PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

de

L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

Belgrade. — Imprimerie „L'art".

Zagrebatchka, 6.

PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

de

L'UNIVERSITÉ DE BELGRADE

TOME I

1932

BELGRADE

1932

Ce volume est publié sur les subventions accordées par

L'Académie Royale Serbe des Sciences

&

La Fondation „Lucas Tchelovitch-Trebinjatz"

de l'Université de Belgrade.

Table des matières.

Tome I.

Un problème sur la chaleur rayonnante.

Par

MICHEL PETROVITCH.

On a déjà songé que l'observation à distance de la température propre d'un iceberg pourra peut-être servir à déceler sa proximité. Des appareils calorimétriques perfectionnés, des thermo-multiplicateurs extra-sensibles, permettent aujourd'hui de déceler, sous certaines conditions, à quelques kilomètres de distance, une source assez faible de chaleur, par l'energie rayonnante qu'elle émet. Bien qu'il n'y ait pas une grande différence de température entre l'iceberg et l'air ambiant, la sensibilité des instruments permet d'espérer relever la proximité d'un iceberg de taille moyenne lorsque l'air ambiant est de quelques degrés plus chaud que celui de l'iceberg.

Ayant, lors d'un voyage dans la région polaire en été 1931, réfléchi à ce problème, j'ai pensé qu'il serait possible, du moins théoriquement, d'établir une correspondance mathématique entre les indications de l'instrument et la distance de l'iceberg. C'est l'idée qui sera exposée dans ce qui suit, sous la forme d'un problème purement théorique que, sous certaines restrictions, on peut résoudre d'une manière très simple. Il n'y sera point question de l'applicabilité pratique de la solution.

Supposons qu'en un point B de l'espace se trouve un appareil thermo-multiplicateur, composé d'une chaîne thermo-électrique et d'un galvanomètre très sensible. Il existe de tels appareils, transformant l'énergie rayonnante en très faible courant thermo-électrique mesurable par un galvanomètre à résistance très faible, dont la sensibilité va jusqu'à 10^{-9} volts et 10^{-11} ampères.

Supposons également qu'avant d'être exposé à l'influence de la chaleur rayonnante d'une source, l'instrument soit orienté de manière que les spires du galvanomètre soient parallèles à la direction de son aiguille. La quantité de chaleur reçue ou perdue par la chaîne thermo-électrique sera mesurée par le sens et la grandeur de la déviation de l'aiguille; entre certaines limites il existe la proportionnalité entre cette déviation et la quantité de chaleur.

Supposons enfin:

1° qu'en un point A de l'espace, à la distance x du point B, se trouve une source de rayonnement calorifique dont la température est T_1 et que ses radiations influencent le thermo-multiplicateur qui se trouve en B;

2° qu'à cette influence s'ajoute celle de la chaleur de l'air ambiant, porté à la température T_0.

Quelle sera la correspondance entre l'influence simultanée de ces deux facteurs et les déviations de l'aiguille du galvanomètre?

Tout d'abord, il y a, entre certaines limites, proportionnalité entre la déviation et la quantité de chaleur reçue ou perdue par la chaîne thermo-électrique. D'autre part, il y a proportionnalité entre cette quantité de chaleur et la température de la chaîne. Il y a donc, du moins dans certaines limites des températures, la proportionnalité entre celle-ci et la déviation de l'aiguille.

Or, la température en B varie sous l'influence de deux causes 1° et 2°. La loi exacte de rayonnement serait celle de Stefan-Boltzman, mais pour les températures ne dépassant pas une certaine limite elle se réduit sensiblement à la loi de Newton: la quantité de chaleur que, dans l'unité de temps, reçoit ou perd le corps exposé á l'influence d'une source de chaleur, est proportionnelle à la différence des températures du corps et de la source. Nons nous en tiendrons à cette loi suffisante pour les différences de température que nous supposons dans le problème envisagé. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles régissant le problème dans le cas général se ramène à une équation différentielle ordinaire dans laquelle la distance x joue le rôle de paramètre et qu'on peut aussi former directement de la manière suivante:

L'influence de la cause 1° sur la température T au point B à l'instant t, nulle lorsque $T = T_1$ et d'autant plus sensible que la différence $T - T_1$ est plus grande, sera inversement proportionnelle au carré de la distance x. Elle décroît, en même temps, par suite de l'absorption des radiations de la source A par l'atmosphère, et cela de manière qu'à distance x de A elle sera égale à celle correspondant à l'unité de distance multipliée par le facteur exponentiel e^{-kx}, où k est la constante positive définissant le pouvoir absorbant de l'atmosphère dans la direction AB. Cette influence tend à égaliser les températures T et T_1; l'accroissement dT qui lui est dû est proportionnel à la différence $T - T_1$ et de signe contraire à celui de cette différence. Il en est de même de l'influence de la cause 2° proportionnelle à la différence $T - T_0$, de sorte que les variations de la température T au cours du temps t, sous l'action simultanée de ces deux causes, seront régies par une équation différentielle de la forme

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{ae^{-kx}}{x^2}(T - T_1) - b\,(T - T_0$$

(où a et b sont deux constantes positives) ou bien

$$(1) \qquad \frac{dT}{dt} + \left(b + \frac{ae^{-kx}}{x^2}\right) T - \left(bT_0 + \frac{ae^{-kx}}{x^2}\, T_1\right) = 0,$$

où la distance x joue le rôle de paramètre.

L'intégrale générale est

$$T = V(x) + C(x)\,e^{-\left(\frac{ae^{-kx}}{x^2} + b\right)t}$$

où, en posant $\frac{a}{b} = \alpha$, on aura

$$V(x) = \frac{T_0 + \frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}\, T_1}{1 + \frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}},$$

$C(x)$ étant la constante d'intégration, dépendant de x. Cette constante est à déterminer par la condition que pour $t=0$ on ait $T=T_0$, d'où l'on tire

$$C(x) = \frac{\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}(T_0-T_1)}{1+\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}}.$$

La dérivée $\frac{dT}{dt}$ ayant le signe contraire à celui de la différence T_0-T_1, si $T_0>T_1$ la température T décroîtra au cours du temps partant de la température T_0; si $T_0<T_1$ elle croîtra à partir de T_0. Et comme le facteur exponentiel décroît constamment au cours du temps et tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, la température T tendra vers la limite

$$T' = V(x), \tag{2}$$

comme fonction monotone décroissante ou croissante, suivant que la différence T_0-T_1 est positive ou négative. Après un temps suffisamment long, elle se confondra avec la température T' dont elle ne différera plus sensiblement. La température T' est la *température stationnaire* en B, déterminée d'après l'équation (1) par la condition

$$\frac{dT}{dt}=0.$$

La relation

$$T'-T_0 = \frac{T_1-T_0}{1+\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}}\left(\frac{\alpha e^{-kx}}{x^2}\right)$$

montre alors que T' différera de moins en moins de T_0 lorsque la distance x augmente et se confondra avec celle-ci à une distance suffisamment grande.

L'expression (2) de la température stationnaire contient deux constantes T_0 et T_1 directement mesurables. Elle en contient encore deux constantes α et k qu'on peut déterminer à l'aide des températures stationnaires T_1' et T_2' au point B à deux distances connues x_1 et x_2 $(x_2<x_1)$ à la source A. Les deux équations

$$T_1{}' = \frac{T_1 + \alpha' x_1^2 e^{kx_1} T_0}{1 + \alpha' x_1^2 e^{kx}},$$

$$T_2{}' = \frac{T_2 + \alpha' x_2^2 e^{kx_2} T_0}{1 + \alpha' x_2^2 e^{kx_2}},$$

avec la notation $\alpha' = \alpha^{-1}$ fournissent

$$\alpha' x_1^2 e^{kx_1} = \frac{T_1' - T_1}{T_0 - T_1'}, \qquad \alpha' x_2^2 e^{kx_2} = \frac{T_2' - T_1}{T_0 - T_2'}, \tag{3}$$

d'où, en divisant on obtient,

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 e^{k(x_2 - x_1)} = \frac{(T_2' - T_1)(T_0 - T_1')}{(T_1' - T_2)(T_0 - T_2')}. \tag{4}$$

On en déterminerait la constante k au moyen des grandeurs directement mesurables

$$x_1,\ x_2,\ T_0,\ T_1,\ T_1',\ T_1'.$$

Cette constante étant calculée, on aurait la constante positive α' p. ex. de la première équation (3) qui fournit

$$\alpha' = \frac{T_1' - T_1}{T_0 - T_1'} \, \frac{e^{-kx_1}}{x_1{}^2}.$$

L'équation

$$\alpha' x^2 e^{kx} = \frac{T' - T_1}{T_0 - T_1},$$

fournirait alors la distance x comme abscisse du point d'intersection unique de la parabole

$$y = \alpha' x^2,$$

et de la courbe exponentielle

$$y = Ae^{-kx},$$

où A désigne la constante positive

$$A = \frac{T' - T_1}{T_0 - T_1}.$$

Si l'on désigne par x_1 la distance entre les points A et B à laquelle la température stationnaire au point correspondant B_1 a une valeur fixe T_1', la loi reliant la température T à la distance x s'exprime de la manière suivante: *l'expression*

$$\frac{1}{x-x_1} \log \frac{(T'-T_1)(T_0-T_1)}{(T_1'-T_1)(T_0-T')} \left(\frac{x_1}{x}\right)^2,$$

conserve une valeur invariable pour toutes les distances x et cette valeur est celle du coefficient d'absorption k.

Pour formuler la loi de correspondance entre la distance x et la déviation de l'aiguille du galvanomètre, désignons:

1º par δ_1 la déviation, qui ne serait dûe qu'à la différence T_0-T_1, de la température ambiante et celle de la source A;

2º par δ_2 la déviation qui ne serait dûe qu'à la différence T_0-T' de la température ambiante et la température stationnaire en B;

3º par δ_3 la déviation dûe à la différence T_1-T' de la température de la source et la température stationnaire en B;

4º par δ_4 la déviation dûe à la différence T_1-T_1' de la température de la source et la température stationnaire en B_1.

Remplaçons dans la formule (4) x_2 par x et T_2' par T'; les déviations δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 seront proportionnelles aux différences correspondantes de température

$$T_0-T_1, \qquad T_0-T', \qquad T_1-T', \qquad T_1-T_1',$$

le coefficient de proportionnalité étant le même pour toutes ces différences. L'expression

$$\frac{1}{x-x_1} \log \left[\frac{\delta_1\,\delta_3}{\delta_2\,\delta_4} \left(\frac{x_1}{x}\right)^2\right]$$

garde, donc, pour toute distance x, une valeur invariable et égale au coefficient d'absorption k.

Si l'on pose alors

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} = \beta x^2 e^{kx},$$

on trouve

$$\beta = \frac{\delta_4}{\delta_1} \frac{e^{-kx_1}}{x_1^2}.$$

Or, les déviations δ_1 et δ_4 ne dépendent pas de x; β est donc une constante par rapport à x, de sorte que la loi de correspondance entre les déviations δ_2, δ_3 et la distance x s'exprime de la manière suivante:

L'expression

$$\frac{\delta_3}{\delta_2} \frac{e^{-kx}}{x^2}$$

conserve une valeur invariable pour toutes les distances x.

Dans le cas où l'absorption de l'atmosphère est négligeable, cette loi prend la forme suivante:

Le rapport $\frac{\delta_2}{\delta_3}$ *est inversement proportionnel au carré de la distance de l'appareil à la source.*

Sur une condition nécessaire de rotation en bloc d'un système continu ayant des parties fluides.

Par

WENCESLAS JARDETZKY.

On a souvent envisagé dans les recherches sur les figures des corps célèstes ainsi que dans la théorie de leurs mouvements une condition nécessaire de rotation en bloc des divers systèmes.

N. Joukowsky [1]) a démontré que, si un corps solide a des cavités remplies d'un liquide visqueux, le mouvement du système tend vers la rotation en bloc autour d'un des axes principaux d'inertie. Ce résultat a été généralisé par W. Stekloff [2]), qui a énoncé le théorème suivant: tout mouvement d'un système, soumis aux forces extérieures, dont le moment résultant par rapport au point fixe est nul, et composé d'un corps solide recouvert par un liquide visqueux et ayant un certain nombre de cavités quelconques, remplies par des liquides visqueux, tend à un mouvement limite, dans lequel l'un des axes principaux d'inertie coïncide avec la direction fixe du moment résultant des quantités du mouvement et le système tourne uniformément autour de cet axe comme un seul corps solide. P. Appell [3]) a

---

1) *N. Joukowsky.* Sur le mouvement d'un corps solide qui a des cavités remplies par un liquide homogène (en russe). Journal de la société phys.-chim. St.-Pétersbourg. T. XVII. I. p. 81. 1885.

2) *W. Stekloff.* Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes p. 229. Annales de Toulouse. III série. T. I. Année 1909.

3) *P. Appell.* Traité de méc. rat T. IV. p. 42. 1921; C. R. 179 p. 119. 1924; C. R. 179 p. 795. 1924; Acta Mathematica T. 47. p. 45. 1926. Voir aussi: *H. Poincaré.* Figures d'équilibre. p. 28 1903. *Lejeune-Dirichlet.* Crelle Journal. B. 58. p. 215.

étudié la condition nécessaire de rotation d'ensemble d'une masse fluide (homogène ou hétérogène). Il suppose: 1° que les forces agissantes sont les attractions des particules d'après la loi de Newton et des pressions, 2° que la pression sur la surface libre est constante ou fonction du temps. Dans ce cas le mouvement d'ensemble sera possible, si l'axe de rotation uniforme est fixe dans l'espace et se confond avec un axe principal d'inertie. On peut démontrer [4]) que la même condition est nécessaire dans le cas d'équilibre d'une masse fluide avec des corps flottants.

L'étude d'équilibre relatif dans les divers cas suivants:

1° un solide rempli d'un liquide,

2° un solide recouvert par un liquide,

3° un fluide libre,

4° un liquide avec des corps flottants,

nous conduit à une proposition générale:

Soit donné un système matériel continu (M) ayant des parties fluides et isotropes, isolé dans l'espace et soumis aux forces, qui dérivent d'un potentiel. Ce système pourra se mouvoir comme un corps solide si ce mouvement se réduit à une rotation uniforme autour d'un axe principal d'inertie.

Le système (M) a des parties déformables. Donc, on doit satisfaire à l'équation du mouvement d'un milieu déformable:

$$\vec{w} = \vec{F} + \frac{1}{\varrho} \nabla \Phi \,, \tag{1}$$

où ϱ est la densité, $\vec{w}$ — l'accélération d'un point. $\vec{F}$ la résultante des attractions rapportée à l'unité de masse, le vecteur $\nabla \Phi$ est la divergence du tenseur

$$\Phi \left\{ \begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix} \right.$$

En vertu des hypothèses faites sur le système, on a

$$\vec{F} = \nabla U \,,$$

---

[4]) *W. Jardetzky*. Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide avec des corps flottants. Acta Astronomica, Sér. a, Vol. 2. p. 83. Cracovie. 1931.

en outre pour les parties fluides, le tenseur Φ se réduit à un scalaire $-p$, multiplié par le tenseur-unité. Le frottement n'intervient pas dans le cas du mouvement d'ensemble des fluides visqueux. La densité étant une fonction de la pression p, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\varrho}\nabla\Phi = -\frac{1}{\varrho}\nabla p = -\nabla\psi(p)\,,$$

où

$$\psi(p) = \int\frac{d\varrho}{\varrho}\,.$$

En posant encore

$$Q = U - \psi(p)$$

$$\dot{v} = \vec{w}\,,$$

où $\vec{v}$ est la vitesse d'un point, nous aurons l'équation fondamentale de l'hydrodynamique

$$\dot{v} = \nabla Q \tag{2}$$

qui remplace maintenant l'équation (1).

Dans le cas du mouvement d'ensemble du milieu continu envisagé on doit satisfaire à cette équation.

Soient: $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire et $\vec{r}$ le vecteur qui donne la position du point considéré par rapport au centre d'inertie. Le système se meut comme un corps solide. On a

$$\vec{v} = [\vec{\Omega} r] = \dot{r}$$

et

$$\dot{v} = [\dot{\Omega}\vec{r}] + [\vec{\Omega}\vec{v}]\,.$$

Prenons le rotationnel du vecteur $\dot{v}$. De l'équation (2) on tire

$$\text{rot}\,\dot{v} = \text{rot grad}\,Q = 0\,,$$

ou

$$\text{rot}\,[\dot{\Omega}\vec{r}] + \text{rot}\,[\vec{\Omega}\vec{v}] = 0\,.$$

Mais un calcul simple montre que

$$\text{rot}\,[\vec{\Omega}\vec{v}] = \text{rot}\,[\vec{\Omega}\,[\vec{\Omega}\vec{r}]] = 0\,,$$

car $\vec{\Omega}$ n'est pas une fonction des coordonnées.

Il reste:

$$\text{rot}\,[\dot{\Omega}\vec{r}] = 0\,, \tag{3}$$

D'après la formule connue de la théorie des vecteurs

$$\text{rot}\,[\dot{\Omega}\vec{r}] = 2\dot{\Omega}\,,$$

et on conclut, que la vitesse angulaire n'est pas une fonction du temps. Les équations d'Euler pour les solides montrent donc que le mouvement d'ensemble du système envisagé est une rotation uniforme autour d'un axe principal d'inertie.

Il est évident que la condition dont nous avons parlé est seulement nécessaire. La surface libre d'une masse fluide, par exemple, doit être équipotentielle pour que la rotation en bloc soit possible.

Remarquons, enfin, que la même condition est satisfaite dans le cas du mouvement permanent d'un fluide autour d'un axe fixe, la vitesse angulaire étant la fonction de la distance du point à l'axe de rotation.

Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires.

Par

TADYA PEYOVITCH.

M. O. Perron [1]) et H. Späth [2]) ont étudié à un point de vue les solutions asymptotiques d'une équation différentielle linéaire d'ordre n

$$(1) \qquad \frac{d^n x}{dt^n} + a_n(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2(t) \frac{dx}{dt} + a_1(t)\, x = f(t)$$

où $a_i(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies, $\lim_{t=\infty} a_i(t) = a_i$; $f(t)$ étant une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tend également vers une limite finie, $\lim_{t=\infty} f(t) = b$.

Dans ce Mémoire nous nous occuperons du même point de vue des solutions asymptotiques d'un système d'équations linéaires du premier ordre

$$\frac{dx_i}{dt} + a_{i1}(t)\, x_1 + a_{i2}(t)\, x_2 + \ldots + a_{in}(t)\, x_n = f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $a_{ik}(t)$ sont des constantes ou des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies, $\lim_{t=\infty} a_{ik}(t) = a_{ik}$; $f_i(t)$ étant des fonctions continues de la variable

---

1) *Mathematische Zeitschrift*, B. 6 (1920) et B. 17 (1923).
2) *Mathematische Zeitschrift*, B. 30 (1929).

réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent également vers des limites finies, $\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i$. Enfin, nons retrouvons les résultats de H. Späth concernant l'équation (1), qui peuvent être considérés comme un cas particulier de nos résultats [1]).

I. Système d'équations à coefficients constants.

Considérons d'abord avec H. Späth l'expression [2])

$$u(t) = e^{rt}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C\right], \tag{2}$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tend vers zéro pour $t = \infty$ et C la constante d'intégration.

Cherchons la valeur de l'expression (2) pour $t = \infty$.

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1. r est un nombre réel et positif ($r > 0$).

L'expression (2) devient

$$\lim_{t=\infty} u(t) = \lim_{t=\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C}{e^{-rt}}.$$

Puisque le dénominateur tend vers zéro, cette expression peut tendre vers une limite, si le numérateur tend vers zéro. Mais on peut disposer de la constante C de sorte que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} \int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = \int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = 0.$$

La dernière égalité peut être écrite sous la forme

1) La question des solutions asymptotiques des équations différentielles a fait l'objet de travaux de plusieurs Mathématiciens comme Poincaré, Liapounoff, Bohl, Cotton, Perron et autres.

2) Cette expression est la solution générale de l'équation

$$\frac{du}{dt} - ru = \varphi(t).$$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = \int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + \int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = 0$$

d'où

$$\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C_1 = -\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt\,;$$

par conséquent, l'expression (2) devient,

$$u(t) = -e^{rt}\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt\,.$$

En appliquant la règle de L'Hospital, on aura

$$\lim_{t=\infty} u(t) = -\lim_{t=\infty} \frac{\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt}{e^{-rt}} = -\lim_{\infty} \frac{e^{-rt}\varphi(t)}{re^{-rt}} = 0\,,$$

c'est-à-dire *il existe une constante* $C = C_1$ *de sorte que l'expression (2) tend vers zéro.*

2. r est un nombre réel et négatif ($r < 0$).

En appliquant la règle de Stolz à l'expression (2), car le dénominateur tend vers l'infini pour $t = \infty$, on aura

$$\lim_{t=\infty} u(t) = \lim_{t=\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt + C}{e^{-rt}} = \lim_{t=\infty} \frac{e^{-rt}\varphi(t)}{-re^{-rt}} = 0\,,$$

c'est-à-dire *l'expression (2) tend vers zéro, C étant arbitraire.*

On peut alors disposer de la constante C de manière que l'expression (2) prenne une valeur quelconque pour $t = t_0$. Remarquons que la constante arbitraire peut être écrite sous la forme

$$C\int_{t_0}^{t_1} e^{-rt}\varphi(t)\,dt\,.$$

3. $r=\varrho+\vartheta i$ *est un nombre complexe à partie réelle* $\varrho>0$. On aura

$$|u(t)|=e^{\rho t}\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|$$

d'où

$$\lim_{t=\infty}|u(t)|=\lim_{t=\infty}\frac{\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|}{e^{-\rho t}}.$$

En appliquant la règle de L'Hospital, le dénominateur tendant vers zéro pour $t=\infty$, tandis que l'intégrale au numérateur converge, on aura,

$$\lim_{t=\infty}|u(t)|=\lim_{t=\infty}\frac{|e^{-rt}\varphi(t)|}{\varrho e^{-\rho t}}=0\,,$$

c'est-à-dire: *il existe une constante* $C=C_1$ *de sorte que l'expression (2) tend vers zéro.*

Comme au premier cas, la solution qui tend vers zéro est de la forme

$$u(t)=-e^{rt}\int_{t}^{\infty} e^{-rt}\varphi(t)\,dt \qquad (r=\varrho+\vartheta i)\,.$$

4. $r=\varrho+\vartheta i$ *est un nombre complexe à partie réelle* $\varrho<0$. On aura, comme au cas précédent,

$$|u(t)|=e^{\rho t}\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|$$

d'où

$$\lim_{t=\infty}|u(t)|=\lim_{t=\infty}\frac{\left|\int_{t_0}^{t} e^{-rt}\varphi(t)\,dt+C\right|}{e^{-\rho t}}.$$

Puisque le dénominateur tend vers l'infini, on aura, d'après la règle de Stolz,

$$\lim_{t=\infty} |u(t)| = \lim_{t=\infty} \frac{\left| \int_{t_0}^{t} e^{-rt} \varphi(t)\, dt + C \right|}{e^{-\rho t}} = \lim_{t=\infty} \frac{|e^{-rt} \varphi(t)|}{\rho e^{-\rho t}} = 0,$$

c'est-à-dire: *l'expression (2) tend vers zéro, C étant arbitraire.*

Comme au deuxième cas, on peut alors disposer de la constante C, qui peut être écrite sous la forme

$$C \int_{t_0}^{t_1} e^{-rt} \varphi(t)\, dt\,,$$

de sorte que l'expression (2) prend une valeur quelconque pour $t = t_0$.

5. *$r = \vartheta i$ est un nombre imaginaire ou égal à zéro* (avec $\vartheta i = 0$).

Pour que l'expression (2) tende vers zéro pour $t = \infty$, $C = C_1$ étant une constante convenable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} |u(t)| = \lim_{t=\infty} \left| e^{\vartheta it} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta it} \varphi(t)\, dt + C_1 \right] \right| =$$

$$= \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi(t)\, dt + C_1 \right| = 0,$$

c'est-à-dire que l'intégrale

$$(3) \qquad \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi(t)\, dt$$

converge (avec $\vartheta i = 0$, pour $r = 0$). En supposant que cette intégrale converge, l'expression (2) tend vers zéro, $C = C_1$ étant une constante convenable. Si l'intégrale (3) converge, on peut écrire,

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi(t)\, dt + C_1 = \int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta it} \varphi(t)\, dt + \int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi(t)\, dt + C_1 = 0$$

d'où

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi(t)\,dt + C_1 = -\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi(t)\,dt$$

et *la solution, qui tend vers zéro, est de la forme*

$$u(t) = -e^{\vartheta i t}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi(t)\,dt$$

(avec $\vartheta i = 0$, pour $r = 0$).

Par conséquent, si r est un nombre réel différent de zéro ou complexe à partie réelle différente de zéro, *il existe une constante* $C = C_1$ *de sorte que l'expression (2) tende vers zéro pour* $t = \infty$. *Si* $r = \vartheta i$, *l'expression (2) tendra vers zéro, si l'intégral (3) converge* (avec $\vartheta i = 0$, pour $r = 0$) [1].

Cela posé, considérons un système d'équations

$$(4) \qquad \frac{dx_i}{dt} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où a_{ik} sont des constantes, $f_i(t)$ des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies, lorsque t augmente indéfiniment

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Changeons les fonctions

$$(5) \qquad x_i = y_i + A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où A_i sont les solutions des équations

$$(6) \qquad a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{in}A_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations (4) deviennent

$$(7) \qquad \frac{dy_i}{dt} + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n = f_i(t) - b_i = \psi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) - b_i = \lim_{t=\infty} \psi_i(t) = 0.$$

---

[1]) Dans tous les cas les solutions convergentes $\lim_{t=\infty} u(t) = 0$ de l'expression (2) admettent les dérivées qui tendent vers zéro, $\lim_{t=\infty} u'(t) = 0$.

Il est bien connu que l'on peut transformer les équations (7), par une substitution linéaire à coefficients constants et convenablement choisis

$$u_i = b_{i1} y_1 + b_{i2} y_2 + \ldots + b_{in} y_n, \tag{8}$$

dont le déterminant est différent de zéro, à la forme spéciale

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du_1}{dt} - r_1 u_1 = \varphi_1(t), \\[2ex] \dfrac{du_2}{dt} - c_{21} u_1 - r_2 u_2 = \varphi_2(t), \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots, \\[1ex] \dfrac{du_n}{dt} - c_{n1} u_1 - c_{n2} u_2 - \ldots - c_{n\,n-1} u_{n-1} - r_n u_n = \varphi_n(t) \end{array}\right. \tag{9}$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11}+r & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+r & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}+r \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

qui peuvent être rangées d'une manière quelconque; c_{ik} $(k < i)$ étant des constantes déterminées et

$$\varphi_i(t) = b_{i1} \psi_1(t) + b_{i2} \psi_2(t) + \ldots + b_{in} \psi_n(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10'}$$

des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers zéro [1]).

---

1) D'après la nature des racines de l'équation caractéristique (10), il faut distinguer deux cas:

1°. Le cas des racines inégales; on peut choisir les coefficients b_{ik} de manière que les équations transformées prennent la forme simple

$$\frac{du_i}{dt} - r_i u_i = \varphi_i(t). \tag{a}$$

2°. Le cas des racines multiples; on peut choisir les coefficients b_{ik} de manière que les équations transformées se partagent en un certain nombre de groupes d'équations ayant une forme simple. A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'équations de la forme

$$\frac{du_1}{dt} - r u_1 = \varphi_1(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} - c_{21} u_1 - r u_2 = \varphi_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du_k}{dt} - c_{k1} u_1 - c_{k2} u_2 - \ldots - c_{k\,k-1} u_{k-1} - r u_k = \varphi_k(t).$$

Les intégrales générales des équations (9) sont données par les formules

$$
(11)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right],\\
u_2 &= e^{r_2 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}u_1(t)\,dt + C_2\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= e^{r_n t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}\varphi_n(t)\,dt + c_{n1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_1(t)\,dt + \ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots + c_{n\,n-1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_{n-1}(t)\,dt + C_n\right].
\end{aligned}\right.
$$

Soit, par exemple, $r = a$ une racine multiple d'ordre k, $r_1 = r_2 = \ldots$ $\ldots = r_k = a$, on aura,

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right],\\
u_2 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + C_2\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_k &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_k(t)\,dt + c_{k1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + \ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots + c_{k\,k-1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_{k-1}(t)\,dt + C_k\right].^{1)}
\end{aligned}\right.
$$

[1]) A chaque racine multiple d'ordre k correspond un groupe d'intégrales de la forme (12).

Il est évident que les intégrales générales (11) et (12) sont de la forme (2).

Supposons d'abord que toutes les racines r_i de l'équation caractéristique (10) soient réelles, différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro. On peut alors disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que les intégrales (11) admettent un système de solutions qui tendent vers zéro, c'est-à-dire on aura, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_1(t)}{r_1} \right| ,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqslant \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_2(t)}{r_2} \right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left| \frac{u_1(t)}{r_2} \right| ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_1(t)}{r_1} \right| = 0 ,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqslant \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_2(t)}{r_2} \right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left| \frac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2} \right| = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il s'ensuit, d'après les transformations (8) et (5), que les équations (4) admettent un système de solutions, dont les valeurs asymptotiques A_i sont données par les équations (6) et, par conséquent, leurs dérivées tendent vers zéro,

$$(13) \qquad \lim_{t=\infty} x_i = A_i , \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puisque dans les solutions u_i, qui tendent vers zéro, figurent encore les constantes arbitraires C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on peut, d'après l'expression [(2) 2., 4.], disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ de sorte que l'on ait, pour le même système de solutions

$$(14) \qquad x_i(t_0) = A_i \text{ [1]} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

[1]) Les valeurs x_i (t_0) peuvent être quelconques, parce que les constantes arbitraires C_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ peuvent être choisies de sorte que les solutions x_i (t_0) $(i = 1, 2, \ldots, p)$, d'après les transformations (8) et (5), prennent des valeurs quelconques.

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) sont réelles, négatives ou complexes à parties réelles négatives, il est évident, d'après l'expression [(2), 2., 4.], que les intégrales générales des équations (4) admettent les propriétés (13). Dans ce cas, on peut déterminer les constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que les équations (4) admettent un système de solutions qui satisfont aux relations (13) et (14) avec $p = n$.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (10), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro. On peut alors disposer des constantes C_i de manière que les équations (4) admettent un système de solutions, qui satisfont aux relations (13) et (14), si, d'après (12), pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, un groupe d'intégrales de la forme

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_p(t)\, dt & (p = 1, 2, \ldots, l), \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} u_k(t)\, dt & (k = 1, 2, \ldots, l-1) \end{array} \right.$$

converge; pour $l = 1$ les intégrales ci-dessus deviennent, d'après (a), $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt$.

Mais dans le cas de racines égales à zéro, on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

Pour que les équations (4) admettent un système de solutions asymptotiques finies A_i, données par les équations (6), il faut et il suffit, à cause de $\Delta = 0$, que l'on ait

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ce cas, il est facile de voir, qu'il existe un système de solutions des équations (4), qui satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i = 0\,, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$x_i\,(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)\,.$$

Il faut remarquer que les intégrales (15) peuvent être écrites sous une autre forme. En supposant que les intégrales (15) convergent, pour une racine multiple d'ordre l, on peut disposer des constantes C_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ de manière que les solutions (12), pour cette racine multiple, tendent vers zéro. Mais, les solutions, qui tendent vers zéro, d'après l'expression [(2), 5.], sont

$$u_1 = -e^{\vartheta it} \int_t^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi_1(t)\,dt\,,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta it} \left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi_2(t)\,dt + c_{21} \int_t^{\infty} e^{-\vartheta it} u_1(t)\,dt \right],$$

. . . .

d'où

$$u_1 = -e^{\vartheta it} \int_t^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi_1(t)\,dt\,,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta it} \left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi_2(t)\,dt - c_{21} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta it_2} \varphi_1(t_2)\,dt_2 \right],$$

. . . .

Puisque les solutions ci-dessus tendent vers zéro, les intégrales, qui doivent être convergentes et qui remplacent les intégrales (15), sont

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta it} \varphi_1(t)\,dt\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta it_2} \varphi_1(t_2)\,dt_2\,, \ldots$$

$$\ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} e^{-\vartheta it_l} \varphi_1(t_l)\,dt_l\,,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_2(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta i t_2} \varphi_2(t_2)\, dt_2, \ldots$$

$$\ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-2}}^{\infty} e^{-\vartheta i t_{l-1}} \varphi_2(t_{l-1})\, dt_{l-1},$$

. . . .

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_l(t)\, dt,$$

(avec $\vartheta i = 0$, pour cette racine égale à zéro).

Il faut remarquer que les intégrales ci-dessus se réduisent, d'après (10′), aux intégrales

$$(16) \qquad \begin{gathered} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \psi_k(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta i t_2} \psi_k(t_2)\, dt_2, \ldots \\ \ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} e^{-\vartheta i t_l}\, \psi_k(t_l)\, dt_l \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines imaginaires pures (ou égales à zéro, $\vartheta i = 0$) et à chaque racine multiple d'orde l correspondront les intégrales (16), qui doivent êrte convergentes.

Par conséquent nous avons le théorème suivant:

I. Soit donné un système d'équations

$$(4) \qquad \frac{dx_i}{dt} + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où a_{ik} sont des constantes et $f_i(t)$ des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui satisfont aux conditions

$$\lim_{t=\infty} f_i(t) = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) sont *différentes de zéro* ($\Delta \neq 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure d'ordre l, les intégrales* (16) *convergent, les équations* (4) *admettent un système de solutions, qui satisfont aux relations*

$$(13) \qquad \lim_{t=\infty} x_i = A_i\,, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(14) \qquad x_i\,(t_0) = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où les solutions asymptotiques A_i *sont données par les équations*

$$(6) \qquad a_{i1} A_1 + a_{i2} A_2 + \ldots + a_{in} A_n = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (10), *en dehors des racines citées plus haut, possède des racines égales à zéro* ($\Delta = 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro,* $\vartheta i = 0$*), d'ordre l, les intégrales* (16) *sont convergentes, les équations* (4) *admettent alors un système de solutions asymptotiques finies, si l'on a en plus*

$$\lim_{t=\infty} f_i\,(t) = b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans ce cas, il existe un système de solutions satisfaisant aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i = 0\,, \qquad \lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$x_i\,(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, les intégrales générales des équations* (4) *admettent les propriétés* (13). *Dans ce cas, il existe un système de solutions, satisfaisant aux relations* (13) *et* (14) *pour* $p = n$ [1]).

---

[1]) Les résultats, contenus dans ce théorème concernant les racines inégales de l'équation caractéristique (10), ont déjà été obtenus par moi-même d'une manière un peu différente *(Bulletin de la société des Sciences de Cluj (Roumanie), t-V, 1-re partie. 1930).*

II. Système d'équations à coefficients variables.

Considérons le système d'équations

$$(17)\quad \frac{dx_i}{dt}+a_{i1}(t)\,x_1+a_{i2}(t)\,x_2+\ldots+a_{in}(t)\,x_n=f_i\,(t)$$
$$(i=1,2,\ldots,n),$$

$a_{ik}(t)$ et $f_i\,(t)$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t\geqslant t_0\geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies

$$(18)\qquad \lim_{t=\infty} a_{ik}(t)=a_{ik}\,,\qquad \lim_{t=\infty} f_i\,(t)=b_i\qquad (i=1,2,\ldots,n)\,.$$

Ecrivons les équations (17) sous la forme

$$(19)\quad \frac{dx_i}{dt}+a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=f_i\,(t)+\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}(t)\,x_k$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

où

$$(20)\qquad \delta_{ik}(t)=a_{ik}-a_{ik}(t)\,,\qquad \lim_{t=\infty}\delta_{ik}(t)=0\quad (i,k=1,2,\ldots,n)$$

et résolvons les équations (19) par la méthode des approximations successives.

Soit, pour, $t\geqslant t_0\geqslant 0$, $\overline{x}_i=x_i^0$ un système de solutions bornées des équations à coefficients constants

$$(21)\qquad \frac{d\overline{x}_i}{dt}+a_{i1}\overline{x}_1+a_{i2}\overline{x}_2+\ldots+a_{in}\overline{x}_n=f_i\,(t)\,,$$
$$(i=1,2,\ldots,n)$$

dont les valeurs asymptotiques sont bornées.

En partant du système x_i^0 de solutions des équations (21), on peut déterminer les suites des fonctions

$$\overset{1}{x}_i,\ \overset{2}{x}_i,\ \ldots,\ \overset{m}{x}_i,\ \ldots\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

comme les solutions successives d'équations

$$\frac{d\overset{m}{x}_i}{dt}+a_{i1}\overset{m}{x}_1+a_{i2}\overset{m}{x}_2+\ldots+a_{in}\overset{m}{x}_n=f_i\,(t)+\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}\,(t)\,\overset{m-1}{x}_k$$

ou, en posant

(22) $$y_i^0 = x_i^0, \quad y_i^1 = x_i^1 - x_i^0, \ldots, y_i^m = x_i^m - x_i^{m-1}, \ldots,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient des fonctions y_i^m $(m = 1, 2 \ldots)$ comme les solutions successives des équations

(23) $$\frac{dy_i^m}{dt} + a_{i1} y_1^m + a_{i2} y_2^m + \ldots + a_{in} y_n^m = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, y_k^{m-1}$$
$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Les suites (22) donnent les séries

(24) $$x_i = \lim_{m=\infty} x_i^m = y_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = x_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = \bar{x}_i + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m.$$

Si les séries ci-dessus convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, elles représentent les solutions des équations (17), qui satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i^{(k)} = \lim_{t=\infty} \bar{x}_i^{(k)} \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour cela, faisons une substitution linéaire

(25) $$u_i^m = b_{i1} y_1^m + b_{i2} y_2^m + \ldots + b_{in} y_n^m$$

et choisissons les coefficients b_{ik}, dont le déterminant est différent de zéro, de manière que les équations (23) prennent la forme

(26) $$\begin{cases} \dfrac{du_1^m}{dt} - r_1 u_1^m = \varphi_1(t), \\ \dfrac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - r_2 u_2^m = \varphi_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique (10), c_{ik} $(k < i)$ des constantes déterminées et

(27) $$\varphi_i(t) = b_{i1} \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t)\, y_k^{m-1} + b_{i2} \sum_{k=1}^{n} \delta_{2k}(t)\, y_k^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t)\, y_k^{m-1}$$

des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Les intégrales générales des équations (26) sont données par les formules

$$(28)\quad \begin{cases} u_1^m = e^{r_1 t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1^m\right], \\ u_2^m = e^{r_2 t}\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}u_1^m(t)\,dt + C_2^m\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il faut résoudre les équations ci-dessus en posant successivement $m = 1, 2, \ldots$

Supposons d'abord que toutes les racines r_i de l'équation caractéristique (10) soient réelles différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro. On peut alors disposer des constantes C_i^m ($i = 1, 2, \ldots, n$) de manière à avoir, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$\lim_{t=\infty} |u_1^m| = \lim_{t=\infty}\left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim_{t=\infty}\left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}|\lim_{t=\infty}\left|\frac{u_1^m}{r_2}\right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où

$$(29)\quad \begin{cases} \lim\limits_{t=\infty} |u_1^m| = \lim\limits_{t=\infty}\left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|, \\ \lim\limits_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim\limits_{t=\infty}\left|\dfrac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}|\lim\limits_{t=\infty}\left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2}\right|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Mais, dans les solutions u_i^m, figurent encore p constantes arbitraires, où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives. On peut alors disposer des constantes C_i^m ($i = 1, 2, \ldots, p$) et obtenir, à cause des transformations (25),

$$y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En choisissant de cette manière les constantes C_i^m(i = 1, 2, . . . , p), les solutions successives u_i^m, c'est-à-dire les solutions $y_i^m (i = 1, 2, \ldots, n)$ dépendront uniquement des fonctions $\varphi_i(t)$ [1]).

