mit dem man in gewisser Weise ebenso operieren kann wie mit reellen Punkten. Tatsächlich hat sich diese von allen prinzipiellen Erörterungen absehende Heranziehung imaginärer Elemente namentlich immer dann als fruchtbar erwiesen, wenn man mir den imaginären Kreispunkten und dem Kugelkreise zu tun hatte. Zuerst hat, wie schon gesagt, *Poncelet* das Imaginäre in diesem Sinne benutzt; ihm sind andere französische Geometer, so namentlich *Chasles* und *Darboux*, darin nachgefolgt; in Deutschland hat besonders *Lie* von dieser Auffassung des Imaginären mit großem Erfolge Gebrauch gemacht.

Mit diesem Exkurs über das Imaginäre beschließe ich den ganzen zweiten Hauptteil dieser Vorlesung und wende mich einem neuen Abschnitt zu.

Dritter Teil.

## Systematik und Grundlegung der Geometrie.

### I. Die Systematik.

Wir benutzen zunächst die geometrischen Transformationen, um uns eine systematische Einteilung des Gesamtgebietes der Geometrie zu verschaffen, die von *einem* Standpunkte aus die einzelnen Teile wie ihre Zusammenhänge zu überschauen gestattet.

#### 1. Überblick über die Gliederung der Geometrie.

Es handelt sich hier um Betrachtungen, wie ich sie in meinem *Erlanger Programm*<sup>1)</sup> von 1872 systematisch entwickelt habe; über die Weiterbildung dieser Ideen seit dieser Zeit finden Sie in dem Enzyklopädiereferat von G. Fano: „*Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip*“ (Enz. III A. B. 4 b) Auskunft.

1. Wir werden uns, wie bisher, auch weiterhin zur Beherrschung der geometrischen Verhältnisse konsequent der Analysis bedienen, indem wir die *Gesamtheit der Raumpunkte durch die Gesamtheit der Wertetripel der 3 „Koordinaten“  $x, y, z$  repräsentiert* denken. Jeder Transformation des Raumes entspricht dann eine gewisse Transformation dieser Koordinaten. Gleich von Beginn unserer Erörterungen an waren uns 4 Arten von Transformationen als besonders bedeutsam entgegengetreten, die durch gewisse *spezielle lineare Substitutionen* von  $x, y, z$  dargestellt werden: *Parallelverschiebungen, Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt  $O$ , Spiegelungen an  $O$ , Ähnlichkeitstransformationen von  $O$  aus.*

2. Es besteht nun nicht etwa, wie man nach der Einführung von Koordinaten zunächst vielleicht annehmen könnte, vollständige Identität zwischen der Analysis dreier unabhängiger Veränderlichen  $x, y, z$  und der Geometrie im spezifischen Sinne. Vielmehr handelt, wie ich das ja auch früher schon gelegentlich hervorhob (vgl. S. 27f.), die Geometrie nur von solchen Beziehungen zwischen den Koordinaten, die bei den un-

<sup>1)</sup> „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.“ Erlangen 1872. Abgedruckt in den *Mathematischen Annalen*. Bd. 43, S. 63ff. 1893 und in *F. Klein: Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. I, S. 460ff. Berlin: Springer 1921.

ter 1. aufgeführten linearen Substitutionen ungeändert bleiben — mag man diese nun als Veränderungen des Koordinatensystems oder als Transformationen des Raumes auffassen; *die Geometrie ist also die Invariantentheorie jener linearen Substitutionen*. Alle nichtinvarianten Gleichungen zwischen Koordinaten hingegen, z. B. die Aussage, daß ein Punkt die Koordinaten 2, 5, 3 hat, beziehen sich nur auf ein bestimmtes, ein für allemal festes Koordinatensystem und gehören einer Wissenschaft an, die jeden Punkt für sich individualisieren und seine Eigenschaften gesondert auffassen muß: der *Topographie* oder — wenn man will — *Geographie*. Zur näheren Erläuterung will ich noch an einige *Beispiele geometrischer Eigenschaften* erinnern: Zwei Punkte haben eine bestimmte *Entfernung*, wenn nur einmal eine Einheit festgelegt ist; das bedeutet in der gegenwärtigen Auffassung, daß man aus ihren Koordinaten  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$  einen Ausdruck  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$  aufbauen kann, der bei allen jenen Substitutionen ungeändert bleibt oder sich doch nur mit einem von der speziellen Lage der Punkte unabhängigen Faktor multipliziert. Ähnliche Bedeutung haben die Aussagen, daß zwei Gerade einen bestimmten *Winkel* bilden, daß ein Kegelschnitt bestimmte *Hauptachsen* und *Brennpunkte* hat usw.

Die Gesamtheit dieser geometrischen Eigenschaften werden wir auch als „*metrische Geometrie*“ bezeichnen, um von ihr sogleich verschiedene andere „*Arten von Geometrien*“ zu unterscheiden. Wir werden diese gewinnen, indem wir nach einem bestimmten Prinzip gewisse Gruppen von Sätzen der metrischen Geometrie aussondern und für sich betrachten; demnach sind alle diese neuen Arten von Geometrie wenigstens für die nächstliegende Auffassung Teile der metrischen Geometrie als der umfassendsten „*Art von Geometrie*“.

3. Wir gehen von den früher ausführlich studierten *affinen Transformationen*, d. h. den ganzen linearen Substitutionen der  $x, y, z$  aus:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \end{cases}$$

unter denen die unter 1. betrachteten Transformationen als spezielle Fälle enthalten sind, und heben von sämtlichen geometrischen Begriffen und Theoremen den engeren Kreis derjenigen hervor, die bei beliebigen affinen Transformationen ungeändert bleiben; ihren Inbegriff betrachten wir als die erste neue Art Geometrie, die sogenannte *affine Geometrie* oder *Invariantentheorie der affinen Transformationen*.

Aus unserer Kenntnis der affinen Transformationen können wir danach sofort Begriffe und Sätze dieser Geometrie entnehmen; ich erinnere hier nur an einiges wenige: Von Entfernung und Winkel wird in der affinen Geometrie nicht mehr die Rede sein können, ebenso wird der Begriff der Hauptachsen eines Kegelschnittes oder der Unterschied zwi-

schen Kreis und Ellipse verwischt. Erhalten aber bleibt die Unterscheidung von *Endlichem* und *Unendlichweitem* des Raumes und alles, was sich darauf bezieht: der Begriff des *Parallelismus zweier Geraden*, die Einteilung aller Kegelschnitte in *Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln* und dgl., ferner die Begriffe *Mittelpunkt* und *Durchmesser eines Kegelschnittes* und insbesondere die Beziehung *konjugierter Durchmesser*.

4. Weiter ziehen wir die *projektiven Umformungen*, d. h. die gebrochenen linearen Transformationen:

$$\begin{aligned}x &= (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) : (a_4x + b_4y + c_4z + d_4), \\y &= (a_2x + b_2y + c_2z + d_2) : (a_4x + b_4y + c_4z + d_4), \\z &= (a_3x + b_3y + c_3z + d_3) : (a_4x + b_4y + c_4z + d_4)\end{aligned}$$

heran, welche die affinen Transformationen als Spezialfälle umfassen. Bleiben geometrische Eigenschaften allen diesen Transformationen gegenüber ungeändert, so müssen sie gewiß auch der affinen Geometrie angehören; damit wird aus dieser die sogenannte *projektive Geometrie als Invariantentheorie der projektiven Transformationen* ausgeschieden. Die schrittweise Aussonderung der affinen und projektiven Geometrie aus der metrischen können wir dem Vorgehen des Chemikers vergleichen, der aus einem Stoff durch Anwendung immer stärkerer Zersetzungsmittel immer wertvollere Bestandteile isoliert; unsere Zersetzungsmittel sind erst die affinen, dann die projektiven Transformationen.

Was die Sätze der projektiven Geometrie angeht, so sei nur hervorgehoben, daß nunmehr die ausgezeichnete Stellung des Unendlichen und alle damit zusammenhängenden Begriffe der affinen Geometrie in Fortfall kommen. Es gibt nur noch *eine Art von eigentlichem Kegelschnitt*; es bleibt aber beispielsweise die *Beziehung zwischen Pol und Polare* und ebenso die *Erzeugung des Kegelschnittes durch projektive Strahlenbüschel* bestehen, von der wir früher (S. 104 f.) sprachen.

Wir können nun aber nach demselben Prinzip *von der metrischen Geometrie aus auch zu anderen Arten von Geometrien* aufsteigen; eine der wichtigsten ist

5. die *Geometrie der reziproken Radien*. Sie umfaßt die Gesamtheit derjenigen Theoreme der metrischen Geometrie, welche bei allen möglichen *Transformationen durch reziproke Radien* erhalten bleiben; es hat also in dieser Geometrie z. B. der Begriff der Geraden oder Ebene keine selbständige Bedeutung mehr, wohl aber der Begriff *Kreis oder Kugel*, dem Gerade bzw. Ebene als Spezialfälle untergeordnet werden.

6. Endlich hebe ich noch eine Art von Geometrie hervor, die gewissermaßen durch das schärfste Ätzungsmittel gewonnen wird und daher die wenigsten Theoreme umfaßt: die *Analysis situs*, die ich ja schon früher (S. 113 ff.) erwähnte. Hier handelt es sich um die *Gesamtheit der Eigenschaften, die allen eineindeutigen, nur durchaus stetigen Transformationen gegenüber erhalten bleiben*; um dem Unendlichfernen, das die so definier-



ten Transformationen stets in sich überführen würden, keine ausgezeichnete Stellung einzuräumen, können wir noch entweder die *projektiven Transformationen* oder die *Transformationen durch reziproke Radien* hinzunehmen. —

Das so skizzierte Schema werden wir jetzt noch schärfer umschreiben, indem wir den fundamentalen *Begriff der Gruppe* einführen. Wir nennen, wie auch schon früher ausgeführt wurde, eine *Gesamtheit* von Transformationen dann eine *Gruppe*, wenn die *Zusammensetzung von 2 ihrer Transformationen wieder eine Transformation derselben Gesamtheit ergibt und die Inverse jeder Transformation auch zu der Gesamtheit gehört*. Beispiele von Gruppen sind der Inbegriff der *Bewegungen* oder derjenige der *Kollineationen* (projektiven Transformationen); denn 2 Bewegungen setzen sich wieder zu einer Bewegung, 2 Kollineationen wieder zu einer Kollineation zusammen; außerdem ist in beiden Fällen zu jeder Transformation die inverse vorhanden.

Blicken wir nun auf unsere verschiedenen Arten von Geometrie zurück, so werden wir sehen, daß die Transformationen, die in jeder eine Rolle spielen, gerade immer eine Gruppe bilden. Die sämtlichen linearen Substitutionen zunächst, die die Beziehungen der *metrischen Geometrie* ungeändert lassen, die Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Ähnlichkeitstransformationen, bilden ersichtlich eine Gruppe, die man als *Hauptgruppe der räumlichen Transformationen* bezeichnet. Ebenso leicht überzeugt man sich von der analogen Bedeutung der *affinen Gruppe* aller Affinitäten für die *affine*, der *projektiven Gruppe* aller Kollineationen für die *projektive Geometrie*. Die Theoreme der *Geometrie der reziproken Radien* bleiben erhalten bei allen Transformationen, die man durch Zusammensetzung irgendwelcher Transformationen durch reziproke Radien mit Substitutionen der Hauptgruppe erhält; sie alle bilden wieder eine Gruppe, die „*der reziproken Radien*“. Und für die *Analysis situs* endlich kommt die *Gruppe aller stetigen eindeutigen Verzerrungen* in Betracht.

Wir wollen noch feststellen, von wie vielen voneinander unabhängigen Parametern die einzelne Operation in jeder dieser Gruppen abhängt. In der Hauptgruppe sind die Bewegungen mit 6 Parametern enthalten, und dazu kommt noch ein Parameter für die Maßstabänderung, so daß im ganzen 7 Parameter vorhanden sind; wir drücken dies aus, indem wir die *Hauptgruppe als eine  $G_7$*  bezeichnen. Die Gleichungen der allgemeinen affinen Transformation enthalten  $3 \cdot 4 = 12$  willkürliche Koeffizienten, die der projektiven  $4 \cdot 4 = 16$ , wobei aber bei den letzteren ein allen gemeinsamer Faktor unwesentlich ist; also ist die *affine Gruppe eine  $G_{12}$* , die *projektive eine  $G_{15}$* . Die *Gruppe der reziproken Radien* ist, wie ich hier nur referierend angebe, *eine  $G_{10}$* , und die *Gruppe aller stetigen Verzerrungen* schließlich besitzt überhaupt keine endliche Parameterzahl, ihre Operationen hängen vielmehr noch von willkürlichen Funktionen oder,

wenn wir wollen, von unendlich vielen Parametern ab (sie ist eine  $G_{\infty}$ ).

In dem Zusammenhang der verschiedenen Arten von Geometrie und der Gruppen von Transformationen, den wir so festgestellt haben, kann man nun ein *fundamentales Prinzip* zur Charakterisierung aller überhaupt möglichen Geometrien erblicken; es ist das, das eben den Hauptgedanken meines Erlanger Programmes ausmacht: *Es sei irgendeine beliebige Gruppe räumlicher Transformationen gegeben, welche die Hauptgruppe als Teil umfaßt; dann gibt die Invariantentheorie dieser Gruppe eine bestimmte Art von Geometrie, und man kann so jede mögliche Geometrie erhalten.* Als Charakteristikum jeder Geometrie wird ihre Gruppe stets in den Vordergrund der Betrachtung gestellt.

Dies Prinzip ist in der Literatur vollständig durchgeführt nur für die in unserem Schema zuerst genannten 3 Fälle, und mit ihnen als den wichtigsten oder bekanntesten wollen wir uns noch ein wenig beschäftigen und dabei zunächst namentlich auf den Übergang vom einen zum anderen achten.

Ich wähle die Reihenfolge umgekehrt wie vorhin und beginne mit der projektiven Geometrie, also mit der  $G_{15}$  *aller projektiven Transformationen*, die wir homogen schreiben:

$$(1) \quad \begin{cases} \varrho' \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \varrho' \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \varrho' \zeta' = a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\ \varrho' \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau. \end{cases}$$

Um von hier aus zu der affinen Gruppe zu kommen, gehen wir von der Bemerkung aus, daß eine Projektivität dann eine Affinität ist, wenn sie die unendlichferne Ebene in sich überführt, d. h. wenn jedem Punkte mit verschwindendem  $\tau$  ein Punkt mit verschwindendem  $\tau'$  entspricht. Denn dies besagt, daß  $a_4 = b_4 = c_4 = 0$  ist, und daher folgt aus den Gleichungen (1) durch Division für die inhomogenen Gleichungen, wenn wir noch die Quotienten  $a_1 : d_4, \dots$  einfach durch  $a_1, \dots$  ersetzen:

$$(2) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \end{cases}$$

das sind in der Tat die alten Formeln der Affinität: *Die Bedingung, daß die unendlich ferne Ebene ungeändert bleibt, scheidet also aus der projektiven  $G_{15}$  eine 12-parametrische „Untergruppe“ aus, eben die affine Gruppe.*

In ganz analoger Weise gelangt man zu der *Hauptgruppe  $G_7$* , indem man diejenigen Projektivitäten bzw. Affinitäten bestimmt, die außer der unendlich fernen Ebene noch den imaginären Kugelkreis in sich überführen, d. h. bei denen auch jedem den Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \quad \text{und} \quad \tau = 0$$

genügenden Punkt ein dieselben Gleichungen erfüllender entspricht. Sie werden diese Behauptung leicht bestätigen. Sie brauchen nur zu beachten, daß unsere Bedingung die 6 (homogenen) Konstanten des dem Kugelkreis vermöge einer Affinität in der Ebene  $\tau' = 0$  entsprechenden Kegelschnittes gerade bis auf einen konstanten Faktor bestimmt und daher den 12 Konstanten der Affinität  $6 - 1 = 5$  Bedingungen auferlegt — womit eben die  $12 - 5 = 7$  Parameter der  $G_7$  übrigbleiben.

Diese ganze Art der Betrachtung hat nun durch den großen englischen Geometer *A. Cayley*<sup>1)</sup> 1859 eine wichtige Wendung erfahren: während es bisher schien, als ob die affine und projektive Geometrie ärmere Ausschnitte der metrischen seien, macht es Cayley möglich, umgekehrt *die affine sowohl als die metrische Geometrie der projektiven als besondere Fälle einzuordnen*: „*projective geometry is all geometry*“. Dieser zunächst vielleicht paradox erscheinende Zusammenhang entsteht so, daß man den zu untersuchenden Figuren bestimmte Gebilde, nämlich die *unendlich ferne Ebene* bzw. den *Kugelkreis* in ihr hinzufügt; *dann sind die affinen bzw. metrischen Eigenschaften einer Figur nichts als die projektiven Eigenschaften der so erweiterten Figur*.

Lassen Sie mich dies zunächst an zwei ganz einfachen Beispielen erläutern, wobei ich nur von früher her bekannte Tatsachen in ein wenig abgeänderter Form ausspreche. Daß 2 Geraden parallel sind, hat in der projektiven Geometrie zunächst gar keine Bedeutung; nehmen wir aber die unendlich ferne Ebene zu den gegebenen Gebilden (den beiden Geraden) hinzu, so liegt (vgl. S. 98) die rein projektive Aussage vor, daß zwei gegebene Geraden sich auf einer gegebenen Ebene schneiden. Ähnlich ist es, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht. Wir können das (vgl. S. 132f.) auf eine Polarenbeziehung — das ist ja eine projektive Eigenschaft — der durch Hinzunahme des Kugelkreises erweiterten Figur zurückführen (vgl. Abb. 98): Der Spurlpunkt  $P_\infty$  der Geraden und die Spurlinie  $g_\infty$  der Ebene in der unendlich fernen Ebene sollen in bezug auf den Kugelkreis Pol und Polare sein.

Ich möchte nun den hiermit kurz angedeuteten Gedankengang genauer ausführen und zeigen, wie er zu einem *vollkommen systematischen Lehrgebäude der Geometrie* führt. Das größte Verdienst darum haben sich die Engländer erworben; *Cayley* habe ich schon genannt, und ihm habe ich noch zur Seite zu stellen *J. J. Sylvester* und *G. Salmon* in Dublin. Diese Männer haben *von 1850 an* diejenige algebraische Disziplin geschaffen, welche man

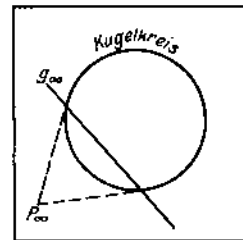


Abb. 98.

<sup>1)</sup> In „A sixth memoir upon quantics“. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1859 = Collected mathematical papers, II (Cambridge 1889), S. 561ff.

im engeren Sinne *Invariantentheorie der linearen homogenen Substitutionen*<sup>1)</sup> nennt und welche unter Voranstellung des Cayleyschen Prinzips eine vollständige *Systematik der Geometrie auf analytischer Basis* ermöglicht. Zum Verständnis dieser Systematik wird es nötig sein, daß wir uns vorerst mit der Invariantentheorie selbst ein wenig befassen:

## 2. Exkurs über die Invariantentheorie der linearen Substitutionen.

Natürlich werde ich dabei lediglich kurz referierend die Hauptgedankengänge und Resultate vortragen können, ohne auf Einzelheiten und auf Beweise einzugehen. Was *Literatur* dieses großen Gebietes anlangt, so verweise ich vor allem auf den Bericht von *W. Franz Meyer*: „*Die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert*“ in *Bd. I der Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung (1892)* sowie auf das *Enzyklopädiereferat „Invariantentheorie“* desselben Autors (*Enz. Bd. I B 2*). Was man von der Invariantentheorie in der Geometrie braucht, findet man besonders in den *Lehrbüchern von G. Salmon*<sup>2)</sup>, die zur Verbreitung der hier in Betracht kommenden Ideen wohl am meisten beigetragen haben und auch in der deutschen Bearbeitung von *W. Fiedler* stets ungemein viel benutzt worden sind. In derselben Richtung liegen auch die Vorlesungen von *A. Clebsch*<sup>3)</sup>, die *Lindemann* herausgegeben hat.

Wenn wir nun zu unserem Gegenstand übergehen, so denken wir uns

1. irgendeine Anzahl von Variablen gegeben und sprechen je nachdem vom *binären, ternären, quaternären, . . . Gebiet*. Indem wir uns vorbehalten, die Variablen in den ersten 3 Fällen schließlich als homogene Koordinaten in einer Geraden, einer Ebene oder einem Raume aufzufassen, bezeichnen wir sie mit:

$$\xi, \tau; \quad \xi, \eta, \tau; \quad \xi, \eta, \zeta, \tau,$$

wobei dann  $\tau = 0$  allemal die unendlich fernen Elemente charakterisieren soll.

2. Wir betrachten die *Gruppen aller homogenen linearen Substitutionen dieser Variablen*, wobei wir aber zunächst nicht bloß, wie es später in der projektiven Geometrie geschieht, die Verhältnisse der Variablen, sondern

<sup>1)</sup> Man gebraucht das Wort „Invariantentheorie“ auch im weiteren Sinne mit Bezug auf beliebige Transformationsgruppen; im engeren Sinne, wie er auch in der Folge für uns maßgebend ist, hat es zuerst Sylvester angewendet.

<sup>2)</sup> Analytische Geometrie I. der Kegelschnitte; II. der höheren ebenen Kurven; III. des Raumes; IV. Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. Leipzig (Teubner). Jeder Band in mehreren Auflagen. [I neu herausgegeben von F. Dingeldey; III von K. Kommerell und A. Brill].

<sup>3)</sup> Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von F. Lindemann. Leipzig (Teubner). 1. Aufl. (1876ff.). 2. Aufl. (1906ff.).

auch ihre Einzelwerte selbst in Betracht ziehen wollen; wir schreiben diese Substitutionen:

$$\begin{array}{lll} \xi' = a_1 \xi + d_1 \tau & \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 \tau & \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \eta' = a_2 \xi + d_2 \tau & \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + d_2 \tau & \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \tau' = a_4 \xi + d_4 \tau; & \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + d_4 \tau; & \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau. \end{array}$$

Die Parameterzahl dieser 3 Gruppen ist bzw. 4, 9, 16.

Um im folgenden alle Dimensionszahlen bequem umfassen zu können, wollen wir in den Formeln immer nur die Variablen  $\xi$  und  $\tau$  und die auf sie bezüglichen Glieder ausschreiben und dazwischen Punkte setzen; will man dann das binäre Gebiet behandeln, so hat man diese Punkte einfach zu ignorieren, für das ternäre und quaternäre aber hat man sie durch Glieder in  $\eta$  bzw.  $\eta$  und  $\zeta$  zu ersetzen, die den ausgeschriebenen Termen analog sind. Wir reden also allgemein von den Variablen:

$$\xi, \dots, \tau$$

und von den linearen Substitutionen in ihnen:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi' = a_1 \xi + \dots + d_1 \tau \\ \dots \\ \tau' = a_4 \xi + \dots + d_4 \tau. \end{cases}$$

3. Was nun die *Objekte der Invariantentheorie* angeht, so wollen wir hier 2 Stufen der Fragestellung unterscheiden: Einmal seien irgendwelche einzelne Wertsysteme der Variablen:

$$\xi_1, \dots, \tau_1; \quad \xi_2, \dots, \tau_2; \quad \xi_3, \dots, \tau_3; \quad \dots$$

gegeben, die wir im Anklang an die Geometrie ja wohl schon hier kurzweg als *Punkte 1; 2; 3; ...* bezeichnen dürfen. Jedes dieser Wertsysteme für sich wird den Substitutionen der Gruppe (1) unterworfen, und es handelt sich darum, solche *Verbindungen unserer Wertsysteme zu bilden, die bei diesen simultanen Substitutionen invariant bleiben.*

4. Die *zweite Stufe* der Problemstellung zieht neben solchen Punkten auch *Funktionen der Variablen* heran, und zwar in erster Linie *ganze rationale Funktionen*; man kann sich dabei auf *homogene rationale ganze Funktionen*, welche die Invariantentheorie *Formen* nennt, beschränken, da sich wegen der Homogenität der Substitutionen die Terme gleicher Dimension ohnehin für sich substituieren. Wir werden da also *lineare Formen*:

$$\varphi = \alpha \xi + \dots + \delta \tau$$

betrachten, ferner *quadratische Formen*:

$$f = A \xi^2 + \dots + 2G \xi \tau + \dots + K \tau^2$$

und so fort. Auch *mehrere Formen* gleicher Dimension werden wir gleich-

zeitig herannehmen können und unterscheiden sie dann durch Indizes,

z. B.:  $\varphi_1 = \alpha_1 \xi + \dots + \delta_1 \tau; \quad \varphi_2 = \alpha_2 \xi + \dots + \delta_2 \tau; \quad \dots$

Ebenso können *Formen von mehreren Variablenreihen*, z. B. Bilinearformen:

$$f = A \xi_1 \xi_2 + \dots + \Delta \xi_1 \tau_2 + \dots + N \tau_1 \xi_2 + \dots + \Pi \tau_1 \tau_2,$$

den Ausgangspunkt bilden.

Um das hier entstehende allgemeine Problem deutlich zu machen, müssen wir erst zusehen, *wie die Koeffizienten dieser Formen sich transformieren*, wenn wir die Variablen den Substitutionen der Gruppe (1) unterwerfen und dabei den Formenwert  $\varphi$  bzw.  $f$  als unveränderlich festsetzen. Betrachten wir zunächst die Linearform und setzen:

$$\varphi = \alpha \xi + \dots + \delta \tau = \alpha' \xi' + \dots + \delta' \tau'.$$

Führen wir die Ausdrücke (1) von  $\xi', \dots, \tau'$  ein, so muß in den Variablen  $\xi, \dots, \tau$  die Identität bestehen:

$$\begin{aligned} \alpha \xi + \dots + \delta \tau &= \alpha'(a_1 \xi + \dots + d_1 \tau) + \dots + \delta'(a_4 \xi + \dots + d_4 \tau) \\ &= (\alpha' a_1 + \dots + \delta' a_4) \xi + \dots + (\alpha' d_1 + \dots + \delta' d_4) \tau, \end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = a_1 \alpha' + \dots + a_4 \delta' \\ \dots \\ \delta = d_1 \alpha' + \dots + d_4 \delta'. \end{cases}$$

Die neuen Koeffizienten  $\alpha', \dots, \delta'$  der Linearform hängen also mit den alten  $\alpha, \dots, \delta$  *wiederum durch eine lineare Substitution* zusammen, die sich in einfacher Weise aus (1) ergibt: man vertausche vertikale und horizontale Reihen des Koeffizientenschemas („transponiere“ die Substitution) und vertausche obendrein noch die Stellung der alten (nichtgestrichenen) und der neuen (gestrichenen) Größen. Die so entstehende Substitution nennt man *kontragredient* zur ursprünglichen (1) und sagt kurz, *daß sich die Koeffizienten  $\alpha, \dots, \delta$  einer Linearform kontragredient zu den Variablen  $\xi, \dots, \tau$  substituieren*. Die vorhin betrachteten Variablenreihen  $\xi_1, \dots, \tau_1; \xi_2, \dots, \tau_2; \dots$ , die sämtlich jeweils der gleichen Transformation (1) zu unterwerfen sind, heißen in analoger Terminologie *kogrediente Veränderliche*.

Gehen wir nun zur *quadratischen Form*  $f$  über, so überlegen wir vorab, wie die in sie eingehenden quadratischen Terme  $\xi^2, \dots, \xi \tau, \dots, \tau^2$  sich bei der linearen Substitution (1) verhalten; wir finden aus (1) sofort für die quadratischen Terme der neuen Veränderlichen:

$$(3) \quad \begin{cases} \xi'^2 = a_1^2 \xi^2 + \dots + 2a_1 d_1 \xi \tau + \dots + d_1^2 \tau^2 \\ \dots \\ \xi' \tau' = a_1 a_4 \xi^2 + \dots + (a_1 d_4 + a_4 d_1) \xi \tau + \dots + d_1 d_4 \tau^2 \\ \dots \\ \tau'^2 = a_4^2 \xi^2 + \dots + 2a_4 d_4 \xi \tau + \dots + d_4^2 \tau^2 \end{cases}$$

und können das kurz so ausdrücken: Die quadratischen Terme der Variablen erleiden gleichzeitig mit diesen eine aus (1) sich unmittelbar ergebende homogene lineare Substitution. Nun ist  $f$  eine *lineare* Form dieser quadratischen Terme, also erkennen wir durch genaue Wiederholung der vorigen Überlegungen, daß sich die *Koeffizienten*  $A, \dots, 2G, \dots, K$  *linear homogen, und zwar kontragredient zur Substitution (3) der Terme*  $\xi^2, \dots, \xi\tau, \dots, \tau^2$  *transformieren*; d. h. die Gleichungen zwischen  $A, \dots, 2G, \dots, K$  und  $A', \dots, 2G', \dots, K'$  entstehen genau so aus (3) wie die Gleichungen (2) aus (1).

5. Nun können wir das *allgemeine Problem der Invariantentheorie* formulieren. Sind irgendwie eine Reihe von Punkten  $1; 2; \dots$  sowie von linearen, quadratischen, evtl. auch höheren Formen  $\varphi_1; \varphi_2; \dots; f_1; f_2; \dots$  vorgegeben, so versteht man unter einer *Invariante* eine solche Funktion der Koordinaten  $\xi_1, \dots, \tau_1; \xi_2, \dots, \tau_2; \dots$  und der Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \delta_1; \alpha_2, \dots, \delta_2; \dots; A_1, \dots, K_1; A_2, \dots, K_2; \dots$ , die bei den linearen Substitutionen (1) der Variablen und den zugehörigen, soeben bestimmten Substitutionen der Koeffizientensysteme ungeändert bleibt. *Es soll die Gesamtheit der überhaupt möglichen Invarianten studiert werden.*

Man gebraucht in der Literatur gelegentlich auch die Worte *Kovariante* und *Kontravariante* für besondere Arten der hier allgemein als Invarianten bezeichneten Gebilde. Sind nämlich in dem invarianten Ausdruck die Variablenreihen  $\xi_1, \dots, \tau_1; \xi_2, \dots, \tau_2; \dots$  selbst enthalten, so spricht man von *Kovarianten*, und treten in ihm Koeffizienten von Linearformen  $\alpha_1, \dots, \delta_1; \alpha_2, \dots, \delta_2; \dots$  auf, so sagt man *Kontravariante*; das Wort *Invariante* beschränkt man dann auf solche Ausdrücke, die weder solche Koordinaten  $\xi_1, \dots$  noch Koeffizienten  $\alpha_1, \dots$  enthalten und lediglich aus den Koeffizienten quadratischer oder höherer Formen zusammengesetzt sind. Daß man jene beiden Fälle hervorhebt und einander entgegenstellt, geschieht in Rücksicht darauf, daß die Variablenreihen  $\xi, \dots, \tau$  einerseits und  $\alpha, \dots, \delta$  andererseits ein gewissermaßen reziprokes Verhalten aufweisen: Erleiden die einen von ihnen eine lineare Substitution, so erfahren die anderen gerade die kontragrediente, gleichgültig, von welcher Reihe man ausgeht; aus jeder invarianten Bildung in Größen der einen Art kann man also durch passende Umsetzung eine ebensolche in Größen der anderen herleiten. Für die geometrische Deutung ist hiermit offenbar das *Prinzip der Dualität* ausgesprochen, denn  $\alpha, \dots, \delta$  werden homogene Geraden- bzw. Ebenenkoordinaten, wenn wir  $\xi, \dots, \tau$  als Punktkoordinaten auffassen. — Übrigens hat jener Unterschied, ob Wertssysteme  $\xi, \dots, \tau$  bzw.  $\alpha, \dots, \delta$  in den aufzustellenden Ausdrücken vorkommen oder nicht, natürlich keinerlei fundamentale Bedeutung, und wir werden daher im allgemeinen weiterhin das Wort *Invariante* im *umfassenderen Sinne* gebrauchen.

6. Wir wollen jetzt diesen Begriff der Invariante nach anderer Richtung schärfer fassen, um einen geordneten Aufbau der Theorie zu er-

möglichen. Wir betrachten als Invarianten fortan nur *rationale Funktionen der Koordinaten und Koeffizienten*, die obendrein noch in den Koordinaten jedes einzelnen auftretenden Punktes und den Koeffizienten jeder einzelnen auftretenden Form *homogen* sein mögen. Jede solche rationale Funktion können wir als *Quotienten von zwei ganzen rationalen homogenen Funktionen* darstellen, und diese werden wir für sich untersuchen. Da ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner den Wert des Quotienten nicht ändert, werden sie freilich nicht mehr notwendig Invarianten im bisherigen Sinne sein müssen, sondern sie werden sich bei jeder linearen Substitution möglicherweise mit einem gewissen Faktor multiplizieren können.

Man kann nun zeigen, daß dieser Faktor nur von den Koeffizienten der Substitution abhängt und daß er notwendig eine *Potenz der Substitutionsdeterminante*:

$$r = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & d_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_4 & \dots & d_4 \end{vmatrix}$$

sein muß. Wir kommen so schließlich dazu, *solche ganze rationale homogene Funktionen der gegebenen Größenreihen zu betrachten, die sich bei den linearen Substitutionen der Variablen und Koeffizienten, wie wir sie vorhin aufstellten, mit einer Potenz  $r^\lambda$  der Substitutionsdeterminante multiplizieren*. Man nennt sie *relative Invarianten*, da sie sich nur unwesentlich ändern, und ganz ungeändert bleiben bei allen Substitutionen, für die  $r = 1$  ist. Der Exponent  $\lambda$  heißt das *Gewicht der Invariante*. Im Gegensatz dazu nennt man das, was wir bisher Invariante schlechtweg nannten, *absolute Invariante*; *jede absolute Invariante ist also ein Quotient relativer Invarianten gleichen Gewichtes*.

7. Damit ist tatsächlich ein *Gesichtspunkt zur Systematisierung der Invariantentheorie* gewonnen. Die einfachsten relativen Invarianten werden die sein, die Polynome *möglichst niedrigen Grades* in den gegebenen Größenreihen sind; von ihnen aus wird man zu denen höheren Grades aufsteigen. Sind  $j_1, j_2$  irgendwelche relative Invarianten, so ist jedes Produkt von Potenzen  $j_1^{n_1} \cdot j_2^{n_2}$  wieder eine relative Invariante; denn erhält  $j_1$  bei der Substitution den Faktor  $r^{\lambda_1}$ ,  $j_2$  den Faktor  $r^{\lambda_2}$ , so reproduziert sich  $j_1^{n_1} \cdot j_2^{n_2}$  bis auf den Faktor  $r^{n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2}$ . Bildet man nun eine Summe solcher Terme, noch multipliziert mit konstanten Faktoren:

$$\sum_{(n_1, n_2, \dots)} c_{n_1, n_2, \dots} j_1^{n_1} j_2^{n_2} \dots$$

und sorgt dabei nur dafür, daß die einzelnen Summanden sich allemal mit derselben Potenz von  $r$  multiplizieren, d. h. daß sie alle dasselbe Gewicht haben oder — wie man sagt — „*isobar*“ sind, so erhält man offenbar wiederum eine relative Invariante höheren Grades, da der Faktor der einzelnen Glieder einfach vor die Summe tritt.



Das *zentrale Problem* der Invariantentheorie ist nun natürlich die Frage, ob man so stets *alle* Invarianten erhalten kann: *Welches ist in jedem bestimmten Falle das volle System der niedersten Invarianten, aus denen sich sämtliche relative Invarianten in der angedeuteten Weise ganz und rational aufbauen lassen?* Das Haupttheorem aber ist, daß es zu jeder *endlichen Anzahl vorgegebener Größen stets ein solches endliches „volles Invariantensystem“ gibt, d. h. endlich viele Invarianten, aus denen sich alle anderen ganz und rational zusammensetzen.* Diese abschließenden Resultate der systematischen Invariantentheorie verdankt man übrigens deutschen Forschern, nämlich *P. Gordan* und *D. Hilbert*; besonders ist des letzteren Arbeit in Bd. 36 der Mathematischen Annalen<sup>1)</sup> hervorzuheben.

Ich möchte nun noch an *einfachen Beispielen*, wie wir sie hernach in der Geometrie gebrauchen werden, etwas näher die vorgetragenen abstrakten Entwicklungen erläutern, werde freilich auch hier mehr referieren als beweisen.

1. Nehmen wir zunächst an, daß im *binären Gebiete* lediglich eine *Anzahl von Punkten* gegeben sei:

$$\xi_1, \tau_1; \quad \xi_2, \tau_2; \quad \xi_3, \tau_3; \quad \dots$$

Dann gilt der interessante Satz, daß die *einfachsten Invarianten durch die zweireihigen Determinanten geliefert werden, die man aus diesen Koordinaten bilden kann, und daß diese Determinanten zugleich das volle Invariantensystem bilden.*

Wir können aus 2 Punkten 1, 2 eine zweireihige Determinante bilden:

$$A_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix}.$$

Sie ist tatsächlich eine ganze rationale Funktion der Variablen und auch homogen sowohl in  $\xi_1, \tau_1$  als in  $\xi_2, \tau_2$ . Die invariante Natur erkennen wir sofort, wenn wir unter Benutzung des Determinantenmultiplikationssatzes ausrechnen:

$$A'_{12} = \begin{vmatrix} \xi'_1 & \tau'_1 \\ \xi'_2 & \tau'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \xi_1 + d_1 \tau_1 & a_2 \xi_1 + d_1 \tau_1 \\ a_1 \xi_2 + d_1 \tau_2 & a_2 \xi_2 + d_1 \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = r \cdot A_{12};$$

also liegt eine Invariante vom *Gewicht 1* vor.

Solcherweise haben  $n$  Punkte 1, 2, . . . ,  $n$  im ganzen  $\frac{n(n-1)}{2}$  Invarianten vom Gewicht 1:

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n);$$

daß diese Determinanten weiterhin das *volle Invariantensystem* bilden, d. h. daß jede *relative Invariante der  $n$  Punkte als Summe isobarer Terme:*

$$\sum C \cdot A_{ik}^a A_{lm}^b \dots$$

<sup>1)</sup> Über die Theorie der algebraischen Formen. Bd. 36, S. 473ff. 1890.

*darstellbar ist* — das zu beweisen würde freilich hier zu weit führen. Aus den relativen Invarianten erhält man die allgemeinsten rationalen absoluten Invarianten als Quotienten bei gleichem Gewichte von Zähler und Nenner; ein einfaches Beispiel einer absoluten Invariante wäre also der Quotient  $\frac{A_{ik}}{A_{lm}}$ .

Ich möchte an diesem Beispiel noch eine feinere Begriffsbildung erläutern, die in der Theorie eine große Rolle spielt, nämlich die der *Syzygien* (d. h. „Zusammengürtelungen“ oder Verknüpfungen von Invarianten). Es kann nämlich vorkommen, daß gewisse jener Aggregate der fundamentalen Invarianten identisch verschwinden; so hat man z. B. bei 4 Punkten:

$$A_{12} A_{34} + A_{13} A_{42} + A_{14} A_{23} = 0,$$

was lediglich auf eine bekannte Determinantenidentität hinauskommt, die wir übrigens gelegentlich (S. 33) schon benutzt haben. Eine solche Identität zwischen Invarianten des vollen Systems heißt eine *Syzygie*. Hat man mehrere solcher Syzygien, so kann man durch Multiplikation und Addition neue daraus bilden, und wie bei den Invarianten selbst kann man nach dem vollen Systeme der Syzygien fragen, aus denen sich alle anderen in dieser Weise aufbauen lassen; die Theorie zeigt, daß es stets ein endliches System dieser Art gibt. Im Falle von 4 Punkten z. B. besteht dieses volle System aus der einzigen angegebenen Gleichung, d. h. alle zwischen den 6 Determinanten  $A_{12}, \dots, A_{34}$  bestehenden Identitäten sind Folgen jener einen; bei mehreren Punkten besteht es aus allen Gleichungen von jenem Typus. Die Kenntnis dieser Syzygien ist selbstverständlich von fundamentaler Wichtigkeit für die Kenntnis des gesamten Invariantensystems; denn unterscheiden sich zwei isobare Aggregate der einfachsten Invarianten um Terme, welche die linke Seite einer Syzygie zum Faktor haben, so sind sie identisch und brauchen nicht zweimal aufgezählt zu werden.

2. Sind ebenso einzelne Punkte im ternären oder im quaternären Gebiete gegeben, so werden ganz genau so die vollen Invariantensysteme durch die 3- oder 4-reihigen Determinanten aus ihren Koordinaten konstituiert; im ternären Gebiet z. B. ist die fundamentale Invariante dreier Punkte wiederum vom Gewicht 1:

$$A_{123} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \tau_3 \end{vmatrix}.$$

Sie wollen selbst durchdenken, wie sich alles Weitere, insbesondere die Aufstellung der Syzygien, hier gestaltet.

3. Steigen wir nun gleich zur Betrachtung einer quadratischen Form, etwa im quaternären Gebiet, auf:

$$f = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 + 2G\xi\tau + 2H\eta\tau + 2J\zeta\tau + K\tau^2.$$

Wir können zunächst *eine Invariante* bilden, die nur von den 10 Koeffizienten  $A, \dots, K$  abhängt, nämlich die *Determinante*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D & G \\ B & C & E & H \\ D & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix}.$$

Da sich die  $A, \dots, K$  kontragredient zu den quadratischen Termen in  $\xi, \dots, \tau$  transformieren, bestätigt man leicht, daß das *Gewicht dieser Invariante*  $-2$  ist:

$$\Delta' = \tau^{-2} \cdot \Delta.$$

Das volle System der aus den Koeffizienten der Form allein gebildeten Invarianten besteht lediglich aus diesem  $\Delta$ , d. h. jede ganze rationale Invariante, welche nur  $A, \dots, K$  enthält, ist ein Vielfaches einer Potenz von  $\Delta$ .

Nehmen wir nun die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  eines Punktes zu den Koeffizienten der Form hinzu, so ist die *einfachste gemeinsame Invariante* oder — nach der oben erwähnten Terminologie — *Kovariante* die Form  $f$  selbst, denn durch die Forderung ihrer Invarianz sind ja die Transformationen der  $A, \dots, K$  überhaupt bestimmt; so ist selbstverständlich *jede vorgegebene Form ihre eigene Kovariante*. Sie wird sogar bei unseren Substitutionen definitionsgemäß überhaupt nicht geändert, ist also eine Invariante vom *Gewicht* 0 oder eine *absolute Invariante*. Verwenden wir weiterhin 2 Punkte  $\xi_1, \dots, \tau_1$  und  $\xi_2, \dots, \tau_2$ , so tritt als neue Kovariante die sogenannte *Polarform*:

$$A \xi_1 \xi_2 + B(\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) + C \eta_1 \eta_2 + \dots + K \tau_1 \tau_2$$

auf, deren *Gewicht* wiederum 0 ist, d. h. die ebenfalls *absolut invariant* ist.

Betrachten wir endlich gleichzeitig mit  $f$  noch *eine Linearform*  $\varphi$ , d. h. den Inbegriff ihrer Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , so erhalten wir die folgende *simultane Invariante vom Gewicht*  $-2$ , die aus der Determinante durch den sogenannten Prozeß der „Ränderung“ mit  $\alpha, \dots, \delta$  entsteht:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha \\ B & C & E & H & \beta \\ D & E & F & J & \gamma \\ G & H & J & K & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix}.$$

Man kann sie nach dem früheren auch als *Kontravariante* bezeichnen. Bekanntlich spielt diese Determinante in der analytischen Geometrie eine große Rolle, wenn es sich darum handelt, eine Fläche zweiter Ordnung in Ebenenkoordinaten darzustellen; man erkennt,

daß dieser Angelegenheit der rein analytische Prozeß der Invariantenbildung zugrunde liegt.

Liegen ebenso 2 Linearformen  $\varphi_1, \varphi_2$  mit den Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \delta_1$  und  $\alpha_2, \dots, \delta_2$  vor, so kann durch „zweimalige Ränderung“ derselben Determinante eine *weitere Invariante* gebildet werden:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha_1 & \alpha_2 \\ B & C & E & H & \beta_1 & \beta_2 \\ D & E & F & J & \gamma_1 & \gamma_2 \\ G & H & J & K & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

die gleichfalls das *Gewicht*  $-2$  hat.

Diese wenigen Angaben müssen hier genügen, um Ihnen einen Einblick in das große Gebiet der Invariantentheorie zu vermitteln. Es ist eine ungemein ausgebreitete Lehre, die sich da entwickelt hat, und man hat insbesondere sehr viel Scharfsinn auf die Herstellung von Verfahren verwandt, die zu irgendwie gegebenen Grundformen das volle System der Invarianten und der Syzygien zu bilden gestatten. Nur noch eine allgemeine Bemerkung hierzu! In unseren Beispielen haben wir die Invarianten stets durch Determinantenbildung aufgestellt, und so bewährt sich überhaupt stets die *Determinantentheorie als Grundlage der Invariantentheorie*. Diese Beziehung veranlaßte Cayley ursprünglich, den Invarianten den Namen Hyperdeterminanten zu geben. Erst später führte Sylvester das Wort „Invariante“ ein. Es ist ganz interessant, sich die Frage vorzulegen, für wie wichtig man im Rahmen der gesamten Mathematik ein spezielles ihrer Kapitel halten soll, etwa die Determinantentheorie. Cayley sagte mir einmal im Gespräch, falls er 15 Vorlesungen über die gesamte Mathematik zu halten hätte, so würde er *eine* den Determinanten widmen. Überlegen Sie, ob Sie Ihren Erfahrungen nach der Determinantentheorie auch diese Wertschätzung zuteil werden lassen können! Ich selbst habe in meinen gewöhnlichen Elementarvorlesungen aus pädagogischen Gründen die Determinanten immer mehr und mehr zurückgedrängt; ich habe zu oft die Erfahrung gemacht, daß sich die Hörer wohl an die *Schemata* gewöhnen, mit denen man da in sehr zweckmäßiger Weise lange Ausdrücke abkürzen lernt, daß ihnen aber vielfach ihre *Bedeutung* keineswegs geläufig wird und die Gewöhnung an das Schema sie vielmehr hindert, in alle Einzelheiten der Sache bis zu ihrer vollen Beherrschung einzudringen. Selbstverständlich können wir aber bei allgemeinen Überlegungen und so hier bei der Invariantentheorie die Determinanten nicht entbehren.

Wir kommen nun endlich zu unserem eigentlichen Ziel, mit Hilfe dieser Betrachtungen eine Systematisierung der Geometrie zu erhalten.

**3. Anwendung der Invariantentheorie auf die Geometrie.**

Wir beginnen damit, daß wir die Variablen  $\xi, \dots, \tau$  als *gewöhnliche rechtwinklige inhomogene Koordinaten* deuten, also  $\xi, \tau$  in der Ebene,  $\xi, \eta, \tau$  im dreidimensionalen Raume,  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  im vierdimensionalen Raume usw. Die linearen homogenen Substitutionen der Invariantentheorie:

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi' &= a_1 \xi + \dots + d_1 \tau \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \tau' &= a_4 \xi + \dots + d_4 \tau \end{aligned}$$

stellen dann die *Gesamtheit der affinen Transformationen des betrachteten Raumes bei festgehaltenem Koordinatenanfangspunkte* dar. Die einzelnen relativen *Invarianten* selbst werden also solche geometrische Größen sein, die bei jenen affinen Transformationen bis auf einen Faktor ungeändert bleiben, d. h. *Größen, die in der durch jene Transformationen definierten affinen Geometrie eine bestimmte Bedeutung haben.*

Sind beispielsweise im *binären Falle*, also in der *Ebene*, 2 Punkte 1, 2 gegeben, so stellt die *fundamentale Invariante*  $\Delta_{12}$  den *doppelten Inhalt des Dreiecks* ( $O 12$ ), mit passendem Vorzeichen versehen, dar, wie wir von früher her wissen; in der Tat ist bekannt (vgl. die analoge Feststellung für den Raum S. 78), daß sich der Dreiecksinhalt bei einer affinen Transformation nur mit der Substitutionsdeterminante multipliziert, und das besagt eben,  $\Delta_{12}$  ist eine relative Invariante vom Gewicht 1. Der Quotient zweier Inhalte  $\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}$  bleibt absolut ungeändert, ebenso aber auch eine *Gleichung*  $\Delta_{12} = 0$ , da für sie ein hinzutretender Faktor unwesentlich ist; tatsächlich hat diese Gleichung die gegenüber unseren affinen Transformationen offenbar absolut invariante Bedeutung, daß die 3 Punkte  $O, 1, 2$  auf einer Geraden liegen.

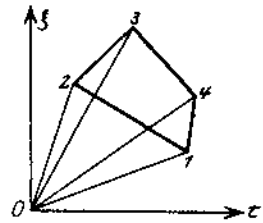


Abb. 99.

Haben wir nun mehrere Punkte 1, 2, 3, 4, ... (vgl. Abb. 99), so besteht ihr *volles Invariantensystem* aus allen ihren Determinanten  $\Delta_{ik}$ ; gelingt es also, irgend eine von den Koordinaten ganz und rational abhängige Größe zu bilden, die allen affinen Transformationen (1) gegenüber relativ invariant ist, d. h. *die überhaupt in unserer affinen Geometrie Bedeutung hat*, so muß sie sich als *Polynom in den  $\Delta_{ik}$*  darstellen. Wir können dies in einfachen Fällen sofort geometrisch verifizieren. Z. B. ist jeder Flächeninhalt der Ebene, etwa der des Polygons (1, 2, 3, 4), solch eine Invariante, und tatsächlich ist die Formel, die wir früher (S. 9) allgemein für den Polygoninhalt gegeben hatten:

$$(1, 2, 3, 4) = \Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{34} + \Delta_{41}$$

nichts als der Ausdruck des allgemeinen Theorems für diesen speziellen Fall.

Endlich haben wir noch von den *Syzygien* zwischen den Invarianten zu reden. Die fundamentale Syzygie:

$$A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23} = 0$$

stellt eine Identität zwischen den sechs von vier beliebigen Punkten und dem Nullpunkt gebildeten Dreiecksinhalten dar, also ein allgemeines Theorem unserer affinen Geometrie. Analoges gilt natürlich für jede Syzygie, und ebenso muß umgekehrt jedes Theorem unserer affinen Geometrie, insofern es eine Relation zwischen Invarianten der affinen Transformationen (1) ist, durch eine Syzygie dargestellt werden. Nach dem, was wir früher (S. 152) über das *volle* System der Syzygien im Falle von 4 Punkten behaupteten, müssen also *alle* in unserer affinen Geometrie für ein System von 4 Punkten gültigen Sätze aus jenem einen soeben angegebenen folgen. Und ebenso macht man sich die Richtigkeit der allgemeinen Behauptung klar, daß die *Invariantentheorie die lückenlose systematische Aufzählung aller in unserer affinen Geometrie möglichen Größen und Theoreme gestattet, indem sie das volle System der Invarianten und das der Syzygien gibt.*

Ich werde diese Betrachtungen wiederum nicht im einzelnen durchführen; ich will nur erwähnen, daß man neben den Punkten auch die durch Formen  $\varphi = a\xi + \delta\tau$ ,  $f = A\xi^2 + 2G\xi\tau + K\tau^2, \dots$  bestimmten Gebilde unserer Geometrie in Betracht ziehen kann. Eine solche Form ordnet jedem Punkte der Ebene einen Zahlenwert zu, d. h. sie bestimmt ein *Skalarfeld*; man kann in dieser Auffassung die Invarianten einer vorgegebenen Form leicht geometrisch deuten, und jede Syzygie zwischen den Invarianten wird wieder einen geometrischen Satz darstellen.

Neben dieser bisher betrachteten, ich möchte sagen, naiven Deutung der Invariantentheorie in der Geometrie eines  $n$ -dimensionalen Raumes, in welchem die  $n$  Veränderlichen als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten gelten, kommt nun aber auch eine *wesentlich andere Darstellung* in Betracht: Man kann jene Variablen auch *als homogene Koordinaten in einem  $(n-1)$ -dimensionalen Raume  $R_{n-1}$*  auffassen, dessen inhomogene Koordinaten  $x = \frac{\xi}{\tau}, \dots$  sind; dabei bleibt ein den  $n$  Koordinaten gemeinsamer Faktor unwesentlich. Wir haben früher (S. 93 ff.) uns überlegt, in welchem Zusammenhange diese Koordinatenbestimmungen des  $R_{n-1}$  und  $R_n$  stehen: wir betrachteten den  $R_{n-1}$  als das lineare  $(n-1)$ -dimensionale Gebilde  $\tau = 1$  des  $R_n$  und projizierten seine Punkte durch vom Koordinatenanfangspunkte des  $R_n$  ausgehende Strahlen. Dann waren die sämtlichen möglichen Wertsysteme der homogenen Koordinaten eines Punktes aus dem  $R_{n-1}$  identisch mit den Koordinaten aller ihm so entsprechenden Punkte im  $R_n$ . Nun stellen die linearen Substitutionen der homogenen Variablen im  $R_{n-1}$  sämtlich *projektive Transformationen*

dar, und zwar geben alle nur durch einen willkürlichen Faktor  $\varrho'$  sich unterscheidende Substitutionen:

$$\begin{aligned} \varrho' \xi' &= a_1 \xi + \dots + d_1 \tau \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varrho' \tau' &= a_4 \xi + \dots + d_4 \tau \end{aligned}$$

ein und dieselbe projektive Umformung. Die nunmehr in Betracht kommende *Gruppe aller projektiven Transformationen* enthält also nicht mehr  $n^2$ , sondern nur  $n^2 - 1$  *willkürliche Konstante*; im  $R_2$  und  $R_3$  sind es also insbesondere 8 bzw. 15.

Wollen wir nun die *Invariantentheorie der  $n$  Variablen  $\xi, \dots, \tau$  in der projektiven Geometrie des  $R_{n-1}$  geometrisch deuten*, so haben wir vor allem zu bedenken, daß eben wegen der Verwendung homogener Koordinaten nur diejenigen Größen und Beziehungen der Invariantentheorie eine Bedeutung finden können, die in den Koordinaten  $\xi, \dots, \tau$  jedes einzelnen auftretenden Punktes *homogen von nullter Ordnung* sind und die dieselbe Eigenschaft auch in bezug auf jedes einzelne etwa vorkommende Koeffizientensystem einer linearen, quadratischen usw. Form haben.

Das wird am besten klar werden, wenn ich es sofort an konkreten *Beispielen* ausführe. Es wird genügen, vom *binären Gebiete* ( $n = 2$ ) zu reden; wir haben also 2 Variable  $\xi, \tau$  und deuten  $x = \frac{\xi}{\tau}$  als *Abszisse auf der Geraden*. Sind eine Reihe von Wertsystemen  $\xi_1, \tau_1; \xi_2, \tau_2; \dots, \xi_p, \tau_p$  gegeben, so wissen wir, daß die Determinanten:

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, p)$$

das volle System fundamentaler Invarianten darstellen. Welche der sämtlichen invarianten Aussagen haben nun in der projektiven Geometrie Bedeutung? Nun, die Aussage, daß ein  $\Delta_{ik}$  irgend einen bestimmten Zahlenwert hat, jedenfalls nicht, denn wenn man  $\xi_i, \tau_i$  mit einem Faktor  $\varrho$  multipliziert, was ja den Punkt  $i$  nicht ändert, multipliziert sich auch  $\Delta_{ik}$  mit  $\varrho$ . Wohl aber hat das Verschwinden eines  $\Delta_{ik}$ , die *Relation  $\Delta_{ik} = 0$*  projektiv geometrische Bedeutung, denn wir können sie schreiben:  $\frac{\xi_i}{\tau_i} = \frac{\xi_k}{\tau_k}$ , so daß tatsächlich nur die Verhältnisse der Koordinaten beider Punkte eingehen, und die geometrische Bedeutung — *Zusammenfallen der Punkte  $i$  und  $k$*  — evident ist.

Um nun aber eine *zahlenmäßige Invariante* zu bekommen, die selbst von 0<sup>ter</sup> Dimension in den Koordinaten jedes Punktes ist, müssen wir mehr als 2 Punkte kombinieren. Der Versuch zeigt, daß man zum mindesten 4 Punkte 1, 2, 3, 4 braucht, und zwar ist dann jeder Quotient folgender Bauart:

$$\frac{\Delta_{12} \cdot \Delta_{34}}{\Delta_{14} \cdot \Delta_{23}}$$

in jedem der 4 Variablenpaare  $\xi_1, \tau_1; \dots, \xi_4, \tau_4$  homogen von 0<sup>ter</sup> Dimension. Daraus folgt zugleich, daß er das Gewicht 0 hat, d. h. eine *absolute Invariante* darstellt. Diese Größe hat mithin eine *projektive Bedeutung* und stellt einen allen projektiven Umformungen der Geraden gegenüber invarianten Zahlenwert dar. Sie ist natürlich nichts anderes als das „*Doppelverhältnis*“ der 4 in bestimmter Reihenfolge geschriebenen Punkte. Denn man kann sie in unhomogenen Koordinaten sofort in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}.$$

*Das Doppelverhältnis von 4 Punkten erhalten wir hier vom invariantentheoretischen Standpunkte also mit Notwendigkeit als die einfachste Invariante einer Punkteihe auf der Geraden, die der für eine projektiv-geometrische Bedeutung notwendigen Homogenitätsbedingung genügt.*

Ich schließe hier gern eine allgemeinere Bemerkung an. Ich habe früher schon der in der projektiven Geometrie vielfach bestehenden Tendenz gedacht, alle auftretenden Größen invarianten Charakters auf Doppelverhältnisse zurückzuführen. Wir können von unserem jetzt gewonnenen Standpunkt das Urteil fällen, daß durch dieses Bestreben die Gewinnung eines tieferen Einblickes in den Aufbau der projektiven Geometrie nur erschwert wird. Viel besser ist es, wenn man zuerst nach allen rationalen ganzen (relativen) Invarianten überhaupt fragt und aus ihnen erst die rationalen Invarianten, insbesondere die absoluten und unter ihnen wieder die der Homogenitätsbedingung der projektiven Geometrie genügenden bildet. Hier hat man dann eine wirkliche, vom Einfachsten zum Komplizierteren aufsteigende Systematik vor sich, die verwischt wird, wenn man eine spezielle rationale Invariante, das Doppelverhältnis, voranstellt und durch sie ausschließlich die anderen Invarianten darzustellen sucht.

Wir wollen nun noch zusehen, zu was für Sätzen der projektiven Geometrie die *Syzygien* zwischen den Invarianten  $\Delta_{ik}$  Anlaß geben. Gehen wir wieder von der fundamentalen Syzygie:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0$$

aus, dividieren durch den letzten Summanden der linken Seite und berücksichtigen, daß  $\Delta_{23} = -\Delta_{32}$  und  $\Delta_{42} = -\Delta_{24}$  ist, so erhalten wir:

$$\frac{\Delta_{12}\Delta_{34}}{\Delta_{14}\Delta_{32}} = 1 - \frac{\Delta_{13}\Delta_{24}}{\Delta_{14}\Delta_{23}}.$$

Hier steht links nach der ursprünglichen Definition das Doppelverhältnis der Punkte 1, 2, 3, 4, rechts das ganz genau ebenso gebildete Doppelverhältnis dieser 4 Punkte, wenn man nur die Reihenfolge von 2 und 3 vertauscht; die Doppelverhältnisse in noch anderer Reihenfolge erhält man, wenn man durch andere Terme dividiert. *So finden die fundamen-*



*talen Syzygien zwischen den Invarianten von je 4 Punkten ihre geometrische Deutung in den bekannten Relationen zwischen den 6 Werten, die ihr Doppelverhältnis je nach der Reihenfolge der 4 Punkte annehmen kann.*

Ich will hier nicht weiter ausführen, wie sich die Fortführung des Aufbaues der projektiven Geometrie der Geraden auf dieser Grundlage, und wie sich ebenso die *Deutung der ternären und quaternären Invariantentheorie in der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes* gestaltet; Sie finden das beispielsweise in den schon genannten Lehrbüchern von *Salmon-Fiedler* und *Clebsch-Lindemann* im einzelnen dargestellt, wo gerade mit dieser Deutung der Invariantentheorie fortwährend operiert wird. So entsteht eine *in sich vollständige Systematik der projektiven Geometrie*, sowohl was die Größen angeht, die man in ihr betrachten kann (die den Invarianten entsprechen), als auch die Theoreme, die man aufstellen kann (entsprechend den Syzygien). Freilich ist vom Standpunkte des Invariantentheoretikers diese Deutung weniger befriedigend als für den Geometer; für ihn ist die zuerst gegebene Deutung in der affinen Geometrie des  $R_{n+1}$  wertvoller, da im  $R_n$  nur die der besprochenen Homogenitätsbedingung genügenden Invarianten und Syzygien zur Geltung kommen.

Nur einen besonders wichtigen Punkt möchte ich noch ausführlicher erörtern, um wieder an eine früher (S. 146) abgebrochene Betrachtung anzuschließen: ich möchte zeigen, wie unter Anwendung der Invariantentheorie sich die durch das *Cayleysche Prinzip* ermöglichte Einordnung der affinen und metrischen Geometrie in das Schema der projektiven gestaltet.

#### 4. Die Systematisierung der affinen und metrischen Geometrie auf Grund des Cayleyschen Prinzips.

Hier handelt es sich natürlich um die *allgemeine* affine Geometrie, in der keineswegs, wie bei der anfangs betrachteten vollständigen Deutung der Invariantentheorie, ein festgehaltener ausgezeichnete Punkt — der Koordinatenanfangspunkt — existiert.

Betrachten wir sogleich den dreidimensionalen Raum mit den inhomogenen Koordinaten  $x, y, z$  bzw. den homogenen  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Das Cayleysche Prinzip sagt dann, daß aus der projektiven Geometrie die *affine* hervorgeht, wenn wir die *unendlichferne Ebene*  $\tau = 0$ , die *metrische* aber, wenn wir außerdem noch den *imaginären Kugelkreis*  $\tau = 0, \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$  den jeweils vorgelegten Gebilden adjungieren.

Eine *Bemerkung über diesen Kugelkreis* wird die Darstellung des folgenden erleichtern: Wir haben ihn hier durch *2 Gleichungen*, als Schnitt der unendlichfernen Ebene mit einem Kegel durch den Nullpunkt, definiert. Wir können ihn aber auch, wie überhaupt jeden Kegelschnitt, durch *eine Gleichung in Ebenenkoordinaten* bestimmen, wenn wir ihn als

*Umhüllungsgebilde* aller ihn berührenden Ebenen auffassen. Bezeichnen wir, wie wir es zuletzt taten, die „Ebenenkoordinaten“, d. h. die Koeffizienten einer Linearform  $\varphi$  mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , so lautet die Gleichung des Kugelkreises, wie man leicht bestätigt:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Mit anderen Worten, diese Gleichung ist die Bedingung dafür, daß die Ebene  $\alpha\xi + \dots + \delta\tau = 0$  den Kugelkreis berührt.

Nummehr ist es ein Leichtes, den Übergang von der projektiven zur affinen bzw. metrischen Geometrie invariantentheoretisch aufzufassen: Wir fügen den gegebenen Wertsystemen — Punktkoordinaten, lineare und quadratische Formen usw. —, die die betrachtete Figur beschreiben, noch die *eine bestimmte Linearform*  $\tau$  (d. h. das Koeffizientensystem 0, 0, 0, 1) bzw. die in *Ebenenkoordinaten geschriebene quadratische Form*  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  hinzu. Behandeln wir das so erweiterte Formensystem genau wie vorhin, d. h. stellen wir das *vollständige System seiner Invarianten und der Syzygien zwischen diesen* auf und heben diejenigen unter ihnen hervor, die der *Homogenitätsbedingung* genügen, so erhalten wir *alle Begriffe und Sätze der affinen bzw. metrischen Geometrie der ursprünglich gegebenen Elemente*; damit ist dann die invariantentheoretische Systematik auf die affine und metrische Geometrie übertragen, und ich möchte wiederum darauf hinweisen (vgl. S. 158), daß so insbesondere durch die Betonung der *ganzen rationalen* Bildung von Invarianten und Syzygien ein sonst wenig hervorgehobener systematisierender Gesichtspunkt in die Geometrie hineinkommt.

