СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXVIII

ПРВИ РАЗРЕД

88

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

8

Н. САЛТИКОВ

Канонички облик функционалних група

БЕОГРАД 1939

Цена 5 динара

СРПСКА КРАЉЕВСКА АКАДЕМИЈА

ГЛАС CLXXVIII

ПРВИ РАЗРЕД

88

А. МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

8

Н. САЛТИКОВ

Канонички облик функционалних група

БЕОГРАД 1939

Цена 5 динара

Канонички облик функционалних група

Од

Н. САЛТИКОВА

КАНОНИЧКИ ОБЛИК ФУНКЦИОНАЛНИХ ГРУПА

Од

Н. САЛТИКОВА

(Приказано на скупу Академије природних наука 20 маја 1937 г.)

УВОД

Решење више проблема модерне теорије парцијалних једначина првог реда зависи од теорије диференцијалних инваријаната једне функционалне групе интеграла карактеристика [1]).

Ова се теорија оснива на каноничким особинама интеграла каноничких система једначина у тоталним диференцијалима, а и на каноничком облику функционалних група.

Прва теорија била је потпуно обрађена у неколико мојих радова.

Што се тиче каноничког облика функционалних група, тим питањем су се бавили Е. Бур и С. Ли, који, по тврђењу Енгела, није ништа знао о испитивањима Бура, па је његове резултате пронашао по други пут.

Циљ овог истраживања састоји се у томе да упростим наведену Бурову методу помоћу искоришћавања било горе поменутих каноничких особина интеграла каноничког система једначина у тоталним диференцијалима, било система линеарних једначина Јакобијевог облика.

Бур је своја истраживања применио на проблем кретања

---

[1]) *N. Saltykow — Etude sur l'évolution des Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Gauthier-Villars. Paris 1934. Chapitre IV.

трију тела и извео канонички систем једначина 4-ог реда. Овај је резултат доцније упростио Бриоши и Сијачи, а исправио Матје. Бур је искористио Бертранове интеграле једначина кретања трију тела, претворио их у канонички облик и одавде је добио свој систем каноничких једначина.

Доцније је Поенкаре исто тако пронашао канонички систем 4-ог реда проблема трију тела, полазећи од Јакобијевих једначина релативног кретања у промењљивим количинама Делонеа.

Поенкаре је искористио вештачку трансформацију посматраних једначина, па је дошао до дефинитивне форме једначина пошто је доказао низ помоћних теорема. Сад се оне појављују као неопходне последице опште теорије, коју ми је част поднети Академији.

Сем тога, поред практичних примена за проблеме трију и више тела, испитивања диференцијалних инваријаната имају посебан значај за напредовање теорије парцијалних једначина. На овај се начин, између осталог, уклањају такође и непотребне компликације, које се налазе у С. Лијевом мемоару у XXV-ој свесци Математичких Анала, § 10.

Глава I

Интеграли у инволуцији

Применимо за интеграљење парцијалних једначина првог реда методу којом смо се служили приликом решавања проблема Г. Д. Михњевића[2]. Сад се посматрана теорија може искористити за смањивање броја променљивих количина, чим будемо нашли неколико интеграла карактеристика, којих нема у довољном броју да би се могло интеграљење довршити.

Наведимо још да се метода, којом ћемо се овде бавити, налази у најтешњој вези и са теоријом диференцијалних инваријаната[3], а с друге стране и са скраћеним тангенцијалним трансформацијама[4].

Узмимо једну парцијалну једначину првог реда

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad (1)$$

где променљиве p_s означавају парцијалне изводе првог реда непознате функције z по независно променљивој количини x_s.

Претпоставимо да је

---

[2]) *Н. Салтиков — Структура нормалног система парцијалних једначина првог реда, помоћу интеграла карактеристика.* (Срп. Кр. Акад. Глас CLXXIII. Први Разред. А. Мат. Науке. 85. стр. 152).