[1]) Considérons, par exemple, deux équations à deux inconnues et soit r_1 une racine réelle positive ou complexe à partie réelle positive, et r_2 une racine réelle négative ou complexe à partie réelle négative. Les solutions, qui peuvent tendre vers une limite pour $t = \infty$, sont, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} u_1^m &= -e^{r_1 t} \int_t^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt, \\ u_2^m &= e^{r_2 t} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t} \varphi_2(t)\, dt + C_2^m \right] \end{aligned} \right.$$

et les fonctions $y_i^m (i = 1, 2)$ sont données, d'après (25), par les formules

$$y_1^m = \alpha_{11}\, u_1^m + \alpha_{12}\, u_2^m,$$

$$y_2^m = \alpha_{21}\, u_1^m + \alpha_{22}\, u_2^m.$$

Puisque la constante C_2^m est arbitraire, elle peut être déterminée pour que l'on ai

$$y_1^m(t_0) = 0 = \alpha_{11}\, u_1^m(t_0) + \alpha_{12}\, u_2^m(t_0)$$

ou, d'après (b),

$$0 = -\alpha_{11}\, e^{r_1 t_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt + \alpha_{12} C_2^m\, e^{r_2 t_0},$$

c'est-à-dire, la constante C_2^m, dépend de la fonction $\varphi_1(t)$. Par conséquent, ies solutions u_i^m et, par suite, les solutions y_i^m dépendent seulement des fonctions $\varphi_i(t)$.

Remarquons encore que les constantes arbitraires C_i^m ($i = 1, 2, \ldots, p$) peuvent être écrites sous la forme

$$C_i^m = C_i \int_{t_0}^{t_1} e^{r_i t} \varphi_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

où C_i sont des constantes arbitraires et r_i les racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives. Cela veut dire que l'on peut faire les majorations successives des fonctions u_i^m, c'est-à-dire des fonctions y_i^m, laissant les constantes C_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) arbitraires; enfin, elles peuvent être déterminées de sorte que l'on ait $y_i^m(t_0) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, p$).

Posons maintenant $m=1$; on aura, d'après les inégalités supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

pour les relations (27)

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\,\delta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

où

$$(29') \qquad \delta_i(t) = |b_{i1}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{ik}(t)| + |b_{i2}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{2k}(t)| + \ldots$$
$$\ldots + |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_{nk}(t)|$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \delta_i(t) = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

à cause de relations (20). Il s'ensuit que les inégalités (29) pour $m=1$ deviennent

$$\lim_{t=\infty} |u_1^1| \leqslant C \lim_{t=\infty} \frac{\delta_1(t)}{|r_1|} = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2^1| \leqslant C \left[\lim_{t=\infty} \frac{\delta_2(t)}{|r_2|} + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \frac{\delta_1(t)}{|r_1 r_2|} \right] = 0$$

. . . .

d'où, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|u_i^1| \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \eta_i(t) = 0.$$

Les transformations (25), qui peuvent être écrites sous la forme

$$(30) \qquad y_i^m = \alpha_{i1} u_1^m + \alpha_{i2} u_2^m + \ldots + \alpha_{in} u_n^m \qquad (\alpha_{ik} = \text{const.}),$$

donnent, pour $m=1$ et pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$(31) \qquad |y_i^1| \leqslant C\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura pour le même système de solutions

$$\lim_{t=\infty} y_i^1 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$y_i^1(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Connaissant les fonctions y_i^1, qui satisfont aux relations (31), les équations (27), pour $m = 2$, donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\varepsilon_i\,\delta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, les équations (28) pour $m = 2$, d'après les transformations (30), donnent, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i\,\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} y_i^2 = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i^2(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En continuant ainsi, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1}\,\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura

$$\lim_{t=\infty} y_i^m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour que l'on ait, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t) < 1$$

ce qui est possible à cause des relations $\lim\limits_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0$, les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ [1]). Il s'ensuit, que les séries (24) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solutions des équations (17) qui, en admettant les conditions (18), satisfont aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_i^{(k)} = \lim_{t=\infty} \overline{x}_i^{(k)} \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, il est évident que l'on a

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1), \quad x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (k = 0, 1; \; i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (10), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro et soit, par exemple $r_1 = r_2 = \ldots$ $\ldots = r_l = \vartheta i$ une racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l. A cette racine correspond, après les transformations (25), un groupe d'équations

$$\frac{du_1^m}{dt} - \vartheta i \, u_1^m = \varphi_1(t),$$

$$\frac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - \vartheta i u_2^m = \varphi_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du_l^m}{dt} - c_{l1} u_1^m - c_{l2} u_2^m - \ldots - c_{l\,l-1} u_{l-1}^m - \vartheta i u_l^m = \varphi_l(t)\ ^{2)},$$

dont les intégrales générales sont

---

1) Il faut remarquer que les premièrs dérivées des séries $\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m$ convergent uniformément, pour $t \geq t_0 > 0$, car les fonctions successives $u_i^m(t)$ et par suite, les fonctions y_i^m, qui tendent vers zéro, admettent, d'après (28), les premières dérivées qui tendent vers zéro, pour $t = \infty$.

2) A chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro. $\vartheta i = 0$) d'ordre l, correspondra un tel groupe d'équations.

$$(32)\begin{cases} u_1^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt + C_1^m\right], \\ u_2^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_1^m(t)\,dt + C_2^m\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_l^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_l(t)\,dt + c_{l1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_1^m(t)\,dt + \dots\right. \\ \qquad\qquad \left.\dots + c_{l\,l-1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_{l-1}^m(t)\,dt + C_l^m\right]. \end{cases}$$

Posons dans les équations (32) $m=1$ et supposons que les intégrales

$$(33)\begin{cases} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_p(t)\,dt & (p=1, 2, \dots, l) \\ \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_k^1(t)\,dt & (k=1, 2, \dots l-1) \end{cases}$$

convergent. Ou peut alors disposer des constantes C_i^1 $(i=1, 2, \dots, l)$ de manière que les solutions u_i^1 $(i=1, 2, \dots, l)$ tendent vers zéro. Les solutions, qui tendent vers zéro, d'après l'expression [(2), 5.], sont

$$u_1^1 = -e^{\vartheta i t}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt,$$

$$u_2^1 = -e^{\vartheta i t}\left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_1^1(t)\,dt\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'oú

$$|u_1^1| = \left| \int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt \right| \leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_1(t)|\, dt,$$

$$|u_2^1| \leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} |u_1^1(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} |\varphi_1(t_2)|\, dt_2,$$

. . . .

. . . .

Puisque les équations (27) pour $m = 1$, à cause de relations supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\, \delta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$(34) \quad \begin{cases} |u_1^1| \leqslant C \displaystyle\int_t^{\infty} \delta_1(t)\, dt, \\ |u_2^1| \leqslant C \left[\displaystyle\int_t^{\infty} \delta_2(t)\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \delta_1(t_2)\, dt_2 \right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si les intégrales

$$
(35)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{\infty} \delta_1(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \delta_1(t_2)\,dt_2, \ldots \\
&\qquad \ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} \delta_1(t_l)\,dt_l, \\
&\int_{t_0}^{\infty} \delta_2(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \delta_2(t_2)\,dt_2, \ldots \\
&\qquad \ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-2}}^{\infty} \delta_2(t_{l-1})\,dt_{l-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\int_{t_0}^{\infty} \delta_l(t)\,dt
\end{aligned}
\right.
$$

convergent [1]), ce qui entraîne la convergence des intégrales (33), les inégalités (34) peuvent être écrites sous la forme

$$
|u_i^1| \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)
$$

avec

$$
\lim_{t=\infty} \eta_i(t) = 0 .
$$

Il faut remarquer que les intégrales (35) se réduisent, d'après (29′), aux intégrales

---

[1]) Pour $l = 1$, les intégrales ci-dessus se ramènent à l'intégrale

$$
\int_{t_0}^{\infty} \delta_1(t)\,dt,
$$

c'est-à-dire, d'après (35′), à l'intégrale

$$
\int_{t_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |\delta_{pk}(t)|\,dt \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).
$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}|\delta_{pk}(t)|\,dt, \quad \int_{t_0}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}|\delta_{pk}(t_2)|\,dt_2, \ldots$$

$$(35') \qquad \ldots, \int_{t_0}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}|\delta_{pk}(t_l)|\,dt_l$$

$$(p=1, 2, \ldots, n).$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines imaginaires pures (ou égales à zéro, $\vartheta i=0$) et, à chaque racine multiple d'ordre l, correspondront les intégrales (35'), qui doivent être convergentes.

Les transformations (30), pour $m=1$, donnent avec les autres fonctions $u_i^1 (i=l+1, \ldots, n)$,

$$|y_i^1| \leqslant C\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t)=0, \qquad \varepsilon_i=\max \varepsilon_i(t).$$

Connaissant les fonctions y_i^1, qui satisfont aux relations ci-dessus, on aura, par le même raisonnement comme plus haut,

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

En continuant, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1}\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad \begin{matrix}(m=1, 2, \ldots)\\(i=1, 2, \ldots, n)\end{matrix}$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t)=0, \qquad \varepsilon_i=\max \varepsilon_i(t).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour avoir, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i=\max \varepsilon_i(t) < 1,$$

les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$.

Par conséquent, si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les intégrales (35') convergent, les séries (24) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solutions des équations (17), qui, sous les conditions (18), satisfont aux relations

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons donc le théorème suivant:

II. Soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $x_i = x_i^0$ un système de solutions bornées des équations (21).

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) *sont réelles, différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, à un tel système de solutions $\overline{x} = x_i^0$ correspond un système de solutions des équations* (17), *données par des séries* (24), *et qui satisfont, sous les conditions* (18), *aux relations*

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour $t \geqslant t_0 > 0$, t_0 étant assez grand, avec

$$x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (10), *en dehors des racines citées plus haut, a des racines imaginaires pures et égales á zéro, les équations* (17) *admettent les mêmes propriétés, si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les intégrales* (35') *sont convergentes.*

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (10) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on aura*

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1), \quad x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (k = 0, 1; \ i = 1, 2, \ldots, n).$$

III. Equation d'ordre n à coefficients constants.

Soit donnée une équation différentielle d'ordre n

$$(36) \qquad x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x' + a_1 x = f(t)$$

a_i étant des constantes et $f(t)$ une fonction continue de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tend vers une limite finie

$$\lim_{t=\infty} f(t) = b .$$

Les transformations

$$(37) \qquad \begin{cases} x = x_1 , \\ x' = x_2 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;, \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases}$$

réduisent l'équation (36) à un système d'équations

$$(38) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - x_2 = 0 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} - x_3 = 0 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} - x_n = 0 , \\ \dfrac{dx_n}{dt} + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = f(t) . \end{cases}$$

En posant

$$(39) \qquad x_i = y_i + A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations (38) deviennent

$$(40) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} - y_2 = 0 , \\ \dfrac{dy_2}{dt} - y_3 = 0 , \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \;, \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dt} - y_n = 0 , \\ \dfrac{dy_n}{dt} + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = f(t) - b = \psi(t) \end{cases}$$

où

$$\lim_{t=\infty} f(t)-b=\lim_{t=\infty} \psi(t)=0\,.$$

$$(41) \qquad A_1=\frac{b}{a_1}\,, \quad A_i=0 \qquad (i=2,\ldots,n)\,.$$

Une substitution linéaire à coefficients constants et convenablement choisis

$$(42) \qquad u_i = b_{i1}y_1+b_{i2}y_2+\ldots+b_{in}y_n\,,$$

dont le déterminant est différent de zéro, réduit les équations (40) à une forme spéciale

$$(43) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt}-r_1u_1=\varphi_1(t)\,, \\ \dfrac{du_2}{dt}-c_{21}u_1-r_2u_2=\varphi_2(t)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du_n}{dt}-c_{n1}u_1-c_{n2}u_2-\ldots-c_{n\,n-1}u_{n-1}-r_n u_n=\varphi_n(t) \end{cases}$$ [1])

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique

$$(44) \quad \begin{vmatrix} r & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & r & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & r & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & r+a_n \end{vmatrix} = r^n+a_n r^{n-1}+\ldots+a_1=0\,,$$

[1]) Dans les cas des racines inégales les équations transformées peuvent être de la forme

$$(c) \qquad \frac{du_i}{dt}-r_i\,u_i=\varphi_i\,(t)\,.$$

Dans le cas des racines multiples, à chaque racine multiple d'ordre k correspondra un groupe d'équations de la forme

$$\frac{du_1}{dt}-ru_1=\varphi_1(t)\,,$$

$$\frac{du_2}{dt}-c_{21}u_1-ru_2=\varphi_2(t)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du_k}{dt}-c_{k1}u_1-\ldots-c_{k\,k-1}u_{k-1}-ru_k=\varphi_k\,(t)\,.$$

qui peuvent être rangées d'une manière quelconque; c_{ik} $(k<i)$ étant les constantes déterminées et

$$\varphi_i(t) = b_{in}\psi(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{44'}$$

des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers zéro.

Les intégrales générales des équations (43) sont

$$\tag{45} \left\{ \begin{aligned} u_1 &= e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right], \\ u_2 &= e^{r_2 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t}u_1(t)\,dt + C_2\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= e^{r_n t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}\varphi_n(t)\,dt + c_{n1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_1(t)\,dt + \ldots\right. \\ &\qquad\left.\ldots + c_{n\,n-1}\int_{t_0}^{t} e^{-r_n t}u_{n-1}(t)\,dt + C_n\right] \end{aligned} \right.$$

avec

$$\tag{46} \left\{ \begin{aligned} u_1 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right], \\ u_2 &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + C_2\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &= e^{at}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-at}\varphi_k(t)\,dt + c_{k1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_1(t)\,dt + \ldots\right. \\ &\qquad\left.\ldots + c_{k\,k-1}\int_{t_0}^{t} e^{-at}u_{k-1}(t)\,dt + C_k\right] \end{aligned} \right.$$

pour $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = a$ une racine multiple d'ordre k [1]).

Comme on le voit, les intégrales générales (45) et (46) sont de la forme (2).

Supposons d'abord que toutes les racines de l'équation caractéristique (44) soient réelles, différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, il existe, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.], un système de solutions des intégrales (45), qui tendent vers zéro

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqslant \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left|\frac{u_1(t)}{r_2}\right|,$$

. . . .

d'où

$$\lim_{t=\infty} |u_1| = \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1}\right| = 0,$$

$$\lim_{t=\infty} |u_2| \leqslant \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim_{t=\infty} \left|\frac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2}\right| = 0,$$

. . . .

Il s'ensuit, d'après les transformations (42) et (39), que les équations (38) admettent un système de solutions satisfaisant, vu les équations (41), aux relations

$$\lim_{t=\infty} x_1 = A_1 = \frac{b}{a_1}, \quad \lim_{t=\infty} x_i = A_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_1(t_0) = A_1 = \frac{b}{a_1}, \quad x_i(t_0) = A_i = 0^{2)} \qquad (i = 2, \ldots, p),$$

où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Par conséquent, l'équation (36), d'après les transformations (37), admet une solution, qui satisfait aux relations

[1]) A chaque racine multiple d'ordre k correspondra un groupe d'intégrales de la forme (46).

[2]) Les valeurs x_i (t_0) peuvent être d'ailleurs quelconques, car dans les solutions u_i, qui tendent vers zéro, figurent p constantes arbitraires

$$(47)\qquad \lim_{t=\infty} x(t) = \frac{b}{a_1}\,,\qquad \lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

$$(48)\qquad x(t_0) = \frac{b}{a_1}\,,\qquad x^{(i)}(t_0) = A_i = 0\qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, il est évident que l'intégrale générale de l'équation (36) admet les propriétés (47). Dans ce cas, il existe une solution de l'équation (36) satisfaisant aux relations (47) et (48) pour $p = n$.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (44), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro. Il existe alors une solutions de l'équation (36), qui satisfait aux relations (47) et (48), si, d'après (46), pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, un groupe d'intégrales de la forme

$$(49)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_p(t)\, dt & (p = 1, 2, \ldots, l)\,, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} u_k(t)\, dt & (k = 1, 2, \ldots, l-1) \end{cases}$$

converge; pour $l = 1$, les intégrales ci-dessus deviennent, d'après (c), $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt$.

Mais dans le cas des racines égales à zéro, on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_1 = 0\,.$$

Pour que l'équation (36) admette une solution asymptotique finie, il faut et il suffit, à cause de $a_1 = 0$, que l'on ait $b = 0$. Dans ce cas il existe une solution qui satisfait aux relations

$$\lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = 0 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Remarquons que les intégrales (49) peuvent être écrites sous une autre forme. En supposant que les intégrales (49) convergent, pour une racine multiple d'ordre l, on peut alors disposer des constantes C_i $(i=1, 2, \ldots, l)$ de sorte que les solutions (46), pour cette racine multiple, tendent vers zéro. Mais, les solutions, qui tendent vers zéro, d'après l'expression [(2), 5.], sont

$$u_1 = -e^{\vartheta it}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it}\varphi_1(t)\,dt,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta it}\left[\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it}u_1(t)\,dt\right],$$

. . . .

d'où, à cause des relations

$$\varphi_i(t) = b_{in}\psi(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$u_1 = -b_{1n}\, e^{\vartheta it}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it}\psi(t)\,dt,$$

$$u_2 = -e^{\vartheta it}\left[b_{2n}\int_t^{\infty} e^{-\vartheta it}\psi(t)\,dt - c_{21}\,b_{1n}\int_t^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta it_2}\psi(t_2)\,dt_2\right],$$

. . . .

Puisque les solutions ci-dessus tendent vers zéro, les intégrales, qui doivent être convergentes et qui remplacent les intégrales (49), sont

$$\tag{50} \begin{gathered} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta it}\psi(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} e^{-\vartheta it_2}\psi(t_2)\,dt_2 \ldots \\ \ldots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{l-1}}^{\infty} e^{-\vartheta it_l}\psi(t_l)\,dt_l, \end{gathered}$$

(avec $\vartheta i = 0$, pour cette racine égale à zéro).

Il est facile de voir, d'après (44'), qu'à chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, correspondront les intégrales (50), qui doivent être convergentes.

Comme on le voit, nous retrouvons les résultats obtenus par M. O. Perron et H. Späth.

On a donc le théorème suivant:

III. Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont différentes de zéro* ($\Delta = a_1 \neq 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure d'ordre l, les intégrales* (50) *convergent, l'équation* (36) *admet une solution satisfaisant aux relations*

$$(47) \qquad \lim_{t=\infty} x(t) = \frac{b}{a_1}, \qquad \lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(48) \qquad x(t_0) = \frac{b}{a_1}, \qquad x^{(i)}(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

où p est ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (44), *en dehors des racines citées plus haut, a des racines égales à zéro* ($\Delta = a_1 = 0$) *et si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les intégrales* (50) *convergent, l'équation* (36) *admet une solution asymptotique finie, si l'on a $b = 0$. Dans ce cas, il existe une solution de l'équation* (36), *qui satisfait aux relations*

$$\lim_{t=\infty} x^{(i)}(t) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, l'intégrale générale de l'équation* (36) *satisfait aux relations* (47). *Dans ce cas, il existe une solution qui satisfait aux relations* (47) *et* (48) *pour $p = n$.*

IV. Equation d'ordre n à coefficients variables.

Soit donnée une équation différentielle d'ordre n

(51) $$x^{(n)} + a_n(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_2(t)\, x' + a_1 x = f(t),$$

$a_i(t)$ et $f(t)$ étant des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, qui tendent vers des limites finies

(52) $$\lim_{t=\infty} a_i(t) = a_i, \qquad \lim_{t=\infty} f(t) = b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les substitutions (37) transforment l'équation (51) en un système d'équations

(53) $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - x_2 = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dt} - x_3 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} - x_n = 0, \\ \dfrac{dx_n}{dt} + a_1(t)\, x_1 + a_2(t)\, x_2 + \ldots + a_n(t)\, x_n = f(t). \end{cases}$$

Ecrivons les équations (53) sous la forme

(54) $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - x_2 = 0, \\ \dfrac{dx_2}{dt} - x_3 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} - x_n = 0, \\ \dfrac{dx_n}{dt} + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t)\, x_k \end{cases}$$

avec

(55) $$\delta_k(t) = a_k - a_k(t), \quad \lim_{t=\infty} \delta_k(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

et appliquons la méthode des approximations successives.

Soit donnée une équation à coefficients constants

$$\bar{x}^{(n)} + a_n \bar{x}^{(n-1)} + \ldots + a_2 \bar{x}' + a_1 \bar{x} = f(t), \tag{56}$$

qui, d'après les transformations (37), peut être écrite sous la forme d'un système d'équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\bar{x}_1}{dt} - \bar{x}_2 = 0, \\ &\frac{d\bar{x}_2}{dt} - \bar{x}_3 = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ &\frac{d\bar{x}_{n-1}}{dt} - \bar{x}_n = 0, \\ &\frac{d\bar{x}_n}{dt} + a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + \ldots + a_n \bar{x}_n = f(t) \end{aligned}\right. \tag{57}$$

et soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\bar{x}_i = x_i^0$ un système de solutions bornées des équations (57). En partant du système x_i^0 de solutions des équations (57), on peut déterminer les suites de fonctions

$$x_i^1,\ x_i^2, \ldots, x_i^m, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

comme les solutions successives des équations

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1^m}{dt} - x_2^m = 0, \\ &\frac{dx_2^m}{dt} - x_3^m = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ &\frac{dx_{n-1}^m}{dt} - x_n^m = 0, \\ &\frac{dx_n^m}{dt} + a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \ldots + a_n x_n^m = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t)\, x_k^{m-1} \end{aligned}$$

ou, en posant

$$y_i^0 = x_i^0, \quad y_i^1 = x_i^1 - x_i^0, \ldots, y_i^m = x_i^m - x_i^{m-1}, \ldots, \tag{58}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient des fonctions $y_i^m (m = 1, 2, \ldots)$ comme les solutions successives des équations

$$
(59) \quad \begin{cases}
\dfrac{dy_1^m}{dt} - y_2^m = 0\,, \\
\dfrac{dy_2^m}{dt} - y_3^m = 0\,, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\,, \\
\dfrac{d\,y_{n-1}^m}{dt} - y_n^m = 0\,, \\
\dfrac{dy_n^m}{dt} + a_1 y_1^m + a_2 y_2^m + \ldots + a_n y_n^m = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t) y_k^{m-1}\,.
\end{cases}
$$

Les suites (58) donnent les séries

$$
(60) \qquad x_i = \lim_{m=\infty} x_i^m = y_i^o + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = x_i^o + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m = \bar{x}_i + \sum_{m=1}^{\infty} y_i^m
$$

$$
(i = 1, 2, \ldots, n)\,.
$$

Si les séries ci-dessus convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, elles représentent les solutions des équations (53), qui satisfont aux relations

$$
x_i^{(k)} = \bar{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0,\ 1;\quad i = 1, 2, \ldots, n)\,,
$$

c'est-à-dire, d'après les transformations (37), l'équation (51) admet une solution, qui satisfait aux relations

$$
x^{(i)} = \bar{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)\,.
$$

Pour cela faisons une substitution linéaire

$$
(61) \qquad u_i^m = b_{i1} y_1^m + b_{i2} y_2^m + \ldots + b_{in} y_n^m
$$

et choisissons les coefficients b_{ik}, dont le déterminant est différent de zéro, de manière que les équations (59) prennent la forme

$$
(62) \quad \begin{cases}
\dfrac{du_1^m}{dt} - r_1 u_1^m = \varphi_1(t)\,, \\
\dfrac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - r_2 u_2^m = \varphi_2(t)\,, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{cases}
$$

où r_i sont les racines de l'équation caractéristique (44), c_{ik} $(k < i)$ des constantes déterminées et $\varphi_i(t)$ des fonctions continues de la variable réelle $t \geqslant t_0 \geqslant 0$

$$\varphi_i(t) = b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_k(t)\, y_k^{m-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{63}$$

Les intégrales générales des équations (62) sont données par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} u_1^m = e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt + C_1^m\right], \\ u_2^m = e^{r_2 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t} \varphi_2(t)\, dt + c_{21} \int_{t_0}^{t} e^{-r_2 t} u_1^m(t)\, dt + C_2^m\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{64}$$

Il faut résoudre les équations ci-dessus en posant successivement $m = 1, 2, \ldots$

Supposons d'abord que toutes les racines de l'équation caractéristique (44) soient réelles différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, on aura, d'après l'expression [(2), 1., 2., 3., 4.],

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{t=\infty} |u_1^m| = \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|, \\ \lim\limits_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{u_1^m}{r_2}\right|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t=\infty} |u_1^m| = \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1}\right|, \\ \lim\limits_{t=\infty} |u_2^m| \leqslant \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_2(t)}{r_2}\right| + |c_{21}| \lim\limits_{t=\infty} \left|\dfrac{\varphi_1(t)}{r_1 r_2}\right|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{65}$$

Mais dans les solutions u_i^m figurent encore p constantes arbitraires où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives. On peut alors disposer des constantes C_i^m $(i = 1, 2, \ldots, p)$ de sorte que l'on ait, à cause des transformations (61),

$$y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En choisissant de cette manière les constantes C_i^m $(i - 1, 2, \ldots, p)$, les solutions successives u_i^m, c'est-à-dire les solutions y_i^m ne dépendent que des fonctions $\varphi_i(t)$.

Posons maintenant $m = 1$; on aura, d'après les inégalités supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

pour des relations (63)

$$(65') \qquad |\varphi_i(t)| \leqslant C\,|b_{in}|\sum_{k=1}^{n}|\delta_k(t)| = C\,|b_{in}|\,\delta(t)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\sum_{k=1}^{n}|\delta_k(t)| = \lim_{t=\infty}\delta(t) = 0$$

à cause des relations (55). Il s'ensuit que les inégalités (65), pour $m = 1$, deviennent

$$\lim_{t=\infty}|u_1^1| \leqslant C\left|\frac{b_{1n}}{r_1}\right|\lim_{t=\infty}\delta(t) = 0,$$

$$\lim_{t=\infty}|u_2^1| \leqslant C\left[\left|\frac{b_{2n}}{r_2}\right|\lim_{t=\infty}\delta(t) + \left|\frac{c_{21}\,b_{1n}}{r_1 r_2}\right|\lim_{t=\infty}\delta(t)\right] = 0,$$

. . . .

d'où, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|u_i^1| \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty}\eta_i(t) = 0.$$

Les transformations (61), pour $m = 1$, donnent

$$(66) \qquad |y_i^1| \leqslant C\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura pour le même système de solutions

$$\lim_{t=\infty} y_i^1 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i^1(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En connaissant les fonctions y_i^1, qui satisfont aux relations (66), les équations (63), pour $m=2$, donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\varepsilon_i \, |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_k(t)| = C\varepsilon_i \, |b_{in}| \, \delta(t).$$

Cela posé, les équations (64), pour $m=2$, donnent, comme précédemment, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} y_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$y_i^2(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

En continuant ainsi, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1} \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Par conséquent, on aura

$$\lim_{t=\infty} y_i^m = 0 \qquad \begin{array}{l}(i = 1, 2, \ldots, n)\\ (m = 1, 2, \ldots,)\end{array}$$

$$y_i^m(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour avoir, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t) < 1$$

ce qui est possible à cause de relations $\lim\limits_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0$, les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$. Il s'ensuit que les séries (60) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solutions des équations (53), qui, sous les conditions (52), satisfont aux relations, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on aura

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1), \quad x_i(t_0) = \overline{x}_i(t_0) \qquad (k = 0, 1; \; i = 1, 2, \ldots, n).$$

Puisque les équations (51) et (56) correspondent respectivement aux systèmes d'équations (53) et (57), l'équation (51) admet une solution, qui, d'après les transformations (37), satisfait aux relations

$$x^{(i)} = \overline{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = \overline{x}^{(i)}(t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

avec $p = n$, si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique (44), en dehors des racines citées plus haut, ait des racines imaginaires pures et égales à zéro et soit, par exemple $r_1 = r_2 = \ldots = r_l = \vartheta i$ une racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l. A cette racine correspond, après les transformations (61), un groupe d'équations

$$\frac{du_1^m}{dt} - \vartheta i u_1^m = \varphi_1(t),$$

$$\frac{du_2^m}{dt} - c_{21} u_1^m - \vartheta i u_2^m = \varphi_2(t),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{du_l^m}{dt} - c_{l1} u_1^m - \ldots - c_{l\,l-1} u_{l-1}^m - \vartheta i u_l^m = \varphi_l(t)\,^{1)},$$

dont les intégrales générales sont

---

1) A chaque racine imaginaire pure (où égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l correspondra un tel groupe d'équations.

$$u_1^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt + C_1^m\right],$$

$$u_2^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_1^m(t)\,dt + C_2^m\right],$$

. . . .

$$u_l^m = e^{\vartheta i t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}\varphi_l(t)\,dt + c_{l1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_1^m(t)\,dt + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + c_{l\,l-1}\int_{t_0}^{t} e^{-\vartheta i t}u_{l-1}^m(t)\,dt + C_l^m\right].$$

Posons dans les équations ci-dessus $m = 1$ et supposons que les intégrales

$$(67)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_p(t)\,dt & (p = 1, 2, \ldots, l) \\[2ex] \displaystyle\int_{t_0}^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_k^1(t)\,dt & (k = 1, 2, \ldots l-1) \end{cases}$$

convergent. Il existe alors un système de solutions u_i^1 ($i = 1, 2, \ldots, l$), qui tendent vers zéro. D'après l'expression [(2), 5.], les solutions, qui tendent vers zéro, sont

$$u_1^1 = -e^{\vartheta i t}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_1(t)\,dt,$$

$$u_2^1 = -e^{\vartheta i t}\left[\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}\varphi_2(t)\,dt + c_{21}\int_{t}^{\infty} e^{-\vartheta i t}u_1^1(t)\,dt\right],$$

. . . .

d'où

$$|u_1^1| = \left| \int_t^{\infty} e^{-\vartheta i t} \varphi_1(t)\, dt \right| \leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_1(t)|\, dt,$$

$$|u_2^1| \leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} |u_1^1(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} |\varphi_2(t)|\, dt + |c_{21}| \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} |\varphi_1(t_2)|\, dt_2,$$

. . . .

Puisque les équations (63) pour $m=1$, à cause de relations supposées

$$|y_k^0| = |x_k^0| \leqslant C$$

donnent

$$|\varphi_i(t)| \leqslant C\, |b_{in}| \sum_{k=1}^{n} |\delta_k(t)| = C\, |b_{in}|\, \delta(t),$$

on aura

$$(68) \quad \begin{cases} |u_1^1| \leqslant C\, |b_{1n}| \displaystyle\int_t^{\infty} \delta(t)\, dt, \\ |u_2^1| \leqslant C\left[|b_{2n}| \displaystyle\int_t^{\infty} \delta(t)\, dt + |c_{21} b_{1n}| \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \delta(t_2)\, dt_2 \right], \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Si les intégrales

$$(69) \quad \begin{aligned} &\int_{t_0}^{\infty} \delta(t)\, dt, \qquad \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \delta(t_2)\, dt_2, \dots \\ &\dots, \int_{t_0}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \dots \int_{t_{l-1}}^{\infty} \delta(t_l)\, dt_l, \end{aligned}$$

convergent, ce qui entraîne la convergence des intégrales (67), les inégalités (68) peuvent être écrites sous la forme

$$|u_i^1| \leqslant C\eta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \eta_i(t) = 0.$$

Le raisonnement est analogue pour les autres racines imaginaires pures (ou égales à zéro, $\vartheta i = 0$) et, à chaque racine imaginaire pure d'ordre l correspondent, d'après (65'), les intégrales (69).

Les transformations (61), pour $m = 1$, donnent avec les autres fonctions $u_i^1 (i = l+1, \ldots, n)$,

$$|y_i^1| \leqslant C\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

En connaissant des fonctions y_i^1 qui satisfont aux relations ci-dessus, on aura, par le même raisonnement

$$|y_i^2| \leqslant C\varepsilon_i\, \varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En continuant ainsi, on obtient, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$,

$$|y_i^m| \leqslant C\varepsilon_i^{m-1}\varepsilon_i(t) \leqslant C\varepsilon_i^m \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

avec

$$\lim_{t=\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t).$$

Si l'on choisit t_0 assez grand pour obtenir, pour $t \geqslant t_0 > 0$,

$$\varepsilon_i = \max \varepsilon_i(t) < 1,$$

les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$.

Par conséquent, si les intégrales (69) convergent pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro, $\vartheta i = 0$) d'ordre l, les séries (60) convergent uniformément pour $t \geqslant t_0 > 0$ et représentent un système de solution sdes équations (53), qui, sous les conditions (52), satisfont aux relations

$$x_i^{(k)} = \overline{x}_i^{(k)} + o(1) \qquad (k = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire, d'après les transformations (37), l'équation (51) admet une solution, qui satisfait aux relations

$$x^{(i)} = \overline{x}^{\,i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Nous retrouvons donc les résultats de M. O. Perron et H. Späth.

On aura donc le théorème suivant:

IV. Soit, pour $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $\overline{x} = x^0$ *une solution bornée de l'équation* (56), *dont les* $n-1$ *premières dérivées sont bornées.*

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont réelles différentes de zéro ou complexes à parties réelles différentes de zéro, à une telle solution* $\overline{x} = x^0$ *correspond une solution de l'équation* (51), *donnée par la série* (60) *et qui satisfait, sous les conditions* (52), *aux relations*

$$x^{(i)} = \overline{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t \geqslant t_0 > 0$, t_0 *étant assez grand, avec*

$$x^{(i)}(t_0) = \overline{x}^{(i)}(t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

où p est un ensemble de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives.

Si l'équation caractéristique (44), *en dehors des racines citées plus haut, a des racines imaginaires pures et égales á zéro, l'équation* (51) *admet la même propriété, si, pour chaque racine imaginaire pure (ou égale à zéro,* $\vartheta i = 0$) *d'ordre l, les intégrales* (69) *sont convergentes.*

Enfin, si toutes les racines de l'équation caractéristique (44) *sont réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives, on aura*

$$x^{(i)} = \overline{x}^{(i)} + o(1) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$x^{(i)}(t_0) = \overline{x}^{(i)}(t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes.

Par

ELIE CARTAN.

Nous nous proposons d'exposer certaines propriétés topologiques de la quadrique complexe et de montrer leurs relations d'une part avec des résultats classiques de la géométrie algébrique des variétés tracées sur cette quadrique, d'autre part avec la théorie des espaces riemanniens symétriques clos; des théorèmes importants dus à G. de Rham nous conduiront à retrouver par une voie curieusement détournée les valeurs de certaines intégrales multiples classiques.

I. La quadrique complexe considérée comme espace symétrique clos.

1. Considérons dans l'espace projectif complexe à $n+1$ dimensions une quadrique non dégénérée (Q), que nous pouvons définir par l'équation

$$(1) \qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2+x_{n+2}^2=0;$$

nous dirons que les coordonnées x_k d'un point de (Q) sont *normales* si elles satisfont à la relation

$$(2) \qquad x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\ldots+x_{n+1}\bar{x}_{n+1}+x_{n+2}\bar{x}_{n+2}=2\,,$$

où $\bar{x}_k$ désigne la quantité conjuguée de x_k. En posant $x_k=\xi_k+i\eta_k$ les relations (1) et (2) sont équivalentes aux relations

$$\sum_{k=1}^{k=n+2} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{k=n+2} \eta_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=n+2} \xi_k \eta_k = 0. \tag{3}$$

Les coordonnées d'un point ne cessent pas d'être normales si on les multiplie par un même facteur arbitraire de module égal à 1.

La quadrique peut être regardée comme un espace clos à $2n$ dimensions réelles. Elle admet en elle-même une infinité de groupes de transformations transitifs clos [1]). Il suffit par exemple de considérer le groupe G des substitutions orthogonales *réelles* de déterminant 1 effectuées sur les x_k :

$$x'_i = \sum_{k=1}^{k=n+2} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2). \tag{4}$$

Ce groupe est transitif, car si $x_k = \xi_k + i\eta_k$ sont les coordonnées normales d'un point de (Q), il existe en vertu de (3) une infinité de matrices orthogonales dont les deux dernières colonnes sont formées des ξ_k et des η_k : le groupe G contient donc une infinité de transformations transformant le point $(0, \ldots, 0, 1, i)$ dans un point arbitrairement donné de (Q).

2. *Le groupe des rotations g* autour du point $(0, \ldots, 0, 1, i)$, que nous appellerons *le point-origine*, est le plus grand sous-groupe de G laissant fixe ce point; on voit immédiatement qu'il résulte d'une substitution orthogonale réelle de déterminant 1 effectuée sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$, accompagnée de la substitution

$$x'_{n+1} = x_{n+1} \cos\theta - x_{n+2} \sin\theta,$$

$$x'_{n+2} = x_{n+1} \sin\theta + x_{n+2} \cos\theta;$$

cette dernière engendre un sous-groupe commutatif avec toutes les transformations de g.

D'autre part tout point infiniment voisin du point-origine, si l'on suppose, ce qui est permis, que la coordonnée normale x_{n+1} est réelle et positive, est complètement défini par ses n premières coordonnées, les deux dernières étant 1 et i. En normant ainsi sans ambigüité les coordonnées de ce point, les équations du groupe des rotations deviennent

$$x'_k = e^{i\theta} \sum_{h=1}^{h=n} a_{kh} x_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

---

[1]) Voir, pour la notion de groupe clos, *E. Cartan*, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (J. Math. pures et appl., 8, 1929, p. 1—33).

la matrice des a_{kh} étant orthogonale, réelle, de déterminant 1.

On peut dire encore que *tout vecteur* (X_k) *issu du point-origine est transformé par le groupe des rotations suivant les formules*

$$X'_k = e^{i\theta} \sum_{h=1}^{h=n} a_{kh} X_h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

La quantité $X_1 \overline{X}_1 + \ldots + X_n \overline{X}_n$, invariante par le groupe des rotations, est le carré de la longueur du vecteur, ce qui permet de définir dans (Q) une métrique riemannienne invariante par G.

