MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

IV

1—2

BEOGRAD
1969.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. IV, broj 1—2 (1969/70)
Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 791.

Uređuje Redakcioni odbor
Glavni urednik *prof. dr M. ILIĆ-DAJOVIĆ*
Odgovorni urednik *B. MARINKOVIĆ, prof.*

NEKOLIKO REČI O MATEMATICI

1. Ako bi se svim učenicima postavilo pitanje koji im je predmet najomiljeniji, teško da bi se većina izjasnila za matematiku. Matematiku obično više cene no što je vole. I u našoj zemlji se danas naučna znanja visoko cene, ali među našim učenicima ima i takvih kojima proučavanje matematike zadaje prilične teškoće. Izgleda da se ovo tumači ne samo time što njeno proučavanje mnogima ne ide lako i što zahteva istrajnost i rad, već i time što neka pitanja školske matematike učenicima ponekad ne izgledaju dovoljno interesantna, a katkad su im i dosadna. Međutim, azbuka i gramatika ma kog jezika takođe nisu mnogo interesantne, pa ipak samo njihovim proučavanjem otkrivaju se sve lepote književnosti, njene zanimljive bajke, priče, pripovetke, romani i stihovi. Slično ovome, i ovladavanje onim najprostijim činjenicama i stavovima matematike, što se u školi proučavaju i služe kao azbuka, jedini je put koji vodi savremenoj matematici — ogromnoj, skoro nepreglednoj po svome bogatstvu oblasti ljudskog znanja — koja se iz godine u godinu sve više primenjuje.

Ponekad se čuje mišljenje da je u matematici uglavnom sve već poznato, da su već davno prošla vremena kad su se vršila otkrića u ovoj nauci i da je sada ostalo samo da se proučavaju i primenjuju u rešavanju zadataka razna pravila i teoreme koje nose imena čuvenih naučnika minulih vekova. Međutim, u stvarnosti je drugačije. Štaviše, baš sada se matematika veoma burno razvija u svim pravcima, bez obzira na to što je ona jedna o najstarijih nauka (rođena je pre više hiljada godina).

Matematika raste u visinu, jer se na tlu njenih starih sadržaja pojavljuju sve novi i novi problemi i skoro svakodnevno, u različitim delovima sveta, čine se nova matematička otkrića. Da bi se dobila predstava o broju tih otkrića, dovoljno je samo navesti podatak da je u sovjetskom referativnom časopisu *Matematika* za 1963. godinu (komplet tog časopisa za tu godinu predstavlja knjigu velikog formata sa više od 1100 stranica) registrovano i prikazano više od 1600 matematičkih radova samo te godine u svetu, dakle, u proseku oko 45 radova (otkrića) na dan! (Danas je taj broj i veći). Naravno, nisu oni svi podjednako značajni, ali ipak skoro svaki od njih označava kretanje nauke napred, pa makar, ponekad i sasvim sitnim korakom.

Matematika raste i u širinu, jer su se vanredno proširile njene veze sa drudrugim naukama i ona je postepeno prodrla u sve oblasti čovekove delatnosti. Sada se matematika primenjuje ne samo u astronomiji, mehanici, fizici, hemiji, geodeziji i tehnici, gde se primenjivala i ranije, već takođe i u biologiji, medicini, agronomiji, umetnosti, u nekim društvenim naukama, pa čak i u lingvistici (prevođenje i sl.). Izuzetno široko polje za njenu primenu nastalo je stvaranjem raznih matematičkih mašina, a naročito elektronskih računskih mašina koje mogu da obavljaju na desetine hiljada računskih operacija u sekundi. Elektronske računske mašine (kompjuteri) danas se primenjuju, a u buduće će se još više primenjivati, u najrazličitijim oblastima ljudske delatnosti, između ostalog za: predskazivanje vremenskih prilika (jer je tu često potrebno da se veoma brzo izvrši i preko 20 miliona računskih operacija), proračunavanje putanja raketa, veštačkih satelita i kosmičkih brodova, prevođenje sa jednog jezika na drugi, proračune za razne inženjerijske konstrukcije (mostovi, brodovi, avioni, velike brane i dr.), planiranje i upravljanje proizvodnim procesima, u bankarstvu i statistici itd. Elektronske računske mašine često se (pogrešno) nazivaju elektronski mozgovi. Međutim, to nisu nikakvi mozgovi niti sami mogu da misle. Čovek je taj koji misli i stvara, a ove mašine rade samo ono što im čovek naredi; doduše, one to rade brže i tačnije od njega. Jedan elektronski računar može da zameni desetine pa i stotine hiljada kvalifikovanih stručnjaka za računanje.

Automatizacija proizvodnje kojoj savremeno društvo teži, kao i razni naučni instituti, zahtevaju primenu raznih matematičkih mašina. Međutim, za matematičku obradu raznih problema potrebni su odgovarajući stručnjaci, od kojih jedni problem koji se obrađuje treba da »odenu u matematičko ruho«, tj. da ga prevedu na matematički jezik, drugi na osnovu toga prave program za mašinu, a treći taj program predaju mašini, koja bez zamora i veoma brzo daje odgovarajuće rezultate. Da se matematičari nisu pozabavili usavršavanjem metoda za izračunavanje i da zajedno sa inženjerima nisu stvorili razne računare, koji se stalno usavršavaju, sigurno je da bi se u najskorijoj budućnosti dobar deo čovečanstva, sigurno ne manji od jedne njegove četvrtine, neprekidno morao baviti računanjem!

Danas, posle velikih uspeha raketne tehnike i kosmonautike (eto, i Mesec je osvojen!), svakome je jasno da su to i značajni uspesi matematike. Daleko bi nas odvelo kad bismo detaljnije govorili gde se sve matematika primenjuje.

I na kraju, matematika raste i u dubinu, jer se neprekidno usavršavaju metode i opšti principi njenog daljeg izgrađivanja. Razvitak savremene tehnike i niza prirodnih nauka ističu sve nove i nove zadatke koje matematika treba da reši i tako podstiču dalji razvoj pojedinih oblasti matematike jer, kada znanja kojima se raspolaže nisu dovoljna, moraju se pronalaziti novi putevi, nova sredstva i stvarati novi metodi.

Često se čuje (preko štampe, radia i televizije, popularne pa čak i ozbiljne naučne literature) da se u današnje doba odigrava snažan proces matematizacije raznih nauka i drugih delatnosti. Ali kod mnogih ljudi predstave o tom procesu veoma su mutne, nejasne: jedni smatraju da bi sve bilo rešeno ako bi matematičari napisali jednačine koje bi važile za sve slučajeve u životu; drugi smatraju da su elektronski računari (kompjuteri) dužni da misle umesto ljudi; treći trezveno računaju na moguću pomoć matematičara. Ko je u pravu? U stvarnosti, pak, matematičke metode nisu spas od svakojakih nevolja i problema. Međutim, one se mogu uspešno koristiti u svim naukama i drugde, samo ako ih budemo znalački i korektno primenjivali. U protivnom dolazi do razočarenja pa se onda obično za sve krivi nedužna matematika. Zato je veoma važno da se potencijalni »potrošač« matematike sa njom upozna i nauči kako i gde se može njen ogromni arsenal upotrebiti. S druge strane, »potrošači« matematičke teorije mogu uticati na pravac daljeg razvijanja teorije, postavljajući pred ovu svoje zadatke i, na kraju krajeva, mogu u zamenu dobiti stvarnu pomoć.

2. Matematika je postala opšti (zajednički) jezik kojim govore skoro sve nauke; razne matematičke zakonitosti odražavaju procese u živoj i neživoj prirodi. Malo je verovatno da ste razmišljali o tome kako je ceo vaš život, od najranijih dana pa do duboke starosti, vezan sa matematikom. Ljudi grade na sve strane, ogromnim brzinama preleću kontinente i okeane, osvajaju kosmos, prodiru u tajne atoma, osvajaju nevidljivo, uče, planiraju i u svim tim poslovima uvek im pomaže matematika. Nemoguće je i zamisliti da bi čovekov život bio moguć bez matematike.

Šta je ustvari matematika, ta svuda prisutna nauka? Takvo pitanje lako je postaviti, ali je na njega, nažalost, veoma teško odgovoriti.

Kratko rečeno, matematika se može okarakterisati kao nauka o brojevima i figurama. Teško je navesti neku granu ljudske delatnosti u kojoj čovek nije primoran da postavlja i rešava pitanja o broju izvesnih predmeta, o njihovoj veličini i obliku; od prastarih vremena, u toku razvoja čovečijeg društva, nagomilavalo se sve više znanja o broju, veličini i oblicima pojedinih predmeta. Nisu ljudi oduvek znali da broje i računaju, nisu oduvek poznavali kružnicu, trougao i druge geometrijske figure i njihove osobine. To saznavanje trajalo je hiljadama godina. Na primer, jedno od najvećih dostignuća, koje je temelj čitave matematike — brojevi, odnosi se na veoma daleku prošlost. Ali, ko je to u osvit istorije otkrio brojeve? Ko je bio taj genije? Pokušajte za trenutak da se stavite na njegovo mesto! Naravno, taj genije nije bio jedan čovek, već pokoljenja ljudi. Istorija razvitka matematike tesno je povezana sa razvojem ljudskog društva.

Životne potrebe koje su stalno rasle i rad da te potrebe zadovolji, primoravale su čoveka da stvara matematičke objekte (pojmove) i otkriva matematičke činjenice. Životne potrebe i rad razvili su svaku misao pa i matematičku misao. »Kao i sve druge nauke i matematika je nastajala iz čovekovih potreba . . .« — kaže Engels. U vezi sa stečenim matematičkim znanjima javila se i potreba za njihodom sistematizacijom, kako bi se lakše mogla prenositi od jednog pokoljenja na vrugo. Tako se postepeno rađala matematika.

Začeci matematičkih znanja pojavili su se približno 4000 godina pre naše ere (Sumerci, a kasnije Vavilonci i Egipćani). O tome svedoče do naših dana sačuvani egipatski papirusi i vavilonske tablice sa klinastim pismom, u kojima su nađena rešenja različitih aritmetičkih, geometrijskih i algebarskih zadataka.

Matematika je doživela veliki procvat u staroj Grčkoj. Ovde su se, za nekih 300 godina pre naše ere, pojavili čuveni Euklidovi *Elementi* (Osnove) — delo u kome je sistematski izložena geometrija (otprilike u onom obliku u kome se doskora proučavala u srednjoj školi); tu su takođe dati i mnogi podaci o deljivosti brojeva, o rešavanju jednačina (i to u geometrijskom obliku). Nijedno matematičko delo nije bilo toliko poznato, toliko dugo upotrebljavano (oko 2000 godina) i prevođeno na druge jezike, kao što je to slučaj sa Elementima. U III veku pre naše ere, *Arhimed*, jedan od najvećih naučnika (pre svega matematičar) stare Grčke i uopšte na svetu, pored mnogih drugih otkrića, našao je način za određivanje površina, zapremina i težišta različitih figura, mada nije raspolagao sredstvima savremene matematike i fizike. Mnogima od vas svakako je poznato da je on još pre 23 veka za π dobio približnu vrednost kojom se i danas služimo: $3\frac{1}{7} \approx 3{,}14$. Posle Arhimeda, krajem III v. pre n. e., čuveni geometar *Apolonijus* napisao je knjigu o osobinama nekih izuzetnih krivih linija (elipse, hiperbole, parabole). Ako se tome doda da je u II veku pre n. e. Ptolemej u astronomskom delu, bolje reći enciklopediji astronomskih znanja toga vremena, poznatom pod arapskim naslovom *Almagest*, dao niz tablica i izložio osnove tzv. trigonometrije (o čemu će mnogi od vas učiti u srednjoj školi) i načine za rešavanje zadataka u vezi sa sfernim trouglovima (tj. trouglovima čije su stranice veliki krugovi na lopti), biće nam jasno koliki su veliki doprinos u razvoju matematičkih znanja, mnogo stoleća pre našeg vremena, dali stari Grci. Može se smelo tvrditi da naši učenici u toku prvih dvanaest godina svog školovanja proučavaju samo manji deo svih tih znanja (doduše, oni dobijaju i neke podatke koji starim Grcima nisu bili poznati).

Naravno, razvoj nauke nije se zaustavio na tome. Matematika je produžila da se razvija, što vidimo u delima kineskih, induskih i arapskih naučnika; naročito je značajan doprinos koji su dali Indusi i Arabljani u razvoju algebre i trigonometrije. Posle dužeg zastoja u razvoju nauka u toku srednjeg veka, naučnici zapadne Evrope morali su da ulože mnogo napora da bi razumeli radove svojih predhodnika. Procvat matematike u Evropi počinje od XVII veka da bi početkom XIX veka matematika stupila u svoje zlatno doba. U to vreme javljaju se nove matematičke grane koje se odnose na takozvanu višu matematiku, koja se danas proučava u pojedinim višim školama i fakultetima. Najveći doprinos u stvaranju osnova više matematike dali su veliki naučnici XVII i XVIII veka: *R. Dekart*, *P. Ferma*, *I. Njutn*, *G. Lajbnic*, *L. Ojler*, omogućivši da se matematički proučavaju kretanja, procesi menjanja veličina i geometrijskih figura. Uporedo s tim u matematiku su uvedene koordinate, promenljive veličine i funkcija. Ove pojmove učenici stiču uglavnom u okviru algebre u osnovnoj i srednjoj školi, dospevši u najboljem slučaju samo do praga one više matematike koja se tokom poslednja tri veka pokazala kao nezamenljiv instrument koji je pokoljenjima astronoma, fizičara, mehaničara i predstavnika drugih naučnih oblasti omogućio da rešavaju najteže probleme prirodnih nauka i tehnike.

Može se reći da je savremena matematika dostigla takav stepen razvitka i da je tako bogata sadržajem da jedan čovek, ma kako bio učen, ne može da je potpuno obuhvati i da je prinuđen da se specijalizuje u jednoj određenoj oblasti matematike.

Treba primetiti da se savremena matematika ne sastoji samo iz algebre i geometrije, kao što je to slučaj sa onom »matematikom« koja se izučava u osnovnoj i srednjoj školi; sada se može nabrojati nekoliko *desetina* različitih oblasti matematike, od kojih svaka ima poseban sadržaj, posebne metode i oblasti primene.

3. Mnogi naučnici, kulturni i javni radnici u čitavom svetu visoko su ocenjivali ulogu i značaj matematike u savremenom društvu. U vezi s tim, navedimo jedan izvod iz govora koji je 1941. godine M. I. Kalinjin održao učenicima Moskve.

Evo šta on kaže za matematiku:

»... Zašto ja tako ističem matematiku? Zašto je ja smatram tako važnom naukom baš u savremenim uslovima i baš za vas, za omladinu?

Prvo, matematika disciplinira um, uči nas logičkom mišljenju. Ne kaže se uzalud da je matematika — gimnastika uma. Ja ne sumnjam da se u vašoj glavi roje misli, ali te misli treba srediti, disciplinirati, usmeriti ih, ako se tako može reći, na neki koristan rad. A upravo će vam matematika pomoći da iziđete na kraj s tim zadatkom. Međutim, ovi motivi više odgovaraju naučnicima negoli vama, i ja ne mislim da bi vas baš oni jako podstakli da izučavate matematiku.

Drugo, i to će vam, možda (po svoj prilici), biti bliže, opseg praktične primene matematike je ogroman. Proučavali vi bilo koju nauku, pošli vi na bilo koju višu školu, radili vi u bilo kojoj oblasti, ako želite da tamo ostavite nekakav trag, onda vam je svuda potrebno znanje matematike. A ko od vas sada ne sanja da postane mornar, avijatičar, artiljerac, kvalifikovani radnik u raznim granama naše privrede, građevinar ili arhitekta, metalurg, bravar, strugar, radio-tehničar, iskusan agronom, trgovački radnik itd? Ali sva ta zanimanja zahtevaju dobro poznavanje matematike. I zato, ako želite da učestvujete u velikom životu, onda punite svoje glave matematikom, dok za to još imate mogućnosti. Ona će vam pružiti ogromnu pomoć u svakom vašem radu ...«

4. U »*Matematičkom listu*« objavljujemo razne materijale (priloge) — članke, zadatke i razne zanimljivosti — najčešće povezane sa gradivom matematike predviđene za više razrede osnovne škole. Neki od ovih materijala treba da dopune i prodube znanja koja čitaoci lista već imaju. Tako na primer, u narednim brojevima lista objavićemo, pored ostalog, i niz članaka iz istorije matematike — o velikim matematičarima i njihovim delima.

Mi shvatamo da neki od naših članaka i zadataka nisu baš jednostavni i pristupačni za svakog čitaoca. Zato vam savetujemo da se naoružate strpljenjem, hartijom i olovkom i da te materijale savlađujete korak po korak. Ako i tada doživite neuspeh, nemojte očajavati! Prisetite se tada reči kojima se poznati francuski matematičar *Lagranž* (1736—1813) obraćao mladim matematičarima: »Čitajte, čitajte, a shvatanje će doći kasnije!«

Ipak, nadamo se, da će svaki mladi ljubitelj matematike pronaći u »Matematičkom listu« takve članke i zadatke koji će mu odmah biti pistupačni. Na ostale može se vratiti kasnije, kada bude otišao dalje u izučavanju gradiva matematike u školi. Jednom reči, shvatanje će već doći...

Др М. Илић-Дајовић (Београд)

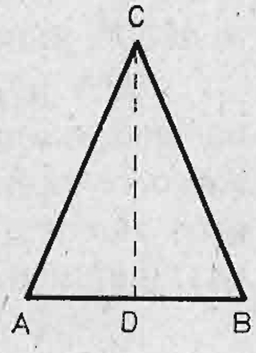
РЕШАВАЊЕ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАТАКА

Конструктивни задатак је такав геометријски задатак у којем се тражи да се, само помоћу шестара и лењира (или само помоћу лењира, или само помоћу шестара) нацрта геометријска фигура која задовољава у задатку постављене услове. Геометријски задаци се класификују на основу метода којима се решавају, а могу се груписати и на основу неког заједничког својства тражених геометријских фигура на којем се заснива идеја конструктивног решавања тих задатака. У овом чланку показаћемо неколико задатака у чијем се решавању полази од једне исте идеје — од својства висине на основицу једнакокраког троугла, тј. од својства симетрале дужи.

Шта је карактеристично за основичину висину једнакокраког троугла?

Карактеристично својство висине на основицу једнакокраког троугла (у даљем излагању говорићемо кратко: висина једнакокраког троугла) јесте то да њена подножна тачка полови основицу. На сл. 1 је CD висина троугла ABC ($AC=BC$), те је због тога $AD=BD$ (и, разуме се, $CD \perp AB$). Другим речима, висина лежи на оси симетрије једнакокраког троугла, тј. на симетрали основице троугла; висине кракова немају то својство.

На основу поменутог карактеристичног својства висине једнакраког троугла може се решити низ једноставних конструктивних задатака.

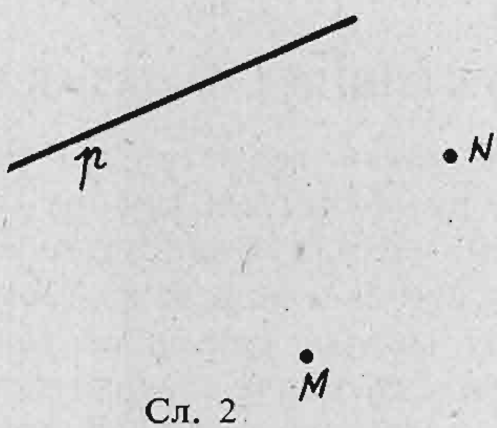


Сл. 1

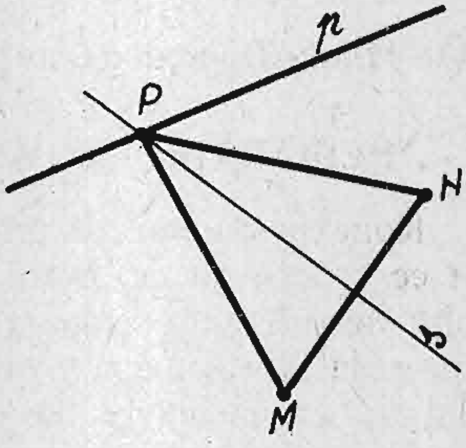
Овде ћемо изложити три таква задатка.

Задатак 1. — *Конструисати једнакокраки троугао* MNP ($MP=NP$) *ако су дата његова темена* M *и* N *и зна се да врх* P *лежи на датој правој* p (сл. 2).

Решење. — Пре него што почнемо да се служимо шестаром и лењиром, морамо тачно утврдити како ћемо тражену тачку P одредити. Та тачка као врх (то јест теме наспрам основице MN) једнакокраког троугла, мора лежати на симетрали s основице MN. Како се у задатку захтева да тај врх буде и на правој p, то одмах можемо закључити да се тачка P налази у пресеку симетрале s и дате праве p. Утврдивши то, ми смо, у ствари, утврдили како треба да извршимо *конструкцију*:



Сл. 2



Сл.3

1) најпре се, на познати начин, конструише симетрала s дужи MN и њоме пресече дата права p;

2) затим се добијена пресечна тачка P симетрале s и праве p споји с тачкама M и N; $\triangle MNP$ је тражени једнакокраки троугао с врхом P на правој p.

Како ћемо се уверити да је тај троугао заиста једнакокрак? Да ли ћемо то учинити упоређујући дужине његових кракова MP и NP? — Не, јер такво упоређивање нам не доказује да је $\triangle MNP$ једнакокрак. А *доказ* је сасвим прост:

MN је основица троугла, а s је њена симетрала. Свака тачка на симетрали дужи на једнаком је растојању од крајева те дужи. Како се тачка P налази на симетрали s дужи MN, то је $MP=NP$, што значи да је троугао MNP заиста једнакокрак. — Тиме је доказ завршен.

Треба имати у виду да права s неће увек сећи праву p: ако је дуж $MN \perp p$, тада је $s \parallel p$ и тачка P не може се одредити. У таквом случају каже се да задатак нема решења. — Ова околност указује на то да, пошто смо извршили конструкцију и доказали да је добијена геометријска фигура заиста она која се у задатку тражила, треба још да испитамо када задатак има решење а када га нема и, у првом случају, треба да утврдимо да ли постоји само једно решење или их има више. — У претходном задатку главни потез је одређивање тачке P у пресеку двеју правих; како се две праве могу сећи само у једној тачки, то значи да тај задатак, под условом да права MN није нормална на праву p, има само једно решење.

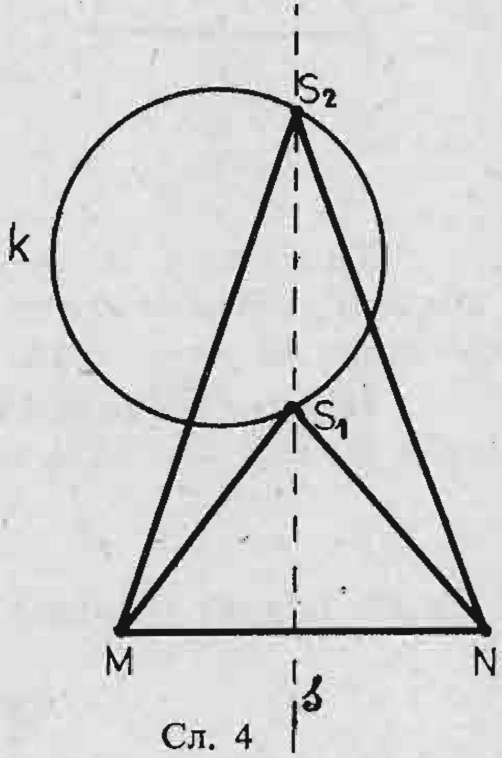
Задатак 2. — *Конструисати једнакокраки троугао* MNS ($MS = NS$) *ако су дата његова темена* M *и* N *и зна се да врх* S *лежи на датом кругу* k.

Решење. — Најпре ћемо проучити задатак на следећи начин. Нацртаћемо дуж MN и круг k (сл. 4). Тражени троугао MNS мора бити једнакокрак, што значи да се његов врх S мора налазити на симетрали s дужи MN, а с друге стране тај врх мора лежати и на кругу k; дакле, у пресеку симетрале s и круга k мора се налазити тражени врх троугла.

На основу тога имамо следећу *конструкцију:*

1) конструише се симетрала s дужи MN и њоме се пресече круг k;

2) заједничка тачка симетрале и круга споји се с тачкама M и N; добија се тражени троугао.

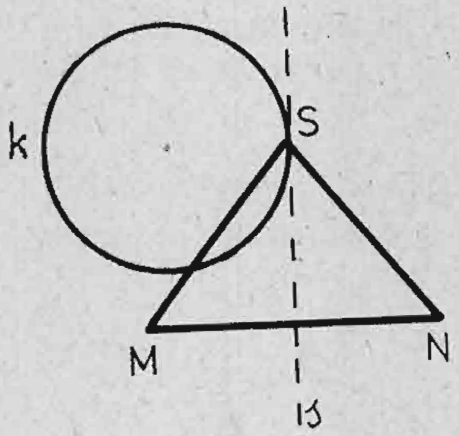


Сл. 4

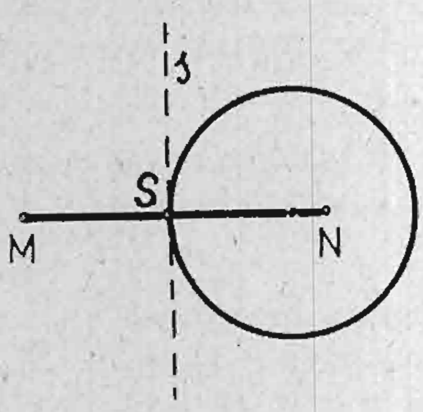
На сл. 4 симетрала s сече круг k у двема тачкама S_1 и S_2. па се добијају два троугла: MNS_1 и MNS_2. Кажемо да задатак има *два* решења.

Доказ је исти као за претходни задатак: тачка S (односно, тачке S_1 и S_2) је на симетрали s дужи MN и због тога су њена растојања од ових тачака једнака, па је троугао са основицом MN и врхом у конструкцијом добијеној тачки једнакокрак.

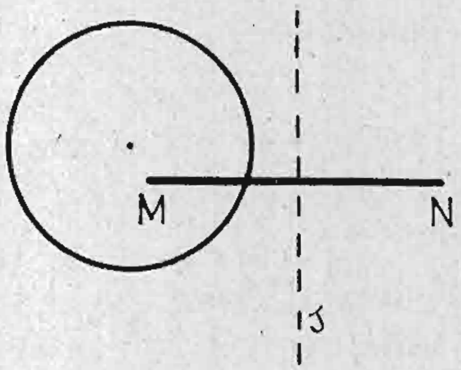
Какви су још случајеви могући? — Може се десити да је положај круга k такав да га симетрала додирује (сл. 5а); тада имамо само један троугао MNS и кажемо да задатак има једно решење. При томе изузимамо случај кад се центар круга налази на правој MN а симетрала s додирује тај круг; тада врх S лежи на основици и уместо троугла имамо дуж (сл. 5b). Може се још десити да симетрала s нема ниједну заједничку тачку с кругом k (сл. 6); тада кажемо да задатак нема решење.



Сл. 5а



Сл. 5b



Сл. 6

Задатак 3. — *Конструисати једнакостранични (не једнакокраки!) троугао ако се зна положај једног његовог темена и дата је права на којој лежи наспрамна страница.*

Решење остављамо читаоцу. Рећи ћемо само то да задатак губи смисао ако дата права пролази кроз дато теме.

Др И. Бандић (Београд)

ДЕЉИВОСТ СА 11

Дељивост датог вишецифреног броја са 11 испитује се на овај начин: *Саберу се цифре које стоје на непарним местима у датом броју (добије се, на пример, збир A), затим цифре на парним местима (нека је збир B); ако је разлика $A—B$ једнака нули или је дељива са 11, онда је и дати број дељив са 11.*

Пример: Испитати дељивост броја 8 156 324 са 11.

У овом случају је $A=8+5+3+4=20$; $B=1+6+2=9$, па пошто је $A—B=11$, то је и број 8 156 324 дељив са 11.

Тачност овог тврђења може се проверити, наравно, и простим дељењем. Међутим, овај поступак треба и образложити.

Пре свега, лако се можемо уверити да је сваки број, који је састављен од парног броја цифара 9, дељив са 11, на пример:

$$99\,99\,99 : 11 = 90909$$

Кад се, даље, од декадних јединица са парним бројем нула, дакле од 100, 10 000, 1 000 000, итд. одузме по 1, добије се $100-1=99$; $10\,000-1=9\,999$; $1\,000\,000-1=999\,999$, итд., што значи да је свака таква разлика дељива са 11.

Ако се свакој декадној јединици са непарним бројем нула, дакле бројевима 10, 1 000, 100 000, итд. дода број 1, добијају се збирови: $10+1$, $1\,000+1$; $100\,000+1$, итд. који се могу написати у облику:

$10+1=11$; $1\,000+1=99\cdot 10+11$; $100\,000+1=9999\cdot 10+11$, итд. Сваки од ових збирова састоји се из два сабирка који су дељиви са 11, што значи да су збирови $10+1$, $1\,000+1$, $100\,000+1$, итд. дељиви са 11.

На основу тога може се објаснити наведено правило дељивости са 11.

