СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXVIII

ПРВИ РАЗРЕД

88

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

7

Н. САЛТИКОВ

Поправка Декартовог решења проблема Папуса.

БЕОГРАД 1939

Цена 3 динара

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXVIII

ПРВИ РАЗРЕД

88

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

7

Н. САЛТИКОВ

Поправка Декартовог решења проблема Папуса.

БЕОГРАД 1939

Цена 30 динара

Поправка Декартовог решења проблема Папуса.

Од

Н. САЛТИКОВА

ПОПРАВКА ДЕКАРТОВОГ РЕШЕЊА ПРОБЛЕМА ПАПУСА.

Од

Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 29 новембра 1937 г.).

Декарт да би показао вредност своје методе, коју је објавио у раду „Геометрија“ применио ју је на проблем Папуса. Овим су се проблемом бавили још Еуклид и Аполоније, на три века пре Христова Рођења, али нико до Декарта није могао пронаћи тражено решење.

Декартово решење овог проблема од велике је важности, јер се тиме била створена аналитичка геометрија.

У овој ћу расправи ставити примедбу, да би поправио једну погрешку, која се увукла у Декартово решење, па до сада није била примећена, ма да се тачан резултат налази у Њутновом чувеном делу „Philosophiae naturalis principia mathematica“ објављеном 1686 године. Овде леме XVII, XVIII и XIX износе синтетичко решење посматраног проблема.

Није само важно да се поправи грешка, но да ова поправка да могућност да се претстави Декартово решење на један нов и елегантан начин. Сем тога проблем Папуса стављa се на овај начин у везу са другим резултатом, који је познат као теорема Папуса.

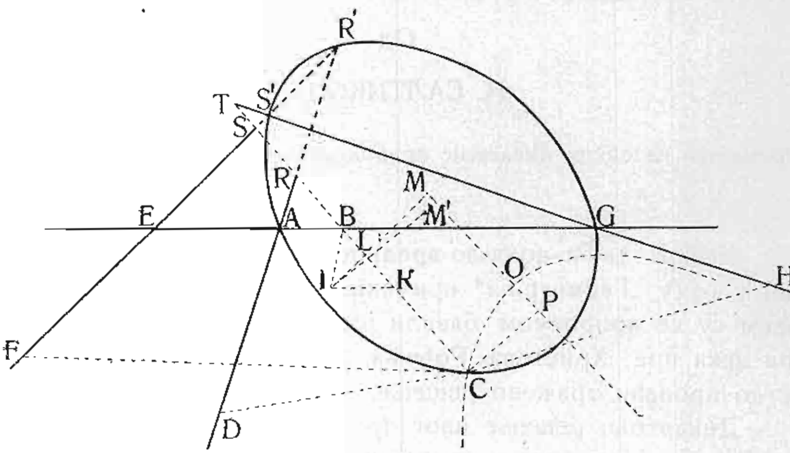
У најпростијем случају Папусовог проблема дају се (см. 1) четири произвољне праве линије AB, DA, EF и HG. Тражи се геометријско место тачака C тако, да би одсечци правих CB, CD, CF и CH чинили респективно сталне углове CBA, CDA, CFE и CHG и да би задовољавали услов:

$$CB.CF = CD.CH. \tag{1}$$

Треба нарочито подвући што Декарт уводи координате x *и* y *тачке* C *у односу на коси координатни систем са почетком у тачки* A, *чија се оса* x *поклапа с датом правом линијом* AB, *а оса* y *сече је под сталним углом* CBA.

За тражено геометријско место добија се једна квадратна хомогена једначина.

Декарт потанко испитива ову једначину, да би нашао



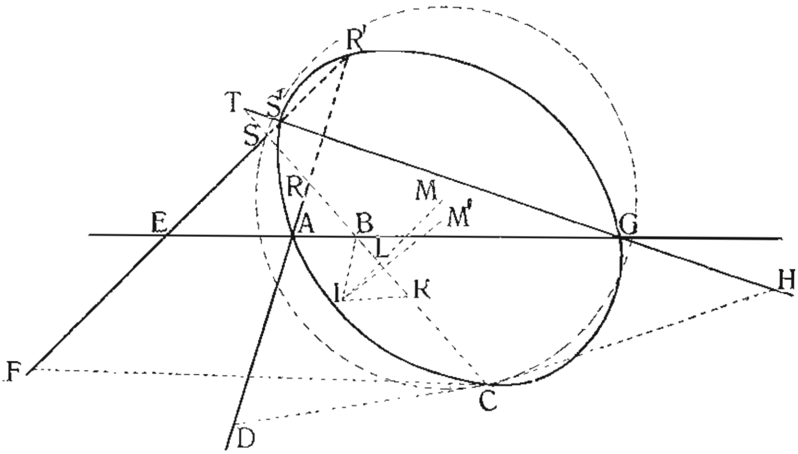
Сл. 1.