3. La quadrique (Q) peut être regardée comme un *espace de Klein* dont le groupe fondamental serait G. De ce point de vue, c'est un espace symétrique [2]). Cela signifie qu'on peut attacher à chaque point M de (Q) une transformation ponctuelle involutive σ_M (symétrie par rapport à M) jouissant des trois propriétés suivantes:

1°. *Le point M est un point invariant isolé pour* σ_M;

2°. *La transformation σ_M transforme entre elles les transformations de G;*

3°. *La transformation σ_M est invariante par chacune des transformations de G qui laissent fixe le point M.*

Il suffit en effet de prendre pour σ_M l'homographie involutive qui a pour axes la droite réelle Δ joignant le point M au point imaginaire conjugué $\overline{M}$, et la variété plane Π polaire de Δ par rapport à (Q). Le transformé d'un point P par σ_M s'obtient alors en menant par P la droite qui s'appuie sur Δ et Π et prenant le conjugué harmonique de P par rapport aux deux points où cette droite coupe Δ et Π.

La symétrie par rapport au point-origine est donnée par

$$x'_1 = -x_1, \ldots, x'_n = -x_n, \quad x'_{n+1} = x_{n+1}, \quad x'_{n+2} = x_{n+2};$$

elle fait partie du groupe des rotations (5), avec la valeur π de l'angle θ.

---

[2]) Voir *E. Cartan*, Leçons sur la géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1931, p. 74—76).

II. Les nombres de Betti de la quadrique complexe.

4. J'ai démontré [3]) que dans un espace symétrique clos de groupe fondamental G, le nombre de Betti d'un ordre donné h est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants de degré h: l'élément différentiel d'un tel invariant est une forme différentielle extérieure invariante par G. Elle est complètement déterminée par la valeur qu'elle prend quand, dans ses coefficients, on donne aux coordonnées x_k les valeurs qu'elles ont au point-origine: on obtient alors une forme extérieure invariante par le groupe des rotations.

Comme le groupe des rotations contient ici la symétrie par rapport au point-origine et que cette symétrie change de signe les variables X_k et $\overline{X}_k$, il ne peut exister aucun invariant intégral d'ordre impair.

Théorème I. *Les nombres de Betti d'ordre impair de la quadrique complexe sont tous nuls.*

D'une manière plus précise, le groupe des rotations comprenant la transformation

$$X'_k = e^{i\theta} X_k, \qquad \overline{X}'_k = e^{-i\theta} \overline{X}_k,$$

toute forme extérieure invariante doit contenir dans chacun de ses termes autant de variables X_k que de variables $\overline{X}_k$, ce qui entraîne la parité du degré.

5. Le groupe des rotations étant un groupe linéaire portant sur les n variables *complexes* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, les nombres de Betti d'ordre pair sont tous positifs [4]). La recherche des formes extérieures de degré $2h$ invariantes par g revient à la détermination des groupes linéaires *irréductibles* dans lesquels se décompose éventuellement le groupe linéaire qui indique comment le groupe orthogonal transforme entre elles les coordonnées plückeriennes

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_h} = [X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_h}]$$

d'un élément plan à h dimensions complexes issu du point-origine. Chacun de ces groupes irréductibles, portant par exemple

---

[3]) *E. Cartan,* Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (Annales Soc. pol. Math., 8, 1929, p. 110–125).

[4]) Cfr. les N^{os} 30–31 du mémoire cité [3]), p. 203–204.

sur des variables $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, combinaisons linéaires des $p_{i_1 i_2 \ldots i_h}$, laisse invariante une forme d'Hermite définie positive, qu'on peut supposer être $u_1 \bar{u}_1 + \bar{u}_2 u_2 + \ldots + u_\nu \bar{u}_\nu$, et il suffit alors de remplacer les u_h par leurs valeurs et de regarder les produits $u_k \bar{u}_h$ comme des produits *extérieurs* pour avoir une des formes extérieures invariantes cherchées.

Ici les choses sont extrêmement simples. Pour $h \neq \frac{n}{2}$ le groupe orthogonal opérant sur les $p_{i_1 i_2 \ldots i_h}$ est irréductible, d'où le théorème:

Théorème II. *Le nombre de Betti d'ordre $2h \neq n$ de la quadrique complexe est égal à 1.*

Si n est pair, le groupe orthogonal opérant sur les $p_{i_1 i_2 \ldots i_{\frac{n}{2}}}$ est *réductible.* Les quantités

$$q_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} = p_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} + \varepsilon p_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n},$$

où $(i_1, i_2 \ldots i_n)$ désigne une permutation *paire* des indices $1, 2, \ldots, n$, et où $\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}$, sont au nombre de $\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}$ indépendantes: on a en effet

$$q_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n} = p_{i_{\frac{n}{2}+1} \ldots \ldots i_n} + (-1)^{\frac{n}{2}} \varepsilon p_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon} q_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}}.$$

Le groupe orthogonal se décompose ainsi en deux groupes irréductibles non équivalents, l'un portant sur les variables $q_{i_1 \ldots i_{\frac{n}{2}}}$, l'autre sur des variables analogues provenant du changement de ε en $-\varepsilon$, d'où le

Théorème III. *Le nombre de Betti d'ordre n (n pair) est égal à 2.*

6. La forme extérieure de degré 2 invariante par g est manifestement

$$[X_1 \bar{X}_1] + [X_2 \bar{X}_2] + \ldots + [X_n \bar{X}_n]; \tag{7}$$

en l'élevant à la puissance $h \neq \frac{n}{2}$, on a la forme extérieure invariante de degré $2h$.

Si $h=\frac{n}{2}$, on obtient, outre la forme précédente élevée à la puissance h, la forme

$$\sum\left[\left(X_{i_1\ldots i_{\frac{n}{2}}}+\varepsilon X_{i_{\frac{n}{2}+1}\ldots\ldots i_n}\right)\left(\overline{X}_{i_1\ldots i_{\frac{n}{2}}}+\overline{\varepsilon}\,\overline{X}_{i_{\frac{n}{2}+1}\ldots\ldots i_n}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(X_{i_1\ldots i_{\frac{n}{2}}}-\varepsilon X_{i_{\frac{n}{2}+1}\ldots\ldots i_n}\right)\left(\overline{X}_{i_1\ldots i_{\frac{n}{2}}}-\overline{\varepsilon}\,\overline{X}_{i_{\frac{n}{2}+1}\ldots\ldots i_n}\right)\right].$$

A un facteur constant près, c'est la forme

$$\sum\left[X_{i_1}X_{i_2}\ldots X_{i_{\frac{n}{2}}}\overline{X}_{i_{\frac{n}{2}+1}}\ldots\overline{X}_{i_n}\right], \tag{8}$$

la somme étant étendue à tous les couples de combinaisons $(i_1\ldots i_{\frac{n}{2}})$, $(i_{\frac{n}{2}+1}\ldots\ldots i_n)$ tels que la permutation $(i_1\, i_2\ldots i_n)$ soit paire. On peut encore l'obtenir en remplaçant dans $[X_1\, X_2\ldots X_n]$, de toutes les manières possibles, $\frac{n}{2}$ des facteurs par leurs complexes conjugués et faisant la somme de tous les produits ainsi obtenus.

Les invariants intégraux correspondant aux formes (7) et (8), considérés au point-origine, se déduisent de ces formes en y remplaçant X_k par dx_k ; nous verrons plus loin leur expression complète.

7. Les résultats qui viennent d'être obtenus sur les nombres de Betti de (Q) sont en accord avec un théorème important de S. Lefschetz [5]) qui, de son côté, si on admettait le théorème I, permettrait de les retrouver. Ce théorème donne le nombre *algébrique* des points invariants par une transformation biunivoque d'un espace clos à un nombre pair $2n$ de dimensions, lorsque cette transformation peut se relier d'une manière continue à la transformation identique. Dans le cas particulier où l'espace est *analytique complexe*, la position d'un point étant définie par n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et où la transformation est *analytique* par rapport aux x_κ, *le nombre des points invariants, supposés isolés, est égal à la différence entre la somme des nombres de Betti d'ordre pair et la somme des nombres de Betti*

---

[5]) *S. Lefschetz,* Complexes and Manifolds (Trans. Math. Am. Soc., 28, 1926, p. 1—49); On Transformations of closed Sets (Annals of Math., 31, 1930, p. 271—280).

d'ordre impair. Ici, d'après le théorème I, il n'y a à considérer que la somme des nombres de Betti d'ordre pair qui, en tenant compte des nombres de Betti d'ordre zéro et d'ordre n, égaux chacun à 1, est égale à $n+1$ pour n impair et $n+2$ pour n pair.

Or considérons une transformation arbitraire du groupe G, réductible, comme on sait, à

$$\left.\begin{aligned} x'_{2k-1} &= x_{2k-1} \cos \alpha_k - x_{2k} \sin \alpha_k , \\ x'_{2k} &= x_{2k-1} \sin \alpha_k + x_{2k} \cos \alpha_k \end{aligned}\right. \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Si n est impair, on a $x'_{n+1} = x_{n+1}$ et les points invariants sont ceux dont toutes les coordonnées sont nulles sauf $x_{2k-1} = 1$, $x_{2k} = \pm i$: ils sont effectivement au nombre de $n+1$; si n est pair, ce nombre s'élève à $n+2$.

Si, admettant le théorème I et s'appuyant sur la propriété des nombres de Betti d'ordre pair d'être tous positifs, on utilisait le théorème de Lefschetz, on retrouverait immédiatemet les résultats des théorèmes II et III: le seul nombre de Betti égal à 2 ne peut être en effet que le nombre d'ordre moyen n.

III. La base des homologies de la quadrique complexe.

8. Etant données, dans un espace clos *orienté* à ν dimensions réelles, deux variétés fermées orientées V et W, à h et $\nu-h$ dimensions, on définit en *Analysis situs* [6]) le nombre (algébrique) des points d'intersection de ces deux variétés, qu'on désigne par le symbole $V.\,W$. Il ne change pas quand on remplace V et W par des variétés *homologues* (avec division) V' et W'.

On démontre d'autre part que si p est la valeur commune des nombres de Betti d'ordres h et $\nu-h$, on peut trouver p variétés fermées orientées à h dimensions $V_1, \ldots, V_p$, et p variétés fermées orientées à $\nu-h$ dimensions $W_1, \ldots, W_p$ de telle sorte que le déterminant des nombres $V_i\,.\,W_j$ soit égal à ± 1. Ces variétés constituent, les p premières une base pour les homologies d'ordre h, les p dernières une base pour les homolo-

[6]) Voir, par exemple, *G. de Rham*, Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (J. Math. pures et appl., 10, 1931, p. 138 et suivantes).

gies d'ordre $\nu-h$. Toute variété fermée orientée V á h dimensions est homologue (avec division) à une somme de multiples entiers, positifs, nuls ou négatifs, de $V_1, V_2, \ldots, V_p$:

$$V \backsim m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots + m_p V_p :$$

cela signifie en particulier que si W est une variété fermée orientée quelconque à $\nu-h$ dimensions, on a

$$V \,.\, W = m_1 V_1 \,.\, W + m_2 V_2 \,.\, W + \ldots + m_p V_p \,.\, W \,.$$

Si donc on trouve $2q$ variétés fermées orientées V_i' et W_j' à h et $\nu-h$ dimensions, telles que le déterminant $| V_i' . W_j' |$ ne soit pas nul, c'est que le nombre de Betti d'ordre h est au moins égal à q.

9. Un cas important est celui où l'espace est analytique complexe et où les variétés V et W sont elles-mêmes définies par des relations analytiques entre les coordonnées complexes. L'espace, ainsi que chacune des variétés analytiques fermées qu'il contient, admet alors une *orientation naturelle,* indépendante de toute transformation *analytique* effectuée sur les coordonnées. Cette orientation sera définie par exemple en regardant comme direct en un point le $(2n)$ — èdre obtenu en construisant les $2n$ vecteurs

$$\vec{e}_1, \vec{\eta}_1, \vec{e}_2, \vec{\eta}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{\eta}_n,$$

les vecteurs $\vec{e}_k$ et $\vec{\eta}_k$ étant tangents respectivement aux lignes obtenues en faisant varier la seule coordonnée x_k et en lui donnant respectivement un accroissement réel et positif et un accroissement purement imaginaire positif.

On démontre [7]) que *si deux variétés analytiques fermées à 2h et 2n—2h dimensions réelles sont orientées naturellement et n'ont que des points d'intersection isolés, tous ces points doivent être comptés positivement dans l'intersection.*

C'est ce qui se passera, à l'intérieur de la quadrique complexe orientée naturellement, pour deux variétés *algébriques* à h et $n-h$ dimensions complexes plongées dans (Q).

10. Ces théorèmes rappelés, il est très facile de trouver, pour les homologies de (Q), une base formée de variétés *algébriques.*

---

[7]) Voir *L. van der Waerden,* Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie (Math. Ann., 102, 1929, p. 337—362).

Soit $h < \frac{n}{2}$; nous prendrons pour base des homologies d'ordre $2h$ une variété plane à h dimensions complexes $A^{(2h)}$ située tout entière dans (Q); nous prendrons pour base des homologies d'ordre $2n-2h$ la section $A^{(2n-2h)}$ de (Q) par une variété plane à $n-h+1$ dimensions complexes. Si ces variétés algébriques sont orientées naturellement, on aura en effet

$$A^{(2h)} . A^{(2n-2h)} = 1 .$$

Le problème est ainsi complètement résolu pour n impair.

Soit maintenant n pair et $h = \frac{n}{2}$. On sait que (Q) admet alors deux familles continues distinctes de variétés planes génératrices à $\frac{n}{2}$ dimensions complexes. Posons pour un instant

$$x_1 + ix_2 = u_1 , \quad x_3 + ix_4 = u_2, \ldots , x_{n+1} + ix_{n+2} = u_{\frac{n+2}{2}} ,$$

$$x_1 - ix_2 = v_1 , \quad x_3 - ix_4 = v_2, \ldots , x_{n+1} - ix_{n+2} = v_{\frac{n+2}{2}} ,$$

de sorte que l'équation de (Q) se réduise à

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_{\frac{n+2}{2}} v_{\frac{n+2}{2}} = 0 .$$

Désignons respectivement par $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ et $C^{(n)}$ les variétés

$$u_1 = 0 , \quad u_2 = 0 , \ldots , u_{\frac{n}{2}} = 0 , \quad u_{\frac{n+2}{2}} = 0;$$

$$u_1 = 0 , \quad u_2 = 0 , \ldots , u_{\frac{n}{2}} = 0 , \quad v_{\frac{n+2}{2}} = 0;$$

$$v_1 = 0 , \quad v_2 = 0 , \ldots , v_{\frac{n}{2}} = 0 , \quad v_{\frac{n+2}{2}} = 0 .$$

On a manifestement

$$A^{(n)} . C^{(n)} = 0 , \quad B^{(n)} . C^{(n)} = 1 ,$$

égalités qui prouvent que $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ ne sont pas homologues. Or on démontre facilement que la variété qui se déduit de $A^{(n)}$ en remplaçant un nombre pair d'équations $u_k = 0$ par les équations correspondantes $v_k = 0$ appartient à la même famille continue que $A^{(n)}$. Si donc $\frac{n}{2}$ est pair, $C^{(n)}$ est homologue à $B^{(n)}$ et l'on a

$$A^{(n)} . B^{(n)} = 0 , \quad A^{(n)} . A^{(n)} = B^{(n)} . B^{(n)} = 1 .$$

Si au contraire n est impair, $C^{(n)}$ est homologue à $A^{(n)}$ et l'on a

$$A^{(n)} . B^{(n)} = 1 , \quad A^{(n)} . A^{(n)} = B^{(n)} . B^{(n)} = 0 .$$

Dans les deux cas, $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ constituent une base pour les homologies d'ordre n, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A^{(n)} . A^{(n)} & A^{(n)} . B^{(n)} \\ B^{(n)} . A^{(n)} & B^{(n)} . B^{(n)} \end{vmatrix}$$

étant égal à $(-1)^{\frac{n}{2}}$.

En revenant aux notations initiales, *nous pouvons prendre pour bases $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ des homologies d'ordre n les variétés planes*

$$(9) \quad \begin{cases} A^{(n)}: & x_1 + i x_2 = \ldots = x_{n-3} + i x_{n-2} = x_{n-1} + i x_n = \\ & = x_{n+1} + i x_{n+2} = 0 , \\ B^{(n)}: & x_1 - i x_2 = \ldots = x_{n-3} - i x_{n-2} = x_{n-1} + (-1)^{\frac{n}{2}} i x_n = \\ & = x_{n+1} + i x_{n+2} = 0 . \end{cases}$$

10. Toute variété algébrique V à h dimensions complexes plongée dans la quadrique (Q) satisfait à une homologie [8])

$$V \sim m A^{(2h)} \qquad (2h \neq n);$$

l'entier *positif* m, *ordre* de la variété, est égal au nombre des points communs à V et $A^{(2n-2h)}$. Si $h = \frac{n}{2}$, on a

$$V \sim m A^{(n)} + \mu B^{(n)};$$

la variété a *deux ordres* m et μ; si $\frac{n}{2}$ est pair, on a

$$m = V . A^{(n)}, \quad \mu = V . B^{(n)};$$

si $\frac{n}{2}$ est impair, on a

$$m = V . B^{(n)}, \quad \mu = V . A^{(n)}.$$

Si V et W sont deux variétés algébriques respectivement

[8]) Nous supposerons dans tout ce qui suit que toutes les variétés algébriques considérées sont orientées naturellement.

à h et $n-h$ dimensions complexes $\left(h \neq \frac{n}{2}\right)$, d'ordres respectifs m et m', le nombre de leurs points communs est mm', en vertu de l'égalité

$$V\,.\,W = mA^{(2h)}.\,m'A^{(2n-2h)} = mm'\,.$$

Si $h = \frac{n}{2}$, et si les ordres de V sont m et μ, si ceux de W sont m' et μ', on a

$$V\,.\,W = mm' + \mu\mu' \qquad \text{si } \frac{n}{2} \text{ est pair}\,,$$

$$V\,.\,W = m\mu' + \mu m' \qquad \text{si } \frac{n}{2} \text{ est impair}\,.$$

11. On peut enfin considérer l'intersection de deux variétés fermées orientées telles que la somme de leurs dimensions $2h$ et $2k$ dépasse $2n$: on la définit en *Analysis situs* comme une variété fermée orientée à $2h+2k-2n$ dimensions. Si l'on a

$$V \backsim mA^{(2h)}, \quad W \backsim m'A^{(2k)},$$

on a

$$V\,.\,W \backsim mm'A^{(2h)}.\,A^{(2k)}\,.$$

Les variétés d'intersection des variétés algébriques de base se trouvent immédiatement. On a, en supposant d'abord $h+k \neq \frac{3n}{2}$,

$$A^{(2h)}.\,A^{(2k)} \backsim A^{(2h+2k-2n)}, \tag{10}$$

sauf si $h > \frac{n}{2}$, $k > \frac{n}{2}$, $h+k < \frac{3n}{2}$, auquel cas on a

$$A^{(2h)}.\,A^{(2k)} \backsim 2A^{(2h+2k-2n)} \tag{11}$$

On démontre cette dernière homologie en prouvant que la variété $A^{(4n-2h-2k)}$ coupe en deux points la variété commune à $A^{(2h)}$ et $A^{(2k)}$: il faut en effet chercher les points de (Q) qui sont communs à trois variétés planes à $h+1$, $k+1$ et $2n-h-k+1$ dimensions complexes, c'est à dire qui sont sur une droite donnée.

Si n est pair, on démontre facilement les formules

$$(12)\quad \begin{cases} A^{(2h)}.\, A^{(2n-2h)} \backsim A^{(n)} + B^{(n)} & \left(h > \dfrac{n}{2}\right), \\[2ex] A^{(n)}.\, A^{(2h)} \backsim B^{(n)}.\, A^{(2h)} \backsim A^{(2h-n)} & \left(h > \dfrac{n}{2}\right). \end{cases}$$

Toutes ces formules permettent de calculer l'ordre ou les ordres de l'intersection de deux variétés algébriques plongées dans la quadrique, quand on connaît les ordres de ces variétés.

IV. Applications des théorèmes de G. de Rham.

12. On doit à G. de Rham [9]) des théorèmes remarquables dont nous allons indiquer l'énoncé.

Dans un espace clos orienté à ν dimensions, on peut associer à chaque variété fermée orientée V à $\nu-h$ dimensions une intégrale de différentielle exacte $\int\omega$ de dégré h, de telle sorte que cette intégrale étendue à une variété fermée orientée quelconque W à h dimensions soit égale à $V.W$. De plus, si la somme des dimensions $\nu-h$, $\nu-k$ de deux variétés fermées orientées V et V_1 est supérieure à ν, le produit extérieur $[\omega_1\, \omega]$ des éléments d'intégrale associés à V et V_1 est l'élement de l'intégrale $\int\omega_1\omega$ associée à la variété d'intersection $V.V_1$.

A l'espace total est associée la forme de degré 0 qui se réduit à la constante 1; à la variété à 0 dimension constituée par un point est associée une intégrale $\int\omega$ de degré n qui, étendue à tout l'espace orienté, a pour valeur 1.

Ici nous pouvons prendre pour les intégrales associées aux différentes variétés de base des homologies les invariants intégraux dont nous avons signalé l'existence, chacun d'eux étant multiplié par un facteur constant convenable.

Prenons d'abord $h=2$; nous avons un invariant intégral dont l'élément différentiel se réduit, au point-origine, à

$$dx_1 d\bar{x}_1 + dx_2 d\bar{x}_2 + \ldots + dx_n\, d\bar{x}_n.$$

Cet élément différentiel est

$$\omega = dx_1 d\bar{x}_1 + dx_2 d\bar{x}_2 + \ldots + dx_{n+2} d\bar{x}_{n+2}.$$

[9]) Voir le mémoire cité [6]), Chap. III, p. 165—190.

Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer

1°. qu'il est effectivement invariant par toute transformation de G;

2°. qu'il ne change pas quand on multiplie les coordonnées normales par un même facteur $e^{i\theta}$, constant ou variable [10]).

En posant $x_k = \xi_k + i\eta_k$, on a, à un facteur constant près,

$$\omega = d\xi_1 d\eta_1 + d\xi_2 d\eta_2 + \ldots + d\xi_{n+2} d\eta_{n+2} .$$

Calculons la valeur de l'intégrale $\int\omega$ étendue à la droite $A^{(2)}$ d'équations

$$x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = x_5 = x_6 = \ldots = x_{n+2} = 0 .$$

Si l'on suppose, ce qui est permis, x_3 réel et positif, on aura

$$\xi_2 = -\eta_1 , \quad \eta_2 = \xi_1 , \quad \xi_4 = 0 , \quad \eta_4 = \xi_3 , \quad \xi_5 = \eta_5 = \ldots = 0 ,$$

avec

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_3^2 = 1 .$$

Tout point de $A^{(2)}$ sera défini biunivoquement par les coordonnées rectangulaires ξ_1, η_1 d'un point intérieur au cercle-unité.

On a d'autre part

$$\omega = 2 d\xi_1 \, d\eta_1 ,$$

d'où

$$\int\omega = 2\pi .$$

Nous prendrons donc comme invariant intégral associé à $A^{(2n-2)}$ l'intégrale

$$(13) \qquad \int\Omega = \frac{1}{2\pi}\int d\xi_1 d\eta_1 + d\xi_2 d\eta_2 + \ldots + d\xi_{n+2} d\eta_{n+2} = \frac{i}{4\pi}\int dx_1 d\bar{x}_1 + \ldots + dx_{n+2} d\bar{x}_{n+2} .$$

Il en résulte immédiatement, d'après les relations (10) et (11), que *l'invariant intégral associé à $A^{(2n-2h)}$, pour $h \neq \frac{n}{2}$, est $\int\Omega^h$ si $h < \frac{n}{2}$, et $\frac{1}{2}\int\Omega^h$ si $h > \frac{n}{2}$.*

---

[10]) Voir, par exemple, *E. Cartan*, loc. cit. [3]), № 214, p. 287—288.

Pour $h=\frac{n}{2}$ la formule (12) montre que *l'invariant intégral* $\int \Omega^{\frac{n}{2}}$ *est associé à la variété* $A^{(n)}+B^{(n)}$.

13. Il nous reste à déterminer l'invariant intégral associé à $A^{(n)}-B^{(n)}$. Partons pour cela de la forme (8). Considérons la forme différentielle

$$\varpi=\sum(x_{i_{n+1}}\overline{x}_{i_{n+2}}-x_{i_{n+2}}\overline{x}_{i_{n+1}})\,\{dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_n}\},$$

la somme étant étendue à tous les couples de combinaisons $(i_1\,i_2\ldots i_n)$, $(i_{n+1}\,i_{n+2})$, tels que la permutation $(i_1\,i_2\ldots i_n)$ soit paire; on a désigné par le symbole $\{dx_{i_1}\,dx_{i_2}\ldots dx_{i_n}\}$ la somme de tous les produits extérieurs obtenus en remplaçant $\frac{n}{2}$ des différentielles par leurs conjuguées. Au point-origine, la forme ϖ se réduit, à un facteur près, à la forme (8). Il est facile de voir:

1° qu'elle est invariante par toute transformation de G;

2° qu'elle ne change pas si on multiplie toutes les coordonnées, supposées normales, par un même facteur $e^{i\theta}$.

L'intégrale $\int\varpi$ est donc associée à une variété fermée orientée d'ordre n. Etendue à $A^{(n)}$ et à $B^{(n)}$, elle a des valeurs égales et opposées, car d'après (9) on passe de l'une des intégrales à l'autre en donnant à $x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}$ les mêmes valeurs, mais en changeant de signe un nombre impair de coordonnées $x_2, x_4, \ldots$, à savoir $x_2, x_4, \ldots, x_{n-2}$ pour $\frac{n}{2}$ pair, et $x_2, x_4, \ldots, x_n$ pour $\frac{n}{2}$ impair. Il résulte de là que l'intégrale $\int\varpi$ est associée à un multiple de $A^{(n)}-B^{(n)}$.

Pour avoir l'invariant intégral $\int\Pi$ associé à $A^{(n)}-B^{(n)}$, il faut multiplier ϖ par un facteur tel que l'intégrale obtenue étendue à $A^{(n)}$ soit égale à

$$A^{(n)}.(A^{(n)}-B^{(n)})=(-1)^{\frac{n}{2}};$$

autrement dit il faut que l'intégrale $\int\Pi$ et l'intégrale $\int(-1)^{\frac{n}{2}}\Omega^{\frac{n}{2}}$ aient la même valeur, étendues à $A^{(n)}$.

Si nous nous reportons au voisinage d'un point de (Q), par exemple au voisinage du point-origine, nous avons

$$\Omega = \frac{i}{2\pi}[dx_1 d\bar{x}_1 + dx_3 d\bar{x}_3 + \ldots + dx_{n-1} d\bar{x}_{n-1}],$$

$$\Omega^{\frac{n}{2}} = i^{\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dx_1 d\bar{x}_1 dx_3 d\bar{x}_3 \ldots dx_{n-1} d\bar{x}_{n-1}.$$

D'autre part on a, dans les mêmes conditions,

$$\varpi = -2i\,\{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\} = -2i\,(dx_1\, d\bar{x}_2 + d\bar{x}_1\, dx_2)\,(dx_3 d\bar{x}_4 + \\ + d\bar{x}_3\, dx_4) \ldots$$

$$= (-2i)^{\frac{n}{2}+1} dx_1 d\bar{x}_1\, dx_3\, d\bar{x}_3 \ldots dx_{n-1}\, d\bar{x}_{n-1}.$$

Nous prendrons donc

$$(14) \qquad \Pi = \frac{i}{2} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum (x_{i_{n+1}} \bar{x}_{i_{n+2}} - x_{i_{n+2}} \bar{x}_{i_{n+1}})\,\{dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_n}\},$$

et $\int \Pi$ est l'invariant intégral associé à $A^{(n)} - B^{(n)}$.

14. Nous allons déduire des résultats précédents des conséquences curieuses. D'après ce qui a été vu au *n*⁰ 12, l'invariant intégral associé á $A^{(n)}$ est $\frac{1}{2}\int \Omega^n$, de sorte que l'intégrale $\int \Omega^n$, étendue à toute la quadrique orientée, est égale à 2. Nous pouvons supposer que la coordonnée normale x_{n+2} d'un point de (Q) est réelle et positive, de sorte que les relations (3) conduisent aux formules

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_{n+1}^2 \leqslant 1,$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_{n+1}^2 = 1,$$

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_{n+1} \eta_{n+1} = 0:$$

il y a une correspondance biunivoque entre les points de (Q) et les couples de points réels (ξ), (η) de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, le point (η) décrivant la surface de l'hypersphère de rayon 1 et le point (ξ) l'intérieur de cette hypersphère, de telle sorte que ces deux points soient constamment vus de l'origine sous un angle droit. Par une transformation de G, les points (ξ) et (η) subissent une même rotation, et d'autre part l'élément d'intégrale Ω^n est invariant: on peut donc, pour calculer l'intégrale, se placer au voisinage du point particulier $(\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0\,, \quad \eta_{n+1} = 1)$ de l'hypersphère; comme on a alors $\xi_{n+1} = 0$, et

$$\Omega^n = \frac{n!}{(2\pi)^n}\, d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \ldots d\xi_n\, d\eta_n\,,$$

on obtient le produit par $\frac{n!}{(2\pi)^n}$ du volume V_n de hypersphère de rayon 1 dans l'espace à n dimensions, hyperspère décrite par le point (ξ), par l'élément de surface de l'hypersphère de l'espace à $(n+1)$ dimensions. Comme la surface totale de cette hypersphère est égale à $(n+1)\ V_{n+1}$, on a

$$\int \Omega^n = \frac{(n+1)!}{(2\pi)^n}\, V_n\, V_{n+1} = 2\,,$$

d'où

$$V_n\, V_{n+1} = \frac{2\,(2\pi)^n}{(n+1)!}\,.$$

Cette formule permet de calculer V_n de proche en proche en partant des valeurs $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$; en se servant de la relation évidente

$$\frac{V_{n+1}}{V_{n-1}} = \frac{2\pi}{n+1}\,,$$

on retrouve les formules connues

$$(15) \qquad V_{2p+1} = \frac{2\,(2\pi)^p}{3\,.\,5\ldots(2p+1)}\,, \quad V_{2p} = \frac{(2\pi)^p}{2\,.\,4\ldots 2p} = \frac{\pi^p}{p!}\,.$$

15. Comme autre application, considérons une quadrique *réelle* non dégénérée Σ à n dimensions: c'est une variété fermée plongée dans la quadrique complexe (Q) correspondante. Si n est impair, cette quadrique réelle, *dans le cas où elle est orientable* , est homologue à zéro; elle n'est du reste orientable que si la premier membre de son équation est réductible à une somme de $n+1$ carrés positifs et 1 carré négatif.

Si n est pair, la quadrique réelle est toujours orientable parce que, plongée dans l'espace projectif réel à un nombre impair de dimensions, *qui est orientable*, elle est *bilatère*, puisqu'elle partage cet espace en deux régions distinctes.

Comme la quadrique réelle peut, au besoin par une homographie, être obtenue en donnant à un certain nombre des coordonnées normales x_k des valeurs réelles et aux autres des valeurs purement imaginaires, la forme Ω est identiquement nulle sur cette quadrique; l'intégrale $\int \Omega^{\frac{n}{2}}$ étendue à la quadrique réelle est donc nulle, autrement dit on a

$$A^{(n)}.\Sigma + B^{(n)}.\Sigma = 0,$$

d'où

$$\Sigma \backsim m\,(A^{(n)} - B^{(n)}).$$

On a la valeur de m en cherchant les points communs à $A^{(n)}$ et Σ. Prenons l'équation de Σ sous la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{r+1}^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_{s+1}^2 = 0 \quad (r + s = n),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ sont réels et où l'on a posé

$$x_{r+k+1} = iy_k.$$

Comme les équations de $A^{(n)}$ sont

$$x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = \ldots = x_{n+1} + ix_{n+2} = 0,$$

on voit que si r et s sont impairs, les deux variétés n'ont aucun point commun; si au contraire r et s sont pairs, elles ont un point commun et un seul.

Théorème. — *Toute quadrique réelle obtenue en annulant une forme quadratique réductible à un nombre pair de carrés positifs et à un nombre pair de carrés négatifs est homologue à zéro à l'intérieur de la quadrique complexe correspondante. Si la forme quadratique est réductible à un nombre impair de carrés positifs et à un nombre impair de carrés négatifs, la quadrique réelle est, à l'intérieur de la quadrique complexe correspondante, homologue à la différence de deux variétés planes génératrices de systèmes différents de cette quadrique complexe.*

16. Plaçons-nous dans le dernier cas et prenons l'équation de Σ sous la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2p}^2 - y_1^2 - \ldots - y_{2q}^2 + x_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 = 0$$

$$(p+q=\frac{n}{2}, \quad p \geqslant q).$$

On a, en coordonnées normales,

$$(16) \qquad \begin{aligned} x_1^2+\ldots+x_{2p}^2+x_{n+1}^2 &= 1, \\ y_1^2+\ldots+y_{2q}^2+y_{n+2}^2 &= 1; \end{aligned}$$

il y a donc une correspondance entre les points de Σ et les couples de points des surfaces de deux hypersphères de rayon 1 dans les espaces à $2p+1$ et $2q+1$ dimensions; mais il faut remarquer qu'un point de Σ correspond à deux couples de points diamétralement opposés des deux hypersurfaces.

Plaçons-nous au point ($x_1 = \ldots = x_{2p} = 0$, $x_{n+1} = 1$; $y_1 = \ldots = y_{2q} = 0$, $y_{n+2} = 1$). Nous orienterons Σ en convenant de regarder comme positif l'élément d'intégrale $dx_1 \ldots dx_{2p} dy_1 \ldots \ldots dy_{2q}$ au voisinage de ce point. Les procédés de *l'Analysis situs* montrent qu'on a alors

$$\Sigma \backsim (-1)^{\frac{n}{2}} (A^{(n)} - B^{(n)}).$$

Cette formule montre que l'intégrale $\int \Pi$ étendue à Σ est égale à 2; si donc on l'étend à tous les systèmes de valeurs satisfaisant aux relations (16), on doit trouver 4. Or au voisinage du point $(0, \ldots, 0, 1)$ de la première hypersphère et du point $(0, \ldots, 0, 1)$ de la seconde, on a, d'après (14),

$$\Pi = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \{ dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \};$$

en remplaçant $dx_{2p+1}, \ldots, dx_n$ par $i dy_1, \ldots, i dy_{2q}$, nous trouvons

$$\{ dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \} = (-1)^q \, [C_{2p}^{p-q} - C_{2q}^1 C_{2p}^{p-q+1} + C_{2q}^2 C_{2p}^{p-q+2} + \ldots$$
$$\ldots + C_{2p}^{p+q}] \, [dx_1 \ldots dx_{2p}\, dy_1 \ldots dy_{2q}].$$

On a donc, en remarquant que les surfaces des deux hypersphères sont $(2p+1) V_{2p+1}$ et $(2q+1) V_{2q+1}$, la formule

$$(-1)^q \frac{(p+q)!}{(4\pi)^{p+q}} [C_{2p}^{p-q} - C_{2q}^1 C_{2p}^{p-q+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{2p}^{p+q}] \, (2p+1) \, V_{2p+1} \, (2q+1) \, V_{2q+1} = 4.$$

Appliquons maintenant la première formule (15); nous en déduisons

$$(17)\qquad \begin{aligned} & C_{2p}^{p-q} - C_{2q}^{1}\, C_{2p}^{p-q+1} + \ldots + C_{2p}^{p+q} = \\ & = (-1)^{q}\, 2^{p+q}\, \frac{1.3\ldots(2p-1)\times 1.3\ldots(2q-1)}{(p+q)!}\,. \end{aligned}$$

Cette formule arithmétique, où on a supposé $p \geqslant q$, peut se vérifier de la manière suivante. Le premier membre est le coefficient de t^{p+q} dans le développement du polynome $(t+1)^{2p}(t-1)^{2q}$, ou encore le résidu relatif au pôle $t=0$ de la fonction $\dfrac{(t+1)^{2p}(t-1)^{2q}}{t^{p+q+1}}$. En calculant ce résidu au moyen d'une intégrale étendue au cercle de rayon 1 de centre $t=0$, on trouve qu'il est égal à

$$(-1)^{q}\, 2^{p+q}\, \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, \sin^{2q}\theta\, d\theta\,.$$

On en déduit donc, par comparaison avec (17), la formule connue

$$(18)\qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta\, \sin^{2q}\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\, \frac{1.3\ldots(2p-1)\times 1.3\ldots(2q-1)}{2.4\ldots(2p+2q)}\,.$$

V. Remarques finales.

17. Le cas $n=6$ est particulièrement intéressant, car il y a correspondance biunivoque entre les points de (Q) et les droites complexes de l'espace à trois dimensions. La variété $A^{(2)}$ correspond au faisceau plan de droites, la variété $A^{(6)}$ au complexe linéaire, les variétés $A^{(4)}$ et $B^{(4)}$ aux congruences des droites issues d'un point fixe et des droites situés dans un plan fixe.

On peut encore remarquer que la quadrique complexe (Q) est homéomorphe à la variété des droites orientées *réelles* de l'espace projectif à $n+1$ dimensions. En effet si l'on regarde dans l'équation (1) les x_k comme des coordonnées réelles, tout point M de (Q) est imaginaire et détermine univoquement la droite réelle Δ qui le joint à son conjugué; on *oriente* la droite Δ en choisissant celui des deux points imaginaires où elle coupe

(Q). Les variétés $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$, pour n pair, correspondent aux deux espèces de *congruences paratactiques* orientdes de l'espace elliptique à un nombre impair de dimensions. Aux variétés algébriques de (Q) correspondent des classes spéciales de variétés réglées algébriques.

On peut enfin remarquer que la quadrique complexe de l'espace à quatre dimensions est homéomorphe à la variété des *cycles* réels de l'espase conforme à trois dimensions.

Sur les produits de deux systèmes de vecteurs glissants.

Par

ANTOINE BILIMOVITCH.

L'algèbre du système de vecteurs glissants se développant dans les directions différentes, dont il faut noter la direction formelle de la généralisation de la théorie des quaternions (Clifford) et la direction géométrique (Ball, Kotelnikoff, Study, v. Mises), n'a pas encore reçu jusqu'à présent de forme systématique définitivement établie.

Dans ce qui suit nous voulons traiter la notion fondamentale de cette algèbre, notamment le produit de deux systèmes de vecteurs glissants. Nous établissons les notions des produits scalaire, vectoriel et diadique sous une forme nouvelle, généralisée, dont on peut tirer, sous certaines conditions, les formes spéciales de ces produits que nous rencontrons chez les auteurs différents. En discutant la nature géométrique du produit diadique, nous utilisons celles des interprétations géométriques que nous avons données dans notre travail: „Fondements géométriques de la théorie des diades. I. Diade et affineur" [1]).

Il est bien connu que l'on peut caractériser chaque système de vecteurs glissants par deux vecteurs: résultante générale $\vec{R}$ et moment résultant $\vec{M}^{(0)}$ pour le pôle déterminé, soit le point

[1]) Геометријске Основе рачуна са диадама. I. Диада и Афинор. Београд. 1930.

