ГЛАС

СРПСКЕ АКАДЕМИЈЕ НАУКА

CXCI

ОДЕЉЕЊЕ ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИХ НАУКА

96

Београд, 1948

ПРЕГЛЕД ИЗДАЊА
СРПСКЕ АКАДЕМИЈЕ НАУКА
ГЛАС
(ПРВОГ РАЗРЕДА)

(у продаји)

Књига:

CLXXV (86). — **М. Миланковић,** Нови резултати астрономске теорије климатских промена. — **Драгослав С. Митриновић,** Истраживања о асимптотским линијама површина. — **Драгољуб Марковић,** О размацима реалних корена алгебарских једначина. — **Антон Билимовић,** Коефицијенат раширености једне области. — — — Природна проучавања у геометрији и механици. — — — О коефицијентима асиметрије. — — — О линеарним специјалним каноничним трансформацијама. — **Михаило Петровић,** Једна врста бројних квази-инваријаната. — — — О двоструким потенцијалним редовима. — **Д-р Мил. З. Јовичић,** Зближавање физичких и хемиског метода истраживања у питању трансмутације елемената. — **В. Жардецки,** Примедба о облицима перманентно ротирајуће течне масе. — — — О условима равнотеже течне масе на којој плива чврсто тело. — **Милош Радојчић,** О скупу трансцендентних снопова у близини неког есенцијалног сингуларитета аналитичке функције. — **Јован Шел,** Коефицијенат прелаза топлоте са лоптасте површине на околни ваздух у случају природне конвекције — **Д-р Н. Салтиков,** Теорија тангенцијалних трансформација. — **Јован Карамата,** О проширеним аритметичким срединама. — Б. 1937 8⁰ 326.

CLXXVII (87). — **Илија Ђуричић** и **Жарко Б. Миловановић,** Прилог изучавању мерења артериског притиска. — **Илија Н. Димитријевић,** Утицај ерготамина на термогенезу и терморегулацију. — — — Утицај ерготамина и адреналина на терморегулацију. — **Јеленко Михаиловић,** Главне трусне области у Југославији. — **Т. В. Симић** и **Вл. Шварц,** Бактерицидно дејство серума туберкулозних особа на бациле туберкулозе. — **Т. В. Симић** и **Вл. Шварц,** Вредност бактерицидног дејства серума туберкулозних болесника на бациле туберкулозе in vivo. — **Фридрих Е. Цојнер,** Хронологија плеистоцена. — **Нико Ранојевић,** Четврти прилог познавању гљива у Србији. — **Јован Јуришић,** О развитку корења и репродукционих пупољака на засеђеним листовима врсте Bryophyllum calycinum. — **Илија Н. Димитријевић,** Јохимбин и телесна лемпература. — **Стефан Ђелинео,** Прилози познавању теуморегулације и термогенезе презимара I. — **Милорад Марчетић,** Прилог изучавању хемијске терморегулације код човека. — Б. 1938 8⁰ 312.

CLXXVIII (88). — **Мил. З. Јовичић,** Завршно саопштење о испитивању трансмутације елемената у градачком институту. — **В. В. Мишковић,** О секуларним неједначинама астрономских елемената Земљине путање. Други део. — **Михаило Петровић,** Потенцијални редови што изражавају општи интеграл какве диференцијалне једначине првога реда. — **Драгослав С.**

ГЛАС

СРПСКЕ АКАДЕМИЈЕ НАУКА

CXCI

ПРВИ РАЗРЕД

96

БЕОГРАД
ШТАМПА ЈУГОСЛОВЕНСКОГ ШТАМПАРСКОГ ПРЕДУЗЕЋА
1948

Штимпа Југословенског штампарског предузећа — Београд

САДРЖАЈ

О НЕКИМ ИНВЕРСИЈАМА CESÁRO-ВА ПОСТУПКА ЗБИРЉИВОСТИ ВИШЕГ РЕДА

од
ЈОВАНА КАРАМАТЕ

(Приказано на IV скупу Академије природних наука, од 20. нов. 1939 год.)

1.1. У своме раду „О једној новој инверсији Cesàro-ва начина збирљивости" [2][1]) показао сам да се позната инверсија Cesàro-ва поступка збирљивости:

$$\text{„}\textit{Из}\quad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu \to s, \qquad n\to\infty, \tag{1.1}$$

$$\textit{и}\quad \liminf_{n\to\infty}\ \operatorname*{Min}_{n\leq n'\leq n+\varepsilon n}\{s_{n'}-s_n\} > o(1), \qquad \delta\to o \tag{1.2}$$

$$\textit{следи}\qquad s_n\to s, \qquad n\to\infty.\text{"} \tag{1.3}$$

може проширити на следећи начин.

Закључак (1.3) може се добити и из једног услова који је слабији од услова конвергенције (1.2), ако се при томе претпостави више о његовој збирљивости, тј. ако се зна не само да аритметичка средина $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu$ конвергира, већ ако је нешто познато и о брзини којом та аритметичка средина тежи својој граничној вредности.

У поменутој расправи показао сам, наиме, да ће (1.3), тј.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

[1]) Број у заградама [ ] указује на расправу наведену на крају овог рада.

следити већ из

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname*{Min}_{n\leq n'\leq n+\varepsilon d_n} \{s_{n'} - s_n\} > o(1), \quad \varepsilon \to o, \tag{1.4}$$

ако знамо да је задовољена не само претпоставка (1.1) *већ и услов*

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = s + o\left(\frac{d_n}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

При томе је d_n *низ бројева који монотоно расте*

$$o < d_n \leq d_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

но не сувише брзо, јер мора бити

$$d_{n'} = O(d_n), \qquad n \to \infty,$$

и то за свако

$$n' \leq n + \varepsilon a_n.$$

Из овог следи, на пр., да d_n не може расти брже од n. Ако d_n спорије расте од n, услов конвергенције (1.4) слабији је од услова конвергенције (1.2), док претпоставка (1.5) утолико више захтева од претпоставке (1.1).

Услови (1.4) и (1.5) се на тај начин допуњују, тако да из њих следи исти закључак (1.3) као и из (1.1) и (1.2).

1.2. У специјалном случају кад је $d_n = n^\sigma$, $o \leq \sigma \leq 1$, I. M. Hyslop, на крају своје расправе [1], проширује тај став на Cesàro-ове збирљивости k-тог реда, на овај начин.

Нека је $S_n^{(k)}$ k-тоструки збир низа s_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, тј.

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$S_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu^{(k-1)}, \quad \text{са} \quad S_n^{(1)} = s_n,$$

и

$$A_n^{(k)} = \binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{\Gamma(k+1)}, \qquad n \to \infty.$$

Тада из

$$\frac{1}{A_n^{(k)}} S_n^{(k)} = s + o(n^\sigma/n^k), \qquad n \to \infty, \tag{1.6}$$

и $$u_n = O(n^{-\sigma/k}), \qquad n \to \infty, \tag{1.7}$$

следи $$s_n \to s, \qquad n \to \infty;$$

при чему је k цео број ≥ 1, *а* σ *такав број да је*

$$k-1 \leq \sigma < k.$$

I. M. Hyslop допуњује овај резултат још и на тај начин што показује да исти закључак,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

следи и из

$$\frac{1}{A_n^{(k)}} S_n^{(k)} = s + O(n^\sigma / n^k), \qquad n \to \infty,$$

ако се само (1.7) замени са

$$u_n = o(n^{-\sigma/k}), \qquad n \to \infty.$$

Облик услова конвергенције (1.7) је у ствари само специјалан случај облика (1.2) односно (1.4).

У наведеној својој расправи [2] показао сам, наиме, да ће услов облика (1.4), тј., прецизније, услов

$$\liminf_{n \to \infty} \; \mathrm{Min}_{n \leq n' \leq n + \varepsilon n^{\sigma/k}} \{s_{n'} - s_n\} > o(1), \qquad \varepsilon \to o, \tag{1.8}$$

увек бити задовољен кад год је испуњен услов (1.7), а из даљег излагања ћемо видети да Hyslop-ов став важи и под овако проширеним условом конвергенције (1.8).

Поред поменутих резултата, I. M. Hyslop, у наведеној расправи, испитује везу између Cesàro-ве збирљивости редова Σu_n и $\Sigma n^a u_n$ и показује, сем тога, да ред, који је збирљив (C, k) тако да је задовољен и услов (1.6), мора увек бити збирљив и Cesàro-вим поступком нижег реда.

1.3. У овој расправи немам намере да та испитивања наставим, већ ми је претежно циљ да проучим ово питање.

Шта се може закључити о понашању низа бројева s_n за велике вредности n-а, ако знамо да је низ збирљив Cesàro-вим поступком првог или вишег реда, и ако је познато да он задовољава један услов конвергенције облика (1.4), односно (1.8), но који није довољан да се закључи о његовој конвергенцији. При томе се ништа не претпоставља о брзини којом Cesàro-ов збир конвергира својој проширеној граничној вредности.

Овим је указано на нову групу проблема, наиме проблема где треба испитати шта би се највише могло закључити из збирљивости у погледу на понашање низа за велике вредности n-а, ако при том постоје још извесни подаци о самоме низу, но који нису довољни да се из њих и збирљивости може закључити његова конвергенција.

Најподеснији облик ових суплементарних података који би одговарао овој групи проблема је облик услова конвергенције (1.4). Већом, односно мањом брзином рашћења низа d_n дато је овим условом више, односно мање података о самоме низу. У случају кад низ d_n довољно брзо расте, из услова конвергенције (1.4) и чињенице да је низ збирљив неким датим поступком, следи и сама конвергенција посматраног низа.

1.4. Облик услова (1.4) није и једини облик поменутих суплементарних података потребних да се знају о некоме низу s_n, да би се из збирљивости могло нешто (ма и најмање) закључити о његову понашању кад $n \to \infty$.

Примера ради, навешћемо само ове. Из збирљивости — $(C, 1)$ низа s_n, тј. из

$$\frac{1}{A_n^{(1)}} S_n^{(1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \to s, \quad n \to \infty,$$

следи да низ s_n не може расти брже од n, или, прецизније, да је

$$s_n = o\,(n), \quad n \to \infty.$$

Слично важи и за општу збирљивост (C, k), тј. да из

$$\frac{1}{A_n^{(k)}} S_n^{(k)} \longrightarrow s, \quad n \to \infty,$$

следи увек $\qquad s_n = o\,(n^k), \quad n \to \infty.$

Одавде излази да се из збирљивости (C, k) може, без икаквих суплементарних података о самом низу s_n, нешто закључити о његову понашању за велике вредности од n. Али чињеница да се овде не појављују никакви суплементарни услови само је привидна. То можемо лако и увидети ако ово посматрамо са општије тачке гледишта, и уведемо, место низова, функције.

Задржимо се засад само на збирљивости $(C, 1)$, и претпоставимо да је функција $s(x)$ дефинисана за $x \geq 0$ и ограничене варијације у сваком коначном размаку.

Тада је аритметичка средина функције $s(x)$, узета у размаку $(0, x)$, дата изразом

$$\frac{1}{x} S_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)\, dt;$$

а за саму функцију $s(x)$ кажемо да је збирљива $(C, 1)$ у тачки $x = \infty$, ка проширеној граничној вредности s, ако

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t)\, dt \longrightarrow s, \quad x \longrightarrow \infty.$$

Ако у овом случају поставимо питање шта можемо закључити о понашању функције $s(x)$ за велике вредности x-а и то само из чињенице да је она збирљива $(C, 1)$, одговор би гласио: ништа. (Изузев једино квалитативни податак да она мора или конвергирати или осцилирати). Заиста, није тешко конструисати функције које су збирљиве $(C, 1)$ а осцилирају тако да величине појединих осцилација неограничено расту и то произвољном, унапред датом брзином.

Таква би била, на пр., функција

$$s(x) = \begin{cases} p_n & \text{за} \quad n \leq x < n + {}^1/p_n, \\ o & \text{за} \quad n + {}^1/p_n \leq x < n + 1, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$, где је p_n низ позитивних бројева који може да тежи бесконачности произвољно брзо; ова је функција при томе још и позитивна.

Вратимо се сад збирљивости низова. Јасно је да израз

$$\frac{1}{n} \sum_1^n s_\nu$$

можемо добити као специјалан случај израза

$$\frac{1}{x} \int_0^x s(t)\, dt,$$

ако за функцију $s(x)$ узмемо степенасту функцију облика

$$s(x) = s_n \text{ кад је } n-1 \leqslant x \leqslant n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1,9}$$

и кад пустимо да x прелази сам преко целих бројева; тада је, наиме,

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = \frac{1}{x}\sum_1^x s_\nu, \qquad (x \text{ цео број}).$$

Чињеницу да из

$$\frac{1}{n}\sum_1^n s_\nu \to s, \quad n \to \infty,$$

следи

$$s_n = o(n), \quad n \to \infty,$$

можемо дакле и овако формулисати.

Из

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt \to s, \quad x \to \infty,$$

следи

$$s(x) = o(x), \quad x \to \infty,$$

кад год је $s(x)$ степенаста функција облика (1.9).

Из овога се јасно види да: док се, у општем случају, само из збирљивости $(C, 1)$ функције $s(x)$ ништа не може закључити о њеном понашању кад $x \to \infty$, дотле се у случају збирљивости низа s_n могу ипак добити извесни подаци о његову понашању кад $n \to \infty$. Но ово само услед тога што низовима одговарају функције специјалне структуре, те су, самим тим, имплицитно дати они суплементарни подаци о функцији $s(x)$ који, са чињеницом да је она збирљива - $(C, 1)$, омогућују извођење извесних података о њеном понашању за велике вредности од x.

1.5. Наведени суплементарни подаци о функцији $s(x)$, тј. да она буде степенаста функција са дужином степена 1, изгледају, на први поглед, сасвим друге природе од оних датих условом (1.4). Овај услов, у случају када се односи на функцију $s(x)$, гласи

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x \leq x' \leq x + \varepsilon d(x)} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.10}$$

где је функцијом $d(x)$ одређена јачина дотичног услова.

Међутим, ако изближе погледамо ова два услова, видимо да ће свака степенаста функција горњег облика (1.9) задовољавати услов (1.10) са специјалном функцијом

$$d(x) \equiv 1,$$

но под претпоставком да при томе не пустимо да $x \longrightarrow \infty$ непрекидно, већ само преко целих бројева.

Према томе би један од веома општих облика за поменуте суплементарне услове изгледао овако

$$\liminf_{x_k \to \infty} \quad \operatorname*{Min}_{x_k \leq x' \leq x_k + \varepsilon d(x_k)} \{s(x') - s(x_k)\} > o(1), \quad \varepsilon \longrightarrow o. \tag{1.11}$$

или, нешто ужи услов,

$$\limsup_{x_k \to \infty} \quad \operatorname*{Max}_{x_k \leq x' \leq x_k + \varepsilon d(x_k)} |s(x') - s(x_k)| < o(1), \quad \varepsilon \longrightarrow o, \tag{1.12}$$

у којим условима, дакле, $x \to \infty$ само преко неког одређеног низа изолованих вредности x_k. Услови (1.11) и (1.12) представљали би један од најопштијих облика суплементарних података које би, поред збирљивости, морала да задовољава нека функција, да би се могло нешто закључити о њеном понашању за велике вредности од x.

Овако проширеним условима дати су подаци о функцији $s(x)$ само у размацима

$$(x_k, \quad x_k + \varepsilon d(x_k)), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

и ту су ти подаци утолико слабији уколико $d(x)$ спорије расте, односно брже тежи ка нули.

Самим тим проблеми који се односе на овако проширене услове облика (1,11) и (1.12) интимно су везани, штавише донекле и обухватају групу ставова познатих под називом „théorèmes lacunaires" или „Lückensätze".

Ово видимо већ и из разлога што, подесним избором низа x_k и функција $d(x)$, можемо увек постићи да услови (1.11) или (1.12) буду задовољени функцијама $s(x)$ које одговарају редовима $s_n = \sum_0^n u_\nu$, у којима се јављају извесне празнине.

1.6. Сличну појаву имамо и код Cesàro-ве збирљивости k-тог реда.

Ако, по аналогији на низове, означимо са $S_k(x)$, k-тоструки интеграл функције $s(x)$, тј. ако ставимо

$$S_k(x) = \int_0^x S_{k-1}(t)\,dt, \quad \text{са} \quad S_1(x) = s(x),$$

а што можемо још експлицитно изразити и у облику

$$S_k(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k\,d\,s(t), \quad \text{са} \quad s(o) = o,$$

тада кажемо да је функција $s(x)$ збирљива-(C, k) у тачки $x = \infty$, ако

$$s_k(x) = \frac{k!}{x^k} S_k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\,s(t) \to s, \quad x \to \infty. \tag{1.13}$$

У случају кад је $s(x)$ степенаста функција облика (1.9) са

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

израз (1.13) узима облик

$$s_k(x) = \sum_{1}^{\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k u_\nu. \tag{1.14}$$

Ова је средина потпуно различита облика од Cesàro-ве средине k-тог реда

$$\frac{1}{A_n^{(k)}} S_n^{(k)},$$

али је M. Riesz [5,6], који је средине (1.14) и увео, показао да оба ова израза дају еквивалентне поступке збирљивости, тј. да из

$$\frac{1}{A_n^{(k)}} S_n^{(k)} \to s, \quad n \to \infty,$$

следи

$$\sum_{1}^{\nu \leq x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k u_\nu \to s, \quad x \to \infty,$$

и обратно. (Овде ваља изричито нагласити да у горњем прелазу ка граници x мора непрекидно да $\to \infty$).

Према томе и за Cesàro-ве средине k-тог реда имамо сличну појаву, тј. да из

$$s_k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d\,s(t) \to s, \quad x \to \infty,$$

следи

$$s(x) = o(x^k), \quad x \to \infty,$$

ако је $s(x)$ степенаста функција облика (1.9).

Значи да би се и код Cesàro-ве збирљивости k-тог реда могли дати суплементарни подаци о функцији $s(x)$ у облику општих услова (1.11) или (1.12), и тако добити ставови који би давали одговор на поједине проблеме горе поменуте групе, а који би истовремено садржавали и извесне ставове о празнинама.

1.7. Групу проблема код којих су суплементарни подаци дати условима (1.11) или (1.12), а код којих $x \to \infty$ преко низа изолованих вредности x_k, обрадићу у четвртом делу ове расправе. Ови проблеми захтевају донекле различити поступак, самим тим што су овим обухваћени извесни ставови о празнинама.

У другом и трећем делу ове расправе обрадићу проблеме који се јављају када се пита шта се може закључити о понашању функције $s(x)$ за велике вредности од x, кад се, поред чињенице да је она збирљива, зна да она задовољава неки услов облика (1.10).

Овде ћу постављени проблем решити за случај Cesàro-ве збирљивости k-тог реда и под претпоставком да је $d(x) = x^\alpha$, са произвољним, унапред датим, реалним бројем α.

Интересантно је да се решење овог проблема може извести из ставова наведених у тачкама **1.1** и **1.2**, ако се они само подесно прошире са конвергенције на асимптотику.

Познато је које услове мора задовољавати нека функција $s(x)$ да би се, из асимптотског понашања њене Cesàro-ве суме k-тог реда, могло закључити одговарајуће асимптотско понашање саме функције.

Ако је, међутим, о асимптотском понашању (C, k)-суме више познато, јасно је да се под слабијим условима може добити исти закључак за функцију $s(x)$.

Овде ћемо прво извести један став ове последње врсте и затим показати како се из њега може добити одговор на постављено питање.

Прегледности ради, посматраћу најпре у другом делу ове расправе Cesàro-ву збирљивост првог реда, да бих затим могао у трећем делу концизније обрадити случај збирљивости k-тог реда.

2.1. Поменути став који проширује став наведен у **1.1** са конвергенције на асимптотику (али који га садржи и као специјалан случај, кад је α_n облика n^α) гласи:

Став 1. *Нека је функција $s(x)$ ограничене варијације у сваком коначном размаку и*

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = sx^a + s'x^b + o(x^b), \quad x \to \infty, \tag{2.1}$$

где је $a > b$ (или $a = b$ и $s' = o$); тада је

$$s(x) \sim (a+1)\,sx^a, \quad x \to \infty, \tag{2.2}$$

ако је задовољен

а) било услов

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-a+b}} \frac{s(x') - s(x)}{x^a} > o(1), \quad \varepsilon \to o; \tag{2.3}$$

б) било услов

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-2a+b}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to o. \tag{2.4}$$

Случај кад је $b > a$ одговара у ствари случају $b = a$, који претставља већ познати део овога става. Преостаје, дакле, да се докаже горњи став само под претпоставком да је $b < a$.

Приметимо, даље, да је довољно да докажемо први део *а)* става 1, јер је други део *б)* садржан у првом, што следи из чињенице да је сам услов (2.4) већ садржан у услову (2.3). Ово ћемо доказати овим засебним ставом.

Став 2.[2]) *Ако је* $\alpha > \beta \geq o$, *из*

$$\liminf_{x\to\infty} \operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq x+\varepsilon x^{1-\alpha}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to o, \tag{2.5}$$

следи увек

$$\liminf_{x\to\infty} \operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq x+\varepsilon x^{1-\beta}} \frac{s(x')-s(x)}{x^{\alpha-\beta}} > o(1), \quad \varepsilon \to o. \tag{2.6}$$

Стављајући у овом ставу

$$\alpha = 2a - b \quad \text{и} \quad \beta = a - b \geqslant o,$$

видимо да је услов (2.4) заиста садржан у услову (2.3) и да је, према томе, довољно доказати само део *a)* става 1.

2.2. Доказ става 2; $\beta > o$.

Ставимо $$\Lambda_\alpha(x) = e^{x^\alpha},$$

и означимо са $V_\alpha(x)$ инверсну функцију функције $\Lambda_\alpha(x)$; тада је

$$V_\alpha\{\lambda\,\Lambda_\alpha(x)\} - x = (x^\alpha + \lg\lambda)^{1/\alpha} - x \sim \frac{1}{\alpha}\lg\lambda . x^{1-\alpha}, \quad \lambda\to\infty.$$

Према томе је услов (2.5) идентичан услову

$$\liminf_{x\to\infty} \operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq X(\alpha,x)} \{s(x') - s(x)\} \geqslant -w(\lambda) \to o, \quad \lambda \to 1, \tag{2.7}$$

где је $$X(\alpha, x) = V_\alpha\{\lambda\,\Lambda_\alpha(x)\},$$

а услов (2.6) услову

$$\liminf_{x\to\infty} \operatorname*{Min}_{x\leq x'\leq X(\beta,x)} \frac{s(x')-s(x)}{x^{\alpha-\beta}} \geqslant -w_1(\lambda) \to o, \quad \lambda\to 1, \tag{2.8}$$

са $$X(\beta, x) = V_\beta\,\{\lambda\,\Lambda_\beta(x)\}.$$

Треба дакле да докажемо да из (2.7) следи (2.8).

У ту сврху ставимо

$$x_{n+1} = V_\alpha\,\{\lambda\,\Lambda_\alpha(x_n) = V_\alpha\,\{\lambda^{n+1}\Lambda_\alpha(x)\}, \quad n = o, 1, 2, \ldots$$

са $$x_0 = x,$$

---

[2]) Овај став, у општијем облику, наиме, кад је функције $\Lambda(x)$ која одређује дужину размака услова (2.5) или (2.6) облика $e^{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ регуларно расте, доказао је Б. Поповић у расправи [4]. Овде износим доказ овог специјалног случаја прегледности ради.

и приметимо да је

$$\underset{x \leq x' \leq X(\beta, x)}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x)\} = s(\zeta) - s(x) =$$
$$= \{s(x_1) - s(x)\} + \{s(x_2) - s(x_1)\} + \cdots + \{s(\zeta) - s(x_k)\},^{3)}$$

где је k тако одређено да буде

$$x_k \leq \zeta < x_{k+1}.$$

Према томе је

$$\underset{x \leq x' \leq x(\beta, x)}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x)\} \geq \sum_{\nu=0}^{k} \underset{x_\nu \leq x' \leq x_{\nu+1}}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x_\nu)\} \geq$$
$$\geq \sum_{\nu=0}^{n} \underset{x_\nu \leq x' \leq x_{\nu+1}}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x_\nu)\},$$

где је број n тако одређен да буде

$$x_n \leq X(\beta, x) < x_{n+1}.$$

За овако одређен број n добивамо, дакле, да је

$$V_\alpha \{\lambda^n \Lambda_\alpha(x)\} \leq V_\beta \{\lambda \Lambda_\beta(x)\} < V_\alpha \{\lambda^{n+1} V_\alpha(x)\},$$

или

$$(n \lg \lambda + x^\alpha)^{1/\alpha} \leq (\lg \lambda + x^\beta)^{1/\beta} < ((n+1) \lg \lambda + x^\alpha)^{1/\alpha},$$

или

$$n \leq \frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda} < n + 1,$$

тј.

$$n = \left[\frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda}\right].$$

Вратимо се сад горњој неједначини. Пошто је претходно поделимо са $x^{\alpha-\beta}$, имаћемо

$$\underset{x \leq x' \leq X(\beta, x)}{\mathrm{Min}} \frac{s(x') - s(x)}{x^{\alpha-\beta}} \geq \frac{n}{x^{\alpha-\beta}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \underset{x_\nu \leq x' \leq x_{\nu+1}}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x_\nu)\} \geq$$
$$\geq \frac{(x^\beta + \lg \lambda)^{\alpha/\beta} - x^\alpha}{\lg \lambda \; x^{\alpha-\beta}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \underset{x_\nu \leq x' \leq x_{\nu+1}}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x_\nu)\}.$$

---

[3]) ζ увек постоји јер, на основу претпоставке да је $s(x)$ ограничене варијације, можемо без ограничења вредност функције $s(x)$ у тачкама прекида тако одредити да буде једнака *мањој* од вредности $s(x-0)$ и $s(x+0)$

Отуда, на основу услова (2.7), следи

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x\leq x'\leq X(\beta,x)} \frac{s(x')-s(x)}{\lambda^{\alpha-\beta}} \geq$$

$$\geq \lim_{x\to\infty} \frac{(x^\beta+\lg\lambda)^{\alpha/\beta}-x^\alpha}{\lg\lambda\, x^{\alpha-\beta}} \liminf_{x\to\infty} \min_{x\leq x'\leq X(\alpha,x)} \{s(x')-s(x)\},$$

тј. да је
$$w_1(\lambda)\leq\frac{\alpha}{\beta}w(\lambda),$$

што, под претпоставком да је $\beta>o$, доказује став 2, тј. да из (2.7) следи (2.8).

Случај $\beta=0$. Кад је $\beta=0$ доказ остаје непромењен, само треба у њему функцију $\Lambda_\beta(x)=e^{x^\beta}$ $(\beta=0)$ заменити функцијом $\Lambda(x)=x$. На тај начин добива се да је

$$w_1(\lambda)\leq\frac{\lambda^\alpha-1}{lg\lambda}w(\lambda),$$

чиме је став 2 у потпуности доказан.

2.3. На основу става 2 преостаје још само да се докаже први део става 1.

Доказ става 1, део а).

Из претпоставке (2.1) следи

$$\int_0^x s(t)\,dt=s\,x^{a+1}+s'\,x^{b+1}+o\,(x^{b+1}),\ x\to\infty,$$

а отуда

$$\int_x^{x+\varepsilon x^{1-a+b}} s(t)\,dt=s\,\{(x+\varepsilon x^{1-a+b})^{a+1}-x^{a+1}\}+s'\,\{(x+\varepsilon x^{1-a+b})^{b+1}-$$
$$-x^{b+1}\}+o\,(x^{b+1}).$$

Додајмо и одузмимо левој страни израз

$$s(y)\,\varepsilon\,x^{1-a+b}=s(y)\int_x^{x+\varepsilon x^{1-a+b}} dt\quad,$$

где ћемо y оставити засад још неодређено.

Тада добивамо

$$\varepsilon\,x^{1-a+b}s(y)+\int_x^{x+\varepsilon x^{1-a+b}}\{s(t)-s(y)\}\,dt=\varepsilon\,(a+1)\,s\,x^{b+1}+o\,(x^{b+1}),$$

јер је

$$(x+\varepsilon x^{1-a+b})^{a+1}-x^{a+1}=\varepsilon(a+1)x^{b+1}+o(x^{b+1}), \quad x\to\infty,$$

и

$$(x+\varepsilon x^{1-a+b})^{b+1}-x^{b+1}=o(x^{b+1}), \quad x\to\infty.$$

Према томе је

$$\frac{s(y)}{x^a}-(a+1)s=\frac{-1}{\varepsilon x^{1-a+b}}\int\limits_x^{x+\varepsilon x^{1-a+b}}\frac{s(t)-s(y)}{x^a}dt+o(1), \quad x\to\infty. \tag{2.9}$$

Сад треба још познатим расуђивањем да покажемо да, из (2.9) и услова (2.3), следи тврђење (2.2).

Ставимо зато

$$\underset{x\le t\le x+\varepsilon x^{1-a+b}}{\mathrm{Min}}\ \frac{s(t)-s(x)}{x^a}=-w_x(\varepsilon), \tag{2.10}$$

Према (2.3) је

$$\limsup_{x\to\infty} w_x(\varepsilon)=w(\varepsilon)\to o, \quad \varepsilon\to o.$$

Ако дакле у (2.9) ставимо $y=x$, и подинтегралну функцију заменимо њеном најмањом вредношћу (2.10), биће

$$\frac{s(x)}{x^a}-(a+1)s\le w_x(\varepsilon)+o(1).$$

Отуда следи да је

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{s(x)}{x^a}\le(a+1)s+w(\varepsilon),$$

тј. кад пустимо да $\varepsilon\to o$,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{s(x)}{x^a}\le(a+1)s. \tag{2.11}$$

Да бисмо још доказали да је и

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{s(x)}{x^a}\ge(a+1)s, \tag{2.12}$$

приметимо да из (2.3) следи

$$\limsup_{x\to\infty} w_x^*(\varepsilon)=w_x^*(\varepsilon)\to o, \quad \varepsilon\to o,$$

где смо ставили

$$\underset{x \leq t \leq x+\varepsilon x^{1-a+b}}{\mathrm{Min}} \frac{s(x+\varepsilon x^{1-a+b})-s(t)}{x^a} = -w_x^* (\varepsilon).$$[4]

Ако сад у једначини (2.9) ставимо

$$y = x + \varepsilon x^{1-a+b},$$

биће
$$\frac{s(y)}{x^a} - (a+1)s \geq -w_x^* (\varepsilon) + o(1).$$

Отуда, како је

$$y^a = (x+\varepsilon x^{1-a+b})^a \sim x^a, \quad x \to \infty,$$

следи
$$\liminf_{y\to\infty} \frac{s(y)}{y^a} \geq (a+1)s + w_x^* (\varepsilon),$$

што даје неједначину (2.12) кад $\varepsilon \to o$.

Из неједначина (2.11) и (2.12) следи тврђење (2.2), чиме је и сам став 1 потпуно доказан.

2.4. У тачки **1.2** напоменули смо да је I. M. Hyslop допунио свој резултат на тај начин што је, у претпоставци о збирљивости низа, o заменио са O и, сужавајући суплементарни услов, извео исти закључак.

Став 1 се може на сличан начин допунити. Ми ћемо га овде, ставом 3, допунити на нешто различит начин, који ће боље одговарати намењеној примени. Насупрот ставу 1, који има природу o-инверсних ставова, став 3 је природе O-инверсних ставова и гласи:

Став 3. *Нека је $s(x)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека је, за $a \geq b$,*

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = s x^a + O(x^b), \quad x \to \infty;$$

тада је
$$s(x) = O(x^a), \quad x \to \infty,$$

ако је задовољен:

а) било услов

$$s(x') - s(x) > O(x^a), \quad \text{за све} \quad x \leq x' \leq x + \varepsilon x^{1-a+b},$$

б) било услов

$$s(x') - s(x) > O(1), \quad \text{за све} \quad x \leq x' \leq x + \varepsilon x^{1-2a+b}.$$

---

[4]) Доказ је исти као и код аналогног помоћног става на стр. 64 цитиране расправе [2].

Доказ овога става немамо потребе да репродукујемо, јер је он идентичан доказу става 1, са изменама које се, углавном, састоје у томе што се кроз цео доказ o замењује са O, и што уведене функције $w(\varepsilon)$ не морају да теже нули кад $\varepsilon \to o$.

2.5. Покажимо сад како се из ставова 2 или 3 може добити одговор на питања постављена у тачки **1.3.**, тј. на питање:

Шта се може закључити о понашању функције $s(x)$ за велике вредности од x, ако се, поред чињенице да је она збирљива, зна још и то да она задовољава извесне услове облика

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-\theta}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to o,$$

или, слабије услове, облика

$$\min_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-\theta}} \{s(x') - s(x)\} > O(1), \quad x \to \infty,$$

а у којима је $\theta > o$, те су они, према томе, недовољни да се из њих и збирљивости закључи конвергенција функције $s(x)$.

Из ставова 1 и 3 добивамо шта више одговор и на нешто општије питање, а која обухватају поред конвергенције и асимптотику Cesàro-ва збира.

Одговор на овако проширена питања дају нам ови ставови:

Став 4. *Ако је $s(x)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку, и ако је*

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt \sim s' x^b, \quad x \to \infty, \tag{2.13}$$

из

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-\theta}} \{s(x') - s(x)\} o > (1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.14}$$

са $\theta > o$, следи

$$s(x) = o\left(x^{\frac{b+\theta}{2}}\right), \quad x \to \infty, \tag{2.15}$$

Став 5. *Ако је $s(x)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку, и ако је*

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = O(x^b), \quad x \to \infty, \tag{2.16}$$

из

$$\operatorname*{Min}_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-\theta}} \{s(x') - s(x)\} > O(1), \quad x \to \infty, \tag{2.17}$$

са $\theta > o$, *следи*

$$s(x) = O\left(x^{\frac{b+\theta}{2}}\right), \quad x \to \infty .$$

Став 4 је непосредна последица става 1, и лако га из њега можемо извести. У ту сврху ставимо у ставу 1 $s = o$ и $2a - b = \theta$.

Тада претпоставка (2.1) узима облик (2.13), а услов (2.4) облик (2.14). Напослетку закључак (2.2) постаје

$$s(x) = o(x^a), \quad x \to \infty ,$$

(јер је $s = o$), где је a одређено једначином $2a - b = \theta$, тј.

$$a = \frac{b+\theta}{2},$$

што даје, према томе, тврђење (2.15), чиме је став 4 доказан.

Потпуно истим начином изводи се и став 5 из става 3.

Ови ставови садрже одговарајуће ставове у којима су асимптотске релације (2.13), односно (2.16) замењене конвергенцијом, односно ограниченошћу аритметичке средине. Ове ставове добијамо једноставно кад у претходнима ставимо $b = o$, а они гласе:

Став 6. *Из*

$$\frac{1}{x} \int_o^x s(t)\, dt \to s', \quad x \to \infty , \tag{2.18}$$

и услова (2.14) *следи*

$$s(x) = o\left(x^{\theta/2}\right), \quad x \to \infty , \tag{2.19}$$

Став 7. *Из*

$$\frac{1}{x} \int_o^x s(t)\, dt = O(1), \quad x \to \infty , \tag{2.20}$$

и услова (2.17) *следи*

$$s(x) = O\left(x^{\theta/2}\right), \quad x \to \infty . \tag{2.21}$$

2.6. Испитајмо овде још изближе ставове 6 и 7. Ови претстављају утолико известан интерес и битну новину, што закључак да се $s(x)$ за велике вредности од x понаша као $x^{\theta/2}$ [поред једном утврђених услова (2.14) односно (2.17) са размаком $(x, x+\varepsilon x^{1-\theta})$] зависи и од самог поступка збирљивости.

Тако је, на пр., Б. Поповић [4] показао да из ограничености Abel-ова збира, тј. Laplace-ова интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, ds(t),$$

и услова (2.17) следи само

$$s(x) = O(x^{\theta}), \quad x \to \infty,$$

и да је то најпрецизнији могућ резултат; резултат који, уосталом, следи већ и из општије претпоставке, наиме, из

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, ds(t) = O(1/\sigma^{\theta}), \quad \sigma \to 0.$$

Утолико више изненађује резултат ставова 6 и 7 да се код Cesàro-вих збирљивости, из истог услова, релација

$$s(x) = O(x^{\theta}), \quad x \to \infty,$$

може побољшати на

$$s(x) = O(x^{\theta/2}), \quad x \to \infty.$$

Може се, преме томе, очекивати да ће за Cesàro-ву збирљивост k-тог реда ово побољшање бити мање, а у тачки **3.3** ћемо доиста и показати да се, у томе случају, највише може добити да је

$$s(x) = O\left(x^{\frac{k}{k+1}\theta}\right), \quad x \to \infty.$$

Услед тога нам ови резултати могу послужити и као једна врста мерила за одређивање јачине оних поступака збирљивости, чији се услови конвергенције односе на размаке исте дужине.

Тако, на пр., Cesàro-ву и Abel-ову поступку збирљивости одговара исти размак

$$(x, x+\varepsilon x),$$

тј. услов конвергенције облика

$$\liminf_{x\to\infty} \min_{x\leq x'\leq x+\varepsilon x} \{s(x')-s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon\to o,$$

док је познато да је Cesàro-ов поступак збирљивости утолико јачи уколико је k веће, и да је за свако k он слабији од Abel-ова.

Отуда је, донекле, и јасно зашто функција која задовољава услов конвергенције са размаком

$$(x, x+\varepsilon x^{1-\theta}), \quad \theta > o,$$

сме да расте као

$$x^{\theta},$$

ако је она збирљива-А, а само као

$$x^{\frac{k}{k+1}\theta},$$

ако је она збирљива (C, k).

2.7. Да би се резултати ставова 6 и 7 могли овако интерпретирати, тј. да би они могли да послуже и као подаци за мерило јачине неког поступка збирљивости, потребно је да се провери да ли су ти резултати заиста најбољи могући. Значи треба још да се покаже, да се експонент $\theta/_2$ у закључцима (2.19), односно (2.21) ставова 6 и 7 *не може* смањити, ако функција $s(x)$ задовољава остале претпоставке, тј. (2.14) и (2.18), односно (2.17) и (2.20). Ово ћу показати на тај начин што ћу ефективно конструисати такву функцију $s(x)$ која задовољава услове става 6, односно 7, а која се заиста местимично понаша као $x^{\theta/2}$.

У ту сврху ставимо

$$s(x) = \sigma(x^{\theta}),$$

и покажимо да ће функција $s(x)$ задовољавати не само услов (2.14) већ и услов

$$\limsup_{x\to\infty} \max_{x\leq x'\leq x+\varepsilon x^{1-\theta}} |s(x')-s(x)| = o(1), \quad \varepsilon\to o,$$

ако је $\qquad \sigma'(x) = O(1), \quad x\to\infty.$

Заиста, из $s'(x) = \theta\sigma'(x^\theta)\, x^{\theta-1}$,
следи

$$\left| s(x') - s(x) \right| = \left| \theta \int_x^{x'} \sigma'(t^\theta)\, t^{\theta-1}\, dt \right| < \theta \int_x^{x'} \left| \sigma'(t^\theta) \right| t^{\theta-1}\, dt <$$

$$< M\theta \int_x^{x'} t^{\theta-1}\, dt = M(x'^\theta - x^\theta).$$

Дакле је

$$\operatorname*{Max}_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-\theta}} \left| s(x') - s(x) \right| < M \{(x + \varepsilon x^{1-\theta})^\theta - x^\theta\} =$$

$$< Mx^\theta \{(1 + \varepsilon/x^\theta)^\theta - 1\} < M_1 \varepsilon,$$

што доказује тврђење.

Заменимо сад $s(x)$ са $\sigma(x^\theta)$; тада добивамо, пошто извршимо смене,

$$t^\theta = \tau, \quad x^\theta = y \quad \text{и} \quad \alpha = 1/\theta,$$

да је

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\, dt = \frac{1}{x}\int_0^x \sigma(t^\theta)\, dt = \frac{1}{\theta x}\int_0^{x^\theta} \tau^{-1+1/\theta}\sigma(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{\alpha}{y^\alpha}\int_0^y \tau^{\alpha-1}\sigma(\tau)\, d\tau.$$

Напослетку, ако и у закључцима

$$s(x) = o(x^{\theta/2}), \quad \text{односно} = O(x^{\theta/2}), \quad x \to \infty,$$

извршимо исту смену

$$s(x) = \sigma(x^\theta) \quad \text{и} \quad y = x^\theta,$$

они постају

$$\sigma(y) = o(\sqrt{y}), \quad \text{односно} = O(\sqrt{y}), \quad y \to \infty.$$

Из претходног видимо, дакле, да је довољно да се конструише таква функција $\sigma(y)$ да буде:

1⁰ $$\sigma'(y) = O(1), \quad y \to \infty.$$

2⁰ $$\frac{\alpha}{y^\alpha}\int_0^y t^{\alpha-1}\sigma(t)\, dt = o(1), \quad \text{односно} = O(1), \quad y \to \infty,$$

и да границе дате везама

$3^0 \qquad \sigma(y) = o(\sqrt{y}), \quad \text{односно} = O(\sqrt{y}), \quad y \to \infty,$

буду постигнуте за бескрајно много вредности од y.

Такву функцију $\sigma(y)$ добивамо, на пр., овако

$$\sigma(y) = \begin{cases} o & \text{за } o \leq y \leq \lambda_1 - \mu_1, \\ \mu_n \varphi\left(\dfrac{y-\lambda_n}{\mu_n}\right) & \text{,, } \lambda_n - \mu_n \leq y \leq \lambda_n + \mu_n, \\ o & \text{,, } \lambda_n + \mu_n \leq y \leq \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}, \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \cdots$, где треба још функцијом $\varphi(t)$, у размаку $(-1, +1)$, и низовима λ_n и μ_n тако располагати да $\sigma(y)$ одговара траженим захтевима.

Довољно је за то да, на пр., ставимо:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{за } -1 \leq x \leq o, \\ 1 - x & \text{,, } \quad o \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\lambda_n = 2^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$\mu_n = \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n} = \varepsilon_n 2^{n/2},$$

где или $\varepsilon_n \to 0$ (и то произвољно споро), ако се $\sigma(y)$ односи на став 6, или је $\varepsilon_n \equiv 1$, ако се $\sigma(y)$ односи на став 7.

Доиста у овом случају је:

$1^0 \qquad |\sigma'(y)| \leq 1$ за свако $y \geq o$.

$2^0 \qquad \dfrac{\alpha}{y^\alpha} \displaystyle\int_0^y t^{\alpha-1} \sigma(t)\, dt =$

$$= \frac{\alpha}{y^\alpha} \sum_{\nu=1}^{\lambda_n + \mu_n \leq y} \mu_\nu \int_{\lambda_\nu - \mu_\nu}^{\lambda_\nu + \mu_\nu} t^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{t-\lambda_\nu}{\mu_\nu}\right) dt + \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_{\lambda_n + \mu_n}^{y} t^{\alpha-1} \sigma(t)\, dt =$$

$$= \frac{\alpha}{y^\alpha} \sum_{\nu=1}^{\lambda_n + \mu_n \leq y} \mu_\nu^2 \int_{-1}^{+1} (\lambda_\nu + t\mu_\nu)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt + R(y),$$

где је

$$R(y) = \begin{cases} o \quad \text{ако је } \quad y \leq \lambda_{n+1} - \mu_{n+1}, \\ \dfrac{\alpha \mu_{n+1}^2}{y^\alpha} \displaystyle\int_{-1}^{\rho} (\lambda_{n+1} + t\mu_{n+1})^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \\ \qquad\qquad \text{ако је } \quad y = \lambda_{n+1} + \rho\mu_{n+1} \quad \text{и} \quad |\rho| \leq 1 \end{cases}$$

Ако сад ставимо

$$\lambda_n = 2^n \quad \text{и} \quad \mu_n = \varepsilon^n \sqrt{\lambda_n}\,, \quad \text{са} \quad \varepsilon_n \to o\,,$$

лако је увидети да

$$\frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y t^{\alpha-1}\, \sigma(t)\, dt \to o\,, \quad y \to \infty\,.$$

Ако је, међутим,

$$\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = 2^{n/2}\,,$$

онда је, за $y = \rho'^{2n}$ и $o < \rho' < 1$,

$$\frac{\alpha}{y^\alpha} \sum_{\nu=1}^{\lambda_n+\mu_n \le y} \mu_\nu{}^2 \int_{-1}^{+1} (\lambda_\nu + t\mu_\nu)^{\alpha-1}\, \varphi(t)\, dt < \frac{\alpha}{y} \sum_{\nu=1}^{\lambda_\nu+\mu_\nu \le y} 2^\nu \to \frac{2\,\alpha}{\rho'}\ \ y \to \infty\,.$$

Даље је, за $y = 2^{n+1} + \rho\sqrt{2^{n+1}}$ и $|\rho| < 1$,

$$R(y) < \alpha\, \frac{2^{n+1}}{y} \int_{-1}^{\rho} \varphi(t)\, dt \to \alpha \int_{-1}^{\rho} \varphi(t)\, dt\,.$$

Према томе је, у сваком случају,

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{\alpha}{y^\alpha} \int_0^y t^{\alpha-1}\, \sigma(t)\, dt \le 2\,\alpha\,.$$

3⁰ Напослетку видимо да је

$$\sigma(\lambda_n) = \mu_n = \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}\,, \quad \text{односно} \quad = \sqrt{\lambda_n}\,,$$

што казује, дакле, да су границе дате везама

$$\sigma(y) = o\left(\sqrt{y}\right), \quad \text{односно} \quad = O\left(\sqrt{y}\right),$$

заиста и постигнуте за бескрајно много вредности y.

Овако конструисане функције $\sigma(y)$, односно $s(x)$ постижу, дакле, границе постављене ставовима 6 и 7, али је од интереса да се примети да оне при томе стално остају позитивне.

Код примера наведена за став 7 тачно су одређене и поједине константе које се појављују, те га можемо (после мањих трансформација) и прецизно формулисати:

За свако $\theta > o$ постоји таква функција $s(x)$ да је $s(x) \geqslant o$ за све $x \geqslant o$,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = 1,$$

$$|s'(x)| \leq x^{\theta-1}, \quad \textit{за све} \quad x > o,$$

$$\textit{и} \quad \limsup_{x\to\infty} s(x)/x^{\theta/2} = 1/\sqrt{2}.$$

Одавде видимо, дакле, да се резултати ставова 6 и 7 заиста не могу побољшати.

3.1. Показаћемо још да и за Cesàro-ву збирљивост k-тог реда можемо извести ставове аналогне претходним ставовима. Претпоставићемо да је ред k збирљивости (C, k) цео број. Несумњиво је да ови ставови остају непромењени и за свако реално и позитивно k, али се докази у томе случају несразмерно компликују и постају тежи.

Услед тога што је k цео број можемо за збирове (C, k), (Cesàro-ве збирове k-тог реда) функције $s(x)$ ставити

$$\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^k d\,s(t) = \frac{k!}{x^k} S_k(x) = \frac{k!}{x^k}\int_0^x dt_k \int_0^{t_k} \cdots dt_2 \int_0^{t_2} s(t_1)\,dt_1, \quad (3.1)$$

тј. сматрати их као нормиране средине k-тоструког интеграла функције $s(x)$.

Ово је утолико важно, што се на тај начин може поставити образац

$$\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta s(x+t_1+t_2\cdots t_k)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k =$$

$$= \binom{k}{0} S_k(x+k\delta) - \binom{k}{1} S_k(x+\overline{k-1}\,\delta) + \cdots + (-1)^k S_k(x), \quad (3.2)$$

на коме почива цео доказ наредних ставова, а који не важи ако k није цео број.

Образац (3.2) лако се доказује индукцијом.

Он важи за $k=1$; ако се у њему замене x са $x+t_{k+1}$ и интегрише по t_{k+1} од o до δ, добива се исти образац, с том разликом што се, место k, појављује $k+1$. Образац (3.2) важи, дакле, за свако $k = 1, 2, 3, \ldots$

3.2. Докажимо овде ставу 1 аналогни:

Став 8: *Нека је $s(t)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и нека је, са ознаком (3.1),*

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = s\,x^a + s'\,x^b + o(x^b), \quad x \to \infty, \tag{3.3}$$

са $a > b$ (*или* $a = b$ *и* $s' = o$).

Тада је

$$s(x) \sim \frac{(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+k)}{k!} s\,x^a, \quad x \to \infty, \tag{3.4}$$

ако $s(x)$ *задовољава:*

а) или услов

$$\liminf_{x \to \infty} \operatorname*{Min}_{x \leq x' \leq x + \delta(x)} \frac{s(x') - s(x)}{x^a} > o(1), \quad \varepsilon \to \infty, \tag{3.5}$$

са $\delta(x) = \varepsilon\, x^{1-(a-b)/k}$;

б) или услов

$$\liminf_{x \to \infty} \operatorname*{Min}_{x \leq x' \leq x + \delta_1(x)} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to o, \tag{3.6}$$

са $\delta_1(x) = \varepsilon\, x^{1-a-(a-b)/k}$.

Доказ става 8, део б). Као и код става 1, део б) је садржан у делу а), јер је услов (3.6) садржан у услову (3.5). Ово следи непосредно из става 2, у коме треба ставити

$$\alpha = a + (a-b)/k \quad \text{и} \quad \beta = (b-a)/k,$$

а који тада казује да је услов (3.5) задовољен кад год је испуњен услов (3.6).

Доказ става 8, део а). Ставимо

$$s^*(x) = s(x) - \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}{k!} s\,x^a, \tag{3.7}$$

тада претпоставка (3.3) постаје

$$\frac{k!}{x^k} S_k^*(x) = s'\,x^b + o(x^b), \quad x \to \infty, \tag{3.8}$$

где је $S_k^*(x)$ k-тоструки интеграл функције $s^*(x)$.

Заменимо сад у обрасцу (3.2) функције $s(x)$ и $S_k(x)$ функцијама $s^*(x)$ и $S_k^*(x)$, а затим $S_k^*(x)$ вредношћу датом обрасцем (3.8). Ако напослетку и у обрасцу (3.2) ставимо да је

$$\delta = \delta(x) = \varepsilon\, x^{1-(a-b)/k},$$

он постаје

$$\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta s^*(x+t_1+t_2+\cdots t_k)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_k =$$

$$= \frac{s'}{k!}\sum_{\nu=0}^{\kappa}(-1)^\nu \binom{k}{\nu}(x+\overline{k-\nu}\,\delta)^{\kappa+b} + o(x^{\kappa+b}) = o(x^{\kappa+b}), \quad x\to\infty,$$

јер је

$$\sum_{\nu=0}^{\kappa}(-1)^\nu \binom{k}{\nu}(x+\overline{k-\nu}\,\delta)^{\kappa+b} = o(x^{\kappa+b}), \quad x\to\infty,$$

као што се то види непосредно.

Ако сад горњи образац поделимо са

$$\frac{\delta^k}{k!} = \frac{\varepsilon^k}{k!}x^{\kappa-a+b},$$

да бисмо леву страну нормирали, а затим још поделимо обе стране са x^a, добивамо

$$\frac{k!}{\delta^k}\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \frac{s^*(x+t_1+\cdots+t_k)}{x^a}\,dt_1\cdots dt_k = o(1), \quad x\to\infty.$$

Напослетку, одузмимо и додајмо левој страни

$$\frac{s^*(y)}{x^a} = \frac{k!}{\delta^k}\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \frac{s^*(y)}{x^a}\,dt_1\cdots dt_k,$$

што даје образац

$$\frac{s^*(y)}{x^a} = \tag{3.9}$$

$$= \frac{-k!}{\delta^k}\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \frac{s^*(x+t_1+\cdots+t_k)-s^*(y)}{x^a}\,dt_1\cdots dt_k + o(1), \quad x\to\infty,$$

при чему је $\delta = \delta(x) = \varepsilon\, x^{1-(a-b)/\kappa}$,

а y још неодређено.

Из (3.9) и услова (3.5) следи тврђење (3.4) на исти начин као што је то изведено и при доказу става 1. Овде ваља још само приметити да ће функција $s^*(x)$, одређена обрасцем (3.7), такође задовољавати услов (3.5), ако га задовољава функција $s(x)$.

Ако, наиме, ставимо

$$\underset{x \leq x' \leq x+\delta(x)}{\mathrm{Min}} \frac{s^*(x') - s^*(x)}{x^a} = -w_x(\varepsilon),$$

са

$$\delta(x) = \varepsilon x^{1-(a-b)/k}$$

биће, према (3.7) и (3.4),

$$\limsup_{x\to\infty} w_x(\varepsilon) = w(\varepsilon) \to o, \quad \varepsilon \to o.$$

Образац (3.9), са $y = x$, даје, према томе,

$$\frac{s^*(x)}{x^a} \leq w_x(k\varepsilon) + o(1), \quad x \to \infty.$$

Дакле је

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{s^*(x)}{x^a} \leq w(k\varepsilon) \to o, \quad \varepsilon \to o.$$

Слично добивамо и за доњу граничну вредност, (стављајући у (3.9) $y = x + k\,\delta$), тако да је

$$s^*(x) = o(x^a), \quad x \to \infty,$$

а што се, према (3.7), поклапа са тврђењем (3.4).