Statt abstrakter Erörterungen hierüber will ich Ihnen auch diese Beziehungen lieber sogleich durch *einfache Beispiele* deutlich machen, indem ich wirklich zeige, wie man die elementarsten Fundamentalgrößen der affinen und metrischen Geometrie darstellen kann als Simultaninvarianten der gegebenen Größensysteme und der Form  $\tau$  bzw.  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ .

Aus der *affinen Geometrie* zunächst wähle ich als Beispiel den *Inhalt*  $T$  des von 4 Punkten gebildeten *Tetraeders*, der sich bekanntlich ausdrückt als:

$$T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \tau_4 \end{vmatrix}.$$

Wir haben zu untersuchen, inwieweit dieser Ausdruck die behauptete Invarianteneigenschaft hat. Zunächst wissen wir, daß die hier auftretende Determinante tatsächlich die fundamentale relative Invariante von 4 Punkten ist (S. 152). Ferner aber stehen im Nenner für diese 4 Punkte die Werte der unserer Figur adjungierten Linearform  $\tau$ , und das sind ja die einfachsten mit Hilfe einer Form überhaupt zu bildenden (absoluten)

Invarianten (S. 153). Das ist natürlich so zu verstehen, daß nach einer Transformation in den Nenner die Werte der Form zu schreiben sind, in die die Linearform  $\tau$  übergeht, oder daß, wenn wir allgemein die Form  $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau$  adjungieren, in den Nenner das Produkt der 4 Werte dieser Form für die Punkte 1, . . . , 4 zu treten hat. So ist  $T$  also selbst auch eine rationale Invariante, und zwar ist sie homogen von nullter Dimension in den Koordinaten jedes der 4 Punkte. In bezug auf die Koeffizienten unserer adjungierten Linearform 0, 0, 0, 1 bzw.  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , die ja im Nenner auftreten, hat  $T$  allerdings die Dimension  $-4$ , so daß, da ein gemeinsamer Faktor dieser Größen willkürlich ist, der absolute Wert von  $T$  in der projektiven Geometrie unserer erweiterten Figur keine Bedeutung haben kann. Tatsächlich hat man ja auch in der affinen Geometrie zunächst kein Mittel, einem Tetraeder einen bestimmten zahlenmäßigen Inhalt zuzuschreiben, es sei denn, daß man bereits Einheitsstrecken bzw. ein Einheitstetraeder festgelegt hat, wie wir es bei der Benutzung inhomogener Koordinaten ja immer annahmen. Von unserm jetzigen allgemeinen Standpunkte aus würde das aber heißen, daß wir der Figur außer der „unendlichfernen Ebene“  $\tau = 0$  noch weitere Elemente hinzufügen. Adjungieren wir z. B. einen fünften Punkt und bilden den Quotienten zweier analog  $T$  gebildeter Ausdrücke, so haben wir tatsächlich einen allen Homogenitätsbedingungen genügenden Ausdruck, der dann auch eine absolute Invariante der affinen Geometrie ist. Der einzelne Ausdruck  $T$  ist (wir wissen das ja auch schon von früher; vgl. S. 78) lediglich eine relative Invariante vom Gewicht 1.

Hier ist nun der Ort, noch einmal auf die *Entwicklungen des ersten Hauptteils* hinzuweisen, deren innerstes Wesen sich jetzt klarer enthüllt. Daß die Graßmannschen Elementargrößen der Geometrie, die wir dort herleiteten, durchaus der affinen Geometrie angehören, das haben wir ja schon beim speziellen Studium der affinen Transformationen erkannt (vgl. S. 77 f.). Das *Graßmannsche Determinantenprinzip* aber, das uns jene Größen lieferte, ist — das können wir jetzt nachtragen — durchaus kein unverständlicher Kunstgriff, sondern es ist nichts als die völlig naturgemäße Anwendung der Invariantentheorie in der affinen Geometrie, d. h. der projektiven Geometrie bei Adjunktion der unendlich fernen Ebene. Das Auftreten der gewöhnlichen Determinanten — Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt — ist ja durch das soeben erörterte Beispiel schon zur Genüge erklärt. Es bleibt nur noch zu zeigen, wie die invariantentheoretische Systematik auf die durch die Unterdeterminanten rechteckiger Matrizen definierten allgemeinen Graßmannschen Elementargrößen führt. Auch das wird wiederum an einem Beispiele am deutlichsten werden: Hat man 2 Punkte  $\xi_1, \eta_1, \tau_1; \xi_2, \eta_2, \tau_2$  in der Ebene, so soll das invariantentheoretische Äquivalent der ihnen zugehörigen Gebilde der affinen Geometrie (Linienteil, Gerade, . . .) hergestellt werden. Das ordnet sich nun sofort dem Früheren ein, wenn man einen

dritten „unbestimmten“ Punkt  $\xi, \eta, \tau$  hinzunimmt, und wiederum die fundamentale Invariante:

$$\frac{1}{\tau \tau_1 \tau_2} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

als eine Linearform in  $\xi, \eta, \tau$  betrachtet. Die drei Koeffizienten dieser Variablen, das sind die Determinanten der Matrix:

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

sind also die für das neu definierte Gebilde charakteristischen Größen, und so sind wir tatsächlich genau auf die früher zur Definition des Linienteiles 1 2 verwendete Matrix geführt worden. Ganz ebenso kann man im Raum aus 3 bzw. 2 Punkten durch Adjunktion eines bzw. zweier Quadrupel unbestimmter Koordinaten eine relativ invariante Linear- bzw. Bilinearform bilden, deren Koeffizienten dann ganz in Übereinstimmung mit unserer alten Definition die Koordinaten eines Ebenenteils bzw. räumlichen Linienteils liefern. Ich kann diese Andeutungen hier nicht weiter ins Einzelne ausführen; sie dürften aber wohl zur ersten Orientierung genügen und Sie zu weiterem Nachdenken anregen.

Wichtiger ist, daß wir nun, nachdem wir das Graßmannsche Prinzip in die Invariantentheorie eingeordnet haben, die Frage nach seiner Leistungsfähigkeit stellen und es in dieser Hinsicht insbesondere mit dem Klassifikationsprinzip vergleichen, das auf S. 27f. für den besonderen Fall der Hauptgruppe ausgesprochen wurde und uns dort die sämtlichen fundamentalen geometrischen Gebilde lieferte. Die sinngemäße Ausdehnung des Klassifikationsprinzips auf den Fall einer beliebigen linearen Transformationsgruppe liegt auf der Hand. Wir werden nach ihm nämlich in jeder „Geometrie“ neben *einzelnen* ganzen rationalen Funktionen der gegebenen Größenreihen (Koordinaten, Formenkoeffizienten usw.), die uns bisher die Invarianten lieferten, auch *Systeme* solcher Funktionen  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$  betrachten. Transformiert sich ein solches System bei allen Substitutionen der zugehörigen Gruppe in sich selbst, d. h. lassen sich die in gleicher Weise gebildeten Funktionen  $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2, \dots$  der transformierten Größenreihen allein durch die  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$  linear ausdrücken mit Hilfe von Koeffizienten, die sich in eindeutig bestimmter Weise aus denen der zugrunde gelegten Transformation ergeben, so sagen wir, *das System definiert ein Gebilde der betreffenden Geometrie*. Die einzelnen Funktionen, aus denen das System besteht, heißen die *Komponenten* des Gebildes. Das entscheidende Merkmal für die Natur eines geometrischen Gebildes ist das Verhalten seiner Komponenten gegenüber den Transformationen der zugrunde gelegten Gruppe: Als von *gleicher Art* werden wir 2 geometrische Gebilde bezeichnen, wenn ihre Komponenten

2 Serien von gleich vielen Ausdrücken bilden, die bei Koordinatenwechsel je *dieselbe* lineare Substitution erleiden, nach unserer früheren Bezeichnung also *kogredient* sind. Besteht ein ein geometrisches Gebilde definierendes Funktionensystem aus einer einzigen Funktion, so reduziert sich die lineare Substitution auf die Multiplikation mit einem Faktor, und die Funktion ist eine relative Invariante.

Ich will diesen abstrakten Sachverhalt an einem einfachen Beispiel aus der Invariantentheorie des ternären Gebietes näher erläutern, das wir in der affinen Geometrie des dreidimensionalen Raumes bei festgehaltenem Anfangspunkt deuten werden. Wenn 2 Punkte  $\xi_1, \eta_1, \tau_1$ ;  $\xi_2, \eta_2, \tau_2$  gegeben sind, so ist das einfachste Funktionensystem, in dem die beiden Koordinatentripel homogen und symmetrisch auftreten, das System der 9 bilinearen Terme:

$$(1) \quad \xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2, \xi_1 \tau_2, \eta_1 \xi_2, \dots, \tau_1 \tau_2.$$

Bei einer linearen Transformation in unserer üblichen Bezeichnung (vgl. S. 147) hat man nun:

$$(2) \quad \begin{cases} \xi'_1 \xi'_2 = a_1^2 \xi_1 \xi_2 + a_1 b_1 (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + \dots + d_1^2 \tau_1 \tau_2 \\ \xi'_1 \eta'_2 = a_1 a_2 \xi_1 \xi_2 + a_1 b_2 \xi_1 \eta_2 + a_2 b_1 \eta_1 \xi_2 + \dots + d_1 d_2 \tau_1 \tau_2 \\ \dots \\ \tau'_1 \tau'_2 = a_4^2 \xi_1 \xi_2 + a_4 b_4 (\xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2) + \dots + d_4^2 \tau_1 \tau_2, \end{cases}$$

d. h. diese 9 Größen bilden in der Tat ein System von der eben erörterten Art, und wir werden sie daher als Bestimmungsstücke eines Gebildes unserer affinen Geometrie ansehen; man nennt dieses Gebilde und so jedes System, das aus 9 Größen besteht, die sich nach den Gleichungen (2) transformieren, neuerdings einen *Tensor*.

Nun bemerkt man aber bei Betrachtung der Gleichungen (2) leicht, daß man aus den 9 Größen (1) einmal 6, andererseits 3 einfache lineare Kombinationen herleiten kann, die sich je unter sich linear substituieren. Denkt man sich die Größen (1) zu einem quadratischen System geordnet:

$$\begin{array}{ccc} \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 \tau_2 \\ \eta_1 \xi_2 & \eta_1 \eta_2 & \eta_1 \tau_2 \\ \tau_1 \xi_2 & \tau_1 \eta_2 & \tau_1 \tau_2, \end{array}$$

so sind es einmal die Summen von symmetrisch zur Diagonale stehenden Gliedern:

$$(3) \quad 2\xi_1 \xi_2, \xi_1 \eta_2 + \eta_1 \xi_2, \xi_1 \tau_2 + \tau_1 \xi_2, \dots, 2\tau_1 \tau_2,$$

andererseits deren Differenzen:

$$(4) \quad \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2, \xi_1 \tau_2 - \tau_1 \xi_2, \eta_1 \tau_2 - \tau_1 \eta_2.$$

Die Substitutionsformeln für die Größensysteme (3) und (4) ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen (2). Wir haben damit 2 neue Gebilde

unserer affinen Geometrie gewonnen, von denen das aus den 6 Größen (3) bestehende als *symmetrischer Tensor* bezeichnet wird, während das aus den 3 Größen (4) bestehende die uns schon bekannte *Plangröße* darstellt. Der Name gilt natürlich wieder für jedes Größensystem, das sich kogredient transformiert. Auf die Rechtfertigung des Beiworts „symmetrisch“ werden wir nachher gleich eingehen.

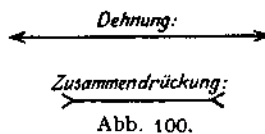
Was die 3 Größen (4) geometrisch bedeuten, wissen wir (vgl. S. 32): es sind die doppelten Projektionen des passend umlaufenen Dreiecks, das die Punkte  $\xi_1, \eta_1, \tau_1; \xi_2, \eta_2, \tau_2$  und der Koordinatenanfangspunkt bilden, auf die Koordinatenebenen, und wir haben hier gerade eines der ersten Gebilde, die das Grassmannsche Determinantenprinzip lieferte. Und so dürfen wir überhaupt den Satz aussprechen: *Bei dem systematischen Aufsuchen der Gebilde der affinen Geometrie vermöge unseres Klassifikationsprinzips wird man unter anderem mit Notwendigkeit auf das Grassmannsche Determinantenprinzip und die mit seiner Hilfe festgelegten geometrischen Gebilde geführt.* Ich kann das hier im einzelnen natürlich nicht ausführen; es genüge die Andeutung, daß man sämtliche früher besprochenen Gebilde erhält, wenn man in ganz analoger Weise die allgemeine affine Geometrie auf Grund des Cayleyschen Prinzips mit Hilfe der quaternären Invariantentheorie behandelt (vgl. S. 160 ff.).

Das wichtige Ergebnis unserer Untersuchung ist aber die Erkenntnis, daß das *Grassmannsche Determinantenprinzip etwas Spezielles ist und an sich durchaus nicht alle Gebilde der affinen Geometrie liefert.* Vielmehr haben wir in den Tensoren (1) und (3) *wesentlich neue geometrische Gebilde.*

Wegen der großen Bedeutung, die diese Gebilde für viele Gebiete der Physik, wie z. B. für die Lehre von den elastischen Deformationen und die Relativitätstheorie besitzen, sei hier noch ein wenig auf sie eingegangen. Vor allem seien auch einige Bemerkungen beigefügt, welche sich auf den Namen dieser geometrischen Größen beziehen und dem Leser das Zurechtfinden in der neueren Literatur über Tensorrechnung erleichtern sollen.

Das Wort „Tensor“ wurde von uns in Bd. I dieses Werkes bei Gelegenheit der Darstellung des Hamiltonschen Quaternionenkalküls in anderem Sinne als jetzt gebraucht. Ist  $q = a + bi + cj + dk$  eine Quaternion, so nannten wir damals den Ausdruck  $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$  ihren Tensor. Dieser von *Hamilton* eingeführte Name ist gerechtfertigt, da man, wie in Bd. I, S. 71 ff. ausführlich auseinandergesetzt wurde, die Multiplikation mit einer Quaternion geometrisch als Drehstreckung bei festgehaltenem Koordinatenanfangspunkt deuten kann. Als Maß der Streckung ergibt sich dabei nämlich gerade der eben als Tensor bezeichnete Wurzelausdruck  $T$ . In engem Zusammenhang hiermit steht die Art und Weise, wie *W. Voigt* in seinen Arbeiten über Kristall-

physik<sup>1)</sup> das Wort „Tensor“ gebraucht. Voigt bezeichnet damit gerichtete Größen, die Vorgängen entsprechen, wie dem der longitudinalen Streckung oder Kompression eines geraden Stabes, an dessen beiden Enden in Richtung der Stabachse nach entgegengesetzten Seiten gezogen bzw. gedrückt wird. Bildlich könnte man einen solchen Tensor durch eine Strecke darstellen, an deren beiden Enden Pfeile von entgegengesetzter Richtung angebracht sind (vgl. Abb. 100).



Man kann den Richtungscharakter des so verstandenen Tensors als „zweiseitig“, den des Vektors im Gegensatz hierzu als „einseitig“ bezeichnen. In der Physik treten nun solche Tensoren häufig als *Tensortripel*, d. h. zu dritt und zueinander orthogonal gerichtet auf (vgl. Abb. 101). Wir haben früher (vgl. S. 80) die reine homogene Deformation (reine Affinität) als gleichförmige, den Nullpunkt festlassende Streckung des Raumes nach drei zueinander senkrechten Richtungen kennen gelernt.

Statt dessen können wir jetzt sagen: Die reine homogene Deformation wird geometrisch durch ein Tensortripel dargestellt. Zu einer heute vielgebrauchten Bedeutung des Wortes „Tensor“ kommt man nun, wenn man den Inbegriff jener drei Streckungen des Raumes als eine einzige geometrische Größe auffaßt und, den Wortteil „Tripel“ einsparend, *diese* Größe mit dem Namen Tensor belegt. Der Tensorbegriff in diesem Sinne ist nun genau derselbe, den wir oben insbesondere als „symmetrischen Tensor“ bezeichnet haben.

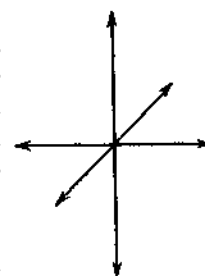


Abb. 101.

Die reine homogene Deformation wird nämlich, wenn der Koordinatenanfangspunkt fest bleibt, durch Substitutionen folgender Bauart dargestellt:

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \eta = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \tau = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{cases} \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

Dabei mögen die Zahlentripel  $x, y, z$ ;  $\xi, \eta, \tau$  als Punktkoordinaten in einem und demselben rechtwinkligen Koordinatensystem gedeutet werden. Das Koeffizientenschema der Transformation ist symmetrisch in bezug auf die Hauptdiagonale. Gehen wir jetzt unter Beibehaltung des Koordinatenanfangspunktes zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem über, so erhalten wir, wie eine einfache Rechnung zeigt (für den

<sup>1)</sup> Vgl. etwa: a) Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Kristall-  
elastizität; b) Über die Parameter der Kristallphysik und über gerichtete Größen  
höherer Ordnung. Beide Abhandlungen in den Göttinger Nachrichten 1900.

Übergang der  $x, y, z$  in die  $x', y', z'$  und der  $\xi, \eta, \tau$  in die  $\xi', \eta', \tau'$  gelten beziehungsweise dieselben Formeln), folgende neue Darstellung für die in Frage stehende Deformation:

$$(6) \quad \begin{cases} \xi' = a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13}z' \\ \eta' = a'_{12}x' + a'_{22}y' + a'_{23}z' \\ \tau' = a'_{13}x' + a'_{23}y' + a'_{33}z' \end{cases} \quad (a'_{ik} = a'_{ki})$$

Dabei ergibt sich für die 6 Koeffizienten  $a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{33}$ :

1. daß sie linear abhängen von den sechs  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$  und nur von diesen, also eine geometrische Größe definieren;

2. daß sie insbesondere sich genau so transformieren wie die in den Koordinaten bilinearen Ausdrücke (3), die wir auf S. 164 als die Komponenten eines *symmetrischen Tensors* bezeichnet hatten.

Das Beiwort „symmetrisch“ ist durch die Bauart des Koeffizientenschemas der Transformationsformeln (5), (6) gerechtfertigt.

Gehen wir jetzt zu einer den Koordinatenanfangspunkt festlassenden allgemeinen Affinität über:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \eta = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \tau = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

so ergibt sich in einer der eben angedeuteten ganz entsprechenden Weise, daß in der Geometrie der orthogonalen Transformationen die 9 Koeffizienten  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$  sich genau so transformieren wie die 9 Koordinatenprodukte (1), also die Komponenten einer Größe derselben Art wie jene bilden. In unserer Sprechweise, nach der das Wort Tensor nicht speziell auf reine homogene Deformationen beschränkt bleibt, heißt das: Das Koeffizientenschema einer allgemeinen affinen Transformation ist ein Tensor.

In der Literatur findet man noch eine große Anzahl anderer Namen für diesen Begriff. Einige der am meisten vorkommenden sind:

1. *Affinor* (wegen des Zusammenhanges mit der affinen Transformation);

2. *lineare Vektorfunktion* [da die linearen Substitutionen (7) sich so deuten lassen, daß durch sie einem vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Vektor  $x, y, z$  ein ebensolcher  $\xi, \eta, \tau$  linear zugeordnet wird];

3. *Dyade* und *Dyadic*. Doch wird das erste dieser beiden Wörter ursprünglich nur für einen besonderen, nachher noch zu erörternden Fall gebraucht.

Auch die Komponenten der Plangröße (4) lassen sich als die Koeffizienten einer Transformation auffassen, nämlich einer von der folgenden Art:

$$(8) \quad \begin{cases} \xi = 1 \cdot x - c \cdot y + b \cdot z \\ \eta = c \cdot x + 1 \cdot y - a \cdot z \\ \tau = -b \cdot x + a \cdot y + 1 \cdot z \end{cases}$$



Die Koeffizienten dieser Substitution verhalten sich nämlich, wie man leicht bestätigen kann, gegenüber rechtwinkligen Koordinatentransformationen wie die bilinearen Ausdrücke (4). Wegen der Bauart des Koeffizientenschemas der Formeln (8) (Symmetrie zur Hauptdiagonale mit *Vorzeichenwechsel*) bezeichnet man die durch sie bestimmte Größe auch als *antisymmetrischen Tensor*.

Geometrisch lassen sich bekanntlich die Formeln (7) als allgemeine homogene Deformation, die Formeln (6) als reine (drehungsfreie) Deformation, die Formeln (8) als *infinitesimale* Drehung deuten. *Dem formalen Prozeß, durch den wir auf S. 163 aus den Koordinatenprodukten (1) den symmetrischen Tensor (3) und den antisymmetrischen Tensor (4) ableiteten, entspricht also in der Anschauung die Zerlegung einer homogenen infinitesimalen Deformation in eine reine Deformation und eine Drehung.*

Wir haben uns bisher bei dem Wechsel des Koordinatensystems auf orthogonale Transformationen beschränkt. Es bleibt uns noch übrig, einige Ergänzungen für den Fall hinzuzufügen, daß vom rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem übergegangen wird oder auch die  $\xi, \eta, \tau; x, y, z$  überhaupt von vornherein als schiefwinklige Parallelkoordinaten eingeführt werden. (Die Beschränkung, daß der Koordinatenanfangspunkt fest bleibt, soll dabei aufrechterhalten werden.) Wir gehen damit von der Geometrie der Hauptgruppe über zu derjenigen der affinen Gruppe. Wenn man für diese Gruppe das Verhalten der Substitutionskoeffizienten von (7) gegenüber Koordinatentransformationen untersucht, so ergibt sich, daß sie zwar auch wieder die Komponenten einer geometrischen Größe darstellen, sich aber nicht wie die Koordinatenprodukte (1) transformieren, sondern *kontragredient* zu diesen. Entsprechendes gilt für die Koeffizienten von (6) und (8). Es läßt sich nun zeigen, daß derselbe Tensor (beispielsweise dieselbe homogene Deformation) in bezug auf ein Parallelkoordinatensystem sowohl durch Komponenten von der Art (1) als auch durch solche von der Art der Koeffizienten (7) gegeben werden kann. Man bezeichnet die ersteren als „kogradiente“, die letzteren als „kontragradiente“ Komponenten des Tensors. Statt „kogradient“ und „kontragradient“ sagt man oft auch „kontravariant“ und „kovariant“. Zuweilen werden die beiden letzten Ausdrücke in ihren Bedeutungen auch vertauscht. Der Unterschied zwischen den beiden Arten von Komponenten ist derselbe wie der zwischen Punkt- und Ebenenkoordinaten.

Eine weitere, gegenüber der von uns bevorzugten viel allgemeinere Bedeutung des Wortes Tensor wird schließlich verständlich, wenn man das Verhalten homogener Formen gegenüber Koordinatenwechsel untersucht. Auf Seite 149 haben wir diese Untersuchung bereits für den Fall einer quadratischen Form (bei ein wenig anderer Bezeichnung):

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + \dots + a_{33}\tau^2$$

durchgeführt. Wir fanden, daß die Formenkoeffizienten  $a_{11}, 2a_{12}, \dots, a_{33}$

sich linear homogen und kontragredient zu den Termen  $\xi^2, \xi\eta, \dots, \tau^2$  der Punktkoordinaten substituieren. Die letzteren aber transformieren sich, wie man unmittelbar sieht, kogredient zu den Ausdrücken (3). Wir können dieses Ergebnis so aussprechen: Die Koeffizienten  $a_{11}, 2a_{12}, \dots, a_{33}$  einer quadratischen Form sind die kontragredienten, die Terme  $\xi^2, \xi\eta, \dots, \tau^2$  die kogredienten Komponenten eines symmetrischen Tensors. Entsprechendes gilt für eine Bilinearform. Von dieser sagt man nach *Gibbs*, daß sie insbesondere eine *Dyade* definiert, wenn sie sich als Produkt zweier linearen Formen schreiben läßt. Hat man nun eine *homogene n-fach lineare Form* der Punktkoordinaten, so läßt sich durch eine leichte Rechnung zeigen, daß auch ihre Koeffizienten bei Koordinatentransformation sich homogen und linear substituieren, und zwar kontragredient zu den zugehörigen Termen der Punktkoordinaten.

Die Verallgemeinerung des Tensorbegriffs, von der wir eben sprachen, besteht nun darin, daß man jede solche Größe als Tensor bezeichnet und diesen Namen nicht nur, wie wir es taten, im Zusammenhang mit Bilinearformen verwendet. In dieser allgemeinen Form ist der Name insbesondere von *Einstein* und seinen Schülern zur Anwendung gebracht worden. Früher sprach man statt dessen von linearen, quadratischen, bilinearen, trilinearen, kubischen usw. *Formen*.

Zu der Verschiedenheit der Termini tritt nun in praxi noch das Bestreben hinzu, das Komponentensystem eines Tensors durch einen *einzig* Buchstaben zu bezeichnen und das Rechnen mit Tensoren durch symbolische Zusammenstellung der solcherweise nebeneinander in Betracht kommenden Buchstaben anzudeuten. Alle diese Dinge sind an sich sehr einfach und werden nur dadurch für den Leser schwierig, weil sich die verschiedenen Verfasser verschiedener Bezeichnungsweisen bedienen. Es stellen sich hier in erhöhtem Maße dieselben Mißstände ein, die wir schon bei der Vektorrechnung zur Sprache brachten und die aus der Welt zu schaffen unmöglich scheint. Wir konnten aber an ihrer Erwähnung nicht vorbeigehen, weil die gesamte moderne Literatur davon beherrscht wird. —

Ich gehe nun zur *metrischen Geometrie* über, um auch da nur wenige charakteristische Beispiele herauszugreifen; ich werde zeigen, wie die beiden wichtigsten Grundbegriffe „Entfernung  $r$  zweier Punkte  $x_1 = \frac{\xi_1}{\tau_1} \dots$  und  $x_2 = \frac{\xi_2}{\tau_2} \dots$ “ sowie „Winkel  $\omega$  zweier Ebenen  $\alpha_1, \dots, \delta_1$  und  $\alpha_2, \dots, \delta_2$ “ aus der invariantentheoretischen Systematik sich ableiten. Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{\frac{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}{\tau_1^2\tau_2^2}},$$

$$\omega = \arccos \left( \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)}} \right).$$

Das sind algebraische bzw. transzendente Funktionen der Parameter; wir werden sie als „*algebraische*“ bzw. „*transzendente*“ *Invarianten* bezeichnen dürfen, wenn wir zeigen, daß die rationalen ganzen Bestandteile, aus denen sie sich aufbauen, für sich bereits Invarianten im alten Sinne sind.

Beginnen wir mit dem *Winkel*  $\omega$ . Die Figur, deren Invariante er werden soll, besteht aus zwei Linearformen:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$$

und der den Kugelkreis darstellenden quadratischen Form in Ebenenkoordinaten:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 0 \cdot \delta^2.$$

Wir können natürlich aus dieser quadratischen Form in Ebenenkoordinaten genau so Invarianten bilden, wie früher (S. 152 ff.) aus Formen in Punktkoordinaten, indem wir nur immer Punkt- und Ebenenkoordinaten vertauschen („*dualisieren*“). Insbesondere sind also die Werte der Form für die beiden gegebenen Wertssysteme:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + 0 \cdot \delta_1^2 \quad \text{und} \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + 0 \cdot \delta_2^2$$

sowie der für diese beiden Systeme gebildete Wert ihrer Polarform:

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 + 0 \cdot \delta_1 \delta_2$$

invariant, und gerade aus diesen Ausdrücken setzt sich  $\cos \omega$  tatsächlich zusammen. Übrigens ist  $\cos \omega$  in jedem der beiden Wertssysteme  $\alpha_1, \dots, \delta_1$  und  $\alpha_2, \dots, \delta_2$  und ebenso in den Koeffizienten 1, 1, 1, 0 der gegebenen quadratischen Form, *homogen von 0<sup>ter</sup> Dimension*, so daß der Ausdruck in der metrischen Geometrie eine selbständige Bedeutung hat. Tatsächlich gibt es ja auch in der metrischen Geometrie ein absolutes, von willkürlicher Annahme der Einheit unabhängiges Winkelmaß. Damit ist zugleich gesagt, daß unser Ausdruck eine *absolute Invariante* ist.

Was nun weiter die *Entfernung*  $r$  anlangt, so erinnern wir uns, daß wir Invarianten einer quadratischen Form in Punktkoordinaten gebildet hatten, indem wir ihre Determinante mit den Koordinaten einer oder zweier Ebenen ränderten (S. 153 f). Ebenso werden wir jetzt für unsere aus einer quadratischen Form in Ebenenkoordinaten und 2 Punkten bestehende Figur Invarianten erhalten, indem wir — genau dual vorgehend — die Determinante der Form  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 0 \cdot \delta^2$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ein- und zweimal mit den Koordinaten  $\xi_1, \dots, \tau_1$  und  $\xi_2, \dots, \tau_2$  der ge-

gegebenen Punkte rändern. Aus den so entstehenden Invarianten bilden wir den Quotienten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

Indem man die 3 Determinanten ausrechnet, findet man leicht, daß dieser Quotient genau dem oben angegebenen Werte von  $r^2$  gleich ist, dessen invariante Natur damit erkannt ist. Übrigens ist er ähnlich wie die früher betrachtete Fundamentalinvariante der affinen Geometrie wohl in den Koordinaten der beiden vorgelegten Punkte homogen von nullter Dimension, nicht aber in den Koeffizienten der gegebenen quadratischen Form, in denen er vielmehr homogen von ( $-4^{\text{ter}}$ ) Dimension ist. Zudem ist er auch *keine absolute Invariante*, denn jede der 3 auftretenden Determinanten hat, da es sich um die dualen Bildungen zu den S. 153 f. betrachteten Invarianten handelt, das Gewicht  $+2$ , der Quotient also das *Gewicht*  $2 - 4 = -2$ . Daher besitzt der numerische Wert von  $r$  noch keine unmittelbare Bedeutung in der metrischen Geometrie, und tatsächlich kann man ja die Entfernung zweier Punkte erst messen, wenn man eine weitere (Einheits-)Strecke willkürlich festgelegt, d. h. neben der fundamentalen quadratischen Form noch der Figur adjungiert hat. Absolute Invarianten der metrischen Geometrie stellen sich erst durch Quotienten von Ausdrücken der angegebenen Art dar.

Auch hier kann ich nicht näher ins Einzelne eingehen; diese Beispiele werden Ihnen aber wenigstens einen ungefähren Begriff davon geben, wie die hier entstehende vollständige Systematik der affinen und der metrischen Geometrie, die aus der systematischen Gliederung der ganzen rationalen Invarianten erwächst, aussieht. Mögen Sie Genaueres in den mehrfach genannten Lehrbüchern nachlesen<sup>1)</sup>!

Nur ein gewisses kleineres Beispiel will ich noch berühren, das übrigens auch in der Neuauflage von Clebsch-Lindemann<sup>2)</sup> eingehend behandelt ist, ich meine die sogenannte *Dreiecksgeometrie*. Hier ist im Laufe der Zeit besonders durch die Arbeit der Gymnasiallehrer ein großes abgeschlossenes Gebiet entstanden, das von den vielen *merkwürdigen Punkten, Geraden,*

<sup>1)</sup> [In obigem Zusammenhange sei besonders hingewiesen auf eine Arbeit von H. Burkhardt im Bd. 43 (1893) der mathematischen Annalen: Über Funktionen von Vektorgrößen, welche selbst wieder Vektorgrößen sind. Eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik.]

<sup>2)</sup> [a. a. O. S. 321. Vor allem sei auch genannt das Enzyklopädiereferat (III A B 10): *Berkhan-Meyer* über neuere Dreiecksgeometrie.]

*Kreisen* handelt, die man an einem Dreieck definieren kann: Schwerpunkt, Höhen, Winkelhalbierende, Ankreise, Umkreis, Feuerbachscher Kreis usw. Die unzähligen Beziehungen, die man hier immer aufs neue zu finden sich bemüht hat und noch weiter bemüht, kann man unserer Systematik ganz leicht einordnen: *Gegeben* sind da 3 Punkte  $\xi_1, \eta_1, \tau_1$ ;  $\xi_2, \eta_2, \tau_2$ ;  $\xi_3, \eta_3, \tau_3$  der Ebene (vgl. Abb. 102), als Dreiecksecken, und wir adjungieren, da es sich doch ganz um metrische Beziehungen handelt, die beiden *imaginären Kreispunkte*, deren Geradengleichung  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$  lautet; wir können aber einfach auch die Werte  $1, i, 0$  und  $1, -i, 0$  ihrer Punktkoordinaten adjungieren. Dann ist *die ganze Dreiecksgeometrie nichts als die projektive Invariantentheorie dieser 5 Punkte*, d. h. schließlich 5 beliebiger Punkte der Ebene, von denen nur 2 sprachlich ausgezeichnet werden. Diese Bemerkung erst verleiht der Dreiecksgeometrie den Charakter eines systematischen durchsichtigen Lehrgebäudes, den man sonst an ihr so vermißt.

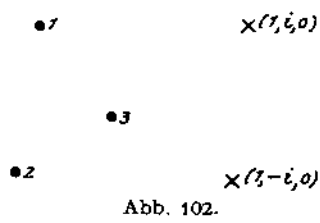


Abb. 102.

Ich verlasse damit die Betrachtungen über die Systematik der Geometrie. Gewiß befriedigt es den ästhetischen Sinn, wenn man sich die Dinge in der geschilderten Weise zurechtlegt, und da zudem allein diese Systematik eine tiefere Einsicht in die Geometrie vermittelt, sollte gewiß jeder Mathematiker, jeder Lehramtskandidat von ihr Kenntnis haben. Darum erschien es mir notwendig, sie in diesem Kolleg zu berücksichtigen, zumal Ihnen ohnehin in der Literatur vielfach diese Auffassung — wenn auch vielleicht nicht immer in so konsequenter Darstellung — entgegengetreten sein wird. Freilich wäre es ganz verkehrt, wenn man sich nun dogmatisch an diese Systematik binden und die Geometrie stets nur in diesem Schema darstellen wollte; denn dann würde sie sehr bald langweilig werden und allen Reiz verlieren, vor allem aber am neuen erfindungsreichen Denken hindern, das ja stets unabhängig von jeder Systematik vorgeht.

Waren das gewissermaßen Erörterungen über die Architektur des Gebäudes der Geometrie, so wenden wir uns nun seinen nicht minder wichtigen Fundamenten zu.

**II. Grundlagen der Geometrie.**

Einen Überblick über das äußerst umfangreiche Gebiet, das wir hier betreten, gibt das Enzyklopädiereferat von F. Enriques über die „Prinzipien der Geometrie“ (Enz. III A B 1). Die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie treten vielfach in Beziehung zu den Interessen der Erkenntnistheorie und Psychologie, die von sich aus untersuchen, wie die Raumschauung entsteht und mit welchem Recht man sie mit

mathematischen Methoden behandeln darf. Wir werden diese Fragen hier natürlich nur ganz flüchtig streifen können und werden wesentlich *die mathematische Seite des Problems* behandeln, wobei wir die Raumanschauung als gegeben annehmen; damit müssen wir insbesondere auch die für die Pädagogik so wichtige Frage, wie sich im einzelnen Individuum die Raumanschauung zu der präzisen Form entwickelt, an die wir als Mathematiker gewöhnt sind, beiseite lassen.

Unsere Aufgabe in dieser Begrenzung ist dann, *das ganze Gebäude der Geometrie auf möglichst einfacher Grundlage durch logische Operationen aufzuführen*. Die Grundlage freilich kann die reine Logik nicht mehr liefern; die logische Deduktion kann erst einsetzen, wenn der *erste Teil* des Problems gelöst ist: *wenn man ein System gewisser einfacher Grundbegriffe und gewisser einfacher Sätze, der sog. Axiome, besitzt, das den einfachsten Tatsachen unserer Anschauung gerecht wird*. Man kann diese Axiome natürlich je nach Geschmack mehr oder weniger weit in einzelne voneinander unabhängige Bestandteile zergliedern und hat auch sonst bei ihrer Auswahl noch große Freiheit. Denn die einzige Bedingung, der das Axiomensystem unterliegt, ist durch den *zweiten Teil* unserer Aufgabe gegeben: *Aus jenen Grundbegriffen und Axiomen soll der ganze Inhalt der Geometrie logisch hergeleitet werden können*, ohne daß man aufs neue an die Anschauung zu appellieren braucht.

Für die Behandlung dieser Aufgabe legt uns der ganze Gang unserer Vorlesung einen bestimmten charakteristischen Weg nahe. Wir hatten uns ja stets prinzipiell der Hilfsmittel der Analysis, insbesondere der Methoden der analytischen Geometrie bedient. So wollen wir denn auch hier wiederum die Analysis als bekannt annehmen und nur fragen, *wie man auf kürzeste Weise von dem etwaigen Axiomensysteme zu den Ansätzen der analytischen Geometrie gelangen kann*. Leider wird diese einfache Formulierung nur selten verwendet, da die Geometer häufig eine gewisse Scheu vor der Verwendung der Analysis haben, und soweit als irgend möglich ohne Zahlen auskommen wollen.

Das hiermit im allgemeinen angedeutete Programm läßt sich auf verschiedenen Wegen durchführen, je nachdem, *welche Grundbegriffe und Axiome man gerade hervorheben will*. Vielfach üblich und bequem ist es, an die Spitze der Betrachtung die *Grundbegriffe der projektiven Geometrie* zu stellen, nämlich *Punkt, Gerade und Ebene*, die wir ja schon früher (S. 62 f.) als solche hervorgehoben haben. Dabei soll nicht etwa *definiert* werden, was das für Dinge sind — das muß jedermann von Hause aus wissen! —, sondern es sollen nur so viele ihrer charakteristischen Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen ausgesprochen werden, daß man aus ihnen im oben präzisierten Sinne die ganze Geometrie herleiten kann. Die einzelnen Axiome, in denen das geschieht, will ich Ihnen hier nicht vollständig aufzählen — das würde uns in dieser enzyklopädischen Vorlesung zu weit abseits führen —, sondern ich will nur ihren Inhalt so

weit charakterisieren, daß Sie eine klare Vorstellung von ihnen bekommen.

An der Spitze stehen die *Sätze der Verknüpfung*, die ich für die projektive Geometrie schon früher (S. 63) ausgesprochen hatte. Wir wollen aber hier nicht von vornherein wie dort, die ausnahmslose Existenz eines Schnittpunktes zweier Geraden derselben Ebene oder einer Schnittgeraden zweier Ebenen fordern, sondern, wie es den unmittelbaren Verhältnissen der metrischen und affinen Geometrie entspricht, uns auf den Satz beschränken, daß 2 Gerade der Ebene einen Punkt oder keinen, 2 Ebenen eine Gerade oder gar keinen Punkt gemein haben; man kann dann nachträglich noch immer in gewisser Weise durch Adjunktion „uneigentlicher“ Punkte, Geraden und Ebenen zu dem vollständigen System der projektiven Geometrie aufsteigen.

Die *Anordnungssätze* weiterhin beschreiben, wie in der Ebene und auf der Geraden verschiedene Punkte zueinander liegen können, daß also z. B. von 3 Punkten  $a, b, c$  einer geraden Linie stets einer, etwa  $b$ , zwischen den beiden anderen  $a$  und  $c$  liegt und so fort; man nennt sie wohl auch kurz *Sätze des Zwischen* (vgl. Abb. 103).

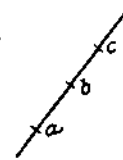


Abb. 103.

Was endlich *Stetigkeitseigenschaften* anlangt, so sei hier vorläufig nur die *Lückenlosigkeit* der Geraden hervorgehoben: Teilt man die Strecke zwischen 2 Punkten  $a, b$  irgendwie in zwei Teile 1, 2, so daß (wenn  $a$  links von  $b$  liegt) alle Punkte von 1 links von allen Punkten von 2 liegen, so gibt es gerade einen Punkt  $c$ , der diese Einteilung hervorruft, derart, daß zwischen  $a$  und  $c$  die Punkte des Teiles 1, zwischen  $c$  und  $b$  die von 2 liegen. Das entspricht offenbar ganz der Einführung der Irrationalzahlen durch den Dedekindschen Schnitt<sup>1)</sup>.

Aus diesen Axiomen kann man tatsächlich die ganze projektive Geometrie des Raumes durch logische Deduktion herleiten, insbesondere natürlich auch sehr bald gewisse Koordinaten einführen und die projektive Geometrie analytisch behandeln.

Will man weiter zur *metrischen Geometrie* gelangen, so hat man zuerst zu berücksichtigen, daß man mit der projektiven Geometrie auch den Begriff der *Gruppe der  $\infty^{15}$  Kollineationen* oder projektiven Umformungen des Raumes hat. Wir wissen, wie man als Untergruppe von ihr die 7-parametrische *Hauptgruppe* der räumlichen Änderungen charakterisieren kann, deren Invariantentheorie die metrische Geometrie ist: sie besteht aus den Kollineationen, die eine Ebene, die *unendlich ferne Ebene*, und in ihr eine Kurve zweiten Grades, den *imaginären Kugelkreis* (bzw. das ihn repräsentierende *absolute Polarsystem*) ungeändert lassen. Von hier aus muß man aber noch einen Schritt weiter gehen, wenn man genau die Sätze der elementaren Geometrie gewinnen will; man muß

<sup>1)</sup> Vgl. Teil I, S. 36f.

aus der Hauptgruppe die 6-parametrische *Untergruppe der eigentlichen Bewegungen* (Verschiebungen und Drehungen) aussondern, welche im Gegensatz zu den Ähnlichkeitstransformationen die Entfernung zweier Punkte völlig ungeändert lassen und also die metrische Geometrie der Kongruenzen zur Invariantentheorie haben. Man kann die Bewegungen aus der Hauptgruppe beispielsweise durch die Forderung herausheben, daß die „*Bahnkurven*“ einer Bewegung geschlossen sind, sofern sie nur einen Punkt fest läßt.

Der so skizzierte Aufbau der Geometrie ist vielleicht der *theoretisch einfachste*, da er zunächst für die projektive Geometrie ausschließlich mit linearen Gebilden operiert und erst hinterher, wenn es für die metrische Geometrie notwendig wird, ein quadratisches Gebilde, den Kugelkreis, hinzunimmt. Dafür ist seine Durchführung allerdings recht abstrakt und langwierig, und sie kann nur in einer eigenen Vorlesung über projektive Geometrie Platz finden. Hier muß es genügen, wenn ich Sie nach dieser allgemeinen Auseinandersetzung noch auf diejenige Darstellung in der Literatur verweise, die wohl die lesbarste ist, nämlich auf die von *H. Fleischer* übersetzten „*Vorlesungen über projektive Geometrie*“<sup>1)</sup> von *F. Enriques*.

Für allgemeine Unterrichtszwecke geeigneter scheint mir ein anderer Aufbau der Geometrie, dem ich mich jetzt — der Einfachheit halber unter Beschränkung auf die *Geometrie der Ebene* — zuwende.

### 1. Aufbau der ebenen Geometrie unter Voranstellung der Bewegungen.

Als Grundbegriffe nehmen wir *Punkt und Gerade* an und setzen Axiome über ihre *Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit* voraus. Dabei enthalten die Verknüpfungssätze wiederum nur die Anschauungstatsachen, daß durch irgend 2 Punkte stets eine und nur eine Gerade geht, während 2 Gerade entweder einen oder keinen Punkt gemein haben können. Über die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden behalten wir die oben bereits angedeuteten Forderungen bei; auf die genaue Formulierung der weiteren Anordnungssätze und der Stetigkeitsaxiome wird im Verlauf der Untersuchung noch zu verweisen sein.

Auf dieser Grundlage wollen wir jetzt unmittelbar — ohne den Umweg über die Projektivitäten — die *Gruppe der  $\infty^3$  Bewegungen der Ebene* einführen, um mit ihrer Hilfe zu unserem eigentlichen Ziel, dem System der ebenen analytischen Geometrie, zu gelangen. Wir müssen dann zunächst in einer Reihe von Axiomen abstrakt formulieren, welche Eigenschaften dieser „*Bewegungen*“ wir in Hinblick auf das System der Punkte und Geraden voraussetzen und benutzen wollen. Wir orientieren uns

<sup>1)</sup> Leipzig 1903. [2. deutsche Auflage 1915.] — Original: „*Lezioni di geometria proiettiva*. Bologna 1898. 3. italienische Auflage 1909.



dabei natürlich an der anschaulichen Vorstellung von einer Bewegung, die wir von unseren Erfahrungen mit starren Körpern her haben. Danach muß eine Bewegung in erster Linie eine eindeutige Transformation der Punkte unseres Raumes sein (also insbesondere jedem Punkt gewiß einen im *Endlichen* gelegenen Punkt zuordnen) und ferner Gerade ausnahmslos in Gerade überführen. Es ist bequem, für Transformationen dieser Art allgemein wieder das Wort *Kollineation* zu gebrauchen; freilich wissen wir zunächst noch nicht, ob es überhaupt solche Kollineationen gibt, da wir ja nicht — wie vorhin — im Besitz der projektiven Geometrie sind. Wir müssen also die Existenz wenigstens dieser ausgezeichneten Kollineationen durch ein *neues Axiom* ausdrücklich postulieren; demgemäß fordern wir, daß es eine Gruppe von gewissen  $\infty^3$  Kollineationen gibt, die wir *Bewegungen* nennen, und als deren Invariantentheorie wir die Geometrie der Ebene anzusehen haben. Dabei ist noch präziser zu charakterisieren, was mit dem „dreifach unendlich“ gemeint ist: Es seien (vgl. Abb. 104) irgend 2 beliebige Punkte  $A, A'$  gegeben und je eine Halbgerade  $a$  von  $A$  aus,  $a'$  von  $A'$  aus; dann soll es stets eine und nur eine Bewegung geben, die den Punkt  $A$  in  $A'$  und gleichzeitig den Strahl  $a$  in  $a'$  überführt. — Figuren, die durch eine Bewegung ineinander übergehen, nennen wir *kongruent*.

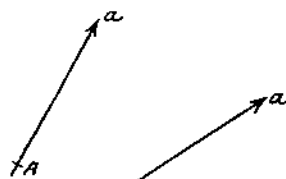


Abb. 104.

Wir wollen zunächst jedoch von der Existenz dieser ganzen Bewegungsgruppe noch nicht Gebrauch machen, vielmehr nur eine besondere Klasse von Bewegungen verwenden, über die wir nun noch einige *spezielle Postulate* aufstellen. Es gibt nämlich genau eine Bewegung, die einen Punkt  $A$  in einen beliebig gegebenen  $A'$  und gleichzeitig die Gerade von  $A$  nach  $A'$  (mit dieser Richtung) in sich selbst überführt; eine solche Bewegung nennen wir *Verschiebung* (*Translation*) oder deutlicher *Parallelverschiebung*. Wir fordern nun, daß jede solche Verschiebung überhaupt die Verbindungsgerade je zweier in ihr sich entsprechender Punkte  $B, B'$  (unter Erhaltung ihrer Richtung) in sich überführt, und ferner — und das ist das Wesentliche —, daß alle  $\infty^3$  Verschiebungen der Ebene eine Untergruppe der Bewegungsgruppe bilden.

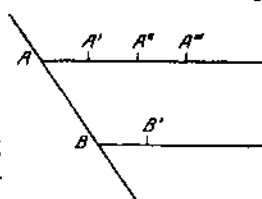


Abb. 105.

Wiederholen wir mehrere Male eine und dieselbe Verschiebung (vgl. Abb. 104), so geht  $A$  stets in Punkte  $A', A'', A''', \dots$  des nach  $A'$  hinweisenden Halbstrahles der Geraden  $AA'$  über; wir müssen als *weiteres Postulat* noch aussprechen, daß diese Punkte schließlich jeden Punkt dieser Halbgeraden erreichen oder einschließen. Durch Wiederholung der inversen

Wiederholen wir mehrere Male eine und dieselbe Verschiebung (vgl. Abb. 104), so geht  $A$  stets in Punkte  $A', A'', A''', \dots$  des nach  $A'$  hinweisenden Halbstrahles der Geraden  $AA'$  über; wir müssen als *weiteres Postulat* noch aussprechen, daß diese Punkte schließlich jeden Punkt dieser Halbgeraden erreichen oder einschließen. Durch Wiederholung der inversen

Transformation erhalten wir eine Punktfolge der gleichen Art auf der anderen Halbgeraden. Indem wir uns die Vorstellung bilden, daß wir jede Verschiebung kontinuierlich aus der Anfangs- in die Endlage vornehmen, wie wir das hernach noch benutzen werden, nennen wir die in Rede stehende Gerade die *Bahnkurve* des Punktes  $A$  bei der Translation. Dann ist jede Gerade Bahnkurve von unendlich vielen Punkten, und es

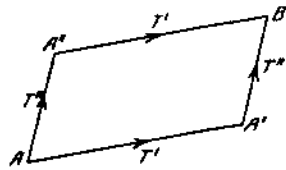


Abb. 106.

gibt für jede Verschiebung  $\infty^1$  solche Bahngerade, eben die Geraden, die die Verschiebung in sich überführt.

Nun können sich 2 verschiedene Bahngeraden ein und derselben Translation nicht schneiden; denn man sieht leicht, daß ihr Schnittpunkt sonst bei einer Translation aus 2 verschiedenen Punkten, nämlich je einem

der beiden Bahngeraden, hervorgehen müßte — entgegen dem Charakter der Translation als einer eineindeutigen Punkttransformation. Wir nennen nun die sämtlichen Bahngeraden ein und derselben Translation einander *parallele Geraden* und haben damit diesen Begriff aus einer Eigenschaft unserer Bewegungen heraus eingeführt. Gleichzeitig ist klar, daß es durch jeden Punkt  $A$  zu einer Geraden  $a$  *jedenfalls eine Parallele* gibt — nämlich seine Bahngerade in einer Verschiebung längs der gegebenen Geraden  $a$ .

Endlich haben wir noch ein *letztes Axiom* über diese Verschiebungen aufzustellen, daß nämlich 2 beliebige Verschiebungen  $T'$ ,  $T''$  *miteinander vertauschbar* seien, d. h. daß derselbe Punkt  $B$  herauskommt, wenn man einen bestimmten Punkt  $A$  zuerst der Verschiebung  $T'$  und dann der  $T''$  oder wenn man ihn zuerst der Verschiebung  $T''$  und dann der  $T'$  unterwirft (vgl. Abb. 106), symbolisch geschrieben:

$$T' \cdot T'' = T'' \cdot T'.$$

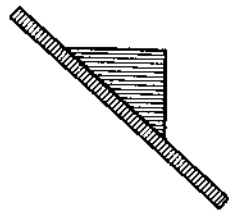


Abb. 107.

Auf die Frage, wie man überhaupt auf solche Axiome kommt, werde ich später noch ein wenig einzugehen haben; hier möchte ich nur betonen, daß unsere Vordersätze gerade das ausdrücken, was jedem Menschen von den ersten Anfängen

des geometrischen Zeichnens her geläufig ist. Da ist ja das erste, was man tut, daß man einen starren Körper, Lineal oder Zirkel oder dgl., von einem Ort der Zeichenebene zum anderen bewegt, um Größen zu übertragen, und insbesondere wendet man die Operation der Translation ungeheuer oft an, indem man etwa ein Dreieck an einem Lineal entlang führt (vgl. Abb. 107); dabei zeigt die Erfahrung immer wieder, daß alle Punkte des Dreiecks parallele Geraden beschreiben. Unsere Annahmen, die wir logisch nicht mehr weiter zergliedern, haben also durchaus nichts Künstliches an sich.

Nun wollen wir zusehen, wie weit wir von diesen ersten, auf die Verschiebungen bezüglichen Begriffen aus in die analytische Geometrie eindringen können. Von rechtwinkligen Koordinaten können wir freilich nicht reden, da wir für die Definition eines rechten Winkels bisher noch gar keinen Anhaltspunkt haben, wohl aber können wir *allgemeine Parallelkoordinaten* einführen. Wir legen durch einen Punkt  $O$  irgend zwei Geraden, die wir als  $x$ - und  $y$ -Achse bezeichnen (vgl. Abb. 108). Fassen wir die Verschiebung  $T$  auf, die  $O$  in einen irgendwie gewählten Punkt  $1$  der  $x$ -Achse überführt, so mögen aus ihm durch Wiederholung derselben Verschiebung  $T$  die Punkte  $2, 3, 4, \dots$  der  $x$ -Achse entstehen; indem wir ebenso wiederholt die *inverse Operation*  $T^{-1}$  ausführen, die dadurch definiert ist, daß sie  $1$  in  $O$  überführt, geht  $O$  der Reihe nach in die Punkte  $-1, -2, -3, \dots$  der  $x$ -Achse über. Wir ordnen den so erhaltenen Punkten die positiven und negativen

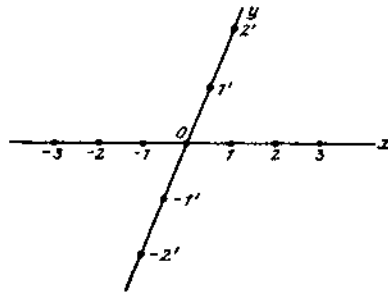


Abb. 108.

ganzen Zahlen  $0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$  als „Abszissen“  $x$  zu; sie werden freilich nicht sämtliche Punkte der  $x$ -Achse erschöpfen, aber — nach einem unserer Postulate — doch so liegen, daß jeder weitere Punkt zwischen zweien von ihnen eingeschlossen ist.

In gleicher Weise gehen wir von irgendeiner Verschiebung  $T'$  längs der  $y$ -Achse aus und erhalten, indem wir sie beliebig oft vor- und rückwärts ausführen, in allen aus  $O$  hervorgehenden Punkten  $1', 2', 3', \dots, -1', -2', -3', \dots$  die Punkte der  $y$ -Achse mit positiven und negativen *ganzzahligen Ordinaten*. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß wir die so bestimmten Abschnitte  $x$  und  $y$  auf beiden Achsen wechselseitig noch nicht in Beziehung setzen können, da eine die  $x$ - in die  $y$ -Achse überführende Bewegung (Drehung) neben den Translationen zunächst nicht benutzt werden soll.

Wir können jetzt weiter auch zu *Punkten der  $x$ -Achse mit nicht ganzzahligen Abszissen* aufsteigen, indem wir immer die einmal beliebig gewählte Einheit festhalten. Was zunächst die *rationalen Punkte* angeht, so werden wir — um die Sache an einem Beispiel deutlich zu machen — vorerst eine Verschiebung  $S$  längs der  $x$ -Achse suchen, die einmal wiederholt gerade die vorhin betrachtete Einheitsverschiebung  $T$  ergibt; als Punkt  $\frac{1}{2}$  werden wir den Punkt bezeichnen, in den  $O$  durch  $S$  übergeführt wird, während wiederholte Anwendung von  $S$  auch die Punkte mit den Abszissen  $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  liefern wird. Um die Existenz einer solchen Verschiebung  $S$  bzw. dieser Punkte nachzuweisen, zeigen wir zunächst, daß jedenfalls die Gerade von  $\frac{1}{2}$  nach dem Punkte  $1'$  der  $y$ -Achse parallel der Geraden  $1\ 2'$  sein müßte (was der bekannten Konstruktion zur Teilung einer Strecke in gleiche Teile entspricht). Fassen wir nämlich die

Verschiebung  $S$  (vgl. Abb. 109) von  $O$  nach  $\frac{1}{2}$  auf als Aufeinanderfolge der Verschiebungen  $T'$  von  $O$  nach  $1'$  und  $S'$  von  $1'$  nach  $\frac{1}{2}$ , so kann man die einmal iterierte Verschiebung  $S$ , die ja ex definitione mit  $T$  identisch ist, in Anbetracht der Vertauschbarkeit je zweier Translationen ersetzen, durch die Aufeinanderfolge der iterierten Verschiebung  $T'$  und der iterierten  $S'$ ; da aber erstere  $O$  in  $2'$  überführt, so ist damit gesagt, daß  $1$  aus  $2'$  durch zweimalige Anwendung der Translation  $S'$  entsteht. Also ist  $2'1$  eine Bahngerade der Verschiebung  $S'$  und als solche in der Tat der von  $1'$  nach  $\frac{1}{2}$  gehenden Bahngeraden derselben Verschiebung parallel.

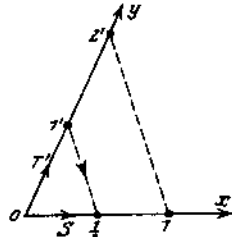


Abb. 109.

Nun besitzen wir ja nach dem Früheren bereits die Punkte  $2'$  und  $1$  und damit die Translation  $S'$ . Es wäre also aus den bereits vorhandenen Elementen die eindeutige Konstruierbarkeit des Punktes  $\frac{1}{2}$  als des Schnittpunktes der  $x$ -Achse und der Bahngeraden von  $1'$  in jener Translation  $S'$  gesichert — wenn wir nur wüßten, daß diese Bahngerade die  $x$ -Achse auch wirklich schneidet. Das kann ja anschaulich natürlich keinem Menschen zweifelhaft sein, im Rahmen unserer Axiomatik aber muß man zu diesem Schluß noch ein besonderes Axiom, das sogenannte „Zwischenaxiom“ für die Ebene, heranziehen; es sagt aus, daß eine Gerade, die durch eine Seite eines Dreiecks in das Dreieck hineintritt, durch eine andere wieder heraustreten muß — eine triviale Tatsache unserer Raumanschauung, die nur als solche besonders hervorgehoben werden muß, da sie von den anderen Axiomen logisch unabhängig ist. — Durch völlig analoge Überlegungen erhält man offenbar überhaupt zu jedem rationalen Abszissenwert  $x$  einen Punkt; man schließt leicht aus unseren Postulaten, daß innerhalb jeder (noch so kleinen) Strecke solche „rationalen Punkte“ liegen.

Um nun aber wirklich zu allen Punkten zu gelangen, die man in der Geometrie tatsächlich betrachtet, müssen wir auch irrationale Abszissen berücksichtigen; dazu brauchen wir ein neues, gleichfalls sehr einleuchtendes Postulat, das nur die oben angekündigte *Präzision der Stetigkeitsforderung* ist: *Es soll unendlich viele weitere Punkte der  $x$ -Achse bzw. Verschiebungen dieser Achse in sich geben, die zu den rationalen Punkten in genau den gleichen Beziehungen der Aufeinanderfolge und Stetigkeit stehen, wie die irrationalen zu den rationalen Zahlen.* Dieses Axiom ist um so plausibler, als umgekehrt doch die Einführung der irrationalen Zahlen historisch von der Betrachtung der geometrischen Stetigkeit aus erfolgt ist<sup>1)</sup>. Danach sind dann schließlich *alle Punkte der  $x$ -Achse auf alle positiven und negativen reellen Zahlen  $x$  eindeutig bezogen, und genau das Analoge läßt sich natürlich für die Punkte der  $y$ -Achse durchführen.*

<sup>1)</sup> Vgl. die Auseinandersetzungen in Teil I, S. 34 ff.

Ich weise übrigens darauf hin, daß das so geschilderte Verfahren der Herstellung eines Maßstabes auf einer Geraden durchaus das naturgemäße ist; wer sich einen Maßstab herstellt, verfährt so, daß er einen starren Körper von der schließlich willkürlichen Länge der Einheit (etwa die Entfernung der Zirkelspitzen) an seinem Lineal entlang verschiebt und die so entstehenden Strecken unterteilt.

Jede Verschiebung der Ebene längs der  $x$ -Achse können wir jetzt durch eine einfache Gleichung charakterisieren, die zu jedem Punkte  $x$  der  $x$ -Achse die Abszisse der neuen Lage gibt:

$$x' = x + a,$$

d. h. zu  $x$  wird das rationale oder irrationale, positive oder negative Stück  $a$  addiert. Ebenso ist eine Verschiebung längs der  $y$ -Achse durch eine Gleichung:

$$y' = y + b$$

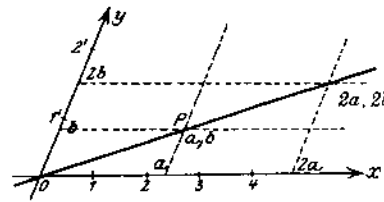


Abb. 110.

beschrieben. Nehmen wir nun (vgl. Abb. 110) diese beiden Verschiebungen nacheinander vor, gleichgültig in welcher Reihenfolge, so geht  $O$  wegen der Vertauschbarkeit der Verschiebungen in einen eindeutig bestimmten Punkt  $P$  über; wir sagen dann, daß  $P$  die *Abszisse*  $a$  und die *Ordinate*  $b$  hat. Umgekehrt kann man aber auch so jedem Punkte  $P$  zwei Zahlen  $a, b$  eindeutig zuordnen; man braucht nur die Verschiebung von  $O$  nach  $P$  vorzunehmen und für die Schnitte der neuen Lagen, in die die Achsen dabei kommen, mit ihren ursprünglichen Lagen Abszisse und Ordinate zu bestimmen. *Damit ist die Gesamtheit der Punkte der Ebene auf die Gesamtheit der Zahlenpaare  $(a, b)$  eineindeutig abgebildet, d. h. wir haben tatsächlich eine vollständige Koordinatenbestimmung in der Ebene.*

Zu überlegen bleibt nur, wie jetzt die *Gleichung der Geraden* aussieht. Betrachten wir zunächst die Gerade von  $O$  nach  $P(a, b)$ ; sie muß offenbar sämtliche Punkte enthalten, die durch Iteration der von  $O$  nach  $P$  führenden Verschiebung entstehen, also die Punkte:

$$x = \lambda a \quad y = \lambda b$$

mit ganzzahligem  $\lambda$ . Des weiteren aber erkennt man, daß auch alle durch diese Gleichungen bei rationalem und schließlich bei irrationalem  $\lambda$  bestimmten Punkte auf ihr liegen müssen, daß aber dadurch alle ihre Punkte erschöpft werden; durch Elimination von  $\lambda$  ergibt sich also ihre Gleichung als:

$$x : y = a : b \quad \text{oder:} \quad bx - ay = 0.$$

Daher stellt auch jede Gleichung der Form:

$$\alpha x + \beta y = 0$$

eine Gerade durch  $O$  dar, falls  $\alpha, \beta$  nicht gleichzeitig verschwinden. Nun kann man jede beliebige Gerade aus einer geeigneten Geraden durch

$O$  durch eine Parallelverschiebung erhalten; so folgt schließlich, daß sämtliche Geraden durch sämtliche Gleichungen erster Ordnung:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

dargestellt werden, die man ja eben darum *lineare Gleichungen* nennt.

Aus dieser Tatsache, daß die Gerade eine lineare Gleichung hat, ergibt sich nun durch die Methoden der analytischen Geometrie ohne Schwierigkeit ein großer Teil der geometrischen Sätze. Ich gehe darauf im einzelnen nicht ein und führe nur kurz an, daß man so die *gesamte affine Geometrie* und damit auch die *gesamte projektive Geometrie* herleiten kann. Soweit kommen wir also allein auf Grund der speziellen Postulate über die Untergruppe der  $\infty^2$  Verschiebungen. Nur eine Tatsache, die wir später brauchen werden, will ich noch hervorheben. Wir hatten früher auf Grund der Sätze der projektiven Geometrie den *Möbiusschen Satz* bewiesen, daß jede *Kollineation* eine *projektive Umformung* ist, d. h. eine Umformung, die durch linear gebrochene bzw. linear ganze Substitutionen der Koordinaten dargestellt wird. Nun waren ja nach unserer ersten Annahme die Bewegungen Kollineationen, bei denen jedem im Endlichen gelegenen Punkte ein ebenfalls im Endlichen liegender Punkt entspricht, andererseits besitzen wir jetzt bereits die gesamte projektive Geometrie, und daher gilt auf unserem Standpunkt auch der Möbiussche Satz. Also wird jede Bewegung notwendig durch eine lineare ganze Transformation der soeben eingeführten Parallelkoordinaten  $x, y$  dargestellt (vgl. S. 183 oben).

Wollen wir jetzt weiter in die *metrischen Begriffe der Geometrie* eindringen, besonders also den *Winkel* zweier Geraden und die *Entfernung* zweier beliebigen Punkte (bisher können wir ja nur von der Entfernung zweier Punkte auf der  $x$ -Achse oder der  $y$ -Achse reden) kennen lernen, so müssen wir uns mit der *vollen Bewegungsgruppe* beschäftigen.