O. Quand on change le pôle, la résultante générale reste telle quelle, tandis que le moment résultant reçoit en général une valeur nouvelle définie par la formule

$$\vec{M}^{(A)} = \vec{M}^{(o)} + [\vec{R}, \vec{r}],$$

où $\vec{r}$ est le vecteur du point A par rapport au point O; les parenthèses [ ] indiquent le produit vectoriel de deux vecteurs.

Nous voulons désigner le système de vecteurs glissants rapporté au pôle O par $S^{(o)}$ ou par $\vec{R}, \vec{M}^{(o)}$.

On sait qu'il existe trois produits fondamentaux de deux vecteurs. Ces produits, — scalaire, vectoriel et diadique — nous allons les désigner par

$$(\vec{A}, \vec{B}), \qquad [\vec{A}, \vec{B}], \qquad \{\vec{A}, \vec{B}\}.$$

A côté de ces produits fondamentaux on peut déduire les autres produits dérivatifs qui sont les fonctions linéaires des produits fondamentaux. Par exemple, nous avons: le produit algébrique représentant l'affineur de la forme suivante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \frac{1}{2}(\{\vec{A}, \vec{B}\} + \{\vec{B}, \vec{A}\});$$

le roteur-diade de Jaumann avec la valeur

$$A^r = \{\vec{B}, \vec{A}\} - (\vec{A}, \vec{B})\mathbf{I},$$

où $\mathbf{I}$ représente l'affineur-unité, c'est-à-dire l'affineur de la forme

$$\mathbf{I} = \{i, i\} + \{j, j\} + \{k, k\},$$

où i, j, k sont les vecteurs orthogonaux de la longueur d'unité; puis le déviateur de Schouten

$$\vec{A} \times \vec{B} - \frac{1}{3}(\vec{A}, \vec{B})\mathbf{I}.$$

L'axiateur du diade peut être considéré aussi comme étant le produit de deux vecteurs, parce qu'on peut écrire

$$ax\,\{\vec{A},\vec{B}\} = \frac{1}{2}\left(\{\vec{A},\vec{B}\} - \{\vec{B},\vec{A}\}\right).$$

Dans ce qui suit, si nous ne voulons pas distinguer la nature du produit de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, nous allons écrire $\vec{A}\,.\,\vec{B}$.

Soient deux systèmes de vecteurs glissants $S_1^{(o)}$ et $S_2^{(o)}$ donnés par les vecteurs

$$S_1^{(o)}\,(\vec{R}_1\,,\,\vec{M}_1^{(o)}),$$

$$S_2^{(o)}\,(\vec{R}_2\,,\,\vec{M}_2^{(o)}).$$

Nous définissons le produit

$$S_1^{(o)}\,.\,S_2^{(o)}$$

de ces systèmes, de quelque nature déterminée soient-ils, par l'ensemble de quatre produits que nous allons écrire sous la forme d'une matrice

$$\left|\begin{matrix} \vec{R}_1\,.\,\vec{R}_2\,, & \vec{R}_1\,.\,\vec{M}_2^{(o)} \\ \vec{M}_1^{(o)}\,.\,\vec{R}_2\,, & \vec{M}_1^{(o)}\,.\,\vec{M}_2^{(o)} \end{matrix}\right|,$$

où la nature de chaque produit correspondrait à celle du produit des systèmes.

Analysons les produits fondamentaux de deux systèmes: scalaire, vectoriel et diadique.

Pour le produit scalaire nous avons

$$(S_1^{(o)},\,S_2^{(o)}) = \left|\begin{matrix} (\vec{R}_1\,,\,\vec{R}_2), & (\vec{R}_1\,,\vec{M}_2^{(o)}) \\ (\vec{M}_1^{(o)},\,\vec{R}_2)\,, & (\vec{M}_1^{(o)},\,\vec{M}_2^{(o)}) \end{matrix}\right|.$$

Ainsi le produit scalaire se compose, dans le cas général, de quatre membres. Cependant on peut former de ces membres des invariants importants pour les systèmes; ces invariants peuvent être soit *absolus* soit *relatifs*. Les invariants absolus ne changent pas leur valeur avec le changement du pôle; les invariants relatifs changent en général leur valeur primitive, mais on ne peut construire la nouvelle valeur qu'en utilisant les membres du produit et le vecteur du pôle nouveau par rapport au pôle ancien, sans se servir des vecteurs séparés des systèmes-facteurs.

Pour le produit scalaire on peut indiquer deux invariants suivants:

$$i_1 = (\vec{R}_1, \vec{R}_2),$$

$$i_2 = (\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}) + (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2).$$

Il est facile de voir que ce sont des invariants absolus. D'une manière formelle, on pourrait obtenir ces invariants en utilisant l'unité ε de Clifford qui satisfait la condition $\varepsilon^2 = 0$. En représentant chaque système par la somme

$$S_1^{(o)} = \vec{R}_1 + \varepsilon \vec{M}_1^{(o)},$$

$$S_2^{(o)} = \vec{R}_2 + \varepsilon \vec{M}_2^{(o)}$$

nous avons pour le produit scalaire l'équation suivante:

$$(S_1^{(o)}, S_2^{(o)}) = (\vec{R}_1, \vec{R}_2) + \varepsilon [(\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}) + (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2)],$$

qui donne immédiatement les invariants sus-dits.

La condition $\varepsilon^2 = 0$ pour l'unité ε est un peu artificielle et il serait plus naturel de retenir le membre avec ε^2 dans le produit de Clifford.

Le système logique d'algèbre est encore plus infirmé si le produit scalaire ne se réduit qu'à l'invariant i_2, nommé le moment relatif de deux systèmes. Quand on omet le premier invariant $i_1 = (\vec{R}_1, \vec{R}_2)$, en cas de dégénération de chaque système en un seul vecteur, le produit scalaire de ces deux systèmes ne dégénère pas en produit scalaire de vecteurs, mais reste toujours égal à zéro, ce qui est contraire aux lois fondamentales de toute algèbre.

Le membre quatre dépend de la position du pôle et ne représente l'invariant ni absolu ni relatif. Outre le naturel de la constuction de la matrice du produit, c'est la raison d'analogie qui nous fait conserver ce membre, étant donné que dans les autres produits, par exemple diadique, le membre en question est nécessaire.

En cas du produit vectoriel nous avons

$$[S_1^{(o)}, S_2^{(o)}] = \left\{ \begin{matrix} [\vec{R}_1 \, , \vec{R}_2] \, , [\vec{R}_1 \, , \vec{M}_2^{(o)}] \\ [\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2] \, , [\vec{M}_1^{(o)}, \vec{M}_2^{(o)}] \end{matrix} \right\} .$$

Pour ce produit il existe aussi deux invariants dans le sens indiqué:

$$\vec{R} = [\vec{R}_1 \, , \vec{R}_2] \, ,$$

$$\vec{M}^{(o)} = \vec{R}_1 \, , \vec{M}_2^{(o)}] + [\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2] ;$$

le premier est l'invariant absolu, le second est relatif, parce que nous avons

(1) $$\vec{M}^{(A)} = \vec{M}^{(o)} + [\vec{R} \, , \vec{r}\,] \, .$$

L'ensemble de ces invariants sous condition (1) correspond à un système de vecteurs glissants. Cet ensemble représente le produit vectoriel de deux systèmes pris dans le sens de Clifford.

Nous y noterons que pour la démonstration de l'invariance relative du vecteur $\vec{M}^{(o)}$ il faut utiliser la formule suivante:

(2) $$[\,[\vec{R}_1 \, , \vec{R}_2] \, , \vec{r}\,] = [\vec{R}_1 \, [\vec{R}_2 \, , \vec{r}\,]\,] + [\,[\vec{R}_1 \, , \vec{r}\,] \, \vec{R}_2] \, .$$

Enfin, nous allons construire le produit diadique de deux systèmes par la matrice

(3) $$\{S_1^{(o)}, S_2^{(o)}\} = \left\{ \begin{matrix} \{\vec{R}_1 \, , \vec{R}_2\} \, , \{\vec{R}_1 \, , \vec{M}_2^{(o)}\} \\ \{\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2\} \, , \{\vec{M}_1^{(o)}, \vec{M}_2^{(o)}\} \end{matrix} \right\} .$$

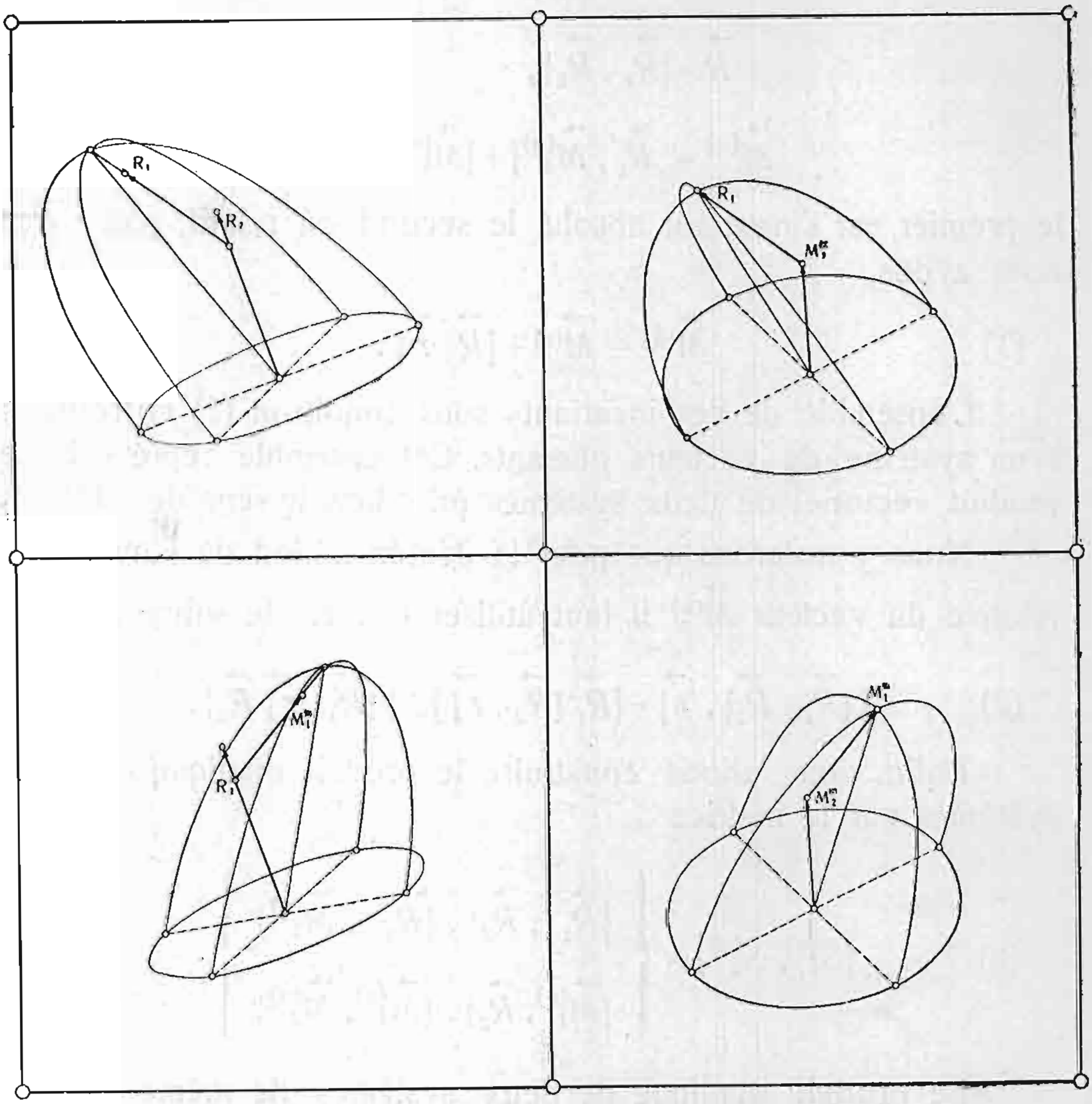
Le produit diadique de deux systèmes, de même que les produits précédents, présente une image géométrique. Ce n'est pas seulement un opérateur, mais une image complétement autonome qui, d'après les règles que nous avons indiquées (l. c.), pourrait être construite dans l'espace (fig.).

Avec la même raison que dans les cas précédents, nous pourrons former deux invariants qui seraient des membres du produit pris dans le sens de Clifford. Ce sont les invariants

$$\underline{\mathbf{A}} = \{\vec{R}_1, \vec{R}_2\},$$

$$\mathbf{A}^{(o)} = \{\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}\} + \{\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2\}.$$

Le premier invariant est absolu, c'est le diade construit sur les vecteurs $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$. Le deuxième, comme nous allons voir, représente un invariant relatif, c'est un affineur planaire.



Pour la démonstration de l'invariance de l'affineur $\mathbf{A}^{(o)}$, calculons sa valeur pour le pôle nouveau A. Alors nous aurons:

$$\mathbf{A}^{(A)} = \{\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(A)}\} + \{\vec{M}_1^{(A)}, \vec{R}_2\} =$$

$$= \mathbf{A}^{(o)} + \{\vec{R}_1 [\vec{R}_2, \vec{r}]\} + \{[\vec{R}_1, \vec{r}]\, \vec{R}_2\}.$$

Maintenant introduisons par la formule

$$\{\{\vec{A}, \vec{B}\}\,\vec{C}\} = \{\vec{A}\,[\vec{B}, \vec{C}]\} + \{[\vec{A}, \vec{C}]\,\vec{B}\}$$

analogue à (2) le produit que nous nommerons, par abréviation, le produit diadique du diade et du vecteur à droite [1]).

Alors nous aurons l'égalité

$$\mathbf{A}^{(A)} = \mathbf{A}^{(o)} + \{\{\vec{R}_1, \vec{R}_2\}\,\vec{r}\},$$

qui démontre l'invariance relative de l'affineur $\mathbf{A}^{(o)}$.

L'expression

$$\mathbf{\Delta} + \varepsilon \mathbf{A}^{(o)}$$

représente le produit diadique de deux systèmes pris dans le sens de Clifford.

Il faut considérer le produit (3) comme le produit diadique fondamental. De même que dans le cas de deux vecteurs, pour les deux systèmes on peut construire les produits dérivatifs comme les fonctions linéaires des produits diadiques différents. Par exemple la matrice

$$(4)\quad \left\|\begin{matrix} 0, & \{\vec{R}_2, \vec{R}_1\} - (\vec{R}_1, \vec{R}_2)\,\mathbf{I} \\ \{\vec{R}_2, \vec{R}_1\} - (\vec{R}_1, \vec{R}_2)\,\mathbf{I}, & \{\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}\} + \{\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2\} - [(\vec{R}_1, \vec{M}_2^{(o)}) + (\vec{M}_1^{(o)}, \vec{R}_2)]\,\mathbf{I} \end{matrix}\right\|$$

définit un produit spécial de deux systèmes. Ce produit représente un invariant. Si nous désignons les coordonnées du produit diadique fondamental par le schéma

---

[1]) Dans notre travail (l. c.) nous avons donné tous les produits fondamentaux du diade et du vecteur. Ici, ce sont les produits vectoriels de nature diadique [(58)—(65) p. 74] qui nous intéressent. Le produit, que nous avons brièvement nommé produit diadique du diade et du vecteur à droite, représente une fonction linéaire, la somme des produits (58) et (65); de telle manière on pourrait écrire:

$$\{\{\vec{A}, \vec{B}\}\,\vec{C}\} = {}^{d}[\{\vec{A}, \vec{B}\}\,\vec{C}] + {}^{d}[\vec{C}\{\underline{\vec{A}}\,\vec{B}\}] =$$

$$= \{\vec{A}\,[\vec{B}, \vec{C}]\} + \{[\vec{A}, \vec{C}]\,\vec{B}\},$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{61} & a_{62} & \ldots & a_{66} \end{array}\right\},$$

aux coordonnées du produit (4) correspond le schéma suivant:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 0, & 0, & 0, & -(a_{22}+a_{33}), & a_{21}, & a_{31} \\ 0, & 0, & 0, & a_{12}, & -(a_{11}+a_{33}), & a_{32} \\ 0, & 0, & 0, & a_{13}, & a_{23}, & -(a_{11}+a_{22}) \\ -(a_{22}+a_{33}), & a_{21}, & a_{31}, & -(a_{25}+a_{36}+a_{52}+a_{63}), & a_{15}+a_{42}, & a_{16}+a_{43} \\ a_{12}, & -(a_{11}+a_{33}), & a_{32}, & a_{24}+a_{51}, & -(a_{14}+a_{41}+a_{36}+a_{63}), & a_{26}+a_{62} \\ a_{13}, & a_{23}, & -(a_{11}+a_{22}), & a_{61}+a_{34}, & a_{35}+a_{62}, & -(a_{14}+a_{41}+a_{25}+a_{52}) \end{array}\right\}.$$

Il est évident que la règle de composition du produit (4) est analogue à celle du roteur-diade de Jaumann.

De la même manière on peut composer le produit algébrique et les autres formes des produits de deux systèmes de vecteurs glissants.

Sur une classe de fonctions analytiques.

Par

MILOCH RADOÏTCHITCH.

Introduction.

Soit $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ une suite de fonctions analytiques; si la fonction analytique $F(z)$ conserve sa valeur lorsqu'on substitue à z l'une quelconque des fonctions $f_n(z)$, c. à d. si

$$F\{f_n(z)\} \equiv F(z) \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

la fonction $F(z)$ est dite *automorphe* [1]).

Les fonctions automorphes les plus générales qui ont été particulièrement étudiées sont celles, pour lesquelles les fonctions $f_n(z)$ sont des fractions linéaires de z. Ce sont les fonctions automorphes au sens plus étroit du mot ou, plus exactement, les fonctions *linéairement automorphes*.

Ici, nous allons considérer une catégorie générale de fonctions automorphes dont la définition est basée sur un critère d'autre espèce. Nous ne bornerons pas les fonctions f_n à une classe plus ou moins particulière; nous les laisserons quelconques, car nos considérations étant de nature géométrique ne précisent pas les expressions analytiques.

La fonction inverse, $z = \Phi(\varsigma)$ d'une fonction automorphe, $F(z) = \varsigma$, est une fonction multiforme dont les déterminations sont liées entre elles par les fonctions f_n. Si l'on divise la surface

---

[1]) Je me tiendrai à la nomenclature de F. Klein, que je préfère à celle de H. Poincaré, car elle me semble plus convenable aux considérations qui ont un caractère général.

de Riemann de $\Phi(\varsigma)$ en feuillets recouvrant tout le plan, leur entrelacement caractérisera à un certain point la nature des fonctions f_n. A cette division en feuillets correspondra une division du domaine d'existence de $F(z)$ en domaines partiels qui joueront en partie un rôle semblable à celui des *polygones générateurs* ou *domaines fondamentaux* dans les fonctions linéairement automorphes (selon qu'on se tient à la nomenclature de Poincaré ou de Klein). En s'y rattachant, nous aussi, nous appellerons nos domaines, *fondamentaux.* La division du domaine d'existence de $F(z)$ en de tels domaines nous fournira une image de l'automorphie de $F(z)$, que nous allons examiner. Je dis, *automorphie*; en effet, si on laisse les fonctions f_n quelconques, il s'agit moins d'une espèce particulière de fonctions telles que $F(z)$, que d'une propriété générale des fonctions analytiques.

Dans la première partie nous allons définir la catégorie de fonctions qui seront l'objet de ces considérations. Nous les appellerons fonctions *absolument automorphes; automorphes* — parce que leur domaine d'existence peut être divisé en domaines fondamentaux qui expriment l'existence des fonctions f_n ; *absolument* — parce que ces domaines fondamentaux sont une espèce d'éléments irréductibles, absolus ($F(z)$ est univalente dans chacun d'eux et y prend toute valeur). Puis, nous envisagerons quelques faits fondamentaux concernant les fonctions absolument automorphes.

La seconde partie se rapporte aux fonctions absolument automorphes uniformes. Nous les considérerons d'abord du point de vue général. Puis, nous passerons à quelques cas particuliers: aux fonctions qui sont en même temps linéairement automorphes; aux fonctions entières et méromorphes, car celles-ci sont, toutes, absolument automorphes; enfin, aux fonctions uniformes ayant un ensemble dénombrable, quelconque, de points singuliers transcendants.

Tout celà ne représente que quelques pas, dans une direction de recherches qui pourra, comme je le crois, contribuer à la solution de certaines questions générales et fondamentales de la théorie des fonctions analytiques.

PREMIÈRE PARTIE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

1. Les domaines fondamentaux.

L'une des notions principales de la théorie des fonctions linéairement automorphes est le *domaine fondamental*, — le *polygone générateur* de H. Poincaré. La fonction y prend toutes les valeurs dont elle est susceptible et celà, le même nombre de fois. En outre, le domaine d'existence d'une telle fonction peut être divisé entièrement en domaines fondamentaux et, par conséquent, si l'on connaît la disposition de ces domaines dans le plan et les propriétés de la fonction dans l'un d'entre eux, on connaîtra celle-ci partout. Dans le cas des fonctions périodiques, le domaine fondamental devient un parallélogramme ou une bande de périodicité.

Cependant le domaine fondamental dont nous nous occuperons ici a un sens un peu différent: nous appellerons ainsi un domaine où la fonction ne prend ses valeurs qu'une seule fois. On obtient ainsi une notion qui peut servir de base aux considérations générales qui vont suivre. Je l'ai introduite pour la première fois dans ma note „Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes“ [2])). Ici, en m'aidant de mon travail paru plus tard „Sur une manière de partager les surfaces de Riemann en feuillets“ [3]) je compléterai, entre autres, les résultats communiqués dans cette première note.

La définition que je propose est la suivante:

Définition 1 — *Un domaine ouvert de la surface de Riemann d'une fonction analytique sera un domaine fondamental, s'il a les propriétés suivantes:*

1° *la fonction y prend chaque valeur une fois seulement;*

2° *elle prend toutes les valeurs, soit à l'intérieur, soit sur*

---

2) C. R. Acad. Sc., t. 190, p. 356.

3) „Glas“ de l'Acad. Roy. Serbe, t. 146, p. 37., 1931.

la frontière, c. à d. en général comme une valeur limite;

3⁰ *chaque partie de cette frontière est commune à certains domaines de la surface, extérieurs au domaine considéré.*

Par conséquent, un domaine fondamental ne peut pas augmenter sans perdre la propriété 1⁰, ni diminuer sans perdre la propriété 2⁰; quant à la propriété 3⁰, elle est ajoutée pour supprimer les parties de la frontière qui seraient superflues; ce seraient, pour ainsi dire, des lignes entaillées dans l'intérieur du domaine et par lesquelles celui-ci ne limiterait aucun domaine extérieur.

Il existe évidemment une relation étroite entre un domaine fondamental et un feuillet de la surface de Riemann qui appartient à la fonction inverse. D'après la définition du feuillet dont je me sers ici, les domaines fondamentaux et les feuillets correspondent exactement entre eux. Par conséquent, on peut l'énoncer de la façon suivante [4]):

Définition II — *Un domaine ouvert d'une surface de Riemann sera un feuillet, s'il a les propriétés suivantes:*

1⁰ *il ne recouvre le plan dans aucune partie plus d'une fois*

2⁰ *il recouvre le plan de telle sorte, qu'il ne reste aucun domaine complémentaire;*

3⁰ *chaque partie de sa frontière est commune à certains domaines de la surface, extérieurs au domaine considéré.*

De même que les domaines fondamentaux, les feuillets ne peuvent être non plus ni augmentés ni diminués sans cesser d'être des feuillets.

Je crois utile de faire une remarque générale sur les surfaces de Riemann. Elles figurent dans ce travail seulement comme identiques aux domaines d'existence des fonctions analytiques (c. à d. aux domaines où ces fonctions sont uniformes et, sauf pour les singularités algébriques, régulières). Donc la surface de Riemann est un domaine ouvert et sa frontière est formée par les singularités transcendantes, isolées ou non, de la fonction qui lui est rattachée.

Il est évident que toute surface de Riemann n'a pas de feuillets. Par ex., on peut concevoir des fonctions multiformes qui ne peuvent pas être prolongées à l'extérieur d'un cercle. Alors

---

[4]) Voir la note citée [2]).

aucun feuillet ne peut satisfaire à la définition II. La surface d'une fonction algébrique a au contraire toujours des feuillets. Une telle fonction possède également des domaines fondamentaux. Mais, si la surface de la fonction inverse d'une fonction analytique est restreinte à un domaine du plan, qui est par ex. borné, alors au contraire cette fonction n'a aucun domaine fondamental. — Ceci nous montre que les notions du feuillet et du domaine fondamental s'appliquent seulement à certaines espèces de fonctions qui, bien que très générales, ne comprennent pas toutes les fonctions analytiques. Il est vrai qu'on pourrait élargir d'avantage ces notions, mais celà dépasserait nos buts actuels.

2. La division en domaines fondamentaux.

L'intérêt qui existe à considérer les domaines fondamentaux, n'est pas contenu dans un seul de ces domaines mais dans le fait qu'une partie plus ou moins grande de tout le domaine d'existence de la fonction envisagée peut être partagée en de tels domaines. Je passe donc à une définition exacte de cette division [5]). Elle ce rapporte au domaine d'existence tout entier et s'applique aux feuillets aussi bien qu'aux domaines fondamentaux.

Définition III. — *Diviser la surface de Riemann d'une fonction analytique en feuillets — ou en domaines fondamentaux — signifie: concevoir une suite de feuillets — ou de domaines fondamentaux — de cette fonction, qui n'ont pas de points communs et qui ne laissent subsister sur cette surface aucun domaine extérieur à cette suite.*

Une telle suite sera appelée un système de feuillets, respectivement, de domaines fondamentaux.

Toutes les surfaces de Riemann ne peuvent pas être partagées, soit en feuillets, soit en domaines fondamentaux. Celà est évident d'après les remarques du paragraphe précédent. Il existe par ex. des fonctions qui, bien que possédant quelques domaines fondamentaux, ne permettent pas la formation d'un système complet de ces domaines. Or, si une surface est divisible en feuillets ou en domaines fondamentaux, généralement, cette division peut

[5]) Voir [2]).

être changée d'une infinité de manières. En effet, les frontières des feuillets sont tout simplement des lignes de ramification qui sont toutes variables, excepté aux points de ramification. Par ex. en variant la forme d'un seul feuillet, tout le reste pourra changer convenablement, de façon à maintenir le système intact. Cependant, on pourrait imaginer des surfaces de Riemann divisibles en feuillets ou en domaines fondamentaux, mais d'une manière qui ne serait pas variable comme à l'ordinaire: si l'on voulait changer la forme d'un feuillet, ou se heurterait à certaines lignes infranchissables qui conserveraient la forme, entière ou en partie, fixe; la même chose pourrait se passer avec les domaines fondamentaux.

Or, dans ce travail nous allons nous occuper seulement d'une catégorie de fonctions qui sont toutes divisibles en domaines fondamentaux et leurs inverses en feuillets, et pour lesquelles une variabilité du système de ces domaines existe, pareille à celle qu'on connaît dans les fonctions algébriques. Ces fonctions, nous les nommerons absolument automorphes, pour des raisons qui vont être connues.

3. Les surfaces de Riemann illimitées.

Pour établir une classe générale de surfaces de Riemann qui peuvent être partagées en feuillets, j'ai introduit dans l'un de mes travaux antérieurs [6]) la classification des surfaces de Riemann en *surfaces limitées* et *illimitées*. Leur définition est basée sur la notion auxiliaire du *cercle de limitation* [7]):

Définition IV — *Soit $\Phi(\varsigma)$ une fonction analytique; un cercle Θ du plan de ς est un cercle de limitation pour $\Phi(\varsigma)$ si, en prolongeant analytiquement un certain élément de $\Phi(\varsigma)$ situé dans Θ et de toutes les manières possibles sans sortir de Θ, il existe un domaine dans Θ où l'on ne peut pas pénétrer.*

La définition que je voudrais énoncer maintenant se rapporte en même temps aux fonctions et à leurs surfaces; je l'exprimerai ainsi:

---

6) Sur la division des surfaces de Riemann en feuillets, „Glas" de l'Acad. Roy. Serbe, t. 134, p. 63, 1929.

7) Voir 2).

Définition V — *Une fonction analytique $\Phi(\varsigma)$ (ou sa surface de Riemann) sera dite limitée ou illimitée, selon qu'elle possède ou non des cercles de limitation.*

Par conséquent, les surfaces de Riemann illimitées se distinguent par le fait qu'il n'y a aucune ligne singulière située sur cette surface, qui présenterait des limitations au prolongement analytique. Il faut remarquer qu'il peut y avoir dans ce cas néanmoins des lignes singulières non seulement en projection sur le plan, mais effectivement, sur la surface même. La nature des surfaces illimitées peut être exprimée aussi de la façon suivante: „Soit dans le plan une courbe continue quelconque; si nous pouvons prolonger analytiquement la fonction le long de toute cette courbe, en ne nous écartant d'elle que d'une distance inférieure à un nombre arbitrairement petit, la surface de Riemann est alors illimitée". Auparavant j'ai basé sur cette propriété la définition même des surfaces illimitées [8]. On reconnaît facilement sa validité par de la définition V.

Toutes ces notions étant fixées, j'énonce le théorème suivant, fondamental pour l'objet du travail actuel:

Théorème 1. — *Toute surface de Riemann illimitée peut être divisée en feuillets dont les frontières sont continues et celà est possible de manière qu'au voisinage de chaque point de la surface ne se trouve qu'un nombre fini de feuillets.*

Je rappelle que la frontière d'un domaine est dite continue, si tous ses points sont accessibles c. à d. si l'on peut atteindre chaque point de cette frontière par des chemins convergents et passant par l'intérieur de ce domaine. Si la frontière n'est pas continue, elle contient des „bouts" inaccessibles.

La démonstration du théorème 1 fut exposée dans deux de mes travaux antérieurs [9]. Elle est trop longue pour être reproduite ici. D'après ce théorème, toute surface de Riemann illimitée peut être partagée en feuillets de manière que dans le voisinage des points situés sur la frontière de la surface, et là seulement, peut atteindre une infinité de feuillets; auprès d'un point qui appartient à l'intérieur de la surface ne se trouve au contraire qu'un nombre fini de feuillets.

---

[8] Voir [3] et [6].

[9] Voir [3] et [6].

Enfin, on peut s'assurer dans la démonstration du théorème 1 que le système de feuillets d'une fonction illimitée est infiniment variable. Il y règne une liberté semblable à celle qui existe dans les fonctions algébriques. On peut même dire que les fonctions illimitées sont les seules qui possèdent une telle liberté car, dès qu'il y a un cercle de limitation, même si celui-ci n'empêche pas tout à fait la formation d'un système, il donne au moins aux feuillets une forme en partie invariable.

4. Les fonctions absolument automorphes.

A la division de la surface de Riemann d'une fonction analytique en feuillets correspond la division de la surface de Riemann de la fonction inverse en domaines fondamentaux et réciproquement. Par conséquent, au théorème 1 doit correspondre un théorème analogue, concernant la division en domaines fondamentaux de la surface d'une fonction qui a la propriété de pouvoir être conçue comme l'inverse d'une fonction illimitée. D'où le théorème suivant:

Théorème 2. — *La surface de Riemann d'une fonction analytique dont l'inverse est illimitée peut être divisée en domaines fondamentaux de manière que 1° leurs frontières soient continues en chaque point de la surface et que 2° un nombre fini de ces domaines fondamentaux, seulement, peut atteindre dans le voisinage d'un point quelconque de la surface.*

Il est évident que ce théorème découle du théorème 1. — Soit $\Phi(\varsigma)$ la fonction illimitée, citée dans le théorème 1 et soit $F(z)=\varsigma$ la fonction inverse. Envisageons un feuillet Δ du théorème 1 et un point α situé sur la frontière de Δ. A Δ correspond un domaine fondamental D situé sur la surface de $F(z)$, au point α, un point a situé sur la frontière de D. Si a appartient à la surface de $F(z)$ et non pas à sa frontière, c. à d. si $F(z)$ est régulière en ce point, ou au plus singulière algébriquement, $\Phi(\varsigma)$ est régulière en α, ou au plus singulière algébriquement. Donc, on peut décrire sur la surface un cercle K de centre α tel que $\Phi(\varsigma)$ y soit régulière, sauf peut-être en α. Par conséquent, à chaque ligne continue contenue dans K, correspond une ligne tracée sur la surface de $F(z)$, située auprès de a et qui est aussi continue. Or, la frontière de Δ étant continue, celle de $F(z)$ l'est donc aussi, auprès du point a. Ainsi la propriété 1⁰ citée dans le théorème 2 se trouve démontrée: les seuls points où les frontières des domaines fondamentaux ne sont pas nécessairement continues, sont situés sur la frontière de la surface de Riemann: ce sont les points singuliers transcendants de $F(z)$.

On démontre de la même façon la propriété 2⁰. — Puisque, d'après le théorème 1, un nombre limité de feuillets doit atteindre près d'un certain point α de la surface de Φ, la même chose aura lieu avec les domaines fondamentaux près d'un point semblable de la surface de F et celà, grâce à la régularité mentionnée, dans un cercle K de centre α. Donc les points situés sur la frontière de la surface sont les seuls auprès desquels peuvent atteindre les points appartenant à une infinité de domaines fondamentaux différents; ce sont les points transcendants de $F(z)$. — Ainsi le théorème 2 est complètement démontré.

Les fonctions inverses des fonctions illimitées possèdent la propriété essentielle des fonctions automorphes. En effet, leurs domaines d'existence peuvent être divisés en domaines fondamentaux dans lesquels, si l'on inclue les frontières, toutes les valeurs de la fonction se reproduisent. De plus, dans chacun de ces domaines la fonction est univalente; enfin, selon les propriétés 1⁰ et 2⁰ du théorème 2, ces domaines peuvent affecter des formes et une conformation simples. Nous appelerons donc ces fonctions, *absolument automorphes*. J'énonce ceci pour plus de clarté sous la forme d'une nouvelle définition:

Définition VI — *Une fonction analytique sera dite absolument automorphe si sa fonction inverse est illimitée.*

Usant de cette dénomination, qui sera justifiée encore, au cours de ces considérations, j'énonce une seconde fois le théorème 2, en faisant en même temps ressortir le rôle des singularités transcendantes:

Théorème 2'. — *La surface de Riemann de toute fonction absolument automorphe peut être divisée en domaines fondamentaux de manière que 1⁰ leus frontières soient continues, sauf peut-être aux points singuliers transcendants et que 2⁰ une infinité de domaines fondamentaux peut atteindre uniquement auprès des points singuliers transcendants.*

5. La correspondance des domaines fondamentaux entre eux.

Après avoir dit un mot sur les expressions analytiques de la division en domaines fondamentaux, nous rejoindrons la définition des fonctions automorphes générales, mentionnée dans l'Introduction et le caractère automorphe des fonctions absolument automorphes sera manifeste.

D'après ce qui a été dit dans l'Introduction, sur la divisibilité du domaine d'existence d'une fonction analytique $F(z)$ en domaines fondamentaux, correspond un groupe de transformations effectuées par les fonctions $f_n(z)$ et qui font que $F(z)$ est automorphe. Cette correspondance est la plus évidente quand les fonctions $f_n(z)$ sont linéaires, car ces fonctions transmettent alors une suite de représentations conformes du système des domaines fondamentaux sur lui-même. Or, il est intéressant d'étudier comment se comportent les domaines fondamentaux dans des représentations analogues, quand il est question de fonctions absolument automorphes.

Soit $F(z)$ une fonction absolument automorphe et soit $z = \Phi(\varsigma)$ sa fonction inverse. Nous supposons que la surface de $F(z)$ est divisée en domaines fondamentaux, D_0, D_1, D_2, . . . et la surface de $\Phi(\varsigma)$ en feuillets, Δ_0, Δ_1, Δ_2 . . . , ceux-ci étant construits d'après les règles de la démonstration du théorème 1. Désignons par Δ'_v la projection de Δ_v ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) sur le plan. Puisqu'au cours de la construction du feuillet Δ_v on ne franchit jamais, dans le plan, les frontières des domaines $\Delta'_0, \Delta'_1, \ldots \Delta'_{v-1}$ (la démonstration du théorème 1 nous le montre), il est impossible que ces frontières, avec la frontière de Δ'_v divisent le plan en plusieurs domaines distincts. Donc, si l'on envisage deux domaines quelconques, Δ'_m et Δ'_n, on sait d'autant mieux que leurs frontières ne partagent pas le plan en domaines séparés. Par conséquent, les frontières de ces deux domaines font ensemble la frontière d'un certain domaine ouvert que nous désignerons par $\Pi'_{m,n}$. Ce domaine recouvre tout le plan, comme Δ'_m et Δ'_n, et il est en même temps contenu dans chacun de ces deux domaines. Si l'on projette $\Pi'_{m,n}$ de nouveau sur les feuillets Δ_m et Δ_n, on reçoit un domaine $\Pi_{m,n}$ qui appartient au feuillet Δ_m et un nouveau, $\Pi_{n,m}$ qui appartient au feuillet Δ_n. Pour plus de clarté je dirai qu'on obtient $\Pi_{m,n}$ de Δ_m, en dessinant dans Δ_m certaines lignes continues qui ne morcellent pas Δ_m et, peut-être aussi, quelques ensembles discontinus de points, destinés tous à former la frontière de $\Pi_{m,n}$.

La fonction Φ transmet une représentation conforme et biunivoque de $\Pi_{m,n}$ sur un domaine ouvert, soit $P_{m,n}$, contenu dans D_m; et de la même manière, de $\Pi_{n,m}$ sur $P_{n,m}$, contenu dans D_n. (Fig. 1 — Les frontières ajoutées dans D_m pour offrir l'image de $P_{m,n}$ sont indiquées en pointillé. La figure représente une région où $F(z)$ est uniforme).

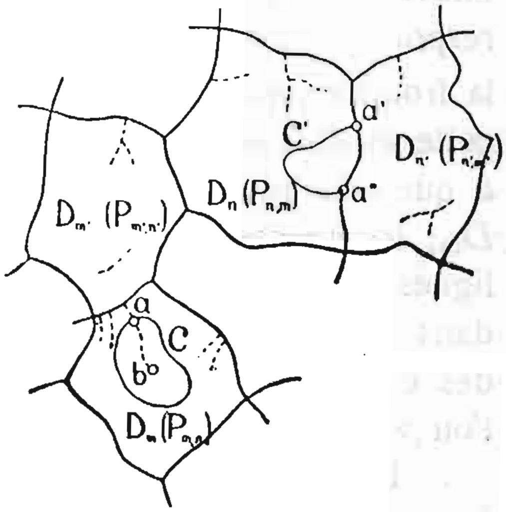


Fig. 1.

Puisqu'il ne correspond aux domaines $\Pi_{m,n}$ et $\Pi_{n,m}$ qu'un seul domaine $\Pi'_{m,n}$ dans le plan de ς, les deux représentations caractérisées peuvent être unies en une seule, c. à d. on peut représenter directement $P_{m,n}$ sur $P_{n,m}$ et inversement. Ceci sera accompli par la fonction $z'' = \Phi\{F(z')\}$, où z' et z'' désignent z dans $P_{m,n}$ et $P_{n,m}$ respectivement. Je désignerai cette fonction par $z'' = f_{m,n}(z')$. La fonction $f_{m,n}(z)$ est donc uniforme dans $P_{m,n}$ et elle fournit une représentation biunivoque et conforme de ce domaine sur $P_{n,m}$. De même, la fonction inverse $f_{n,m}(z)$ fournit la représentation inverse, de $P_{n,m}$ sur $P_{m,n}$.