Овим је став 8 потпуно доказан.

3.3. Из става 8 добивамо сад непосредно ставу 4 аналоган став за збирљивост (C, k), који гласи:

Став 9. *Ако је* $s(x)$ *функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и ако је*

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) \sim s' x^b, \quad x \to \infty,$$

где је $S_k(x)$ *k-тоструки интеграл функције* $s(x)$ *одређен изразом* (3.1), *из*

$$\liminf_{x\to\infty} \underset{x \leq x' \leq x+\varepsilon x^{1-\theta}}{\mathrm{Min}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to o,$$

следи

$$s(x) = o\left(x^{\frac{k\theta+b}{k+1}}\right), \quad x \to \infty.$$

Доказ. Овај став добивамо као непосредну последицу става 8 дела б), ако у њему ставимо

$$s = o \quad \text{и} \quad a + (a-b)/k = \theta,$$

па из ове једначине одредимо a:

$$a = \frac{k\theta + b}{k+1}.$$

Напослетку, ако у ставу 9 узмемо да је $b = o$ добивамо:

Став 10. *Из збирљивости* (C, k) *функције* $s(x)$, *тј. из*

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = o(1), \quad x \to \infty,$$

и суплементарног услова

$$\liminf_{x\to\infty} \; \operatorname*{Min}_{x \le x' \le x + \varepsilon x^{1-\theta}} \{s(x') - s(x)\} > o(1), \quad \varepsilon \to o, \qquad (3.10)$$

следи

$$s(x) = o\left(x^{\frac{k\theta}{k+1}}\right), \quad x \to \infty.$$

Овај став, као и онај што добивамо кад у горњем свугде o заменимо са O, даје коначно одговор на питање шта се из збирљивости (C, k) неке функције може закључити о њеном понашању за велике вредности од x, ако се зна још неки суплементаран податак о самој функцији $s(x)$, на пр., у облику (3.10), но који није довољан да би се из њега и збирљивости (C, k) могла закључити и сама конвергенција функције $s(x)$.

4.1. У овом одељку обрадићемо напослетку и ставове код којих су суплементарни подаци о функцији $s(x)$ дати, на пр., условима (2.5) или (2.6), а који се односе само на поједине размаке $(x_k, x_k + \varepsilon x_k^{1-\theta})$, а не за све $x > o$ функције $s(x)$. То су, дакле, услови истог облика, но за које се претпоставља да су задовољени само кад x тежи бесконачности преко извесног, унапред датог, низа x_k изолованих вредности.

Општи облик таквог услова је дакле,

$$\liminf_{x_k\to\infty} \; \operatorname*{Min}_{x_k \le x' \le x_k + \varepsilon x_k^{1-\theta}} \frac{s(x') - s(x_k)}{x_k^{a}} > o(1), \quad \varepsilon \to o. \qquad (4.1)$$

Иако овај услов има сличан облик ранијим условима, постоје ипак између досадањих ставова и ставова које ћемо овде изводити велике разлике.

Један од главних разлога је, на пр., што за услове облика (4.1) став 2 не важи. Ово услед тога што став 2 омогућује прелаз из услова (2.5), са мањим размаком $(x, x + \varepsilon x^{1-\alpha})$, на услов (2.6) са већим размаком $(x, x + \varepsilon x^{1-\beta})$ пошто је $\beta < \alpha$, тј. $1-\beta > 1-\alpha$. Кад би дакле услов (2.5) важио само за извесне размаке $(x_k, x_k + \varepsilon\, x_k^{1-\alpha})$, ови (пошто се не додирују, јер би иначе услов (2.5) важио за све x) не би могли покрити цео размак $(x_k, x_k + \varepsilon\, x_k^{1-\beta})$, тако да се у овом случају о понашању леве стране услова (2.6), ако се она односи и на размак $(x_k, x_k + \varepsilon\, x_k^{1-\alpha})$, не може ништа закључити.

Према томе, ставове ове врсте не можемо имати са довољно уским размацима помоћних услова, па их зато и не можемо применити са толиком прецизношћу као што смо то учинили, на пр., код ставова 4 и 9.

Друга разлика која постоји између ставова које смо досад извели и ставова које ћемо навести у овом одељку лежи у томе што једнострани услови облика (4.2) обично нису довољни. Ово услед тога што из (4.1), у општем случају, не следи да је

$$\liminf_{x_k\to\infty} \;\; \operatorname*{Min}_{x_k \le x' \le x_k + \varepsilon\, x_k^{1-\theta}} \frac{s(x_k + \varepsilon\, x_k^{1-\theta}) - s(x')}{x_k^{a}} > o(1), \quad \varepsilon \to o, \qquad (4.2)$$

јер резоновање на стр. 64 цитиране расправе [2], у овом случају, не важи.

Услед тога морамо или претпоставити да су задовољена оба једнострана услова (4.1) и (4.2), па чак ни они у општем случају нису довољни, или их морамо заменити ужим обостраним условом

$$\limsup_{x_k\to\infty} \;\; \operatorname*{Max}_{x_k \le x' \le x_k + \varepsilon\, x_k^{1-\theta}} \frac{|\, s(x') - s(x_k)\,|}{x_k^{a}} = o(1), \quad \varepsilon \to o, \qquad (4.3)$$

а који је облик најподеснији за ову врсту ставова.

Ради тога ћу у овој расправи узети у обзир само последњи обострани услов, а детаљније испитивање ставова са једностраним условима (4.1) и (4.2) обрадићу другом приликом.

4.2. Аналоган став ставу 8, са помоћним условом облика (4.3), гласи:

Став 11. *Нека је k цео број $k \geq 1$, $a \geq b$, ε_0 унапред дат позитиван број, $o < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $s(x)$ функција ограничене варијације у сваком коначном размаку и x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, низ бројева који монотоно расту и теже бесконачности:*

$$o < x_{n-1} < x_n \to \infty\,, \quad n \to \infty\,.$$

Тада, из

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d s(t) = o(x^b), \quad x \to \infty, \tag{4.4}$$

за све x размака

$$x_n \leq x \leq x_n + \varepsilon_0 \, \delta(x_n), \quad ca \quad \delta(x) = x^{1-(a-b)/k},$$

и услова (4.3), тј.

$$\limsup_{x_n \to \infty} \operatorname*{Max}_{x_n \leq x \leq x_n + \varepsilon \delta(x_n)} \frac{|s(x) - s(x_n)|}{x_n^a} = o(1), \quad \varepsilon \to o, \tag{4.5}$$

следи $$s(x_n) = o(x_n^a), \quad x_n \to \infty. \tag{4.6}$$

Напомена 1°. При постављању овога става, за разлику од става 8, ставили смо

$$s = s' = o.$$

Ово смо учинили ради тога да не бисмо морали разликовати случајеве $a > b$ и $a = b$, јер је, у овом облику, и случај $a = b$ нов, па је и тај потребно доказати.

У ствари, овим општост става 11 није ниуколико смањена. Да би се, наиме, из њега извео став у облику става 8, тј. са условом (3.3) и x'_n место x, довољно је у ставу 11 функцију $s(x)$ заменити функцијом

$$s(x) - s\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}{k!} x^a - s'\frac{(b+1)(b+2)\cdots(b+k)}{k!} x^b.$$

Напомена 2°. За низ бројева x_n нисмо ништа претпоставили сем да монотоно расте и тежи бесконачности. Међутим, став 11 претстављаће нешто ново према ставу 8 само у случају ако су тачке x_n довољно ретке, тј. ако низ x_n довољно брзо тежи бесконачности. Јер из услова (4.5) и резултата (4.6) следи да ће, шта више, и

$$\gamma(x') = o(x'^a), \quad x' \to \infty, \tag{4.7}$$

и то за свако x' које се налази у близини тачака x_n, тј. за које је

$$o \leq x' - x_n = o(x_n^{1-(a-b)/k}), \quad x_n \to \infty. \tag{4.8}$$

Да бисмо ово увидели довољно је приметити да је

$$\frac{|s(x')|}{x'^a} \leq \left(\frac{x_n}{x'}\right)^a \left\{ \frac{|s(x_n)|}{x_n^a} + \frac{|s(x') - s(x_n)|}{x_n^a} \right\},$$

па је према (4.5) и услову (4.6), с обзиром на (4.8),

$$\limsup_{x'\to\infty} |s(x')| / x'^a \leq w(\varepsilon) \to o\,, \quad \varepsilon \to o\,,$$

одакле следи да је (4.7) доиста задовољено.

Према томе ако би низ био тако густ да буде

$$x_{n+1} - x_n = o\,(x_n{}^{1-(a-b)/k})\,, \quad x_n \to \infty\,,$$

став 11 не би дао ништа ново, јер се претпоставка (4.5) своди на обостран услов (3.5), а закључак (4.6) на (3.4) са $s = o$.

Ако је, међутим, низ x_n такав да је

$$x_{n+1} \leq x_n + \varepsilon_o\, x_n{}^{1-(a-b)/k}\,,$$

тада можемо тврдити да је за све x

$$s(x) = O(x^a)\,, \quad x \to \infty\,.$$

Приметимо, напослетку да за бројеве x_n не морамо претпоставити да теже бесконачности, прелазећи преко низа изолованих тачака већ да став остаје у важности и ако вредности x_n теже бесконачности, било преко непребројивог скупа тачака, било непрекидно преко извесних местимичних размака.

Доказ става 11. Ако у идентитету (3.2), тј. у

$$\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta s(x + t_1 + \cdots + t_k)\, dt_1 \cdots dt_k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} S_k(x + \overline{k-\nu}\,\delta)$$

ставимо

$$x = x_k \quad \text{и} \quad \delta = \varepsilon\delta\,(x_k) = \varepsilon x_k{}^{1-(a-b)/k}\,.$$

са

$$k\varepsilon \leq \varepsilon_0\,,$$

добивамо, на основу претпоставке (4.4), да је

$$\int_0^\delta \cdots \int_0^\delta s(x_n + t_1 + \cdots + t_k)\, dt_1 \cdots dt_k = o\,(x_n{}^{k+b}), \quad x_n \to \infty\,,$$

јер је, према (4.4) и $k\varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$S_k\,(x_n + \mu\delta) = o\,(x_n{}^{k+b}), \quad x_n \to \infty\,,$$

за свако

$$\mu = 0, 1, 2, \cdots k\,.$$

Према томе, ако леву страну горње релације нормирамо деобом са

$$\frac{\delta^k}{k!} = \frac{\varepsilon^k}{k!} x_n{}^{k-a+b},$$

а затим обе стране поделимо још са $x_n{}^a$, добивамо

$$\frac{k!}{\delta^k} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \frac{s(x_n + t_1 + \cdots t_k)}{x_n{}^a} dt_1 \cdots dt_k = o(1), \quad x_n \to \infty.$$

Напослетку, комбиновањем ове једначине са

$$\frac{s(x_n)}{x_n{}^a} = \frac{k!}{\delta^k} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \frac{s(x_n)}{x_n{}^a} dt_1 \cdots dt_k,$$

добивамо

$$\frac{s(x_n)}{x_n{}^a} = \frac{-k!}{\delta^k} \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \frac{s(x_n + t_1 + \cdots + t_k) - s(x_n)}{x_n{}^a} dt_1 \cdots dt_k + o(1),$$

$$x_n \to \infty.$$

Отуда следи, ако десну страну мајорирамо горњом границом подинтегралне функције

$$w_{x_n}(k\varepsilon) = \underset{x_n \leq x' \leq x_n + k\delta}{\mathrm{Max}} \frac{|s(x') - s(x_n)|}{x_n{}^a},$$

да је

$$\frac{|s(x_n)|}{x_n{}^a} \leq w_{n_x}(k\varepsilon) + o(1), \quad x_n \to \infty,$$

и

$$\limsup_{x_n \to \infty} \frac{|s(x_n)|}{x_n{}^a} \leq w(k\varepsilon) \to o, \quad \varepsilon \to o.$$

Пошто $w(\varepsilon) \to o$ кад $\varepsilon \to o$, из горње неједначине следи тврђење (4.6), чиме је став 11 доказан.

4.3 Наведимо, напослетку, још неке допуне, као и неколико последица горњег става.

На првом месту приметимо да са незнатним изменама горњег доказа непосредно добивамо и ставу 11 одговарајући O-инверсан став. Овај се разликује од става 11 у томе што у обрасцима (4.4), (4.5) и (4.6) треба o заменити са O, при чему замену треба и у доказу консеквентно спроводити.

4.4. Под претпоставком да постоји извод функције $s(x)$ у размацима $(x_n, x_n + \varepsilon_0 x_n^{1-(a-b)/k})$, услов (4.5) можемо заменити и овим, нешто ужим но и једноставнијим, условом облика:

$$s'(x') = O(x'^{\,a-1+(a-b)/k}), \quad x'_n \to \infty, \tag{4.9}$$

и то за све x' размака

$$x_n \leqslant x' \leqslant x_n + \varepsilon_0\, x_n^{1-(a-b)/k}.$$

Јер, ако овај последњи услов интегришемо од x_n до $x' \leq x_n + \varepsilon x_n^{1-(a-b)/k}$ са $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, и ако је $a+(a-b)/k \neq 0$, добивамо

$$|s(x') - s(x_n)| \leq \int_{x_n}^{x'} |s'(t)|\, dt \leq M \int_{x_n}^{x'} t^{a-1+(a-b)/k}\, dt =$$

$$\leq \frac{k\,M}{(k+1)a-b}\left(x'^{\,a+(a-b)/k} - x_n^{\,a+(a-b)/k}\right).$$

Дакле је

$$\underset{x_n \leq x' \leq x_n + \varepsilon\delta(x_n)}{\mathrm{Max}} \frac{|s(x') - s(x_n)|}{x_n^a} \leq$$

$$\leq \frac{kM}{(k+1)a-b} \cdot \frac{(x_n + \varepsilon\, x_n^{1-(a-b)/k})^{a+(a-b)/k} - x_n^{\,a+(a-b)/k}}{x_n^a} =$$

$$\leq \frac{kM}{(k+1)a-b}\, x_n^{(a-b)/k}\left\{(1 - \varepsilon/x_n^{(a-b)/k})^{a+(a-b)/k} - 1\right\} \leq \varepsilon M',$$

из чега следи да је услов (4.9) задовољен, кад год је испуњен услов (4.5), тј. кад је (4.5) садржан у (4.9).

У случају кад је $a+(a-b)/k = 0$, у ком случају a мора бити негативно, доказ је потпуно исти, с том разликом што се после интеграције појављују логаритми.

Приметимо, напослетку, да је услов (4.9) још и утолико ужи од услова (4.5) што из њега следи не само (4.6) већ и

$$s(x') = o(x'^{\,a}), \quad x' \to \infty,$$

и то за свако x' размака

$$x_n \leq x' \leq x_n + \varepsilon_0 x_n^{1-(a-b)/k},$$

као што се то из (4.6) и (4.9) лако може показати.

4.5 Испитајмо, напослетку, шта можемо добити из последњег става, ако га применимо на степенасте функције.

Претпоставимо зато, прво, да је дужина n-тог степена функције $s(x)$ пропорционална неком степену од n, или прецизније, да има скокове у тачкама

$$x_n = n^\alpha, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad \alpha > o,$$

а да у појединим размацима (x_n, x_{n+1}) узима сталну вредност

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Нека је, дакле,

$$s(x) = \begin{cases} o & \text{за} \quad o \leq x < 1, \\ s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu & \text{за} \quad n^\alpha \leq x < (n+1)^\alpha, \; n = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Како је у сваком размаку

$$(n^\alpha, (n+1)^\alpha)$$

извод $s'(x) = o$, то ће у свима тим размацима услов (4.9) свакако бити задовољен. А како је дужина тог размака

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha \sim \alpha\, n^{\alpha-1} = \alpha\, (n^\alpha)^{1-1/\alpha}, \quad n \to \infty,$$

то ће, за довољно велико n, услов (4.9) бити задовољен ако ставимо

$$x_n = n^\alpha, \quad (a - b)/k = 1/\alpha \;\; \text{тј.} \;\; a = b + k/\alpha,$$

и узмемо

$$\varepsilon_o > \alpha .$$

Како је у овом случају

$$\frac{k!}{x^k} S_k(x) = \int_o^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k ds(t) = \sum_{\nu=1}^{\nu^\alpha \leq x} \left(1 - \frac{\nu^\alpha}{x}\right)^k u_\nu,$$

то добивамо, применом става 11, уз примедбе учињене у тачки 4.4, овај став:

Став 12. *Нека је k цео број ≥ 1, $\alpha > o$ и b произвољан реалан број.*

Тада из

$$\sum_{\nu=1}^{\nu^\alpha \leq x} \left(1 - \frac{\nu^\alpha}{x}\right)^k u_\nu = o(x^b), \quad x \to \infty,$$

следи увек

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu = o\,(n^{b + k/\alpha}), \quad n \to \infty .$$

Ако ставимо овде

$$b = o \text{ и } \alpha = 1,$$

добивамо раније поменуту чињеницу да, из збирљивости — (C, k) низа s_n, следи увек

$$s_n = o\,(n^k), \quad n \to \infty .$$

Ако је, међутим, $b = o$, став 12 казује нам да из збирљивости низа s_n Riesz-овом типичном средином—$R(n^\alpha, k)$, следи увек да је

$$s_n = o\,(n^{k/\alpha}), \quad n \to \infty .$$

Сличан став важи и за општу Riesz-ову збирљивост $R(\lambda_n, k)$, само је за његово извођење потребно претходно проширити став 4, односно 11, на услове са општим размаком $(x, x + \delta(x))$, као што је то учињено у ставу цитираном у тачки 1.1.

4.6. Претпоставимо још да је функција $s(x)$ степенаста са дужином степена 1, тј. да је

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{за} \quad o \leq x < 1, \\ s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} u_\nu & \text{за} \quad n \leq x < n+1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

тј. да има облик претходне функције али са $\alpha = 1$.

Претпоставимо, даље, да је у местимичним размацима низ u_n ограничен у свом рашћењу условом облика

$$u_n = O\,(n^\alpha), \quad n \to \infty ,$$

тј. прецизније, да је

$$u_n = O\,(n^\alpha) \quad \text{за све} \quad n_\nu \leq n \leq n_\nu + \varepsilon_0\, n_\nu{}^\beta , \quad \text{са} \quad \beta \leq 1,$$

где низ n_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ монотоно расте и тежи бесконачности.

Из ове претпоставке следи да је

$$\limsup_{n_\nu \to \infty} \; \operatorname*{Max}_{n_\nu \leq t \leq n_\nu + \varepsilon\, n_\nu^\beta} \frac{|\,s(t) - s(n_\nu)\,|}{n_\nu{}^{\alpha+\beta}} < M\varepsilon ,$$

за све $\varepsilon < \varepsilon_0$, као што то лако можемо проверити поступком сличним оном примењеном на страни 65 расправе [2].

Према томе је задовољен услов (4.5) става 11, са

$$x_n = n_\nu, \quad a = \alpha + \beta \quad \text{и} \quad 1 - (a-b)/k = \beta \leq 1 .$$

Из последње две једначине добивамо

$$a = \alpha + \beta \quad \text{и} \quad b = \alpha + \beta - k(1-\beta),$$

тако да став 11 примењен на ову функцију даје:

Став 13. *Нека је* k *цео број* ≥ 1, α *произвољан реалан број,* $\beta \leq 1$, n_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *низ бројева који монотоно расте и тежи бесконачности,* $\varepsilon_0 > o$ *и* $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$; *низ који задовољава услов*

$$u_n = O(n^\alpha), \quad \text{за све} \quad n_\nu \leq n \leq n_\nu + \varepsilon_0 n_\nu^\beta, \quad n_\nu \to \infty .$$

Тада из

$$\sum_{\nu=1}^{\nu \leq x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k u_\nu = o\left(x^{\alpha+\beta-k(1-\beta)}\right), \quad x \to \infty ,$$

за $$n_\nu \leq x \leq n_\nu + \varepsilon_0 n_\nu^\beta$$

следи $$s_n = o(n^{\alpha+\beta}), \quad n \to \infty ,$$

за $$n_\nu \leq n \leq n_\nu + \varepsilon_0 n_\nu^\beta .$$

Ако у овом ставу претпоставимо да је $\alpha = -\beta$, а при томе још ставимо $\beta = \sigma/k$, видимо *да ће из*

$$\sum_{\nu=1}^{\nu \leq x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k u_\nu = o(x^{\sigma-k}), \quad x \to \infty ,$$

са $\sigma \leq k$, *и*

$$u_n = O(n^{-\sigma/k}), \quad \text{за} \quad n_\nu \leq n \leq n_\nu + \varepsilon_0 n_\nu^{\sigma/k},$$

следити $$s_{n_\nu} = o(1), \quad n_\nu \to \infty .$$

Ово претставља уопштење у тачки **1.2** цитираног Hyslop-ова резултата и то за случај кад је услов

$$u_n = O(n^{-\sigma/k}), \quad n \to \infty ,$$

само местимично испуњен.

4.7. Најзад, приметимо да последњи ставови претстављају у ствари уопштења такозваних „ставова о празнинама“ (théorèmes lacunaires, Lückensätze).

Ако се, наиме, у једном реду Σu_ν појаве празнине, тј. извесни узастопни чланови ишчезавају ($u_n = u_{n+1} = \cdots = u_{n'} = 0$), тада је очевидно услов

$$u_n = O(n^\alpha), \quad n \to \infty,$$

већ и у коначности испуњен, док n прелази индексе чланова те празнине. Ако су, дакле, те празнине довољно велике, став 13 се може применити и он казује, шта више, да није потребно да чланови тих празнина ишчезну, већ је довољно да се појављују групе чланова чија је брзина рашћења ограничена.

Ако, према томе, ставимо, у ставу 13, $\beta = 1$ и $\alpha + 1 = a$, а s_n заменимо са $s_n - s$, добивамо овај резултат:

Из
$$\sum_{\nu=o}^{\nu \leq x} \left(1 - \frac{\nu}{x}\right)^k u_\nu \sim s\, x^a, \quad x \to \infty,$$

кад је
$$n_\nu \leq x \leq (1 + \varepsilon_0)\, n_\nu, \ 1, 2, 3, \cdots$$

и
$$u_n = O(n^{a-1}) \quad \text{за} \quad n_\nu \leq n \leq (1 + \varepsilon_0)\, n_\nu,$$

следи
$$s_n \sim s \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k)}{k!} n^a, \quad n \to \infty,$$

кад је
$$n_\nu \leq n \leq (1 + \varepsilon_0)\, n_\nu.$$

Овај став, у случају кад је $a = o$, казује, дакле, да из збирљивости $R(n, k)$ низа s_n следи конвергенција делимичног низа s_{n_ν} ако се иза n_ν-тог члана u_{n_ν} појављује довољно велика празнина дужине $\varepsilon_0 n_\nu$, или, општије, ако је група чланова који следе иза u_{n_ν} ограничена у свом рашћењу тако да $n\, u_n = O(1)$.

Овај је резултат, за случај Cesàro-ва и Hölder-ова поступка збирљивости изнео Meyer-König, у својој тези [3], но пошто су поступци збирљивости $R(n, k)$, $C(k)$ и $H(k)$ еквивалентни, горњим извођењем дат је нов доказ Meyer-König-ових резултата.

Поред тога, наведени последњи став казује да се ставови о празнинама могу проширити и у случају кад се конвергенција замени асимптотиком.

1—XI—1939. Земун.

Преглед литературе

1. J. M. Hyslop — On the approach of a series to its Cesàro limit. Proc. of the Edinburgh Math. Soc. 5 (2) 182—201 (1938).
2. J. Карамата — О једној новој инверсији Cesàro-ва начина збирљивости. Глас CLXIII (80) 59—70 (1934).
3. W. Meyer-König — Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. Dissert tion, Tübingen (1939). Оштампана и у Math. Zeit. 45, 447-478 (1939).
4. Б. Поповић — Један инверсни став о асимптотским вредностима Laplace-ова интеграла. Глас српске Кр. Ак. Наука 185 (92) 1941. стр. 33—46.
5. M. Riesz — Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Paris, 152, p. 1651 (1911).
6. M. Riesz — Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation. Proc. Lond. Math. Soc. 22, (2) 412—419 (1923).

О ЛИЧНОЈ ЈЕДНАЧИНИ У ПОСМАТРАЊИМА ОКУЛТАЦИЈА

од

В. В. МИШКОВИЋА

(Приказано на скупу Академије природних наука од 3 фебр. 1941 год.)[1]

Увод

Из комплекса појава које прати и обрађује Положајна астрономија, Месечеве окултације некретница издвајају се двојаком својом предношћу: прво, као појаве које се лако посматрају, тј. и са једноставном апаратуром, и, друго, као појаве чија су посматрања служила, а могла би још увек послужити као драгоцени материјал за обраду читава низа корисних тема и питања од неоспорног значаја и данас још за Положајну астрономију. Тиме се и објашњава што се посматрања ових појава одржавају на програмима астрономског посматрачког рада и данас још, ма да у погледу степена тачности, за последњих сто година, није код њих, тако рећи, никакав већи напредак остварен. За понеку, додуше, од тих тема имала су посматрања окултација само пролазан значај: донде само док за дотични проблем није био нађен пут да му се до решења на други начин дође. Сетимо се, на пр., улоге коју су окултације играле, још до пре сто година, у одређивању разлика̂ географских дужина. Али за још приличан број тема сачувала су посматрања Месечевих окултација, нарочито дуже серије систематских посматрања, и данас још свој значај: било као једини материјал са којим се обради дотичног проблема може приступити, било као материјал који служи да се исти проблем још на један начин подухвати и реши.

---

[1]) Приказани рад допуњен је накнадно добивеним бројним подацима

Тако су, на пр., систематска посматрања окултација, нарочито окултација сјајнијих звезданих јата (Плејада) и некретница за трајања Месечевих потпуних помрачења, у више махова већ досад била искоришћавана и обрађивана у циљу одређивања Месечева привидна пречника и Месечеве и Сунчеве паралаксе, – података, дакле, од прворазредне важности за Положајну астрономију и Небеску механику. И то обрађивана са признатим успехом. Истина, у новије доба, за последње рецимо три деценије, нису у ову сврху више (бар не онако исцрпно као раније) била коришћена. Вероватно, због неизвесности у погледу степена тачности који би могла дати.

Првој од поменутих тема близак и у вези са одређивањем полупречника Месечева диска имамо – проблем облика и неравнина Месечева руба. Проблем од изванредног интереса и значаја за познавање Месечева тла. И у ову сврху су биле већ коришћене краће или дуже серије систематских посматрања окултација, но са мање успеха него у претходним случајевима: делом, због уопште деликатне природе овог проблема, а поглавито због нехомогености и врло разнолике тачности употребљених посматрачких података (подразумевајући овде и положаје самих посматраних некретница)

На проблематику неравнина руба, која већ залази у Месечеву физику, надовезује се, опет из физике Земљина пратиоца, као још (и поред свих негативних доказа) увек донекле отворено, питање могућних заостатака Месечеве атмосфере За ову сврху дошла би у обзир искључиво посматрања окултација релативно блиских двојних звезда. Проблем тежак, колико као појава за посматрање, и ретка појава, дакле због врло оскудног материјала за његову обраду, толико и због високог степена тачности који се од посматрања у том случају тражи, а на који се није могло или би се тешко могло са сигурношћу рачунати.

Мање је и познато а и вођено досад рачуна да је Бесел, који је окултацијама и помрачењима уопште посветио неколико исцрпних радова, указао на посматрања Месечевих окултација некретница као на материјал који би корисно могао послужити и за одређивање Земљина облика, тј. спљоштености Земљина сфероида.

Напослетку, као исте врсте и посве сличне овим појавама, Месечеве окултације великих планета или њихових сателита а, можда, и појединих сјајнијих планетоида, ма да су ово већ релативно врло ретке појаве, могле би такође бити узете у обзир у циљу расветљавања разних отворених питања која се тичу атмосфере, облика и димензије ових тела.

Дакле, као што видимо, доиста приличан низ и разноврсних и интересантних тема, за чију се обраду траже или су довољна и овако лака и технички једноставна посматрања као што су – посматрања Месечевих окултација.

Но од осамдесетих година прошлог века посматрањима Месечевих окултација некретница намењује се нова улога. S. Newcomb-ова прерада целокупног система основних астрономских констаната и ревизија теорија̂ кретања̂ Сунца, великих планета и, специјално, Месеца знатно дижу вредност ових посматрања. А откако се показало да теорија Месечева кретања, заснована на закону опште гравитације и контролисана меридијанским Месечевим посматрањима, није сама у стању да претстави стварно његово кретање, – посматрањима окултација признат је, за теорију Месечева кретања, значај и ранг ништа мањи од – данашњих меридијанских посматрања.

Ова улога окултација у Положајној астрономији биће још више истакнута закључцима E. W. Brown-ових каснијих истраживања у вези са теоријом Месечева кретања. Према тим закључцима, који су се такође ослањали на посматрања окултација, узроке неслагањима теорија̂ са стварним кретањима чланова Сунчева система, а поглавито Месеца треба тражити у – неправилностима Земљине ротације. Тако је овим закључцима, уствари, доведен био у питање сам дотадањи систем рачунања времена у Астрономији. И морало је бити уведено, поред терестричког времена, које се мери Земљином ротацијом и остаје као аргумент у астрономским ефемеридама, времена промењива услед неуниформности Земљине ротације, – ново, Њутонско, униформно време, дефинисано помоћу средњих сидеричних кретања чланова Сунчева система. На тај начин је улога, коју су у одређивању терестричког времена дотле играле некретнице, пренесена, за одређивање Њутонског времена, на Сунце, брзе, тј. доње велике планете (Меркур, Венера) и, као најбржи, Месец.

Међутим ови ослонци за одређивање новог временог еталона, са посматрачког гледишта, нису за ту улогу индицирина. Једно, са разлога што се код посматрања ових тела, тј. тела приметних привидних димензија, уопште тешко достиже данас потребан степен тачности. Друго, што је њихово кретање релативно споро. И, треће, што ова тела нису сва у свако доба приступачна посматрањима. Између њих издваја се, ипак, Месец као тело чије је и кретање довољно брзо и, готово, стално приступачно посматрањима. Уз то Месец једини међу њима омогућује посматрања, наиме преко окултација, код којих степен прецизности не зависи од његове привидне димензије. Ето, тако су и због тога скупна посматрања Месечевих окултација данас, по свом значају, готово изједначена са меридијанским посматрањима фундаменталних звезда.

Тим околностима и појединостима се објашњава и Brown-ова иницијатива, од пре двадесетак година, за организовање међународне сарадње астрономских опсерваторија и што већег броја посматрача на систематском посматрању окултација. Апелу који је астрономском свету упутио у овом смислу одазвале су се одмах институције у којима се спремају и издају основни астрономски алманаси. Оне су почеле објављивати, поред уобичајених астрономских података, и податке о свим видљивим окултацијама сјајних некретница. А ово је, опет, омогућило великом броју опсерваторија, које раније нису пратиле ове појаве, да у своје програме унесу и редовна посматрања окултација. Тако је, од 1936 г., ушла у ред тих опсерваторија и Астрономска опсерваторија у Београду. По споразуму постигнутом са Nautical Almanac Office-ом у Гриничу, ова институција се примила да и за нашу Опсерваторију редовно израчунава и благовремено доставља ефемериде свих код нас видљивих окултација. На тај начин било је и нашој Астрономској опсерваторији омогућено да, од 1937 г., предузме редовна посматрања Месечевих окултација некретница, сјајнијих од 7·5 привидне величине.

Ова посматрања имала су од почетка и имају, у смислу поменутог Brown-ова апела, тачно прецизиран циљ. Она треба да послуже и искоришћују се, искључиво, за одређивање отступања Месечевих теориских од стварних његових положаја; дакле, засад, само за контролу нове Теорије Месечева кретања. На искоришћавање тог обилатог материјала за друге неке од раније помињаних тема или истраживања у вези са њима, није се при томе помишљало. Разлога за ово може бити и има више. Као главни могу се свакако сматрати –

недовољан степен прецизности, а и нехомогеност ових посматрања, као података за помињане сврхе. Та околност нас је навела на ову идеју. Ако би се успело да се степен тачности посматрања осетније повиси или, боље речено, да им се одреде границе стварне тачности, без сумње би могућност била на тај начин отворена да се систематска посматрања окултација, нарочито ако би се и начин посматрања уједначио, бар на неколико места, искористе и у друге сврхе.

Од те идеје се и пошло кад се код нас приступило организацији редовних посматрања окултација. А да би се створили услови да се у резултатима ових посматрања постигне што више у погледу степена њихове тачности, од самог почетка рада предвиђени су извесни поступци у начину посматрања, а и апаратура је била прилагођена циљевима које је требало постићи. Уз то је било предвиђено да се, чим прикупљени посматрачки материјал дозволи, изврши темељнија анализа резултата са гледишта стварне тачности на коју би се, под овим условима, код њих могло рачунати.

Метода рада и апаратура

Главни од поменутих услова који су били предвиђени и могли бити остварени за рад на систематском посматрању Месечевих окултација код нас своде се на ово:

1. сваку видљиву окултацију посматрају четири посматрача, на четири паралактична инструмента (колико их свега има);

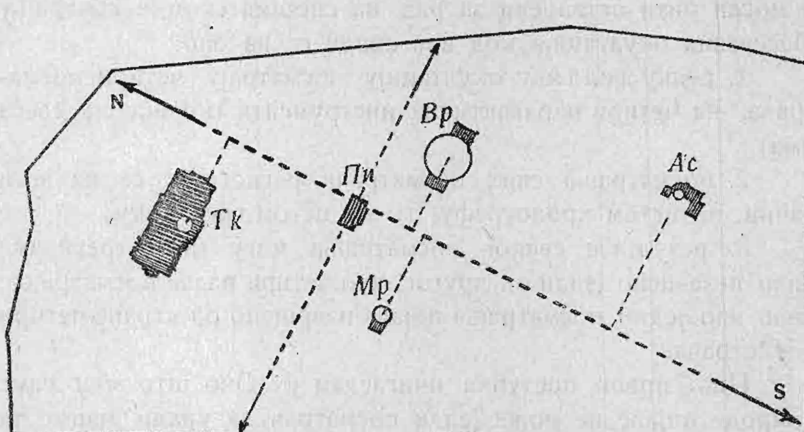
2. посматрања свих посматрача региструју се на исти начин, на истом хронографу, тј. по истом часовнику;

3. резултати сваког посматрања могу бити третирани било независно један од другог, као четири разна посматрања, било као једно посматрање појаве извршено од стране четири посматрача.

Циљ првог поступка очигледан је. Оно што због саме природе појаве не може један посматрач да уради, наиме да посматрање понови, треба да се постигне повећавањем броја посматрања, тј. посматрача. Да овако добивени подаци посматрања нису оптерећени систематском грешком, већ на овај начин се степен тачности резултата може сматрати као повишен, у овом случају удвостручен. Поред тога омогућено би било одређивање средње грешке сваког резултата.

Друга тачка имала је за циљ да се у резултатима посматрања постигне потребна хомогеност, а да се при томе ниуколико не умањи и уопште не утиче на степен тачности посматрања. Зато је био за ову врсту посматрања израђен на самој Опсерваторији специјалан хронограф за регистровање посматрања. Апарат је Hipp-ова типа, а разликује се од обичних модела трима својим карактеристикама. Место два одн. три пера, колико их обично ови апарати имају, израђен је хронограф са пет пера: једно за часовник и четири за регистровање посматрања. Осим тога, место погона помоћу опруге, употребљен је мали синхрон-мотор. И, напослетку, дужина двосекундног потеза на траци повећана је од 30 мм на 80 мм, са могућношћу повећања и до 100 мм – довољне константности.

Да би се разумео смисао и поступак треће тачке, треба знати да су, пре но што се и почело са систематским посматрањима окултација, обављена била триангулациона мерења у кругу Опсерваторије и одређени релативни положаји појединих инструмената. Мерења и рачуне у вези са њима извршили су, захваљујући предусретљивости тадањег начелника Војног географског института генерала М. Терзића, кандидати



Сл. 1. План земљишта и распоред павиљона Астрономске опсерваторије у Београду

Више војне геодезиске школе. На основи тих мерења изведене су као разлике $\Delta\varphi$ и ΔL појединих инструмената, у односу према стубу источног пасажног инструмента *Пи*, као основном положају, ове вредности, дакле у смислу *Пи – X*:

Павиљ. / Коорд.	*Tk*	*Bp*	*Mp*	*Ac*
$\Delta\varphi$	$-1''\cdot 81$	$+0''\cdot 79$	$+0''\cdot 94$	$+3''\cdot 83$
ΔL	$-0^s\cdot 115$	$+0^s\cdot 107$	$-0^s\cdot 094$	$+0^s\cdot 179$

На тај начин биле су стварно отворене две могућности. Свако посматрање могло је бити третирано и независно од осталих, тј. као да је свака окултација посматрана на четири разне тачке. А исто тако могла су, с обзиром на близину инструмената, сва посматрања бити сведена на исту тачку и третирана као четвороструко једновремено посматрање – исте појаве.

Смисао и циљ ових диспозиција постају јасни ако се узме у обзир да посматрања окултација припадају још увек категорији визуалних посматрања, и то посматрања једне тренутне појаве, чији се тренутак наступа само непосредно одређује. Услед тога главни извор за отступања резултата посматрања од стварности је – посматрач: главни део отступања сачињавају, дакле – личне грешке посматрача. Ова околност претставља, може се рећи, у исти мах и добру, а и слабу страну посматрања. Добра би им страна била у томе што у ова посматрања не улазе никакве друге систематске, на пр. инструментске грешке. Али им је слаба страна у томе што су грешке којима су оптерећене, поред своје и иначе доста „ћудљиве“ природе, по смеру дејства код свих посматрача истог смера – закашњења. Значи, при посматрању исте појаве од стране и већег броја посматрања, резултати посматрања могу да послуже, уствари, само да покажу у којим границама се крећу релативна закашњења појединих учесника у посматрању. Не може се, дакле, рачунати, као код извесних других врста посматрања, да се са повећањем броја посматрача њихове личне грешке компензују, тј. у резултатима неутрализују, поништавају Према томе нити се ови резултати могу искористити за оцену *апсолутног* или *стварног* закашњења, нити за одређивање стварног *степена тачности* добивеног резултата.

Овде треба једну напомену да учинимо. Систематско закашњење које у себи носе резултати ових посматрања практично је, тако рећи, без осетних последица за поправку Месечеве лонгитуде. Јер, за разлику од меридијанских где се посматрањима одређују непосредно саме Месечеве координате, код окултација се одређује — аргумент (време) коме координата одговара. Услед тога закашњење у резултату посматрања, чак и од једне секунде, за лонгитуду Месечеву не претставља више од свега неколико десетих лучне секунде. Друго дејство има, међутим, исто закашњење ако посматрања треба да служе, рецимо, за изучавање неравнина Месечева руба. То нас је покренуло да, пре свега, обратимо пажњу питању личне једначине које за овако замишљена посматрања окултација постаје битно.

Анализа и одређивање личне једначине

Ма да је лична једначина код посматрања тренутних светлосних појава и уопште (дакле већ као проблем психолошко-физиолошке врсте) и специјално, код Месечевих окултација, била досад, чешће [7 – 9], предмет истраживања, морала је у овом случају бити подвргнута новим испитивањима из више разлога. Пре свега, јер је свакако требало одредити личну једначину сваког посматрача-учесника у овим посматрањима, како би ова могла бити узета у обзир при упоређењу резултата разних посматрача исте појаве. Но требало ју је и специјалним испитивањима подвргнути како би се проверило и утврдило, да ли би и у којој још мери требало и кроз начин посматрања обезбеђивати њихову хомогеност. А било је, поред тога, и разлога везаних специјално за наше услове рада, који су указивали на потребу темељнијих испитивања понашања личне једначине у овој врсти појава. Напомињемо да је, како за ова испитивања тако и за предвиђену примену резултата који су се од њих очекивали, као битан усвојен био став по коме се лична једначина увежбаног посматрача може, за извесно краће или дуже време, сматрати константном. Но ово, наравно, претпоставља да, уз ту константу, буду прецизирани и услови за које она важи, тј. за које је била одређена. Зато је овим испитивањима постављен био двојак задатак:

а) одређивање апсолутне вредности личне једначине посматрачеве под одређеним условима, и

б) истраживање и свих узрока који могу утицати на утврђену вредност личне једначине и, с тим у вези, одређивања њених промена.

Извођење самог програма, међутим, било је ометено догађајима услед којих је известан број сталних посматрача окултација морао на неодређено време отсуствовати са Опсерваторије. И тако тај програм ни до данас није могао бити изведен на начин и у обиму како је био замишљен. Један покушај ових испитивања могао је бити извршен током 1942 године. Резултати ових експеримената не могу се, наравно, сматрати коначнима, из простог разлога што су остали недовршени, али су и овакви, неоспорно, и корисни и важни за циљ који је овим испитивањима постављен. Корисни су по резултатима које су дали, а важни по закључцима који су из њих могли бити извучени о даљој оријентацији ових испитивања. Зато ћемо овде укратко изложити и резултате тих првих експеримената и закључке до којих су нас они довели.

Што се тиче апаратуре, за испитивања био је употребљен визуални азимутални дурбин, на који је, место окулара, био намештен фотометар са скалом малих кружних отвора који су, осветљени, производили у пољу вида вештачку звезду. Гашење и паљење вештачке звезде на тамном пољу вида, што је, у овом случају, требало да „репродукује" и имитира имерсију, односно емерсију звезде при окултацијама, извођено је преко електричног контакта који је регистрован на хронографу. Посматрање се сводило, према томе, на регистровање од стране посматрача, преко нарочитог контакта, на истом хронографу тренутка гашења, односно паљења вештачке звезде у пољу вида.

Испитивања су вршена са четири увежбана посматрача и једним који у овим посматрањима дотад никад није узимао учешћа. Извршено је, тј. могло је бити извршено свега шест оваквих серија од по десетак посматрања, са гашењем вештачке звезде, дакле са имитацијама само имерсије. Серије се разликују једна од друге по размаку између тренутака кад је посматрач стављао око на окулар и тренутка наступа појаве који је требало да се региструје. Ово је имало за циљ да се утврди, да ли и у којој мери ови размаци утичу на посматрачеву личну једначину (јер се показало [8] да утичу). Тако су извршене:

једна серија са размаком од 6 секунада;

две серије са размаком од 12 секунада;

једна серија са размаком од 24 секунде;

две серије са размаком од 48 секунада.

Извршене су затим биле и две серије са паљењем вештачке звезде, дакле са имитацијом емерсије. Но како ова посматрања нису сви посматрачи стигли да обаве, дакле нису потпуна, нису овде ни узета у обзир.

Као резултати тих првих испитивања добивени су бројеви (хиљадити секунде) које дајемо у овом прегледу.

Серија	Размак у сек.	МП	БШ	МС	ЗБ	ЉП	Просечне вредности
I	6	248	224	259	352	265	270
II	12	218	306	301	291	319	287
III	24	232	485	291	358	351	371
IV	48	353	340	419	356	547	403
I+II	(9)	233	265	280	321	292	280
III+IV	(36)	293	412	355	357	449	373

Посматрачи су били: М. Протић, Б. Шеварлић, М. Симић, З. Бркић и Љ. Пауновић.

Напоредо са овим експериментима, вршени су покушаји и за одређивање закашњења која би могла потицати од диспозитива („крушчица“ или полужица) којим посматрачи дају притиском контакт. Констатовано је да закашњења постоје и да су мерљива. Добивене средње вредности закашњења кретале су се између $0^s\cdot006$ и $0^s\cdot022$, но у њима је констатовано извесно систематско понашање које је, због прекида рада, остало нерасветљено.

Закључци

Већ из ових прелиминарних и непотпуних испитивања могу се о понашању личне једначине посматрача окултација извести ови најважнији закључци:

1. Као доња граница личне једначине код посматрача окултација може се узети $-0^s\cdot200$. Она, дакле, врло приближно

одговара износу који су физиолози нашли [10] као време (– 0ˢ· 196) за које посматрач визуалну перцепцију тренутне појаве може тактилно да региструје.

2) Доња граница посматрачеве личне једначине важи за доста прецизне услове и подлежи приметној (мерљивој) промени чим посматрач прекорачи оквир тих њених услова.

3. Доње границе личне једначине и увежбаних посматрача могу се међу собом приметно разликовати.

Иако само прелиминарни, ови резултати довољно јасно показују да би, за сврху којој се посматрања окултација намењују, понашање личне једначине која се код њих јавља требало, и квалитативно и квантитативно, савесно и свестрано испитати. Кад кажем свестрано мислим, у првом реду, на испитивања њена понашања:

а) како при имерсијама тако и при емерсијама;

б) како при тамном тако и при осветљеном пољу вида;

в) са вештачким звездама разних привидних величина.

Литература

1. J. Lagrula — Études sur les occultations d'amas d'étoiles par la Lune (Thèse); 1903.

2. M. Matzdorff — (тачан наслов непознат) (Thèse); Strasbourg, 1914.

3. V. Grouïtch — Réduction et discussion des occultations d'étoiles par la Lune (Thèse), 1933

4. J. Boccardi — Les mérites du problème Lunaire B. S. A. F. 1927, p. 256.

5. A. Danjon — Le temps — sa définition pratique, sa mesure; B. S. A. F. 1929, p. 13.

6. E. W. Brown — Changes in the length of the day; Smiths. Rep., 1937, p 169.

7. F. Renz — Versuch einer Best mmung der persöhnlichen Gleichung bei der Beobachtung von Sternbedeckungen; 1888, A. N. 119, p. 145

8. E. Jost — Notiz betreffend den persönlichen Fehler bei Sternbedeckungen; 1909, A. N. 181. p 203.

9. E. C. Phillips — Second note on personal equation in opserving occultations; P. A. XXXVI, p. 403.

10. Beaunis — Nouveaux éléments de physiologie humaine, 3 éd., II, p. 805, 1888.

SUR L'ÉQUATION PERSONNELLE DANS LES OBSERVATIONS D'OCCULTATIONS

Par
V. V. Michkovitch

(Présenté à la Séance de l'Académie des Sciences naturelles le 3-II-1941

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé brièvement la variété de sujets d'utiles et intéressantes recherches auxquelles ont donné déjà et peuvent toujours donner lieu surtout les longues séries d'observations d'occultations, l'auteur en souligne en même temps le côté faible, venant des erreurs d'observations inconnues, tant accidentelles que systématiques, que comportent ces données. Puis signale qu'à l'Observatoire astronomique de Belgrade, où un service permanent d'observations des occultations fut institué en 1936, on avait envisagé non seulement de faire servir les résultats de ces observations aux corrections des positions de la Lune, mais de les utiliser aussi à d'autres recherches auxquelles ces documents peuvent donner lieu.

Dans ce but, en plus de certaines dispositions et installations appropriées effectuées au préalable, il fut convenu:

1° que toute occultation visible serait observée par quatre observateurs, aux quatre instruments parallactiques disponibles;

2° que l'enregistrement des observations serait fait par les quatre observateurs de la même manière, au même chronographe, à cinq plumes, spécialement construit à cette fin.

De cette manière, toute occultation observée pouvait facilement être réduite à un même point et traitée ainsi comme quatre observations simultanées du même phénomène.

Restait à élucider la question des erreurs systématiques. À cet effet on se proposait d'entreprendre une étude circonstanciée des erreurs personnelles dans le double but suivant:

1° pour en déduire l'équation personnelle absolue de chaque observateur;

2° pour découvrir les différentes causes susceptibles de faire varier la valeur ainsi déterminée de l'équation personnelle.

Les premières expériences furent faites en substituant à l'oculaire d'une lunette azimutale un photomètre à étoile artificielle (de 3e grandeur à peu près) sur champ sombre. À ces essais prirent part à côté des quatre observateurs affectés à ce service, donc exercés, un cinquième n'ayant jamais fait d'observations de ce genre. Les quatre séries qu'on a pu effectuer différaient entre elles par les intervalles séparant le moment où l'observateur mettait l'oeil à l'oculaire de celui où le phénomène à observer se produisit. Le tableau ci-dessous contient les valeurs (en millièmes de seconde) des retards relatifs aux „immersions" de chaque observateur. À ces experiences ont pris part: M. Protitch, B. Chevarlitch, M. Simitch, Z. Brkitch et L. Paunovitch.

Série	Interv. en sec.	MP	BC	MS	ZB	LP	Moyennes
I	6	248	224	259	352	265	270
II	12	218	306	301	291	319	287
III	24	232	485	291	358	351	371
IV	48	353	340	419	356	547	403
I+II	(9)	233	265	280	321	292	280
III+IV	(36)	293	412	355	357	449	373

Malheureusement, après ces quatre séries, les expériences durent être interrompues et jusqu'à ce jour n'ont plus pu être reprises. Mais, quoique incomplets, ces résultats permettent déjà de conclûre que:

1° comme limite inférieure des équations personnelles des quatre observateurs on peut adopter $0^s{\cdot}200$, en accord avec la valeur que donnent les physiologistes ($0^s{\cdot}196$) pour le temps que l'observateur met pour réagir par une pression à la perception visuelle d'un phénomène instantané;

2° la limite inférieure de l'équation personnelle d'un observateur n'est valable que pour des conditions assez restreintes.

О ЕГЗИСТЕНЦИЈИ ИНТЕГРАЛА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ДРУГОГ РЕДА КОЈИ ПРОЛАЗИ КРОЗ ДВЕ УНАПРЕД ДАТЕ ТАЧКЕ

од

ВОЈИСЛАВА Г. АВАКУМОВИЋА

(Примљено на I скупу Академије природних наука, од 15 јуна 1942 год.)

Познато је да је E. Picard[1]) први обрадио проблем о егзистенцији интеграла диференцијалне једначине

$$y'' = f(x, y, y')$$

који пролазе кроз две унапред дате тачке (a, A) и (b, B) равни (x, y) а где је $b > a \geq 0$ и $A \geq o, B \geq 0$. Једно далекосежно уопштење E. Picard-ових испитивања дао је A. Rosenblatt[2]); његов став гласи:

Став А. *За*

$$a \leq x \leq b,$$

(а) $$|y| \leq L,$$

и

(б) $$|y'| \leq L',$$

нека је $f(x, y, y')$ *нейрекидно*,

(в) $$|f(x, y, y')| < M$$

и

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_0, y'_0)| < \frac{\alpha\,|y_1 - y_0|}{(x-a)^2\,(b-x)^2} + \frac{\beta\,|y'_1 - y'_0|}{(x-a)(b-x)}.$$

Нека је, даље,

(г) $$\frac{(b-a)^2 M}{8} + B \leqslant L\,; \quad \frac{(b-a)\,M}{2} + \frac{|B-A|}{b-a} \leqslant L',$$

---

1) E. Picard, Journal de Math. Sér. IV. T. IX (1893) s. 217.

2) A. Rosenblatt, Bull. de la Soc. Math. de Grèce. T. XIV (1937) s. 7

и нека постоји једно $0 < m < 1$ *такво да је*

$$\text{(д)}\qquad \left(\frac{2^{2-m}}{1-m}+\frac{1}{m}\right)\frac{\alpha}{(b-a)^2}+\frac{2(1+m)}{m(1-m)}\frac{\beta}{(b-a)}<1.$$

Онда диференцијална једначина

$$y''=f(x,y,y')$$

има једно и само једно решење које задовољава граничне услове

$$y(a)=A;\quad y(b)=B,$$

и неједначине (а) *и* (б). *Ово решење као и његов први извод су непрекидне функције аргумента док се овај налази у затвореном размаку* (a, b), *а добијају се методом сукцесивне апроксимације.*

Мој циљ је овде да, служећи се методом сукцесивне апроксимације, с једне стране, уопштим услове (а), (б) и (в) а, с друге стране, да пооштрим неједначину (д). Уједно ћу, на више места, поједноставити A. Rosenblatt-ов доказ, тако да ће овај, што ћу овде изложити, бити краћи него онај за став A.