[3]) *N. Saltykow — Etude sur l'évolution des Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris. Gauthier-Villars 1934. Chapitre IV.

[4]) *N. Saltykow — Sur la théorie des Equations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.* Paris. Gauthier-Villars. Bruxelles. Lamertin. 1925. Chapitre XII.

$$\frac{\partial F}{\partial p} \gtrless 0 , \tag{2}$$

и да линеарна једначина карактеристика

$$(F, f) = 0 \tag{3}$$

има неки број r интеграла у инволуцији:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r , \qquad (1 \leq r < n-1) . \tag{4}$$

Ако буде неизводљиво даље налажење нових интеграла карактеристика у инволуцији, или у случају да је број $2n$ посматраних промењљивих количина доста велики, тако да отежава рачун, онда предлажемо следећи поступак.

Саставимо нормални систем парцијалних једначина:

$$\left. \begin{array}{c} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_k , \\ (k = 1, 2, \ldots, r) \end{array} \right| \tag{5}$$

где су a_k произвољне константе, а прве стране једначина (5) претстављају интеграле (4).

Претпоставимо да смо у стању интегралити систем (5) и да му се потпуни интеграл изражава овако:

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_r, C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}) + C, \tag{6}$$

где су $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}, C$ произвољне константе.

Према томе је добро познато[5]) да обрасци:

$$p_{r+s} = \frac{\partial V}{\partial x_{r+s}} , \quad \frac{\partial V}{\partial C_s} = C'_s ,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n-r) ,$$

где су C'_s нове произвољне различите константе, одређују заједно са функцијама (4) потпуни систем различитих интеграла у каноничком облику нормалног система линеарних једначина:

---

[5]) *N. Saltzkow — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris. Gauthier-Villars. 1931, p. 37, n⁰ 20.

$$(f_k, f)=0,$$

$$(k=1, 2, \ldots, r).$$

То значи да се, за овај систем, наведени потпуни систем интеграла изражава у облику:

$$\left.\begin{array}{r} f_1, f_2, \ldots, f_r, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r} \\ \psi_1, \ \psi_2, \ldots, \psi_{n-r} \end{array}\right\} \tag{7}$$

где су функције, сем оних које се налазе у истој колони, у инволуцији; а функције исте колоне су коњуговане, т. ј. задовољавају услове:

$$(\varphi_s, \psi_s)=1, \qquad (s=1, 2, \ldots, n-r).$$

Доказали смо у наведеној теорији диференцијалних инваријаната[3]), да ако узмемо $2n-r$ образаца (7) за нове променљиве количине, у место $2n$ старих променљивих

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

онда ће функција F добити овакав израз у новим променљивим:

$$F \equiv \Psi(f_1, f_2, \ldots, f_r, \ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}, \ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \tag{8}$$

који не зависи више од старих променљивих количина.

Што се тиче линеарне једначине (3), она добија следећи облик:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_i}-\frac{\partial\Psi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i}\right)=0, \tag{9}$$

где је φ нова ознака за непознату функцију f. Према томе претворена линеарна једначина (9) зависи само од $2n-2r$ променљивих количина, а $f_1, f_2, \ldots, f_r$ улазе као сталне количине.

Важно је запазити облик добијене једначине (9). Заиста, она се може протумачити као линеарна једначина Јакобијевог облика, са карактеристичном функцијом Ψ, која одговара парцијалној једначини првог реда с једном непознатом функцијом, и то:

$$\Psi(f_1, f_2, \ldots, f_r, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}) = 0\,, \qquad (10)$$

где се $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}$ сматрају као независно променљиве количине, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ су парцијални изводи првог реда једне непознате функције по одговарајућим независно променљивим количинама.

Према томе се полазна парцијална једначина (1) са n независно променљивих количина своди на нову парцијалну једначину (10), где је број нових независно променљивих количина мањи за r јединица.