Wir wollen insbesondere die Bewegungen ins Auge fassen, die einen Punkt, etwa den Anfangspunkt  $O$ , ungeändert lassen, die sogenannten

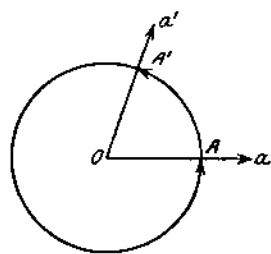


Abb. 111.

*Drehungen* um diesen Punkt. Nach dem allgemeinen Postulat über die Bestimmung einer Bewegung gibt es dann *genau eine Drehung*, die einen Halbstrahl  $a$  durch  $O$  in irgendeinen anderen Halbstrahl  $a'$  durch  $O$  überführt (vgl. Abb. 111). Diese Drehungen sind gewissermaßen *dual* zu den Verschiebungen, da sie einen Punkt ungeändert lassen, so wie diese eine Gerade in sich überführen. Genau wie die Verschiebungen wollen wir uns auch die Drehungen

kontinuierlich von der Anfangslage an ausgeführt denken, und wir werden wieder von der *Bahnkurve* reden, die jeder Punkt dabei beschreibt.

Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen Drehungen und Verschiebungen, den wir auch hier ausdrücklich als besonderes

Postulat formulieren müssen: *Die durch Wiederholung einer und derselben Drehung um  $O$  aus  $a$  entstehenden Halbstrahlen  $a', a'', \dots$  sollen jeden Halbstrahl durch  $O$  schließlich entweder erreichen oder einschließen* (während eine Translation nur die Punkte einer Halbgeraden lieferte). Insbesondere muß daher die kontinuierliche Drehung den Strahl  $a$  schließlich in seine Ausgangslage zurückführen, wobei notwendig auch jeder Punkt von  $A$  in seine Ausgangslage zurückkehrt: *Die Bahnkurven sind also geschlossene Linien*, die jede Halbgerade durch  $O$  in genau einem Punkte  $A$  treffen, derart, daß alle Strecken  $OA$  einander kongruent (d.h. durch eine Bewegung ineinander überführbar) sind; sie sind also das, was man gewöhnlich *Kreise mit dem Mittelpunkt  $O$*  nennt.

Nun werden wir im Strahlenbüschel um  $O$  mit Hilfe dieser Drehungen eine *Skala* festlegen, ganz analog wie wir sie oben auf der Geraden mit

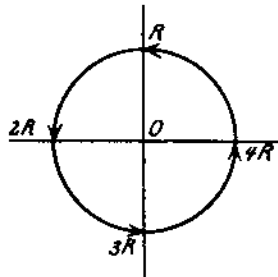


Abb. 112.

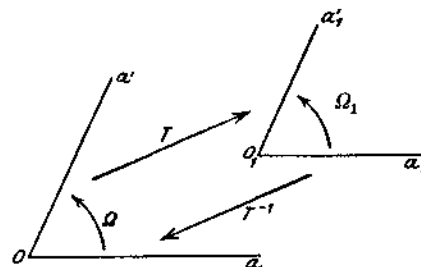


Abb. 113.

Hilfe der Verschiebungen konstruierten, wobei wir nur noch passende *Stetigkeitsannahmen* machen müssen. Ich brauche das hier wohl nicht im einzelnen auszuführen und gebe nur als Resultat an, daß wir schließlich dazu kommen, jeder Drehung eine reelle Zahl, den *Winkel dieser Drehung*, zuzuordnen; dabei tritt auch jede reelle Zahl als Drehwinkel auf. Als neues Moment erscheint natürlich die Periodizität der Drehung, und es liegt nahe, gerade die *volle Drehung*, die einen Strahl wieder in sich überführt, als Einheit zu wählen. Man nimmt aber herkömmlicherweise *zur Einheit die Vierteldrehung*, die viermal wiederholt die volle Drehung gibt, und deren Winkel man *einen Rechten  $R$*  nennt; jede Drehung wird dann durch ihren Winkel  $\omega \cdot R$  gemessen, wo  $\omega$  jede beliebige reelle Zahl sein kann, die man aber der Periodizität wegen auf die Werte von 0 bis 4 beschränken darf (vgl. Abb. 112).

Entsprechend kann man nun in dem Strahlenbüschel um jeden anderen Punkt  $O_1$  die Winkelskala definieren; man kann aber auch mit Hilfe der Translation die *Winkelskala von  $O$  unmittelbar auf  $O_1$  übertragen*. Sind nämlich (vgl. Abb. 113) die Halbstrahlen  $a_1, a_1'$  durch  $O_1$  gegeben und ist  $T$  die Verschiebung, die  $O$  in  $O_1$  überführt, so bezeichnen wir die Halbstrahlen durch  $O$ , in die die Strahlen  $a_1, a_1'$  vermöge der reziproken Translation  $T^{-1}$  übergehen, mit  $a, a'$ ; ist dann  $\Omega$  die Drehung

um  $O$ , die  $a$  in  $a'$  verwandelt, so ist die Drehung  $\Omega_1$  von  $a_1$  in  $a'_1$  um  $O_1$  gegeben durch die Aueinanderfolge von  $T^{-1}, \Omega$  und  $T$  oder in unmittelbar verständlicher Symbolik:

$$\Omega_1 = T^{-1}\Omega T;$$

denn auch die rechte Seite stellt eine Bewegung dar, die  $O_1 a_1$  in  $O_1 a'_1$  überführt, und eine solche Bewegung ist eindeutig bestimmt. Wir legen nun  $\Omega_1$  denselben Winkel  $\omega \cdot R$  bei, wie ihn  $\Omega$  nach der obigen Definition hat. Haben wir nun eine zweite Drehung  $\Omega'$  im Büschel  $O$ , so entspricht ihr im Büschel  $O_1$  die Drehung:

$$\Omega'_1 = T^{-1}\Omega' T,$$

und die Zusammensetzung von  $\Omega_1$  und  $\Omega'_1$  ist:

$$\Omega_1 \Omega'_1 = T^{-1} \Omega T T^{-1} \Omega' T = T^{-1} (\Omega \Omega') T;$$

sie entspricht also der Zusammensetzung von  $\Omega$  und  $\Omega'$ . Daraus folgt, daß unsere Übertragung tatsächlich bei  $O_1$  dieselbe Skala liefert, wie sie durch Wiederholung des direkten Verfahrens entstehen würde.

Es gibt bei *Euklid* einen Satz, der in die meisten unserer elementaren Lehrbücher übergegangen ist, daß nämlich alle rechten Winkel kongruent sind; jeder Knabe wird freilich diesen Satz für selbstverständlich halten, und ich meine, daß man ihn auf der Schule wirklich sparen sollte, da der Schüler doch nicht auffaßt, was mit ihm gemeint ist. Sein tatsächlicher Inhalt aber ist mit dem in den letzten Ausführungen Enthaltene identisch: daß man gleiche Winkel, die durch Drehungen an verschiedenen Punkten definiert sind, durch Bewegungen zur Deckung bringen kann, d. h. eben, daß sie kongruent sind.

Nachdem wir so den Winkel allgemein definiert haben, werden wir auch die Entfernung zweier beliebiger Punkte definieren, während wir

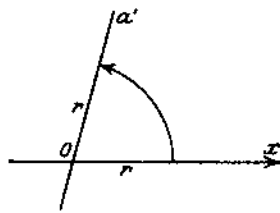


Abb. 114.

bisher Entfernungen nur auf ein und derselben Geraden durch Translation vergleichen konnten. Haben wir jetzt aber eine Entfernung  $r$  auf der  $x$ -Achse etwa von  $O$  aus abgetragen, so können wir sie (vgl. Abb. 114) durch Drehung um  $O$  auf jede beliebige Gerade  $a'$  durch  $O$  übertragen; so können wir überhaupt die ganze Längenskala auf der  $x$ -Achse auf  $a'$  und dann durch Ver-

schiebung weiter auf jede Parallelgerade zu  $a'$  und damit überhaupt auf jede beliebige Gerade übertragen. Wir können also tatsächlich den Abstand zweier beliebiger Punkte messen, indem wir sie durch eine Gerade verbinden und in der angedeuteten Weise den Maßstab der  $x$ -Achse auf sie übertragen. Wir werden insbesondere auch den anfänglich gewählten Maßstab auf der  $y$ -Achse so aus dem auf der  $x$ -Achse entstehen lassen.

Nun wollen wir mit dem neuen Begriff der Drehung unseren Apparat der analytischen Geometrie vervollständigen. Dabei benutzen wir, was wir



ja jetzt tun können, statt der allgemeinen Parallelkoordinaten speziell *rechtwinklige Koordinaten*  $x, y$ .

Wir wissen bereits (S. 180), daß sich jede Bewegung als eine lineare Substitution in  $x, y$  darstellt:

$$x' = (a_1 x + b_1 y + c_1) : N$$

$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2) : N.$$

Da sie jeden im Endlichen gelegenen Punkt wieder in einen solchen überführt, muß der Nenner  $N$  konstant sein, und er darf daher gleich 1 gesetzt werden.

Betrachten wir speziell eine Drehung um  $O$ , so ist  $c_1 = c_2 = 0$ , und es bleibt:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y. \end{cases}$$

Für eine besondere Drehung, nämlich die um *einen Rechten*, können wir unmittelbar die genaue Form der Gleichungen angeben; sie führt nämlich, da wir rechtwinklige Koordinaten haben, die  $x$ -Achse in die  $y$ -Achse, die  $y$ -Achse in die negative  $x$ -Achse über und wird daher einfach dargestellt durch:

$$(2) \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

Nunmehr ist die Frage nach der Angabe der Drehungsformeln auf eine rein analytische Aufgabe zurückgeführt: *Es soll eine solche einfach unendliche Gruppe von Substitutionen der Form (1) angegeben werden, die die Substitution (2) enthält und für die, wenn  $\omega$  einen reellen Parameter bedeutet, jede Substitution der Gruppe, allgemein zu reden, durch  $\omega$ -malige Iteration aus (2) entsteht.* Für ein rational gebrochenes  $\omega = \frac{p}{q}$  soll dieser Ausdruck natürlich bedeuten, daß die Substitution  $q$ -mal wiederholt gerade die  $p$ -mal iterierte Substitution (1) gibt, während irrationale  $\omega$  gemäß den Stetigkeitsannahmen durch rationale zu approximieren sind.

Wir müssen uns klar darüber sein, daß wir hier an geometrischer Kenntnis, speziell über die Drehungsformeln eines rechtwinkligen Koordinatensystems, nichts voraussetzen dürfen; wohl aber können und wollen wir Kenntnisse in der Analysis rücksichtslos benutzen. Dann wird unser Aufbau zwar in dieser Form für den Schulunterricht unmittelbar gewiß nicht verwendbar, er nimmt aber dafür eine sehr elegante und einfache Gestalt an.

Ich beginne mit der Bemerkung, daß sich die Drehung (2) unter Benutzung *komplexer Zahlen* auch in die eine Formel zusammenfassen läßt:

$$(2') \quad x' + iy' = i(x + iy).$$

Aus dieser Gestalt entnimmt man sofort, daß die iterierte Substitution durch:

$$x' + iy' = i^2(x + iy)$$

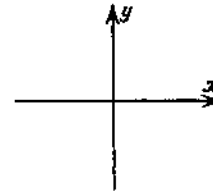


Abb. 115.

dargestellt wird, also eine Gleichung derselben Form, wo nur der Faktor  $i^2$  an Stelle von  $i$  getreten ist, und ebenso ergibt sich, daß bei  $\omega$ -maliger Iteration im vorhin festgelegten Sinne gerade der Faktor  $i^\omega$  auftritt für jedes reelle  $\omega$ . Wir erhalten also als *analytische Darstellung der Drehung der Ebene um  $O$  durch den Winkel  $\omega \cdot R$* :

$$(3) \quad x' + iy' = i^\omega (x + iy).$$

Bei der exakten Durchführung dieses Gedankenganges müssen wir freilich aus der Analysis die vollständige Kenntnis der Exponentialfunktion  $e^z$  und ebenso der mit ihr durch die Eulersche Formel:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

zusammenhängenden trigonometrischen Funktionen benutzen (ohne daß wir von ihrer geometrischen Bedeutung vorläufig eine Ahnung zu haben brauchen).

Dann kennen wir auch die Zahl  $\pi$  durch die Formel  $e^{i\pi} = -1$  und es ist:

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

Unter  $i^\omega$  ist durchweg der durch die folgende Formel eindeutig definierte Wert zu verstehen:

$$i^\omega = e^{\omega \frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\omega\pi}{2} + i \sin \frac{\omega\pi}{2}.$$

Führen wir das in (3) ein und trennen reellen und imaginären Bestandteil, so wird:

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \cos \frac{\omega\pi}{2} \cdot x - \sin \frac{\omega\pi}{2} \cdot y \\ y' = \sin \frac{\omega\pi}{2} \cdot x + \cos \frac{\omega\pi}{2} \cdot y, \end{cases}$$

und das ist also in mehr elementaren analytischen Symbolen die gesuchte Darstellung der Drehungsgruppe.

Es liegt nun nach diesem Resultat nahe, den *rechten Winkel nicht als Einheit, sondern als Winkel  $\frac{\pi}{2}$  zu wählen*. Wir werden das die *natürliche Winkelskala* nennen, so wie wir vom natürlichen Logarithmus reden, um anzudeuten, daß diese Begriffe in der Natur der Dinge begründet liegen, obwohl ihre Aufdeckung eine tiefere Einsicht erfordert. In dieser natürlichen Skala haben wir statt  $\frac{\omega\pi}{2}$  einfach  $\omega$  zu schreiben und erhalten statt (4) als Formeln der Drehung die allbekanntesten Formeln:

$$(5) \quad \begin{cases} x' = \cos \omega \cdot x - \sin \omega \cdot y \\ y' = \sin \omega \cdot x + \cos \omega \cdot y. \end{cases}$$

Wir haben nun zu untersuchen, was in dieser Formel an geometrischen Wahrheiten alles enthalten ist. Es werden das alle die Elementartheoreme sein, die man gewöhnlich vorausschickt, um dann auf ihnen die Formeln (5) aufzubauen:

1. Wir mögen zunächst den Punkt der  $x$ -Achse im Abstand  $r$  vom Anfangspunkt betrachten:  $x = r, y = 0$ . Drehen wir ihn um den Winkel  $\omega$ , so liefern die Formeln (5) als Koordinaten seiner neuen Lage:

$$(6) \quad \begin{cases} x = r \cos \omega \\ y = r \sin \omega ; \end{cases}$$

die Akzente an den Koordinaten des neuen Punktes sind dabei der Kürze halber fortgelassen. Nehmen wir nun, um die Ideen zu fixieren,  $\omega < \frac{\pi}{2}$  und betrachten das rechtwinklige Dreieck (vgl. Abb. 116), das vom Radiusvektor  $r$  des Punktes  $x, y$ , seiner Abszisse  $x$  und Ordinate  $y$  gebildet wird, so enthalten die Formeln (6) den Zusammenhang seiner Seiten und des Winkels  $\omega$ . Wegen der Relation  $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$ , die aus den hier zugrunde gelegten analytischen Definitionen dieser Funktionen folgt, ergibt sich aus (6) unmittelbar:

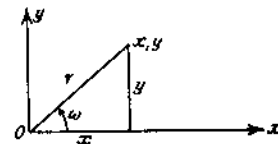


Abb. 116.

$$(6a) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

und das ist der *Pythagoreische Lehrsatz*, den wir so also *als Folge unserer Annahmen über die Bewegungen der Ebene* erhalten. Weiter aber können wir (6) umschreiben in:

$$(6b) \quad \cos \omega = \frac{x}{r} \quad \sin \omega = \frac{y}{r},$$

und das ist die *elementare trigonometrische Bedeutung unserer Winkel-funktionen*, die man sonst geradezu zu ihrer Definition verwendet: Kosinus und Sinus sind das Verhältnis von anliegender und gegenüberliegender Kathete zur Hypotenuse.

2. Wir können nun leicht die *allgemeinen analytischen Ausdrücke der Grundbegriffe Entfernung und Winkel* angeben, indem wir die gegebenen Elemente, Punkte oder Gerade, durch Verschiebung und Drehung in die soeben betrachtete spezielle Lage bringen. Es ergibt sich so für die *Entfernung zweier Punkte*  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$ :

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Denn man braucht nur durch Parallelverschiebung den Punkt 2 in den Koordinatenanfang überzuführen, so werden nach den Verschiebungsformeln (S. 179) die Differenzen  $x_1 - x_2, y_1 - y_2$  die neuen Koordinaten des Punktes 1, und aus (6 a) folgt sofort unser Ausdruck für  $r$ . Ganz ähnlich

folgt — ich brauche das hier wohl nicht im einzelnen auseinanderzusetzen — aus (6 b) für den *Winkel*  $\omega$  *irgend zweier Geraden* mit den Gleichungen  $\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0$ :

$$\cos \omega = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$$

$$\sin \omega = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$$

3. Wir müssen endlich noch vom *Begriffe des Flächeninhaltes* reden, von dem wir bisher bei dem Aufbau der Geometrie noch nicht den mindesten Gebrauch gemacht haben. Trotzdem ist dieser Begriff, wenn auch in mehr oder weniger unexakter Form, im naiven räumlichen Bewußt-

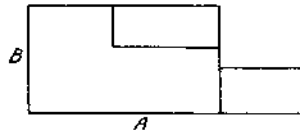


Abb. 117.

sein eines jeden Menschen enthalten; jeder Bauer weiß, was es heißt, daß ein Stück Land eine gewisse Anzahl Quadratmeter Inhalt hat. Wenn wir also die Geometrie vollkommen fundamntiert haben — und das ist tatsächlich im vorhergehenden geschehen —, ohne diesen Grundbegriff zu benutzen, so werden

wir ihn doch jetzt nachträglich an das System anschließen, d. h. ihn in Koordinaten ausdrücken müssen.

Wir müssen da mit einer kleinen *geometrischen Betrachtung* beginnen, wie sie ungefähr ebenso bei Euklid und in den elementaren Darstellungen der Geometrie stets angestellt wird. Haben wir ein *Rechteck* von den

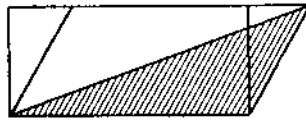


Abb. 118.

Seiten  $A$ ,  $B$ , so definieren wir als seinen *Inhalt das Produkt*  $AB$ . Fügen wir ferner 2 Rechtecke oder überhaupt 2 Figuren bekannten Inhaltes zusammen, so entsteht eine Figur, die die *Summe* der Inhaltszahlen zum Inhalt haben soll; ziehen

wir von einem Rechteck oder sonst einer Figur ein kleineres ganz in ihr gelegenes Stück ab, so soll der Rest die *Differenz* der Inhaltszahlen zum Inhalt haben (vgl. Abb. 117).

Von diesen Festsetzungen aus gelangt man sofort zur Angabe des *Inhaltes eines Parallelogrammes*. Es entsteht aus einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe, indem man ein Dreieck fortnimmt und ein kongruentes hinzufügt (vgl. Abb. 118); daher ist sein Inhalt gleich dem Rechtecksinhalt, also gleich dem *Produkt von Grundlinie und Höhe*. Durch eine Diagonale zerfällt das Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke, deren jedes also den halben Parallelogramminhalt zum Inhalt hat: *Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe*.

Wenden wir das auf ein Dreieck mit den Seiten  $r_1$ ,  $r_2$  und dem ein-

geschlossenen Winkel  $\omega$  an, so ist die Höhe auf  $r_1$  gleich  $r_2 \sin \omega$  und daher der Inhalt:

$$\Delta = \frac{r_1 r_2 \sin \omega}{2}.$$

Legen wir die eine Ecke dieses Dreiecks (vgl. Abb. 119) in den Koordinatenanfang und bezeichnen die Koordinaten der anderen beiden Ecken mit  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$ , so läßt sich diese Formel mit Hilfe der obigen Ausdrücke für Entfernung und Winkel leicht umrechnen in:

$$\Delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Drehungen des Koordinatensystems diesen Ausdruck  $\Delta$  ungeändert lassen, so daß mit ihm tatsächlich ein „geometrischer Begriff“ gegeben ist. Um aber auch Invarianz bei

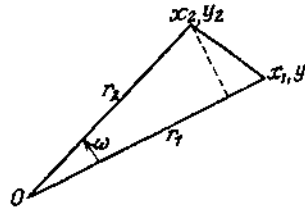


Abb. 119.

Verschiebungen und damit bei allen Bewegungen zu haben, muß man auch die dritte Ecke mit transformieren, d. h. die Formel für den Inhalt eines aus drei beliebigen Punkten  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  gebildeten Dreiecks aufstellen; man erhält dann:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

und das ist ja die Formel, mit der wir diese Vorlesung begonnen hatten (vgl. S. 3). Man kann leicht bestätigen, daß sich die so definierten Dreiecksinhalte bei Aneinanderfügung oder Teilung von Dreiecken addieren oder subtrahieren; das kommt, wie wir ja früher schon sahen, auf einfache Determinantenrelationen heraus.

Damit ist der Anschluß der Inhaltsidee an unser System der analytischen Geometrie vollzogen, und wir haben gleichzeitig etwas gewonnen, was in der naiven Auffassung zunächst noch nicht enthalten ist: der Inhalt ist eine mit *Vorzeichen* behaftete Größe geworden. Was für ein Vorteil hinsichtlich des freien Operierens mit den Formeln und ihrer ausnahmslosen Gültigkeit damit gegenüber der naiven Auffassung des Inhalts als absoluter Größe erzielt ist, das habe ich ja gerade am Anfange dieser Vorlesung ausführlich auseinandergesetzt (vgl. S. 4 ff.).

4. Ein weiteres Beispiel für einen in der naiven Raumvorstellung mehr oder weniger präzise enthaltenen Begriff, den wir jetzt erst nachträglich an unser System der Geometrie anschließen müssen, ist der *Begriff der (willkürlichen) Kurve*. Was eine Kurve ist, glaubt jeder Mensch zu wissen, bis er so viel Mathematik gelernt hat, daß ihn die unzähligen möglichen Abnormitäten verwirrt gemacht haben; eine gute Orientierung

gibt auch auf diesem Gebiete das einschlägige *Enzyklopädiereferat*: von v. Mangoldt, *Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“* (III A B 2). Wir wollen uns hier indessen um Einzelheiten nicht kümmern und einfach sagen, eine Kurve ist für uns die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten stetige Funktionen  $\varphi, \chi$  eines Parameters  $t$  sind, die so oft differenzierbar sein sollen, wie man es jeweils braucht:

$$x = \varphi(t) \quad y = \chi(t).$$

Dann kann man im Rahmen unserer analytischen Geometrie sofort alle die Begriffe und Sätze entwickeln, die man gewöhnlich unter dem Namen

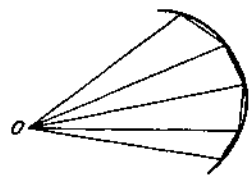


Abb. 120.

*Infinitesimalgeometrie* zusammenfaßt, die Begriffe von *Bogenlänge*, krummlinigem *Flächeninhalt*, *Krümmung*, *Evolute* usw. Die Grundidee ist immer, daß man die Kurve als Grenze eines eingeschriebenen geradlinigen Polygons auffaßt (vgl. Abb. 120); sind die Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Punkte  $x, y$  und  $x + dx, y + dy$ , so folgt aus der pythagoreischen Formel sofort für die *Bogenlänge*:

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und ebenso folgt aus der Formel für den Inhalt eines Dreiecks mit der Spitze in  $O$  sofort für den *Flächeninhalt des Sektors* zwischen Kurve und zwei Radienvektoren nach  $O$  die bereits früher (S. 11) benutzte Formel:

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx). -$$

Ich verlasse damit unseren ersten Aufbau der Geometrie, dessen Charakteristikum war, daß wir die Existenz und Gliederung der dreiparametrischen Bewegungsgruppe an die Spitze stellten und dann sogleich Koordinaten einführten, um weiterhin unsere Schlüsse ganz im Gebiete der Arithmetik abmachen zu können. Ihm ist eine zweite Art, die Geometrie zu begründen, gewissermaßen entgegengesetzt; sie führt gleichfalls direkt zur metrischen Geometrie und hat von jeher eine große Rolle gespielt; auf sie will ich daher auch noch eingehen.

## 2. Andere Begründung der metrischen Geometrie; die Rolle des Parallelenaxioms.

Der Gegensatz zum ersten Aufbau besteht darin, daß jetzt der *Begriff der Bewegung gerade konsequent vermieden* oder doch erst nachträglich herangebracht wird. Wenn man diese Anordnung im Altertum wie auch heute noch vielfach bevorzugte, so waren dabei wohl zum Teil philosophische Überlegungen maßgebend, auf die ich hier wenigstens kurz hinweisen will. Man fürchtete, mit den Bewegungen in die Geometrie ein ihr fremdes Element, die *Zeit*, hineinzubringen; und versuchte man, das Voranstellen der Bewegungen mit der großen Anschaulich-

keit der Idee des starren Körpers zu rechtfertigen, so kam dagegen der Einwand, daß diese Idee an sich gar keinen präzis faßbaren Sinn habe, sondern gerade umgekehrt erst begründet werden könne, wenn man schon vorher den Begriff der Entfernung besitzt. Dem wird der Empirist freilich immer entgegenhalten können, daß tatsächlich die abstrakte Idee der Entfernung erst aus dem Vorhandensein „hinreichend“ starrer Körper entnommen sei.

Doch nun lassen Sie mich in Kürze die Hauptgedanken dieses zweiten Aufbaues der Geometrie andeuten. Man beginnt da genau wie früher:

1. mit der Einführung von *Punkten* und *Geraden* und den Sätzen über ihre *Verknüpfung*, *Anordnung*, *Stetigkeit*.

2. Daneben aber werden — und das ist an dieser Stelle neu — einerseits die *Entfernung zweier Punkte (Strecke)*, andererseits der *Winkel zweier*

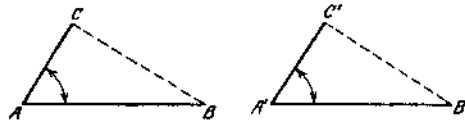


Abb. 121.

*Geraden* als neue Grundbegriffe herangezogen und Axiome über sie aufgestellt, die im wesentlichen aussagen, daß sich *Strecke und Winkel in bekannter Weise durch Zahlen messen lassen*.

3. Als charakteristisches, die Axiome über die Bewegungsgruppe eigentlich ersetzendes Axiom tritt *der erste Kongruenzsatz* auf: *Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bzw. gleich, so sind sie kongruent*, d. h. sie stimmen in allen Stücken überein. In unserem früheren Systeme ist das ein beweisbarer Satz; man kann eine Bewegung angeben, die (vgl. Abb. 121) die Seite  $A'B'$  mit  $AB$  zur Deckung bringt; dann fällt wegen der Voraussetzung notwendig auch  $A'C'$  mit  $AC$  zusammen, und die Dreiecke kommen überhaupt zur Deckung. Wenn wir aber Bewegungen nicht unter die Grundbegriffe aufnehmen und also nicht benützen dürfen, so gibt es keine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, und wir müssen ihn notwendig als neues Axiom postulieren.

4. Im weiteren Verlauf wird man nun genau umgekehrt vorgehen, wie bei unserem ersten Aufbau, wie Ihnen das wohl bekannt ist. Der elementare geometrische Unterricht geht — im wesentlichen im Anschluß an *Euklid*, von dem ich später noch näher zu reden haben werde — ganz diesen Weg. Man wird zunächst den pythagoreischen Satz beweisen und wird dann die trigonometrischen Funktionen  $\cos$ ,  $\sin$  aus ihrer Bedeutung in der Dreieckslehre einführen; von da aus kommt man schließlich zu demselben analytischen Apparat wie vorhin.

5. Dabei wird noch die Aufstellung eines weiteren besonders wichtigen Axioms nötig, das die *Theorie der Parallelen* betrifft. Bei unserer ersten Begründung war der Parallelismus einer der ersten Grundbegriffe, der sofort bei Betrachtung der Verschiebungen auftrat: parallel hießen gerade Linien, wenn sie Bahnkurven derselben Verschiebung

waren. Ganz anders hier; unter den bisher eingeführten Grundbegriffen war der Parallelismus noch nicht, und wir müssen daher jetzt noch besonders von ihm reden. Haben wir nämlich eine Gerade  $g$  (vgl. Abb. 122) und einen Punkt  $O$  außerhalb  $g$ , so verbinden wir  $O$  mit einem Punkte  $P$  von  $g$  und lassen  $P$  durch die Lagen  $P', P'', \dots$  immer weiter auf  $g$  hinausrücken (d. h. wir fassen die Punktfolge  $P, P', P'', \dots$  bzw. die Folge der Geraden  $OP, OP', OP'', \dots$  auf, von Bewegung im früheren Sinne ist hier nicht die Rede). Der Strahl  $OP$  wird bei dieser Drehung um  $O$  eine Grenzlage erreichen, wenn sich  $P$  ins Unendliche entfernt, und *diese Grenzgerade bezeichnen wir als eine Parallele durch  $O$  zu  $g$* . Dabei erscheint es von vornherein keineswegs nötig, daß sich  $OP$  derselben Grenzlage nähert, wenn

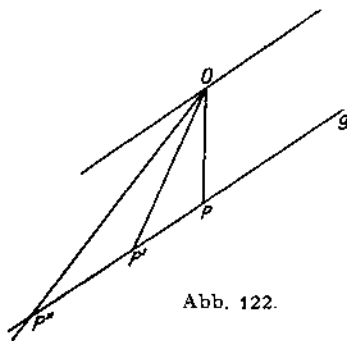


Abb. 122.

$P$  nach den beiden verschiedenen Seiten ins Unendliche geht, und es ist so die *abstrakte Möglichkeit der Existenz zweier voneinander verschiedenen Parallelgeraden durch  $O$  zu  $g$*  gegeben.

Darum ist es bei unserem jetzigen Aufbau ein *neues Axiom*, wenn wir gemäß unserer gewohnten Anschauung postulieren, es sollen stets jene beiden Grenzlagen zusammenfallen, d. h. *es soll nur eine Parallele durch einen Punkt  $O$  zu einer Geraden  $g$  geben*. Das ist das be-

rühmte *Parallelenaxiom*, über das seit Jahrhunderten soviel gestritten worden ist; man nennt es auch wohl das *euklidische Axiom*, da es bei *Euklid* ausdrücklich als Postulat formuliert wird.

Ich habe Ihnen zunächst *einiges zur Geschichte dieses Axioms* zu berichten. Lange Zeit hindurch hat man immer wieder die größten Anstrengungen gemacht, das Axiom zu *beweisen*, d. h. es auf die vorausgegangenen geometrischen Axiome zurückzuführen, freilich stets vergeblich. Natürlich haben diese Bemühungen auch heute noch nicht aufgehört; denn die Wissenschaft kann fortschreiten soweit sie will, es wird immer wieder Leute geben, die es besser zu verstehen meinen und die Resultate der gesicherten exakten Forschung ignorieren. Tatsächlich ist die *Mathematik* nämlich von jenen vergeblichen Versuchen längst schon zu fruchtbaren neuen Untersuchungen und positiven Resultaten vorgeschritten. Schon im 18. Jahrhundert tritt die charakteristische *neue weiterführende Fragestellung* auf: Ist es nicht möglich, ein logisch consequentes widerspruchsfreies System einer Geometrie aufzubauen, die von jenem *Parallelenaxiom* absieht und die Existenz *zweier* verschiedener Grenzgeraden im oben besprochenen Sinne, d. h. *zweier* verschiedener Parallelen durch  $O$  zu  $g$ , zuläßt?

Am Anfang des 19. Jahrhunderts konnte man diese Frage bejahen, und es war *Gauß*, der als erster die Existenz einer „*nicht-euklidischen*“



*Geometrie*“ — so nennen wir mit ihm ein geometrisches System jener Art — entdeckte; aus seinem Nachlaß geht hervor, daß er sie gewiß 1816 bereits genau gekannt hat; die diese Dinge behandelnden Notizen sind freilich erst spät aufgefunden und 1900 im Bd. VIII der Gesammelten Werke gedruckt worden<sup>1)</sup>. Gauß selbst hat außer wenigen gelegentlichen Äußerungen nichts über diese seine große Entdeckung veröffentlicht. Unabhängig von Gauß konstruierte um 1818 der Jurist *Schweikart* eine nichteuklidische Geometrie, die er *Astralgeometrie* nannte. Auch er veröffentlichte seine Untersuchungen nicht. Man erfuhr von ihnen erst etwas aus einem an Gauß gerichteten Brief, der im Gaußschen Nachlaß aufgefunden wurde. Die ersten Publikationen einer nicht-euklidischen Geometrie rühren von dem Russen *N. J. Lobatschefsky* (1829) und dem Ungarn *J. Bolyai de Bolya dem Jüngeren* (1832) her<sup>2)</sup>, die beide unabhängig voneinander diese Resultate gefunden hatten und sie übrigens nachweisbar schon 1826 bzw. 1823 besaßen. Im Laufe des Jahrhunderts sind dann durch vielfache Arbeiten diese Dinge Allgemeinbesitz der Mathematiker geworden, und heute hat wohl sogar jeder allgemein Gebildete schon einmal etwas von der Existenz einer nicht-euklidischen Geometrie gehört, wenn auch ein klares Verständnis für sie doch nur der Fachmann erreichen kann.

Eine wesentlich neue Wendung hat dann am Anfange der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts *Riemann* diesen Problemen gegeben; sie ist dargelegt in seinem Habilitationsvortrage „*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*“ vom Jahre 1854<sup>3)</sup>. Riemann bemerkt, daß allen vorangehenden Untersuchungen die *Annahme einer unendlichen Länge der Geraden* zugrunde liegt, die ja gewiß äußerst naturgemäß und naheliegend ist. Wie aber, wenn man auf diese Annahme verzichten will, wenn man im Gegenteil etwa zuläßt, daß die Geraden so in sich zurücklauten, wie die größten Kreise auf einer Kugel? Es handelt sich hier um den *Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit des Raumes*, der ja am zweidimensionalen Analogon am besten zu verstehen ist: Unbegrenzt ist sowohl die gewöhnliche Ebene als die Kugeloberfläche, aber nur die erstere ist unendlich, während die andere eine endliche Ausdehnung hat. Riemann nimmt nun in der Tat den *Raum nur unbegrenzt und nicht unendlich* an; dann wird die Gerade eine geschlossene

<sup>1)</sup> Leipzig 1900. Der betreffende Teil ist von P. Stäckel herausgegeben.

<sup>2)</sup> Ins Deutsche übersetzt in den „*Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*“ von *Engel* und *Stäckel*: Teil 1 (Lobatschefsky) von *Engel* (Leipzig 1898). [Teil 2 (W. und J. Bolyai) von *Stäckel*, Leipzig 1913.] Vgl. auch die „*Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie*“ von *Stäckel* und *Engel* (Leipzig 1895).

<sup>3)</sup> Publiziert in Bd. XIII der *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* = *Gesammelte mathem. Werke*. 2. Aufl. (Leipzig 1892), S. 272ff. [Im Verlage Springer, Berlin, neu herausgegeben von *H. Weyl*, 3. Aufl. 1923.]

Kurve, auf der die Punkte wie auf einem Kreise angeordnet sind. Läßt man jetzt, wie vorhin, einen Punkt  $P$  auf einer Geraden  $g$  in bestimmter Richtung immer weiterlaufen, so wird er schließlich wieder zum Ausgangsort zurückkehren, und der Strahl  $OP$  wird überhaupt keine Grenzlage haben: *Es gibt keine parallele Gerade durch  $O$  zu  $g$ .* So tritt bei Riemann eine *zweite Art nichteuklidischer Geometrie* („N. G. II“) der nichteuklidischen Geometrie von Gauß, Bolyai und Lobatschewsky („N. G. I“) entgegen.

Das scheint zunächst paradox, aber der Mathematiker bemerkt hier sofort eine *Beziehung zur gewöhnlichen Theorie der quadratischen Gleichungen*, die den Weg zum Verständnis der Sache weist. Eine quadratische Gleichung hat nämlich entweder 2 verschiedene reelle Wurzeln oder gar keine (sondern 2 imaginäre) oder endlich — als Übergangsfall — eine doppelt zählende reelle Wurzel; das ist ganz analog den 2 verschiedenen reellen Parallelen der N. G. I, dem Fehlen reeller Parallelen in der N. G. II, und endlich dem Übergangsfall einer auf zwei Weisen in der Grenzlage zu definierenden Parallelen in der euklidischen Geometrie.

Bevor ich genauer auf die mathematische Behandlung der nichteuklidischen Geometrie eingehe, will ich wenigstens kurz ihre große *Bedeutung nach philosophischer Seite hin* streifen, vermöge deren sie bei den Philosophen stets großes Interesse, vielfach aber auch scharfe Ablehnung gefunden hat.

Vor allem gibt jene Disziplin darüber Auskunft, welchen *Charakter die geometrischen Axiome, vom Standpunkte der reinen Logik* aus betrachtet, haben. Man kann nämlich aus der Existenz der nichteuklidischen Geometrie unmittelbar schließen, daß das euklidische Axiom keine Folge der vorausgestellten Grundbegriffe und Sätze ist, und daß auch sonst kein logischer Zwang zu seiner Annahme besteht. Denn substituiert man an seiner Statt eine ihm widersprechende Annahme, während man alle anderen Axiome beibehält, so wird man auf keinen Widerspruch geführt, sondern erhält die nichteuklidische Geometrie als ein logisch ebenso korrektes Lehrgebäude, wie es die euklidische ist. *Einzelheiten unserer Raumvorstellung, wie sie das Parallelenaxiom beschreibt, sind also jedenfalls keine rein logischen Notwendigkeiten.*

Es fragt sich nun, ob man denn nicht mit Hilfe der *Sinnesanschauung* über die Richtigkeit des Parallelenaxioms entscheiden kann, und auch hier gibt die nichteuklidische Geometrie wichtige Aufschlüsse. *Es ist nämlich gewiß nicht wahr, daß uns die unmittelbare sinnliche Anschauung die Existenz genau einer Parallelen lehrt.* Denn unsere Raumwahrnehmung besitzt durchaus *keine absolute Genauigkeit*, sondern hier wie in jedem anderen Gebiete sinnlicher Wahrnehmung können wir Größen (Strecken, Winkel usw.), deren Unterschied unter einer gewissen Grenze, der sogenannten *Schwelle*, liegt, nicht mehr als verschieden auffassen. Legen wir also insbesondere durch den Punkt  $O$  äußerst nahe aneinander zwei Gerade

(vgl. Abb. 123), so kann man sie gewiß nicht mehr voneinander unterscheiden, wenn man ihren Winkel klein genug, etwa  $1''$  oder, wenn man will,  $\frac{1}{100000}''$  oder noch kleiner nimmt. Es wird also schwer sein, aus der unmittelbaren Anschauung zu entnehmen, ob es denn wirklich genau eine Parallele durch  $O$  zu  $g$  gibt oder zwei nur um einen solchen kleinen Winkel voneinander abstehende. Man wird das noch deutlicher empfinden, wenn man sich  $O$  von  $g$  ungeheuer weit entfernt denkt, sagen wir eine oder gar Millionen Siriusweiten. Bei solchen Distanzen verliert die sinnliche Anschauung ganz die Schärfe, die man ihr sonst zutraut, und man wird gewiß nicht mehr deutlich vor Augen sehen können, ob es da entsprechend der Definition der Parallelen als Grenzlage eines sich drehenden Strahles eine oder zwei Parallelen zur gegebenen Geraden  $g$  gibt.

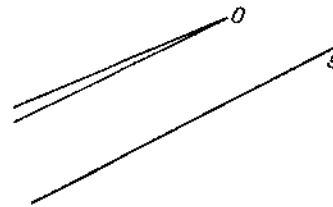


Abb. 123.

Dieser Sachlage fügt sich nun die nicht-euklidische Geometrie erster Art tatsächlich ebensogut ein wie die euklidische. Wie dies aus den sogleich mitzuteilenden mathematischen Formeln noch deutlicher hervorgehen wird, enthält sie noch eine willkürliche Konstante, und indem man über diese passend verfügt, kann man den Winkel zwischen beiden Parallelen zu  $g$  durch einen von  $g$  mäßig abstehenden Punkt  $O$  beliebig klein machen, und erst in dem Maße, wie sich  $O$  von  $g$  entfernt, wird der Winkel merkliche Größe annehmen. *Insofern es also wahr ist, daß sich unsere Raumschauung nur auf ein begrenztes Raumstück mit begrenzter Genauigkeit bezieht, kann man ihr durch eine N.G. I beliebig genau gerecht werden.*

Ganz ähnlich ist es aber auch mit der N. G. II. Wir brauchen uns nur darüber klar zu werden, daß auch die unendliche Länge der Geraden nicht aus der unmittelbaren sinnlichen Anschauung zu entnehmen ist. Wir können jede Gerade immer nur in einem endlichen Raumstück verfolgen, und daher kann es der Wahrnehmung nicht widersprechen, wenn wir sagen, die Gerade hat eine zwar ungeheuer große, aber doch eine endliche Länge, vielleicht Millionen oder mehr Siriusweiten; die Phantasie kann sich hier ja beliebig große Zahlen ausdenken, die über jede Möglichkeit unmittelbarer Anschauung hinausgehen. *Gemäß diesen Überlegungen kann man auch durch die N. G. II, die wieder einen willkürlichen Parameter enthält, die Verhältnisse in jedem begrenzten Raumstück beliebig genau darstellen.*

Die hier berührten logischen und anschaulichen Tatsachen, wie sie sich vom Standpunkte der Mathematik aus darbieten, laufen freilich in hohem Maße jener orthodoxen Raumauffassung zuwider, die viele Philosophen an den Namen Kants anknüpfen und nach der alle Sätze der Geometrie absolute Gültigkeit haben sollen. So erklärt sich, daß die

nichteuklidische Geometrie seit ihrem Bekanntwerden in philosophischen Kreisen soviel Aufregung und Widerstand hervorgerufen hat.

Wollen wir uns nun endlich zur *eigentlich mathematischen Behandlung der nichteuklidischen Geometrien* wenden, so werden wir am besten den *Weg durch die projektive Geometrie* nehmen; es ist das die Ableitung, die ich 1871 in Band IV der *Mathematischen Annalen*<sup>1)</sup> gegeben habe.

Wir denken uns die projektive Geometrie unabhängig von jeder Metrik aus den Grundbegriffen Punkt, Gerade, Ebene und ihren Axiomen der Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit so aufgebaut, wie ich das am Anfang dieser Auseinandersetzungen über die Grundlagen der Geometrie (S. 172f.) kurz angedeutet habe; insbesondere seien auch Punktkoordinaten  $x, y, z$  oder homogenen  $\xi : \eta : \zeta : \tau$  und ebenso Ebenenkoordinaten  $\alpha : \beta : \gamma : \delta$  eingeführt, so daß das Ineinanderliegen von Punkt und Ebene durch die bilineare Gleichung  $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0$  gegeben ist.

Auf dieser Grundlage haben wir früher die *gewöhnliche euklidische Geometrie* mit Hilfe der Invariantentheorie und des Cayleyschen Prinzips erhalten, indem wir die spezielle in Ebenenkoordinaten geschriebene quadratische Form:

$$\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

adjungierten, die gleich Null gesetzt den imaginären Kugelkreis vorstellt. Der Winkel zweier Ebenen:

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

und die Entfernung zweier Punkte:

$$r = \frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\tau_2}$$

waren dann, wie wir gezeigt hatten (S. 168ff.), einfache simultane Invarianten der gegebenen Figur (der 2 Ebenen oder der 2 Punkte) und der Form  $\Phi_0$ .

Ganz ähnlich wollen wir nun zur *nichteuklidischen Geometrie* gelangen; wir nehmen nur statt des Kugelkreises  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$  eine *andere quadratische Form*, die dieser „benachbart“ ist, nämlich:

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon \cdot \delta^2.$$

Hier ist  $\varepsilon$  ein Parameter, den man beliebig klein wählen kann, und für  $\varepsilon = 0$  wird  $\Phi = \Phi_0$ ; unser Ansatz ist so gewählt, daß bei *positivem*  $\varepsilon$  die *N. G. I.*, bei *negativem*  $\varepsilon$  die *N. G. II* entsteht, während für  $\varepsilon = 0$  die obigen Formeln der gewöhnlichen euklidischen Geometrie sich ergeben.

<sup>1)</sup> „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie“, S. 573ff. = [F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. I, S. 254ff.]

Wesentlich bei der Aufstellung dieser Form  $\Phi$  ist, daß ihre *Determinante*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon \end{vmatrix} = -\epsilon$$

im allgemeinen von Null verschieden ist; nur im speziellen Falle  $\epsilon = 0$ , also wenn  $\Phi = 0$  den Kugelkreis darstellt, verschwindet sie. Unser Ansatz kommt demnach darauf hinaus, daß wir die quadratische Form von verschwindender Determinante durch eine solche von nicht verschwindender positiver oder negativer (aber dem absoluten Werte nach beliebig kleiner) Determinante ersetzen.

Die Maßgrößen unserer nichteuklidischen Geometrien werden wir nun erhalten, indem wir ganz analoge Invarianten aus der allgemeinen Form  $\Phi$  und der Figur zweier Ebenen bzw. zweier Punkte bilden, wie sie die vorhin angegebenen euklidischen Größen für die spezielle Form  $\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  darstellen. Das ist nichts als die von Cayley<sup>1)</sup> 1859 begründete Auffassung, daß man in bezug auf irgendeine quadratische Fläche (z. B. die Fläche  $\Phi = 0$ ) ebensogut eine Maßbestimmung definieren kann wie in bezug auf den Kugelkreis. Bei dem knappen Raume, auf den dieser Exkurs hier naturgemäß beschränkt sein muß, ist es am zweckmäßigsten, die analytischen Formeln definitionsweise voranzustellen; so läßt sich die Sachlage am raschesten präzise aussprechen, und jeder Schatten von etwas Geheimnisvollem wird vermieden. Freilich kann diese Darstellung zum vollen Verständnis des Stoffes nur führen, wenn man ihn hinterher noch genau nach der geometrischen Seite hin durcharbeitet, wie Sie das gerade in meiner bereits genannten Arbeit in Bd. IV der Mathematischen Annalen finden.

Betrachtet man zunächst 2 Ebenen, so liegt es ganz nahe, wie man den Ausdruck ihres „in bezug auf die Fläche  $\Phi = 0$  gemessenen Winkels“ in Verallgemeinerung des obigen Winkelausdruckes anzusetzen hat; man bildet genau wie dort aus den Werten der Form  $\Phi$  und ihrer Polarform:

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 - \epsilon \delta_1 \delta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \epsilon \delta_1^2} \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \epsilon \delta_2^2}}$$

und hat so einen offenbar invarianten Ausdruck, der für  $\epsilon = 0$  tatsächlich in den Winkel der euklidischen Geometrie übergeht.

Nicht so unmittelbar klar ist es, wie man den Ausdruck der Entfernung zweier Punkte auf unsere Maßbestimmung übertragen soll, und zwar liegt die Schwierigkeit der Übertragung darin, daß wir jetzt eine Form mit nicht verschwindender Determinante statt der für die euklidische Maßbestimmung maßgebenden Form  $\Phi_0$  mit verschwindender

<sup>1)</sup> In dem schon (S. 145) zitierten „Sixth memoir upon quantics“.

Determinante verwenden: Wir können aber den Weg zur Aufstellung des Entfernungsausdruckes so finden, daß wir *genau dualistisch zur soeben gegebenen Definition des Winkels* vorgehen; dann erhalten wir sicher wieder eine Invariante. Wir stellen also zunächst die Gleichung der Fläche  $\Phi = 0$  in Punktkoordinaten auf, deren linke Seite  $f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  bekanntlich durch Ränderung der Determinante  $\Delta$  von  $\Phi$  mit Punktkoordinaten entsteht:

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2.$$

Nun übertragen wir genau den Ausdruck von  $\omega$ , indem wir den Quotienten aus der Polarform zu  $f$  und dem Produkt der Quadratwurzeln aus den Werten von  $f$  für die Punkte 1 und 2 bilden und davon den Arkus kosinus nehmen:

$$r = k \operatorname{arc} \cos \frac{\varepsilon(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) - \tau_1 \tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2} \sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2}}.$$

Der hinzugefügte Faktor  $k$  gestattet uns, eine beliebige Strecke der Einheit gleichzumachen, wie es unserer Gewöhnung entspricht und übrigens bei dem sogleich durchzuführenden Übergang zur euklidischen Geometrie sich als notwendig erweisen wird. Dabei muß man  $k$  bei negativem  $\varepsilon$  reell, bei positivem  $\varepsilon$  rein imaginär annehmen, damit  $r$  reell ist für alle oder doch (bei  $\varepsilon > 0$ ) wenigstens für ein gewisses Teilgebiet aller reellen Punkte, die dann das reelle Substrat der nichteuklidischen Geometrie bilden.

Damit wäre eine allgemeine Definition der Entfernung gegeben; nachzuweisen bliebe nur, daß sie für  $\varepsilon = 0$  auf den oben angegebenen Ausdruck der euklidischen Geometrie zurückführt. Das ist hier nicht so leicht wie vorhin beim Winkel  $\omega$ ; denn setzt man ohne weiteres  $\varepsilon = 0$ , so wird der Quotient 1, und  $\frac{r}{k}$  ist daher bis auf das notwendig unbestimmt bleibende additive Vielfache von  $2\pi$  gleich Null.

Wir können nun aber durch einen gewissen Kunstgriff trotz diesem zunächst etwas paradoxen Resultate doch schließlich zu dem euklidischen Ausdruck gelangen. Dazu ist es bequem, die Definitionsgleichung von  $r$  mit Hilfe der bekannten Gleichung  $\operatorname{arccos} \alpha = \operatorname{arcsin} \sqrt{1 - \alpha^2}$  etwas umzuformen. Bringen wir sofort auf einen Nenner, so wird:

$$r = k \cdot \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{\{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2\} \{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2\} - \{\varepsilon(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2) - \tau_1 \tau_2\}^2}{\{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2\} \{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2\}}}.$$

Nun kann man den Zähler leicht umsetzen; nach einer bekannten

Determinantenrelation ist nämlich der Wert von  $f$  (d. i. die einmal geränderte Determinante  $\Delta$  der Form  $\Phi$ ) für den Punkt 1, multipliziert mit dem für den Punkt 2, minus dem Quadrat der mit 1 und 2 gebildeten Polarform gleich dem Produkt der Determinante  $\Delta$  selbst und der zweimal mit den Koordinaten von 1 und 2 geränderten Determinante  $\Delta$ , also gleich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rechnet man das aus, so ergibt sich:

$$-\varepsilon \cdot \{(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2 - \varepsilon(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1)^2 - \varepsilon(\zeta_1 \xi_2 - \zeta_2 \xi_1)^2 - \varepsilon(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2\}.$$

Wem Determinantenrechnungen dieser Art unbequem sind, der mag durch direkte Umformung die Identität dieses Ausdruckes mit der obigen Form des Zählers bestätigen.

Führen wir diesen Ausdruck in die Formel für  $r$  ein und lassen  $\varepsilon$  Null werden, so ergibt sich natürlich genau wie aus der ersten Form  $\frac{r}{k} = \arcsin 0 = 0$ , wegen des Faktors  $\sqrt{-\varepsilon}$ . Lassen wir  $\varepsilon$  aber zunächst noch nicht Null, sondern nur sehr klein werden, so ist der Arkus sinus in erster Annäherung gleich dem Sinus; im Zähler aber sind die 3 mit  $\varepsilon$  multiplizierten Quadrate gegen die übrigen zu vernachlässigen, und ebenso fällt im Nenner in jedem Faktor der mit  $\varepsilon$  multiplizierte Term fort, und es bleibt in erster Annäherung:

$$r = k \cdot \sqrt{-\varepsilon} \frac{\sqrt{(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2}}{\tau_1 \cdot \tau_2}.$$

Nun kommt der Kunstgriff. *Wie erteilen  $k$  während des Grenzüberganges  $\lim \varepsilon = 0$  keinen festen Wert, sondern lassen  $k$  gleichzeitig derart unendlich werden, daß:*

$$\lim (k \cdot \sqrt{-\varepsilon}) = 1$$

*wird*; zu dem Zwecke werden wir  $k$  natürlich durch rein imaginäre oder durch reelle Werte laufen lassen, je nachdem  $\varepsilon$  von positiven oder negativen Werten her gegen Null geht. Damit aber ist es ganz evident, daß durch diesen Grenzübergang tatsächlich der Entfernungsausdruck der gewöhnlichen euklidischen Geometrie (S. 194) herauskommt.

Denkt man sich nun in die geometrische Bedeutung der Form  $f$  sowie der hier nur analytisch hingestellten Ausdrücke hinein, so ergibt

sich tatsächlich, daß man für  $\varepsilon > 0$  gerade die nichteuklidische Geometrie erster Art, für  $\varepsilon < 0$  die zweiter Art und für  $\varepsilon = 0$  natürlich die euklidische Geometrie vor sich hat. Die genaue Begründung kann ich allerdings hier nicht geben; ich verweise dafür etwa auf meine mehrfach genannte Arbeit in Bd. IV. der Mathematischen Annalen<sup>1)</sup>. Damals habe ich für diese 3 Geometrien die Namen *hyperbolisch*, *elliptisch*, *parabolisch* vorgeschlagen, da ja die Existenz von 2 reellen bzw. imaginären bzw. einer doppelt zählenden Parallelen genau dem Verhalten der

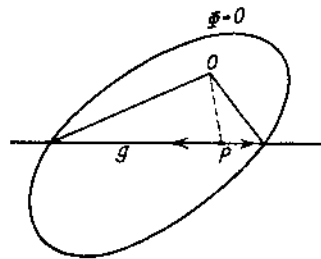


Abb. 124.

Asymptoten der 3 Arten von Kegelschnitten entspricht; diese Namen werden Sie vielfach in der Literatur vorfinden. An einem Beispiel möchte ich aber doch etwas näher ausführen, wie sich die Parallelentheorie auf Grund unseres Entfernungsausdruckes gestaltet; ich wähle dazu die *hyperbolische Geometrie im Falle der Ebene*. Dann haben wir die dritte Koordinate stets Null zu setzen, und unsere quadratische Form wird  $\Phi = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon \delta^2$  und stellt gleich 0 gesetzt wegen  $\varepsilon > 0$  einen *reellen* Kegelschnitt dar, den wir uns als Ellipse vorstellen und zeichnen mögen. Die Entfernungformel wird:

$$r = k \operatorname{arc} \cos \frac{\varepsilon(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) - \tau_1 \tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \tau_1^2} \sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2}}$$

mit rein imaginärem  $k$ . Sie gibt, wie man sich leicht überzeugt, reelle Werte für solche Punkte, die im *Innern* des reellen Kegelschnittes liegen; dabei ist unter dem Innern der Inbegriff derjenigen Punkte der Ebene verstanden, durch welche keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt laufen. *Daher besteht das Operationsgebiet der reellen hyperbolischen Geometrie lediglich aus den Punkten dieses Innern und den Geraden, soweit sie durch das Innere gehen*; die Punkte des Kegelschnittes (vgl. Abb. 124) selbst stellen das *Unendlichweite* dar. Denn jene Formel ergibt für die Entfernung jedes Punktes 1 von einem Kegelschnittspunkte 2 [für den  $\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \tau_2^2 = 0$  ist] den Wert  $\infty$ . Auf jeder Geraden der reellen hyperbolischen Geometrie gibt es also in diesem Sinne *2 unendlich ferne Punkte*, ihre beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt  $\Phi = 0$ , auf jedem Halbstrahle  $a$  aber nur *einen*. Haben wir eine Gerade  $g$  und einen nicht auf ihr liegenden Punkt  $O$ , so sind die Parallelen durch  $O$  im Sinne unserer früheren Definition (S. 193) als Grenzlagen der Verbindung von  $O$  mit einem auf  $g$  ins Unendliche sich entfernenden Punkte  $P$  die Ver-

<sup>1)</sup> [Es werde auch noch einmal auf die in Kürze erscheinende „Einführung in die nichteuklidische Geometrie“ von *F. Klein* (bearbeitet von *W. Rosemann*) hingewiesen, welche eine Umarbeitung der früher autographiert erschienenen Vorlesungen Kleins über nichteuklidische Geometrie darstellt.]



bindungsgeraden von  $O$  mit den Schnittpunkten von  $g$  mit dem Kegelschnitt: *Es gibt also in der Tat 2 voneinander wesentlich verschiedene Parallelen*, deren jede einer der beiden Richtungen auf  $g$  zugehört.

Noch eine kurze Bemerkung lassen Sie mich machen, die sich auf den *Vergleich mit unserem ersten Aufbau der euklidischen Geometrie* bezieht. Da gingen wir von der *Bewegungsgruppe* aus; das war die Gesamtheit der Kollineationen, die die Maßverhältnisse ungeändert lassen. Solche Kollineationen gibt es aber bei einer nichteuklidischen Geometrie auch. Eine allgemeine homogene Gleichung zweiter Ordnung hat 10 Glieder, also 9 wesentliche Konstanten; in der allgemeinsten Raumkollineation sind 15 Parameter willkürlich, also gibt es noch *6-fach unendlich viele Kollineationen, die eine vorgegebene quadratische Form, z. B. unser  $\Phi$ , in sich überführen*, und das ist ja die Bedingung dafür, daß die von uns eingeführten Maßverhältnisse nicht verändert werden. *Daher gibt es auch in jeder nichteuklidischen Geometrie eine 6-fach unendliche Gruppe von „Bewegungen“, die  $\omega$  und  $r$  ungeändert lassen*; für die Geometrie in der Ebene würde sich die Parameterzahl wie früher auf 3 reduzieren.

Wir können daher auch jede nichteuklidische Geometrie aufbauen, indem wir von der *Existenz einer Bewegungsgruppe* ausgehen, und es bleibt nur noch zu präzisieren, wieso wir durch unseren früheren Aufbau gerade ausschließlich zu *euklidischen Geometrie* kamen. Das lag natürlich daran, daß wir aus den Bewegungen speziell eine zweiparametrische (im Raum würde es heißen dreiparametrische) *Untergruppe der sogenannten Parallelverschiebungen* herausgriffen, die lauter Geraden zu Bahnkurven hatten; *solche Untergruppen gibt es in keiner nichteuklidischen Geometrie, und indem wir ihre Existenz gleich zu Anfang postulierten, schlossen wir alle nichteuklidischen Geometrien von vornherein aus und behielten allein die eine euklidische übrig*.

Und nun lassen Sie mich diese speziellen Erörterungen über nichteuklidische Geometrie mit einigen — ich möchte sagen — *Leitsätzen allgemeiner Natur* abschließen:

1. Hatte ich früher berichtet, daß man auf philosophischer Seite der nichteuklidischen Geometrie vielfach noch nicht volles Verständnis entgegenbringt, so muß ich jetzt betonen, daß sie in der *mathematischen Wissenschaft* heutzutage ganz allgemein anerkannt ist; ja, sie wird sogar für viele Zwecke, z. B. in der modernen Funktionentheorie und der Gruppentheorie, als ein äußerst bequemes Hilfsmittel gebraucht, um arithmetisch komplizierte Verhältnisse greifbarer vor Augen zu führen.

2. *Jeder Lehrer muß notwendig etwas von der nichteuklidischen Geometrie kennen*; denn sie gehört nun einmal zu den wenigen Teilen der Mathematik, die zum mindesten in einzelnen Schlagworten in weiteren Kreisen bekannt geworden sind; nach ihr kann daher jeder Lehrer jeden Moment gefragt werden. In der Physik gibt es ja ungleich mehr

solche Dinge — fast jede neue große Entdeckung gehört dahin —, die in jedermanns Munde sind und über die dann selbstverständlich jeder Lehrer unterrichtet sein muß. Man denke sich nur einen Lehrer der Physik, der über Röntgenstrahlen oder Radium nichts zu sagen weiß; einen viel besseren Eindruck würde auch der Mathematiker nicht machen, der auf Fragen über nichteuklidische Geometrie keine Auskunft geben kann!

3. Demgegenüber möchte ich dringend davon abraten, *im regulären Schulunterricht* (d. h. abgesehen von gelegentlichen Andeutungen auf Veranlassung interessierter Schüler) nichteuklidische Geometrie zu bringen, wie das Enthusiasten immer wieder empfehlen. Wir wollen zufrieden sein, wenn das vorangehende Postulat nur immer erfüllt ist und wenn andererseits die Schüler die *euklidische* Geometrie wirklich verstehen lernen; schließlich ist es ja auch in Ordnung, daß der Lehrer ein bißchen mehr weiß als der durchschnittliche Schüler.

Ich will nun noch kurz über die *Weiterentwicklung der modernen Wissenschaft* berichten, die durch die nichteuklidische Geometrie veranlaßt worden ist. Man knüpfte da vorzugsweise an das eine ihrer Resultate an, daß das euklidische Parallelenaxiom von den vorausgehenden Axiomen der Geometrie logisch unabhängig ist (s. S. 192), und entnahm daraus die Anregung, *auch die anderen geometrischen Axiome auf ihre gegenseitige logische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit zu untersuchen*. So entstand die *moderne geometrische Axiomatik*, die in ihren Betrachtungen genau den Wegen folgt, die jene alten Untersuchungen gewiesen haben: Man sieht zu, welche Teile der Geometrie sich ohne Anwendung gewisser Axiome aufbauen lassen und ob man auch unter der Annahme des Gegenteils eines einzelnen Axioms zu einem logisch widerspruchsfreien Systeme, einer sogenannten „*Pseudogeometrie*“, gelangen kann.

Als wichtigstes hierher gehöriges Werk habe ich Ihnen *Hilberts „Grundlagen der Geometrie“*<sup>1)</sup> zu nennen, deren *Hauptziel* gegenüber früheren Untersuchungen ist, *in der angedeuteten Weise die Bedeutung der Stetigkeitsaxiome für die Geometrie festzustellen*. Um dies zu erreichen, ist natürlich vor allem nötig, das Axiomensystem der Geometrie so anzuordnen, daß *die Stetigkeitssätze* ganz ans Ende kommen, während sie für uns bisher immer am Anfang standen. So konnten wir ja auch bei der Ableitung der nichteuklidischen Geometrie nicht etwa den ersten Axiomenaufbau (S. 174 ff.) verwenden, der den Parallelenbegriff an die Spitze stellte, sondern wir mußten uns vor allem ein Axiomensystem verschaffen, von dem der größte Teil nichts von Parallelen enthielt und bei dem das Parallelenaxiom erst hinterher hinzukam. Von der hiermit bezeichneten wesentlichen Abweichung abgesehen schließt sich das Hilbertsche Axio-

<sup>1)</sup> [5. Aufl. Leipzig und Berlin 1922.]

mensystem wesentlich dem in unserem zweiten Aufbau der Geometrie (S. 188 ff.) auch befolgten Gange der elementaren Geometrie an.

Auf dieser Basis untersucht Hilbert, *wieweit man die Geometrie ohne Benutzung der Stetigkeitsaxiome aufbauen kann, und er umfaßt damit zugleich die „Pseudogeometrien“, in denen zwar alle anderen geometrischen Axiome, nicht aber mehr die Stetigkeitssätze gelten*, das sind wesentlich die Tatsachen, die sich auf die eindeutige Zuordnung der Punkte einer Geraden zu den gewöhnlichen reellen Zahlen (ihren Abszissen) beziehen (vgl. S. 173 und 177). Ich kann hier auf den Gedankengang der Untersuchungen Hilberts, sowie auf die von ihm dabei gewonnenen interessanten Resultate über den logischen Zusammenhang gewisser geometrischer Theoreme und Axiome natürlich nicht eingehen; Sie mögen es auf Grund dieser wenigen orientierenden Bemerkungen bei Hilbert selbst nachlesen. Nur daran will ich noch erinnern, daß die im ersten Bande dieser Vorlesungen<sup>1)</sup> gelegentlich schon besprochene Hilbertsche *nicht-archimedische Geometrie* hierhin gehört; das ist eben eine solche Pseudogeometrie, in der speziell das früher nach *Archimedes*, heute öfter nach *Eudoxus* genannte *Stetigkeitsaxiom* nicht mehr erfüllt ist, d. h. in der sich die Abszissen zweier verschiedener Punkte gegebenenfalls nur um eine „aktuell unendlich kleine Größe“ unterscheiden können, von der kein endliches Vielfaches einer gewöhnlichen endlichen reellen Zahl gleich ist.