Став I. *За све*

$$a\leq x\leq b,$$

$$\text{(1)}\qquad \left|\,y-A-\left(\frac{B-A}{b-a}\right)(x-a)\,\right|<\Phi(x)$$

и

$$\text{(2)}\qquad \left|\,y'-\left(\frac{B-A}{b-a}\right)\right|<\Phi^*(x),$$

где је

$$\Phi(x)=\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\int_a^x(z-a)\,F(z)\,dz+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\int_x^b(b-z)\,F(z)\,dz$$

и

$$\Phi^*(x)=\left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^x(z-a)\,F(z)\,dz+\frac{1}{b-a}\int_x^b(b-z)\,F(z)\,dz,$$

а $F(z)$ *нека позитивна и преко затвореног размака* (a,b) *интеграбилна функција нека је*

$$\text{(3)}\qquad |\,f(x,y,y')\,|<F(x)$$

и

$$\text{(4)}\qquad |\,f(x,y_1,y'_1)-f(x,y_0,y'_0)\,|<\frac{\alpha\,|\,y_1-y_0\,|}{(x-a)^2(b-x)^2}+\frac{\beta\,|\,y'_1-y'_0\,|}{(x-a)(b-x)},$$

где су α и β такви позитивни бројеви да је

$$2\left\{\frac{2\alpha}{(b-a)^2}+\frac{\beta}{b-a}\right\}<1 \tag{5}$$

Онда диференцијална једначина

$$y''=f(x,y,y')$$

има једно и само једно решење које задовољава граничне услове

$$y(a)=A; \quad y(b)=B$$

и неједначине (1) *и* (2). *Ово решење као и његов први извод су непрекидне функције аргумента док се овај налази у затвореном размаку* (a, b), *а добијају се методом сукцесивне апроксимације.*

Показаћу да овај став садржи став A као специјалан случај. За ово је довољно да докажем да су све претпоставке става I задовољене кад год су задовољене оне става A.

Да из (а), (б) и (в) следи (1), (2) и (3) са $F(x)=M$ види се сасвим лако, јер је сад

$$\Phi(x)<\frac{(x-a)(b-x)M}{2}\leq\frac{(b-a)^2M}{8},$$

а

$$\Phi^*(x)<\frac{\{(x-a)^2+(b-x)^2\}M}{2(b-a)}\leq\frac{(b-a)M}{2}.$$

Преостаје још да докажем да из (д) следи (5). За ово је довољно да покажем да, за све $0<m<1$, важе неједначине

$$K=\frac{2^{2-m}}{1-m}+\frac{1}{m}>4$$

и

$$K'=\frac{2(1+m)}{m(1-m)}>2.$$

Како је

$$2^{2-m}>\frac{4}{1+m},$$

непосредно добијам

$$K>\frac{4}{1-m^2}+\frac{1}{m}>5.$$

Функција $\dfrac{2(1+x)}{x(1-x)}$ постиже свој минимум за $x=\sqrt{2}-1$. Дакле је

$$K' > \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} = (2+\sqrt{2})^2 > 9.$$

Овим су не само доказане горње неједначине за K и K' већ и оштрија неједначина

$$\left(\frac{2^2-m}{1-m}+\frac{1}{m}\right)\frac{\alpha}{(b-a)^2}+\frac{2(1+m)}{m(1-m)}\frac{\beta}{(b-a)} < \frac{5\alpha}{(b-a)^2}+\frac{9\beta}{(b-a)},$$

где су α и β ма какви бројеви ≥ 0. Ова неједначина казује у коликој мери је неједначина (5) боља од одговарајуће става A.

Став I нам, на пр., осигурава егзистенцију интеграла једначине

$$y'' = \frac{c\,y^2}{x^2(1-x)^2}+d$$

са граничним условима $y(0)=y(1)=0$, где су c и d реални бројеви за које постоји једно $0<\theta<1$ такво да је задовољена неједначина

(А) $$2\left(1-\sqrt{1-|cd|}\right) < 2\,\theta\left(1+\sqrt{1-|cd|}\right) < 1;$$

став А, међутим, не обезбеђује постојање оваквог интеграла. Ово се види на овај начин. За

$$|f(x,y)| < F(x) = M,$$

где је

(Б) $$M = \frac{2\,\theta}{|c|}\left(1+\sqrt{1-|cd|}\right)$$

је

(В) $$|y| < x(1-x)\frac{M}{2};$$

дакле специјално

(Г) $$|y| < \frac{M}{8}.$$

За све y који задовољавају неједначину (В) је

$$|f(x,y)| < \frac{|c|\,M^2}{4} + |d|,$$

дакле,

$$|f(x,y)| < M,$$

јер су $M_{1,2} = \dfrac{2}{|c|}\left(1 \pm \sqrt{1-|cd|}\right)$ корени једначине

$$\frac{|c|M^2}{2} - M + |d| = 0.$$

Тиме сам доказао да посматрана диференцијална једначина задовољава услове (1), (2) и (3). Даље је, с обзиром на (Б) и (Г),

$$|f(x,y_1) - f(x,y_0)| < \frac{c\,|y_1+y_0|\;|y_1-y_0|}{x^2(1-x)^2}$$

$$< \frac{\Theta\left(1+\sqrt{1-|cd|}\right)|y_1-y_0|}{2x^2(1-x)^2},$$

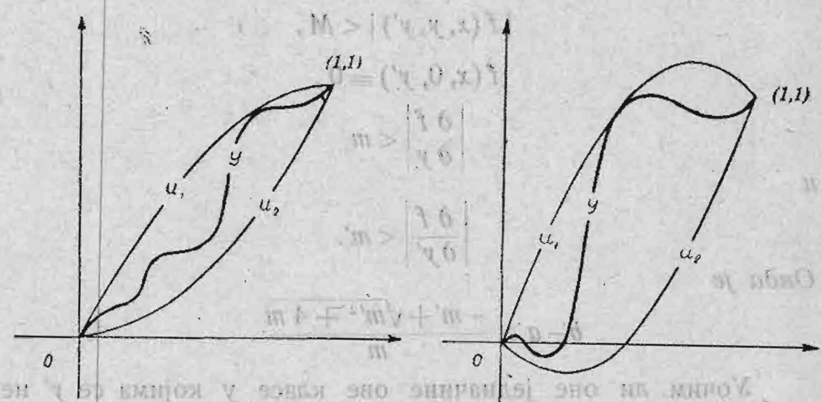
па други део неједначине (А) казује да је услов (5) задовољен. Према томе тражени интеграл постоји.

Став I не само да осигурава егзистенцију интеграла и у случајевима када став А то више не чини већ нам, под претпоставком $F(z) = M$, даје врло једноставне границе између којих се сигурно налази тражени интеграл. Једноставности ради нека гранични услови гласе $y(0) = 0$ и $y(1) = 1$. У томе случају су споменуте граничне криве дате једначинама

$$u_1 = x + x(1-x)\frac{M}{2}$$

и

$$u_2 = x - x(1-x)\frac{M}{2}.$$



Сл. 1 Сл. 2

На слици 1 је $M = 2$, а на слици 2 је $M = 4$. Како је $u_2 = 0$

за $x = 1 - \frac{2}{M}$, видимо да је у размаку $\left(1 - \frac{2}{M}, 1\right)$ сигурно $x \geqslant 0$; у специјалном случају $M \leq 2$ је $y > 0$ у целом размаку $(0, 1)$ сем за $x = 0$, где је $y = y(0) = 0$.

Став I примениħу на проблем нула једне класе диференцијалних једначина другог реда и тако, у извесном правцу, уопштити познати став по коме између нула a и b интеграла линеарне једначине

$$y'' = -\varphi(x)\,y$$

и величине

$$m = \underset{a \leq x \leq b}{\operatorname{Max}} \{\varphi(x)\}$$

постоји неједначина

$$\text{(Д)} \qquad b - a > \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \text{ [3]}$$

Као аналогон овога доказаħу

Став II. *Нека су a и b нуле интеграла диференцијалне једначине*

$$y'' = f(x, y, y'),$$

тј.

$$\text{(Ђ)} \qquad y(a) = y(b) = 0$$

и нека $y \not\equiv 0$ *за све x размака* (a,b). *Нека је, даље, за све*

$$|y| < (x-a)(b-x)\frac{M}{2}$$

и

$$|y'| < \{(x-a)^2 + (b-x)^2\}\frac{M}{2}:$$

$$|f(x, y, y')| < M,$$

$$f(x, 0, y') \equiv 0,$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < m$$

и

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| < m'.$$

Онда је

$$b - a > \frac{-m' + \sqrt{m'^2 + 4m}}{m}.$$

Уочим ли оне једначине ове класе у којима се y' не јавља (међу које, према томе, спадају и линеарне једначине),

3) M. Petrovitch, Intégration qualitative des équations différentielles Mémorial des Sc. math. 4 g. s. 31.

добивам

$$b - a > \frac{2}{\sqrt{m}},$$

резултат слабији од неједначине (Д). но који зато важи и за ову, нешто општију, класу диференцијалних једначина.

Доказ става II. $y^* \equiv 0$ је једно решење диференцијалне једначине и задовољава граничне услове (Ђ); према томе, ако је y једно решење које није $\equiv 0$, а задовољава услове (Ђ), неједначина (5) не сме бити испуњена (јер иначе би решење било једнозначно). Како је

$$\begin{aligned} |f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_0, y'_0)| &< m\,|y_1 - y_0| + m'\,|y'_1 - y'_0| \\ &< \frac{(b-a)^4\, m}{16} \frac{|y_1 - y_0|}{(x-a)^2 (b-x)^2} \\ &+ \frac{(b-a)^2\, m'}{4} \frac{|y'_1 - y'_0|}{(x-a)(b-x)}, \end{aligned}$$

мора бити

$$\frac{(b-a)^2\, m}{4} + \frac{(b-a)\, m'}{2} > 1,$$

тј.

$$b - a > \frac{-m' + \sqrt{m'^2 + 4m}}{m}.$$

За сам доказ става I потребна су ова два помоћна става.

Lemma I. *За* $0 < x < 1$ *је*

$$\int_0^x z^{-\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{3}{2}} dz = 2\, x^{\frac{1}{2}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Доказ. Интеграција биномног диференцијала.

Lemma II. *За* $0 < x < 1$ *нека је*

$$|\varphi(x)| < \frac{N}{x^{\frac{3}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Онда диференцијална једначина

$$y'' = \varphi(x)$$

има једно решење које задовољава граничне услове

$$y(0) = y(1) = 0$$

и за њега важе неједначине

$$|y| < 4Nx^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$|y'| < \frac{2N}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказ. Функција

$$y = (x-1)\int_0^x z\,\varphi(z)\,dz - x\int_x^1 (1-z)\,\varphi(z)\,dz$$

задовољава за $0 \leq x \leq 1$ како диференцијалну једначину тако и граничне услове, и њен извод је

$$y' = \int_0^x z\,\varphi(z)\,dz - \int_x^1 (1-z)\,\varphi(z)\,dz.$$

Ставим ли сад

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^x z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{3}{2}}\,dz,$$

то је

$$|y| < (1-x)\,N\,\mathrm{I}(x) + x\,N\,\mathrm{I}(1-x);$$

дакле, на основу помоћног става I,

$$|y| < 4Nx^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Даље је

$$|y'| < N\,\mathrm{I}(x) + N\,\mathrm{I}(1-x);$$

дакле, на основу помоћног става I,

$$|y'| < \frac{2N}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Доказ става I. Не ограничавајући ни мало претпоставке, могу узети да је $a=0$, $b=1$ и $A=B=0$. Да бих сад, по угледу на E Picard-a, обавио сукцесивну апроксимацију поћи ћу од неке функције y_0 која задовољава услове (1), (2),

$$y_0(0) = y_0(1) = 0$$

и има за све $0 \leq x \leq 1$ непрекидан извод. Полазећи од ове функције y_0 образоваћу наредне по рекурентној једначини

$$(6) \qquad y_n = (x-1) \int_0^x z\, f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})\, dz$$

$$- x \int_x^1 (1-z)\, f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})\, dz;$$

Тада је y'_n дато рекурентном једначином

$$(7) \qquad y'_n = \int_0^x z\, f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})\, dz$$

$$- \int_x^1 (1-z)\, f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})\, dz.$$

Како y_0 и y'_0 задовољавају неједначине (1) и (2), то све овако образоване функције y_n и y'_n задовољавају исте неједначине. Јер ако y_{n-1} и y'_{n-1} задовољавају ове неједначине, онда, с обзиром на (3), (6) и (7), добивам

$$|y_n| < (1-x) \int_0^x z\, F(z)\, dz + x \int_x^1 (1-z)\, F(z)\, dz < \Phi(x)$$

$$|y'_n| < \int_0^x z\, F(z)\, dz + \int_x^1 (1-z)\, F(z)\, dz < \Phi^*(x).$$

Поред тога, све овако дефинисане функције y_n задовољавају граничне услове

$$y_n(0) = y_n(1) = 0.$$

Доказаћу сад да y_n и y'_n задовољавају неједначине

$$|y_{n+1} - y_n| < 4 \cdot 2^{n-1} (2\alpha + \beta)^{n-1} N_0\, x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

и
$$|y'_{n+1}-y'_n| < \frac{2\cdot 2^{n-1}(2\alpha+\beta)^{n-1} N_0}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}},$$

где је N_0 извесна константа. Показаћу, прво, да ове неједначине важе за $n=0$, а одатле ће онда, прелазом са $n-1$ на n, следити доказ за произвољне n. Ставимо

$$N_0=(2\alpha+\beta)N^*,$$

где је

$$N^*=\underset{o\leq x\leq 1}{\mathrm{Max}}\{2+2\Phi^*(x)\}.$$

Као што смо рекли, y_0 задовољава услов (2); стога је

$$|y'_1-y'_0|<2+2\Phi^*(x)\leq N^*, \tag{8}$$

дакле, свакако

$$|y'_1-y'_0|<\frac{N^*}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Како је $y_0(0)=y_1(0)$, интеграцијом неједначине (8) (од 0 до x) добивам,

$$|y_1-y_0|<N^*x,$$

а интеграцијом од $1-x$ до 1, с обзиром на $y_0(1)=y_1(1)$,

$$|y_1-y_0|<N^*(1-x).$$

За $0\leq x\leq \frac{1}{2}$ је $x\leq 2x(1-x)$, а за $\frac{1}{2}$ $x\leq 2\leq 2$ је $(1-x)$ $\leq 2x(1-x)$; дакле је

$$|y_1-y_0|<2N^*x(1-x)<2N^*x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Претпоставимо сад да су неједначине које хоћемо да докажемо тачне за $n-1$. Како према ранијем y_n, y_{n-1} и y'_n, y'_{n-1} задовољавају неједначине (1) и (2) то, с обзиром на (4), добивам

$$|f(x,y_n,y'_n)-f(x,y_{n-1},y'_{n-1})|<\frac{4\alpha\, 2^{n-2}(2\alpha+\beta)^{n-2}N_0}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\frac{2\beta\, 2^{n-2}(2\alpha+\beta)^{n-2}N_0}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$
$$<\frac{2^{n-1}(2\alpha+\beta)^{n-1}N_0}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Стављајући сад

$$\varphi(x) = f(x, y_n, y'_n) - f(x, y_{n-1}, y'_{n-1}),$$

$$y = y_{n+1} - y_n,$$

$$N = 2^{n-1}(2\alpha + \beta)^{n-1} N_0$$

и примењујући помоћни став II, добивам

$$|y_{n+1} - y_n| < 4 \cdot 2^{n-2}(2\alpha+\beta)^{n-1} N_0 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$|y'_{n+1} - y'_n| < \frac{2 \cdot 2^{n-1}(2\alpha+\beta)^{n-1} N_0}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

ш. ј. т. д.

Како је, према претпоставци (5),

$$2(2\alpha+\beta) < 1,$$

редови

$$y_n - y_0 = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(y_{\nu+1} - y_\nu \right)$$

и

$$y'_n - y'_0 = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(y'_{\nu+1} - y'_\nu \right)$$

апсолутно конвергирају, први, шта више, униформно за $0 \leq x \leq 1$. Дакле,

$$y_n \to y, \; n \to \infty,$$

а

$$y'_n \to y', \; n \to \infty.$$

На основу једног H. Lebesgue-ова[4]) класичног става, а с обзиром на (3), смем у интегралима $\int_0^x z f(z, y_n, y_n')\,dz$ и $\int_x^1 (1-z) f(z, y_n, y_n')\,dz$ изменити ред прелаза ка граници $(n \to \infty)$. Стога напред добивене функције y и y' задовољавају функционалне једначине

$$y = (x-1)\int_0^x z f(z, y, y')\,dz - x\int_x^1 (1-z) f(z, y, y')\,dz$$

и

---

[4]) H. Lebesgue, Bull. Soc. math. France, 36 (1908) s. 12.

$$y' = \int_0^x z\,f(z, y, y')\,dz - \int_x^1 (1-z)\,f(z, y, y')\,dz.$$

Овако добивена функција y је једно решење наше диференцијалне једначине и оно задовољава како постављене граничне услове тако и неједначине (1) и (2). Уједно се види да су ова функција као и њен први извод непрекидне функције у затвореном размаку (0,1).

Преостаје још да докажем да је овако добивено решење једнозначно. Претпоставићу стога да постоји још једна функција $Y = Y(x)$ која задовољава диференцијалну једначину, граничне услове и неједначине (1) и (2). Лако је увидети да је онда и

$$\psi(x) = (x-1)\int_0^x z\,f(z, Y, Y')\,dz - x\int_x^1 (1-z)\,f(z, Y, Y')\,dz$$

једно решење диференцијалне једначине. Дакле је

$$\psi''(x) = f(x, Y, Y'),$$

тј.

$$\psi''(x) = Y''(x)$$

за $0 \leqslant x \leqslant 1$. Одавде следи да је $\psi - Y$ нека линеарна функција једнака нули за $x = 0$ и $x = 1$. Према томе је

$$\psi(x) \equiv Y(x)$$

за све $0 \leq x \leq 1$, а Y и Y' су непрекидне функције.

На основу последњег идентитета добивам да је

$$Y - y_n = (x-1)\int_0^x z\left\{f(z, Y, Y') - f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})\right\}dz$$

$$- x\int_x^1 (1-z)\left\{f(z, Y, Y')\ \ f(z, y_{n-1}, y'_{n-1})\right\}dz.$$

Како Y задовољава неједначине (1) и (2) и граничне услове, то истим поступком као и напред, а на основу последње функционалне једначине, добивам

$$|Y - y_n| < 4 \cdot 2^{n-1}(2\alpha + \beta)^{n-1} N_0\, x^{\frac{1}{2}}\,(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Бирајући овде n довољно велико видимо да је $|Y-y_n|<\varepsilon$, где је ε неки произвољно мали број. Дакле је

$$Y \equiv y$$

за све $0 \leq x \leq 1$ ш.ј.т.д.

SUR LE PROBLÈME AUX LIMITES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE NON LINÉAIRES

par

VOJISLAV G. AVAKUMOVIC

M. A. Rosenblatt, considérant le problème aux limites d'une équation différentielle non linéaire du second ordre[1])

1) $$y''=f(x,y,y') \quad y(a)=A\,; \quad y(b)=B$$

a remplacé la condition de Lipschitz par la condition plus générale

2) $$|f(x,y_1,y'_1)-f(x,y_2,y'_2)|<\frac{\alpha\,|y_1-y_2|}{(x-a)^2(b-x)^2}+\frac{\beta\,|y_1'-y_2'|}{(x-a)(b-x)},$$

α et β étant deux nombres positifs à la condition

3) $$\left(\frac{2^{2-m}}{1-m}+\frac{1}{m}\right)\frac{\alpha}{(b-a)^2}+\frac{2(1+m)}{m(1-m)}\frac{\beta}{(b-a)}<1,$$

m étant un nombre arbitraire tel que $0<m<1$.

En outre, lorsque les inégalités

4) $$|f(x,y_1,y')|<M,$$

5) $$\frac{(b-a)^2 M}{8}+B \leq L \quad \text{et} \quad \frac{(b-a)M}{2}+\frac{|B-A|}{b-a} \leq L'$$

sont remplies pour

6) $$a \leq x \leq b, \quad |y| \leq L \quad \text{et} \quad |y'| \leq L'$$

il existe alors une intégrale $y(x)$ unique ayant les valeurs A pour $x=a$ et B pour $x=b$, $y'(x)$ étant continu dans $a \leq x \leq b$ et $y(x)$ satisfaisant à l'équation 1) dans le même intervalle. Cette intégrale est donnée par les approximations successives de M. E. Picard.[2])

Dans le présent travail l'auteur montre, entre autres choses, que l'on peut remplacer l'inégalité 3) *par une plus précise, à savoir*

$$2\left\{\frac{2\,\alpha}{(b-a)^2}+\frac{\beta}{b-a}\right\}<1,$$

---

1) A. Rosenblatt, Bull. de la Soc. Math. de Grèce. T. XIV (1833) p. 7

2) E. Picard, Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles. Paris 1930.

ainsi que les conditions 4), 5) *et* 6) *par les conditions plus générales suivantes:*

Il existe une fonction positive $F(x)$ intégrable dans l'intervalle fermé (a, b) et telle que l'inégalité

$$|f(x_1, y_1, y')| < F(x)$$

est remplie pour

$$\left|y - A - \left(\frac{B-A}{b-a}\right)(x-a)\right| < \Phi(x)$$

et

$$\left|y' - \left(\frac{B-A}{b-a}\right)\right| < \Phi^*(x)$$

toutes les fois que les fonctions $\Phi(x)$ et $\Phi^*(x)$ sont définies par

$$\Phi(x) = \left(\frac{b-x}{b-a}\right)\int_a^x (z-a)F(z)\,dz + \left(\frac{x-a}{b-x}\right)\int_x^b (b-z)F(z)\,dz$$

et

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^x (z-a)F(z)\,dz + \frac{1}{b-a}\int_x^b (b-z)F(z)\,dz.$$

On peut en conclure la proposition suivante relative à l'intervalle des x, séparant deux zéros consécutifs de y:

Supposons que la fonction $f(x, y, y')$ satisfasse aux conditions suivantes:

$$f(x, 0, y') \equiv 0,$$

$$|f(x, y, y')| < M,$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < m \quad et \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| < m'$$

pour

$$|y| < (x-a)(b-x)\frac{M}{2} \qquad |y'| < \left\{(x-a)^2 + (b-x)^2\right\}\frac{M}{2}.$$

Soit ensuite $y(x)$ une intégrale de l'équation différentielle $y'' = f(x, y, y')$ et a et b deux zéros consécutifs de $y(x)$. Alors

$$b - a > \frac{-m' + \sqrt{m'^2 + 4m}}{m}.$$

ПРИМЕНА ПФАФОВЕ МЕТОДЕ НА ТЕОРИЈУ ПОДЕШЕНИХ КАНОНИЧНИХ ПРОМЕНЉИВИХ

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на I скупу Академије природних наука, од 6 јула 1943 г.)

Предговор

Као што је познато, Пфафова метода своди проучавање система диференцијалних једначина кретања материјалног система на проучавање једне нарочите линеарне диференцијалне форме — Пфафова израза. Употреба ове методе је нарочито погодна за вршење трансформација система диференцијалних једначина кретања. У овом чланку показујемо на који начин ова метода може послужити теорији такозваних подешених каноничних променљивих, које се, друкчије, зову угловне променљиве и променљиве дејства.

1. Дефиниција подешених каноничних променљивих

Нека је кинематичко стање материјалног система са n степена слободе одређено генералисаним координатама q_i ($i = 1, 2, \cdots, n$), и генералисаним импулсима p_i ($i = ,1\ 2, \cdots, n$), где је,

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

при чему је T жива сила система. Нека силе, што дејствују на систем, имају функцију сила U, односно потенцијалну енергију $\Pi = -U$, које не зависе непосредно од времена. Таквом материјалном систему одговара Хамилтонова функција

$$H = T - U = T + \Pi,$$

која такође не зависи непосредно од времена.

Са таквим материјалним системом можемо повезати Пфафов израз

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt, \tag{1}$$

за који Пфафове диференцијалне једначине дају диференцијалне једначине кретања у каноничком облику

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

Промењљиве q_i, $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ за које Пфафов израз има облик (1), зову се каноничне промењљиве.

Координата од које функција H не зависи зове се циклична координата. Ако је, рецимо, q_n циклична координата, тј.

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0,$$

из (2) имамо

$$\frac{dp_n}{dt} = 0$$

и, према томе, долазимо до интеграла

$$p_n = \text{Const.} = \beta_n. \tag{3}$$

Сама координата q_n одређује се у функцији времена квадратуром и то после одређивања осталих промењљивих од којих зависи $\frac{\partial H}{\partial p_n}$; у ствари, из једначине

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n}$$

имамо

$$q_n = \int \frac{\partial H}{\partial p_n} dt + \alpha_n, \tag{4}$$

где је α_n произвољна константа интеграције.

Ако извод

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \nu_n$$

има сталну вредност ($r_n = \text{Const}$) и интеграл (4) доводи до линеарног интеграла

$$q_n = \nu_n t + \alpha_n ,$$

циклична координита q_n зове се угловна канонична координата.

Стални, према (3), импулс, који одговара угловној координати, зове се тада канонична промењљива дејства.

Угловне промењљиве и промењљиве дејства имају заједнички назив подешених или „униформизујућих" каноничних промењљивих.

Према томе, ако са w_1 означимо угловну промењљиву система и са I_1 одговарајућу промењљиву дејства, Пфафов израз за такав систем можемо написати овако

$$I_1 dw_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i dq_i - Hdt ,$$

при чему функција H не зависи од w_1, тј.

$$\frac{\partial H}{\partial w_1} = 0 \tag{5}$$

и извод

$$\frac{\partial H}{\partial I_1} = \nu_1 \tag{6}$$

има сталну вредност.

Из каноничних једначина

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_1}, \quad \frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_1},$$

према (5) и (6), имамо интеграле

$$I_1 = \text{Const.}, \quad w_1 = \nu_1 t + \alpha_1 ,$$

где је α_1 константа интеграције. На овај начин за сваки пар подешених каноничних промењљивих имамо два интеграла: сталност промењљиве дејства и линеарност по времену (средње кретање) угловне промењљиве.

Ако систем има више подешених каноничних промењљивих, рецимо $k \leqslant n$, Пфафов израз има облик

$$\sum_{i=1}^{k} I_i\, dw_i + \sum_{j=1}^{n-k} p_j\, dq_j - Hdt,$$

где је

$$H = H(q_1, q_2, \cdots, q_{n-k};\ I_1, I_2, \cdots, I_k;\ p_1, p_2, \cdots, p_{n-k}),$$

при чему је сваки извод

$$\frac{\partial H}{\partial I_i} = \nu_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

стална величина. У овом случају имамо интеграле

$$I_i = \text{Const.}, \quad w_i = \nu_i t + \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

где су α_i константе интеграције. Величине ν_i код претходних интеграла зову се фреквенције.

2. Одређивање подешених промењљивих. Случај једног степена слободе

Зауставимо се, прво, на случају материјалног система са једним степеном слободе. Означимо координату система са q, а генералисани импулс са p.

Пфафов израз проблема има облик

$$\Phi = pdq - Hdt, \tag{7}$$

при чему претпостављамо да је

$$H = H(p, q).$$

Изразу (7), на основу Пфафова поступка, одговарају две каноничне једначине

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{8}$$

Једначине (8) имају два интеграла о којима можемо казати ово. Један интеграл има облик

$$H(p, q) = h, \tag{9}$$

где је h произвољна константа.

Други интеграл, који уводи време, може се добити једном од квадратура

$$dt = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} dq = -\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^{-1} dp,$$

при чему у првој квадратури извод сматрамо, на основу (9), функцијом само q, а у другој само p.

Из ових особина интеграла следује да решење нашег проблема може бити изражено у облику

$$\begin{aligned} p &= p(t+a, h), \\ q &= q(t+a, h), \end{aligned} \tag{10}$$

где је a нова константа интеграције.

Претпоставимо сад да решења (10) носе периодичан карактер са периодом T. Место линеарне функције $t+a$, од које зависе решења (10) са периодом T, уводимо нову линеарну функцију

$$s = \nu t + \alpha,$$

са вредношћу

$$\nu = \frac{2\pi}{T},$$

и произвољном константом $\alpha = \nu a$; за нову линеарну функцију s решења (20) у облику

$$\begin{aligned} p &= p(s, h), \\ q &= q(s, h), \end{aligned} \tag{11}$$

имају период 2π.

Пошто смо проучили особине интеграла нашег проблема, покушаћемо да нађемо подешене каноничне променљиве проблема. Да постигнемо тај циљ треба Пфафов израз (7) трансформисати на специјални израз за подешене променљиве и, према томе, поставити еквивалентност двају израза

$$pdq - H(p, q)\, dt \approx Idw - H(I)\, dt, \tag{12}$$

где су w и I нове, подешене променљиве и $\approx$ знак еквивалентности.

Обратимо пажњу да еквивалентност двају Пфафових израза не одговара једнакости тих израза. Појам еквивалентности овде је шири од појма једнакости. Наиме, еквавилентне форме могу се разликовати тоталним диференцијалом и константним множитељем.

Пошто Пфафове диференцијалне једначине леве форме из (12) треба да се трансформишу у Пфафове диференцијалне једначине десне форме, интеграли (11) првих једначина треба да се трансформишу у интеграле других; пошто диференцијалне једначине за десну форму имају облик

$$\frac{dI}{dt}=0\,, \quad \frac{dw}{dt}=\frac{\partial H}{\partial I}\,,$$

интеграли ових једначина изгледају овако

$$I=\text{Const.}, \quad w=\frac{\partial H}{\partial I}\,t+\text{Const.} \tag{13}$$

Према томе интеграли (11), треба да се трансформишу у интеграле (13).

Пошто решење (11) што стоји у вези са левом формом еквивалентности (12), зависи од линеарне функције времена

$$s=\nu t+\alpha$$

са адитивном произвољном константом, а решење (13) десне форме зависи од линеарне функције

$$w=\frac{\partial H}{\partial I}\,t+\text{Const.},$$

такође са адитивном константом, и време у наш проблем друкчије не улази, можемо сматрати s и w као идентичне функције времена, тј.

$$s=w$$

и тада је

$$\nu=\frac{\partial H}{\partial I}\,.$$

Узимајући ово у обзир, поставимо у везу елементе еквивалентности (12) и то овако:

$$H(p,q)=H(I) \tag{14}$$

и

$$pdq\approx Idw. \tag{15}$$

Једначина (14) поставља везу између констаната h и I:

$$h=H(I)\,.$$

Еквавилентност (15) служи за одређивање величине I и то било из обрасца

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq,$$

где је интеграл проширен на један период промене p и q, било из каквог другог обрасца, еквивалентног првом, на пример из обрасца

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{2} (pdq - qdp).$$

Ово следује непосредно отуда што су у Пфафову изразу чланови

$$pdq \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} (pdq - qdp)$$

еквивалентни, јер другу половину производа pdq можемо заменити половином производа $-qdp$.

Са геометриског гледишта елеменат pdq одговара израчунавању интеграла (површине) према елементу (правоугаонику) за Декартове координате, а елеменат $\frac{1}{2}(pdq - qdp)$ одговара израчунавању исте површине помоћу елемента — сектора.

Овде се види нарочита погодност Пфафове методе која у самој својој суштини садржи могућност за модификовање потребних израчунавања.

Према ономе што је речено за одређивање подешених каноничних променљивих треба поступити овако.

На основу особина интеграла

$$p = p(s, h),$$

$$q = q(s, h),$$

треба израчунати интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = I(I)$$

или њему еквивалентни, па одредити, обратно,

$$h = h(I) = H(I).$$

Затим ставити за промењиву w

$$w = \frac{\partial H}{\partial I} t + \alpha .$$

Једначине

$$p = p\,(w, h(I)),$$

$$q = q\,(w, h(I)),$$

дају обрасце трансформације на подешене каноничне промењиве.

3. Хармониски осцилатор

Као пример узмимо случај хармониског осцилатора.

Ако масу осцилатора узмемо за јединицу, његову Хамилтонову функцију можемо написати

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} k^2 q^2 ,$$

где је q координата осцилатора, p — импулс са вредношћу $q' = \frac{dq}{dt}$, а k^2 коефицијент пропорционалности. Каноничне једначине проблема изгледају овако

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k^2 q , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$$

и имају познате периодичне интеграле

$$p = \sqrt{2h} \cos s ,$$

$$q = \frac{1}{k} \sqrt{2h} \sin s ,$$

где је

$$s = kt + \alpha ,$$

са α и h произвољним константама.

За израчунавање I применимо образац

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{2} (pdq - qdp) ;$$

тада непосредно имамо

$$I = \frac{h}{k} ,$$

а, сем тога, је

$$w = s = kt + \alpha .$$

Функција H узима вредност

$$H = h = Ik$$

и Пфафова форма се трансформише овако

$$pdq - \frac{1}{2}(p^2 + k^2 q^2)\, dt \approx Idw - Ikdt .$$

I и w су заиста подешене канонична променљиве хармониског осцилатора.

4. Случај више степена слободе

Пређимо сад на случај материјалног система са више степена слободе. Нека систем има n степена слободе и нека му одговара Пфафов израз у облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt , \tag{16}$$

где су $q_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$ генералисане координате система, $p_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$ генералисани импулси и H Хамилтонова функција која не зависи непосредно од времена.

Форми (16) одговарају Пфафове једначине у каноничном облику

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} . \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{17}$$

Претпоставимо да једначине (17) имају периодичне интеграле

$$\begin{aligned} p_i &= p_i (w_j, c_j), \\ q_i &= q_i (w_j, c_j), \end{aligned} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{18}$$

са периодичним аргументима $w_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$, који су линеарне функције времена, тј.

$$w_i = \nu_i t + \alpha_i ,$$

где су $\alpha_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$ произвољне константе интеграције, а $\nu_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$ константне величине које зависе од осталих $c_i \,(i = 1, 2, \cdots, n)$ констаната интеграције.

Пошто једначине (17) имају интеграл живе силе

$$H = h,$$

где је h константа, између ове константе и констананата $c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ треба да постоји веза

$$H(c_1, c_2, \cdots, c_n) = h.$$

Ако величине $w_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ узмемо за нове промењљиве, Пфафов израз можемо претставити овако:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H dt = \sum_{j=1}^{n} I_j \, dw_j - H dt,$$

где су са I_j означене промењљиве конјуговане промењљивим w_j. Ове промењљиве се одређују из образаца

$$(19) \qquad I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{w_j} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dq_i}{dw_j} \, dw_j$$

или из оних који потичу из Пфафова израза после еквивалентних трансформација одговарајућих чланова тог израза.

После трансформације функције H на нове промењљиве она ће зависити само од промењљивих $I_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ и, после тога, из форме

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} I_j \, dw_j - H(I_1, I_2, \cdots, I_n) \, dt$$

закључујемо да су, у том случају, промељниве $I_j, w_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ подешене каноничне промењљиве и њима одговарају интеграли

$$I_j = \text{Const.}, \quad w_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} t + \text{Const.} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Ако је за коју координату

$$\frac{\partial H}{\partial I_j} = 0,$$

имамо случај дегенерације одговарајућег периодичног интеграла. Ако сви интеграли, сем једног, дегенеришу, имамо чисто периодично кретање материјалног система.

5. Кеплерово кретање

Као пример система са више степена слободе узмимо Кеплерово кретање, које одговара тако званом стандардном планетском кретању, чија диференцијална једначина другог реда изгледа [једначина (17) наше расправе [1]] овако:

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{1}{r^3}\mathfrak{r},$$

где је $\mathfrak{r}$ вектор положаја фиктивне тачке — редуциране планете; са вектором положаја $\mathfrak{R}$ праве планете он је везан векторском једначином

$$\mathfrak{R} = \sqrt[3]{f(M+m)}\,\mathfrak{r},$$

при чему су: f — гравитациона константа, M и m масе Сунца, односно планете.

Ако за координате редуциране планете узмемо r, θ, ψ, где је r дужина потега, θ – угао допуне до астрономске ширине и ψ астрономска дужина, Хамилтонову функцију можемо претставити овако:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\psi^2\right) - \frac{1}{r},$$

где су p_r, p_θ, p_ψ импулси који одговарају означеним координатама.

Каноничне једначине кретања узимају облик:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r^3}p_\theta^2 + \frac{1}{r^3\sin^2\theta}p_\psi^2 - \frac{1}{r^2}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r,$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}p_\psi^2, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{r^2}p_\theta,$$

$$\frac{dp_\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0. \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\psi.$$

За трансформацију Пфафова израза

$$\Phi = p_r\,dr + p_\theta\,d\theta + p_\psi\,d\psi - H dt$$

довољно је узети у обзир ове интеграле претходних каноничних једначина

$$p_\psi = \alpha_\psi,$$

$$p_\theta^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta} = \alpha_\varphi^2,$$

$$p_r^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2} - \frac{2}{r} = 2h,$$

где су α_ψ, α_φ, h – произвољне константе интеграције. Из тих интеграла можемо одредити импулсе, ставити их у Пфафов израз, и тада имамо

$$\Phi = \sqrt{2\left(h + \frac{1}{r}\right) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}\, dr + \sqrt{\alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \alpha_\psi\, d\psi - H dt.$$

Ставимо сад

$$2\pi I_r = \oint p_r\, dr = \oint \sqrt{2\left(h + \frac{1}{r}\right) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}\, dr,$$

$$2\pi I_\theta = \oint p_\theta\, d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\varphi^2 - \frac{\alpha_\psi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta,$$

$$2\pi I_\psi = \oint p_\psi\, d\psi = \oint \alpha_\psi\, d\psi.$$

После извршених квадратура имамо:

$$I_\psi = \alpha_\psi,$$

$$I_\theta = \alpha_\varphi - \alpha_\psi,$$

$$I_r = \frac{1}{\sqrt{-2h}} - \alpha_\varphi.$$

Из претходних једначина имамо

$$h = -\frac{1}{2(I_r + I_\theta + I_\psi)^2}$$

и, према томе, Пфафов израз можемо написати

$$\Phi = I_r\, dw_r + I_\theta\, dw_\theta + I_\psi\, dw_\psi + \frac{1}{2\,(I_r + I_\theta + I_\psi)^2}\, dt.$$

Пошто су

$$\frac{\partial H}{\partial I_r} = \frac{\partial H}{\partial I_\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_\psi} = \frac{1}{(I_r + I_\theta + I_\psi)^3} = \nu,$$

кретање се јавља као једноставно периодично. Да се покаже двострука дегенерација, увешћемо нове промењиве

$$I_1 = I_r + I_\theta + I_\psi, \qquad w_1 = w_r$$

$$I_2 = \qquad I_\theta + I_\psi, \qquad w_2 = w_\theta - w_r,$$

$$I_3 = \qquad\qquad I_\psi, \qquad w_3 = w_\psi - w_\theta;$$

за ове промењиве Пфафов израз узима облик

$$\Phi = I_1\, dw_1 + I_2\, dw_2 + I_3\, dw_3 + \frac{1}{2 I_1^2} dt$$

и доводи до интеграла

$$w_1 = \frac{1}{I_1^3} t + \alpha_1, \qquad w_2 = \alpha_2, \qquad w_3 = \alpha_3;$$

$$I_1 = \text{Const.}, \qquad I_2 = \text{Const.}, \; I_3 = \text{Const.}.$$

Ови интеграли показују двоструку дегенерацију, наиме за промењиве w_2 и w_3. Константе α_1, α_2, α_2, I_1, I_2, I_3, не претстављају ништа друго до Делонеове елементе.

Закључак

Горња расуђивања показују да Пфафова метода може послужити не само као основа теорији подешених каноничних промењивих већ може бити и згоднија од других метода, на пример од методе везане за Јакоби-Хамилтонову парциалну једначину. Предност Пфафове методе је у томе што за израчунавања служе не Пфафов израз, у било којој одређеној форми већ еквивалентни Пфафови изрази.

Нама изгледа да овај чланак, нарочито у вези са другим [1 и 2], јасно показује да помоћу Пфафове методе могу са успехом бити обрађена сва она питања Рационалне механике која се обрађују помоћу свих осталих општих метода.

Литература

1. A. Bilimovitch — Über die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. Astr. Nach B. 273, H. 4. Berlin-Dahlem 1943.

2. А. Билимовић — a) Пфафов општи принцип Механике. Глас. CLXXXIX. Београд. 1946. — b) Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог проблема. Исто. — c) Пфафова метода у геометријској оптици. Исто.

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ПФАФФА К ТЕОРИИ ПРИСПОСОБЛЕННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Академика АН. Д. БИЛИМОВИЧА

(Доложено на заседании Академии Естественных Наук 6. VII. 1943).

РЕЗЮМЕ

Содержание: Предисловие. 1. Определение приспособленных канонических переменных. 2. Нахождение приспособленных переменных. Случай одной степени свободы. 3. Гармонический осцилятор. 4. Случай многих степеней свободы. 5. Движение Кеплера. — Заключение.

Если для обобщенных координат q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ системы и им соответствующих импульсов p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ выражение Пфаффа имеет форму

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H dt,$$

где $H = H(p_i, q_i)$, то переменные p_i, q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ являются каноническими, потому что уравнения Пфаффа имеют форму канонических уравнений.

Координата, на пример, q_n, от которой функция H не зависит, называется циклической; ей соответствует интеграл

$$(*) \qquad p_n = \text{Const.} = \beta_n.$$

Если производная $\dfrac{\partial H}{\partial p_n} = \nu_n$ имеет постоянную величину, то интегралу (*) соответствует интеграл

$$q_n = \nu_n t + \alpha_n,$$

где α_n новая произвольная постоянная.

В этом случае координата q_n называется угловой координатой, а ей соответствующий импульс — координатой действия. Угловая и координата действия имеют общее название — униформизирующих или приспособленных координат.

В дальнейшем угловые координаты будем обозначать через w_i, а координаты действия через I_i.

Разыскание униформизирующих координат w_i, I_i сводится к следующему преобразованию выражения Пфаффа:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - H(p_i, q_i)\, dt \approx \sum_{i=1}^{n} I_i\, dw_i - H(I_i)\, dt,$$

где знак $\approx$ устанавливает не равенство, а эквивалентность форм с точки зрения получения эквивалентных дифференциальных уравнений Пфаффа.

Простые рассуждения приводят к следующим формулам для определения приспособленных координат, скажем, в случае системы с одной степенью свободы, когда имеет место интеграл сохранения энергии

$$H(p, q) = h,$$

а именно

$$(^{**}) \qquad I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq = I(h)$$

и

$$w = \frac{\partial H}{\partial I} t + \alpha.$$

Интеграл взят по периоду периодического движения.

При пользовании методом Пфаффа сейчас же видно, что интеграл (**) может быть заменен интегралом

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{2} (p\, dq - q\, dp).$$

Это следует непосредственно из того, что выражение $p dq$ в выражении Пфаффа может быть заменено ему эквивалентным выражением $\frac{1}{2}(p dq - q dq)$. Разность этих выражений равна полному дифференциалу $\frac{1}{2}\, d(pq)$.

Автор рассматривает также случай многих степеней свободы и показывает применение метода Пфаффа на двух примерах: на гармоническом осциляторе и на Кеплеровом движении. В последней задаче пять приспособленных переменных и постоянная в выражении шестой из этих переменных являются ничем иным как извесными элементами Делоне планетного движения.

ПФАФОВ ИЗРАЗ И ВЕКТОРСКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПЛАНЕТСКИХ ПОРЕМЕЋАЈА

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на I скупу Академије природних наука, од 11 јануара 1945)

Садржај

Увод

У низу чланака [1] показао сам на проучавању различитих питања Механике и Оптике вредност једне нарочите методе, коју сам назвао Пфафовом методом. И овај чланак има за циљ искоришћавање, и то непосредно, Пфафове методе за извођење мојих векторских једначина планетских поремећаја. Ове векторске диференцијалне једначине постављају везе између два независна произвољно константна вектора проблема двају тела и делимичних градијената функције поремећаја по тим векторима. Оне дају конкретну слику промене чисто векторских планетских елемената и тиме обележавају нов правац, чисто геометриски, у проучавању планетских поремећаја.

Пошто је апарат Пфафове методе мало познат, сматрам за корисно да укратко наведем основе те методе. Исто тако дајем и кратак преглед оних образаца из теорије планетских кретања, који стоје у вези са векторским диференцијалним једначинама планетских поремећаја.

1. Пфафов израз и Пфафове диференцијалне једначине

Нека су

$$(1) \qquad x_1, x_2, \cdots, x_N$$

независно променљиве и

$$(2) \qquad X_i = X_i(x_1, x_2, \cdots, x_N) \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

функције тих променљивих.

Линеарна форма

$$(\mathrm{I\,a}) \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{N} X_i \, dx_i$$

носи назив Пфафова израза или Пфафове форме.

Ако величине (1) сматрамо као Декартове координате тачке са вектором положаја $\mathfrak{x}$ у N-димензионалном простору, а величине (2) као координате вектора $\mathfrak{X}$ у том истом простору, Пфафов израз (Ia) можемо протумачити као скаларни производ вектора $\mathfrak{X}$ и $d\mathfrak{x}$, тј.

$$\Phi = (\mathfrak{X}\, d\mathfrak{x}),$$

где су округле заграде симбол скаларног производа.

Ако је згодније поделити променљиве (1) на такве групе да само појединим групама тих променљивих одговарају вектори, а за остале променљиве не вежемо векторе, онда Пфафов израз можемо претставити овако

$$(\mathrm{I\,b}) \qquad \Phi = (\mathfrak{X}_1 d\mathfrak{x}_1) + (\mathfrak{X}_2 a\mathfrak{x}_2) + \cdots + (\mathfrak{X}_k d\mathfrak{x}_k) + \sum_{j=1}^{k_1} Q_j \, aq_j \, .$$

Овде су означени са $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_k$ вектори положаја k тачака у просторима са $N_1, N_2, \cdots, N_k$ димензија и са q_j $(j = 1, 2, \cdots, k_1)$ скалари. $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \cdots, \mathfrak{X}_k$ и Q_j $(j = 1, 2, \cdots, k_1)$ су функције тих вектора и скалара. Цели бројеви $N_1, N_2, \cdots, N_k$, N и k_1 задовољавају једначину

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k + k_1.$$

Ако је број димензија свих простора исти, на пример, ако имамо посла са обичним Еуклидовим простором, тј.

$$N_1 = N_2 = \cdots = N_k$$

Пфафов израз изгледа

(Ic) $$\Phi = \sum_{i=1}^{k} (\mathfrak{P}_i d\mathfrak{p}_i) + \sum_{j=1}^{k_1} Q_j\, dq_j ,$$

при чему смо означили са $\mathfrak{p}_i$ векторе положаја одговарајућих тачака и са $\mathfrak{P}_i$ векторе, који могу зависити од свих тачака и од свих скалара q_j $(j = 1, 2, \cdots, k_1)$. Округле заграде поново означавају скаларни производ. Између бројева N, N_1, k и k_1 мора постојати веза

$$N = k N_1 + k_1 .$$

Узмимо сада за функције (2) разлике

$$a_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, N$$

и начинимо једначине

(IIa) $$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, dx_j = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Овај систем једначина носи назив првог система Пфафових једначина или, кратко, Пфафових једначина.

Пфафовим једначинама можемо дати и друге форме.

Узмимо, на пример, прву једначину

$$\sum_{j=1}^{N} a_{1j}\, dx_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \right) dx_j = 0$$

и напишимо је

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_1} dx_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Пошто су x_j $(j = 1, 2. \cdots, N)$ независно промењљиве и

$$\frac{\partial dx_j}{\partial x_1} = 0,$$

претходну једначину можемо трансформисати у

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^{N} X_j\, dx_j - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

или у
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi - dX_1 = 0.$$

Аналогно овој једначини целокупни систем Пфафових једначина изгледа

$$(\text{II b}) \qquad dX_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Ако уведемо вектор grad Φ са координатама

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_N},$$

систем (II) можемо изразити у форми

$$(\text{II c}) \qquad d\mathfrak{X} = \text{grad}\,\Phi.$$

С друге стране, ако уведемо вектор grad X_i са координатама

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_1}, \frac{\partial X_i}{\partial X_2}, \cdots, \frac{\partial X_i}{\partial x_N},$$

диференцијал dX_i можемо изразити скаларним производом

$$dX_i = (\text{grad}\, X_i\,, d\mathfrak{x})\,,$$

и тада се систем (II b) изражава

$$(\text{II d}) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi - (\text{grad}\, X_i\,, d\mathfrak{x}) = 0\,.$$

Овај систем доводи до векторске једначине (II c), при чему вектор $d\mathfrak{X}$ може бити сматран као скаларни производ $d\mathfrak{X} = (\text{grad}\,\mathfrak{X}, d\mathfrak{x})$.

Дефинитивно можемо написати

$$(\text{II e}) \qquad \text{grad}\,\Phi - (\text{grad}\,\mathfrak{X}\,, d\mathfrak{x}) = 0.$$

Овде grad $\mathfrak{X}$ означава градијент или извод вектора $\mathfrak{X}$ у односу на вектор $\mathfrak{x}$. Овај градијент је афинор са координатним векторима једнаким градијентима од координата вектора $\mathfrak{X}$.

Једначина (II e) је врло концизна и, са векторског гледишта, јасно показује природу Пфафових једначина, али са рачунског гледишта првенство треба дати једначинама (II b) и (II c), јер оне експлицитно показују потребне рачунске операције

Ако је Пфафов израз претстављен у облику (Ib), за сваки вектор $\mathfrak{r}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ можемо написати векторску једначину

$$\text{(IIf)} \qquad d\mathfrak{X}_i = \operatorname{grad}_i \Phi, \qquad i=1,2.\cdots,k$$

где смо са $\operatorname{grad}_i \Phi$ означили делимични градијент функције Φ по вектору $\mathfrak{r}_i$. Сваком скалару q_j $(j=1,2,\cdots,k_1)$ одговара скаларна једначина

$$\text{(IIg)} \qquad dQ_j = \frac{\partial}{\partial q_j}\Phi. \qquad j=1,2,\cdots,k_1.$$

Слично за форму (Ic) имамо векторске једначине

$$\text{(IIh)} \qquad d\mathfrak{P}_i = \operatorname{grad}_i \Phi,$$

где је делимични градијент узет по вектору $\mathfrak{p}_i$.

Наведимо сада неке важне особине Пфафових једначина.

а. Ако место променљивих $x_i (i=1,2,\cdots,N)$ уведемо нове променљиве y_i $(i=1,2,\cdots,N)$ и трансформишемо Пфафов израз

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} X_i\,dx_i = (\mathfrak{X}, d\mathfrak{r})$$

на облик

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} Y_i\,dy_i = (\mathfrak{Y}, d\mathfrak{y}),$$

где су Y_i $(i=1,2,\cdots,N)$ функције променљивих $y_i (i=1,2,\cdots,N)$ Пфафове једначине прве форме трансформишу се у Пфафове једначине друге форме и дају

$$\text{(3)} \qquad \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\,dy_i = \frac{\partial}{\partial y_i}\Phi - (\operatorname{grad} Y_i, d\mathfrak{y}) = 0 \quad i=1,2,\cdots,N,$$

или

$$\operatorname{grad}\Phi - (\operatorname{grad}\mathfrak{Y}, d\mathfrak{y}) = 0,$$

где је

$$b_{ij} = \frac{\partial Y_j}{\partial y_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial y_j} \qquad i,j=1,2,\cdots,N.$$

Овим се показује врло важна особина Пфафових једначина: систем једначина (IIa) еквивалентан је систему једначина (3). Из ове особине Пфафових једначина непосредно следује да је за трансформацију тих једначина на нове променљиве довољно трансформисати само Пфафов израз, па за писање нових једначина применити Пфафов поступак.

b. Ако Пфафову изразу додамо (одузмемо) тотални диференцијал ма које функције W променљивих $x_1, x_2, \cdots, x_N$, Пфафове једначине новог израза

$$\Phi + dW$$

еквивалентне су Пфафовим једначинама израза Φ.

У вези са овом особином ваља приметити да се Пфафове једначине не мењају, ако ма који члан $X_i dx_i$ у Пфафову изразу сменимо са $-x_i dX_i$, узимајући X_i за нову независно променљиву, а x_i као функцију свих осталих променљивих из x_1, $x_2, \cdots, x_N$ и нове променљиве X_i. Ово долази после одузимања од Пфафова израза тоталног диференцијала производа $X_i x_i$.

Исто тако се Пфафове једначине не мењају ако Пфафов израз помножимо или поделимо ма којим сталним множитељем.

c. Претпоставимо сада да је $N = 2n + 1$. Означимо тада независно променљиве овако: првих $2n$ са

$$x_1, x_2, \cdots, x_n;\ y_1, y_2, \cdots, y_n, \tag{4}$$

а $(2n+1)$-ву променљиву са t.

Узмимо Пфафов израз специјалног облика

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} y_i\, dx_i - H dt, \tag{5}$$

где је H функција променљивих (4) и t, и саставимо Пфафове једначине:

$$\left.\begin{aligned} -dy_i - \frac{\partial H}{\partial x_i} dt = 0, \\ dx_i - \frac{\partial H}{\partial y_i} dt = 0, \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial H}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{\partial H}{\partial y_n} dy_n + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) = 0.$$

Последња једначина претвара се у идентитет на основу претходних, а ове можемо написати

$$(6) \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}. \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Ако за тај случај уведемо у n - димензионалном простору два вектора

$$\mathfrak{y}\,(y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

$$\mathfrak{x}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

и искористимо поново појам делимичног градијента скалара по вектору, ако тај скалар зависи од више вектора, онда једначине (6) концизно можемо написити

$$(7) \qquad \dot{\mathfrak{y}} = -\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}} H, \qquad \dot{\mathfrak{x}} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{y}} H,$$

где тачка означава векторско диференцирање по t, а индекси код ознака градијената обележавају онај вектор помоћу којег конструише градијент.

d. Помоћу Пфафова израза (5) можемо овако формулисати проблем интегрисања једначина (6).