La manière dont est définie la fonction $f_{m,n}$ nous montre qu'elle a la même valeur en z' et en z''. Donc, les fonctions $f_{m,n}$ sont identiques aux fonctions $f_n(z)$. — *Ainsi, la relation entre nos considérations géométriques et la définition d'une fonction automorphe est établie.*

Les circonstances devinnent plus simples si les domaines $P_{m,n}$ et $P_{n,m}$ se réduisent aux domaines fondamentaux D_m et D_n. Ce cas se présente lorsque $f_{m,n}$ est uniforme dans D_m et de même, sa fonction inverse $f_{n,m}$ dans D_n. — La réciproque est également vraie. Si $f_{m,n}$ est uniforme dans D_m et $f_{n,m}$ dans D_n, alors $f_{m,n}$ transmet une représentation conforme, biunivoque de D_m sur D_n.

Si, au contraire, le domaine $P_{m,n}$ n'est pas égal à D_m, certaines parties de la frontière de $P_{m,n}$ sont contenues dans D_n. A ces parties correspondent alors des parties de la frontière de D_n. Soit a un point situé dans D_m, sur la frontière ge $P_{m,n}$. Si

a n'est pas un point extreme, c. à d. si a morcelle la frontière de $P_{m,n}$, désignons par l une partie contenue dans D_m. Soit C une courbe continue fermée, contenue dans $P_{m,n}$, sauf le point a par lequel elle passe et entoure l. D'après la condition 3⁰ de la définition du domaine fondamental, à C correspond dans D_m une courbe C' qui est généralement ouverte (car au point a correspondent en général deux points distincts, a' et a'', situés sur la frontière de D_n). Si l'on avait $a' = a''$ il suffirait, pour éviter cette égalité, de choisir au lieu de a un point sur l, aussi près de a que l'on voudrait. — Donc la fonction $f_{m,n}$ est multiforme dans D_m; les parties de la frontière de $P_{m,n}$ situées dans D_m sont des lignes critiques. — Soit b un point extreme de l; on peut choisir dans sa proximité des points semblables à a et l'on peut décrire des courbes semblables à C, et qui entourent b d'aussi près que l'on voudra; b est par conséquent un point critique de $f_{m,n}$.

Dans l'intérieur du domaine $P_{m,n}$ la fonction $f_{m,n}$ est uniforme et régulière excepté, peut-être, en un seul pôle qui est alors du premier ordre. Or, quel est l'ensemble de tous les points singuliers, situés sur la frontière de $P_{m,n}$? — Dans le cas général cette frontière n'est pas continue; soit donc K l'ensemble des points où cette frontière est continue. (Plus exactement, K est l'ensemble des bouts entièrement accessibles, car on a fait abstraction des points dits inaccessibles).

D'autre part, puisque la surface de Φ est illimitée, l'ensemble de tous les points singuliers situés sur la frontière du feuillet Δ_v (celui-ci a sa frontière continue par hypothèse) est évidemment *partout discontinu.*

Or, l'ensemble E_1 des points singuliers de $F(z)$ situés sur K est partout discontinu. En effet, il est composé de points qui correspondent aux points singuliers de $\Phi(\varsigma)$, situés sur la frontière de Δ_m et de quelques points singuliers algébriques de $F(z)$, qui se trouvent sur K. Ces deux ensembles de points étant partout discontinus, E_1 l'est aussi.

Enfin, puisque l'ensemble des points singuliers de $\Phi(\varsigma)$ situés sur la frontière de Δ_n est partout discontinu, l'ensemble correspondant sur la frontière de $\Pi_{m,n}$ l'est aussi, et de là on tire la même conclusion pour l'ensemble correspondant, situé sur la partie K de la frontière de $P_{m,n}$. Désignons cet ensemble par E_2.

Puisque la fonction $f_{m,n}$ est composée de F et de Φ, les ensembles E_1 et E_2 contiennent tous les points singuliers de $f_{m,n}$ situés sur K. Autrement dit, en faisant exception des points inaccessibles de la frontière du domaine $P_{m,n}$, l'ensemble des points singuliers de $f_{m,n}$ situés sur cette frontière est partout discontinu sur la surface de Riemann de $F(z)$.

Il résulte donc, entre autres, que chaque fonction $f_{m,n}$ peut être prolongée analytiquement au dehors de $P_{m,n}$, à partir de chaque endroit de sa frontière. En effet, l'ensemble E_1+E_2 étant partout discontinu, il se trouve dans le voisinage de chaque point de la dite frontière un point, où $f_{m,n}$ est régulière et d'où le prolongement peut commencer. Considérons ces prolongements. — Prolongeons la fonction $f_{m,n}$ en sortant de $P_{m,n}$ sur un seul endroit de sa frontière et restons dans le premier des domaines où nous venons de pénétrer; soit $P_{n',m'}$ ce domaine. A ce prolongement correspond dans l'image conforme la sortie du domaine $P_{n,m}$ et l'entrée dans un autre domaine, $P_{n',m'}$. — Les qualités de $f_{m,n}$ par rapport à F restant partout les mêmes, on voit que $f_{m,n}$ est dans $P_{m',n'}$ identique à $f_{m',n'}$ et que par conséquent, elle fournit une représentation biunivoque, couforme de $P_{m',n'}$ sur $P_{n',m'}$.

Généralement $m' \neq m$ et $n' \neq n$; alors $P_{m',n'}$ se trouve à l'extérieur de D_m et appartient au domaine fondamental limitrophe, $D_{m'}$. De même, $P_{n',m'}$ se trouve alors à l'extérieur de D_n et appartient au domaine $D_{n'}$ limitrophe à D_n. Si au contraire $m' = m$ (le cas où simultanément $n' = n$ est exclu), le prolongement ne sort pas de D_m, mais dans l'image conforme, on sort de D_n. Enfin, si $n' = n$ et $m' \neq m$, on sort de D_m mais l'on reste dans D_n.

Ce prolongement analytique peut être continué dans tous les domaines D_v, indéfiniment, c. à d. *les fonctions* $f_{m,n}(z)$ (qui sont identiques aux fonctions $f_n(z)$) *existent dans tout le domaine d'existence de la fonction $F(z)$. Elles transforment le système des $P_{m,n}$ en lui même ou, plus précisement, un aspect de ce système* (celui où $P_{m,n}$ se trouve dans D_m, $P_{n,r}$ dans D_n et c.) *en un autre aspect du même système* (celui où $P_{n,m}$ est dans D_n, — et non pas $P_{n,r}$ — et c.). Cependant, la surface de Riemann de $f_{m,n}(z)$ est dans le cas général ramifiée sur la surface de $F(z)$.

DEUXIÈME PARTIE.

DIFFÉRENTES ESPÈCES DE FONCTIONS ABSOLUMENT AUTOMORPHES.

6. Les fonctions absolument automorphes uniformes.

La catégorie des fonctions absolument automorphes, étant très générale, embrasse une grande variété de fonctions analytiques, auxquelles on peut appliquer le théorème 2 (ou 2′) et en tirer les conséquences qui se présentent dans chaque cas. Voyons d'abord quelques propriétés générales des fonctions absolument automorphes uniformes, puis nous passerons à certaines classes connues de fonctions pour lesquelles on peut démontrer, sans trop de difficulté, qu'elles sont absolument automorphes. Il s'agira toujours des fonctions absolument automorphes uniformes.

Rappelons en passant que le domaine d'existence d'une fonction uniforme générale est un domaine ouvert du plan et que sa forme peut être quelconque. Sa frontière est formée par les singularités transcendantes et, par conséquent, à l'intérieur, la fonction ne peut avoir que des pôles. La fonction inverse d'une fonction uniforme se distingue par le fait qu'elle prend chaque valeur une seule fois: elle est univalente sur sa surface de Riemann.

La condition de l'uniformité simplifie les circonstances. Le système de domaines fondamentaux obtient alors une forme qu'on peut imaginer facilement; c'est comme un filet curviligne, irrégulier, étendu dans le plan et qui recouvre tout le domaine d'existence de la fonction considérée. Cependant, je dois remarquer que les résultats qui vont être signalés ne sont pas tous liés à l'uniformité. Pour la plupart ils pourraient être étendus assez facilement aux fonctions multiformes.

D'abord, je démontre le théorème suivant, valable pour toute fonction absolument automorphe uniforme:

Théorème 3. — *Quelque soit le système de domaines fondamentaux d'une fonction absolument automorphe uniforme, une infinité de ces domaines arrivent au voisinage de chaque point singulier transcendent de cette fonction.*

Démontrons ce théorème d'abord pour un ensemble partout discontinu de points singuliers, puis pour un ensemble qui contient des parties continues, c. à d. des lignes singulières.

Soit E un ensemble partout discontinu de points transcendants de la fonction considérée $F(z)$; on peut supposer que E se trouve dans la partie finie du plan. Enfermons E dans un contour rectifiable C_1 qui passe par les points réguliers de $F(z)$ et n'enferme aucune autre singularité transcendante. Il est impossible que l'intérieur de C_1 soit réparti parmi un nombre limité de domaines fondamentaux. — En effet, si ce nombre était limité, désignons le par n. Envisageons ces n domaines fondamentaux et les n feuillets correspondants de la fonction inverse, $\Phi(\varsigma)$.

Puisque n est limité on peut toujours obtenir de $F(z)$, par une transformation homographique, une fonction qui est bornée à l'intérieur de C_1. En effet, soit $\varsigma = \beta$ un point situé dans la partie finie du plan de ς et auquel correspond un point intérieur sur chacun des n feuillets envisagés (n étant fini, un tel point β existe toujours). Considérons au lieu de $F(z)$ la fonction $1/\{F(z)-\beta = F_0(z)$. C'est naturellement, aussi une fonction absolument automorphe. Soit $\Phi_0(\varsigma)$ sa fonction inverse. La fonction $F_0(z)$ a dans C_1 les mêmes singularités transcendantes que $F(z)$. Ensuite, $F_0(z)$ est bornée dans C_1 excepté au voisinage d'un certain nombre de pôles, au plus égal à n. Donc on peut déformer C_1 d'une manière continue en diminuant le domaine renfermé, de façon qu'on ne traverse ni ne touche aucun point singulier transcendant, mais pourtant que tous les pôles mentionnés deviennent extérieurs à C_1. Cette déformation ne supprime pas la condition que E soit l'ensemble des points singuliers enfermés dans C_1. Or, $F_0(z)$ est maintenant bornée dans C_1 et nous pouvons continuer la démonstration.

Déformons C_1 en tous ses points, en agrandissant le domaine qu'il renferme, mais de manière à ne traverser ni ne toucher aucun point singulier de $F_0(z)$. Soit C_2 le nouveau contour. C_1 et C_2 renferment un domaine doublement connexe et dans lequel $F_0(z)$ est holomorphe; donc, on a dans ce domaine, d'après la formule de Cauchy:

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1+C_2} \frac{F_0(x)}{x-z}\,dx\,.$$

En désignant

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{F_0(x)}{x-z}\,dx = \psi_1(z) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} \frac{F_0(x)}{x-z}\,dx = \psi_2(z)\,,$$

on peut écrire: $F_0(z) = \psi_1(z)+\psi_2(z)$. La fonction $\psi_1(z)$ est régulière à l'intérieur de C_1 et nulle à l'infini; $\psi_2(z)$ est au contraire régulière dans C_2. La fonction $\psi_1(z)$ a dans C_1 les mêmes singularités que $F_0(z)$, car elle n'y diffère que par une fonction holomorphe. $\psi_1(z)$ est donc bornée dans C_1 et, par conséquent, elle est bornée dans tout le plan.

Il s'ensuit que la surface de Riemann de la fonction inverse de $\psi_1(z)$ s'étend seulement sur une partie finie du plan de ς; c'est donc une surface limitée. Cette limitation provient de l'ensemble singulier de cette fonction inverse. Soit Σ cet ensemble. Σ correspond à E, puisque E est l'ensemble de tous les points singuliers de $\psi_1(z)$. Comme $F_0(z)$ ne diffère dans C_1 de $\psi_1(z)$ que par une fonction holomorphe, $\Phi_0(\varsigma)$ ne différera auprès des points de l'ensemble Σ de la fonction inverse de ψ_1 que par une fonction holomorphe. Donc, Σ appartient à l'ensemble singulier de Φ_0 et, par conséquent, il effectue la limitation de la surface de Φ_0. Autrement dit, $\Phi_0(\varsigma)$ doit être une fonction imitée. Or c'est faux, puisque $F_0(z)$ est une fonction absolument lautomorphe. Donc la supposition que n est limité était fausse. — Ainsi est accomplie la première partie de la démonstration.

Il reste à démontrer le théorème 3 pour les lignes singulières. Avant tout, les considérations peuvent être simplifiées en supposant que les lignes singulières de $F(z)$ ne forment aucun bout discontinu, c. à d. que la frontière du domaine d'existence de $F(z)$ soit continue. Ceci est permis. En effet, ce domaine peut être représenté conformément et biunivoquement sur un domaine dont la frontière est en totalité continue, ce domaine étant situé dans le plan d'une nouvelle variable t. Soit $z = G(t)$ la fonction qui effectue cette représentation. On considère $F\{G(t)\} = F_1(t)$ au lieu de $F(z)$ et on applique les résultats obtenus ainsi à $F(z)$: Si le théorème 3 est valable pour $F_1(t)$ il l'est aussi pour $F(z)$, — la représentation conforme auprès des bouts inaccessibles nous le montre immédiatement.

Il suffit de montrer que le contraire de ce qu'affirme le théorème 3 ne peut pas avoir lieu. Il est impossible qu'un nombre fini de domaines fondamentaux seulement arrivent au voisinage d'un point situé sur une ligne singulière. Car, autrement, on pourrait déterminer un arc L d'une ligne singulière et un nombre fini n de feuillets, qui seraient les seuls à avoir des points près de L. — Soit d'abord $n = 1$; donc, soit D_m le domaine fondamental unique qui limite à l'arc singulier L. La fonction $F(z)$ transmet une représentation conforme de D_m sur le feuillet Δ_m et, d'après l'allure d'une telle représentation sur la frontière, tout un arc Λ situé sur la frontière de Δ_m devrait correspondre à l'arc L. Λ serait une ligne singulière, ce qui est évidemment incompatible avec le fait que $\Phi(\varsigma)$ doit être illimitée.

On démontre facilement le cas général, $n > 1$, en s'aidant uniquement du cas précédent. (Je ferai ainsi pour éviter d'employer les propriétés de la représentation conforme des domaines qui ne sont pas uniformes, ces propriétés étant peu connues). Soient $D_{m_1}, D_{m_2}, \ldots, D_{m_n}$ les seuls domaines fondamentaux qui limitent à L (du côté considéré); soit D la somme de tous ces domaines réunis en un seul et soit Δ le domaine correspondant, composé des feuillets $\Delta_{m_1}, \Delta_{m_2}, \ldots, \Delta_{m_n}$. A l'arc L, qui est une partie continue de la frontière de D, devrait correspondre tout un arc Λ situé sur la frontière de Δ. Or, d'après ce qui a été démontré dans le cas précédent, à l'ensemble des points situés sur L, qui appartiennent à la frontière d'un seul domaine D_{m_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, ne peut correspondre aucun arc appartenant à Λ. Donc il ne lui correspond au plus qu'un ensemble de points non-dense sur Λ. La somme pour tous les ν de ces ensembles non-denses est nécessairement un ensemble de même espèce, situé sur Λ; cependant, ce devrait être l'arc Λ tout entier: il y a donc une contradiction qui prouve de nouveau le théorème 3. Ce théorème est pas conséquent complètement démontré.

On peut simplifier l'énoncé du théorème 3 et des théorèmes qui vont suivre, en introduisant la notion du *point limite de domaines fondamentaux.*

Définition VII. — *Un point $z=c$ sera dit un point limite de domaines fondamentaux, si l'on peut déterminer une suite de points qui convergent vers c et qui appartiennent à une suite infinie de domaines fondamentaux différents. — Plus exactement, c est un point limite de la dite suite de domaines fondamentaux.*

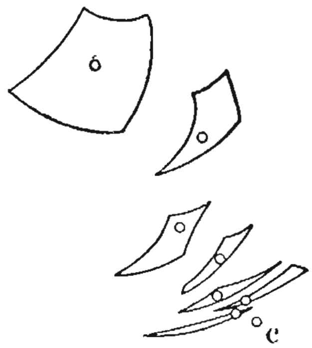


Fig. 2.

Il faut remarquer qu'une suite infinie de domaines fondamentaux, si elle a un point limite, n'est pas nécessairement une suite convergente; elle peut avoir plus d'un point limite, toute une ligne vers laquelle s'approche cette suite (fig. 2). Seulement si une suite de domaines fondamentaux possède un point limite unique, elle converge directement vers ce point.

On peut donc énoncer le théorème 3 de la façon suivante:

Théorème 3'. — *Tout point singulier transcendant d'une fonction absolument automorphe uniforme est un point limite de domaines fondamentaux.*

Je reviens au théorème 2. Si l'on compare la définition VII à la propriété 2° de l'énoncé 2', on voit que cette propriété peut être exprimée ainsi: *Les points singuliers transcendants sont les seuls qui peuvent être des points limites de domaines fondamentaux.* Ou bien: *Les points réguliers et les pôles d'une fonction absolument automorphe uniforme ne peuvent pas être des points limites de domaines fondamentaux.* Ou encore: *Chaque point limite de domaines fondamentaux est un point singulier transcendant.* En complétant le théorème 3' par cette circonstance nouvelle, on obtient la proposition suivante:

Théorème 4. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que ses points singuliers transcendants soient identiques aux points limites de domaines fondamentaux ou, en d'autres termes, que la frontière du domaine* *d'existence soit identique à l'ensemble des points limites de domaines fondamentaux.*

Un tel système de domaines fondamentaux est marqué dans le plan par un filet de lignes, qui se condense infiniment auprès de chaque point transcendant, isolé ou non. (Fig. 3 — R désigne le domaine d'existence, L une ligne singulière et p un point singulier transcendant).

Remarquons que la propriété 2⁰ du théorème $2'$ peut être énoncée aussi dans les termes suivants, qui l'élucident d'un autre côté: Il suffit d'enlever au système de domaines fondamentaux un nombre fini d'entre eux, pour que le reste soit contenu dans l'ensemble de cercles décrits des points singuliers transcendants comme centres, et de rayons inférieurs à un nombre aussi petit que l'on veut. Une exception a naturellement lieu au voisinage du point à l'infini: les mots précédents ne s'y appliquent qu'après l'avoir transféré au voisinage de l'origine, par ex., par la transformation $\frac{1}{z} = t$.

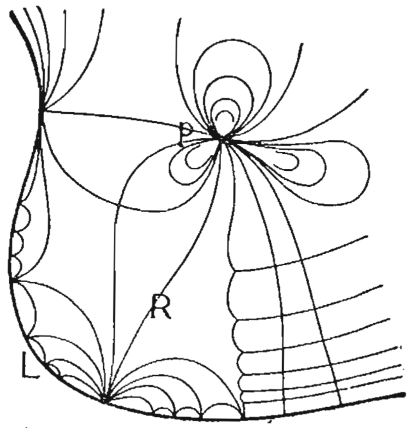


Fig. 3.

Quand on envisage certains ensembles particuliers de points singuliers transcendants, le théorème 4 donne naissance à des circonstances spéciales. — Soit d'abord $z = a$ un point transcendant isolé. Décrivons de a comme centre un cercle C n'ayant, ni à l'intérieur ni sur la circonférence, aucune autre singularité transcendante. D'après le théorème 4, a est le seul point limite des domaines fondamentaux, situés dans C ou sur sa circonférence. L'ensemble de tous les domaines fondamentaux, qui ont des points dans C, forme donc une suite qui converge vers a (fig. 4). On a par conséquent:

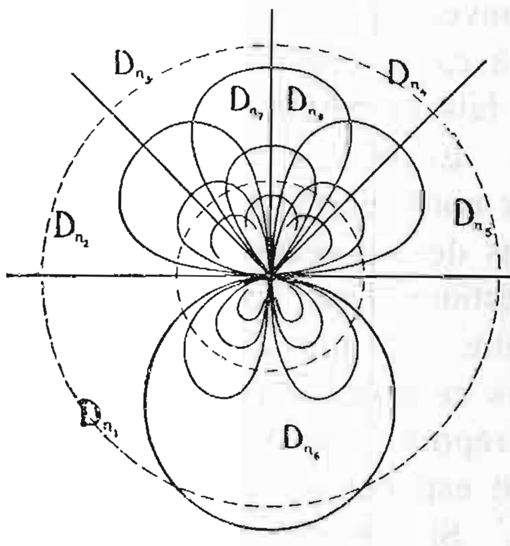


Fig. 4.

Théorème 5. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que tout point singulier transcendant isolé soit un point limite isolé de domaines fondamentaux, vers lequel converge l'ensemble de tous les domaines fondamentaux qui atteignent au voisinage de ce point* [10]).

D'ici on passe immédiatement aux points d'un ensemble réductible de points transcendants, pour se diriger vers le cas général des ensembles partout discontinus de points transcendants. Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 6. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que toute suite infinie de ces domaines, qui a un point limite dans un ensemble partout discontinu de points singuliers trancendants, converge vers ce point limite.*

En d'autres termes, si c_1 est un point limite d'une suite de domaines fondamentaux et si c_1 appartient à un ensemble discontinu de points transcendants, il est impossible qu'une infinité de domaines de la même suite ait en outre un point limite c_2 différent de c_1. Car, s'il en était ainsi, il y aurait tout un continu de points limites reliant c_1 à c_2. — Ceci est un fait géométrique évident et de démonstration inutile. (D'abord il faudrait prouver l'existence d'une suite finie de points limites allant de c_1 à c_2, la distance de deux points consécutifs étant $< \varepsilon$. Puis, en faisant tendre ε vers zéro, on obtiendrait la proposition).

En ce qui concerne les lignes singulières, il faut dire que des considérations analogues aux précédentes ne s'appliquent pas sans de nouvelles difficultés. Aussi je laisse ici sans réponse la question: Une suite de domaines fondamentaux qui a un point limite sur une ligne singulière, converge-t'elle nécessairement vers ce point, on non? — Si les lignes ne sont pas continues, la réponse est certainement négative; si elle sont continues, on doit espérer une réponse affirmative.

Si une infinité de domaines fondamentaux converge vers un point, ce point est évidemment une singularité essentielle

---

10) J'insiste sur le fait que le *voisinage* d'un point est un domaine tel que C_1 c. à d., qui contient ce point et qui est *suffisamment petit.*

d'indétermination complète, appellée ainsi, parce qu'en allant vers ce point, la fonction peut s'approcher de toute valeur sans exception. Le théorème 6 montre que *chaque point appartenant à un ensemble partout discontinu de points singuliers transcendants est un point singulier essentiel d'indétermination complète.* Il s'ensuit, en particulier, le fait bien connu, que *tout point singulier transcendant isolé d'une fonction absolument automorphe uniforme est un point essentiel d'indétermination complète.*

La propriété 1° mentionnée dans le théorème 2′ est restée inappliquée jusqu'à présent. Or, il résulte immédiatement de cette propriété qu'un domaine fondamental, tel que celui considéré dans ce théorème, a sa frontière continue partout, sauf au plus aux points d'une ligne singulière. En d'autres termes, tout point inaccessible d'une telle frontière appartient à une ligne singulière. Insistons sur ce fait en lui donnant la forme d'un théorème particulier:

Théorème 7. — *Le domaine d'existence d'une fonction absolument automorphe uniforme peut être divisé en domaines fondamentaux dont les frontières sont continues, sauf auprès des lignes singulières.*

Si la fonction n'a aucune ligne singulière, tous les domaines fondamentaux ont donc leurs frontières parfaitement continues. Par conséquent les domaines fondamentaux qui interviennent dans les théorèmes 5 et 6 ont aussi leurs frontières continues.

7. Les fonctions linéairement automorphes.

Soit $F(z)$ une fonction absolument automorphe uniforme. Son domaine d'existence est divisé en domaines fondamentaux de la manière exposée dans le théorème 2; nous les supposons rangés en une suite, $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_\nu, \ldots$

Or supposons maintenant que certaines d'entre les fonctions $f_n(z)$ soient des fractions linéaires, c. à d. que $F(z)$ soit une fonction *linéairement automorphe*. Puisque ces fonctions f_n sont uniformes dans tout le plan, elles effectuent, d'après ce qui a été dit au paragraphe 5, un ensemble de représentations conformes et biunivoques du système des domaines D_ν sur lui-même. Considérons ces représentations.

Envisageons parmi toutes les fonctions f_n, qui sont des fractions linéaires, (en y ajoutant aussi la fonction $f_0(z) \equiv z$) un groupe c. à d. un ensemble qui satisfait aux conditions suivantes: si $f_{n'}$ et $f_{n''}$ sont deux éléments de l'ensemble, $f_{n'}\{f_{n''}(z)\}$ l'est aussi; si $f_{n'}$ est un élément, sa fonction inverse l'est également (la troisième condition, l'associative, est remplie d'elle même). — On s'occupe en général non pas des fonctions f_n mais des transformations que ces fonctions effectuent; nous désignerons donc le groupe considéré de transformations, qu'on appelle alors, linéaires ou birationnelles, par Γ. Le groupe Γ peut contenir toutes les transformations linéaires qui existent pour $F(z)$, mais ce n'est pas nécessairement le cas.

Les fonctions f_n de Γ transforment le domaine D_0 en une suite d'autres domaines fondamentaux, soit $D_{\nu_0}, D_{\nu_1}, \ldots, D_{\nu_m} \ldots$ $(D_{\nu_0} \equiv D_0)$. Si cette suite ne contient pas tous les domaines D_ν (par ex. si toutes les fonctions f_n ne sont pas des fractions linéaires), soit D'_{ν_m} l'un d'eux, non contenu, qui est limitrophe de D_{ν_m} (ceci peut toujours être supposé). Puisque la fonction qui transforme D_{ν_m} en D_0 est uniforme dans tout le plan, elle transfome aussi D'_{ν_m} en un domaine D'_{ν_0} qui est limitrophe de D_0 et qui n'appartient pas à la suite des domaines D_{ν_m}. Joignons D_0 et D'_{ν_0}, et appelons le nouveau domaine, R'_0; procédant de même avec D_{ν_m} et D'_{ν_m}, nommons leur somme, R'_m. Si l'ensemble de tous les domaines R'_m $(m = 0, 1, \ldots)$ ne contient pas encore tous les domaines D_ν, on doit répéter le même procédé. Soit alors D''_{ν_0} un domaine fondamental qui est limitrophe de R'_0 et qui n'appartient pas à l'ensemble des domaines D_{ν_m} et D'_{ν_m} et soit R''_0 la réunion de R'_0 et de D''_{ν_0}. Si l'ensemble de tous les domaines R''_m $(m = 0, 1, \ldots)$ ne contient pas, non plus, tous les D_ν, on répétera le procédé jusqu'à ce que tout le système des D_ν soit épuisé. Désignons par R_m la forme finale vers laquelle a convergé la suite $R'_m, R''_m, \ldots, R^{(\mu)}_m, \ldots$. Cette suite a été infinie ou finie; si elle a été finie, chaque domaine R_m contient un certain nombre fini de domaines fondamentaux, le même pour tout R_m; si la suite à été infinie, R_m contient une infinité de domaines fondamentaux.

Or, les domaines R_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les *domaines fondamentaux du groupe* Γ de transformations, chaque R_m est un polygone générateur de Poincaré. C'est une notion fondamentale de la théorie des fonctions linéairement automorphes; elle se rapporte directement à un groupe donné de transformations et non pas à une fonction $F(z)$. En cela consiste la différence principale entre la notion du domaine fondamental, employée dans la théorie des fonctions linéairement automorphes et la nôtre. La première appartient à un groupe de transformations et la seconde à une fonction. Le domaine fondamental „d'une fonction" est, d'un certain point de vue, un cas particulier du domaine fondamental „d'un groupe de transformations analytiques générales". On obtient la première quand on envisage, au lieu d'un groupe quelconque de fonctions f_n, l'ensemble de toutes ces fonctions qui appartiennent à une fonction donnée $F(z)$; alors en particulier, $F(z)$ est univalente dans chaque domaine fondamental [11]).

Les domaines R_m et leur disposition dans le plan sont connus, les divers cas possibles étant classés et étudiés. — La définition du point limite des domaines fondamentaux s'applique également aux domaines R_m; ce sont les *points limites du groupe Γ*, vers lesquels convergent les suites infinies de domaines R_m. Comme on le voit imméditement, *tout point limite de Γ est en même temps un point limite des domaines fondamentaux D_ν*; le contraire n'est pas exact, on peut dire que *les points limites de Γ appartiennent à l'ensemble des points singuliers transcendants de $F(z)$*. — Si l'on considère les domaines R_m séparément, on peut dire que R_0, par ex., est composé des domaines D_0, D'_{ν_0}, D''_{ν_0}, . . . , $D^{(\mu)}_{\nu_0}$, . . . et que les points limites de ces domaines constituent un ensemble de points, situés à l'intérieur et sur la frontière de R_0. Ceux qui sont à l'intérieur forment l'ensemble de tous les points singuliers transcendants situés à l'intérieur de R_0.

Tout celà se rapporte aux fonctions absolument automorphes qui sont en même temps linéairement automorphes. Mais, toutes les fonctions linéairement automorphes ne sont pas absolument automorphes. Pourtant nous savons que *toutes les fonctions linéairement automorphes qui le sont aussi absolument, forment une classe assez générale pour embrasser toutes les fonctions linéairement automorphes qu'on envisage dans la théorie de ces fonctions.*

---

11) Il faut remarquer qu'on ajoute généralement au domaine fondamental „d'un groupe" certaines parties de sa frontière, de sorte que F y soit non seulement univalente mais qu'elle y prenne toute valeur.

En effet, dans la théorie des fonctions linéairement automorphes on réduit en premier lieu les considérations aux fonctions qui sont dans chaque domaine R_m et sur sa frontière, — sauf, évidemement, aux points limites du groupe Γ, — *libres de singularités transcendantes.* En second lieu on ajoute la condition *que les transformations fondamentales, génératrices de Γ soient en nombre fini.* En vertu de cette restriction, R_m a un nombre limité de sommets et par conséquent, un nombre limité de points singuliers transcendants, situés sur la frontière de R_m. En dernier lieu on se borne à considérer seulement les fonctions *qui ne prennent dans R_m leurs valeurs qu'un nombre limité de fois*, c. à d. qui sont μ - valentes dans R_m, μ étant un nombre entier, positif, quelconque. Cette dernière condition renferme la première. Il y a donc en tout deux conditions différentes, qu'on suppose remplies au début de la théorie des fonctions linéaire ment automorphes. Or je veux démontrer que la fonction, que nous désignons de nouveau par $F(z)$, est alors toujours absolument automorphe.

Selon la définition VII il faut montrer que sa fonction inverse $\Phi(\varsigma)$ est illimitée. Soit P_m le domaine de la surface de Φ, correspondant à R_m. P_m a une forme telle, que si l'on joint les parties de sa frontière, correspondant aux mêmes projections dans le plan, on obtient une surface de Riemann algébrique. En particulier P_m recouvre le plan μ fois. Puisqu'il n'y a aucune singularité transcendante dans R_m, il n'y en aura pas non plus dans P_m. Mais sur la frontière de P_m il peut y avoir des points de ramification transcendants et celà en nombre limité (puisqu'ils correspondent aux sommets transcendants de R_m). Comme $\Phi(\varsigma)$ est une fonction linéairement polymorphe, que sa surface est composée de domaines P_m et que les valeurs prises par Φ dans les différents P_m au même point ς sont en dépendance birationnelle entre elles, à chaque point algébrique ou transcendant dans un P_m correspond un point de même espèce dans tout autre P_m. Par conséquent, l'ensemble des singularités transcendantes de Φ se projette dans le plan en un ensemble fini de points. Donc, il est évident que Φ ne peut pas avoir de cercles de limitation, — elle est illimitée [12]).

[12]) On pourrait démontrer la même chose pour des classes plus larges de fonctions linéairement automorphes, mais je dois me borner ici à aborder les problèmes dans leurs formes les plus simples.

Comme on le voit, le chemin que nous avons parcouru est opposé à celui qui a été pris dans la théorie des fonctions linéairement automorphes. Dans cette théorie on part des tranformations en formant et en étudiant les groupes discontinus qu'elles peuvent composer, puis, on arrive aux fonctions automorphes, c. à d. invariantes pour un groupe donné: on démontre l'existence des telles fonctions et l'on trouve des expressions analytiques qui les représentent. Dans ce travail, au contraire, nous sommes partis des fonctions analytiques générales et, en leur imposant certaines conditions, nécessaires pour conserver le sens de l'idée fondamentale, on déduit le système des domaines fondamentaux, qui représente le groupe correspondant de transformations. Ainsi, nous sommes arrivés à quelques faits généraux que nous avons énoncé pour la plupart comme des théorèmes. Tous ces théorèmes peuvent être appliqués maintenant aux fonctions qui sont à la fois linéairement et absolument automorphes.

8. Les fonctions entières et méromorphes.

La catégorie des fonctions absolument automorphes comprend toutes les fonctions entières et méromorphes, quelque soit leur généralité. En effet, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 8. — *Toute fonction entière ou méromorphe est une fonction absolument automorphe; le plan où une telle fonction est définie peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que la frontière de chaque domaine soit continue et que tous les domaines convergent vers le point à l'infini* [13]*).*

Soit $F(z)$ une fonction entière ou méromorphe quelconque, et $\Phi(\varsigma)$ sa fonction inverse. Il faut montrer que $\Phi(\varsigma)$ est une fonction illimitée. Or, ce fait a été démontré par M. F. Iversen [14]) dans un théorème que nous pouvons exprimer au moyen du

[13]) Voir ma note [1]). — La dernière affirmation de ce théorème n'y figure pas encore.

[14]) *F. Iversen* „Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes". — *M. G. Valiron* (C. R. Acad. Sc., t. 166) en a simplifié la démonstration. J'en ai donné aussi une dans ma note „Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes", ignorant les travaux des M. M. Iversen et Valiron. Celle de M. Valiron est la plus simple.

„cercle de limitation“, et qui s'énonce ainsi sous une forme tout à fait brève: „La fonction inverse d'une fonction entière ou méromorphe n'a pas de cercles de limitation“. — Je ne reproduirai pas la démonstration du théorème de M. Iversen, puisqu' une généralisation du théorème 8 sera exposée au paragraphe 10 et que celle-ci nécessitera une démonstration complète.

Donc, $F(z)$ est une fonction absolument automorphe uniforme et par conséquent, le plan de z peut être divisé en domaines fondamentaux comme il a été dit dans le théorème 2'. Donc, puisque $z = \infty$ est la singularité transcendante unique, les théorèmes 5 et 7 s'appliquent immédiatement. De là découle le théorème 8.

Ajoutons encore quelques mots. Si l'on connaît, si peu soit-il, le système des domaines fondamentaux d'une fonction entière ou méromorphe, on connaît aussi la structure de cette fonction. — En général, certains domaines du système auront des sommets à l'infini, d'autres n'en auront pas et seront donc situés dans la partie finie du plan. Les premiers nous donnent une connaissance des chemins de détermination, c. à d. des chemins qui vont à l'infini et sur lesquels la fonction tend vers une valeur déterminée, dite asymptotique. — Par ex. si un chemin va à l'infini et s'il ne passe que par un nombre limité de domaines fondamentaux, il est sûrement un chemin de détermination. — Si tous les domaines fondamentaux sont bornés, $F(z)$ n'a aucune valeur asymptotique et partant aucune valeur exceptionnelle, elle est donc en tout cas méromorphe. Mais, si tous les domaines fondamentaux sauf un nombre limité d'entre eux, ont des sommets infinis, la fonction peut avoir des valeurs exceptionnelles. Telle sera aussi la nature du système des domaines fondamentaux dans les fonctions entières. — Comme on le voit par ces remarques, l'étude des fonctions méromorphes ou entières est polarisée à deux problèmes distincts: l'un est *topologique* et il se rapporte à la configuration du système des domaines fondamentaux; l'autre est *analytique* et il complète le premier en se rapportant à la distribution *conforme* des valeurs de la fonction considérée dans chacun des domaines fondamentaux.

9. Sur la disposition des domaines fondamentaux.

A propos des remarques précédentes signalons quelques considérations sur les fonctions absolument automorphes uniformes, générales. Ainsi le sujet sera rattaché directement au paragraphe 6, qui se rapportait à la disposition des domaines fondamentaux dans le plan. Ce sera aussi l'objet du paragraphe présent. Mais, comme on se heurte à chaque pas à des problèmes irrésolus, en partie nouveaux, ce qui sera mentionné ici ne contiendra que quelques remarques, concernant plutôt les méthodes qu'on pourra employer dans des recherches futures.

Avant tout, il faut dire quelques mots sur la forme d'un domaine fondamental. Cette forme est caractérisée par les *sommets*. On appelle ainsi, quand il s'agit des fonctions linéairement automorphes, les points par lesquels se rencontrent plus de deux domaines fondamentaux différents. Ici cette définition doit être généralisée en disant qu'un sommet est un point situé sur la frontière d'un domaine fondamental, tel que dans son voisinage il existe toujours des points appartenant à plus de deux de ces domaines différents. Par conséquent, chaque domaine fondamental peut être regardé comme un polygone curviligne que l'on peut nommer aussi, *polygone fondamental*. Les arcs de la frontière, découpés par les sommets sont les côtés du polygone; deux côtés consécutifs enferment un angle qui est généralement curviligne (fig. 5).

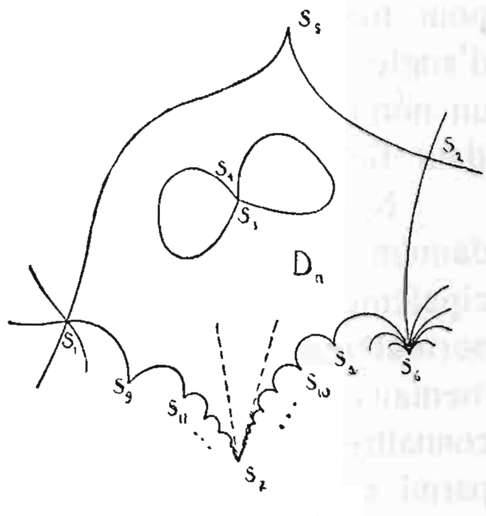


Fig. 5.

On peut distinguer les sommets *algébriques* des sommets *transcendants*, ces derniers étant ceux dans lesquels la fonction a des singularités transcendantes et les premiers, ou elle n'en présente pas. Si le système de domaines fondamentaux est tel que le théorème 4 soit applicable et, si le sommet est algébrique, son voisinage est réparti parmi un nombre limité de domaines fondamentaux et ce sommet est le point de rencontre d'un nombre limité da ces domaines (dans la figure, par ex.: s_1, s_2, s_3 et s_4); si, au contraire, le sommet est transcendant, son voisinage est réparti parmi un nombre illimité de domaines fondamentaux et deux cas peuvent se présenter: ou bien, dans le sommet se rencontre une infinité de domaines fondamentaux différents (par ex.: s_6) ou bien, le nombre de ces domaines est limité (par ex.: s_7, quand ce nombre est égal à 1).