Рецимо да је реч о броју $N=6\,185\,739$. Овај број се може изразити (почевши од јединица) на овај начин:

$N=9+10\cdot 3+100\cdot 7+1\,000\cdot 4+10\,000\cdot 8+100\,000\cdot 1+$ $+1\,000\,000\cdot 6$, или, кад се стави: $10=10+1-1$; $100=100+1-1$; $1\,000=1\,000+1-1$, итд.,

$$N=9+(10+1-1)\cdot 3+(100-1+1)\cdot 7+(1\,000+1-1)\cdot 4+$$
$$+(10\,000-1+1)\cdot 8+(100\,000+1-1)\cdot 1+(1\,000\,000-1+1)\cdot 6,$$

односно

$$N=9+(10+1)\cdot 3-3+(100-1)\cdot 7+7+(1\,000+1)\cdot 4-4+$$
$$+(10\,000-1)\cdot 8+8+(100\,000+1)\cdot 1-1+(1\,000\,000-1)\cdot 6+6.$$

На основу тога се дати број може написати и на овај начин:

$$N=(9-3+7-4+8-1+6)+[(10+1)\cdot 3+(100-1)\cdot 7+$$
$$+(1\,000+1)\cdot 4+(10\,000-1)\cdot 8+(100\,000+1)\cdot 1+(1\,000\,000-1)\cdot 6.$$

Збир у средњој загради је сигурно дељив са 11, јер је сваки сабирак дељив са 11, а да би и број N био дељив са 11 мора и збир у првој малој загради бити дељив са 11. Међутим, тај збир је управо поменута разлика $A-B$,

$$A-B=(9+7+8+6)-(3+4+1)=30-8=22,$$

а она је, као што се види, дељива са 11.

J. Martić (Kraljevo)
B. Marinković (Beograd)

VARIJANTE PRI REŠAVANJU ZADATAKA*

Mnogi zadaci mogu biti rešeni na različite načine. Pri tome je jedna varijanta rešenja uobičajena, univerzalna, a ostale varijante su najčešće specijalne i zasnivaju se na izvesnim specifičnostima datih uslova u zadatku; one su obično elegatnije, ali od rešavatelja traže više matematičkog znanja i dosetljivosti. To je naročito slučaj pri rešavanju tzv. „problema", ali i kod drugih vrsta zadataka.

Da li je korisno da se jedan zadatan rešava na više načina?

W. W. Sawyer (Sojer), savremeni engleski matematičar, autor niza popularnih knjiga iz matematike, u jednoj od njih—koja ima unekoliko „muzikalni" naziv *Preludijum za matematiku* (*Prelude to Mathematic*) — o tome kaže: „... Međutim često je korisnije rešiti jedan isti zadatak na tri različita načina, nego li rešiti tri-četiri različita zadatka svaki samo na jedan način. Rešavajući jedan te isti zadatak na razne načine, može se upoređivanjem utvrditi, koji je od njih kraći, efektniji, elegatniji. Na taj način se stiče i izgrađuje veština rešavanja zadataka".

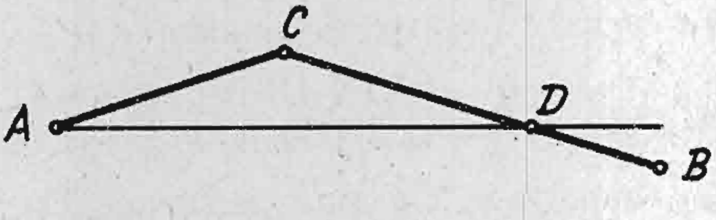
Na konkretnim primerima, nasumce odabranim, pokazaćemo kako se jedan zadatak može rešiti na više načina.

Primer 1. — *Saobraćajući između mesta A i B autobus prelazi preko jednog brda. Na uzbrdicama (kada ide uz brdo) brzina autobusa je 15 km na čas, a na nizbrdicama (kada ide niz brdo) brzina mu je 50 km na čas. Na putu od A do B autobus provede 3,5 časa, a na putu od B do A provede 4 časa. Koliko je dug put između mesta A i B i koliko je od A udaljena najviša tačka puta?*

Ovo je ustvari 71. konkursni zadatak, koji je objavljen u predhodnom broju „Matematičkog lista" (str. 141).

Razmotrićemo šest varijanti rešavanja ovog zadatka. Jedna od tih varijanti (ovde je to varijanta I) navedena je u knjizi *I. J. Depmana: Priče o rešavanju zadataka*, odakle je ovaj zadatak i uzet.**

Rešenje. — Shema uzdužnog preseka profila puta autobusa data ja na sl. 1.



Sl. 1

I. Prenesimo, polazeći od tačke C, rastojaanje CD jednako AC. Put $AC+CD$, kada ide iz A u B, autobus prelazi za isto vreme kao i put $DC+CA$

---

* Povod za ovaj članak su mnogobrojna rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista", jer razni rešavatelji pri tome pojedine zadatke rešavaju često na isti način, ali i na sasvim različite načine.

** *И. Я. Депман: Рассказы о решении задач*, Ленинград 1957. (стр. 119).

kada ide iz B u A. Razlika u vremenu 4 časa — $3\frac{1}{2}$ časa $=\frac{1}{2}$ časa nastala je zbog toga što je na putu od A do B deo DB bio pređen brzinom 50 km/h, a na putu od B do A taj isti deo puta samo u suprotnom smeru (tj. BD) bio je pređen brzinom 25 km/h. Da se pređe taj deo puta u prvom je slučaju bilo potrebno vremena $CB/50$ časova, a u drugom slučaju (kada ide obratno) $DB/25$ časova. Razlika $\frac{DB}{25}-\frac{DB}{50}$ jednaka je $\frac{DB}{50}$ i prema uslovu zadatka ona iznosi $\frac{1}{2}$ časa, tj. $\frac{DB}{50}=\frac{1}{2}$, odakle se dobija da je $DB=25$ km.

Autobus, idući uz brdo, prelazi na čas 25 km. Putevi AC (uzbrdo) i CD (nizbrdo) jedaki su, ali je brzina autobusa na nizbrdici (na putu CA) dva puta veća. Za 1 čas „penjanja" uz brdo autobus prelazi 25 km, a pri „spuštanju" niz brdo put od 25 km biva pređen za $\frac{1}{2}$ časa; to znači da je 50 km autobus prešao za $1\frac{1}{2}$ čas, pa je, prema tome, njegova srednja brzina pri tome bila 50 km: $1\frac{1}{2}$ h $=\frac{100}{3}$ km/h. Za 3 časa takvog kretanja autobus je prešao $\left(\frac{100}{3}\cdot 3\right)$ km $=100$ km, a to i daje rastojanje $DC+CA$. Pošto su rastojanja DC i CA jednaka, to je $AC=CD=50$ km i $CD+DB=50$ km $+25$ km $=75$ km. Prema tome, put, od mesta A do mesta B preko brda čiji je vrh C iznosi

$$ACB=50\text{ km}+75\text{ km}=125\text{ km}.$$

II. U odlasku „tamo" autobus pređe deo puta ACD za isto vreme za koje pređe deo puta DCA u povratku. Prema tome, razlika od pola časa (4 časa — 3,5 časa) pojavljuje se na delu puta DB (odnosno BD), koji autobus u odlasku, (tj. pri kretanju „tamo") prelazi brzinom 50 km/h, a u povratku (tj. pri kretanju iz B „ovamo") brzinom od samo 25 km/h, tj. dvaput manjom brzinom. Odatle sledi da deo DC autobus pređe za $\frac{1}{2}$ časa silazeći niz brdo, a deo BD on pređe za 1 čas penjući se uz brdo. To znači da je dužina $DB=\frac{1}{2}$ od 50 km $=\frac{1}{2}\cdot 50$ km $=25$ km (ili: $BD=1\cdot 25$ km $=25$ km). Ostali deo puta (ACD ili DCA) autobus pređe za $3\frac{1}{2}$ časa $-\frac{1}{2}$ časa $=3$ časa (ili: 4 časa — 1 čas $=3$ časa). Međutim, pošto je $AC=CD=\frac{1}{2}$ od ACD, to od ta 3 časa autobus ide uzbrdo 2 časa, a nizbrdo 1 čas. Odatle onda imamo da je: $AC=2\cdot 25=50$ (km), $CD=1\cdot 50=50$ (km). Prema tome, dužina puta od mesta A do mesta B iznosi:

$$AB=AC+CD+DB=50\text{ km}+50\text{ km}+25\text{ km}=125\text{ km}.$$

III. Putovanje autobusa u oba mesta, tj. u oba pravca, traje $3\frac{1}{2}$ časa $+4$ časa $=7\frac{1}{2}$ časova; pri tome je ukupan put koji on pređe idući uzbrdo jednak ukupnom putu koji on pređe idući nizbrdo. Međutim, uzbrdo on ide dva puta sporije nego li nizbrdo (jer $50:25=2$); prema tome, na svim usponima autobus se nalazi 2 puta duže nego li na svim nizbrdicama. Znači, od ukupno $7\frac{1}{2}$ časova, na nizbrdicama on utroši $2\frac{1}{2}$ časa, a na usponima $2\cdot 2\frac{1}{2}$ časa $=5$ časova, dakle, svega $2\frac{1}{2}$ časa $+5$ časova $=7\frac{1}{2}$ časova. (Imali smo, kao što vidite, jednostavan slučaj proporcionalne podele: da se $7\frac{1}{2}$ podeli na dva dela u odnosu $1:2$). U tome slučaju rastojanje *ACB* (put od *A* do *B* preko *C*) jednako je $50\cdot 2\frac{1}{2}=125$ (km) ili, što je isto, $25\cdot 5=125$ (km). Naime, rastojanje koje autobus pređe uzbrdo idući „tamo“ i rastojanje koje on pređe uzbrdo idući „otuda“ daju ukupno rastojanje od *A* do *B*. (Isto tako i sve nizbrdice u odlasku i sve nizbrdice u povratku daju zajedno veličinu razdaljine između *A* i *B*).

Dodatnih $\frac{1}{2}$ časa $\left(\text{tj. } 4 \text{ č. } -3\frac{1}{2} \text{ č. } =\frac{1}{2} \text{ č.}\right)$ pri kretanju od *B* do *A* (u poređenju sa kretanjem od *A* do *B*) možemo objasniti time što je dužina uzbrdica na putu od *B* do *A* veća od dužine uzbrdica na putu od *A* do *B* za duž *DB*. Naime, $(DB:25)-(DB:50)=\frac{1}{2}$, odakle se dobija $DB=25$ (km).

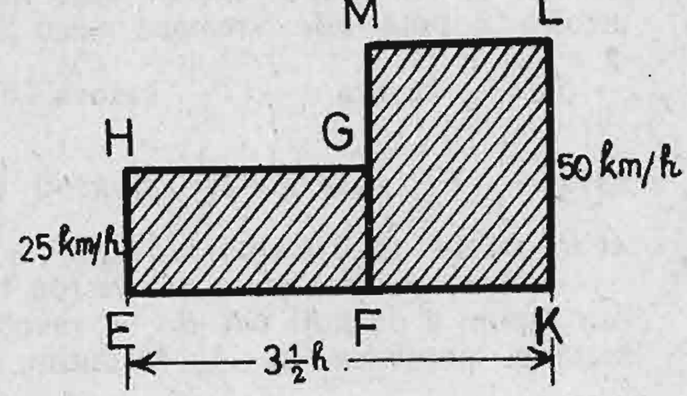
Tada je $AC=CD=(AB-DB):2=(125-25):2=50$ (km).

IV (*Grafičko-računski*). — Veoma često je neka veličina jednaka proizvodu dveju drugih veličina. Na primer: vrednost kupljene robe jednaka je proizvodu količine kupljene robe u kilogramima i cene jednog kilograma; put koji telo pređe pri ravnomernom kretanju jednak je proizvodu brzine tog tela i vremena da se taj put pređe itd. S druge strane, znamo da je površina pravougaonika jednaka proizvodu dužina njegovih stranica. Zato je u nekim zadacima, gde se jedna od posmatranih veličina javlja kao proizvod dveju drugih veličina, ponekad celishodno takav proizvod predstaviti površinom pravougaonika (paralelograma ili trougla), tj. u vidu dvodimenzionalnog dijagrama.

U našem primeru put (rastojanje) koji autobus prelazi stalnom brzinom može se pretstaviti pravougaonikom čija osnovica odgovara vreminu kretan:a, a visina — brzini. U tom slučaju put (rastojanje) *ACB* — pri kretanju autobusa od *A* do *B* — može se prikazati kao površ dvaju pravougaonika (sl. 2a): površ prvog pravougaonika *EFGH* (čija je visina 25 km/h) pretstavlja tada dužinu dela puta *AC* (na tom delu autobus je išao uzbrdo); visina drugog pravougaonika *FKLM* odgovara brzini 50 km/h (na nizbrdici *CB*); što se tiče nihovih osnovica (*EF* i *FK*), one su još nepoznate, ali je poznato da zbir tih osnovica odgovara vremenu 3,5 časa. Skicirajmo figuru *EKLMGH* tako da bude $EK=3\frac{1}{2}$ (časa) i $KL=2\cdot EH$; položaj duži *FM* nam, međutim, još nije poznat.

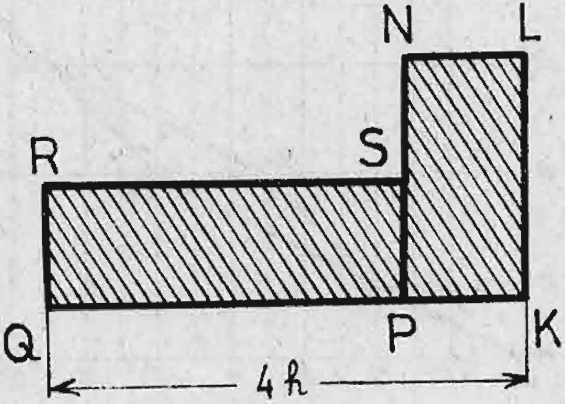
Analogno, taj isti put *ACB* — pri kretanju autobusa od *B* do *A*, tj. „ovamo“ — može se prikazati i kao površ figure *QKLNSR* (sl. 2b) takve da je $QR=EH$, $KL=2\,QR$, $QK=4$ (časa).

Položaj vertikalne duži *NP* još nije poznat (površina pravougaonika *PKLN* odgovara dužini puta *CA*, koji je autobus prešao idući nizbrdo brzinom 50 km/h).



Sl. 2a

Uporedimo (putem poklapanja) figure *EKLMGH* i *QKLNSR* (sl. 3c). Pošto su putevi (rastojanja) *ACB* i *BCA* jednaki, to su ove dve figure jednake po površini. Prema tome i pravougaonik *GSNM* mora biti jednak pravougaoniku *QEHR*; ali $QE=4-3\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (časa); dakle, $MN=\frac{1}{2}$ (časa). Međutim, pošto je $AC=CA$, to su i pravougaonici *EFGH* i *PKLN* jednaki; a kako je visina drugoga dva puta veća od visine prvoga (tj. $EH=KL/2$), to mora biti osnovica prvoga dva puta veća od osnovice drugoga, tj. $EF=2\,PK$. Prema tome, imaćemo dalje (sl. 2c):



Sl. 2b

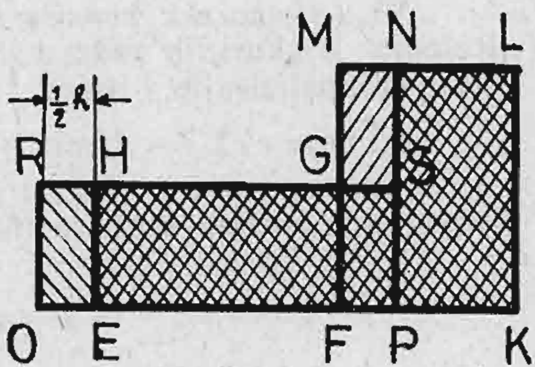
$$EF+PK=QK-(QE+FP),$$ tj.

$$2\,PK+PK=4-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right),$$ ili

$$3\,PK=3$$ (čas), odakle je

$PK=1$ (čas); onda $EF=2$ (časa).

Na taj način, deo puta *CA* (na povratku „ovamo“) autobus je prešao za 1 čas idući brzinom od 50 km/h. Prema tome je $AC=50$ km.



Sl. 2c

Deo puta *BC* (uzbrdo, takođe na povratku) autobus je prešao za 4 časa — 1 čas = 3 časa idući brzinom od 25 km/h, pa je, prema tome, $BC=3\cdot 25=75$ (km).

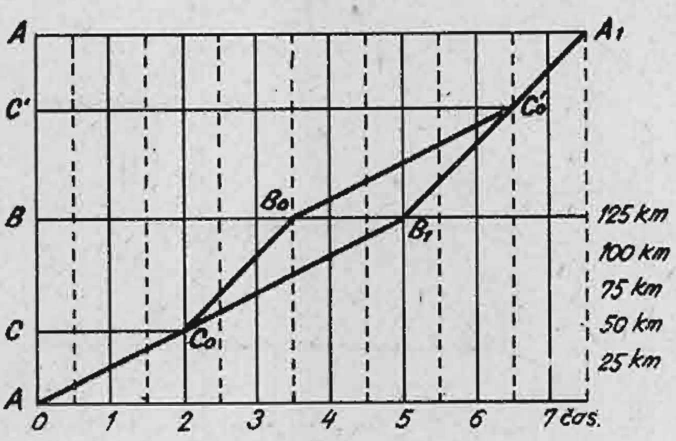
Ceo put od mesta *A* do mesta *B* (preko vrha brda *C*) biće tada $ACB=AC+CB=50$ km + 75 km = 125 km.

V. (*Grafički*). — Prema uslovu zadatka, autobus je išao „tamo“ $3\frac{1}{2}$ časa, a “otuda“ 4 časa; prema tome, svega $3\frac{1}{2}$ časa + 4 časa = $7\frac{1}{2}$ časova. Očigledno, autobus je na celom putu (računajući „tamo“ i „nazad“) prešao isto rastojanje (jednako dužini puta ACB) kako uzbrdo tako i nizbrdo. Ali pošto je uzbrdo išao dvaput sporije nego nizbrdo, to je on na usponima (uzbrdicama) utrošio 2 puta više vremena nego li na nizbrdicama, zapravo: na usponima $\frac{2}{3}$ od $7\frac{1}{2}$ časova $=\frac{2}{3}\cdot 7\frac{1}{2}$ časova $=5$ časova, na nizbrdicama $\frac{1}{3}$ od $7\frac{1}{2}$ časova $=\frac{1}{3}\cdot 7\frac{1}{2}$ časova $=2\frac{1}{2}$ časa; u tom slučaju dužina puta od A do B je $ACB=BCA=(5\cdot 25)$ km $=125$ km.

Promenićemo malo uslove (da bismo odredili AC): neka je AB ravnomeran uspon, a obrnuti put BA — ravnomeran pad. Tada će AB_1A_1 biti grafik kretanja autobusa (sl. 3). Međutim, u stvarnosti autobus je na put iz A u B utrošio ne 5 časova, već $3\frac{1}{2}$ časa.

Zato ćemo iz B_0 povući B_0C_0 paralelno sa A_1B_1, pa će tada AC_0B_0 biti stvarni grafik kretanja autobusa iz A u B. Grafik pokazuje da je autobus u odlasku "tamo“ (iz A u B) išao uzbrdo 2 časa, a nizbrdo $1\frac{1}{2}$ čas; $AC=50$ km.

Povlačeći B_0C' paralelno sa AB_1, dobijamo $B_0C_0'A_1$ — stvarni (pravi) grafik kretanja autobusa u povratku (iz B u A).



Sl. 3

VI. (*Algebarski: pomoću jednačina*). Jedno takvo rešenje dato je u rubrici „Rešenja konkursnih zadataka“ (v. 71. zadatak na strani 66 u ovom dvobroju lista). Proanalizirajte i njega!

Primer 2. — *Izvesti (na razne načine) obrazac za površinu trapeza!*

Ako su a i b dužine paralelnih stranica trapeza, a h—dužina njegove visine, onda traženi obrazac (formula), kao što znate, glasi:

$$P=mh \text{ ili } P=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h, \qquad (*)$$

gde je $m=\frac{1}{2}(a+b)$ — dužina srednje linije trapeza.

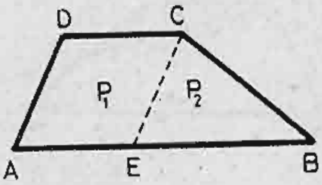
Rečima: Površina trapeza jednaka je proizvodu dužina njegove srednje linije i visine, ili: površina trapeza jednaka je proizvodu polovine zbira dužina njegovih osnovica i visine.

Kako se još može pročitati obrasac (*)?

Izvođenje obrazaca (*) svakako vam je pokazao vaš nastavnik matematike ili ste to naučili iz udžbenika.

Zanimljivo je da se do tog obrasca može doći na više načina. Ovde ćemo vam ukratko pokazati trinaest načina, dajući ponegde samo crteže i sheme izvođenja, a vi ćete na osnovu toga lako moći da sagledate svaki postupak u celini.

I. Razlaganje trapeza na paralelogram i trougao. Povlačeći $CE \parallel AD$ trapez $ABCD$ biva razložen na paralelogram $AECD$ (čiju ćemo površinu označiti sa P_1) i trougao EBC (čiju smo površinu označili sa P_2), pri čemu su njihove visine jednake. Pošto je $AE=DC=b$ i $EB=AB—AE=a—b$, to je $P_1=bh$ i $P_2=\frac{1}{2}(a-b)\,h$, pa ćemo imati:



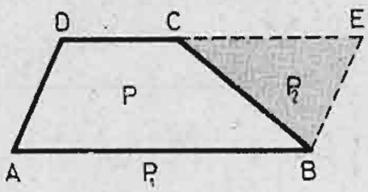
Sl. 4.1

$$P=P_1+P_2=bh+\frac{1}{2}(a—b)\,h=bh+\frac{1}{2}\,ah—\frac{1}{2}bh=$$

$$=\frac{1}{2}\,ah+\frac{1}{2}\,bh=\frac{1}{2}\,h\,(a+b),\ \text{tj.}\ P=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h,$$

a to je obrazac (*).

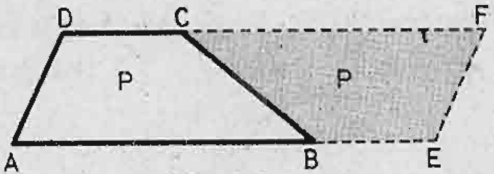
II. Dopunjavanje trapeza do paralelograma (trouglom). — Povlačeći $BE \parallel AD$ do preseka sa pravom DC, dobićemo paralelogram $ABED$. Tada će površina trapeza $ABCD$ biti jednaka razlici između površine paralelograma $ABED$ i površine trougla BEC, tj. $P=P_1-P_2=ab—\frac{1}{2}\,(a—b)\,h$, odakle se dobija $P=\frac{1}{2}(a+b)\,h$.



Sl. 4.2

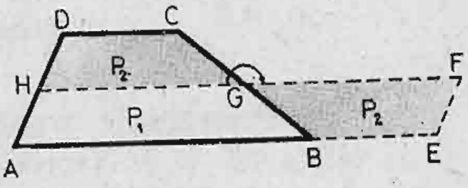
III. Dopunjavanje trapeza do paralelograma (trapezom). — Ako trapez $BEFC$, podudaran datom trapezu, stavimo uz dati trapez $ABCD$ na način kako to pokazuje sl. 4.3, dobićemo paralelogram $AEFD$ koji je po površini dva puta veći od površine datog trapeza, tj. $2\,P=(a+b)\cdot h$, odakle je

$$P=\frac{1}{2}\,(a+b)\,h.$$



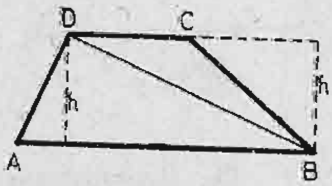
Sl. 4.3

IV. Pretvaranje trapeza u paralelogram. — Neka je HG srednja linija trapeza $ABCD$. Osenčeni trapezi su podudarni, dakle i po površini su jednaki ($P_2=P_2'$), pa će površina trapeza $ABCD$ biti $P=P_1+P_2=P_1+P_2'=(a+b)\cdot\frac{h}{2}$, a to je ustvari obrazac (*) napisan u nešto izmenjenom obliku.



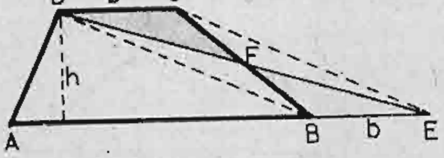
Sl. 4.4

V. Površina trapeza kao zbir površina dva trougla. — Podelimo trapez $ABCD$ na dva trougla: ABD (čiju ćemo površinu označiti sa P_1) i BCD (površine P_2). Budući da je $AB=a$ i $BD=b$, imaćemo $P_1=\frac{1}{2}\,ah$ i $P_2=\frac{1}{2}\,bh$, pa je $P=P_1+P_2=\frac{1}{2}\,ah+\frac{1}{2}\,bh=$ $=\frac{1}{2}\,h\,(a+b)$, a to je ustvari obrazac (*), jer je $h\,(a+b)=(a+b)\,h$.



Sl. 4.5

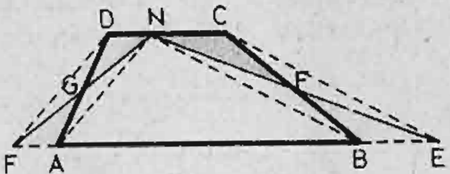
VI. Pretvaranje trapeza $ABCD$ **u trougao** AED **(sl. 4.6).** — Povlačenjem prave DF (gde je F središte stranice BC) do preseka E sa pravom AB, dobijamo dva podudarna trougla BEF i CDF (zašto?). Naime, možemo, zamisliti da smo trougao AED dobili tako što smo trougao CDF oduzeli od trapeza $ABCD$ i postaviti ga u položaj BEF. Pošto je $BE=DC=b$, to trougao AED ima osnovicu jednaku zbiru osnovica trapeza, a visina im je ista, pa je površina trapeza



Sl. 4.6

$$P=P_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AE\cdot h=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h.$$

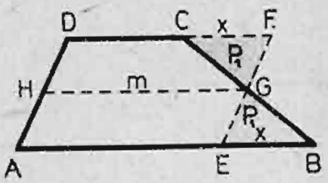
VII. Pretvaranje trapeza $ABCD$ **u trougao** ENF. — Postupak ovog pretvaranja razabira se sa slike 4.7. Tačka N je neka tačka na DC; specijalno, tačka N može da bude i na sredini stranice DC. Tada, zbog $FA=DN$ i $BE=NC$, imaćemo da je osnovica trougla FEN jednaka $FE=FA+AB+BE=$ $=AB+FA+BE=AB+DN+NC=AB+DC=a+b$, a visina mu je jednaka visini h trapeza $ABCD$.



Sl. 4.7

Prema tome, $P=P_{\triangle ENF}=\frac{1}{2}(a+b)\,h$.

VIII. Pretvaranje trapeza u paralelogram. — Kroz središte G kraka BC povucimo paralelu sa krakom AD do preseka E i F sa osnovicom AB i produžetkom osnovice DC. Paralelogram $AEFD$ jednak je po površini datom trapezu, jer su trouglovi EBG i GFC podudarni (zašto?). Naime, možemo zamisliti da smo taj paralelogram dobili tako što smo od trapeza $ABCD$ oduzeli trougao EBG i postavili ga u položaj GFC. Tada je

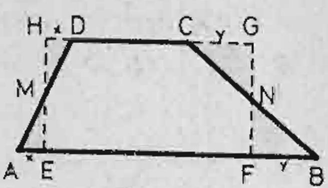


Sl. 4.8

$$P=P_{\text{par.}}-P_1+P_1'=P_{\text{par.}}=AE\cdot h=HG\cdot h=mh.$$

Međutim, $m=AE=DF$, tj. $2m=AE+DF$ ili $2m=(a-x)+(b+x)=a+b$, gde je $EB=CF=x$, te je onda $m=\frac{1}{2}(a+b)$, a $P=mh=\frac{1}{2}(a+b)\,h$.

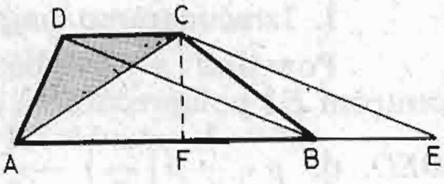
IX. Pretvaranje trapeza u pravouganik jednake površine. (sl. 4.9). — Ako kroz tačke M i N (središta krakova trapeza) povučemo normale na stranice AB, odnosno DC, onda će odsečci EH i FG biti međusobno jednaki (zašto?), pa će trougli CGN i FBN biti podudarni (objasni zašto!), a takođe su podudarni i trougli AEM i DHM. Lako onda zaključujemo da je površina tradeza $ABCD$ jednaka površini pravougaonika $EFGH$, a osim toga je $AE=DH$, $FB=CG$, pa se iz $EF=a-x-y$ i $EF=b+x+y$ dobija da je $2EF=a+b$, odakle je $EF=MN=(a+b)$. Tada je



Sl. 4.9

$$P=P_{\square}=EF\cdot EH=\frac{a+b}{2}\cdot h,\ \text{itd.}$$

X. Pretvaranje trapeza u trougao iste površine — Dva trvugla ACD i BCD (sl. 4.10) imaju zajedničku stranicu CD i jednake visine na tu stranicu. S druge strane, trougli BCD i BCE dobijeni su deljenjem paralelogama $DBEC$ dijagonalom BC, pa su, prema tome, oni podudarni međusobno, znači i po površini jednaki. To omogućava da se konstruiše trougao AEC koji je po površini jednak trapezu $ABCD$, te je onda:



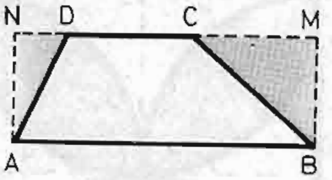
Sl. 4.10

$$P=P_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot CF=\frac{1}{2}(a+b)\,h.$$

XI. Dopunjavanje trapeza do pravougaonika. — Trapez $ABCD$ dopunićemo trouglima ADN (površine P_2) i BMC (površine P_3) do pravougaonika $ABMN$ (površine P_1), pa će njegova površina P biti:

$$P=P_1-P_2-P_3 \text{ (sl. 4.11), tj.}$$

$$P=ah-\frac{1}{2}xh-\frac{1}{2}yh=ah-\frac{1}{2}h(x+y)=ah-\frac{1}{2}h(a-b),$$



Sl. 4.11

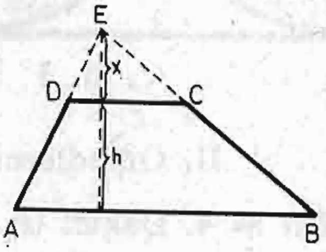
odakle se lako dobija obrazac (*).