Ако израз (5) трансформишемо на облик

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i\, dX_i - dF = (\mathfrak{Y}, d\mathfrak{X}) - dF,$$

где су X_i, Y_i, F функције промењљивих (4) и t, интеграли једначина (6) изражавају се једноставно овако

$$(9) \qquad \begin{aligned} X_i &= \text{const.} = \alpha_i, \\ Y_i &= \text{const.} = \beta_i, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{B}. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Заиста, Пфафове једначине за израз (8) изгледају

$$-dY_i = 0, \qquad dX_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

а тај систем, еквивалентни систему (6), доводи непосредно до интеграла (9).

Обратно, ако имамо $2n$ таквих једначина (9), где су α_i, β_i произвољне константе које претстављају интеграле једначина (7), онда, узимајући α_i, β_i за нове промењљиве, после трансформације Пфафова израза (5) на њих добићемо тотални диференцијал.

2. Пфафов израз у Динамици

Пошто је наш циљ да дамо теорију поремећаја у кретању система материјалних тачака на које дејствују силе са функцијом сила, зауставимо се на Пфафову изразу који одговара једначинама Динамике под тим условима.

Узмимо n тачака са масама m_i и означимо векторе положаја тих тачака у односу на непокретну тачку O са $\mathfrak{r}_i$. Диференцијалне једначине кретања таквих тачака можемо написати

$$(10)\qquad m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_i} U, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

где је U функција сила; нека она зависи у општем случају од вектора положаја свих тачака $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \cdots, \mathfrak{r}_n$.

Уведимо живу силу T система једначином

$$2T = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (m_i \dot{\mathfrak{r}}_i, \dot{\mathfrak{r}}_i).$$

Израчунајмо импулс $\mathfrak{p}_i$ као градијент живе силе по брзини $\dot{\mathfrak{r}}_i$

$$(11)\qquad \mathfrak{p}_i = \operatorname{grad}_{\dot{\mathfrak{r}}_i} T = m_i \dot{\mathfrak{r}}_i$$

и сматрајмо сад живу силу као функцију тог импулса; тада је

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \mathfrak{p}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_i).$$

Из ове једначине непосредно следује

$$(12)\qquad \operatorname{grad}_{\mathfrak{p}_i} T = \frac{1}{m_i} \mathfrak{p}_i = \dot{\mathfrak{r}}_i.$$

Ако искористимо (10), (12) и (11), можемо написати једначине

$$(13)\qquad \dot{\mathfrak{p}}_i = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_i} U, \qquad \dot{\mathfrak{r}}_i = \operatorname{grad}_{\mathfrak{p}_i} T.$$

Уведимо сад функцију

$$H = T - U;$$

тада, узимајући у обзир да T у нашем облику не зависи од $\mathfrak{r}_i$, ни U од $\mathfrak{p}_i$, систем једначина (13) можемо заменити овим

(14) $\dot{\mathfrak{p}}_i = \mathrm{grad}_{\mathfrak{r}_i} H, \qquad \dot{\mathfrak{r}}_i = \mathrm{grad}_{\mathfrak{p}_i} H.$

Ако упоредимо ове једначине са једначинама (7), видимо да оне могу бити сматране као Пфафове једначине. Према (5) Пфафов израз за једначине (14) има облик

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{p}_i \, d\mathfrak{r}_i) - H dt. \tag{15}$$

На основу особине Пфафових једначина, наведене у претходном параграфу под a., можемо тврдити да се једначине кретања нашег материјалног система, ма за које координате, могу добити као Пфафове једначине из Пфафова израза (15) трансформисана на нове координате.

3. Пфафов израз за планетско кретање

Познато је да се проблем кретања двају тела под утицајем Њутнове силе своди на проучавање кретања само једне тачке и то према диференцијалној једначини

$$m \ddot{\mathfrak{R}} = -f m (M+m) \frac{1}{R^3} \mathfrak{R};$$

где су m и M масе тела, f гравитациона константа, $\mathfrak{R}$ вектор положаја покретне тачке у односу на непокретну тачку O, а R, као и увек, интензитет вектора са одговарајућом готском ознаком, у овом случају вектора $\mathfrak{R}$.

Ако уведемо нови вектор $\mathfrak{r}$, према обрасцу

$$\mathfrak{R} = \sqrt[3]{f(M+m)}\, \mathfrak{r}, \tag{16}$$

претходна векторска једначина добија облик

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{1}{r^3} \mathfrak{r}. \tag{17}$$

Извршена смена показује ове вредности димензија различитих величина у новој једначини

$$[\mathfrak{r}] = T^{\frac{2}{3}}, \qquad [\dot{\mathfrak{r}}] = T^{-\frac{1}{3}}, \qquad [\ddot{\mathfrak{r}}] = T^{-\frac{4}{3}},$$

при чему T овде означава време.

Једначина (17) показује да се проучавање кретања сваке планете своди на проучавање једне диференцијалне једначине, чији сви елементи имају временски карактер и која не зависи од масе планете.

За једначину (17) можемо написати ове интеграле:

1. *Интеграл секторске брзине*

$$[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{C} = p_1\,\mathfrak{k} = \text{const.}, \tag{18}$$

где су: $\mathfrak{C}$ произвољни константни вектор интеграције, $\mathfrak{k}$ орт његова сталног правца, p_1 стална скаларна величина са димензијом $[p_1] = T^{\frac{1}{3}}$; угласте заграде означавају векторски производ.

Тај интеграл добива се из (17) векторским множењем чланова те једначине са $\mathfrak{r}$.

2. *Лапласов интеграл*

$$[\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{C}] - \frac{1}{r}\mathfrak{r} = \mathfrak{D} = e\,\mathfrak{i}, \tag{19}$$

где је $\mathfrak{D}$ константни вектор интеграције, но не потпуно произвољни већ управни на вектору $\mathfrak{C}$, јер, после множења једначине (19) скаларно са $\mathfrak{k}$, имамо

$$(\mathfrak{C}[\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{C}]) - \frac{1}{r}(\mathfrak{r}\mathfrak{C}) = 0 = (\mathfrak{D}\mathfrak{C});$$

$\mathfrak{i}$ је орт вектора $\mathfrak{D}$ управна на орту $\mathfrak{P}$ и e скалар бројне (безимене) вредности.

Лапласов интеграл добива се из једначине (17) овако. Помножимо чланове једначине (17) векторски здесна вектором $\mathfrak{C} = [\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}]$; тада ћемо имати

$$[\ddot{\mathfrak{r}}\mathfrak{C}] = -\frac{1}{r^3}[\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}]].$$

После незнатних трансформација имамо

$$\begin{aligned}[\ddot{\mathfrak{r}}\mathfrak{C}] &= -\frac{1}{r^3}\left\{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}) - \dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{r}^2\right\} = \\ &= \frac{1}{r}\dot{\mathfrak{r}} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\mathfrak{r} = \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{r}\mathfrak{r}\right\},\end{aligned}$$

одакле непосредно изводимо тражени интеграл.

3. *Хамилтонов интеграл*

$$\dot{\mathfrak{r}} + \frac{1}{p_1 r}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{k}] = \frac{e}{p_1}\mathfrak{j} \tag{20}$$

где је $\mathfrak{j}$ нови стални орт, нормалан на ортовима $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{i}$.

Хамилтонов интеграл можемо добити из Лапласова интеграла, ако помножимо векторски слева чланове последњег интеграла сталним вектором $\mathfrak{C} = p_1\mathfrak{k}$ и узмемо у обзир да је, према интегралу секторске брзине, $(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{C}) = 0$. Заиста, после множења имамо

$$[\mathfrak{C}[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{C}]] - \frac{1}{r}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}] = [\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}],$$

одакле изводимо

$$p_1^2\,\dot{\mathfrak{r}} - \frac{p_1}{r}[\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}] = p_1 e[\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = p_1 e\,\mathfrak{j},$$

а ова једначина непосредно доводи до једначине (20). Према томе Хамилтонов интеграл можемо сматрати као непосредни закључак двају претходних интеграла — Лапласова интеграла и интеграла секторске брзине.

Ортови $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ сачињавају ортогонални триједар и ми га узимамо са смеровима одговарајућим стварном планетском кретању, тј. оперишемо са десним триједром.

4. *Интеграл живе силе*

$$\dot{\mathfrak{r}}^2 = \frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p_1^2} = \frac{2}{r} - \frac{e'^2}{p_1^2}, \tag{21}$$

где је $e'^2 = 1 - e^2$. Тај интеграл добивамо из Хамилтонова квадрирањем леве и десне стране.

5. *Једначина путање*

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{22}$$

где је $p = p_1^2$ и v угао између вектора $\mathfrak{r}$ и орта $\mathfrak{i}$.

Ову једначину можемо овако извести. Помножимо Хамилтонов интеграл слева векторски са $\mathfrak{r}$, тада имамо

$$[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}] + \frac{1}{p_1 r}[\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{k}]] = \frac{e}{p_1}[\mathfrak{r}\,\mathfrak{j}],$$

одакле, пошто су

$$[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}] = p_1 \mathfrak{k},$$

$$[\mathfrak{r}[\mathfrak{r}\mathfrak{k}]] = \mathfrak{r}(\mathfrak{r}\mathfrak{k}) - r^2\mathfrak{k} = -r^2\mathfrak{k},$$

$$[\mathfrak{r}\mathfrak{j}] = [\mathfrak{r}[\mathfrak{k}\mathfrak{i}]] = \mathfrak{k}(\mathfrak{r}\mathfrak{i}) - (\mathfrak{r}\mathfrak{k})\mathfrak{i} = \mathfrak{k}(\mathfrak{r}\mathfrak{i}) = \mathfrak{k}r\cos\nu,$$

имамо векторску једначину

$$p_1\mathfrak{k} - \frac{1}{p_1} r\mathfrak{k} = \frac{e}{p_1} r\cos\nu . \mathfrak{k}$$

са члановима истог правца. Према томе долазимо до скаларне једначине

$$p_1 - \frac{1}{p_1} r = \frac{e}{p_1} r\cos\nu,$$

која доводи до једначине (22).

6. *Кеплеров интеграл*

$$(23) \qquad u - e\sin u = n(t-\tau),$$

где су: u помоћна променљива везана са углом ν једначином

$$(24) \qquad tg\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, tg\frac{\nu}{2}.$$

Она има познато геометриско тумачење. n је константа са вредношћу

$$(25) \qquad n = \left(\frac{e'}{p_1}\right)^3,$$

а τ произвољна константа интеграције.

Кеплеров интеграл можемо извести овако.

За планетско кретање је $e < 1$; једначини (22) одговара елипса са полуосама

$$a = \frac{p_1^{\,2}}{e'^2} = a_1^{\,2}, \qquad b = \frac{p_1^{\,2}}{e'},$$

где је

$$a_1 = \frac{p_1}{e'}.$$

Узмимо у обзир интеграл секторске брзине

$$[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{C} = p_1\mathfrak{k},$$

и уведимо секторску површину елипсе са врхом у жижи привлачења као вектор $\mathfrak{Q}$ који стоји управно на равни елипсе и чији је интензитет, Q, једнак површини сектора рачуната од вектора положаја до најближег темена елипсе. Према овом услову имамо

$$\mathfrak{Q} = Q\mathfrak{k}.$$

Пошто је $[\mathfrak{r}\dot{\mathfrak{r}}]$ једнако двострукој вредности секторске брзине $\dot{\mathfrak{Q}}$, можемо интеграл секторске брзине написати у облику

$$2\dot{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{C} = p_1 \mathfrak{k},$$

или

$$2\mathfrak{k}\frac{dQ}{dt} = \mathfrak{C} = p_1 \mathfrak{k}.$$

Из ове векторске једначине, која је еквивалентна скаларној једначини

$$2\frac{dQ}{dt} = p_1,$$

непосредно следује векторски интеграл

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2} p_1 (t - \tau)\mathfrak{k},$$

где је τ произвољна константа интеграције. Она има вредност тренутка планетина пролаза кроз перихел. Овом векторском интегралу одговара скаларни интеграл

$$Q = \frac{1}{2} p_1 (t - \tau), \tag{26}$$

који не претставља ништа друго до Кеплерову једначину. Заиста, површину елиптичког сектора можемо израчунати помоћу површине пројекције тог сектора на раван на коју пројекција елипсе даје круг, круг полупречника b. Ако ту површину дела круга означимо са q, имамо

$$q = Q \cdot \frac{b}{a},$$

јер косинус угла између равни елипсе и равни круга износи $b:a$. Како је, с друге стране, површина дела круга једнака разлици површине кружног сектора са централним углом u —

ексцентричном аномалијом — и површине троугла, можемо написати

$$q = \frac{1}{2} b^2 u - \frac{1}{2} b^2 e \sin u = \frac{1}{2} b^2 (u - e \sin u).$$

Ако искористимо добивене резултате, из (26) имамо Кеплерову једначину

$$u - e \sin u = n(t - \tau),$$

где је

$$n = \frac{p_1}{a b} = \left(\frac{e'}{p_1} \right)^3.$$

Нећемо се заустављати на извођењу познате везе (24) између ексцентричне аномалије u и праве аномалије v. Угао $w = n(t - \tau)$ зове се, као што је познато, средња аномалија.

За нас је важно да приметимо да Кеплерову интегралу одговара такође један векторски интеграл, али је правац свих чланова тог интеграла исти, наиме правац сталног вектора $\mathfrak{C}$. У векторском облику Кеплерову интегралу можемо дати облик

$$(n t - u + e \sin u)\, \mathfrak{k} = n \tau\, \mathfrak{k},$$

или

$$\frac{1}{C}(n t - u + e \sin u)\, \mathfrak{C} = \frac{n \tau}{C} \mathfrak{C}.$$

У току претходног излагања уведена су три орта: $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, за чије одређивање су потребне три независне константе, и константни скалари

$$p_1, e, e', p, n, \tau, a, b, a_1,$$

од којих независних може бити само три, јер имамо ове везе између њих:

$$(27) \quad e'^2 + e^2 = 1, \quad p = p_1^2, n = \left(\frac{e'}{p_1} \right)^3, a = \frac{p_1^2}{e'^2}, b = \frac{p_1^2}{e'}, a_1^2 = a.$$

Све су ове константе добро познате са изузетком e', коју ћемо звати *допунски ексцентрицитет.*

7. *Нови векторски интеграл*

Лапласов векторски интеграл са две независне произвољне константе и Кеплеров интеграл у векторској форми са једном произвољном константом можемо спојити у један векторски интеграл са три произвољне скаларне константе. Наиме можемо написати

$$[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{C}] - \frac{1}{r}\,\mathfrak{r} + \frac{1}{C}(n\,t - u + e\sin u)\,\mathfrak{C} = \mathfrak{G},$$

где је $\mathfrak{G}$ константни вектор интеграције, који зависи од три произвољна скалара. Тај је вектор везан са претходним константама векторском једначином

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} + \frac{n\,\tau}{C}\,\mathfrak{C}. \tag{28}$$

Две компоненте вектора $\mathfrak{G}$ управне су једна на другој, пошто је $\mathfrak{D} \perp \mathfrak{C}$. Интензитет сваке је апстрактни број.

Два независна произвољна вектора

$$\mathfrak{C},\ \mathfrak{G}$$

треба сматрати као векторске елементе у проблему двају тела. Помоћу тих вектора кретање проблема потпуно је одређено, јер помоћу тих констаната можемо одредити $\mathfrak{r}$ и $\dot{\mathfrak{r}}$ у функцији времена. У ствари, нека су дата два интеграла

$$[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}] = \mathfrak{C}, \tag{29}$$

$$[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{C}] - \frac{1}{r}\,\mathfrak{r} + \frac{1}{C}(n\,t - u + e\sin u)\,\mathfrak{C} = \mathfrak{G}, \tag{30}$$

где су: $\mathfrak{r}$ — вектор положаја наше покретне течке,

$\dot{\mathfrak{r}}$ — њена брзина,

$$n = \left(\frac{\sqrt{1 - D^2}}{C}\right)^3,$$

при чему је $D = e$ интензитет вектора

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} - \frac{1}{C^2}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{G})\,\mathfrak{C}, \tag{31}$$

u — помоћна променљива одређена једначином

$$(32) \qquad \cos u = \frac{1}{aD}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{D}) + D\,,$$

где је

$$a = \frac{C^2}{1-D^2}\,.$$

Из интеграла (29) следује да $\mathfrak{r}$ и $\dot{\mathfrak{r}}$ стоје управно на вектору $\mathfrak{C}$ и, према томе, из (30), после скаларног множења са $\mathfrak{C}$, имамо издвојени интеграл

$$(33) \qquad (nt - u + e\sin u)\, C = (\mathfrak{G}\,\mathfrak{C})\,,$$

који даје Кеплеров интеграл

$$u - e\sin u = n(t-\tau)\,,$$

са константом

$$n\tau = \frac{1}{C}(\mathfrak{G}\,\mathfrak{C})\,.$$

После замене на основу (32) израза $nt - u + e\sin u$ са $C^{-1}(\mathfrak{G}\,\mathfrak{C})$, из (30) имамо

$$[\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{C}] - \frac{1}{r}\mathfrak{r} = \mathfrak{G} - \frac{1}{C^2}(\mathfrak{G}\,\mathfrak{C})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\,,$$

где је $\mathfrak{D}$ сталан вектор уведен обрасцем (31).

Према томе из (30) имамо два интеграла: Лапласов,

$$(34) \qquad [\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{C}] - \frac{1}{r}\mathfrak{r} = \mathfrak{D}\,,$$

и Кеплеров,

$$(35) \qquad u - e\sin u = n(t-\tau)\,.$$

Три интеграла (29), (34), (35) доводе до познатог решења проблема о кретању наше тачке.

Пре свега приметимо да вектори $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$ одређују један ортогонални тријeдар, чије ћемо ортове означити са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Прво можемо ставити

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{C}\mathfrak{C}$$

и

$$\mathfrak{i} = \frac{1}{D}\mathfrak{D},$$

а за $\mathfrak{j}$ имамо

$$\mathfrak{j} = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = \frac{1}{CD}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}] = \frac{1}{CD}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}].$$

Како је $\mathfrak{r}$ управно на $\mathfrak{C}$, а вектори $\mathfrak{D}$ и $[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]$ леже у равни управној на $\mathfrak{C}$, можемо ставити

$$\mathfrak{r} = \alpha\,\mathfrak{D} + \beta\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}], \tag{36}$$

где су α и β скалари за одређивање.

Ако претходну једначину помножимо скаларно са $\mathfrak{D}$, добићемо

$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{D}) = \alpha\,D^2,$$

одакле, према (32), имамо

$$\alpha = \frac{a}{D}(\cos u - D) = \frac{C^2}{D(1-D^2)}(\cos u - D).$$

На сличан начин, после скаларног множења једначине (36) са $[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]$, имамо

$$(\mathfrak{r}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]) = C\,D\,(\mathfrak{r}\,\mathfrak{j}) = \beta\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]^2 = \beta\,C^2 D^2,$$

одакле је

$$\beta = \frac{1}{CD}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{j});$$

а како је

$$(\mathfrak{r}\,\mathfrak{j}) = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

јер је

$$r\sin v = b\sin u = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

дефинитивно изводимо

$$\beta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{C\,D}\sin u = \frac{C}{D\sqrt{1-D^2}}\sin u.$$

Према томе из (36) добијамо

$$(37)\quad \mathfrak{r} = \frac{C}{D(1-D^2)}\left\{C(\cos u - D)\mathfrak{D} + \sqrt{1-D^2}\sin u\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]\right\}$$

или

$$(37')\quad \mathfrak{r} = B\left\{B\,D(\cos u - D)\mathfrak{D} + \sin u\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]\right\},$$

где је

$$B = \frac{C}{D}\,\frac{1}{\sqrt{1-D^2}}.$$

Ако диференцирамо ову једначину и узмемо у обзир да је

$$\frac{du}{dt} = \frac{n}{1 - D\cos u} = \frac{1}{a_1 r},$$

онда се брзина изражава овако

$$(38)\quad \dot{\mathfrak{r}} = \frac{\sqrt{1-D^2}}{C^2 D}\cdot\frac{1}{1-D\cos u}\cdot$$
$$\cdot\left\{-C\sin u.\,\mathfrak{D} + \sqrt{1-D^2}.\cos u.\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]\right\}$$

или

$$(38')\quad \dot{\mathfrak{r}} = \frac{1}{B^2 D^3}\cdot\frac{1}{1-D\cos u}\cdot\left\{-B\,D\sin u.\,\mathfrak{D} + \cos u.\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]\right\}.$$

Ако узмемо у обзир да из једначине путање,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos v),$$

на основу везе (32), следује

$$\frac{1}{1-e\cos u} = \frac{a}{r} = \frac{C^2}{1-D^2}\cdot\frac{1}{r},$$

можемо образац за брзину $\dot{\mathfrak{r}}$ и овако још претставити

$$(39)\quad \dot{\mathfrak{r}} = \frac{1}{D\sqrt{1-D^2}}\cdot\frac{1}{r}\left\{-C\sin u\,\mathfrak{D} + \sqrt{1-D^2}.\cos u\,[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\right\},$$

или

$$(39')\quad \dot{\mathfrak{r}} = \frac{1}{D}\cdot\frac{1}{r}\left(-B\,D\sin u.\,\mathfrak{D} + \cos u.\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}]\right).$$

Саставимо сад Пфафов израз за кретање наше тачке.

Пошто се у нашем случају жива сила T одређује из једначине

$$2T = \dot{\mathfrak{r}}^2 = (\dot{\mathfrak{r}}\,\dot{\mathfrak{r}}),$$

за импулс имамо

$$\mathfrak{p} = \operatorname{grad}_{\dot{\mathfrak{r}}} T = \dot{\mathfrak{r}}$$

и, према томе, из (15) добијамо овај Пфафов израз нашег проблема

$$\Phi = (\dot{\mathfrak{r}}\, d\mathfrak{r}) - \left(\frac{1}{2}\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r}\right) dt, \tag{39}$$

јер је

$$H = T - U = \frac{1}{2}\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r},$$

где је $U = \frac{1}{r}$ функција силе, која дејствује на тачку.

Израз (39) садржи три промењиве $\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}, t$; за њих имамо ове Пфафове једначине

$$d\dot{\mathfrak{r}} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} \Phi = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} \frac{1}{r} dt = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3} dt, \tag{40}$$

$$0 = \operatorname{grad}_{\dot{\mathfrak{r}}} \Phi = d\mathfrak{r} - \dot{\mathfrak{r}}\, dt, \tag{41}$$

$$-d\left(\frac{1}{2}\dot{\mathfrak{r}}^2 - \frac{1}{r}\right) = \operatorname{grad}_t \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{42}$$

Једначина (40) даје диференцијалну једначину кретања у облику (17); једначина (41) показује везу између $\mathfrak{r}$ и $\dot{\mathfrak{r}}$ и, најзад, једначина (42) претставља непосредни закључак из претходних диференцијалних једначина, јер после диференцирања из (42) изводимо

$$(\dot{\mathfrak{r}}\, d\dot{\mathfrak{r}}) + \frac{1}{r^2} dr = (\dot{\mathfrak{r}}\, d\dot{\mathfrak{r}}) + \frac{1}{r^3}(\dot{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{r})\, dt = 0,$$

а то је једначина (40) скаларно помножена са $\dot{\mathfrak{r}}$.

Лако је видети да изведени интеграли диференцијалне једначине (17) доводе Пфафов израз (39) на тотални диференцијал и тиме се још једанпут потврђује да су они у ствари интеграли.

Заиста, пошто $\mathfrak{r}$ зависи само од једне променљиве u, а ова само од времена, можемо ставити

$$d\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{r}}\, dt.$$

после чега имамо

$$\Phi = \left(\frac{1}{2} \dot{\mathfrak{r}}^2 + \frac{1}{r} \right) dt .$$

Како је из интеграла живе силе (21)

$$\frac{1}{2} \dot{\mathfrak{r}}^2 = \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{1}{a_1^2},$$

Пфафов израз добија облик

$$\Phi = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{2 a_1^2} \right) dt .$$

Пошто је

$$\frac{1}{r} dt = a_1 \, du ,$$

дефинитивно имамо

$$\Phi = d \left(2 a_1 u - \frac{1}{2 a_1^2} t \right),$$

а то је тотални диференцијал, чије су Пфафове једначине идентитети.

4. Пфафов израз за поремећено планетско кретање

Ако на тачку која се креће под утицајем Њутнове силе са функцијом силе U дејствује још која друга сила, са функцијом силе R, ова сила ремети елиптичко планетско кретање тачке. Функција R зове се тада *функција поремећаја*. У новом, поремећеном кретању, из сваког положаја са вектором положаја $\mathfrak{r}$ тачка добива елементарно померање $d\mathfrak{r}$, које можемо раставити у две компоненте — једну, $d_c \mathfrak{r}$, кад сматрамо елементе елиптичког кретања сталним величинама, и другу, $\delta \mathfrak{r}$, која долази услед промене елиптичких елемената; према томе ставимо

$$d \mathfrak{r} = d_c \mathfrak{r} + \delta \mathfrak{r} .$$

Исто тако, брзину $\dot{\mathfrak{r}}$ поремећеног кретања можемо сматрати као збир брзине $\dot{\mathfrak{r}}_c$ кретања са константним планетским елементима и додатка $\delta \dot{\mathfrak{r}}_c$ који долази услед промене тих елемената. На тај начин за брзину можемо написати

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_c + \delta \dot{\mathfrak{r}}_c .$$

Пфафов израз за поремећено кретање

$$(\dot{\mathrm{r}}, d\,\mathrm{r}) - H_1\,dt,$$

где је

$$H_1 = T - (U + R) = H - R,$$

можемо претставити

$$(\dot{\mathrm{r}}_c\, d_c\,\mathrm{r}) - H\,dt + (\delta\,\dot{\mathrm{r}}_c\,, d_c\,\mathrm{r}) + (\dot{\mathrm{r}}, \delta\,\mathrm{r}) + R\,dt\,.$$

Ако сад сматрамо за нове променљиве константе планетског кретања, прва два члана у претходном изразу морају претстављати тотални диференцијал и, према томе, могу бити изостављена из Пфафова израза.

Трећи члан треба занемарити, пошто је он другога реда у односу према осталим члановима, који су првога реда.

После тога Пфафов израз за поремећено кретање изгледа

$$\Phi = (\dot{\mathrm{r}}, \delta\,\mathrm{r}) + R\,dt\,. \tag{43}$$

Ознака δ, место d, код r означава да промена стоји у вези са променом елемената планетског кретања.

Израчунајмо сад израз (43) за поремећено планетско кретање помоћу оних променљивих, које су фигурисале као константе у познатим интегралима.

Из једначина (37) и (39) можемо написати

$$\mathrm{r} = M\,\mathrm{i} + N\,\mathrm{j}\,, \tag{44}$$

$$\dot{\mathrm{r}} = K\,\mathrm{i} + L\,\mathrm{j}\,, \tag{45}$$

где су

$$M = \frac{C^2}{1 - D^2}(\cos u - D) = a_1{}^2(\cos u - e),$$

$$N = \frac{C^2}{\sqrt{1 - D^2}}\sin u = a_1{}^2\sqrt{1 - e^2}\sin u,$$

и

$$K = \frac{\sqrt{1 - D^2}.\,\sin u}{C(1 - D\cos u)} = \frac{\sin u}{a_1(1 - e\cos u)},$$

$$L = \frac{(1 - D^2)\cos u}{C(1 - D\cos u)} = \frac{\sqrt{1 - D^2}\cos u}{a_1(1 - e\cos u)}.$$

Како је

$$\delta\,\mathrm{r} = M\,\delta\,\mathrm{i} + N\,\delta\,\mathrm{j} + \delta\,M.\,\mathrm{i} + \delta\,N.\,\mathrm{j}_1,$$

можемо извести

$$(\dot{\mathrm{r}}, \delta \mathrm{r}) = K N(\mathrm{i}, \delta \mathrm{j}) + L M(\mathrm{j}\,\delta \mathrm{i}) + K \delta M + L \delta N.$$

Пошто je $(\mathrm{i}, \mathrm{j}) = 0$ и према томе je $(\mathrm{i}, \delta \mathrm{j}) = -(\mathrm{j}, \delta \mathrm{i})$, долазимо до израза

$$(\dot{\mathrm{r}}, \delta \mathrm{r}) = (L M - K N)(\mathrm{j}, \delta \mathrm{i}) + K \delta M + L \delta N. \tag{46}$$

Помоћу вредности потега

$$r = a_1^2 (1 - e \cos u),$$

имамо пре свега

$$L M - K N = a_1 k = p_1, \tag{47}$$

где смо, ради упрошћавања слога, ставили $\sqrt{1 - e^2} = e' = k$.

Како je, даље,

$$\delta M = 2 a_1 (\cos u - \sqrt{1 - \kappa^2})\, \delta a_1 - a_1^2 \sin u\; \delta u + \frac{a_1^2 \kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \delta \kappa,$$

$$\delta N = 2 a_1 \kappa \sin u .\, \delta a_1 + a_1^2 \kappa \cos u\; \delta u + a_1^2 \sin u\, \delta \kappa,$$

онда за два последња члана у једначини (46) имамо

$$K \delta M + L \delta N = 2 \sin u .\, \sqrt{1 - \kappa^2} .\, \delta a_1 + a_1 (1 + \sqrt{1 - \kappa^2} \cos u)\, \delta u - \frac{a_1 \kappa \sin u .}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \delta \kappa =$$

$$= \delta (a_1 \sin u .\, \sqrt{1 - \kappa^2}) + a_1\, \delta u + \sin u .\, \sqrt{1 - \kappa^2} .\, \delta a_1 =$$

$$= \delta (a_1 u + a_1 \sin u \sqrt{1 - \kappa^2}) + (-u + \sin u .\, \sqrt{1 - \kappa^2})\, \delta a_1 =$$

$$= \delta (a_1 u + a_1 \sin u \sqrt{1 - \kappa^2}) - (-n \tau + u - \sqrt{1 - \kappa^2} \sin u)\, \delta a_1 + n \tau\, \delta a_1 .$$

У овом изразу имамо три члана. Први се изоставља као тотални диференцијал. Други члан има коефицијент који, на основу Кеплерова интеграла, има вредност nt; а пошто наша расуђивања морају да важе и за $t = 0$, можемо, према томе, изоставити и други члан. На тај начин имамо

$$K \delta M + L \delta N \approx n \tau\, \delta a_1 \approx a .\, \delta (-n \tau) \tag{48}$$

где смо знаком $\approx$ значили једнаку важност облика у односу на формирање Пфафових једначина.

Ако сад искористимо резултате (47) и (48), онда према (46) из (43) имамо овај врло важни резултат за теорију планетских поремећаја

$$\boxed{\Phi = p_1 (\mathfrak{j}, \delta \mathfrak{i}) + a_1 \delta(-n\tau) + R\,dt} \tag{49}$$

Важно је обратити пажњу, да овај Пфафов израз зависи од три скаларна елемента

$$p_1, \quad a_1, \quad -n\tau \tag{50}$$

и од векторских елемената, који улазе у прозвод $(\mathfrak{j}, \delta\mathfrak{i})$. Ако место тих векторских елемената узмемо ма која три независна скалара, који одређују положај триједра $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ у односу на непокретни простор, онда заједно за величинама (50) имамо потпуни систем скалара за одређивање поремећеног кретања.

5. Трансформација Пфафова израза на векторске планетске елементе

Поставимо сад себи задатак да трансформишемо Пфафов израз

$$\Phi = p_1 (\mathfrak{j}, \delta \mathfrak{i}) + a_1 \delta(-n\tau) + R\,dt \tag{49}$$

за планетско кретање на векторске елементе, тј. на векторе $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$.

Како је

$$p_1 = C, \quad \mathfrak{j} = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}], \quad a_1 = C(1-D^2)^{-1/2},$$

$$n\tau = C^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}),$$

где је

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} + C^{-2}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}),$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} - C^{-2}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}),$$

$$D^2 = \mathfrak{G}^2 - C^{-2}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}),$$

из (49) имамо

$$\Phi = C\big([\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}], \delta\mathfrak{i}\big) + C(1-D^2)^{-1/2}\,\delta\big(-C^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})\big) + R\,dt. \tag{51}$$

Пошто је

$$\mathfrak{i} = D^{-1}\mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{k} = C^{-1}\mathfrak{C}$$

и

$$\delta\mathfrak{i} = D^{-1}\delta\mathfrak{D} - D^{-2}\mathfrak{D}\,\delta D =$$

$$= D^{-1}\big(\delta\mathfrak{G} - C^{-2}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})\,\delta\mathfrak{C} - \{\cdots\}\mathfrak{C}\big) - D^{-2}\mathfrak{D}\,\delta D,$$

где смо тачкама означили чланове који у идућем рачуну испадају, и при томе

$$\delta C = C^{-1} (\mathfrak{C}, \delta \mathfrak{C}),$$

из (51) изводимо

$$\Phi = D^{-1} \left(\left[\mathfrak{C} \mathfrak{D} \right], D^{-1} \left\{ \delta \mathfrak{G} - C^{-2} (\mathfrak{C} \mathfrak{G}) \delta \mathfrak{C} \right\} \right) +$$
$$+ C (1 - D^2)^{-1/2} \left\{ C^{-3} (\mathfrak{C} \mathfrak{G}) (\mathfrak{C}, \delta \mathfrak{C}) - C^{-1} \left[(\mathfrak{G}, \delta \mathfrak{C}) + (\mathfrak{C}, \delta \mathfrak{G}) \right] \right\} + R \, dt.$$

Ако извршимо означене операције и уредимо чланове, форму Φ можемо коначно написати

$$\Phi = (\mathfrak{M}, \delta \mathfrak{C}) + (\mathfrak{N}, \delta \mathfrak{G}) + R \, dt, \tag{52}$$

где су

$$\mathfrak{M} = m_1 \mathfrak{C} + m_2 \mathfrak{G} + m_3 \left[\mathfrak{C}, \mathfrak{G} \right], \tag{53}$$

$$\mathfrak{N} = m_2 \mathfrak{C} + n_3 \left[\mathfrak{C}, \mathfrak{G} \right] \tag{54}$$

са овим вредностима коефицијената:

$$m_1 = C^{-2} (1 - D^2)^{-1/2} (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}), \tag{55}$$

$$m_2 = - (1 - D^2)^{-1/2}, \tag{56}$$

$$m_3 = - C^{-2} D^{-2} (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}), \tag{57}$$

$$n_3 = D^{-2}. \tag{58}$$

Пфафова форма (52) јавља се као основна у проучавању поремећеног кретања помоћу векторских планетских елемената.

6. Векторске диференцијалне једначине планетских поремећаја

Образац (52) је врло погодан за извођење Пфафових диференцијалних једначина у векторском облику и то помоћу правила (II f). На основу ове формуле за два вектора $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$ формирајмо Пфафове једначине

$$d \mathfrak{M} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} \Phi, \tag{59}$$

$$d \mathfrak{N} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} \Phi, \tag{60}$$

где су са десне стране делимични градијенти функције Φ по вектору $\mathfrak{C}$ односно $\mathfrak{G}$.

Ако искористимо изразе (53) и (54), из (59) и (60) долазимо до диференцијалних једначина

(61)

$$m_1 \dot{\mathfrak{C}} + m_2 \dot{\mathfrak{G}} + m_3 [\dot{\mathfrak{C}} \mathfrak{G}] + m_3 [\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}] + m'_1 \mathfrak{C} + m'_2 \mathfrak{G} + m'_3 [\mathfrak{C} \mathfrak{G}] =$$
$$= \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{M} \dot{\mathfrak{C}}) + \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{N} \dot{\mathfrak{G}}) + \mathfrak{R}_1 ,$$

(62) $$m_2 \dot{\mathfrak{C}} + n_3 [\dot{\mathfrak{C}} \mathfrak{G}] + n_3 [\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}] + m'_2 \mathfrak{C} + n'_3 [\mathfrak{C} \mathfrak{G}] =$$
$$= \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{M} \dot{\mathfrak{C}}) + \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{N} \dot{\mathfrak{G}}) + \mathfrak{R}_2 ,$$

где црга означава извод по времену, а $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ кратко означавају делимичне градијенте функције поремећаја, тј.

$$\mathfrak{R}_1 = \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} R ,$$
$$\mathfrak{R}_2 = \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} R .$$

Извршимо сад радње означене на десним странама једначина (61) и (62) и имаћемо

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{M} \dot{\mathfrak{C}}) + \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{N} \dot{\mathfrak{G}}) + \mathfrak{R}_1 =$$
$$= \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} \{ m_1 (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{C}}) + m_2 (\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{C}}) + m_3 ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{C}}) \} + \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} \{ m_2 (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}) +$$
$$+ n_3 ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{G}}) \} + \mathfrak{R}_1 =$$
$$= m_1 \dot{\mathfrak{C}} + m_3 [\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{C}}] + m_2 \dot{\mathfrak{G}} + n_3 [\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{G}}] + (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{C}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} m_1 +$$
$$+ (\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{C}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} m_2 + ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{C}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} m_3 + (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} m_2 +$$
$$+ ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{G}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} n_3 + \mathfrak{R}_1$$

и

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{M} \dot{\mathfrak{C}}) + \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} (\mathfrak{N} \dot{\mathfrak{G}}) + \mathfrak{R}_2 =$$
$$= \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} \{ m_1 (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{C}}) + m_2 (\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{C}}) + m_3 ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{C}}) \} + \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} \{ m_2 (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}) +$$
$$+ n_3 ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{G}}) \} + \mathfrak{R}_2 =$$
$$= m_2 \dot{\mathfrak{C}} - m_3 [\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{C}}] + n_3 [\dot{\mathfrak{G}} \mathfrak{C}] + (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{C}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} m_1 + (\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{C}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} m_2 +$$
$$+ ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{C}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} m_3 + (\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} m_2 + ([\mathfrak{C} \mathfrak{G}] \dot{\mathfrak{G}}) \operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} n_3 + \mathfrak{R}_2 .$$

Добивене резултате искористимо за једначине (61) и (62) и напишимо их у облику

$$m_3 \{ 2 [\dot{\mathfrak{C}} \mathfrak{G}] + [\mathfrak{C} \dot{\mathfrak{G}}] \} - n_3 [\mathfrak{G} \dot{\mathfrak{G}}] + m'_1 \mathfrak{C} + m'_2 \mathfrak{G} + m'_3 [\mathfrak{C} \mathfrak{G}] =$$

(63)

$$= (\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{C}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, m_1 + (\mathfrak{G}\dot{\mathfrak{C}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, m_2 + ([\mathfrak{C}\mathfrak{G}]\,\dot{\mathfrak{C}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, m_3 + \\ + (\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{G}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, m_2 + ([\mathfrak{C}\mathfrak{G}]\dot{\mathfrak{G}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, n_3 + \mathfrak{R}_1,$$

(64)

$$m_3[\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{C}}] + n_3\{2[\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{G}}] + [\dot{\mathfrak{C}}\mathfrak{G}]\} + m'_2\mathfrak{C} + n'_3[\mathfrak{C}\mathfrak{G}] = \\ = (\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{C}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, m_1 + (\mathfrak{G}\dot{\mathfrak{C}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, m_2 + ([\mathfrak{C}\mathfrak{G}]\dot{\mathfrak{C}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, m_3 + \\ + (\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{G}})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, m_2 + ([\mathfrak{C}\mathfrak{G}]\mathfrak{G})\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, n_3 + \mathfrak{R}_2.$$

Написане векторске диференцијалне једначине служе за одређивање векторских извода $\dot{\mathfrak{C}}$ и $\dot{\mathfrak{G}}$ у функцији самих променљивих $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$ и делимичних градијената $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$.

7. Векторске диференцијалне једначине планетских поремећаја у решеном облику

Решимо сад систем једначина (63) и (64) у односу на $\dot{\mathfrak{C}}$ и $\dot{\mathfrak{G}}$.

За добијање извода $\dot{\mathfrak{C}}$ помножимо једначину (63) векторски слева вектором $\mathfrak{C}$, једначину (64) исто тако вектором $\mathfrak{G}$ и резултате саберимо.

Пре свега показаћемо да за сваки коефицијент m и n (m_1, m_2, m_3, n_3), који су функције само C, D и $(\mathfrak{C}, \mathfrak{G})$, имамо идентитете

$$[\mathfrak{C}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, m] + [\mathfrak{G}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, m] \equiv 0. \tag{65}$$

У ствари, како је

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, m = \frac{\partial m}{\partial C}\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, C + \frac{\partial m}{\partial D}\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, D + \frac{\partial m}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G}),$$

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, m = \frac{\partial m}{\partial C}\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, C + \frac{\partial m}{\partial D}\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, D + \frac{\partial m}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G}),$$

вредност леве стране резултата сабирања зависи од збирова

$$[\mathfrak{C}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, C] + [\mathfrak{G}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, C],$$
$$[\mathfrak{C}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\, D] + [\mathfrak{G}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\, D],$$
$$[\mathfrak{C}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{G})] + [\mathfrak{G}, \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{G})].$$

Први збир једнак је нули, пошто су

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} C = C^{-1}\,\mathfrak{C},$$

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} C = 0\,.$$

За други збир узимамо у обзир вредности

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} D = -C^{-2}\,D^{-1}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{G})\,\mathfrak{D},$$

$$\operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} D = D^{-1}\,\mathfrak{D}$$

и према томе је

$$\left[\mathfrak{C},\operatorname{grad}_{\mathfrak{C}} D\right] + \left[\mathfrak{G},\operatorname{grad}_{\mathfrak{G}} D\right] = -C^{-2}D^{-1}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\left[\mathfrak{C},\mathfrak{D}\right] + D^{-1}\left[\mathfrak{G},\mathfrak{D}\right] =$$

$$= -C^{-2}\,D^{-1}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right] - C^{-2}\,D^{-1}\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right] \equiv 0\,.$$

Најзад, за трећи збир лако добивамо

$$\left[\mathfrak{C}\operatorname{grad}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\right] + \left[\mathfrak{G},\operatorname{grad}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\right] =$$

$$= \left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right] + \left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right] \equiv 0\,.$$

Пошто смо потврдили истинитост идентитета (65), после наведеног сабирања имамо једначину

$$\text{(66)} \qquad m_3\{2\left[\mathfrak{C}\left[\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{G}\right]\right] + \left[\mathfrak{C}\left[\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}}\right]\right] + \left[\mathfrak{G}\left[\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}}\right]\right]\} +$$

$$+ n_3\{2\left[\mathfrak{G}\left[\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}}\right]\right] + \left[\mathfrak{G}\left[\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{G}\right]\right] - \left[\mathfrak{C}\left[\mathfrak{G}\dot{\mathfrak{G}}\right]\right]\} + m'_3\left[\mathfrak{C}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right] +$$

$$+ n'_3\left[\mathfrak{G}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right] = \left[\mathfrak{C},\mathfrak{R}_1\right] + \left[\mathfrak{G},\mathfrak{R}_2\right].$$

Покажимо сад да се лева страна ове једначине своди само на $\dot{\mathfrak{C}}$.

У ту сврху издвојимо прво чланове са $\dot{\mathfrak{C}}$, затим чланове са $\dot{\mathfrak{G}}$ и најзад све остале чланове. Ако при томе развијемо троструке векторске производе, можемо написати

$$\dot{\mathfrak{C}}\,(m_3(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) + n_3\,\mathfrak{G}^2) +$$

$$+ \dot{\mathfrak{G}}\,(m_3\,C^2 + n_3\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G})) +$$

$$+ m_3\{-2\,\mathfrak{G}\,(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}}) + \mathfrak{C}\,(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}}) + \mathfrak{C}\,(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}})\} +$$

$$+ n_3\{\;2\,\mathfrak{C}\,(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}}) - \mathfrak{G}\,(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}}) - \mathfrak{G}\,(\dot{\mathfrak{G}},\mathfrak{C})\} + m'_3\{\mathfrak{C}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}\,C^2\} +$$

$$+ n'_3\{\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{G}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\} = \left[\mathfrak{C},\mathfrak{R}_1\right] + \left[\mathfrak{G},\mathfrak{R}_2\right].$$

Није тешко показати да коефицијент код $\dot{\mathfrak{C}}$ има вредност јединице. Заиста, ако искористимо (57) и (58), налазимо

$$(67) \qquad m_3(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) + n_3\mathfrak{G}^2 = -C^{-2}D^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})^2 + \\ + D^{-2}(D^2 + C^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})^2) \equiv 1\,.$$

За коефицијент код $\dot{\mathfrak{G}}$ имамо идентично нулу после ових израчунавања:

$$(68) \qquad m_3 C^2 + n_3(\mathfrak{G},\mathfrak{C}) = -D^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) + D^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) \equiv 0\,.$$

Најзад покажимо да је збир свих осталих чланова са леве стране једначине (66) идентичан нули. Како овај збир изгледа

$$\mathfrak{C}\left\{m_3\left[(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}}) + (\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}})\right] + 2n_3(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}}) + m_3'(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) + n_3'\mathfrak{G}^2\right\} + \\ + \mathfrak{G}\left\{-2m_3(\mathfrak{C}\dot{\mathfrak{C}}) - n_3(\mathfrak{G},\mathfrak{C})' - m_3' C^2 - n_3'(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\right\}$$

видимо да коефицијент код $\mathfrak{C}$ може бити претстављен у облику

$$\frac{d}{dt}\left\{m_3(\mathfrak{C},\mathfrak{G}) + n_3\mathfrak{G}^2\right\},$$

а то, на основу (67), даје

$$\frac{d}{dt}1 \equiv 0.$$

Коефицијент код $\mathfrak{G}$ можемо трансформисати овако

$$-\frac{d}{dt}\left\{m_3 C^2 - n_3(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\right\}$$

и, на основу (68), добијамо

$$-\frac{d}{dt}0 \equiv 0\,.$$

На тај начин, пошто смо показали да је лева страна једначине (66) заиста једнака изводу $\dot{\mathfrak{C}}$, можемо ту једначину дефинитивно написати

$$(69) \qquad \dot{\mathfrak{C}} = \left[\mathfrak{C},\mathfrak{R}_1\right] + \left[\mathfrak{G},\mathfrak{R}_2\right].$$

За одређивање извода $\dot{\mathfrak{G}}$ из једначина (63) и (64) помножимо поново векторски слева чланове једначине (63) вектором $\mathfrak{G}$, чланове једначине (64) вектором $\mathfrak{F}$, где је

$$\mathfrak{F} = C^{-2}(1-D^2)\,\mathfrak{C} + C^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\,\mathfrak{G} - C^{-2}D^{-2}(1-D^2)^{3/2}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]$$

и резултате саберимо. После ових операција добићемо

$$\begin{aligned} & m_3\{2\,[\mathfrak{G}\,[\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{G}]] + [\mathfrak{G}\,[\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}}]] + [\mathfrak{F}\,[\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}}]]\} + n_3\{2\,[\mathfrak{F}\,[\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}}]] + \\ & + [\mathfrak{F}\,[\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{G}]] + [\mathfrak{G}\,[\dot{\mathfrak{G}},\mathfrak{G}]]\} + m_1'\,[\mathfrak{G},\mathfrak{C}] + m_2'\,[\mathfrak{F},\mathfrak{C}] + \\ & + m_3'\,[\mathfrak{G}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]] + n_3'\,[\mathfrak{F}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]] = [\mathfrak{G},\mathfrak{R}_1] + [\mathfrak{F},\mathfrak{R}_2] + \\ & + (\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\{[\mathfrak{G}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\,m_1] + [\mathfrak{F}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\,m_1]\} + (\mathfrak{G},\mathfrak{C})'\,\{[\mathfrak{G}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\,m_2] + \\ & + [\mathfrak{F}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\,m_2]\} + ([\mathfrak{C},\mathfrak{G}]\,\dot{\mathfrak{C}})\,\{[\mathfrak{G}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\,m_3] + [\mathfrak{F}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\,m_3]\} + \\ & + ([\mathfrak{C},\mathfrak{G}]\,\dot{\mathfrak{G}})\,\{[\mathfrak{G}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{C}}\,n_3] + [\mathfrak{F}\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\,n_3]\}. \end{aligned}$$

Ако

1. развијемо троструке векторске производе,
2. при диференцирању сваког m и n према обрасцу

$$m' = \frac{\partial m}{\partial C}\,C' + \frac{\partial m}{\partial D}\,D' + \frac{\partial m}{\partial(\mathfrak{C}\,\mathfrak{G})}\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{G})'$$

искористимо резултате

$$C' = C^{-1}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}}),$$

$$D' = D^{-1}(\mathfrak{D},\dot{\mathfrak{D}}) = D^{-1}\{(\dot{\mathfrak{G}},\dot{\mathfrak{G}}) - C^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})(\mathfrak{C},\mathfrak{G})' + C^{-4}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})^2(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\},$$

$$(\mathfrak{C},\mathfrak{G})' = (\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{G}) + (\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}})$$

и 3. при израчунавању сваког градијента искористимо резултате на странама 108, 109 онда претходну једначину можемо заменити једначином

$$\begin{aligned} & m_3\{2\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{G}^2 - 2\mathfrak{G}\,(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}}) + \mathfrak{C}\,(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}}) - \dot{\mathfrak{G}}\,(\mathfrak{G},\mathfrak{C}) + \mathfrak{C}\,(\mathfrak{F},\dot{\mathfrak{C}}) - \dot{\mathfrak{C}}\,(\mathfrak{F},\mathfrak{C})\} + \\ & + n_3\{2\mathfrak{C}\,(\mathfrak{F},\dot{\mathfrak{G}}) - 2\mathfrak{G}\,(\mathfrak{F},\mathfrak{C}) + \dot{\mathfrak{C}}\,(\mathfrak{F},\mathfrak{G}) - \mathfrak{G}\,(\mathfrak{F},\dot{\mathfrak{C}}) + \dot{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{G}\,(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}})\} + \\ & + \frac{\partial m_3}{\partial C}\,C^{-1}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})[\mathfrak{G}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]] + D^{-1}\{\frac{\partial m_1}{\partial D}\,[\mathfrak{G},\mathfrak{C}] + \frac{\partial m_2}{\partial D}\,[\mathfrak{F},\mathfrak{C}] + \\ & + \frac{\partial m_3}{\partial D}\,[\mathfrak{G}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]] + \frac{\partial n_3}{\partial D}\,[\mathfrak{F}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]]\}\,(\mathfrak{D}\,\dot{\mathfrak{D}}) + \{\frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}\,[\mathfrak{G},\mathfrak{C}] + \\ & + \frac{\partial m_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}\,[\mathfrak{G}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]]\}\{(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}}) + (\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}})\} = [\mathfrak{G},\mathfrak{R}_1] + [\mathfrak{F},\mathfrak{R}_2] + \\ & + (\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\,\frac{\partial m_1}{\partial D}\{-C^{-2}D^{-1}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})[\mathfrak{G},\mathfrak{D}] + D^{-1}\,[\mathfrak{F},\mathfrak{D}]\} + \end{aligned}$$

$$+(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}[\mathfrak{F},\mathfrak{C}]+\frac{\partial m_2}{\partial D}\{-C^{-2}D^{-1}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})[\mathfrak{G},\mathfrak{D}]+$$

$$+D^{-1}[\mathfrak{F},\mathfrak{D}]\}\{(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}})+(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}})\}+([\mathfrak{C},\mathfrak{G}]\dot{\mathfrak{C}})\{C^{-1}\frac{\partial m_3}{\partial C}[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]+$$

$$+\frac{\partial m_3}{\partial D}[-C^{-2}D^{-1}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})[\mathfrak{G},\mathfrak{D}]+D^{-1}[\mathfrak{F},\mathfrak{D}]]+\frac{\partial m_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}[\mathfrak{F},\mathfrak{C}]\}+$$

$$+([\mathfrak{C},\mathfrak{G}]\dot{\mathfrak{G}})\frac{\partial n_3}{\partial D}\{-C^{-2}D^{-1}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})[\mathfrak{G},\mathfrak{D}]+D^{-1}[\mathfrak{F},\mathfrak{D}]\}.$$

Издвојимо сад чланове са $\dot{\mathfrak{C}}$, $\dot{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$, $[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]$, а засебно чланове са $(\dot{\mathfrak{C}}[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]$ и $(\dot{\mathfrak{G}}[\mathfrak{C},\mathfrak{G}])$. Тада иста једначина постаје

$$\dot{\mathfrak{C}}\{2m_3\mathfrak{G}^2-m_3(\mathfrak{F},\mathfrak{C})+n_3(\mathfrak{F},\mathfrak{G})\}+\dot{\mathfrak{G}}\{-m_3(\mathfrak{G},\mathfrak{C})-$$

$$-2n_3(\mathfrak{F},\mathfrak{C})+n_3\mathfrak{G}^2\}+\mathfrak{C}\{m_3(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}})+2n_3(\mathfrak{F},\dot{\mathfrak{G}})+m_3(\mathfrak{F},\dot{\mathfrak{C}})+$$

$$+C^{-1}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\frac{\partial m_3}{\partial C}\mathfrak{G}^2+D^{-1}(\mathfrak{D},\dot{\mathfrak{D}})[C^{-2}D^{-2}(1-D^2)^{3/2}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{G})\frac{\partial m_2}{\partial D}+$$

$$+C^{-2}(1-D^2+\mathfrak{G}^2)(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\frac{\partial n_3}{\partial D}+\mathfrak{G}^2\frac{\partial m_3}{\partial D}]+[\mathfrak{G}^2\frac{\partial m_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}-$$

$$-C^{-2}D^{-1}(1-D^2)^{3/2}\frac{\partial m_2}{\partial D}](\mathfrak{C},\mathfrak{G})'-$$

$$-C^2D^{-1}(1-D^2)^{3/2}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})[\frac{\partial m_1}{\partial D}+D^{-1}\frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}]\}+$$

$$+\mathfrak{G}\{-2m_3(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}})-n_3(\mathfrak{F},\dot{\mathfrak{C}})-n_3(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}})-C^{-1}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\frac{\partial m_3}{\partial C}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})+$$

$$-D^{-1}(\mathfrak{D},\dot{\mathfrak{D}})[D^{-2}(1-D^2)^{3/2}\frac{\partial m_2}{\partial D}+(1-D^2+C^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})^2)\frac{\partial n_3}{\partial D}+$$

$$+(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\frac{\partial m_3}{\partial D}]-(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\frac{\partial m_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})'+D^{-2}(1-D^2)^{3/2}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}\}+$$

$$+[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]\{D^{-1}(\mathfrak{D},\dot{\mathfrak{D}})[\frac{\partial m_1}{\partial D}+C^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\frac{\partial m_2}{\partial D}]+[\frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}+$$

$$+C^{-2}D^{-1}(1-D^2)\frac{\partial m_2}{\partial D}](\mathfrak{C},\mathfrak{G})'+C^{-2}(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})[D^{-1}(1-D^2)\frac{\partial m_1}{\partial D}-$$

$$-(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}]\}+(\dot{\mathfrak{C}}[\mathfrak{C},\mathfrak{G}])\{C^{-2}D^{-1}(1-D^2)^{3/2}\frac{\partial m_3}{\partial D}\mathfrak{C}-$$

$$-C^{-2}D^{-2}\left(1-D^2\right)^{3/2}\left(C^2\mathfrak{G}-\mathfrak{C}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\right)+[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]\Big[C^{-1}\frac{\partial m_3}{\partial C}-$$

$$-C^{-2}D^{-1}\left(1-D^2\right)\frac{\partial m_3}{\partial D}+C^{-2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\frac{\partial m_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}\Big]+$$

$$+\left(\mathfrak{G}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right)\frac{\partial n_3}{\partial D}\left\{C^{-2}\left(1-D^2\right)^{3/2}\mathfrak{C}-C^{-2}D^{-1}\left(1-D^2\right)[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]\right\}.$$

Учинимо сада важну примедбу о трансформацији чланова са производима

$$\left(\dot{\mathfrak{C}}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right) \text{ и } \left(\dot{\mathfrak{G}}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right).$$

Ако имамо производ четири вектора

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{A}_1\left[\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_3\right]\right),$$

тај производ увек можемо трансформисати тако да се као векторски множитељ појави сваки од три остала вектора, и то према обрасцу

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{A}_1\left[\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_3\right]\right)=\mathfrak{A}_1\left(\left[\mathfrak{A}_2,\mathfrak{A}_3\right]\mathfrak{A}\right)+\mathfrak{A}_2\left(\left[\mathfrak{A}_3,\mathfrak{A}_1\right]\mathfrak{A}\right)+\mathfrak{A}_3\left(\left[\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2\right]\mathfrak{A}\right).$$

Јасно је да је ово разлагање вектора $\mathfrak{A}$ могућно само у случају када вектори $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ не припадају истој равни.