Dans la fonction inverse de celle considérée, aux sommets algébriques correspondent les points de ramification algébriques d'ordre supérieur à un, et aux sommets transcendants, les points de ramification transcendants. — En supposant qu'en un certain sommet commun à plusieurs angles curvilignes, appartenant à plusieurs domaines fondamentaux différents, toutes les frontières aient des tangentes déterminées, on pourrait mesurer ces angles. Dans ce cas, si le sommet est algébrique et si un nombre m de domaines fondamentaux différents s'y rencontrent, ces domaines forment en ce point, d'ordinaire, m angles égaux entre eux (ex.: s_1 et s_2). Mais, généralement, un seul domaine peut avoir plusieurs angles au même sommet (ex.: s_3 et s_4); la somme de ces derniers est alors égale à $\frac{2\pi}{m}$, le nombre total des angles étant naturellement plus grand que m. Si un domaine fondamental a un seul angle en un certain sommet et si cet angle est nul (si les deux côtés de l'angle ont la même tangente), alors ce sommet est transcendant (ex.: s_5). — En un sommet transcendant les angles sont en général nuls. On se rendra compte aisément que celà se produit pour tous les angles formant une suite infinie et ininterrompue d'angles adjacents (ex: s_6); si au contraire cette suite contient un nombre limité d'angles, ceux-ci pourraient être aussi de grandeur finie (ex.: s_7).

Nous arrivons maintenant à la disposition des domaines fondamentaux dans le plan. Tous les problèmes se rapportent principalement au voisinage des singularités transcendantes (qui sont normalement des singularités essentielles). Les domaines fondamentaux s'y accumulent en nombre infini et l'important est de connaître de quelle manière. Or, nous nous bornons à considérer parmi ces singularités uniquement celles qui forment dans le plan des *continus isolés*. J'entends par là qu'une telle singularité est un continu de points singuliers dont aucun des points n'est un point limite d'autres points singuliers transcendants (c. à d. de ceux qui n'appartiendraient pas au même continu). Un tel continu est généralement une ligne cantorienne à peu près quelconque mais, nous y ferons entrer aussi le cas spécial où le continu est réduit à un point unique.

Les considérations gagneront en clarté si l'on simplifie tout d'abord la forme d'un tel continu par une transformation du plan, convenable. Pour ce but on considère le continu singulier comme la frontière totale d'un domaine du plan et l'on fait la représentation conforme de ce domaine sur l'xtérieur d'un certain cercle A. Si l'on désigne de nouveau la variable par z et la fonction absolument automorphe par $F(z)$, on a A pour continu singulier transcendant isolé, et l'on peut définir celui-ci en demandant que tous les points de A soient singuliers transcendants et qu'on puisse entourer A d'un cercle A' concentrique et plus grand, tel que dans l'anneau circulaire limité ainsi, il n'y ait pas d'autres singularités transcendantes. En particulier A peut représenter un seul point singulier essentiel, soit $z = a$.

Il convient de distinguer trois circonstances principales qui peuvent se produire dans la disposition des domaines fondamentaux autour de A: On bien, tous les domaines fondamentaux autour de A (c. à d. ceux qui ont des points dans un cercle tel que A') sauf au plus un nombre limité d'entre eux, ont des sommets situés sur A; ou, au contraire, ces domaines, sauf également un nombre limité d'entre eux, ne possèdent; aucun sommet situé sur A; ou bien encore une infinité de domaines fondamentaux a de tels sommets et une autre infinité n'en a pas. J'appellerai la disposition, et de même la singularité dans ces trois cas respectivement: de la *première espèce*, de la *seconde* et de la *troisième espèce*. — Les deux premières espèces sont opposées l'une à l'autre tandis que la troisième est mixte. Les singularités de la première espèce peuvent être représentées par la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, les singularités de la seconde espèce par une fonction elliptique de $\frac{1}{z}$ (fig. 6, a et b; — en supposant que la fonction elliptique soit du 2⁰ ordre, deux domaines fondamentaux correspondent à un parallélogramme de périodes; $\frac{1}{z}$ a été choisi au lieu de z pour ramener le point essentiel à l'origine

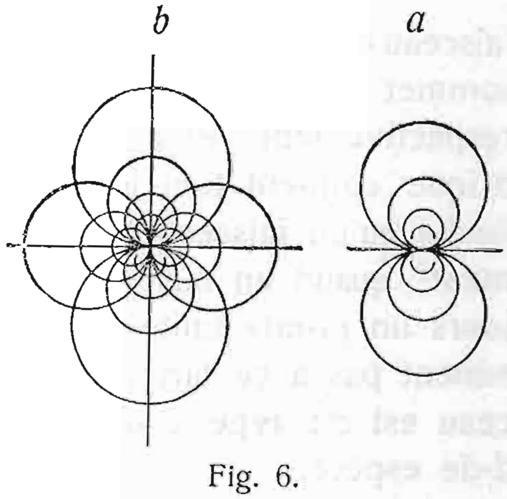


Fig. 6.

afin d'avoir un meilleur aperçu de la disposition des domaines fondamentaux)[15].

Appliquons maintenant au cercle A certaines notions mentionnées au paragraphe précédent, où A représentait un point unique. Ces notions sont, la *valeur exceptionnelle*, la *valeur asymptotique* et le *chemin de détermination*. Une valeur ici sera dite *exceptionnelle* si elle n'est pas prise par $F(z)$ autour de A (dans un cercle tel que A'); *asymptotique* si $F(z)$ converge vers cette valeur sur un chemin qui se termine en un point de A; un tel sera appelé alors un *chemin de détermination*.

Ajoutons encore une notion, celle du *faisceau d'angles* (d'angles aux sommets des domaines fondamentaux). Nous nommerons ainsi l'ensemble de tous les angles ayant un certain sommet commun et formant une suite ininterrompue d'angles adjacents. — Plusieurs cas sont à distinguer. Si l'on range ces angles dans l'ordre cyclique qu'ils occupent autour du sommet commun, le faisceau consiste alors ou bien en une suite finie: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ (fig. 7, *a* et *b*) ou bien en une suite infinie (*c* et *d*). Dans ce dernier cas la suite peut être infinie dans un ou dans les deux sens, c. à d. on peut avoir la suite: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (*c*) ou la suite: $\ldots \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, (*d*). On peut distinguer aussi les cas d'un faisceau *fermé* (*a*) et d'un faisceau *ouvert* (*b*, *c* et *d*). Si le faisceau est fermé, son sommet est algébrique, s'il est ouvert, son sommet est transcendant. Donc on peut nommer ces faisceaux respectivement, *algébriques* et *transcendants*. Un faisceau algébrique contient tout le voisinage du sommet qui lui appartient, tandis qu'un faisceau transcendant ne le contient jamais entièrement; quand un faisceau est transcendant son sommet est toujours un point limite de domaines fondamentaux qui n'appartiennent pas à ce faisceau. — On voit nettement que si le faisceau est du type *c* ou *d*, son sommet ne peut pas être de la 2-de espèce.

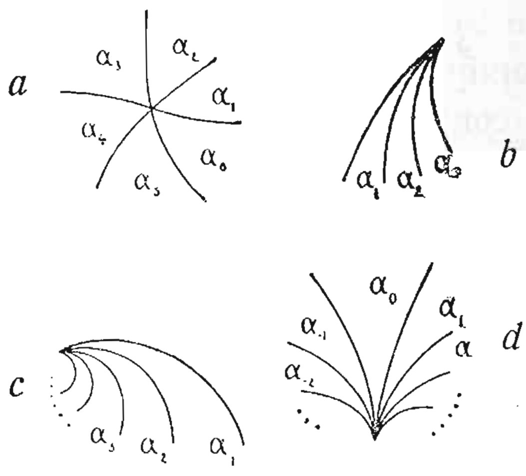


Fig. 7.

[15]) La figure 4 peut donner une idée de la disposition des domaines fondamentaux autour d'une singularité de la 3-ème espèce.

Remarquons qu'il ne peut y avoir de valeurs exceptionnelles que quand A est de la 1-ère espèce. Les faisceaux transcendants peuvent donner des indications sur les chemins de détermination. Ainsi, si un chemin tend vers le sommet d'un faisceau transcendant en ne passant que par un nombre fini de ces angles, il est sûrement un chemin de détermination. Au contraire, si un chemin tend vers le sommet commun à deux faisceaux transcendants σ_1 et σ_2 et s'il rentre sans cesse, alternativement à l'intérieur d'un angle de σ_1 et d'un angle de σ_2, il ne peut pas être un chemin de détermination. — Si A est de la seconde espèce, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de valeurs asymptotiques. — Tout celà est évident.

Une considération géométrique simple nous mène à la proposition suivante: *Si la fonction $F(z)$ tend vers la même valeur asymptotique ω, à l'intérieur de deux angles α_1 et α_2 (fig. 8) ou bien, dans la partie du plan situé entre ces deux angles elle converge toujours vers ω, ou bien, elle s'approche de toute valeur donnée arbitrairement.*

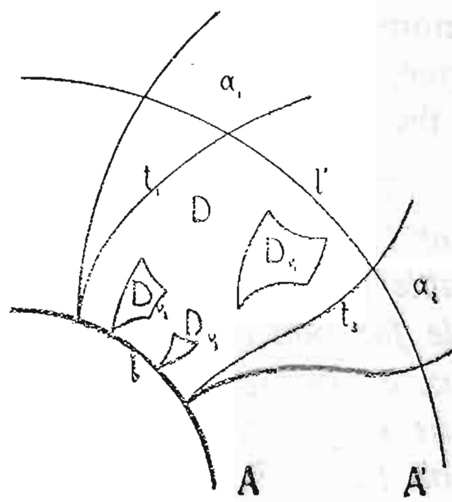


Fig. 8.

Démontrons ceci. Les angles α_1 et α_2 ont en général deux sommets distincts. Désignons par D la partie mentionnée du plan; en précisant on peut l'égaler à un domaine limité par un arc l de A, par un arc l' d'un cercle concentrique A' et par deux côtés t_1 et t_2 des angles α_1 et α_2. — Si α_1 et α_2 appartiennent au même faisceau, $F(z)$ convergera dans D vers ω sur tous les chemins qui se terminent en l; c'est le premier cas. Si α_1 et α_2 appartiennent à deux faisceaux distincts σ_1 et σ_2 on sait, d'après la définition du faisceau, que D contiendra une infinité de domaines fondamentaux. Ceux-ci s'accumulent auprès de l, donc il suffit d'envisager un suite partielle de ces domaines, soit D_{ν_1}, $D_{\nu_2}, \ldots$, pour s'assurer que $F(z)$ s'approche dans D de toute valeur sans exception. Ainsi la proposition est démontrée.

A cette proposition se rattache la suivante: *Si la fonction $F(z)$ tend vers deux valeurs asymptotiques différentes, dans* *deux angles différents, α_1 et α_2, dans la partie du plan située entre ces deux angles, elle s'approchera de toute valeur donnée arbitrairement.*

En effet, dans ces circonstances, α_1 et α_2 appartiennent à deux faisceaux distincts, ce qui nous ramène au second cas de la démonstration précédente [16]).

10. Les fonctions uniformes à un ensemble dénombrable de points singuliers transcendants.

Le théorème 8 du paragraphe 8 peut être étendu facilement aux fonctions uniformes qui ont, non pas un point transcendant unique, le point à l'infini, mais un ensemble quelconque dénombrable de ces points. Puisque un tel ensemble doit être fermé, il est en même temps un ensemble réductible. — D'où le théorème:

Théorème 9. — *Toute fonction analytique uniforme dont l'ensemble des points singuliers transcendants est dénombrable est une fonction absolument automorphe; le plan où une telle fonction est définie peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chaque domaine soit continue et que toute suite de domaines fondamentaux qui a un point limite* [17]), *converge vers ce point.*

Pour le démontrer il faut prouver que la fonction inverse, $z = \Phi(\varsigma)$ de la fonction donnée, $\varsigma = F(z)$ est illimitée, c. à d. qu'elle n'a aucun cercle de limitation.

Supposons par impossible qu'il existe un cercle de limitation, θ. En prolongeant analytiquement Φ dans θ à partir d'un certain élément, on décrit un domaine Δ de la surface de Riemann. Δ se projette en un domaine Δ' situé dans θ mais ne le recouvrant pas entièrement. Soit Ω un domaine dans θ, complémentaire à Δ'. Ω peut n'avoir aucun point commun avec le bord de θ, mais en choisissant dans ce cas pour θ un cercle plus petit, contenu dans le premier et dont le bord coupe Ω, on peut toujours obtenir que la frontière de Ω ait un arc ω

[16]) Si A est un point, ces deux propositions se déduisent de certains faits connus. Voir par ex. le ch IV des „Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé“ de *M. G. Julia.*

[17]) Voir la définition VII.

commun avec le bord de Θ; supposons ceci. — Soit alors D le domaine ouvert du plan de z, correspondant à Δ par les valeurs de Φ. Nous supposerons que D se trouve dans la partie finie du plan. Puisque Θ se trouve aussi (on peut le supposer) dans la partie finie du plan de ς, la fonction $F(z)$ est bornée dans D. En outre, $F(z)$ est régulière dans D et sur sa frontière C, excepté aux points de C qui sont transcendants et dont l'ensemble E, est par hypothèse, dénombrable.

D'abord nous supposerons que E contient un point unique, puis qu'il contient un nombre fini de points, enfin qu'il est infini, et nous allons démontrer chaque fois que c'est impossible.

1. Soit donc $z=a$, le seul point singulier transcendant situé sur la frontière C de D. Nous reprendrons la démonstration de M. Valiron. Elle contient le lemme suivant:

„Soit un domaine ouvert D, extérieur à un cercle γ; supposons qu'une fonction analytique et régulière dans D et sur le contour C, sauf peut-être au point a de C, ait son module constant et égal à A sur C (a excepté) et inférieur à A dans le domaine D; dans ces condition, ou bien D renferme des zéros de cette fonction, ou bien il existe dans D des chemins aboutissant en a, sur lesquels la fonction tend vers zéro" [18]).

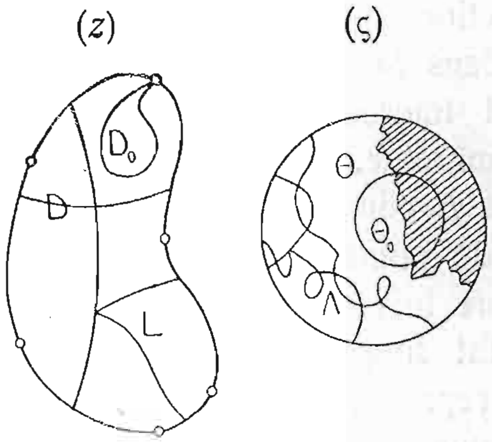
D'ici on déduit immédiatement l'impossibilité du cas considéré. En effet, on peut toujours supposer que le domaine D est extérieur à un cercle γ et que Θ est décrit de $\varsigma=0$ comme centre, avec un rayon égal à A; enfin, que ni Δ' ni la frontière de Δ' ne contient le point $\varsigma=0$. (Ceci peut être obtenu par une substitution homographique de ς, ce qui n'altère pas les circonstances essentielles). Mais alors, puisque $F(z)$ est holomorphe dans D et sur C sauf au point a, et puisque $|F(z)|<A$ dans D et $=A$ sur C sauf peut-être en a, nécessairement $F(z)$ devrait tendre vers zéro sur des chemins tracés dans D et aboutissant en a. Or, d'après la position de Δ', ceci est impossible. Donc, le premier cas est exclu.

2. Considérons le second cas; supposons par impossible qu'il se trouve sur C un nombre limité quelconque, n, de points transcendants. Divisons D en n domaines tels, que la frontière de chacun d'eux ne contienne qu'un point transcendant unique. Cette division est effectuée par certaines courbes qui ne s'approchent d'aucun de ces points. Désignons par L l'ensemble de ces

---

[18]) Voir [14]).

courbes. Soit Λ l'ensemble des points du plan de ς, qui correspond à L (fig. 9). Λ n'a évidemment aucun point commun avec la frontière de Ω. Donc, on peut tracer un cercle Θ_0 contenu dans Θ, tel que Λ reste à l'extérieur et qu'à l'intérieur de Θ_0 il y ait en même temps des points de Δ' et de Ω, c. à d. que Θ_0 soit un cercle de limitation.



Fi g. 9.

Soit Δ_0 une partie du domaine Δ que l'on décrit en prolongeant analytiquement un certain élément de Φ situé dans Θ_0, de toutes manières possibles, sans sortir de Θ_0; soit D_0 le domaine ouvert correspondant, situé dans D. Puisque Λ n'a aucun point commun avec Δ_0', L n'en aura pas avec D_0 donc, D_0 est contenu dans l'un des n domaines de D. Par conséquent, sur la frontière de D_0 il n'existe qu'un point transcendant unique; or c'est le premier cas qui vient d'être réfuté.

3. Il nous reste encore à considérer le troisième cas. Si l'ensemble E, dénombrable, a un nombre limité de points limites, le procédé suivant conduit au but. — D'abord, par une considération analogue à la précédente on construit un cercle de limitation Θ_0, contenu dans Θ puis le domaine D_0 sur la frontière duquel se trouve un seul point limite de points transcendants, a (fig. 10). Il faut alors prouver l'impossibilité de ce cas.

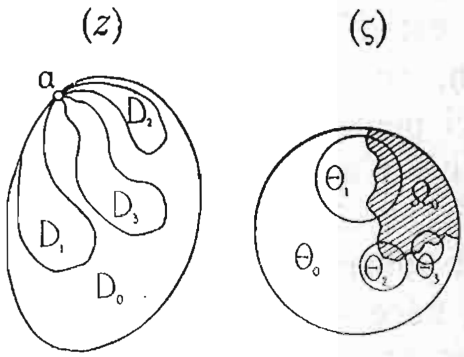


Fig. 10.

Décrivons trois cercles, Θ_1, Θ_2 et Θ_3, extérieurs l'un à l'autre, contenus dans Θ_0 et situés de part et d'autre de la frontière qui sépare Δ_0' de Ω_0. Θ_1, Θ_2 et Θ_3 sont trois cercles de limitation auxquels correspondent trois domaines, D_1, D_2 et D_3 contenus dans D_0, extérieurs l'un à l'autre. Il est impossible que D_1 par ex., n'ait pas a sur sa frontière, car, autrement, cette frontière contiendrait un nombre fini de points transcendants et ce cas a été exclu. Donc, ces trois domaines ont a sur leurs frontières.

Dans de telles circonstances, l'un d'eux, soit D_3, est situé ou bien entre les deux autres, ou bien entre deux bouts, finissant en a, d'un seul de ces domaines. — Si la frontière de D_3 est continue en a, c'est le seul point transcendant situé sur la frontière de D_3 et l'on a de nouveau le premier cas, réfuté. Si la frontière de D_3 n'est pas continue en a, une considération plus précise est nécessaire.

Le point a appartient alors à un seul ou à plusieurs „bouts" de la frontière de D_3, qui ne se réduisent pas tous au seul point a, mais qui contiennent en outre une partie plus ou moins grande de la frontière de D_0 et, par conséquent, une infinité de points transcendants de $F(z)$. La proposition de M. Valiron n'est donc pas applicable directement; il faut d'abord transformer D_3 en un domaine plus simple. Dans ce but envisageons la frontière extérieure de D_3, c. à d. les points de la frontière de D_3 qui sont nécessaires pour diviser le plan en deux domaines dont l'un contient D_3 et l'autre, le point à l'infini. Faisons la représentation conforme du premier de ces deux domaines sur un domaine dont la frontière est continue, un cercle par ex.. Soit $z = \psi(t)$ la fonction qui effectue cette représentation. A D_3 correspond un domaine D_3' contenu dans ce cercle. La fonction $\varsigma = F_1(t) = F\{\psi(t)\}$ est holomorphe dans D_3 et sur sa frontière, excepté en un seul point, qui correspond aux bouts mentionnés de D_3. Les autres conditions du théorème de M. Valiron étant alors remplies également, on obtient le même résultat que dans le premier cas, donc, ici encore, la présence d'un cercle de limitation est exclue.

Continuons la démonstration en nous aidant des cas précédents; d'abord en supposans que la seconde dérivée de E a un nombre limité de points, puis en passant aux dérivées successives et dont l'ordre ne peut dépasser un nombre fini.

Donc, la fonction $\Phi(\varsigma)$ est vraiment illimitée. De cette conclusion le théorème 9 découle immédiatement comme conséquence des théorèmes 6 et 7.

Avant de terminer notons une généralisation de nos considérations. Au lieu d'exiger que toute une surface de Riemann soit illimitée, on peut se borner à un certain domaine quelconque d'une telle surface. Un domaine Σ de la surface de Riemann d'une fonction $\Phi(\varsigma)$ sera dit illimité, s'il n'existe aucun cercle Θ tel, qu'en prolongeant analytiquement Φ à partir d'un élément y appartenant à Σ et situé dans Θ, on ne puisse pas recouvrir Θ entièrement, *à moins qu'on ne rencontre la frontière qui sépare* Σ *du reste de la surface.* Ainsi, on aurait aussi la notion d'une fonction „illimitée dans un domaine" de sa surface de Riemann.

Soit S le domaine de la surface de $F(z)$ correspondant à Σ. Si Φ est illimitée dans Σ, on pourra nommer $F(z)$ *absolument automorphe dans le domaine* S. Evidemment, ce nom perd son vrai sens quand $F(z)$ est trop simple dans S, c. à d par ex. si elle y est univalente. Mais si, par ex., S est un domaine du plan dans lequel $F(z)$ a des poins singuliers transcendants isolés, ce nom prendra sa pleine valeur.

En ce qui concerne la division du domaine S en domaines fondamentaux, ceci doit signifier que S est divisé en domaines et que ceux-ci sont fondamentaux, *excepté, peut être, ceux qui rencontrent la frontière qui sépare* S *des autres parties du domaine d'existence de* $F(z)$.

Avec ces notions généralisées on peut énoncer, entre autres, les deux propositions suivantes, analogues aux théorèmes 8 et 9:

Théorème 8*. — *Toute fonction analytique est absolument automorphe au voisinage de chacun de ses points singuliers transcendants isolés où elle est uniforme; un tel voisinage* (qui ne contient pas d'autres points singuliers transcendants) *peut être divisé en domaines fondamentaux de manière, que la frontière de chacun d'eux soit continue et qu'ensemble ils convergent vers le point singulier transcendant considéré.*

Théorème 9*. — *Toute branche d'une fonction analytique est absolument automorphe dans chaque domaine du plan, dans lequel elle est uniforme et n'a qu'un ensemble dénombrable de points singuliers transcendants; ce domaine peut être divisé en domaines fondamentaux de manière que la frontière de chaque domaine soit continue et que toute suite de ces domaines qui a un point limite dans le domaine considéré, converge vers ce point.*

Rapport entre les limites d'oscillation des procédés de sommation d'Abel et de Cesàro.

Par

JOVAN KARAMATA.

Soit a_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, une suite de nombres réels, tels que la série

$$(1) \qquad f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \quad \textit{converge pour tout} \quad r < 1;$$

on a alors l'inégalité bien connue

$$(2) \qquad \lim_{r=1} \sup\, (1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \leqslant \lim_{n=\infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu ,$$

qui exprime que la limite supérieure de l'intervalle d'oscillation du procédé de sommation d'Abel ne peut dépasser celle du procédé de sommation de Cesàro, quelque soit la suite de nombres réels $\{ a_\nu \}$.

Or, dans une de mes Notes [1]), j'ai démontré que pour les suites de nombres $\{ a_\nu \}$ à termes *positifs*, on a même la double inégalité suivante:

$$(3) \quad \lim_{r=1} \sup\, (1-r)\, f(r) \leqslant \lim_{n=\infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqslant e \lim_{r=1} \sup\, (1-r)\, f(r),$$

$f(r)$ désignant la fonction (1) et la constante e étant la base des logarithmes naturels.

---

[1]) J. Karamata, Sur la moyenne arithmétique des coéfficients d'une série de Taylor, Mathematica vol. I, p. 99 et 100 (Cluj, 1929).

La seconde des inégalités (3) complète donc l'inégalité (2) dans le cas des suites à termes positifs et exprime que dans ce cas la moyenne de Cesàro doit rester bornée toutes les fois que la moyenne d'Abel l'est. (Évidemment ce fait n'a pas lieu pour les suites à termes réels quelconques, comme on le vérifie, du reste, facilement sur l'exemple $a_\nu = (-1)^\nu \nu^2$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$).

D'autre part, puisque $e > 1$, il ne résulte pas des inégalités (3) que (pour $a_\nu \geqslant 0$) les deux limites supérieurs

$$(4) \qquad \Lambda = \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \quad \text{et} \quad \lambda = \limsup_{r=1} (1-r) f(r),$$

doivent être égales entre elles. La question suivante se pose donc tout naturellement: Les deux limites supérieures Λ et λ sont-elles égales entre elles, lorsque les termes de la suite $\{a_\nu\}$ sont positifs? Ou, ce qui revient au même, peut-on dans ce cas remplacer la constante e par l'unité et, si ce n'est pas le cas, cette constante e est-elle la plus petite possible, pour que la seconde inégalité (3) ait lieu pour toute suite $\{a_\nu\}$ à termes positifs?

Nous allons montrer ici par un exemple, que la réponse à la première question est négative, contrairement à celle de la seconde. En d'autres termes, nous allons construire effectivement une suite de nombres $\{a_\nu\}$ qui satisfait à l'égalité

$$(5) \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = e \limsup_{r=1} (1-r) f(r),$$

c'est-à-dire pour laquelle $\Lambda = e\lambda$.

Cette suite des nombres $\{a_\nu\}$ est la suivante:

$$(6) \qquad a_n = \begin{cases} n & \text{si} \quad n = p! \\ 0 & \text{si} \quad n \neq p! \end{cases}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Pour montrer que l'égalité (5) a lieu lorsqu'on y remplace la suite $\{a_\nu\}$ par la suite (6), il suffit de démontrer que l'on a

$$(7) \qquad \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \limsup_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{\mu! \leqq n} \mu! = 1,$$

et

$$(8) \qquad \limsup_{r=1} (1-r) f(r) = \limsup_{r=1} (1-r) \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu!\, r^{\mu!} = 1/e.$$

La relation (7) est facile à vérifier; d'une part, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu!\leq n}\mu! \leqslant \frac{1}{p!}\sum_{\mu=1}^{p}\mu! \quad \text{pour tout} \quad (p-1)! < n \leqslant p!\,,$$

et puisque

$$\frac{1}{p!}\sum_{\mu=1}^{n}\mu! \sim \frac{p!}{p!-(p-1)!} \to 1 \quad p \to \infty\,,$$

il s'ensuit que

$$\limsup_{n=\infty} \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu!\leq n_p}\mu! \leqslant 1\,.$$

D'autre part, il existe effectivement une suite de valeurs n_p, $p = 1, 2, 3, \ldots$, de n telle que

$$\frac{1}{n_p}\sum_{\mu=1}^{\mu!\leq n_p}\mu! \to 1\,, \quad n_p \to \infty\,,$$

ce que l'on voit en posant $n_p = p!$.

Des deux dernières relations il résulte l'affirmation (7).

Pour démontrer la relation (8), il suffit de montrer que l'on a

$$\text{(9)} \qquad \limsup_{r=1}\,(1-r)\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu!\,r^{\mu!} \leqslant 1/e\,.$$

Car, d'après (7) et la seconde inégalité (3), il résulterait que

$$1 \leqslant e \limsup_{r=1}\,(1-r)\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu!\,r^{\mu!} \leqslant e/e = 1\,,$$

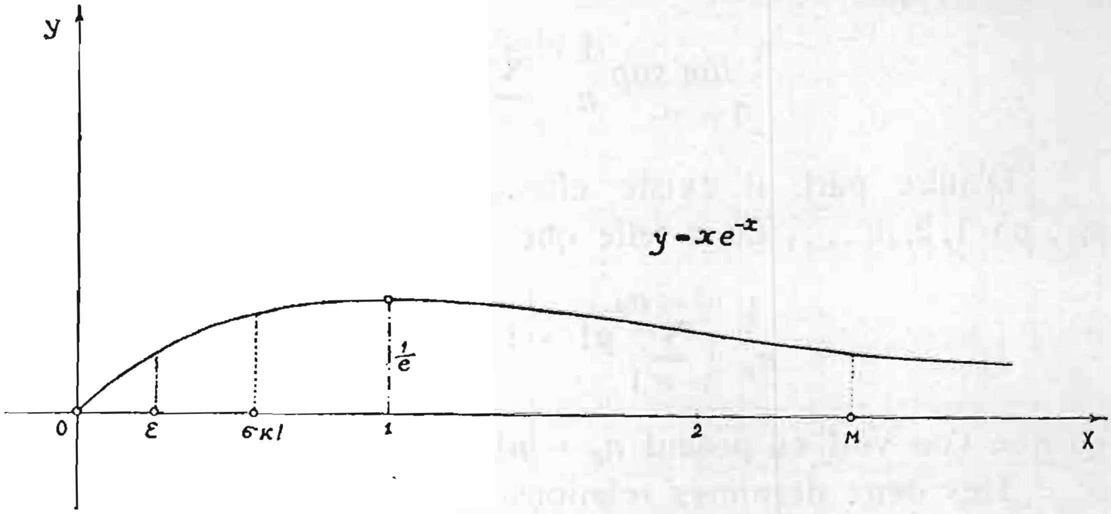
c'est-à-dire l'affirmation (8).

Or, l'inégalité (9) peut être obtenue par des considérations suivantes.

Remplaçons, d'abord, r par $e^{-\sigma}$; alors, pour que $r \to 1$, il faut que $\sigma \to 0$, et l'on a dans ce cas $(1-r) = (1-e^{-\sigma}) \sim \sigma$ lorsque $\sigma \to 0$.

Par suite, au lieu d'étudier les limites de l'expression $(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu!\,r^{\nu!}$, lorsque $r \to 1$, on peut étudier celles de $\sigma\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu!\,e^{-\sigma\nu!}$ lorsque $\sigma \to 0$. Mais, cette expression ayant la forme $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sigma\nu!\,e^{-\sigma\nu!}$, l'on voit qu'elle a pour valeur la somme des ordonnées de la fonction xe^{-x} aux points $x_\nu = \sigma\,\nu!$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Soit sur l'axe des X un intervalle quelconque, mais fixe, (ε, M), où ε et $1/M$ peuvent être choisis aussi petits que l'on veut. Il est facile de montrer que, pour σ suffisamment petit, il peut y avoir au plus *un* parmis les points $x_\nu = \sigma\nu!$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, qui soit situé dans l'intervalle (ε, M). En effet, pour que $\sigma k!$ soit situé dans cet intervalle il faut que $\varepsilon \leqslant \sigma k!$, et pour qu'un second



point y soit situé il faudrait en outre que $\sigma\,(k+1) \leqslant M$; en multipliant ces deux inégalités membres à membres, il résulterait $\varepsilon\,(k+1) \leqslant M$. k devrait donc être inférieur à $\frac{M}{\varepsilon} - 1$, ce qui contredirait la première des deux inégalités précédentes: $k! \geqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}$ d'après laquelle on peut choisir σ assez petit pour que k dépasse la quantité $\frac{M}{\varepsilon} - 1$. Donc, en choisissant σ assez petit, si l'un des points x_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, est situé dans (ε, M) tous les autres doivent être extérieurs à cet intervalle, ce qui démontre l'affirmation.

Considérons, à présent, la somme des ordonnées de la fonction $y = xe^{-x}$, correspondant aux points x_ν extérieurs à l'intervalle (ε, M). La somme des ordonnées correspondant aux points à droite de M est évidemment inférieure à la surface $\int_{M-1}^{\infty} xe^{-x}dx = eMe^{-M}$. En ce qui concerne la somme s des ordonnées correspondant aux points à gauche de ε, l'on a

$$s = \sum_{\nu=1}^{\sigma\nu! \leq \varepsilon} \sigma\nu!\, e^{-\sigma\nu!} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\sigma\nu! \leq \varepsilon} \sigma\nu! \leqslant \varepsilon \left(\frac{1!}{\nu!} + \frac{2!}{\nu!} + \frac{3!}{\nu!} + \dots\right.$$

$$\left. \dots + \frac{1}{(\nu-1)\,\nu} + \frac{1}{\nu} + 1\right) \leqslant \varepsilon \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \dots + \frac{1}{\nu} + 1\right) \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Par suite, puisque pour σ suffisamment petit, un des points $x_\nu = \nu$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, au plus est situé dans l'intervalle (ε, M), et puisque la plus grande valeur de la fonction xe^{-x} est $1/e$, la somme de toutes les ordonnées de cette fonction correspondant aux points $\sigma\nu!$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, ne peut dépasser la quantité $2\varepsilon + e^{-1} + eMe^{-M}$, c'est-à-dire, on a l'inégalité

$$(1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r^{\nu!} = \sigma \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, e^{-\sigma\nu!} \leqslant 2\varepsilon + e^{-1} + eMe^{-M}\,,$$

pour σ suffisamment petit. Donc

$$\limsup_{r=1}\, (1-r) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r^{\nu!} \leqslant 2\varepsilon + e^{-1} + eMe^{-M}\,,$$

et puisque dans cette inégalité on peut choisir, d'une part, ε arbitrairement petit et d'autre part, M arbitrairement grand, l'on en déduit l'inégalité (9), et par suite l'affirmation (8).

Il est, du reste, facile de trouver une suite particulière r_p, $p = 1, 2, 3, \dots$, de valeurs de r, telle que

$$(10) \qquad (1-r_p) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, r_p^{\nu!} \to e^{-1} \quad \text{lorsque} \quad r_p \to 1\,.$$

Une telle suite est, par exemple, $r_p = e^{-1/p!}$, $p = 1, 2, 3, \dots$. En effet, du fait que

$$(1-r_p) = (1-e^{-1/p!}) \sim 1/p!\,, \quad p \to \infty\,,$$

et des relations

$$\frac{1}{p!} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu!\, e^{-\nu!/p!} = \frac{1}{p!} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu!\, e^{-\nu!/p!} + e^{-1} + \frac{1}{p!} \sum_{\nu=p+1}^{\infty} \nu!\, e^{-\nu!/p!}\,,$$

$$\frac{1}{p!} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu!\, e^{-\frac{\nu!}{p!}} \leqslant \frac{1}{p!} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu! = \frac{1}{p}\, \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu! \to 0\,, \; p \to \infty\,,$$

$$\frac{1}{p!}\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\nu!\,e^{-\frac{\nu!}{p!}} = \frac{(p+1)}{e^{p+1}} + \frac{(p+1)\,(p+2)}{e^{(p+1)\,(p+2)}} + \ldots \leqslant \sum_{\nu=p+1}^{\infty}\nu e^{-\nu} =$$

$$= \frac{e\,(p+1)-p}{(e-1)^2\,e^p} \to 0\,, \quad p\to\infty\,,$$

il résulte l'affirmation (10).

Cet exemple suffit pour donner les réponses complètes aux questions posées au début de cette Note.

D' ailleurs, on peut en donner une infinité de suites $\{a_\nu\}$ satisfaisant à la relation (5). Ainsi, par exemple, toute suite $\{a_n\}$ de la forme

$$a_n = \begin{cases} n & \text{pour } \ n = n_k\,, \\ 0 & \text{pour } \ n \neq n_k\,, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

où n_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, est une suite d'entiers tels que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \to \infty$ avec k, satisfait à la relation (5); ce que l'on peut montrer en suivant la même marche comme il vient d'être exposé pour la suite (6). (Dès que dans ces suites le quotient $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ ne tend pas vers l'infini, l'égalité (5) ne peut avoir lieu).

Ainsi, on a démontré le théorème suivant:

Tout suite de nombres positifs $\{a_\nu\}$ *satisfait aux inégalites*

$$\limsup_{r=1}\,(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqslant e\,\limsup_{r=1}\,(1-r)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu\,,$$

où la constante e, base des logarithmes naturels, ne peut être remplacée par aucun nombre plus petit, tant qu'on reste dans le cas général considéré.

Beograd, le 25 mars 1923.

Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables.

Par

WACLAW SIERPINSKI.

Une fonction continue d'une variable réelle est, comme on sait, déterminée, lorsqu'on connait ses valeurs sur un ensemble dense. Le but de cette Note est de prouver qu'une fonction de deux variables réelles $f(x, y)$, continue (séparément) par rapport à x et par rapport à y, jouit d'une propriété analogue. On a notamment ce

Théorème. *Une fonction de deux variables réelles $f(x, y)$, continue par rapport à chacune de ces variables séparément, est déterminée, lorsqu'on connait ses valeurs sur un ensemble de points (x, y) donné quelconque D, dense dans le plan.*

En d'autres termes: si D est un ensemble de points (x, y), dense dans le plan, et si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de ces variables (séparément), et si

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in D,$$

on a

$$f(x, y) = g(x, y),$$

quels que soient les nombres réels x et y.

Une différence de deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ continues par rapport à x et par rapport à y étant de même nature, il suffira évidemment de démontrer que si l'on a pour une fonction $f(x, y)$, continue par rapport à x et par rapport à y

$$(1) \qquad f(x,y)=0 \quad \text{pour} \quad (x,y) \in D,$$

on a constamment $f(x, y) = 0$.

Soit (x_0, y_0) un point du plan donné quelconque et soit ε un nombre positif donné.

La fonction $f(x, y)$ étant continue au point (x_0, y_0) par rapport à x, il existe un nombre positif δ_0, tel que

$$(2) \qquad |f(x, y_0)-f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x-x_0| \leqslant \delta_0 .$$

Soit maintenant n un indice donné et supposons que nous avons déjà défini les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), . . . , (x_{n-1}, y_{n-1}) et les nombres $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$.