XII. Dopunjavanje trapeza do trougla. — Ako trapez $ABCD$ dopunimo do trougla ABE (sl. 4.12) imaćemo da je

$$P=P_{\triangle ABE}-P_{\triangle DCE},\ \text{tj.}\ P=\frac{1}{2}a(h+x)-\frac{1}{2}bx,\ \text{odakle,}$$

uzimajući u obzir da je $(h+x):x=a:b$ ili $ax=(h+x)\,b$, dobijamo

$$P=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)\,h.$$



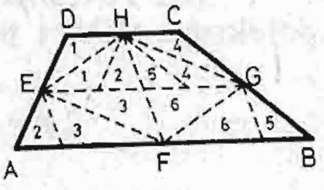
Sl. 4.12

XIII. Razlaganje trapeza na više trouglova. — Trapez $ADCD$ može se izdeliti („isparcelisati“) na 12 trouglova od kojih su dva po dva jednaka međusobno (takvih parova ima šest) kako to pokazuje slika 4.13 (F, G, H, E — središta stranica trapeza).

Sa slike 4.13 je $P_{\text{trapeza}}=2\cdot P_{EFGH}$, a pošto je

$$P_{EFGH}=\frac{1}{2}m\cdot\frac{h}{2}+\frac{1}{2}m\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}mh,\ \text{gde je}\ m=EG,\ \text{to je}$$

onda $P=2\cdot\frac{1}{2}mh=mh$, itd.



Sl. 4.13

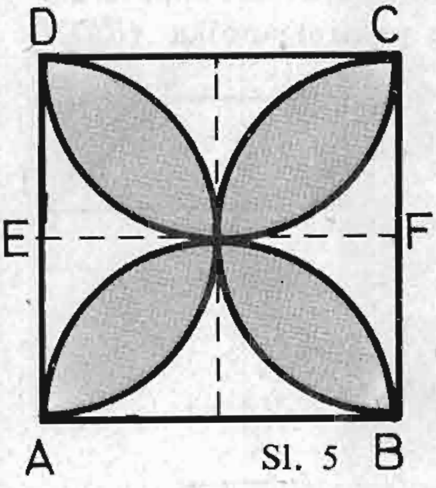
Verovatno ćete i vi naći još neki način da se dođe do obrasca (*).

Primer 3. — *Nad svakom stranicom kvadrata kao nad prečnikom opisani su polukrugovi koji leže unutar kvadrata. Odrediti površinu dobijene rozete* (*osenčeni deo figure*) *ako je stranica kvadrata jednaka* a (sl. 5). (Vidite zadatak 320. u ribrici „Odabrani zadaci“, ML II. 5).

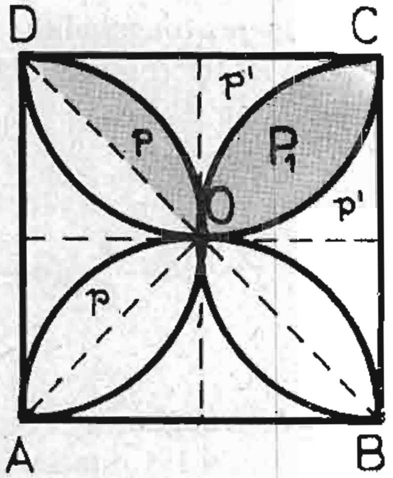
Pokazaćemo nekoliko varijanti za rešavanje ovog zadatka.

I. Izračunaćemo najpre površinu p i pomnožiti je sa 8 (sl. 5 i 6).

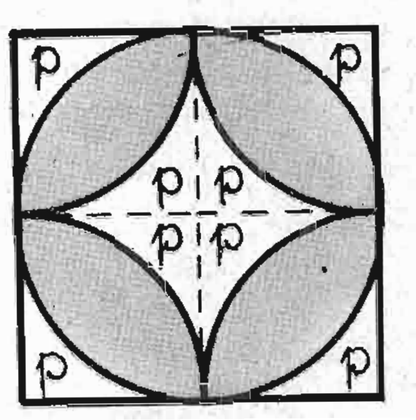
Površinu p odredićemo tako što ćemo od površine četvrtine kruga s centrom E i poluprečnikom $a/2$ oduzeti površinu jednakokrako-pravouglog trougla DEO, tj. $p=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{16}\pi a^2-\frac{1}{8}a^2=\frac{a^2}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, pa je površina rozete $P=8\cdot p=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ili $P=\frac{a^2}{2}(\pi-2)\approx 0{,}57\ a^2$ (1)



Sl. 5



Sl. 6



Sl. 7

II. Odredićemo najpre površinu P_1 jednog lista rozete i to onda pomnožiti sa 4. Dakle: $P_1=\left(\frac{a}{2}\right)^2-2p'$, ali pošto je $p'=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-\frac{\pi a^2}{16}=\frac{a^2}{16}(4-\pi)$, imaćemo: $P_1=\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$, odnosno $P_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$, a zatim $P=4P_1=2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-4\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{2}-a^2$, a to je ustvari obrazac (1).

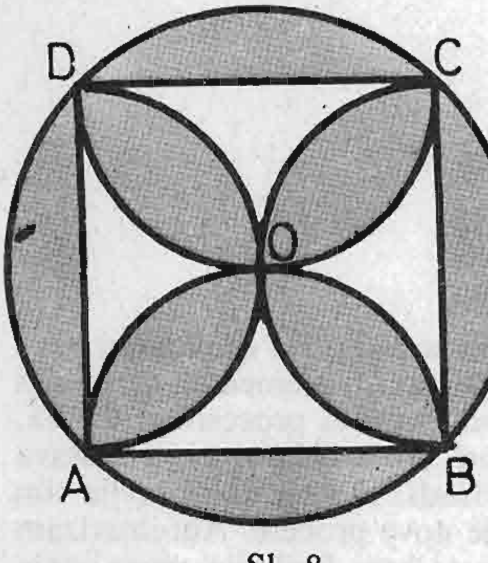
III. Površina $(p+p)$ može se odrediti i kao razlika između površine polukruga AOB i površine trougla AOB (sl. 6), tj.

$$2p=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2;\ \text{onda je}\ P=8p=4\cdot 2p,\ \text{itd.}$$

IV. Raspolovimo kvadrat $ABCD$, pa gornju polovinu sastavimo sa donjom (kao na sl. 7). Tada će tražena površina biti jednaka površini kvadrata umanjenoj za $8p$, tj.

$$P=a^2-8p.$$

Međutim, sa slike je jasno da je $4p$ (pri temenima kvadrata) jednako $a^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$, tj. razlici između površine kvadrata i površine u njega upisanog kruga.



Sl. 8

Prema tome:

$$P=a^2-2\cdot 4\,p=a^2-2\left(a^2-\frac{\pi a^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\pi a^2-a^2,$$

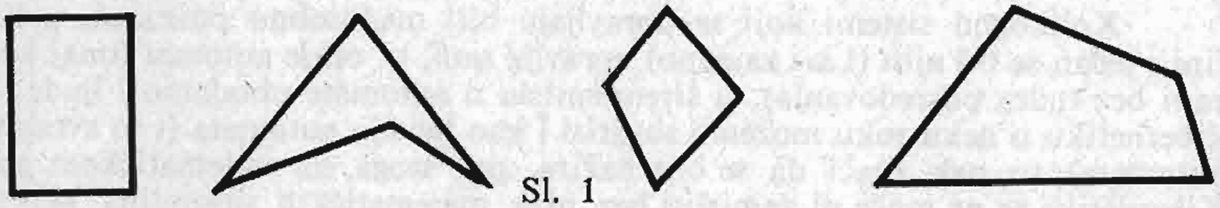
a to je opet isto kao (1).

V. Nije teško utvrditi da su osenčene površi na sl. 8 jednake, tj. lako je zaključiti da je razlika između površine kruga poluprečnika OA i površine rezete jednaka površini kvadrata $ABCD$.

Dokažite to i onda tu činjenicu iskoristite za izračunavanje površine rozete!

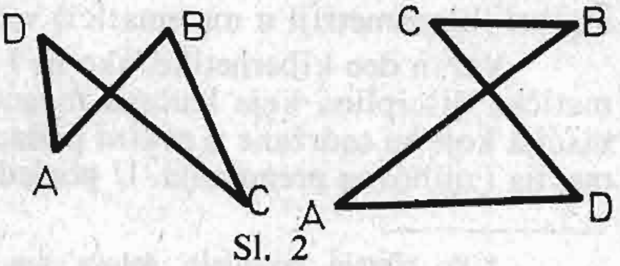
ЗНАТЕ ЛИ СВЕ О ЧЕТВОРОУГЛУ?

Четвороугли на слици 1 су различитог облика, али им је свима заједничко то да сваке две суседне странице имају по једну заједничку крајњу тачку, а несуседне странице немају заједничких тачака. Такви четвороугли зову се *прости четвороугли*.



Sl. 1

Међутим, има и четвороуглова којима се две несуседне странице секу (сл. 2); за такве четвороуглове кажемо да имају самопресек и називамо их *непростим четвороугловима*. Угловима непростог четвороугла називамо углове код темена A, B, C, D (не узимају се у обзир углови у тачки самопресека).



Sl. 2

Одговорите на питања:

1. Може ли непрост четвороугао имати четири права угла?
2. Колики је збир углова непростог четвороугла?
3. Ако непрост четвороугао има два права угла, да ли један од преостала два угла може бити туп?
4. Ако непрост четвороугао има два права угла, како би се доказало да су му остала два угла једнака?
5. Може ли прост четвороугао имати три тупа угла? А непрост четвороугао?

Д.

B. Marinković (Beograd)

AZBUKA KIBERNETIKE*

I. UVOD

1. Šta je kibernetika ?

1. Priroda je sveukupnost različitih procesa koji se nalaze u uzajamnoj vezi. Nauka proučava i otkriva zakonitosti u odnosima pojedinih elemenata u samim procesima kao i zakonitosti uzajamnog delovanja među samim procesima. Čovek, nastojeći da prirodu potčini sebi i podigne efikasnost svoje delatnosti, pokušava da u većoj ili manjoj meri utiče na tok procesa u prirodi, nastoji da upravlja tim procesima i na osnovu stečenog iskustva on organizuje nove procese. Automatizam mnogih procesa u prirodi pobuđuje čoveka da sve veći broj funkcija upravljanja (procesima) prebaci na tehničke mehanizme — automate (u užem smislu reči).

U vezi s tim, ne tako davno rodila se i nova nauka — *kibernetika***. Teško je kratko a precizno kazati šta je to kibernetika. Prema *Norbertu Vineru* (1894—1964.), koji je ovoj nauci postavio temelje, *kibernetika je opšta nauka o upravljanju i kontroli složenim sistemima i procesima.* Pri tome imamo tri osnovne oblasti upravljanja: upravljanje sistemima mašina, organiziranim ljudskim kolektivima i živim organizmima; samo, pak, upravljanje može se ostvarivati pomoću kolektiva ljudi ili ga ljudi realizuju pomoću mašina.

Kolikogod sistemi koji se upravljaju bili međusobno povezani, u krajnjoj liniji jedan se od njih (i svi zajedno) upravlja sam, tj. on je automat (onaj koji sam radi bez tuđeg posredovanja); u širem smislu u automate ubrajamo i ljude. Stoga, kibernetiku u neku ruku možemo shvatiti i kao teoriju automata (i to svrsishodnih automata); to, pak, znači da se ona bazira, pre svega, na matematičkom aparatu. Kibernetika se ne može ni zamisliti bez niza matematičkih disciplina kao što su verovatnoća, matematička logika, teorija algoritama, teorija informacija, linearno programiranje, teorija igara i dr.***

I sama kibernetika takođe se deli na niz oblasti, od kojih su mnoge (slično algebri ili geometriji u matematici) već izrasle u samostalne nauke.

Važan deo kibernetike, ako ne i glavni, je *teorija informacija*****; to je matematička disciplina koja izučava mogućnosti proračunavanja i procene broja informacija koje su sadržane u nekim podacima, zatim, istražuje procese pamćenja informacija i njihovog prenošenja. U pogledu obrade informacija (koje postaju sve obim-

---

* Pri pisanju pojedinih delova ove serije članaka korišćeni su i neki članci sovjetskih popularizatora nauke *V. Pekelisa* i *V. Kasatkina.*

** Termin potiče od grčke reči »kibernetes«, a u prevodu znači upravljač, kormilar, što upućuje na to da kibernetika pretstavlja nauku o upravljanju ili, još tačnije, nauku o opštim zakonima obrade informacija u upravljivim sistemima.

*** O nekim elementima ovih disciplina biće reči i na stranicama »Mat. lista«.

**** Osnovni element od koga polazi k. je *informacija.* To je podatak koji se mora sačuvati u *pamćenju,* zatim prenositi na određeni način, tj. *kanalima veze,* i konačno upotrebiti kao *signal,* da bi se započeo određeni proces. Za kibernetiku je svejedno da li se ovo realizira u nekom aparatu ili organizmu. Samo čuvanje i predaja informacije naziva se *veza.* Već i signal, koji inicira neku aktivnost, jeste *upravljanje.* Time je određen samo jedan smer veze. Međutim, ako je akter delatnosti sposoban da nakon ostvarene veze pruži podatke o svojoj delatnosti, tj. ako ima takve organe, onda se govori o *obratnoj vezi.* Predaja ovako nastale informacije kanalima veze i konačno pretvaranje u nov signal, koji sada uslovljava novu reakciju, naziva se *kontrola ili regulacija.*

nije, težeći da oponašaju nervnu, pa čak i umnu aktivnost) dosad je dosta postignuto: automatsko izvođenje raznih procesa i računske mašine ustvari zamenjuju određenu ljudsku aktivnost.

Kibernetika je vrlo mlada nauka, ali neobično važna u raznim oblastima čovekove delatnosti, naročito za dalji razvoj savremene tehnike i specijalno automatizacije kao novog metoda privređivanja.*

U najnovije vreme javlja se kibernetika i kod nas, ali dosta sporo i u skromnom opsegu. Da bi se razvoj kibernetike ubrzao i kod nas, potrebno je što veći broj ljudi, naročito stručnjaka iz raznih područja, upoznati sa njenim osnovama i dostignućima. O kibernetici je kod nas do sada prilično malo pisano.

2. Verovatno ste često slušali, a možda nešto i pročitali o kibernetici. Reč *kibernetika* ušla je danas u modu, bar tako izgleda. Vidimo je danas često na stranicama tehničkih, naučnih i popularnih časopisa. O njoj se pišu knjige, organizuju naučni skupovi i kongresi na kojima učestvuju naučnici iz raznih naučnih područja (matematičari i fizičari, biolozi, fiziolozi i psihijatri, ekonomisti i filozofi, inženjeri raznih specijalnosti). Sve njih ujedinjuje zajednički cilj: *maksimalno automatizovati procese upravljanja u različitim sferama ljudske delatnosti*. U tom smislu se u pojedinim područjima (naročito tehnike) danas u svetu daleko otišlo. Naš vek može se s pravom nazvati i vekom kibernetike.

Broj elektronskih računskih mašina (kompjutera) svakodnevno raste; one sve više postaju nezamenljivo čovekovo oruđe u umnom radu; pomoću njih se upoznaje priroda i njome upravlja. No ne treba zaboraviti da je u tim mašinama, tim pomoćnicima čovekovim, koncentrisano ogromno znanje i talenat ljudi.

Ma gde da pođete — u institut, u fabriku ili u neku ustanovu — svuda ćete u većoj ili manjoj meri naići na razne mašine koje čoveku pomažu u radu, pre svega tamo gde se traži umni napor. Mašine upravljaju postrojenjima i čitavim automatiziranim fabrikama, vode kosmičke letilice, regulišu ulično kretanje, vrše matematička izračunavanja, utvrđuju dijagnozu bolesti, planiraju, izvode obuku ljudi, broje razne proizvode, obračunavaju dohotke, a ponegde čak prevode naučne tekstove s jednog jezika na drugi. Pojavile su se i takve kibernetičke mašine koje su čoveku postale savetnici i nadzornici drugih mašina. Kibernetika je otkrila inženjerima veoma mnogo gotovih i vrlo savršenih automata; to su biljke, životinje i sami ljudi. Po uzoru na njih čovek danas stvara nove automate.

Još veće uspehe i još veću pomoć od kibernetike treba očekivati u budućnosti. Naravno, tada će postojati i više kibernetičkih mašina pa, prema tome, biće potrebno i više ljudi koji će umeti da se koriste ovim mašinama i da ih sami stvaraju. Upravo vas, današnju mladu generaciju, očekuje da ovladate tom složenom tehnikom i da stvarate nove i još savršenije mašine. Mnogo neobičnog i veoma interesantnog vas očekuje. A da se sve to postigne potrebno je dosta znati i umeti. Naukom mogu ovladati samo oni koji znaju i koji uče da bi što više znali. Ukoliko želite da rukujete »mašinama koje misle«, ako želite da pravite elektronske robote, ako želite da nešto novo otkrijete u kibernetici..., onda je potrebno da izučavate osnove kibernetičke nauke, da ovladavate bogatim saznanjima do kojih su pre vas došla ranija pokoljenja, vaši očevi, dedovi, pradedovi...

---

* Naglo proširenje područja i problematike naučnih istraživanja i raznih primena naučnih dostignuća u poslednjim decenijama, dovelo je do pojave sve brojnijih i sve užih specijalizacija. No taj je proces bio praćen dijalektički suprotnim procesom: potrebom približavanja i objedinjavanja čak i takvih područja za koja ni najsmeliji fantasti ne bi mogli slutiti da imaju nešto zajedničko. Upravo je kibernetika jedan od oblika tog objedinjavanja, te sinteze.

3. Evo šta sovjetski akademik *A. Berg* poručuje mladima. Dajemo to u izvodima i u nešto slobodnijem tumačenju.

Prvo. Izučavajte kibernetiku! Čak i u veoma maloj enciklopediji o kibernetici skupljeno je ogromno bogatstvo koje je razum ljudski otkrio. A koliko je tek toga u velikoj, pravoj nauci!

Drugo. Potrebno je da zavolite elektronske računske mašine, koje spadaju u najsavršenije čovekove izume. One još nisu rekle svoju poslednju reč. Možda će ih neko od vas naterati da »progovore« i odaju još neku svoju tajnu.

Treće. Zapamtite: u svakom poslu postoje usponi i padovi. Lepo je i primamljivo brzo dospeti na vrh i s visine gledati na nepegledna prostranstva. Ali ne zaboravite: sve što je novo, primamljivo i efektno — ukoliko je to ono pravo — uvek ima svoje korene znatno dublje nego što to možda izgleda. Zbog toga je neophodno da se poznaju osnove dotične nauke. U nauci i tehnici nema ničega strašnijeg ni pogibeljnijeg od površnosti u radu. A u osnovi nove tehnike i novih saznanja su matematika, teorija informacija, fizika, elektronika i mnoge druge nauke.

Četvrto. U svakom poslu važan je cilj koji se ima, a da se do njega dođe potrebni su oduševljenje u radu i veština da se vidi upravo ono što je glavno. I u školi je tako: bez ljubavi za neki predmet teško da ćete u njemu postići neki značajniji uspeh.

2. Učite kibernetiku!

Imajući u vidu napred navedenu poruku akademika Berga, nameće se pitanje: A da li je moguće da i vi, učenici starijih razreda osnovne škole, ponešto naučite i shvatite od mnogih kibernetičkih čuda?

Odmah da odgovorimo: Moguće je!

Da, sasvim je moguće! Eto, ja, na primer, poznajem pionire koji su ovladali osnovnim znanjima iz kibernetike, koji su naučili ono što bi se moglo nazvati azbukom kibernetike. Oni su shvatili da više nije dovoljno upoznavati kibernetiku samo površno i u opštim crtama, već da je došlo vreme kada kibernetiku treba izučavati, kada i u toj oblasti treba biti pismen.

Imao sam prilike da upoznam učenike koji se ne zadovoljavaju samo time što čitaju o mašinama koje je neko izumeo ili da prave modele prema tuđim već gotovim nacrtima, već nastoje da dublje upoznaju neka područja kibernetike i zato sami uče i pronalaze. To su pioniri iz kibernetičke sekcije pri *Maloj akademiji nauka* (*MAN*), koju su osnovali učenici na Krimu.

O onome šta uče mladi kibernetičari iz *MAN* uglavnom će i biti reči u našoj »*Azbuci kibernetike*«.

Serija članaka, koje ćemo objavljivati pod opštim naslovom »***Azbuka kibernetike***« pretstavlja u izvesnom smislu pravi bukvar — doduše, prilično neobičan — u kome su sadržani osnovni pojmovi i činjenice iz nekih područja ove, s jedne strane veoma zanimljive, a s druge strane veoma složene nauke.

Čitajući ove članke imaćete utisak kao da ste zavirili u neki kabinet kod naučnika koji će vam otkriti mnoge tajne. Pri tome ćete mnogo naučiti. Između ostalog naučićete kako se u kibernetici pišu brojevi i kako se računa, saznaćete da se računati može i sa rečenicama i naučiti da to i sami radite, a videćete i kako se taj svojevrsni račun primenjuje; na kraju, videćete iz kakvih se »ciglica« prave »mašine koje misle«.

Naravno, ovo ne treba shvatiti kao neki udžbenik kibernetike, ali ni kao tekst koji se lako čita. »*Azbuku kibernetike*« treba čitati za pisaćim stolom s olovkom u ruci i sveskom za beleške ispred sebe. *Uspeh ćete postići ako budete pažljivo pročitali svaki pasus, svaki red, i ako marljivo uradite sve zadatke i vežbe.* Bilo bi svakako dobro da »Azbuku« prorađujete sa svojim drugovima na kružoku, u okviru matematičke sekcije i sl. Možda ćete i vi u vašoj školi osnovati klub ili sekciju mladih kibernetičara?

Kibernetika očekuje one koji su željni znanja, one koji hoće da istražuju, one koji su istrajni u svome radu. Iako je kibernetika veoma složeno područje istraživanja i za obrazovane odrasle ljude, ona ipak otkriva široko polje rada i za pionire s različitim naklonostima.

Ako volite da radite s hartijom i olovkom u ruci, trenirajući svoje matematičke sposobnosti, onda će vam kibernetika ponuditi masu veoma interesantnih zadataka. Ako vam se više sviđa lemilica (aparat za lemljenje), onda ćete moći da konstruišete »razumne« automate (automate koji »misle«); da ih projektujete — naučiće vas kibernetika. Za one koji vole logiku — biće dosta posla oko spajanja (i rastavljanja) shema raznih automata. Dakle, za svakoga će se ponešto naći.

Želimo vam mnogo uspeha mladi ljubitelji kibernetike!

* * *

Pređimo sada na čitanje našeg bukvara, naše »*Azbuke*«.

Kao i u svakom bukvaru, ovde sve počinje od najprostijeg. Možda će mnogo toga izgledati veoma lako, ali ti dragi čitaoče, savetujemo da mnogo ne žuriš prilikom čitanja i pri izvođenju zaključaka, već čitaj pažljivo svaki red!

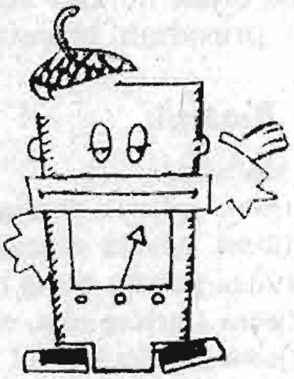
A najvažnije je: istrajno i marljivo uradi sve zadatke za vežbanje, koji budu postavljeni. Na kraju svakog odeljka (članka) za ove se zadatke daju rešenja ili uputstva, ali ti preporučujemo da u njih ne zagledaš često! Radi samostalno, a tek na kraju kontroliši svoj rad.

Priložene slike i ilustracije brižljivo proučavaj, a svoje uredno crtaj. Tvoji pomoćnici bićemo nas troje: *KIB*, *KIBA* i *KIBER*. Budi pažljiv(a) i nemoj propustiti nijedan naš savet, nijednu našu preporuku; to će ti pomoći da vidiš i shvatiš ono što je glavno u »Azbuci«.

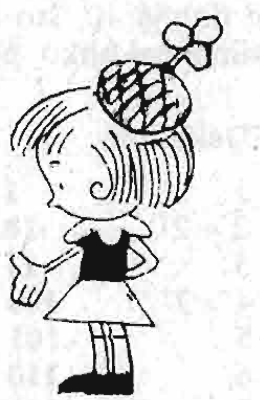
Dakle, da se upoznamo! Zdravo! Ja sam *Kib*, ja — *Kiba*, a ja — *Kiber*.

A sada, na posao! Počnimo! Napred!

Kib



Kiber

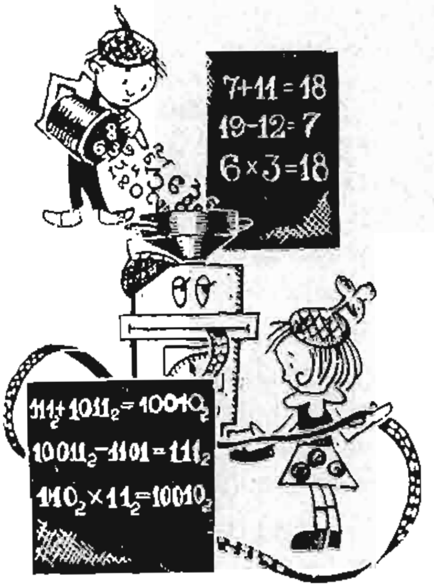


Kiba

II. KAKO SE U KIBERNETICI RAČUNA

(Binarni brojni sistem)

1. Jezik jedinica i nula



Mi smo navikli da brojimo predmete i da računamo uzimajući za osnovu broj deset. Deset jedinica čine deseticu, deset desetica čine stoticu, itd. Taj se brojni sistem naziva **dekadnim ili desetičnim.**

U kibernetici, a posebno kod elektronskih računskih mašina, upotrebljava se (jer je to pogodnije) drugi brojni sistem — **binarni (dijadni, dvojični) brojni sistem,** tj. pozicioni ili mestovni sistem u kojem se koriste samo dve cifre: »**0**« i »**1**«. Ovaj jezik nula i jedinica ima ovde svojevrsnu prednost: računskoj mašini dovoljna su dva različita signala da bi se takav jezik mogao upotrebiti; a dva znaka, na primer »0« i »1«, dovoljna su da se zapiše koji bilo broj. Ovi uslovni znaci (0 i 1) u mašini se prenose ili zapisuju pomoću električne struje. U elektronskoj računskoj mašini to se jednostavno ostvaruje pojavom ili odsustvom strujnog signala ili impulsa: ima impulsa — jedinica, nema impulsa — nula; ili: ako sijalica zasvetli (»uključeno«) — to je 1, a ako se ugasi (»isključeno«) — to je 0. Nikakve treće mogućnosti ovde nema.

Mada smo o raznim brojnim sistemima pisali u »Matematičkom listu« III. 1, str. 14—18, ipak ćemo ovde reći nešto više o binarnom brojnom sistemu.

Pri brojanju predmeta u ovom sistemu koristimo se parovima; naime ovde se u ulozi »desetice« pojavljuje »par«, tj. broj **dva**: dve obične jedinice (jedinice prvog reda) čine *par* ili jedinicu drugog reda; dve jedinice drugog reda (tj. dva para) obrazuju jedinicu trećeg reda; dve jedinice trećeg reda obrazuju jedinicu četvrtog reda, itd. Istina, ovde ove više jedinice nemaju posebne nazive kao što je to slučaj u dekadnom sistemu, gde pored *deset* imamo dalje redom: *stotica*, *hiljada*, itd. No to ne predstavlja nikakvu smetnju.

Pravila za zapisivanje brojeva u ovom sistemu ista su kao i u svakom drugom pozicionom (mestovnom) sistemu. Pogledajmo malo detaljnije kako se to radi pri brojanju predmeta, tj. kad je reč o prirodnim brojevima.

Za zapisivanje brojeva *nula* i *jedan* koriste se već pomenuta dva znaka: »*0*« i »*1*«. Da bi se zapisao broj *dva* nema posebnog znaka, kao što ga nema za broj *deset* u dekadnom sistemu i *pet* u petičnom sistemu. Zato se u prethodnom broju 01 jedinica prvog reda menja u »0«, a nula na mestu jedinica drugog reda menja se u »1«, pa se dobija 10, što ćemo čitati ne kao »deset«, već »jedan nula«.

Zapišimo nekoliko prvih prirodnih brojeva u binarnom sistemu:

Broj:	Dekadni:	Binarni:	
jedan	1	**1**	
dva	$2=2^1$	**10**	(jedna jedinica drugog reda, nijedna prvog reda)
tri	3	**11**	(jedna jedinica drugog reda i jedna prvog reda)
četiri	$4=2^2$	**100**	(jedna jedinica trećeg reda, nijedna drugog i prvog reda)
pet	5	**101**	(jedna j. trećeg reda, nijedna drugog i jedna j. prvog reda)
šest	6	**110**	(jedna jedinica trećeg i jedna drugog reda, a nijedna prvog reda)
sedam	7	**111**	(po jedna jedinica trećeg, drugog i prvog reda)
osam	$8=2^3$	**1000**	(jedna jed. četvrtog reda i nijedna trećeg, drugog i prvog r.). Itd.

Zadatak 1. — Pokušaj da sam produžiš ovu tablicu. Ako ne »ide«, obrati se nekome ko to zna, a zatim pogledaj odgovor na str 31.

Obratite pažnju na to da se brojevi *»dva«, »četiri«, »osam«, ... u binarnom sistemu zapisuju na isti način kao i brojevi »deset«, »sto«, »hiljadu«, ... u dekadnom sistemu*, tj. oni su stepeni (potencije) svojih osnova; pri tome izložilac (eksponent) osnove pokazuje broj nula koje dolaze posle jedinice u zapisu broja jednakog vrednosti tog stepena.

Sistem „10":	*Sistem „2":*
$10^1_{10} = 10_{10}$	$2^1_{10} = 10_2$
$10^2_{10} = 100_{10}$	$2^2_{10} = 100_2$
$10^3_{10} = 1000_{10}$	$2^3_{10} = 1000_2$
....	....