Diese kurzen Bemerkungen über die moderne Axiomatik möchte ich nicht abschließen, ohne noch wenige Worte zu der wichtigen Frage nach der *wahren Natur der geometrischen Axiome und Sätze* zu sagen — womit ich freilich aus der streng mathematischen Fragestellung hinüber in die philosophisch-erkenntnistheoretische komme. Das eine habe ich schon betont, und darüber ist man sich heute wohl allgemein einig, daß es sich hier um die *obersten Begriffe und Sätze handelt, die man notwendig der Geometrie voranstellen muß, um überhaupt von ihnen aus rein logisch den mathematischen Beweisgang führen zu können*. Aber mit dieser Feststellung ist die Frage noch nicht beantwortet, *woher diese obersten Begriffe und Sätze denn eigentlich stammen*. Da ist die alte Auffassung, daß sie in der Anschauung eines jeden Menschen ohne weiteres gegeben sind, daß sie von so evidenter Einfachheit sind, daß niemand an ihnen zweifeln kann. Diese Ansicht wurde aber durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie in hohem Maße erschüttert; denn hier wird ja gerade gezeigt (vgl. S. 191 ff.), daß die Raumschauung und die Logik keineswegs zwingend das euklidische Parallelenaxiom liefern, sondern daß man auch mit einer ihm widersprechenden Annahme zu einem logisch in sich geschlossenen und die tatsächlichen Verhältnisse mit hinreichender Annäherung darstellenden geometrischen Systeme kommt. Wohl aber kann man jenes Parallelenaxiom immer noch als die Annahme ansprechen,

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 235 f.

die die räumlichen Verhältnisse *am einfachsten* darzustellen gestattet, und so wird es auch allgemein gelten, daß *Grundbegriffe und Axiome nicht unmittelbar Tatsachen der Anschauung, sondern zweckmäßig gewählte Idealisierungen dieser Tatsachen sind*. Schon der scharfe Begriff des Punktes existiert nicht in der unmittelbaren sinnlichen Anschauung, sondern er ist nur eine fingierte Grenze, der wir uns mit unseren Vorstellungen eines kleinen Raumstückes nähern können, ohne sie doch je zu erreichen.

Demgegenüber findet man bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder die allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, *die Axiome seien nur willkürliche Sätze, die wir ganz freiwillig aufstellen, und die Grundbegriffe schließlich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren wollen*. Das Wahre an einer solchen Ansicht ist natürlich, daß sich *innerhalb der reinen Logik* kein Grund für diese Sätze und Begriffe findet, und daß sie daher von anderer Seite — eben durch Einwirkung der Anschauung — geliefert oder angeregt werden müssen. Aber die Autoren drücken sich oft sehr viel einseitiger aus, und so sind wir in den letzten Jahren im Anschluß an die moderne Axiomatik vielfach geradezu wieder in diejenige Richtung der Philosophie hineingeraten, die man von alters her *Nominalismus* nennt. Hier geht das Interesse an den Dingen selbst und ihren Eigenschaften ganz verloren; nur wie man sie nennt und nach welchem logischen Schema man mit den Namen operiert, davon wird noch geredet. Man sagt dann etwa, wir *nennen* den Inbegriff dreier Koordinaten einen Punkt, „ohne uns etwas dabei zu denken“, und wir verabreden „willkürlich“ gewisse Sätze, die über diese Punkte gelten sollen; man kann dabei ganz unbeschränkt beliebige Axiome aufstellen, wenn man nur den Gesetzen der Logik genügt und vor allem darauf achtet, daß sich in dem entstehenden Gebäude von Theoremen keine Widersprüche finden. Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod aller Wissenschaft: *die Axiome der Geometrie sind — wie ich meine — nicht willkürliche, sondern vernünftige Sätze, die im allgemeinen durch die Raumanschauung veranlaßt und in ihrem Einzelinhalte durch Zweckmäßigkeitsgründe reguliert werden*.

Diesen philosophischen Exkursen, zu denen wir im letzten Abschnitt mehrfach uns veranlaßt sahen, möchte ich nun *Erörterungen zur Geschichte der Geometrie*, insbesondere die Entwicklung der Auffassungen von den Grundlagen, entgegenstellen. Da ist gegenüber ähnlichen Betrachtungen, wie wir sie im vorigen Winter für die Gebiete der Algebra, Arithmetik, Analysis häufig angestellt haben, von vornherein ein großer Unterschied zu bemerken. Diese Disziplinen haben in ihrer modernen Form eigentlich nur eine Geschichte von wenigen Jahrhunderten; sie beginnen mit dem Dezimalbruch- und Buchstabenrechnen, um eine runde Zahl zu nennen, ums Jahr 1500. Demgegenüber *hat die Geometrie als selbständige Disziplin eine weit in das griechische Altertum zurückrei-*

*chende Geschichte*, und zwar hatte sie damals schon eine so hohe Entwicklungsstufe erreicht, daß man lange Zeit — bis in die Gegenwart hinein — in der griechischen Geometrie das Muster einer vollendeten Wissenschaft zu sehen glaubte. Dabei galt als Inbegriff griechischer Geometrie immer das weitaus bedeutendste uns erhaltene systematische Lehrbuch, die vielgerühmten *Elemente* (*στοιχεῖα*) *des Euklid*; es gibt wohl kaum ein zweites Buch, das in seiner Wissenschaft so lange eine solche Stellung behauptet hat. Noch heute muß sich jeder Mathematiker mit Euklid auseinandersetzen, und wir wollen ihm daher den letzten Abschnitt des gegenwärtigen Kapitels widmen:

### 3. Euklids Elemente.

Lassen Sie mich Ihnen zuerst die philologisch beste Ausgabe dieses Werkes vorlegen, die von *J. L. Heiberg* in Kopenhagen bearbeitet ist<sup>1)</sup>. Ihr ist die lateinische Übersetzung des griechischen Urtextes beigegeben, was auch für die sehr nützlich ist, die Griechisch auf der Schule gelernt haben; denn Euklids Griechisch unterscheidet sich, zumal durch die Kunstausdrücke, wesentlich von dem Griechisch, das man auf der Schule treibt. Als Literatur zur Einführung in den Euklid nenne ich Ihnen besonders *Zeuthens* „*Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*“<sup>2)</sup> und *Max Simons* „*Euklid und die 6 planimetrischen Bücher*“<sup>3)</sup>. Man wird am leichtesten in den Stoff eindringen, wenn man zuerst *Simon*, dann die allgemeinen Ausführungen *Zeuthens*, dann aber jedenfalls besonders genau und mit kritischem Mißtrauen gegen jede Übersetzung den *Heibergschen* Text vornimmt.

Von *Euklid* persönlich ist wenig bekannt; man weiß nur, daß er *um 300 v. Chr. in Alexandria* lebte. Wohl aber wissen wir Bescheid über den *allgemeinen wissenschaftlichen Betrieb*, der damals in Alexandria herrschte. Nach der Gründung des Weltreichs *Alexanders* entstand allmählich das Bedürfnis, alles, was die vorangegangenen Jahrhunderte geschaffen hatten, zu sammeln und in ein einheitliches wissenschaftliches System zu bringen, und so entwickelte sich in Alexandria ein Unterricht, der durchaus gewissen Seiten unseres heutigen Universitätsunterrichts entspricht. Nur stand dabei die *Sammlung und Ordnung des vorhandenen Materials der frei weitertreibenden wissenschaftlichen Forschung* voran, und so kam wohl in dem ganzen Betriebe ein gewisser Hang zur Schulmeisterei zur Geltung. —

Bevor wir an die nähere Besprechung der *Elemente* herangehen, lassen sie mich einige allgemeine Ausführungen über die *geschichtliche*

<sup>1)</sup> *Euclidis opera omnia*. Bd. I—V: *Elementa*. (Leipzig 1883—1888).

<sup>2)</sup> Kopenhagen 1896.

<sup>3)</sup> Leipzig 1901 = *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* XI. [Hingewiesen sei noch auf die Ausführungen von *T. L. Heath* in seiner englischen Übersetzung des *Heibergschen* Textes: *The thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 Bde., Cambridge, 1908].

*Stellung und wissenschaftliche Bedeutung des Euklid oder vielmehr der euklidischen Elemente* machen. Wenn man auch für ein vollständiges Bild der Persönlichkeit Euklids gewiß seine zahlreichen kleineren Schriften berücksichtigen müßte, so ist es doch berechtigt, daß ich hier nur von dem einen großen Werke rede; denn dieses allein hat die merkwürdige beherrschende Stellung sich errungen, die von unserm Standpunkt aus eine Kritik dringend erfordert.

Als Grundlage dieser Kritik diene die Bemerkung, daß die falsche Einschätzung der euklidischen Elemente ihren tiefen Grund findet in einer *verkehrten Auffassung des griechischen Geistes* überhaupt, wie sie lange Zeit verbreitet war und wohl heute noch vielfach populär ist: man glaubte, die griechische Kultur habe sich auf verhältnismäßig wenige Gebiete beschränkt, diese aber in so vollendeter Weise zu einem einheitlichen Bilde verarbeitet, daß ihr Standpunkt allen Zeiten als höchstes, freilich unerreichbares Vorbild gelten müsse. Tatsächlich hat aber die moderne philologische Wissenschaft die Unhaltbarkeit dieser Ansicht längst dargetan. Sie hat vielmehr gelehrt, daß gerade die Griechen wie kein anderes Volk sich mit der denkbar größten Vielseitigkeit auf *allen* Gebieten menschlicher Kultur betätigt haben; und so gewiß sie überall für jene Zeit Bewunderungswürdiges geleistet haben, so gewiß sind sie doch auch in manchen Dingen, von unserm heutigen Standpunkt aus betrachtet, nicht über die ersten Anfänge hinausgekommen, und in bezug auf kein Gebiet kann man sagen, daß sie für alle Zeiten den Gipfel der menschlichen Leistungen erklommen hätten.

Was speziell die *Mathematik* anlangt, so hat diese Überschätzung — oder soll man sagen: Unterschätzung? — des Griechentums in dem Dogma ihren Ausdruck gefunden, daß die Griechen sich ganz wesentlich mit Geometrie beschäftigt und da ein unübertreffliches System aufgestellt hätten; diese Meinung hat sich insbesondere geradezu zu einem *Kultus der euklidischen Elemente* verdichtet, in denen man jenes System in vollendeter Weise dargestellt zu sehen glaubte. Dieser alten und veralteten Ansicht habe ich hier die Behauptung entgegenzustellen, *daß die Griechen neben der Geometrie auch die verschiedensten anderen Teilgebiete der Mathematik fruchtbar bearbeitet haben, daß wir aber heutzutage überall und gewiß auch in der Geometrie wesentlich über sie hinaus gekommen sind.*

Lassen Sie mich diese Behauptung nun näher ausführen und begründen. Euklid wollte in seinen Elementen keineswegs eine Enzyklopädie des gesamten geometrischen Wissens seiner Zeit schreiben, denn sonst hätte er in ihnen nicht ganze Teile der Geometrie, die man damals sicher schon kannte, einfach unberücksichtigt lassen dürfen; ich nenne als Beispiel nur die *Theorie der Kegelschnitte und höheren Kurven*, die die Griechen schon frühzeitig ausführlich zu behandeln begonnen hatten<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Euklid selbst hat übrigens ein — uns nicht erhaltenes — Werk über die Kegelschnitte geschrieben.

wenn auch ihre volle Entfaltung erst *Apollonius* (ums Jahr 200 v. Chr.) zu verdanken ist. Vielmehr sollten die Elemente lediglich eine *Einführung* in das Studium der Geometrie — und damit der Mathematik überhaupt — geben, und dabei scheint es, daß sie noch auf einen ganz besonderen Zweck zugestutzt waren: sie sollten die Mathematik so behandeln, wie man sie im Sinne der platonischen Schule als *Vorbereitung für allgemeine philosophische Studien* für notwendig hielt. Aus dieser Bestimmung versteht man, warum der Hauptwert auf die Herausarbeitung der logischen Zusammenhänge und die Aufstellung eines in sich geschlossenen Systems der Geometrie gelegt ist, während alle praktischen Anwendungen gänzlich beiseitegeschoben sind. Diesem System zu Liebe hat Euklid aber auch gewiß ein ganzes Teil theoretischen Wissens seiner Zeit übergangen, das noch nicht weit genug entwickelt war, um sich ihm einpassen zu lassen.

Eine richtige Vorstellung von der *Beschränktheit des Stoffes der euklidischen Elemente* gegenüber dem Umfange der griechischen Mathematik überhaupt erhalten wir am besten, wenn wir zum Vergleich die Gesamtpersönlichkeit und die Gesamtleistung des *größten griechischen Mathematikers Archimedes* heranziehen, der kurz nach Euklid ums Jahr 250 v. Chr. in *Syrakus* lebte; ich will nur wenige besonders interessante, unterscheidende Punkte hervorheben:

1. Ganz im Gegensatz zu dem in Euklids Elementen herrschenden Geist besitzt Archimedes einen stark entwickelten *Sinn für numerisches Rechnen*. Eine seiner größten Leistungen ist ja, um nur ein bestimmtes Beispiel zu nennen, die *Berechnung der Zahl  $\pi$*  vermöge der Approximation des Kreises durch reguläre Polygone; u. a. leitet er bereits den bekannten Näherungswert  $\frac{22}{7}$  für  $\pi$  ab. Von einem Interesse für solche Zahlenwerte ist bei Euklid keine Spur; statt dessen findet sich nur die Angabe, daß sich 2 Kreisflächen wie die Quadrate der Radien oder 2 Kreisumfänge wie die Radien selbst verhalten, aber die Berechnung des Proportionalitätsfaktors, eben der Zahl  $\pi$ , wird nicht einmal versucht.

2. Überhaupt ist für Archimedes das weitgehende *Interesse für Anwendungen jeder Art* charakteristisch; die verschiedensten Probleme der Physik und Technik behandelt er. Bekannt ist ja, wie er das fundamentale Prinzip der Hydrostatik fand oder wie er an der Verteidigung von Syrakus durch Konstruktion von wirkungsvollen Hilfsmaschinen tätigen Anteil nahm. Wie wenig dagegen Euklid in den Elementen die Anwendungen berücksichtigt, geht besonders deutlich aus dem kleinen Zuge hervor, daß nicht einmal die einfachsten Zeichenapparate — Lineal und Zirkel — bei ihm genannt werden; er postuliert lediglich in abstracto, daß man eine Gerade durch 2 Punkte oder einen Kreis um einen Punkt zeichnen kann, ohne auch nur ein einziges Wort darüber zu verlieren, wie man das tut. Hier steht Euklid wohl im Banne der Auffassung, die überhaupt in gewissen antiken Philosophenschulen herrschte, daß die prak-

tische Anwendung einer Wissenschaft etwas Minderwertiges, Handwerksmäßiges sei. Leider hat sich diese Anschauung an manchen Stellen bis heute erhalten, und es gibt immer noch Hochschullehrer, die jede Beschäftigung mit Anwendungen als „Banausentum“ nicht genug verachten können. Der Hochmut, der in solchen Ansichten liegt, muß aufs schärfste bekämpft werden; man sollte doch jede tüchtige Leistung, liege sie auf theoretischem oder angewandtem Gebiete, gleich hoch schätzen und jeden einzelnen sich mit den Dingen befassen lassen, zu denen er am meisten Neigung verspürt. Dabei wird ein jeder um so vielseitiger sich zeigen, je mehr Talente er besitzt: unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß, haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfaßt.

3. Endlich fällt noch ein Unterschied besonders in die Augen: Archimedes war ein *großer Forscher und Bahnbrecher*, der in jeder seiner Arbeiten die Erkenntnis um einen Schritt weitertreibt; in Euklids Elementen handelt es sich aber lediglich um *Sammlung und Systematisierung* von bereits vorhandenem Material. Damit hängt die verschiedene *Form der Darstellung* zusammen, worauf ich auch im vorigen Semester bei allgemeineren Ausführungen gelegentlich hingewiesen habe<sup>1)</sup>. Besonders charakteristisch für Archimedes ist in dieser Hinsicht die schon in Teil I erwähnte Handschrift<sup>2)</sup>, die man 1906 gefunden hat und in der er einem wissenschaftlichen Freunde seine neuesten Untersuchungen über die Kubierung räumlicher Gebilde mitteilt. Hier entspricht die Darstellung genau der Art, wie wir heute unterrichten; es wird *genetisch* vorgegangen, erst der Gedankengang angedeutet und keineswegs die starre Gliederung in Voraussetzung, Behauptung, Beweis, Determination verwendet, die in den euklidischen Elementen herrscht. — Übrigens war auch vor jener neuen Entdeckung schon bekannt, daß die Griechen neben der auskristallisierten „euklidischen“ Darstellung einer systematisierten Disziplin auch eine freiere genetische Form kannten, deren sich sowohl der Forscher bei seiner Arbeit als auch der Lehrer beim Unterricht bediente und die vermutlich auch Euklid in anderen Werken oder im eigenen Unterricht angewandt hat. Ja es gab sogar in Alexandrien damals auch ein genaues Analogon zu unseren autographierten Vorlesungsheften, die man *Hypomnemata* nannte, also in loserer Art gehaltene Wiedergaben der mündlichen Vorträge.

Das möge zum Vergleich der Elemente mit dem gesamten Umfange der griechischen Mathematik genügen; ich will nun noch, um unseren Gedankengang zu beenden, an ganz wenigen Beispielen zeigen, wie weit die *moderne Mathematik* über die der Griechen hinausgekommen ist. Einer der wichtigsten Unterschiede ist, daß die Griechen noch *keine selv-*

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 86.

<sup>2)</sup> Vgl. Heiberg und Zeuthen: Eine neue Schrift des Archimedes (Leipzig 1907) = Bibliotheca mathematica 3. Folge, Bd. 7, S. 321 ff. [Vgl. auch die Archimedesausgabe von T. L. Heath, die von F. Kliem ins Deutsche übertragen wurde (Berlin 1914); jene Handschrift ist dort S. 413 ff. wiedergegeben.]



*ständige Arithmetik* und *Analysis* besaßen, weder Dezimalbrüche, die umfangreichere numerische Rechnungen erleichtern, noch das allgemeine Buchstabenrechnen; beides sind, wie ich im vergangenen Wintersemester näher ausgeführt habe, Erfindungen der beginnenden Neuzeit, der Renaissance. Als Ersatz hatten die Griechen nur einen *Kalkül in geometrischer Form*, in dem statt mit Zahlen mit Strecken oder anderen geometrischen Größen konstruktiv operiert wird, natürlich ungemein viel schwerfälliger als in unserer Arithmetik. Damit hängt zusammen, daß die Griechen auch das nicht besaßen, was unserer Arithmetik und Analysis eigentlich erst ihre Geläufigkeit gibt: die *negativen und die imaginären Zahlen*. Infolgedessen fehlte ihnen die Allgemeinheit der Methode, die in einer Formel alle möglichen Fälle zusammenzufassen gestattet, und äußerst langwierige Fallunterscheidungen spielten bei ihnen die größte Rolle. In der Geometrie macht sich dieser Mangel vielfach stark geltend, wo wir heutzutage — wir sind ja gerade in dieser Vorlesung stets so vorgegangen — durch Verwendung analytischer Hilfsmittel volle Allgemeinheit unter Vermeidung aller Fallunterscheidungen mit Leichtigkeit erreichen können. Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen; Sie werden sich nach Ihrer eigenen Kenntnis ja selbst leicht weitere Rechenschaft über die Fortschritte der modernen Mathematik gegenüber der antiken geben können.

Nach dieser allgemeinen Kritik der euklidischen Elemente können wir uns der speziellen Besprechung zuwenden; lassen Sie mich mit einer *kurzen Inhaltsübersicht über die „13 Bücher“*, d. h. Kapitel, beginnen, aus denen die Elemente bestehen<sup>1)</sup>:

In *Buch 1–6* ist die *Planimetrie* enthalten. Die *ersten 4 Bücher* bringen die *allgemeinen Auseinandersetzungen über die geometrischen Grundgebilde*, wie Strecken, Winkel, Inhalte usw., und die *Lehre von den einfachen geometrischen Figuren* (Dreiecke, Parallelogramme, Kreise, reguläre Polygone usw.) in der Form, wie man sie heute noch meist darstellt. In diesem Zusammenhange wird auch (in *Buch 2*) eine *elementare Arithmetik und Algebra der geometrischen Größen* gegeben, derart, daß — um nur ein Beispiel anzuführen — das Produkt  $a \cdot b$  zweier Strecken  $a$ ,  $b$  als Rechteck dargestellt wird; soll man 2 solche Produkte  $a \cdot b$ ,  $c \cdot d$  addieren, was wir arithmetisch unmittelbar ausführen können, so muß man, um die Summe wieder als Rechteck zu haben, die beiden Rechtecke  $a \cdot b$ ,  $c \cdot d$  in Rechtecke mit gleicher Grundlinie verwandeln.

Das *Buch 5* geht sehr viel tiefer, indem es das *geometrische Äquivalent der allgemeinen positiven reellen Zahl* einführt; das ist das Verhältnis  $\frac{a}{b}$  irgend zweier Strecken  $a$ ,  $b$ , das Euklid *Logos* ( $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ ) nennt.

<sup>1)</sup> [Man spricht auch von einem 14. und 15. Buch der „Elemente“ (der V. Band von Heibergs Ausgabe); diese beiden Bücher stammen jedoch nicht von Euklid. Das erste rührt vielmehr von *Hypsikles* her, das zweite wird einem *Damastios* zugeschrieben.]

Als wir im vergangenen Semester allgemein von der Irrationalzahl handelten, habe ich ja schon hierauf hingewiesen<sup>1)</sup>. Das wesentliche Moment an diesen Entwicklungen ist die *Definition der Gleichheit zweier Verhältnisse*  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ; diese Definition muß ganz allgemein sein, also insbesondere auch für den Fall gelten, daß  $\frac{a}{b}$  in unserem Sinne eine irrationale Zahl ist, d. h. daß — wie Euklid sagt — die Strecken  $a, b$  „*asymmetrisch*“, d. h. ohne gemeinsames Maß, oder — wie man später übersetzte — „*inkommensurabel*“ sind. Euklid geht folgendermaßen vor: Er nimmt irgend zwei ganze Zahlen  $m, n$  an und vergleicht die beiden Strecken  $m \cdot a$  und  $n \cdot b$  einerseits,  $m \cdot c$  und  $n \cdot d$  andererseits der Größe nach; es wird jeweils eine der drei Beziehungen:

$$m \cdot a \geq n \cdot b \quad \text{bzw.} \quad m \cdot c \geq n \cdot d$$

bestehen. Gilt alsdann für jede Wahl von  $m$  und  $n$  stets beidemal dasselbe Zeichen, so heißt  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Dies entspricht tatsächlich ganz dem berühmten *Schnittverfahren*, durch welches *Dedekind* die irrationale Zahl einführt.

Hieran schließt Euklid die Untersuchung, wie man mit solchen Gleichungen zwischen Verhältnissen rechnet, und entwickelt so seine vielgenannte *Proportionenlehre*, d. i. eine geometrische Theorie aller möglichen algebraischen Umformungen der Gleichungen vom Typus  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Übrigens heißt bei Euklid die Proportion „*Analogia*“, und zwar soll dies Wort besagen: der „*Logos*“ zweier Größenpaare ist derselbe. Sie sehen, wie merkwürdig weit das Wort heute seine Bedeutung geändert hat. Und doch gibt es Stellen in der Mathematik, wo sich noch heute seine ursprüngliche Bedeutung erhalten hat; man spricht in der Trigonometrie von den *Neperschen Analogien*, eben weil das gewisse Proportionen sind. Freilich kennen heute wohl nur die wenigsten die eigentliche Bedeutung dieses Namens.

Die *Proportionenlehre* ist ein charakteristisches Beispiel dafür, mit welcher Zähigkeit sich die euklidische Tradition im geometrischen Unterricht erhält. Noch heute wird diese Lehre nämlich in vielen, ja vielleicht in den meisten Schulen als *besonderes Kapitel der Geometrie* behandelt, obwohl sie sachlich ja in unserer modernen Arithmetik vollkommen enthalten ist, und demgemäß im arithmetischen Unterricht sogar schon zweimal vorher, erst im Rechnen bei der Regeldetri und dann in den Anfängen des Buchstabenrechnens, durchgenommen wird. Warum dann dieselbe Sache noch zum dritten Male in besonders geheimnisvoller, geometrischer Aufmachung erscheinen soll, ist wahrhaftig nicht einzusehen und muß gewiß auch dem Schüler vollkommen unverständlich bleiben. Der einzige

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 35f.

Grund ist eben, daß man immer noch an dem alten euklidischen Lehrgang hängt, obwohl doch der vernünftige Zweck, den Euklid mit der Proportionenlehre verband — einen Ersatz für die ihm fehlende Arithmetik zu schaffen — für uns durchaus gegenstandslos geworden ist.

Diese Kritik der heutigen Behandlung der Proportionenlehre soll sich natürlich nicht auf die *wissenschaftliche Bedeutung des fünften Buches* Euklids beziehen; die ist vielmehr besonders groß, weil hier zum ersten Male — modern zu reden — die *Berechtigung des Rechnens mit irrationalen Zahlen* auf Grund scharfer Definitionen durchaus einwandfrei dargetan wird. Hier sieht man so recht, daß die Elemente keineswegs ein Schulbuch waren und sind, wie das oft mißverständlich angenommen wurde; vielmehr setzen sie durchaus einen reiferen, rein wissenschaftlichen Betrachtungen zugänglichen Leser voraus.

Ich muß hier noch die Tradition erwähnen, daß dieses fünfte Buch nicht von Euklid selbst geschrieben sei, sondern von *Eudoxus von Knidos* (um 350 v. Chr.) herrühre. Überhaupt hält man die Elemente nicht für ein einheitlich aus einem Guß geschriebenes Werk, sondern sie sollen aus verschiedenen älteren Bestandteilen zusammengeschweißt worden sein.

Wie sich das auch verhalten mag, auf jeden Fall sind alle bestimmten Angaben über die Verfasser usw. mit der größten Unsicherheit behaftet, da an historischen Notizen, die von Euklid oder einem seiner Zeitgenossen herrühren, durchaus kein Material vorliegt. Im vorliegenden Falle geht die Tradition auf den Euklidkommentator *Proclus Diadochus* zurück, der um 450 n. Chr., also mehr als 700 Jahre nach Euklid lebte. Mag die Behauptung von Proclus aus manchen Gründen auch eine gewisse innere Wahrscheinlichkeit besitzen, so wird man sie doch als absolut sicheres Zeugnis ebensowenig gelten lassen, als wenn heute jemand eine Theorie über die Autorschaft eines ums Jahr 1200 verfaßten Werkes aufstellte.

Gehen wir nun in der Inhaltsangabe der Elemente weiter, so enthält *Buch 6* die *Lehre von den ähnlichen Figuren*, wobei jene Proportionenlehre das Haupthilfsmittel ist.

In den *Büchern 7, 8, 9* findet sich die *Lehre von den ganzen Zahlen, zum Teil in geometrischer Form*. Dabei wird für die Proportionen zwischen ganzen Zahlen, d. h. für das *Rechnen mit rationalen Brüchen* eine von den Entwicklungen des 5. Buches vollständig unabhängige Theorie gegeben. Obwohl die rationalen Brüche einfach eine spezielle Art reeller Zahlen darstellen, wird in keiner Weise auf die frühere, allgemeinere Theorie Bezug genommen. Man kann sich daher nur schwer vorstellen, daß beide Darstellungen von demselben Autor stammen. Ich möchte aus dem Inhalte dieser Bücher hier nur 2 Sachen hervorheben, die noch heute in der Zahlentheorie stets benutzt werden:

Die eine ist der *euklidische Algorithmus* zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier ganzer Zahlen  $a$  und  $b$ , die bei Euklid durch Strecken dargestellt werden. In moderner Sprache besteht er darin, daß man  $a$  durch  $b$  dividiert, dann  $b$  durch den Rest und so nach dem Schema:

$$a = m \cdot b + r_1,$$

$$b = m_1 \cdot r_1 + r_2,$$

$$r_1 = m_2 \cdot r_2 + r_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

fortfährt, bis notwendig nach endlich vielen Schritten die Division aufgeht; der letzte Rest ist dann der gesuchte Teiler. Zweitens aber findet sich bei Euklid bereits der bekannte einfache Nachweis der *Existenz unendlich vieler Primzahlen*, den ich schon in der vorigen Vorlesung<sup>1)</sup> vorgetragen habe.

Im *Buch 10* weiterhin, das in seiner geometrischen Ausdrucksweise wohl besonders schwerfällig und schwer verständlich ist, ist eine *geometrische Klassifikation der durch Quadratwurzeln darstellbaren Irrationalitäten* enthalten, wie sie später zu ihrer geometrischen Konstruktion gebraucht wird.

Jetzt erst folgen in *Buch 11* die *Anfänge der Stereometrie*. Sie sehen, Euklid ist kein „Fusionist“. Er stellt vielmehr die Stereometrie soweit entfernt von der Planimetrie, wie nur irgend möglich, während wir im Sinne der mehrfach erwähnten „Fusionsbestrebungen“ es heute für richtig halten, die Raumvorstellung als Ganzes so früh wie möglich zu entwickeln und darum von vornherein den Schüler an dreidimensionale Figuren zu gewöhnen, statt ihm erst künstlich die Beschränkung auf die Ebene anzuerziehen.

Im *Buch 12* treten nochmals *allgemeine Betrachtungen über irrationale Größen* auf, die zur *Bestimmung des Volumens der Pyramide* und anderer Körper notwendig werden. Es handelt sich hier um eine verhüllte Anwendung des Grenzbegriffes im sogenannten *Exhaustionsbeweise*, durch den Proportionen zwischen irrationalen Größen streng bewiesen werden. Zunächst wird dieses Verfahren übrigens zu dem Beweis des planimetrischen Satzes benutzt, daß 2 Kreise sich wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, und an diesem Beispiele will ich auch mit einem Worte den Grundgedanken der Methode auseinandersetzen: Jeder Kreis kann durch ein- und umgeschriebene  $n$ -Ecke von immer wachsender Seitenzahl immer besser angenähert, gewissermaßen „ausgeschöpft“ werden, derart, daß sich ihr Inhalt von dem Kreisinhalt beliebig wenig unterscheidet; würde nun jene Proportion nicht stattfinden, so könnte man leicht einen Widerspruch gegen die Tatsache herleiten, daß jedes eingeschriebene

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 43 f.

Polygon kleiner, jedes umgeschriebene aber größer ist als der Kreis<sup>1)</sup> (vgl. Abb. 125).

Das 13. Buch endlich bringt die *Theorie der regulären Körper* und gipfelt unter Benutzung des im zehnten angesammelten Materials in dem Nachweise, daß man alle diese Körper, d. h. die Längen ihrer Seiten, mit Lineal und Zirkel konstruieren kann. Dieser Abschluß entspricht dem besonderen Interesse, welches die griechischen Philosophen von jeher den regulären Körpern entgegenbrachten.

Nach diesem allgemeinen Inhaltsüberblick wollen wir uns, wie es ja unser Vorsatz war, etwas näher mit den Kapiteln des Euklid beschäftigen, die von den *Grundlagen der Geometrie* handeln. Das ideale Ziel, das Euklid vorschwebt, ist ganz offenbar die *lückenlose, rein logische Ableitung aller geometrischen Sätze aus vorher vollständig aufzustellenden Prämissen*; in der Aufrichtung (oder Übermittlung) dieses Ideals ruht ohne Zweifel der Kern der historischen Bedeutung der Elemente. Keineswegs aber hat Euklid dieses hohe Ziel wirklich erreicht, denn gerade auch in den grundlegenden geometrischen Betrachtungen ist die moderne Wissenschaft zu wesentlich tieferer Erkenntnis gelangt und hat Unklarheiten bei ihm aufgedeckt. Trotzdem — so stark ist die Tradition! — hält man auch heute vielfach, besonders in England, Euklids Darstellung für das unübertroffene Muster einer Grundlegung der Geometrie. Man verwechselt die historische Bedeutung des Werkes mit ihrer absoluten, bleibenden, und es ist nur natürlich, wenn ich solcher Überschätzung der euklidischen Elemente gegenüber in der nachfolgenden Kritik besonders die negative Seite, die Punkte, wo Euklids Darstellung unseren Ansprüchen nicht mehr genügen kann, hervorhebe.

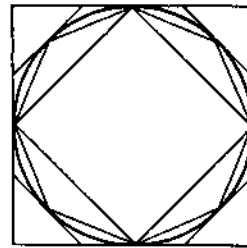


Abb. 125.

Eine besondere Schwierigkeit bei jeder solchen Kritik Euklids freilich entsteht durch die *Unsicherheit des Textes*. Manches ist durch den schon genannten Proclus beglaubigt und das ist noch die älteste Quelle; die ältesten Kodizes, die wir besitzen, stammen aus dem 9. Jahrhundert n. Chr., d. h. sie sind gar 1200 Jahre jünger als Euklid! Dazu weichen diese verschiedenen Kodizes außerordentlich voneinander ab, häufig gerade auch in den grundlegenden Stücken, auf die es ankommt. Daneben läuft nun noch die Tradition lateinischer und arabischer Übersetzer und Kommentatoren, bei denen sich — entstanden aus dem Bestreben, den Text zu klären — immer wieder bedeutende Abweichungen finden. Die Herstellung eines möglichst verlässlichen Textes der Elemente ist so ein äußerst kompliziertes philologisches Problem, auf

<sup>1)</sup> Über die Beziehungen des Exhaustionsbeweises zur modernen Auffassung des Grenzbegriffes vgl. Teil I, S. 225 f.

das in der Tat auch ungeheuer viel Scharfsinn verwandt worden ist. Man muß sich nur klar darüber werden, daß das, was durch solche philologische Arbeit gewonnen werden kann, im besten Falle der *wahrscheinlichste Text* ist, der aber wohl *nicht der wahre Originaltext* sein dürfte; denn es ist keineswegs notwendig, daß das, was wir aus vielen verschiedenen Aussagen als wahrscheinlichsten Hergang entnehmen, mit der Wirklichkeit in *allen* Punkten übereinstimmt. Auf der Höhe der heutigen philologischen Wissenschaft steht nach allgemeiner Ansicht Heibergs Text, und wir Nichtphilologen können nichts Besseres tun, als ihn unsern Ausführungen zugrunde zu legen, wobei wir aber dem Gesagten zufolge nie vergessen dürfen, daß er mit dem ursprünglichen Text durchaus nicht identisch zu sein braucht. Finden sich also in dem genannten Text Mängel und Widersprüche, so wird man immer noch im Zweifel sein müssen, ob man sie Euklid zur Last legen muß oder ob sie sich erst durch die Überlieferung eingeschlichen haben.

Um nun zur Sache zu kommen, wollen wir zunächst zusehen, wie sich in *Buch I* der Elemente die *Grundlegung der Geometrie* gestaltet. Euklid stellt da an die Spitze 3 Gruppen von Sätzen, die er *ὄροι* (*definitiones*), *ἀθήματα* (*postulata*), *κοινὰ ἔννοια* (*communes animi conceptiones*) nennt, was wir deutsch etwa als *Erklärungen*, *Forderungen* und *Grundsätze* wiedergeben können; für die letzte Gruppe gebraucht man jedoch nach Proclus gewöhnlich das Wort *Axiome*, das indessen heutzutage bekanntlich eine allgemeinere, die Postulate mitumfassende Bedeutung angenommen hat.

Um zunächst den Inhalt der *Erklärungen* zu verstehen, wollen wir uns erinnern, wie wir früher bei der Grundlegung der Geometrie begannen. Wir sagten, gewisse Dinge, wie Punkte, Geraden, Ebenen können wir nicht definieren, sondern müssen sie als jedem Menschen geläufige Grundbegriffe annehmen und nur die Eigenschaften, die wir von ihnen benutzen wollen, scharf aussprechen; alsdann konnten wir die Geometrie bis hin zum Koordinatensystem  $x, y, z$  der analytischen Geometrie aufbauen. Erst hinterher bildeten wir uns den allgemeinen Kurvenbegriff, indem wir  $x, y, z$  gleich stetigen Funktionen eines Parameters  $t$  setzten. Ich habe gelegentlich angedeutet, daß hier noch die wunderbarsten Ausartungen, wie Kurven, die eine Fläche vollständig überdecken u. dgl., mit inbegriffen sind.

Euklid hat nicht diese vorsichtige oder resignierende Auffassung. Er beginnt mit der „Erklärung“ aller möglichen geometrischen Begriffe, wie *Punkt, Linie, Gerade, Fläche, Ebene, Winkel, Kreis* usw. Die erste Erklärung lautet: *Ein Punkt ist, dessen Teil nichts ist*. Wir werden das aber kaum als eigentliche Definition anerkennen können, da ein Punkt doch keineswegs durch diese Eigenschaft allein bestimmt ist. Weiter heißt es dann: *die Linie ist Länge ohne Breite*. Hier ist gar die Richtigkeit der Aussage zweifelhaft, wenn man den soeben angedeuteten allgemeinen

Kurvenbegriff anerkennt, von dem Euklid freilich noch nichts wußte. An dritter Stelle wird dann *die Gerade als eine Linie erklärt, die gleichmäßig in bezug auf ihre Punkte liegt*. Der Sinn dieser Aussage ist vollends dunkel und man kann sich alles mögliche darunter denken. Es könnte heißen, daß die Gerade überall gleiche Richtung hat, dann müßte die Richtung als jedem Menschen geläufiger Grundbegriff anerkannt sein. Man könnte aber auch daran denken, daß eine Gerade, wenn man sie als starren Stab realisiert denkt, bei gewissen Bewegungen des Raumes immer mit sich selbst in Deckung bleibt, nämlich bei den Drehungen um sie als Achse und den Verschiebungen an ihr entlang. Bei dieser Auffassung der Erklärung Euklids wäre freilich wieder der Begriff der Bewegung vorausgesetzt, und ob Euklid das tut, das ist eine sehr strittige Frage, auf die wir noch genauer zurückkommen werden. Jedenfalls ist es nicht gelungen, für Euklids Definition der Geraden und ebenso auch für viele seiner weiteren Erklärungen, auf die ich hier im einzelnen nicht mehr eingehe, eine eindeutige Interpretation zu finden.

Wir kommen nun zu den *Postulaten*, deren sich in der Heibergschen Ausgabe 5 angegeben finden. Sie verlangen, daß es möglich sein soll:

- a) von einem Punkte nach einem anderen eine Gerade zu ziehen;
- b) eine begrenzte Gerade unbegrenzt zu verlängern;
- c) einen Kreis mit gegebenem Mittelpunkt zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht.

Das vierte stelle ich vorläufig zurück und nenne sogleich das fünfte, das sog. *Parallelenpostulat*:

d) Wenn 2 Gerade mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als ein flacher Winkel ist, so schneiden sie sich bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite (vgl. Abb. 126).

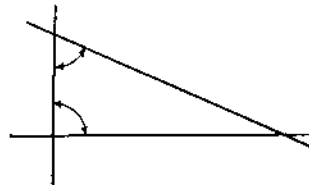


Abb. 126.

Diese Postulate drücken die *Ausführbarkeit gewisser Konstruktionen* oder die

*Existenz gewisser geometrischer Gebilde* aus, wie sie Euklid in seinen späteren Betrachtungen tatsächlich benutzt. Aber es gibt noch eine ganze Reihe ähnlicher Existenzpostulate in der Geometrie, die aus den genannten rein logisch nicht folgen und von denen Euklid doch ebenso Gebrauch macht. Ich will nur als ein Beispiel den Satz hervorheben, daß 2 Kreise sich schneiden, wenn jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht (vgl. Abb. 127), und könnte noch eine Reihe ähnlicher Sätze nennen. Wir werden danach also das *euklidische System der Postulate jedenfalls als lückenhaft* bezeichnen müssen.

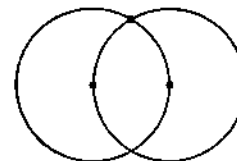


Abb. 127.

Doch nun das *vierte Postulat*:

- e) Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Es ist viel darüber gestritten worden, wie dieses Postulat zu verstehen ist und wie es überhaupt an seine Stelle kommt; dabei spielt die große Frage hinein, ob Euklid den *Bewegungsbegriff* benutzt oder nicht. Stellt man den Begriff der Bewegung der Figuren als starrer Körper konsequent an die Spitze, wie wir das bei unserem ersten Aufbau der Geometrie taten, so ergibt sich (vgl. S. 182) dieses Postulat als notwendige logische Folge, und es wäre daher — wenn anders Euklid diese Auffassung hat — hier durchaus unnötig. Nun ist aber in allen diesen grundlegenden Sätzen Euklids von Bewegungen sonst nicht explizit die Rede, so daß manche Erklärer annehmen, dieses vierte Postulat solle geradezu zur *Einführung der Bewegungsidee* dienen — allerdings, wie man dann wohl zugeben muß, in unvollkommener Form.

Demgegenüber meinen wohl die meisten Euklidkommentatoren, daß eine der wesentlichen Tendenzen Euklids gerade sei, gemäß gewissen philosophischen Erwägungen (vgl. S. 188) den Bewegungsbegriff prinzipiell aus der Geometrie fernzuhalten. Alsdann müßte aber der *abstrakte Begriff der Kongruenz* an der Spitze stehen — wie bei unserem zweiten Aufbau —, und wiederum hätte dieses vierte Postulat als *Grundlage für die Lehre von der Kongruenz* zu gelten. Dabei entsteht freilich die Frage, warum nicht auch über die Kongruenz von Strecken analoge Angaben gemacht werden. Was für wesentliche Schwierigkeiten aber sowohl der einen als der anderen Auffassung in den weiteren Entwicklungen Euklids erwachsen, das werden wir sogleich noch sehen.

Hier nur noch die Bemerkung, daß keine der beiden Deutungen recht erklärt, warum dieser Satz gerade unter den *Postulaten* (mit ihrer oben charakterisierten allgemeinen Tendenz) steht. Das hat *Zeuthen* zu einem interessanten Erklärungsversuch veranlaßt, der freilich nicht ganz überzeugend ist: das Postulat soll aussagen, daß die Verlängerung einer Strecke über einen Punkt hinaus, die nach Postulat b) überhaupt möglich ist, *eindeutig* bestimmt ist. Näheres mögen Sie in Zeuthens Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter<sup>1)</sup> nachlesen. Endlich bleibt natürlich immer der Ausweg, daß man hier eine *Verderbtheit des Textes* annimmt, und das ist auch von manchen Seiten geschehen und ja in der Tat auch nicht zu widerlegen.

Ich wende mich endlich zu den *Grundsätzen*, deren es bei Heiberg wiederum 5 gibt:

a) Was demselben Dritten gleich ist, ist untereinander gleich; wenn  $a = b$ ,  $b = c$ , so ist  $a = c$ .

b) Gleiches um Gleiches vermehrt gibt Gleiches; wenn  $a = b$ ,  $c = d$ , so ist  $a + c = b + d$ .

c) Wenn  $a = b$ ,  $c = d$ , so ist  $a - c = b - d$ .

d) Einander Deckendes ist gleich.

e) Das Ganze ist größer als der Teil:

$$a > a - b.$$

<sup>1)</sup> a. a. O. S. 123f.



Vier der eben genannten Sätze sind logischer Natur, und sie sollen an dieser Stelle offenbar aussagen, daß die durch sie zum Ausdruck gebrachten allgemeinen Relationen speziell auch für alle in Betracht kommenden geometrischen Größen (Strecken, Winkel, Flächeninhalte usw.) gelten. Der vierte Satz bestimmt dann, daß in letzter Linie die „Kongruenz“ oder das „zur Deckung bringen“ das für die Gleichheit und Ungleichheit entscheidende Moment ist — wobei freilich wieder die Unklarheit bleibt, ob die Bewegungsidee vorausgesetzt ist oder nicht.

Was nun den Unterschied zwischen Grundsätzen und Postulaten anlangt, so hat Simon die Formulierung gegeben, daß jene die einfachsten Tatsachen der Logik, diese die der Raumschauung betreffen sollen. Das wäre sehr zutreffend und einleuchtend, wenn es nur gewiß wäre, daß die im Heibergschen Text gegebene Anordnung genau dem Original entspräche. Aber tatsächlich finden sich in den Kodizes ganz wesentliche Abweichungen in der Anordnung und dem Inhalt der Postulate und Axiome, die sich keineswegs jenem Schema fügen; besonders wird z. B. das Parallelenpostulat häufig als 11. Axiom aufgeführt.

Nunmehr wollen wir uns genauer den Anfang des euklidischen Lehrgebäudes der Geometrie, das auf diesen Erklärungen, Postulaten und Axiomen aufgeführt wird, ansehen, nämlich die ersten 4 Paragraphen, die auf die Axiome folgen. Dabei werden wir zugleich über Euklids Auffassung der Grundlagen, insbesondere auch seine Stellung zum Bewegungsbegriff interessante Wahrnehmungen machen können.

Die ersten 3 Paragraphen zielen auf die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Strecke  $AB$  auf einer anderen Strecke  $CF$  von  $C$  aus abzutragen.

Das wird jeder Mensch praktisch natürlich durch direkte Übertragung mittels eines Zirkels oder eines Papierstreifens — d. h. durch Verschiebung eines starren Körpers in der Ebene — ausführen. Anders Euklid

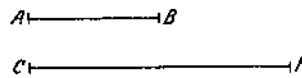


Abb. 128.

in seinen theoretischen Betrachtungen: Er hat ja in seinen Postulaten eine Konstruktion, die diesem frei beweglichen Zirkel entspricht, nicht vorausgesetzt, sondern sein Postulat c) (vgl. S. 213) gestattet nur, um einen Punkt einen Kreis zu schlagen, wenn ein Punkt der Peripherie bereits gegeben ist. Nun will er lediglich die in den Postulaten gegebenen Möglichkeiten verwenden und muß daher die anscheinend so einfache Konstruktion in eine größere Zahl komplizierterer, allerdings höchst sinnreicher Schritte zergliedern:

1. Über einer gegebenen Strecke  $AB$  ein gleichseitiges Dreieck zu errichten. Nach Postulat c) läßt sich um  $A$  ein Kreis mit  $AB$ , um  $B$  einer mit  $BA$  schlagen; daß diese Kreise einen Schnittpunkt  $C$  haben, wird freilich, wie schon erwähnt, ohne weitere

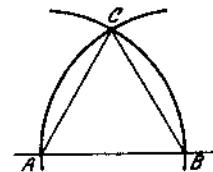


Abb. 129.

Erörterung angenommen. Nun folgt ein streng formal logischer Beweis unter Benutzung der Grundsätze dafür, daß  $ABC$  tatsächlich gleichseitig ist.

2. Von einem gegebenen Punkte  $C$  aus eine Strecke abzutragen, die einer gegebenen  $AB$  gleich ist (vgl. Abb. 130). Nach 1. errichte man über  $AC$  ein gleichseitiges Dreieck  $ACD$ . Dann verlängere man  $DA$  über  $A$  hinaus (Postulat b) und schlage um  $A$  mit  $AB$  einen Kreis (Postulat c) bis zum Schnitt  $B'$  mit  $DA$ ; (die Existenz dieses Schnittes freilich wird wieder

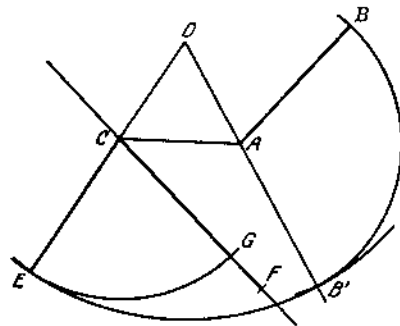


Abb. 130.

nicht besonders hervorgehoben). Weiter schlage man um  $D$  mit  $DB'$  einen Kreis und schneide ihn mit der Verlängerung von  $DC$  in  $E$ ; dann ist  $CE = AB$ . Der Beweis, dessen Verlauf man ja sofort überblickt, wird zum Schluß wieder genau ausgeführt.

3. Gegeben 2 Strecken  $AB, CF$ , wobei  $CF > AB$  ist; auf  $CF$  eine Strecke gleich  $AB$  von  $C$  aus abzutragen. Nach 2. zeichne man irgend-

eine Strecke  $CE = AB$  von  $C$  aus und schlage um  $C$  einen Kreis mit  $CE$ , der  $CF$  in  $G$  trifft;  $CG$  ist die gesuchte Strecke.

Damit ist die erwähnte Aufgabe gelöst. Euklid läßt nun als Nr. 4 den ersten Kongruenzsatz folgen: Stimmen 2 Dreiecke  $ABC, A'B'C'$  in 2 Seiten ( $AB = A'B', AC = A'C'$ ) und dem eingeschlossenen Winkel ( $A = A'$ ) überein, so stimmen sie in allen Stücken überein. Bei dem Beweise dieses Satzes begeht Euklid der vorigen Konstruktion gegenüber jene merkwürdige Inkongruenz, wegen deren ich diese ganzen Betrachtungen wiedergebe. Er denkt sich das Dreieck  $A'B'C'$  so auf  $ABC$  gelegt, daß die Seiten  $A'B', A'C'$  bzw. auf  $AB, AC$  und der Winkel  $A$  auf den Winkel  $A'$  fällt. Nun haben wir wohl im vorhergehenden das Abtragen einer Strecke auf einer anderen sehr genau gelernt,

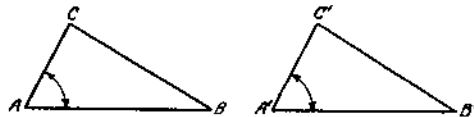


Abb. 131.

aber von dem Abtragen eines Winkels war noch nicht die Rede, und noch viel weniger war je etwas davon gesagt, was bei einem solchen Übertragungsprozeß aus der dritten Seite  $B'C'$  wird, ob diese denn z. B. überhaupt eine Gerade bleibt. Anschaulich ist das ja ganz klar, aber das ganze Ziel Euklids ist ja immer die logische Vollständigkeit der Deduktion. Trotzdem schließt er nun hier ohne irgendwelche nähere Ausführungen, daß auch  $B'C'$  beim geschilderten Aufeinanderlegen in eine Gerade übergehen muß, die dann freilich notwendig mit  $BC$  zur Deckung kommt. Das heißt aber nichts, als durchaus die Existenz von Bewegungen, welche Gestalt und Abmessungen der geo-

metrischen Figuren nicht ändern, voraussetzen — so wie wir das bei unserem ersten Aufbau der Geometrie taten; dabei ist es dann allerdings selbstverständlich (vgl. S. 189), daß sich der erste Kongruenzsatz beweisen läßt.

So würde also dieser Beweis Euklids ganz dafür sprechen, daß er Anhänger der Bewegungsidee ist. Aber dann bleibt die Frage, warum in den Grundlagen gar nicht die Rede davon ist, und vor allem wäre alsdann seine kunstvolle Lösung der Aufgaben 2 und 3 durchaus zwecklos, da sie sich bei Verwendung des Bewegungsbegriffes mit einem Worte erledigen lassen. Betrachten wir aber andererseits die Nr. 4 als ein späteres Einschießel, so bleibt doch die Frage offen, wie sich Euklid zum ersten Kongruenzsatz gestellt hat, und damit bleibt eine *wesentliche Lücke* in seinen Entwicklungen; denn ohne Bewegungsbegriff kann man diesen Satz unmöglich beweisen, und man muß ihn, wie in unserem zweiten Aufbau der Geometrie (S. 189), unter die Axiome aufnehmen. Wir können jedenfalls diese Erörterungen abschließend nur sagen, *daß sich gerade in den ersten Sätzen des ersten Buches der Elemente so viele innere Schwierigkeiten erheben, daß von einem Erreichen des Ideales, so wie wir es vorhin hinstellten, durchaus nicht die Rede sein kann.*

Wesentlich schwerer aber als alle diese Lücken und Unklarheiten wiegt *ein anderer Einwand*, den man gegen Euklids Darstellung der Grundlagen machen muß, wenn man ihn an seinem eigenen Ideal mißt und sich dabei unsere heutigen Kenntnisse vorhält. Euklid hat nämlich, um es zunächst in der uns geläufigen analytischen Sprache zu sagen, bei seinen geometrischen Größen (Strecken, Winkel, Flächen usw.) *niemals ein Vorzeichen*, sondern er behandelt sie sämtlich stets als absolute Größen; er treibt gewissermaßen eine analytische Geometrie, in der die Koordinaten und sonstigen Größen nur nach ihrem Absolutwerte eingehen. Die Folge davon ist, daß er nicht zur Aufstellung allgemeingültiger Sätze gelangen kann, sondern *stets Fallunterscheidungen* mitnehmen muß, je nachdem im konkreten Falle die Stücke in der Figur so oder anders liegen. Um ein einfaches Beispiel zu nennen, so gilt in unserer modernen Formelsprache der sogenannte erweiterte pythagoreische Lehrsatz (vgl. Abb. 132):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

allgemein für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke, da wir  $\cos \gamma$  sinngemäß als positive oder negative Größe auffassen: Euklid aber kennt nur den Absolutwert  $|\cos \gamma|$ , und er müßte daher in beiden Fällen 2 verschiedene Formeln:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab |\cos \gamma| \quad \text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2ab |\cos \gamma|$$

unterscheiden. Natürlich werden diese Fallunterscheidungen um so komplizierter und unübersichtlicher, je weiter man geht.

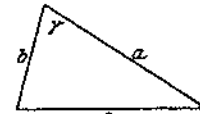


Abb. 132

Man kann den Mangel, von dem hier die Rede ist, natürlich auch ganz *rein geometrisch* formulieren. Dem Unterschied der Vorzeichen in der analytischen Darstellung entspricht in der reinen Geometrie ein *Unterschied in der Anordnung* von dem Typus, ob ein Punkt  $C$  zwischen  $A$  und  $B$  oder außerhalb der Strecke  $AB$  liegt. Man wird nun erst dann ein vollständiges logisches Gebäude der Geometrie auführen können, wenn man die Grundtatsachen dieser Lagenbeziehung, die sogenannten „*Axiome des Zwischen*“, ausdrücklich formuliert, wie wir ja sowohl bei unserem ersten als auch zweiten Aufbau der Geometrie betont haben. Unterläßt man dies aber, wie Euklid, so wird das Ideal der rein logischen Beherrschung der Geometrie nicht erreicht, und man muß immer wieder zur Prüfung der Lageverhältnisse auf die Figur zurückgreifen. *Unser Einwand gegen Euklid ist also, kurz gesagt, der, daß er keine Zwischenaxiome hat.*

Nun ist tatsächlich die Einsicht, daß man bestimmte Voraussetzungen über das „Zwischen“ formulieren müsse, mit anderen Worten, daß man die elementargeometrischen Größen nach gewissen Verabredungen mit Vorzeichen behaften müsse, verhältnismäßig noch recht neuen Datums; ich hatte ja am Anfang dieser Vorlesung (S. 17), als wir uns ausführlich damit beschäftigten, berichtet, daß wir die erste konsequente Durchführung der Vorzeichenregeln in Möbius' „Baryzentrischem Kalkül“ von 1827 finden. Weiter ist in diesem Zusammenhang eine Stelle aus einem Briefe von Gauß an W. Bolyai vom 6. März 1832 historisch interessant, die freilich erst 1900 bei der Veröffentlichung in Bd. VIII der Werke<sup>1)</sup> bekannt wurde und die lautet: „Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte wie „zwischen“ auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.“

Die erste genauere geometrische Formulierung dieser „Zwischenaxiome“ gab M. Pasch 1882 in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“<sup>2)</sup>. Vor allem tritt hier zum ersten Male der übrigens früher bei unserem ersten Aufbau der Geometrie (S. 178) ausdrücklich genannte und benutzte charakteristische Satz auf: *Trifft eine Gerade eine Seite eines Dreiecks, so trifft sie gewiß auch eine der beiden anderen* (vgl. Abb. 133).

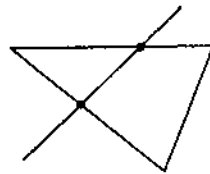


Abb. 133.

Man darf die Bedeutung dieser Zwischenaxiome nicht unterschätzen; sie sind ebenso wichtig wie alle anderen Axiome, wenn man die Geometrie wirklich als logische Wissenschaft aufbauen will, die zur Abwicklung ihrer Schlüsse *nach* Aufstellung der Axiome nicht mehr notwendig der Bezugnahme auf Anschauung und Figuren bedarf (so anregend und für die Forschung förderlich diese Bezugnahme selbstverständlich auch stets bleiben wird). Euklid, der diese Axiome nicht hat, muß immer noch mit Fallunterscheidungen an der Hand der Figuren operieren, und da er andererseits auf das richtige geometrische Zeichnen so wenig

<sup>1)</sup> S. 222.    <sup>2)</sup> Leipzig 1882. [2. Aufl. 1912.]

Gewicht legt, so liegt die Gefahr nahe, daß ein Schüler des Euklid an der Hand falsch gezeichneter Figuren auch einmal zu *falschen* Sätzen kommt. So entstehen die zahlreichen sogenannten *geometrischen Sophismen*, das sind sonst formell korrekte Beweise für falsche Sätze, die nur auf schlecht gezeichneten, d. h. gegen die Zwischenaxiome verstoßenden Figuren beruhen. Ich teile gern ein Beispiel mit, das gewiß manchem von Ihnen bekannt ist, den *Beweis, daß jedes Dreieck gleichschenkelig ist*.

Man zieht da zunächst die Halbierende des Winkels  $A$  und die Senkrechte im Mittelpunkt  $D$  der Seite  $BC$ . Wären beide parallel, so stünde die Winkelhalbierende auf  $BC$  senkrecht, und das Dreieck wäre bekanntlich gleichschenkelig, wie sofort zu zeigen. Wir können also annehmen, daß jene beiden Geraden sich schneiden, und wir unterscheiden 2 Fälle, je nachdem der Schnitt  $O$  innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt; in jedem Falle ziehen wir  $OE$  und  $OF$  senkrecht auf  $AC$  und  $AB$  und verbinden  $O$  mit  $B$  und  $C$ .

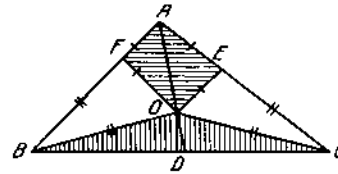


Abb. 134.

Im ersten Falle (vgl. Abb. 134) sind die horizontal schraffierten Dreiecke  $AOF$  und  $AOE$  kongruent, da sie in der Seite  $AO$ , den Winkeln bei  $A$  und den rechten Winkeln übereinstimmen; also ist:

$$AF = AE.$$

Ebenso sind die vertikal schraffierten Dreiecke  $OCD$ ,  $OBD$  kongruent, da in ihnen die Seiten  $OD$  und  $DC = DB$  sowie die rechten Winkel übereinstimmen. Also ist  $OC = OB$ , und hieraus schließen wir weiter, da nach der ersten Kongruenz auch  $OE = OF$  ist, auf die Kongruenz der nicht schraffierten Dreiecke  $OCE$  und  $OBF$ ; daher ist:

$$FB = EC,$$

und die Addition zur vorhin gewonnenen Gleichung ergibt tatsächlich  $AC = AB$ .

Liegt  $O$  zweitens außerhalb (vgl. Abb. 135), so schließen wir genau ebenso auf die Kongruenz der 3 Paare entsprechender Dreiecke und finden insbesondere:

$$AF = AE, \quad FB = EC.$$

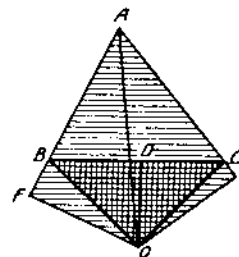


Abb. 135.

Durch Subtraktion folgt hieraus, wie die Figur zeigt, wieder  $AB = AC$ , d. h. die Gleichschenkligkeit wäre in jedem Falle erwiesen.

Was an diesem Beweise falsch ist, ist tatsächlich nur die Figur. Einmal kann nämlich  $O$  *niemals innerhalb des Dreiecks* liegen, und dann kann nie die im zweiten Falle gezeichnete Lage statthaben, sondern es muß stets *einer der beiden Lotfußpunkte  $E, F$  innerhalb, der andere außer-*

halb der ihn tragenden Dreieckseite liegen, wie das in Abb. 136 gezeichnet ist. Tatsächlich ist also etwa:

$$AB = AF - BF,$$

$$AC = AE + CE = AF + BF,$$

und wir dürfen keineswegs auf Gleichheit schließen.

Damit ist das Sophisma vollständig aufgeklärt, und in ganz ähnlicher Weise erledigen sich die vielen sonst bekannten Scheinbeweise; stets werden ungenaue Figuren mit verkehrter Anordnung der Punkte und Geraden der Argumentation zugrunde gelegt.

Habe ich so wesentliche Mängel an Euklids Darstellung kritisiert, so will ich andererseits auch eine ihrer größten *Feinheiten* hervor-

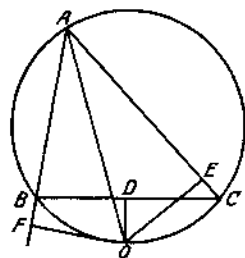


Abb. 136.

heben, über die freilich jene früher gekennzeichneten begeisterten Anhänger Euklids meist ebenso hinweggleiten wie über die Fehler. Ich berichtete bereits, daß im fünften Buch das *Verhältnis (Logos)* irgend zweier geometrischen Größen  $a, b$  betrachtet wird, welches das Äquivalent des allgemeinen Zahlbegriffes gibt. Nun setzt aber Euklid hierbei ausdrücklich fest, daß er von einem Verhältnis zweier gleichartiger geometrischer Größen  $a, b$  *nur unter einer gewissen Bedingung*

sprechen will: *wenn nämlich zwei ganze Zahlen  $m$  und  $n$  derart sich bestimmen lassen, daß  $ma > b$  und  $a < nb$  wird; seine Worte sind: „Ein Verhältnis haben Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.“* Diese Forderung nennt man heutzutage *archimedisches Axiom*, ein Name, der freilich durchaus unhistorisch ist, da eben Euklid lange vor Archimedes und wahrscheinlich sogar noch früher *Eudoxus* dieses Axiom besaß. Heute findet auch die Bezeichnung „*Axiom des Eudoxus*“ immer weitere Verbreitung.

Dieses archimedische Axiom spielt als eines der wichtigsten Stetigkeitspostulate in den modernen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wie der Arithmetik eine große Rolle, und demgemäß haben wir es auch in unseren eigenen Entwicklungen bereits wiederholt berührt. Insbesondere stimmt — wie Sie sofort erkennen — bei unserem ersten Aufbau der Geometrie das Postulat, daß die durch Iteration einer Translation aus  $A$  entstehenden Punkte jeden Punkt einer Halbgeraden einschließen (S. 175), sachlich durchaus mit dem archimedischen Axiom überein. Wir haben aber auch schon im ersten Teil des vorliegenden Werkes<sup>1)</sup> ausführlich von diesem Axiom gesprochen. Da nannten wir eine Größe  $a$ , die nach Multiplikation mit jeder endlichen Zahl  $n$  immer noch kleiner als  $b$  blieb, *aktual unendlich klein in bezug auf  $b$*  oder umgekehrt  $b$  *aktual unendlich groß in bezug auf  $a$* . Was Euklid durch

<sup>1)</sup> Vgl. Teil I, S. 235.

seine Forderung ausschließt, sind also Systeme geometrischer Größen, die aktual unendlich kleine oder große Elemente enthalten, und in der Tat ist es notwendig, solche Systeme auszuschließen, wenn man die Lehre von den Proportionen, die ja schließlich, wie oft betont, nichts als eine andere Form der modernen Theorie der Irrationalzahlen ist, begründen will. Euklid (oder wohl schon Eudoxus) macht also hier — das ist das Bewunderungswerte — im Grunde nichts anderes, als was man in den modernen Untersuchungen des Zahlbegriffes tut, und er macht es sogar mit genau denselben Hilfsmitteln.

Wir werden die Tragweite des hier in Rede stehenden Axioms am besten erkennen, wenn wir uns ein ganz *konkretes, ihm nicht genügendes System geometrischer Größen* einmal vor Augen führen, das besonders auch darum interessant ist, weil es bereits im Altertum und Mittelalter wohl

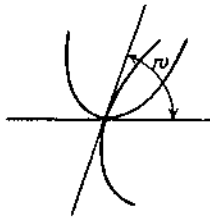


Abb. 137.