L'ensemble D étant dense dans le plan, il existe un point (x_n, y_n) de D, tel que

$$(3) \qquad |x_n - x_{n-1}| < \frac{\delta_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad |y_n - y_0| < \frac{1}{n} .$$

La fonction $f(x, y)$ étant continue au point (x_n, y_n) par rapport à x, il existe un nombre δ_n, tel que

$$(4) \qquad 0 < \delta_n < \frac{1}{2} \delta_{n-1}$$

et que

$$(5) \qquad |f(x, y_n)-f(x_n, y_n)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x-x_n| \leqslant \delta_n .$$

Les points (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . de l'ensemble D et les nombres $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ sont ainsi définis par l'induction et on a les formules (3), (4) et (5) pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

D'après (3) et (4) on a, pour $n > k \geqslant 0$

$$|x_n - x_k| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1}-x_{n-2}| + \ldots + |x_{k+1}-x_k| <$$

$$< \frac{\delta_{n-1}}{2} + \frac{\delta_{n-2}}{2} + \ldots + \frac{\delta_k}{2} \leqslant \frac{\delta_k}{2^{n-k}} + \frac{\delta_k}{2^{n-k-1}} + \ldots + \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leqslant \frac{\delta_0}{2^k},$$

donc

$$(6) \qquad |x_n - x_k| < \delta_k \leqslant \frac{\delta_0}{2^k} \quad \text{pour} \quad n > k \geqslant 0$$

d'où résulte qu'il existe la limite

(7) $$\lim_{n=\infty} x_n = \xi .$$

D'après (6) et (7) on a, pour $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

(8) $$|\xi - x_k| \leqslant \delta_k ,$$

donc, d'après (5)

$$|f(\xi, y_k) - f(x_k, y_k)| < \varepsilon ,$$

ce qui donne, d'après (1) et $(x_k, y_k) \in D$, pour $k=1, 2, 3, \ldots$:

$$|f(\xi, y_k)| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad k=1, 2, 3, \ldots ,$$

et, d'après (3), la fonction $f(x, y)$ étant continue au point (ξ, y_0) par rapport à y:

(9) $$|f(\xi, y_0)| \leqslant \varepsilon .$$

Or, d'après (8) (pour $k=0$), on a $|\xi - x_0| \leqslant \delta_0$, donc, d'après (2):

$$|f(\xi, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon ,$$

ce qui donne, d'après (9):

$$|f(x_0, y_0)| < 2\varepsilon .$$

Le nombre positif ε pouvant être quelconque, cela prouve que

$$f(x_0, y_0) = 0 ,$$

c. q. f. d. Notre théorème est ainsi démontré.

Un théorème analogue a lieu pour les fonctions de n variables réelles, continues par rapport à chacune de variables séparément. La démonstration est tout à fait analogue.

Dans le cas particulier, où D est l'ensemble de tous les points (x, y) aux coordonnées rationnelles, la démonstration de notre théorème est immédiate et résulte de la formule

$$f(x, y) = \lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} f\left(\frac{Emx}{m}, \frac{Eny}{n}\right)$$

qui a évidemment lieu (pour x et y réels) pour toute fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles, continue par rapport à chacune de variables séparément (où Et désigne l'entier le plus grand, ne dépassant pas t).

Il est à remarquer que pour des telles fonctions on a aussi la formule

$$f(x, y) = \lim_{n=\infty} f_n(x, y),$$

où

$$f_n(x, y) = (1 - nx + Enx)\, f\left(\frac{Enx}{n}, y\right) + (nx - Enx)\, f\left(\frac{Enx+1}{n}, y\right).$$

Les fonctions $f_n(x, y)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont, comme on voit sans peine, continues (par rapport à l'ensemble de variables x, y), d'où résulte tout de suite le théorème connu de *M. H. Lebesgue*, d'après lequel toute fonction de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de ces variables (séparément) est limite de fonctions continues [1]).

Quant à notre théorème, il est à remarquer qu'on peut le déduire facilement d'une proposition de *M. R. Baire* [2]) de laquelle résulte que si la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à chacune de variables x, y séparément, il existe sur tout segment parallèle à l'axe OX ou à l'axe OY un point, où la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à l'ensemble de variables (x, y).

---

[1]) Cf. mon livre „*Funkcje przedstawialne analitycznie*", Warszawa 1925 (en polonais), p. 66—67.

[2]) *R. Baire:* Sur les fonctions de variables réelles *(Thèse)* Milan 1899.

Bahnkurve der säkularen Polverlagerung.

Von

M. MILANKOVITCH.

Die isostatische Lagerung der aus Sial aufgebauten Kontinentalschollen auf der Simaunterlage hat, wie ich es an anderer Stelle gezeigt habe [1]), säkulare Verlagerungen der Rotationspole der Erde zur Folge, unabhängig davon, ob sich die Kontinente gegen einander verschieben oder nicht. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ der Polverlagerung erscheint dabei durch den Ausdruck

$$\mathfrak{v} = \frac{\varkappa}{2(C-A)} \operatorname{grad} \Omega \tag{1}$$

veranschaulicht.

Hinsichtlich der in obigem Ausdruck vorkommenden Grössen ist folgendes mitzuteilen. Wenn die Kontinentalschollen auf die Dichte der Simaunterlage kondensiert wären, würde der Erdkörper durch ein glattes Ellipsoid, das innere Referenzellipsoid, begrenzt erscheinen. Die Trägheitshauptmomente des derart geformten Erdkörpers sind oben mit A, B, C, $(B = A)$ bezeichnet worden. Das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen, durch den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse sei J. Denkt man sich die Kontinentalschollen auf ihre normale Dichte vertikal ausgedehnt, so wird sich das Trägheitsmoment J um

1) Säkulare Verlagerungen der Rotationspole der Erde. Berichte der königl. serbischen Akademie 1932. Vollinhaltlich übersetzt und veröffentlicht als das Kapitel 28 des Bandes 1 des Gutenbergschen Handbuchen der Geophysik. Berlin 1932.

einen bestimmten Betrag Ω verändern. Die oben vorkommende Grösse Ω kann als das Trägheitsmoment der Sialdecke bezüglich der in Betracht gezogenen Achse bezeichnet werden. Jedem Punkt der Erdoberfläche kann also ein bestimmter Wert der Grösse Ω zugeordnet werden, als das Trägheitsmoment der Sialdecke bezüglich der durch diesen Punkt und den Erdmittelpunkt hindurchgehenden Achse. So erscheint die Erdoberfläche als das Feld eines Skalars Ω; der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ der Polbewegung ist dem Gradient dieses Skalars direkt proportional. Die im Proportionalitätsfaktor vorkommende Grösse $\varkappa$ stellt den Anpassungskoeffizient des Erdkörpers dar. Derselbe kann als konstant betrachtet und aus den astronomischen Beobachtungen der Breiteschwankungen ermittelt werden. Die Grössen C und A unterscheiden sich um ausserordentlich geringe, rechnerisch ermittelbare Beträge von den bekannten Trägheitshauptmomenten des Erdkörpers, während die Grösse Ω aus der Form und Mächtigkeit der Kontinentalschollen berechenbar ist. Auf diese Weise stehen alle erforderlichen Daten zur Berechnung der Polverlagerungen zur Verfügung.

Die Gleichung (1) stellt die Differentialgleichung der Polbewegung dar; hier soll ihre, bisher nicht vorgenommene Integration durchgeführt werden.

Der Berechnung der Grösse Ω muss das gegenwärtige Gradnetz der Erde zu Grunde gelegt werden, weil sich alle Angaben über die Form der Kontinentalschollen auf dasselbe beziehen. Verlegt man also in den Mittelpunkt der Erde den Ursprung O eines orthogonalen Koordinatensystems, dessen Z— Achse nach dem gegenwärtigen Nordpol und dessen X— Achse nach dem Schnittpunkt des Greenwicher Meridianes mit dem Aequator gerichtet ist, und bezeichnet mit φ die geozentrische Breite, mit ψ die geographische Länge eines beliebigen Punktes der Erdoberfläche, so ist

$$(2) \qquad x = r \cos\varphi \cos\psi; \quad y = r \cos\varphi \sin\psi; \quad z = r \sin\varphi .$$

Die erstrebbare Genauigkeit, mit welcher die Polbewegung mathematisch beschrieben werden kann, gestattet oben r als eine Konstante zu betrachten und die geozentrische Breite mit der geographischen zu identifizieren. Seien I_1, I_2, I_3, Λ_1, Λ_2, Λ_3 die Trägheits — bzw. die Deviationsmomente der Sialdecke hinsichtlich der Achsen X, Y, Z, so ist das Trägheitsmoment Ω

der Sialdecke bezüglich einer durch den Ursprung O des Koordinatensystems gehenden Achse, welche mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ einschliesst, dargestellt durch

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\Omega = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma - \\ &- 2\Lambda_1 \cos \beta \cos \gamma - 2\Lambda_2 \cos \gamma \cos \alpha - 2\Lambda_3 \cos \alpha \cos \beta .\end{aligned}$$

Dreht man das Koordinatensystem derart, dass die Deviationsmomente zum Verschwinden gebracht werden, so wird weil

$$(4)\qquad x = r \cos \alpha; \quad y = r \cos \beta; \quad z = r \cos \gamma$$

ist, mit Benützung von (2)

$$(5)\qquad \Omega = I_1 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + I_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \psi + I_3 \sin^2 \varphi,$$

wobei φ und ψ die Polarkoordinaten bezüglich des gedrehten Koordinatensystems bedeuten.

Legt man durch den Punkt $M(\varphi, \psi)$ der Erdoberfläche eine Tangentialebene und in derselben ein orthogonales Koordinatensystem $\xi - \eta$, dessen Ursprung in M und dessen ξ — Achse in der Meridianebene des Punktes M sich befindet und gegen den Aequator gerichtet ist, so kann dieses System zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Poles benutzt werden. Dass sich dasselbe von Punkt zu Punkt ändert, tut nichts zur Sache, weil für die ausserordentlich langsam und mit Ueberwindung von Widerständen verlaufende Polbewegung das Trägheitsgesetz nicht zu berücksichtigen ist, sonst aber die nachstehenden Gleichungen für jeden Punkt der Oberfläche ihre Giltigkeit behalten. Man bekommt auf diese Weise statt der Vektorgleichung (1) folgende zwei Skalargleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\varkappa}{2(C-A)} \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\varkappa}{2(C-A)} \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Es ist, wenn man die Grössen ξ und η im Bogenmass misst, d. h. $r = 1$ setzt

$$(7)\qquad d\xi = -d\varphi; \quad d\eta = \cos \varphi \, d\psi ,$$

und man bekommt statt (6)

(8) $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varkappa}{2(C-A)} \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi},$$

(9) $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varkappa}{2(C-A)} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}.$$

Es folgt daraus

(10) $$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial\psi}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi}}$$

als die Differentialgleichung der Polbahnkurve.

Es ist wegen (5) und (10)

(11) $$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{(I_2 - I_1)\sin 2\psi}{(I_3 - I_2\sin^2\psi - I_1\cos^2\psi)\sin 2\varphi}.$$

Unser Koordinatensystem möge derart orientiert werden, dass das Trägheitsmoment I_1 der Sialdecke bezüglich der X — Achse das Minimum, jenes bezüglich der Z — Achse das Maximum ist, dass also die Ungleichheit besteht

(12) $$I_1 < I_2 < I_3.$$

Setzt man also

(13) $$\frac{I_3 - I_1}{I_2 - I_1} = k,$$

so ist k positiv und überdies

(14) $$k > 1.$$

Die Gleichung (11) kann leicht auf folgende Form gebracht werden

(15) $$k\frac{d\psi}{\sin 2\psi} - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\psi\, d\psi = \frac{d\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

Diese Gleichung lässt sich sofort integrieren und man bekommt

(16) $$\cos\psi \operatorname{tang}^k\psi = C_1 \operatorname{tang}\varphi$$

als die Gleichung der Polbahnkurve.

Die Konstante C_1 ist durch die gegenwärtige Lage der Rotationspole der Erde gegeben. Sind die Koordinaten des Nordpoles im gedrehten Koordinatensystem gleich φ_0 und ψ_0, so ist

$$C_1 = \frac{\cos \psi_0 \operatorname{tang}^k \psi_0}{\operatorname{tang} \varphi_0}. \tag{17}$$

Hat man die Gleichung (16) der Polbahnkurve im gedrehten Koordinatensystem ermittelt, so lässt sich dieselbe ohne weiters auf das ursprüngliche Koordinatensystem, d. h. auf das gegenwärtige Gradnetz der Erde transformieren.

Es folgt aus (9) und (5)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\varkappa (I_2 - I_1)}{2(C - A)} \sin 2\psi, \tag{18}$$

d. h. durch Integration

$$\operatorname{tang} \psi = C_2 \, e^{\frac{\varkappa (I_2 - I_1)}{C - A} t}. \tag{19}$$

Wird Zeit von der Gegenwart aus gezählt, so ist

$$C_2 = \operatorname{tang} \psi_0 \tag{20}$$

zu setzen.

Durch die vorstehenden Gleichungen ist nicht nur die Polbahnkurve, sondern auch der zeitliche Verlauf der Polbewegung eindeutig gegeben. Dabei kommt es nur auf die nummerische Ausrechnung der Grössen I_1, I_2, I_3 Λ_1, Λ_2, Λ_3 an. Die Ergebnisse dieser Ausrechnung werden im Band VIII des Gutenbergschen Handbuches der Geophysik veröffentlicht werden.

Jntégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre par les éléments intégrables.

Par

NICOLAS SALTYKOW.

1. Dans les pages qui vont suivre, il s'agit d'étudier en détail le problème qui se pose toutes les fois que l'on a un élément intégrable d'une équation, ou d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles à une fonction inconnue de plusieurs variables indépendantes.

Considérons, pour fixer les idées, le système des m équations en involution,

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} F_k\,(x_1, x_2, \ldots, x_n,\; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0\,, \\ k = 1, 2, \ldots, m\,, \end{array} \right.$$

vérifiant la condition

$$\text{(2)} \qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{p_1, p_2, \ldots, p_m}\right) \gtreqless 0\,,$$

Formons, maintenant, le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles de la fonction inconnue f, à savoir:

$$\text{(3)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} (F_k\,, f) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m\,, \end{array} \right.$$

les parenthèses désignant celles de Poisson.

Si l'on connaît le système complet des intégrales distinctes de ce dernier système (3), dont les m premières intégrales sont représentées par les fonctions figurant aux premiers membres des équations (1), alors l'intégrale complète du système (1) s'obtient, comme il est bien connu, par une quadrature (v. *N. Saltykow. — Sur la Théorie des Equations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue.* Mémoires de l'Académie R. de Beglique Cl. des Sc. Col. in 4°. Deux. Série, t. VI, fasc. 4. Bruxelles 1925. Chapitre III, n° 24, p. 44).

2. Le sujet de cette Note concerne un système incomplet des intégrales distinctes formant un *élément intégrable* du système lineaire (3) Dans ce dernier cas, comme on le sait bien le problème d'intégration des équations (1) se réduit au premier problème que l'on vient de citer. Mais, dans cette dernière hypothèse, le système (1) sera remplacé par un autre, d'une forme toute particulière, jouissant de certaines propriétés que l'on va étudier dans les lignes suivantes.

Supposons, par exemple, que *l'élément intégrable* du système (1) soit donné par l'ensemble des intégrales distinctes du système (3), à savoir:

$$(4) \qquad F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho-m}, \ (\varrho < n-m),$$

formant un groupe fonctionnel.

Cela veut dire qu'en plus *des m fonctions distinguées évidentes* $F_1, F_2, \ldots, F_m$, le groupe (4) posséde encore μ fonctions distinguées que l'on va désigner par

$$(5) \qquad F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_{m+\mu},$$

où l'on a

$$(6) \qquad m+\mu+\varrho = n$$ [1].

Il est alors évident que le problème de l'intégration du système donné (1) revient à intégrer le système des $m+\mu$ équations en involution

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{c} F_k = 0; \quad F_{m+i} = C_i \\ k=1, 2, \ldots, m; \quad i=1, 2, \ldots, \mu, \end{array} \right.$$

C_i désignant μ constantes arbitraires.

Le système formé (7) jouit de la propriété, que le système linéaire correspondant, à savoir:

---

[1]) v. *N. Saltykow* — Sur la théorie des équations... Chapitre VII n° n° 67, 68, p. 111.

$$(8) \qquad \begin{cases} (F_k, f) = 0; \quad (F_{m+i}, f) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, \mu, \end{cases}$$

posséde le système complet des intégrales distinctes (4).

Il va sans dire que les fonctions distinguées (5) représentent des fonctions des intégrales connues

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho-m}.$$

Si l'on introduit donc l'hypothèse, que

$$(9) \qquad D\left(\frac{F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots, F_{m+\mu}}{f_{n+\rho-m-\mu+1}, f_{n+\rho-m-\mu+2}, \ldots, f_{n+\rho-m}}\right) \gtrless 0,$$

alors le système complet des intégrales (4) peut être remplacé par le systéme suivant des intégrales distinctes:

$$(10) \qquad F_1, F_2, \ldots F_m, F_{m+1}, F_{m+2}, \ldots F_{m+\mu}, f_1, f_2, \ldots f_{n+\rho-m-\mu}.$$

Par conséquent, toutes les fois que l'on connaît les fonctions distinguées (5) du groupe (4), le problème de l'intégration du système (1) revient à celui du n⁰ 1.

3. Or, il est aisé d'étendre ce dernier résultat au cas où les fonctions distinguées (5) restent inconnues.

Comme on le sait, le calcul des fonctions (5) exige l'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue [2]). La généralisation, dont il s'agit, présente l'avantage d'éviter l'intégration du système mentionné définissant les fonctions distinguées (5).

S. Lie avait démontré, que le nombre μ des fonctions (5) peut être néanmoins établi par le calcul algébrique de l'ordre du déterminant caractéristique, à savoir:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2\rho,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\rho,2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2\rho,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,2\rho} & \alpha_{2,2\rho} & \ldots & \alpha_{2\rho,2\rho} \end{vmatrix},$$

[2]) v. *N. Saltykow* — Sur la théorie des équations... Chapitre VII, n⁰ n⁰ 59, 63, p. p. 99, 105.

les α_{is} représentant les parenthèses de Poisson formées par les deux intégrales f_i et f_s.

Le nombre pair 2ϱ désigne l'ordre de ce dernier déterminant caractéristique, $n+\varrho$ étant le nombre total des intégrales connué (4).

Cela étant, les *fonctions distinguées en question sont en nombre égal à l'excès de celui n, des variables indépendantes, sur le nombre* ϱ, c'est-à-dire que d'après l'égalité (6), l'on a:

$$m+\mu \equiv n-\varrho . \tag{11}$$

Ces préliminaires posés, on se passe aisément du calcul des valeurs explicites pour les fonctions distinguées (5), grâce aux considérations suivantes:

Le but de la démonstration requise est de montrer que l'expression

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s , \tag{12}$$

devient une différentielle exacte, en vertu des équations que l'on obtient en égalant à zéro les m premières intégrales (4) et en posant toutes les autres égales à des constantes arbitraires distinctes.

4. Observons, tout d'abord, que si l'on connaît les fonctions distinguées (5) sous leur forme explicite, l'élément intégrable considéré étant représenté par les intégrales (10), le théorème, dont il s'agit, devient un corollaire immédiat de la théorie des caractéristiques généralisées [3]).

Il importe donc à présent de se borner seulement à l'hypothèse de l'existence des fonctions distinguées et à la connaissance de leur nombre, sans connaître leur forme explicite.

Supposons, pour cela, que les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 , \quad F_2 = 0, \ldots , F_m = 0 , \\ f_1 = C_1 , \quad f_2 = C_2, \ldots , f_{n+\rho-m} = C_{n+\rho-m} , \end{array} \right. \tag{13}$$

vérifiant la condition

---

[3]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier — Villars 1931, Chapitre V, n⁰ 22, Chapitre VI, n⁰ 30.

$$(14)\quad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, f_2, \ldots, f_{n+\rho-m}}{p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n, x_{n-\rho+1}, \ldots, x_n}\right) \gtrless 0,$$

nous donnent les formules suivantes:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & x_{n-\rho+j} = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}), \\ & \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho, \\ & p_s = \psi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho-m}), \\ & \quad s = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que ces dernières valeurs (15), étant substituées dans les équations (13), les rendent identiquement satisfaites.

En différentiant, par rapport aux $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}$, les identités obtenues de cette manière, on en tire les nouvelles identités, à savoir:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F_l}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_l}{\partial x_{n-\rho+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = 0 \\ & l = 1, 2 \ldots, m; \quad h = 1, 2, \ldots, n-\varrho. \end{aligned}\right.$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-\rho+j}} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = 0, \\ & \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m; \quad h = 1, 2, \ldots, n-\varrho. \end{aligned}\right.$$

On met, d'autre part, les conditions d'involution que vérifient les équations (13)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & (F_k, F_l) = 0, \quad (F_k, f_\sigma) = 0, \\ & k, l = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, m; \\ & \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m, \end{aligned}\right.$$

sous la forme explicite suivante:

$$\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial x_h} \frac{\partial F_l}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \frac{\partial F_l}{\partial x_{n-\rho+j}} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} = 0,$$

$$k, l = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-\rho+j}} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_s} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m.$$

En substituant dans ces dernières formules les valeurs des dérivées $\frac{\partial F_l}{\partial x_h}$ et $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_h}$ définies par les égalités (16) et (17), il en résulte les nouvelles identités:

$$\sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_l}{\partial x_{n-\rho+j}} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_s} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_s}{\partial p_h} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} + \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \right) = 0,$$

$$l = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-\rho+j}} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}} \right) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_s} \left(\sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} + \frac{\partial F_k}{\partial x_s} \right) = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m.$$

Les identités obtenues, au nombre de $n+\varrho$, sont linéaires et homogènes par rapport à $n+\varrho$ expressions mises en parenthèses, et cela pour chacune des valeurs de l'indice k, à partir de 1 à m.

Puisque le déterminant formé par les coefficients qui se trouvent auprès des expressions citées, est égale à celui du premier membre de l'inégalité (14), il s'ensuit que les expressions mises en parenthèses s'annulent identiquement. On a, donc, les identités suivantes:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} = \frac{\partial F_k}{\partial p_{n-\rho+j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho, \\ & \sum_{h=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = -\frac{\partial F_k}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \\ & \qquad k = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \right.$$

5. Nous allons, à présent, profiter des propriétés que jouissent les fonctions distinguées, dont l'existence à été établie, en les introduisant dans nos considérations théoriques, qui vont être développées. Cela posé, les fonctions distinguées vont disparaître d'elles mêmes dans les formules définitives, dont on devra se servir pour les applications pratiques.

Le point le plus délicat est de montrer que les valeurs antérieurement obtenues (15) doivent encore vérifier identiquement les équations aux dérivées partielles des caractéristiques de N. Saltykow [4]) correspondantes au système en involution (7).

En effet, puisque chacune des suites des fonctions (4) et (10) représente un système complet des intégrales distinctes du système (8), comme il résulte, d'ailleurs, de la définition même des fonctions distinguées, on a les égalités

$$F_{m+i} \equiv \Theta_i\,(f_1, f, \ldots, f_{n+\rho-m}), \qquad i = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{20}$$

où les fonctions Θ_i admettent des valeurs bien déterminées.

La substitution des valeurs (15), dans les égalités (20), produit les identités suivantes:

$$F_{m+i}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-m}, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) =$$
$$= \Theta_i\,(C_1, C_2, \ldots, C_{n+\rho+m}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Il en résulte de nouvelles identités que l'on obtient par différentiation de ces dernières par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F_{m+i}}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \frac{\partial F_{m+i}}{\partial x_{n-\rho+j}}\,\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F_{m+i}}{\partial p_h}\,\frac{\partial \psi_s}{\partial x_h} = 0, \\ &i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad h = 1, 2, \ldots, n-\varrho, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Les fonctions F_{m+i} vérifient de même les conditions d'involution suivantes:

---

[4]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris Gauthier-Villars 1931, p. p. 41 et 48.

$$(F_{m+i}, F_l) = 0, \quad (F_{m+i}, f_\sigma)$$

$$i = 1, 2, \ldots, \mu; \quad l = 1, 2, \ldots, m; \quad \sigma = 1, 2, \ldots, n+\varrho-m.$$

L'application à ces dernières formules et aux égalités (21) et (17) des considérations analogues à celles que l'on vient d'exposer, conduit immédiatement à étendre les formules (19) aux fonctions considérées F_{m+i}.

Nous allons, donc complèter les égalités (19), en les remplaçant par celles qui vont suivre:

$$(22) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_r}{\partial p_{n-\rho+j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho, \\ \sum_{k=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_s}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_r}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \\ \qquad r = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+\mu. \end{cases}$$

6. Grâce à ces dernières, les identités (16) et (21) vont devenir, en y substituant les valeurs des dérivées $\frac{\partial F_r}{\partial x_h}$, $\frac{\partial F_r}{\partial x_{n-\rho+j}}$ et $\frac{\partial F_r}{\partial p_{n-\rho+j}}$, tirées des formules (22):

$$(23) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \left[\frac{\partial \psi_h}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_h} - \frac{\partial \psi_{n-\rho+j}}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) \right] = 0, \\ \qquad r = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+\mu; \quad h = 1, \ldots, n-\varrho. \end{cases}$$

Observons que la relation citée antérieurement (11) démontre l'égalité des deux nombres

$$m+\mu \quad \text{et} \quad n-\varrho,$$

Les égalités (23) sont linéaires et homogènes par rapport aux expressions qui y figurent entre crochets. Supposons, de plus, que le déterminant fonctionnel

$$(24) \qquad D\left(\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m, F_{m+1}, \ldots, F_{n-\rho}}{p_1, p, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_{n-\rho}}\right)$$

---

[5] N. *Saltykow*. — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars, 1931 p. 47 nº 25.

soit différent de zéro.

Si cette dernière hypothèse n'avait pas lieu, il suffirait de faire la transformation des variables d'après les indications de la théorie dite de perfectionnement [5]).

Revenant à l'hypothèse que le déterminant (24) n'était pas nul, considérons le système de $m+\mu \equiv n-\varrho$ égalités (23) correspondantes à une valeur quelconque de l'indice h.

Il en résulte les $n-\varrho$ identités suivantes

$$\frac{\partial\psi_h}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi_k}{\partial x_h}+\sum_{j=1}^{\rho}\left(\frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_h}-\frac{\partial\psi_{n-\rho+j}}{\partial x_h}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right)=0\,,$$

$$k=1,2,\ldots,n-\varrho\,,$$

et cela pour chaque valeur de l'indice h, à partir de 1 jusqu'a $n-\varrho$.

Or, les identités obtenues se mettent bien sous la forme comme il suit:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\psi_h+\sum_{j=1}^{\rho}\psi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_h}\right)=\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\psi_k+\sum_{j=1}^{\rho}\psi_{n-\rho+j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right),$$

pour toutes les valeurs distinctes des deux indices k et h, à partir de 1 jusqu'à $n-\varrho$.

Les identités que l'on vient d'obtenir démontrent que les expressions des variables (15) rendent effectivement la relation (12) une différentielle exacte.

Donc l'intégration du système considéré (1) s'achève par la quadrature de cette dernière différentielle exacte et par des éliminations algébriques [6]).

7. Comme application de la théorie exposée considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue à trois variables indépendantes, à savoir

$$(25) \qquad F_1 \equiv (p_1+x_2)\,(p_2+x_3)\,(p_3+x_1)-a=0 \;^{7)}.$$

Les équations différentielles des caractéristiques correspondantes possédent trois intégrales

---

[6]) *N. Saltykow.* — Sur la théorie des équations... Chapitre VI, p. 76.

[7]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier-Villars. 1931, p. 28 nº 15.

$$(26) \quad f_1 \equiv p_1 + x_3 = C_1; \quad f_2 \equiv p_2 + x_1 = C_2; \quad f_3 \equiv p_3 + x_2 = C_3,$$

vérifiant les conditions

$$(f_1, f_2) \equiv 1, \quad (f_1, f_3) \equiv -1, \quad (f_2, f_3) \equiv 1,$$

C_1, C_2, C_3 étant trois constantes arbitraires distinctes.

Le déterminant caractéristique étant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \equiv 1 \gtrless 0,$$

il s'ensuit que $\varrho \equiv 1$ et qu'en effet le groupe des intégrales citées engendre un élément intégrable.

Par conséquent, dans le cas considéré, la formule (12) devient une différentielle exacte, en vertu de l'équation (25) et des intégrales données (26).

En effet, ces dernières relations nous donnent les formules suivantes:

$$x_3 = \frac{1}{2}(C_3 - C_1 + x_1 + x_2 \pm R),$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_3 - x_1 - x_2 \mp R),$$

$$p_2 = C_1 - x_1, \qquad p_3 = C_2 - x_2,$$

où l'on a posé

$$R \equiv \sqrt{(C_1 + C_3 + x_2 - x_1)^2 + \frac{4a}{x_2 - x_1 - C_2}},$$

Il en découle pour dz la différentielle exacte:

$$dz = \frac{1}{2}(C_1 + C_3 - x_1 - x_2 \mp R)\, dx_1 + (C_1 - x_1)\, dx_2$$

$$+ \frac{1}{2}(C_2 - x_2)\, d\,(x_1 + x_2 \pm R),$$

dont l'intégrale s'obtient par une quadrature sous la forme suivante

$$z = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + C_3)\, x_1 + \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) x_2 - x_1 x_2 - \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{4}$$

$$\pm\frac{1}{2}(C_2-x_2)\,R\pm\frac{1}{2}\int Rd\,(x_2-x_1)+C\,,$$

C étant la constante arbitraire additive.

L'intégrale complète de l'équation donnée (25) en dérive par les opérations d'éliminations algébriques, qui viennent d'être mentionnées.

Sur une inégalité relative aux fonctions convexes.

Par

JOVAN KARAMATA.

Soient donnés n nombres x_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, situés tous dans un intervalle (a, b). Jensen [1]) a montré que l'inégalité

$$(1) \qquad f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$$

est valable pour toute fonction $f(x)$ convexe dans l'intervalle (a, b). Cette inégalité fournit une borne inférieure à la somme $\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)$. En cherchant à déterminer une borne supérieure à cette même somme je suis arrivé à me poser la question suivante:

Soient x_ν et X_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$, $2n$ nombres situés dans un intervalle (a, b). Quelles relations mutuelles doit-il exister entre ces nombres pour que l'inégalité

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(X_\nu),$$

ait lieu pour toute fonction $f(x)$ convexe dans (a, b)?

En désignant par $x(t)$, resp. $X(t)$, le nombre des x_ν, resp. X_ν, inférieurs ou égals à t, c. à. d.

---

1) *J. Jensen,* Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematica *30,* p. 175—193 (1905).

$$x(t) = \sum_{x_\nu \leq t} 1 \quad \text{et} \quad X(t) = \sum_{X_\nu \leq t} 1 \,, \tag{3}$$

les expressions figurant dans l'inégalité (2) peuvent s'exprimer sous forme d'integrales de Stieltjes, de sorte que la question proposée revient à la suivante:

$x(t)$ et $X(t)$ étant deux fonctions non decroissantes dans (a, b), à quelles conditions doivent-elles satisfaire pour que l'inégalité

$$\int_a^b f(t)\, d\{x(t)\} \leqslant \int_a^b f(t)\, d\{X(t) \tag{4}$$

ait lieu pour toute fonction $f(t)$ convexe dans (a, b)?

Or, pour que l'inégalité (4) ait lieu pour toute fonction convexe il faut qu'elle soit verifiée par toute fonction linéaire $at+b$. Mais les constantes a et b pouvant prendre des signes quelconques l'inégalité (4) n'aura lieu que lorsque

$$\int_a^b d\{x(t)\} = \int_a^b d\{X(t)\} \quad \text{et} \quad \int_a^b t d\{x(t)\} = \int_a^b t d\{X(t)\}\,. \tag{5}$$

En prenant, en particulier, $x(a) = X(a) = 0$, ce qui ne restreint pas la généralité, ces conditions prennent la forme

$$x(a) = X(a) = 0\,, \quad x(b) = X(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b x(t)\, dt = \int_a^b X(t)\, dt\,. \tag{6}$$

D'autre part, puisque toute fonction convexe $f(t)$, à un terme linéaire $at+b$ près, peut être uniformement approximée par des sommes de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,n} \left| t - u_{\nu,n} \right| \quad \text{à coefficients} \quad a_{\nu,n} \geqslant 0\,,$$

pour que l'inégalité (4) soit satisfaite pour toute fonction convexe $f(t)$ il faut et il suffit que les conditions (5) soient satisfaites, et que l'on ait

$$\int_a^b |t-u|\, d\{x(t)\} \leqslant \int_a^b |t-u|\, d\{X(t)\} \tag{7}$$

pour tout u.

Or, en supposant que les conditions (6) sont satisfaites, il est facile de voir que la condition (7) est équivalente à la suivante:

il faut et il suffit, outre les conditions (6), que l'on ait

$$(8) \qquad \int_a^u x(t)\,dt \leqslant \int_a^u X(t)\,dt, \quad \text{pour tout} \quad a \leqslant u \leqslant b.$$

En effet, en posant

$$2\max(x, y) = |x-y| + (x+y),$$

d'après (5) et (7) on a

$$\int_a^b \max(t, u)\, d\{x(t)\} \leqslant \int_a^b \max(t, u)\, d\{X(t)\},$$

c. à. d.

$$u\int_a^u d\{x(t)\} + \int_u^b t\,d\{x(t)\} \leqslant u\int_a^u d\{X(t)\} + \int_u^b t\,d\{X(t)\},$$

d'où, en tenant toujours compte des relations (6), l'on obtient facilement l'inégalité (8). Inversement de l'inégalité (8) et des relations (6) il résulte l'inégalité (7).

Cela nous conduit au résultat suivant:

Pour que l'inégalité (4) *soit vérifiée pour toute fonction convexe* $f(t)$, *il faut et il suffit que les conditions* (6) *et* (8) *soient satisfaites.*

Pour appliquer ce résultat à l'inégalité (2) il est préférable d'exprimer la condition (8) sous une autre forme, qui découle du lemme suivant:

Lemme. *Soient* $x(t)$ *et* $X(t)$ *deux fonctions non décroissant dans* (a, b) *et satisfaisant aux conditions* (6); *soient* $y(t)$ *et* $Y(t)$ *leurs inverses. De l'inégalité* (8) *il résulte*

$$(9) \qquad \int_0^u y(t)\,dt \geqslant \int_0^u Y(t)\,dt, \quad o \leqslant u \leqslant x(b) = X(b),$$

et inversement.

Or, en prenant pour $x(t)$ et $X(t)$ les fonctions définies par (2), les x_ν et X_ν étant supposés rangés par ordre de grandeur, on a

$$\int_0^k y(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \quad \text{et} \quad \int_0^k Y(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{k} X_\nu\,, \quad k=1, 2, 3, \ldots, n,$$

de sorte que ces résultats, appliqués aux sommes (2) nous fournissent, en définitif le

Théorème. *Pour que l'inégalité*

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} f(X_\nu)$$

ait lieu pour toute fonction convexe $f(t)$, il faut et il suffit que

$$(10) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} X_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu\,, \quad \textit{pour tout} \quad k=1, 2, 3, \ldots, n-1\,,$$

et

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\,,$$

les nombres x_ν et X_ν étant supposés rangés par ordre de grandeur.

Remarquons enfin, que ce résultat contient comme cas particulier l'inégalité (1) de Jensen. Car en multipliant l'inégalité (1) par n, elle prend la forme de l'inégalité (2) où tous les termes du membre gauche sont égaux entre eux. Et pour s'assurer que dans ce cas les conditions (10) et (11) sont vérifiées il suffit de remarquer que, les x_ν étant rangées par ordre de grandeur, on a

$$\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} x_\nu \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\,,$$

pour tout $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$; pour $k=n$ l'égalité ayant évidemment lieu.

Beograd, le 13 mai 1932.

Sur une fonctionnelle.

Par

MICHEL PETROVITCH.

Soit

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \tag{1}$$

une suite de nombres réels positifs; $f(x)$ une fonction réelle et convexe dans un intervalle (a, b) contenant la suite (1).

Désignons par μ et M la moyenne arithmétique des x_i et celle des $f(x_i)$, de sorte que

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p},$$

$$M = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_p)}{p}.$$

Il est manifeste que M ne peut pas être considérée comme fonction de μ. Néanmoins, à une variation *donnée* de μ ne correspondent guère une variation entièrement *arbitraire* de M: entre les deux variations existe une certaine loi de dépendance exprimable sous la forme suivante:

La valeur M varie autour de la valeur moyenne

$$\frac{f(p\mu) + pf(\mu) + (p-1)f(0)}{2p} \tag{2}$$

et l'amplitude de ces variations, ne pouvant jamais être dépassée, mais pouvant être effectivement atteinte pour une fonction $f(x)$ quelconque, aura pour valeur

$$(3) \qquad \frac{f(p\mu)-pf(\mu)+(p-1)\,f(0)}{2p}.$$

Pour démontrer cette proposition, remarquons d'abord qu'elle exprime la double inégalité

$$(4) \qquad f(\mu) \leqslant M \leqslant \frac{(p-1)\,f(0)+f(p\mu)}{p}$$

et nous allons montrer que celle-ci est valable pour tout x_k positif et pour toute fonction $f(x)$ convexe dans l'intervalle (a, b).

En ce qu'il concerne la première inégalité (4), c'est l'inégalité bien connue de Jensen valable pour tout x_k réel. Quand à la seconde, elle ne se trouve démontrée dans un de mes travaux [1]) que pour les fonctions $f(x)$ analytiques et à coefficients tayloriens positifs. Cette inégalité est pourtant valable pour toute fonction $f(x)$ convexe dans (a, b), ce que l'on peut montrer en la déduisant d'une proposition plus générale démontrée par *M.* J. Karamata dans son travail paru dans ce même volume (p. 145).

La proposition est la suivante:

Pour que l'inégalité

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{p} f(\,x_k\,) \leqslant \sum_{k=1}^{p} f(\,X_k\,),$$

ait lieu pour toute fonction $f(x)$ convexe, il faut et il suffit qu'on ait

$$(6) \qquad X_1+X_1+\,.\,.\,.\,+X_k \leqslant x_1+x_2+\,.\,.\,.\,+x_k$$

pour tout k égal à $1, 2, \ldots, (p-1)$ et

$$(7) \qquad X_1+X_2+\,.\,.\,.\,+X_p = x_1+x_2+\,.\,.\,,\,+x_p\,,$$

les x_k et X_k étant supposés rangés par ordre de grandeurs croissantes.

En y prenant

$$(8) \qquad \begin{aligned} X_1 &= X_2 = \ldots = X_{p-1} = 0\,, \\ X_p &= x_1+x_1+\ldots+x_p\,, \end{aligned}$$

les conditions (6) et (7) seront satisfaites pour tout x_k positif, de sorte que l'inégalité (5) dévient

[1]) *Théorème sur la moyenne arithmétique des quantités positives* (*Enseign. mathém.* mai-juillet 1916; Genève).

$$\sum_{k=1}^{p} f(x) \leqslant (p-1)\, f(0) + f(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)$$

et équivaut à la seconde inégalité (4) qu'il fallait démontrer.

Remarquons que les limites inférieure et supérieure de M, assignées par la double inégalité (4), *sont effectivement atteintes pour une fonction* $f(x)$ *convexe quelqonque.* La limite inférieure est atteinte lorsque tous les x_k sont égaux entre eux, et la limite supérieure lorsqu'ils sont tous nuls, sauf un seul parmi eux.

L'amplitude des variations de M autour de la valeur moyenne (2) s'exprime ainsi à l'aide de la moyenne arithmétique μ de la fonctionnelle

$$\Delta\,(f, p) = \frac{f(px) - pf(x) + (p-1)\, f(0)}{p}, \tag{9}$$

appliquée à la fonction $f(x)$ et à l'entier p.