Naime, u sistemu baze dva je $10_2 \cdot 10_2 = 10^2{}_2 = 100_2$, što je u dekadnom (desetinskom) sistemu brojeva $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$; isto tako je $10_2 \cdot 10_2 \cdot 10_2 = 10^3{}_2 = 1000_2$, što je u dekadnom sistemu $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 4$. Stoga je: $10_2 = 2_{10}$, $100_2 = 4_{10}$, $1000_2 = 8_{10}$, itd.

(Znaci, tzv. indeksi, napisani sitnije dole desno pored broja, pokazuju u kojem je sistemu broj napisan. Na primer, 1000_2 znači da je dati broj napisan u brojnom sistemu s osnovom dva (binarni sistem). Radi jednostavnijeg pisanja, a s obzirom da danas uglavnom upotrebljavamo dekadni brojni sistem, obično ne pišemo taj indeks uz brojeve u tom sistemu: umesto 2_{10} pišemo samo 2; 308 znači ustvari 308_{10}).

Zapazivši tu zakonitost, vi ćete i bez postupnog brojanja umeti da zapišete brojeve 16, 32, 64, itd. u binarnom sistemu, a zatim i svaki drugi broj — samo će biti potrebno da taj broj prethodno prikažete kao zbir stepena broja dva (tj kao zbir brojeva 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...); na primer:

$$\underbrace{13 = 8 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}_{\text{ovi brojevi su u dekadnom sistemu}} = 1101_2$$

Ovde se nećemo detaljnije zadržavati na prevođenju brojeva iz jednog sistema u drugi, jer je to detaljno objašnjeno u pomenutom članku (»ML« III. 1, str. 14—18.), pa to važi i za binarni sistem. Primera radi, dekadni broj 13, tj. 13_{10} napisaćemo u sistemu s bazom dva.

Evo kako se to radi (objašnjenja izostavljamo):

$$\begin{array}{lll} 13:2 = 6; & 6:2 = 3; & 3:2 = \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array}$$

Dakle: $\mathbf{13_{10} = 1101_2}$.

Znači, uokvirene brojeve (ostaci pri deljenju i poslednji količnik) napisali smo u obrnutom redosledu.

Zadatak 2. — Prevedi na jezik jedinica i nula, tj. napiši u binarnom sistemu, sledeće dekadne brojeve: 10, 11, 17, 21, 27, 47, 69, 600.

Ako broj napisan u binarnom sistemu, naprimer 1101, hoćemo da napišemo u dekadnom sistemu, onda je postupak obrnut: svaku cifru (broj jedinica određenog reda) treba pomnožiti odgovarajućom mesnom vrednošću i dobijene proizvode sabrati, jer $1101_2 = 1000_2 + 100_2 + 1_2$; dakle:

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13,$$

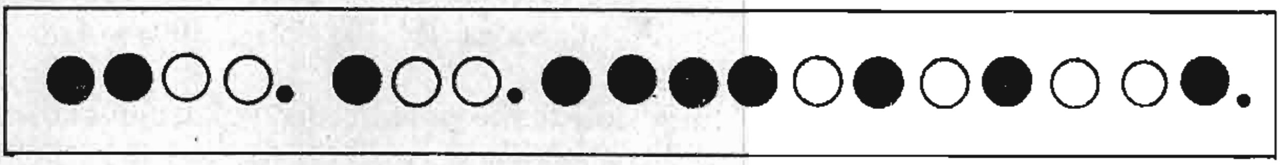
ili se to radi postupno ovako:

$$1 \cdot 2 = 2;\ 2 + 1 = 3;\ 3 \cdot 2 = 6;\ 6 + 0 = 6;\ 6 \cdot 2 = 12;\ 12 + 1 = \mathbf{13}.$$

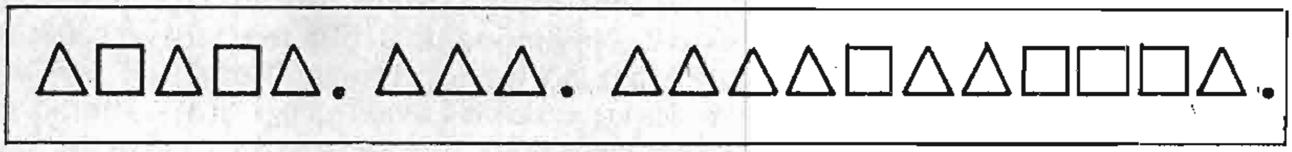
Zadatak 3. — Sledeće brojeve, napisane u binarnom sistemu, zapiši u dekadnom sistemu: 1001, 1100, 11000, 1011, 1111, 11110110001; na primer: $1100_2 = 12_{10}$, $1111_2 = 15_{10}$.

Zadatak 4. — Da li svaki teret s masom do 7 kg možeš izmeriti na terazijama (vagi) ako imaš na raspolaganju samo tegove od 1 kg, 2 kg i 4 kg? Koja su dva tega još potrebna da bi se mogao izvagati svaki teret do 31 kg zaključno?

Zadatak 5. (Za dosetljive). — Ovih dana sam u izlogu Kluba mladih kibernetičara video dve neobične table: na prvoj je gorelo deset crvenih i osam zelenih sijalica raspoređenih kako to pokazuje sl. 2 a), pri čemu su crvene sijalice prikazane crnim kružićima, a zelene — belim; na drugoj tabli bio je niz trouglova i kvadrata raspoređenih kao na sl. 2 b). Ustvari, tako su bila šifrirana dva u kosmonautici veoma značajna datuma. Koji su to datumi ako crvena sijalica označava »1«, a zelena »0«, odnosno ako △ označava »1«, a □ znači »0«?



Sl. 2a



Sl. 2b

2. Sabirati je sasvim lako

Nadamo se da si shvatio kako se rezultati prebrojavanja predmeta zapisuju u binarnom brojnom sistemu. Sada ćemo pokazati kako treba sabirati brojeve napisane u tom sistemu.

Možda ti je u nižim razredima bilo teško da naučiš tablicu množenja. Međutim, ona ti je pomogla da vršiš računske operacije i sa vrlo velikim brojevima.

Da bi se vršila računanja u binarnom brojnom sistemu takođe se koriste tablice sabiranja i množenja. Sigurno te interesuje kako izgledaju te tablice. Pogledaj, kako je jednostavna **tablica sabiranja**:

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 10

Evo nekoliko primera sabiranja:

$$\begin{array}{r} 10 \\ +\ 11 \\ \hline 101 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101 \\ +\ 10 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ +\ 111 \\ \hline 1111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ +\ 11 \\ \hline 110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ +\ 11 \\ \hline 1010 \end{array}$$

Kao što vidiš, ništa neobično: radi se na isti način kao što se to čini u dekadnom sistemu. Na primer, u poslednjem sabiranju radili smo ovako: 1 i 1 je 10 (jer se u ovom sistemu dva — baza sistema — piše 10), pišemo »0«, a 1 kao jedinicu drugog reda sabiramo sa jedinicama drugog reda: $1+1+1=11$ (jedna jedinica drugog reda i jedna prvog reda, jer $3_{10}=11_2$), pišemo 1, a jedinicu trećeg reda sabiramo dalje sa jedinicom trećeg reda u prvom sabirku, to daje 10, itd.

Zadatak 6. — Sam izvrši sledeća sabiranja (potpisivanjem): 1) $101+11=?$, 2) $110+101=?$ 3) $1001+101=?$, 4) $1001+1101=?$. 5) $1111+101=?$, a takođe i ova: 6) $1011+111+101=?$, 7) $1001+101+11=?$

Obavezno izvrši proveravanje svojih rezultata. U tom cilju sve sabirke napiši u dekadnom brojnom sistemu, izvrši sabiranje, pa vidi da li dobijeni zbir u dekadnom sistemu odgovara onome koji si dobio u binarnom; na primer:

$$\begin{array}{rcr} 110 & \longrightarrow & 6 \\ +\ \ 11 & \longrightarrow & +\ 3 \\ \hline 1001 & \longleftarrow & 9 \end{array}$$

Da bi što bolje naučio da računaš u binarnom brojnom sistemu, potrebno je što više da vežbaš. Možeš to činiti i u posebnoj svesci u kojoj ćeš rešavati i ostale zadatke iz ove serije članaka. Primere možeš i sam da sastavljaš.

Zadatak 7. — Izračunaj $38+89+215$ prevodeći sabirke (napisane u dekadnom sistemu) u brojeve binarnog sistema.

3. Ni množiti nije teško

Ako si dobro naučio sabiranje u binarnom sistemu, onda možeš preći na množenje. Evo tablice množenja:

O × O = O
O × I = O
I × O = O
I × I = I

Potrebno je da sam naučiš kako se množi. Zato pažljivo prouči ovde rešene primere; to će ti pomoći da shvatiš na koji je način vršeno množenje:

1) $11 \cdot 1 = 11$;

2) $101 \cdot 1 = 101$:

3) $$\begin{array}{r} 101 \cdot 10 \\ \hline 000 \\ +\ 101 \\ \hline 1010 \end{array}$$ ili kraće $101 \cdot 10 = 1010$;

4) $$\begin{array}{r} 111\cdot101 \\ \hline 111 \\ 000 \\ 111 \\ \hline \mathbf{100011} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{r} 101001\cdot1101 \\ \hline 101001 \\ 101001 \\ 101001 \\ \hline \mathbf{1000010101} \end{array} \qquad (41_{10}\cdot13_{10}=533_{10})$$

Množenje sa »0« u binarnom sistemu vrši se kao i u dekadnom. Delimične proizvode, sastavljene samo od nula, napisali smo samo očiglednosti radi. Sigurno si već i sam zaključio da se moženje u pretposlednjem primeru (4) kraće može i ovako izvršiti:

$$\begin{array}{r} 111\cdot101 \\ 111 \\ \hline \mathbf{100011} \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{r} 101\cdot111 \\ 101 \\ 101 \\ \hline \mathbf{100011} \end{array}$$

Kao što se vidi, množenje u binarnom sistemu svodi se na jednostavno prepisivanje množenika (uz odgovarajuće pomeranje) i sabiranje.

Zadatak 8. — Izvrši množenja: 111 · 1, 101 · 11, 101 · 10, 1100 · 10, 1110 · 11, 1011 · 11. Proveri dobijene rezultate prevodeći brojeve u dekadni brojni sistem.

Zadatak 9. — Izračunaj 37 · 24 (brojevi su u dekadnom sistemu) prevodeći prethodno činioce u binarni sistem.

Zadatak 10. — (Vežba pažnje). — U sledećim primerima sabiranja i množenja u binarnom sistemu umesto znaka »?« treba da staviš odgovarajuću cifru:

1) $$\begin{array}{r} 1?01 \\ +\ ??1 \\ \hline 10\,000 \end{array}$$ 2) $$\begin{array}{r} 1?01 \\ +\ 10? \\ \hline 10010 \end{array}$$ 3) 1?1 · ? = 101
1? · ?1 = 1001

4. Oduzimanje zahteva nešto više pažnje

Pre nego što upoznaš sledeću operaciju — oduzimanje — pokušaj da tačno utvrdiš koji je od brojeva u svakom od sledećih parova veći (brojevi su u binarnom sistemu): 101 ili 110; 1101 ili 1010; 110 ili 1000; 1001 ili 1100. Počni uvek od najviših mesnih vrednosti (tj. sleva)!

Sigurno si već utvrdio da je: 101 < 110 (čitaj: 101_2 manje je od 110_2); 11001 > > 1010; ili 110 < 1000; 1001 < 1100.

Zadatak 11. — Brojeve 1100, 1001, 1011, 1101 i 1010 (napisane u sistemu s bazom dva) poređaj po veličini počinjući od najmanjeg!

Evo još jednog zadatka za vežbu.

Zadatak 12. — Umesto znaka * postavi »1« ili »0« tako da dobijeni broj bude veći od onog drugog: 100*1 > 10010; 10**0 > 10100; 1*01*> 11010; 110**> 11000. Da li u svim ovim slučajevima postoji samo po jedno rešenje?

A sada da vidimo kako se vrši oduzimanje u ovom sistemu. Prouči sledeće primere:

$$\begin{array}{r} 11 \\ -\ 1 \\ \hline \mathbf{10} \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ -\ 1 \\ \hline \mathbf{100} \end{array} \quad \begin{array}{r} 111 \\ -\ 1 \\ \hline \mathbf{110} \end{array} \quad \begin{array}{r} 110 \\ -\ 100 \\ \hline \mathbf{10} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ -\ 1 \\ \hline \mathbf{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 1 \\ \hline \mathbf{11} \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ -\ 11 \\ \hline \mathbf{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ -\ 11 \\ \hline \mathbf{10} \end{array}$$

Kao što zapažaš, posebno u poslednja četiri primera, ovo i nije baš tako jednostavno. Zato budi pažljiv! Sve gornje primere proveri sabiranjem; na primer, za poslednji primer zaista je 10 + 11 = 101.

Zadatak 13. — Izvrši sledeća oduzimanja (potpisivanjem): 1) 110—11 = ?; 2) 111—101 = ?; 3) 1100—111 = ?; 4) 10101—1010 = ?; 5) 11001—111 = ?

Oduzimanje je i u dekadnom sistemu jedna od težih operacija, pa se zato uvek nastojalo da se ta rabota nekako pojednostavi. Radi toga ćemo se upoznati sa još jednim načinom oduzimanja.

Verovatno ćeš se i ti složiti s nama da je u dekadnom sistemu lakše oduzeti deseticu ili stoticu nego neki drugi broj koji nije tako »okrugao«; na primer, teže je oduzeti 9 ili 67 nego li 10 ili 100. Takođe nam je lakše oduzimati od desetice i stotice. Takve olakšice odavno se već koriste u usmenom računanju.

Uvedimo jedan novi pojam: »dekadnu dopunu broja«, tj. dopunu datog broja do najbliže veće dekadske jedinice. Za dati broj to je ustvari razlika između najbliže veće dekadne jedinice (10, 100, . . .) i datog broja. Tako naprimer, ta dopuna za broj 7 jeste broj 3, jer je 3 = 10—7; za broj 38 dopuna do dekadne jedinice jeste broj 62, jer je 62 = 100—38.

Određujući ove dopune mi vršimo oduzimanje broja od neke dekadne jedinice, a to nije teško činiti. Upravo se ove dopune (dopunjavanja) i uvode kako bi se olakšala operacija oduzimanja.

Primer. — Neka treba od 13 oduzeti 8. Učinićemo to ovako: prvo određujemo dopunu (dekadnu) za umanjilac (8); to je broj 2, tj. 10—8 = 2; a dalje računamo ovako: (13 + 2)—10, tj. najpre na 13 dodajemo 2 (dopunu), a zatim iz dobijenog zbira oduzmemo 10.

Svakako si obratio pažnju na to da smo mi jedanput broj dodali broju deset i jedanput oduzeli od deset. Nikakav drugi broj nismo oduzimali. Operaciju oduzimanja u datom slučaju vršili smo jedino sa deseticama. U tome i jeste preimućstvo (prednost) ovog načina. Ustvari, iskoristili smo osobinu razlike da se njena vrednost neće promeniti ako isti broj dodamo i umanjeniku i umanjiocu; u ovom slučaju taj broj je takav da posle dopunjavanja umanjilac postane broj (dekadna jedinica) koji se lako oduzima.

Zadatak 14. — Koristeći se dopunjavanjem umanjioca, izvrši sledeća oduzimanja u dekadnom sistemu: 1) 128—75 = ?; 2) 379—97 = ?; 3) 1015—687 = ?

Odgovor. — 1) 128—75 = (128 + 25)—100 = 153—100 = 53. Slično se postupa i u ostala dva primera. Šta mislite, kada je korisno primenjivati ovaj način oduzimanja?

Da li si sve ovo razumeo? Ako nisi, nemoj žaliti vremena da ovo još jedanput pročitaš. To je dosta važno.

Vratimo se sada na oduzimanje u binarnom brojnom sistemu. Uvedimo i ovde pojam o *„binarnoj dopuni broja“*. Ta se dopuna u ovom slučaju određuje prema sledećem **pravilu:**

1. Posmatraj broj sdesna na levo.

2. Ako je zadnja cifra (prva sdesna) „0“, onda gledaj sledeću cifru sdesna.

3. Prvu cifru „1“ na koju naiđeš, nemoj menjati.

4. Posle prve „1“ na koju si naišao, sve „0“ na koje naiđeš, zameni sa „1“, a sve „1“ sa „0“.

Primera radi, odredimo dopunu za broj 101_2. Pridržavajući se gornjeg uputstva dobićemo da je tražena dopuna broj 011_2, odnosno 11_2.

Za broj 1010_2 ova dopuna, tj. dopuna do broja 10000_2, biće broj 110_2. Zaista, $1010_2 + 110_2 = 10000_2$.

Zadatak 15. — Za sledeće brojeve odredi binarne dopune: 1) 10_2, 2) 11_2, 3) 1001_2, 4) 110_2, 5) 1101_2, 6) 100_2

Posle ovih objašnjenja prelazimo na izučavanje oduzimanja pomoću binarnog dopunjavanja brojeva.

Uzmimo da od broja 1101_2 treba oduzeti broj 1011_2.

Učinićemo to prema ovoj shemi:

1. Najpre ćemo odrediti binarnu dopunu umanjioca, tj. dopunićemo broj 1011_2 do broja 10000_2; ta dopuna je broj 101_2.

2. Zatim datom umanjeniku dodajemo nađenu dopunu, dakle: $1101 + 101 = 10010$ i

3. Od dobijene sume oduzimamo broj 10000_2, tj. $10010 - 10000 = \mathbf{10}$, a to i jeste rezultat (tražena razlika).

Uradićemo još jedan primer: $1011_2 - 101_2 = ?$

Dopuna umanjioca 101_2 do 1000 je broj 11; njega ćemo sabrati sa umanjenikom, dakle: $1011 + 11 = 1110$; od dobijenog zbira oduzećemo broj 1000_2, tj. $1110 - 1000 = \mathbf{110}$, pa će ovo i biti tražena razlika.

Zadatak 16. — Pokušaj da na pokazani način uradiš sledeće primere: 1) $10101 - 110 = ?$ 2) $11101 - 1011 = ?$; 3) $10001 - 1100 = ?$. Obavezno izvrši proveru rezultata!

U vezi sa ovim, evo dva pitanja:

1) Šta misliš: treba li se koristiti binarnom dopunom broja ako je umanjilac neki od brojeva: 10_2, 100_2, 1000_2, itd.?

2) Poznato ti je da se u dekadnom sistemu razlika dva broja ne menja ako i umanjeniku i umanjiocu dodamo isti broj. Važi li to i u brojnom sistemu s bazom dva i, ako važi, kakve to veze ima sa prikazanim načinom oduzimanja?

5. Oduzimanje pomaže da delimo

Da bi delio u binarnom brojnom sistemu potrebno je da umeš upoređivati brojeve (utvrđivati koji je veći) i dobro oduzimati.

Uzmimo, na primer, da treba izvršiti deljenje

$$1001_2 : 11_2 = ?$$

Postupamo kao i pri običnom deljenju u dekadnom brojnom sistemu:

$$
\begin{array}{l}
1001:11=\mathbf{11}\\
-\underline{11}\\
\,11\\
-\underline{11}\\
\,0
\end{array}
$$

Pre početka deljenja morali smo uporediti brojeve 10 i 11. Utvrdivši da je $10 < 11$, prešli smo na broj 100, koji smo takođe uporedili sa deliocem 11. Vidimo da je $100 > 11$. Zatim smo oduzeli 11 od 100. Itd.

Evo još nekoliko primera:

1) $10000:100 = 100$

2)
$$\begin{array}{l} 11110:101 = \mathbf{11} \\ -\underline{101} \\ 101 \\ -\underline{101} \\ 0 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} 110001:111 = \mathbf{111} \\ -\underline{111} \\ 1010 \\ -\underline{111} \\ 111 \\ -\underline{111} \\ 0 \end{array}$$

Uveri se prevođenjem brojeva u dekadni sistem da su ova deljenja tačno izvršena.

Zadatak 17. — U cilju uvežbavanja, izvrši sledeća deljenja:

1) 1110 : 10 = ?; 2) 100011 : 111 = ?; 3) 11110 : 1010 = ?

Međutim, svakako ti je poznato da se deljenje može zameniti oduzimanjem. Šta, recimo, znači da 30 treba podeliti sa 3? To znači utvrditi koliko se puta 3 sadrži u 30. A kako to doznajemo? Pa, tako što od 30 oduzmemo prvo jednu trojku, zatim drugu, onda treću i tako dalje, do poslednje. Broj oduzetih trojki i jeste traženi količnik. Naravno, u većini slučajeva — kad je reč o dekadnim brojevima — tako ne radimo. Međutim, ovo je korisno činiti pri deljenju brojeva u binarnom sistemu. Tu se deljenje može zameniti oduzimanjem i to oduzimanjem putem dopunjavanja. Kasnije ćeš imati prilike da vidiš da se kod elektronskih računskih mašina deljenje stvarno i zamenjuje oduzimanjem, koje se vrši pomoću binarnog dopunjavanja.

* * *

Time i završavamo izlaganje o tome kako se računa u kibernetici. Upoznali smo samo jednu nedekadnu (nedesetičnu) aritmetiku i to binarnu ili dijadsku, a u kibernetici se pored nje, ali nešto manje, koriste i drugi nedesetični brojni sistemi, na primer, sistem s osnovom osam.

* * *

Da li znate da se i sa iskazima (rečenicama) može računati? Kako se to radi? Upravo će o tome biti reči u nastavku »Azbuke kibernetike« — u sledećem broju »Matematičkog lista«.

6. Odgovori i rešenja

1. **1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, ...**

2. $10_{10} = \mathbf{1010}_2$; $11_{10} = \mathbf{1011}_2$; $17_{10} = \mathbf{10001}_2$; $21_{10} = \mathbf{10101}_2$; $27_{10} = \mathbf{11011}_2$; $47_{10} = \mathbf{101111}_2$; $69_{10} = \mathbf{1000101}_2$; $600_{10} = \mathbf{1001010110}$.

3. $1001_2 = \mathbf{9}_{10}$; $11000_2 = \mathbf{24}_{10}$; $1011_2 = \mathbf{11}_{10}$; $1111_2 = \mathbf{15}_{10}$; $11110110001_2 = \mathbf{1969}_{10}$.

4. Da. Potrebni su još tegovi od 8 kg i 16 kg.

5. a) (1100·10·1111010101.) tj. **12. 4. 1961.** — dan kada je prvi u svetu J. Gagarin obleteo Zemlju u kosmičkom brodu »Vostok 1«.

b) (10101.111.11110110001.) tj. **21. 7. 1969.** — dan kada je prvi put u istoriji jedan čovek sa Zemlje — N. Armstrong —svojom nogom stupio na tlo Meseca. Kao što znate, Armstrongu se ubrzo pridružio i E. Oldrin.

6. 1) $\begin{array}{r} 101 \\ +\ 11 \\ \hline \mathbf{1000} \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 110 \\ +101 \\ \hline \mathbf{1011} \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 101 \\ \hline \mathbf{1110} \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 1001 \\ +1101 \\ \hline \mathbf{10110} \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 1111 \\ +\ 110 \\ \hline \mathbf{10101} \end{array}$

6) $\begin{array}{r} 1011 \\ +\ 111 \\ +\ 101 \\ \hline \mathbf{10111} \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 101 \\ +\ 11 \\ \hline \mathbf{10001} \end{array}$

7.
$$\begin{array}{rl} 38 = 32+4+2 & \longrightarrow \ \ \ 100110 \\ +\ 89 = 64+16+8+1 & \longrightarrow \ \ 1011001 \\ 215 = 128+64+16+4+2+1 & \longrightarrow \ 11010111 \\ \hline \mathbf{342} & \longleftarrow \mathbf{101010110} \end{array}$$

8. $111 \cdot 1 = \mathbf{111}$; $101 \cdot 10 = \mathbf{1010}$; $1100 \cdot 10 = \mathbf{11000}$; $101 \cdot 11 = \mathbf{1111}$; $1110 \cdot 11 = \mathbf{101010}$; $1011 \cdot 11 = \mathbf{100001}$.

9. $\begin{array}{l} \ \ \ \ 37 \cdot 24 = 888 \\ \hline 100101 \cdot 11000 \\ \ 100101 \\ \hline \mathbf{1101111} \end{array}$ 10. 1) $\begin{array}{r} 1001 \\ +\ 111 \\ \hline \mathbf{10000} \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 1101 \\ +\ 101 \\ \hline \mathbf{10010} \end{array}$ 3) $101 \cdot 1 = \mathbf{101}$ 4) $11 \cdot 11 = \mathbf{1001}$

Zaista je, $1101111_2 = 888_{10}$

11. U bin. sistemu: 1001, 1010, 1011, 1100, 1101;
u dek. sistemu: 9, 10, 11, 12, 13

12. $10011 > 10010$; $10110 > 10100$; $11011 > 11010$; poslednji uslov zadovoljavaju tri broja: 11001, 11010 i 11011.

13. Rezultati su: 1) **11**; 2) **10**; 3) **101**; 4) **1011**; 5) **10010**.

15. 1) $\mathbf{10_2}$, 2) $\mathbf{1_2}$, 3) $\mathbf{111_2}$, 4) $\mathbf{10_2}$, 5) $\mathbf{11_2}$, 6) $\mathbf{100_2}$.

16. 1) $10101 - 110 = \mathbf{1111}$; 2) $11101 - 1011 = \mathbf{10010}$; 3) $10001 - 1100 = \mathbf{101}$.

17. 1) $1110 : 10 = \mathbf{1111}$; 2) $100011 : 111 = \mathbf{101}$; 3) $11110 : 1010 = \mathbf{11}$.

(Nastaviće se)

VEŠTINA PAMĆENJA

	+		+	
	+		+	+
	+	+		
	+	+		+
+	+		+	+

Binarni sistem — jezik jedinica i nula — možete iskoristiti da svojim drugovima pokažete sledeću igru.

U kvadratnu tablicu od 25 „polja“ upišite u pojedina polja krstiće (recimo, kao na slici levo) i predložite drugovima da pola minuta pažljivo gledaju tu tablicu, a onda tablicu uklonite i zamolite drugove neka nakon 5 minuta pokušaju da po sećanju rekonstruišu tablicu, tj. da upišu krstiće tamo gde treba da budu. Malo je verovatno da će to nekome poći za rukom.

Međutim, ako se poslužite onim što ste naučili u prethodnom članku, vi ćete uvek biti u stanju da za 5 minuta tačno rekonstruišete svaku tablicu sa upisanim krstićima koju vam drugovi podnesu.

Objasnimo to na primeru ovde priložene tablice. Smatraćemo da krstići znače jedinice, a prazna polja — nule. Tada je u prvom redu napisan broj $01010_2 = 10$, u drugom — $01011_2 = 11$, u trećem — $01100_2 = 12$, u četvrtom $01101_2 = 13$, a u petom — $11011_2 = 27$. A pet brojeva ne većih od 31 (zašto?) — u našem slučaju 10, 11, 12, 13 i 31 — nije teško zapamtiti i u roku od 5 minuta prevesti ih u binarni brojni sistem i upisati u praznu tablicu tako da umesto 1 pišemo +, a za 0 — ostavljamo prazna polja.

Hronika kosmičke ere

„Ovo je jedan mali korak za čoveka, ali džinovski skok za čovečansvto“

Na Mesecu
21. VII 1969.
u. 3h 56 min.

Astronaut
Nil Armstrong

LJUDI NA MESECU

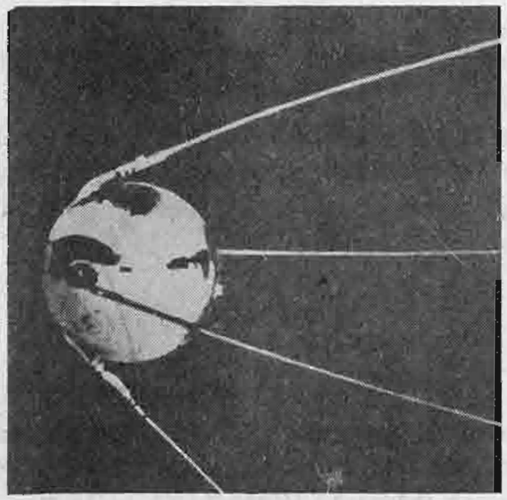
Let »Apola 11« na Mesec u slici i reči

1. Neverovatan podvig — čovek se spustio na Mesec!

Nedavno, u julu ove godine, ispunio se jedan od najfantastičnijih snova čoveka — on je svojom nogom stupio na tlo Meseca. Bio je to podvig kome gotovo i nema premca u istoriji čovečanstva.

No, taj podvig ima i svoju predistoriju.

Kosmička era počela je ne tako davno — pre 12 godina. Prvi vesnik ove ere bio je »*Sputnjik 1*«, veštački Zemljin satelit lansiran 4. X 1957. godine u SSSR. Bio je to uspeh celog čovečanstva: vrata u kosmos bila su otvorena! Od tada do danas lansirano je u kosmos na stotine raznih satelita (telekomunikacionih, meteoroloških, tehnoloških, geodezijskih i dr.) i desetine automatskih međuplanetarnih stanica, kako u SSSR (tipa »Venera«, »Mars«) tako i u SAD (tipa »Mariner«).