Помоћу наведеног обрасца можемо написати ове за нас важне резултате:

$$[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]\left(\dot{\mathfrak{C}}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right)=\dot{\mathfrak{C}}\left(\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right]\right)+\mathfrak{C}\left(\left[\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}}\right]\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right]\right)+$$
$$+\mathfrak{G}\left(\left[\dot{\mathfrak{C}},\mathfrak{C}\right]\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right]\right)=$$
$$=-\dot{\mathfrak{C}}\,C^2D^2+\mathfrak{C}\left[\mathfrak{G}^2(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})-(\mathfrak{G},\mathfrak{C})(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}})\right]+\mathfrak{G}\left[C^2(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{C}})-\right.$$
$$\left.-(\mathfrak{C},\mathfrak{G})(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{C}})\right].$$

$$[\mathfrak{G},\mathfrak{C}]\left(\dot{\mathfrak{G}}\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\right)=\dot{\mathfrak{G}}\left(\left[\mathfrak{C},\mathfrak{G}\right]\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right]\right)+\mathfrak{C}\left(\left[\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}}\right]\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right]\right)+$$
$$+\mathfrak{G}\left(\left[\dot{\mathfrak{G}},\mathfrak{C}\right]\left[\mathfrak{G},\mathfrak{C}\right]\right)=$$
$$=-\dot{\mathfrak{G}}\,C^2D^2+\mathfrak{C}\left[\mathfrak{G}^2(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}})-(\mathfrak{G},\mathfrak{C})(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}})\right]+\mathfrak{G}\left[C^2(\mathfrak{G},\dot{\mathfrak{G}})-\right.$$
$$\left.-(\mathfrak{C},\mathfrak{G})(\mathfrak{C},\dot{\mathfrak{G}})\right].$$

Помоћу ових резултата и ове таблице за делимичне изводе

$$\frac{\partial m_1}{\partial C}=-2\,C^{-3}\left(1-D^2\right)^{-1/2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G})$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial D}=C^{-2}D\left(1-D^2\right)^{-3/2}(\mathfrak{C},\mathfrak{G}),\quad \frac{\partial m_1}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}=C^{-2}\left(1-D^2\right)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial C}=0, \qquad \frac{\partial m_2}{\partial D}=-(1-D^2)^{-3/2}D, \frac{\partial m_2}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}=0,$$

$$\frac{\partial m_3}{\partial C}=2\,C^{-3}\,D^{-2}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G}), \frac{\partial m_3}{\partial D}=2\,C^{-2}\,D^{-3}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G}), \frac{\partial m_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}=-C^{-2}D^{-2},$$

$$\frac{\partial n_3}{\partial C}=0, \qquad \frac{\partial n_3}{\partial D}=-2\,D^{-3}, \qquad \frac{\partial n_3}{\partial(\mathfrak{C},\mathfrak{G})}=0$$

добићемо једначину облика

$$P_1\,\dot{\mathfrak{C}}+P_2\,\dot{\mathfrak{G}}+Q_1\,\mathfrak{C}+Q_2\,\mathfrak{G}+S\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}]=[\mathfrak{G},\mathfrak{R}_1]+[\mathfrak{F},\mathfrak{R}_2],$$

где су P_1, P_2, Q_1, Q_2, S функције само вектора $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$.

Рачуном који је доста мораран, но не задаје никакве тешкоће, могу се одредити, тј. добити ове вредности одговарајућих коефицијената

$$P_1=0,\ P_2=1,\ Q_1=0,\ Q_2=0,\ S=0.$$

Према овим резултатима наша једначина добија дефинитивни облик

$$\dot{\mathfrak{G}}=[\mathfrak{C},\mathfrak{R}_1]+[\mathfrak{F},\mathfrak{R}_2].$$

Горња једначина заједно са једначином (69) даје систем векторских диференцијалних једначина

$$\dot{\mathfrak{C}}=[\mathfrak{C},\mathfrak{R}_1]+[\mathfrak{G},\mathfrak{R}_2], \tag{70}$$
$$\dot{\mathfrak{G}}=[\mathfrak{G},\mathfrak{R}_1]+[\mathfrak{F},\mathfrak{R}_2],$$

где је

$$\mathfrak{F}=C^{-2}\,(1-D^2)\,\mathfrak{C}+C^{-2}\,(\mathfrak{C},\mathfrak{G})\,\mathfrak{G}-C^{-2}\,D^{-2}\,(1-D^2)^{3/2}\,[\mathfrak{C},\mathfrak{G}],$$

који ћемо звати *основни систем векторских диференцијалних једначина планетских поремећаја.*

Овај систем може послужити као основа за геометриско проучавање планетских поремећаја.

Литература

1. A. Bilimovitch — Über die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. Astronomische Nachrichten. Band 273, S. 161—178.
2. А. Билимовић — Пфафов општи принцип Механике. Глас CLXXXIX.
3. „ — Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог проблема. Глас CLXXXIX.
4. „ — Пфафова метода у Геометриској оптици. Глас CLXXXIX.
5. — Примена Пфафове методе на теорију подешених каноничних координата. Глас CXC.

ВЫРАЖЕНИЕ ПФАФФА И ВЕКТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАНЕТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Академика АН. Д. БИЛИМОВИЧА

(Доложено на заседании Академии Естественных Наук 11-I-1945)

РЕЗЮМЕ

Содержание: Введение. 1. Выражение Пфаффа и Пфаффовы дифференциальные уравнения. 2. Выражение Пфаффа в Динамике. 3. Выражение Пфаффа для планетного движения. 4. Выражение Пфаффа для возмущенного планетного движения. 5. Преобразование выражения Пфаффа для векторных планетных возмущений. 6. Векторные дифференциальные уравнения планетных возмущений. 7. Векторные дифференциальные уравнения планетных возмущений в разрешенной форме.

В ряде моих статей по вопросам механики и оптики я показал значение одного метода, который я назвал методом Пфаффа. Цель этой статьи применить метод Пфаффа для непосредственного получения моих векторных уравнений планетных возмущений. Эти дифференциальные уравнения устанавливают связь между двумя независимыми произвольными постоянными векторами задачи двух тел и частными градиентами функции возмущения по этим векторам. Они дают конкретное представление изменения чисто векторных планетных элементов и тем открывают новый путь, чисто геометрический, для изучения планетных возмущений.

Так как аппарат метода Пфаффа мало популярен, считаю своей обязанностью привести необходимые основы этого метода. Также считаю необходимым указать на те формулы из теории планетного движения, которые находятся в связи с векторными дифференциальными уравнениями планетных возмущений.

О ГЕОМЕТРИСКОЈ КОНСТРУКЦИЈИ И ИНСТРУМЕНТУ ЗА ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ КЕПЛЕРОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

(Приказано на I скупу Академије природних наука, од 11 јануара 1945).

За решавање класичне трансцендентне Кеплерове једначине

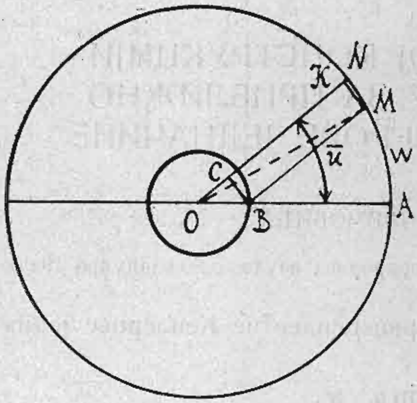
$$u - e\sin u = w, \tag{1}$$

где су: u — тражена ексцентрична аномалија, e — ексцентрицитет путање планете и w — дата средња аномалија, постоји читав низ различитих начина [1]. Већина их даје поступак како да се добију вредности непознате u, са жељеном тачношћу, помоћу полазне приближне вредности те непознате. Уколико је ова полазна приближна вредност тачнија, утолико је краћи даљи поступак за одређивање траженог решења.

У овом чланку предлажемо врло једноставни графички начин за одређивање приближног решења Кеплерове једначине, које може послужити, у случају потребе, за даља тачнија израчунавања. Теориски, наша геометриска конструкција даје решење са тачношћу до укључно другог степена ексцентрицитета, а коефицијент код трећег степена ексцентрицитета може да буде погрешан највише за $\frac{1}{3}\sin^3 w$.

Принцип нашег графичког поступка може бити искоришћен и за конструкцију инструмента за приближно решавање Кеплерове једначине. Са тог инструмента се чита тражена ексцентрична аномалији према датој вредности средње аномалије. Незнатна промена у положају делова инструмента дозвољава да се он примени за сваку вредност ексцентрицитета, тј. за сваку планету.

У литератури која нам је била приступачна нисмо наишли на начин за приближно решавање Кеплерове једначине сличан нашем, те сматрамо да његово објављивање, због особите једноставности, може бите од користи.



Сл. 1.

1. Нека је $OA = 1$ (слика 1) и $OB = e$. На кругу полупречника OA одмеримо угао $AOM = w$, средњу аномалију. Тачку M спојимо са тачком B и кроз тачку O повуцимо праву паралелну са правом BM. Нека она сече круг полупречника OA у тачки N. Тврдимо да угао $AON = \bar{u}$ изражава приближно тражену аномалију.

Конструишимо растојање $MK = BC$ између паралелних BM и ON. Пошто је

$$BC = OB \sin \bar{u} = e \sin \bar{u},$$

угао MON има вредност

$$\sphericalangle MON = \arcsin \frac{MK}{OM} = \arcsin BC = \arcsin (e \sin \bar{u}).$$

Како је

$$\sphericalangle AON - \sphericalangle MON = \sphericalangle AOM,$$

из претходне конструкције имамо

$$\bar{u} - \arcsin (e \sin \bar{u}) = w. \tag{2}$$

2. Упоредимо сад угао $\bar{u}$, решење једначине (2), са углом u, решењем једначине (1).

Према познатом Лапласову [2] решењу, ексцентричну аномалију u можемо претставити овим редом:

$$u = w + e \sin w + \frac{e^2}{1 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2 \sin 2w + \frac{e^3}{3!\, 2^2} (3^2 \sin 3w - 3 \sin w) + R_4,$$

где је R_4 остатак који садржи чланове са e^4, e^5, ...

Покажимо сада да решење једначине (2) може бити претстављено у облику

$$(3) \qquad \bar{u} = w + e\sin w + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2w + + \frac{e^3}{3!\,2^2}(3^2\sin 3w - 3\sin w + \alpha) + \bar{R}_4,$$

где је α величина коју треба одредити, и $\bar{R}_4$ остатак са члановима e^4, e^5, $\cdots$

У ту сврху ставимо решење (3) у једначину (2). Тада ћемо добити

$$(4)\left\{\begin{aligned} & w + e\sin w + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2w + \frac{e^3}{3!\,2^2}(3^2\sin 3w - 3\sin w + \alpha) + \\ & \qquad + \bar{R}_4 - \arcsin\left\{e\sin\left[w + e\sin w + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2w + \right.\right. \\ & \qquad \left.\left. + \frac{e^3}{3!\,2^2}(3^2\sin 3w - 3\sin w + \alpha) + \bar{R}_4\right]\right\} = w. \end{aligned}\right.$$

Искоришћавајући ред

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots,$$

који важи за x под условима $-1 \leq x \leq +1$, можемо написати

$$\arcsin\left\{e\sin\left[w + e\sin w + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2w + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{e^3}{3!\,2^2}(3^2\sin 3w - 3\sin w + \alpha) + \bar{R}_4\right]\right\} =$$

$$= e\sin\left[w + e\sin w + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2w + \cdots\right] + \frac{1}{2\cdot 3}[e\sin(w + \cdots)]^3 =$$

$$= e\left[\sin w\cos(e\sin w + \cdots) + \right.$$

$$\left. + \cos w\sin\left(e\sin w + \frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot 2\sin 2w + \cdots\right)\right] + \frac{1}{2\cdot 3}(e\sin w + \cdots)^3 =$$

$$= e\sin w + e^2\sin w\cos w + e^3\left(\sin w\cos^2 w - \frac{5}{6}\sin^3 w\right).$$

Ако искористимо овај израз за једначину (4), добићемо

$$(w-w)+e(\sin w-\sin w)+e^2\left(\frac{2}{1\cdot 2\cdot 2}\sin 2w-\sin w\cos w\right)+$$

$$+e^3\left[\frac{1}{3!\,2^3}(3^2\sin 3w-3\sin w+\alpha)-\sin w\cos^2 w+\frac{5}{6}\sin^3 w\right]+\cdots=0.$$

Прва три члана дају идентитете. Из четвртог имамо једначину

$$\frac{3}{2^3}(3\sin w-4\sin^3 w)-\frac{1}{2^3}\sin w+\frac{\alpha}{3!\,2^2}-\sin w+\sin^3 w+\frac{5}{6}\sin^3 w=0,$$

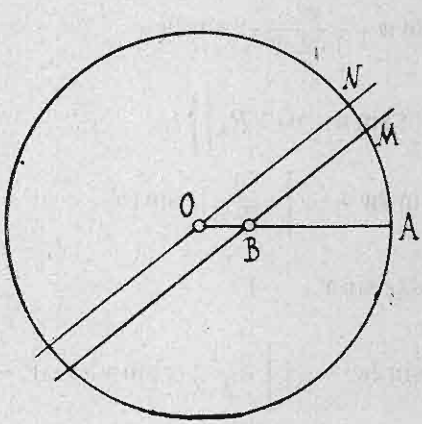
која даје $\alpha=-8\sin^3 w$.

Према томе можемо закључити да је

$$\bar{u}-u\approx\frac{\alpha\, e^3}{3!\,2^2}=-\frac{e^3}{3}\sin^3 w\,.$$

За Меркура ($e=0{,}20561$) је, на пр., тај члан по апсолутној вредности мањи од $\frac{1}{3}e^3\approx 0{,}003$. Јасно је да се таква грешка потпуно губи у техничким грешкама било какве геометриске конструкције.

3. Наведена геометриска конструкција практички доводи до овог поступка за графичко решавање Кеплерове једначине.



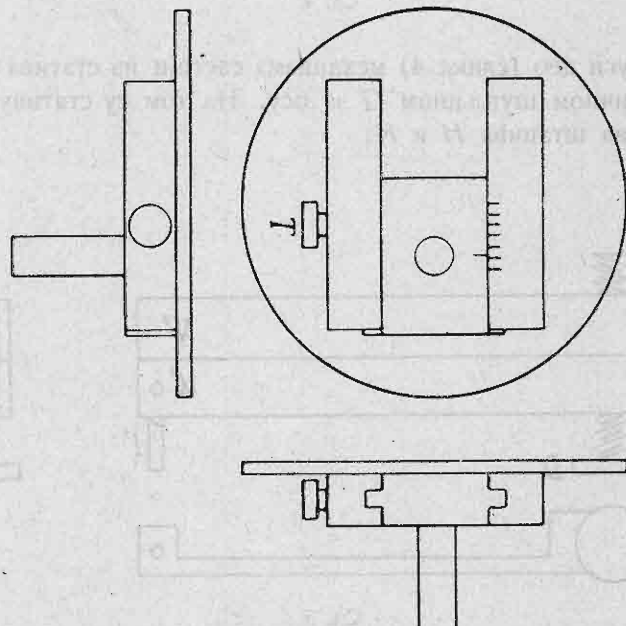
Сл. 2.

На транспортеру (слика 2) одмеримо од центра O у правцу према нули (тачке A) дужину $OB=er$, где је e ексцентрицитет путање планете и r полупречник транспортера. Затим на транспортеру узимамо угао AOM дате средње аномалије. Тачку M спајамо са тачком B правом од стране троугла за цртање. Ако померимо тај троугао тако да његова страна BM остане паралелна сама себи, а прође кроз тачку O, тачка пресека N одређује угао AON ексцентричне аномалије.

4. Принцип изведене конструкције може послужити као основа за израду инструмента на којем је могуће непосредно прочитати вредност променљиве u, ако су дате вредности w и e.

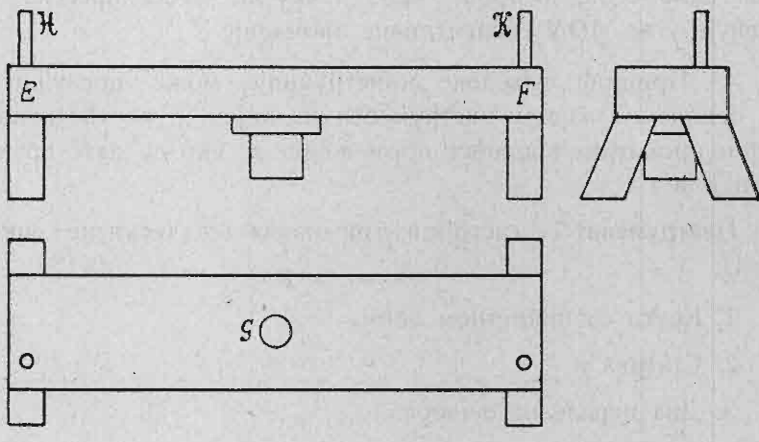
Инструменат се састоји из три главна дела (ескизне слике 3 и 4):

1. Круга са покретном осом,
2. Статива и
3. Два паралелна лењира.



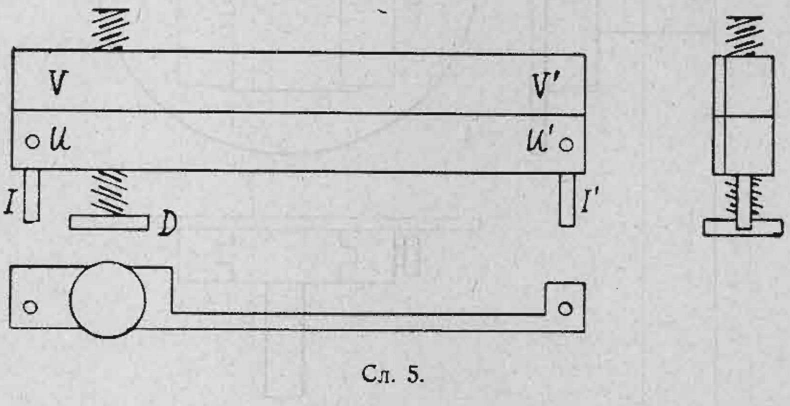
Сл. 3.

Са једне стране диска (слика 3) круга-транспортера налази се оса управна на равни диска. Положај те осе можемо мењати у односу према центру транспортера. Завртањ T служи за учвршћавање диска према телу везаном са осом.



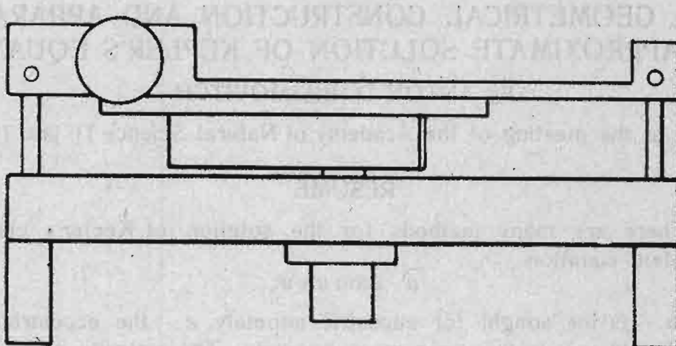
Сл. 4.

Други део (слика 4) механизма састоји из статива EF са цилиндричном шупљином G за осу. На том су стативу учвршћена два штапића H и K.



Сл. 5.

Два паралелна лењира (слика 5) спојена су међу собом помоћу два штапића I, I' и десног и левог завртња D за подешавање растојања између лењира. У једном лењиру има цилиндричних шупљина, које омогућују да се намести систем лењира на штапиће H и K статива, кад је на статив стављен својом осом диск транспортера.



Сл. 6.

Цео инструменат је показан на слици 6. Рукује се њиме овако.

a) Према вредности *e* треба наместити осу и учврстити завртањ *T*.

b) Саставити инструмент.

c) Окренути диск тако да линија лењира *U U'* својим пресеком са периферијом транспортера одреди угао *w* дате средње аномалије.

d) Лењир *V V'* ставити у положај да његова линија пролази кроз центар транспортера.

e) У тачки пресека претходне линије са периферијом круга прочитати угао тражене ексцентричне аномалије.

Напомињимо да како овај инструмент тако и графички поступак могу бити примењени не само на случај кад је угао *w* мањи од 180°, већ и кад је *w* већи од 180°.

Литература

1. R. Radau — Bibliographie du problème de Képler (Bull. astr. T. XVII — 1900, p. 37):

2. P. S. Laplace — Traité de Mécanique céleste. Oeuvres complètes. Tome Premier. 1878. p. 198.

ON A GEOMETRICAL CONSTRUCTION AND APPARATUS FOR APPROXIMATE SOLUTION OF KEPLER'S EQUATION

By ANTON D. BILIMOVITCH

(Read at the meeting of the Academy of Natural Science 11 jan. 1945)

RÉSUMÉ

There are many methods for the solution of Kepler's classical transcedent equation

$$u-e\sin u=w,$$

where u – is the sought for eccentric anomaly, e – the eccentricity of the orbit and w – is the given mean anomaly. The majority of them are based on giving an algorithm, by means of which, by the first given approximate solution, a solution is found with the wanted degree of exactness. The more exact the first approximative is, the quicker can be obtained the exactness wanted.

In the present note a very simple method of determination of the first approximative by the way of graphic is proposed. Theoretically this method gives a determination with exactness of second degree of eccentricity included, while the coefficient in the third degree of this eccentricity cannot differ from its exact value by more than $\frac{1}{3}\sin^3 w$.

According to the principle of geometrical construction a corresponding apparatus can also be constructed.

О ПРЕЦРТИМА СПРЕГНУТИХ ТАЧАКА ЈЕДНОГ ТРАНСФИНИТНОГ СКУПА КОНГРУЕНТНИХ ПРОЈЕКТИВНИХ НИЗОВА ТАЧАКА

од
БОГДАНА ГАВРИЛОВИЋА

(Приказано на II скупу Академије природних наука, од 12 апр. 1945 год.)

Нека су нам дате две тачке $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ својим тангенцијалним једначинама $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$. Те две тачке узећемо за основне тачке једног низа тачака — низа $(A_1 . A_2)$. Тада ће ма која тачка тога низа бити одређена једном једначином овог облика

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 ,$$

и кад параметар λ при непрекидном мењању свом буде прошао кроз све реалне вредности између бројева $-\infty$ и $+\infty$ онда ће и једначина $A_1 + \lambda A_2 = 0$ претстављати све тачке низа (A_1, A_2). Трансфинитним скупом тачака моћи континуума c биће очевидно оиртана слика праве A_1, A_2. Тај низ (A_1, A_2) зваћемо низом (A), а параметар λ, који својом вредношћу одређује на том низу положај неке тачке тога низа, „тачком λ."

Ако су сад, поред тачака A_1 и A_2, дате и друге две тачке — тачке B_1 и B_2 — и ако су $B_1 = 0$ и $B_2 = 0$ тангенцијалне једначине тих тачака, онда ће, *прво*, и тачке B_1 и B_2 као основне тачке формирати један низ тачака — низ $(B_1 B_2)$ или низ (B) — и, *друго*, онда ће ма која тачка тога низа бити дата једном оваквом једначином

$$B_1 + \mu B_2 = 0$$

Претпоставићемо да су низови (A) и (B) пројективни, тј. претпоставићемо да свакој тачки низа (A) одговара једна једина тачка низа (B) и обратно. Међутим познато је да је пројективна повезаност свих тачака два низа утврђена тек онда, кад се унапред зна, које су три тачке једнога низа пројективно везане ма за које три тачке другога низа. Тек тада ће сваком неком четвртом елементу λ једнога одговарати један једини елеменат μ другога низа. И ако су сад три тачке првога низа у том низу одређене специјалним вредностима $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а оне три које њима пројективно у другом низу одговарају вредностима μ_1, μ_2, μ_3, онда ће морати бити

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

По тој — по количинама λ и μ билинеарној — једначини види се која ће тачка λ првога низа пројективно одговарати некој одређеној тачки μ другога низа и обратно.

Претпоставићемо сад:

Прво, да су наши низови (A) и (B) суперпоновани на једној правој — заједничкој носиљи њиховој;

Друго, да у тим суперпонованим низовима тачке A_1 и B_2 леже једна на другој и да, поред тога, основној тачки A_1, тј. тачки $\lambda_1 = 0$ првога низа, пројективно одговара основна тачка B_1, тј. тачка $\mu_1 = 0$, другога низа;

Треће, да основној тачки B_2 другога низа, тј. тачки $\mu_2 = \infty$ тога низа, пројективно у првом низу одговара она тачка тога низа, која се на заједничкој носиљи поклапа с тачком B_2 и која је у њему одређена специјалном вредношћу λ_2 параметра λ; и на послетку претпоставићемо:

Четврто, да тачке λ_3 и μ_3, које у низовима (A) и (B) леже у бесконачности, тј. да тачке $\lambda_3 = -1$ и $\mu_3 = -1$, једна другој пројективно одговарају.

Такве низове, пошто имају исте изворе и исте уворе тачака зваћу сличним пројективним, трансфинитним низовима тачака.

Како се једначина (1) може и овако изразити

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} & 1 & \dfrac{1}{\mu_2} \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

онда можемо тврдити ово: кад су низови (4) и (B) пројективни слични низови, онда ће се једначина (1) преобразити у ову једначину:

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

тј. у једначину

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu \\ \lambda_2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Ако сад ову последњу детерминанту развијемо, онда ћемо добити ову специјалну билинеарну једначину

$$\lambda\mu + (1+\lambda_2)\lambda - \lambda_2\mu = 0, \tag{2}$$

а одатле је:

$$\text{1-во} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \lambda = \frac{\lambda_3\mu}{1+\lambda_2+\mu}; \tag{3}$$

$$\text{2-го} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \mu = \frac{(1+\lambda_2)\lambda}{\lambda_2-\lambda} \tag{4}$$

$$\text{3-ће} \cdot\cdot\cdot\cdot \lambda_2 = \frac{(1+\mu)\lambda}{\mu-\lambda} \tag{5}$$

Према томе можемо рећи ово: ако у сличним пројективним низовима тачака елементу λ првога низа одговара елеменат μ другога низа и обратно, ако у тим низовима елементу μ другога низа одговара пројективно елеменат λ првога низа, онда ће унутрашња веза између бројева λ и μ и параметра λ_2 бити изражена једначинама (2), (3), (4) и (5).

Пошто тачка λ_2 може заузети положај ма које тачке низа (A) и пошто се та тачка, која је на низу (A) одређена бројем λ_2, увек на заједничкој носиљи низова (A) и (B) поклапа са основном тачком B другога низа, то у ствари нећемо имати два низа тачака, већ читав један трансфинитан систем низова.

У том систему неће се мењати низ (A), док ће низ (B), због сталног померања основне тачке B_2, тј. због сталне разлике у величини унутрашњег ограниченог дела свог, стално мењати своју структуру. Параметар λ_2 ће дакле стално и трансформирати старе и производити нове низове (B) и зато бисмо га могли звати и *трансформатором* или *генератором* елемената трансфинитног скупа низова (B).

Но поред ове напомене треба пре непосредног даљег испитивања у које ћемо одмах заћи, учинити још и друге две.

Прво. Једначина (2) постала је из претпоставке, да су тачке λ_1, λ_2 и λ_3 три различите тачке низа (A). Једна од тих тачака била је дата бројем $\lambda_1 = 0$, а друга бројем $\lambda_3 = -1$. Према томе, да би било одржано пројективно сродство између тачака низа (A) и тачака појединих низова (B) *не може трансформатор* λ_2 *по својој вредности бити ни раван нули ни раван броју* -1, и то треба нарочито имати у виду, кад се овде-онде буду истицале неке специјалне вредности његове или чак и сам трансфинитан скуп њихов.

Друго. Тачке A_1 и B_2, затим тачке λ_2 и B_2, и напослетку оне две тачке, које и на једном и на другом низу леже у — бесконачности нису само пројективно спрегнуте, већ оне и једна на другу належу у истој тачки заједничке носиље низова. Доказаћемо да ће у нашим низовима ту исту особину имати и све остале тачке, које једна другој пројективно одговарају, тј. доказаћемо ово: *ако некој тачки a првога низа* (A) *одговара пројективно у једном од низова* (B) *нека тачка b, онда ће та тачка b налегати на исту ону тачку заједничке носиље, на коју належе и тачка a.* Наши низови неће дакле бити само пројективни већ и *конгруентни.*

Ево и доказа. Координате тачке a првога низа су ово

$$x = \frac{x_1 + a\,x_2}{1 + a}\,; \qquad y = \frac{y_1 + a\,y_2}{1 + a}\,.$$

Међутим, ако је $\lambda_2 = x$, онда ће координате те тачке λ_2 бити

$$\xi = \frac{x_1 + x\,x_2}{1 + x}\,; \qquad \eta = \frac{y_1 + x\,y_2}{1 + x}$$

и како тачка λ_2 на заједничкој носиљи належе на основну тачку $B\alpha$ једног од низова (B) — оног, који је произведен вредношћу $\lambda_2 = x$ генератора — то ће ξ и η бити и координате тачке $B\alpha$. И ако сад тачки a у том низу пројективно одговара нека тачка b, чије су координате ξ' и η', онда ће — пошто се по нашој претпоставци тачка A_1 (x_1, y_1) поклапа с тачком B_1 — морати бити

$$\xi' = \frac{x_1 + b\xi}{1+b}, \qquad \eta' = \frac{y_1 + b\eta}{1+b},$$

тј. биће

$$\xi = \frac{(1+\alpha)\,x_1 + b\,(x_1 + \alpha\,x_2)}{(1+x)\;(1+b)}. \tag{6}$$

Али како је по једначини (3)

$$x = \frac{\alpha^b}{1+\alpha+b},$$

то ћемо једначину (6) моћи изразити и у облику

$$\xi' = \frac{x_1 + a\,x_2}{1+a},$$

а тај наш број претставља апцису тачке a. Исто тако би се доказало и да је ордината η' тачке b једнака с ординатом y тачке a, а тим би очевидно било доказано да су низови (A) и (B) не само пројективни, већ и конгруентни.

Нека је сад $\lambda_2 = \alpha =$ неком одређеном броју, који није ни раван нули ни раван броју -1; тој вредности генератора одговараће међу низовима B један специјалан низ, који ћемо, као и мало час, обележити са (B_α). Ако сад на низу (4) узмемо једну тачку, која је по свом положају у том низу одређена бројем a, онда ће тој тачки у низу (B_α) пројективно одговарати нека тачка, која је у њему, рецимо, одређена неким бројем b и тада ће према једначини (4) бити

$$\eta = \frac{(1+\alpha)\,a}{\alpha - a} = b.$$

Пођимо даље и узмимо да је $\lambda_2 = \beta \neq \alpha$ и да при томе и β по својој вредности није ни $=0$, ни $= -1$. Тада ће том вредношћу генератора бити формиран некакав други низ, рецимо низ (B_β). У том низу ће тачки a низа (A) одговарати нека тачка b' и биће тада

$$\mu = \frac{(1-\beta)\,a}{\beta - \alpha} = b'.$$

Та два броја b и b', пошто је $\beta \neq \alpha$, уопште немају исту вредност, а имаће исту вредност само у ова два специјална случаја: или кад је $a = 0$, или кад је $a = -1$. Јер кад је $a = 0$, онда је према једначини (4) број $\mu = 0$ за *све* вредности генератора λ_2, па и за две његове специјалне вредности α и β. А кад је $a = -1$, онда ће према једначини (3) бити $\mu = -1$ за све вредности генератора, па и за две његове специјалне вредности α и β, тј. кад је $a = -1$, онда је и $b = b' = -1$. То се уосталом види и непосредно из саме дефиниције природно пројективних низова (A) и (B).

На тим специјалним случајевима, који се јављају онда кад је било $a=0$, било $a=-1$, задржаћемо се мало доцније, а сад ћемо претпоставити, да је $\lambda_2=\gamma\neq\beta\neq\alpha$ и да при томе, као и раније, генератор λ_2 није ни $=0$, ни $=-1$. Тада бисмо у скупу низова (B) добили један нов низ (B) и том би низу нека тачка b'' тога низа била пројективно везана с тачком a низа (A). Али би сад било $b''\neq b'\neq b$. Додељујући генератору λ, све друге и друге вредности, добијали бисмо и све друге и друге низове (B). У сваком од тих низова би само једна једина тачка њихова пројективно одговарала тачки a низа (A) и та би тачка била одређена једним бројем који се по вредности својој разликује од раније добијених бројева b, b', b'', ... Тим путем добили бисмо један трансфинитан систем $(b, b', b'',\dots)$ једног различја другог реда Елементи тог система биће (ab), (ab'), (ab'').... и ако се сад узме да је a апсциса, а бројеви b, b', b'',.... да су ординате неке тачке, онда ће парови (ab), (ab'), (ab'').... пројективно спрегнутих тачака датих низова лежати сви на правој $x=a$; они ће другим речима запосести ту праву. Да ли ће је при томе запосести у свима тачкама њезиним, о томе ће бити говора у даљем току нашег излагања.

То исто вреди за тачку a низа (A); вредеће очевидно и за сваку другу тачку тога низа: свакој од тих тачака a', a'', ... одговараће једно различје другога реда и сви елементи тога различја ће прецртима својих парова пројективно спрегнутих тачака запосести тачке на правама $x=a'$, $x=a''$,.... у другом, још незапоседнутом сектору равни. И то ће тако бити све док a не буде или $=0$, или $=-1$.

Али, ако је $\lambda=a=0$, онда ће за све вредности генератора и μ, тј. један од бројева b бити раван 0 и због тога ћемо тада на правој $x=0$, тј. на осовини y, имати само једну, пројективно спрегнутим тачкама запоседнуту тачку: тачку (0,0), а *све* остале тачке њезине остаће незапоседнуте.

С друге стране, ако је $a=-1$, онда се mutatis mutandis, лако може доказати, да ће на правој $x=-1$ само тачка $(-1; -1)$ бити запоседнута пројективно спрегнутим паровима, а све остале тачке њезине да ће бити незапоседнуте.

Да бисмо довршили слику о тим критичким секторима, испитаћемо још и ова два случаја.

Прво. Нека је $\mu = b = 0$. — Тада ће за све вредности генератора бити и $\lambda = a = 0$, и како је $\mu = y$ то ћемо тада на правој $y = 0$, тј. на основици x, имати само једну пројективно спрегнутим тачкама запоседнуту тачку – тачку $(0,0)$ — а све остале тачке њезине остаће незапоседнуте.

Друго. Нека је $\mu = b = -1$. — У овом случају ће за све вредности генератора бити $\lambda = a = -1$, а тим се потврђује да ћемо на правој $y = -1$ имати само једну, пројективно спрегнутим тачкама запоседнуту тачку: тачку $(-1, -1)$, док ће све остале тачке те праве остати незапоседнуте.

Добили смо дакле ову теорему:

Теорема I. *Кад се из координатне равни искључе 1-во, све тачке које леже на координатним осовинама осим тачке $(0,0)$ и 2-го, све тачке које леже на правима $x = -1$ и $y = -1$ осим тачке $(-1, -1)$, онда ће скуп свих могућих парова пројективно спрегнутих тачака трансфинитног скупа конгруентних, пројективних, низова запосести све остале тачке бесконачне равни.*

Пођимо сад даље и претпоставимо да у једначини (2) параметар λ_2 може имати и ове две досад искључене вредности $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_2 = -1$.

У досадашњем испитивању нашем истакнуте су четири критичке вредности $a = 0$ и $a = -1$ с једне, и $b = 0$ и $b = -1$ с друге стране, због којих спрегнути парови пројективних тачака, које добијамо из једначине (2), не могу да запоседну све тачке у неким секторима целокупне равни. Одмах ћемо видети, какав ће ефекат имати те четири критичке вредности кад се претпостави да је параметар λ_2 по вредности својој било раван нули, било раван броју -1.

Да бисмо тај ефекат одредили, *ми ћемо најпре узети, да је $\lambda_2 = 0$.* Ослањајући се на једначину (2) доћи ћемо до ових закључака:

1-во; кад је $a = 0$, а $\lambda_2 = 0$, онда ће μ моћи имати *ма коју* вредност неког реалног броја, а не као раније само вредност $\mu = 0$ и због тога ће спрегнути парови $(0, b)$ својим прецртима запосести и све остале тачке осовине y, а не само једну тачку њезину: тачку $(0,0)$;

2-го; кад је $a = -1$, а $\lambda_2 = 0$, онда ће тој вредности одговарати ова вредност броја $\mu = b$: $\mu = b = -1$, тј. тада ће тај спрегнути пар $(a\, b)$ својим прецртом поклапати тачку $(-1, -1)$

3-ће; кад је $b = 0$, а $\lambda_2 = -0$, онда се непосредно по једначини (2) види да ће тој вредности одговарати само једна вредност за број a: вредност $a = 0$, тј. тада бисмо у прецрту тога пара $(a\, b)$ добили у равни само једну тачку — тачку $(0,0)$; и напослетку

4-шо; кад је $b = -1$, а $\lambda_2 = 0$, онда неће том броју $b = -1$ одговарати само број $\lambda = a = -1$, већ и нека друга – ма која друга — вредност броја λ, а то ће рећи, да ће у овом случају спрегнути парови $(a\, b)$ својим прецртима запосести све тачке праве $y = -1$, а не само њезину тачку $(-1, -1)$.

А ако прешпосшавимо да је $\lambda_2 = -1$, онда ћемо држећи се и опет једначине (2) моћи доказати ово:

1-во; кад је $a = 0$, а $\lambda_2 = -1$, онда ће том броју одговарати само број $\mu = b = 0$, тј. тада ће спрегнути пар $(a\, b)$ својим прецртом покрити само тачку $(0,0)$ бесконачне равни;

2-го; кад је $a = -1$, а $\lambda_2 = -1$, онда ће број $\mu = b$ моћи имати сваку вредност, а не само вредност $\mu = -1$ и због тога спрегнути пар $(a\, b)$ неће својим прецртом покрити само тачку$(-1, -1)$, већ ће као елемент једног трансфинитног скупа парова запосести све тачке праве $x = -1$;

3-ће; кад је $b = 0$, а $\lambda_2 = -1$, онда неће број $\lambda = a$ имати само једну вредност — вредност $\lambda = a = 0$ — већ и другу неку — ма какву — вредност, тј. прецртом спрегнутих парова $(a\, b)$ биће у овом случају запоседнуте све тачке осовине x, а не само тачке њезине $(0\, 0)$; и напослетку

4-шо; кад је $b = -1$, а $\lambda_2 = -1$, онда ће тој вредности одговарати само вредност $\lambda = a = -1$, тј. прецрт тог спрегнутог пара $(a\, b)$ запосешће у бесконачној равни само тачку $(-1, -1)$.

Добили смо према томе ову теорему:

Теорема II. *Кад у билинеарној једначини*

$$xy + (1 + \lambda_2)\, x - \lambda_2\, y = 0$$

йарамешар λ_2 йри свом бесйрекидном мењању буде йрошао кроз све реалне вредносши бројева, који леже између $-\infty$ и $+\infty$, онда ће сйрегнуши йарови $(x\, y)$, које будемо добили из ше једначине као елеменше једног одређеног шрансфинишног скуйа, својим йрецршима зайосесши све шачке целокуйне равни.

Те прецрте моћи ћемо, као што ћемо видети, изразити и једном сложенијом сликом. Једначина (4) претставља нам једну хиперболу или тачније, пошто параметар λ_2, има бесконачно много вредности, један систем од бесконачно много хипербола, које све пролазе кроз тачку (0,0) и тачку $(-1, -1)$. Асимптоте тих хипербола су дате овим једначинама: једна једначином $x = \lambda_2$, а друга једначином $y = -(1+\lambda_2)$. Центри тих хипербола леже на правој $x + y + 1 = 0$.

Те хиперболе биће у дегенерацији, кад је

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1+\lambda_2 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 1+\lambda_2 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

тј. кад је $\lambda_2(1+\lambda_2) = 0$, дакле кад је било $\lambda_2 = 0$ било $\lambda_2 = -1$.

Али кад је $\lambda_2 = 0$, онда је према једначини (6)

$$x(y+1) = 0,$$

тј. онда је $x = 0$, а $y = -1$, и то су оне две праве у које је дегенерирала хипербола (6), кад је $\lambda_2 = 0$. А кад је $\lambda_2 = -1$, онда је према једначини (6)

$$y(x+1) = 0,$$

тј. онда је $y = 0$, а $x = -1$ и те две праве су онда оне две праве у које је дегенерирала хипербола (6). Та два пара правих, то су у ствари оне праве, које су у бесконачној равни биле запоседнуте прецртима оних парова $(\lambda\,\mu)$, које смо добили из једначине (2), кад смо били претпоставили да је било $\lambda_2 = 0$, било $\lambda_2 = -1$ и да поред осталих свих могућих вредности броја $\lambda = a$ може бити и $= 0$ и равно броју -1. А све оне друге хиперболе постале су очевидно из прецрта свих могућих парова пројективно спрегнутих тачака трансфинитног скупа сличних, конгруентних, пројективних низова.

Кад је $\lambda_2 = \infty$, тј. кад основна тачка B_2 низа (B) поклапа на заједничкој носиљи основну тачку A_2 низа (A), онда ће тачке λ и μ, које у низовима (A) и (B) једна другој пројективно одговарају не само налегати на исту тачку заједничке носиље, већ ће бити и $\lambda = \mu$, тј. биће што је једно и исто и $x = y$ или $x - y = 0$ и зато ће специјалној вредности $\lambda_2 = \infty$ параметра одговарати у равни права $x - y = 0$. Та права пресецаће све хиперболе у тачкама (0,0) и $(-1,-1)$ и због тога осим те две тачке ни једна друга тачка њезина нећеући у структуру поменутих хипербола

О природи тачака — саставних елемената тих хипербола и о начину формирања њихова можемо рећи ово. Свака од тих хипербола изграђује се на овај начин, што свака од њих из трансфинитног скупа $x = a, a', a'', \cdots$ излучује и у себе прима по *једну јединy* тачку тих правих — ону тачку наиме, која *у свакој* од тих правих одговара некој одређеној, специјалној вредности генератора λ_2.

ÜBER DIE ABBILDUNG DER PUNKTMENGEN IN EINER TRANSFINITEN MENGE CONGRUENTER PROJEKTIVER PUNKTREIHEN

von

BOGDAN GAVRILOVIĆ

Es seien zwei Punktreihen gegeben: die Punktreihe (A) mit ihren Grundpunkten A_1 und A_2 und die Punktreihe (B) mit den Grundpunkten B_1 und B_2. Wenn nun die Punkte A_1 und A_2, resp. die Punkte B_1 und B_2 in Liniencoordinaten durch die Gleichungen $A_1 + \lambda A_2 = 0$, resp. $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ dargestellt sind, so wird durch die Gleichung $A_1 + \lambda A_2 = 0$ ein beliebiger Punkt der ersten, und durch die Gleichung $B_1 + \mu B_2 = 0$ ein beliebiger Punkt der zweiten Punktreihe ausgedrückt. Jedem Werte von λ und μ, den diese zwei Zahlen aus der unendlichen Menge der zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden reellen Zahlenwerte angenommen haben, wird dann ein einziger bestimmter Punkt, nämlich „der Punkt λ" der ersten, und der „Punkt μ" der zweiten Punktreihe entsprechen.

Ich setze nun voraus:

1. dass die gegebenen Punktreihen projektiv sind und dass sie auf einer und derselben Geraden — ihrem gemeinsamen Träger — liegen;
2. dass die Grundpunkte A_1 und B_1 denselben Punkt dieses Trägers bedecken und dass dabei dem Punkte $\lambda = 0$, d. h. dem durch den Wert $\lambda_1 = 0$ bestimmten Grundpunkte A_1 in der zweiten Punktreihe der Grundpunkte B_1, d.h. der Punkt $M_1 = 0$, projektiv entspricht;
3. dass der Grundpunkt B_2 der zweiten und ein Punkt λ_2 der ersten Punktreihe denselben Punkt des gemeinsamen Trägers bedecken und dass diese zwei Punkte, d.h. der Punkt λ_2 und der Punkt $\mu_2 = \infty$ projektiv gebunden sind; und
4. dass die im Unendlichen liegenden Punkte der beiden Punktreihen $\lambda_3 = -1$ und $\mu_3 = -1$ in projektiver Verwandtschaft sind.

Unter dieser Voraussetzung wird dann die projektive Gebundenheit eines Punktes λ der ersten mit dem ihm entsprechenden projektiven Punkte μ der zweiten Punktreihe durch diese Gleichung ausgedrückt:

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda & \mu \\ \lambda_2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder, in entwickelter Form der letzten Determinante, durch die — nach den Grössen λ und μ bilineare — Gleichung

$$\lambda\mu + (1+\lambda_2)\lambda - \lambda_2\mu = 0\,. \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun unmittelbar dass:

$$\lambda = \frac{\lambda_2\mu}{1+\lambda_2+\mu}, \tag{2}$$

$$\mu = \frac{(1+\lambda_2)\lambda}{\lambda_2-\lambda}, \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \frac{(1+\mu)\lambda}{\mu-\lambda}. \tag{4}$$

Durch diese Gleichungen wird somit offenbar für alle Fälle die Beziehung zwischen den Grössen λ, μ und λ_2 dargestellt. Es ist klar, dass einem beliebigen Werte der Zahl λ_2 ein bestimmter Punkt der Punktreihe (A) entspricht und da sich dieser Punkt auf dem gemeinsamen Träger immer mit dem Grundpunkte B_2 überdeckt, so werden wir nicht nur eine, sondern eine von der Mächtigkeit des Kontinuums C transfinite Menge der Punktreihen (B) erhalten, die alle mit der Punktreihe (A) projektiv sind. Bei der beständigen Umänderung seines Wertes wird der Parameter λ_2 dadurch die Struktur der Punkte in allen Punktreihen (B) umändern, weswegen wir ihn als „Generator" der Elemente der transfiniten Menge der Punktreihen (B) betrachten.

Wir gehen jetzt zu der unmittelbaren Analyse der Gleichungen (1), (2), (3), und (4) über, aber mit einer wichtigen Bemerkung. Die Gleichung (1) ist aus der Voraussetzung entstanden dass die Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, drei *verschiedene* Punkte der Punktreihe (A) sind, von diesen drei Punkten ist ein Punkt durch den Wert $\lambda_1 = 0$ und der andere durch den Wert $\lambda_3 = -1$ gegeben. Folglich kann der dritte Punkt λ_2 *weder durch den Wert* $= 0$, *noch durch den Wert* $\lambda_2 = -1$ *bestimmt werden.*

Es sei nun $\lambda_2 = x =$ einem bestimmten Zahlenwerte, der nicht $= 0$ und nicht $= -1$ ist. Die durch diesen Wert x bestimmte Punktreihe (B) werden wir mit (B_α) bezeichnen. Wenn wir nun auf der Punktreihe (A) einen Punkt wählen, der nach seiner Lage auf dieser Punktreihe durch den Wert a bestimmt ist, so wird diesem Punkte in der Punktreihe (B_α) ein bestimmter Punkt b projektiv entsprechen und somit wird dann auf der Grundlage der Gleichung (3)

$$\mu = \frac{(1+\alpha)\,a}{\alpha - a} = b$$

sein.

Beide Punkte — der Punkt a der ersten und der Punkt b der zweiten Punktreihe — liegen aber auf dem gemeinsamen Träger dieser Punktreihen. Unter der erwähnten Voraussetzung werden aber *diese zwei Punkte denselben Punkt des gemeinsamen Trägers überdecken.*

Diese Eigenschaft werden aber nicht nur die Punkte a und b haben, sondern auch alle andere Punkte der beiden Punktreihen, nämlich jeder Punkt der einen wird sich mit dem mit ihm projektiven Punkte der anderen Punktreihen auf einem und demselben Punkte des gemeinsamen Trägers überdecken und daher werden diese Punktreihen *projektive, kongruente Punktreihen sein.* Dabei wird ein jeder Punkt ihres Trägers ein Doppelpunkt sein.

Wenn dagegen $\lambda_2 = \beta \neq \alpha$ ist, dann entspricht diesem Werte $\lambda_2 = \beta$ des Generators eine bestimmte Punktreihe (B_β). In dieser Punktreihe befindet sich nun ein Punkt b der mit dem Punkt a projektiv ist und es ist dann

$$\mu = \frac{(1+\beta)\,a}{\beta - a} = b'.$$

Diese zwei Zahlen b und b', da $\beta \neq \alpha$ ist, haben im Allgemeinen nicht denselben Wert. Nur in zwei speziellen Fällen, nämlich wenn $a = 0$, oder $a = -1$, kann auch $b = b'$ sein. An diesen zwei Fällen werden wir uns später aufhalten. Bei der weiteren Zuteilung der Werte wird nun der Generator λ_2, unter der Bedingung dass weder $\lambda_2 = 0$, noch $= -1$, neue in der Menge (B) befindliche mit der Punktreihe (A) projektive Punktreihen erzeugen, in denen in einem jeden ein einziger Punkt $b^n, b^m, \ldots$ mit dem Punkte a projektiv ist. Dabei erweist sich dass die Zahlen $b, b', b^n, b^m, \ldots$ ihrem Werte nach verschieden sind

Auf diesem Wege sind wir zu einem transfiniten System $a\,(b, b', b^n, b^m, \ldots)$ angelangt dessen Elemente (a, b), (a, b'), $(a, b^n) \ldots$ in ihrer Abbildung in der Koordinatenebene $(a \Delta \mu)$ die Punkte der Geraden $x = a$ besetzen werden. Auf die Frage, ob dadurch alle Punkte besetzt werden, werden wir später antworten.