2. La fonctionnelle $\Delta\,(f, p)$ jouit de la propriété arithmétique indiquée dans ce qui suit.

Designons comme *nombre* e_p *rattaché à l'entier* p, tout nombre entier positif n pour lequel la difference $p^{n-1} - 1$ est divisible par n sans que p le soit. Désignons par E_p l'ensemble des nombres e_p. Cet ensembe contient tous les *nombres premiers* ne divisant pas p (théorème de Fermat); pour qu'un nombre n, faisant partie de E_p, soit un nombre premier, il suffit que p^x ne soit divisible par n pour x égal à une partie aliquote de $n-1$ (théorème de E. Lucas). L'ensemble E_p contient également des *nombres* e_p *composés* ne satisfaisant pas à la dernière condition; ces nombres sont d'ailleurs rares. Le plus petit nombre composé parmi les e_2 est le nombre

$$e_2 = 341 = 11 \,.\, 31;$$

viennent ensuite les nombres

$$e_2 = 1105 = 5 \,.\, 13 \,.\, 17,$$

$$e_2 = 4369 = 17 \,.\, 257 \quad \text{etc.}$$

Pour que, par exemple, un nombre entier, compris entre 2 et 341, soit un nombre e_2, il faut et il suffit qu'il soit premier.

Pour qu'un entier, compris entre 2 et 4369 soit un nombre e_2, il faut et il suffit qu'il soit premier ou bien qu'il soit 1105.

Faisons parcourir à α la suite des nomdres entiers $n = e_p$ et calculons la suite d'entiers correspondants

$$\lambda_n = \frac{p^{n-1}-1}{n} .$$

Les points du plan, désignés comme *points de Fermat rattachés à l'entier p*, sont les points (α, β) ayant pour abscisse un nombre

$$\alpha = n = e_p$$

et pour ordonnée le nombre correspondant

$$\beta = \lambda_n .$$

Ainsi, dans le cas $p = 2$, ce sont les points ayant pour coordonnées

$$(3, 1), \quad (5, 3), \quad (7, 9), \quad (11, 93), \quad (13, 315) \quad \text{etc.}$$

Ceci étant, soit

$$(10) \qquad \Delta\,(f, p) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

le dévelloppement de la fonctionnelle Δ; son rayon de convergence sera $\frac{R}{p}$ où R désigne le rayon de convergence de la série

$$(11) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

La propriété en question consiste alors en ceci:

Le coefficient b_n est un multiple entier de na_n pour tout rang n égal à un nombre e_p; il est un multiple fractionnaire irreductible de na_n pour tout autre rang n.

Car on trouve

$$b_0 = 0\,, \quad b_1 = 0\,, \quad b_n = (p^{n-1} - 1)\, a_n\,;$$

pour que $\frac{p^{n-1}-1}{n}$ soit un entier, il faut et il suffit que n soit un nombre e_p.

Il s'en suit que le double de l'amplitude (3) est développable en série des puissances de la moyenne arithmétique μ

$$h_2 \mu^2 + h_3 \mu^3 + \ldots$$

dont le coefficient h_n est un multiple de na_n pour n égal à un nombre e_p et un multiple fractionnaire irreductible pour tout autre rang n.

Dans le cas, par exemple, ou les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont tout compris dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{p}\right)$, et la fonction $f(x)$ étant

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

on voit que la valeur de la moyenne arithmétique

$$M = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \ldots + \frac{1}{1-x_p}\right],$$

varie autour de sa valeur moyenne

$$\frac{1}{2p}\left[\frac{1}{1-p\mu} + \frac{p}{1-\mu} + p - 1\right],$$

l'amplitude des variations étant la moitié de

$$\frac{1}{p}\left[\frac{1}{1-p\mu} - \frac{p}{1-\mu} + p - 1\right] = h_2\mu^2 + h_3\mu^3 + \ldots$$

où

$$h_n = p^{n-1} - 1 .$$

Pour que, le rang n étant compris entre 2 et 341, le coefficient h_n du développement

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-2x} - \frac{2}{1-x}\right],$$

soit un multiple entier de n, il faut et il suffit que n soit premier.

Envisageons encore la fonctionnelle

$$(12) \quad \Delta(f, p) - mxf' = \frac{1}{p}\left[f(px) - pf(x) + (p-1) f(0)\right] - mxf'(x),$$

où m est un paramètre. Son développement suivant les puissances de x a pour coefficient de x^n l'expression

$$(p^{n-1} - mn - 1)\, a_n ;$$

pour qu'il soit nul, il faut et il suffit ou bien que a_n soit nul ou bien que

$$m = \frac{p^{n-1} - 1}{n} .$$

Il s'en suit que: *pour que le terme d'un rang n soit un terme lacunaire du développement* (12), *il faut et il suffit que point* (m, n) *soit un point de Fermat rattaché à p, ou bien que n coincide avec le rang d'un terme lacunaire de* $f(x)$.

3. D'après ce qui précéde l'intégrale

$$(13) \qquad \Delta_1 (f, p) = \int_0^x \Delta (f, p) \frac{dx}{x}$$

est une fonctionnelle jouissant de la propriété que *le coefficient* g_n *de son développement*

$$(14) \qquad \Delta_1 (f, p) = g_2 x^2 + g_3 x^3 + \ldots$$

est un multiple entier du coefficient a_n *toutes les fois que n est un nombre* e_p *; c'est un multiple fractionnaire de* a_n *pour tous les autres rangs n.*

Car on a

$$g_n = \frac{p^{n-1}-1}{n} a_n .$$

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$(15) \qquad \Delta_1 (f, 2) = \frac{1}{2} \int_0^x [f(2x) - 2f(x) + f(0)] \frac{dx}{x},$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque positive et convexe dans l'intervalle (a, b), holomorphe pour $x=0$. Pour que, le rang n compris entre 2 et 341, le coefficient g_n soit multiple entier du coefficient correspondant a_n de $f(x)$, il faut et il suffit que n soit premier.

Dans le cas particulier où

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

on trouve que

$$\Delta_1 (f, 2) = \frac{1}{2} \log \frac{(1-x)^2}{1-2x},$$

et cette fonction jouit, en effet, de la propriété que son coefficient de x_n est un nombre entier ou fractionnaire suivant que n

est un nombre e_2 ou non. Parmi les coefficients dont le rang est compris entre 2 et 341, ceux dont le rang est un nombre premier, sont des entiers; les coefficients de rang égal à un nombre composé sont des nombres fractionnaires.

Envisageons encore l'intégrale curvilique

$$(16) \qquad J(\alpha, \beta) = \int \frac{\Delta(f, p) - \beta f}{z^{\alpha+1}} dz,$$

[où f désigne $f(z)$, α et β étant deux paramètres], prise le long d'un contour fermé ne contenant aucune singularité de f.

Comme l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^{\alpha+1}}$$

est nulle pour toute valeur entière de α, l'intégrale J se réduit à

$$J(\alpha, \beta) = \int \left[\frac{1}{p} f(pz) - \beta f(z)\right] z^{-\alpha} dz.$$

L'équation indéterminée $J(\alpha, \beta) = 0$ a une infinité de solutions en nombres entiers positifs: *pour qu'une paire d'entiers positifs* (α, β) *en soit une, il faut et il suffit: ou bien que le point* $(\alpha-1, \beta)$ *soit un point de Fermat rattaché à l'entier* p, *ou bien que* $\alpha-1$ *coïncide avec le rang d'un terme lacunaire du développement de* $f(z)$.

Car on trouve pour α entier

$$J(\alpha, \beta) = (\lambda_{\alpha-1} - \beta)\, a_{\alpha-1}.$$

Si l'on prend pour le contour d'intégration le cercle ayant pour centre l'origine, et pour rayon une longuer plus petite que $\frac{R}{p}$, on aura une proposition analogue pour les intégrales definies de la forme

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{p} f(pre^{ti}) - \beta f(re^{ti})\right] e^{-\alpha ti}\, dt.$$

Pour α entier l'intégrale a pour valeur

$$2\pi r^{\alpha} (\lambda_{\alpha} - \beta)\, a_{\alpha}$$

de sorte que, par exemple, l'intégrale

$$H(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} f(2re^{ti}) - \beta f(re^{ti}) \right] e^{-\alpha ti} dt ,$$

jouit de la propriété suivante:

Pour que $H(\alpha, \beta)$ s'annule en un point (α, β = entiers positifs) du plan $\alpha 0 \beta$, compris entre les deux droites $\alpha = 2$ et $\alpha = 341$, il faut et il suffit: ou bien que α soit un nombre premier et β l'ordonné du point de Fermat correspondant, ou bien que α coincide avec le rang d'un terme lacunaire de $f(z)$.

La proposition s'applique manifestement à des intégrales réelles de la forme

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t, \beta) \cos \alpha t \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \Phi(t, \beta) \sin \alpha t \, dt ,$$

dépendant d'une fonction $f(z)$ convexe arbitraire, et où le paramètre β figure linéairement, ainsi qu'aux solutions entières purement imaginaires d'intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t, \beta) e^{\alpha t} dt .$$

Sur les séries de fractions rationnelles.

Par

PAUL MONTEL.

1. Considérons une suite de fonctions

$$(1) \qquad f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots,$$

holomorphes dans un domaine (D) du plan de la variable complexe z. Comme on sait, il revient au même de considérer la convergence d'une suite ou celle d'une série; pour étudier cette convergence, on peut supposer que les fonctions de la suite soient des polynomes puisque chaque fonction $f_n(z)$ peut être remplacée par un polynome qui en diffère en module de moins de $\frac{1}{n}$ lorsque z appartient au domaine (D).

On dit que la suite (1) converge uniformément en un point du domaine, lorsque la convergence est uniforme dans un cercle ayant ce point pour centre: l'ensemble des points de convergence uniforme est un ensemble ouvert. En un point z_0 où la suite ne converge pas uniformément, ou bien la suite n'est pas convergente dans un cercle arbitraire de centre z_0, ou bien la convergence n'est pas uniforme dans ce cercle. L'ensemble E des points z_0 est un ensemble fermé.

Supposons que la suite (1) converge en chaque point du domaine (D) vers une valeur limite finie. Dans ce cas, l'ensemble E est non dense dans ce domaine. En d'autres termes, comme l'a démontré M. Osgood [1]), dans tout domaine intérieur à (D),

[1]) Annals of Mathematics, 2e s., t. III, nº 1.

il en existe un autre dans lequel la suite converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$ qui est nécessairement holomorphe dans ce domaine partiel. Ces domaines partiels peuvent être en infinité dénombrable; la fonction limite $f(z)$ peut coïncider dans chacun d'eux avec des fonctions holomorphes toutes différentes et ce cas peut se présenter même lorsque la fonction limite est une fonction continue [2]).

Les points frontières des domaines de convergence uniforme forment l'ensemble E des points de convergence non uniforme. Cet ensemble est parfait, continu et d'un seul tenant avec la frontière du domaine [3]). Les points de l'ensemble E sont les points irréguliers de la famille des fonctions $f_n(z)$, c'est-à-dire les points du domaine en lesquels la famille n'est pas normale. Autour de chaque point z_0, les fonctions $f_n(z)$, prennent dans leur ensemble une infinité de fois chaque valeur sauf une valeur au plus.

Sur l'ensemble E, la fonction $f(z)$ est une fonction de première classe de Baire: elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. On a récemment caractérisé les ensembles E et les fonctions $f(z)$ tels qu'il existe une suite de fonctions holomorphes convergeant vers $f(z)$ et admettant les points de l'ensemble E comme points de convergence non uniforme [4]).

2. Une fonction continue arbitraire de z ne peut donc être representée comme limite d'une suite de polynomes en z. Il est nécessaire, dans le cas général, d'introduire une série double de polynomes [5]). Mais un polynome ou une fonction holomorphe de z sont des fonctions qui admettent un valeur exceptionnelle: la valeur infinie. Ne pourrait-on obtenir une représentation de toute fonction continue de z comme limite d'une suite de fonctions n'ayant aucune valeur exceptionnelle c'est-à-dire de fonctions méromorphes ou rationnelles? Nous allons voir qu'il n'en est rien et que les suites convergentes de fonctions méromorphes possèdent aussi la propriété de converger uniformément en des

---

[2]) *P Montel*, Sur les séries de fonctions analytiques (Bulletin des Sciences mathématiques, 2e s., t. XXX, 1906).

[3]) *P. Montel*, Sur les suites infinies de fonctions (Annales Sc. de l'Ecole Normale supérieure, 3e s., t. XXIV, 1907).

[4]) *Lavrentieff*, Sur un problème de M. Montel (Comptes-Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris, 1927). — *Hartogs* et *Rosenthal*, Ueber Folgen analytischer Funktionen (Math. Annalen, 1928).

[5]) *H. Lebesgue*. Sur la représentation analytique des fonctions continues (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1903, p. 82).

points dont l'ensemble est partout dense, en sorte que la fonction limite est formée par la réunion de fonctions analytiques.

Il est nécessaire au préalable de rappeler les définitions relatives à la convergence des suites de fonctions méromorphes. On dit que la convergence est uniforme en un point où une suite $f_n(z)$ de telles fonctions a une valeur limite finie $f(z)$, si, dans un cercle ayant ce point pour centre, la différence $f(z) - f_n(z)$ a un module inférieur à tout nombre donné ε, lorsque n est assez grand. En un point où la valeur limite et infinie, on remplace $f(z)$ et $f_n(z)$ par $\frac{1}{f(z)}$ et $\frac{1}{f_n(z)}$. La fonction limite $f(z)$ est méromorphe autour d'un point de convergence uniforme.

On obtient des définitions plus symétriques en représentant les valeurs complexes Z au moyen d'une projection stéréographique du plan complexe sur une sphère de Riemann, à partir d'un point de cette sphère qui correspond au point à l'infini du plan. A la valeur Z correspond le point P de la sphère qui en est l'image; à la distance des deux points Z et Z' du plan, on fait correspondre la distance sphérique des images P et P' de ces points, c'est-à-dire la longueur du plus petit arc de grand cercle qui les joint, distance que l'on représente par la notation $[Z, Z']$. Les fonctions méromorphes deviennent ainsi des fonctions continues sur la sphère ou sphériquement continues. Une suite $f_n(z)$ de fonctions méromorphes converge vers la limite $f(z)$ si la distance sphérique $[f(z), f_n(z)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; la convergence est uniforme autour d'un point si cette distance tend uniformément vers zéro autour de ce point; elle est uniforme dans un domaine si chaque point du domaine est un point de convergence uniforme. Enfin, toute suite convergente de fonctions méromorphes dans un domaine (D) peut être remplacée par une suite de fractions rationnelles ayant la même limite.

Ou peut démontrer la proposition suivante: *Si une suite de fonctions $f_n(z)$ méromorphes dans un domaine (D) converge dans ce domaine, l'ensemble des points de convergence non uniforme est non dense dans le domaine (D)* [6]).

---

6) *P. Montel*, Sur les séries de fonctions méromorphes (Comptes-rendus des séances de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 183, p. 1323, 1926). — Ce théorème a été retrouvé par M. Caratheodory par une voie différente (Bull. of the American Mathematical Society, 1928).

En d'autres termes, dans tout domaine intérieur à (D), se trouve un domaine dans lequel la suite converge uniformément. Pour le démontrer, nous établirons que, étant donné un nombre ε positif arbitraire, il existe, dans tout domaine (D_0) intérieur à (D), un domaine en chacun des points duquel l'inégalité

$$(2) \qquad [f_n(z), f_{n'}(z)] \leqslant \varepsilon$$

est vérifiée quels que soient les entiers n et n' supérieurs à n_0.

En effet, ou bien cette inégalité est vérifiée dans (D_0) quels que soient n et n' supérieurs à un entier n_0; ou bien, il existe une infinité de couples d'entiers pour lesquels l'inégalité n'est pas vérifiée quel que soit z. Soient donc n_1 et n_1' $(n_1 < n_1')$ deux entiers tels que, au point z_1, on ait

$$[f_n(z_1), f_{n_1'}(z_1)] > \varepsilon .$$

Les fonctions $f_{n_1}(z)$, $f_{n_1'}(z)$ sont sphériquement continues; il en est de même de leur distance sphérique. On peut donc trouver un domaine (D_1), intérieur à (D_0), en chacun des points duquel on ait

$$[f_{n_1}(z), f_{n_1'}(z)] > \varepsilon .$$

Ou bien l'inégalité (2) est vérifiée dans (D_1), à partir d'un certain rang; ou bien il existe deux entiers n_2 et n_2', vérifiant les inégalités

$$n_1' < n_2 < n_2',$$

et un point z_2 intérieur à (D_1), tel que

$$[f_{n_2}(z_2), f_{n_2'}(z_2)] > \varepsilon .$$

Ou en déduit l'existence d'un domaine (D_2), intérieur à (D_1), pour lequel on a

$$[f_{n_2}(z), f_{n_2'}(z)] > \varepsilon .$$

Et ainsi de suite. Si l'opération se poursuit indéfiniment, on obtient une suite d'indices croissant indéfiniment tels, que

$$[f_{n_p}(z), f_{n'_p}(z)] > \varepsilon$$

dans le domaine (D_p). Soit z_0 un point commun aux domaines emboîtés (D_p); comme la suite converge en z_0, on a

$$[f_n(z_0), f_{n'}(z_0)] \leqslant \varepsilon$$

pour n et n' supérieurs à un entier n_0. Si l'on prend n_p et n'_p supérieurs à n_0, on aboutit à une contradiction. Donc l'opération s'arrête pour une valeur de p. En d'autres termes, il existe un domaine (D'), intérieur à (D_0), pour lequel on a

$$[fn(z), fn'(z)] \leqslant \varepsilon,$$

pour n et n' supérieurs à un entier n_0. Laissons n fixe et prenons un point fixe z_0 dans (D'); on peut choisir un domaine (D'') intérieur à (D') et contenant z_0 pour lequel

$$[fn(z), fn(z_0)] \leqslant \varepsilon,$$

puisque $fn(z)$ est sphériquement continue en z_0; on a alors dans (D''),

$$[fn'(z), fn(z_0)] \leqslant 2\varepsilon.$$

Si l'on a pris $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, on voit que les images des points $fn(z)$ appartiennent à une même calotte sphérique de centre z_0. Les valeurs de la calotte complémentaire sont donc interdites à ces fonctions dans le domaine (D'') et la suite $fn(z)$ est normale dans (D''): on sait que, dans ce cas, la convergence est uniforme et la fonction limite est méromorphe. On remarquera que la valeur infinie n'a pas été exclue de nos raisonnements: quand nous disons que la suite $fn(z)$ converge en un point z, nous entendons que les valeurs $fn(z)$ ont une limite unique, finie ou infinie, lorsque n croît indéfiniment. Nous voyons que la fonction limite $f(z)$ coïncide avec une fonction méromorphe dans chaque région de convergence uniforme. Les points frontières de ces régions, lesquelles peuvent être en infinité dénombrable, forment l'ensemble E des points où la convergence n'est pas uniforme; c'est aussi l'ensemble des points irréguliers de la famille des fonctions $fn(z)$, c'est-à-dire l'ensemble des points en lesquels cette famille n'est pas normale. Cet ensemble est fermé, mais pas nécessairement parfait, comme dans le cas des fonctions holomorphes lorsque la limite $f(z)$ est toujours finie. Autour de chaque point de E, les fonctions $fn(z) - a$ ont, dans leur ensemble, une infinité de zéros, sauf peut-être pour une seule valeur de a si le point est isolé ou pour deux valeurs de a si le point n'est pas isolé.

Dans certains cas, on peut affirmer que l'ensemble E disparaît et que la convergence est uniforme, dans l'intérieur de

(D), vers une fonction méromorphe $f(z)$. Il en est ainsi, en particulier, lorsque les fonctions $fn(z)$ sont univalentes, ou multivalentes d'ordre borné, ou, plus particulièrement, lorsqu'elles ne prennent qu'un nombre borné de fois trois valeurs, fixes ou variables, dont les distances sphériques mutuelles ont une plus petite limite positive.

3. Nous venons d'examiner une famille de fonctions méromorphes $fn(z)$ telles que, en chaque point z du domaine (D), l'ensemble ε_z des valeurs limites des valeurs de ces fonctions se reduise à un nombre unique.

Considérons plus généralement une famille de fonctions $fn(z)$, régulières dans (D), c'est-à-dire, holomorphes ou méromorphes, en infinité dénombrable ou non, et considérons l'ensemble ε_z des valeurs limites des valeurs de ces fonctions au point z. Nous appellerons aussi ε_z l'ensemble des images de ces valeurs limites sur la sphère de Riemann. Nous démontrerons à ce sujet la proposition suivante:

Si l'ensemble des images des valeurs limites des valeurs prises par les fonctions d'une famille pour la valeur z de la variable ne couvre jamais toute la sphère de Riemann, on peut extraire, de toute suite infinie de ces fonctions, une suite partielle dont l'ensemble des points de couvergence uniforme est partout dense dans le domaine (D) où les fonctions de la famille sont régulières.

Soit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots,$$

une suite infinie de valeurs dont les images sur la sphère forment un ensemble partout dense. La notation α_p désignera indifféremment une des valeurs ou son point-image. Soit (D_0), un domaine intérieur à (D), et $fn(z)$ une suite de fonctions de la famille. Ou bien, l'inégalité

$$[fn(z), \alpha_1] \geqslant 1$$

est vérifiée dans le domaine (D_0) à partir d'une certaine valeur de n, ou bien il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles l'inégalité n'est pas vérifiée en tout point de (D_0). Soit alors n_1 un entier et z_1 un point de (D_0), tels que

$$[fn_1(z_1), \alpha_1] < 1\,.$$

Comme la fonction $fn_1(z)$ est continue en z_1, il existe un domaine (D_1), intérieur à (D_0), pour lequel

$$[fn_1(z), \alpha_1] < 1 .$$

Ou bien, l'inégalité

$$[fn(z), \alpha_2] \geqslant \frac{1}{2}$$

est vérifiée dans (D_1) pour n assez grand, ou bien il existe un domaine (D_2), intérieur à (D_1), pour lequel

$$[fn_2(z), \alpha_2] < \frac{1}{2} ,$$

n_2 désignant un entier supérieur à n_1. Et ainsi de suite; ou bien il existe un entier p tel que l'inégalité

$$[fn(z), \alpha_p] \geqslant \frac{1}{p}$$

soit vérifiée dans un domaine (D_p), intérieur à (D_0), à partir d'une certaine valeur de n; ou bien il existe une suite d'entiers

$$n_1, n_2 \ldots n_p \ldots$$

croissant indéfiniment et une suite de domaines emboîtés (D_p) pour lesquels

$$[fn_p(z), \alpha_p] < \frac{1}{p}$$

quel que soit p.

Cette seconde alternative est à rejeter. Soit, en effet, z_0 un point commun à tous les domaines (D_p), je dis que l'ensemble ε_{z_0} couvre toute la sphère. Soit α un point quelconque de cette sphère et

$$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_m}, \ldots ,$$

une suite de points α_n convergeant vers α. On a

$$[fn_{k_m}(z_0), \alpha_{k_m}] < \frac{1}{k_m} ;$$

donc $fn_{k_m}(z_0)$ et α_{k_m} ont la même limite α lorsque m croît indéfiniment. La seconde hypothèse conduit à une contradiction. On a donc, pour une valeur de p,

$$[f_n(z), \alpha_p] \geqslant \frac{1}{p}$$

pour n assez grand. Les valeurs de $f_n(z)$, pour n assez grand, ne sortent pas de la calotte sphérique de centre α_p et de rayon sphèrique $\frac{1}{p}$. La famille $f_n(z)$ est donc normale dans (D_p) et on peut en extraire une suite partielle qui converge uniformément dans l'intérieur de (D_p).

Considérons alors un quadrillage du plan et soient (Q_1), $(Q_2), \ldots, (Q_h)$, les h carrés complétement intérieurs à (D). On peut extraire, de la suite $f_n(z)$, une suite partielle convergeant uniformément dans un domaine intérieur à (Q_1); de cette suite, ou peut extraire une suite nouvelle couvergeant uniformément dans un domaine intérieur à (Q_2), etc.; finalement, on extraiera de la suite donnée, une suite partielle convergeant uniformément dans h domaines respectivement intérieurs aux h carrés $(Q_1), (Q_2), \ldots, (Q_h)$.

Dessinons maintenant une suite de quadrillages au moyen de droites parallèles à deux directions fixes et dont les équidistances seront respectivement $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots$

De la suite donnée $f_n(z)$, on extraiera une suite

$$f_1^1, f_2^1, \ldots, f_n^1, \ldots$$

convergeant uniformément en des points intérieurs à chaque carré du premier quadrillage qui est intérieur à (D). De cette suite, on extraiera une suite nouvelle

$$f_1^1, f_2^2, \ldots, f_n^2, \ldots$$

convergeant uniformément en des points de chaque carré du second quadrillage qui est intérieur à (D). Etc.; on définira une suite

$$f_1^1, f_2^2, \ldots, f_p^p, f_{p+1}^p, \ldots, f_n^p \ldots$$

convergeant uniformément en des points de chaque carré du p^e quadrillage qui est intérieur à (D). La suite diagonale

$$f_1^1, f_2^2, \ldots, f_n^n, \ldots$$

converge uniformément en un ensemble de points partout dense dans (D).

Pour le montrer, considérons les points situés dans le voisinage d'un point z_0 de (D), c'est-à-dire dans un cercle (γ) de centre z_0 et de rayon assez petit. Pour p assez grand, il existera un carré du p^e quadrillage contenu entièrement dans (γ). Dans ce carré, il y a des points de convergence uniforme de la suite f_n^n.

Remarquons que, dans le théorème précédent, on peut remplacer le domaine (D) par un arc de courbe ou un continu arbitraire.

Remarquons aussi que l'on peut remplacer la suite $f_n(z)$ par une famille de fonctions $f_\lambda(z)$ qui dépendent d'un paramètre λ variant d'une manière continue. Les ensembles ε_z correspondront aux valeurs limites des valeurs de $f_\lambda(z)$ lorsque λ tend vers une limite, l'infini par exemple. Tout domaine contiendra un domaine partiel dans lequel l'inégalité

$$[f_\lambda(z), \alpha] \geqslant \delta > 0$$

sera vérifiée pour λ assez grand.

4. Donnons une application du résultat précédent. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan et soit

$$f_\lambda(z) = f(\lambda z), \qquad 0 \leqslant \lambda < +\infty.$$

Lorsque z est un point fixe, de module *un* par exemple, et un nombre réel positif, le point λz décrit la demi-droite qui joint l'origine O au point z et, lorsque λ augmente indéfiniment, l'ensemble ε_z constitue l'ensemble d'indétermination des valeurs de $f(z)$ sur la demi-droite considérée.

Soit ab un arc de la circonférence $|z| = 1$ tel que l'ensemble ε_z ne comprenne jamais tout le plan lorsque z est situé sur ab. D'après le paragraphe précédent, tout arc intérieur à ab contient un arc $a'b'$ tel que

$$[f_\lambda(z), \alpha] \geqslant \delta$$

lorsque z est sur $a'b'$. Donc, dans le secteur $a'Ob'$ limité par les demi-droites Oa' et Ob', les valeurs de $f(z)$, lorsque $|z|$ est assez grand, ont des images qui restent dans une calotte fixe de la sphère de Riemann. La fonction ne peut prendre une infinité de fois aucune des valeurs correspondant à la calotte complémentaire. Donc le secteur $a'Ob'$ ne contient aucune droite J de condensation des zéros de $f(z) - a$ pour toute valeur de a sauf deux au plus. Appelons *chemin d'indétermination complète* toute ligne aboutissant au point à l'infini et telle que les valeurs que prend $f(z)$ aux points de cette ligne soient denses dans tout le plan, ou sur toute la sphère de Riemann. Appelons droite I, toute demi-droite d'indétermination complète issue de O. Il n'existe pas toujours une telle droite comme le montrent les fonctions e^z, tg z par exemple. Il résulte de la remarque précédente que:

Si un angle est tel que toute demi-droite issue du sommet et contenue dans l'angle est une droite J, l'ensemble des demi-droites I qui sont des chemins d'indétermination complète est partout dense dans cet angle.

En particulier, pour une fonction $f(z)$ telle que toute demi-droite est une droite J, l'ensemble des droites I est partout dense.

5. Considérons maintenant l'aire des régions couvertes sur la sphère de Riemann par les images des valeurs d'une fonction $f(z)$.

Pour une famille de fonctions holomorphes dans un domaine (D), j'ai établi précédemment que cette famille est normale lorsque les aires des régions du plan complexe couvertes par les valeurs de ces fonctions sont bornées [7]. Je me propose d'établir le théorème général suivant:

Si une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) est telle que les images des valeurs de chaque fonction sur la sphère de Riemann couvrent des régions dont l'aire est bornée par un nombre inférieur à l'aire de la sphère, cette famille est normale dans l'intérieur de (D).

Soit $f_n(z)$ une suite infinie de fonctions de cette famille; l'aire de la région couverte par les images de ces valeurs ne dépasse pas, par hypothèse, le nombre $4\pi(1-\alpha^2)$, si le rayon de la sphère de Riemann est égal à l'unité. Soit a_n une valeur que $f_n(z)$ ne prend pas; de l'image de a_n comme centre, décrivons sur la sphère un petit cercle de rayon sphérique ε; la calotte ainsi déterminée a pour aire

$$2\pi(1-\cos\varepsilon) = 4\pi\sin^2\frac{\varepsilon}{2} < 4\pi\times\frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Prenons $\varepsilon<\alpha$, l'aire de la calotte est inférieure à $4\pi\alpha^2$, il existe donc à l'extérieur un point non couvert, image d'une va-

[7]) Sur les familles normales de fonctions analytiques (Annales sc. de l'Ecole Normale Supérieure, 3e s. t. XXXIII, 1916, p. 240).

leur b_n non prise par $f_n(z)$ et on a

$$[a_n, b_n] > \varepsilon.$$

Traçons les calottes sphériques de centres a_n et b_n et de rayon sphérique ε; l'aire totale couverte par ces deux calottes ne dépasse pas

$$4\pi \times \frac{\varepsilon^2}{2} < 4\pi\alpha^2;$$

il existe donc un point non couvert, extérieur à ces deux calottes correspondant à une valeur c_n non prise par $f_n(z)$; et l'on a

$$[a_n, c_n] > \varepsilon, \quad [b_n, c_n] > \varepsilon.$$

Les fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - a_n}{f_n(z) - b_n} : \frac{c_n - a_n}{c_n - b_n}$$

ne prennent dans le domaine (D) aucune des valeurs $0, 1, \infty$. Elles forment une famille normale de fonctions holomorphes et toute suite infinie de fonctions de cette famille est génératrice d'une suite partielle que nous appellerons encore $g_n(z)$ convergeant uniformément vers une fonction limite $g(z)$ et telle que les suites a_n, b_n, c_n correspondantes aient respectivement pour limites des nombres a, b, c qui vérifient évidemment les inégalités

$$[a, b] \geqslant \varepsilon, \quad [b, c] \geqslant \varepsilon, \quad [c, a] \geqslant \varepsilon.$$

On en déduit aussitôt que la suite $f_n(z)$ correspondante converge uniformément vers la fonction méromorphe $f(z)$ définie par l'égalité

$$f(z) = \frac{g(z) - a}{g(z) - b} : \frac{c - a}{c - b}.$$

Voici une application du théorème précédent:

Soit une suite de fonction $f_n(z)$ méromorphes dans un domaine (D) et convergeant en chaque point du domaine vers une valeur limite $f(z)$. Si les aires couvertes sur la sphère de Riemann par les images des valeurs de ces fonctions sont inférieures à un nombre fixe plus petit que l'aire de la sphère, la convergence est uniforme dans l'intérieur de (D) et la fonction $f(z)$ est méromorphe dans ce domaine.

On sait en effet qu'une suite de fonctions appartenant à une famille normale ne peut converger dans un domaine sans converger uniformément.

6. On peut, dans l'énoncé du théorème qui fait l'objet du paragraphe précédent, supprimer la condition que la limite supérieure des aires couvertes soit inférieure à celle de la sphère. Supposons seulement que cette aire soit bornée et désignons par $4\pi N$ un nombre supérieur aux aires des régions couvertes, chacune d'elles étant comptée autant de fois qu'il y a de feuillets distincts correspondant aux valeurs prises par la fonction. On peut toujours supposer que N est le plus petit entier vérifiant la condition précédente.

Un raisonnement tout à fait semblamble à celui du paragraphe précédent montre que l'on peut associer à chaque fonction $f_n(z)$ trois nombres a_n, b_n, c_n dont les distances sphériques mutuelles sont supérieures à un nombre positif fixe ε et tels que les fonctions $f_n(z)-a_n$, $f_n(z)-b_n$, $f_n(z)-c_n$ aient moins de N zéros dans le domaine (D). On en déduit que la famille des fonctions $g_n(z)$ est quasi-normale d'ordre total N au plus et qu'il en est de même pour la famille des fonctions $f_n(z)$.

Dans les conditions précédentes, toute suite convergente converge informément sauf peut-être en N points au plus.

En particulier, si les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes et si la limite $f(z)$ est toujours finie, la convergence est partout uniforme. En d'autres termes:

Si une suite de fonctions holomorphes dans un domaine (D) converge en chaque point de ce domaine et si les aires des régions couvertes sur la sphère de Riemann par les images des valeurs de ces fonctions restent bornées, la suite converge uniformément dans l'intérieur de (D).

7. Voici une application des théorèmes qui précèdent. Soit $f(z)$ une fonction entière ou méromorphe dans le plan. On sait que la famille des fonctions

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

definies dans le cercle $|z| \leqslant 1$ n'est pas normale dans ce cercle. Elle admet un point irrégulier qui est distinct de l'origine O si $f(z)$ n'est pas une fonction de genre zéro du type exceptionnel défini par M. Ostrowski [8]). Dans tous les autres cas, soit P un

[8]) Ueber Folgen analytischer Funktionen, etc. (Mathematische Zeitschrift, Bd. 24, 1923, p. 241).

point irrégulier distinct de l'origine. Dans un petit cercle (γ) de centre P, l'aire couverte par $f_n(z)$ ne peut demeurer inférieure à celle de la sphère de Riemann. Or, l'aire couverte par $f_n(z)$ lorsque z est dans (γ) est la même que l'aire couverte par $f(z)$ lorsque z est dans le cercle (γ_n) homothétique de (γ) par rapport au point O et dans le rapport 2^n. Désignons par Δ la demi-droite OP: *Dans tout angle si petit soit-il ayant Δ pour bisectrice intérieure, il existe une infinité de cercles (γ_n) tels que l'aire sphérique couverte par les images des valeurs de $f(z)$ lorsque z est dans (γ_n) ait pour limite l'aire de la sphère.*

De même si l'on excepte certaines fonction méromorphes de genure zéro du type particulier défini par M. Walter Saxer [9]), on sait que la famille $f_n(z)$ ne peut être quasi-normale d'ordre fini. On en déduit la proposition suivante:

Pour toute fonction méromorphe non exceptionnelle, il existe une droite Δ' telle que tout angle si petit soit-il ayant Δ' comme bisectrice intérieure contienne une infinité de cercles (γ_n) pour lesquels l'aire sphérique couverte par les images des valeurs de $f(z)$ augmente indéfiniment.

Ces propositions s'étendent aisément aux fonction $f(z)$ méromorphes autour d'un point essentiel isolé. Elles sont à rapprocher des résultats de M. Milloux [10]).

---

[9]) Math. Annalen. 1928.

[10]) Le théorème de M. Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions méromorphes et fonctions entières. (Journal de Mathématiques, s. 9, t. III, 1924, p. 347). — Sur le théorème de M. Picard (Bull. de la Soc. Math. de France, t. LIII, 1929, p. 181).

Sur une propriété caractéristique de fonctions de Baire à valeurs distinctes.

Par

WACLAW SIERPINSKI.

D'après un théorème connu de M. N. Lusin (théorème d'unicité) toute fonction de Baire (d'une variable réelle) à valeurs distinctes (c'est-à-dire telle que $f(x') \neq f(x)$ pour $(x' \neq x)$ transforme tout intervalle (et, plus généralement, tout ensemble mesurable B) en un ensemble mesurable B [1]).

Le but de cette Note est de démontrer que réciproquement: *une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes qui transforme tout intervalle (fermé) en un ensemble mesurable B est une fonction de Baire.*

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes qui transforme tout intervalle (fermé) en un ensemble mesurable B. Soit H l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ pour x réels. La fonction $f(x)$ étant à valeurs distinctes, il existe pour tout nombre y de H un et un seul nombre réel x, $x = \varphi(y)$, tel que $f(x) = y$. Posons encore $\varphi(y) = 0$ pour les nombres réels y qui n'appartiennent pas à H. La fonction $\varphi(y)$ est ainsi définie et univoque pour tous les nombres y réels.

Désignons, pour k entiers, par H_k l'ensemble de toutes les valeurs que $f(x)$ prend pour $k \leqslant x \leqslant k+1$; d'après l'hypothèse sur la fonction $f(x)$, les ensemble H_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sont tous mesurables B, donc aussi leur somme qui coïncide évidem-

---

1) Voir p. e. *N. Lusin, Fundamenta Mathematicae,* t. X (1926), p. 60.

ment avec l'ensemble H. Le complémentaire CH de l'ensemble H est donc aussi mesurable B.

Soit maintenant a un nombre réel donné quelconque. Si $a > 0$, l'ensemble $E_y [\varphi(y) \geqslant a]$ coïncide évidemment avec l'ensemble de tous les nombres $f(x)$, où $x \geqslant a$. Or, ce dernier ensemble est évidemment la somme de la série infinie d'ensembles $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$, où ε_k désigne l'ensemble de toutes les valeurs que $f(x)$ prend pour $a+k-1 \leqslant x \leqslant a+k$: d'après l'hypothèse sur la fonction $f(x)$ il est donc mesurable B (en tant qu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables B). Or, si $a \leqslant 0$, l'ensemble $E_y [\varphi(y) \geqslant a]$ se compose évidemment de l'ensemble CH et de l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x \geqslant a$: il est donc aussi mesurable B (en tant qu'une somme de deux ensembles mesurables B).

Les ensembles $E_y [\varphi(y) \geqslant a]$ sont donc mesurables B pour tout nombre a réel: il en résulte, comme on sait, que $\varphi(y)$ est une fonction de Baire. Son image géométrique, c'est-à-dire l'ensemble J de tous les points (x, y) du plan, où $x = \varphi(y)$, est donc un ensemble mesurable B [1]). Or, l'image géométrique de la fonction $y = f(x)$ est évidemment la différence $J - \varepsilon$, où ε est l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, où $x = 0$ et $y \in CH$. L'ensemble CH étant mesurable B, ε l'est aussi. L'image géométrique de la fonction $y = f(x)$ est donc une différence de deux ensembles mesurables B, donc mesurable B. Il en résulte, comme j'ai démontré [1]) que $f(x)$ est une fonction de Baire.

Notre théorème est ainsi démontré.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Pour qu'une fonction d'une variable réelle à valeurs distinctes soit une fonction de Baire, il faut et il suffit qu'elle transforme tout intervalle en un ensemble mesurable B.

Il est à remarquer qu'une fonction d'une variable réelle qui transforme tout ensemble mesurable B en un ensemble mesurable B peut être même non mesurable (L) (p. e. une fonction non mesurable (L) qui ne prend que deux valeurs: 0 et 1).

---

[1]) Voir: *W. Sierpinski, Fundamenta Mathematicae* t. II, p. 78 (Théorème III).

Штампарија „Уметност“ М. Коваљова. Загребачка, 6. Београд.