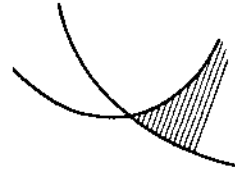
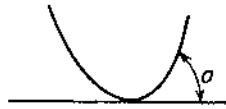


Abb. 138.

bekannt und vielfach umstritten war. Ich meine hier die sogenannten *hornförmigen Winkel*, das sind *Winkel zwischen Kurven* in einer gewissen allgemeinen Auffassung. Wenn wir heute von Winkeln reden, so denken wir stets an Winkel zwischen geraden Linien, und insbesondere verstehen wir unter dem Winkel zweier Kurven nichts als den Winkel ihrer *Tangenten* (Abb. 137); der Winkel einer Kurve, z. B. eines Kreises mit seiner eigenen Tangente, ist dann stets Null. Solcherweise bilden alle Winkel bekanntlich ein gewöhnliches „archimedisches“ Größensystem, auf das man die euklidische Verhältnislehre anwenden kann, das also mit anderen Worten durch die einfache Reihe der reellen Zahlen gemessen wird.

Im Gegensatz dazu versteht man (vgl. Abb. 138) unter dem *hornförmigen Winkel zweier Kurven* das von den Kurven selbst in der Nähe ihres Schnittes (oder Berührungspunktes) *eingeschlossene Flächenstück*, und wir wollen nun sehen, wie diese Definition zu einem *nichtarchimedischem, d. h. jenem Axiom nicht genügendem Größenbegriff* Anlaß gibt. Wir wollen uns dabei auf Winkel beschränken, deren *einer Schenkel eine feste Gerade* (die  $x$ -Achse) ist, und deren Scheitel im Nullpunkt  $O$  liegt; der andere Schenkel ist ein Kreis (oder unter Umständen auch eine Gerade), der in  $O$  die  $x$ -Achse schneidet oder berührt (Abb. 139). Man wird dann ganz naturgemäß denjenigen von 2 hornförmigen Winkeln den *kleineren* nennen, dessen *freier Schenkel beim Zuschreiten auf  $O$  schließlich unterhalb*

des Schenkels des anderen bleibt, d. h. der dabei schließlich das schmalere Flächenstück begrenzt. Danach wird z. B. der Winkel eines *berührenden* Kreises stets kleiner sein als der eines *schneidenden* Kreises oder einer Geraden, und von 2 berührenden Kreisen wird der mit *größerem* Radius den *kleineren* Winkel bilden, da er unterhalb des anderen verläuft. Es ist klar, daß solcherweise für je 2 unserer hornförmigen Winkel bestimmt ist, welcher von ihnen der kleinere und welcher der größere ist, die Gesamtheit der hornförmigen Winkel ist, wie man heute

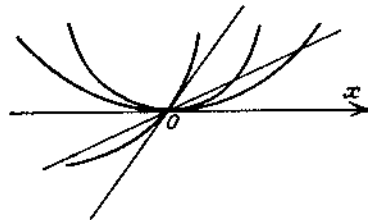


Abb. 139.

in der Mengenlehre sagt, nach ihrer Größe „*einfach geordnet*“ — genau wie es auch ja die Gesamtheit der gewöhnlichen reellen Zahlen ist.

Um nun aber den charakteristischen Unterschied zwischen diesen beiden Mengen zu erkennen, müssen wir Genaueres über die *Messung der hornförmigen Winkel* festsetzen.

Das erste ist, daß wir den Winkel einer *Geraden* durch *O* im *gewöhnlichen Winkelmaße* messen; dann ist jeder Winkel  $a$  eines die  $x$ -Achse berührenden Kreises nach der Definition kleiner als jeder noch so kleine, von Null verschiedene geradlinige Winkel, und das bereits kann im gewöhnlichen Zahlenkontinuum für ein von Null verschiedenes  $a$  nicht vorkommen und charakterisiert  $a$  als „*aktuell unendlich klein*.“

Um das im Zusammenhange mit dem archimedischen Axiom zu verfolgen, müssen wir zunächst noch auch für diese krummlinigen Winkel die *Multiplikation mit einer ganzen Zahl* definieren. Betrachten wir zunächst einen in *O* berührenden Kreis vom Radius  $R$ , so liegt es nahe,

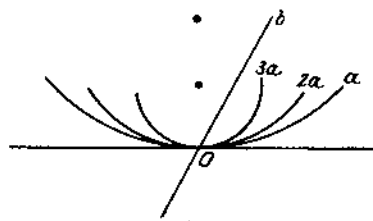


Abb. 140.

dem berührenden Kreise mit dem Radius  $\frac{R}{n}$  den  $n$ -fachen Winkel zuzuschreiben; tatsächlich fügt sich das der obigen Definition insofern ein, als nach ihr die Winkel der berührenden Kreise mit den Radien  $R, \frac{R}{2}, \frac{R}{3}, \dots$  immer

größer werden. Es entstehen so durch

Multiplikation mit einer ganzen Zahl aus dem Winkel  $a$  eines berührenden Kreises stets wieder Winkel *berührender* Kreise, und alle Vielfachen  $na$  bleiben unserer Definition zufolge notwendig kleiner als etwa der Winkel  $b$  einer festen schneidenden Geraden — wie groß man auch  $n$  nimmt (vgl. Abb. 140). Also ist das *archimedische Axiom tatsächlich nicht befriedigt*: die Winkel der berührenden Kreise sind demgemäß als *aktuell unendlich klein* gegenüber dem Winkel einer schneidenden Geraden *aufzufassen*. Was die *allgemeine Addition* zweier solcher Winkel anlangt, so wird man sie gemäß



der gegebenen Definition der Multiplikation mit ganzen Zahlen so vollziehen, daß man die reziproken Werte der Radien addiert, die überhaupt als Maßzahlen der aktual unendlich kleinen Winkel dienen werden.

Haben wir nun einen *beliebigen Kreis durch O* (vgl. Abb. 141); so können wir seinen Winkel als Summe des Winkels seiner Tangente gegen die  $x$ -Achse (im gewöhnlichen Sinne gemessen) und seines eigenen aktual unendlich kleinen Winkels gegen die Tangente im soeben definierten Sinne auffassen, man kann dann Addition und Multiplikation auf die einzelnen Summanden werfen und hat so das Operieren mit hornförmigen Winkeln vollständig begründet. In diesem Gebiete gilt aber das archimedische Axiom nicht; und man kann es daher nicht mit „Logoi“ oder gewöhnlichen reellen Zahlen behandeln. Vermutlich war das Euklid bzw. Eudoxus wohlbekannt, und er schloß völlig bewußt solche Größen-systeme durch sein Axiom aus.

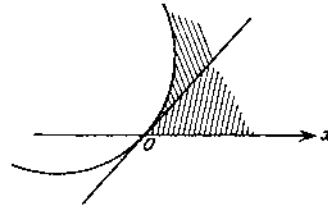


Abb. 141.

Mit modernen Hilfsmitteln kann man das Gebiet dieser hornförmigen Winkel wesentlich *ausdehnen*, wobei sich die Definitionen noch erweitern und zugleich vereinfachen, wenn man nämlich *alle analytischen Kurven durch O* in Betracht zieht. Jede solche Kurve wird durch eine Potenzreihe dargestellt:

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \dots, \quad y_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x^3 + \dots$$

Wir werden nun sagen, daß der Winkel der Kurve 1 gegen die  $x$ -Achse größer oder kleiner ist als der von 2, je nachdem  $\alpha_1 > \alpha_2$  oder  $\alpha_1 < \alpha_2$ ; ist aber  $\alpha_1 = \alpha_2$ , so lassen wir in erster Linie  $\beta_1 \geq \beta_2$ , wenn aber auch  $\beta_1 = \beta_2$ , so  $\gamma_1 \geq \gamma_2$  entscheiden usw. Es ist klar, daß wir so die *Winkel aller analytischen Kurven in eine bestimmte einfach geordnete Reihe* gebracht haben, in der offenbar auch die Kreise in der oben definierten Anordnung enthalten sind.

Nun wird man einfach als das  $n$ -fache des Winkels der Kurve 1 gegen die  $x$ -Achse den Winkel der durch die mit  $n$  multiplizierte Reihenentwicklung  $n \cdot y_1 = n\alpha_1 x + n\beta_1 x^2 + \dots$  gegebenen Kurve bezeichnen können; vorhin mußten wir eine kompliziertere Operation anwenden, um nicht aus dem Gebiet der Kreise herauszukommen, nämlich den berührenden Kreis mit dem Radius  $R$ , dessen Reihenentwicklung:

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \dots$$

ist, durch denjenigen mit dem Radius  $\frac{R}{n}$ :

$$y = n \frac{x^2}{2R} + n^3 \frac{x^4}{8R^3} + \dots$$

ersetzen, was nur im ersten Glied der Reihenentwicklung wirklich Multiplikation mit  $n$  darstellt. Aber auch nach der neuen einfacheren Definition

haben wir wiederum ein nichtarchimedisches Größensystem: Eine Kurve, deren Entwicklung erst mit  $x^2$  beginnt ( $\alpha_2 = 0$ ), wird nach Multiplikation mit noch so großem  $n$  stets einen kleineren Winkel bilden als eine mit nicht verschwindendem  $\alpha_1$ . Wir haben hier im Grunde nur das in etwas anschaulicherer Form wiederholt, was wir schon in Band I <sup>1)</sup> gemacht hatten. In der Potenzentwicklung:

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

spielen bei dieser Deutung die sukzessiven Potenzen  $x, x^2, x^3, \dots$  einfach die Rolle aktual unendlich kleiner Größen von verschiedener, immer ansteigender Ordnung.

Es ist nun interessant, daß man die Folge der hornförmigen Winkel noch weiterhin verdichten kann, indem man *gewisse nichtanalytische Kurven* hinzunimmt; nur dürfen sie, um eine Größenvergleichung zu gestatten, nicht unendlich oft oszillieren oder, genauer gesagt, keine analytische Kurve unendlich oft schneiden. Es mag genügen, wenn ich hier

als einziges Beispiel die Kurve  $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$  hervorhebe; sie hat bekanntlich die Eigenschaft, daß alle ihre Differentialquotienten bei  $x = 0$  verschwinden (so daß sie daselbst überhaupt in keine Potenzreihe entwickelbar ist), und daher verläuft sie schließlich *unterhalb* jeder analytischen Kurve. Trotzdem wir also vorhin schon eine überaus dichte Folge hornförmiger Winkel hatten, haben wir einen *neuen hornförmigen Winkel, der mitsamt seinen endlichen Vielfachen kleiner ist als jeder Winkel einer analytischen Kurve!*

Wir wollen damit diese Betrachtungen und überhaupt unser Studium des Euklid abschließen; ich fasse nur noch zum Schluß das *Urteil über Euklids Elemente*, das wir in allen diesen Erörterungen gewonnen haben, in einige Sätze zusammen:

1. Die *große historische Bedeutung* von Euklids Elementen besteht darin, daß durch sie das *Ideal einer lückenlos logischen Behandlung der Geometrie* den kommenden Zeiten überliefert wurde.

2. Was die *Ausführung* angeht, so ist *vieles sehr fein* gemacht, *vieles andere aber bleibt prinzipiell durchaus hinter unserem heutigen Standpunkte zurück*.

3. Zahlreiche *Einzelheiten wichtiger Art*, namentlich am Anfange des ersten Buches, bleiben wegen Unsicherheiten des Textes *zweifelhaft*.

4. Die ganze Entwicklung erscheint häufig *unnötig schwerfällig*, da Euklid *keine fertige Arithmetik* zur Hand hat.

5. Überhaupt erschwert die *einseitige Betonung des Logischen* das Verständnis des Gesamtinhaltes und seines inneren Zusammenhanges.

Unsere eigene Stellungnahme zur Grundlegung der Geometrie will ich weiterhin noch charakterisieren, indem ich zwei

<sup>1)</sup> Teil I, S. 235 f., wo jene Größen verschiedener Ordnung  $\eta, \zeta, \dots$  heißen.

Auffassungen, die bereits an verschiedenen Stellen zur Geltung kamen, hier noch einmal zusammenstelle.

Die eine knüpft an die Tatsache an, daß wir auf gänzlich verschiedenen Wegen die Geometrie aufbauen konnten. Zwei davon haben wir ausführlicher betrachtet. Der eine Aufbau stellte den Begriff der Bewegungsgruppe und speziell der Translationsgruppe voran, der andere begann mit den Kongruenzaxiomen und schob den Parallelismus an sehr viel spätere Stelle. Diese Gegenüberstellung läßt die Freiheit, die wir in der axiomatischen Fundamentierung der Geometrie haben, so recht hervortreten. Und eben darauf sei hier nochmals ganz besonders der Ton gelegt angesichts unduldsamer Äußerungen, denen man in dieser Frage vielfach begegnet und die darauf abzielen, den einen oder anderen dem Geschmack des Autors besonders zusagenden Grundbegriff als den *absolut* einfachsten und allein zur Fundierung der Geometrie verwendbaren in Anspruch zu nehmen. Tatsächlich ist doch die Quelle aller geometrischen Grundbegriffe und Axiome die naive geometrische Anschauung. Aus ihr schöpfen wir die Daten, die wir in geeigneter Idealisierung der logischen Behandlung zugrunde legen. Welche Auswahl aber dabei zu treffen ist, darüber kann es eine *absolute* Entscheidung nicht geben, und die hier Platz greifende Freiheit findet nur eine Schranke in der einen Forderung, daß das System der Axiome seinen Zweck auch wirklich erfüllt, d. h. daß es den Aufbau der Geometrie lückenlos gewährleistet.

Eine weitere Anmerkung betrifft unsere Stellungnahme zur analytischen Geometrie und unsere Kritik an gewissen Traditionen von Euklid her, die dem Stande der mathematischen Wissenschaft längst nicht mehr angepaßt sind und die darum auch der Schulunterricht endlich aufgeben sollte. Bei Euklid ist die Geometrie vermöge ihrer Axiome die strenge Grundlage der allgemeinen Arithmetik, die auch das Irrationale umfaßt. In dieser Hörigkeitsstellung zur Geometrie ist die Arithmetik bis ins 19. Jahrhundert verblieben, aber seitdem ist eine völlige Wandlung eingetreten. Heute hat gerade die Arithmetik als eigentliche Grunddisziplin die Vorherrschaft erlangt. Und das ist ein Faktum, dem bei dem Aufbau der wissenschaftlichen Geometrie Rechnung getragen werden sollte, d. h. die Geometrie sollte an die Ergebnisse der Arithmetik anknüpfen. In diesem Sinne will die Stellung zur analytischen Geometrie gewürdigt sein, die wir bei unserer Grundlegung annehmen, wie wir uns denn überhaupt grundsätzlich der Hilfsmittel der Analysis bei der Behandlung der Geometrie bedient haben.

Wir wollen damit die Erörterungen über die Theorien der reinen Geometrie beenden, die Ihnen hoffentlich den erwünschten Überblick über dies ganze Gebiet verschafft haben, soweit es zu den Bedürfnissen der Schule nur irgend Bezug hat. Und nun wollen wir zum Schluß, wie ich es ja schon ankündigte, im Zusammenhange noch ein wenig von dem geometrischen Unterricht handeln.

## Schlußkapitel.

### Einiges über den Unterricht in der Geometrie.

Hierbei wird die Darstellung naturgemäß einen wesentlich *historischen Charakter* erhalten, viel mehr noch als bei den entsprechenden Erörterungen im ersten Bande; denn die Geometrie kann entsprechend ihrem ehrwürdigen Alter als Wissenschaft auch auf eine so alte Tradition als Unterrichtsfach zurückblicken, wie keine der früher besprochenen Disziplinen. Ist diese Tradition nach der einen Seite hin ein Vorzug, so birgt sie doch in anderer Hinsicht schwere Gefahren. In der Tat *krankt der geometrische Unterricht heute geradezu an der Last der Überlieferung*, denn in ihn haben sich viele nicht mehr lebensfähige Bestandteile jetzt so fest eingenistet, daß sie schwer zu beseitigen sind und sogar das Herankommen neuer gesunder Gebiete auf jede Weise erschweren.

Wollen wir die heutige Gestaltung<sup>1)</sup> des geometrischen Unterrichts verstehen, so müssen wir auf die Zeit des Wiedererwachens wissenschaftlicher Betätigung, die *Renaissance*, im weitesten Sinne gefaßt (von 1200 an), zurückgehen. Damals war es selbstverständlich, daß man an die Alten anknüpfte und besonders *die Elemente des Euklid* als Einleitung in die Geometrie studierte. Dazu nahm man noch die sonstigen Bestandteile der Geometrie der Alten, die man besaß, also in erster Linie die *Berechnung von  $\pi$  durch Archimedes*, die *Kegelschnittlehre des Apollonius*, endlich das Interesse an den *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal*, das auf die *Platonische Schule* zurückgeht. Dieser geometrische Stoff ist natürlich äußerst *einseitig gewählt*; nicht nur die Pflege der Anwendungen, sondern auch die Ausbildung der Raumanschauung ist ganz zurückgedrängt und ausschließlich die abstrakt logische Seite geometrischer Deduktion berücksichtigt. Nun ist aber das Merkwürdige, daß nicht nur der Forscher, der Gelehrte so Geometrie trieb, sondern daß sich die Ansicht bildete, Euklids Elemente seien ein für den ersten Unterricht geeignetes Schulbuch! Mag diese Verwechs-

---

<sup>1)</sup> Ergänzungen zu der folgenden bereits 1908 geschriebenen Darstellung bringt der Zusatz 2 am Ende des vorliegenden Buches.

lung damals auch nahe gelegen haben, da man nichts anderes als den Euklid hatte, Euklids eigener Meinung entspricht sie sicher nicht, denn die Elemente sind — das kann man nicht oft genug betonen — aus Universitätsvorlesungen hervorgegangen und sind nichts weniger als ein Lehrbuch für zehnjährige Knaben. Und doch hat dieses Mißverständnis bis zur heutigen Zeit wesentlich nachgewirkt, wie wir noch vielfach sehen werden.

Fragen wir uns zunächst einmal, was für *Anforderungen* heute an *einen gesunden geometrischen Schulunterricht* zu stellen sind. Jedermann gibt gewiß zu, daß da

1. *die psychologischen Gesichtspunkte* wesentlich maßgebend sein müssen. Der Unterricht kann nicht nur vom Stoff abhängen, sondern es kommt vor allem auch auf das *Subjekt* an, das man zu unterrichten hat; man wird ein und dieselbe Sache einem sechsjährigen Knaben anders darstellen als einem zehnjährigen, und diesem wiederum anders als einem gereiften Manne. Insbesondere auf die Geometrie angewandt, heißt das: man wird *auf der Schule stets zuerst an die lebhafteste konkrete Anschauung anknüpfen* müssen und *erst allmählich logische Elemente* in den Vordergrund bringen können; überhaupt wird sich die *genetische Methode allein als berechtigt* erweisen, die den Schüler langsam in die Dinge hineinwachsen läßt.

2. Was die *Auswahl des Stoffes* anlangt, so werden wir aus dem Gesamtgebiet der reinen und angewandten Geometrie solche Stücke herauszunehmen suchen, die dem *Zweck der Geometrie im Rahmen des gesamten Unterrichts* zu entsprechen scheinen, ohne uns dabei von historischen Zufälligkeiten beeinflussen zu lassen. Es ist nicht unnötig, allgemeine Forderungen dieser Art immer wieder aufzustellen; denn wenn sie auch jeder theoretisch zuzugeben geneigt ist, werden sie doch oft genug in der Praxis nicht befolgt.

3. Hinsichtlich des *allgemeinen Unterrichtszweckes* kann ich hier auf die feineren Nuancierungen zwischen den einzelnen Schularten nicht eingehen. Es genüge zu betonen, daß er außerordentlich von der jeweiligen *Kulturrichtung der Zeitepoche* abhängt; und wir reden gewiß keinem flachen Utilitarismus das Wort, wenn wir als Zweck der modernen Schule bezeichnen, *weite Kreise moralisch und geistig tüchtig zu machen zur Mitwirkung an der im wesentlichen auf praktische Betätigung gerichteten heutigen Kulturarbeit*. Daher erweist sich speziell für den mathematischen Unterricht eine *immer stärkere Berücksichtigung der Naturwissenschaften und der Technik* als nötig.

4. Eine *bestimmte Stoffauswahl* kann ich natürlich nicht bieten; nur der praktische Schulmann kann sie treffen, der selbst reiche Erfahrung im Unterrichten hat. Die gegenwärtige Vorlesung soll, wie ich schon oft betonte, einer solchen Auswahl insofern vorarbeiten, als sie Ihnen in Gestalt eines *Überblickes über die gesamte reine Geometrie* auch

von dieser Seite her das Material an die Hand gibt, das Sie später zu einem eigenen sachverständigen Urteil über diese Frage befähigt.

5. Nur einen nützlichen methodischen Gesichtspunkt möchte ich hier noch hervorheben, nämlich die schon öfters erwähnte Tendenz der *Fusion des planimetrischen und stereometrischen Unterrichts*, die eine einseitige Ausbildung in der Planimetrie unter Vernachlässigung der dreidimensionalen Raumschauung verhindern will. Und im selben Sinne ist auch weiterhin eine *Fusion der Arithmetik und Geometrie* zu verlangen: Ich meine nicht, daß diese Gebiete völlig verschmolzen werden sollen, aber sie sollten doch nicht so scharf getrennt werden, wie das heute an der Schule wohl vielfach geschieht. Der ganze Gang dieser und der vorigen Vorlesung zeigt ja, wie ich das aufgefaßt wissen möchte.

Messen Sie nun an diesen Gedanken und Forderungen die *wirkliche Schulpraxis*, so wird sie vielfach durchaus nicht befriedigen können. Freilich ist es schwer, ein allgemeines Urteil abzugeben, da selbst innerhalb eines und desselben Landes von Anstalt zu Anstalt, ja fast von Lehrer zu Lehrer nicht ein und dieselbe Praxis herrscht; aber ich denke doch, daß ich einige wenige im großen Durchschnitt richtige Züge festhalten kann, wenn sich auch jeder einzelnen Ausstellung gegenüber gewiß zahlreiche Fälle aufweisen lassen, wo sie durchaus nicht zutrifft.

1. Vor allem glaube ich, daß die *Fusion der verschiedenen Gebiete* heutzutage im Unterricht zu wenig durchgeführt ist; ich will das durch einige Einzelheiten belegen, die Sie vielleicht selbst noch in lebendiger Erinnerung haben:

a) Das *Projizieren und Zeichnen* räumlicher Figuren, das gewiß etwas äußerst Wichtiges ist, kommt im heutigen geometrischen Unterricht nicht recht zur Geltung. Es wird wohl äußerlich dem Lehrgang angeheftet, aber nicht innerlich mit ihm verschmolzen. Damit hängt zusammen, daß das, was man „*Geist der neueren Geometrie*“ nennt, im Unterricht nicht die gebührende Stellung einnimmt, ich meine die *Idee der Beweglichkeit einer jeden Figur*, durch die jedesmal über den speziellen Fall hinaus der allgemeine Charakter der geometrischen Gebilde erfaßbar wird. Wohl hat man einzelne Kapitel der „*neueren Geometrie*“, wie die Lehre von den harmonischen Punkten und den Transversalen, in den Lehrgang aufgenommen, aber das, was ihre eigentliche Methode hier mit einem Blick zu fassen gestattet, stellt man gewöhnlich in der starren euklidischen Manier, in zahlreiche Fallunterscheidungen zerlegt, dar.

b) Die *Geometrie und Arithmetik* hält man auf der Schule gewöhnlich unnatürlich getrennt voneinander; ein lehrreiches Beispiel ist die oben (S. 208) schon erwähnte *Behandlung der Proportionen*, die man zuerst arithmetisch und dann — häufig gar noch ohne Bezugnahme auf den vorangegangenen Lehrgang — in geometrischer Form durchnimmt.

c) Die *analytische Geometrie* mit dem Grundsatz, daß eine Funktion  $y = f(x)$  eine Kurve darstellt, ist gewiß der Auffassung der Knaben schon auf früher Stufe zugänglich, und sie könnte und sollte von da an den ganzen geometrischen Unterricht durchdringen. Statt dessen wird sie als neuer getrennter Aufbau auf die fertige Geometrie aufgesetzt, und wenn man die Kegelschnitte einmal „synthetisch“ (im Sinne der Alten!) behandelt hat, wird nun gezeigt, wie sich mit Hilfe einer „neuen Disziplin“, der analytischen Geometrie, die Sache viel einfacher machen läßt. Die tiefere Auffassung der modernen Geschichtsforschung, daß bereits bei Apollonius die Ideen der analytischen Geometrie im Grunde vorhanden waren, kommt dabei freilich auch nicht zur Geltung.

2. Ich möchte nun einen Blick darauf werfen, was für *wissenschaftliche Folgen* dieses Beharren des Unterrichts in der historisch gegebenen Trennung der einzelnen Gebiete gehabt hat. Natürlich gibt die Elementargeometrie auch in ihrer von mir beklagten historischen Begrenzung zu wissenschaftlichen Problemen vielfach Anlaß. Was Literatur anlangt, möchte ich nur auf *Max Simons* Referat „Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert“<sup>1)</sup> verweisen, andererseits aber neben meiner kleinen Schrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“<sup>2)</sup> die interessante Sammlung von *F. Enriques* nennen: „*Questioni riguardanti la geometria elementare*“<sup>3)</sup>, die auch in deutscher Bearbeitung unter dem Titel „*Fragen der Elementargeometrie*“<sup>4)</sup> in 2 Bänden erschienen ist; endlich wäre noch die „*Theorie der geometrischen Konstruktionen*“<sup>5)</sup> von *A. Adler* hervorzuheben.

Ich kann auf die positive Seite der hier einsetzenden interessanten Probleme leider nicht eingehen, muß mich vielmehr darauf beschränken, einige *arge Mißstände* hervorzuheben, die sich *infolge der isolierten Stellung der Elementargeometrie* fern von der allgemeinen Entwicklung der Mathematik herausgebildet haben. Man hat da einzelne Gebiete weit ausgesponnen und auch in den Schulunterricht eingeführt, die von einem höheren Standpunkte aus nur von sehr geringem Interesse sind.

a) In dieser Hinsicht habe ich zuerst die auf der Schule als *algebraische Geometrie* bezeichnete Disziplin zu nennen, die Stücke des Dreiecks oder anderer Figuren erst zu berechnen und dann gesondert für sich zu konstruieren lehrt. Sie haben einen Maßstab für die Wertung dieser Gebiete, wenn Sie sich fragen, ob Sie sie jemals im Hochschul-

<sup>1)</sup> Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. Ergänzungsband I. Leipzig 1906.

<sup>2)</sup> Ausgearbeitet von *F. Tägert*. Leipzig 1895.

<sup>3)</sup> Bologna 1900. [3. Aufl. 1924.]

<sup>4)</sup> Bd. I: Prinzipien der Geometrie. Deutsch von *H. Thieme*. Leipzig 1911. [2. Aufl. 1923]. Bd. II: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Deutsch von *H. Fleischer*. Leipzig 1907. [2. Aufl. 1923.]

<sup>5)</sup> Sammlung Schubert 52. Leipzig 1906.

unterricht benutzt haben oder hätten benutzen können. Gewiß nicht; es handelt sich hier eben um ein Seitenästchen, das nur um seiner selbst willen künstlich gepflegt wurde und niemals mit andern Zweigen der Wissenschaft in lebendige Wechselwirkung getreten ist.

b) Berühmt ist auch das Gebiet der *Dreieckskonstruktionen*. Daß man überhaupt Figuren konstruiert, ist sehr schön und nützlich, und ich empfehle gewiß immer die Benutzung graphischer Verfahren auf allen Gebieten. Sie haben gerade hier in Göttingen in *Runges* Vorlesungen über graphische Methoden die beste Gelegenheit, die zahlreichen in neuerer Zeit entwickelten äußerst sinnreichen Verfahren kennenzulernen<sup>1)</sup>. Aber um solche allgemein wichtige und interessante Dinge handelt es sich auf der Schule nicht; da beschränkt man sich vielmehr ganz überwiegend auf *Konstruktion von Dreiecken*, und noch dazu auf Aufgaben, die mit *Zirkel und Lineal* lösbar sind. Bekanntlich erhält man eine große Mannigfaltigkeit solcher zum Teil recht schwieriger Aufgaben, wenn man die drei gegebenen Stücke des Dreiecks auf die verschiedenste und — wie man wohl gesagt hat — „auf möglichst unzweckmäßige Weise“ wählt. Freilich legt man auf die wirkliche Ausführung der Konstruktionen, die man so findet, vielfach gar keinen Wert, und tatsächlich sind sie infolge der künstlichen Beschränkung der Hilfsmittel für die Praxis meist auch viel zu kompliziert. Nun sind ja gewiß auch theoretisch sehr interessante tiefe Fragen mit solchen Konstruktionen verknüpft, wie sie etwa in dem genannten Werke von *Enriques* behandelt werden oder wie sie an einigen Beispielen auch im ersten Band dieses Werkes von uns erörtert worden sind<sup>2)</sup>: ich meine die algebraischen Unmöglichkeitbeweise, die zeigen, warum man bei gewissen Konstruktionen (z. B. der Konstruktion der regulären Siebenecks oder der Dreiteilung des beliebigen Winkels) gerade *nicht* mehr mit *Zirkel und Lineal* durchkommt. Davon aber ist auf der Schule oft auch nicht andeutungsweise die Rede, und von da aus setzt sich leider immer aufs neue bei vielen Leuten die Überzeugung fest, jede geometrische Aufgabe müsse sich mit *Zirkel und Lineal* durchführen lassen. Darin ist wohl auch der Grund zu suchen, daß jene große Schar der Kreisquadrierer und Winkeltrisezierer, von denen ich Ihnen schon im vorigen Semester sprach, niemals ausstirbt.

c) Endlich habe ich noch die sogenannte *Dreiecksgeometrie* zu nennen, das ist die Lehre von den „merkwürdigen“ Punkten und Geraden des Dreiecks, die ganz besonders innerhalb der Schulmathematik als selbständige Disziplin ausgebildet worden ist; auch hier werden Sie mir

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. *C. Runge*, Graphische Methoden. 2. Aufl. Leipzig 1919 (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher 18) und *H. v. Sanden*, Praktische Analysis. Leipzig 1914 (Handbuch der angewandten Mathematik 1).

<sup>2)</sup> Siehe Teil I, S. 54 ff. (Siebeneck), S. 122 ff. (Trisektion).



bestätigen, daß dies Gebiet in demselben Maße, wie es im Schulunterricht im Vordergrund zu stehen pflegt, bei weitergehenden Studien zurücktritt. Wir haben ja früher schon erläutert, in welche Ecke der projektiven Geometrie diese Dreiecksgeometrie einzuordnen ist (vgl. S. 170 f.): Es handelt sich um die Invariantentheorie derjenigen ebenen Figur, welche aus drei beliebigen Punkten und den beiden imaginären Kreispunkten ihrer Ebene gebildet ist, also tatsächlich um etwas durchaus Partikuläres. —

Wollen wir nun aber über diese allgemeine Kritik hinaus Näheres über die gegenwärtige Gestaltung des geometrischen Unterrichts sagen, so müssen wir die Entwicklung in den einzelnen Ländern getrennt behandeln, da sie sich natürlich überall ganz verschieden gestaltet hat; wir können hier freilich nur die wichtigsten Kulturländer, etwa England, Frankreich, Italien und Deutschland, durchsprechen.

### I. Der Unterricht in England.

In England stand man am längsten im Banne der mittelalterlichen Euklidtradition, die dort zum Teil auch noch heute nachwirkt. Diese Sachlage wird durch die Organisation der englischen *Examina* bedingt. Das schöne Prinzip, daß man unabhängig vom Examen lernen soll, wird ja wie so viele andern schönen Prinzipien leider nirgendwo befolgt. In England herrscht dazu das merkwürdige *System des streng zentralisierten Examens bei sonst völlig unabhängiger, privater Organisation der einzelnen Schulen*. Es ist gerade umgekehrt wie bei uns: Bei uns wird an jeder einzelnen Schule der Schüler von den Lehrern geprüft, die ihn genau kennen, und dabei soll seiner Individualität weitgehend Rücksicht getragen werden. Dafür haben wir aber einheitliche Lehrpläne, die hinsichtlich des Stoffes und der Gestaltung des Unterrichts für alle Schulen bestimmte allgemeine Richtlinien vorschreiben. Demgegenüber sind in England die einzelnen Schulen private Institutionen, die an sich fast vollständige Bewegungsfreiheit haben und ihrer ganzen Organisation nach heterogenster Art sind. Aber *prüfen* dürfen sie ihre Schüler selbst nicht. Vielmehr besteht das Prinzip, daß der Examinator den Prüfling nicht kennt, ja nicht einmal sieht, sondern daß er ganz schematisch lediglich seine schriftliche Leistung beurteilt und daß deren Ausfall allein das Examen entscheidet. In London, Cambridge und Oxford befinden sich die großen Examenskommissionen, die die Absolventen des ganzen Landes prüfen. Von London aus werden z. B., wie mir einer der Hauptexaminatoren berichtete, 24 000 Schüler jährlich geprüft, und sie alle erhalten dieselben Aufgaben, dieselben Fragen. Der Examinator hat zur Durchsicht dieser Aufgaben 30 Assistenten, von denen jeder also noch 800 mal dieselbe Arbeit zu korrigieren hat. Natürlich fände sich zu dieser Arbeit niemand, wenn sie nicht sehr gut bezahlt würde.

Im mathematischen Unterricht ist nun ein solches eigentümliches Verfahren nur möglich, wenn es ein „*standard-work*“ gibt, das jeder Examinand kennt und das der Examinator seinen Fragen zugrunde legen kann; als solches Normalbuch fungieren in England von alters her, was Geometrie angeht, die *Euklidischen Elemente*. Es ist verständlich, daß sich bei einem solchen System ein und dasselbe Werk und damit ein und dieselbe Unterrichtsart so lange wesentlich unverändert erhalten mußte, wie denn überhaupt bei ihm eine Reform mit den größten Schwierigkeiten verknüpft ist. Denn die Examinationsbehörde kann von sich aus den Unterrichtsbetrieb im ganzen Lande nicht reorganisieren, da sie keinerlei offiziellen Einfluß auf ihn hat, und andererseits ist es ihr bei ihrem Massenbetriebe schwer möglich, auf abweichende Verhältnisse einer einzelnen Schule Rücksicht zu nehmen, die etwa selbständige Versuche mit neuen Unterrichtsmethoden vornehmen wollte.

Sehen wir uns nun einmal einen solchen *englischen Schuleuklid* an. Ich habe hier die Ausgabe von *R. Potts*<sup>1)</sup>, die in den letzten Jahrzehnten besondere Verbreitung gefunden hat. Sie enthält lediglich — das ist charakteristisch — die Bücher 1–6 (Planimetrie) sowie 11, 12 (Anfänge der Sterometrie und Exhaustionsmethode), und zwar alles in wortgetreuer Übersetzung. Diesem Stoff sind erklärende und zum Teil historische Noten sowie Aufgaben angefügt. Es fehlen also aus den Elementen die arithmetischen Bücher 7–9, die Klassifikation der Irrationalitäten in 10 und die regulären Körper in 13. Dieser Stoff wird nun traditionellerweise in den englischen Schulen mehr oder minder auswendig gelernt, damit er im Examen jedem zur Hand ist. *Perry* machte zur Charakteristik dieser Methode einmal die amüsante Bemerkung: „Wie gesund muß die englische Natur sein, daß sie durch die Jahrhunderte eine so ungeeignete Erziehungsmethode ertragen hat.“ Nun hat man freilich auch die Notwendigkeit empfunden, die moderne, über Euklid weit hinausgehende Forschung zu berücksichtigen. Das tat man aber, indem man sie gewaltsam in die starre euklidische Form preßte, wobei natürlich ein guter Teil des modernen Geistes verlorengeht. Als Beispiel der so entstandenen sogenannten „*sequels to Euclid*“ lege ich Ihnen hier das Buch von *J. Casey*<sup>2)</sup> vor, das die Anfangslehren der projektiven Geometrie in dieser Art behandelt.

Natürlich blieb eine *Gegenwirkung* gegen dieses erstarrte System nicht aus; sie knüpfte an eine 1869 von dem großen englischen Mathematiker *Sylvester* gegebene Anregung an und führte 1874 zur Gründung einer *Association for the improvement of geometrical teaching*. Diese Gesellschaft hat lange gearbeitet, bis sie endlich zur Herausgabe eines

<sup>1)</sup> Euclid, elements of geometry. London 1869.

<sup>2)</sup> A sequel to the first 6 books of the elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry. Dublin 1900.

neuen Normalbuches, der *Elements of plane geometry*<sup>1)</sup>, gelangte. Das ist im wesentlichen lediglich eine etwas abgeglichenere und geglättete Bearbeitung der ersten 6 Bücher der Euklidischen Elemente. So sind z. B. die Unebenheiten am Anfang des ersten Buches, die wir beklagten, beseitigt, indem der Bewegungsbegriff konsequent vorangestellt wird. Im allgemeinen aber ist die Reihenfolge und Stoffbegrenzung des Euklid beibehalten, eben wieder in Rücksicht auf das Examen. Es ist also nur eine ziemlich zahme Reform, die hier versucht wird, aber trotzdem hat sie bei den Anhängern des alten euklidischen Systems scharfen Widerspruch gefunden. Als Beleg dafür zeige ich Ihnen ein wenigstens recht amüsanter geschriebenes Buch von *Dodgson*: „*Euklid and his modern rivals*“<sup>2)</sup>. Hier geht der Verfasser scharf mit der Assoziation ins Gericht, in wörtlichem Sinne; denn er läßt keinen Geringeren als den Höllenrichter Minos auftreten, vor dem sich Euklid und seine modernen Rivalen, das sind die Verfasser neuerer Lehrbücher, allen voran *Legendre*, verteidigen. Aber Euklid allein schneidet gut dabei ab, während die anderen und besonders die Euklidverbesserer der Assoziation mit ihren Argumenten bald am Ende sind.

Ich kann auf Einzelheiten hier unmöglich eingehen und möchte nur auf einen Umstand von allgemeinerer Bedeutung verweisen, der auch für die Literatur der anderen Länder Geltung hat. Ein großer Teil der Leute, die über Unterrichtsfragen schreiben, kennt nämlich fast ausschließlich die Schulliteratur des *eigenen* Landes und hat keine Ahnung weder von parallelen Bestrebungen in *anderen* Ländern, noch von den Fortschritten der reinen *Wissenschaft* auf den in Betracht kommenden Gebieten, hier also in den Grundlagen der Geometrie. Man sieht das so recht bei *Dodgson*, bei dem mit Ausnahme von *Legendre* (der eine Sonderstellung einnimmt) lediglich englische Schulschriftsteller genannt werden und auf Fortschritte der wissenschaftlichen Erforschung der Grundlagen gar keine Rücksicht genommen wird. Man kann diese Beobachtung oft machen; vergleichende Betrachtungen über den Unterricht bei den verschiedenen Nationen, wie wir sie hier anstellen, sind noch lange nicht genügend verbreitet.

Eine viel größere Wirkung als die Bewegung der Assoziation hat eine *andere Reformaktion* von, man könnte geradezu sagen, revolutionärem Charakter gehabt, die an den Namen *Perry* anknüpft. *John Perry* war Ingenieur und unterrichtete an einer der größten technischen Anstalten Londons; von ihm ging eine mächtige Bewegung aus, die die einseitige logische Schulung durch das Euklidstudium auf das schärfste bekämpft und an ihre Stelle einen durchaus auf Anschauung basierten Unterricht setzen will, der vor allem zur vollständigen Beherrschung der mathematischen Exekutive führen soll. *Perry* ist vor allem bekannt als Verfasser von Lehrbüchern, welche die

<sup>1)</sup> P. 1. 2. London 1884. 1888.

<sup>2)</sup> 2. Aufl. London 1885.

*praktische Einführung der Ingenieurkreise in die Beherrschung der Infinitesimalrechnung* zum Ziel haben. Ich nenne besonders den „Calculus for engineers“<sup>1)</sup>, der als „*Höhere Analysis für Ingenieure*“<sup>2)</sup> von R. Fricke und F. Süchting ins Deutsche übersetzt worden ist. Daneben ist als charakteristisch für Perrys Tendenzen noch die kleine Schrift „*Practical mathematics*“<sup>3)</sup> zu erwähnen, die aus Vorträgen für Arbeiterkreise hervorgegangen ist und in sehr geschickter und packender Weise versucht, die Ideen des Koordinatensystems, der Funktion usw. unter fortwährender Bezugnahme auf praktische Beispiele einem größeren Publikum zugänglich zu machen.

Das ist alles nicht eigentlich Geometrie, aber durch Perrys Einwirkung hat man den Unterricht auch auf diesem Gebiete umzugestalten gesucht, indem man die sogenannte *Laboratoriumsmethode* einführte. Da beginnt man damit, daß man die Dinge in ihrer *praktischen Anwendung* lehrt, also Kurven auf Millimeterpapier zeichnet und ausmißt, den Gebrauch des Planimeters übt usw. Von logischen Deduktionen und Beweisen ist gar nicht die Rede, oder sie werden doch wenigstens sehr stark zurückgedrängt. Nur auf das *praktische Können* kommt es an. Wir haben hier eigentlich den größten denkbaren Gegensatz gegen Euklids Verfahren. Diese Bestrebungen kommen ganz zum Ausdruck in dem Lehrbuche von Harrison: „*Practical plane and solid geometry for elementary students*“<sup>4)</sup>, das tatsächlich mit der Angabe von allem dem beginnt, was man zum Zeichnen braucht: Zeichenpapier, Zeichenbrett, eine Nadel zum Markieren von Punkten, Bleistift usw. Dann werden praktische Anweisungen für das Zeichnen gegeben, es wird gezeigt, wie man ein Lineal auf seine Geradlinigkeit, einen rechten Winkel auf seine Rechtwinkligkeit prüft, und so weiterhin immer unter Voranstellung der wirklichen zeichnerischen Ausführung und der lebhaften Anschauung in sozusagen rein empirischer Weise die Lehre von den einfachsten ebenen und räumlichen Gebilden entwickelt. Etwas weiter als dieses ganz elementare Buch geht *Harrison und Baxandall, Practical plane and solid geometry for advanced students including graphic statics*<sup>5)</sup>, das in derselben empirischen Art bis zur darstellenden Geometrie und den Methoden des graphischen Rechnens heranzuführt. Weitere Literatur finden Sie in dem sehr interessanten Bericht „*Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England*“ von Robert Fricke<sup>6)</sup>, in dem die Perry-Bewegung eingehend besprochen wird. Recht anregend sind übrigens auch die Berichte über die Diskussionen, die Perry auf der *Glasgower* und der *Johannesburger Tagung (1901 und 1905) der British Association* — dem englischen Analogon unserer deut-

<sup>1)</sup> London, 3. Aufl. 1899. <sup>2)</sup> Leipzig 1902. [4. Aufl. 1923.] <sup>3)</sup> London 1899.

<sup>4)</sup> London 1903. <sup>5)</sup> London 1903.

<sup>6)</sup> Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13, S. 283 ff. 1904.

schen Naturforscherversammlung — veranlaßt hat<sup>1)</sup> und durch die er eine weitgehende Einwirkung auf den Unterricht in England erreichte.

Ich halte diese Perryschen Tendenzen gewiß für *sehr geeignet für Fortbildungsschulen, niedere und mittlere Fachschulen*, die praktisch leistungsfähige Handwerker und niedere Techniker heranzubilden haben. An *höheren Schulen* aber erscheint mir die ausschließliche Betonung der praktischen Momente, die der Perryschen Richtung eigen ist, *nicht ausreichend*, wenn sie auch gewiß sehr dankenswerte Anregungen gibt. So gänzlich wird man da aber die Ausbildung des logischen Denkens durch den mathematischen Unterricht nicht missen wollen, und was man wünschen wird, wird vielmehr ein *Mittelding zwischen den beiden möglichen Extremen* sein, wo neben dem intuitiven, von praktischen Erfahrungen ausgehenden Aufbau der Geometrie doch auch die logischen Beweise nicht zu kurz kommen.

Einem solchen Kompromiß scheinen sich in der Tat unter dem Druck der Perry-Bewegung gegenwärtig die Examensbehörden in Oxford und Cambridge zu nähern, wie neuere Examensbestimmungen zeigen<sup>2)</sup>. An diese schließt das neue Lehrbuch von *Godfrey und Siddons* an: „*Elementary geometry practical and theoretical*“<sup>3)</sup>, das gegenüber den Elementen der Assoziation beträchtliche Fortschritte aufweist. Es beginnt mit einer *anschauungsmäßigen Einleitung* („experimental geometry“) für die erste Stufe, einer geometrischen Propädeutik, wie sie ja bei uns seit langem allgemein üblich ist, wie man sie aber in England vorher wohl kaum hatte. Dann folgt der *logische Aufbau der Geometrie*, der freilich in Stoff und Form wieder nahe Beziehungen zu Euklid aufweist, der aber doch gelegentlich mit neuen Gedanken durchsetzt ist; z. B. wird der *Flächeninhalt* einer Figur zuerst geradezu so eingeführt, daß man die Figur auf *Millimeterpapier* zeichnet und die umschlossenen Quadrate zählt. Dies Buch, das man wohl als Beleg für die nun endlich einsetzende langsame Modernisierung des englischen Unterrichts ansehen kann, hat sogleich ungeheuere Verbreitung gefunden, wie man überhaupt bei dem Riesenbedarf des englischen Kolonialreiches auf dem englischen Büchermarkt mit ganz anderen Ziffern rechnen muß als bei uns.

Dem allgemeinen konservativen Charakter des englischen Schulwesens widerspricht nicht, daß einzelne Autoren äußerst freie und interessante Anschauungen über den Unterricht entwickeln, ohne damit eben direkt eine Organisationsänderung in die Wege leiten zu wollen oder

<sup>1)</sup> *Perry*: Discussion on the teaching of mathematics. London 1902. — Disc. at Johannesburg on the teaching of elementary mechanics. London 1906.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. Regulations of the Oxford and Cambridge Schools Examination board for the year 1904, wo sich S. 37 besondere Abschnitte über „Practical Geometry“ finden.

<sup>3)</sup> Cambridge 1904.

zu können. Als Beispiel nenne ich das neue Buch von Branford, „*A study of mathematical education, including the teaching of Arithmetic*“<sup>1)</sup>. Es enthält sehr anregende Studien über die psychologischen Bedingungen des Unterrichts und nimmt besonders Rücksicht auf den Parallelismus, der zwischen der Entwicklungsgeschichte des Kindes und der Stammesgeschichte der Menschheit besteht; dabei kommt das mathematische Verständnis des Kindes, an das sich der erste Unterricht wenden muß, mit der Mathematik der Naturvölker in Parallele.

Daneben möchte ich „*The first book of geometry*“<sup>2)</sup> von G. und W. H. Young nennen, das von S. und F. Bernstein unter dem Titel „*Der kleine Geometer*“<sup>3)</sup> deutsch herausgegeben worden ist. Hier soll ein neuer, origineller Weg gewiesen werden, das Kind in das geometrische Verständnis, und zwar sogleich in die dreidimensionale Raumschauung, einzuführen. Die leitende Idee ist, daß die natürliche Raumschauung notwendig erlahmen muß, wenn man das Kind von vornherein ausschließlich an das Zeichnen auf dem zweidimensionalen Papier gewöhnt und so seine Anschauung künstlich auf die Ebene beschränkt. So wird von vornherein mit dem interessanten Hilfsmittel des *Papierfaltens* operiert, wodurch allein mit Hilfe von Stecknadeln alle möglichen räumlichen und ebenen Figuren gebildet werden. Dabei ergeben sich äußerst anschauliche und doch gleichzeitig logisch befriedigende Beweise z. B. für den pythagoreischen Satz, und es entsteht überhaupt ein neuer, interessanter, auch für den höheren Betrieb durchaus in Betracht kommender Aufbau der Geometrie.

Damit verlassen wir die englischen Verhältnisse und wenden uns zu Frankreich.

## II. Der Unterricht in Frankreich.

Die Verhältnisse hier sind für uns um so interessanter, als sie auch auf Deutschland mannigfach eingewirkt haben. Hier zeigt sich ein von England *grundverschiedenes Bild*. Während der Engländer streng konservativ an den alten Einrichtungen hängt, liebt der Franzose das Neue und erreicht es sogar oft statt durch stetige Umbildung des Alten durch *plötzliche* Reformation, die schon mehr Revolution ist. Auch die Organisation des Unterrichts ist eine ganz andere: Wir haben in Frankreich nicht nur *Zentralisation des Examens* — vermöge der Aufnahmeprüfungen an den Hochschulen, vor allem an denen in Paris —, sondern überhaupt eine *streng zentralisierte Unterrichtsorganisation*; die oberste Behörde, der conseil d'instruction supérieure, dem übrigens stets auch wissenschaftlich bedeutende Mathematiker ersten Ranges angehörten, ist unbedingte Herrscherin und kann nach eigenem Ermessen die weitest-

<sup>1)</sup> Oxford 1908 [Deutsch von R. Schimmach und H. Weinreich. Leipzig 1913].

<sup>2)</sup> London 1905.

<sup>3)</sup> Leipzig und Berlin 1908.

gehenden Reformen und Änderungen vorschreiben, so oft sie will. Solche Reformen müssen dann im ganzen Lande sofort durchgeführt werden, und die Lehrer können zusehen, wie sie damit zurechtkommen. Die individuelle Freiheit des einzelnen Lehrers, an die wir in Deutschland im hohen Grade gewöhnt sind, kommt hier viel weniger zur Geltung. Man könnte geradezu von einem „System der Revolution von oben“ reden.

Was nun speziell den *geometrischen Unterricht* anlangt, so beginnt seine *Modernisierung*, d. h. die Befreiung von der strengen Bindung an Euklid, in Frankreich schon sehr früh, etwa um 1550, um eine runde Zahl zu nennen. Sie ist nur eine Erscheinung in dem großen Kampfe des neuen Humanismus gegen die alte Scholastik, der sich um jene Zeit abspielte. Damals schrieb *Petrus Ramus*, der auch auf anderen Gebieten als der Mathematik unter den Vertretern der neuen Ideen eine hervorragende Stelle einnahm, ein Lehrbuch der Mathematik („*Arithmeticae libri 2, geometricae libri 27*“<sup>1)</sup>). Hier werden bereits Euklids Form und Stoff völlig verlassen; vielmehr ist für Ramus, wie er charakteristischerweise an der Spitze des ersten Buches sagt, die Geometrie die Kunst gut zu messen („*ars bene metiendi*“). Demgemäß stehen die *praktischen Interessen* durchaus voran; er erklärt vor allem, wie man einfache geodätische Messungen ausführt, beschreibt die Instrumente und erläutert das alles an zahlreichen interessanten Abbildungen. Erst in zweiter Linie werden auch logische Deduktionen herangebracht, aber keineswegs als Selbstzweck, sondern nur um neue, aus der Beobachtung nicht unmittelbar zu entnehmende und doch zur Anwendung nützliche geometrische Sätze abzuleiten; so weit wie bei Perry wird freilich die Deduktion doch nicht zurückgedrängt.

Diese Behandlung der Geometrie hat sich in Frankreich lange in Geltung erhalten. Rund 200 Jahre nach Ramus sind die berühmten „*Eléments de géométrie*“<sup>2)</sup> von *Clairaut* entstanden. Das ist derselbe Clairaut, der als hervorragender Forscher bekannt ist, wie wir denn auch sonst in Frankreich im Gegensatz zu Deutschland und England die Wahrnehmung machen können, daß sich stets bedeutende Hochschulmathematiker der Unterrichtsfragen mit Interesse annehmen. Clairauts Werk zeichnet sich durch seinen hervorragenden Stil aus. Überhaupt besitzen ja die Franzosen die Kunst der fortlaufenden, lesbaren Darstellung auch schwieriger, abstrakter Dinge in hohem Maße, die der schärfste Gegensatz zu der gleichförmigen, schablonenhaft gegliederten „Euklidischen“ Manier ist. Solche Bücher lesen sich „wie ein Roman“ und widerlegen damit die alte Ansicht, gute wissenschaftliche Bücher müßten langweilig geschrieben sein, aufs schlagendste. Was nun den *Inhalt* anlangt, so geht auch Clairaut durchaus von *praktischen Problemen des Feldmessens* aus und führt dann ganz allmählich zu allgemeinen Ideenbildun-

<sup>1)</sup> Basel 1580.

<sup>2)</sup> 1741 — Nouvelle édition Paris 1830.

gen empor, wobei das streng logische Moment etwas zurücktritt. Er setzt in seiner sehr interessanten Vorrede auseinander, warum er diese Anordnung wählt: die praktischen Probleme des Feldmessens sind es, die die Menschen überhaupt zur Ausbildung einer geometrischen Wissenschaft angeregt haben, und darum wird man, wenn man sie voranstellt, auch jetzt noch jeden Menschen ganz anders für die Geometrie interessieren können, als wenn man mit einem abstrakten Gebäude von Axiomen und Theoremen beginnt, dessen inneren Sinn niemand so bald begreifen kann. Clairaut hat hier offenbar die Tendenz, sein Werk auch für weitere, nicht eigentlich fachmännische Kreise genießbar zu machen, wie denn ja damals tatsächlich die Mathematik in ungleich höherem Maße zur allgemeinen Bildung der führenden Gesellschaftsschichten gehörte, als es heute der Fall ist.

Eine *neue Epoche der Unterrichtsgestaltung* tritt am Ende des Jahrhunderts ein im Gefolge der großen Umwälzungen durch die *französische Revolution* von 1789. Handelte es sich bisher wesentlich immer nur um die Ausbildung der höheren Stände, speziell auch um die Vorbildung zur Offizierslaufbahn, so treten jetzt neue soziale Schichten des Bürgertums in den Vordergrund, und der Unterricht erhält neue Ziele und Methoden. Ich habe da zwei Richtungen der Entwicklung hervorzuheben, die an die beiden damals gegründeten Pariser Hochschulen, die *École polytechnique* und die *École normale supérieure* anknüpfen; die erstere ist, im Zeichen der neu emporwachsenden Technik, zur Ausbildung von Ingenieuren und Genieoffizieren, die andere zur Heranziehung von Oberlehrern bestimmt. An der *École polytechnique* war der einflußreichste Mann der berühmte *Monge*; er hat dort die geometrischen Unterrichtseinrichtungen geschaffen, wie wir sie noch heute an den technischen Hochschulen und ähnlichen Instituten haben, vor allem den großen Kursus in darstellender Geometrie und in analytischer Geometrie. Die wesentliche Neuerung gegen den früheren Betrieb ist dabei, daß nicht nur wenige besonders interessierte Hörer gefördert werden, sondern daß durch zweckmäßige Organisation gleichzeitig eine große Anzahl von Studierenden in eigener Arbeit fruchtbringend beschäftigt ist. Auf die Zeitgenossen von *Monge* machte es einen großen Eindruck, als er zum ersten Male Übungen leitete, in denen vielleicht 70 Personen an ihren Zeichenbrettern arbeiteten.

An der *École normale* andererseits wirkte *Legendre*, der durch seine 1794 zum ersten Male erschienenen berühmten *Éléments de géométrie* auf den geometrischen Unterricht für lange Zeit einen beherrschenden Einfluß ausgeübt hat; ich kann Ihnen hier die 4. Auflage dieses Buches<sup>1)</sup> vorlegen. Dies Werk hat nächst Euklids Elementen unter allen Lehrbüchern der Elementargeometrie die weiteste Verbreitung gefunden, und

<sup>1)</sup> Paris 1802.



zwar bemerkenswerterweise — ich deutete es schon an — nicht nur in Frankreich, wo es das ganze 19. Jahrhundert hindurch immer wieder neu aufgelegt wurde, sondern auch in anderen Ländern. Namentlich in Amerika und Italien nahm es lange eine maßgebende Stellung ein.

Im Vergleiche zu Clairaut oder gar Petrus Ramus bedeutet Legendres Buch einen *großen Schritt auf Euklid hin*; sein Hauptziel ist wieder ein in sich geschlossenes abstraktes System der Elementargeometrie. Andererseits bestehen aber doch *wesentliche Unterschiede Euklid gegenüber*, die ich in Anbetracht der großen historischen Bedeutung Legendres nun gern ausführlicher darlegen will:

1. Was zunächst den *Stil der Darstellung* anlangt, so hat Legendre einen *zusammenhängenden, bequem lesbaren Text*; er nähert sich in seiner äußeren Form viel mehr der Clairautschen Darstellung, die ich vorhin rühmte, als der in bekannter Weise zergliederten, fast möchte ich sagen zerhackten, in ihrer Einförmigkeit ermüdenden Schreibweise Euklids.

2. In Hinsicht auf den *Inhalt* ist wohl der wesentlichste Punkt, daß Legendre im Gegensatz zu Euklid in der Geometrie *bewußten Gebrauch von der elementaren Arithmetik seiner Zeit* macht; er ist also, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, Anhänger der *Fusion von Arithmetik und Geometrie* und begreift sogar in diese Fusion noch weiterhin die *Trigonometrie* ein, die er gleichfalls in seinem Werke behandelt.

3. Der *prinzipielle Standpunkt* Legendres ist gegenüber dem Euklids *ein wenig von der logischen nach der anschauungsmäßigen Seite verschoben*. Euklid legt — ich habe das ja oft genug betont — allen Nachdruck auf das logische Schlußgebäude, das er wenigstens der Tendenz nach von der Einmischung von Anschauungselementen frei hält; alles, was er an Tatsachen der Anschauung zu brauchen meint, stellt er vorher in seinen Axiomen usw. zusammen. Dementgegen kommt es Legendre nicht darauf an, auch innerhalb seiner Deduktionen geometrischer Sätze gelegentlich anschauliche Überlegungen zu verwenden.

4. Um mehr in Einzelheiten einzugehen, ist es besonders interessant, die *Behandlung der Irrationalzahlen* bei beiden Autoren zu vergleichen. Im Buche 5 von Euklid wird — wie wir wissen — der Begriff der Irrationalzahl unter der Form des Logos oder Verhältnisses zweier inkommensurablen Größen ausführlich definiert und untersucht, in völliger Analogie mit der modernen Theorie der Irrationalzahl. Im weiteren Verlauf führt Euklid dann die Beweise der Sätze, in die dem Wesen der Sache nach Irrationalzahlen eingehen, immer ganz besonders sorgfältig mit einer geradezu modernen Anforderungen genügenden Strenge (Exhaustionsbeweis!) durch. Legendre aber gleitet über alle diese Punkte kurz hinweg. Die Zahlen, rationale und irrationale, nimmt er aus der Arithmetik als bekannt an, in der man sich freilich damals über ihre strenge Begründung auch nicht viel Kopfzerbrechen machte. Und Ex-

haustionsbeweise und dergleichen kennt er nicht; es ist ihm ohne weitere Erläuterung ganz selbstverständlich, daß ein für alle rationalen Zahlen gültiger Satz auch für alle irrationalen gilt. Auch hierin stimmt er übrigens mit allen andern großen Mathematikern seiner Zeit überein. Ich habe gerade im vorigen Semester ein Beispiel dieser Auffassung aus Lagranges „Théorie des fonctions analytiques“ Ihnen vorgelegt<sup>1)</sup>.

5. Trotz dieser freieren Stellung Legendres hinsichtlich der logischen Strenge der Einzelausführungen steht er doch den *prinzipiellen Fragen über die Grundlagen der Geometrie* keineswegs gleichgültig gegenüber; da nimmt er vielmehr im Gegensatz zu seinen Vorgängern in Frankreich nicht nur die euklidische Tradition mit vollem Interesse auf, sondern fördert sie sogar durch wesentliche neue Ideen.

Besonders ist es die *Theorie der Parallelen*, auf die er seine Aufmerksamkeit richtet, und hierüber will ich noch gern einiges Nähere sagen. Übrigens muß man sich dabei an die ersten Auflagen halten, da die späteren Bearbeiter gerade in dieser Richtung stark geändert haben.

Ich gehe von folgender Bemerkung aus: Wir hatten die euklidische und die beiden nichteuklidischen Geometrien früher dadurch charakterisiert, daß die Zahl der durch einen Punkt zu einer Geraden vorhandenen Parallelen entweder 1 oder 0 oder 2 ist; statt dessen kann man jedoch auch die *Winkelsumme eines beliebigen geradlinigen Dreiecks* heranziehen und erhält folgende, wie sich zeigen läßt, der vorigen genau äquivalente Unterscheidung: *In der euklidischen Geometrie ist sie  $\pi$ , in der nichteuklidischen erster Art (der hyperbolischen) ist sie stets kleiner als  $\pi$  und in derjenigen zweiter Art (der elliptischen) endlich stets größer als  $\pi$ .* Nun will Legendre beweisen, daß die letzten beiden Möglichkeiten ausgeschlossen sind. Da das nichts heißt, als das euklidische Parallelenaxiom beweisen, kann er das nur dadurch erreichen, daß er der Anschauung gewisse einfache, das Parallelenaxiom implizierende Obersätze entnimmt; seine Kunst ist nur, diese so plausibel zu wählen, daß der Leser und gewiß auch der Autor selbst nicht merkt, daß es sich hier tatsächlich um neue einschränkende Voraussetzungen handelt.

Was zunächst die Unmöglichkeit der *elliptischen Geometrie*, also der Winkelsumme  $> \pi$  anlangt, so liegt dem sehr beachtenswerten Legendreschen Beweise die stillschweigende *Annahme unendlicher Länge der Geraden* zugrunde. Das ist gewiß eine äußerst plausible Annahme, an deren Richtigkeit weder Legendre noch einer seiner Leser gezweifelt hat und die auch weiterhin alle Geometer vor Riemann als selbstverständlich angesehen haben. Und doch zeigt die elliptische Geometrie, daß mit den andern Axiomen auch die Annahme einer *endlichen* Länge der Geraden verträglich ist, wenn man sie nur *unbegrenzt*, also in sich zurücklaufend, annimmt; man muß sich also bewußt sein, daß man mit der unendlichen Länge der Geraden eine neue und entscheidende *Tatsache der Anschauung* heranzieht.

<sup>1)</sup> Siehe Teil I, S. 165 (Beweis des binomischen Satzes).

Um ebenso die *hyperbolische Geometrie* auszuschließen, benutzt Legendre gleichfalls — ohne sie besonders hervorzuheben — eine einfache Anschauungstatsache, an der kein naiver, durch geometrische Studien sozusagen noch nicht verbildeter Verstand jemals zweifeln wird: *Ist P irgendein Punkt innerhalb des Winkels zweier Halbstrahlen  $\alpha$ ,  $\beta$ , so soll man durch P stets eine Gerade ziehen können, die sowohl  $\alpha$  als auch  $\beta$  trifft* (vgl. Abb. 142). Indem er diese Voraussetzung benutzt, gelingt ihm einwandfrei der Beweis, daß die Winkelsumme im Dreieck auch niemals kleiner als  $\pi$  sein kann, womit dann schließlich allein die euklidische Geometrie übrigbleibt.

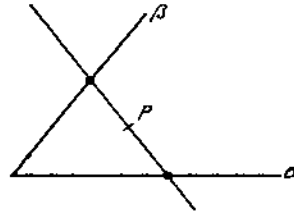


Abb. 142.

Ich muß nun deutlich machen, *inwiefern diese so plausible Tatsache in der nichteuklidischen Geometrie erster Art nicht zutrifft*; dann erst können wir vollkommen verstehen, daß es Legendre durch ihre Benutzung gelingt, diese Geometrie auszuschließen. Wir knüpfen genau an frühere Betrachtungen (S. 198) an. Es seien  $\alpha, \beta$  zwei Strahlen der hyperbolischen Geometrie durch den Punkt  $O$ , der natürlich im Innern des fundamentalen Kegelschnittes  $\Phi = 0$  liegen muß (vgl. Abb. 143). Die sämtlichen Parallelen zu  $\alpha$  sind dann die Strahlen durch den Schnitt von  $\alpha$  mit dem Kegelschnitt (d. i. der unendlich ferne Punkt von  $\alpha$ ), soweit sie im Innern verlaufen, und Analoges gilt für  $\beta$ . Es gibt also eine Gerade  $\gamma$ , die sowohl zu  $\alpha$  als zu  $\beta$  parallel ist, nämlich die Verbindung ihrer Schnitte mit dem Kegelschnitte  $\Phi = 0$ . Das kann natürlich in der euklidischen Geometrie nicht vorkommen. Wählen wir nun den Punkt  $P$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  außerhalb des von  $\gamma$  mit  $\alpha$  und  $\beta$  abgegrenzten Dreiecks (aber innerhalb des Kegelschnittes), so trifft für ihn die Legendresche Annahme nicht mehr zu; denn jede Gerade durch  $P$  wird nur einen der Strahlen  $\alpha, \beta$  innerhalb des Kegelschnittes, den anderen aber außerhalb, d. h. im Sinne unserer Geometrie gar nicht, treffen. Das gerade wollte ich aber hier zeigen. —

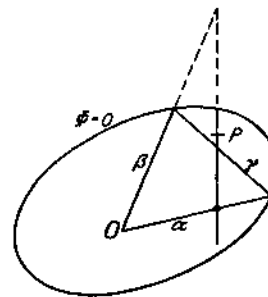


Abb. 143.