Wenn wir jetzt neben dem Punkte a der Punktreihe (A) einen anderen Punkt a_1 dieser Punktreihe annehmen, dann gelangen wir zu derselben Schlussfolgerung, nämlich: alle Elemente der Menge $a_1\,(c_1, c_1', c^n, \ldots$ werden in ihrer Abbildung die Punkte der in einem noch unbesetzten Sektor der Ebene befindlichen Geraden $x = a$ besetzen.

Jedem anderen Werte von a entspricht nun eine andere mit den erwähnten Geraden $x = a$, und $x = a$ parallele Gerade, deren Punkte mi Paaren der projektiven Punkte der gegebenen Punktreihen (A) und (B) bedeckt sind. Da durch die transfinite Menge dieser Geraden die Ebene in ihrem ganzen Umfange besiedelt wird, so werden wir dadurch ein Bild über die

Besiedelung der Punkte der Ebene durch die Paare der projektiven Punkte der Punktreihen (A) und (B) bekommen. Um dieses Bild in allen Teilen der Ebene zu erforschen, müssen wir die bisherige Auseinandersetzung mit folgender Bemerkung vorsetzen. Die oben erwähnte Schlussfolgerung wird gelten nur wenn die Zahl a bei der Umänderung ihres Wertes weder den Wert $a=0$, noch den Wert $a=-1$ annimmt. Wenn nämlich $a=0$ ist, so wird nach der Gleichung (2)

$$a=0=\frac{\lambda_2 \mu}{1+\lambda_2+\mu},$$

und da $\lambda_2 \neq 0$ ist, so muss für alle andere Werte des Generators λ_2 die Zahl $\mu=0$ sein. Folglich befindet sich dann auf der Geraden $x=a=0$, d. h. auf der Koordinatenachse y nur ein einziger durch conjugierte projektive Paare besetzter Punkt: der Punkt $(0,0)$. *Alle andere Punkte dieser Achse werden dann unbesetzt.*

Dagegen, wenn $a=-1$ ist, dann folgt aus der Gleichung (2), da $\lambda_2 \neq -1$ ist, dass für alle Werte des Generators die Zahl μ den Wert $\mu=-1$ haben muss und somit werden wir in diesem Falle auf der Geraden $x=a=-1$ nur einen einzigen durch projektive Paare der Punkte bedeckten Punkt haben: den Punkt $(-1,-1)$, *während alle andere Punkte dieser Geraden unbedeckt bleiben.*

Es bleiben noch zwei Fälle, die untersucht werden sollten, um das Bild der Besiedelung aller Punkte der Ebene durch die projektiven Paare zu Ende zu führen, nämlich folgende zwei Fälle: $b=0, \lambda_2 \neq -1$ und, $b=-1$, $\lambda_2 \neq 0$.

Auf der Grundlage der Gleichung (3) wird nun bewiesen: 1) dass auf der Geraden $y=0$ d. h. auf der Koordinatenachse x, nur der Punkt $(0,0)$, und 2) dass auf der Geraden $y=-1$ nur der Punkt $(-1,-1)$ durch die Paare der projektiven Punkte der Punktreihen (A) und (B) besetzt werden kann.

Somit haben wir das folgende Theorem bewiesen:

THEOREM I. Wenn man aus der Koordinatenebene alle auf den Koordinatenachsen und alle auf den Geraden $X=-1$ und $Y=-1$ liegende Punkte mit Ausnahme der Punkte $(0,0)$ und $(-1,-1)$ ausschliesst, so werden alle mögliche Paare projektiver Punkte in der transfiniten Menge der kongruenten, projektiven Punktreinen in ihrer Abbildung alle andere Punkte der Ebene besetzen.

Bei der Fortsetzung unserer Untersuchung werden wir nun voraussetzen dass λ_2 auch die bis jetzt ausgeschlossenen Zahlenwerte 0 und -1 haben kann. Es kommen wieder die vier kritischen Werte $a=0$ und $a=-1$, und $b=0$, und $b=-1$ zum Vorschein, die untersucht werden sollten. Auf analoge Weise wird dann auf Grundlage der Gleichungen (2), (3) und (4) bewiesen, dass unter der obigen Voraussetzung auch die aus der Gleichung (1) gewonnenen Zahlenpaare $(\lambda \mu)$ durch ihre Abbildung alle in der Ebene früher leer gebliebenen Punkte überdecken werden. Folglich haben wir dieses Theorem bekommen:

THEOREM II. Wenn in der bilinearen Gleichung

$$x\,y+(1+\lambda_2)\,x-\lambda_2\,y=0 \tag{5}$$

der Parameter λ_2 *bei der stetigen Umänderung seines Wertes alle Zahlenwerte zwischen* $-\infty$ *und* $+\infty$ *durchläuft, so wird die transfinite Menge aller Zahlenpaare* (xy) *die man aus der Gleichung (5) bekommen wird durch ihre Abbildung alle Punkte der Ebene überdecken.*

Diese Abbildung können wir auch in einem anderen Bilde darstellen. Durch die Gleichung (5) ist nämlich eine unendliche Schaar von Hyperbeln, die sich alle in den Punkten $(0,0)$ und $(-1,-1)$ kreuzen, ausgedrückt. Ihre Asymptoten sind durch die Gleichungen $x=\lambda_2$ und $y=-(1-\lambda_2)$ gegeben, und ihre Zentren liegen auf der Geraden $x+y+1=0$.

Die Degeneration dieser Hyperbeln erfolgt wenn

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1+\lambda_2 \\ 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 1+\lambda_2 & -\lambda_2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

ist, d h. wenn $\lambda_2=0$ oder $\lambda_2=-1$ ist. Im ersten Falle bekommen wir die zwei Geraden: $x=0$ und $y=-1$, und im zweiten die Geraden $x=-1$ und $y=0$. Alle übrigen Hyperbeln sind aus den Abbildungen aller möglichen Paare projektiver Punkte in der transfiniten Menge der kongruenten projektiven Punktreihen entstanden und zwar so, dass jede dieser Hyperbeln aus der unendlichen Punktmenge der Geraden $x=a, a_1, a_2, \ldots\ldots$ bei der Formierung ihrer Struktur nur *einen einzigen Punkt* dieser Geraden in sich aufgenommen hat.

Wenn $\lambda_2=\infty$, dann wird sich der Grundpunkt B_2 auf dem gemeinsamen Träger mit dem Grundpunkte A_2 überdecken. In diesem Falle werden sich aber die Punkte λ und μ, die in den Punktreihen (A) und (B) in projektiver Verwandtschaft sind, nicht nur auf dem gemeinsamen Träger überdecken, sondern es wird zugleich auch $\lambda=\mu$. Infolgedessen wird dann die Gleichung (5) die Gerade $x-y=0$ darstellen.

ПРИМЕНА ПФАФОВЕ МЕТОДЕ И ВЕКТОРСКИХ ЕЛЕМЕНАТА НА ПРОБЛЕМ ТРИЈУ ТЕЛА

од

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

Приказано на II скупу Академије природних наука, од 12 априла 1945)

У низу чланака (1) указао сам на улогу коју може да игра Пфафова метода у анализи различитих проблема механике и физике. Садржај овог чланка је обрада класичног проблема трију тела помоћу Пфафове методе. Уједно дајем и диференцијалне једначине тог проблема написане помоћу векторских елемената кретања друге, односно треће материјалне тачке у односу на прву. Таква обрада проблема трију тела је нова и интересантна и сама по себи и нарочито у вези са теоријом поремећаја.

Пошто сам опште основе Пфафове методе више пута наводио на другим местима, овде се нећу упуштати у излагање тих основа већ ћу претпоставити да су познате. Исто тако нећу улазити у излагање детаља о векторским елементима, јер и то читалац може да нађе у другим мојим радовима. Сем тога сматрам сувишним да понављам основне ствари из теорије проблема трију тела.

Означимо са $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ векторе положаја материјалних тачака са масама M, m, m_1 у односу на непомичну тачку O. Даље ћемо увести разлике

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0,$$

$$\mathfrak{r}_1{}' = \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_0,$$

$$\vec{\rho}\,' = \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R} = \mathfrak{r}'_1 - \mathfrak{r}',$$

одакле непосредно имамо

(1) $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}'$,

(2) $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}'_1$,

(3) $\mathfrak{r}_1' = \mathfrak{r}' + \vec{\rho}'$.

Како импулси тачака имају вредности

$$M\dot{\mathfrak{R}}_0, \quad m\dot{\mathfrak{R}}, \quad m_1\dot{\mathfrak{R}}_1,$$

где тачка означава векторски извод по времену, жива сила T се одређује из једначине

$$2T = M\dot{\mathfrak{R}}_0^2 + m\dot{\mathfrak{R}}^2 + m_1\dot{\mathfrak{R}}_1^2$$

и функција сила има облик

$$U = f\left(\frac{Mm}{r'} + \frac{Mm_1}{r_1'} + \frac{mm_1}{\rho'}\right),$$

где је f коефицијенат пропорционалности и r', r_1', ρ' означавају интензитете одговарајућих вектора $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}_1'$, $\vec{\rho}'$, онда Пфафов израз, који за материјални систем изгледа овако

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i d\mathfrak{R}_i - (T - U)\,dt,$$

са ознакама $\mathfrak{P}_i$ импулс i' те материјалне тачке из датих n тачака система, $\mathfrak{R}_i$ — вектор положаја те тачке, T — жива сила система и U — функција сила, у нашем случају има облик

(4) $$\Phi = M\dot{\mathfrak{R}}_0 d\mathfrak{R}_0 + m\dot{\mathfrak{R}} d\mathfrak{R} + m_1\dot{\mathfrak{R}}_1 d\mathfrak{R}_1 - \left[\frac{1}{2}(M\dot{\mathfrak{R}}_0^2 + m\dot{\mathfrak{R}}^2 + m_1\dot{\mathfrak{R}}_1^2) - f\left(\frac{Mm}{r'} + \frac{Mm_1}{r_1'} + \frac{mm_1}{\rho'}\right)\right] dt.$$

Заменимо сада векторе положаја $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$ вредностима из (1) и (2), тада, место (4), имамо

(5) $$\Phi = [(M + m + m_1)\dot{\mathfrak{R}}_0 + m\dot{\mathfrak{r}}' + m_1\dot{\mathfrak{r}}_1']\,d\mathfrak{R}_0 + m(\dot{\mathfrak{R}}_0 + \dot{\mathfrak{r}}')\,d\mathfrak{r}' + m_1(\dot{\mathfrak{R}}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_1')\,d\mathfrak{r}_1' - \left\{\frac{1}{2}[M\dot{\mathfrak{R}}_0^2 + m(\dot{\mathfrak{R}}_0 + \dot{\mathfrak{r}}')^2 + m_1(\dot{\mathfrak{R}}_0 + \dot{\mathfrak{r}}_1')^2] - f\left(\frac{Mm}{r'} + \frac{Mm_1}{r_1'} + \frac{mm_1}{\rho'}\right)\right\} dt.$$

Како израз Φ не зависи од вектора $\mathfrak{R}_0$, тј.

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{R}_0}\Phi = 0,$$

коефицијенат кад $d\mathfrak{R}_0$ мора имати сталну вредност, тј.

(6) $$S\mathfrak{R}_0 + m\dot{\mathfrak{r}}' + m_1\dot{\mathfrak{r}}_1' = \mathfrak{A} = \overrightarrow{\text{const}}.$$

где је

$$S = M + m + m_1$$

и $\mathfrak{A}$ је сталан вектор.

После тога и изразу (5) пре свега можемо избрисати члан

$$\mathfrak{A}d\mathfrak{R}_0 = d(\mathfrak{A}\mathfrak{R}_0)$$

као тотални диференцијал који не утиче на Пфафове једначине. Затим из тог израза елиминишемо помоћу (6) извод $\dot{\mathfrak{R}}_0$; ако још помножимо резултат константом S, форма (5) прелази у ову еквивалентну форму

(7) $$\Phi = [m(M+m_1)\dot{\mathfrak{r}}' - mm_1\dot{\mathfrak{r}}_1')\,d\mathfrak{r}' + [-mm_1\dot{\mathfrak{r}}' + m_1(M+m)\dot{\mathfrak{r}}_1']d\mathfrak{r}_1' -$$
$$-\left\{\frac{1}{2}[m(M+m_1)\dot{\mathfrak{r}}'^2 + m_1(M+m)\dot{\mathfrak{r}}_1'^2 - 2mm_1(\dot{\mathfrak{r}}'\dot{\mathfrak{r}}_1)] -\right.$$
$$\left. - Sf\left(\frac{Mm}{r'} + \frac{Mm_1}{r_1'} + \frac{mm_1}{\rho'}\right)\right\}dt,$$

где смо за ознаку скаларног производа употребили две ознаке: упоредно писање вектора множитеља једног крај другог без икаквог знака и стављање тих множитеља у округле заграде.

Сад ставимо у (7)

$$\mathfrak{r}' = k\mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{r}_1' = k_1\mathfrak{r}_1, \qquad \vec{\rho}' = k\vec{\rho} = k_1\vec{\rho}_1,$$

где су

$$k = \sqrt[3]{f(M+m)}, \qquad k_1 = \sqrt[3]{f(M+m_1)},$$

и поделимо форму са kk_1mm_1; добићемо еквивалентну форму

(8) $$\Phi = \left(\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{r}}_1\right)d\mathfrak{r} + \left(\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1 - \dot{\mathfrak{r}}\right)d\mathfrak{r}_1 -$$
$$-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}^2 + \frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1^2 - 2(\dot{\mathfrak{r}}\dot{\mathfrak{r}}_1)\right] - \left(\frac{1}{\mu\mu_1} - 1\right)\left(\frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{\beta}{\rho}\right)\right\}dt,$$

где смо употребили ознаке

$$\mu = \frac{\alpha_1 q}{1+\alpha_1}, \qquad \mu_1 = \frac{\alpha}{q(1+\alpha)}, \qquad \beta = \alpha_1\mu_1 = \frac{\alpha\alpha_1}{q(1+\alpha)}$$

са вредностима

$$\alpha = \frac{m}{M}, \qquad \alpha_1 = \frac{m_1}{M}, \qquad q = (1+\alpha_1)^{1/3}(1+\alpha)^{-1/3} = k_1 : k.$$

Приметимо да величине μ, μ_1, α, α_1, β, q нису именовани бројеви, већ апстрактни бројеви без именовања.

Ако уведемо функцију

$$V = \left(\frac{1}{\mu\mu_1} - 1\right)\left(\frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu}{r_1} + \frac{\beta}{\rho}\right),$$

која у новом изразу игра улогу функције силе, тај нови израз можемо претставити овако

$$\Phi = \left(\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{r}}_1\right) d\mathfrak{r} + \left(\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1 - \dot{\mathfrak{r}}\right) d\mathfrak{r}_1 - \tag{9}$$

$$- \left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}^2 + \frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1^2 - 2(\dot{\mathfrak{r}}\dot{\mathfrak{r}}_1)\right] - V\right\} dt.$$

Тај израз можемо звати *редуковани Пфафов израз проблема трију тела.*

Из њега можемо добити две векторске Пфафове једначине

$$\frac{1}{\mu}\ddot{\mathfrak{r}} - \ddot{\mathfrak{r}}_1 = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} V = \left(\frac{1}{\mu\mu_1} - 1\right)\left(-\frac{\mu_1}{r^3}\mathfrak{r} + \frac{\beta}{\rho^3}\vec{\rho}\right),$$

$$-\ddot{\mathfrak{r}} + \frac{1}{\mu_1}\ddot{\mathfrak{r}}_1 = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_1} V = \left(\frac{1}{\mu\mu_1} - 1\right)\left(-\frac{\mu}{r_1^3}\mathfrak{r}_1 - q\frac{\beta}{\rho^3}\vec{\rho}\right).$$

Решење ових једначина у односу на $\ddot{\mathfrak{r}}$ и $\ddot{\mathfrak{r}}_1$ изгледа овако

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{1}{r^3}\mathfrak{r} - \frac{\mu}{r_1^3}\mathfrak{r}_1 + \frac{\lambda}{\rho^3}\vec{\rho}, \tag{10}$$

$$\ddot{\mathfrak{r}}_1 = -\frac{1}{r_1^3}\mathfrak{r}_1 - \frac{\mu_1}{r^3}\mathfrak{r} - \frac{\lambda_1}{\rho_1^3}\vec{\rho}_1, \tag{11}$$

где λ и λ_1 имају вредности

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{1+\alpha}, \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha_1}.$$

Приметимо да се $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_1$ изражавају помоћу $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}_1$ овако

$$\vec{\rho} = q\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r},$$

$$\vec{\rho}_1 = \mathfrak{r}_1 - q^{-1}\mathfrak{r}.$$

Из редукованог Пфафова израза (9) непосредно следује да систем једначина (10), (11) има интеграл живе силе у облику

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}^2+\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1^2-2(\dot{\mathfrak{r}}\,\dot{\mathfrak{r}}_1)\right]-V=\text{const.}, \tag{12}$$

јер ова Пфафова форма не зависи непосредно од времена.

Из Пфафова израза (9) трансформацијом на одговарајуће промењљиве можемо добити и интеграл површина.

Замислимо троугао из вектора $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}_1$ са заједничким почетком. Означимо са $\mathfrak{N}$ орт нормале на раван тог троугла и са φ угао узмеђу $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}_1$.

Прелаз троугла са странама $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$ из једног положаја у бескрајно блиски можемо рашчланити у ове његове промене: дужине вектора $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}_1$ добијају прираштаје dr, dr_1; затим се сав троугао обрне око нормале $\mathfrak{N}$ за угао $d\theta$, угао φ добије прираштај $d\varphi$ и најзад орт нормале $\mathfrak{N}$ узима прираштај $d\mathfrak{N}$. У вези са таквим разлагањем померања и деформисања троугла, прираштаје $d\mathfrak{r}$ и $d\mathfrak{r}_1$ можемо формулисати овим векторским једначинама, како се то непосредно види из једноставних геометриских посматрања,

$$d\mathfrak{r}=r^{-1}\,\mathfrak{r}\,dr+[\mathfrak{N}\mathfrak{r}]\,d\theta-\mathfrak{N}\,(\mathfrak{r}\,d\mathfrak{N}),$$

$$d\mathfrak{r}_1=r_1{}^{-1}\,\mathfrak{r}_1\,dr_1+[\mathfrak{N}\mathfrak{r}_1]\,d\theta-\mathfrak{N}'(\mathfrak{r}_1\,d\mathfrak{N})+[\mathfrak{N}\mathfrak{r}_1]\,d\varphi.$$

Ако сада применимо ове изразе на израчунавање Пфафова израза (9), можемо написати

$$\begin{aligned}\Phi=&\left(r^{-1}\,\mathfrak{r}\,dr,\left(\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}-\dot{\mathfrak{r}}_1\right)\right)+\left(r_1{}^{-1}\,\mathfrak{r}_1\,dr_1,\left(\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1-\dot{\mathfrak{r}}\right)\right)+\\&+\left(\left[\mathfrak{r},\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}-\dot{\mathfrak{r}}_1\right]+\left]\mathfrak{r}_1,\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1-\dot{\mathfrak{r}}\right],\mathfrak{N}\,d\theta\right)-\\&-(\mathfrak{r}\,d\mathfrak{N})\left(\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}-\dot{\mathfrak{r}}_1,\mathfrak{N}\right)-(\mathfrak{r}_1\,d\mathfrak{N})\left(\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1-\dot{\mathfrak{r}}\right)\\&+\left(\left[\mathfrak{r}_1,\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1-\dot{\mathfrak{r}}\right],\mathfrak{N}\,d\varphi\right)\\&-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}}^2+\frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1^2-2(\dot{\mathfrak{r}}\,\dot{\mathfrak{r}}_1)\right]-\left(\frac{1}{\mu\mu_1}-1\right)\left(\frac{\mu_1}{r}+\frac{\mu}{r_1}+\frac{\beta}{\rho}\right)\right\}dt.\end{aligned}$$

Како израз Φ не зависи од самог угла θ, већ само $d\theta$, и то у облику вектора $\mathfrak{R}d\theta$, коефицијенат у скаларном производу код тог вектора мора бити сталан. Према томе долазимо до интеграла

$$(13) \qquad \left[\mathfrak{r}, \frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{r}}_1\right] + \left[\mathfrak{r}_1, \frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1 - \dot{\mathfrak{r}}\right] = \overrightarrow{\mathrm{const}} = \vec{\Gamma},$$

који одговара интегралу момената количина кретања

Написани интеграл може бити добивен и непосредно из Пфафових диференцијалних једначина. Ако прву Пфафову једначину помножимо слева са $\mathfrak{r}$ а другу са $\mathfrak{r}_1$ и саберемо, имамо једначину

$$(14) \qquad \left[\mathfrak{r}, \frac{1}{\mu}\ddot{\mathfrak{r}} - \ddot{\mathfrak{r}}_1\right] + \left[\mathfrak{r}_1, \frac{1}{\mu_1}\ddot{\mathfrak{r}}_1 - \ddot{\mathfrak{r}}\right] \equiv 0,$$

јер са десне стране сем чланова са $[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$ и $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_1]$ имамо збир

$$[\mathfrak{r}, \vec{\rho}] - q[\mathfrak{r}_1, \vec{\rho}] = -[q\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}, \vec{\rho}] = -[\vec{\rho}, \vec{\rho}] \equiv 0.$$

Из једначине (14) непосредно следује интеграл (13), јер после диференцирања (13) по времену имамо чланове једначине (14), а сем тога чланове

$$\left[\dot{\mathfrak{r}}, \frac{1}{\mu}\dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{r}}_1\right] + \left[\dot{\mathfrak{r}}_1, \frac{1}{\mu_1}\dot{\mathfrak{r}}_1 - \dot{\mathfrak{r}}\right],$$

који доводе идентично до нуле.

Вратимо се сада проучавању једначина (10) и (11).

Једначину (10) можемо написати

$$\ddot{\mathfrak{r}} = \mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\left(\frac{1}{r} + R\right),$$

где је

$$R = -\frac{\mu}{r_1^3}(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) + \frac{\lambda}{\rho},$$

јер су

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}\mathfrak{r},$$

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\frac{\mu}{r_1^3}(\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) = \frac{\mu}{r_1^3}\mathfrak{r}_1,$$

$$\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\frac{\lambda}{\rho} = \lambda\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}(\rho^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\rho^2)^{-\frac{3}{2}}\lambda\,\mathrm{grad}_{\mathfrak{r}}\rho^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho^{-3}\lambda(-2q\mathfrak{r}_1 + 2\mathfrak{r}) = \lambda\rho^{-3}\vec{\rho}.$$

Слично можемо трансформисати и једначину (11) и, према томе, написати овај систем једначина

$$(15) \qquad \ddot{\mathfrak{r}} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} (r^{-1} + R),$$

$$(16) \qquad \ddot{\mathfrak{r}}_1 = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}_1} (r_1^{-1} + R_1),$$

где су

$$R = -\mu r_1^{-3} (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) + \lambda \rho^{-1},$$

$$R_1 = -\mu_1 r^{-3} (\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1) + \lambda_1 \rho_1^{-1}.$$

Сматрајмо сада једначину (15) као Пфафову једначину форме

$$(17) \qquad \Phi^* = \dot{\mathfrak{r}} d\mathfrak{r} - \left(\frac{1}{2} \dot{\mathfrak{r}}^2 - r^{-1} - R \right) dt.$$

Ово можемо да урадимо, јер прва једначина за променљиву $\mathfrak{r}$ заиста изгледа овако

$$d\dot{\mathfrak{r}} = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathfrak{r}}^2 - r^{-1} - R \right) dt = \operatorname{grad}_{\mathfrak{r}} (r^{-1} + R)\, dt$$

и, према томе, доводи до једначине (15), а друга једначина за $\dot{\mathfrak{r}}$ даје

$$0 = \operatorname{grad}_{\dot{\mathfrak{r}}} \Phi^* = d\mathfrak{r} - \dot{\mathfrak{r}}\, dt$$

и стоји према томе у сагласности са вредношћу $\dot{\mathfrak{r}}$ као векторског извода вектора $\mathfrak{r}$ по времену.

Што се тиче једначине која одговара времену t, не бисмо могли написати сталност коефицијента код dt, јер сада наша форма зависи и од времена, које улази у функцију R помоћу променљивих $\mathfrak{r}_1$ и $\vec{\rho}$. То је важна примедба за раздвајање проблема трију тела помоћу раздвајања Пфафова израза целог проблема на Пфафове изразе за једну односно другу материјалну тачку.

Слично (17), за другу тачку имамо Пфафову форму

$$(18) \qquad \Phi_1^* = \dot{\mathfrak{r}}_1 d\mathfrak{r}_1 - \left(\frac{1}{2} \dot{\mathfrak{r}}_1^2 - r_1^{-1} - R_1 \right) dt.$$

Како кретање сваке од наших тачака можемо сматрати као Кеплерово кретање (у широком смислу те речи[1]) са дејством силе поремећаја од друге тачке, за такво оскулаторно

1) тј. оно може бити по елементу сваког од коничних пресека (елип., параб., хиперб.) са одређеном секторском брзином.

Кеплерово кретање можемо увести наша два векторска елемента. Означимо те елементе за прву планету са $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{G}$, а за другу са $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{G}_1$ (в., на пример, последњи чланак из наведених у литератури).

Сваку од Пфафових форама (17) и (18) можемо трансформисати на векторске елементе и за нове форме написати Пфафове једначине. Ако те једначине решимо у односу на изводе $\dot{\mathfrak{C}}$, $\dot{\mathfrak{G}}$, $\dot{\mathfrak{C}}_1$, $\dot{\mathfrak{G}}_1$, како смо то урадили у последњем од наведених чланака, добићемо овај систем векторских диференцијалних једначина

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{C}} &= [\mathfrak{C},\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}} R\,] + [\mathfrak{G},\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\ R\,],\\
\dot{\mathfrak{G}} &= [\mathfrak{G},\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}} R\,] + [\mathfrak{F},\ \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}}\ R\,],
\end{aligned}
$$

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{C}}_1 &= [\,\mathfrak{C}_1, \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}_1} R_1] + [\mathfrak{G}_1, \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}_1} R_1],\\
\dot{\mathfrak{G}}_1 &= [\mathfrak{G}_1, \mathrm{grad}_{\mathfrak{C}_1} R_1] + [\mathfrak{F}_1, \mathrm{grad}_{\mathfrak{G}_1} R_1],
\end{aligned}
$$

где су

$$\mathfrak{F} = C^{-2}(1-D^2)\,\mathfrak{C} + C^{-2}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})\,\mathfrak{G} - C^{-2}D^{-2}(1-D^2)^{3/2}[\mathfrak{C},\mathfrak{G}],$$

$$\mathfrak{F}_1 = C_1^{-2}(1-D_1^2)\,\mathfrak{C}_1 + C_1^{-2}(\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1)\,\mathfrak{G}_1 - C_1^{-2}D_1^{-2}(1-D_1^2)^{3/2}[\mathfrak{C},\mathfrak{G}],$$

при чему је са D означен интензитет вектора

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} - C^{-2}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})\,\mathfrak{C}.$$

Једначине (19), (20) су диференцијалне једначине проблема трију тела изражене помоћу векторских планетских елемената.

Унапред можемо написати два интеграла система ових једначина: један скаларни – интеграл живе силе, и други векторски — интеграл површина Први интеграл је дат обрасцем (12), други обрасцем (13). За изражавање тих интеграла помоћу векторских елемената потребно је искористити изразе вектора $\mathfrak{r}$, $\dot{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{r}_1$, $\dot{\mathfrak{r}}_1$ у функцији елемената $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$, односно $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{G}_1$ и времена. Тражене изразе можемо написати према обрасцима наведеним у нашем цитираном последњем чланку овако

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{r} &= B\{BD(\cos u - D)\,\mathfrak{D} + \sin u.\,[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\},\\
\dot{\mathfrak{r}} &= B^{-2}D^{-3}(1-D\cos u)^{-1}\{-BD\sin u.\,\mathfrak{D} + \cos u.\,[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]\}\\
\mathfrak{r}_1 &= B_1\{B_1D_1(\cos u_1 - D_1)\,\mathfrak{D}_1 + \sin u_1.\,[\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]\},\\
\dot{\mathfrak{r}}_1 &= B_1^{-2}D_1^{-3}(1-D_1\cos u_1)^{-1}\{-B_1D_1\sin u_1.\,\mathfrak{D}_1 + \cos u_1.\,[\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1]\},
\end{aligned}
$$

где смо применили ознаке

$$B = CD^{-1}(1-D^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad B_1 = C_1 D_1^{-1}(1-D_1^2)^{-\frac{1}{2}},$$

и искористили углове u и u_1 (ексцентричне аномалије), који су везани са временом Кеплеровом једначином

$$u - D\sin u = n(t-\tau),$$

односно

$$u_1 - D_1 \sin u_1 = n_1(t-\tau_1),$$

при чему су

$$n = (C^{-1}\sqrt{1-D^2})^3, \qquad n_1 = (C_1^{-1}\sqrt{1-D_1^2})^3$$

и

$$n\tau = C^{-1}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}), \qquad n_1\tau_1 = C_1^{-1}(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}_1).$$

Затим треба извршити смену. Нећемо овде наводити резултате те смене. Они су у општем случају доста компликовани. На другом месту ћемо искористити те резултате у приближној форми када можемо занемарити чланове вишега реда упоредно са члановима првога реда.

Литература

A. Bilimovitch — Über die Anwendungen der Pfaffschen Methode in der Störungstheorie. Astr. Nachrichten. Band 273, H. 4

А. Билимовић — Пфафов општи принцип Механике. Глас CLXXXIX.

— Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог проблема. Глас CLXXXIX

— Пфафова метода у геометриској оптици. Глас CLXXXIX.

— Примена Пфафове методе на теорију подешених каноничних променљивих. Глас XC.

— Пфафов израз и векторске диференцијалне једначине планетских поремећаја. Глас CXC

APPLICATION OF PFAFF'S METHOD AND OF VECTORAL ELEMENTS TO THE PROBLEM OF THREE BODIES

By ANTON D. BILIMOVITCH

(Read at the meeting of the Serbian Academy of Natural Science 12-IV-1945)

RÉSUMÉ

In several of my articles I indicated the role which the method of Pfaff may play in the investigation of different questions in Mechanics and Physics. This article contains the problem of three bodies worked out by Pfaff's method. We give, by means of vectoral elements the differential equations of motions of the second and third particle referred to the first. This is a new setting, which is interesting in itself, as well as by reason of its connection with the theory of planetary perturbations.

Since I have repeatedly mentioned important elements of Pfaff's method in my other articles, I shall not dwell on it. For the same reason I do not enter into an explanation of vectoral elements and do not explain the elements from the theory of the problem of three bodies.

УВОЂЕЊЕ УГЛА, ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА И БРОЈА π У АРИТМЕТИЦИ

од

РАДИВОЈА КАШАНИНА

(Примљено на II скупу Академије природних наука од 12 априла 1945 год.)

Чим се после Аритметике реалних бројева пређе на Аритметику комплексних, потребно је имати појам угла, тригонометријских функција и броја π. Ови се појмови, међутим, узимају из Геометрије или из Теорије реалних функција. Циљ ове скице је да покаже начин и пут како се они могу увести још у Аритметици.

Претпостављамо да је на било који начин створена већ Аритметика реалних бројева, да је уведен појам низа и граничне вредности код реалних бројева, да су уведени комплексни бројеви у облику $a+bi$ и четири основне алгебарске операције с њима, да је објашњено $(a+bi)^n$ ако је n цео позитиван број (као итерација производа), да је дефинисано $(a+bi)^{-n}=1:(a+bi)^n$ и $(a+bi)^0=1$, и да је познато биномно правило

I

Нека буде n природни број. По биномном правилу је

$$(a+bi)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} bi - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 i + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 + \cdots$$

$$= \left[a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \cdots \right] +$$

$$+ i \left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots \right].$$

Реални део на десној страни означићемо са $A(n)$, а фактор уз i са $B(n)$:

$$\left.\begin{aligned} A(n) &= a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - \cdots\cdots \\ B(n) &= \binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$A(n)$ и $B(n)$ су збирови од извесног коначног броја сабирака. Са тим ознакама биће

$$(a+bi)^n = A(n) + i\,B(n). \tag{2}$$

Какву ће вредност имати $A(n)$ и $B(n)$ кад су a и b дати, зависи од n.

Слично ће бити

$$(a-bi)^n = A(n) - i\,B(n). \tag{3}$$

Из (2) и (3) излази после множења

$$A^2(n) + B^2(n) = (a^2+b^2)^n. \tag{4}$$

Нека и m буде природни број. Тада је, за исто a и b,

$$(a+bi)^m = A(m) + i\,B(m).$$

Множењем добивамо, с једне стране,

$$(a+bi)^m \cdot (a+bi)^n = (a+bi)^{m+n} = A(m+n) + i\,B(m+n),$$

а, с друге стране,

$$\begin{aligned}(a+bi)^m \cdot (a+bi)^n &= [A(m) + i\,B(n)] \cdot [A(n) + i\,B(n)] \\ &= [A(m)\,A(n) - B(m)\,B(n)] + i\,[B(m)\,A(n) + A(m)\,B(n)].\end{aligned}$$

Према томе је

$$\left.\begin{aligned} A(m+n) &= A(m)\,A(n) - B(m)\,B(n) \\ B(m+n) &= B(m)\,A(n) + A(m)\,B(n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Обрнуто, нека $A(n)$ и $B(n)$ буду неки изрази од n за које су релације (5) испуњене кад је n природни број. Ставимо ли $A(1) = a$ и $B(1) = b$, може се доказати да онда важи једначина (2). То је, наиме, тачно за $n=1$, јер је

$$\mathrm{A}(1) + i\,B(1) = a + bi = (a+bi)^1.$$

Претпоставимо да ово важи за n. Биће

$$\begin{aligned} A(n+1)+iB(n+1) &= [A(n)A(1)-B(n)B(1)] \\ &\quad + i[B(n)A(1)+A(n)B(1)] \\ &= [A(n)+iB(n)]A(1)+i[A(n)+iB(n)]B(1) \\ &= [A(n)+iB(n)]\cdot[A(1)+iB(1)] \\ &= (a+bi)^n\cdot(a+bi)=(a+bi)^{n+1}. \end{aligned}$$

Тврђење је, дакле, потпуном индукцијом доказано. Релације (5) су, према томе, за изразе $A(n)$ и $B(n)$ карактеристичне, ако је уз њих $A(1)=a$ и $B(1)=b$.

Нека буде $m>n$, тј. $m-n>0$. Како је $m=n+(m-n)$, можемо писати на основи (5)

$$A(m)=A(n)A(m-n)-B(n)B(m-n),$$
$$B(m)=B(n)A(m-n)+A(n)B(m-n).$$

Помножимо ли прву једначину са $A(n)$ и другу са $B(n)$, па их саберемо, а затим прву једначину са $-B(n)$ и другу са $A(n)$, па их саберемо, добићемо, узевши у обзир (4),

$$\begin{aligned} A(m)A(n)+B(m)B(n) &= [A^2(n)+B^2(n)]A(m-n) \\ &= (a^2+b^2)^n A(m-n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(m)A(n)-A(m)B(n) &= [A^2(n)+B^2(n)]B(m-n) \\ &= (a^2+b^2)^n B(m-n). \end{aligned}$$

Узећемо да су бројеви a и b такви да је $a^2+b^2=1$. Ако нису, ставићемо

$$\alpha=\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \beta=\frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}},$$

па ће бити $\alpha^2+\beta^2=1$ и

$$(a+bi)^n=\left(+\sqrt{a^2+b^2}\right)^n(\alpha+\beta i)^n.$$

Број $\rho=+\sqrt{a^2+b^2}$ зове се *модул* комплексног броја $a+bi$. Тако смо степеновање ма ког комплексног броја свели на степеновање његова модула и степеновање комплексног броја са модулом 1. У свем даљем претпостављамо зато да комплексан број има модул 1 и да се на такав комплексан број мисли кад проучавамо изразе $A(n)$ и $B(n)$. Из (4) онда излази

$$A^2(n) + B^2(n) = 1, \tag{6}$$

па је

$$\left.\begin{aligned} A(m-n) &= A(m)\,A(n) + B(m)\,B(n), \\ B(m-n) &= B(m)\,A(n) - A(m)\,B(n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из једначина (5) не излази као последица једначина (6), тј. не излази да комплексан број има модул 1, јер једначине (5) важе и кад модул није 1. Узмимо, међутим, једначине (7) као полазне. Помоћу њих добивамо

$$A(n) = A[(m+n)-m] = A(m+n)\,A(m) + B(m+n)\,B(m),$$

$$B(n) = B[(m+n)-m] = B(m+n)\,A(m) - A(m+n)\,B(m).$$

Помножимо ли прву једначину са $A(m)$ и другу са $-B(m)$, па их саберемо, а затим прву са $B(m)$ и другу са $A(m)$, па их саберемо, добићемо

$$\left.\begin{aligned} A(m)\,A(n) - B(m)\,B(n) &= [A^2(m) + B^2(m)]\,A(m+n), \\ B(m)\,A(n) + A(m)\,B(n) &= [A^2(m) + B^2(m)]\,B(m+n). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пишемо ли

$$A(m) = A[(n+m)-n], \qquad B(m) = B[(n+m)-n],$$

тј. измењамо ли слова m и n добићемо истим путем

$$A(n)\,A(m) - B(n)\,B(m) = [A^2(n) + B^2(n)]\,A(n+m),$$

$$B(n)\,A(m) + A(n)\,B(m) = [A^2(n) + B^2(n)]\,B(n+m).$$

И тако, имамо

$$A^2(m) + B^2(m) = A^2(n) + B^2(n), \tag{9}$$

ма шта били природни бројеви m и n. Узмемо ли специјално $m=2$ и $n=1$, добићемо из полазних једначина (7)

$$A(1) = A(2)\,A(1) + B(2)\,B(1),$$

$$B(1) = B(2)\,A(1) - A(2)\,B(1),$$

тј.

$$[1 - A(2)]\,A(1) = B(1)\,B(2), \qquad [1 + A(2)]\,B(1) = A(1)\,B(2),$$

па множењем добивамо

$$[1 - A^2(2)]\,A(1)\,B(1) = A(1)\,B(1)\,B^2(2),$$

тј.

$$[A^2(2) + B^2(2) - 1]\,A(1)\,B(1) = 0.$$

Одбацивши тривијалне случајеве $A(n) = 0$ и $B(n) = 0$, излази одавде

$$A^2(2) + B^2(2) = 1.$$

Према томе, из (7) излази, због (9), као последица (6). Онда из (8) излази као последица (5).

На основи изложеног, из (7) излази као последица и (5) и (6), тј. релације (7) су карактеристичне за комплексне бројеве модула 1. Зато ћемо од њих поћи као основних, а релације (5) и (6) узети као њихове непосредне последице. Уопште је, дакле, ако је n природни број,

$$(a + bi)^n = \rho^n\,[A(n) + i\,B(n)], \tag{10}$$

где је ρ модул комплексног броја $a + bi$.

II

Изрази $A(n)$ и $B(n)$ дефинисани су сад за природне бројеве n помоћу

$$(\alpha + \beta i)^n = A(n) + i\,B(n), \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \tag{11}$$

а за њих важе релације (7); ако ставимо $A(1) = \alpha$ и $B(1) = \beta$, биће и обрнуто $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, а $A(n)$ и $B(n)$ биће изрази из (11). Испитаћемо да ли се изрази који задовољавају једначине (7) могу, помоћу тих једначина, дефинисати и за друге реалне вредности n, а не само за природне бројеве n.

Ставимо ли у (7) $m = n$, добићемо, помоћу (6),

$$A(0) = A^2(n) + B^2(n) = 1, \qquad B(0) = B(n)\,A(n) - A(n)\,B(n) = 0.$$

Према томе је

$$A(0) = 1, \qquad B(0) = 0. \tag{12}$$

Ставимо ли сад у (7) $m = 0$, биће

$$A(-n) = A(0)\,A(n) + B(0)\,B(n) = A(n)$$

$$B(-n) = B(0)\,A(n) - A(0)\,B(n) = -B(n).$$

Према томе је

$$A(-n)=A(n), \qquad B(-n)=-B(n). \tag{13}$$

На тај начин је одређено шта треба разумевати под $A(n)$ и $B(n)$ и онда кад је n негативан број или нула, а да једначине (7) остану на снази.

Према (13) је, ако је n цео позитиван број,

$$A(-n)+iB(-n)=A(n)-iB(n).$$

С друге стране, имамо

$$(\alpha+\beta i)^{-n}=\frac{1}{(\alpha+\beta i)^n}=\frac{(\alpha-\beta i)^n}{(\alpha+\beta i)^n(\alpha-\beta i)^n}=\frac{(\alpha-\beta i)^n}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$=(\alpha-\beta i)^n=A(n)-iB(n),$$

те је

$$(\alpha+\beta i)^{-n}=A(-n)+iB(-n).$$

Другим речима, (11) важи и онда кад је n негативан цео број. На основи (12), види се лако да важи и за $n=0$.

Узмемо ли $m=n$ добићемо из (5)

$$A(2n)=A^2(n)-B^2(n), \qquad B(2n)=2A(n)B(n), \tag{14}$$

што са (6) даје

$$A^2(n)=\frac{1+A(2n)}{2}, \qquad B^2(n)=\frac{1-A(2n)}{2}. \tag{15}$$

Дакле,

$$\left.\begin{aligned}
&A(1)=\alpha, && B(1)=\beta,\\
&A^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+A(1)}{2}, && B^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-A(1)}{2},\\
&A^2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1+A\left(\frac{1}{2}\right)}{2}, && B^2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1-A\left(\frac{1}{2}\right)}{2},\\
&\text{— — — — — — — — —}, && \text{— — — — — — — — —},\\
&A^2\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\frac{1+A\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2}, && B^2\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\frac{1-A\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2},\\
&\text{— — — — — — — — —}. && \text{— — — — — — — — —}.
\end{aligned}\right\} \tag{15^{bis}}$$

Из ових једначина могу се постепено израчунати $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $A\left(\frac{1}{4}\right), \ldots, A\left(\frac{1}{2^k}\right), \ldots$ и $B\left(\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{4}\right), \ldots, B\left(\frac{1}{2^k}\right), \ldots$

Што се тиче знака установићемо ово: за $B\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}\right)$ $\ldots$, $B\left(\frac{1}{2^k}\right)$ узимаћемо увек позитивне вредности. Из друге једначине у (14) излази за $n=\frac{1}{2^{k+1}}$

$$B\left(\frac{1}{2^k}\right)=2\,A\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)B\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

па ће $A\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)$ за $k \geqq 1$ бити позитивно. За $k=0$ имамо

$$B(1)=2\,A\left(\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2}\right),$$

па $A\left(\frac{1}{2}\right)$ има знак као и $B(1)=\beta$. Према томе $A\left(\frac{1}{4}\right)$, $A\left(\frac{1}{8}\right)$, $\ldots$, увек су позитивни, а $A\left(\frac{1}{2}\right)$ је позитивно ако је $B(1)=\beta$ позитивно, а негативно ако је $B(1)=\beta$ негативно. Ако је $B(1)=\beta=0$, биће, према (6), $A(1)=-1$ или $A(1)=+1$; у првом случају је $A\left(\frac{1}{2}\right)=0$, а у другом узећемо $A\left(\frac{1}{2}\right)>0$.

На тај начин, $A(n)$ и $B(n)$ дефинисани су за свако $n=\frac{1}{2^k}$. Помоћу (5) могу се онда дефинисати и за свако $\frac{p}{2^k}$, где је p цео позитиван број, а помоћу (13) и за свако $-\frac{p}{2^k}$.

Сваки реалан број може се узети за граничну вредност низа бројева облика $\pm\frac{p}{2^k}$. Полазећи од тога, могли би се $A(n)$ и $B(n)$ дефинисати за свако реално n, као граничне вредности низова $A(n)$ и $B(n)$. Једначине (5) и (6) остају, као последице једначина (7), увек у важности.

Из (6) се види да је

$$|A(n)| \leqq 1, \qquad |B(n)| \leqq 1. \tag{16}$$

Према ономе како смо установили знаке и према (16), биће за природни број $k \geqq 1$

$$0 \leqq A\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leqq 1. \tag{17}$$

Из (5) и (7) излази

$$A(m-n) - A(m+n) = 2B(m)B(n).$$

Узмемо ли $m+n = \frac{1}{2^{k+1}}$, $m-n = \frac{1}{2^{k+2}}$, биће

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}}\right) = \frac{3}{2^{k+2}}, \qquad n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}}\right) = \frac{1}{2^{k+3}},$$

па је

$$A\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) - A\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = 2B\left(\frac{3}{2^{k+2}}\right) B\left(\frac{1}{2^{k+3}}\right).$$

Одавде излази да је

$$A\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) \geqq A\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right). \tag{18}$$

Према (17) и (18) низ $A\left(\frac{1}{2^k}\right)$, $(k = 1, 2, \cdots)$ ограничен је монотон низ. Он је, дакле, конвергентан и лимес му није мањи од 0 ни већи од 1. Означимо ли тај лимес са x, из једначине

$$A^2\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1 + A\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2}$$

излази

$$x^2 = \frac{1+x}{2}.$$

Корени ове једначине су 1 и $-\frac{1}{2}$, па је

$$\lim_{k \to +\infty} A\left(\frac{1}{2^k}\right) = 1. \tag{19}$$

Из (16) излази онда

$$\lim_{k \to +\infty} B\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0. \tag{20}$$

III

По другој једначини у (14) имамо

$$B(2^{-k}) = 2A(2^{-k-1})B(2^{-k-1}). \tag{21}$$

Према ономе како смо установили знаке, било је $A\left(\frac{1}{4}\right) \geqq 0$; сигурно је, дакле, $A\left(\frac{1}{8}\right) > 0$, и уопште $A(2^{-k}) > 0$ за $k \geqq 3$. Према томе

$$\frac{B(2^{-k})}{A(2^{-k})} = 2\frac{B(2^{-k-1})}{A(2^{-k-1})} \cdot \frac{A^2(2^{-k-1})}{A(2^{-k})}.$$

Међутим, по првој једначини из (14) је

$$A(2^{-k}) = A^2(2^{-k-1}) - B^2(2^{-k-1}),$$

па је

$$\frac{A^2(2^{-k-1})}{A(2^{-k})} = 1 + \frac{B^2(2^{-k-1})}{A(2^{-k})} \geqq 1 \text{ за } k \geqq 3.$$

Дакле,

$$\frac{B(2^{-k})}{A(2^{-k})} \geqq 2\frac{B(2^{-k-1})}{A(2^{-k-1})} \text{ за } k \geqq 3,$$

тј.

$$2^k\frac{B(2^{-k})}{A(2^{-k})} \geqq 2^{k+1}\frac{B(2^{-k-1})}{A(2^{-k-1})} \text{ за } k \geqq 3.$$

Према томе, монотони неасцендентан низ са позитивним члановима

$$\frac{2^k B(2^{-k})}{A(2^{-k})}, \quad (k = 3, 4, \cdots)$$

конвергентан је; његов лимес ћемо означити са φ:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2^k B(2^{-k})}{A(2^{-k})} = \varphi.$$

На основи (19), конвергентан је онда и низ $2^k B(2^{-k})$ и има исти лимес:

$$\lim_{k \to +\infty} 2^k B(2^{-k}) = \varphi. \tag{22}$$

Лако је видети и како овај низ тежи ка φ. Из (21) имамо, наиме, за $k \geqq 3$

$$B(2^{-k}) \leqq 2B(2^{-k-1}),$$

тј.

$$2^k B(2^{-k}) \leqq 2^{k+1} B(2^{-k-1}),$$

па је низ монотон недесцендентан. И тако је

$$2^k B(2^{-k}) \leqq \varphi \leqq \frac{2^k B(2^{-k})}{A(2^{-k})}. \tag{23}$$

Колико ће бити φ зависи од α и β. Сви комплексни бројеви $a+bi$ који имају исто α и исто β имаће исто φ. Овај број φ зваћемо *аргумент* комплексног броја $a+bi$.

Како је $0 \leqq B(2^{-k}) \leqq 1$ за $k \geqq 3$, то из (23) излази

$$0 \leqq \varphi \leqq 2^3 \frac{B(2^{-3})}{A(2^{-3})}.$$

Из (15) добивамо

$$A^2(2^{-3}) = \frac{1 + A(2^{-2})}{2}, \qquad B^2(2^{-3}) = \frac{1 - A(2^{-2})}{2},$$

па је

$$\left[\frac{B(2^{-3})}{A(2^{-3})}\right]^2 = \frac{1 - A(2^{-2})}{1 + A(2^{-2})}.$$

Како је $0 \leqq A(2^{-2}) \leqq 1$, то је

$$\left[\frac{B(2^{-3})}{A(2^{-3})}\right]^2 \leqq 1.$$

Због $B(2^{-3}) \geqq 0$ и $A(2^{-3}) > 0$ имамо, дакле,

$$0 \leqq \frac{B(2^{-3})}{A(2^{-3})} \leqq 1,$$

па је

$$0 \leqq \varphi \leqq 8. \tag{24}$$

Специјално за $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ излази из (15^{bis}) $B(2^{-k}) = 0$ за свако k, тј. онда је $\varphi = 0$.

За $\alpha = -1$ и $\beta = 0$ излази из (15^{bis}):

$$A(1) = -1, \qquad B(1) = 0,$$

$$A(2^{-1}) = 0, \qquad B(2^{-1}) = 1,$$

$$A(2^{-2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad B(2^{-2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$A(2^{-3}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad B(2^{-3}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$A(2^{-4})=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\qquad B(2^{-4})=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$A(2^{-5})=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\qquad B(2^{-5})=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$\text{— — — — — — — — — — — — — —},\qquad \text{— — — — — — — — — — — — — —}.$$

Аргумент у овом случају означићемо са π. Овај број је, дакле, лимес низа

$$0,\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2-\sqrt{2}},\ 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ \ldots\ldots$$

Правилност у формирању чланова низа је евидентна. Израчунамо ли $\sqrt{2}$ на 16 децимала и зауставимо ли се на шестом члану овог низа, може се, узевши у помоћ и (23), израчунати $\pi\approx 3{,}14$.

IV

Ако је n природни број, може се из (5) лако добити потпуном индукцијом

$$[A(r)+iB(r)]^n=A(nr)+iB(nr),$$

ма какав био реалан број r. За $r=\dfrac{1}{n}$ имамо одавде

$$\left[A\left(\frac{1}{n}\right)+iB\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n=A(1)+iB(1)=\alpha+\beta i.$$

Према томе је, по биномном правилу,

$$\alpha=A^n\left(\frac{1}{n}\right)-\binom{n}{2}A^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)B\left(\frac{1}{n}\right)+\binom{n}{4}A^{n-4}\left(\frac{1}{n}\right)B^4\left(\frac{1}{n}\right)-\cdots$$

$$\beta=\binom{n}{1}A^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)B\left(\frac{1}{n}\right)-\binom{n}{3}A^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)B^3\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots,$$

где сабирци на десној страни долазе у коначном броју. Сабирци имају облик

$$\binom{n}{j} A^{n-j}\left(\frac{1}{n}\right) B^j\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{j!} A^{n-j}\left(\frac{1}{n}\right) B^j\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right)}{j!} A^{n-j}\left(\frac{1}{n}\right)\left[nB\left(\frac{1}{n}\right)\right]^j.$$

Узмимо $n=2^k$. Кад $k \to +\infty$, онда

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{n}\right) \to 1, \quad A\left(\frac{1}{n}\right) \to 1, \quad nB\left(\frac{1}{n}\right) \to \varphi.$$

Ово нас наводи на идеју да испитујемо везу између α и β с једне стране и израза

$$s_\nu = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots + (-1)^\nu \frac{\varphi^{2\nu}}{(2\nu)!},$$

$$\bar{s}_\nu = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots + (-1)^\nu \frac{\varphi^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

с друге стране. Може се показати да је

$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = \alpha, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \bar{s}_\nu = \beta. \tag{25}$$

Да бисмо назначили да су α и β одређени са φ писаћемо

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi.$$

*

Мислимо да је у предњем излагању довољно скициран начин и пут којим се може ићи.

Полазећи од $(a+b)^n$ и $(a-b)^n$ могу се сличним путем увести хиперболичка амплитуда, хиперболичке функције и број e.