коничне пресеке, које она може да одреди. Ту се јавља први пут генијални проналазак Декарта за проучавање криве, која је представљена једном једначином.

Пронађени су резултати објашњени на двема сликама. На првој од њих (сл. 1) обележен је круг тачкасто, а на другој (сл. 2) исто тако је показана једна грана хиперболе.

Проучавајући Декартово решење скренуо сам пажњу на ове криве и за то морао сам да видим различита издања где се понавља посматрано решење. Срећним случајем пружила ми се могућност да проучим у оригиналу на латинском, „Renati Des-cartes Geometria. Editio Tertia. Amstelodami“, издање од 1683 године, са коментаром од Франциска Шутена. Сем тога проучавао сам примерак Декартове Геометрије, који је прештампан, према француском оригиналу од 1664, у новом издању Аналитичке геометрије Огиста Конта од

1894 године, затим читао сам текст „Геометрије" у Декартовим делима, објављеним 1902 године од Шарла Адама и



Сл. 2.

Павла Танерија, такође друго издање „Геометрије" Декарта од издавача Германа у Паризу, од 1927 године, најзад и друго поправљено издање од професора Људвига Шлезингера на немачком од 1923 године.

За мене је био од особитог интереса коментар Франциска Шутена, који је штампан на странама 182—207 горе поменутог латинског издања Декартове Геометрије. Ту Шутен потанко објашњава Декартово решење проблема Папуса и тумачи га за двадесет четири различита случаја. За сваки од њих Шутен даје засебну специјалну слику.

Заиста, довољно је бацити само поглед на једначину, коју је Декарт извео за тражено геометријско место, да би се могло одмах закључити, да Декартов конични пресек мора пролазити кроз координатни почетак *A*. То је због тога што је Декартова једначина хомогена и према томе мора се идентички задовољити вредностима нула за обе текуће координате.

Шта више морамо приметити, пошто је избор координатних оса потпуно произвољан, да наведена особина постоји за тачку пресека сваког пара двеју од четири Папусових правих линија.

Према томе Декартови конични пресеци морају пролазити кроз све четири тачке пресека четири дате праве, при услову, по себи се разуме, да се три од ових тачака не смеју налазити на истој правој линији.

Слике у горе наведеним издањима не одговарају овом очевидном закључку. Али треба приметити да само на једној слици, која се налази на страни 398 у VI-ој свесци Декартових Дела од Адама и Танерија, нацртани круг пролази кроз координатни почетак A. То значи само кроз једну од четири поменуте тачке.

Наведимо, најзад, обимни новији рад Клода Робиела „Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes“ Lyon. 1730. Према томе ово дело био је објављено 44 године доцније од Њутнових „Principia“. Међутим у таблицама 5-ој, 6-ој, 7-ој, 8-ој и 9-ој ни један Робиелов цртеж, који се односи на Декартово решење Папусова проблема, није тачан. Заиста у овим сликама не води се рачуна о правилном току Декартових коничних пресека.

Није у толикој мери интересантна извршена поправка објашњене погрешке, у колико је важно да је сада могуће формулисати Декартово решење проблема Папуса на следећи начин:

Тражено геометријско место, које је Декарт пронашао, претставља конични пресек описан око тетрагона, од четири дате праве. Према своме положају, који дате праве заузму, и према њиховом реду, посматрани тетрагон може да буде конвексан или конкаван.

Добијени резултат доказује да описани конични пресек, са обзиром на праве нацртане на Декартовим сликама, не сме да буде нити круг, нити хипербола, које је Декарт нацртао, него је увек елипса. Ову смо елипсу нацртали дебелом линијом на обема Декартовим сликама. Наведена елипса мора, сем темена A и G да пролази и кроз темена S' и R', које Декарт није био означио. Оба се темена, S' и R', налазе на продужењу правих линија FE и DA. Због тога морали смо да продужимо дебелим цртицима ове праве на Декартовим сликама. Треба да се оне на овакав начин попуне, јер, за Декартов услов (1), посматрани тетрагон мора да буде конкаван $AGS'R'A$.