Сваки интеграл карактеристика добијене једначине (10), кад се претвори у старе променљиве количине, одређује интеграл карактеристика првобитне једначине (1).

Заиста, претпоставимо да смо нашли неки интеграл једначине (9), који ћемо означити овако:

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_r, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r})\,.$$

Посматрајући све вредности $f_1, f_2, \ldots, f_r, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ као функције старих променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, добијамо следећи израз Поасанове заграде:

$$(F, \Phi) \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} (F, f_i) + \sum_{s=1}^{n-r} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_s} (F, \psi_s) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_s} (F, \varphi_s) \right]. \qquad (11)$$

Међутим карактеристичка функција F изражава се обрасцем (8). Према томе, на основу каноничких особина интеграла (7), имамо:

$$(F, f_i) \equiv \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \Psi}{\partial f_k} (f_k, f_i) + \sum_{\sigma=1}^{n-r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \psi_\sigma} (\psi_\sigma, f_i) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\sigma} (\varphi_\sigma, f_i) \right] \equiv 0\,,$$

$$(F, \psi_s) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \Psi}{\partial f_k} (f_k, \psi_s) + \sum_{\sigma=1}^{n-r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \psi_\sigma} (\psi_\sigma, \psi_s) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\sigma} (\varphi_\sigma, \psi_s) \right] \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_s}\,,$$

$$(F, \varphi_s) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \Psi}{\partial f_k}(f_k, \varphi_s) + \sum_{\sigma=1}^{n-r}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \psi_\sigma}(\psi_\sigma, \varphi_s) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_\sigma}(\varphi_\sigma, \varphi_s)\right] \equiv$$

$$\equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial \psi_s}.$$

Због тога образац (11) добија облик:

$$(F, \Phi) \equiv \sum_{s=1}^{n-r}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_s}\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_s} - \frac{\partial \Psi}{\partial \psi_s}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_s}\right).$$

Десна је страна написане једнакости идентички нула, јер смо претпоставили да функција Φ претставља интеграл линеарне једначине (9).

Најзад, треба још навести начин, на који се врши посматрана трансформација.

Ова трансформација је очевидна и не претставља никакве нарочите особине, ако помоћне једначине (5) садрже све променљиве количине $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Посматрајмо сад засебан случај, где једначине (5) имају облик:

$$\left.\begin{array}{c} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m, p_1, p_2, \ldots, p_m) = a_k, \\ (k=1, 2, \ldots, r, \quad r \leq m < n), \end{array}\right\} \tag{12}$$

тако да свих $2m$ коњугованих променљивих улазе у систем (12).

Потпуни се интеграл нормалног система (12) изражава у облику:

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_r, C_1, C_2, \ldots, C_{m-r}) + C.$$

Према томе $2(m-r)$ инваријаната одређују се помоћу образаца:

$$p_{r+s} = \frac{\partial V}{\partial x_{r+s}}, \quad \frac{\partial V}{\partial C_s} = C'_s,$$

$$(s=1, 2, \ldots, m-r).$$

Пошто старе променљиве:

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$$

$$p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$$

не улазе у последње обрасце, онда се одмах види да ове старе промењљиве претстављају $2(n-m)$ осталих инваријаната, које допуњавају пређашње до потребног броја $2(n-r)$ инваријаната.

Али се проблем нешто отежава, кад неке од старих каноничких промењљивих количина друге класе не улазе у интеграле карактеристика (4). Међутим питање трансформације у овом случају не може се решити на пређашњи очевидни начин.

Да бисмо сад саставили потребан број каноничких инваријаната протумачимо, прво, трансформације које су биле досада испитиване на овај нови и општији начин.

Проучене трансформације поклапају се већ, у суштини, са такозваним скраћеним[6]) тангенцијалним трансформацијама.