Verlassen wir nach diesem Exkurse Legendre und sehen zu, wie die *Entwicklung des geometrischen Unterrichts in Frankreich nach ihm* weitergeht. Merkwürdigerweise hat sich die Organisation des Schulwesens in Frankreich im Laufe des 19. Jahrhunderts äußerst wenig geändert, wie denn überhaupt auf allen kulturellen Gebieten die unter Napoleon I. geschaffenen Einrichtungen lange Zeit hindurch alle Wechsel des politischen Regimes überdauert haben. So herrscht im geometrischen Unterricht immer weiter fast unbeschränkt Legendre, nur daß in den

fortgesetzten *Neuaufgaben*<sup>1)</sup> sich eine gewisse Filtrierung des Inhaltes vollzieht in dem Sinne einer *Einschränkung der Beziehungen zu den Anwendungen*, die sich bei Legendre noch finden. Wenn nämlich auch Legendre selbst der Kunst des geometrischen Messens nicht mehr die hervorragende Stelle einräumt wie Clairaut oder gar Petrus Ramus, so hat er doch nicht die Geringschätzung dafür, wie sie später einriß, und auch der Sinn für mathematische Exekutive, für numerisches Rechnen ist noch recht rege bei ihm. Aber alles hierauf Bezügliche wird in den späteren Auflagen mehr und mehr weggelassen, insbesondere fällt das Kapitel über Trigonometrie fort, in dem Legendre besonders enge Beziehung zu jenen Anwendungen nimmt. Als charakteristisches Beispiel will ich den sogenannten

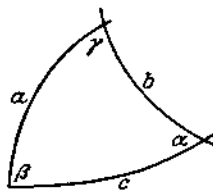


Abb. 144.

*Legendreschen Satz* der sphärischen Trigonometrie anführen. Hat man ein sphärisches Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  auf der Kugeloberfläche (vgl. Abb. 144), so ist der sogenannte *sphärische Exzeß*  $\alpha + \beta + \gamma - \pi = E$  bekanntlich stets positiv. Sind nun die Seiten im Verhältnis zum Kugelradius nicht zu groß, auf der Erdoberfläche etwa nicht größer als 100 km, so kann man das *sphärische Dreieck mit einer für alle praktischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit ersetzen durch ein ebenes Dreieck mit den Winkeln*  $\alpha - \frac{E}{3}, \beta - \frac{E}{3}, \gamma - \frac{E}{3}$ .

Diesen schönen Satz, der tatsächlich in der geodätischen Praxis viel gebraucht wird, beweist Legendre sehr einfach, indem er in den Formeln der sphärischen Trigonometrie nur die ersten Glieder der Reihen für die trigonometrischen Formeln benutzt. In den späteren Auflagen des Legendreschen Buches werden Sie diesen Satz aber vergebens suchen.

Neben den fortgesetzten Neuaufgaben von Legendre läuft inzwischen noch eine andere Tendenz her, die durch den umfangreichen „*Traité de géométrie*“ von Rouché und de Comberousse<sup>2)</sup> charakterisiert ist. In Frankreich wird der dem Hochschulstudium vorangehende mathematische Unterricht sehr viel weiter getrieben als bei uns. Den Übergang zur Hochschule vermittelt der zweijährige Kurs der *Classes de Mathématiques spéciales*, in denen es nicht weniger als *16 Wochenstunden Mathematik* gibt und wo alle, die sich später der Mathematik bedienen müssen, eine weitgehende Ausbildung erhalten. Durch diesen Betrieb entstand das Bedürfnis, den Lehrbüchern der elementaren Geometrie eine *Menge neuen Stoffes* hinzuzufügen, und das ist in typischer Weise in dem *Traité* von Rouché-Comberousse geschehen, der ein äußerst verbreitetes Lehrbuch war; er enthält in zahlreichen Noten Exkurse über nichteuclidische Geometrie, Dreiecksgeometrie, Tetraedergeometrie, die Lehre von den wichtigeren Kurven und Flächen und vieles andere.

<sup>1)</sup> Ich habe hier zur Hand die 33. Aufl., bearbeitet von A. Blanchet. Paris 1893.

<sup>2)</sup> P. 1. 2. — 6<sup>e</sup> édition. Paris 1891.

Ich komme nun auf die *neue Reformbewegung im mathematischen Unterricht* zu sprechen, die in Frankreich *um 1900* einsetzt und die unseren deutschen Reformbestrebungen ganz analog ist. Wir können auch diese Bewegung wieder mit Verschiebungen im gesamten Kulturbilde der Zeitepoche in Zusammenhang bringen. Durch den ungeheuren Aufschwung von Handel und Verkehr, Technik und Industrie wird in immer weiteren Volksschichten das dringende Bedürfnis nach Teilnahme an allen kulturellen Errungenschaften, nach Bildung auf allen Gebieten, nicht zum mindesten auch auf mathematischem, erweckt; freilich sind nicht theoretische Interessen dabei leitend, sondern das Bestreben, nützliche, in der Praxis unmittelbar anwendbare Kenntnisse zu erhalten. Man darf den Führern dieser Bewegung aber keineswegs flache Utilitätsgründe vorwerfen; denn es ist ein hohes Ziel — die Hebung der allgemeinen beruflichen Tüchtigkeit —, das ihnen vor Augen steht.

Charakteristisch für die französischen Verhältnisse ist, daß diese Reform mit Beratungen in der Pariser Deputiertenkammer beginnt; eine dort eingesetzte Kommission, die sich mit einer großen Zahl öffentlicher Körperschaften in Beziehung setzte, erstattete einen ausführlichen Bericht über die Reform des Mittelschulunterrichts überhaupt, wobei der mathematische Unterricht nur ein wichtiges Glied einer langen Kette ist. Die Hauptgesichtspunkte für dessen Neubildung sind *Vereinfachung und größere Anschaulichkeit des Unterrichts* einerseits, andererseits die *Herübernahme gewisser Dinge in das Schulpensum, die man von altersher der höheren Mathematik zugerechnet hat* und die nicht nur leicht zugänglich, sondern vor allem von größter Bedeutung für das moderne Kulturleben, speziell für Naturwissenschaft und Technik sind: ich meine den *Funktionsbegriff*, die *graphische Darstellung*, die *Anfänge der Infinitesimalrechnung*. Damit wird insbesondere eine viel *engere Verbindung von Arithmetik und Geometrie* erstrebt, als man sie früher jemals ins Auge faßte, es ist der Gipfel der Fusion im weitesten Sinne. Diese Reform ist niedergelegt im *Plan d'études von 1902*<sup>1)</sup> und sogleich allgemein eingeführt worden. In diesem einheitlichen Vorgehen zeigt sich so recht die Wirkung der früher erwähnten weitgehenden Zentralisation gerade auch der Schulverwaltung in Frankreich, vermöge deren es zu einer solchen weitgehenden Reform nur einer Verordnung der obersten Behörde bedarf. Diese ganze Entwicklung ist eingehend in dem von Herrn *Schimmack* herausgegebenen Bande meiner „*Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*“<sup>2)</sup> behandelt, auf den ich Sie hier gern verweise; Sie finden da zahlreiche nähere Angaben über die Organisation und Entwicklung des mathe-

<sup>1)</sup> Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons. Paris 1903.

<sup>2)</sup> T. I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907.

matischen Unterrichts überhaupt, die das hier speziell für die Geometrie Vorzutragende ergänzen und vervollständigen. Was die französischen neuen Lehrpläne angeht, so will ich an dieser Stelle nur das noch besonders betonen, daß die alte Elementargeometrie im euklidischen Sinne in diesen Lehrplänen gegenüber den modernen neuen Ideen recht stark zurücktritt. Sie werden das bestätigt finden, wenn Sie sich eines der wichtigsten der an die neuen Lehrpläne anschließenden geometrischen Lehrbücher, die *Géométrie* von Borel<sup>1)</sup>, ansehen; es ist ein sehr interessantes Buch, in dem der Stoff einfach und sinnfällig angeordnet ist und in dem übrigens die praktischen Interessen ungemein stark hervortreten.

Demgegenüber ist bemerkenswert, daß man jetzt im französischen Unterricht zugleich auch wieder einem vollständig logisch durchgearbeiteten Lehrgebäude der Elementargeometrie, wie es etwa Euklid vorschwebte, Interesse zuwendet. Besonders ein sehr bedeutendes Buch habe ich Ihnen da zu nennen, die „*Nouveaux éléments de géométrie*“ von Ch. Méray in Dijon, die zwar schon 1874 zum erstenmal erschienen sind, aber doch erst in den letzten Jahren die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich lenkten<sup>2)</sup>. Méray benutzt in seinen Beweisen keine Tatsache der Anschauung, die er nicht zuvor in einem Axiom formuliert hat, und entwickelt so ein *vollständiges Axiomensystem der Geometrie*. Dabei kommt er aber den Anforderungen des wirklichen Unterrichts insofern viel mehr als die strengen Euklidanhänger entgegen, als er die Anzahl der Axiome nicht streng auf ein Minimum voneinander unabhängiger Sätze zu reduzieren strebt und sie auch im wesentlichen immer erst dann formuliert, wenn er sie wirklich braucht. Besonders charakteristisch für Méray aber ist einmal, daß er die *Fusion von Planimetrie und Stereometrie* so vollständig durchführt als irgend möglich, und dann, daß er im Gegensatz zu Euklid den *Begriff der Bewegungsgruppe* durchaus an die Spitze stellt und seinen ganzen Aufbau der Geometrie konsequent auf ihn stützt. So entsteht ein ganz ähnlicher Aufbau, wie wir ihn neulich skizzierten: Translationen und Rotationen stehen von Anfang an einander gegenüber; die ersteren liefern den Begriff der Parallelität, die anderen, da es sich immer von vornherein um den Raum handelt, den Begriff des Senkrechtstehens in der Lage der Rotationsachse zu den Ebenen, in denen die Bahnkurven (Kreise) jedes Punktes liegen. Sie mögen die sehr interessante genaue Durchführung dieses Aufbaues bei Méray selbst nachlesen. Ich erwähne hier nur noch, daß er stets besonderen Wert auf die *exakte Durchführung aller* in der Geometrie etwa notwendigen *Grenzprozesse* legt und dabei den *modernen Zahlbegriff* in seiner strengen Formulierung gelegentlich wohl benutzt, wenn er

<sup>1)</sup> Paris 1905. Deutsche Übertragung (als „Elemente der Mathematik“, 2 Bände) von P. Stäckel. Leipzig 1909. [2. Aufl. I. Bd. 1919, II. Bd. 1920.]

<sup>2)</sup> Nouvelle édition Dijon 1903. 3<sup>e</sup> édition 1906.

auch lange nicht so weit in der Fusion mit der Arithmetik und der analytischen Geometrie geht, wie wir das hier taten.

Man kann übrigens in den modernen französischen Schulbüchern die Einwirkung des Mérayschen Standpunktes deutlich wahrnehmen. So spielt in dem genannten Buche *Borels* der Bewegungsbegriff eine größere Rolle, und noch viel mehr ist das in den neuen „*Eléments de géométrie*“ von *C. Bourlet*<sup>1)</sup>, von dem viele sehr verbreitete Lehrbücher herrühren, der Fall; hier ist überall ganz ausdrücklich von der Bewegungsgruppe und den geometrischen Größen als ihren Invarianten die Rede.

Wir verlassen damit Frankreich und gehen zu Italien über.

### III. Der Unterricht in Italien.

Da haben wir ebenfalls eine äußerst charakteristische Entwicklung, die durchaus andere Grundzüge aufweist als in England und Frankreich und in ihrer typischen Ausbildung höchstens mit Méray in Parallele gesetzt werden kann. Ich will mich hier nur mit dem *modernen Italien von etwa 1860 an* beschäftigen. Den größten Einfluß auf die einheitliche Neugestaltung des mathematischen Unterrichts in diesem neugebildeten Einheitsstaate hatte *L. Cremona*, derselbe, der Ihnen allen wegen seiner wissenschaftlichen Bedeutung in der Entwicklung der modernen Geometrie bekannt ist; ist er doch geradezu der *Begründer der selbständigen algebraisch-geometrischen Forschung* in Italien, die so hervorragende Resultate gezeitigt hat. Dieser seiner wissenschaftlichen Tätigkeit gemäß hat Cremona eine nachhaltige Wirkung auf den *Hochschulunterricht* ausgeübt, indem er die *projektive Geometrie in Verbindung mit darstellender Geometrie und graphischer Statik* in den Vordergrund brachte. Die Ingenieure sprechen heute überall in der Welt vom *Cremonaschen Kräfteplan*, und wenn der Name auch historisch unberechtigt sein mag, zeigt er doch deutlich den großen Einfluß Cremonas.

Cremona hat merkwürdigerweise auf den Unterricht an den Mittelschulen in ganz anderem Sinne eingewirkt. In einem berühmten *Gutachten von 1867* empfiehlt er den *Euklid*, wenn nicht als verbindlich, so doch in seiner Anordnung und Begrenzung des Stoffes sowie vor allem in seinem Ideal eines streng logisch geschlossenen Aufbaues der Geometrie als *vorbildlich für den gesamten geometrischen Schulunterricht* einzuführen: Hier betont er also besonders die *logische Seite*, während in seiner eigenen unmittelbaren Lehrtätigkeit und auch in seiner wissenschaftlichen Arbeit vor allem die *anschaulichen Momente* in den Vordergrund kommen<sup>2)</sup>. Es ist nicht recht zu verstehen, was eigentlich das Bindeglied zwischen diesen beiden anscheinend einander so widerstreitenden Zielsetzungen bei Cremona war.

<sup>1)</sup> Paris 1908.

<sup>2)</sup> Vgl. dafür z. B. Cremonas Elemente der projektivischen Geometrie. 1872. Deutsch von Trautvetter. Stuttgart 1882.

Jedenfalls aber fiel diese Anregung Cremonas von 1867 auf äußerst fruchtbaren Boden, und es bemächtigte sich der italienischen Mathematiker ein wahrer Wettstreit, den Euklid durch Lehrbücher zu ersetzen, die seinen Stoff und seine ganze Tendenz durchaus festhalten und sie nur in einer den heutigen verschärften Anforderungen entsprechenden Weise realisieren. Charakteristisch ist, daß sich, ganz wie wir es in Frankreich sahen, auch eine Reihe der wissenschaftlich hochstehenden Mathematiker an dieser Arbeit beteiligen und daß demgemäß eine Anzahl wissenschaftlich sehr bedeutender Werke dabei entstehen, deren pädagogischen Wert man freilich nicht ebenso hoch einzuschätzen braucht. Ein sehr interessantes Referat über die wichtigsten Erscheinungen dieser Bewegung hat *W. Lietzmann*<sup>1)</sup> gegeben; ich will im folgenden, zum Teil im Anschluß daran, nur wenige besonders charakteristische Momente hervorheben.

Ich beginne damit, die *Euklidübersetzung* zu nennen, die *E. Betti* und *F. Brioschi* im Jahre 1867 veranstalteten<sup>2)</sup> und auf die die Verbreitung der Euklidkenntnis in Italien zurückgeht; sie enthält, ganz wie die Schuleuklid Ausgaben der Engländer, nur die Bücher 1–6, 11 und 12. Aber im Gegensatz zur englischen Tradition ist ihre Tendenz keineswegs, den Stoff in dieser alten Form den Schülern darzubieten, sondern sie will vielmehr nur die Basis zur selbständigen wissenschaftlichen und pädagogischen Verarbeitung liefern. Von den hieran anschließenden Lehrbüchern hält sich eine größere Reihe älterer noch möglichst eng an das euklidische Schema der Definitionen usw., wobei indessen alle die zahlreichen Anschauungstatsachen, von denen Euklid stillschweigend Gebrauch macht, ausdrücklich präzise formuliert werden. Um über die Lücken im ersten Buch hinwegzukommen, rechnet man allgemeiner Ansicht zufolge auch den *Begriff der starren Bewegung* zu diesen stillschweigend von Euklid benutzten Dingen und stellt ihn daher mit an die Spitze des Systems, indem man eine Reihe „Axiome der Bewegung“ formuliert. Ganz wie bei Méray wird dabei übrigens aus pädagogischen Gründen kein Wert auf gegenseitige Unabhängigkeit der einzelnen aufgestellten Axiome gelegt. Ein typisches Buch dieser Richtung sind die sehr verbreiteten „*Elementi di geometria*“ von *A. Sannia* und *E. d'Ovidio*<sup>3)</sup>, die 1869 zum ersten Male erschienen und in denen Sie alle vorgenannten Punkte bestätigt finden werden. Der Stoff ist genau so begrenzt wie bei Euklid, nur daß er in wesentlich geglätteter Gestalt dargeboten wird. So wird der *Zahlbegriff* der reinen Arithmetik durchaus vermieden, aber aus den euklidischen Exhaustionsbeweisen doch ein für allemal die zu-

<sup>1)</sup> Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung Italiens). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Bd. 39, S. 177. 1908.

<sup>2)</sup> Gli Elementi di Euclide. 36<sup>a</sup> Ristampa. Firenze 1901.

<sup>3)</sup> Vol. I., II. 11. Ausgabe. Napoli 1904.



grunde liegende Idee des Grenzbegriffes deutlicher herausgearbeitet, als es Euklid tut. Weiterhin sind insbesondere Planimetrie und Stereometrie äußerlich getrennt, doch wird offenbar damit gerechnet, daß das Buch in Schulen mit „fusionistischem“ Lehrgange gebraucht wird, wie ja diese Fusionsbestrebungen zwischen Planimetrie und Stereometrie gerade in Italien besonders verbreitet sind. Als ein Lehrbuch, das sie am meisten gefördert hat, will ich die „*Elementi di geometria*“ von R. de Paolis<sup>1)</sup> wenigstens noch nennen.

Wesentlich mehr als diese und die verwandten Werke entfernt sich eine *andere Gruppe von Lehrbüchern* von der euklidischen Darstellung, indem sie ein sehr viel *höheres Maß von Strenge* in der Fassung der Grundlagen zu erreichen sucht. Sie halten die zahlreichen geometrischen Grundbegriffe des Euklid und jener Lehrbücher für nicht hinreichend genau definiert und wollen daher mit einem *einzigem Grundbegriff*, dem des *Punktes*, auskommen, aus dem alle anderen in der Geometrie notwendigen Gebilde rein logisch aufgebaut werden sollen; insbesondere soll auch jeder Gebrauch des Begriffes der starren *Bewegung* bei der Grundlegung der Geometrie *durchaus vermieden* werden.

Den Höhepunkt dieser Entwicklung stellen wohl die verschiedenen Lehrbücher G. Veroneses dar, die das gesamte Gebiet der Geometrie umfassen. Für uns kommen hier nicht seine „*Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten, in elementarer Form entwickelt*“<sup>2)</sup> in Betracht, die durchaus kein Schulbuch sind, sondern in abstraktester Form das rein wissenschaftliche Problem einer allgemeinen mehrdimensionalen und „nichtarchimedischen“ Geometrie behandeln; uns interessieren vielmehr seine Schulbücher „*Nozioni elementari di geometria intuitiva*“<sup>3)</sup> und „*Elementi di geometria*“<sup>4)</sup>. Das erstere ist eine *induktive Einführung*, die auf der Unterstufe dem Schüler die verschiedenen geometrischen Formen anschaulich nahebringen soll — entsprechend etwa unserem propädeutischen Vorkursus. Der eigentliche *systematische geometrische Unterricht* beginnt nämlich nach allen italienischen Lehrplänen erst *sehr spät*, in Klassen, die etwa unseren Sekunden entsprechen; man darf also nicht etwa glauben, daß alle diese exakten Lehrbücher sich an Knaben vom Alter unserer Quartaner wenden!

Die „*Elementi*“ Veroneses geben die *theoretischen Entwicklungen*, wobei in äußerst vollständiger Weise *alle* Postulate der Geometrie aufgestellt werden — auch wenn sie noch so selbstverständlich erscheinen; so heißt es z. B. ausdrücklich als erstes Postulat: „Es gibt *verschiedene*

<sup>1)</sup> Torino 1887.    <sup>2)</sup> Deutsch von A. Schepp. Leipzig 1894.

<sup>3)</sup> 2. Auflage. Verona 1902.

<sup>4)</sup> In verschiedenen Ausgaben; z. B. Ad uso dei ginnasi e licei. Con collaborazione di P. Gazzaniga. P. I., II. 3. Auflage. Verona 1904.

Punkte“ — wir betrachten also nicht etwa eine Geometrie, in der nur 1 Punkt existiert! Dabei wird übrigens immer noch wenigstens kurz der empirischen Beobachtung gedacht, die als heuristisches Prinzip für die Aufstellung der Axiome leitend ist. Im einzelnen verwendet nun Veronese die *geradlinige Strecke* als fundamentales geometrisches Gebilde, das er als ein gewissen Forderungen genügendes *System von Punkten* definiert. Auf die Kongruenz solcher Strecken, die als Grundbegriff auftritt, wird nun in sehr origineller Weise alles andere zurückgeführt; so heißen 2 *Dreiecke* kongruent, wenn alle Seiten kongruent sind, womit auch die Kongruenz der Winkel definiert ist (also *Vorstellung des 3. Kongruenzsatzes*!), und sogar die *Parallelenlehre* wird so in Angriff genommen: parallel heißen 2 Gerade, die in bezug auf einen Punkt zentrosymmetrisch liegen, d. h. auf allen Geraden durch ihn paarweis gleiche Strecken ausschneiden. Übrigens hält sich auch Veronese durchaus *innerhalb der Grenzen des Euklidischen Lehrstoffes*, insbesondere vermeidet er natürlich jede Anlehnung an die Arithmetik. Diesem Veroneseschen Buche inhaltlich verwandt sind die „*Elementi di geometria*“ von *F. Enriques und U. Amaldi*<sup>1)</sup>, die nur in bedeutend höherem Maße neben der strengen Systematik auch die pädagogischen Momente betonen.

Die abstrakte Richtung Veroneses hat nun noch eine Steigerung erfahren in der sogenannten *Peanoschule*. *G. Peano* in Turin vertritt die Tendenz, die rein logische, von Anschauungselementen freie Bearbeitung der Mathematik noch viel schärfer durchzuführen, als es in den bisher berührten axiomatischen Untersuchungen geschieht, und er hat zu diesem Ende eine besondere *Formelsprache*<sup>2)</sup> erdacht, die an die Stelle der gewöhnlichen Sprache treten soll. Denn er meint, daß man sonst infolge der zahlreichen Assoziationen, die sich unwillkürlich an die uns geläufigen Worte knüpfen, das Hineinspielen nicht logischer Momente unmöglich vermeiden könne. So wird das Ideal schließlich ein *Operieren mit an sich bedeutungslosen Symbolen nach „willkürlichen“ Regeln*, die an sich auch ihrerseits nichts zu bedeuten haben. Peano hat eine große Schule begründet, die jetzt in Italien weitverbreitet ist und viel Einfluß hat. Mit seinen Schülern gemeinsam veröffentlicht er ein „*Formulaire*“, in dem die gesamte Mathematik ihrem rein logischen Inhalt nach in seiner Formelsprache dargestellt werden soll.

Fragen wir uns, ob eine solche extreme Betonung der rein logischen Momente für die Wissenschaft *förderlich* sein kann. Ich wende da gern ein Gleichnis an: Viele Leute empfinden, wenn sie aus dem Tale auf einen Berg steigen, die reinere, dünnere Luft angenehm, und doch ist es keineswegs so, daß immer weitere Verdünnung der Luft das Wohlbefinden stets erhöht; es gibt da eine Grenze, jenseits deren überhaupt

1) 2. Auflage. Bologna 1905.

2) [Vgl. hierüber auch Teil I, S. 13, 286.]

jede Existenzmöglichkeit aufhört. So glaube ich, daß die Begeisterung der Logiker für die Elimination jeder Anschauung (sofern sie überhaupt möglich ist, denn auch die Peanoschen Symbole bringen als solche noch einen Rest anschaulicher Elemente in sein System!) etwas voreilig ist: mag manchem vielleicht auch zunächst in dieser reineren Logik sehr wohl zumute sein, so wird es doch auch hier ein Optimum in der Verteilung von Logik und Anschauung geben, das zugunsten der ersteren ohne Schaden nicht überschritten werden kann!

Freilich, was die reine *Forschung* angeht, wird man natürlich jeden neuen Ansatz gutheißen und die Fortschritte und Anregungen abwarten, die er bringt. Aber es ist notwendig, auch vom Standpunkte der *Pädagogik* aus ein Urteil abzugeben, da jene abstrakten Tendenzen vielfach auch auf den Schulunterricht Einfluß gewonnen zu haben scheinen. Dieses Urteil wird mehr negativ lauten müssen: man darf wohl vermuten, daß bei einem Schulunterricht im Sinne jener Richtung viele Schüler gar nichts lernen und die wenigen, die überhaupt folgen können, jedenfalls nicht das erhalten, was sie später gebrauchen können.

In der Tat scheint in Italien auch bereits eine *Reaktion* gegen diese allzu abstrakte Gestaltung des Unterrichts entstanden zu sein — auch an den *Hochschulen*, denn merkwürdigerweise haben die reinen Logiker gerade an den technischen Hochschulen vielfach das Übergewicht erlangt. Man klagt da jetzt über eine schlechte mathematische Ausbildung des Durchschnittes der Studenten, die die abstrakten Auseinandersetzungen nicht auffassen können. Schon vor Jahren wurde mir gelegentlich als interessantes Beispiel mangelnder Anpassung an die tatsächlichen Bedürfnisse erzählt, daß in Vorlesungen für Ingenieure der Taylorsche Satz zuerst für beliebig viele Variable bewiesen und erst hinterher auf eine Variable spezialisiert werde.

Auch im *Mittelschulunterricht* machen sich in neuerer Zeit *Reformbestrebungen* geltend, die ganz im Sinne unserer deutschen und der französischen Bewegung die vorwiegende Berücksichtigung der abstrakten Logik und den engen stofflichen Anschluß an Euklid aufgeben, und den Unterricht durch *anschauliche Momente*, durch Heranziehung der wichtigsten Allgemeinbegriffe der modernen Wissenschaft (*Funktionsbegriff*), schließlich auch durch *Bezugnahme auf die Anwendungen* beleben wollen. Der Führer dieser Bewegung ist *Gino Loria*, der 1904 vor dem 3. internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg über den mathematischen Unterricht in Italien berichtet<sup>1)</sup> und seither in einem interessanten, auch ins Deutsche übertragenen Vortrage<sup>2)</sup> vor der italienischen Oberlehrervereinigung „*Mathesis*“ über seine Reform-

<sup>1)</sup> Verhandlungen des 3. internationalen Mathematiker-Kongresses, S. 594. Leipzig 1905.

<sup>2)</sup> „Vergangene und künftige Lehrpläne.“ Deutsch von *H. Wieleitner*. Leipzig 1906.

vorschläge gesprochen hat. Diese Vereinigung ist ein Zeugnis dafür, daß man in den Lehrerkreisen Italiens den modernen Ideen jetzt reges Interesse zuwendet, und wenn auch die neuen Lehrpläne von 1905<sup>1)</sup> nur erst geringe Spuren davon zeigen, so darf man doch vielleicht annehmen, daß man sich allmählich an den italienischen Schulen von den Banden der extremen Logik befreien und eine neuere Gestaltung des Unterrichts einführen wird.

Wir wenden uns nun endlich unserer Heimat zu.

#### IV. Der Unterricht in Deutschland.

Dabei wollen wir der Idee nach auch alle deutschsprechenden Länder, wie die deutsche Schweiz und Österreich, mit berücksichtigen. In Deutschland zeigt der Entwicklungsgang des geometrischen Unterrichts einen ganz anderen Typus als in den übrigen Ländern; vor allem *fehlt die Einheitlichkeit* der Entwicklung, wie sie anderwärts durch die strenge staatliche Organisation oder das Eingreifen einer starken Persönlichkeit erzielt war. Hier in Deutschland hat sich vielmehr der Unterricht in jedem Einzelstaate für sich in eigenen Bahnen entwickelt, und noch darüber hinaus blieb der einzelnen Anstalt, dem einzelnen Lehrer stets ein relativ großer Spielraum für selbständige Betätigung. So sind denn eine *große Menge verschiedenartiger Anregungen aus den verschiedensten Quellen* nebeneinander zur Geltung gekommen, und sie konnten meist ihre Wirksamkeit entfalten, noch ehe ihnen in offiziellen Lehrplänen nachgegeben war. Ich kann hier natürlich nur wenige Gesichtspunkte herausgreifen, die für die *Entwicklung in den letzten Jahrzehnten* — sagen wir etwa von 1870 an — besonders bedeutsam geworden sind und verweise im übrigen auch hier zur Ergänzung auf die ausführliche Darstellung der allgemeinen Entwicklungslinien in Klein-Schimmack<sup>2)</sup>.

Eine besonders wichtige Tendenz, die sich seit den siebziger Jahren geltend macht — im Zusammenhang mit dem gesteigerten Bildungsbedürfnis weiter Volksschichten, wie es mit dem nationalen Aufschwung in jener Zeit entstand — geht auf *Bewegungen im Volksschulunterricht* zurück. Es ist die Auffassung, daß *im Elementarunterricht notwendig die unmittelbare Anschauung voransteht*, daß man hier den Unterricht immer an sichtbare, dem Schüler wohlbekanntere Dinge anknüpfen müsse. Diese Anregungen stammen bekanntlich von dem berühmten Schweizer *H. Pestalozzi*, in dem man überhaupt den Begründer des Elementarunterrichts im heutigen Sinne sehen muß. Seine Wirkungszeit fällt — in runder Zahl — *um das Jahr 1800*. Gewiß hat es für jeden Mathematiker Interesse, Pestalozzis Originalpublikationen, die für die Mathematik in Betracht kommen, kennen zu lernen; diese sind „das

<sup>1)</sup> Istruzioni e programmi vigenti nei gymnasii e licei. Torino 1905.

<sup>2)</sup> Zitiert S. 243.

*A B C der Anschauung oder die Anschauungslehre der Maßverhältnisse*<sup>1)</sup> und *„die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse“*<sup>2)</sup>. Diese Bücher sollen zeigen, wie man die allereinfachsten Tatsachen der Raum- und Zahlanschauung dem gänzlich unvorgebildeten Schüler durchaus zu eigen machen kann. Freilich täuscht man sich sehr, wenn man in ihnen irgend etwas besonders Packendes erwartet; sie sind so ziemlich das Langweiligste, was ich je in der Hand gehabt habe, da sie lediglich alle möglichen trivialen Verhältnisse mit erschreckender Konsequenz ganz ausführlich darstellen. Um nur ein Beispiel herauszugreifen: Das Kind soll lernen, daß ein Quadrat durch horizontale und vertikale Gerade in gleiche Teile geteilt werden kann (vgl. Abb. 145). Dazu gibt Pestalozzi nicht nur eine Tafel mit sämtlichen 100 Kombinationen von Teilungen durch 0, 1 . . . , 9 vertikale und horizontale Linien, sondern er bespricht auch im Text die Anzahl, Lage usw. der Teilquadrate und Rechtecke

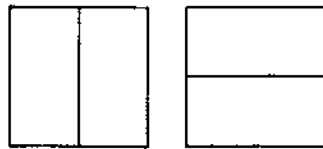


Abb. 145.

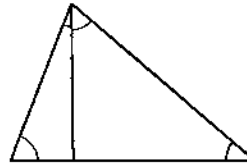


Abb. 146.

in jedem einzelnen Falle nach immer wieder demselben Schema in der denkbar ausführlichsten Weise. Man muß das wohl so verstehen, daß er damit auch dem ungeschicktesten Volksschullehrer — er mußte ja damals noch mit ganz unzureichend vorgebildetem Material rechnen — eine reiche Sammlung von Beispielen bieten wollte, von dem er einen beliebigen Teil nach Auswahl wörtlich seinem Unterricht zugrunde legen konnte.

Ich lege Ihnen zur Ergänzung noch ein Schriftchen des Göttinger Philosophen *J. F. Herbart* vor, der besonders für die Ausbreitung dieser Ideen tätig war: *„Pestalozzis Idee eines A B C der Anschauung“*<sup>3)</sup>. Hier werden die Pestalozzischen Ansätze in weniger schematischer und darum interessanterer Darstellung fortgeführt. Namentlich sind es alle möglichen Dreiecksgestalten, die Herbart den Kindern deutlich gemacht wissen will. So gibt er in einer Tabelle die Dreieckswinkel sowie die Winkel rechts und links der Höhe von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  (vgl. Abb. 146) und in einer anderen Tabelle die zugehörigen Seitenlängen in der Absicht an, diese Tabelle durch Nachmessen prüfen zu lassen. Merkwürdig ist auch sein Vorschlag, die verschiedenen Dreiecksformen den Kindern dadurch einzuprägen, daß man ihnen schon in der Wiege Tafeln mit den verschiedensten Dreiecksformen vor Augen stellt.

<sup>1)</sup> In 2 Heften. Zürich und Tübingen 1803.

<sup>2)</sup> In 3 Heften. Zürich und Tübingen 1803/04.

<sup>3)</sup> Göttingen 1802.

Pestalozzi und Herbart übten eine *mächtige Einwirkung auf den Volksschulunterricht* aus, die noch heute nachhält; Sie werden in den meisten Lehrbüchern der Raumlehre für Volksschulen deutliche Nachwirkungen der Pestalozzischen Ideen finden können. In sehr charakteristischer Form finden Sie Pestalozzis Anschauungslehre noch in unseren ganz auf ihn bzw. auf *F. Fröbel* zurückgehenden *Kindergärten* erhalten, wo die kleinen Kinder im Spiel mit geeigneten Gegenständen die einfachsten Raumformen kennen lernen.

Aber auch auf höhere Schulen haben diese pädagogischen Ideen bald übergegriffen. Besonders charakteristisch ist in dieser Hinsicht der Lehrplan, den *Exner und Bonitz um 1850* für *Österreich* aufgestellt haben. Daß gerade hier und zu dieser Zeit die Bewegung einsetzte, kann man wieder aus den politischen Verhältnissen verstehen; in Österreich hatte sich durch die zahlreichen katholischen Ordenschulen, besonders die der Jesuiten, im mathematischen Unterricht wesentlich die dogmatische Methode des Mittelalters erhalten, und als die revolutionäre Bewegung von 1848 das Alte wegschwemmte, da konnte man von dem Vorhandenen gar nichts mehr zur Anknüpfung benutzen und führte das Neue im reinsten Typ ein. So übernehmen denn die Exner-Bonitzschen Lehrpläne, soweit irgend möglich, die neuen anschauungsmäßigen Methoden auf die höheren Schulen. Die *Raumanschauung* wird nicht nur auf der Unterstufe als Vorbereitung betrieben, sondern sie wird zum *Selbstzweck* erhoben. Man soll nicht etwa bloß an anschaulichen Dingen das logische Denken üben, sondern um *Übung der Anschauung selbst* handelt es sich. Auf der Unterstufe (4 Jahre) tritt der logische Betrieb überhaupt gänzlich zurück, und nur das *anschauliche Erfassen der Figuren* wird *unter fortgesetztem Zeichnen* geübt. Auch auf der Oberstufe, wo der so gewonnene Stoff logisch verarbeitet wird, wird das Zeichnen in beträchtlichem Umfange beibehalten. Viele von Ihnen mögen gelegentlich bemerkt haben, wie geschickt die österreichischen Mathematiker zu zeichnen verstehen — eine Folge jener charakteristischen Gestaltung des Lehrplanes.

Diese Tendenzen sind es nun, die am Anfang der siebziger Jahre auch in *Preußen* und überhaupt in *Norddeutschland* sich durchzusetzen beginnen. Man muß hier auch des persönlichen Moments gedenken, daß Bonitz damals ins preußische Kultusministerium als maßgebende Kraft eintrat. Formuliert wurden die Grundsätze dieser Reform für Preußen in den *Lehrplänen von 1882*. Ihr äußeres Kennzeichen ist die Einführung eines *geometrischen Vorkurses*, der sogenannten *geometrischen Propädeutik* auf der *Quinta*; hier soll der Schüler anschauungsgemäß mit den Dingen vertraut gemacht werden, die später den Inhalt des Lehrgebäudes der Geometrie bilden. Vergleichen Sie hierzu außer Klein-Schimmack auch etwa meinen Aufsatz „*100 Jahre mathema-*

tischer Unterricht in den höheren preußischen Schulen“<sup>1)</sup>, in dem ich überhaupt den Gang der Entwicklung unseres mathematischen Unterrichts im letzten Jahrhundert darzustellen gesucht habe.

Das Lehrbuch, in dem die Tendenzen der Reform von 1882 wohl ihre ausgeprägteste Formulierung gefunden haben, ist *Holzmüllers „methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik“*<sup>2)</sup>. Hier ist schon der Titel charakteristisch: „Methodisch“ ist im Gegensatz zu „systematisch“ gemeint; nicht ein starres Lehrgebäude wie etwa bei Euklid soll aufgeführt werden, sondern ein *naturgemäßer Lehrgang*, der danach orientiert ist, wie man den Schüler erfahrungsgemäß am besten fördert. Und dann haben wir hier nicht ein Lehrbuch der Geometrie oder Arithmetik für sich, sondern die *gesamte* Elementarmathematik wird in wechselnder Reihenfolge ihrer einzelnen Fächer dargestellt, so, wie man sie im Unterricht wirklich aufeinander folgen lassen kann, wobei auch ihre gegenseitigen Beziehungen deutlich hervortreten. Im übrigen gehen die geometrischen Entwicklungen stets vom wirklichen *Zeichnen und Konstruieren* aus. Besonderer Wert wird auf die Ausbildung der Raumanschauung, auf das *stereometrische Zeichnen* gelegt. Es wird auch immer darauf gesehen, daß man eine Konstruktion nicht nur als möglich erkennt, sondern daß man sie auch wirklich *sauber und vollständig durchführt*. Die geometrischen Lehrsätze fallen dabei häufig sozusagen nebenbei ab; z. B. entstehen die Kongruenzsätze aus der Bemerkung, daß die Konstruktion eines Dreiecks aus 3 gegebenen Stücken eindeutig ist. Ich muß ferner hervorheben, daß in Verbindung mit der geschilderten Tendenz auch die *Grundsätze der projektiven Geometrie* zum Teil in die Darstellung hineingearbeitet sind. Freilich darf ich nicht verschweigen, daß bei Holzmüller die logischen Momente verschiedentlich etwas zu kurz gekommen sind; aber es ist nun einmal eine alte Sache, daß man nach allen Seiten hin gleichzeitig Befriedigendes nicht erreichen kann. Betont man vorzugsweise die Logik, so leidet die Anschaulichkeit, und umgekehrt.

Die positiven Resultate der hiermit geschilderten Bestrebungen sind wohl jetzt allgemein in den Unterrichtsbetrieb übergegangen, aber natürlich sind allmählich wieder neue Anregungen hinzugetreten. Da kommt in erster Linie wie in allen anderen Ländern die starke, in Deutschland etwa ums Jahr 1890 einsetzende Bewegung in Betracht, die die *Anwendungen der Mathematik in allen Zweigen der Naturwissenschaft*, insbesondere in der *Technik*, sowie *ihre Bedeutung für alle Seiten des menschlichen Lebens* mehr betont zu wissen wünscht. Sie bringt

<sup>1)</sup> In *W. Lexis*, Die Reform des höheren Schulwesens in Preußen. Halle 1902. Abgedruckt in Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13, S. 347 ff., 1904 und in *F. Klein* und *E. Riecke*, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen, S. 63 ff. Leipzig 1904.

<sup>2)</sup> In 3 Teilen. Leipzig (Teubner) 1894–1895, sowie zahlreiche Neuauflagen.

gegenüber der auf Anschaulichkeit gerichteten Tendenz etwas wesentlich Neues; denn kann man diese noch mit rein formalen Zwecken verbinden, so handelt es sich jetzt darum, das mathematische Denken wirklich fruchtbar auf die verschiedensten anderen Gebiete anzuwenden. Zu diesen Bestrebungen stehen in naher Beziehung die Reformtendenzen, die wir im ersten Bande des gegenwärtigen Werkes so oft berührt haben und die ich daher hier wohl nur noch zu erwähnen brauche: die *Heranziehung des Funktionsbegriffs*, der *graphischen Methoden*, der *Anfänge der Infinitesimalrechnung*, die ja alle auch für den geometrischen Unterricht zahlreiche neue Anregungen bringen.

Etwas ausführlicher will ich dafür aber über einige *neuere weitergehende Tendenzen* sprechen, mit denen sich die Mathematiker mehr auseinandersetzen müssen, als das bisher geschehen ist:

a) Zunächst meine ich da *gewisse Ergebnisse der modernen psychologischen Forschung*, speziell der experimentellen Psychologie, sowie der *modernen Hygiene*. Die Pädagogik auf die Psychologie aufzubauen versuchte schon Herbart, aber die Durchführung dieser Aufgabe hat eine ganz andere Grundlage erhalten, seitdem die Psychologie sich exakte experimentelle Methoden geschaffen hat. Denken Sie z. B. daran, wie wichtig die Erforschung des *Gedächtnisses* für die Pädagogik ist, wie wichtig es z. B. für sie ist, zu wissen, auf welche Weise sich Tatsachen dem Gedächtnis einprägen und darin haften bleiben, wie das von der Umgebung oder der persönlichen Disposition des Individuums abhängt. Tatsächlich beschäftigen sich jetzt die Psychologen an vielen Orten, gerade auch hier in Göttingen, viel mit diesen Fragen. Ähnlich wichtig für die Pädagogik ist die Untersuchung der *Ermüdung*, die Frage z. B., ob körperliche und geistige Ermüdung unabhängig voneinander sind oder nicht. Früher glaubte man wohl, daß man nach vorangegangener körperlicher Anstrengung zur geistigen Arbeit besonders befähigt sei, während man jetzt, gestützt auf Beobachtungen, allgemein zur entgegengesetzten Ansicht gekommen ist.

Ein besonders wichtiges Problem auf diesem Gebiete gerade auch im Hinblick auf die Mathematik ist das der *Unterschiede der individuellen Begabung*. Es gab ja eine Zeit, wo man fest davon überzeugt war, daß nur ganz wenige Schüler „mathematische Begabung“ hätten — man meinte damit, daß nur sie überhaupt etwas von der Mathematik verstehen und alle übrigen selbst bei größter Anstrengung doch nichts lernen könnten; den Grund, daß eine solche Ansicht so allgemeine Verbreitung finden konnte, kann man wohl nur in der mangelhaften Methode des mathematischen Unterrichts suchen, die damals herrschte. Als man später im Anschluß an die Exner-Bonitzschen Lehrpläne größeren Wert auf pädagogische Kunst zu legen begann, kam man bald zu der entgegengesetzten Meinung, daß jeder Schüler bei gutem Willen und einiger Anstrengung auch seitens des Lehrers etwas Erkleckliches in



der Mathematik lernen könne. Ich erhoffe nun von der experimentellen psychologischen Forschung Auskunft darüber, wie es hiermit wirklich steht. Gewiß gibt es auch unter sonst begabten Leuten durchaus „amathematische“, denen das mathematische Denken absolut nicht liegt. Daß auch unter künstlerisch hervorragend begabten Naturen solche Amathematiker vorkommen, zeigte mir kürzlich ein sehr interessantes Gespräch mit dem berühmten Berliner Architekten Messel, der Ihnen allen u. a. durch den ebenso zweckmäßigen wie künstlerisch wertvollen Wertheimschen Warenhausbau bekannt ist. Als er hörte, daß ich Mathematiker sei, sprach er sich in schärfster Weise über das ganze unnütze Zeug aus, mit dem man auf der Schule so geplagt werde und das jedenfalls für ihn stets ohne jede Bedeutung geblieben sei. Vielleicht wäre es viel klüger, wenn man solche Naturen auf der Schule ohne Mathematik laufen ließe, als daß man sich vergeblich abmüht, ihnen wenigstens einige mathematische Kenntnisse beizubringen. Man erreicht dabei doch meistens nichts, als daß man in ihnen einen großen Widerwillen gegen diese Dinge erweckt, die sie nicht begreifen können, und daß man dadurch der Mathematik einflußreiche Feinde verschafft. Freilich darf sich das nur auf die ganz wenigen beziehen, die bei sonst vortrefflicher Veranlagung einseitig mathematisch unbegabt sind, und es soll damit nicht etwa der Bequemlichkeit und Faulheit oder jener alten Theorie von der „allgemeinen mathematischen Unbegabtheit“ das Wort geredet werden.

Weitere wichtige Aufgaben, die der Psychologie auf mathematischem Gebiet harren, beziehen sich auf die zweifellos vorhandenen *feineren Artunterschiede der mathematischen Begabung*, die sich bei den produktiv wissenschaftlich Arbeitenden geltend machen, aber gewiß auch für die pädagogischen Fragen bedeutsam sind. Bemerkt man doch alle Tage, daß der eine Mathematiker mehr abstrakt arithmetisch veranlagt ist, während der andere das Operieren mit geometrisch anschaulichen Gestalten vorzieht. Man hat bereits besonders solche Leute, die auf einem engbegrenzten Gebiet hervorragende Fähigkeiten ausgebildet haben, *große Rechner* oder *Schachspieler*, psychologisch untersucht und auch da die größten Unterschiede gefunden; man weiß z. B., daß einige Rechner die großen Zahlen, mit denen sie operieren, anschaulich in Ziffern geschrieben vor sich sehen (*visuelle* Veranlagung), während andere wieder *auditiv* arbeiten, indem sie an den Ton der Zahlworte ihre Assoziationen knüpfen. Ich verweise Sie in dieser Hinsicht auf das interessante Buch *Binets*, „*Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs*“<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Paris 1894. [Neuere Untersuchungen dieser Art findet man in der Schrift von O. Kroh, Eine einzigartige Begabung und deren psychologische Analyse, Göttingen 1922, welche im Anschluß an die außerordentlichen Rechenleistungen des Mathematikers G. Rühle entstanden ist.]

b) Eine zweite, in der Neuzeit vielfach hervortretende Tendenz, die ich hier noch erwähnen will, berührt sich mit dem, was ich gerade über die mathematische Veranlagung hervorragend künstlerisch begabter Personen sagte; ich meine die moderne sog. *Kunsterziehung* und die Neuerungen im modernen *Zeichenunterricht*. Das Ziel ist hier, möglichst bald zu einer lebhaften *intuitiven Auffassung der Dinge im Ganzen, Großen* zu gelangen und nicht mit dem Studium ihrer Einzelheiten zu beginnen. Besonders interessant zeigt sich dieses Bestreben, wie es in verwandter Weise auch bei manchen hervorragenden Ingenieuren hervortritt, in der Entwicklung des Zeichenunterrichtes. Früher legte man da vielfach den Hauptnachdruck darauf, daß jeder Schüler bestimmte Konturen nach Vorlagen exakt nachzeichnen lernte — ein Verfahren, mit dem man nur zu oft wenig Interesse und wenig Erfolge erzielte. Ich erinnere mich, daß ich in meiner Schulzeit immer wieder dieselbe Arabeske kopieren mußte, weil sie mir ganz und gar nicht gelingen wollte, wodurch gewiß meine Fähigkeit, zu zeichnen, nicht entwickelt wurde. Heute gibt man im Gegensatz dazu dem Kinde von vornherein Pinsel und Farbe in die Hand und läßt es nach eigenem Eindruck einfache, alltägliche Gegenstände abmalen, so wie es sie unmittelbar vor Augen oder in Erinnerung hat. Auf genaue Wiedergabe der Einzelheiten kommt es dabei gar nicht an; die können höchst unexakt sein, wenn nur der Gesamteindruck getroffen ist. Man sieht heute allerwärts in Ausstellungen von Schulen, was für überraschend gute Resultate mit dieser Methode selbst bei Kindern ohne jede spezifisch künstlerische Begabung erzielt werden.

Freilich steht diese Richtung *durchaus im Gegensatz zum mathematischen Zeichnen*, insofern dieses gerade auf genaue, auch quantitativ richtige Festlegung aller Einzelheiten Wert legen muß. Und natürlich können beide Tendenzen leicht in schärfsten Kampf miteinander geraten, wenn die eine oder andere alzu einseitig gehandhabt wird. Da werden z. B. einmal in der darstellenden Geometrie mit großer Mühe sehr viele einzelne Punkte einer Kurve konstruiert, aber da mangels der nötigen zeichnerischen Fertigkeit diese Punkte vielleicht recht ungenau werden und der Zeichnende nicht die richtige Vorstellung vom Aussehen der Kurve hat, legt er durch sie statt einer ordentlichen Kurve einen unmöglichen Krakel, der jedenfalls kein Bild der wirklich darzustellenden räumlichen Verhältnisse vermittelt. Ebenso kann andererseits auch das künstlerische Zeichnen zur Karrikatur werden; die Einzelheiten werden so verschwommen, daß man vielleicht in einiger Entfernung allenfalls etwas zu erkennen glaubt, in der Nähe aber nur einen undefinierbaren Klecks sieht. Aber ich meine, vernünftig betrieben könnten sich beide Richtungen doch *recht wohl verständigen* und einander ergänzen, was im Interesse der Sache äußerst wünschenswert wäre. Es wäre wohl auch für die Mathematik recht wenig zweckmäßig, sich einer neuen, rasch

aufstrebenden Bewegung hier prinzipiell feindlich gegenüber zu stellen. Manches anregende Material in der Richtung einer Verständigung enthält die Schrift von Fr. Schilling „Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie“<sup>1)</sup>, wo u. a. auch von den Beziehungen zur Kunst die Rede ist.

Ich erwähne in diesem Zusammenhange gern noch die oft zitierte, so überaus scharfe Kritik des berühmten Philosophen Schopenhauer gegen die Mathematik, weil sie für die Feindschaft mehr künstlerisch veranlagter Naturen gegen unsere Wissenschaft ungemein charakteristisch ist. Schopenhauer hält die Aufeinanderfolge einzelner logischer Schlüsse, die ein strenger mathematischer Beweis enthalten muß, für ungenügend und unerträglich. Er will sofort gewissermaßen mit einem Blick von der Wahrheit des Satzes *intuitiv* überzeugt sein, und so hat er sich die Theorie gebildet, es gäbe neben jenen logischen, von bestimmten Vordersätzen ausgehenden Deduktionen noch eine *andere* mathematische Beweismethode, welche die mathematische Wahrheit direkt der Anschauung entnimmt. Von diesem Standpunkte verurteilt er in seinem Hauptwerke „Die Welt als Wille und Vorstellung“<sup>2)</sup> wie auch anderwärts das ganze Euklidische System prinzipiell aufs heftigste und besonders ist *Euklids Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes* Gegenstand seiner Angriffe. Er nennt ihn einen „Mausefallenbeweis“, der einen wohl schließlich zum Zugeben der Richtigkeit der Behauptung zwänge — indem er alle möglichen Auswege der Reihe nach hinterlistig absperre —, der aber nie zur *inneren Erkenntnis* der Wahrheit führe. Kein Mathematiker wird Schopenhauer bei diesen Ausführungen beistimmen können, denn mag man der Anschauung in der Mathematik auch eine noch so große Rolle als heuristisches, die Wissenschaft förderndes Prinzip zuschreiben, schließlich wird doch als letzte allein entscheidende Instanz immer wieder der von den Voraussetzungen ausgehende logische Beweis eintreten müssen. Ich verweise übrigens gern auf die sehr interessant geschriebene akademische Festrede „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“ von A. Pringsheim<sup>3)</sup>, in der dieser sich ausführlich gerade mit Schopenhauers Angriffen auseinandersetzt.

Freilich, würde Schopenhauer lediglich die zerrissene, abgehackte Form der Darstellung bei Euklid angreifen und eine übersichtlichere Herausarbeitung der Ideen eines jeden Beweisganges sowie überhaupt neben der Logik eine weitergehende Berücksichtigung der Anschauung

<sup>1)</sup> Leipzig und Berlin 1904. — Heft 3 von F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Leipzig und Berlin 1904.

<sup>2)</sup> Siehe Werke (herausgegeben von Frauenstädt; Leipzig 1859) II, S. 82 ff. und III, S. 142; ferner auch I, S. 135.

<sup>3)</sup> Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 13, S. 357. München 1904.

wünschen, so könnte man ihm durchaus beipflichten. Aber auch dann hätte er sich in dem *Euklidischen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes* kein sehr passendes Objekt für seine Angriffe ausgesucht; denn gerade diesen halte ich der Idee nach — wenn man von den Äußerlichkeiten der Euklidischen Manier absieht — für *besonders anschaulich*, wie aus der folgenden Darstellung deutlich werden soll:

Wir zeichnen uns die bekannte Figur (vgl. Abb. 147) des rechtwinkligen Dreiecks mit den Quadraten  $I$ ,  $II$  über den Katheten und  $III$  über der Hypotenuse; wir ziehen die Höhe des Dreiecks auf die Hypotenuse, deren Verlängerung das Quadrat  $III$  in die 2 Rechtecke  $I'$  und  $II'$  teilt, so daß also:

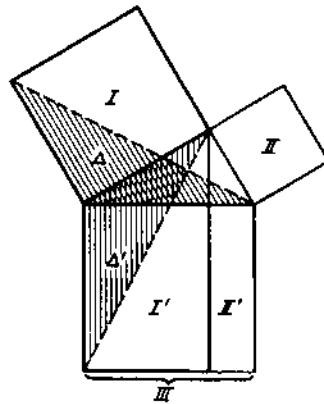


Abb. 147.

$$(1) \quad III = I' + II'.$$

Wir zeigen nun, daß das Rechteck  $I'$  dem Kathetenquadrat  $I$  gleich ist. Dazu ziehen wir die beiden gestrichelten Hilfslinien und betrachten das schräg schraffierte Dreieck  $\Delta$  und das vertikal schraffierte  $\Delta'$ . Das erstere  $\Delta$  hat offenbar mit dem Quadrate  $I$  Grundlinie und Höhe gemein, und ist daher bekanntlich halb so groß:

$$\Delta = \frac{1}{2}I;$$

ebenso ist das vertikal schraffierte Dreieck  $\Delta'$  gleich der Hälfte des Rechtecks  $I'$ :

$$\Delta' = \frac{1}{2}I'.$$

Endlich aber sieht man, daß beide Dreiecke kongruent und also auch gleich sind:

$$\Delta = \Delta',$$

und damit folgt in der Tat:

$$I = I'.$$

Ebenso kann man nachweisen, daß:

$$II = II',$$

und in Anbetracht der Tatsache (1) folgt wirklich der pythagoräische Satz:

$$III = I + II.$$

Hier ist also ganz kurz in, wie man meinen sollte, jedem Menschen sofort einleuchtender Weise der Beweis geführt; dabei sind Anschauung und Logik derart verbunden — und das scheint mir wohl das Ideal —, daß *jeder logische Schritt sofort auch zu anschaulicher Evidenz gebracht* wird. Auch den Hilfssatz  $\Delta = \frac{1}{2}I$ , der hier benutzt wird, kann man sich bekanntlich durch die Abb. 148 in der  $\Delta$  aus

der Hälfte des Quadrates  $I$  durch Verschiebung der einzelnen Horizontalstreifen hervorgeht, anschaulich vollkommen klar machen (Cavalierisches Prinzip!). Damit freilich diese einfachen Ideen auch richtig und klar herauskommen, dazu trägt eine von dem Euklidischen starren Schema abweichende, etwas flüssigere *Darstellung* und eine angemessene *Bezeichnungsweise* ihr wesentliches Teil bei. Besonders möchte ich dafür eintreten, daß man auch viel allgemeiner im Unterricht zur Unterscheidung von Linien und Flächen verschiedene Schraffierungen oder noch besser — was in dem vorliegenden Text leider nicht angeht — *verschiedene Farben* verwendet, statt der Euklidischen Art, nur die Ecken mit Buchstaben zu markieren; das „rote“ oder „gelbe“ Dreieck ist ja ungleich augenfälliger, als wenn man sich die Ecken  $E, K, L$  erst in einer komplizierten Figur lange zusammensuchen soll.

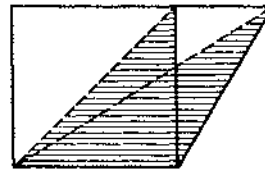


Abb. 148.

So meine ich also, sind Schopenhauers Angriffe gegen den Euklidischen Beweis sachlich durchaus unberechtigt, und noch klarer wird das, wenn man sich ansieht, was er an seine Stelle setzen will. Er gibt da nur für den Spezialfall des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks (vgl. Abb. 149) den bekannten Platonischen Beweis, den man ja freilich durch einen Blick auf die Figur übersieht, und beschränkt sich darauf, für den allgemeinen Fall ähnliches zu fordern. Aber das bietet dann gerade der Euklidische Beweis in einer vernünftigen Darstellung; und tatsächlich sind, wenn man der Sache auf den Grund geht, beide Beweise ganz gleichmäßig aus Logik und Anschauung gemischt, nur daß Schopenhauers Fall als der speziellere naturgemäß auch eine etwas einfachere Erledigung gestattet, und daß es infolgedessen hier auch für den Ungeübten leichter ist, die in dem Beweise enthaltene Kette logischer Schlüsse mit einem Schlage anschaulich zu fassen.

Doch damit genug von Schopenhauer; lassen Sie uns jetzt unsere *Bemerkungen zur Entwicklung des geometrischen Unterrichts in Deutschland* zu Ende bringen. Wir hatten bisher im Grunde immer noch die Entwicklungslinie verfolgt, die auf jene Pestalozzi-Herbartschen zunächst für den Volksschulunterricht bestimmten Tendenzen zurückgeht. Nun wollen wir zusehen, welche Anregungen bei uns in Deutschland von dem mathematischen *Hochschulunter-*

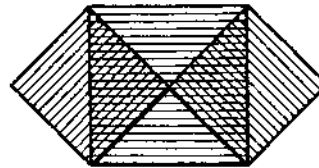


Abb. 149.

*richt* aus auf den Unterricht an der Schule eingewirkt haben. Da sehen wir ein sehr viel weniger befriedigendes Bild als in anderen Ländern. Gerade in der Geometrie zeigt sich die so oft beklagte Erscheinung, daß Hochschule und „höhere“ Schule durchaus in ge-

trennten Bahnen sich bewegten, ohne lebendige Wechselwirkungen aufeinander auszuüben. Ausnahmen bilden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Vertreter der sogenannten neueren Geometrie, besonders *Möbius* und *Steiner*, deren Werke ich ja in dieser Vorlesung vielfach zitiert habe. Später aber wächst mit dem großen Aufschwung der mathematischen Wissenschaft jene Entfremdung mehr und mehr, und erst in dem letzten Jahrzehnt können wir erfreulicherweise wieder lebhaftere Bemühungen feststellen, die Kluft zu überbrücken. Als hervorragendstes Zeugnis dieser Richtung nenne ich Ihnen gern wieder die *Enzyklopädie der Elementarmathematik* von *H. Weber* und *J. Wellstein*, von der für uns hier besonders Band II [*Elemente der Geometrie*<sup>1)</sup>] und Band III [*Angewandte Elementarmathematik*<sup>2)</sup>] in Betracht kommen; in Band II finden Sie die Grundlagen der Geometrie (Wellstein), Trigonometrie (Weber und *W. Jacobsthal*), analytische Geometrie (Weber), in Band III Vektortheorie und Graphik (Wellstein). Allerdings ist in dieser Enzyklopädie nicht ganz das verwirklicht, was ich mir für die Schule wünsche, wie ich ja schon früher<sup>3)</sup> ausgeführt habe; insbesondere in den geometrischen Teilen beschränken sich die Verfasser vielfach darauf, gewisse Dinge, mit denen sie sich besonders beschäftigt haben, in gewiß äußerst interessanter, aber recht abstrakter Form zu entwickeln, statt lieber eine allgemeine Orientierung über den *Gesamtumfang* der Geometrie, soweit sie für den Schulunterricht in Betracht kommt, zu geben. Demgegenüber wissen Sie ja, was ich wiederholt schon als *Zielpunkt meiner eigenen Vorlesung* bezeichnet habe. Ich wollte einen *Gesamtrahmen der Geometrie* aufrichten, in dem gleichförmig Platz für *alle* ihrer Teile ist, und der einen Überblick über sie alle und ihre wechselseitigen Beziehungen gestattet. Freilich konnte ich es nur als Postulat hinstellen, daß man versuchen solle, gemäß den einzelnen aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkten zu prüfen, was von all diesem Stoff für die Schule paßt und wie weit man überhaupt im Schulbetrieb unseren Ergebnissen gerecht werden kann.

Natürlich ist dies Problem schon vielfach angegriffen, freilich noch niemals gelöst worden, und ich will nicht unterlassen, wenigstens noch zwei interessante Bücher zu nennen, die einen großen Teil der hier in Betracht kommenden Fragen nach einheitlichen Gesichtspunkten verarbeitet haben. Das eine ist der *österreichische Lehrplan von 1900*<sup>4)</sup>, der an den Grundlagen der *Exner-Bonitzschen Reform* von 1850 festhält. Wie dort, wird ein Unter- und Oberbau des Gymnasiums unterschieden (je 4 Jahre), und auf ersterem der geometrische Unterricht

<sup>1)</sup> [3. Aufl. Leipzig 1915.]

<sup>2)</sup> 1. Aufl. Leipzig 1907. — [3. Aufl. in zwei Teilen, Leipzig 1924.]

<sup>3)</sup> Siehe Teil I, S. 4.

<sup>4)</sup> Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an Gymnasien in Österreich. 2. Aufl. Wien. 1900.

ausschließlich anschaulich mit sehr vielem Zeichenunterricht erteilt; dieser setzt sich auch auf der Oberstufe neben dem dort beginnenden logischen Betriebe fort. Das interessanteste an dem Lehrplan sind die *ausführlichen Erläuterungen* zum mathematischen Unterricht, die einen hervorragend sachkundigen Verfasser verraten; es ist mir aber nicht bekannt geworden, von wem sie herrühren. Wir haben hier einen erfreulichen Gegensatz zu den sonstigen offiziellen Lehrplänen, die im mathematischen Teil meist so knapp gehalten sind, daß man kaum etwas Bestimmtes aus ihnen entnehmen kann.

Das zweite Buch, das ich nennen will, ist das *Lehrbuch der Elementargeometrie* von *Henrici und Treutlein*<sup>1)</sup>. Hier sind die Verfasser erfolgreich bemüht, den Ergebnissen der damaligen neueren Forschung, der *projektiven Geometrie*, ebenso wie den *Anwendungen* Rechnung zu tragen, und auch die *analytische Geometrie* wird in organischer Verbindung mit anderem, namentlich der *Trigonometrie*, gebracht. Im einzelnen erwähne ich, daß die *Einteilung des Stoffes nach den Klassen geometrischer Transformationen* erfolgt, so wie wir das früher taten und wie das Möbius zuerst in seinem „baryzentrischen Kalkül“ ausführte: Kongruenz, Ähnlichkeit, Perspektivität. Hinsichtlich der Anwendungen verweise ich darauf, daß sich am Ende des zweiten Teiles eine *Vermessungskarte des Großherzogtums Baden* befindet (die Verfasser sind Badenser), so daß der Schüler ein lebendiges Bild des Zweckes der Trigonometrie bekommt; ich meine, daß durch eine solche lebendige Bezugnahme zur Heimatskunde, die durch wirkliche Vornahme von Vermessungen im Gelände wirksam unterstützt wird, der Unterricht ganz außerordentlich gewinnt. So sollte man analog etwa an unseren Schulen hier die Gaußsche Vermessung des Königreiches Hannover vorlegen, wo dann jeder Schüler lernen würde, was es mit dem berühmten Dreieck Hoher Hagen-Brocken-Inselsberg auf sich hat. — Henrici-Treutlein ist also ein *äußerst beachtenswertes* Buch. Man mag vom heutigen Standpunkt aus freilich bedauern, daß die über die linearen Transformationen der projektiven Geometrie hinausgehenden *allgemeinen Verwandtschaften*, wie wir sie früher noch heranzogen, fehlen, und daß im Zusammenhang damit auch die modernen Forderungen des *funktionalen Denkens* usw. nicht berücksichtigt sind; es fehlt auch ein *philosophischer Abschluß* (also eine Erörterung über Axiomatik u. dgl.), wie er jetzt vielfach für die Oberklassen der Schule gewünscht wird.