Одавно је позната тако звана теорема Папуса[1]): *Одсечци нормала направљених из ма које тачке неког датог коничног пресека на стране у њега уписаног тетрагона праве сталну анхармонијску размеру.*

Декартово решење Папусовог проблема очевидно претставља резултат који је обрнута теорема овде наведеној Папусовој теореми.

Пошто су Декарт и Њутн пронашли наведену обрнуту теорему Папусовој, право је предложити да се ова обрнута теорема, која претставља решење Папусовог проблема, зове се *теоремом Декарта и Њутна.*

Чим је успостављена ова теорема, може се нагласити још једна поправка у тексту веома познате Математичке Енциклопедије, коју ћемо навести у француском издању „Tome III, Géométrie Algébrique Plane", p. 59. Овде се говори о Папусовој теореми, коју је генералисао Декарт. Међутим теорема, коју смо назвали теоремом Декарта—Њутна претставља не генералисање Папусове теореме, него нову теорему, која је обрнута Папусовој. Теорема Декарта—Њутна претставља решење Папусовог проблема, где је он у суштини тражио обрнути резултат за своју теорему.

Њутн је извео Декартову—Њутнову теорему из чисто геометријских података. Поред тога лако је навести и аналитички доказ ове теореме у нешто простијем облику до Декартовог.

Заиста, узмимо (см. 1) праву AG за осу x, а AR' за осу y и означимо са ω координатни угао.

Означимо даље са α и β углове, које праве HG и FE чине са осом x; нека γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4 означавају углове, које заклапају праве линије, полазећи из тачке $C(x, y)$, са датим правим линијама.

Обележимо, најзад, са p и p' растојања правих HG и FE од координатног почетка A.

Према томе имаћемо обрасце:

[1]) *Др. Богдан Гавриловић. — Аналитичка Геометрија тачке, праве, круга и коничног пресека.* Београд 1896, стр. 316.

$$CB \equiv \frac{y \sin \omega}{\sin \gamma_1},$$

$$CD \equiv \frac{x \sin \omega}{\sin \gamma_1},$$

$$CF \equiv \frac{\sin \omega}{\sin \gamma_3} [x \sin \beta + y \cos (\omega - \beta) - p'],$$

$$CH \equiv \frac{\sin \omega}{\sin \gamma_4} [x \sin \alpha - y \sin (\omega - \alpha) - p].$$

Uврстимо ове вредности у једнакост (1). Према томе се тражено геометријско место одређује једначином:

$$y [-x \sin \beta + y \sin (\omega - \beta) - p'] = kx [x \sin \alpha - y \sin (\omega - \alpha) - p], \quad (2)$$

где је уведена ознака

$$k \equiv \frac{\sin \gamma_1 \sin \gamma_3}{\sin \gamma_2 \sin \gamma_4}.$$

Добијена једнакост (2) заиста одређује конични пресек, који очевидно пролази кроз тачке:

$$A(0, 0), \qquad G\left(\frac{p}{\sin \alpha}, 0\right), \qquad S'(x_0, y_0), \qquad R'\left(0, \frac{p'}{\sin (\omega - \beta)}\right),$$

где x_0, y_0 означавају координате тачке пресека правих линија FE и HG. Заиста, једначине обе ове праве добијају се, ако изједначимо са нулом сваки од образаца у средним заградама, које се налазе са обе стране једначине (2). Одавде излази да се тачка S' налази на кривој (2).

Једначина ове криве (2) може се написати још и овако:

$$lx^2 + 2mxy + ny^2 - kp'x + py = 0, \quad (3)$$

где су уведене ознаке

$$l \equiv k \sin \alpha, \quad 2m \equiv \sin \beta - k \sin (\omega - \alpha), \quad n = -\sin (\omega - \beta).$$

Лако је сад одредити када ће конични пресек (3) претстављати круг.

За то би требало имати

$$l \equiv n \qquad m \equiv \cos \omega.$$

Према томе добијамо две нове једнакости

$$k = -\frac{\sin(\omega - \beta)}{\sin \alpha}, \qquad \sin\omega \, . \, \sin(\omega + \alpha - \beta) = 0 \, .$$

Пошто ω не сме да буде једнака нули, онда се добијају услови:

$$\omega + \alpha = \beta \, , \qquad k = 1 \, . \tag{4}$$

Први услов (4) показује, да, од четири дате праве, три могу да буду потпуно произвољно намештене, и то, например, AB, HG и DA тако да углови α и ω могу имати које год хоћемо вредности. Онда четврта права мора заклапати одређени угао $\omega + \alpha$ са првом правом AB, да би, за $k = 1$, Декартов конични пресек постао круг.