Заиста, потпуни интеграл (6) може се сматрати као основна формула тангенцијалних трансформација за претварање полазне парцијалне једначине (1). Количина C уводи се као нова непозната функција, а $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}, -C'_1, -C'_2, \ldots, -C'_{n-r}$ претстављају канонички систем нових независно промењљивих количина. Очевидно је да се у посматраном случају C_s изражавају у старим промењљивим количинама помоћу функција φ_s, а C'_s помоћу ψ_s. Разлика је само у томе што сад φ_s претстављају изразе нових независно промењљивих количина, а $-\psi_s$ сад су вредности нових извода $\dfrac{\partial C}{\partial C_s}$.

Полазећи од наведених расматрања, лако је расветлити и нагласити посебан случај. Зато узмимо, на пример, парцијалну једначину са четири независно промењљиве количине:

$$p_1 + \frac{(p_2 + x_1)(p_3 + x_4)}{p_4 + x_3} + (p_4 + x_3)^2 + x_2 = 0, \qquad (13)$$

који има два интеграла карактеристика у инволуцији, наиме:

---

[6]) *N. Saltykow — Sur la Théorie des Equations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.* Paris. Gauthier-Villars. Bruxelles. Lamertin. Chapitre XII. p. 163.

$$p_1+x_2=a_1\,, \qquad p_3+x_4=a_2\,, \tag{14}$$

где су a_1 и a_2 две произвољне константе.

Потпуни интеграл нормалног система једначина (14) се изражава овако:

$$z=(a_1-x_2)\,x+(a_2-x_4)\,x_3+C\,, \tag{15}$$

где је C произвољна константа.

Узмимо образац (15) за основну формулу скраћених тангенцијалних трансформација. Тада се C сматра као нова непозната функција, а старе се промењљиве x_2 и x_4 узимају само као две независно промењљиве количине.

Одговарајући обрасци трансформације, поред једначина (14), јесу и:

$$p_2=-x_1+p_2', \qquad p_4=-x_3+p_4', \tag{16}$$

где p_2' и p_4' означавају одговарајуће нове парцијалне изводе

$$\frac{\partial C}{\partial x_2}\,, \quad \frac{\partial C}{\partial x_4}\,.$$

Према обрасцима трансформације (14) и (16), претворена дата једначина (13) добија облик:

$$a_2p_2'+(a_1+p_4'^2)\,p_4'=0\,.$$

Потпуни интеграл, који јој одговара, постаје:

$$C=-\frac{(a_1+\alpha^2)\,\alpha}{a_2}\,x_2+\alpha x_4+\beta\,,$$

где су α и β две произвољне константе.

Према томе тражени потпуни интеграл дате једначине (13) добија се сменом нађене вредности C, у обрасцу (15), овако:

$$z=a_1x_1-\left[x_1+\frac{(a_1+\alpha^2)\,\alpha}{a_2}\right]x_2+a_2x_3+(\alpha-x_3)\,x_4+\beta\,,$$

са четири произвољне константе a_1, a_2, α и β.

Узмимо још другу једначину:

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+p_1p_2p_3=1\,. \tag{17}$$

Она има два интеграла карактеристика у инволуцији:

$$\frac{p_1}{p_3}=a_1\,,\quad \frac{p_2}{p_3}=a_2\,, \tag{18}$$

где a_1 и a_2 означавају две произвољне константе.

Међутим елиминација p_1 и p_2, из три једначине (17) и (18), даје једначину трећег степена по p_3. Да бисмо избегли њено решавање, применимо горе изложену методу.