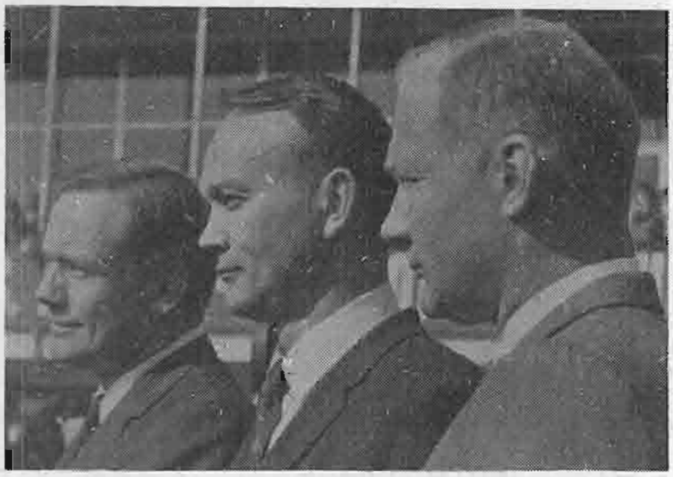
Sl. 1. *Sputnjik 1*, prvi veštački zemljin satelit

Sl. 2. *Jurij Gagarin*, prvi čovek u kosmosu

Početkom ove decenije, tačnije 12. IV 1961. godine i čovek se prvi put vinuo u kosmičko prostranstvo: *Jurij Gagarin* je na kosmičkom brodu »*Vastok 1*« obleteo Zemlju. Njegov let značio je početak ere čovekovih kosmičkih letova. Njegovo ime postalo je simbol prodora čoveka u kosmos.

Zatim su usledili letovi desetina kosmičkih brodova sa ljudskom posadom (u SSSR — niz brodova iz porodica »*Vastok*«, »*Vashod*« i »*Sojuz*«; u SAD — »*Merkjuri*«, »*Džemini*«), da bi na kraju uspešno bio realizovan projekt za let čoveka na Mesec; taj je projekt nazvan »*Apolo*«. Do kraja septembra ove godine u kosmosu je letelo 58 kosmonauta (astronauta), među njima i prva žena — kosmonaut Valentina Nikolajevna Terješkova. Oni su u okviru 33 kosmička leta sa ljudskom posadom proveli u kosmosu oko 250 dana.

Epohalno putovanje do Meseca, boravak na njemu i povratak na Zemlju, što su ga izvršili američki astronauti *Armstrong*, *Oldrin i Kolins* u svemirskom brodu »*Apolo-11*« u vremenu od 16. do 24. jula 1969. godine jedan je od najznačajnijih i svakako najspektakularniji događaj u istoriji nauke i tehnike i istoriji čovečanstva uopšte. Njime je otvorena nova etapa u čovekovom nastojanju da otkrije još mnoge tajne svemira.



Sl. 3. Oni su osvojili Mesec: *Nil Armstrong*, *Majkl Kolins* i *Edvin Oldrin*

Podaci dobiveni prilikom ovog istorijskog leta u mnogo čemu su nadmašili sve dosadašnje rezultate istraživanja Mesečeve površine i prostora oko njega vršenih pomoću automatskih stanica (tipa »Luna«, »Zond«, »Rendžer«, »Servejer«) i predhodnih kosmičkih brodova sa ljudskom posadom iz serije »Apolo«(na primer, prilikom izviđačkih letova »Apola 8« i »Apola 10« oko Meseca koji su zajedno sa letom »Apola 9« oko Zemlje predstavljali poslednje pripreme za glavni zadatak: spuštanje prvih ljudi na površinu Meseca i njihov povratak na Zemlju). Naime, ovom prilikom je čovek svojim očima na licu mesta posmatrao Mesečevu površinu i prikupio mnoštvo dragocenih podataka koje nijedan instrument ne bi mogao tako registrovati i analizirati kao čovek; to naročito vredi za odabiranje uzoraka Mesečevog tla. Time je uverljivo potvrđeno da i u kosmičkim istraživanjima presudnu ulogu ima ruka čovekova.

Ovo veliko dostignuće ima izvanredan značaj za nauku i tehniku i o tome je dosad dosta rečeno i napisano. Zato ćemo se osvrnuti najpre na neke važnije naučne i tehnike aspekte prvog čovekovog leta na Mesec, a zatim ćemo ukratko razmotriti kako je ostvaren taj grandiozni podvig.

2. Koji su bili naučni aspekti tog velikog poduhvata?

Oni se mogu svesti na nekoliko pitanja koja su od posebnog interesa za nauku: 1) da li su veliki krateri na Mesecu vulkanskog porekla ili su nastali udarom drugih nebeskih tela? 2) Da li su vijugave udoline na Mesecu formirane vodenim masama ili vulkanskom lavom? 3) Postoji li možda još uvek na Mesecu vulkanska aktivnost? 4) Kakva je priroda velikih ravnih regiona na Mesecu nazvanih »morima«? 5) Da se analizom donetih uzoraka Mesečevog tla utvrdi njihova istorija i pokuša odgovoriti na dosad nerešena pitanja o postanku Sunčevog sistema, svemira i života uopšte. (Pošto na Mesecu nema vode i atmosfere, moguće je da su u njegovim stenama očuvani tragovi o poreklu Sunčevog sistema kojih na Zemlji nema, jer su odavno izbrisani). 6) Zbog odsustva atmosfere, male gravitacije i dosta sporog obrtanja oko svoje ose, Mesec je pogodan za izgradnju opservatorija (postiže se preciznost posmatranja, jasnoća slike, lako rukovanje velikim instrumentima, omogućuje se dugotrajno posmatranje, fotografisanje itd.). Itd.

3. Koji su glavni tehnički aspekti leta na Mesec?

Ima ih mnogo, veoma značajnih i od velike praktične koristi. Navešćemo samo neke. Smele i genijalne vizije *Žil Verna* od pre sto godina postale su stvarnost. Spuštanje ljudi na Mesec predstavlja poduhvat ogromnih razmera, čak možda najsloženiji poduhvat koji je ikad izveden, jer Mesec nije bilo lako osvojiti. No, u čemu su zapravo ležale glavne teškoće u ostvarenju tog poduhvata, kao i celog programa »Apolo«? Priroda je stvorila mnoge prepreke na putu do našeg prvog nebeskog suseda. Jedna od njih je Zemljina teža koja sputava svaki pokušaj da se Zemlja napusti; druga prepreka je sama Mesečeva sredina, potpuno neprijateljska prema svakom obliku života; uz to, između Zemlje i Meseca nalazi se ogromno prostranstvo, svemirska praznina od oko 384000 km, prepuna opasnosti za one koji se usude da u nju kroče. Pogoditi ne tako veliki Mesec na tolikom rastojanju (koje se uz to stalno menja) veštačkim telom upućenim sa Zemlje, koja se i sama kreće oko Sunca brzinom oko 30 km u sekundi i istovremeno rotira oko svoje ose, predstavlja veoma složen problem svemirske balistike, koji je zahtevao da se reši niz navigacionih problema u mnogo čemu različitih od vekovima starih metoda pomorske navigacije. Međutim, danas astronauti (kosmonauti) mogu pomoću savremenih komjutera (elektronskih računara), u čijem je sastavu i precizan mehanizam za merenje vremena, automatski obavljati sve matematičke operacije i tako odrediti položaj, pravac i brzinu svog svemirskog broda s fantastičnom tačnošću, o kakvoj Kolumbo, Magelan i ostali istraživači novih svetova nisu ni sanjali.

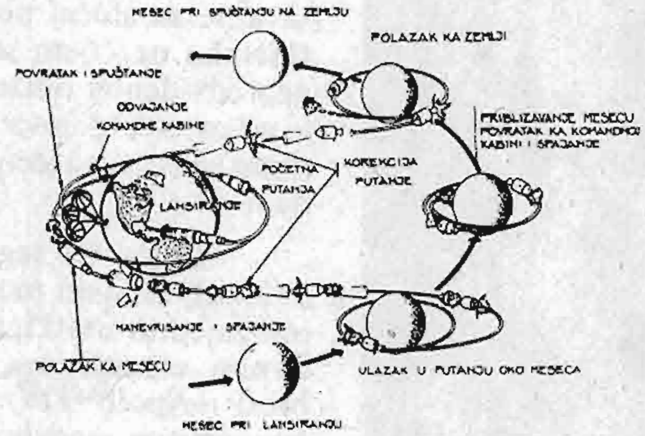
Naučni podaci dobijeni nakon leta »Apola 11« samo su jedan od ciljeva ove misije. Glavni cilj leta »Apola 11« bio je jednostavan koliko je jednostavan i svaki drugi cilj: pokazati da on može da se izvede — da ljudi mogu otići na Mesec, spustiti se na njega, pokupiti uzorke i potom se bezbedno vratiti na Zemlju.

4. Pre spuštanja na Mesec

Odluku o spuštanju ljudi na Mesec u okviru programa »Apolo« doneo je 1961. godine predsednik *Dž. Kenedi.* Posle te odluke usledio je period razvoja, ispitivanja i pripremnih letova od kojih su najvažniji bili letovi »Apola 8, 9 i 10«.

»*Apolo 8*« sa kosmonautima F. Bormenom, *Dž.* Lavelom i V. Endersom u decembru 1968. godine bio je prvi let američkih astronauta ka Mesecu; bila je to predhodnica naše planete za putovanje na druga nebeska tela (sl. 00).

»*Apolo 9*« sa astronautima Dž. Mekdivitom, R. Švejkartom i R. Skotom u martu ove godine kružio je oko Zemlje u cilju ispitivanja modula (kabine) za spuštanje na Mesec.



Sl. 4. Šema leta kosmičkog broda ,,*Apolo 10*" oko Meseca.

»*Apolo 10*« sa astronautima J. Sernanom, T. Stefordom i Dž. Jangom u maju ove godine kružio je oko Meseca i približio modul za spuštanje na udaljenost od svega 15 km od Mesečeve površine. Bila je to generalna proba leta na Mesec, pri čemu je nedostajala samo jedna faza — pristajanje na Mesečevu površinu.

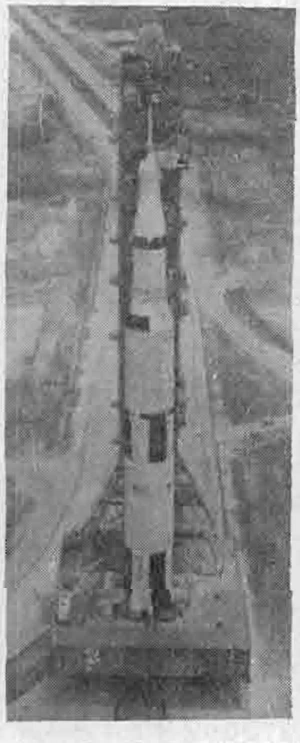
Poseban zadatak kosmičkih brodova »Apolo 8« i »Apolo 10« bio je poslednje proveravanje, osmatranje i detaljno snimanje mesta na Mesečevoj površini, određenih za skoro spuštanje ljudi.

Sve je najzad bilo spremno i »Apolo 11« mogao je da krene na svoj istorijski let.

Ostvarenje programa »Apolo« značilo je ogromnu, možda i najveću tehnološku mobilizaciju ljudi i materijala uz utrošak desetina milijardi dolara. Ceni se da je u pripremanju ovog poduhvata učestvovalo preko 400000 ljudi raznih specijalnosti: naučnika, inženjera, tehničara, administrativnih službenika i radnika. Od svih njih našu pažnju svakako najviše privlači posada »Apola 11«, koja je krunisala napore tolikog broja ljudi. O njima, tj. o Nilu Armstrongu, Edvinu Oldrinu i Majklu Kolinsu, svakako ste dosta čitali u štampi, slušali preko radia i gledali ih na televiziji, te ovde nećemo opširnije govoriti; donosimo vam njihove slike sa autogramima. Mnogi od vas imali su možda priliku da ih i lično vide za vreme njihove posete Jugoslaviji sredinom oktobra ove godine.

5. Nekoliko reči o svemirskom vozilu i opremi

1. Zamislite leteći projektil težak skoro 3000 tona i visok 36 spratova (111 metara), koji veličanstveno stoji na lansirnoj rampi. Naziv mu je »*Apolo-11 / Saturn-V*« i upravo je on poneo tri odvažna čoveka (Armstronga, Oldrina i Kolinsa) na najspektakularnije putovanje svih vremena — do Meseca i natrag. Blizu vrha ovog džina, na visini od 100 m nalazili su se astronauti Armstrong, Oldrin i Kolins. Inače, ova grdosija, u koju je ugrađena najsloženija oprema koju je čovek ikada izumeo, sastavljena je od 8 segmenata naslaganih jedan na drugi (sl. 00).



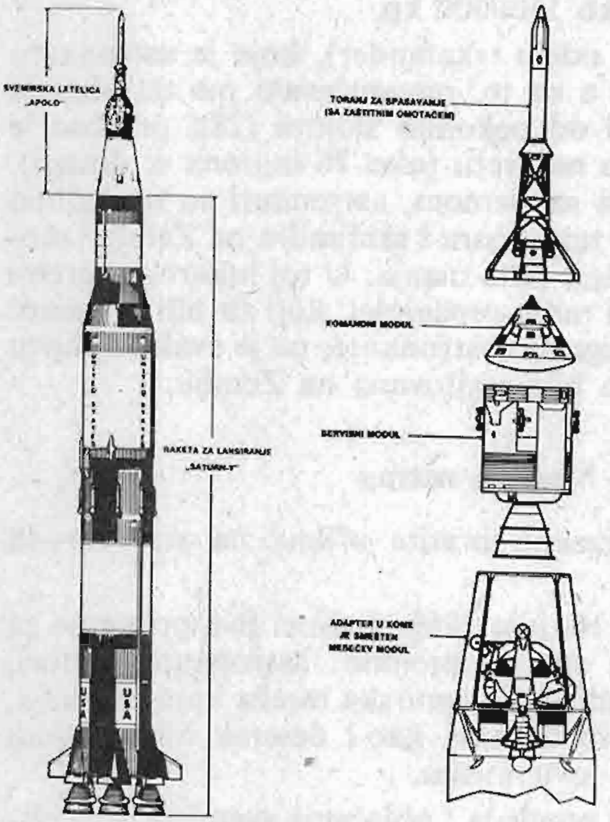
Sl. 5. Raketa-nosač „*Saturn V*“ sa kosmičkim brodom „*Apolo*“ na lansirnoj rampi.

Gornja četiri segmenta čine kosmičku letilicu (kosmički brod) nazvanu »*Apolo*«. Ukupna dužina letilice »Apolo« pri startu je 24,5 m a težina oko 44 tone.

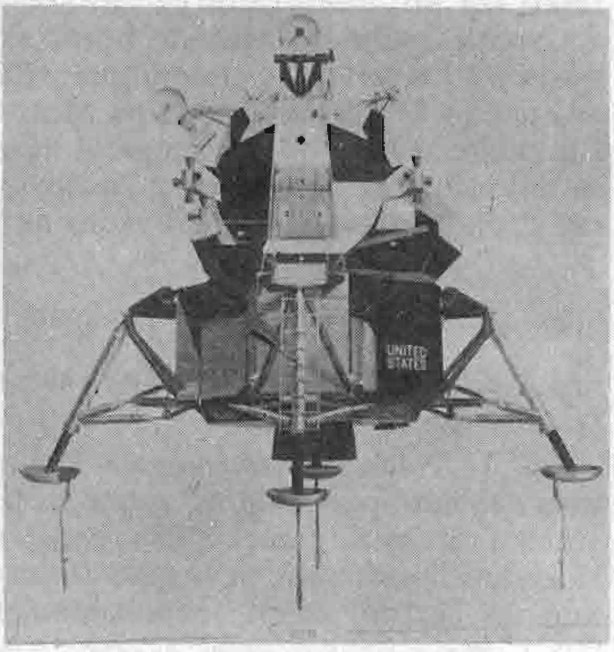
Najviši segment, tzv. *sigurnosni toranj*, je sistem za spasavanje za slučaj nesreće prilikom lansiranja; to je toranj od rešetaka na čijem se vrhu nalazi raketa, koja u slučaju nečeg nepredviđenog odiže komandnu kabinu s astronautima, odvaja je od ostalih delova i izbacuje na visinu sa koje se ona sigurno može spustiti na Zemlju pomoću sopstvenih uređaja (padobrana i dr.).

Iduća tri segmenta jesu: komandni modul (komandna kabina), servisni modul i Mesečev modul (nazvan »Orao«). Svi oni zajedno uzeti i, naravno, povezani odgovarajućim konstruktivnim elementima, obrazuju svemirsku letilicu, tj. kosmički brod »Apolo 11« u užem smislu (sl. 00). Ljudi se nalaze u *komandnom modulu*; to je njihov stan i prostorija za rad. Visina i prečnik su mu oko 4 m, zapremina oko 6 m^3, a težina pri poletanju oko 5,5 t. Obložen je spolja specijalnim materijalom koji može da odoli ogromnoj količini toplote koja se stvara pri povratku sa Meseca kroz guste slojeve Zemljine atmosfere, jer je ovaj modul (kabina) ustvari jedini deo od čitave letilice, koji se vraća na Zemlju.

Servisni modul je cilindričnog oblika, visine oko 6,5 m, prečnika oko 4 m, težak oko 22,3 t pri poletanju. On služi za pogon kroz svemir i pruža sve što je potrebno (struju, veštačku atmosferu i dr.). Za sve vreme leta on sa komandnom kabinom čini celinu (kojoj su astronauti dali zajedničko ime »Kolumbija«), ali se po završetku misije na Mesecu, pri povratku na Zemlju (na udaljenosti 120 km) automatski odvaja od kabine (komandnog modula) i sagoreva u atmosferi poput meteora, dok se komandna kabina sa astronautima spušta na Zemlju.



Sl. 6. Glavni delovi kosmičkog broda „*Apolo 11*"
i njegove rakete — nosača „*Saturn V*".



Sl. 7. Lunarni modul

Mesečev modul (mesečev ili lunarni brod) je neka vrsta »Mesečevog taksija« u kome se dva astronauta spuštaju na Mesečevu površinu. To je poznati »pauk«, u ovom slučaju nazvan »Orao«, koji se sastoji iz dva posebna dela koji su međusobno spojeni sve do trenutka kada astronauti, nakon obavljenog posla, krenu sa Meseca. Gornji deo Mesečevog modula je hermetički zatvorena *kabina za posadu*, opremljena raketnim motorom za poletanje i dovođenje do komandnog dela »Apola« koji sa trećim članom posade kruži oko Meseca. Pored toga ova kabina poseduje uređaje za manevrisanje i stabilizaciju kao i sve što je astronautima potrebno. Sa komandnim modulom spaja se preko specijalnog tunelskog priključka; kroz ovaj tunel-saobraćajnicu prečnika oko 80 cm astronauti prelaze iz jednog dela u drugi. Donji deo Mesečevog modula, sa potrebnom opremom i raketnim motorom, ima četiri noge za pristajanje na Mesečevoj površini, a služi i kao lansirna platforma za poletanje gornjeg dela sa astronautima po završenom poslu — sa Meseca. Ukupna težina Mesečevog modula je oko 15 t, visina oko 6 m. Mesečev modul je na vrhu rakete—nosača postavljen ispod servisnog dela i zaštićen specijalnom oplatom sve do trenutka ulaska letilice u početnu putanju oko Zemlje.

Pored pobrojanih, brod »Apolo« ima i još mnogo drugih pomoćnih, ali veoma važnih uređaja.

Četiri najniža segmenta čitavog projektila (visine oko 87 m) delovi su *rakete za lansiranje*, čiji je zadatak da letilicu »Apolo« izvede na putanju oko Zemlje i uputi je prema Mesecu. Ova raketa — nosač, nazvana »*Saturn V*« ima tri pogonska stepena i jedinicu za instrumentima (mozak projektila). To je najveća raketa koju je čovek ikad stvorio. U donjem delu prečnik joj je 10 m. S kapsulom »Apolo« na vrhu, dostiže visinu od preko 110 m. Pri poletanju, motori prvog stepena (ima pet motora) razvijaju ogromnu potisnu silu od oko 3500000 kp.

2. Svaki astronaut imao je specijalno odelo (skafander), koje je astronautu pružalo sigurnu zaštitu u surovom kosmosu, a uz to, omogućavalo mu da obavlja predviđene poslove (sl. 00). Odelo se sastoji od nekoliko slojeva (28), prilično je teško (25 kp) i verovatno je najskuplje odelo na svetu (oko 76 miliona s. dinara). Za vreme šetnje po Mesecu, pored skafandra sa šlemom, astronauti su na leđima nosili još i rezervoar s kiseonikom; težina tog rezervoara i skafandra na Zemlji iznosila je oko 83 kp, ali je ona na Mesecu bila šest puta manja. U toj lunarnoj opremi i u kabini »Orla« bili su ugrađeni minijaturni radio-predajnici, koji su bili povezani sa mikrofonima ugrađenim u šlemovima (kacigama) astronaute, pa je svaka njihova reč o onome što su videli i radili na Mesecu bila emitovana na Zemlju.

6. Kako je izvršen let »Apola 11« na Mesec i natrag

Čitajte pažljivo tekst koji sledi i istovremeno pratite »film« na str. 41—48 (sl. 9—48)!

1. *Dolazak astronauta.* — Počinje dan, 16. jula 1969. godine. Sve pripreme za ovaj epohalni poduhvat na vreme su izvršene, sve je spremno: astronauti, motori, svetska mreža za praćenje leta, ogromna zemaljska i svemirska mreža komunikacija, elektronski računari, prihvatna flota u Tihom okeanu, kao i desetak hiljada ljudi koji na bezbroj načina neposredno pomažu ovu misiju.

Astronauti se posle doručka, lekarskog pregleda i oblačenja svemirskih odela, odvoze na lansirni kompleks u Svemirskom centru Kejp Kenedi na Floridi, gde na lansirnoj rampi stoji spremna letilica »*Saturn V / Apolo 11*« — najsnažnija i najteža mašina koja je ikada napravljena, visoka 36 spratova i teška oko 3000 tona.

2. *Ulazak u svemirski brod.* — Otprilike tri časa pre uzletanja, astronauti ***Nil Armstrong, Edvin Oldrin i Majkl Kolins*** ukrcali su se u komandni modul skoro pedeset tona teškog broda »Apolo 11« na vrhu rakete — na visini od oko sto metara. Oko milion posmatrača došlo je da iz neposredne blizine prate lansiranje. Stotine miliona ostalih ljudi naše planete pratili su lansiranje preko malih ekrana (tj. putem TV prenosa). Astronauti su proverili instrumente i opremu.

Vrši se odbrojavanje. Ono je već pri kraju: . . . **10, 9, 8, . . . , 2, 3, 1.**

3. *Uzletanje.* — Objavljuje se aktiviranje rakete: **. . . 2, 1, 0 — Pali!**

U 14 časova i 32 minuta po jugoslovenskom vremenu, **16. VII 1969. godine,** uz uragansku grmljavinu pet motora prvog stepena rakete (koji daju potisak od 3,5 miliona kp), na vatrenom nebu iznad visokog stuba dima, sprega svemirskih letilica »Saturn — Apolo« penje se put neba, prvo pravo (sl. 12—13), a zatim u blagom luku skreće u pravcu istoka iznad Atlantskog okeana (sl. 14), postepeno se pretvara u jednu tačku na nebu i konačno se gubi iz vida.

Moćni motori prvog stepena rakete u ovoj etapi troše skoro po 15 tona goriva u sekundi i za prvih desetak sekundi »popili« su oko 140 tona goriva. Letilica ubrzo postiže brzinu veću od brzine zvuka i astronauti više ne čuju grmljavinu motora.

U toku dva ipo minuta prvi stepen izdiže ceo projektil na visinu od oko 65 km i daje mu brzinu od skoro 10000 km na čas. Za to vreme težina mu se smanjila za čitavih 75%. Tada se odvojio prvi stepen rakete i pao u Atlantik. U tom trenutku automatski je aktiviran drugi stepen rakete, čiji motori daju letilici brzinu od preko 24000 km na čas i izdižu je na visinu od 180 km iznad Zemlje. Tada se sa vrha broda odbacuje sigurnosni toranj (uređaj), a bezbednost astronauta preuzimaju drugi uređaji.

4. *U orbiti oko Zemlje.* — Motori drugog stepena gore nešto duže od 6 minuta. Zadatak drugog stepena je izvršen i on vrtoglavom brzinom pada na Zemlju. Tada se pali jedini motor trećeg stepena (sl. 15) koji, goreći nešto manje od 3 minuta, daje letilici brzinu od oko 28000 km na čas (ili oko 7,9 km u sek. — tzv. prva kosmička brzina) i na visini od oko 185 km uvodi je u skoro kružnu satelitsku putanju oko Zemlje (sl. 15). Tada se gasi motor trećeg stepena, ali on ne pada na Zemlju; on je potrošio samo deo svoga goriva i ostaje prikačen uz brod radi ponovnog korišćenja. Kad je letilica ušla u orbitu oko Zemlje bilo je prošlo 12 minuta od lansiranja. Tada i astronauti postaju aktivni: kontrolišu sve sisteme letilice; a to se neprekidno čini i sa Zemlje, posebno iz Centra za kontrolu leta u Hjustonu (Teksas).

5. *Ubacivanje u putanju za Mesec.* — Otprilike 2 časa i 50 minuta nakon starta, pošto je brod već dvaput obleteo Zemlju, ponovo je aktiviran treći stepen rakete koji je brod izveo iz orbite oko Zemlje i ubacio ga u putanju prema Mesecu, tj. u takozvanu translunarnu putanju (sl. 16). U tom trenutku brzina broda iznosila je oko 39000 km na sat (ili oko 10,8 km u sek. — tzv. druga kosmička brzina), a to je brzina koja je potrebna da bi se brod »otrgnuo« od uticaja Zemljine teže i krenuo u svemir. Ova operacija zahtevala je najveću preciznost zbog pomeranja Meseca, Zemlje i same letilice. Potrebne kalkulacije za određivanje pravilne putanje nepogrešivo su obavili kompjuteri.

Putovanje u pravcu Meseca je otpočelo...

6. *Put kroz svemir — promena rasporeda modula.* — Prilikom uzletanja, komandni modul sa astrronautima bio je na vrhu, dok je servisni modul bio između komandnog i Mesečevog modula (v. sl. 6 i 12). Takav raspored diktirali su razlozi sigurnosti: komandni modul morao se nalaziti na vrhu da bi se, ako bi to bilo notrebno, mogao odvojiti aktiviranjem sistema za spasavanje. Međutim, sada — na putu kroz svemir — takav raspored nije pogodan. Zato je Armstrong (komandant »Apola 11«) izvršio veoma složen manevar spajanja vrha komandnog broda sa vrhom Mesečevog broda, čime se raspored modula promenio. Taj manevar je izvršen 3 časa i 12 minuta posle uzletanja na sledeći način: prvo su aktiviranjem eksplozivnih punjenja uklonjene četiri velike zaštitne oplate (table) na adapteru u kome je bio smešten Mesečev modul (sl. 17) i oslobođena je »Kolumbija« (kombinacija koju su činili komandni i servisni modul); zatim je Armstrong odvojio »Kolumbiju« (komandni i servisni modul) od gornjeg dela trećeg stepena rakete (na kome je ostao prikačen Mesečev modul), okrenuo je se za 180° (sl. 18), ponovo je približio trećem stepenu rakete sa Mesečevim modulom i čvrsto je spojio vrh komandnog modula sa vrhom Mesečevog modula (sl. 19), tako da su sada prednji delovi modula obrazovali tunel — saobraćajnicu. Za vreme ovog manevra, treći stepen rakete i jedinica sa instrumentima ostali su spojeni sa Mesečevim modulom da bi povećali njegovu stabilnost za vreme okretanja »Kolumbije«. Sada su prazni omotač i treći stepen rakete, pošto nisu više potrebni, odvojeni (sl. 20) i ostavljeni u svemiru, tj. odbačeni u orbitu oko Sunca, a »Apolo 11« nastavlja put ka Mesecu.

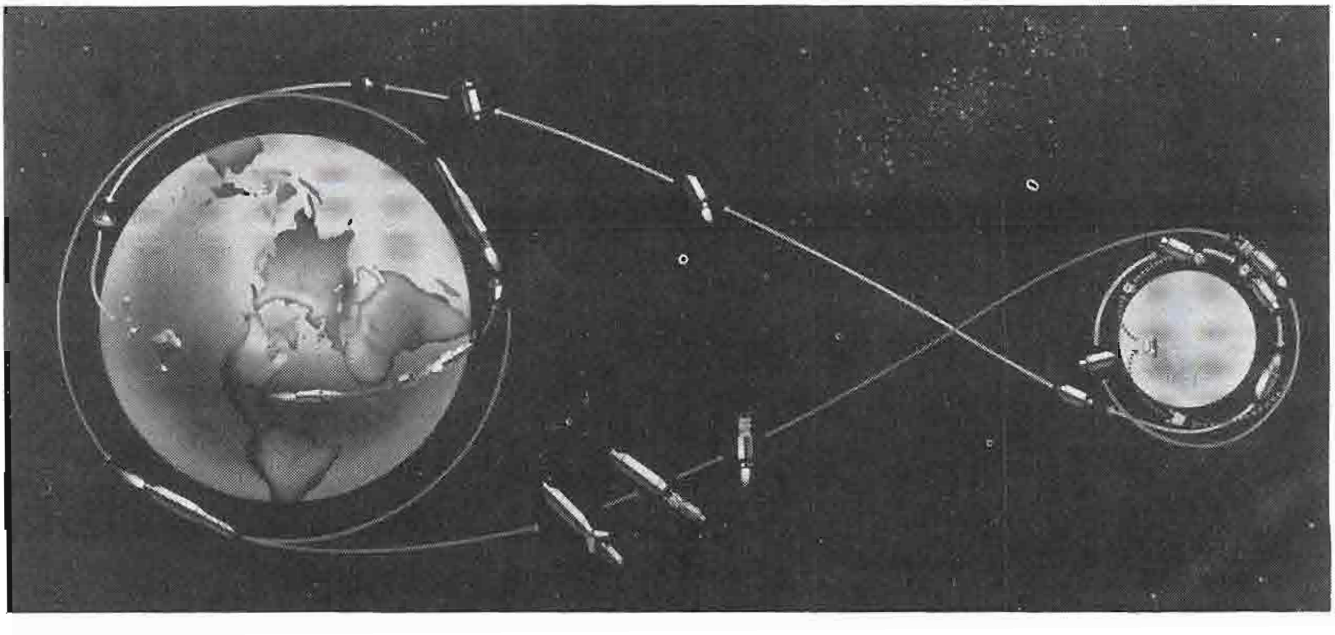
Astronauti su celim putem do Meseca (više od 320000 km) putovali skoro 3 dana u formaciji s Mesečevim modulom ispred komandne kabine; u među-vremenu su nekoliko puta proveravali unutrašnjost komandnog i Mesečevog modula, spavali, jeli i vršili direktan TV prenos za stanovnike Zemlje, pokazujući kako u daljini izgleda Zemlja a kako unutrašnjost njihovog »stana«. Bili su to periodi relativnog odmora koji su astronautima omogućili da se što bolje prilagode svemirskim uslovima i sačuvaju energiju za teške zadatke koji su ih tek očekivali. Pomoću specijalnih instrumenata utvrđivali su svoj položaj u svemiru i, kad je to bilo potrebno, obavljali su izvesne korekcije putanje broda: aktiviranjem glavnog brodskog motora u trajanju od 3 sekunde neznatno su usporili brod kako bi mogli da koriguju njegov kurs.