Wir stehen nunmehr, meine Herren, am Ende unserer gemeinsamen Betrachtungen; konnte ich Ihnen im letzten Abschnitt auch schon viel davon erzählen, wie sich jetzt neues Leben überall an der Schule regt, so denke ich doch, daß das Problem der Neugestaltung des mathe-

<sup>1)</sup> In 3 Teilen. Leipzig 1882/83; seitdem eine Reihe neuerer Auflagen.

matischen, insbesondere auch des geometrischen Unterrichts in den nächsten Jahren noch in ungleich höherem Maße in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses rücken wird. Sie alle, meine Herren, sind berufen, an der Lösung dieser so wichtigen Aufgabe nach Kräften mitzuarbeiten — mitzuarbeiten auf Grund selbständigen Nachdenkens über alle einschlägigen Fragen und frei vom Drucke einer übermächtigen, starren Tradition. Sie werden das können, wenn Sie sowohl über alle in Betracht kommenden Gebiete der Wissenschaft als auch über die geschichtliche Entwicklung einen leidlichen Überblick haben, und dafür — so hoffe ich — soll Ihnen meine Vorlesung eine Grundlage gegeben haben.



## Zusatz I.

### Ergänzende Bemerkungen über einige Fragen der Elementargeometrie.

#### I. Enzyklopädiereferate.

Sucht man zu dem wissenschaftlichen Teil unseres Buches nach irgendeiner Richtung eine Ergänzung, so ist am zweckmäßigsten zunächst der Band III der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften zu Rate zu ziehen. Wir denken hier insbesondere an die folgenden drei Berichte:

*J. Sommer*: Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus. III. A. B. 8 (abgeschlossen 1914).

*M. Zacharias*: Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung. III. A. B. 9 (abgeschlossen 1913).

*G. Berkhan und W. Fr. Meyer*: Neuere Dreiecksgeometrie. III. A. B. 10 (abgeschlossen 1914).

Von diesen drei Referaten steht dasjenige von Zacharias am meisten zur traditionellen Elementargeometrie in Beziehung; die beiden andern betreffen zwar auch die elementaren Gebilde, aber nur insofern sie mit den neueren Methoden behandelt werden. Natürlich kommt diese Tendenz auch bei Zacharias stark zur Geltung, indem bei ihm z. B. die axiomatischen Fragen und die nichteuklidische Geometrie ausgedehnte Berücksichtigung finden, aber doch nicht in gleichem Maße einseitig wie bei den andern. Der Bericht Sommer berührt, wie schon der Titel vermuten läßt, eine ganze Reihe von Fragen, die bereits im ersten Bande des vorliegenden Werkes besprochen wurden. So wird dort über die Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen, die Drehungsgruppen der regulären Polyeder und jene Entwicklungen aus der sphärischen Trigonometrie berichtet, welche mit den Namen *Gauß*, *Möbius*, *Klein* und *Study* verknüpft sind. Das Referat Berkhan-Meyer ist der Lehre von den merkwürdigen Punkten, Geraden, Kreisen und Kegelschnitten des Dreiecks gewidmet und will vor allem mit Hilfe des Begriffs der Transformation die Zusammenhänge aufzeigen, die zwischen vielen scheinbar vereinzelt nebeneinanderstehenden Sätzen jener Art bestehen.

## 2. Die Klassifikation geometrischer Konstruktionsaufgaben.

Jede geometrische Aufgabe kann, wenn wir uns auf den Fall der Ebene beschränken, wie folgt formuliert werden: Gegeben ist eine Figur  $F$  von Punkten, Geraden, Kreisen und anderen Kurven der Ebene  $\mathcal{E}$ . Gesucht wird in  $\mathcal{E}$  eine Figur  $F^*$ , deren Punkte, Geraden usw. zu denen von  $F$  in einer vorgeschriebenen Beziehung stehen. Dem Herkommen gemäß und nicht aus stichhaltigen, didaktischen Gründen läßt man in der Elementarmathematik an Kurven fast nur Kreise, bestenfalls noch die übrigen Kurven zweiter Ordnung zu. Da eine solche Kurve durch 5 Punkte, ein Kreis durch 3 und eine Gerade durch 2 Punkte festgelegt werden, so ist jede Figur  $F$ , sofern nur eine endliche Anzahl dieser Gebilde für sie wesentlich ist, durch eine endliche Anzahl von Punkten bestimmt. Dasselbe gilt für  $F^*$ . Die Aufgabe heißt dann: Die Punkte von  $F^*$  sollen aus denen von  $F$  ermittelt werden. Der analytische Ansatz führt unter den genannten Beschränkungen auf eine endliche Anzahl von Gleichungen zwischen den Koordinaten der gesuchten und denen der gegebenen Punkte. Ist von diesen Gleichungen mindestens eine transzendent, so wird die Aufgabe selbst transzendent, sonst algebraisch genannt. Eine algebraische Aufgabe heißt weiterhin linear oder vom ersten Grade, wenn die Berechnung der unbekanntenen Koordinaten nur auf Gleichungen ersten Grades führt; wenn dabei jedoch quadratische Gleichungen auftreten oder solche Gleichungen höheren Grades, die durch eine Aufeinanderfolge von quadratischen Gleichungen ersetzt werden können, so wird sie quadratisch oder vom zweiten Grade genannt. Einen entsprechenden Sinn hat die Aussage, daß eine Aufgabe vom  $n^{\text{ten}}$  Grade ist. Neben diese Einteilung tritt eine zweite, auf Möbius<sup>1)</sup> zurückgehende, nach der die geometrischen Aufgaben als *projektive*, *affine* und *metrische* unterschieden werden. Projektiv heißt eine Aufgabe, wenn sie analytisch in ein Gleichungssystem umgesetzt werden kann, welches gegenüber der Gruppe der projektiven Transformationen invariant ist. Entsprechenden Sinn haben die Bezeichnungen „affine Aufgabe“ und „metrische Aufgabe“. Es ist jedoch nicht notwendig, das Gleichungssystem einer Aufgabe aufzustellen, um zu erkennen, zu welcher Gruppe sie gehört; das kündigt sie vielmehr bereits durch ihren Wortlaut an. In projektiven Aufgaben ist eben nur von projektiven Eigenschaften die Rede und nicht von affinen, wie der des Parallelismus oder metrischen, wie denen der Länge einer Strecke oder der Größe eines Winkels. Außer den genannten kommen natürlich für die Aufgaben der Elementargeometrie noch andere Gruppen in Betracht. So gehört z. B. die berühmte Aufgabe des *Apollonius*, diejenigen Kreise zu konstruieren, welche drei gegebene Kreise einer Ebene berühren, zur *Gruppe der Transformationen durch reziproke*

<sup>1)</sup> Baryzentrischer Kalkül § 139 ff.

*Radien*, sofern wir uns auf Punkttransformationen beschränken. Denn sowohl die Eigenschaft „Kreis-zu-sein“ als auch diejenige der Berührung zweier Kreise ist in bezug auf diese Gruppe invariant. Verbinden wir die eben geschilderten Einteilungsarten miteinander, so haben wir die linearen Aufgaben in projektive, affine und metrische usw. zu sondern und ebenso die quadratischen Aufgaben und die kubischen usw. Es ist somit klar, was es heißt, daß eine Aufgabe projektiv linear und daß eine andere projektiv quadratisch ist.

### 3. Über den Konstruktionsbereich der gebräuchlichsten Zeichenhilfsmittel.

Die am meisten genannten mechanischen Hilfsmittel zur Lösung von Konstruktionsaufgaben sind:

- a) das endlich lange Lineal mit nur einer Kante und ohne Skala;
- b) das Parallellineal (Lineal mit zwei parallelen Kanten, ohne Skala);
- c) der Streckenübertrager (Lineal mit Skala oder zwei verschiebbaren Marken);
- d) der bewegliche rechte Winkel;
- e) der Zirkel.

Eine Aufgabe der Theorie der Konstruktionen ist, die Tragweite der einzelnen Instrumente oder des gleichzeitigen Gebrauchs mehrerer von ihnen zu ermitteln. Über die hierhergehörigen Untersuchungen lese man im Referat Sommer oder in den bereits früher (vgl. S. 229) genannten Werken von *Enriques* und *Adler* nach. Mit ganz besonderem Nachdruck sei in diesem Zusammenhange aber hingewiesen auf *Th. Vahlen*: Konstruktionen und Approximationen<sup>1)</sup>. Außer den linearen, quadratischen und kubischen Konstruktionen werden in diesem Buche höhere algebraische und transzendente Aufgaben behandelt und schließlich sehr eingehend die Näherungskonstruktionen. Dabei beschränkt sich der Verfasser durchweg auch dort, wo es sich um das Transzendente handelt, auf die Anwendung elementarer Methoden. Ihre große Tragweite zu zeigen, ist gerade seine Absicht. Das Vahlensche Buch dürfte mit seinem erstaunlich reichen Inhalt für jeden Mathematiklehrer eine Fundgrube von Anregungen darstellen.

Aus der Theorie der am meisten gebrauchten Instrumente, nämlich des Lineals, des Zirkels und des rechten Winkels, seien einige Resultate mitgeteilt. Mit dem Lineal allein lassen sich alle projektiven Aufgaben ersten Grades lösen und nur diese. Will man auch die projektiven Aufgaben zweiten Grades mit Hilfe des Lineals lösen, so muß man als weiteres Konstruktionsmittel einen vorgezeichneten Kegelschnitt  $K_0$  hinzunehmen. Eine quadratische Konstruktion wie die, die Schnittpunkte einer Geraden  $g$  mit einem Kegelschnitt  $K$  zu bestimmen, würde dann so verlaufen: Man führt vermöge einer projektiven

<sup>1)</sup> Leipzig 1911.

Transformation  $K, g$  in  $K' = K_0, g'$  über. Das gelingt unter alleiniger Anwendung des Lineals. Die Gerade  $g'$  schneide  $K_0$  in den Punkten  $A_0, B_0$ ; sie sind die Bildpunkte der gesuchten Schnittpunkte  $A, B$ , die man nun wiederum mit Hilfe des Lineals finden kann. Alle linearen und quadratischen affinen Aufgaben werden mit dem Lineal allein lösbar, wenn man noch den Mittelpunkt von  $K_0$  kennt, die metrischen Aufgaben ersten und zweiten Grades, wenn außerdem die Hauptachsen eingezeichnet sind. Denn durch die Angabe des Mittelpunktes wird die unendlich ferne Gerade unter den übrigen Geraden der Ebene hervorgehoben, durch die Hauptachsen werden die beiden imaginären Kreispunkte mitgegeben. Es lassen sich mithin alle Konstruktionen, bei denen auf die Invarianz dieser Gebilde zu achten ist — und das sind eben das eine Mal die affinen, das andere Mal die metrischen —, durchführen. Da als Kegelschnitt  $K_0$  insbesondere ein Kreis gewählt werden kann, so steht in Übereinstimmung mit dem Vorigen, daß Zirkel und Lineal für alle Aufgaben ersten und zweiten Grades hinreichen. Man kommt aber auch, wie *L. Mascheroni* in seiner *Geometria del compasso*<sup>1)</sup> zuerst gezeigt hat, mit dem Zirkel allein aus. Ein Beweis dafür, der den tieferen Grund dieser Tatsache erkennen läßt, stammt von Adler und beruht im wesentlichen auf dem Nachweis, daß jede Transformation durch reziproke Radien mit dem Zirkel allein ausführbar ist. Jede Figur  $F$ , zu deren Herstellung Geraden und Kreise benutzt werden, läßt sich vermöge einer solchen Transformation durch eine Figur  $F'$  ersetzen, zu deren Zeichnung nur Kreise erforderlich sind. Vermöge der inversen Transformation kann  $F'$  mit dem Zirkel allein in  $F$  übergeführt werden. Schließlich kann man, wie in den oben zitierten Werken des Näheren ausgeführt ist, den Zirkel durch den beweglichen rechten Winkel ersetzen. Die Theorie der linearen und quadratischen Konstruktionen liefert demnach keinen Grund, den Zirkel vor dem rechten Winkel in dem Sinne zu bevorzugen, daß nur die mit seiner alleinigen Hilfe bewirkten Lösungen als streng bezeichnet werden; lediglich die praktischen Rücksichten entspringende Erwägung, daß sich mit dem Zirkel im mechanischen Sinne präziser als mit dem rechten Winkel arbeiten läßt, könnte für seine Vorzugsstellung geltend gemacht werden.

Bei den kubischen und biquadratischen Aufgaben hingegen haben wir eine große Überlegenheit des rechten Winkels gegenüber dem Zirkel festzustellen. Während diese Aufgaben weder mit dem Zirkel allein noch bei gleichzeitigem Gebrauch mehrerer Zirkel lösbar sind, ist es möglich, sie mit Hilfe von beweglichen rechten Winkeln zu lösen. Das letztere wollen wir zeigen<sup>2)</sup>.

Analytisch führt eine biquadratische Aufgabe auf eine oder mehrere algebraische Gleichungen 4. Grades mit einer Unbekannten. Die Be-

<sup>1)</sup> Pavia 1797. Deutsche Ausgabe von J. P. Gruson, Berlin 1825.

<sup>2)</sup> Das folgende nach Adler: a. a. O. S. 259 ff.

rechnung der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades läßt sich zurückführen auf die Auflösung einer Gleichung 3. Grades. Es genügt also zu zeigen: Jede algebraische Gleichung 3. Grades mit einer Unbekannten kann mit beweglichen rechten Winkeln geometrisch gelöst werden. Hierzu brauchen wir nur auf das aus der Lehre von den graphischen Methoden bekannte *Lillsche Verfahren zur Auflösung algebraischer Gleichungen* zurückzugreifen. Die in Frage stehende Gleichung sei in die Form  $1 \cdot x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$  gebracht. Wir wählen eine Längeneinheit und stellen die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  als Strecken dar. Hierauf zeichnen wir (vgl. Abb. 150) den rechtwinkligen Streckenzug  $ABCDE$ , in dem  $AB=1, BC=a_1, CD=a_2$  und  $DE=a_3$  ist. Die Richtung von  $AB$  ist beliebig, die der anderen Strecken wählen wir nach der folgenden Regel: Der Übergang von einer Strecke zur anderen geschieht durch eine Rechtsschwenkung, wenn ihre Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben, durch eine Linksschwenkung, wenn die Vorzeichen entgegengesetzt sind. Auf  $BC$  tragen wir in dem aus  $AB$  durch Rechtsschwenkung entstehenden Sinne positiv messend eine in  $B$  endigende Strecke  $FB = x$  ab und konstruieren den bei  $F$  und  $G$  rechtwinkligen Zug  $AFGH$ ;  $G$  liegt auf  $DC$ ,  $H$  auf  $DE$ . Wir behaupten, daß die Maßzahl von  $HE$ , mit passenden Vorzeichen genommen, gleich dem Wert ist, den die Funktion:

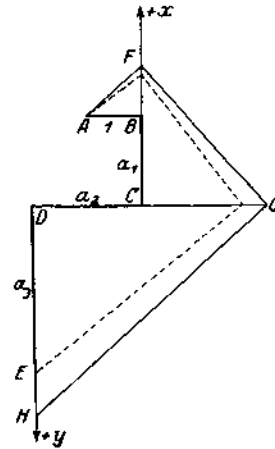


Abb. 150.

$$y = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

für das gewählte  $x$  annimmt. Es ist nämlich, wenn wir stets in dem aus  $AB$  durch sukzessive Rechtsdrehung entstehendem Sinne positiv messen:

$$FC = x + a_1,$$

$$GC = x(x + a_1) = x^2 + a_1 x, \text{ da Dreieck } ABF \text{ dem Dreieck } FCG \text{ ähnlich ist.}$$

$$GD = x^2 + a_1 x + a_2,$$

$$HD = x(x^2 + a_1 x + a_2) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x, \text{ da die Dreiecke } GDH \text{ und } ABF \text{ ähnlich sind.}$$

Schließlich folgt aus  $HE = HD - ED = HD + DE$ :

$$HE = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

Die Gleichung wird nun dadurch gelöst, daß man solche Züge konstruiert, für die  $H$  mit  $E$  zusammenfällt (in der Abb. der gestrichelte Zug) und dann die Maßzahl und das Vorzeichen des zugehörigen  $FB$  feststellt. Solche „auflösenden Züge“ lassen sich aber mit zwei beweg-

lichen rechten Winkeln sofort finden. Damit ist unser Satz bewiesen<sup>1)</sup>.

Zu der Forderung einer Beschränkung der konstruktiven Hilfsmittel kommt aus geometrischen Überlegungen heraus *E. Study* in einer Arbeit über das schon oben genannte Berührungsproblem des Apollonius (*Math. Ann.* Bd. 49. 1897). Wir sagten vorhin, daß dieses Problem zur Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien gehört. Wenn wir nur eindeutige Punkttransformationen des Raumes zulassen, so sei  $G$  die größte Gruppe, die sich berührende Kreise wieder in sich berührende Kreise überführt. Dem Problem des Apollonius in bezug auf  $G$  äquivalent ist dieses: Gegeben sind 3 Kreise  $k'_1, k'_2, k'_3$  auf einer Kugel  $K'$ . Gesucht werden diejenigen Kreise  $k'$  der Kugel, welche  $k'_1, k'_2, k'_3$  berühren. Denn man kann zu 3 Kreisen  $k_1, k_2, k_3$  einer Ebene  $K$  und den sie berührenden Kreisen  $k$  immer eine zu  $G$  gehörende Transformation finden, welche die ungestrichenen Kreise in die gestrichenen überführt. Der Ebene  $K$  entspricht dabei die Kugel  $K'$ . Studys Forderung ist nun, eine solche Lösung des ebenen Problems zu finden, die Schritt für Schritt auf das ihm äquivalente räumliche übertragbar bleibt. Dann dürfen natürlich nur Konstruktionsmittel benutzt werden, die in bezug auf  $G$  invariant sind. Das Ziehen von Geraden, die Benutzung des Lineals also, ist damit ausgeschlossen, ebenso der Gebrauch des Zirkels, da der Mittelpunkt eines Kreises mit diesem in bezug auf  $G$  nicht invariant verknüpft ist; der Mittelpunkt eines Kreises geht nicht in den des transformierten über. Wohl aber können Instrumente verwendet werden, die einen Kreis durch drei gegebene Punkte  $A, B, C$  hindurchzulegen gestatten, da ja durch eine Transformation ein solcher Kreis in den durch die drei entsprechenden Punkte  $A', B', C'$  gehenden übergeführt wird. Als ein solches Instrument könnte man einen verstellbaren Winkel vorschlagen. Man hätte diesen zunächst so einzustellen, daß sein Scheitel etwa auf  $C$  liegt, während die Schenkel durch  $A$  und  $B$  gehen. Hierauf wäre  $C$  so zu bewegen, daß  $A$  und  $B$  auf den Schenkeln bleiben. Auf Grund des Peripheriewinkelsatzes würde dabei  $C$  den gesuchten Kreis beschreiben. Dieses Instrument ist jedoch nur zu gebrauchen, wenn ein Stück der Kreisebene mitgegeben ist. Für räumliche Konstruktionen, wie solche auf der Kugel, ist es nicht verwendbar. Von diesem Mangel frei ist das biegsame Kreislineal von *E. Tschebyscheff*. Dieses besteht aus einem langen, gut elastischen Stahlstreifen, dessen Rückseite in eine Kette von miteinander zusammenhängenden Gliedern eingefügt ist. Wird das Ganze gekrümmt, so bilden die Glieder der Kette ein reguläres Polygon, dem der Streifen sich tangential anschließt. Eine Beschreibung dieses Lineals, das ursprünglich als Hilfsmittel zum

<sup>1)</sup> Man wird ohne weiteres die Anwendbarkeit des Lillschen Verfahrens auf algebraische Gleichungen beliebig hohen Grades erkennen; nähere Ausführungen findet man etwa bei *v. Sanden*, *Praktische Analysis*, 2. Aufl., Leipzig 1923.

Zeichnen sehr flacher Kreisbogen erdacht ist, findet man in einer Arbeit von *F. Helmert*<sup>1)</sup>.

Wir erwähnten dieses Instrument, um zu zeigen, wie gerade theoretische Anforderungen unter Umständen auf ganz andere Hilfsmittel als auf Zirkel und Lineal verweisen. Wenden wir die Studysche Forderung auf die projektive, affine und metrische Gruppe an, so ergibt sich, daß in bezug auf die metrische Gruppe Lineal, fest eingestellter Zirkel, rechter Winkel, ja überhaupt jeder bewegliche starre Körper invariante Zeichenhilfsmittel sind, für die affine und projektive Gruppe aber unter den eben genannten nur das Lineal. Auf keinen Fall wiederum ergibt sich eine Vorzugsstellung des Zirkels vor dem rechten Winkel. Wir können somit zusammenfassend sagen, irgendeinen stichhaltigen Grund, beim Konstruieren sich auf Lineal und Zirkel zu beschränken und den beweglichen rechten Winkel also auszuschließen, gibt es überhaupt nicht. Auch die Praxis des Zeichnens liefert hierfür keinen Grund; denn diese verlangt gerade möglichst große Bewegungsfreiheit in dem Gebrauch der Instrumente.

Es gibt eine Menge weiterer Instrumente zur Konstruktion höherer Kurven, die in der Theorie alle richtig sind, aber praktisch allerlei Fehlerquellen unterliegen. In der Lehre von den graphischen Methoden tritt neben die alten Konstruktionsmittel die weitgehendste Benutzung der transzendenten Kurven und aller möglichen Transformationen. Auch für die verschiedenen Arten von Koordinatenpapieren, die dabei Verwendung finden, wäre der Konstruktionsbereich anzugeben. Über die Reichweite nomographischer Methoden lese man den zusammenfassenden Bericht *P. Luckeys*: Die Verstreckung (Anamorphose) und die nomographische Ordnung im 4. Bande (1924) der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik nach.

Nicht mathematisch ist im großen und ganzen das sogenannte Kurvenlineal der Techniker, d. h. ein von einem gefälligen Umriß umgrenztes ebenes Blatt, von welchem der Zeichner immer denjenigen Teil der Kontur benutzt, der für seine Zwecke die gefälligste Lösung darzustellen scheint.

#### 4. Über die Anwendung von Transformationen zur Vereinfachung geometrischer Aufgaben.

Eine oft zum Ziele führende Methode zur Lösung geometrischer Aufgaben besteht darin, daß man die gestellte Aufgabe durch Anwendung einer geeigneten Transformation in eine einfachere überführt und nach deren Lösung mit Hilfe der inversen Transformation wieder zurückgeht. Natürlich muß die Transformation die für die

<sup>1)</sup> Zeitschrift für Vermessungswesen Bd. VI, S. 147 ff. 1877. — Ob das Kreislineal für Konstruktionen auf der Kugel *praktisch* brauchbar ist, bleibe dahingestellt.

Aufgabe wesentlichen Eigenschaften der Figur unverändert lassen. In den für die Schule gedachten Darstellungen findet man neben der Hauptgruppe besonders die der Transformation durch reziproke Radien verwendet. Eine sehr schöne Sammlung von Beispielen dieser Art stellt ein Bändchen von *B. Kerst* aus der mathematisch-physikalischen Bibliothek dar<sup>1)</sup>. Die affine und die projektive Gruppe dagegen findet man vorzugsweise in den Büchern über darstellende Geometrie benutzt. Eine im Schulunterricht wenig beachtete oder zum mindesten nicht deutlich herauskommende Transformationsart ist die der *Dilatation*. Sie wird bei manchen Lösungen des Berührungsproblems des *Apollonius* und bei der ganz elementaren Aufgabe verwendet, die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise zu zeichnen. Um sie richtig aufzufassen, ist es notwendig, die Begriffe „orientierter Kreis“ und „orientierte Gerade“ heranzuziehen. Der orientierte Kreis, auch *Zykel* genannt, ist ein Kreis mit Umlaufungssinn. Sein Halbmesser soll als positiv angesehen werden, wenn er entgegen dem Uhrzeigersinne umlaufen wird, sonst als negativ. Jeder Kreis ist der Träger zweier Zyklen. Die orientierte Gerade, auch als *Speer* bezeichnet, ist die unbegrenzte Gerade mit Durchlaufungssinn. Jede Gerade ist der Träger zweier Speere. Man kann den orientierten Kreis auffassen als umhüllt von einer Schar von Speeren. Zwei gleichsinnig orientierte Kreise, von denen nicht der eine in dem andern liegt, haben nur zwei Speere als äußere Tangenten gemeinsam (vgl. Abb. 151). Zwei entgegengesetzt orientierte Kreise, die sich nicht schnei-

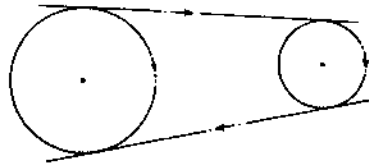


Abb. 151.

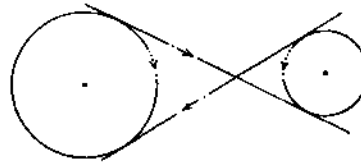


Abb. 152.

den und von denen der eine den andern nicht umschließt, haben zwei Speere als innere Tangenten gemeinsam (vgl. Abb. 152). Wenn man die beistehenden Figuren betrachtet, wird man sofort an durch Riemen verbundene Triebräder denken, die sich ja gleichsinnig drehen, wenn die Riemen äußere Tangenten darstellen, aber gegensinnig umlaufen, wenn jene überkreuzt sind und also innere Tangenten bilden. Unter der Normalenrichtung eines Speeres wollen wir nun den Durchlaufungssinn desjenigen Speeres verstehen, in welchen der betrachtete übergeführt wird, wenn man ihn sich entgegen dem Uhrzeigersinne um irgendeinen seiner Punkte um  $\frac{\pi}{2}$  drehen läßt. Wir definieren jetzt die Dilatation als eine Berührungstransformation, bei der alle Speere in ihrer Normalen-

<sup>1)</sup> *Kerst*: Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Leipzig 1916.



richtung um denselben Betrag  $a$  parallel mit sich verschoben werden. Man erkennt, daß diese Transformation einen orientierten Kreis vom Radius  $r$  in einen *konzentrischen* vom Radius  $r - a$  übergehen läßt; der neue Kreis hat den gleichen oder entgegengesetzten Umlaufssinn, je nachdem  $r - a$  und  $r$  gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die beiden Zykeln, in die ein Kreis zerfällt, treten auseinander; der eine schrumpft zusammen, der andere dehnt sich aus. Wird der Radius eines Zyklus um den Betrag  $a$  der Dilatation größer, so wachsen die Radien der mit ihm gleichsinnigen Zykeln alle um denselben Betrag  $a$ , während die der gegensinnigen Zykeln um diesen Betrag kleiner werden. Ferner bleibt die Berührung zwischen zwei Zykeln oder zwischen einem Zykel und einem Speer erhalten, wenn das den beiden Gebilden gemeinsame Linienelement von ihnen in demselben Sinne durchlaufen wird. Daß die Dilatationen eine Gruppe bilden, ist unmittelbar klar. — Die Lösung der Aufgabe, die gemeinsamen äußeren Tangenten zweier Kreise mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  zu finden, gestaltet sich nach diesen Vorbereitungen wie folgt (vgl. Abb. 153): Wir versehen die beiden Kreise mit positivem Umlaufssinn, unterwerfen sie einer Dilatation, die

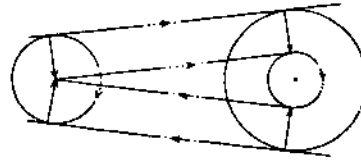


Abb. 153.

den Betrag  $r_1$  des kleineren Radius hat und die beiden Kreise zusammenschrumpfen läßt. Der kleinere der beiden Kreise geht in seinen Mittelpunkt über, der größere unter Erhaltung seines Mittelpunktes in einen Kreis mit dem Radius  $r_2 - r_1$ . Damit ist die ursprüngliche Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt, von einem Punkte aus die Tangenten an einen Kreis zu ziehen. Ist diese gelöst, so führt die zur ersten inverse Dilatation zum Ziele. Sind die inneren Tangenten zweier Kreise zu konstruieren, so haben wir diese mit entgegengesetztem Umlaufssinn zu versehen und sie derjenigen Dilatation zu unterwerfen, bei der der kleinere Kreis in seinen Mittelpunkt übergeht. Der größere wird dabei in einen Kreis mit dem Radius  $r_1 + r_2$  übergeführt, wenn  $r_1, r_2$  die Absolutwerte der Radien sind (vgl. Abb. 154).

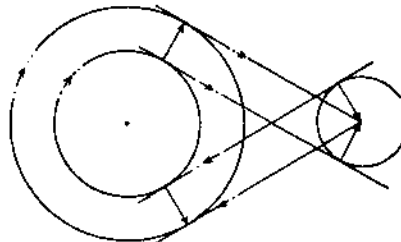


Abb. 154.

Auch die Figur des Apolloniusproblems gehört, wenn man die in ihr auftretenden Kreise durch ihre Zykeln ersetzt, zur Gruppe der Dilatationen. Das ist kein Widerspruch zu unserer früheren Bemerkung, nach der die Gruppe der Transformationen durch reziproke Radien die größte ist, die sich berührende Kreise wieder in Kreise dieser Art über-

führt. Wir haben uns nämlich bei jener Aussage auf eineindeutige Punkttransformationen beschränkt. Die Dilatation ist jedoch keine eineindeutige Punkttransformation, da bei ihr ein Punkt einem Kreis entspricht; sie ist vielmehr eine eineindeutige Transformation der gerichteten Linienelemente. Vermöge einer geeigneten Dilatation kann man die Aufgabe des Apollonius durch die einfachere ersetzen, alle Kreise zu finden, die zwei gegebene Kreise berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen.

##### 5. Neuere Literatur über die Durchführung des Erlanger Programms.

Vom Standpunkte der Theorie der Transformationsgruppen aus ist das, was man gemeinhin zur Elementargeometrie rechnet, ein buntes Gemisch aus Bestandteilen sehr verschiedener Geometrien. Außer der Hauptgruppe treten dort z. B. auf die Gruppen der affinen und projektiven Transformationen, die der Transformationen durch reziproke Radien und die der Dilatationen. Dabei kommen Untergruppen der eben genannten Gruppen zum Teil sehr ausgeprägt zur Geltung, neben den Gruppen der Parallelverschiebungen und der Drehungen um einen Punkt z. B. diejenige der inhaltstreuen Affinitäten, welche die Lehre von der Flächengleichheit ebener Vielecke mit ihren Sätzen wie denen über die Ergänzungsparallelogramme und die Inhaltsgleichheit von Dreiecken mit gleicher Grundlinie und Höhe beherrscht. Eine Forderung des Erlanger Programms ist, jene verschiedenartigen Bestandteile der Elementargeometrie voneinander zu trennen und für sich zu entwickeln. Mit Beschränkung auf die Affinitäten beschreibt schon *Möbius*<sup>1)</sup> dieses Ziel gelegentlich, nachdem er einige grundlegende Sätze der affinen Geometrie genannt hat, mit den folgenden klaren Worten: „Es dürfte daher wohl nicht unzweckmäßig genannt werden, wenn man es versuchte, von diesen einfachen Sätzen gleichsam als Grundsätzen ausgehend, jene allgemeinen Eigenschaften — die in geometrischen Schriften zwar in großer Menge, aber mit den anderen spezielleren Eigenschaften vermischt und oft durch fremdartige Hilfsmittel, als trigonometrische Formeln u. dgl. bewiesen vorkommen — möglichst vollständig zu entwickeln, sie systematisch zu ordnen und somit ein eigenes geometrisches Gebäude *ohne Winkelmaß* und *Magister Matheseos*<sup>2)</sup> aufzuführen.“ Eine in diesem Sinne selbständige Entwicklung der affinen Geometrie findet man in dem Lehrbuch der analytischen Geometrie von *L. Heffter* und *C. Köhler*<sup>3)</sup>. Von *W. Blaschke* und anderen wurde in neuerer Zeit eine affine, und zwar vorwiegend inhaltstreu affine Differentialgeometrie geschaffen. Eine zusammenhängende Darstellung dieser Unter-

<sup>1)</sup> Gesammelte Werke Bd. I, S. 392f.

<sup>2)</sup> Gemeint ist der pythagoräische Lehrsatz.

<sup>3)</sup> Bd. I, Leipzig 1905; Bd. II, 1923.

suchungen enthält der zweite Band von Blaschkes Differentialgeometrie<sup>1)</sup>.

Die Aufgabe, die „unhomogene“ Masse Elementargeometrie nach den Gesichtspunkten des Erlanger Programms zu klären, wird in der „Koordinatengeometrie“ von *H. Beck*<sup>2)</sup> durchgeführt. Wir möchten auf dieses wertvolle und aufschlußreiche Buch, das im Anschluß an Untersuchungen *Studys* und seiner Schüler entstanden ist, ganz besonders hinweisen. Auf neuere Verallgemeinerungen des ganzen im Erlanger Programm gegebenen Ansatzes einzugehen, liegt jenseits der Grenzen der in diesem Buche behandelten Gedankengänge.

### 6. Zur darstellenden Geometrie.

An neueren Werken über darstellende Geometrie gibt es eine große Anzahl. Unter ihnen seien die von *E. Müller*<sup>3)</sup> und *G. Scheffers*<sup>4)</sup> hervorgehoben. Unbestritten dürfte die Bedeutung der darstellenden Geometrie für die Technik und in pädagogischer Hinsicht ihr Wert für die Ausbildung der geometrischen Anschauung sein. Viele Mathematiker halten sie aber für eine Wissenschaft, die erstarrt ist; sie sehen in ihr eine Disziplin, die aufgehört hat, dem Forscher Probleme zu stellen, die am Ende ihrer Entwicklung angelangt ist. Mochte es auch eine Zeitlang scheinen, daß diese Auffassung richtig ist, so muß sie heute, vor allem dank der Arbeiten italienischer und österreichischer Geometer, bestritten werden. In Österreich ist es der eben genannte, an der Wiener Technischen Hochschule lehrende *E. Müller*, der, von einer großen Anzahl von Schülern unterstützt, in der darstellenden Geometrie neue Bahnen beschritten hat. Einen ausführlichen Bericht hierüber bringt *E. Kruppa* in dem vierten Bande (1924) der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Die Methoden der darstellenden Geometrie von möglichst hohen geometrischen Gesichtspunkten aus zu betrachten und die allgemeinsten Prinzipien aufzuweisen, denen sie sich einordnen lassen, ist das Ziel des von *E. Müller* und *E. Kruppa* gemeinsam herausgegebenen Werkes: Die linearen Abbildungen<sup>5)</sup>.

### 7. Die Nepersche Regel und das Pentagramma mirificum.

Die Nepersche Regel dient bekanntlich zur Berechnung von rechtwinkligen sphärischen Dreiecken Eulerscher Art (d. s. sphärische Drei-

<sup>1)</sup> Vorlesungen über Differentialgeometrie Bd. I, 2. Aufl. Berlin 1924; Bd. II, 1923.

<sup>2)</sup> Berlin 1919.

<sup>3)</sup> 2 Bände, 2. und 3. Aufl. Leipzig 1920.

<sup>4)</sup> 2 Bände, Berlin 1919 und 1920.

<sup>5)</sup> Leipzig und Wien 1923.

ecke in elementarer Auffassung; vgl. Bd. I, S. 189). Sie lautet: Man denke sich die 5 von  $\frac{\pi}{2}$  verschiedenen Stücke eines rechtwinkligen sphärischen

Dreiecks in einer ihrer natürlichen Lage entsprechenden Reihenfolge zyklisch hingeschrieben, dabei die Katheten durch ihre Komplemente ersetzend (vgl. Abb. 155). Dann ist der Kosinus irgendeines Stückes erstens gleich dem Produkt der Sinus der von ihm getrennten und zweitens gleich dem Produkt der Kotangenten der ihm anliegenden Stücke.

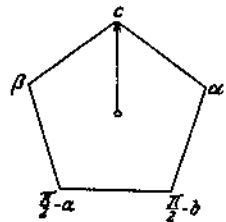


Abb. 155.

Die Abb. 155 bezieht sich auf ein Dreieck  $ABC$ , dessen rechter Winkel bei  $C$  liegt. Die 5 von

Neper als *zirkulär* bezeichneten Stücke  $c, \beta, \frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} - b, \alpha$  sind an die Ecken eines regelmäßigen

Fünfecks geschrieben, in einer Reihenfolge, die sich ergibt, wenn das Dreieck entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne umlaufen wird. Die Abb. 155 ist selbst ebenfalls entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne zu umlaufen; die Hypotenuse  $c$  ist durch einen vom Mittelpunkt des Fünfecks ausgehenden Zeiger hervorgehoben. — Für den gewöhnlichen Unterricht ist die Nepersche Regel lediglich eine Gedächtnishilfe. Man denkt gar nicht daran, zu fragen, ob sie der Ausdruck einer geometrischen Gesetzmäßigkeit ist. Nachdem die 10 zum rechtwinkligen sphärischen Dreieck gehörigen Formeln abgeleitet sind, wird sie zur leichteren Beherrschung dieser Formelgruppe einfach gelernt. Diese Art der Behandlung geht an den schönen

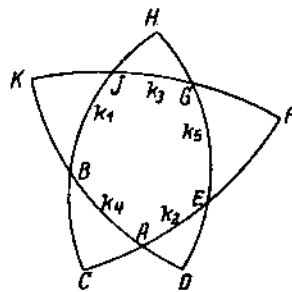


Abb. 156.

und leicht aufzufassenden Betrachtungen Nepers achtlos vorüber. In seiner *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* von 1619 (Lib. II, Kap. IV, S. 30ff.) gewinnt Neper die Regel aus der folgenden Figur.  $ABC$  sei wieder ein bei  $C$  rechtwinkliges sphärisches Dreieck (vgl. Abb. 156, die als stereographische Projektion gedacht ist). Die Großkreise, auf denen die Katheten  $BC$  und  $CA$  liegen, seien mit  $k_1$  und  $k_2$  bezeichnet, der Großkreis der Hypotenuse  $AB$  aus einem Grund, der sofort ersichtlich wird, mit  $k_4$ . Wir konstruieren nun

diejenigen beiden Großkreise, für welche die Endpunkte der Hypotenuse Pole sind; der zu  $A$  gehörige sei mit  $k_3$ , der zu  $B$  gehörige mit  $k_5$  bezeichnet. Dann schneiden sich unter rechten Winkeln  $k_1$  und  $k_2$  bei  $C$ ,  $k_2$  und  $k_3$  bei  $F$ ,  $k_3$  und  $k_4$  bei  $K$ ,  $k_4$  und  $k_5$  bei  $D$ ,  $k_5$  und  $k_1$  bei  $H$ . Es entsteht so eine in sich geschlossene Kette von fünf rechtwinkligen Dreiecken, deren rechte Winkel bei  $C, D, F, H, K$  liegen und deren Hypotenusen das Fünfeck  $AEGJB$  bilden. Dieses Fünfeck wird wegen seiner merkwürdigen Eigenschaften als *Pentagramma mirificum* be-

zeichnet; insbesondere hat es das Interesse von *Gauß* verschiedentlich auf sich gelenkt<sup>1)</sup>).

Man erkennt leicht, daß die Eckpunkte des genannten Fünfecks sämtlich Pole der Großkreise  $k_1 \dots k_5$  sind, und zwar ist bereits nach Konstruktion  $A$  Pol von  $k_3$ ,  $B$  Pol von  $k_5$ ; außerdem ist  $E$  als Schnittpunkt der beiden zu  $k_1$  rechtwinkligen Kreise  $k_5$  und  $k_2$  Pol von  $k_1$  und entsprechend ist  $G$  Pol von  $k_4$ ,  $J$  Pol von  $k_2$ . Hieraus ergibt sich, daß die Seiten  $BD, CE, AF, DG, EH, FJ, GK, HB, JC, KA$  durchweg gleich  $\frac{\pi}{2}$  sind. Demnach läßt sich das Dreieck  $ADE$  aus  $ABC$  so konstruieren, daß man die Hypotenuse  $BA$  und die Kathete  $CA$  um ihre Komplemente verlängert. *Durch sukzessive Anwendung dieses Konstruktionsprozesses geht aus dem Ausgangsdreieck die volle Dreieckskette hervor.*

Die zyklische Anordnung der zirkulären Stücke des Dreiecks  $ABC$  möge wieder auf die Abb. 155 führen. Wir berechnen jetzt die zirkulären Stücke von  $ADE$  aus denen von  $ABC$ . Es ist:

$$\frac{\pi}{2} - AD = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - c \right) = c; \quad \sphericalangle DAE = \alpha, \quad AE = \frac{\pi}{2} - b$$

und (man denke sich  $ED$  über  $D$  hinaus bis zum Schnitt mit  $BC$  über  $C$  hinaus verlängert):

$$\sphericalangle AED = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{\pi}{2} - DE = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \beta.$$

Schreiben wir die zirkulären Stücke des Dreiecks  $ADE$  in derselben Art hin wie es für  $ABC$  geschah, so erhalten wir bis auf die Lage des Hypotenusenzeigers genau wieder die Abb. 155. Die Aufeinanderfolge und Größe der zirkulären Stücke hat sich nicht geändert, nur ihre Bedeutung ist eine andere geworden. Denken wir daran, daß von den auf  $ADE$  folgenden Dreiecken jedes zu dem vorhergehenden in derselben Beziehung steht, wie  $ADE$  zu  $ABC$ , so können wir den Satz aussprechen: *Die Abb. 155 ist, von der Lage des Hypotenusenzeigers abgesehen, invariant in bezug auf die Gruppe der Operationen, die irgend ein Dreieck der in Abb. 156 gezeichneten Kette durch ein anderes ebenfalls der Kette angehörendes ersetzen.*

Daß dieser einfache Zusammenhang herauskommt, verdanken wir wesentlich dem Umstande, daß *zu den zirkulären Stücken die Komplemente der Katheten und nicht die Katheten selbst gerechnet werden*<sup>2)</sup>. Ausdrücklich bemerkt sei, daß alle Dreiecke in demselben Sinne umlaufen werden müssen. — Schließlich, auf die Bedeutung der Stücke achtend, stellen wir fest, daß der Hypotenusenzeiger der Abb. 155 beim

<sup>1)</sup> Vgl. in *Gauß*: Gesammelte Werke Bd. VIII, S. 112 ff. Göttingen 1900, die Bemerkungen von *Fricke* zu den elf Pentagrammfragmenten.

<sup>2)</sup> Man kann auch wie *Neper* die Katheten und die Komplemente der Hypotenuse und der ihr anliegenden Winkel als zirkuläre Stücke nehmen.

Übergang von  $ABC$  nach  $ADE$  eine positive Drehung um  $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$  ausführt (vgl. Abb. 157), und das gleiche gilt für den Übergang von  $ADE$  zu  $EFG$ . Demnach wird, wenn wir die Dreieckskette durchlaufen, jedes der zirkulären Stücke von  $ABC$  einmal Hypotenuse, zweimal Kathetenkomplement und zweimal spitzer Winkel. Die 5 Seiten des Pentagramma mirificum werden, allerdings unter Abänderung der Reihenfolge, von den 5 zirkulären Stücken gebildet. Haben wir für  $ABC$  die Formel

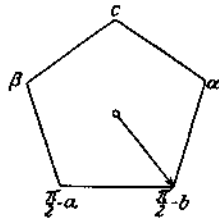


Abb. 157.

$\cos c = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$  abgeleitet, so sind damit, da die Eigenschaften, Hypotenuse und Kathete zu sein, als zufällig und nur die Anordnungsbeziehungen als wesentlich erkannt sind, *5 Formeln in eine gefaßt*. Das gleiche gilt für die Formel  $\cos c = \cotg \alpha \cdot \cotg \beta$ , die sich aus einigen der vorhergehenden 5 durch Elimination ergibt. Betrachten wir in der Abb. 155 die Buchstaben als fest-

stehend, das Fünfeck aber als um seinen Mittelpunkt drehbar und mit dem Hypotenusenzeiger starr verbunden, so können wir die Gruppe der Operationen, die ein Dreieck unserer Kette in ein anderes transformieren, unter dem Bilde der Gruppe der Drehungen betrachten, bei denen das Fünfeck in sich übergeht.

Wir haben uns nicht streng an Nepers Darstellung gehalten. Ein Punkt in den Neperschen Ausführungen scheint uns aber besonders beachtenswert und dabei wenig bekannt zu sein; er soll von uns daher nicht übergangen werden. Wir meinen damit die Art, wie Neper seine Figur am Himmel auffindet. Er geht zu diesem Zwecke von dem Dreieck Pol, Nordpunkt und untergehende Sonne aus, das beim Nordpunkt rechtwinklig ist. Wenn wir in Abb. 156  $B$  als Pol,  $C$  als Nordpunkt,  $A$  als Ort der untergehenden Sonne nehmen, so hat er mithin als Großkreis  $k_1$  den Ortsmeridian, als  $k_2$  den Horizont, als  $k_4$  den Meridian der Sonne, als  $k_5$  den Himmelsäquator, als  $k_3$  den Großkreis, der die Sonne als Pol hat und der kurz Begleitkreis der Sonne heißen soll. Das Pentagramma mirificum hat dann als Eckpunkte untergehende Sonne, Westpunkt, Schnittpunkt des Himmelsäquators mit dem Begleitkreis der Sonne, Zenit und Pol. Unsere Abbildung würde dabei nördliche Deklination der Sonne voraussetzen.

(S.)

## Zusatz II.

### Ergänzungen über den geometrischen Unterricht in den einzelnen Ländern.

Die Ausführungen unseres den geometrischen Unterricht behandelnden Anhangs sind um das Jahr 1908 niedergeschrieben worden, gerade vor Beginn der Arbeit der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (Imuk). Seitdem die tatsächlichen Ermittlungen der Imuk etwa bei Kriegsbeginn ihren Abschluß fanden, hat in fast allen Kulturländern eine tiefgreifende Umgestaltung der Unterrichtsverhältnisse eingesetzt. Man könnte daraus schließen, daß die sämtlichen Darstellungen der Imuk als veraltet beiseite gelegt werden müßten. Demgegenüber sind wir der Überzeugung, daß in der Mehrzahl der Imuk-Berichte der Reichtum an solchen Ideen, die bleibenden Wert besitzen, viel zu groß ist, als daß man jenem Urteil auch nur im entferntesten beipflichten dürfte.

Eine Darstellung der in der Nach-Imuk-Zeit sich auf dem Gebiete des Unterrichtwesens abspielenden Vorgänge ist, namentlich was das Ausland anlangt, recht schwierig. Es ist nicht leicht, für eine zuverlässige Beurteilung der neueren Bewegungen in den verschiedenen Ländern hinreichende Unterlagen zu bekommen, schon deshalb nicht, weil noch vieles im Fluß ist. Wir werden uns daher im folgenden auf die Mitteilung von uns wesentlich erscheinenden Einzeltatsachen beschränken, deren Kenntnis wir entweder der Imuk verdanken oder die uns sonst zufällig entgegengetreten sind.

Ein typischer Zug der neueren Entwicklungen sei jedoch hier vorweggenommen. Es ist die geringe Schätzung, die Mathematik und Naturwissenschaften im Vergleich zur Muttersprache, Literatur, Geschichte und Kunst als Bildungsmittel und Bildungselement überhaupt nachgerade in weiten Kreisen erfahren. Das genaue Gegenteil hätte man in Anbetracht der Zeitumstände erwarten sollen; denn unzertrennlich mit jenen Wissenschaftsgebieten verknüpft ist die Technik, deren ungeheure Bedeutung für das Leben der Völker — für die Landesverteidigung im Kriege, für den alle Kulturarbeit erst möglich machenden Wohlstand im Frieden — sich nie so eindringlich dem Bewußtsein der Menschen aufgezwungen hat wie in unseren Zeiten. Aber es mag sein,

daß die gewaltigen Ausmaße, in denen das Vordringen der Technik sich vollzogen hat und noch weiter vollzieht, an der seelischen Kraft und der Aufnahmefähigkeit der meisten Menschen gemessen, für die Mehrzahl ein Zuviel an Technischem brachten und zur Übersättigung führten. So ist jene der Mathematik und den Naturwissenschaften feindliche Bewegung, die in allen am Kriege beteiligt gewesenen Staaten anzutreffen ist, wohl zum Teil wenigstens als eine Ermüdungserscheinung zu deuten.

In Frankreich führte diese Stimmung im Jahre 1923 zu der Reform des Unterrichtsministers Bérard, welche für die ersten 4 Jahre aller höheren Schulen Latein als obligatorisches Unterrichtsfach erklärte und damit die rein realistischen Schultypen beseitigen wollte. Diese Reform wurde besonders von den Abgeordneten *Herriot*, *Painlevé* und *Leygues* bekämpft. Painlevé ist der bekannte französische Mathematiker und Leygues der Minister, unter dessen Leitung die Unterrichtsreform von 1902 stattfand. Herriot stellte, als er Ministerpräsident wurde, im wesentlichen den alten Zustand, der die lateinlose höhere Schule neben den anderen als mit diesen gleichberechtigt zuließ, wieder her. Sehr traurig scheint uns die Lage des mathematischen und vor allem des naturwissenschaftlichen Unterrichts an den italienischen Schulen zu sein. Dort hat man einem Plane zufolge, der von dem faschistischen Minister *Gentile* dekretiert wurde, eine Reihe von Schultypen, an denen bei wenig Mathematik Naturwissenschaften überhaupt nicht getrieben werden. Über die nicht genügende Wertung, die unsere Fächer bei der preußischen Schulreform erfahren, ist bereits früher (vgl. Bd. I, S. 298 ff.) berichtet worden. Ganz anders geartet als die bei der preußischen Schulreform vorherrschende Meinung scheint in dieser Hinsicht die Auffassung des Reichskanzlers *Luther* zu sein; seine bei der Eröffnung des Deutschen Museums in München gehaltene Rede war ein uneingeschränktes, von starker innerer Überzeugung getragenes Bekenntnis zu Wert und Würde technischer Arbeit.

In Rußland erfahren die genannten Fächer eine außerordentlich hohe Wertschätzung, allerdings nur insofern, als sie in offensichtlicher Weise mit den Dingen des praktischen Lebens in enger Beziehung stehen. Hierüber und über die vorher genannten Reformen findet man einiges in einer Veröffentlichung, die von unserem Reichsministerium des Inneren unter dem Titel „Europäische Unterrichtsreformen seit dem Weltkriege“<sup>1)</sup> herausgegeben wurde. Über die nun wieder rückgängig gemachte französische Unterrichtsreform von 1923 liegt uns von Bérard selbst ein Bericht über die Diskussionen vor, die im Anschluß an seine Vorschläge in der französischen Kammer stattfanden<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Bearbeitet im Reichsministerium des Innern. Leipzig 1924.

<sup>2)</sup> Leon Bérard, *Pour la réforme classique de l'enseignement secondaire*. Paris 1923.



Die Verfügungen, welche die Reform Italiens betreffen, sind vom italienischen Unterrichtsministerium zu einem Band zusammengestellt worden, der 1924 unter dem Titel „Raccolta di Norme e Regolamentari sull'Ordinamento dell'Istruzione Media“ erschienen ist<sup>1)</sup>. -- In den nun folgenden Erörterungen über Unterrichtsfragen werden wir uns wie in unserem Schlußkapitel auf England, Frankreich, Italien und Deutschland beschränken. Wir beginnen mit der Besprechung englischer Schulverhältnisse.

### 1. England.

Über das Schulwesen Englands liegen uns die Abhandlungen des englischen Unterausschusses der Imuk, die unter dem Titel „The Teaching of Mathematics in the United Kingdom“ zu zwei Bänden zusammengefaßt worden sind<sup>2)</sup>, und außerdem ein deutscher Imuk-Bericht von *G. Wolff*<sup>3)</sup> vor. Dem letzteren entnehmen wir zunächst die Tatsache der großen Kompliziertheit und Unübersichtlichkeit in der Organisation des englischen Schulwesens. „Es wurde mir erzählt,“ so berichtet Wolff auf S. 24 seines Referates charakteristisch genug, „daß die Inspektoren eine Schule zu revidieren hatten. Vor der Inspektion mußten der Direktor und die Lehrer über den Aufbau und die Stoffverteilung der Schule genau Bericht erstatten. Trotzdem hatten die Inspektoren Mühe, sich zurechtzufinden, und erst am dritten Tage begann es zu dämmern.“ Die nahezu vollständige Unabhängigkeit der einzelnen Schule von einer zentralen staatlichen Gewalt macht es möglich, ihre Organisation in einem bei uns unbekanntem Ausmaße den individuellen Bedürfnissen der Schüler anzupassen. So haben dort viele höhere Schulen auf einem gemeinsamen Unterbau eine in mehrere Abteilungen gegliederte Oberstufe. Als solche Abteilungen trifft man in der Regel an the classical side mit Latein und Griechisch, the modern side mit Französisch und Deutsch und the science side mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Einschlag. Für die Möglichkeit, von einem Zweig zum anderen überzugehen, wird durch besondere Maßnahmen gesorgt. Sind Parallelklassen vorhanden, so werden oft die Begabteren von den weniger Begabten getrennt; den ersteren wird es überdies durch halbjährige oder gar tertiale Versetzung möglich gemacht, schneller als

<sup>1)</sup> Roma 1924.

<sup>2)</sup> Der genaue Titel ist: Board of Education — Special Reports on Educational Subjects; Volume 26 and 27. The Teaching of Mathematics in the United Kingdom. Being a series of Papers prepared for the International Commission on the Teaching of Mathematics, Part I and Part II. London, Published by his Majesty's Stationery Office 1912. (Zu beziehen etwa durch Wyman and Sons.)

<sup>3)</sup> *G. Wolff*: Der mathematische Unterricht der höheren Knabenschulen Englands. Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Zweite Folge. II. Leipzig 1915.

die anderen vorwärtszukommen. Bei der Versetzung ist das klassenweise Aufrücken in allen Fächern nicht notwendig. So kann ein Schüler in der Mathematik in einer anderen Klasse sitzen als in den Sprachen. Somit besteht die Bewegungsfreiheit, die gegenwärtig für unsere höheren Schulen vielfach gefordert wird, in England seit langem uneingeschränkt. Dieser Freiheit in der Organisation steht jedoch im Hinblick auf die Art der Unterrichtsführung eine große innere Unfreiheit gegenüber, die im wesentlichen in zwei Tatsachen ihre Wurzel hat, nämlich in der Zentralisation des Prüfungswesens, von der schon gesprochen wurde, und in der mangelhaften wissenschaftlichen und pädagogischen Ausbildung eines großen Prozentsatzes der an den höheren Schulen Englands unterrichtenden Lehrer.

Mit dem eben geschilderten Umstände hängt zusammen, daß die Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts in England nur sehr langsam Fortschritte macht. Noch immer ist im großen und ganzen Euklid das Standard Work des Geometrieunterrichtes; besonders kraß wirkt sich der Euklideinfluß in der Bewertung der Stereometrie aus. Sie wird von Euklid nur wenig berücksichtigt, und die gleiche stiefmütterliche Behandlung erfährt sie infolgedessen im Durchschnittsunterricht der englischen Schulen.

Unter den Engländern, die in der neueren Geschichte des mathematischen Unterrichts eine Rolle spielen, haben wir auf S. 233 f. und 236 *Perry* und *Branford* hervorgehoben. Perrys radikales Programm hat bei vielen seiner Landsleute starken Widerspruch geweckt, und wie wir selbst betonten, zu einem großen Teil mit gutem Recht. An eine auch nur einigermaßen vollständige Durchführung seiner Vorschläge, soweit sie die höheren Schulen betreffen, wird heute kaum noch ernsthaft gedacht. Perrys Vorgehen zeitigte jedoch ein sehr wertvolles Ergebnis, das darin bestand, daß man in weiten Kreisen der Mathematiklehrer die Notwendigkeit einsah, dem deduktiven Geometrieunterricht einen experimentellen propädeutischen Kurs vorzuschicken.

Der Einfluß Branfords soll nach Wolff gering gewesen sein. Trotzdem möchten wir gerade ihn als einen Methodiker allerersten Ranges bezeichnen. Ein aus seinem Ideenkreise herausgewachsenes Lehrbuch, über das ausführlicher berichtet werden mag, ist „A School Course of Mathematics“ von *David Mair*<sup>1)</sup>. Dieser tritt für die Unterrichtsart ein, die man heute wohl meint, wenn man von *Arbeitsunterricht* spricht. Sie ist durch folgende Merkmale gekennzeichnet: Den Ausgangspunkt des Unterrichts bilden geschickt ausgewählte Probleme. Die Lösung dieser Probleme soll durch Diskussion zwischen Schülern und Lehrer unter einem Minimum an Führung von seiten des letzteren zustande gebracht werden. Je mehr die Schüler aus sich selbst und ohne Hilfe des Lehrers die

<sup>1)</sup> Oxford. At the Clarendon Press. 1907.

Lösung entwickeln, um so sicherer, so behauptet Mair mit Recht, beherrschen sie die erlangten Kenntnisse, um so wertvoller ist die Ausbildung des Geistes, die sie beim Unterricht empfangen. Sollen aber die Schüler in der Lage sein, selbständig mathematische Überlegungen anzustellen, so müssen sie einen gewissen Vorrat an konkreter mathematischer Erfahrung besitzen. Wenn die Schüler im Denken langsam sind, wird es, so meint Mair weiter, gut sein, jenen Vorrat durch Zeichen- und Meßübungen zu vermehren, den Kurs also hauptsächlich experimentell fortzusetzen und dann erst zum Durchdenken der durch Erfahrung gefundenen Resultate zurückzukehren. „To repeat the words of another's reasoning is not to reason“ (S. 11). Bei schwierigeren Problemen wird gelegentlich empfohlen, besonders auf die Geschwindigkeit zu achten, mit der der Unterricht vorwärtsgeht. Denn die sowohl für die praktischen wie die formalen Zwecke des Unterrichts tauglichste Methode, nämlich die der Entdeckung durch die Schüler, sei nur bei langsamem Fortschreiten möglich, wenn der Gang schneller sei, könne der Unterricht nur dogmatisch geführt werden. Noch größere Eile würde den Geist des Schülers verwirren und könne sogar eine Gefahr für seine Gesundheit sein. Ferner achtet Mair besonders darauf, den Schüler nicht zu Beweisen aufzufordern, deren Notwendigkeit er nicht einzusehen vermag, da ein solches Vorgehen in dem jugendlichen Geist jeden Sinn für Wesen und Ziel eines mathematischen Beweises zerstören muß. Er warnt davor, den Schülern logische Schwierigkeiten aufzuweisen, die sie nicht selbst fühlen.

Ganz besonders kommt es bei solchem Unterricht auf die richtige Auswahl der Probleme an. Es muß — so betont *Mair* — dafür Sorge getragen werden, daß diese intensive Methode die theoretische und praktische Tragweite der durch den Unterricht erarbeiteten Kenntnisse nicht zu sehr einschränkt. Mair, der sein Buch für Jahrgänge schreibt, die unserer Unter- und Mittelstufe angehören, geht immer von solchen Problemen des praktischen Lebens aus, deren richtige Behandlung hinreichend großen Wert für die Geistesbildung hat. Er argumentiert so (vgl. das Vorwort): Der Wert eines Problems kann nach zwei Gesichtspunkten beurteilt werden, einmal nach dem Wert der Kenntnisse, die seine Lösung vermittelt, und zweitens nach dem erzieherischen Wert, der mit der Erarbeitung der Lösung verknüpft sein kann. Der Kenntniswert eines Problems ist um so größer, je enger es mit dem menschlichen Leben und seinen Interessen verbunden ist, und um so geringer, je weiter es sich von diesem entfernt. Aus psychologischen Gründen hat ein Unterricht nur dann geistesbildende Kraft, wenn er vom Konkreten zum Abstrakten fortschreitet. Ein solcher Gang ist aber am besten in Verbindung mit Dingen des konkreten menschlichen Interesses möglich. Unter den Problemen, die Mair in seinem Buche vorschlägt und deren Behandlung er so, wie sie sich in freier Diskussion mit seinen Schülern

ergab, darstellt, seien einige genannt: 1. Ein Knabe macht im Garten ein Versteck für Schätze und bedeckt es so, daß es von seiner Umgebung ununterscheidbar wird. Durch welche Messungen kann er den Fleck so festlegen, daß er ihn wiederzufinden vermag. 2. Die Lage eines Stuhles auf dem Flur festzulegen. 3. Eine vorgelegte Landkarte zu kopieren. 4. Ein Kapitel, in dem am Schluß der binomische Lehrsatz entwickelt wird, beginnt mit dem Morsealphabet und sich im Zusammenhang damit ergebenden einfachen Fragen, die zur Kombinatorik gehören. 5. Die Potenzrechnung und der Rechenschieber erscheinen im Anschluß an die Frage, wie gewisse bereits vorgekommene Rechnungen abgekürzt werden können.

Das Mairsche Buch ist, wie wir schon sagten, für Unterstufe und Mittelstufe geschrieben; anscheinend ist es nur wenig eingeführt. Was den Unterricht in der Oberstufe der englischen Schulen anlangt, so lassen sich hierüber schwer Angaben allgemeiner Gültigkeit machen. Wertvolle Hinweise und Vorschläge, die sich auf diesen Unterricht beziehen, findet man in den Imuk-Abhandlungen<sup>1)</sup> „The Educational Value of Geometry“ und „A School Course in advanced Geometry“, von denen die erste von dem bekannten Didaktiker *G. Carson*, die zweite von *C. V. Durell* herrührt. Einige Hauptgedanken der Durellschen Vorschläge, von denen wir jedoch nicht wissen, in welcher Ausdehnung man sie an englischen Schulen berücksichtigt, sind: Einführung imaginärer Elemente in die Geometrie; eine einfache Art der Verwendung homogener Koordinaten, um die Bedeutung der uneigentlichen Elemente deutlich zu machen; die rechnerische und anschauliche Verwertung der folgenden Transformationen:

$$\begin{aligned}x &= cx', & y &= y', \\x &= \frac{px'}{y' + p}, & y &= \frac{qy'}{y' + p},\end{aligned}$$

Mit der ersten läßt sich, wenn die Konstante  $c$  reell ist und über sie passend verfügt wird, die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , wenn  $c$  imaginär ist, die Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  in einen Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  transformieren. Eine ganze Reihe von Sätzen über den Kreis kann so auf Ellipse und Hyperbel übertragen werden. Die zweite Transformation ist ein sehr einfacher Fall einer projektiven und kann ähnliche Verwendung finden. Durell ist der Ansicht, daß die Behandlung der Orthogonal- und Zentralprojektion sich dadurch sehr vereinfachen läßt, daß man, wenn auch in bescheidenem Maße, analytische Rechnungen zuläßt und sich nicht auf den puristischen Standpunkt versteift, der nur rein geometrische Beweise gestattet.

<sup>1)</sup> S. 257–273 und 351–364 des ersten Bandes der in Anm. 2 auf S. 279 zitierten englischen Imukberichte.