L'INTRODUCTION EN ARITHMÉTIQUE DE L'ANGLE, DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET DU NOMBRE π

par
RADIVOJE KAŠANIN

Lorsqu'en Arithmétique on doit passer des nombres réels aux nombres complexes, on doit recourir à la notion d'angle, de fonctions trigonométriques et de nombre π. Or, ces notions sont empruntées à la Géométrie ou à la Théorie des fonctions d'une variable réelle.

On se propose dans le présent travail de montrer un procédé permettant de les introduire déjà en Arithmétique.

Nous supposons que l'on ait déjà crée, d'une manière quelconque, l'Arithmétique des nombres réels, que l'on ait déjà introduit les notions de suite et de limites des nombres réels, que l'on ait introduit aussi les nombres complexes, sous la forme $a+bi$, ainsi que les quatre opérations élémentaires algébriques avec ces derniers, que l'on ait expliqué $(a+bi)^n$ pour n entier et positif (comme itération de produits), que l'on ait défini

$$(a+bi)^{-n}=1:(a+bi)^n \text{ et } (a+bi)^0=1,$$

et, enfin, la formule de binôme connue.

Alors on peut, par une méthode purement arithmétique, définir l'angle, les fonctions trigonométriques et le nombre π.

О ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА THOMAS-FERMI-ЕВА ТИПА. ЕГЗИСТЕНЦИЈА ИНТЕГРАЛА

од

ВОЈИСЛАВА Г. АВАКУМОВИЋА

(Примљено на III скупу Академије природних наука, од 9 авг. 1945 год.)

1. Са E. Picard-овом класичном расправом „Sur l' application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles"[1]) почиње интензивно проучавање проблема егзистенције интеграла опште диференцијалне једначине $y'' = f(x, y, y')$ који пролазе кроз две унапред дате тачке xy равни.

У случају када једна или обе од ових тачака леже у бескрајности појављују се специјалне потешкоће; због тога је проучавање овог проблема још увек далеко од неког коначног резултата.

Овакво стање ствари ми је дало повода да овде изнесем неке од теорема до којих сам дошао бавећи се једном класом нелинеарних једначина које генералишу т. зв. Thomas-Fermi-еве диференцијалне једначине.

2. У случају кад су густина ρ и потенцијал u неког система функције удаљености од неке сталне тачке (у којој замишљамо почетак координатног ситема) Poiss n-ова једначина гласи

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = -4\pi\rho\,. \tag{1}$$

Гранични услови које треба да задовољава решење ове једначине постављају се према природи физичког задатка; они

[1]) Picard E. — Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles. Paris 1930

који нас овде интересују гласе:

2) $$\lim_{r=0} r\,u = \text{const}.$$

и

3) $$\int \rho\, d\tau = \text{const.},$$

где је интеграл узет преко лопте са бескрајно великим полупречником. Као конкретно физичко тумачење оваквих граничних услова може да послужи следеће.

Електрони неког атома са великим нуклеарним бројем Z могу се замислити као електронски гас при апсолутној температури од 0 степени. Означимо ли са ρ густину овог гаса, а са μ масу мирног електрона са електричним оптерећењем $-e$, онда између ρ и $u=-e\,v$, као што је то показао Fermi[2]), постоји веза $\rho = c\,v^{3/2}$, где је $c = 2^{9/2}\pi\mu^{3/2}e^{3/2}/3\,h^3$ а h Planck-ова универзална константа. Poisson-ова једначина сада гласи

$$\frac{d^2 v}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 4\pi e\, c\, v^{3/2}$$

са граничним условима: $\lim\limits_{r=0} r\,v = Z$, јер је $Z e$ укупно оптерећење језгра и $\int \rho\, d\tau = Z$ јер укупно има Z електрона.

3. Посматрајмо сад нешто општији случај горњег задатка када, место експонента $^3/_2$, стоји ма какав број $\lambda > 0$. Овај се диференцијални проблем може сменама $r = k_1\zeta$ и $v = k_2\,\omega$ (где су k_1 и k_2 подесно биране константе) свести на

$$\frac{d^2\omega}{d\zeta^2} + \frac{2}{\zeta}\frac{d\omega}{d\zeta} = \omega^\lambda;\ \lim_{\zeta=0} \zeta\,\omega = 1;\ \int_0^\infty \omega^\lambda \zeta^2\, d\zeta = 1.$$

Учиним ли још смену $\omega = y/\zeta$, горња једначина прелази у

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} = \zeta^{1-\lambda} y^\lambda.$$

гранични услови у

a) $$\lim_{\zeta=0} y = 1$$

и

b) $$\int_0^\infty y^\lambda \zeta^{2-\lambda}\, d\zeta = 1.$$

---

[2]) Fermi E, — Atti Accad. Lincei (6) 6 (1927) 602—607. Thomas H — Proc. Cambridge 23 (1927) 542—548. Sommerfeld A. — Zeit. f. Physik 78 (1932) 283 - 308. Buch H. and Caldwell S. H. — Physical Review (2) 38 (1931) 1898—1901.

С обзиром на нашу једначину можемо овај интеграл написати и у облику $\int_0^\infty y'' \zeta \, d\zeta$. А како је

$$\int_0^x y'' \zeta \, d\zeta = y(0) + y'(x) \, x - y(x),$$

то услов b) можемо заменити условом

c) $$\lim_{x=\infty} y = 0,$$

кад год је

$$\lim_{x-\infty} y' x = 0.$$

Према томе, уопште узевши, услов c) није еквивалентан услову b). Међутим кад год знамо, као у овом случају, да је $y(x)$ конвексна функција, тада, као што је позната $y' x \to 0$, $x \to \infty$, па, из a) и b), следи c), а из a) и c) следи b).

Метода коју ћу употребити може се без потешкоћа применити и на општије диференцијалне проблеме. Стога ћу овде изнесена испитивања одмах да извршим за општији диференцијални задатак

$$\frac{d^2 y}{d \zeta^2} = f(\zeta) \, y^\lambda ; \quad \lim_{\zeta=0} y = 1 , \quad \lim_{\zeta=\infty} y = 0,$$

где је $f(\zeta)$ нека углавном позитивна функција.

Неки од овде изложених резултата важе и за још општије класе диференцијалних једначина. Ове типове диференцијалних једначина описаћу приликом формулисања теорема.

4. У овом раду употребљаваћу стално неколико данас већ класичних ставова Анализе. Ради прегледности пишем их овде у облику који нам је потребан за наша испитивања.

E. Kamke-ов став. Нека је функција $f(x, y)$ непрекидна у области $\mathfrak{G}$: $\alpha \leq x \leq \beta$, $A \leq y \leq B$; онда свака интегрална крива једначине

$$y'' = f(x, y)$$

која припада области $\mathfrak{G}$ допире и до њена руба.[3])

Peano-Carathéodory-ев став. Нека је функција $f(x_1 y)$ непрекидна за све (x, y) области $\alpha < x < \beta$, $A \leq y \leq B$ и интеграбилна по x за све (x, y) области $\mathfrak{G}$; $\alpha \leq x \leq \beta$, $A \leq y \leq B$;

---

[3]) Kamke E. — Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. 59-65, 75-77.

онда за свако (x_0, y_0) области $\mathfrak{G}$ и свако реално y'_0 постоји најмање једно решење почетног задатка

$$y'' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0'$$ [4]).

H. Lebesgue-ов став. Нека је $f_n(x)$ један низ функција интеграбилних у размаку (α, β) и нека за све x овога размака

$$f_n(x) \to f(x), \; n \to \infty$$

Онда је

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta f_n(t)\,dt$$

кад год постоји нека интеграбилна функција $F(x)$ таква да за све n и све x размака (α, β) важи неједначина

$$|f_n(x)| < F(x).$$ [5])

Став о зависности интеграла од почетних услова. Нека је функција $f(x, y)$ непрекидна за све (x, y) области $\alpha < x < \beta$, $A \leq y \leq B$ и интеграбилна по x за све (x, y) области $\mathfrak{G}$: $\alpha \leq x \leq \beta$, $A \leq y \leq B$. Нека, даље, кроз сваку тачку области $\mathfrak{G}$ пролази једна и само једна интеграбилна крива једначине

$$y'' = f(x, y)$$

са напред одређеним изводом, онда су све интегралне криве области $\mathfrak{G}$ униформно непрекидне функције почетних услова.[6])

5. Главна теорема овога рада оснива се на више помоћних ставова. Ове помоћне ставове доказаћу у нешто општијем облику но што је овде потребно; то проширење је управо толико колико то дозвољава употребљени начин доказивања.

Овде ћу доказати:

Нека је функција $f(x, y) > 0$ и непрекидна за све (x, y) отворене области

$$G\colon 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 1 + \delta, \quad \delta > 0,$$

[4]) Carathéodory — Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig — Berlin 1918.

[5]) Loc. cit. [4])

[6]) Loc. cit. [3]) стр. 149—151.

и нека:

а) *За свако* $a > 0$ *и* $0 \leq b < 1$ *постоји једно једнозначно решење диференцијалног задатка*

$$y'' = f(x, y)$$

$$y(0) = 1, \quad y(a) = b, \quad y(x) > 0 \text{ за } 0 \leq x \leq a.$$

Онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x, y)$$

$y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0$ (у смислу $\lim\limits_{\xi=\infty} y = 0$), $y > 0$ *за* $x > 0$ *има најмање једну интегралну криву кад год знамо да:*

b) *једначина нема решења које би задовољавало услове*

$$y(\infty) = c, \quad y > 0 \text{ за } x > 0,$$

а где је c *нека позитивна константа мања од* 1.

Споменути Е. Kamke-ов став, примењен на нашу једначину, казује да свака интегрална крива ко:а спаја тачке (0,1) и (a, b) може да се продужи до границе области G, тј. или постоји једно $\bar{x}$ такво да је $\lim\limits_{\xi=\bar{x}} y = 0$, или једно $\bar{x}$ такво да је $\lim\limits_{\xi=\bar{x}} y = 1 + \delta$, или постоји једна од ове две границе

$$\lim_{\xi=\infty} y = \begin{cases} 0, \\ c, \end{cases}$$

при чему је $0 < c < 1$.

Да бих сада доказао да постоји једно y које задовољава прву од последње две неједначине поступићу овако.

Означимо са $y(\tau, x)$ ону (према претпоставци постојећу) интегралну криву која спаја тачке (0,1) и $(\tau, 0)$, онда је

$$y(\tau, x) > y(\tau', x) \text{ за све } \tau > \tau' \text{ и } 0 < x \leq \tau',$$

јер би, у противном случају, постојало најмање једно $0 < x < \tau'$ такво да је $y(\tau, x) = y(\tau', x)$, што је немогуће, с обзиром на претпостављену једнозначност (види а)). Посматрајмо сада тачку пресека праве $x = x_0$ $(0 < x_0 < \tau)$ и криве $y(\tau, x)$. Ордината овог пресека је $= y(\tau, x_0)$ и она расте кад τ расте. Граница

$$\lim_{\tau=\infty} y(\tau, x_0) = y_0$$

постоји, јер је $y(\tau, x_0)$ посматрано као функција променљиве τ, увек мање од 1 (из $y(\tau, x_0) = 1$ би наиме следила егзистенција једног $\bar{x}$ таквог да је $\lim\limits_{\zeta=\bar{x}} y = 1 + \delta$, јер је због $f(x, y) > 0$, y је једна конвексна крива). Према претпоставци постоји једна једнозначна интегрална крива y која спаја тачке $(0,1)$ и (x_0, y_0). Доказаћу да продужење ове интегралне криве егзистира за све $x > x_0$ и тежи ка нули кад $x \to \infty$.

Према напред реченом, а с обзиром на претпоставку b), могу да наступе два случаја: или је $\lim\limits_{\zeta=\infty} y = 0$ (чиме би став већ био доказан) или постоји једно $\bar{x}$ такво да је

$$y(\bar{x}) = 1 + \delta. \tag{1,5}$$

Трећа могућност, да постоји једно $\bar{x}$ такво да је $y(\bar{x}) = 0$, не долази у обзир, јер би, у том случају, y било идентично са једним од ранијих интеграла, тј. са $y(\tau, x)$. Лако је сад увидети да (1,5) води до противуречности. У том случају би, наиме, морала за све $\tau > \tau_0$ постојати неједначина

$$y(\tau, \bar{x}) > 1,$$

ер, као што смо видели, $y(\tau, x)$ тежи за свако x функцији y. Међутим, према претпоставци, све интегралне криве $y(\tau, x)$ су мање од 1; према томе једначина (1,5) не може постојати.

6. На основу претходног сада је лако доказати ово.

Нека је, сем услова параграфа 5, задовољен још и овај: интеграл

$$\int_a^\infty \int_{t'}^\infty f(t, y)\, dt\, dt' \tag{1,6}$$

дивергира кад $x \to \infty$ *за свако конвексно* $y \geq \varepsilon > 0$.

Онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x, y)$$

$$y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0, \quad y > 0 \text{ за } x > 0$$

има најмање једно решење.

Сада треба да докажем да, ако је испуњена претпоставка (1,6), не постоји ниједно решење које би задовољавало услове

$$y(0) = 1, \quad y(\infty) = c \quad y > 0 \text{ за } x > 0,$$

а где је c нека позитивна константа мања од 1.

Интеграцијом диференцијалне једначине добива се

$$y'(x) - y'(t') = \int_{t'}^{x} f(t, y)\, dt\,, \quad x > t'\,.$$

Како је $f(x, y) > 0$, y је конвексно, па, с обзиром на претпоставку $y \to c$, $x \to \infty$ мора y' да тежи нули кад $x \to \infty$. Према томе из горње једначине следи

$$-y'(t') = \int_{t'}^{\infty} f(t, y)\, dt\,.$$

(У случају да већ интеграл $\int_{t'}^{x} f(t, y)\, dt$ дивергира, био би овим наш став доказан). Према томе је

$$y(a) = y(x) + \int_{a}^{x} \int_{t'}^{\infty} f(t, y)\, dt\, dt'\,, \quad x > a,$$

чиме је доказивање већ завршено; јер десна страна ове једначине дивергира кад $x \to \infty$, будући да је према учињеној претпоставци $y \geq \varepsilon > 0$.

7. Став који ћу овде доказати уопштава један познати Kneser - Gronnwall-ов став [7]).

Став I. *Нека је функција $f(x, y)$ позитивна и непрекидна у отвореној области*

$$G:\ 0 < x < \infty\,,\ 0 < y < 1 + \delta\,,\ \delta > 0\,,$$

у области G', која настаје из области G додавањем тачке $x = 0$, непрекидна по y и интеграбилна по x. Даље, нека је парцијални извод по промењљивој y функције $f(x, y)$ позитиван у области G и нека интеграл

$$\int_{a}^{x} \int_{t'}^{\infty} f(t, y)\, dt\, dt'\,,$$

за свако конвексно $y > \varepsilon > 0$, дивергира кад $x \to \infty$. Онда је диференцијални задатак

$$y'' = f(x, y)\,;$$

---

[7]) Scorza - Dragoni G. — Atti Accad. Lincei (6) 9 (1929) 623 — 625.

$$y(0)=1,\ y(\infty)=0,\ y>0 \text{ за } x>0$$

једнозначно решив.

Овај пут треба да докажем да је диференцијални задатак

$$(1{,}7)\qquad \begin{cases} y''=f(x,y), \\ y(0)=1,\ y(a)=b, \quad y>0 \text{ за } 0\le x\le a \end{cases}$$

за свако $a>a_0>0$ и $0\le b<1$ једнозначно решив.

Уочимо пре свега да две (које засада само евентуално постоје) интегралне криве које полазе из тачке $(0,1)$, а једнаке су b за $x=a$, односно $x=a'$ имају само једну заједничку тачку. Јер, када би постојале овакве две интегралне криве y и z и једно x' $(0<x'<a<a')$ такво да је $y(x')=z(x')$, онда би функција $u=y-z$ морала имати најмање или један позитиван максимум или један негативан минимум. Како је $f(x,y)$ непрекидно у области G, то је $u''=f(x,y)-f(x,z)$ непрекидна функција аргумента x. Према томе у тачкама позитивних максимума односно негативних минимума u и u'' морају имати различит предзнак. Ово је међутим у противречности са једначином

$$u''=f(x,y)-f(x,z)=u\,\frac{\partial f(x,\theta)}{d\,\theta},$$

где θ лежи између y и z. Одавде уједно следи:

a) Сва решења су једнозначно одређена кад год постоје (стави $a=a'$) и

b) ако је за неко x $y(x)>z(x)$, онда ова неједначина важи за све x за које су функције y и z дефинисане.

Решивши на тај начин питање једнозначности, преостаје нам још да докажемо егзистенцију решења диференцијалног задатка (1,7). При томе ћемо доказати да је (1,7) решиво не само за све $0\le b<1$ већ и за све $0\le b<1+\delta$ Овај, нешто општији, резултат биће нам касније (у другом делу овог рада) потребан; на основу ове чињенице конструисаћемо слику поља интегралних линија.

На основу Peano - Carathéodory-ева става знамо да наша једначина има најмање једну интегралну криву која задовољава почетне услове

$$y(0)=1,\ y'(0)=y'_0,$$

где y'_0 може да буде ма какав број између $-\infty$ и $+\infty$. Према напред реченом ова крива је једнозначно одређена својим почетним условима. Означимо сада са $y_\vartheta(x)$ ону интегралну криву која задовољава услове $y(0)=1$ и $y'(0)=\vartheta$. Тада постоји један одређен размак $(0, x')$ и за све x тога размака и све $\vartheta > \vartheta'$ је

$$\psi(x) = y_\vartheta(x) - y_{\vartheta'}(x) > 0 . \tag{2,7}$$

Како $f(x,y)$ не опада са y, то је за све $0 \leq x < x'$

$$\psi''(x) = y''_\vartheta(x) - y''_{\vartheta'}(x) = f(x, y_\vartheta) - f(x, y_{\vartheta'}) > 0.$$

Дакле је ψ конвексно и ψ' мења највише једанпут свој знак. Уочимо прво случај када ψ' мења свој знак и нека је $\psi'(\bar{x}) = 0$ са $\bar{x} < x'$. Онда је

$$\psi'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{за све } 0 \leq x < \bar{x} \\ > 0 & \text{за све } \bar{x} < x \leq x'. \end{cases}$$

Из прве од ових неједначина следи интеграцијом

$$\psi(x'') - \psi(x) > 0 \text{ за све } x'' < x < \bar{x}$$

тј.

$$y_\vartheta(x'') - y_{\vartheta'}(x'') > y_\vartheta(x) - y_{\vartheta'}(x) .$$

Извршим ли у овој неједначини прелаз $x'' \to 0$, то следи

$$y_\vartheta(x) - y_{\vartheta'}(x) < 0 \tag{3,7}$$

што је, с обзиром на (2,7), немогуће. Дакле ψ' у реченом размаку не мења знак и за све ове x је $\psi' > 0$ (јер у противном случају би опет дошли до неједначине (3,7)). Из $\psi' > 0$ следи интеграцијом

$$\psi(x') - \psi(x) > 0 \quad \text{за} \quad 0 \leq x < x',$$

тј.

$$y_\vartheta(x') - y_{\vartheta'}(x') > y_\vartheta(x) - y_{\vartheta'}(x) . \tag{4,7}$$

Одавде закључујемо да разлика $\psi = y_\vartheta(x) - y_{\vartheta'}(x)$ расте у целом размаку у коме су функције $y_\vartheta(x)$ и $y_{\vartheta'}(x)$ дефинисане и позитивне.

На основу овога закључујемо да сваком x_0 за које постоји једно такво ϑ да $y_\vartheta(x_0)$ има смисла одговара један размак варијације променљиве ϑ такав да, док ϑ узима вредности тога размака, дотле $y_\vartheta(x_0)$ варира између 0 и $1+\delta$. Ово се види на овај начин. Претпоставимо противно, тј. како је (на основу става о зависности интеграла од почетних услова) $y_\vartheta(x)$ непрекидна функција промењиве ϑ, да постоји најмање једна од ових двају релација

(5,7) $$\lim_{\vartheta'=-\infty} y_{\vartheta'}(x_0)=\alpha,$$

или

(6,7) $$\lim_{\vartheta'=+\infty} y_{\vartheta'}(x_0)=\beta,$$

где су α и β неки бројеви који задовољавају неједначину

$$0<\alpha<\beta<1+\delta.$$

У случају кад је задовољена прва од ових неједначина имали бисмо

$$\lim_{\vartheta=-\infty} \{y_\vartheta(x_0)-y_{\delta+h}(x_0)\}=0,$$

где h може бити ма какав реалан број; а како, као што смо видели, ψ не опада кад независно променљива расте, горња релација важи у целом размаку $(0, x_0)$. Према томе је и

(7,7) $$\lim_{\vartheta=-\infty} \{y''_\vartheta(x)-y''_{\vartheta+h}(x)\}=0 \quad \text{за} \quad x\leq x_0.$$

Одавде следи, интеграцијом од 0 до $t\leq x_0$, а на основу H. Lebesgue-ова става о замени прелаза ка граници испред и иза знака интеграције

$$\lim_{\vartheta=-\infty} \{y'_\vartheta(0)-y'_{\vartheta+h}(0)\}-\lim_{\vartheta=-\infty} \{y'_\vartheta(t)-y'_{\vartheta+h}(t)\}=0;$$

а како је $f(x, y)$ интеграбилно и $y'_\vartheta(0)-y'_{\vartheta+h}(0)=-h$ за свако реално ϑ и h, то је

$$h=\lim_{\vartheta=-\infty} \{y'_{\vartheta+h}(t)-y'_\vartheta(t)\},$$

и ова неједначина важи за све t размака $(0, x)$. Интеграцијом ове неједначине и прелазом $\vartheta\to-\infty$ добивам на основу H. Lebesgue-ова става

$$(x'-x'')\,h=\lim_{\vartheta=-\infty} \{y_{\vartheta+h}(x')-y_\vartheta(x')\}-\lim_{\vartheta=-\infty} \{y_{\vartheta+h}(x'')-y_\vartheta(x'')\}$$

тј., с обзиром на (7,7),

$$h(x'-x'')=0,$$

где h може бити ма какав реалан број, а x' и x'' ма какви бројеви размака $(0, x_0)$. Ово је очигледно немогуће па је према томе и неједначина (5,7) немогућа.

Исто тако се доказује да (6,7) не може постојати.

Сада ћу да докажем да за свако $x>0$ постоји најмање једно ϑ такво да $y_\vartheta(x)$ постоји и да је $0<y_\vartheta(x)<1+\delta$. Ово је међутим према реченом очигледно. Јер ако је x_0 горња граница свих x-ова за које $y_\vartheta(x_0)$ са $0<y_\vartheta(x_0)<1+\delta$ егзистира, онда, као што смо доказали, постоји један размак $(\vartheta_0, \vartheta_1)$ такав да док ϑ варира у овом размаку дотле $y_\vartheta(x_0)$ заузима све вредности размака $(0, 1+\delta)$. На основу E. Kamke-ова става знамо да сваку од ових интегралних кривих можемо продужити до руба области: $x_0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq 1+\vartheta$. Према томе постоји једно $\varepsilon>0$ и најмање једна интегрална крива $0<y<1+\delta$ дефинисана за све x размака $(x_0, x_0+\varepsilon)$. Узмемо ли још у обзир да, као што смо напред доказали, за свако $0 \leq b < 1+\delta$ постоји једно решење граничног задатка $y(0)=1$, $y(x_0+\varepsilon)=b$ то, према томе, x_0 није горња граница x-ова речене особине. Преостаје само још да докажем: ако постоји најмање једно решење диференцијалног задатка $y(0)=1$ $y(\infty)=0$ онда је ово решење једнозначно одређено. То међутим непосредно следи из неједначине (4,7).

8. Став I казује да постоји решење диференцијалног задатка

$$(1,8)\qquad \begin{cases} y''=x^a y^b \\ y(0)=1,\ y(\infty)=0 \end{cases}$$

за све $a>-1$ и $b>-0$.[8]) У специјалном случају $a=-{}^1/_2$, $b={}^3/_2$, тј. у случају Fermi-еве диференцијалне једначине је то више пута доказивано. Ја ћу доказати један општији став који ће, као специјалан случај, садржавати не само диференцијалну једначину у којој је $a=-1$ већ ће гарантовати егзистенцију интеграла и за $a>-2$. То међутим не важи чим је $a \leq -2$, као што то показује једначина

$$y''=\frac{y}{x^2}.$$

[8]) Membriani A. — Atti Accad. Lincei (6) 9 (1929) 142—144, 620—622.

Њен општи интеграл је, наиме,

$$y = c_1 x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + c_2 x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},$$

и ма како бирали интеграционе константе никада неће бити

$$\lim_{x=0} y = 1 .$$

9. Општи став који сам споменуо у претходном параграфу је непосредна последица двају ставова које ћу сада доказати.

Став II. *Нека је функција* $f(x,y)$ *непрекидна и* >0 *за све* (x,y) *области* G: $0<x<\infty$, $0<y<1+\delta$, $\delta>0$. *Даље, нека су испуњени ови услови:*

1) *Постоји једно* $x_0>0$ *такво да је гранични задатак*

$$y'' = f(x,y);\ \lim_{x=0} y(x) = 1,\ y(x_0) = b$$

решив за свако $0 \leq b \leq 1+\delta'$, $0<\delta'<\delta$.

2) *Кад год је гранични задатак*

$$y'' = f(x,y);\ \lim_{x=0} y(x) = 1.\ y(x') = b$$

решив (а на основу услова 1) знамо да постоји најмање једно такво x'), *онда је ово решење једнозначно одређено и* >0 *за све* $0 \leq x < x'$. [9])

3) *Интеграл*

$$\int_a^x \int_{t'}^{\infty} f(t,y)\, dt'\, dt$$

дивергира за $x\to\infty$ *кад год је* $y=y(t)$ *ма каква конвексна функција размака* $0<\varepsilon\leq y<1+\delta'$.

4) *За све* $x>0$ *је*

$$f(x,0) \equiv 0 .$$

Онда диференцијални задатак

$$y'' = f(x,y);\ \lim_{x=0} y(x) = 1,\ \lim_{x=\infty} y(x) = 0$$

има најмање једно решење.

---

[9] Ови услови су испуњени ако $f(x,y)$ у свакој тачки области G испуњава Lipschitz-ову неједначину.

Приметимо, пре свега, да, ако је $y_i(x)$, $i=1, 2, \cdots$ неки у размаку $(x_1, x_1+\varepsilon)$ дефинисани низ интеграла наше једначине који конвергира ка некој граничној функцији $y(x)$, онда је и $y(x)$ интеграл диференцијалне једначине. Ово се може видети из обрасца

$$y_i(x) = b_i + \left(\frac{B_i - b_i}{\varepsilon}\right)(x - x_1) + \left(\frac{x - x_1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right)\int\limits_{x_1}^{x}(z - x_1)\, f(z, y_i)\, dz$$

$$-\left(\frac{x - x_1}{\varepsilon}\right)\int\limits_{x}^{x_1+\varepsilon}(x_1 + \varepsilon - z)\, f(z, y_i)\, dz\,,$$

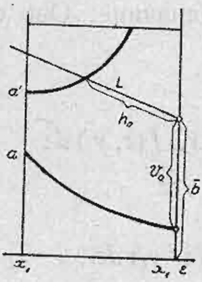
(где је $y_i(x_1) = b_i$, $y_i(x_1+\varepsilon) = B_i$) јер је замена прелаза $i \to \infty$ испред и иза знака интеграције дозвољена, као што то казује Lebesgue-ов став.

Означимо сада са x_1 горњу границу свих x-ова за које је гранични задатак $\lim\limits_{x=0} y(x) = 1$ $y(x_1) = b$ решив, за свако $0 \leq b \leq 1 + \delta'$, а са $v(b, x)$ ону интегралну криву која задовољава граничне услове $\lim\limits_{x=0} y(x) = 1$, $y(x_1) = b$. Нека је, даље, $0 < b' < 1 + \delta'$; на основу Kamke-ова става можемо интегралну криву $y(b', x)$ да продужимо до руба области: $x_1 < x < \infty$, $0 \leq y \leq 1 + \delta'$. Према томе постоји једно $\varepsilon > 0$ и $y(b', x)$ егзистира за све $x_1 \leq x \leq x_1 + \varepsilon$.

Показаћу да је гранични задатак $\lim\limits_{x=0} y(x) = 1$, $y(x_1 + \varepsilon) = b$ једнозначно решив за свако $0 \leq b \leq 1 + \delta'$.

Претпоставимо супротно, тј. да постоји једно $b = \overline{b}$ такво да кроз тачку $(x_1 + \varepsilon, \overline{b})$ не пролази ниједна крива фамилије $y(b, \cdot)$; онда је права $x = x_1 + \varepsilon$ пресечена најмање једном кривом фамилије (на пр. свакако кривом $y(b', x)$). Ову криву обележимо са $y(a, x)$.

Узмимо, прво, да је $y(a, x_1 + \varepsilon) < \overline{b}$. Јасно је да кроз тачку $(x_1 + \varepsilon, \overline{b})$ пролази најмање једна права која је (с доње стране) пресечена најмање једном кривом фамилије; ову праву обележимо са L а криву са $y(a', x)$. За праву L можемо узети на пр. праву која спаја тачке $(x_1, 1)$ и $(x_1 + \varepsilon, \overline{b})$, а за тражену криву — криву која спаја тачке $(0, 1)$ и $(x_1, 1)$. Сегменте који настају пресеком кривих $y(a, x)$ и $y(a', x)$ са сегментима L': $x = x_1 + \varepsilon$, $0 \leq y \leq \bar{b}$ и L обележимо са v_0 и h_0 (види сл. 1). Поделимо сада дуж $\overline{aa'}$ на n једнаких делова и означимо одговарајуће пресеке са b_i и то тако да буде $a = b_0$ а $a' = b_n$. Тада постоји једно k_0 такво да $y(b_i, x)$, $i = 0, 1, \cdots, k$, пресецају сегмент L' а $y(b_i, x)$, $i = k_0 + 1$, $k_0 + 2, \cdot\cdot$, n сегмент L. Одговарајуће отсечке обележимо са v_1 и h_1. Јасно је да сада постоји једно k_1 које, у односу на размак $(b_{k_0}, b_{k_0} + 1)$, има исти смисао као k_0 у односу на размак (a, a'). Одговарајуће отсечке обележимо са v_2 и h_2. Овај поступак очито можемо поновити произвољно много пута (у противном случају би, наиме, из једне тачке сегмента $x = x_1$, $a \leq y \leq a'$ полазиле две криве), те на тај начин добијамо два неопадајућа низа позитивних величина v_i и h_i. Према томе постоје границе



сл. 1

$$\lim_{i=\infty} v_i = v$$

и

$$\lim_{i=\infty} h_i = h.$$

Бројевима v_i и h_i одговарају две криве $y(b_{k_i}, x) = \underline{y}_i(x)$ и $y(b_{k_i+1}, x) = \overline{y}_i(x)$. При томе су b_{k_i} и b_{k_i+1} чланови низова који теже некој граници (Bolzano-Weierstrass-ов став), па је

$$\lim_{i=\infty} b_{k_i} = \lim_{i=\infty} b_{k_i+1} = b_k.$$

Како низови b_{k_i} и b_{k_i+1} монотоно расту, односно опадају, то су и $\underline{y}_i(x)$ и $\overline{y}_i(x)$ два низа функција који монотоно расту, односно опадају па, према томе, за све x размака $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ постоје границе

$$\lim_{i=\infty} \underline{y}_i(x) = \underline{y}(x)$$

и

$$\lim_{i=\infty} \overline{y}_i(x) = \overline{y}(x).$$

Дакле, и функције $\underline{y}(x)$ и $\overline{y}(x)$ задовољавају нашу диференцијалну једначину. Како ове две криве пролазе кроз тачку (x, b_k), мора у целом размаку $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ да је

$$\underline{y}(x) = \overline{y}(x).$$

Дакле је

$$\underline{y}(x_1+\varepsilon)=\overline{y}(x_1+\varepsilon)$$

па, према томе, и

$$v=h.$$

Ово се међутим противи претпоставци да кроз тачку $(x_1+\varepsilon, \overline{b})$ не пролази ниједна интегрална крива. Ово расуђивање, очигледно, можемо употребити и у случају када је $\overline{b}>y(b', x_1+\varepsilon)$.

Постоји још могућност да је за све $0 \le b < 1$, $y(b, x_1+\varepsilon) > \overline{b}$. У том случају не можемо извршити напред учињена разматрања. Али тада је $y'(0, x_1)=0$, те је, с обзиром на 4), функција

$$y(x)=\begin{cases} y(0,x) & \text{за} \quad 0 < x \le x_1 \\ 0 & \text{за} \quad x > x_1 \end{cases}$$

једно решење диференцијалног задатка. Према томе x_1 је мање од свих x за које је гранични задатак $\lim\limits_{\tau=0} y(\tau)=1$, $y(x)=b$ решив. Дакле, овај гранични задатак је решив за свако $x>0$.

Сада можемо применити разматрања параграфа 6 јер су, као што смо видели, испуњене све претпоставке које смо тамо употребили. Према томе постоји најмање једна интегрална крива која задовољава услове $\lim\limits_{x=0} y(x)=1$, $\lim\limits_{x=\infty} y(x)=0$.

10. Да бисмо доказали егзистенцију решења диференцијалног задатка

$$y''=y^{\lambda}/x^{1+\theta}; \quad \lim_{x=0} y(x)=1, \quad \lim_{x=\infty} y(x)=0$$

са $\lambda>0$ и $0<\theta<1$, треба да докажемо да ова диференцијална једначина има решења која задовољавају услове 1), 2) и 3) става II. У ту сврху доказаћу

Став III. *Нека је*

$$\tau(\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta} & \text{\textit{за}} \quad \theta>\dfrac{1}{2} \\ 2 & \text{\textit{за}} \quad \theta=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\theta} & \text{\textit{за}} \quad \theta<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

и нека функција $\Lambda(x, y)$ *задовољава услове*:

$$\Lambda(x, y) \text{ је непрекидно за све } 0 < x < 1,\ 0 \leq y \leq M,$$

$$(1,10) \qquad |\Lambda(x, y)| < \frac{N}{x^{1+\theta}(1-x)^{1+\theta}}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

при чему је

$$M \geq 2^{2\theta - 1}\tau(\theta) N$$

и

$$(2,10) \qquad |\Lambda(x, y_1) - \Lambda(x, y_2)| < \frac{\alpha |y_1 - y_2|}{x^2 (1-x)^2}$$

са

$$2\alpha\tau(\theta) < 1$$

за све y_1 *и* y_2 *који припадају размаку* $(0, M)$.

Онда је диференцијални задатак

$$y'' = \Lambda(x, y); \quad y(0) = y(1) = 0$$

једнозначно решив и $y(x)$ *је непрекидна функција.*[1])

За доказивање овога става потребна су ова два помоћна става.

Lemma I. *За* $0 < \theta < 1$ *и* $0 < x < 1$ *је*

$$\int_0^x z^{-\theta}(1-z)^{-1-\theta} dz \leq \tau(\theta) x^{1-\theta}(1-x)^{-\theta},$$

при чему $\tau(\theta)$ *има исти смисао као и у ставу III.*

Примедба. У горњој неједначини знак једнакости важи само у случају $\theta = \frac{1}{2}$. То се интеграцијом (диференцијални бином) лако може увидети.

Доказ. Како је

$$\binom{-1-\theta}{\nu} = \binom{-\theta}{\nu}\frac{\nu+\theta}{\theta},$$

$$(-1)^\nu \binom{-\theta}{\nu} > 0$$

и

$$Max\, \frac{1}{\theta}\, \frac{\nu + \theta}{\nu + 1 - \theta} = \tau(\theta),$$

---

[1]) Овај став је у ускoj вези са ставовима моје расправе „О егзистенцији интеграла диференцијалне једначине другог реда који пролазе кроз две унапред дате тачке. (в. стр. 53).

јер је

$$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu+\theta}{\nu+1-\theta}\right)=\frac{1-2\theta}{(\nu+1-\theta)^2}=\begin{cases} >0 & \text{за} \quad \theta<\frac{1}{2} \\ =0 & \text{за} \quad \theta=\frac{1}{2} \\ <0 & \text{за} \quad \theta>\frac{1}{2}, \end{cases}$$

то је

$$\int_0^x z^{-\theta}(1-z)^{-1-\theta}dz=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-1-\theta}{\nu}(-1)^\nu\int_0^x z^{-\theta-\nu}dz$$

$$=x^{1-\theta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-1-\theta}{\nu}\frac{(-1)^\nu}{\nu+1-\theta}x^\nu=x^{1-\theta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\theta}{\nu}\frac{\nu+\theta}{\theta(\nu+1-\theta)}(-1)^\nu x^\nu$$

$$\leqslant \tau(\theta)\,x^{1-\theta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\theta}{\nu}(-1)^\nu x^\nu=\tau(\theta)\,x^{1-\theta}(1-x)^{-\theta}.$$

Lemma II. *За* $0<x<1$ *и* $0<\theta<1$ *нека је*

$$|\varphi(x)|<\frac{N^*}{x^{1+\theta}(1-x)^{1+\theta}}. \tag{3,10}$$

Онда постоји једна интегрална крива која задовољава диференцијални задатак

$$y''=\varphi(x);\quad y(0)=y(1)=0,$$

и за ову интегралну криву важи неједначина

$$|y|<2\tau(\theta)\,N^*x^{1-\theta}(1-x)^{1-\theta}.$$

Примедба. Ова интегрална крива је једнозначно одређена, пошто $\varphi(x)$ задовољава Liepschitz-ов услов. То међутим овде нећу доказивати, јер је доказ ове чињенице имплицитно садржан у доказу става III.

Доказ.

$$y=(x-1)\int_0^x z\,\varphi(z)\,dz-x\int_x^1(1-z)\,\varphi(z)\,dz$$

задовољава задани диференцијални проблем. Ставимо

$$I(x) = \int_0^x z^{-\theta}(1-z)^{-1-\theta}\,dz;$$

с обзиром на помоћни став I и (3,10) добивамо

$$|y| < (1-x)N^* I(x) + xN^* I(1-x)$$
$$\leqslant 2\tau(\theta)N^* x^{1-\theta}(1-x)^{1-\theta}.$$

Доказ става III. Овај став се доказује методом сукцесивне апроксимације. У ту сврху изабраћемо ма какву функцију y_0 која поседује непрекидан извод и задовољава услов $y_0(0) = y_0(1) = 0$. Тада се узастопне функције добијају рекурентним обрасцем

$$y_n = (x-1)\int_0^x z\Lambda(z, y_{n-1})\,dz - x\int_x^1 (1-z)\Lambda(z, y_{n-1})\,dz.$$

Све овако дефинисане функције задовољавају услов $0 \leq y_n \leq M$. Јер под претпоставком $0 \leq y_{n-1} \leq M$ добивамо из рекурентног обрасца

$$|y_n| < (1-x)NI(x) + xNI(1-x) \leq 2\tau(\theta)Nx^{1-\theta}(1-x)^{1-\theta}$$
$$< 2^{2\theta-1}\tau(\theta)N \leq M.$$

Уједно видимо да y_n задовољавају услове $y_n(0) = y_n(1) = 0$. Сад ћемо прећи на доказивање оне неједначине која обезбеђује конвергенцију функција y_n. Та неједначина гласи

$$|y_{n+1} - y_n| < \frac{2N_0}{1-\theta}\{2\alpha\tau(\theta)\}^n x^{1-\theta}(1-x)^{1-\theta},$$

при чему је

$$N_0 = \tau(\theta)N.$$

A) Покажимо, прво, да неједначина важи за $n = 0$. Из рекурентног обрасца је

$$y_n' = \int_0^x z\Lambda(z, y_{n-1})\,dz - \int_x^1 (1-z)\Lambda(z, y_{n-1})\,dz,$$

те је, с обзиром на (1,10),

$$|y_1' - y_0'| < NI(x) + NI(1-x)$$
$$< \frac{\tau(\theta)N}{x^\theta(1-x)^\theta} = \frac{N_0}{x^\theta(1-x)^\theta}.$$

Интеграцијом од 0 до $x \leq \frac{1}{2}$ добива се, с обзиром на

$$y_0(0) = y_1(0),$$

$$|y_1 - y_0| < N_0 \int_0^x \frac{dz}{z^{\theta}(1-z)^{\theta}} < \frac{N_0}{(1-x)^{\theta}} \int_0^x \frac{dz}{z^{\theta}} < \frac{N_0}{1-\theta} x^{1-\theta} (1-x)^{-\theta}$$

Исто тако се интеграцијом од $x \geq \frac{1}{2}$ до 1 добива

$$|y_1 - y_0| < \frac{N_0}{1-\theta} x^{-\theta} (1-x)^{1-\theta};$$

а како је $2 \geq \frac{1}{1-x}$ за $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ и $2 \geq \frac{1}{x}$ за $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,

то је за све $0 \leq x \leq 1$,

$$|y_1 - y_0| < \frac{2N_0}{1-\theta} x^{1-\theta} (1-x)^{1-\theta},$$

ш. ј. т. д.

В) Доказаћу сад да је уочена неједначина задовољена за n ако је задовољена за $n-1$. Нека је, дакле,

$$|\Lambda(x, y_n) - \Lambda(x, y_{n-1})| < \frac{\alpha |y_n - y_{n-1}|}{x^2 (1-x)^2}$$

$$< \alpha \frac{2N_0 \{2\alpha\tau(\theta)\}^{n-1}}{1-\theta} \frac{1}{x^{1+\theta}(1-x)^{1+\theta}}.$$

Ставимо

$$\varphi(x) = \Lambda(x, y_n) - \Lambda(x, y_{n-1}),$$

$$y = y_n - y_{n-1},$$

$$N^* = \alpha \frac{2N_0 \{2\alpha\tau(\theta)\}^{n-1}}{1-\theta}$$

и применимо помоћни став II. Тако добивамо

$$|y_{n+1} - y_n| < \frac{2N_0 \{2\tau(\theta)\alpha\}^n}{1-\theta} x^{1-\theta} (1-x)^{1-\theta},$$

ш. ј. т. д.

С) Како је, према претпоставци $2\alpha\tau(\theta) < 1$, то, с обзиром на доказану неједначину, ред

$$y_n = y_0 + \sum_{\nu=0}^{n} (y_{\nu+1} - y_\nu)$$

конвергира, и то униформно за све $0 \leq x \leq 1$. Дакле

$$y_n \to y, \quad n \to \infty$$

униформно за све $0 \leq x \leq 1$.

D) На основу H. Lebesgue-ова става видимо да у интегралима $\int_0^x z \Lambda(z, y_n)\,dz$ и $\int_x^1 (1-z)\Lambda(z, y_n)\,dz$ смемо испред и иза знака интеграције променити ред прелаза $n \to \infty$ докле год су функције $z\Lambda(z, y_n)$ и $(1-z)\Lambda(z, y_n)$ по апсолутној вредности мање од неке интеграбилне функције. Према претпоставци (1,10) овај је услов испуњен за све $0 < x < 1$. Према томе за све $0 < x < 1$ је

$$y = (x-1)\int_0^x z\Lambda(z, y)\,dz - x\int_x^1 (1-z)\Lambda(z, y)\,dz,$$

и овако добивено y је за све $0 < x < 1$ једно решење наше диференцијалне једначине. Да је ово $y(x)$ и за $x = 0$ и $x = 1$ једно решење једначине види се, с једне стране, из чињенице што је овако дефинисано y непрекидно у тачкама $x = 0$ и $x = 1$ (као што то следи из претпоставке (1,10) и помоћног става I), а, с друге стране, из чињенице што функција y дефинисана рекурентним обрасцем задовољава диференцијалну једначину кад год је непрекидна.

E) Доказаћу још да је $y(x)$ једнозначно одређена функција. Нека су, наиме, Y и y две различите интегралне криве; онда је и функција

$$\Psi(x) = (x-1)\int_0^x z\Lambda(z, Y)\,dz - x\int_x^1 (1-z)\Lambda(x, Y)\,dz$$

једно решење диференцијалне једначине. Дакле је

$$\Psi''(x) = \Lambda(x, Y),$$

тј.

$$\Psi''(x) = Y'' \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Одатле добивамо да је $\Psi - Y$ линеарна функција са нулама $x = 0$ и $x = 1$. Коефицијенти ове линеарне форме су, према томе $= 0$, па је

$$\Psi(x) \equiv Y \text{ за } 0 \leq x \leq 1.$$

Дакле је

$$Y - y_n = (x-1)\int_0^x z\{\Lambda(z,Y) - \Lambda(z,y_n)\}\,dz$$

$$- x\int_x^1 (1-z)\{\Lambda(z,Y) - \Lambda(z,y_n)\}\,dz.$$

Истим поступком као и под B) добивамо

$$|Y - y_n| < (2\alpha\tau(\theta))^n x^{1-\theta}(1-x)^{1-\theta}.$$

Тиме је у ствари доказивање завршено; јер, на основу ове неједначине, видимо да за свако унапред дато $\varepsilon > 0$ постоји једно $E = E(\varepsilon)$ такво да је $|Y - y_n| < \varepsilon$ за све $n > E$; дакле је

$$Y \equiv y \text{ за све } 0 \leqq x \leqq 1.$$

11. Сад можемо доказати да диференцијални задатак споменут на почетку претходног параграфа задовољава услове 1), 2) и 3) става II.

A) Учинимо у нашој једначини смену $x = x_0 z$ и ставимо $y(x_0 z) = \bar{y}(z)$. На тај начин добивамо

$$\bar{y}'' = x_0^{\,1+\theta} z^{-1-\theta}\bar{y}^{\lambda} = \varphi(z, \bar{y}).$$

Ставимо још $Y = \bar{y} - (1-z) - zb$. Онда се гранични задатак $y(0) = 1$, $y(x_0) = b$, тј. $\bar{y}(0) = 1$, $\bar{y}(1) = b$ претвара у овај

$$Y(0) = Y(1) = 0,$$

те, према томе, можемо испитати шта став III казује у погледу диференцијалног задатка

$$Y'' = \Lambda(z, Y);$$

$$Y(0) = Y(1) = 0,$$

где је, краткоће ради стављено,

$$\Lambda(z, Y) = \varphi(z, Y + (1-z) + zb).$$

Сад треба да испитамо да ли погодним избором константе x_0 можемо постићи да буду задовољене претпоставке става III.

Приметимо пре свега да је, док ϑ варира између 0 и 1,

$$|Y_0 + \vartheta(Y_1 - Y_0)| \leqq \operatorname{Max}|Y_1, Y_0| < 1 + \operatorname{Max}|y| \leqq M + 1$$

а док z варира између истих граница $|1-z+zb|\leq 1$. Дакле је

$$|\Lambda(z, Y_1)-\Lambda(z,Y_0)| = \left|\frac{x_0^{1-\theta}}{z^{1+\theta}}\{(Y_1+(1-z)+zb)^\lambda-(Y_0+(1-z)+zb)^\lambda\}\right|$$

$$=\lambda\frac{x_0^{1-\theta}}{z^{1+\theta}}\left|\{Y_0+(1-z)+zb+\vartheta(Y_1-Y_0)\}^{\lambda-1}\right|\left|Y_1-Y_0\right|,$$

где је $0<\vartheta<1$. У случају $\lambda>1$ следи одавде

$$|\Lambda(z,Y_1)-\Lambda(z,Y_0)|<\lambda\frac{x_0^{1-\theta}}{z^{1+\theta}}|M+2|^{\lambda-1}|Y_1-Y_0|.$$

Исту неједначину добивамо и у случају $0<\lambda<1$ ако уочимо да функција $\dfrac{(c+x)^\lambda-c^\lambda}{x}$, $0<\lambda<1$ опада и достиже своју највећу вредност за $x=0$. Према томе, да би одговарајући услов става III био испуњен, треба да буде

$$\alpha=\lambda x_0^{1-\theta}|M+2|^{\lambda-1}<\frac{1}{2\tau(\theta)}. \tag{1,11}$$

Јасно је да горња једначина бива задовољена чим константу x_0 изаберем довољно малу.

Претпоставим ли да је $M=1$, моћи ћемо очигледно узети, пошто у том случају N треба да буде ма какав број већи од 1, да је

$$N=2^{2\theta-1}\tau(\theta)M.$$

Како су сви ови услови задовољени за свако $b\geqslant 0$, применом става III видимо да је диференцијални задатак

$$y''=y^\lambda/x^{1+\theta};\quad y(0)=1,\quad y(x_0)=b$$

једнозначно решив. Тиме смо доказали да је услов 1) става I испуњен.

B) На исти начин, као и при доказу става II, доказује се да је решење граничног задатка $y(0)=1$, $y(x')=b$, $\sigma\leq b\leq 1$ једнозначно одређено за све оне x' и b за које оно постоји. Јер за све $x>0$ и $y\geqslant 0$ је $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^\lambda/x^{1+\theta})\geqslant 0$. Дакле је испуњен услов 2) става II.

C) За $y > \varepsilon$ је

$$\int_0^x dt' \int_{t'}^{\infty} y^{\lambda}/t^{1+\theta}\, dt > \text{const.} + \frac{\varepsilon^{\lambda}}{(1-\theta)\,\theta}\, x^{1-\theta} \to \infty, \quad x \to \infty,$$

те је, према томе, испуњен и услов 3) става II.

D) С обзиром на $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^{\lambda}/x^{1+\theta}) \geqslant 0$ постоји само једно решење које задовољава наш диференцијални задатак.

12. При читању прошлог параграфа примећује се одмах да исти закључци важе и у погледу општије једначине $y'' = f(x)\, y^{\lambda}$. При томе $f(x)$ треба да је нека функција > 0 која у нули не расте сувише брзо, а у бесконачности не опада сувише споро. Тако добивамо

Став IV. *Нека је функција $f(x) > 0$ за све $x \geqslant 0$ и непрекидна за све $x > 0$,*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{1+\theta}}\right), \quad x \to 0$$

и

$$f(x) > \frac{c}{x^{1+\theta}}, \quad x \to \infty, \quad c > 0$$

$$\theta \leqslant 1.$$

Онда је диференцијални задатак

$$y'' = f(x)\, y^{\lambda}, \quad y(0) = 1, \quad \lim_{x=\infty} y(x) = 0, \quad \lambda > 0$$

једнозначно решив и $y(x)$ је непрекидна функција.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE THOMAS-FERMI. THÉORÈMES RELATIFS A L'EXISTENCE DES INTÉGRALES

Par
VOJISLAV G. AVAKUMOVIĆ

L'auteur démontre les théorèmes suivants:

Théorème A. Soit $f(x,y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ continues et >0 pour tout $0<x<\infty$, $0<y<1+\delta$, δ étant un nombre positif. De plus, l'intégrale

$$\int_a^x \int_\tau^\infty f(t,y)\,dt\,d\tau$$

divergeant lorsque $x\to\infty$ pour toute fonction $y=y(t)$ convexe et $>\varepsilon>0$ Alors, il existe une solution unique de l'équation

$$y''=f(x,y) \tag{1}$$

satisfaisant aux conditions

$$y(0)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x=\infty} y(x)=0.$$

Théorème B. Soit $f(x,y)$ continue et >0 pour tout $0<x<\infty$, $0<y<1+\delta$, δ étant un nombre positif. De plus, supposons les conditions suivantes satisfaites:

1) Il existe un x_0 tel que l'équation (1) possède au moins une intégrale satisfaisant aux conditions

$$\lim_{x=0} y(x)=1 \text{ et } y(x_0)=b,$$

pour tout $0\leq b\leq 1+\delta'$ avec $0<\delta'<\delta$.

2) Pour tout x_0 pour lesquels la condition 1) est remplie, $y(x)$ est une solution unique et >0 pour tout $0\leq x\leq x_0$.

3) L'intégrale

$$\int_a^x \int_\tau^\infty f(t,y)\,dt\,d\tau$$

diverge lorsque $x\to\infty$ pour chaque fonction $y=y(t)$ convexe et

$$0<\varepsilon\leq y\leq 1+\delta'.$$

Alors, il existe au moins une intégrale de l'équation (1) satisfaisant aux conditions

$$\lim_{x=0} y(x)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x=\infty} y(x)=0.$$

Théorème C. Soit

$$0<\theta<1,$$

$$\tau(\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta} & \text{pour} \quad \theta>\dfrac{1}{2} \\ 2 & \text{pour} \quad \theta=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\theta} & \text{pour} \quad \theta<\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

et $\Lambda(x,y)$ une fonction continue pour tout $0<x<1$, $0\leq y\leq M$,

$$|\Lambda(x,y)|<\frac{N}{x^{1+\theta}(1-x)^{1+\theta}}$$

avec $N<\frac{1}{\tau(\theta)}2^{1-2\theta}M$ et

$$|\Lambda(x,y_1)-\Lambda(x,y_0)|<\frac{\alpha|y_1-y_0|}{x^2(1-x)^2}$$

avec $\alpha<\frac{1}{2\tau(\theta)}$ pour tout y_0 et y_1 de l'intervalle $(0, M)$. Alors, il existe une intégrale unique de l'équation

$$y''=\Lambda(x,y)$$

satisfaisant aux conditions

$$y(0)=y(1)=0.$$

Théorème D. Soit $f(x)$ une fonction continue et >0 pour tout $x>0$,

$$\frac{f(x)}{x^{\theta}}<\infty \quad \text{pour } x \text{ suffisamment pe it}$$

et

$$\frac{f(x)}{x^{\theta}}>c>0 \text{ pour } x \text{ suffisamment grand,}$$

θ étant un nombre >-2. Alors, il existe une intégrale unique de l'équation

$$y''=f(x)y^{\lambda}, \quad \lambda>0$$

satisfaisant aux conditions

$$y(0)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x=\infty} y(x)=0.$$

О АСИМПТОТСКИМ РЕШЕЊИМА ИЗВЕСНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА[1])

од

Т. ПЕЈОВИЋА

(Примљено на I скупу Академије природних наука, од 13 апр. 1946 год.)