Dok je putovao kroz međuplanetarni prostor brod »Apolo« u toku svakog sata okrenuo se oko svoje ose prosečno dva puta. To je služilo u svrhu podjednakog zagrevanja spoljanjih delova broda.

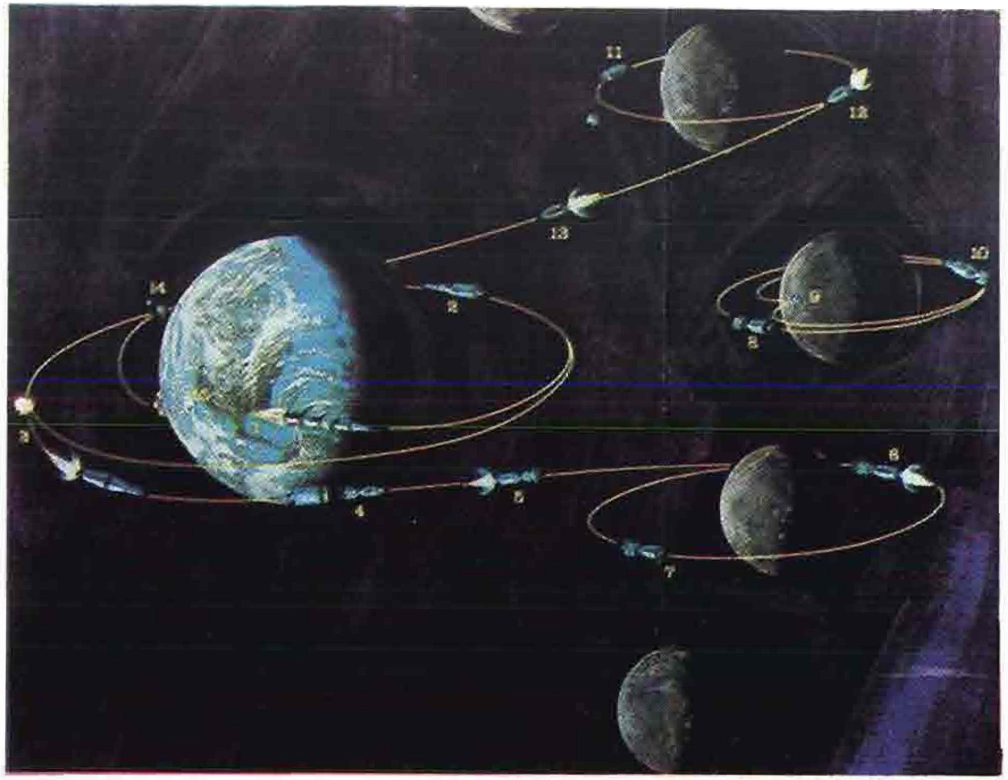
7. *U orbiti oko Meseca.* — Od momenta napuštanja orbite oko Zemlje i upućivanja u pravcu Meseca, brzina broda postepeno se smanjivala usled sve slabijeg dejstva Zemljine teže, tako da je u momentu kad je »Apolo 11« bio prevalio 3/4 puta ka Mesecu (oko 300000 km) njegova brzina bila oko 3800 km na čas i kad je ušao u zonu Mesečeve privlačnosti, brzina mu je bila oko 3200 km na čas; tada se, pod jačim gravitacionim uticajem Meseca, brzina broda počela povećavati. Astronauti su tada dva puta uključivali motor servisnog modula: prvi put u cilju kočenja, tj. da bi smanjili brzinu broda (radi čega su okrenuli brod tako da su prema Mesecu usmerili izduvne mlaznike motora) i omogućili Mesečevoj gravitaciji da brod uvede u orbitu oko Meseca (sl. 21) — pri brzini od oko 9210 km na čas na visini od 160 km brod je ušao u eliptičnu putanju oko Meseca s perilunom (najbliža tačka od broda do Meseca) od oko 100 km i apolunom (najveća udaljenost) od oko 300 km, a onda nakon dva obilaska oko Meseca po eliptičnoj putanji — da bi se putanja ispravila da bude kružna — opet je aktiviran retroraketni motor (u trajanju od oko 3 minuta) i brod, smanjivši brzinu, prelazi na kružnu putanju oko Meseca na visini oko 112 km iznad Meseca. U momentima kada je »Apolo 11« bio iza Meseca (tj. kada je bio na nevidljivoj strani) veze sa Zemljom bile su prekinute (u trajanju oko 3/4 časa). Za vreme dugog kruženja oko Meseca (pri čemu je svaki obilazak trajao oko 2 časa) astronauti su vršili TV prenos u boji, pri čemu su prikazali predele na Mesecu iznad kojih su prelateli i osmotrili su mesto predviđeno za spuštanje. Onda su astronauti prošli kroz tunel — saobraćajnicu i izvršili pregled Mesečevog modula (»Orla«).

8. *Spuštanje na Mesec.* — Počinje najopasniji manevar cele misije. Brod »Apolo 11« kruži oko Meseca na visini oko 110 km. Dva astronauta — Armstrong i Oldrin — napuštaju komandni modul i kroz tunel — saobraćajnicu ulaze u Mesečev modul, ponovo proveravaju instrumente i započinju operaciju spuštanja. Najpre je odvojen Mesečev brod »Orao« od matičnog broda »Kolumbije« i izvučena su četiri kraka (»noge«) za spuštanje. Dva dela letilice »Apolo 11«, tj. matični brod »Kolumbija« i Mesečev brod »Orao« leteli su izvesno vreme u bliskoj formaciji, udaljeni svega nekoliko metara (sl. 22), dok se obavljao pregled instrumenata i provera komunikacija između samih astronauta i između njih i Zemlje. Kratkim aktiviranjem motora u donjem delu Mesečevog modula, koje je izvršeno iza Meseca, Mesečev brod »Orao« udaljio se od matičnog broda »Kolumbije« — u kome je astronaut Kolins nastavio da kruži oko Meseca (sl. 23)— i postepeno u dugačkom luku »Orao« se spustio na visinu od 15 km iznad Meseca. Ponovo je aktiviran motor donjeg dela »Orla« i počinje spuštanje »Orla« sa pogonom pri čemu ga vodi sopstveni elektronski računar (kompjuter). Brzina se postepeno smanjuje (zbog retroaktivnog potiska) i »Orao« sa satelitske putanje kreće ka Mesečevoj površini; visina se smanjuje i Mesečev brod »Orao« prelazi iz horizontale u vertikalu. Računar i složena

Sl. 8. Posada „*Apola 11*" — astronauti: *Nil Armstrong*, komandant „*Apola 11*"; *Majkl Kolins*, pilot komandnog broda i *Edvin Oldrin*, pilot Mesečevog modula.



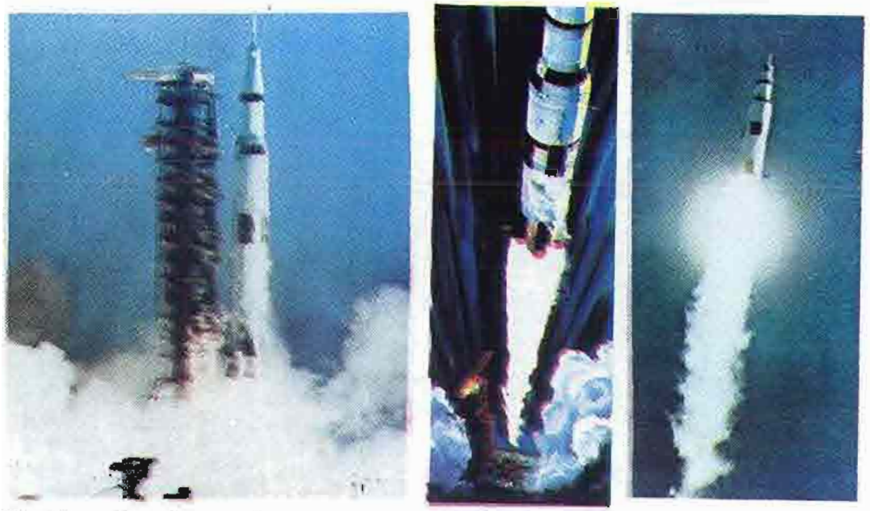
Sl. 9. Uprošćena šema leta „*Apola 11*"



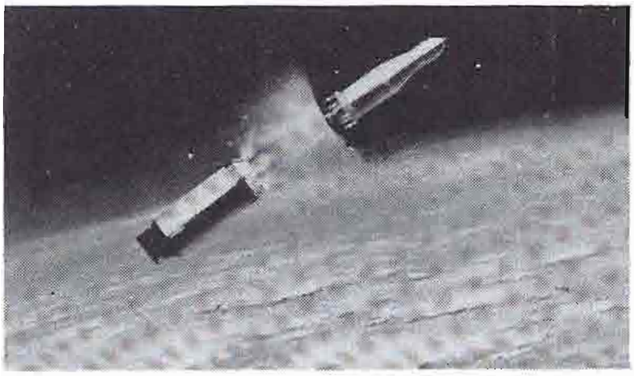
Sl. 10. Let „*Apola 11*": 1. Lansiranje. 2. Provera orbite oko Zemlje. 3. Ubacivanje u putanju prema Mesecu. 4. Promena rasporeda modula (okretanje i spajanje). 5. Korekcija kursa. 6. Paljenje retro-rakete za ulazak u orbitu oko Meseca. 7. Eliptična putanja oko Meseca. 8. Odvajanje Mesečevog modula. 9. Spuštanje na Mesec. 10. Spajanje gornjeg dela Mesečevog modula nakon uzletanja sa Meseca sa matičnim brodom. 11. Mesečev modul se odbacuje i ostavlja u orbiti. 12. Upućivanje na putanju za povratak. 13. Ispravka kursa. 14. Konačno odbacivanje servisnog modula. 15. Padobrani spuštaju na Zemlju komandnu kabinu sa astronautima.

Na crtežu su prikazani položaji Meseca u raznim fazama za vreme leta. Pri dnu je položaj Meseca za vreme lansiranja, u sredini su položaji za vreme leta, a pri vrhu — položaj Meseca pri završetku leta.

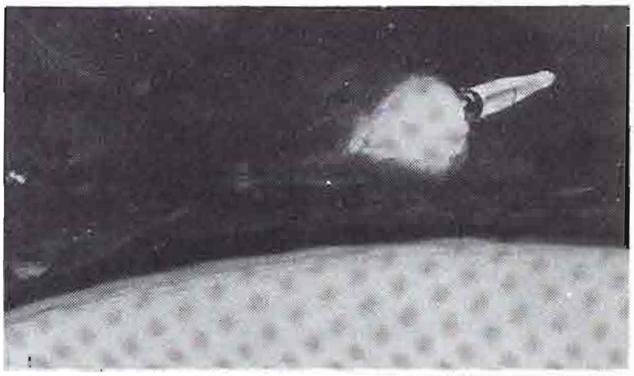
Sl. 11. Divovska raketa „*Saturn V*" sa „*Apolom 11*" — na lansirnoj rampi uoči lansiranja.



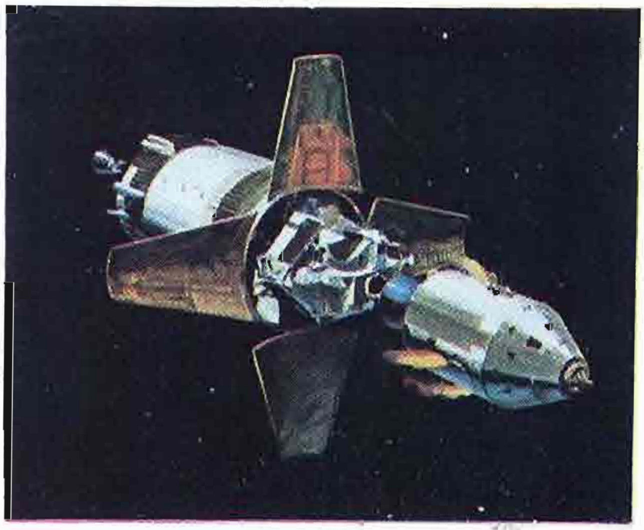
Sl. 12—14. Impresivni spektakl: uzletanje. Ogromni projektil napušta toranj i povećavajući brzinu usmeruje se u svemirska pronstranstva.



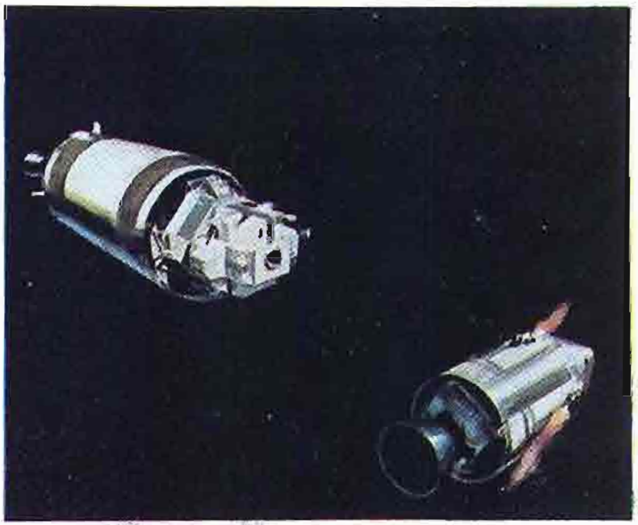
Sl. 15. Drugi stepen se odvaja, treći stepen se pali.



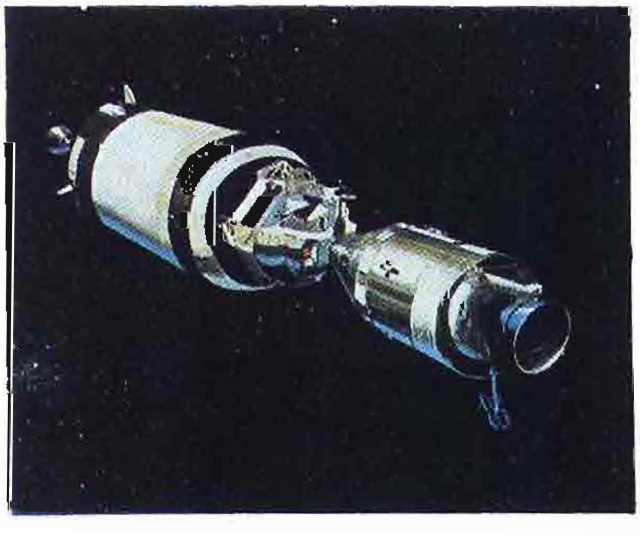
Sl. 16. Nekon dva kruženja oko Zemlje treći stepen je ponovo aktiviran i letilica kreće ka Mesecu.



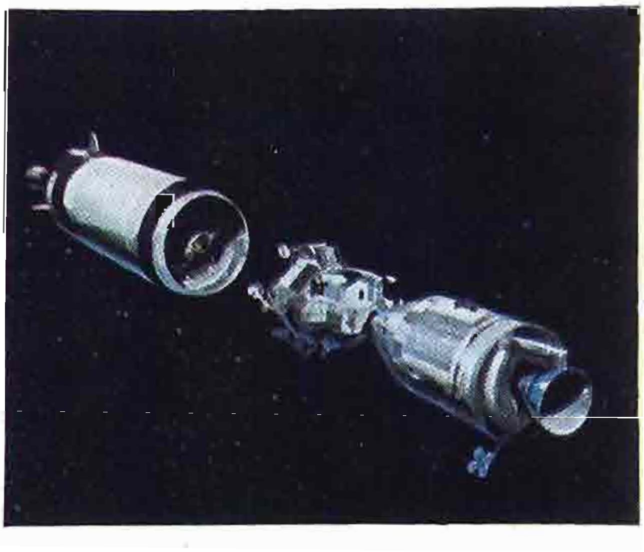
Sl. 17. Otpočinje manevar promene rasporeda modula: otvaraju se ploče — pokrivači adaptera, poput latica velikog cveta, dok se „Kolimbija" (komandni i servisni modul) odvaja od uređaja u kome se nalazi Mesečev modul.



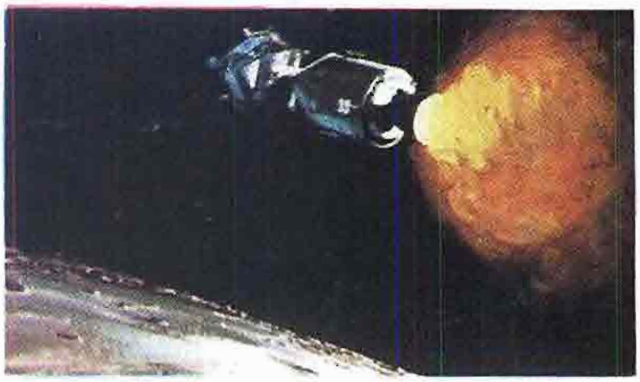
Sl. 18. Komandant „Apola" okreće letilicu za 180° pripremajući je za ponovno spajanje.



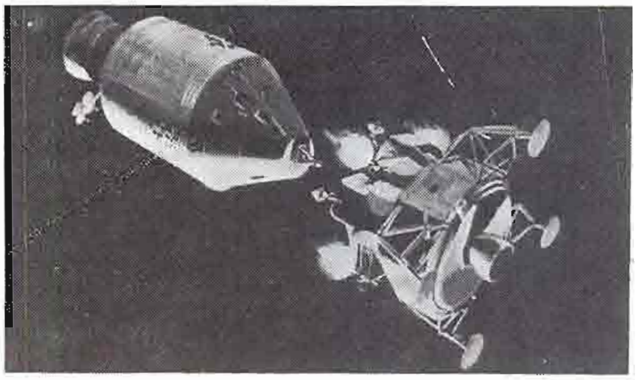
Sl. 19. Vrh komandnog modula spaja se sa spojkom na Mesečevom modulu...



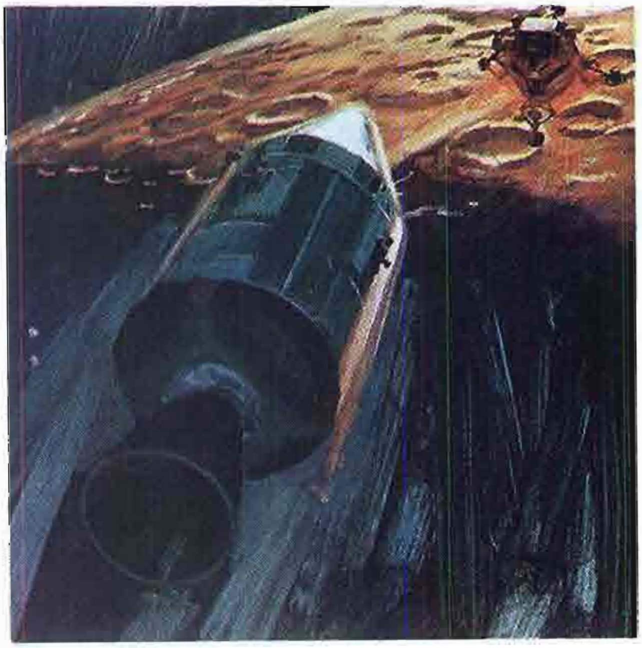
Sl. 20. Izvlači se Mesečev modul iz njegovog spremišta u trećem stepenu rakete i spojeni delovi letilice, tj. brod „Apolo 11", udaljava se od trećeg stepena, koji ostaje u svemiru.



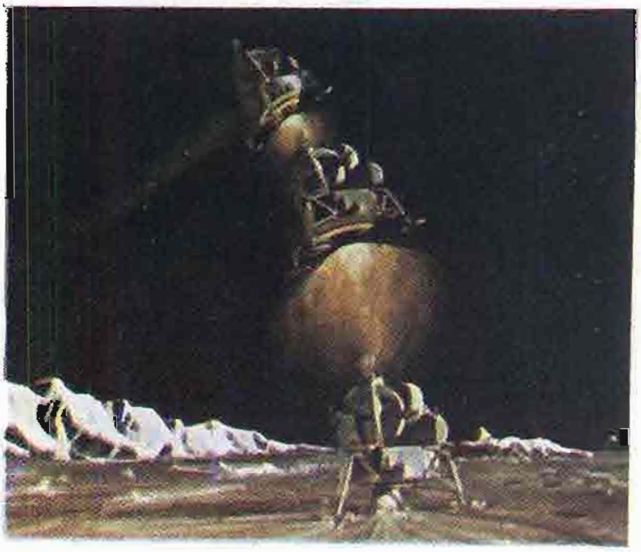
Sl. 21. Na odgovarajućoj udaljenosti od Meseca pali se motor servisnog modula koji deluje kao motor-kočnica i letilica ulazi u eliptičnu putanju oko Meseca.



Sl. 22. Moduli se odvajaju i zajedno lete, dok se za to vreme obavlja poslednja kontrola.

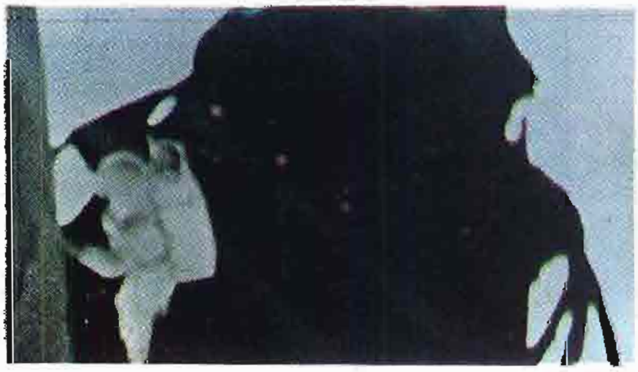


Sl. 23. U matičnom brodu ostao je samo jedan astronaut (*Kolins*), dok druga dvojica (*Armstrong* i *Oldrin*) počinju da se spuštaju ka Mesecu u Mesečevom modulu.

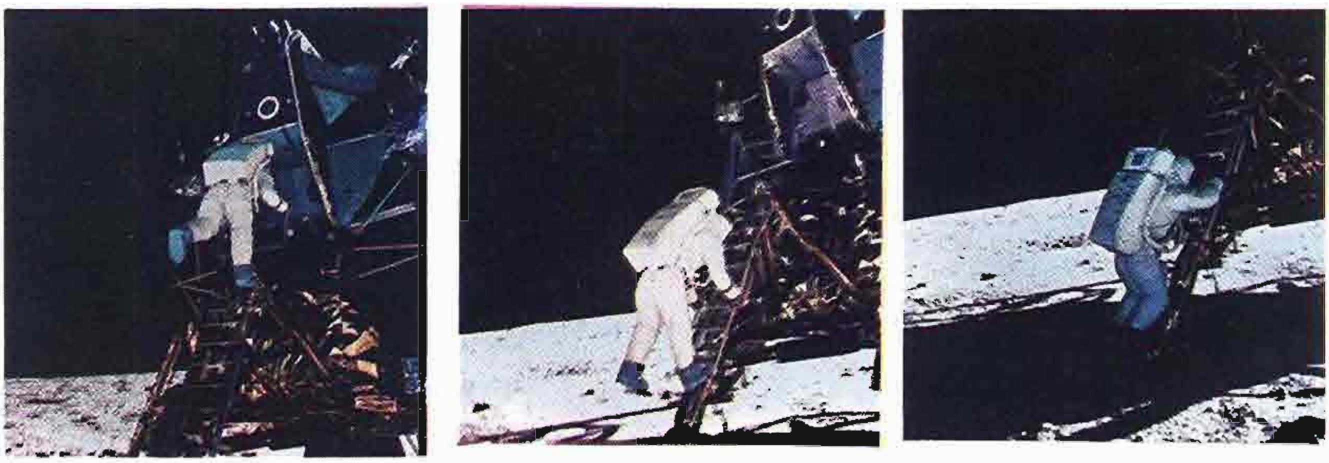


Sl. 24. Mesečev modul se „meko“ spušta na površinu Meseca uz pomoć svoje retro-rakete.

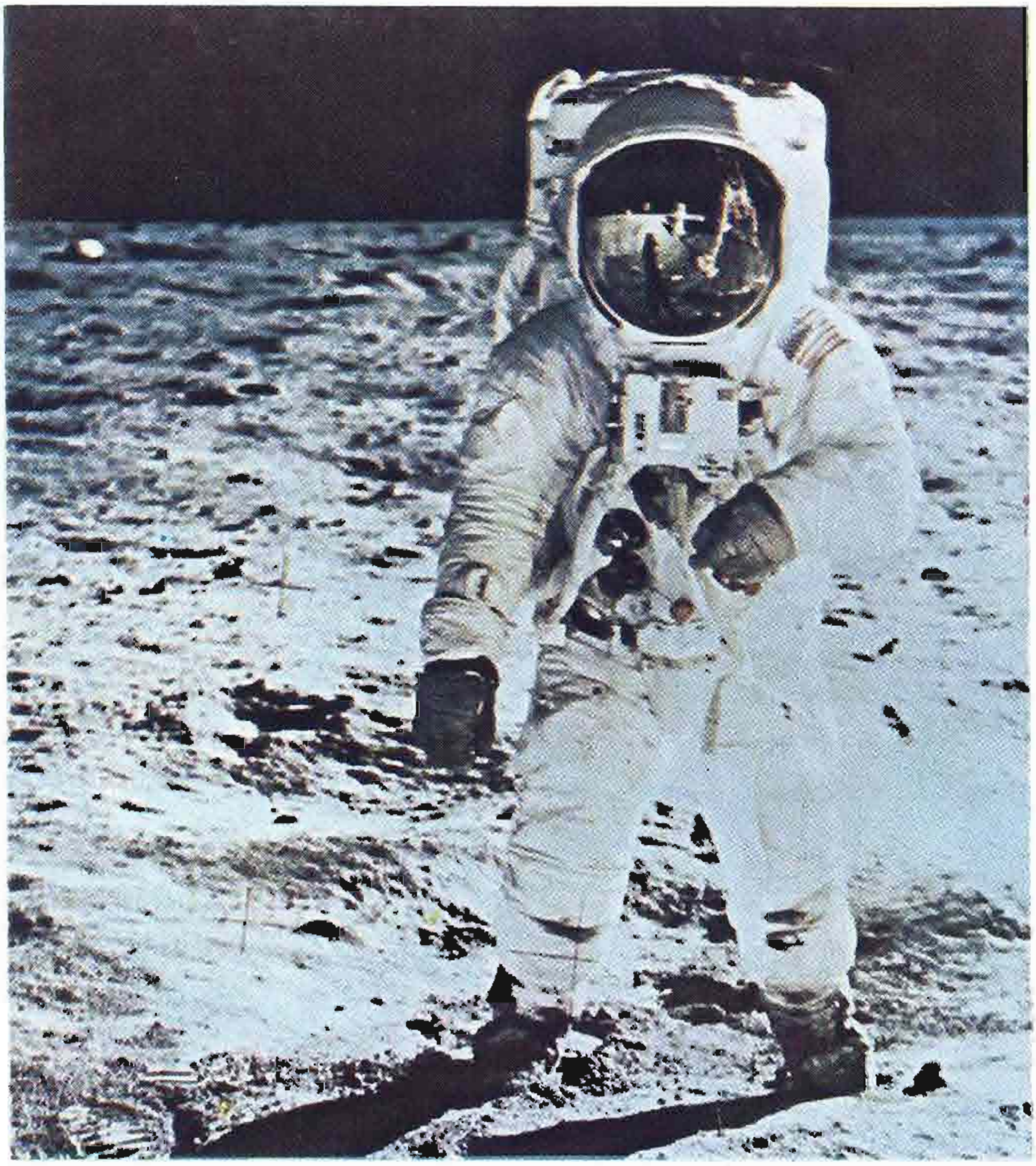
Sl. 25. *Prvi korak.* Prvi čovek, *N. Armstrong*, kročio je na Mesec.



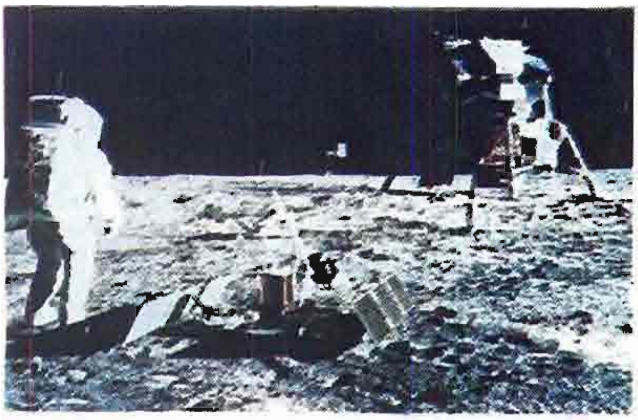
Sl. 26. Pošto je stupio na tlo Meseca, *N. Armstrong* se udaljava od lunarnog modula i ulazi u njegovu senku.



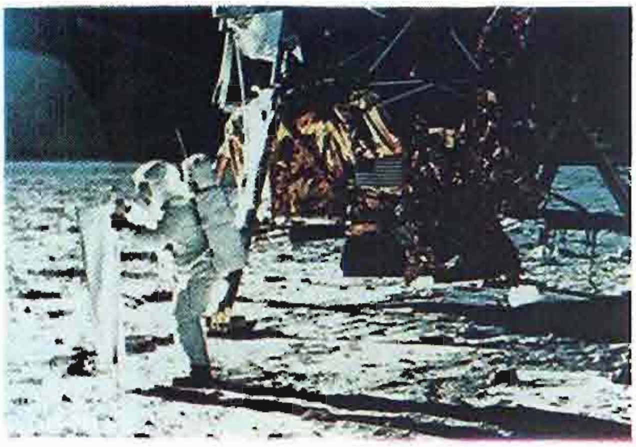
Sl. 27. a—c. Drugi astronaut *E. Oldrin* napušta kabinu „Orla“ i silazi na prvršinu Meseca. Snimke je napravio *Armstrong*, koji je pre toga kao prvi čovek stupio na tlo Meseca.