Узмимо зато потпуни интеграл система (18):

$$z=C_1(a_1x_1+a_2x_2+x_3)+C\,, \tag{19}$$

где C_1 и C две произвољне константе, као основни образац скраћене тангенцијалне трансформације. Нека буде C нова функција, а C_1 једина нова независно промењлива количина. Према томе добијамо, поред (18) и (19), још два обрасца:

$$p_3=C_1\,,\quad a_1x_1+a_2x_2+x_3+\frac{\partial C}{\partial C_1}=0\,. \tag{20}$$

Претворена једначина (17) постаје обична диференцијална једначина:

$$C_1\frac{\partial C}{\partial C_1}=a_1a_2C_1^3-1\,,$$

чији је интеграл:

$$C=\frac{a_1a_2}{3}C_1^3-\log C_1+C'\,, \tag{21}$$

где C' означава нову произвољну константу. Ако нађену вредност (21) функције C уврстимо у једначину (19) и у другу једначину (20), оне ће постати:

$$z=C_1(a_1x_1+a_2x_2+x_3)+\frac{a_1a_2}{3}C_1^3-\log C_1+C'\,,$$

$$a_1x_1+a_2x_2+x_3+a_1a_2C_1^2-\frac{1}{C_1}=0\,.$$

Скуп добијене две једначине претставља тражени потпуни интеграл једначине (17) са три произвољне константе a_1, a_2 и C', где количина C_1 игра улогу помоћног промењивог параметра.

Глава II

Функционална група интеграла

Проучимо сад случај, где дата парцијална једначина

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0 \qquad (1)$$

има неколико интеграла карактеристика, који чине једну функционалну групу.

Претпоставимо зато да линеарна једначина карактеристика

$$(F, f)=0 \qquad (2)$$

има функционалну групу r интеграла:

$$f_1, f_2, \ldots, f_r. \qquad (3)$$

Нека ова група обухвата μ изузетних функција, које ћемо означити са:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu. \qquad (4)$$

Према томе постоји позната веза:

$$r=\mu+2\rho.$$

Претпоставимо да функције (4) задовољавају услов

$$D\left(\frac{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu}{f_1, f_2, \ldots, f_\mu}\right)\gtrless 0. \qquad (5)$$

Према томе функционална група (3) може се такође написати у облику:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu, f_{\mu+1}, f_{\mu+2}, \ldots, f_r. \tag{6}$$

Саставимо у посматраном случају канонички систем интеграла помоћног затвореног система линеарних једначина

$$\left.\begin{array}{l}(f_k, f)=0,\\ k=1, 2, \ldots, r.\end{array}\right\} \tag{7}$$

За то потражимо прво ма које решење система (7), које ћемо означити са φ_1 и узети за прву функцију траженог каноничког система. Да би нашли другу функцију, треба пронаћи једно решење система $r+1$ једначине (7) и накнадне једначине

$$(\varphi_1, f)=0. \tag{8}$$

Означимо ово решење са φ_2.

Продужимо овакво рачунање све док се не добије систем $n+\rho$ линеарних једначина, који се састоји из једначина (7), (8) и још следећих једначина:

$$\left.\begin{array}{ll}(\varphi_2, f)=0, & (\varphi_3, f)=0, \ldots,\\ (\varphi_{n-\rho-\mu}, f)=0.\end{array}\right\} \tag{9}$$

Овај систем једначина (7), (8) и (9) има потпуни систем следећих интеграла

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\rho-\mu}, \tag{10}$$

који се налазе међусобно у инволуцији.

То је очевидно за $n-\rho-\mu$ последњих интеграла (10), јер су они били на тај начин и одређени.

Да би се доказало да се сваки од μ првих интеграла (10) налази у инволуцији са сваким од $n-\rho-\mu$ последњих, израчунајмо вредности Поасонових заграда:

$$(\Phi_i, \varphi_k) \equiv \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial f_s}(f_s, \varphi_k),$$

$$(i=1, 2, \ldots, \mu, \quad k=1, 2, \ldots, n-\rho-\mu),$$

Али пошто свака од функција φ_k задовољава идентички једначине (7), према томе добијамо идентичности:

$$(\Phi_i, \varphi_k) = 0\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, n-\rho-\mu)\,,$$

које доказују наше тврђење.

Вратимо се сад на једначине (7) и потражимо њихове остале интеграле, који би били различити од пронађених интеграла (10).