1. Посматрајмо најпре Cotton-ове[2]) једначине

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= -lX + \varepsilon(X+Y) + (l-r)\,a e^{-rt}, \\
\frac{dY}{dt} &= mY - \varepsilon(X+Y) - (m+r)\,b e^{-rt},
\end{aligned}
\right.
$$

где су r, l, ε, a, b позитивне константе, m позитивна константа или нула. Једначине (1) имају решења

$$X = X^0 e^{-rt}, \qquad Y = Y^0 e^{-rt}$$

где је

$$X^0 = a + \frac{a+b}{l-r} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l-r} + \dfrac{1}{m+r}\right)},$$

$$Y^0 = b + \frac{a+b}{m+r} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l-r} + \dfrac{1}{m+r}\right)}.$$

Ако је

$$0 < r < l,$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{l-r} + \frac{1}{m+r}\right) < 1,$$

---

[1]) Овај чланак је написан пре рата.

[2]) Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles (Annales de l'École normale supérieure, t. 28, p. 490, 1911, Paris).

онда се решења

$$
(2)\quad
\begin{cases}
X = e^{-rt}\left\{ a + \dfrac{a+b}{l-r}\,\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon\left(\dfrac{1}{l-r}+\dfrac{1}{m+r}\right)} \right\}, \\[2ex]
Y = e^{-rt}\left\{ b + \dfrac{a+b}{m+r}\,\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon\left(\dfrac{1}{l-r}+\dfrac{1}{m+r}\right)} \right\}
\end{cases}
$$

могу развити у редове по ε, који су униформно конвергентни за $t \geq t_0 > 0$. Ови редови су са позитивним члановима и X_i, Y_i претстављају збирове i првих чланова.

Функције X и Y дате једначинама (2) задовољавају једначине

$$
(3)\quad
\begin{cases}
X = ae^{-rt} + \varepsilon e^{-lt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{lt}[X(t)+Y(t)]\,dt, \\[2ex]
Y = be^{-rt} + \varepsilon e^{mt}\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-mt}[X(t)+Y(t)]\,dt
\end{cases}
$$

и могу се добити решавајући ове једначине (3) помоћу методе узастопних апроксимација, узимајући као прве апроксимације

$$X_1 = ae^{-rt}, \qquad Y_1 = be^{-rt}.$$

Апроксимације ранга i су збирови X_i, Y_i редова (2).

Из једначина (3) може се извести егзистенција решења једначина (Cotton, loc. cit.)

$$
(4)\quad
\begin{cases}
\xi = \overline{a}(t) + \varepsilon e^{-lt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{lt}[\xi(t)+\eta(t)]\,dt, \\[2ex]
\eta = \overline{b}(t) + \varepsilon e^{mt}\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-mt}[\xi(t)+\eta(t)]\,dt,
\end{cases}
$$

где су $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$ реалне, непрекидне и коначне функције реалне промењливе $t \geq t_0 > 0$ и задовољавају услове

$$0 < \overline{a}(t) < ae^{-rt}, \qquad 0 < \overline{b}(t) < be^{-rt}.$$

Ако се примени метода узастопних апроксимација на једначине (4) стављајући

$$\xi_1(t) = \overline{a}(t), \qquad \eta_1 = \overline{b}(t),$$

онда се види, да су $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ и њихове разлике $\xi_i - \xi_{i-1}$, $\eta_i - \eta_{i-1}$, за $t \geq t_0 > 0$, коначни, непрекидни, позитивни и респективно мањи од $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $X_i - X_{i-1}$, $Y_i - Y_{i-1}$. Стога је

$$0 < \xi(t) < X(t), \quad 0 < \eta(t) < Y(t).$$

2. Посматрајмо сада систем једначина

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -l + a_{11} e^x + a_{12} e^y, \\ \frac{dy}{dt} &= m + a_{21} e^x + a_{22} e^y, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

где су a_{ik} реалне, непрекидне и коначне функције реалне промењиве $t \geq t_0 > 0$; l је позитивна константа, m позитивна константа или нула.[1]) Ставимо

$$e^x = u, \quad e^y = v \tag{a}$$

систем (5) постаје

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -lu + a_{11} u^2 + a_{12} uv, \\ \frac{dv}{dt} &= mv + a_{21} uv + a_{22} v^2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Интегралне једначине, које одговарају једначинама (6) и чија асимптотска решења теже нули за $t = \infty$, гласе

$$u = Ce^{-l(t-t_0)} + e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} (a_{11} u^2 + a_{12} uv)\, dt,$$

$$v = \quad - e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{mt} (a_{21} uv + a_{22} v^2)\, dt$$

или

$$\left\{\begin{aligned} u &= Ce^{-l(t-t_0)} + e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} P(u, v, t)\, dt, \\ v &= \qquad - e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} Q(u, v, t)\, dt, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

---

[1]) Систем (5) где је $l = m = 0$ већ смо испитивали (C. R. de l'Académie de Sciences, t. 208. p. 960, 1939, Paris).

где је

$$P(u,v,t) = a_{11}\,u^2 + a_{12}\,uv,$$

$$Q(u,v,t) = a_{21}\,uv + a_{22}\,v^2.$$

Претпоставимо да су, за

$$t \geq t_0 > 0, \quad |u| < A, \quad |v| < A^{1})$$

где је

$$(6)\quad \begin{cases} e^{-rt}\left\{a + \dfrac{a+b}{l-r}\,\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon\left(\dfrac{1}{l-r}+\dfrac{1}{m+r}\right)}\right\} < A, \\[2ex] e^{-rt}\left\{b + \dfrac{a+b}{m+r}\,\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon\left(\dfrac{1}{l-r}+\dfrac{1}{m+r}\right)}\right\} < A, \end{cases}$$

функције $P(u,v,t)$, $Q(u,v,t)$ коначне, непрекидне и имају парцијалне изводе по u и v коначне, непрекидне и мање по апсолутној вредности од једног позитивног броја ε, где је

$$\varepsilon < \frac{1}{\dfrac{1}{l-r}+\dfrac{1}{m+r}},$$

онда је

$$|P(u,v,t) - P(u',v',t)| < \varepsilon\{|u-u'| + |v-v'|\},$$

$$|Q(u,v,t) - Q(u',v',t)| < \varepsilon\{|u-u'| + |v-v'|\}.$$

Узмимо једначине

$$(8)\quad \begin{cases} U = |C|\,e^{-l(t-t_0)} + \varepsilon\, e^{-lt}\displaystyle\int_{t_0}^{t}[U(t)+V(t)]\,dt, \\[2ex] V = \qquad\qquad + \varepsilon\, e^{mt}\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-mt}\,[U(t)+V(t)]\,dt \end{cases}$$

као *компаративне* једначинама (7). Ово су једначине типа (4) где је

$$\bar{a}(t) = |C|\,e^{-l(t-t_0)}, \qquad \bar{b}(t) = 0.$$

---

[1]) А је позитивна константа повољно изабрана.

Ако се примени метода узастопних апроксимација узимајући као прве апроксимације, за једначине (7)

$$u_1 = Ce^{-l(t-t_0)}, \qquad v_1 = 0,$$

за једначине (8)

$$U_1 = |C| e^{-l(t-t_0)}, \qquad V_1 = 0,$$

онда је, за једначине (7),

$$u_2 = ce^{-l(t-t_0)} + e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} P(u_1, v_1, t)\, dt,$$

$$v_2 = \qquad - e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} Q(u_1, v_1, t)\, dt.$$

Како је, за $t \geq t_0 > 0$,

$$|P(u_1, v_1, t)| = |P(u_1, v_1, t) - P(0, 0, t)| < \varepsilon [|u_1| + |v_1|] = \varepsilon (U_1 + V_1)$$
$$|Q(u_1, v_1, t)| = |Q(u_1, v_1, t) - Q(0, 0, t)| < \varepsilon [|u_1| + |v_1|] = \varepsilon (U_1 + V_1)$$

то је, према (8),

$$|u_2| \leq |C| e^{-l(t-t_0)} + \varepsilon e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} (U_1 + V_1)\, dt = U_2,$$

$$|v_2| < \varepsilon e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} (U_1 + V_1)\, dt = V_2,$$

исто тако је

$$|u_2 - u_1| \leq \varepsilon e^{-lt} \int_{t_0}^{t} e^{lt} (U_1 + V_1)\, dt = U_2 - U_1,$$

$$|v_2 - v_1| \leq \varepsilon e^{mt} \int_{t}^{\infty} e^{-mt} (U_1 + V_1)\, dt = V_2 - V_1.$$

Продужујући тако видеће се, да су решења u, v једначина (7) коначна, непрекидна и мања по апсолутној вредности од решења U и V једначина (8), тј., према (6), од A.

Лако је видети, да решења једначине (7) односно једначина (6) задовољавају услове

$$\lim_{t \to \infty} u = 0, \quad \lim_{t \to \infty} v = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{u'}{u} = -l, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{v'}{v} = m.$$

Из ових једначина, према (а), следује, да једначине (5) имају један систем решења за $t \geq t_0 \geq 0$, који задовољава услове

$$(9) \quad \lim_{t\to\infty} x = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} y = -\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{dx}{dt} = -l, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{dy}{dt} = m.$$

Према томе имамо ову теорему:

Теорема. — *Нека је дат систем једначина* (5) *где су a_{ik} реалне, коначне и непрекидне функције реалне промењиве $t \geq t_0 > 0$. Под претпоставком да су, за*

$$t \geq t_0 > 0, \quad |e^x| = |u| < A, \quad |e^y| = |v| < A$$

где позитиван број A задовољава релацију (б), *функције*

$$P(u, v, t) = a_{11} u^2 + a_{12} u v,$$

$$Q(u, v, t) = a_{21} u v + a_{22} v^2$$

коначне, непрекидне и имају парцијалне изводе по u и v, коначне, непрекидне и мање по апсолутној вредности од позитивног броја ε, где је

$$\varepsilon < \frac{1}{\dfrac{1}{l-r} + \dfrac{1}{m+r}},$$

једначине (5) *имају један систем решења који задовољава услове* (9). *Овај систем зависи од једне произвољне константе.*

Лако је видети да се претходно резоновање може проширити на више од две једначине.

3. Ми смо претпоставили да су l и m константе код једначина (5). Лако је видети да су резултати слични ако су l и m реалне и непрекидне функције за $t \geq t_0 > 0$ и теже коначним и одређеним границама

$$(c) \quad \lim_{t\to\infty} l(t) = \bar{l}, \quad \lim_{t\to\infty} m(t) = \bar{m}.$$

Посматрајмо, на пример, систем једначина

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -l(t) + a_{11} e^x + a_{12} e^y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = m(t) + a_{21} e^x + a_{22} e^y, \end{cases}$$

где су a_{ik} реалне, коначне и непрекидне функције реалне променљиве $t \geq t_0 > 0$; $l(t)$ и $m(t)$ су реалне и непрекидне функције за $t \geq t_0 > 0$ и задовољавају услове (c). Систем једначина (10) може се написати у облику

$$\frac{dx}{dt} = -\overline{l} + \overline{l} - l(t) + a_{11} e^x + a_{12} e^y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \overline{m} - \overline{m} + m(t) + a_{21} e^x + a_{22} e^y.$$

Ове једначине, после смене (a), постају

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\overline{l}u + \overline{l}u - l(t)\, u + a_{11} u^2 + a_{12} uv, \\[2mm] \dfrac{dv}{dt} = \overline{m}v - \overline{m}v + m(t)\, v + a_{21} uv + a_{22} v^2. \end{cases}$$

Интегралне једначине, које одговарају овим једначинама и чија асимптотска решења теже нули за $t = \infty$, гласе

$$(12) \quad \begin{cases} u = Ce^{-\overline{l}(t-t_0)} + e^{-\overline{l}t} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\overline{l}t} [\overline{l}u - l(t)\, u + a_{11} u^2 + a_{12} u\overline{v}]\, dt, \\[2mm] v = \qquad - e^{-\overline{m}t} \displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-\overline{m}t} [m(t)\, v - \overline{m}v + a_{21} uv + a_{22} v^2]\, dt. \end{cases}$$

Ово су једначине облика (7) где је

$$P(u, v, t) = \overline{l}u - l(t)\, u + a_{11} u^2 + a_{12} uv,$$

$$Q(u, v, t) = m(t)\, v - \overline{m}v + a_{21} uv + a^{22} v^2.$$

Ако се примени исти поступак на једначине (12) као на једначине (7), видеће се да једначине (11) имају један систем решења који задовољава услове

$$\lim_{t \to \infty} u = 0, \quad \lim_{t \to \infty} v = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{u'}{u} = -\overline{l}, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{v'}{v} = \overline{m},$$

одакле следује за једначине (10)

$$\lim_{t \to \infty} x = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} y = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{dx}{dt} = -\overline{l}, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{dy}{dt} = \overline{m}.$$

SUR LES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES
DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES[1])

Par T. PÉYOVITCH

RÉSUMÉ

Soit donné un système d'équations

$$\frac{dx}{dt} = -l + a_{11} e^x + a_{12} e^y ,$$

$$\frac{dy}{dt} = m + a_{21} e^x + a_{22} e^y .$$

où a_{ik} sont des fonctions réelles, finies et continues pour la variable réelle $t \geq t_0 > 0$; l étant une constante positive, m une constante positive ou nulle. Il est facile à démontrer que les équations admettent un système de solutions satisfaisant aux conditions

$$\lim_{t \to \infty} x = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} y = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{dx}{dt} = -l, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{dy}{dt} = m.$$

1) Cet article fut écrit avant la guerre.

О ЈЕДНОМ АСИМПТОТСКОМ СВОЈСТВУ ИЗВЕСНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА[1])

од

Т. ПЕЈОВИЋА

(Примљено на I скупу Академије природних наука од 13 апр. 1946 год.)

Нека је дат систем једначина облика

$$\frac{dx_i}{dt} = (a_{i1} - \lambda)\, e^{x_1} + (a_{i2} - \lambda)\, e^{x_2} + \cdots + (a_{in} - \lambda)\, e^{x_n} \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

где су a_{ik} реалне, непрекидне и коначне функције реалне промењиве $t \geq t_0 \geq 0$, λ реална и позитивна константа и за моменат произвољна.

Претпоставимо да једначине (1) имају један систем реалних, непрекидних и одређених решења за $t \geq t_0 \geq 0$. Ставимо

$$e^{x_i} = y_i\,, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{y_i'}{y_i}\,, \tag{2}$$

једначине (1) постају

$$y_1' = (a_{11} - \lambda)\, y_1^2 + (a_{12} - \lambda)\, y_1 y_2 + \cdots + (a_{1n} - \lambda)\, y_1 y_n\,,$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$y_n' = (a_{n1} - \lambda)\, y_1 y_n + (a_{n2} - \lambda)\, y_2 y_n + \cdots + (a_{nn} - \lambda)\, y_n^2\,.$$

Ако се ове једначине саберу, добиће се

$$\sum_{i=1}^{n} y_i' = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)_i^2 + \sum (a_{ik} + a_{ki} - 2\lambda)\, y_i y_k\,, \tag{3}$$

где други збир на десној страни ове једначине садржи све комбинације бројева i и k ($i \neq k$). Десна страна једначине (3)

---

[1]) Овај чланак је написан пре рата.

претставља квадратну форму величина $y_1, y_2, \cdots, y_n$ чији коефицијенти зависе од t и λ. Пошто су функције a_{ik} ограничене за $t \geq t_0 \geq 0$, то се параметар λ може изабрати довољно велики, да десна страна једначине (3) претставља негативну квадратну форму величина $y_1, y_2, \cdots, y_n$ за $t \geq t_0 \geq 0$. Према томе једначина (3) даје

$$\sum_{i=1}^{n} y_i' < -A\left(\sum y_i\right)^2, \tag{4}$$

где је A позитивна константа повољно изабрана. Из неједначине (4) следује

$$\frac{y'_1 + y'_2 + \cdots + y_n'}{(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2} < -A,$$

одакле је, после интеграције,

$$-\frac{1}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} < -At - C$$

или
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n < \frac{1}{At + C},$$

где је C интеграциона константа. Према (2), последња неједначина постаје

$$e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n} < \frac{1}{Ai + C},$$

одакле је

$$\lim_{t \to \infty} e^{x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

тј.

$$\lim x_i = -\infty, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{6}$$

Једначине (1), према (5), дају

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dx_i}{dt} = 0. \tag{7}$$

Теорема. — *Нека је x_i један систем реалних, нейрекидних и одређених решења једначина* (1) *за $t \geq t_0 \geq 0$, где су a_{ik} реалне, нейрекидне и коначне функције за $t \geq t_0 \geq 0$, λ реална, йозитивна и довољно велика констаната, да десна страна једначине* (3) *йретставља негативну квадратну форму* *величина* $y_1 y_2, \cdots, y_n$ *за* $t \geq t_0 \geq 0$. *Систем* x_i *тада има својства* (6) *и* (7).

Ову теорему сам први пут доказао у једној ноти Француске академије наука[1]) на начин мало другојачији.

SUR UNE PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES[2])

par
T. PÉYOVITCH

RÉSUMÉ

Soit donné un système d'équations de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = (a_{i1} - \lambda) e^{x_1} + \cdots + (a_{in} - \lambda) e^{x_n} \tag{1}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

où a_{ik} sont des fonctions réelles, continues et limitées de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, λ une constante réelle, positive et convenablement choisie. Supposons que les équations (1) admettent un système de solutions réelles, continues et déterminées pour $t \geqq t_0 \geqq 0$. Il est facile à démontrer que ce système admet les propriétés

$$\lim_{t \to \infty} x_i = -\infty, \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

---

1) C. R. de l'Académie des Sciences, t. 208, № 13, 1939, Paris.

2) Cet article fut écrit avant la guerre.

ПРИМЕНА ПФАФОВЕ МЕТОДЕ У ДИНАМИЦИ ЧВРСТОГ ТЕЛА

од
ТАТОМИРА П. АНЂЕЛИЋА

(Примљено на II скупу Академије природних наука од 23 маја 1946 год.)

Увод

Пфафову методу је у Динамику увео први Whittaker. Међутим, њену примену и улогу при извођењу једначина Динамике, даље, њену примену и на читав низ других проблема Механике, укључујући ту и постављање Пфафова општег принципа Механике, извео је у низу својих радова *А. Билимовић*. Билимовић је довољно образложио корист од употребе Пфафове методе у Динамици. Тежиште у примени ове методе на проблеме кретања у Динамици лежи у формирању одговарајућег Пфафова израза из кога се онда, по одређеном и познатом поступку, добијају диференцијалне једначине Динамике за постављени проблем као Пфафове диференцијалне једначине. Све остало у вези са постављеним проблемом, као, избор подесних координата, трансформација координата итд. своди се само на проучавање и трансформацију Пфафова израза. а не самих једначина, јер се, после тих промена, добијају еквивалентне Пфафове једначине. На тај начин се могу избећи врло компликоване трансформације.

У овом раду изводимо, прво, вредност Пфафова израза за кретање чврстог тела из Пфафова израза за материјални систем, користећи се при том резултатима до којих је Билимовић дошао. Затим показујемо како се, из тако формираног израза за кретање чврстог тела, могу добити векторске диференцијалне једначине кретања чврстог тела као Пфафове једначине у облику који је једначинама кретања чврстог тела у векторском облику дао А. Билимовић у CXXVII књ. „Гласа Српске академије наука“ 1927.

1. Пфафов израз

Нека су

(1) $$X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots, X_N$$

функције назависно променљивих

(2) $$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_N.$$

Тада се линеарна форма

(3) $$\Phi = \sum_{i=1}^{N} X_i \, dx_i$$

зове *Пфафов израз* или *Пфафијан.*

Ако се променљиве (2) сматрају као координате вектора положаја $\vec{x}$ неке тачке M у N-димензионалном Еуклидову простору, диференцијал $d\vec{x}$ тог вектора имаће координате

(4) $$dx_1, dx_2, dx_3, \cdots, dx_N.$$

С друге стране и величине (1) могу се сматрати као координате неког вектора $\vec{X}$ у том истом простору. Тај вектор зваћемо по Билимовићу *Пфафов вектор.*

Пфафов израз (3) може се тада написати у облику скаларног производа вектора $\vec{X}$ и диференцијала $d\vec{x}$, тј.

(5) $$\Phi = \left(\vec{X}\, d\vec{x}\right).$$

Ако су променљиве (2) везане са векторима у простору мањег броја димензија него што је број променљивих N (на пр. у тродимензионалном Еуклидову простору), тако да се има k вектора са по N_1 димензијом $(N_1 < N)$ и још k_1 чисто скаларних променљивих $(kN_1 + k_1 = N)$, онда се могу увести k вектора $\vec{z}_i \, (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$ и k_1 скалара $u_j \, (j = 1, 2, \cdots, k_1)$. У низу функција (1) векторима $\vec{z}_i$ одговараће вектори $\vec{Z}_i$, а скаларима u_j одговараће скалари U_j. Сваки од тих вектора $\vec{Z}_i$ и скалара U_j може у општем случају бити функција свих променљивих (2), тј. координата вектора $\vec{z}_i$ и скалара u_j.

У таквом случају Пфафов израз (3) може се овако написати

$$(6) \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{k} \left(\vec{Z}_i \, d\vec{z}_i\right) + \sum_{j=1}^{k_1} U_j \, du_j .$$

2. Пфафове диференцијалне једначине

Величине (1), одн. Пфафов вектор $\vec{X}$ у пољу променљивих (2) одређују N-димензионални афинор чија је схема

$$(7) \qquad \mathbf{A} = \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\|, \qquad (i, j = 1, 2, 3, \cdots, N),$$

Овај афинор зваћемо *Пфафов афинор.* Схема конјугованог афинора A^C има облик

$$(8) \qquad \mathbf{A}^C = \left\| \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right\|.$$

Образујмо сад антитензор $\mathfrak{C}$ Пфафова афинора, тј.

$$(9) \qquad \mathfrak{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^C),$$

чија је схема

$$(10) \qquad \mathfrak{C} = \left\| \frac{1}{2} a_{ij} \right\|,$$

где је

$$(11) \qquad a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \qquad (i, j = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

и посматрајмо скаларни производ Пфафова антитензора $\mathfrak{C}$ и диференцијала $\vec{dx}$, дакле

$$(12) \qquad \left(\mathfrak{C} \, \vec{dx}\right).$$

Тај производ је, као што знамо, вектор чије су координате

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \, dx_i . \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

Ако се скаларни производ Пфафова антитензора $\mathfrak{C}$ и диференцијала $\vec{dx}$ (12) изједначи с нулом добија се једначина

$$(14) \qquad \left(\mathfrak{C}\, \vec{dx}\right) = 0,$$

коју ћемо звати *Пфафова векторска једначина*. Овој векторској једначини одговара систем *скаларних диференцијалних једначина*

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\, dx_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dx_i = 0 \,. \quad (j = 1, 2, \cdots, N)$$

Овај систем диференцијалних једначина, на овај начин изведен из Пфафова израза, чини т. зв. *први систем Пфафових једначина*.

Пфафова векторска једначина (14) може се, с обзиром на вредност Пфафова антитензора, написати и овако

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^c,\ \vec{dx}\right) = 0,$$

или

$$(16) \qquad \left(\mathbf{A}\, \vec{dx}\right) = \left(\mathbf{A}^c\ \vec{dx}\right).$$

Скаларни производ Пфафова афинора $\mathbf{A}$ и диференцијала $\vec{dx}$ на левој страни ове једначине је вектор чије су координате

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, dx_j = dX_i$$

и, према томе, је диференцијал Пфафова вектора, тј.

$$\left(\mathbf{A}\, \vec{dx}\right) = d\vec{X}.$$

На десној страни имамо скаларни производ Пфафова конјугованог афинора и диференцијала $\vec{dx}$, а то је вектор са координатама

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\, dx_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} X_j\, d'x_j\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\, \Phi\,.$$

Тај се вектор може сматрати као градијент Пфафова израза и, према томе,

$$\left(\mathbf{A}^c,\, \vec{dx}\right) = \mathrm{grad}\ \mathbf{A}\,.$$

Тако се Пфафова векторска једначина облика (14) или (16) може заменити векторском једначином облика

(17) $$d\vec{X} = \text{grad}\,\Phi\,.$$

Овој векторској једначини одговарају скаларне једначине

(18) $$dX_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi. \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

Према томе, из Пфафових једначина следује *да је тотални диференцијал Пфафова вектора једнак градијенту одговарајућег Пфафова израза.*

Ако је Пфафов израз претстављен у облику (6) са k вектора у простору од N димензија и са k_1 скалара $(k_1 < N_1)$, за сваки вектор добиће се векторска једначина

(19) $$d\vec{Z}_i = \text{grad}_{\vec{z}_i}\,\Phi\,,$$

где је са

$$\text{grad}_{\vec{z}_i}\,\Phi$$

означен парцијални градијент Пфафова израза у односу на вектор $\vec{z}_i$. За сваки скалар добиће се скаларна једначина

(20) $$dU_j = \frac{\partial}{\partial u_j}\Phi\,. \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots, k_1)$$

Ради боље прегледности и веће јасности даљег излагања навешћемо кратко, без детаљног извођења, две познате особине Пфафове методе које се у даљем раду искоришћују.

1. Ако се, место променљивих $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$, уведу нове променљиве $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots, y_N$, па се Пфафов израз (3) одн. (5) трансформише добиће се

(21) $$\Phi = \left(\vec{X}\,d\vec{x}\right) = \sum_{i=1}^{N} X_i dx_i = \sum_{i=1}^{N} Y_i dy_i = \left(\vec{Y}\,d\vec{y}\right),$$

где су $\vec{Y}$ и $d\vec{y}$ вектори са координатама

$$\vec{Y} = \left\{Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_N\right\}$$
$$d\vec{y} = \left\{dy_1, dy_2, \cdots\cdots, dy_N\right\}.$$

Први систем Пфафових једначина које одговарају овом новом облику Пфафова израза гласе сада

$$\sum_{i=1}^{N} b_{ij}\,dy_i = dY_j - \frac{\partial}{\partial y_j}\Phi = 0\,, \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots, N)$$

где је

$$b_{ij} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial y_i}$$

и, најзад,

$$d\vec{Y} = \operatorname{grad} \Phi . \tag{22}$$

Битна особина Пфафове методе је у томе, што су Пфафове једначине (22), изведене из трансформисаног Пфафова израза (21), еквивалентне Пфафовим једначинама (17) које су изведене из првобитног Пфафова израза (3). На основу ове особине Пфафове методе јасно је да за трансформисање Пфафових једначина на нове променљиве треба само трансформисати одговарајући Пфафов израз и из њега извести Пфафове једначине познатим поступком.

2. Нека се посматра Пфафов израз у нарочитом облику

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt \tag{23}$$

од $N = 2n + 1$ променљивих p_i, q_i, t $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$, где је H функција тих променљивих.

Пфафове једначине које одговарају овом Пфафовом изразу изгледају овако

$$dp_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}(-Hdt), \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \partial q_i + \frac{\partial}{\partial p_i}(-Hdt), \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{24}$$

$$d(-H) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - Hdt \right).$$

Последња од ових једначина је изведена из претходних и према томе се, на основу њих, претвара у идентичност. Према томе се систем Пфафових једначина (24) своди на овај систем диференцијалних једначина

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{25}$$

Ове једначине су међутим диференцијалне једначине кретања материјалног система чија је Хамилтонова функцији H.

Према томе, сад се на основу ове и претходне особине Пфафова израза може тврдити: да је материјални систем са Хамилтоновом функцијом H у инваријантној вези са Пфафовим изразом

$$(26) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i - H \, dt ,$$

тако да су диференцијалне једначине кретања тог система у односу ма на које променљиве x_i, $\tau \, (i = 1, 2, 3. \cdots, 2n)$ у ствари први систем Пфафових једначина за Пфафов израз

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i \, dx_i + T \, d\tau ,$$

који се добија из Пфафова израза (26) сменом променљивих $p_i, q_i, \tau \, (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ са променљивим $x_i, \tau \, (i = 1,2,3, \cdots, 2n)$.

Ако се сад за овај случај, ради краћег писања, уведу у простору од n димензија два вектора

$$\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n\} ,$$
$$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots, q_n\}$$

и искористи појам парцијалног градијента, може се Пфафов израз (23) написати у облику

$$(27) \qquad \Phi = \left(\vec{p} \, d\vec{q}\right) = H \, dt .$$

а једначине (25) се своде на векторске једначине

$$(28) \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = - \operatorname{grad}_{\vec{q}} H ; \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \operatorname{grad}_{\vec{p}} H .$$

3. Пфафов израз за кретање чврстог тела

Да би се искористила Пфафова метода у Динамици чврстог тела потребно је, с обзиром на оно што је речено, образовати Пфафов израз за кретање чврстог тела.

За формирање тог Пфафова израза поћићемо од Пфафова израза за материјални систем, који је Билимовић извео у свом раду „Пфафов општи принцип Механике“. Пфафове једначине које одговарају том изразу су диференцијалне једначине кретања материјалног система.

Прво ћемо показити како се долази до Пфафова израза за материјални систем.

Посматрајмо материјални систем од n материјалних тачака са масама m_i $(i=1,2,3,\cdots,n)$. Означимо са $\vec{r}_i$ векторе положаја тих тачака у односу на непокретну тачку O у непокретном простору, са $\vec{v}_i$ означимо брзине тих тачака, тако да је $\vec{v}_i=\dot{\vec{r}}_i$, где је тачком означен извод вектора по времену.

Жива сила тог система може се тада написати у облику

$$(29)\qquad 2T=\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{v}_i\,\vec{v}_i\right).$$

Свакој брзини $\vec{v}_i$, одн. $\dot{\vec{r}}_i$ одговара импулс p_i $(i=1,2,3,\cdots,n)$, који се може одредити као парцијални градијент живе силе по брзини $\vec{v}_i$, тј

$$(30)\qquad \vec{p}_i=\operatorname{grad}_{\vec{v}_i} T=m_i\,\vec{v}_i.$$

Тада се израз за живу силу (29) може и овако написати

$$(31)\qquad 2T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}p_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\vec{p}_i\,\vec{p}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i\,\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i\,\dot{\vec{r}}_i\right),$$

одакле непосредно следује

$$(32)\qquad \operatorname{grad}_{\vec{p}_i} T=\frac{1}{m_i}\vec{p}_i=\vec{v}_i=\dot{\vec{r}}_i.$$

Ако се сад образује елемент дејства (акције) у Хамилтонову смислу, тј.

$$(33)\qquad \left[T+\int_{A_0}^{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\delta\,\vec{r}_i\right)\right]dt,$$

при чему се вредност интеграла

$$(34)\qquad \int_{A_0}^{A}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\delta\,\vec{r}_i\right)$$

може израчунати на варираном путу између два положаја A_0 и A материјалног система на чије тачке делују спољашње силе $\vec{F}_i (i=1, 2, \cdots, n)$ које зависе само од положаја и времена и у општем случају не морају бити конзервативне. Претпоставке које важе за одређивање интеграла (34) су исте оне које се искоришћују при извођењу Хамилтонова принципа. У случају да су спољашње силе $\vec{F}_i$ конзервативне, тј. имају функцију силе, вредност интеграла (34) своди се на функцију силе U, јер се без икаквих нарочитих ограничења може претпоставити да је вредност U_0 функције силе U која одговара положају A_0 материјалног система једнака нули.

Изразу (33) за елемент акције може се дати и други облик, ако се уведе Хамилтонова функција H дата са

$$H = T - \int_{A_0}^{A} \Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \delta \vec{r}_i \Big). \tag{35}$$

Тада се заменом интеграла из (35) у (33) добија

$$T + \int_{A_0}^{A} \Big(\sum_{i=} \vec{F}_i \, \delta \vec{r}_i \Big) = 2T - H.$$

Најзад се, с обзиром на једначину (31), може написати

$$\Phi = \left[T + \int_{A_0}^{A} \Big(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, \delta \vec{r}_i \Big) \right] dt = \sum_{i=1}^{n} \big(\vec{p}_i \, d\vec{r}_i \big) - H \, dt, \tag{36}$$

а то је Пфафов израз за материјални систем. До њега смо дошли трансформисањем елемента Хамилтонова дејства, и остаје само да покажемо још да Пфафове једначине које одговарају том изразу заиста претстављају диференцијалне једначине кретања материјалног система.

Заиста, из (36) се на основу (19) добијају ове Пфафове једначине

$$d\vec{p}_i = \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} \Phi = \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} (-H dt),$$

тј.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\operatorname{grad}_{\vec{r}_i} H.$$

Међутим у изразу (35) за H члан T не зависи експлицитно од $\vec{r}_i$, а, на пр., у случају конзервативних сила други члан је $-U$ и, према томе, је најзад,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} U \quad \text{или} \quad m_i \vec{W}_i = \operatorname{grad}_{\vec{r}_i} U, \text{ одн.}$$

у скаларном облику у Декартовим координатама

$$m_i x_i'' = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i y_i'' = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i z_i'' = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

што је требало доказати, јер Пфафове једначине заиста претстављају диференцијалне једначине кретања материјалног система. На сличан начин се може показати да се, пошав од истог израза, може доћи и до диференцијалних једначина кретања материјалног система и кад он није слободан и кад силе нису конзервативне.

Сад ћемо показати како се помоћу Пфафова израза (36) за материјални систем може образовати Пфафов израз за кретање чврстог тела.

Ако се при проучавању кретања чврстог тела узме нека његова тачка, на пр., тачка A за пол (почетак покретног координатног система), брзина $\vec{v}_i$ ма које тачке M_i тела може се одредити познатом векторском једначином

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \left[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}_i\right], \tag{37}$$

где је $\vec{v}_A$ брзина изабраног пола A чврстог тела, $\vec{\rho}_i$ вектор положаја тачке M_i у односу на тачку A и $\vec{\Omega}$ угаона брзина чврстог тела у односу на непокретни простор.

За вектор $d\vec{r}_i$ добија се из (37) образац

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_A + \left[\vec{\Omega}\,dt, \vec{\rho}_i\right]. \tag{38}$$

Ако се ова вредност за dr_i унесе у Пфафов израз (36) добија се

$$(39)\quad \Phi = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i\, d\vec{r}_i\right) - H\,dt = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i, d\vec{r}_A + \left[\vec{\Omega}\,dt, \vec{\rho}_i\right]\right) - H\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i\, d\vec{r}_A\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i\left[\vec{\Omega}\,dt, \vec{\rho}_i\right]\right) - H\,dt =$$

$$= \left(d\vec{r}_A, \sum_{i=1}^{n} p_i\right) + \left(\vec{\Omega}\,dt, \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{\rho}_i \vec{p}_i\right]\right) - H\,dt\,.$$

Ако се сад уведу вектори : $\vec{K}$ – количине кретања чврстог тела чија је вредност

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

и $\mathfrak{M}^{(A)}$ главни момент количине кретања у односу на пол A, чија је вредност

$$\mathfrak{M}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{\rho}_i \vec{p}_i\right],$$

онда се Пфафов израз (39) може дефинитивно написати

$$(40)\qquad \Phi = \left(\vec{K}\, d\vec{r}_A\right) + \left(\mathfrak{M}^{(A)}, \vec{\Omega}\,dt\right) - H\,dt,$$

а то је основни Пфафов израз за чврсто тело.

Производ $\vec{\Omega}\,dt$ у изразу (40) може се сматрати као диференцијал вектора, угла обртања тела око тренутне осе обртања, ако се елементарни угао ротације сматра као вектор. Ако се такав векторски елементарни угао означи са $d\vec{\alpha}$, добија се

$$d\vec{\alpha} = \vec{\Omega}\,dt\,.$$

Тако се Пфафов израз (40) може написати у облику

$$(41)\qquad \Phi = \left(\vec{K}\, d\vec{r}_A\right) + \left(\mathfrak{M}^{(A)}, d\vec{\alpha}\right) - H\,dt\,.$$

Важно је још обратити пажњу да вектор $\vec{K}$ не зависи од избора пола A и према томе се почетак тог вектора увек може сматрати као непомичан. Извод тог вектора по времену не зависи од кретања тачке A.

Друкчије ствар стоји са вектором $\mathfrak{M}^{(A)}$, чија вредност зависи од избора пола A, у случају кретања тога пола.

Упоредимо вредност извода вектора $\mathfrak{M}^{(A)}$ по времену при претпоставци да је тачка A непокретна са изводом тог истог вектора под условом да се тачка A креће. У случају да тачку A сматрамо као покретну обележићемо је са $\mathfrak{A}$.

Ако је са O обележена непокретна тачка, онда је

$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_i}$$

или

$$\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{\rho}_i ,$$

одакле је

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_A .$$

Према томе за $\mathfrak{M}^{(A)}$ се може написати

$$\mathfrak{M}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{\rho}_i \vec{p}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i - \vec{r}_A , \vec{p}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{p}_i\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_A , \vec{p}_i\right].$$

Извод тог вектора, кад A мења положај, биће

$$\dot{\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{A})} = \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{r}_i \vec{p}_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \dot{p}_i\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_A \dot{p}_i\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{r}_A \vec{p}_i\right], \tag{42}$$

а кад не мења положај

$$\dot{\mathfrak{M}}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{r}_i \vec{p}_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \dot{p}_i\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_A \dot{p}_i\right]. \tag{43}$$

Упоређивањем оба резултата добијамо

$$\dot{\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{A})} = \dot{\mathfrak{M}}^{(A)} - \sum_{i=1}^{n} \left[\dot{r}_A \vec{p}_i\right],$$

одакле се дефинитивно налази

$$\dot{\mathfrak{M}}^{(A)} = \dot{\mathfrak{M}}^{(\mathfrak{A})} + \left[\vec{v}_A \vec{K}\right], \tag{44}$$

јер је

$$\dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A , \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \vec{K} .$$

Правило изражено једначином (44) врло је важно у оним случајевима, где се оперише са векторима променљива почетка, ако је тај почетак чврсто везан са покретним телом.

Ако је неки вектор одређен помоћу својих координата и извод тог вектора се одређује вектором чије су координате једнаке изводима координата првобитног вектора. Тај процес треба сматрати као диференцирање вектора са сталним почетком.

4. Диференцијалне једначине кретања чврстог тела у векторском облику као Пфафове једначине

Пођимо од Пфафова израза за кретање чврстог тела (41), где је

$$\mathfrak{M}^{(A)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{\rho}_i \vec{p}_i\right],$$

и ставимо, без обзира на то да ли су спољашње силе конзервативне или не, само краткоће ради,

$$H = T - U,$$

где према томе U може бити претстављено и раније наведеним интегралом. Тада се на основу правила (19) могу образовати Пфафове једначине за два Пфафова вектора $\vec{K}$ и $\mathfrak{M}^{(A)}$. По том правилу добијамо

$$d\vec{K} = \operatorname{grad}_{\vec{r}_A} \Phi, \tag{45}$$

$$d\mathfrak{M}^{(A)} = \operatorname{grad}_{\vec{\alpha}} \Phi,$$

при чему је A стално.

Међутим, А. Билимовић је у свом раду „Једначине кретања чврстог тела у новој векторској форми" (Глас Српске академије наука књ. CXXVII) показао ово. Ако се жива сила чврстог тела T напише у облику

$$2T = Mv_A^2 + 2M\left(\vec{v}_A\left[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}_c\right]\right) + \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\left[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}_i\right]\left[\vec{\Omega}\,\vec{\rho}_i\right]\right), \tag{46}$$

где је M укупна маса чврстог тела, а $\vec{\rho}_c$ вектор положаја центра масе чврстог тела у односу на пол A чврсто везан са телом, онда се лако могу извести обрасци

$$K = \mathrm{grad}_{\vec{v}_A} T,$$

$$\mathfrak{M}^{(\mathfrak{A})} = \mathrm{grad}_{\vec{\Omega}} T,$$

где је, како смо назначили, пол A промењьив и чврсто везан са покретним телом.

На основу тих образаца могу се сад леве стране једначина (45) изразити на овај начин

$$d\vec{K} = d\,\mathrm{grad}_{\vec{v}_A} T. \tag{47}$$

$$d\mathfrak{M}^{(A)} = d\mathfrak{M}^{(\mathfrak{A})} + \left[\vec{v}_A, \mathrm{grad}_{\vec{v}_A} T\right] dt. \tag{48}$$

Ради израчунавања десних страна поменутих једначина треба узети у обзир да у Пфафову изразу Φ од $\vec{r}_A$ и $\vec{\alpha}$ може зависити само члан $U\,dt$, те је стога

$$\mathrm{grad}_{\vec{r}_A} \Phi = \mathrm{grad}_{\vec{r}_A} U\,dt,$$

$$\mathrm{grad}_{\vec{\alpha}} \Phi = \mathrm{grad}_{\vec{\alpha}} U\,dt.$$

Како функција U претставља рад спољашњих сила које дејствују на чврсто тело при неком произвољном померању тела, може се написати

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i\, d\vec{r}_i\right), \tag{49}$$

где је, $\vec{F}_i$ сила која дејствује на тачку M_i, а $d\vec{r}_i$ елементарно померање те тачке.

Ако се сад стави

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_A + \left[d\vec{\alpha}, \vec{\rho}_i\right],$$

добија се

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i\, d\vec{r}_A\right) + \sum_{i=}^{n} \left(\vec{F}_i \left[d\vec{\alpha}, \vec{\rho}_i\right]\right),$$

или

$$dU = \left(\vec{F}, d\vec{r}_A\right) + \left(L_A, d\vec{\alpha}\right), \tag{50}$$

где je $\vec{F} = \sum_{i=}^{n} \vec{F_i}$ резултанта свих сила које дејствују на чврсто тело, а $\vec{L}_A$ резултантни момент тих сила у односу на тачку A.

Из једначине (50) непосредно следује

$$\operatorname{grad}_{\vec{r}_A} U = \vec{F}, \tag{51}$$

$$\operatorname{grad}_{\vec{\alpha}} U = \vec{L}_A . \tag{52}$$

Помоћу резултата (47), (48), (51), и (52) могу се сад из једначина (45) дефинитивно извести диференцијалне једначине кретања чврстог тела у векторском облику, како их је Билимовић написао у свом већ поменутом раду, тј.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T = \vec{F}, \\ &\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\vec{\Omega}} T + \left[\vec{v}_A, \operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T\right] = \vec{L}_A . \end{aligned} \tag{53}$$

Подвлачимо још да је Билимовић показао да се из ових једначина могу извести све досад познате форме диференцијалних једначина кретања чврстог тела.

SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE PFAFF DANS LA DYNAMIQUE DU CORPS SOLIDE

Par

TATOMIR P. ANGELITCH

Sujet: Introduction. 1. Pfaffian. 2. Équations de Pfaff. 3. Pfaffian déterminant le mouvement du corps solide. 4. Équations vectorielles du mouvement du corps solide sous forme des équations de Pfaff.

D'abord on a donné des explications sur les Pfaffians et les équations de Pfaff sous forme vectorielle et puis sur la méthode de Pfaff développée par Bilimovitch (Bull. de l'Acad. Serbe des Sciences, tome CLXXXIX — 1946).

On a établi ensuite, en s'appuyant sur ces développements, l'élément d'action au sens de Hamilton pour le corps solide sous forme d'un Pfaffian, utilisant à cet effet les résultats obtenus par Bilimovitch pour un système matériel dans son travail déjà cité.

Ce Pfaffian a la forme suivante

$$\Phi = \left(\vec{K}\, d\vec{r}_A\right) + \left(\mathfrak{M}(A), d\vec{\alpha}\right) - H\, dt , \tag{1}$$

$\vec{K}$ étant la quantité de mouvement du corps solide, $\vec{r}_A$ le rayon vecteur d'un point A dans le corps solide, rapporté à l'origine d'un système invariable de référence, $\mathfrak{M}^{(A)}$ le moment des quantités de mouvement du corps solide, $d\vec{\alpha}$ l'élément angulaire vectoriel. Enfin la fonction H est donnée par l'équation

$$H = T - U, \tag{2}$$

T étant la force vive du corps solide et U étant le travail de la résultante F des forces extérieures calculé de la position initiale déterminée par $\vec{r}_0$ jusqu'à une position finale déterminée par $\vec{r}$.

On démontre enfin que les équations vectorielles de Pfaff correspondant au Pfaffian ainsi formé sont les équations du mouvement du corps solide sous forme vectorielle suivante données par Bilimovitch (Bull. de l'Acad. Serbe des Sciences, tome CXXVII — 1927)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T = \vec{F}, \\ &\frac{d}{dt}\operatorname{grad}_{\vec{\Omega}} T + \left[\vec{v}_A, \operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T\right] = \vec{L}_A, \end{aligned} \tag{3}$$

$\vec{L}_A$ étant le moment résultant des forces extérieures par rapport au point A.

ГЛАС

СРПСКЕ АКАДЕМИЈЕ НАУКА

CXCI

ПРВИ РАЗРЕД

96

БЕОГРАД
ШТАМПА ЈУГОСЛОВЕНСКОГ ШТАМПАРСКОГ ПРЕДУЗЕЋА
1948

Штимпа Југословенског штампарског предузећа — Београд

САДРЖАЈ

Књига:

Митриновић, Abel-ове диференцијалне једначине вишега реда. — **В. Жардецки,** Прилог питању аксиоматизирања другог принципа термодинамике. — **Петар В. Музен,** О базама непрекидних функција. — **Н. Салтиков,** Поправка Декартовог решења проблема Папуса. — — — Канонички облик функционалних група. — **Драгослав С. Митриновић,** Проблем о асимптотским линијама праволиниских површина чије решење зависи од Riccati-еве диференцијалне једначине. — **Михаило Петровић,** Једна класа одређених интеграла са променљивим параметром. — **Н. Салтиков,** Инваријанте линеарних парцијалних једначина другога реда. — **Михаило Петровић,** Једна заједничка особина мноштва диференцијалних једначина. — — — Потенцијални редови чији коефицијенти имају аритметичку структуру. — **Н. Салтиков,** Испитивање интеграла С. Лиа парцијалних једначина првог реда с једном непознатом. — Б. 1939 8° 298.

CLXXX (89). — **Стеван Николић,** Нитрати и услови за њихово образовање у земљишту смоници. — — — Нитрати и услови за њихово образовање у земљишту подзолу (пепељуши). — **Стефан Ђелинео,** О терморегулацији и термогенези пацова за време дуготрајног боравлења на температурама које изазивају хипертермију. — **Илија Н. Димитријевић,** Утицај антипирина на терморегулацију пацова. — **Бран. Миловановић,** Упоредна анатомија и филогенетски односи Lapeirrouseiina. — **Н. Незлобински,** Хелминтолошке студије у Охридској котлини. — **Јован С. Томић,** Бостонит са планине Козјака код Куманова. — **Лепосава Марковићева,** О утицају динитрофенола 1, 2, 4, на дисање кваса. — **Јеленко Михаиловић,** Сеизмичност Хвара. — Б. 1939 8° 326.

CLXXXI (90). — **М. Миланковић,** О употреби векторских елемената у рачуну планетских поремећаја. — **Д-р Н. Салтиков,** Генералисање Јакобијевих испитивања о парцијалним једначинама. — **Драгољуб Марковић,** Границе корена алгебарских једначина. — **Драгослав С. Митриновић,** О једној класи диференцијалних једначина првога реда на које се наилази у разним проблемима геометрије. — — — Неколико ставова о Riccati-евој диференцијалној једначини. — **В. Давац,** Прилог аксиоматичком излагању геометрије. — **Константин П. Орлов,** О појму општег интеграла парцијалних диференцијалних једначина другог реда. — **Антон Билимовић,** О кретању чврстог тела са допунским покретним телом. — **Д-р Н. Салтиков,** Непосредне методе интеграљења парцијалних једначина другог реда. — Б. 1939 8° 375.

CLXXXIII (91). — **Живојин М. Ђорђевић,** Проучавање Heamogregarin mellisselesis nov. spec. — — — Проучавање актиномиксида: Sphacructinomyxon donicae nov. spec. — **Јован Хаџи,** Нове симфориске суктorије Spelaevphrya polypoides sp. n., Spelaeophrya locutris sp. n., Acineta karamani sp. n. и њихови кругови развића. — **Јеленко Михаиловић,** Сеизмичка динамика Кварнера. — — — Сеизмичка активност Охридске и Преспанске потолине. — **Бор. Ж. Милојевић,** Долина Врбаса, геоморфолошка испитивања. — **Стефан Ђелинео,** Производња топлоте у текунице Citellus citelluss L у јесен пре зимског сна. — **Богдан Варићак,** Развој ембрионске кесице и број хромосома код врсте Narthecium scardicum Кошанин. — **Живојин М. Ђорђевић,** Проучавање актиномиксида 12 Priactinomyxon Ochridensis nov. spec. — Проучавање актиномиксида 3 Trioctinomyxon petri nov. spec. — Б. 1940 8° 324.

CLXXXV (92). — **В. В. Мишковић,** Улога астрономије у сарадњи са осталим наукама. — — — Азимут и његова систематска

Књига:

отступања у меридијанским посматрањима. — **Божидар Поповић**, Један инверсни став о асимптотским вредностима Лапласова интеграла. — **В. Давац**, Увођење крајева као параметарских количина. — **В. Жардецки**, Један став Руђера Бошковића и основе теорије кванта. — **Михаило Петровић**, Један општи начин параметарског изражавања трансценданата коначног реда. — — — О равнотежним фигурама линије у равни чија је кривина монотона функција дужине лука. — **Н. Салтиков**, Линеарне тангенцијалне трасформације. — — — Испитивање сингуларних интеграла диференцијалних једначина. — — — Парцијалне једначине интеграбилне раздвајањем променљивих количина. — — — Парцијалне једначине вишег реда сводљиве на парцијалне једначине првог реда. — **Драгослав С. Митриновић**, Веза између линеарне диференцијалне једначине другог реда и једне линеарне интегралне једначине типа Volterra. — **Антон Билимовић**, Улога једнако-рогљастих Архимедових полиједара у проблему више тела. — — — О једном специјалном случају проблема четирију тела. — Б. 1941 8° 322.

CLXXXVI (93). — **Живојин М. Ђорђевић**, Проучавање инфузора астомата. — **Иван Ђаја**, Стање слично зимском сну презимара добивено у пацова барометарском депресијом. — — — Барометарски притисак и зимски сан. — — — Јаке хеморагије и експериментална барометарска депресија. — — — О гушењу у затвореном простору на термичној неутралности. — **Стефан Ђелинео**, Производња топлоте у птица на температури адаптације. — **Иван Ђаја**, Тиреоидеја и барометарска депресија. — Б. 1941 8° 251.

CLXXXVIII (94). — **Хајнц Хаузнер**, Истраживања о утицају светлосног зрачења на фотосинтезу код врсте Elodea densa. — **Боривоје Ж. Милојевић**, Долина Брегалнице — геоморфолошка испитивања. — **К. Шаховић**, Антибластична одбрана организма и ретикуло-ендотелијални систем. — **К. Шаховић**, Дејство канцерогених материја на растења тумора. — **И. Ђаја и К. Шаховић**, Појава и развитак експерименталних тумора у односу на температуру средине. — **Иван Ђаја**, Летаргично стање добивено у мачке и под дејством разређеног ваздуха и хладноће. — **Лепосава Марковић**, Алкохол и дисање кваса. — **Живојин Ђорђевић**, Проучавање инфузора астомата. 2 Инфузори астомате охридских триклада. — Б. 1941 8° 161.

CLXXXIX (95). — **Михаило Петровић**, Елементарна посматрања о распореду омањих простих бројева. — — — Приближно изражавање елиптичких помоћу елементарних функција. — **Jean Giaja et Leposava Marković**, Sur le rapport entre la tension et la consommation de l'oxygène chez les homeothermes. Le baroquotient. — **Антон Билимовић**, Природна особина диференцијалне једначине коничног просека. — — — Пфафов општи принцип Механике. — — — Прилог геометриској теорији генералисаних састављених и пројицираних вектора. — — — Хилбертов интеграл независности и Пфафове једначине варијационог проблема. — — — Пфафова метода у геометриској оптици. — — — О максималним вредностима модула детерминанте. — **Божидар П. Николић и Бранка Васиљевић**, Реобаза и хронаксија у току мишићног рада. Огледи на некураризованим жабљим мишићима у пасивној фази просте мишићне контракције. — Б. 1946 8° 223.