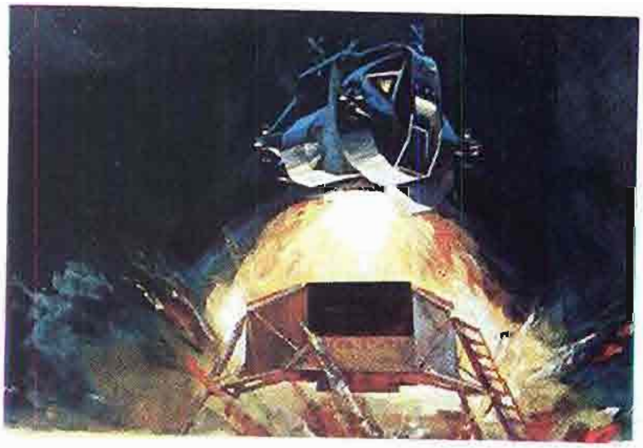
Sl. 28. *Čovek na Mesecu.* Astronaut *Oldrin* hoda po površini Meseca. Snimak je napravio *Armstrong*. U odsjaju na viziru kacige Oldrina vide se Armstrong, TV kamera, zastava i deo Mesečevog modula „Orla“.



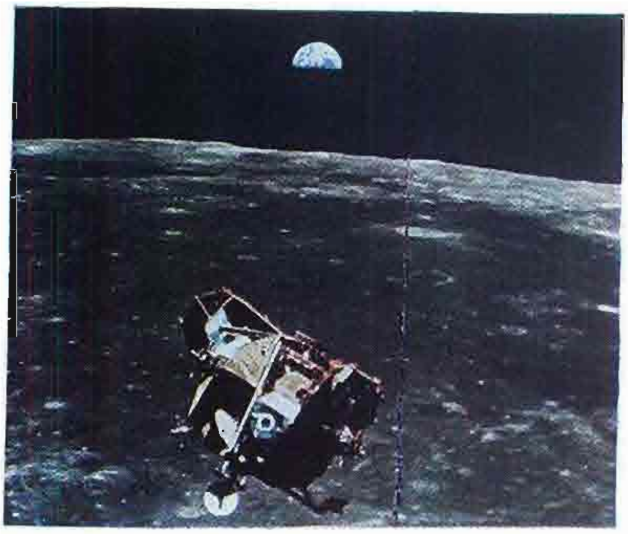
Sl 29, Astronaut *Oldrin* se kreće u blizini postavljenog seizmometra i laserskog ogledala.



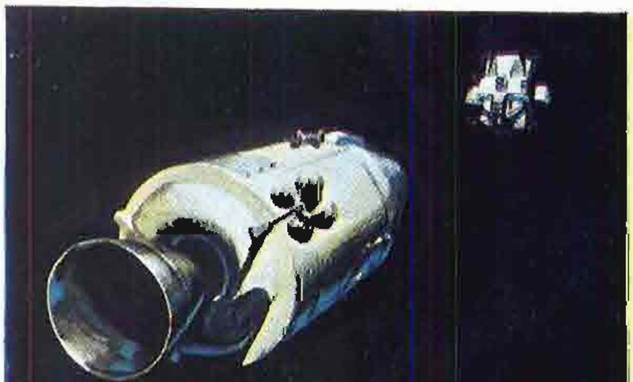
Sl. 30. Postavljanje instrumenta za hvatanje čestica Sunčevog vetra.



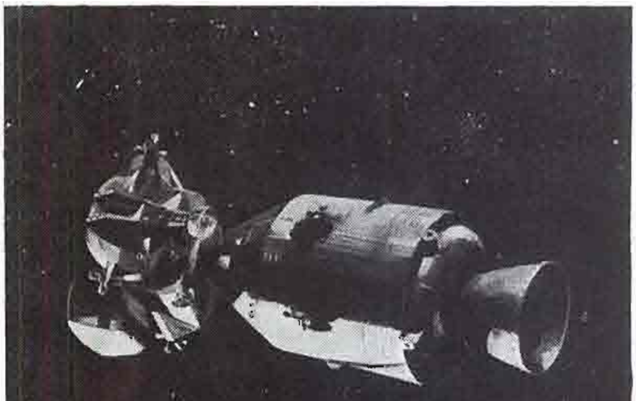
Sl. 31. Gornji deo Mesečevog modula „Orla“ uzleće sa Mesečeve površine.



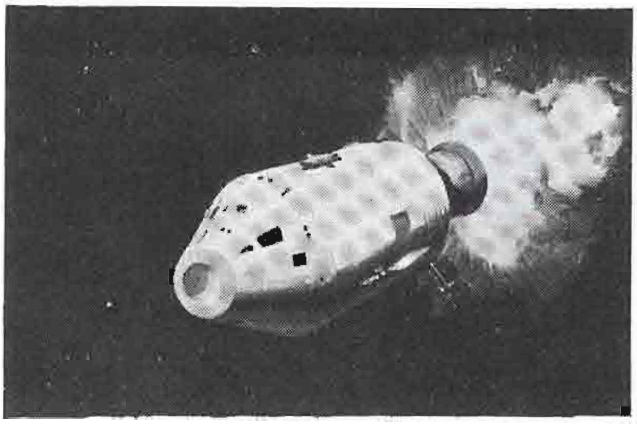
Sl. 32. Gornji deo „Orla“ vraća se sa Meseca da bi se spojio sa komandnim brodom. U pozadini se vidi suncem obasjana Zemlja. Fotografiju je snimio *Kolins* iz „Kolumbije“.



Sl. 33. Posle četiri časa manevrisanja modul za uzletanje spojio se sa matičnim brodom.

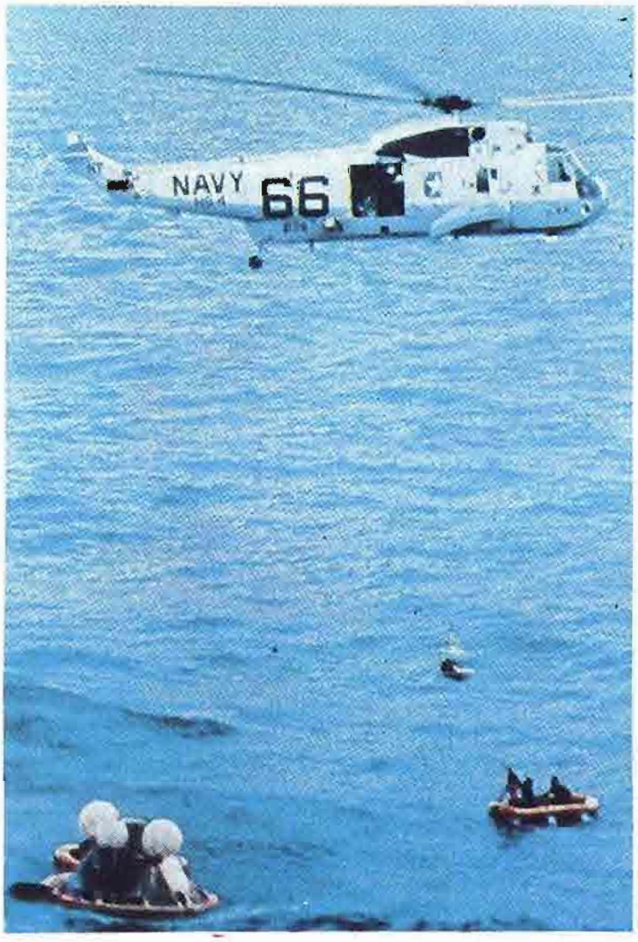


Sl. 34 Astronauti prelaze u matični brod a modul za uzletanje se odbacuje.

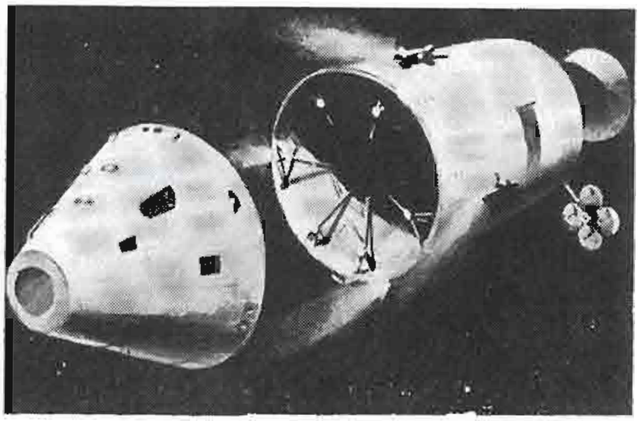


Sl. 35. Motor servisnog dela se pali i usmerava letilicu u pravcu Zemlje.

Sl. 37. Komandna kabina ulazi u atmosferu Zemlje pri čemu toplotni štit absorbuje intenzivnu toplotu.



Sl. 39. Helikopter je spreman da prihvati astronaute do kojih su već dospeli ljudi-žabe.



Sl. 36. Komandni i servisni modul se razdvajaju i posada je spremna da u komandnom modulu uđe u „koridor“ iznad Zemlje.

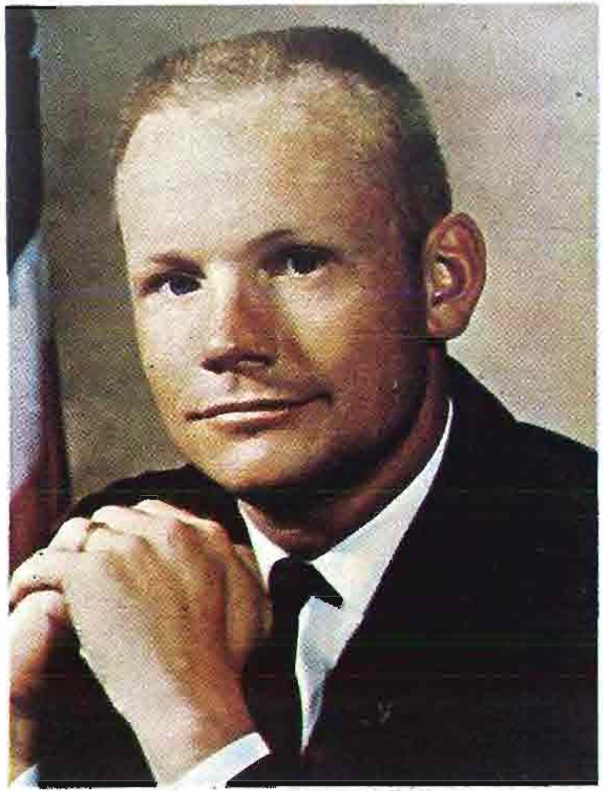
Sl. 38 Komandna kabina polako se spušta pomoću ogromnih padobrana.

Sl. 40. Jedinstven prizor koji su prvi posetioci Meseca mogli da posmatraju: rađanje Zemlje na Mesečevom horizontu. Zemlja izgleda kao oaza u beskrajnoj crnoj samoći svemira.

APOLLO

OSVAJAČI MESECA

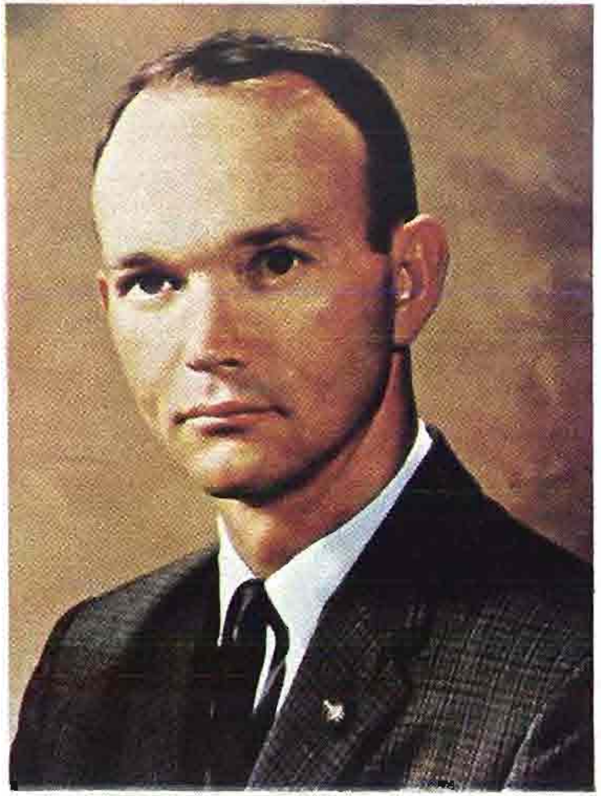
„APOLO II“, JULI 1969.



Neil A. Armstrong

Neil A. Armstrong

NIL ARMSTRONG



Michael Collins

Michael Collins

MAJKL KOLINS

Edwin E. Aldrin Jr.

Edwin E. Aldrin

EDVIN OLDRIN

automatika broda rade precizno. Deset minuta kasnije »Orao« je već lebdeo iznad mesta odabranog za spuštanje u Moru tišine. Astronaut Armstrong je pogledao dole i video krater veličine fudbalskog igrališta ispunjen kamenjem, pa je poslednjim manevrom »Orao« ručno vođen ka povoljnijem (ravnijem) mestu za spuštanje. I tada, prvi put u istoriji, letilica sa planete Zemlje i njena dva istraživača meko dodiruju tlo Meseca pri brzini od svega 3 km na čas (približno 1 metar u sekundi). Bilo je to u nedelju **20. VII 1969. godine** u 21 čas 17 minuta i 42 sekunde po jugoslovenskom vremenu. Armstrong je javio Svemirskom centru u Hjustonu: »Orao« je seleteo (sl. 24).

Spuštanje na Mesec pretstavljalo je najopasniji manevar u celoj misiji. Spuštanje je moralo biti savršeno, jer bi u protivnom astronauti bili zarobljeni na Mesečevoj površini (ako bi se, recimo, »Orao« previše nakrenuo ili prevrnuo i slično, jer ne bi mogao kasnije uzleteti). Spuštanje na Mesec bilo je najopasniji deo puta i zbog toga što je to bila jedina operacija u okviru cele misije koja nije bila izvedena nikada ranije. I u ovom slučaju ruka čovekova odigrala je presudnu ulogu, jer i pored precizne aparature u »Orlu«, ipak je samo čovečije oko bilo u stanju da na Mesečevoj površini izabere najpogodnije mesto za pristajanje nezgrapne letilice; a uz to veliki je problem predstavljalo vođenje i stabilizovanje letilice teške više od 7 tona, kojoj se uz to stalno menja težište zbog trošenja goriva. No sve je to uspešno izvedeno.

Astronauti Armstrong i Oldrin odmah su izvršili proveravanje isparavanosti svih uređaja i sistema Mesečevog broda »Orla«, koji treba da omoguće povratak. Naime, astronauti moraju biti odmah spremni za trenutno uzletanje, što bi usledilo nakon dva minuta, deset minuta i dva časa posle spuštanja; prva dva usledila bi u slučaju da se primeti da je neki deo opreme oštećen i da ne funkcioniše pravilno i uzletanje bi se, da je bilo potrebno, izvršilo onda kada je matični brod »Kolumbija« već završio obilazak svoje prve orbite oko Meseca i kad se nalazio iznad mesta spuštanja »Orla«.

9. *Boravak na Mesecu i ispitivanje Mesečeve površine.* — Prema programu leta trebalo je da se astronauti Armstrong i Oldrin, nakon uspešnog pristajanja na Mesečevoj površini (aluniranja) i prvog obroka na Mesecu, odmaraju oko 4 sata u kabini »Orla«. Međutim, na predlog Armstronga bilo im je iz Svemirskog centra u Hjustonu odobreno da napuste »Orla« i pre predviđenog vremena. Usledio je vekovima očekivani trenutak: Astronaut ***Nil Armstrong*** izlazi niz stepenice iz »*Orla*« i postaje *prvi čovek u istoriji koji je kročio na tlo jednog drugog nebeskog tela* (a možda i prvi oblik bilo kakve vrste života koji se ikada pojavio na Mesecu). Ovo se dogodilo u ponedeljak **21. VII 1969. godine** u 3 časa i 56 minuta po jugoslovenskom vremenu. Kada je zakoračio na Mesečevu površinu Armstrong je izgovorio sledeće reči: »*Ovo je jedan mali korak za čoveka, ali džinovski skok za čovečanstvo*«. Za to vreme snimao ga je Oldrin. Silazeći niz lestvice »Orla«, Armstrong je skinuo poklopac sa TV kamere u pregradi za opremu i uključio televizijski sistem, tako da su milioni televizijskih gledalaca na Zemlji bezbedno i uzbuđeno pratili na svojim ekranima trenutke istorije — kretanje prvih ljudi na Mesecu (sl. 25 — 30).

Zatim je Armstrong specijalnom kašikom počeo da prikuplja delove Mesečevog tla kao »uzorak za svaki slučaj« i stavio ih je u specijalni džep svog svemirskog odela. Ovaj uzorak je odmah uzet da bi se obezbedila makar i najmanja količina uzoraka ukoliko astronauti ne bi bili u stanju da iz bilo kog razloga prikupe druge uzorke. Za Armstrongom, dvadesetak minuta docnije izlazi i astronaut Oldrin, koji postaje drugi čovek koji je nogama stupio na tlo Meseca (sl. 27). Zatim su otkrili pločicu pričvršćenu za nogu Mesečevog modula na kojoj je pisalo: »Ovde su ljudi sa planete Zemlje prvi put kročili na Mesec jula 1969. godine. Došli smo u miru i u ime celog čovečanstva« (sl. 42). Potom su istakli zastavu na Mesecu, nedaleko od »Orla« postavili su antenu preko koje je vršen TV prenos na Zemlju, fotografisali su okolinu i Mesečev modul, a razgovarali su i sa predsednikom SAD u Vašingtonu.

HERE MEN FROM THE PLANET EARTH
FIRST SET FOOT UPON THE MOON
JULY 1969, A. D.
WE CAME IN PEACE FOR ALL MANKIND

NEIL A. ARMSTRONG
ASTRONAUT

MICHAEL COLLINS
ASTRONAUT

EDWIN E. ALDRIN, JR.
ASTRONAUT

RICHARD NIXON
PRESIDENT, UNITED STATES OF AMERICA

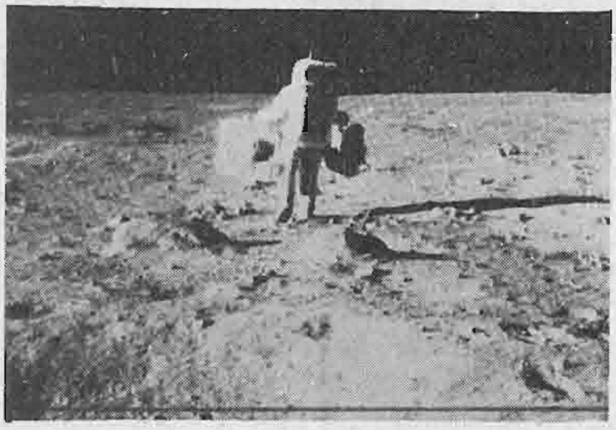
Sl. 42. Pločica na kojoj je zabeleženo da su ljudi sa Zemlje posetili Mesec

Prva poseta ljudi sa Zemlje Mesecu izvan »Orla« traje nešto više od 2 časa, tačnije 2 časa i 11 minuta. Za to vreme oni su obavili sledeće zadatke: u specijalno pripremljene plastične kese i metalne kutije prikupili su 31,5 kg *uzoraka Mesečevog tla*, a istovremeno su na Mesečevoj površini postavili tri naučna instrumenta i to:

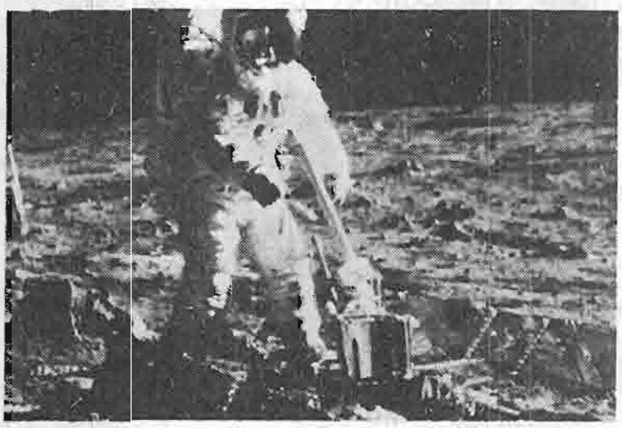
— *minijaturnu seizmičku stanicu* za automatsko emitovanje na Zemlju informacija o potresima i vibracijama na Mesecu; ona će raditi oko godinu dana;

— *lasersko ogledalo* koje odbijanjem laserskog zraka upućenog sa Zemlje treba da omogući precizno merenje udaljenosti Meseca od Zemlje (s tačnošću od nekoliko centimetara);

— *instrument za hvatanje čestica Sunčevog vetra* (Sunčevih radijacija) koje neprekidno udaraju u Mesec, jer im na putu ne stoji nikakva atmosfera. Ovaj instrument (tzv. kolektor Sunčevog vetra), koji se sastoji od nekoliko metaliziranih folija, astronauti po završenoj misiji na površini Meseca ponovo sklapaju i sa sobom vraćaju na Zemlju; prva dva instrumenta zauvek su ostali na Mesecu.



Sl. 43. Astronaut *Oldrin* nosi pakete sa seizmometrom i laserskim ogledalom



Sl. 44. *E. Oldrin* postavlja seizmometar na Mesečevoj površini u Moru tišine

Pri svojoj šetnji po površini Meseca astronauti su se od »Orla« udaljavali najviše tridesetak metara. Sve je teklo po planu i posle nešto više od 2 časa istraživanja i fotografisanja na Mesečevoj površini, oba astronauta sa svojim dragocenim tovarom vraćaju se u kabinu Mesečevog modula, oslobađaju se nepotrebne opreme izbacujući je na površinu Meseca, uzimaju svoj drugi obrok na Mesecu i, budući da nisu spavali posle pristajanja na Mesecu, čine to sada (spavaju oko četiri časa). Spavao je i treći astronaut Majkl Kolins u svojoj »Kolumbiji« visoko iznad ljudi u Moru tišine.

10. *Oproštaj od Meseca.* — Ponovo se kontrolišu svi uređaji i sistemi da bi se obezbedila gotovost za odlazak sa Meseca na kome su boravili 21 ipo čas. Kompjuteri — u Mesečevom modulu (»Orlu«), u matičnom brodu (»Kolumbiji«) i na Zemlji (u Hjustonu) — održavaju elektronsku konferenciju da bi sistemu za navođenje Mesečevog »taksija« saopštili sve informacije koje su potrebne za uzletanje, kao drugu od četiri najkritičnije operacije u toku cele misije »Apola 11«. Ovog puta astronauti su, na znak iz Hjustona, morali sa Meseca sami sebe da lansiraju. Kao platforma za uzletanje poslužio je donji deo »Orla«. Raketni motor gornjeg dela »Orla« aktiviran je i gornji deo u kome su se nalazili astronauti Armstrong i Oldrin a koji sada teži oko 4,5 tone, uzleteo je sa površine Meseca (sl. 31) i nakon 7 minuta ulazi u eliptičnu orbitu, tzv. »putanju parkiranja« oko Meseca u kojoj su astronauti naredna tri ipo časa vršili manerve da bi došli u položaj za spajanje sa matičnim brodom »Kolumbija« u kome je bio Kolins (sl. 32).

Iza sebe su astronauti ostavili dovoljno dokaza o svojoj skoro 22 časa dugoj poseti Mesecu, na kome za otprilike četiri milijarde godina njegovog postojanja, veruje se, nikada nije bilo nikakvog oblika života.

Među uspomenama koje su ostale na Mesecu, kao spomenik prvoj poseti čoveka, nalaze se: donji deo Mesečevog broda »Orao« koji je poslužio kao lansirna rampa gornjem delu; zastave 136 zemalja i izjave šefova 72 države, među kojima i izjava Predsednika SFRJ, druga Tita; pločica na kojoj piše da su astronauti »došli u miru u ime celog čovečanstva«; seizmometar i lasersko ogledalo i još neka oprema koja je namerno odbačena da bi pri povratku teret bio što lakši; zatim dve medalje koje su posmrtno dodeljene poginulim sovjetskim kosmonautima Juriju Gagarinu i Vladimiru Komarovu; posmrtne medalje dodeljene poginulim američkim astronautima V. Grisomu, E. Vajtu i R. Čefiju — članovima posade »Apola 2« — vraćene su na Zemlju; i, naravno, ostali su neizbrisivi otisci Armstrongovih i Oldrinovih stopa na Mesečevoj površini.

Uzlazni stepen »Orla« i matični komandni brod »Kolumbija« u kružnoj orbiti oko Meseca sastavili su se posle tri ipo časa trke koja je iziskivala najsloženiju orbitralnu navigaciju koja se ikada tražila od astronauta. I opet je čovek odigrao važnu ulogu, jer je manevar spajanja izvršen ručnim upravljanjem.

Sl. 45. Ljudi su ostavili neizbrisive otiske svojih stopa na Mesecu. Vidi se i jaka senka lunarnog modula

Manevrišući kabinom Mesečevog broda »Orla« astronauti su je čvrsto spojili a matičnim brodom (sl. 33), zatim, noseći sve uzorke Mesečevog tla, kolektor Sunčevog vetra, ostalu predviđenu opremu i rezultate prikupljene na Mesecu, astronauti Armstrong i Oldrin prelaze obratnim putem kroz tunel-saobraćajnicu u komandnu kabinu »Kolumbije«. Potom se prazna kabina »Orla«, pošto više nije potrebna, odbacuje i ostaje u orbiti (putanji) oko Meseca, a matični brod sa trojicom astronauta upućuje se ka svemirskoj putanji koja vodi ka Zemlji (sl. 34).

Istorijska misija na Mesecu je završena.

11. *Povratak.* — Nastupa treća od kritičnih operacija — početak povratka, tj. ubacivanje »Kolumbije« u putanju koja vodi ka Zemlji (to je manevar sličan onom pri ubacivanju u putanju za Mesec), jer treba povećati brzinu do 2,4 km u sek. (tzv. brzina oslobađanja od Mesečeve gravitacije) da bi se letilica otrgla iz polja dejstva Meseca. Raketni motor servisnog dela se pali i usmerava »Kolumbiju« na lučnu putanju prema Zemlji udaljenoj oko 384000 km (sl. 35). Bilo je to pri kraju 30. kruga »Kolumbije« oko Meseca, tj. nakon 131 časa 28 minuta i 43 sekunde od starta »Saturna V« iz svemirske baze Kejp Kenedi.

Putovanje u povratku, koje traje skoro 3 dana, slično je onom u odlasku i, ukoliko se letilica sve više približava Zemlji, gravitacija Zemljina je sve više privlači i ubrzava sve dok »Kolumbija«, približavajući se koridoru za ulazak u Zemljinu atmosferu, ne postigne istu brzinu kojom je pre nedelju dana izašla iz orbite oko Zemlje, a to je tzv. druga Zemljina kosmička brzina od 39200 km na čas (oko 11 km u sek.). U toku ovog povratka vršene su neznatne korekcije putanje broda, posada je spavala, a vršena su i dva TV prenosa za gledaoce na Zemlji: prikazivan je Mesec koji je iščezavao, odnosno Zemlja koja je postajala sve bliža, a astronauti su prikazali i uzorke tla koje donose sa Meseca, kao i nekoliko svojih »bestežinskih igara« i, naravno, proveravali su brodske sisteme za ulazak u atmosferu Zemlje.

12. *Ponovni ulazak u atmosferu.* — Došao je trenutak za poslednju kritičnu operaciju — ulazak u »povratni koridor« širok oko 60 km koji predstavlja idealnu putanju (kroz atmosferu) za spuštanje na Zemlju. Koridor počinje na 120 km iznad Zemlje (i u njega kapsula mora ući pod uglom između 5° i 7° prema horizontali). Na toj visini pri brzini od 39600 km na čas (oko 11 km u sek. — tzv. druga Zemljina kosmička brzina) komandni modul sa astronautima odvaja se od servisnog modula — cilindričnog dela broda »Apolo 11« u kome se nalazio glavni raketni motor, materijal i oprema koji više nisu potrebni (sl. 36). Do tada mnogostruko korisni servisni modul, koji je sada odbačen, uleće u gušće slojeve atmosfere i sagoreva. Sve što je sada ostalo od džinovskog »sloga« »Saturn V — Apolo 11« visokog preko 110 m i teškog oko 3000 tona jeste 5,5 tona težak komandni modul u obliku kupe prečnika osnove oko 4 m i visok oko 3 m.

Koristeći potisne mlazne motore komandnog modula, koji nikad ranije nisu paljeni, komandant misije (Armstrong) doveo je letilicu na savršenu putanju za povratak na Zemlju tako da poslednje planirane korekcije putanje nisu bile potrebne; letilica je postavljena tako da baza kupe — a to je u isto vreme i osnovni toplotni štit — prva dodirne atmosferu. Pri brzini od oko 11 km u sekundi kabina je zaronila u atmosferu (sl. .37) i ubrzo se usled atmosferskog trenja pretvorila doslovno u vatrenu loptu pošto se njena temperatura spolja bila popela na više od 2700 °C, ali su se u unutrašnjosti kabine trojica astronauta odmarala na svojim sedištima skoro pri sobnoj temperaturi, jer je kabina spolja obložena zaštitnim ablacionim slojem. Kabina se postepeno usporava i na visini od 7200 m automatski su se otvorili pomoćni (mali) padobrani koji usporavaju kretanje kabine, a na visini od oko 3000 m otvaraju se tri glavna (velika) padobrana (sl. 38) koji meko spuštaju komandnu kabinu (brzinom od 35 km/h) u Tihi okean (Pacifik), jugozapadno od Havaja, gde je čekala flota za prihvatanje astronauta. To se dogodilo u četvrtak 24. VII 1969. godine u 18 časova i 51 min. po jugoslovenskom vremene. (Nakon 195 sati 18 minuta i 20 sekundi leta).