Израчунајмо их узастопно овако. Прво, тражимо један интеграл система $n+\rho$ једначина:

$$(f_k, f) = 0\,, \quad (\varphi_\sigma, f) = \begin{cases} 1, & \sigma = 1\,, \\ 0, & \sigma \gtrless 1\,, \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n-\rho-\mu)\,.$$

Означимо ма које решење овог система са ψ_1.

Да би нашли другу функцију ψ_2, потражимо једно решење система $n+\rho+1$ једначине:

$$(f_k, f) = 0, \quad (\varphi_\sigma, f) = \begin{cases} 1, & \sigma = 2\,, \\ 0, & \sigma \gtrless 2\,, \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, r, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n-\rho-\mu)\,,$$

$$(\psi_1, f) = 0\,.$$

Најзад, настављајући овај рачун, одредићемо низ тражених интеграла

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\rho-\mu}\,, \tag{11}$$

који се налазе међусобно у инволуцији.

Заједно интеграли (10) и (11) чине потпуни канонички систем $2n-2\rho-\mu$ различитих интеграла помоћног система линеарних једначина (7).

Према наведеној теорији диференцијалних инваријаната, дата се једначина (1) претвара у једначину:

$$\Psi(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\rho, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\rho-\mu}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\rho-\mu}) = 0\,, \tag{12}$$

а линеарна једначина карактеристика (2) постаје:

$$\sum_{i=1}^{n-\rho-\mu}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_i}-\frac{\partial\Psi}{\partial\psi_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i}\right)=0\,,$$

при чему функције $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu$ играју улогу сталних количина.

Добијени резултат може се протумачити на тај начин, што се *дата парцијална једначина* (1) *претвара у парцијалну једначину* (12), *где су* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\rho-\mu}$ *нове независно променљиве количине, а* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\rho-\mu}$ *нови парцијални изводи.*

Узмимо, као пример, за примену изнесене теорије парцијалну једначину, коју је саставио један од мојих ученика, г. С. Никитовић:

$$(p_1-x_2)\,(p_3+x_4)+(p_2+x_3)\,(p_4+x_1)-a=0\,. \tag{13}$$

Одговарајућа линеарна једначина карактеристика има функционалну групу од четири интеграла:

$$f_1\equiv x_1-p_2\,,\qquad f_2\equiv x_2+p_3\,,$$

$$f_3\equiv x_3+p_4\,,\qquad f_3\equiv x_4+p_1\,,$$

која нема изузетних функција.

Помоћни систем (7) линеарних једначина, у посматраном случају:

$$\left.\begin{array}{l}(f_k, f)=0\,,\\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)\end{array}\right\} \tag{14}$$

има два интеграла у инволуцији, које ћемо узети као функције φ_1, φ_2, наиме:

$$\varphi_1\equiv p_1-x_2\,,\qquad \varphi_2\equiv p_3+x_4\,. \tag{15}$$

Коњуговани интеграл ψ_1 са φ_1 добија се интеграљењем система једначина (14) и следеће две једначине

$$(\varphi_1, f)=1\,,\qquad (\varphi_2, f)=0\,, \tag{16}$$

и узима облик:

$$\psi_1\equiv\frac{1}{2}\,(p_1+p_4+x_1+x_3)\,. \tag{17}$$

Најзад ψ_2 се одређује системом једначина (14) и помоћу три следеће једначине:

$$(\varphi_1, f)=0\,, \quad (\varphi_2, f)=1\,, \quad (\psi_1, f)=0\,.$$

Одавде добијамо:

$$\psi_2 \equiv \frac{1}{2}\,(p_2-p_4-x_1+x_3)\,. \tag{18}$$

Обрасци (15), (17) и (18) изражавају вредности старих променљивих количина p_1, p_2, p_3 и p_4 овако:

$$p_1=\varphi_1+x_2\,, \qquad p_2=\psi_1+\psi_2-x_3\,,$$

$$p_3=\varphi_2-x_4\,, \qquad p_4=\psi_1-\psi_2-x_1\,.$$

Према томе се претворена дата једначина (13) изражава помоћу нових променљивих количина на овај начин:

$$\varphi_1\varphi_2+\psi_1^2-\psi_2^2-a=0\,.$$

Њен се интеграл карактеристика одмах одређује у облику:

$$\varphi_2^2-\varphi_1^2=4\psi_1\psi_2+C\,,$$

где је C произвољна константа.