## 2. Frankreich.

Straffe zentralistische Organisation hatten wir bereits als ein Merkmal festgestellt, welches das französische Schulwesen von dem Englands stark unterscheidet. Der Aufbau des heutigen höheren Schulwesens Frankreichs ist von folgender Art: Nachdem der Schüler zwei „Classes préparatoires“ und zwei „Classes élémentaires“ durchlaufen hat, tritt er, etwa 10—11 Jahre alt, in die höhere Schule ein. Diese gliedert sich in 3 Cycles, von denen der erste 4 Jahre, der zweite 2 Jahre und der dritte 1 Jahr umfaßt. Im ersten Zyklus haben die Schüler die Wahl zwischen 2 Sections A und B. In A ist vom ersten Jahre ab Latein, vom vierten Jahre ab Griechisch pflichtmäßiger Unterricht. In B fallen die alten Sprachen zugunsten einer stärkeren Berücksichtigung von Mathematik, Naturwissenschaften und Zeichnen fort. Die Programme beider Sektionen sind so, daß die Schüler am Ende des ersten Zyklus in einem Besitz von Kenntnissen sind, die ein Ganzes bilden und ihnen genügen können. Im zweiten Zyklus sind vier Abteilungen A, B, C, D zu unterscheiden, die durch folgende Stichwörter gekennzeichnet werden: A. Latein-Griechisch, B. Latein-Neuere Sprachen, C. Latein-Mathematik-Naturwissenschaften, D. Mathematik-Naturwissenschaften-Neuere Sprachen. Am Ende des zweiten Zyklus erwerben sich die Schüler durch eine Prüfung den ersten Teil des Baccalauréat, auf dessen zweiten Teil der nur aus einer Klasse bestehende dritte Zyklus vorbereitet. Bei diesem haben die Schüler die Wahl zwischen der Classe de Mathématiques (8 Stunden Mathematik pro Woche) und Classe de philosophie (1 Stunde Mathematik wöchentlich). Die erfolgreiche Absolvierung der Classe de Mathématiques genügt nicht für die Zulassung zum Studium an einer Reihe von Hochschulen. Die der Heranbildung von Genieoffizieren dienende École Polytechnique, die École Centrale des Arts et Manufactures, welche Zivilingenieure, die mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung der École Normale Supérieure, welche die Lehrer der höheren Schulen ausbildet, nehmen ihre Schüler nur auf Grund einer Aufnahmeprüfung auf. Die Vorbereitung auf diese Prüfung geschieht für die École Polytechnique durch die Classe de Mathématiques spéciales, zu deren erfolgreichem Besuch es angebracht ist, erst eine Classe de Mathématiques spéciales préparatoire zu besuchen, von denen vor allem in Paris welche existieren. Auf die École Centrale bereiten wieder andere Klassen vor, die Classes de Centrale genannt werden. Die Unterrichtsgebiete der genannten Klassen erstrecken sich in die Theorie der Differentialgleichungen und der Kurven und Flächen hinein. Wöchentliche Prüfungen der Schüler außerhalb der Klassen dienen der Befestigung des behandelten Stoffes. Die Aufnahmeprüfungen für die oben angeführten Hochschulen, vor allem für die École Polytechnique, sind sehr schwierig. Nur den wenigsten Schülern gelingt es, die Prüfung zu

bestehen, nachdem sie erst ein Jahr *Classe de Mathématiques spéciales* hinter sich haben. Die meisten besuchen diese Klasse 2 oder gar 3 Jahre.

Was nun die französischen Lehrpläne für den mathematischen Unterricht der höheren Schulen anlangt, so möge man im einzelnen darüber in dem Imukbericht von *M. Th. Rousseau* nachlesen<sup>1)</sup>. Nur ein die Stoffanordnung betreffender Punkt sei hervorgehoben, weil sich in ihm die französischen von den deutschen Lehrplänen prinzipiell unterscheiden. Während in Deutschland der mathematische Lehrstoff, den eine Klasse zu behandeln hat, immer neu ist gegenüber dem im Jahre vorher durchgenommenen, ist das in Frankreich nicht allgemein der Fall. Wie die höhere Schule selbst, so wird auch der Unterrichtsstoff, jedenfalls was die Mathematik angeht, in drei Zyklen angeordnet. Jeder folgende Zyklus hat die Aufgabe, außer den neuen Gebieten noch einmal die des vorhergehenden durchzunehmen, aber auf eine andere, der größeren Reife der Schüler angepaßten Weise. Man kann diese Anordnung als eine solche nach konzentrischen Kreisen bezeichnen; in methodischer Hinsicht herrscht im innersten Kreis die Anschauung, bei den folgenden tritt die Deduktion zunehmend in ihr Recht. In dem weitverbreiteten und schönen Lehrbuch der Geometrie von J. Hadamard<sup>2)</sup>, das für die *Classe de mathématiques* geschrieben ist, findet man die Geometrie von Grund aus aufgebaut und nicht nur die Teile dargestellt, welche für jene Klasse neu sind. Die ihr bereits bekannten Gegenstände sind vielmehr außerordentlich breit, aber in höherer Art als das bei einem früheren Alter zweckmäßig ist, entwickelt.

*Méray's Einfluß auf den französischen Geometrieunterricht.* Das Méraysche Buch, über das bereits ausführlich berichtet wurde, hat den französischen Geometrieunterricht unverkennbar beeinflusst. Die Lehrpläne von 1905, dem Erscheinungsjahre der dritten Auflage von Mérays Buch, enthalten die Stelle: „Un appel constant à la notion de mouvement semble devoir faciliter l'enseignement de la géométrie; c'est ainsi que le parallélisme sera lié à la notion expérimentale de translation, que l'étude des droites et plans perpendiculaires résultera de la rotation; l'idée d'égalité sera liée à celle du transport des figures, que l'on précisera en introduisant la notion simple d'orientation.“ Aber auch die Widerstände gegen Méray waren groß und gingen auf mehrere Ursachen zurück. In sprachlicher Hinsicht ist seine Darstellung schwerfällig und nicht durch jene Klarheit und Eleganz ausgezeichnet, die man sonst häufig bei französischen Lehrbüchern der Mathematik findet. Viele konnten sich fernerhin nicht daran gewöhnen, daß andere Axiome als die,

<sup>1)</sup> Commission Internationale de l'enseignement Mathématique. Sous-Commission Française. Rapports. Volume II. Enseignement Secondaire. Publié sous la direction de M. Ch. Bioche. Paris 1911. S. 76—117.

<sup>2)</sup> Leçons de Géométrie élémentaire. Band I: 8. Aufl. 1924. Band II: 4. Aufl. 1921.

welche bei Euklid ausdrücklich ausgesprochen sind, an der Spitze der Geometrie stehen sollten. Manche schließlich, die dem Grundgedanken Mérays, die Eigenschaften der Bewegungen der Geometrie zugrunde zu legen, gern zustimmten, konnten sich nicht mit dem Gedanken der Fusion zwischen ebener und räumlicher Geometrie befreunden. Am schwerwiegendsten war aber der Einwurf, der sich dagegen wandte, daß Méray zu wenig Gewicht auf die Zahl der Axiome legte. An dieser Stelle greift *C. Bourlet* ein (vgl. S. 245): Er zieht die Begriffe der Gruppe und der Transformation heran und weist darauf hin, daß der Grundgedanke der Méray'schen Theorie der Translationen auf die einfache Form gebracht werden kann: Die Gruppe der Translationen ist eine invariante Untergruppe<sup>1)</sup> der Hauptgruppe der Bewegungen. Auf Grund dieser Auffassung schrieben *E. Borel* und *Bourlet* Lehrbücher, in denen der Méray'sche Aufbau unter deutlicherer Herausarbeitung seines Grundgedankens vereinfacht ist. Radikaler sind die Vorschläge von Rousseau in dem obenerwähnten Imukbericht. Er will völlige Lossagung von Euklid und uneingeschränkte Herrschaft des Transformationsgedankens. Er schlägt für Lehrbücher der Geometrie und den mathematischen Elementarunterricht die folgende Stoffanordnung vor:

1. Den Anfang sollen Begriffe und Sätze bilden, die der Geometrie der allgemeinsten eindeutigen Punkttransformationen, d. h. der Analysis situs, angehören. Dabei ist natürlich an eine Analysis situs auf experimenteller Grundlage gedacht. Hier wäre nach Rousseau zu sprechen von Begriffen wie denen des Körpers, der Oberfläche, der Linie, des Innen und Außen, des Schnittes, des Zusammenhangs. Nichts würde, so meint Rousseau, daran hindern, die Aufmerksamkeit der Schüler auf solche Probleme zu lenken, wie das der Brücken und Inseln, der vier Farben, der Zahl der Seiten einer Oberfläche.

2. An zweiter Stelle würde das Studium der Bewegungen im allgemeinen und der Rotationen mit ihren Anwendungen im besonderen kommen: Gerade Linie, das Senkrechtstehen, Zusammensetzung von Rotationen, Ebene, Kreis, Symmetrie, Geometrie des Strahlenbüschels. Hier würden sämtliche Eigenschaften hergehören, die den Nicht-Euklidischen und der Euklidischen Geometrie gemeinsam sind. Man macht in diesem Teil der Geometrie in der Tat noch nicht von der Tatsache Gebrauch, daß die Gruppe der Bewegungen eine invariante Untergruppe besitzt.

---

<sup>1)</sup> Die Untergruppe  $g$  einer Gruppe  $G$  heißt dann invariant, wenn bei einem gewissen Prozeß der Zusammensetzung irgendeiner Transformation  $T$  von  $g$  mit irgendeiner Transformation  $S$  von  $G$  wieder eine Transformation von  $g$  hervorgeht. (Die Gruppe ist gegenüber dem betreffenden Prozeß invariant.) Jener Prozeß ist, wenn  $S^{-1}$  die Inverse von  $S$  ist, so definiert: Man bildet das Produkt  $S^* = S^{-1}T$  und hierauf  $S^*S$ , was also gleichbedeutend ist mit  $S^{-1}TS$ . Die Transformation  $S^{-1}TS$  muß zur Gruppe  $g$  gehören.

3. Ein dritter Teil würde den Translationen und ihren Anwendungen gewidmet sein: Parallelismus, metrische Relationen.

4. In einem vierten Teil würde man andere Transformationsgruppen studieren, wie die der Ähnlichkeit, der Transformationen durch reziproke Radien usw.

Prinzipiell steht die hier geforderte Einteilung nicht in Widerspruch zu pädagogischen Grundsätzen. Jede der 4 genannten Geometrieen hat neben schwierigeren Problemen auch ganz einfache aufzuweisen und eine Anordnung in konzentrischen Kreisen ist, wie bei dem traditionellen Aufbau der Geometrie, auch hier möglich. Die alte auf Euklid zurückgehende Darstellungsart der Geometrie teilt im wesentlichen nach Figuren ein (Gerade, Dreieck, Viereck, Kreis, Ebene, räumliche Figuren). In vielen Lehrbüchern ist dieser ältere Gesichtspunkt mit dem eben geschilderten neuen vermengt.

Eines der ältesten *deutschen* Lehrbücher, in dem der Transformationsstandpunkt zur Geltung kommt, ist das unter dem Einflusse der Möbiusschen Arbeiten geschriebene „Lehrgebäude der niederen Geometrie“, für den Unterricht an Gymnasien und Realschulen entworfen, von *C. A. Bretschneider* (Jena, Frommann 1844). In diesem Lehrbuche ist die übliche Einteilung in Planimetrie und Stereometrie aufgegeben und an ihre Stelle die folgende gesetzt:

1. Synthetische Geometrie:
  - a) Geometrie der Lage.
  - b) Geometrie der Gestalt.
  - c) Geometrie des Maßes.
2. Analytische Geometrie:
  - a) Goniometrie.
  - b) Trigonometrie.
  - c) Koordinatengeometrie.

Ebenfalls vom Transformationsbegriff beherrscht ist das bereits auf S. 261 genannte *Lehrbuch der Elementargeometrie* von *Henrici* und *Treutlein*.

### 3. Italien.

Nach dem Dekret des früheren Ministers Gentile vom 6. Mai 1923 führt in Italien der Weg zur Hochschule entweder über das drei Jahre umfassende Liceo classico oder das vierjährige Liceo scientifico. In das Liceo classico kommt man durch eine Aufnahmeprüfung, nachdem man 4 Jahre Volksschule und 5 Jahre Gymnasium durchlaufen hat; beim Liceo scientifico genügen bei der gleichen Volksschulzeit 4 Jahre Gymnasium oder 4 Jahre einer anderen Mittelschule. Solche Mittelschulen sind: Die Komplementärschule, welche ungefähr den preussischen Mittelschulen entspricht, und der Unterkurs des Istituto tecnico, dessen Aufgabe es ist, zu den mittleren technischen Berufen heranzu-



bilden. Wie stark Mathematik und Naturwissenschaften in Italien durch Gentile zurückgedrängt worden sind, mag man aus den folgenden Angaben ersehen, die wir der bereits auf S. 279 angeführten Veröffentlichung des italienischen Unterrichtsministeriums entnehmen. Für das Gymnasium sind, wenn wir von den unteren zu den oberen Klassen fortschreiten (Rechnen ist nicht besonders aufgeführt) die Stunden für die Mathematik 1, 2, 2, 2, 2; für Physik, Chemie und Biologie steht keine Stunde zur Verfügung. Im Liceo classico sind die Stundenzahlen, die auf Mathematik und Physik gemeinsam entfallen, 4, 4, 5. Die Zahlen für Chemie und Biologie insgesamt sind 3, 2, 3. Dagegen finden wir für Geschichte und Geographie gemeinsam beim Gymnasium 5, 5, 4, 3, 3, beim liceo classico für Geschichte allein 3, 3, 3; für Philosophie und Staatsbürgerkunde ebenfalls 3, 3, 3, für Kunstgeschichte 2, 2. Die Gesamtstundenzahl für den wissenschaftlichen Unterricht schwankt beim Gymnasium zwischen 21 und 24, beim Liceo classico zwischen 25 und 26 pro Woche. Für das Liceo scientifico, das das mathematisch-naturwissenschaftliche Element besonders betonen soll, sind die Stundenzahlen für Mathematik und Physik insgesamt 5, 5, 6, 6, für Philosophie und Staatsbürgerkunde 4, 4, für Geschichte 3, 3, 2, 2, für Biologie, Chemie und Geographie ebenfalls 3, 3, 2, 2. Der Unterkurs des Istituto tecnico hat für Mathematik (Rechnen mit eingeschlossen) 2, 2, 4, 4 zur Verfügung, aber wie das Gymnasium weder Physik noch Chemie noch Biologie. In der obenerwähnten Raccolta sind Lehrpläne nicht angegeben. Es wird nur gesagt, was in den einzelnen Prüfungen zu verlangen ist. Als eine charakteristische Neuerung ist zu erwähnen, daß am Liceo scientifico in den Stunden für Philosophie und Staatsbürgerkunde, die jedoch in der Regel nicht in der Hand eines Naturwissenschaftlers liegen werden, außer den im Titel genannten Gebieten auch Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften getrieben werden muß. Die betreffende, das Lehrziel angegebende Stelle (Raccolta S. 369) heißt in freier Übersetzung: Das Problem der Mathematik und Naturwissenschaften in seiner geschichtlichen Entwicklung. Die Naturwissenschaft der Alten (Mathematik, Physik, Chemie, Astronomie). Die mittelalterliche Naturwissenschaft. Die Naturwissenschaft in der Renaissance und der Naturalismus (Telesius, Campanella, Copernicus, Gilbert). Die große Frage des ptolemäischen und kopernikanischen Weltsystems (Galilei). Das Problem der wissenschaftlichen Methode (Bacon, Descartes). Die moderne Naturwissenschaft. Neue Theorien über die Naturwissenschaft (Croce, Maxwell, Mach, Poincaré).

Ein für diesen Unterricht sehr zweckmäßiges Lehrbuch hat *Gino Loria* vor kurzem unter dem Titel „*Pagine di Storia della Scienza*“ herausgegeben<sup>1)</sup>. An neueren italienischen Lehrbüchern, die für den Geometrie-

<sup>1)</sup> Erschienen in der Bibliotheca Paravia „*Storia e Pensiero*“.

unterricht der höheren Schulen bestimmt sind, haben wir zwei zur Hand. Das eine rührt von *C. Buralli-Forti* und *R. Marcolongo* her und ist für den Oberkurs der Istituti tecnici gedacht<sup>1)</sup>; das andere ist von *G. Predella* für den Gebrauch an den Lizeen verfaßt<sup>2)</sup>. Es ist natürlich unmöglich, aus dem Charakter dieser beiden Bücher typische Züge des italienischen Unterrichts mit Sicherheit herauszulesen; wir erwähnen sie jedoch, da sie gegenüber den bisher besprochenen neue Gesichtspunkte in den Vordergrund rücken. Das erste von ihnen treibt die Geometrie unter steter Benutzung des Vektorbegriffs. Die Kapitelüberschriften sind: Allgemeines über Vektoren; Summe zweier Vektoren, Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl; skalares Produkt zweier Vektoren; die Rotation, darunter ein Paragraph: der Operator  $i$  (Drehung um einen rechten Winkel); Kreisfunktionen; ebene Trigonometrie; vektorielles Produkt; sphärische Trigonometrie; Kegelschnitte; verschiedene Betrachtungen (Begriff der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis, Transformationen durch reziproke Radien usw.). Im Vorwort des Buches führen die Verfasser folgendes aus: Die Vektoren werden heute im Universitätsunterricht allgemein gebraucht; sie haben einen Algorithmus, der ähnlich dem in der Algebra gebräuchlichen und ebenso einfach wie dieser ist; sie sind so suggestiv geometrisch trotz ihres algebraischen Algorithmus, daß sie den Schülern des Oberkurses der Mittelschulen nicht unbekannt bleiben dürfen.

Uns erscheint das Buch zu überhäuft mit Formeln und recht abstrakt. Das letztere gilt zum Teil in noch höherem Maße für das *Predella'sche* Lehrbuch der Geometrie. Dieses beginnt mit einem Kapitel, in dem die Begriffe Größe, obere Grenze, Irrationalzahl in aller Strenge erörtert werden, um sodann bei einigen Sätzen aus der Planimetrie Anwendung zu finden. Im weiteren Verlaufe erhebt sich das Buch nicht über die einfachsten Dinge aus der Stereometrie, was wohl mit der geringen, für Mathematik zur Verfügung stehenden Stundenzahl zusammenhängen dürfte.

Auf S. 247 haben wir als einen in dem italienischen Geometrieunterricht besonders verbreiteten Gedanken den der Fusion zwischen Stereometrie und Planimetrie bezeichnet. Diese Darstellung entspricht jedoch ganz und gar nicht mehr dem heutigen Sachverhalte. Schon bei den Verhandlungen des Kongresses der Imuk zu Mailand im Jahre 1911 wurde deutlich, daß die Fusionsbestrebungen in Italien vollkommen zurückgedrängt worden waren. Diese Feststellung mußte man in einem Augenblicke machen, wo *P. Treutlein* durch Übersetzung des fusionistischen Standard Works der Italiener<sup>3)</sup>, der „Elementi di Geometria“ von *Lazzari* und *Bassani*<sup>4)</sup>, in Deutschland für den Fusionsgedanken Interesse zu wecken suchte.

<sup>1)</sup> Corso di Matematica pel Secondo Bionnio degli Istituti Tecnici, Vol. II Geometria. Firenze.

<sup>2)</sup> Geometria ad uso dei licei. G. B. Paravia, Torino-Milano.

<sup>3)</sup> Lazzari und Bassani, Elemente der Geometrie, deutsch von P. Treutlein. Leipzig 1911.

<sup>4)</sup> 1. Aufl. Livorno 1891. 2. Aufl. 1898.

#### 4. Deutschland. (Über die weitere Entwicklung der preußischen Schulreform.)

Bereits in Band I wurde über die Geschichte des mathematischen Unterrichts in Deutschland und insbesondere über die Stellung berichtet, die Mathematik und Naturwissenschaften in der mit dem Jahre 1924 einsetzenden preußischen Unterrichtsreform einnehmen<sup>1)</sup>. Einer der Kerngedanken dieser Reform, so wie sie ursprünglich gedacht war, fordert die Entwicklung von vier sich scharf gegeneinander abhebenden Typen höherer Schulen, von denen jeder eine besondere Seite der Kultur zu pflegen hat. Das *altsprachliche Gymnasium* soll den Zusammenhang zwischen der deutschen und der antiken Kultur in den Mittelpunkt seines Unterrichts stellen. Das *Realgymnasium* hat das Studium der modernen europäischen Kultur zum Ziele und wird, da die neueren Fremdsprachen seine wichtigsten Fächer sind, als neu-sprachliches Gymnasium gekennzeichnet. Den mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern wird an der *Oberrealschule* die Führung übergeben; außer der Erfüllung rein fachlicher Aufgaben wird von ihnen insbesondere Würdigung der kulturellen Leistung von Mathematik und Naturwissenschaften verlangt. Aufgabe der *deutschen Ober-schule* endlich ist, das Verständnis für die deutsche Kultur zu vermitteln: Deutsch, Geschichte und Erdkunde sind die Fächer, die an ihr die stärkste Geltung haben sollen.

Die Forderung der „reinen Schultypen“ wirkte sich für die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer in den anfänglich vom preußischen Kultusministerium vorgeschlagenen Stundentafeln dahin aus, daß diese Fächer außer an der Oberrealschule an allen Schulen an Bedeutung stark verloren. Um die Tragweite dieser Zurückdrängung für die Erziehung von Ingenieuren und Medizinern und die mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung der Angehörigen der übrigen Berufsstände richtig einzuschätzen, ist es notwendig, zu wissen, daß die Zahl der Oberrealschulen in Preußen noch recht gering ist, an eine planmäßige Erhöhung dieser Zahl gar nicht gedacht wird und der Unterricht an den viel zahlreicheren Realgymnasien bisher einen bedeutenden mathematisch-naturwissenschaftlichen Einschlag hatte, den er nun verlieren sollte.

Der Kampf, der gegen die preußische Schulreform von den verschiedensten Seiten her einsetzte, hatte eine Abänderung der Stundentafeln in dem Sinne einer Milderung der Typisierungstendenz zur Folge. Am Gymnasium und Realgymnasium wurde der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht etwas verstärkt, an der Oberrealschule mußte er sich eine Schwächung gefallen lassen. Im einzelnen können wir auf diese Dinge nicht eingehen, nur folgendes sei hervorgehoben:

<sup>1)</sup> Vgl. Bd. I, S. 291 ff.

1. An keiner höheren Schule erreicht die dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht zugebilligte Stundenzahl die Höhe, die sie vor der Reform hatte. Von der Erfüllung der Forderung der revidierten Meraner Lehrpläne kann im Hinblick auf die Stundentafeln keine Rede sein.

2. Dasjenige naturwissenschaftliche Fach, das durch die preussische Reform am meisten beiseite gedrängt wird, ist die Biologie. Es mag sein, daß für die geringe Einschätzung dieser Wissenschaft durch die neuere Entwicklung längst überholte Weltanschauungsgründe nicht ohne Einfluß waren.

3. Vergleichen wir die *Organisation* (nicht den Geist, der Unterricht und Erziehung beherrscht) des preussischen höheren Schulwesens mit der des englischen und französischen, so müssen wir von England über Frankreich zu Preußen eine abnehmende Rücksichtnahme auf die Individualität des Schülers feststellen. In England finden wir die größte Organisationsfreiheit um des Schülers willen. In Frankreich besteht zu drei Zeitpunkten, nämlich jedesmal beim Eintritt in einen der drei Zyklen, die Möglichkeit der Wahl eines Schultypus, welcher der Begabungs- und Interessenrichtung des Schülers am besten entspricht. In Preußen ist der Schüler in der Regel, nämlich dann, wenn er in mittleren Städten mit nur einer höheren Knabenschule wohnt, auf den einen *einseitigen* Schultyp seines Heimatortes angewiesen.

4. Vor kurzem erschienen die neuen Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens<sup>1)</sup>. Unsere in Band I ausgesprochene Vermutung, daß in ihnen die Grundgedanken der mathematischen Unterrichtsreform volle Berücksichtigung finden würden, hat sich bestätigt: bis auf einige Abweichungen stimmen die neuen preussischen Lehrpläne, was die Mathematik angeht, mit den revidierten Meraner Lehrplänen überein. An allen höheren Schulen Preußens wird demnach künftig die Funktion den zentralen Begriff des mathematischen Unterrichts bilden, an allen sollen die Anfänge der Infinitesimalrechnung gelehrt werden. Die Ausbildung der Raumschauung wird in den Vordergrund gerückt, die Geschichte der Mathematik ist grundsätzlich zu berücksichtigen und die Anwendungen sollen gehörig betont werden. Das geometrische Zeichnen soll einen wesentlichen Bestandteil des mathematischen Unterrichts bilden; *die gesamte darstellende Geometrie wird ihm eingegliedert*. So begrüßenswert diese letzte Forderung ist, so erscheint es doch sehr fraglich, ob sie nicht aus Mangel an verfügbarer Zeit zum großen Teile auf dem Papiere stehenbleiben wird.

5. In der methodischen Einstellung der preussischen Lehrpläne spielen zwei Forderungen eine besonders hervorragende Rolle: der

<sup>1)</sup> Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens, Teil I und II, herausgegeben von Ministerialrat *Richert*. Berlin 1925. Weidmannsche Buchhandlung.

*Arbeitsunterricht und die Konzentration.* Was unter Arbeitsunterricht zu verstehen ist, haben wir bei Besprechung des englischen Lehrbuches von David Mair zu charakterisieren versucht. In Deutschland ist diese auf möglichst große Selbsttätigkeit der Schüler abzielende Unterrichtsmethode vorwiegend mit den Namen *Gaudig* und *Kerschensteiner* verbunden. Unter Konzentration versteht man Aufhebung des beziehungslosen Nebeneinander der einzelnen Fachgebiete und Einführung eines bewußten Hand-in-Hand-Arbeitens derselben, letzten Endes Einstellung des gesamten Unterrichts auf das Bildungsziel der Schule. Auf die zwischen der Tendenz des gegenwärtigen Werkes und der Konzentrationsforderung bestehende enge Verwandtschaft wurde bereits früher hingewiesen<sup>1)</sup>; da bei wurde jedoch die in der preußischen Schulreform tatsächlich vorliegende Überspannung dieser Forderung mit Rücksicht auf die Unmöglichkeit einer entsprechenden Lehrerausbildung entschieden abgelehnt.

In bezug auf die Mathematik heißt es in den Richtlinien: „Zwischen der Mathematik und den übrigen Unterrichtsfächern ist die Herstellung möglichst vieler Verbindungen anzustreben.“ Für die Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts ist der Konzentrationsgedanke in dieser Gestalt nichts Neues; im Gegenteil, alle dahinzielende Bestrebungen sind von vornherein von ihm beherrscht. Er erscheint da zunächst unter der Bezeichnung Fusion in der Anforderung einer zweckmäßigen Verknüpfung zwischen den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik. Eng zusammen damit hängt die Einsicht, daß zentrale, die gesamte Mathematik durchdringende Begriffe wie die der Funktion, der Transformation und der Gruppe auch im Schulunterricht zur Vereinheitlichung herangezogen werden müssen. Schließlich hat auch die von der Reformbewegung immer und immer wieder verlangte Berücksichtigung der Anwendungen der Mathematik genau denselben Sinn wie die eben zitierte Forderung. So ist es verständlich, daß sich die Mathematiklehrer, wenn sie ihren Unterricht auf die Konzentrationsforderung abstimmen wollen, auf eine umfangreiche Literatur stützen können. Außer den in Band I des gegenwärtigen Werkes bereits genannten Abhandlungen des deutschen Unterausschusses der Imuk, von denen insbesondere die des dritten Bandes den Beziehungen zwischen der Mathematik und den Nachbargebieten gewidmet sind<sup>2)</sup>, und dem von F. Klein redigierten Teil der im Verlag Teubner erschienenen „Kultur der Gegenwart“<sup>3)</sup>, welcher die kulturelle Bedeutung der Mathematik würdigt, seien hier angeführt:

a) Der Habilitationsvortrag von *R. Schimmack*: „Über die Verschmelzung verschiedener Zweige des mathematischen Unterrichts“, abgedruckt in Heft 7 der 1. Folge der Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, Leipzig 1917.

<sup>1)</sup> Bd. I, S. 301f.    <sup>2)</sup> Bereits zitiert Bd. I, S. 295f.

<sup>3)</sup> Bereits zitiert in Bd. I, S. 305.

b) Der größte Teil der Bände der von *W. Lietzmann* und *A. Witting* herausgegebenen mathematisch-physikalischen Bibliothek (Verlag Teubner, Leipzig).

c) *E. Salkowski*, „Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts“, Beiheft 7 zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig 1924.

d) *G. Scheffers* und *W. Kramer*, „Leitfaden der darstellenden und räumlichen Geometrie“ I. Teil für Untertertia bis Untersekunda, Leipzig, Quelle & Meyer, 1924, II. Teil für Obersekunda bis Oberprima, 1925.

Dieses Werk geht von der Auffassung aus, daß für die Ausbildung einer möglichst guten Raumschauung die Fusion zwischen Planimetrie und Stereometrie planmäßiger und von einem früheren Zeitpunkt an betrieben werden müsse, als es bisher geschehen ist. Geht man an die Verwirklichung dieses Fusionsgedankens, so stößt man bald auf die Notwendigkeit, räumliche Konstruktionen zeichnerisch durchführen und Körper auf die Ebene abbilden zu müssen. *Die Fusion Planimetrie-Stereometrie drängt also zu einer umfassenderen, die auch die darstellende Geometrie mit in sich begreift.* Nun sind nach Scheffers' Meinung Zweitafelverfahren und Parallelperspektive verhältnismäßig schwer verständlich und kommen erst für reifere Schüler in Betracht. Für einfach genug aber hält er die bei jedem Meßtischblatt angewandte kotierte Projektion oder Eintafelmethode. Bei diesem Verfahren wird jeder Punkt durch seinen Grundriß, d. h. durch seine Projektion auf eine horizontal gedachte Tafelebene, und eine Zahl festgelegt, welche die Höhe des Punktes über der Tafelebene angibt. Dieses Verfahren gestaltet Scheffers noch dadurch anschaulicher, daß er die Höhen statt durch Zahlen durch Strecken gibt, die einem der Zeichnung beigefügten Höhenmaßstabe zu entnehmen sind. Natürlich kommen in dem Leitfaden auch die anderen Verfahren der darstellenden Geometrie zu ihrem Recht. Die Verfasser der neuen preußischen Lehrpläne haben sich die Auffassung von Scheffers zu eigen gemacht und fordern die Behandlung der Eintafelmethode in Unter- und Obertertia.

6. In den neuen Lehrplänen wird für Sexta und Quinta die propädeutisch anschauliche Behandlung von Raumformen gefordert, für Quarta das Zeichnen der Netze einfacher Körper und ihrer Projektion auf eine Ebene. Für diesen Unterricht werden die folgenden beiden Werke vielen Lehrern von sehr großem Nutzen sein:

a) Das aus reifer pädagogischer Erfahrung entstandene Buch von *P. Treutlein*: „Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts an unseren höheren Schulen“, Leipzig 1911.

b) Die hochinteressante, mit vielen geschichtlichen und kulturkundlichen Betrachtungen durchsetzte Schrift von *H. E. Timerding* „Die Erziehung der Anschauung“, Leipzig 1912.

7. In dem Bericht auf S. 261 wurde an letzter Stelle das Lehrbuch der Geometrie von *P. Treutlein* und *Henrici* erwähnt. Seitdem ist eine große Zahl von Lehrbüchern erschienen, welche die Grundgedanken der Reformbewegung berücksichtigen. Aus ihrer großen Zahl seien die folgenden beiden genannt:

a) *Behrendsen* und *Götting*, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen, Verlag Teubner, Leipzig, seit 1908 in mehreren Auflagen.

b) Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen, unter Mitwirkung von P. B. Fischer, T. Zindler und P. Zühlke herausgegeben von *W. Lietzmann*, Verlag Teubner, Leipzig, der für die Unterstufe bestimmte Teil seit 1916, der für die Oberstufe bestimmte Teil seit 1920 in mehreren Auflagen.

(S.)

## Namenverzeichnis.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| <p><b>Abraham</b> 56.<br/> <b>Adler</b> 229, 265, 266.<br/> <b>Amaldi</b> 248.<br/> <b>Amsler</b> 11.<br/> <b>Apollonius</b> 205, 226, 229, 264, 268, 272.<br/> <b>Archimedes</b> 201, 205/6, 220, 226.</p> <p><b>Ball</b> 42.<br/> <b>Bassani</b> 288.<br/> <b>Baxandall</b> 234.<br/> <b>Beck</b> 273.<br/> <b>Behrendsen</b> 1, 293.<br/> <b>Berkhan</b> 170, 262.<br/> <b>Bernstein, F.</b> 236.<br/> <b>Betti</b> 246.<br/> <b>Bezout</b> 139.<br/> <b>Binet</b> 255.<br/> <b>Blanchet</b> 242.<br/> <b>Blaschke, W.</b> 272.<br/> <b>Bolyai, J.</b> 191, 192.<br/> <b>Bolyai, W.</b> 191, 218.<br/> <b>Bonitz</b> 252, 260.<br/> <b>Borel, E.</b> 244, 285.<br/> <b>Bourlet</b> 245, 285.<br/> <b>Branford</b> 236, 280.<br/> <b>Brianchon</b> 62.<br/> <b>Brill</b> 146.<br/> <b>Brioschi</b> 246.<br/> <b>Burali-Forti</b> 288.<br/> <b>Burkhardt</b> 170.</p> <p><b>Carson</b> 282.<br/> <b>Casey</b> 232.<br/> <b>Cavalieri</b> 259.<br/> <b>Cayley</b> 145, 146, 154, 159, 164, 194, 195.<br/> <b>Chasles</b> 139.<br/> <b>Clairaut</b> 237.<br/> <b>Clebsch</b> 146, 159.<br/> <b>de Comberousse</b> 242.<br/> <b>Cremona</b> 106, 245.</p> | <p><b>Darboux</b> 139.<br/> <b>Dedekind</b> 208.<br/> <b>Dehn</b> 116.<br/> <b>Desargues</b> 131.<br/> <b>Dingeldey</b> 146.<br/> <b>Dogdson</b> 233.<br/> <b>Durell</b> 282.</p> <p><b>Einstein</b> 168.<br/> <b>Engel</b> 191.<br/> <b>Enriques</b> 171, 174, 229, 230, 248, 265.<br/> <b>Eudoxus</b> 201, 209, 220, 221.<br/> <b>Euklid</b> 182, 189, 190, 203 bis 225, 226/27, 232ff., 239ff., 245ff., 280, 286.<br/> <b>Euler</b> 44, 75, 116, 184.<br/> <b>Exner</b> 252, 260.</p> <p><b>Fano</b> 140.<br/> <b>Fiedler, W.</b> 146, 159.<br/> <b>Föppl, A.</b> 57.<br/> <b>Fricke</b> 234, 275.<br/> <b>Fröbel</b> 252.</p> <p><b>Gauß</b> 190, 191, 192, 206, 218, 275.<br/> <b>Gergonne</b> 62.<br/> <b>Gibbs</b> 57, 68, 168.<br/> <b>Godfrey</b> 235.<br/> <b>Götting</b> 293.<br/> <b>Gordan</b> 151.<br/> <b>Graßmann, Hermann d. Ältere</b> 21, 22, 23, 51, 56—58, 61, 66, 68, 161, 162, 164.</p> <p><b>Hadamard</b> 284.<br/> <b>Hamilton</b> 51, 56—58, 68, 69, 164.<br/> <b>Hammer</b> 112.<br/> <b>Harrison</b> 234.</p> | <p><b>Heath</b> 203, 206.<br/> <b>Heaveside</b> 57.<br/> <b>Heegard</b> 116.<br/> <b>Heffter</b> 272.<br/> <b>Heiberg</b> 203, 212.<br/> <b>Helmert</b> 269.<br/> <b>Henrici</b> 261, 286.<br/> <b>Herbart</b> 251.<br/> <b>Hessenberg</b> 109.<br/> <b>Hilbert</b> 151, 200, 201.<br/> <b>Holzmüller</b> 253.</p> <p><b>Jacobsthal</b> 260.</p> <p><b>v. Kerékjártó</b> 116.<br/> <b>Köhler</b> 272.<br/> <b>Kommerell</b> 146.<br/> <b>Kramer</b> 292.<br/> <b>Kroh</b> 255.<br/> <b>Kruppa</b> 273.</p> <p><b>Lagrange</b> 240.<br/> <b>Lamé</b> 72.<br/> <b>Lazzeri</b> 288.<br/> <b>Legendre</b> 233, 238—241, 242.<br/> <b>Lexis</b> 253.<br/> <b>Lie</b> 66, 119, 121, 122, 139.<br/> <b>Lietzmann</b> 246, 292, 293.<br/> <b>Lill</b> 267.<br/> <b>Lindemann</b> 146, 159.<br/> <b>Lobatschewsky</b> 191, 192.<br/> <b>Loria</b> 249, 287.</p> <p><b>Mair</b> 280, 281.<br/> <b>Marcolongo</b> 288.<br/> <b>Mascheroni</b> 266.<br/> <b>Maxwell</b> 56.<br/> <b>Méray</b> 244, 284, 285.<br/> <b>Merkator</b> 110.<br/> <b>Meyer, W. Fr.</b> 146, 170, 263.</p> |
|---|---|---|



- Möbius 17, 18, 19, 20, 35, 37, 61, 75, 76, 96, 97, 98, 100, 114, 180, 218, 260/1, 263, 264, 272, 286.  
 Monge 238.  
 Müller, C. H. 85.  
 Müller, E. 273.  
 Neper 273 ff.  
 Newton 206.  
 d'Ovidio 246.  
 de Paolis 247.  
 Pascal 62.  
 Pasch 218.  
 Peano 248.  
 Peaucellier 108.  
 Perry, J. 232, 233–235, 237, 280.  
 Pestalozzi 250 f.  
 Plato 226.  
 Plücker 34, 35, 37, 61, 117, 119.  
 Pohlke 89, 90.  
 Poinsot 35, 48.  
 Poncelet 61, 62, 127, 129, 139.  
 Potts 232.  
 Predella 288.  
 Preßler, O. 85.  
 Pringsheim 257.  
 Proklus 209.  
 Ramus, Petrus 237.  
 Reinhardt 21.  
 Remak 80, 81.  
 Riecke 253, 257.  
 Riemann 114, 191.  
 Rouché 242.  
 Rousseau 284–286.  
 Rückle 255.  
 Runge 230.  
 Salkowski 292.  
 Salmon 145, 146, 159.  
 Sannia 246.  
 Scheffers 122, 273, 292.  
 Schilling, Fr. 16, 40, 81, 125, 257.  
 Schimmack t. 236, 243, 291.  
 Schoenflies 124.  
 Schopenhauer 257, 259.  
 Schwarz 89.  
 Schweikart 191.  
 Siddons 235.  
 Simon, M. 203, 229.  
 Slate 67, 68.  
 Sommer 263.  
 Stäckel 191, 244.  
 v. Staudt 61, 129, 130, 133, 135.  
 Steiner 61, 100, 129, 260.  
 Stolz 133.  
 Study 66, 263, 268, 273.  
 Sylvester 145, 146, 154, 232.  
 Tietze 116.  
 Timerding 56, 292.  
 Tissot 112.  
 Treutlein 261, 286, 288, 292.  
 Tschebycheff 268.  
 Vahlen 265.  
 Veronese 247.  
 Voigt, W. 164.  
 Weber, H. 260.  
 Weinreich 236.  
 Wellstein 260.  
 Weyl 191.  
 Wieleitner 249.  
 Wilson 68.  
 Witting 292.  
 Wolff 279.  
 Young, G. 236.  
 Young, W. H. 236.  
 Zacharias 263.  
 Zeuthen 203, 214.  
 Zöllner 67, 68.

## Sachverzeichnis.

- Absolute Invariante** 29, 150.  
 — Involution 132.  
**Absolutes Polarsystem** 132—133.  
**Abwickelbare Fläche** 64—65.  
**Adjunktion uneigentlicher Punkte** 63, 126.  
**Ähnlichkeitstransformation** 75, 85, 95, 140.  
**Aequatio directrix** 119.  
**Affine Geometrie** 75—92, 141—142, 155—156, 159—168, 264, 266.  
 — Gruppe 143, 155, 269, 272.  
 — Konstruktionsaufgaben 264, 266.  
 — Punkttransformationen 75—92, 141 bis 142.  
**Affinität** 75—92, 166.  
 Ausgeartete — 86—91.  
 Homogene — 76—80, s. a. Deformation, homogene.  
 Inhaltstreue — 272.  
 Reine — 80, s. a. Deformation, reine.  
**Affinor** 166.  
**Aktual unendlich** 220.  
**„Algebraische“ Geometrie der Schule** 229—230.  
**Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers, Euklidischer** 209—210.  
**Analysis situs** 113—117, 142—143, 285.  
**Analytische Geometrie.**  
 — — auf der Schule 229.  
 Axiomatische Grundlegung der analytischen — 171—189.  
 Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie 59—60.  
**Antisymmetrischer Tensor** 167.  
**Archimedisches Axiom** 220.  
**Astralgeometrie** 191.  
**Ausdehnungslehre** 21, 22, 67.  
**Axialer Vektor** 51, 52.  
**Axiome der Anordnung** 138, 173, 178, 217—220.  
**Axiom von Eudoxus** 220.  
**Axiome der Existenz** 138, 175.  
 — der Kongruenz 189.  
 — der Parallelität 189, 192, 198, 213, 240.  
 — der Stetigkeit 138, 173, 178, 181, 220.  
 — der Verknüpfung 63, 138, 173.  
**Axiomatik, historische Bemerkungen zur** — 200—201.  
 Philosophische Bemerkungen zur — 201—202.  
**Axiomatische Grundlegung der analytischen Geometrie** 171—189.  
**Axonometrie** 85—91.  
**Baryzentrischer Kalkül** 17.  
**Berührungstransformation** 119—122, 123—125.  
**Blatt, Möbiussches** — 19, 114.  
**Beweglichkeit der Figuren** 228.  
**Bewegung**  
 Bahnkurven einer — 174, 176, 180 bis 181.  
 Existenz der — 175.  
 Gruppe der Bewegungen 174, 180, 199.  
 — und Kongruenz 188—189, 214—215, 215—217.  
 —, euklidische 174—176, 180.  
 —, nichteuklidische 199.  
**Bezeichnungenweisen der Tensorrechnung** 168.  
 — der Vektoranalysis 55.  
**Birationale Punkttransformation** 106.  
**Cayleysches Prinzip (metrische und affine Geometrie als Spezialfälle der projektiven)** 145—146, 159—161, 164, 168—171, 194—199.  
**Cremonatransformation** 106, s. a. Punkttransformation, birationale.

- Darstellende Geometrie 83–91, 101 bis 104, 273, 290, 292.  
 Definition geometrischer Eigenschaften und Gebilde 27, 28, 162.  
 Deformation, homogene 76–80, 155 bis 156, 165–168.  
 —, reine 80, 165–167.  
 Determinanten als Invarianten 151 bis 154.  
 Determinantenprinzip von Graßmann 22 ff. (besonders 23), 31 ff., 161–162, 164.  
 Differentialparameter 72.  
 Dilatation 270 ff.  
 Gruppe der –en 271, 272.  
 Dimension 67.  
 Die „vierte“ – 67.  
 Zweidimensionale Wesen 68.  
 Divergenz 72.  
 Doppelverhältnis (Doppelschnittverhältnis) 6, 100.  
 — als projektive Größe 157–158.  
 Drehmoment einer Kraft 25, 33, 36–37.  
 — einer Dyname 37.  
 — von Linienteilen 36.  
 Drehung 26, 43, 45, 46, 75, 140, 166–167, 180–186.  
 Dreieck, sphärisches 242.  
 —, —, rechtwinkliges 273–276.  
 Dreiecksgeometrie 170–171, 230 bis 231.  
 Dreieckskonstruktionen 230.  
 Dreieckskoordinaten 17.  
 Dualistische Transformationen 117 bis 119, 122–124.  
 Dualitätsprinzip 62–65, 117, 149.  
 Dyade 166, 168.  
 Dyname 34, 35.  
 Nullachsen einer – 35.  
 Parameter einer – 35.  
 Zentralachse einer – 34.  
 Dynamen, Geometrie der – 66.  
  
**Ebene, unbegrenzte** 32, 76, 95–96.  
**Ebenenteil** 32, 46–48.  
 — als affine Größe 162.  
**Ebenenbündel** 63.  
**Ebenenbüschel** 63.  
**Ebenenraum** 63.  
 Eigenschaften, Definition geometrischer – 27.  
**Einseitige Flächen** 20–21, 114.  
 „Elemente“ des Euklid 203–225.  
 Elemente, imaginäre – 126–139.  
  
 Elemente, imaginäre, analytische Behandlung 126–130, 139.  
 —, —, geometrische Interpretation 130 bis 139.  
 Unendlichferne –  
 —, —, der projektiven Geometrie 93 bis 94.  
 —, —, der Geometrie der reziproken Radien 107.  
 —, —, der nichteuklidischen Geometrie 198.  
**Ellipsoid (bzw. Ellipse)** 77–79, 81–82.  
 Diametralebenen, konjugierte 79, 82.  
 Durchmesser, konjugierte 79, 82.  
 Hauptachsen 79.  
 Mittelpunkt 79.  
**Elliptische Geometrie** 198, s. a. nicht-euklidische G. II. Art.  
**Entfernung als metrische Größe** 169 bis 170.  
 Euklidische – 169–170, 196–197.  
 Nichteuklidische – 195–196.  
**Ergänzung einer Plangröße** 58.  
**Erzeugende einer Transformationsgruppe** 27.  
**Euklidische Bewegung** 174–176, 180.  
 — Entfernung 169–170, 196–197.  
 — Geometrie 198.  
**Euklidischer Winkel** 168–169.  
**Exhaustionsbeweise** 210.  
**Existenz der Bewegungen** 175.  
**Existenzaxiome** 138, 175.  
  
**Fläche,**  
 erzeugt von Punkten 58, 64–65.  
 umhüllt von Ebenen 64–65.  
 Linien- (Regel-) – 65.  
 Abwickelbare – 64–65.  
 Kegelfläche 64–65.  
**Flächen, einseitige** 20–21, 114.  
 —, zweiseitige 20, 114–117.  
**Flächeninhalt**  
 — des Dreiecks 5.  
 — einfacher Polygone 9.  
 — sich überschlagender Polygone 9–10.  
 — krummlinig begrenzter Flächenstücke 10–11.  
 — als relative Größe 3–5, 7–11, 187.  
 Axiomatische Einordnung des Inhaltsbegriffes in die analytische Geometrie 186–187.  
**Formen** 147–149.  
**Fusion von Arithmetik und Geometrie** 2, 228.

- Fusion von Planimetrie und Stereometrie 2, 228, 285, 286, 288, 292.
- Gebilde**, Definition geometrischer — 28, 162.
- zweiten Grades der Imaginärtheorie 130—133.
- Geometrie und Invariantentheorie 140 bis 141, 155—159, 159—171.
- (u. Gruppe)
- Affine — 75—92, 141—142, 155—156, 159—168, 264, 266, 272.
- Metrische — 140—141, 159, 168—171, 173—174, 180, 264, 266.
- Projektive — 61—65, 92—105, 142, 156—159, 172—173, 180, 194—199, 264, 265.
- der reziproken Radien 105—110, 142, 265, 268, 270, 272.
- der Lage 100, s. a. projektive —.
- des Maßes 101, s. a. metrische —.
- (u. Axiome)
- Euklidische (= parabolische) — 198.
- Nichteuklidische — 190—200, 240 bis 241.
- — I. Art (= hyperbolische) 191, 193, 194, 198, 241.
- — II. Art (= elliptische) 192, 193, 194, 198, 240.
- Nichtarchimedische — 201, 220—224.
- Pseudogeometrie 200.
- (u. Gebilde)
- der Dynamen 66.
- Kugelgeometrie 66.
- Liniengeometrie 66.
- Mehrdimensionale — 66—67.
- Unendlich-dimensionale — 67.
- auf der Schule
- „Algebraische“ — 229—230.
- „Geometrische Analysis“ 60.
- Darstellende — 273, 290, 292.
- Dreiecksgeometrie 170—171, 230 bis 231.
- Geometrische Konstruktionen 264 bis 272.
- , Unterschied zwischen analytischer und synthetischer — 59—60.
- Gerade, unbegrenzte — 24, 29, 32, 76, 96.
- Geradenteil 24, 29, 32, 36, 46—48.
- Geradenbündel 63.
- Geradenbüschel 63.
- Geradenfeld 63.
- Geradführung 108.
- Geschlecht 114—115.
- Gestalten algebraischer Kurven 122 bis 124.
- Gewicht einer Invariante 150.
- Gradient 71.
- Grundgebilde, lineare 63.
- Grundlegung der analytischen Geometrie 171—189.
- der darstellenden Geometrie 83—91, 101—104.
- Gruppe
- Affine — 143, 155, 269, 272.
- Inhaltstreu-affine — 272.
- Metrische — s. Hauptgruppe.
- Projektive — 143, 157, 173, 269, 272.
- der Bewegungen 174, 180, 199.
- der Dilatationen 271, 272.
- der Drehungen 272.
- der Transformationen durch reziproke Radien 143, 265, 268, 271, 272.
- der Verschiebungen 175, 180, 199, 272.
- der eindeutig stetigen (topologischen) Punkttransformationen 143.
- Hauptgruppe 143, 173, 264, 269, 272.
- Untergruppe, invariante 285.
- Gruppenparameter 143—144.
- Hauptgruppe 143, 173, 264, 269, 272.
- Heptaeder von Reinhardt 21.
- Historische Bemerkungen
- zur Ausdehnungslehre 21, 22.
- zur Axiomatik 200—202.
- zu den „Elementen“ des Euklid 203 bis 207.
- zur Entwicklung der Geometrie über-
- haupt 58—68.
- zum Parallelenaxiom 190—192.
- zum Unterricht in der Geometrie 226 bis 261, 277—293.
- zur Vektorrechnung 51, 55—58, 68, 73.
- zum Vorzeichenprinzip der analytischen Geometrie 17.
- Homogene
- Deformation 76—80, 155—156, 165 bis 168.
- Koordinaten 92—95.
- Hornförmige Winkel 221—224.
- Hyperbolische Geometrie 198, s. a. nichteuklidische G. I. Art.
- Hyperdeterminanten 154.
- Imaginäre Elemente 126—139.
- analytische Behandlung — — 126 bis 130, 139.

- geometrische Interpretation imaginärer Elemente 130—139.
- Imaginäres Kreispunktepaar 128, 129, 131, 139, 171.
- Imaginärer Kugelkreis 128, 129, 131, 139, 144, 145, 159—160, 173.
- Imaginärtheorie 126—139.
- Imaginärtransformation 129.
- Inhalt von Dreiecken und Tetraedern als relative Größe 3—6.  
als affine Größe 78, 155—156, 160 bis 161.
- Inhaltstreue Affinität 272.
- Invarianten 149.  
absolute 29, 150.  
relative 29, 150.
- Invariantensystem, volles — 151.
- Invariantentheorie 146—154.  
— und Geometrie 140—141, 155—159, 159—171.  
— und Koordinatentransformation 27, 28, 140—141, 155—159, 159—171.
- Invariante Untergruppe 285.
- Inversion (= Spiegelung an einem Punkt) 43, 45, 46, 75, 140.  
— (= Punkttransformation d. reziproken Radien) s. daselbst.
- Inversor 108.
- Involution 131, 132, 135—138.  
absolute — 132.  
Grundpunkte einer — 131, 135.
- Irrationales Verhältnis 207—209.
- Isobar 150.
- Kantengesetz von Möbius** 18.
- Kartenprojektion 110—113.  
winkeltreue — 110—112.  
allgemeine — 112—113.
- Kegelfläche 64—65.
- Kegelschnitt 104—105.  
Konstruktionen mit Lineal und vorgezeichnetem — 265—266.
- Kinematik 108, 123—125.
- Klassifikationsprinzip geometrischer Gebilde 28, 162.
- Klassifikation geometrischer Konstruktionsaufgaben 264—265.
- Körper, starrer — 175, 189.
- Kogredient 148, 167.
- Kollineation 76, 96.
- Komplex, linearer 37, 65, s. a. Nullsystem.
- Komponenten eines geometrischen Gebildes 162.
- kogrediente und kontragrediente Komponenten geometrischer Gebilde 167.
- kovariante und kontravariante — — — 167.
- Kongruenzaxiome 189.
- Kongruenz und Bewegung 188—189, 214—215, 215—217.
- Kongruenz s. a. Linienkongruenz.
- Konjugierte Diametralebenen 79, 82.  
— Durchmesser 79, 82.
- Konstruktionsaufgaben  
affine 264, 266.  
metrische 264, 266.  
projektive 264, 265.  
der Gruppe der reziproken Radien 265, 266.  
— ersten Grades 264, 265.  
— zweiten Grades 264, 265, 266.  
— höheren Grades 264, 266—267.
- Konstruktionshilfsmittel, Theorie der — 265—269.
- Kontragredient 148, 167.
- Kontravariant 167.
- Kontravariante 149.
- Koordinaten  
Dreieckskoordinaten 17.  
homogene — 92—95.  
Kugelkoordinaten 65—66.  
Linienkoordinaten 65—66.  
— eines geometrischen Gebildes 65.
- Koordinatensystem  
Konstruktion eines Parallelkoordinatensystems 177—180.  
— — rechtwinkligen Koordinatensystems 180—186.
- Koordinatentransformation  
rechtwinklige — in der Ebene 26.  
— — im Raum 43—46, s. a. Punkttransformation.
- Koordinatentransformation und Invariantentheorie 27, 28, 140—141, 155 bis 159, 159—171.
- Kovariant 167.
- Kovariante 149.
- Kraft 25, 33.
- Kräftepaar 25—26, 29—30, 33, 47—49.
- Kreisevolvente 125.
- Kreislineal, biegsames — 268.
- Kreispunktepaar, imaginäres — 128, 129, 131, 139, 171.
- Kugelgeometrie 66.
- Kugelkoordinaten 65—66.
- Kugelkreis, imaginärer — 128, 129, 131, 139, 144, 145, 159—160, 173.

- Kurve**  
 erzeugt von Punkten 58, 64–65, 187–188.  
 umhüllt von Geraden 117.  
 umhüllt von einer Kurvenschar 120.  
 „geometrische“ – 59.  
 „mechanische“ – 59, 123–125.  
 algebraische – 59, 122–123.  
 transzendente – 59.  
 analytische – 59.  
 nichtanalytische – 59.  
 – – und Punktmenge 59.  
 ebene – 59, 64–65, 122–123.  
 räumliche – 64–65, 127.  
 Kurvenlineal 269.  
 Kurvenschar, Umhüllungskurven einer – 120.
- Lage, Geometrie der** – 100, s. a. projektive G.
- Leitgleichung** 119.
- Lineal, Konstruktionen mit dem** – allein 265.  
 Konstruktionen mit – und vorgezeichnetem Kegelschnitt 265–266.
- Linie, unbegrenzte** – 24, 29, 32, 76, 96.  
**Linienteil** 24, 29, 32, 36, 46–48.  
 als affine Größe 161–162.
- Linielement** 120–122.  
**Linienfläche** 65.  
**Liniengeometrie** 65.  
**Linienkomplex** 65.  
**Linienkongruenz** 65.  
**Linienkoordinaten** 65–66.
- Maß, Geometrie des Maßes** 101, s. a. metrische G.
- Maßbestimmung**  
 durch den Kugelkreis s. Kugelkreis.  
 durch eine quadratische Form 194, 195.  
**Maßstabsänderung** 26, 43.
- Mechanik der Kontinua und Affinität** 82–83.
- Mehrdimensionale Geometrie** 66–67.  
**Meraner Lehrplan** 290.
- Metrische Geometrie** 140–141, 159, 165–174, 180, 264, 266.  
 – Gruppe s. Hauptgruppe.  
 – Konstruktionsaufgaben 264, 266.
- Netz, Möbiussches** – 97–98.
- Nichtarchimedische Geometrie** 201, 220 bis 224.
- Nichteuklidische Bewegung** 199.  
 – Entfernung 195–196.  
 – Geometrie 190–200, 240–241.  
 – – I. Art 191, 193, 194, 198, 241.  
 – – II. Art 192, 193, 194, 240.  
**Nichteuklidischer Winkel** 195.  
**Nichteuklidische und projektive Geometrie** 194–199.
- Nullsystem** 35, 37–42.  
 „Null“-Ebenen 38–42.  
 „Null“-Geraden 38–42.  
 „Null“-Punkte 38–42.  
 Parameter des Nullsystems 35.  
 Schraubensymmetrie des – 39–42.  
 Zentralaxe des – 38–42.
- Ordnung eines algebraischen Gebildes bei**  
 affinen Umformungen 77.  
 projektiven Umformungen 99–100.
- Parabolische Geometrie** 198, s. a. euklidische G.
- Parallelenaxiom** 189, 192–194, 198, 213, 240.
- Parallelismus** 89, 99, 176.
- Parallelkoordinatensystem, Konstruktion eines solchen** 177–180.
- Parallelprojektion** 83–91.
- Parameter**  
 einer Dyname 35.  
 einer Gruppe 143–144.
- Pentagramma mirificum** 273–276.
- Philosophische Bemerkungen**  
 zur Axiomatik 201–202.  
 zum Parallelenaxiom 192–194.
- Plangröße**  
 freie 32, 46–50, 164.  
 in ihrer Ebene bewegliche 32.  
 Ergänzung einer – 58.
- Pohlkescher Satz** 89–91.
- Polarer Vektor** 51, 52.
- Polarform** 153.
- Polarplanimeter** 11–16.
- Polarsystem** 118–119, 130–131.  
 absolutes – 132–133.
- Polarentheorie der Kegelschnitte** 62, 118–119.  
 – der Flächen zweiten Grades 62.
- Polyedersatz von Euler** 116.
- „Postulate“ bei Euklid** 213–214.
- Produkte der Vektorrechnung**  
 äußeres Produkt 54, 55, 58.  
 inneres – 54, 55.

- skalares Produkt 54, 55.  
 symbolisches — 71–73.  
 vektoriell — 54, 55, 58.  
 Programm, Erlanger 140, 144, 272.  
**Projektion**  
 Kartenprojektion 110–113.  
 Parallelprojektion 83–91.  
 Zentralprojektion 101–104, 282.  
 Stereographische — 109.  
 Projektive Geometrie 61–65, 92 bis  
 105, 142, 156–159, 172–173, 180,  
 194–199, 264, 265.  
 — Gruppe 143, 157, 173, 269, 272.  
 — Konstruktionsaufgaben 264, 265.  
 — Punkttransformationen 92–105, 142.  
 Projektive und nichteuklidische Geome-  
 trie 194–199.  
 Projektivität 92–105.  
 — ausgeartete — 101–102.  
 Projizieren und Schneiden 95.  
 Proportionenlehre 208–209, 228.  
 Pseudogeometrie 200.  
 Psychologische Gesichtspunkte im Un-  
 terricht 227.  
 Punktfeld 63.  
 Punkttraum 63.  
 Punktreihe 63.  
 Punktmengen und Kurven 59.  
 Punkttransformation 74–117.  
 — aktive — 74.  
 — passive — 74.  
 — affine — 75–92, 141–142, 166.  
 — birationale — 106.  
 — eineindeutig stetige (topologische) —  
 113–117, 142–143.  
 — projektive — 92–105, 142.  
 — rechtwinklige — 26, 43–46.  
 — durch reziproke Radian 105–110,  
 142.  
 Pythagoräischer Lehrsatz 258–259.  
**Quaternion** 51, 57.  
 Querschnitt 115–116.  
 Quirl 72, 73.  
**Radian, reziproke —**  
 Geometrie der Transformationen  
 durch — 105–110, 142, 265.  
 Gruppe der Transformationen durch  
 — 143, 265, 268, 271, 272.  
 Konstruktionen der Gruppe der  
 Transformationen durch — 264, 265.  
**Raumanschauung** 171–172, 192–193,  
 201–202.  
**Rauminhalt**  
 des Tetraeders 6.  
 der Pyramide 19.  
 des Polyeders 19.  
 — als relative Größe 3–5, 17–20.  
**Raumteil** 31, 46.  
**Rechtwinkliges Koordinatensystem,**  
 Konstruktion eines solchen 180 bis  
 186.  
**Rechtwinklige Punkttransformation** 26,  
 43–46.  
 Regelfläche s. Linienfläche.  
 Relative Invarianten 29, 150.  
 Reliefperspektive 102–103.  
 Reziproke Transformation 118–119.  
 Rotor 72, 73.  
 Rückkehrschnitt 114–115.  
**Schneiden und Projizieren** 95.  
 Schnittverhältnis 6, 78.  
 — als affine Größe 161.  
 Schraubenfeld 69.  
 Schraubensymmetrie des Nullsystems  
 39–42.  
 Schraubentheorie 42.  
 Skalar 51.  
 — erster Art 52.  
 — zweiter Art 52.  
 Skalares Produkt 54–55.  
 Skalarfeld 68–72.  
 Sophismen, geometrische — 219–220.  
 Spat 31.  
 Speer 270.  
 Sphärisches Dreieck 242.  
 — rechtwinklig — — 273–276.  
 Spiegelung 26, 43, 45, 46, 75, 140, s.  
 a. Inversion.  
 Starrer Körper 175, 189.  
 Statik ebener Systeme 24–26, 28–30.  
 — räumlicher Systeme 33–37.  
 Stereographische Projektion 109.  
 Stetigkeitsaxiome 138, 173, 178, 181, 220.  
 Stoffauswahl im Unterricht 227, 254.  
 Strahlensystem 65.  
 Strecke als relative Größe 3–4, 6.  
 Streckung, gleichförmige — 80, 164 bis  
 165, s. a. reine Deformation.  
**Substitutionen**  
 kogrediente und kontragrediente 148.  
 transponierte 148.  
 Symmetrischer Tensor 164.  
**Synthetische Geometrie**  
 Unterschied zwischen analytischer  
 und synthetischer — 59–60.

- Syzygie 152.  
 Syzygiensystem, volles — 152.
- Tensor** 163—168.  
 symmetrischer 164.  
 antisymmetrischer 167.
- Topologische Punkttransformationen  
 113—117, 142—143.
- Transformation  
 Berührungstranformation 119—122,  
 123—125.  
 Imaginär — — 129.  
 Punkttransformation s. daselbst.  
 — mit Wechsel des Raumelementes 113  
 bis 125.  
 dualistische — 117—119, 122—124.  
 reziproke — 118—119.
- Transformationsgruppe 27, 143, s. a.  
 Gruppe.
- Transformation und Unterricht 282,  
 285, 286.
- Transponierte Substitution 148.
- Trigonometrische Funktionen  
 Anwendung der analytischen Eigen-  
 schaften 184.  
 geometrische Bedeutung 185, 189.
- Unendlich-dimensionale Geometrie 67.
- Unendlichferne Elemente  
 der projektiven Geometrie 63, 93—94.  
 der Geometrie der reziproken Radien  
 107.  
 der nichteuklidischen Geometrie 198.
- Umhüllungskurven einer Kurvenschar  
 120.
- Unterricht, geometrischer — 226—261,  
 277—293.  
 in Deutschland (einschl. Österreich  
 und Schweiz) 250—261, 289—293.  
 in England 231—236, 279—282.  
 in Frankreich 236—245, 277, 283 bis  
 286.  
 in Italien 245—250, 278, 286—288.  
 in Rußland 278, 279.
- Vektor**  
 axialer 51, 52.  
 freier 24, 29, 32, 46—48, 50, 77, 87.  
 linienflüchtiger 24, 29, 32.  
 polarer 51, 52.
- Vektoralgebra 52—55.  
 Vektoranalysis 68—73.  
 Vektorfeld 68—72.  
 Vektorfunktion, lineare 166.  
 Vektormultiplikation 54, 55, 70—72.  
 Vektorsymbol Hamiltons 69—71.  
 Vektorielles Produkt 54, 55, 58.  
 Verknüpfungsaxiome 63, 138, 173.  
 Verschiebungen 26, 43, 75, 140, 175—180.  
 Gruppe der — 175, 180, 199, 272.
- Verwandtschaft s. Punkttransformation  
 und Transformation.
- Winkel** als metrische Größe 168—169.  
 euklidischer — 168—169.  
 nichteuklidischer — 195.  
 rechter — (axiomatisch) 181, 182, 213.  
 rechter — (als Zeicheninstrument)  
 266—268.  
 hornförmiger — 221—224.
- Winkelsumme im Dreieck 240.
- Winkeltreu 109, 110—113.
- Würdigung von Euklids „Elementen“  
 203—207, 211, 224.
- Zahnräder** 123—125.
- Zeichenhilfsmittel, Theorie der — 265  
 bis 269.
- Zentralaxe 38—42.
- Zentralperspektive 101—102.
- Zirkel, Konstruktionen mit dem — allein  
 266.
- Zusammenhang 115.
- Zweidimensionale Wesen 68.
- Zweiseitige Flächen 20, 114—117.
- „Zwischenaxiome“ 138, 173, 178, 217 bis  
 220.
- Zykel 270.
- Zykloide 124—125.