Чим се будемо вратили на старе променљиве количине, добијени нови интеграл карактеристика постаће:

$$f_5 \equiv (p_3+x_4)^2+(p_4+x_1)^2-(p_1-x_2)^2-(p_2+x_3)^2=C\,.$$

Лако је приметити да следећи интеграли карактеристика

$$f_2=C_1\,, \quad f_4=C_2\,, \quad f_5=C$$

чине заједно са датом једначином (13) један интегрални елемент. Према томе се потпуни интеграл једначине (13) добија помоћу једне квадратуре у следећем облику:

$$z=C_2x_1+C_1x_3-x_1x_4-x_2x_3 \mp$$

$$\mp\int R_1 d\,(x_2-ix_4) \pm \int R_2 d\,(x_2+ix_4)+C',$$

где је C' четврта произвољна константа, а уведене су следеће ознаке:

$$R_1 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{A_1 + B_1\ (x_2 - ix_4) - 2i\,(x_2 - ix_4)^2},$$

$$R_2 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{A_2 + B_2\ (x_2 + ix_4) + 2i\,(x_2 + ix_4)^2},$$

$$A_1 \equiv C_1^2 - C_2^2 - C + 2i\,(a - C_1 C_2)\,, \quad B_1 \equiv 2\,[C_2 - C_1 + i\,(C_1 + C_2)]\,,$$

$$A_2 \equiv C_1^2 - C_2^2 - C - 2i\,(a - C_1 C_2)\,, \quad B_2 \equiv 2\,[C_2 - C_1 - i\,(C_1 + C_2)]\,.$$

Глава III

Трансформација једначина проблема трију тела

Узмимо каноничке једначине релативног кретања трију тела са Делоне-овим промењивим количинама:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l}, && \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g}, && \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h},\\
&\frac{dL'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l'}, && \frac{dG'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g'}, && \frac{dH'}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h'},\\
&\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}, && \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G}, && \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H},\\
&\frac{dl'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L'}, && \frac{dg'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G'}, && \frac{dh'}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H'}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Што се тиче интеграла површина, они добијају следећи облик:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1 \equiv H+H'=c,\\
&f_2 \equiv G^2-G'^2+H'^2-H^2=0,\\
&f_3 \equiv h-h'=180^0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Написана три интеграла задовољавају услове:

$$(f_1, f_2)\equiv 0, \qquad (f_1, f_3)\equiv 0,$$
$$(f_2, f_3)\equiv 2f_1.$$

Према томе интеграли (2) чине функционалну групу, за коју прва функција f_1 игра улогу изузетне функције.

Прост облик интеграла (2) дозвољава да се лако изведу три различита проучена начина за свођење каноничког система дванаест једначина (1) на свега осам једначина.

Заиста, прва најпростија, скоро очигледна, трансформација може се извршити помоћу два интеграла (2), првог и трећег, који се налазе у инволуцији. Ови интеграли немају других промењљивих количина, сем H, H' и h, h'. Онда се налазимо у случају система интеграла карактеристика (12), из прве главе, чим променимо узајамно класе коњугованих промењљивих једног пара. Због тога се систем дванаест једначина (1) своди на осам једначина тако што пребришемо четири једначине које се налазе у трећој колони (1); а у карактеристичној функцији F, која мора да садржи промењљиве H, H' и h, h' само у облику $H+H'$ и $h-h'$, треба да уврстимо, уместо ових образаца, њихове одговарајуће сталне вредности c и 180^0.

За другу трансформацију могу се узети два права интеграла (2). Сад се налазимо у горе проученој претпоставци где у интегралима у инволуцији има поред коњугованих промењљивих још других споредних промењљивих прве класе. Тада, као што је наведено, треба увести скраћене тангенцијалне трансформације. Зато сматрајмо промењљиве H и H' као каноничке промењљиве количине друге класе. Решавајући по њима две прве једначине (2), добијамо:

$$H+H'=c\,, \qquad H-H'=\frac{1}{c}\,(G^2-G'^2),$$

или

$$\left.\begin{aligned} H&=\frac{1}{2}\left[c+\frac{1}{c}\,(G^2-G'^2)\right], \\ H'&=\frac{1}{2}\left[c-\frac{1}{c}\,(G^2-G'^2)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Одговарајућа основна формула тангенцијалних трансформација, услед уведене претпоставке и образаца (3), добија нарочито изузетан облик:

$$z=C,$$

где би C морала да буде нова непозната функција, а то значи да непозната функција мора задржати своје значење. Према томе ће и изводи по независно промењљивим количинама L, G, L', G' задржати првобитне вредности l, g, l' g'.

Најзад, четири једначине последње колоне система (1) морају се исто тако пребрисати као и у првој трансформацији, а на место f_1 и f_2, у карактеристичкој функцији, долазе њихове вредности c и 0.

Изложену трансформацију је пронашао Поенкаре, али на чисто непосредан интуитиван начин.

Наведимо сад трећу трансформацију посматрајући функционалну групу три интеграла (2).

Саставимо, за одређивање каноничког система инваријаната, систем линеарних једначина:

$$-(f_1, f) \equiv \frac{\partial f}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial h'} = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\,(f_2, f) \equiv G'\,\frac{\partial f}{\partial g'} - G\frac{\partial f}{\partial g} - H'\frac{\partial f}{\partial h'} + H\frac{\partial f}{\partial h} = 0\,, \tag{5}$$

$$(f_3, f) \equiv \frac{\partial f}{\partial H} - \frac{\partial f}{\partial H'} = 0\,. \tag{6}$$

Решењем једначина (4) и (5) по $\dfrac{\partial f}{\partial h}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial h'}$, добијамо:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial h} - \frac{1}{H+H'}\left(G\frac{\partial f}{\partial g} - G'\frac{\partial f}{\partial g'}\right) = 0\,, \\ &\frac{\partial f}{\partial h'} + \frac{1}{H+H'}\left(G\frac{\partial f}{\partial g} - G'\frac{\partial f}{\partial g'}\right) = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Према томе систем једначина у тоталним диференцијалима, који одговара Јакобијевом систему трију линеарних једначина (6) и (7), постаје:

$$dH' + dH = 0\,,$$

$$dg + \frac{G}{H+H'}\,(dh - dh') = 0\,,$$

$$dg' - \frac{G'}{H+H'}\,(dh - dh') = 0\,.$$

Одавде налазимо, поред очигледног првог интеграла (2), још два следећа:

$$g+\frac{G(h-h')}{H+H'}=C_1\,,\qquad g'-\frac{G'(h-h')}{H+H'}=C_2\,,$$

где су C_1 и C_2 две произвољне константе.

Означимо са s и s' одговарајуће прве стране нађених интеграла. Ове се две функције налазе у инволуцији. Према томе оне се могу узети за φ_1 и φ_2. Најзад старе промењљиве l и l' служиће као φ_3 и φ_4.

Одговарајуће коњуговане промењљиве за њих биће G, G', L и L'.

Према томе претворена карактеристична функција добија облик

$$\Psi\,(f_1,\ L,\ G,\ L',\ G',\ l,\ s,\ l',\ s')\,,$$

где се f_1 мора заменити вредношћу константе c.