13. *Opet na Zemlji.* — Ljudi-žabe sa nosača aviona »Hornet« koji se nalazio u blizini, pomogli su da astronauti nakon oblačenja specijalnih odela za biološku

izolaciju i dekontaminacije, pređu u gumeni čamac, odakle su helikopterima prebačeni na palubu »Horneta« gde ih je pozdravio lično presednik SAD, ali nije bilo uobičajenog pozdravljanja i rukovanja, nije bilo neposrednog kontakta, već su astronauti, kao i uzorci koje su doneli, bili odmah zatvoreni u jedno specijalno vozilo — biološki izolovan vagon (tzv. trejler), koji je hermetički zapečaćen i avionom prenet u Svemirski centar u Hjustonu. Ovaj vagon — prilkoica obezbeđivao je astronautima svu moguću udobnost. U Hjustonu, u Mesečevoj prijemnoj laboratoriji ovaj je vagon bio spojen sa jednom drugom prostorijom. Astronauti su kao i njihova kapsula) ostali izolovani u karantinu nešto više od dve nedelje, odnosno do 11. VIII 1969. godine, tj. sve dok se naučnici nisu uverili da oni sa Meseca nisu doneli nikakve klice koje bi mogle da se nezadrživo rašire po Zemlji. Ove karantinske mere bile su opravdana preventiva za sprečavanje bilo kakvih nepoželjnih posledica ovog poduhvata, od velikog značaja za čitavo čovečanstvo.

Za vreme boravka u karantinu astronauti su bili podvrgnuti obimnim medicinskim pregledima da bi se utvrdile posledice koje je na njih ostavio ovaj put, a istovremeno su naučnici s njima vodili razgovore o letu.

14. *Kraj puta.* — Astronauti N. Armstrong, E. Oldrin i M. Kolins izašli su iz karantina 11. avgusta i prvo otišli svojim kućama i porodicama, a onda su krenuli na turneju po svojoj zemlji (Njujork, Čikago, Los Anđelos), a zatim i po drugim zemljama, tj. krenuli su na put oko sveta (ovog puta uobičajenim prevoznim sredstvima, a ne kosmičkim brodom!) i svuda gde su bili priređen im je doček dostojan prvih ljudi koji su posetili drugo nebesko telo.

Na tom svom putu po svetu, slavni osvajači Meseca posetili su i našu zemlju u vremenu 18—20. X 1969. godine. Beograd, koji je tih dana slavio dvadesetpetogodišnjicu svog oslobođenja, priredio im je veličanstven doček. Boravili su među pionirima u Domu pionira, položili venac na Grob neznanog junaka na Avali, a u Televiziji Beograd učestvovali su na konferenciji za štampu (sl. 48).


Sl. 46. Astronauti *Armstrong, Kolins i Oldrin* na beogradskom aerodrumu


Sl. 47. Astronauti na prijemu kod *druga Tita*

Za vreme dvodnevnog boravka u Beogradu, slavnu posadu »Apola 11« — Armstronga, Oldrina i Kolinsa — primio je i *Predsednik Republike drug Tito* i predao im visoka jugoslovenska odlikovanja. Nazdravljajući astronautima u toku ručka, drug Tito je, između ostalog, rekao: »*Dozvolite mi da uputim nekoliko riječi našim dragim gostima, astronautima koji su osvojili Mjesec i svojim velikim podvigom zadužili čovječanstvo. Ja ne volim osvajače na Zemlji, ali visoko cijenim osvajanje nebeskih tijela . . .*«

Sl. 48. Prvi istraživači Meseca — astronauti *Oldrin, Armstrong i Kolins* — na konferenciji za štampu u Televiziji Beograd

7. Šta su astronauti videli na Mesecu?

Pored tridesetak kilograma uzoraka Mesečevog tla, astronauti Armstrong i Oldrin su sa Meseca poneli i mnoštvo jedinstvenih utisaka dobijenih u toku dva časa šetnje na površini Meseca.

Šta su to oni videli na Mesecu?

Naše osnovno merilo vremena — dan i noć — na Mesecu imaju drugačije značenje: tamo kao da vreme sporije protiče: dan i noć traju koliko zemaljskih četrnaest. Temperaturske razlike su velike: od—150 °C do +120 °C. Pejzaž je monoton, oživljuju ga samo krateri svih mogućih dimenzija; površina je siva. Prostor je bezvazdušan, nema atmosfere koja bi štitila od raznih kosmičkih zračenja i meteorita, mada za vreme bavljenja na Mesecu astronauti nisu primetili padanje meteorita. Prema tome, Mesec je pustoš — neplodna, kamenita, danju žarka, noću studena; izložen je svim mogućim opasnostima zbog odsustva atmosfere koja bi ga štitila. Zbog znatno manjeg poluprečnika (u odnosu na Zemljin), Mesečeva krivina je tako oštra da se horizont nalazi na nekoliko kilometara. Nebo je crno, uvek je crno, jer nema atmosferskih molekula da ga oboje, a sa tog crnog neba posutog zvezdama koje ne trepere, Sunce sija zaslepljujuće. Na nebu »visi« i sama Zemlja oko četiri puta veća nego što nama Mesec izgleda, skoro osamdeset puta svetlija u plavičastom sjaju, a njena rotacija se jasno vidi. Senke su oštre, a zraci trčkaraju po Mesečevoj površini.

Privlačna sila Mesečeva (gravitacija) je 6 puta slabija od Zemljine, što znatno utiče na način kretanja po Mesecu. Ipak su se astronauti brzo navikli da hodaju po prašnjavoj i dosta klizavoj površini Meseca: oni su se kretali naginjući se napred i šireći noge; u njihovom kretanju bili su sjedinjeni trapavost i baletska spretnost; videli smo ih i kako se kreću »u stilu kengura«. Pokazalo se da je najpogodniji način kretanja usporeno skakanje (skokovito hodanje), pri čemu je bilo potrebno procenjivati po nekoliko koraka unapred. Brzina kretanje bila je 7—10 km na čas.

Mesečeva površina prekrivena je sivom sitnozranstom prašinom koja se lepila za obuću lunauta. Ispod ove prašine je tvrdo tlo; štap zastave bilo je teško zabosti, jedva dvadesetak centimetara. Stene od kojih je tlo sastavljeno dvojakog su tipa: neke su vulkanskog porekla (otvrdla lava), tj. minerali koji su prvo bili u rastopljenom stanju, a onda očvrsli; neke, pak, predstavljaju pravi konglomerat od čestica raznih stena pomešanih sa finom zrnastom prašinom. U površinskim slojevima, u onom praškastom materijalu, ponedge nalik na ugalj, nalazilo se mnoštvo sitnog staklastog materijala (kuglica), pa je valjda zbog toga tlo izgledalo astronautima klizavo. U blizini mesta spuštanja i nešto dalje u susednom krateru dijametra oko 25 m primećeno je mnoštvo sivog kamenja velikog i po nekoliko kubnih metara. I sitno kamenje je bilo sive boje. Ipak je Oldrin pronašao kamičak purpurne boje. Prikupljajući minerale astronauti su se držali principa da je bolje naučnicima doneti dvadesetak manjih primeraka nego li samo jedan veliki.

Sl. 49. Mesečev teren u Moru tišine

Svoja zapažanja astronauti su po povratku saopštili naučnicima.

* * *

1. Sada, pošto su se astronauti vratili na Zemlju, fantastična kosmička avantura pretvara se u nauku. U tom pogledu najznačajniji rezultat misije »Apola 11« svakako je mali tovar od tridesetak kilograma Mesečevog kamenja i prašine, koji su astronauti doneli sa Meseca.

Koji su prvi rezultati misije »Apola 11«?

Mada su proučavanja podataka i ispitivanje uzoraka u toku, ipak se za sada može konstatovati sledeće:

— Pomoću seizmometra ostavljenog na Mesecu već je registrovan priličan broj potresa na Mesecu, a to ukazuje da Mesec nije sasvim mrtav, kao što se verovalo, i da mu jezgro verovatno nije čvrsto.

— Pomoću laserskog ogledala postavljenog na Mesecu određena je udaljenost od Zemlje do Meseca sa tolerancijom od nekoliko desetina metara, ali se daljim merenjem može doterati da tačnost bude uz toleranciju u centimetrima.

— Uzorke Mesečevog tla ispitivaće naučnici u devet zemalja. Prve analize Mesečevog kamenja pokazale su da je to kamenje dalekog vulkanskog porekla, samo se još sigurno ne zna da li je izbačeno iz Mesečevog jezgra ili je došlo iz svemira sa meteoritima. Uzorci kamenja sa Meseca imaju »klizavu«, kao grafitom premazanu površinu. Ovi uzorci biće ispitivani još izvesno vreme, a zatim će u novembru stići novi, koje će prikupiti članovi posade »Apola 12«. Sigurno je da će rezultati analize ovih uzoraka predstavljati dragoceni doprinos riznici ljudskih saznanja.

2. Prvo putovanje ljudi na Mesec je završeno. Ali uspomena na njega živeće dok živi i samo čovečanstvo, a imena prvih posetilaca Meseca ući će u anale vekova.

»*Na surovo i beživotno ostrvo u Vasioni — zvano Mesec — spustio se ČOVEK sa Zemlje. Milijardama godina nijedno živo biće nije poremetilo mir njegove prirode. Sada se to promenilo. Čovek je prestao da bude zarobljenik i stanovnik samo sopstvene planete — Zemlje*; *on postaje građanin Kosmosa*« — kaže inž. Milivoj Jugin u jednom svom komentaru u toku televizijskog prenosa čovekovog pohoda na Mesec.

Stvarno smo ušli u interplanetarnu eru.

Sl. 50. Posada „*Apola 12*“: *Čarls Konrad*, komandant „Apola 12“; *Ričard Gordon*, pilot komandnog modula; *Alan Bin*, pilot lunarnog modula

3. Šta posle »Apola 11«? Na prvom mestu nastaviće se istraživanje Meseca. Već su određene posade za vasionske brodove »Apolo« 12, 13 i 14, koje u novembru ove, martu i julu iduće godine treba da ponove podvig Armstronga, Oldrina i Kolinsa. (U toku štampanja „Matematičkog lista“ let „*Apola 12*“ je uspešno završen).

Predviđa se lansiranje i izgrađivanje u orbiti oko Zemlje vasionske laboratorije (stanice) u kojoj bi se posade mogle smenjivati i neograničeno dugo boraviti. Sa tih stanica može se putovati na Mesec i druge planete. Ostvarenju takvog jednog projekta treba da posluži i grupni let sovjetskih kosmičkih brodova »*Sojuz*« 6, 7 i 8 izvršen ovih dana (posade: G. Šonjin, V. Kubasov; A. Filipčenko, V. Volkov, V. Gorbatko; V. Šatalov, A. Jelisejev).

U daljoj perspektivi predviđa se ispitivanje i odlazak na druge planete Sunčevog sistema.

Nadajmo se da će svi ovi uspesi ljudskog genija služiti isključivo u mirnodopske svrhe!

B. Marinković, prof.

ZADACI

Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole

Beograd, 13. VI 1969.

I grupa

1. Rešiti jednačinu: $\frac{x-2}{6}-\frac{5x+8}{12}=1-\frac{x}{2}$. [$x=8$]

2. Na nekom poslu radilo je 15 radnika i oni završe polovinu posla za 20 dana. Posle toga 3 radnika napuste taj posao. Za koje vreme će preostali radnici dovršiti započeti posao? [25 dana]

3. Putnik je prešao $\frac{3}{10}$ nekog puta. Kada je taj putnik prešao još 112 kilometara bio je na polovini puta. Kolika je dužina tog puta? [560 km]

4. Obim kruga upisanog u rombu stranice 10 cm iznosi 8π cm. Kolika je površina tog romba? [$P=(10\cdot 8)\text{ cm}^2=80\text{ cm}^2$]

5. Kada se razvije omotač kupe dobije se četvrtina kruga čiji je poluprečnik 4 cm. Izračunati površinu i zapreminu te kupe!

$$\left[P=5\pi\text{ cm}^2\approx 15{,}7\text{ cm}^2;\quad V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{15}\approx 4{,}01\text{ cm}^3\right]$$

IV grupa

1. Rešiti jednačinu: $\frac{x+2}{2}-\frac{3x-5}{10}=x+1{,}5$. [$x=2{,}5$]

2. Posle sniženja za 8% cena nekoj robi je 1840 dinara. Kolika je bila cena toj robi pre sniženja? [2000 din.]

3. Odrediti unutrašnje uglove trougla ako je poznato da jedan od njih iznosi $\frac{2}{5}$ drugog, odnosno $\frac{1}{4}$ trećeg unutrašnjeg ugla. [24°, 60°, 96°]

4. Dijagonala kvadrata *ABCD* je 16 cm. Tačka *M* je izvan ravni datog kvadrata i udaljena je za 10 cm od svakog temena tog kvadrata. Izračunati odstojanje tačke *M* od ravni kvadrata *ABCD*. [6 cm]

5. Koliko je teška bakarna žica poprečnog preseka 10 mm² i dužine 1 km? (Specifična težina bakra je 8,9). [$Q=89$ kp]

Napomena. — Svaki je zadatak ocenjivan sa 0 do 5 bodova; za svaki sasvim tačno izrađeni zadatak davano je po 5 bodova, što znači da je maksimalni broj bodova 25.

Preporučujemo vam da samostalno rešite navedene zadatke. Da biste svoj rad mogli kontrolisati, za svaki zadatak naveli smo i rezultat.

Slični zadaci bili su i za ostale dve grupe (II i III).

Одабрани задаци

Ови задаци (а има их за сваки разред) треба да вам послуже за вежбу, припремање за пријемне испите и математичка такмичења. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати, упутства и решења нека вам служе за контролу.

Аритметика

458. Колико пута ће се повећати неки број ако му додамо број који је од њега три пута већи? [4 пута]

459. За колико се повећа количник два броја ако дељенику додамо делилац (а делилац остане непромењен)? [За 1]

460. Количник два броја је 3, а њихова разлика (диференција) је 3,2. Који су то бројеви? [4,8 и 1,6]

461. Ако звук прелази трећину километра у секунди, одреди колико ће километара звук прећи за пола минута. [10 km]

462. Космички брод »Аполо-11« са славним астронаутима Армстронгом, Олдрином и Колинсом био је лансиран 16. јула 1969. године у 14 часова и 32 минута по југословенском времену и после успешно обављене мисије на Месецу његова командна кабина са астронаутима спустила се на Земљу 24. јула 1969. године у 17 часова и 51 минут по југословенском времену. Колико времена је трајао овај епохални лет?

[8 дана 3 часа 19 минута]

463. У некој школи има 360 ученика. На сваких 5 дечака долазе по 4 девојчице. Колико у тој школи има дечака, а колико девојчица?

464. Један ученик је о себи написао ово: „Имам 24 прста: на свакој руци по 5, а на ногама укупно 12“. Како је то било могуће?

Одговор. — При записивању ових бројева ученик се користио бројним системом с базом 8.

465. Код множења $** \cdot **$ знамо само то да се производ (продукт) састоји једино од четворки, али не знамо колико тих четворки има. Ипак се то множење може дешифровати. Учините то!

Упутство. — Сигурно је $** \cdot ** < 10000\ (= 100 \cdot 100)$, па долазе у обзир само две могућности: 1) $** \cdot ** = 4444$ или 2) $** \cdot ** = 444$. Пошто је $4444 = 44 \cdot 101$, а 101 је прост број, то се 4444 не може написати као производ два двоцифрена броја и зато прва могућност отпада. У другом случају је $444 = 4 \cdot 111 = 2\ \ 2 \cdot 3 \cdot 37$, а то се може приказати као производ двају двоцифрених бројева и то само на један начин: $(2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 37 = 12 \cdot 37$.

466. Дешифрујте једнакост: $AA \cdot AA = BBCC$.

Овде су цифре замењене словима; при томе исто слово значи свуда исту цифру).

Покажите да је тада $(AA : C)^2 = CAC$.

Одговор. — При датим условима AA може значити само 88, па је тада $BBCC = 7744$. Итд.

467. Напиши најмањи петоцифрени број који је дељив са 9, тако да му прва цифра буде 6 и све цифре да су му различите. [60129]

468. Један шестоцифрени број, који се завршава са 137, дељив је са 7, 11 и 13. Који је то број?

Решење. — Тражени број мора бити дељив са производом $7 \cdot 11 \cdot 13$, тј. бројем 1001. Због тога се његове прве три цифре подударају са последње три. Према томе, тражени број је 137137.

469. Који је од ова два разломка већи: $\frac{11}{35}$ или $\frac{55}{177}$? Како ћете то најлакше утврдити? [Први]

Упутство. — Хоћете ли дате разломке сводити на исти именилац или . . . ?

470. Провери да ли је тачна једнакост:

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(1\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^4=8!$$

471. На најједноставнији начин израчунај збир:

$$\frac{6}{5\cdot7}+\frac{6}{7\cdot9}+\frac{6}{9\cdot11}+\frac{6}{11\cdot13}+\frac{6}{13\cdot15}+\frac{6}{15\cdot17}. \qquad \left[\frac{36}{85}\right]$$

Упутство. — Да ли ћеш разломке сводити на заједнички именилац? Види решење 1. конкурсног задатка у МЛ II.1!

472. Воз је прешао 3/8 пута између два места. Кад пређе још 9 km биће на средини пута. Колико су удаљена та два места? $\left[9\text{ km} : \frac{1}{8} = 72\text{ km}\right]$

Упутство. — Који део пута још треба да пређе воз да би био на средини пута? Колико износи тај део пута изражен у километрима? Дакле?

473. Неко потроши најпре $\frac{3}{5}$ новца који је имао, затим $\frac{5}{9}$ остатка, а потом још $\frac{3}{8}$ новог остатка; после тога остало му је 80 динара. Колико је имао у почетку?

Решење. — Кад потроши $\frac{3}{5}$ новца који је имао, остану му још $\frac{2}{5}$ те суме. Затим потроши $\frac{5}{9}$ овог остатка, тј. $\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}$ целе суме $=\frac{2}{9}$ целе суме. Значи, до сада је потрошио укупно $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{9}\right)$ целе суме, тј. $\frac{37}{45}$ од целе суме. Преостало му је још $\left(\frac{45}{45}-\frac{37}{45}\right)$ целе суме, тј. $\frac{8}{45}$ целе суме. Када од овог новог остатка потроши његове $\frac{3}{8}$, онда он од целе суме потроши

$\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{45}=\frac{1}{15}$ те суме. Према томе, свега је од целе суме потрошио $\frac{37}{45}+\frac{1}{15}=\frac{8}{9}$, а преостало му је још $\frac{1}{9}$ првобитне суме, а то износи 80 динара. Ако 1/9 целе суме износи 80 динара, онда ће цела сума износити 9 пута више, тј. 720 динара.

Према томе, првобитна сума била је 720 динара.

Провера. — Први пут је потрошио 3/5 суме коју је имао, тј. 3/5 од 720 динара, тј. $\frac{3}{5}\cdot 720$ динара $=3\cdot 144$ динара $=432$ динара. Преостало му је 288 динара. Од овога је потрошио 5/9, тј. $\frac{5}{9}\cdot 288$ дин. $=160$ дин. Преостало је још 288 дин. —160 дин. $=128$ дин. Од овог новог остатка потрошио је још 3/8 тог остатка, тј. $\frac{3}{8}\cdot 128$ дин. $=3\cdot 16$ дин. $=48$ дин. Остало је још 80 дин. Тада заиста имамо: $432+160+48+80=720$.

Алгебра

474. Покажите да збир производа $(3x—2)\,(4—x)$ и $(x—3)\,(3x—5)$ не зависи од x.

Решење. — Збир датих израза је $(3x—2)\,(4—x)+(x—3)\,(3x—5)$. Ако извршимо множења добићемо израз $12x—8—3x^2+2x+3x^2—9x—5x+15$. После свођења сличних чланова добијамо број 7, тј. израз који не зависи од x.

475. Шта је веће: 10^{20} или 20^{10}?

Упутство. — Узми у обзир да је $10^{20}=10^{10}\cdot 10^{10}$, а $20^{10}=(2\cdot 10)^{10}=2^{10}\cdot 10^{10}$. Дакле?

476. Решавајући један задатак, неки ученик требало је да дати број помножи са 0,5 и томе што добије да дода 3. Међутим, уместо тога ученик је дати број поделио са 0,5 и од добијеног количника одузео је 3. На срећу, добијен је резултат који је иначе и требало да се добије. Одредити онај број који је ученик требало да помножи. [4]

477. Неколико дечака реше да купе лубеницу. Ако сваки од њих да по 0,70 динара, недостајаће им 0,30 динара; ако, пак, сваки да по 0,80 динара, онда ће им преостати 0,40 динара. Колико је било дечака и колико је требало да плате за лубеницу? [7 дечака; 5,20 динара]

478. Наћи разломак који се неће променити када бројиоцу додамо 30, а имениоцу 40.

Решење. — Нека је тражени разломак a. Према условима задатка је: $\frac{a+30}{b+40}=\frac{a}{b}$. Одатле је $30\,b=40\,a$, или у виду пропорције $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$.

479. Два рудника A и B повезана су железничком пругом дужине 25 km. У A је цена угљу 70 динара по тони, у B је 60 динара по тони, а превоз стаје 2 динара по километру за 1 тону. На којем месту M на прузи између A и B је цена угљу једнака, било да се довози из A или из B?

Решење. — Означимо ли раздаљину AM са x, можемо одмах поставити једначину $70+2\cdot x=60+(25-x)\cdot 2$ из које добијамо да је $x=10$. Значи, место M се налази на 10 km од A и 15 km од B.

480. Бициклиста се пење уз брдо брзином 10 km/h а спушта се брзином 15 km/h. Разлика у времену успињања и спуштања износи 12 минута. Колика је дужина пута којим је пролазио?

Решење. — Ако је x дужина пута, онда из $\frac{x}{10}-\frac{x}{15}=\frac{12}{60}$ добијамо $x=6$ km.

Геометрија

481. Дат је угао од 19°. Помоћу шестара и лењира подели тај угао на 19 једнаких делова!

Упутство. — Угао 19° · 19, тј. угао од 361° лако се конструише помоћу датог угла; угао од 360° такође знаш конструисати. Да ли онда можеш конструисати угао од 1° ?

482. Нацртај какав било троугао па га подели на четири једнака троугла. Како ћеш то учинити?

Упутство. — Спој међусобно средишта свих трију страница! Како ћеш образложити да су добијени троугли међусобно не само једнаки, већ и подударни?

483. Ма какав четвороугао није тешко једном правом поделити на два троугла. Нацртајте неки четвороугао који се једном правом може поделити на три троугла!!!

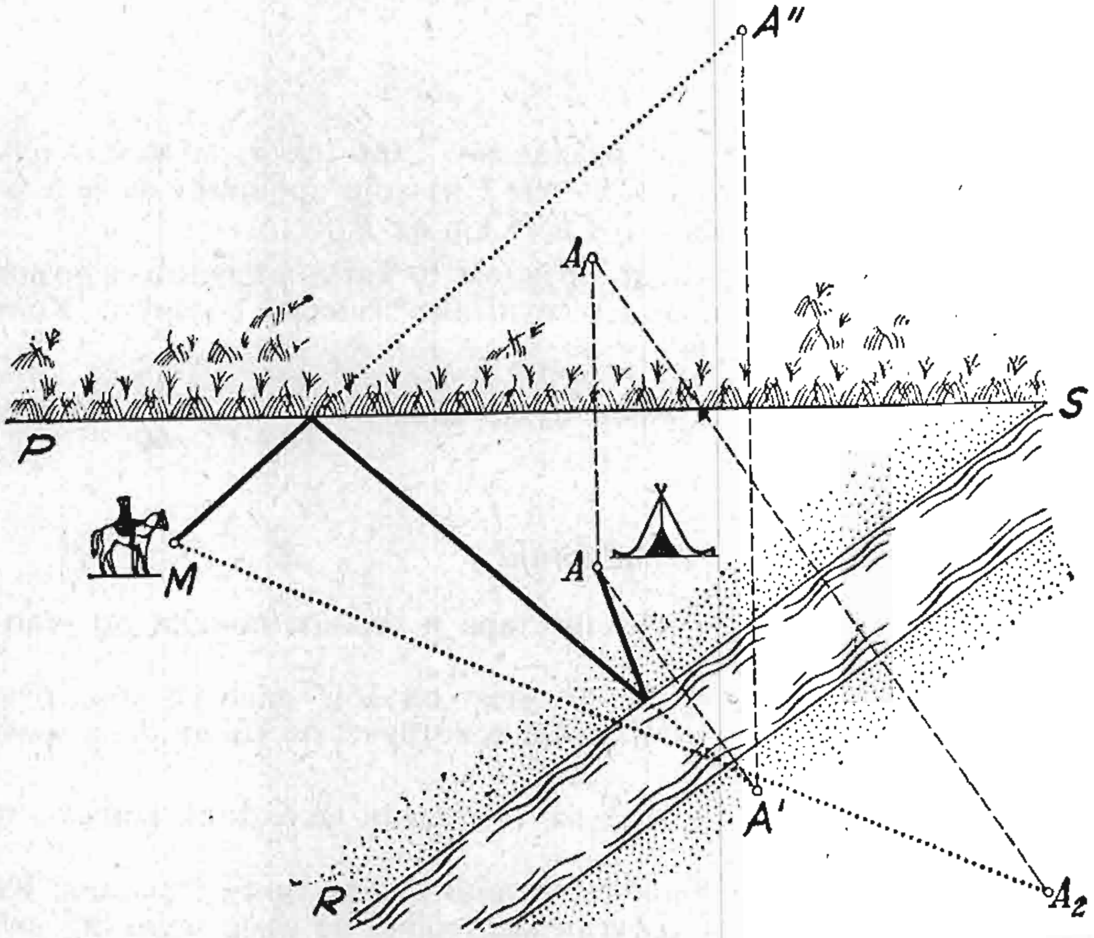
484. На трибинама стадиона, око тркачке стазе, седели су гледаоци, међу њима и гледаоци A и B (цртај!) Одредите она места на стази у којима је тркач на једнаком растојању и од A и од B. Колико има таквих места ?

Упутство. — Где се, независно од стазе, налазе све тачке које су једнако удаљене од тачака A и B? Има ли међу њима и оних које су на стази? Дакле?

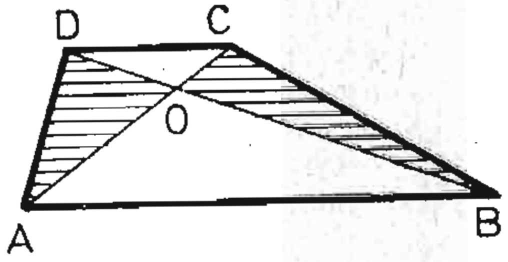
485. *Задатак о најкраћем путу.* — Ловац, пре но што се врати у свој шатор, хоће да напасе (нахрани) коња на оближњем пашњаку и да га напоји на реци (в. слику на следећој страни!). Шта он треба прво да учини и куда да иде како би његов пут био што краћи?

Упутство. — Уколико сте решили конкурсни задатак 73 (решење види на стр. 67), неће вам бити тешко да решите и овај задатак. Овај задатак је унеколико општији, јер се курир о коме је реч у поменутом конкурсном задатку поново вратио у полазну тачку, док је овде ситуација нешто сложенија: ловац полази из тачке M и треба да стигне у тачку A свративши узгред до пашњака SP и реке SR (в. слику!).

Тачки A симетрична у односу на обалу SR реке је тачка A', а овој последњој симетрична у односу на ивицу SP пашњака јесте тачка A' . Ако би се, пак, симетричне тачке (попут ликова у огледалу) одређивале обрнутим редоследом, добили бисмо тачке A_1 и A_2. Дебља цикцак линија представљаће најкраћи пут ловца на релацији: тачка M—пашњак—река—шатор A; дужина те линије једнака је растојању MA'' тачке A'' од ловца. Ако би ловац хтео најпре да напоји коња, онда би његов пут био једнак у најмању руку његовом растојању од тачке A_2, а ово растојање MA_2 веће је од MA''.



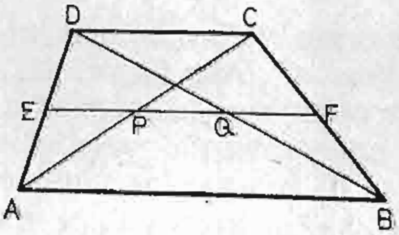
Ловац није цртао никакав план; он је напросто нанишанио својом пушком у тачку S и, видевши да се та тачка налази улево од шатора A, појурио је налево, тј. према пашњаку. (Зашто?).



486. Трапез је дијагоналама подељен на четири дела. Доказати да су делови уз краке трапеза једнаки по површини.

Доказ. — Нека је $ABCD$ какав било трапез при чему су AB и DC његове основице, а O — пресек дијагонала AC и DB трапеза (в. слику!).

Тада је $\triangle ABD$ једнак (по површини) $\triangle ABC$ (јер имј е основица заједничка, а висине су им једнаке). Међутим, $\triangle ABD$ састављен је од $\triangle AOD$ и $\triangle ABO$, а $\triangle ABC$ је састављен од $\triangle BOC$ и такође $\triangle ABO$. Према томе, ако од једнаких троуглова ABD и ABC одузмемо њихов заједнички део ($\triangle ABO$), преостаће делови који су међусобно једнаки (на сл. су ти делови осенчени), тј. $\triangle AOD$ по површини је једнак $\triangle BCO$.

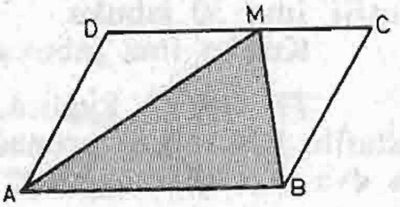


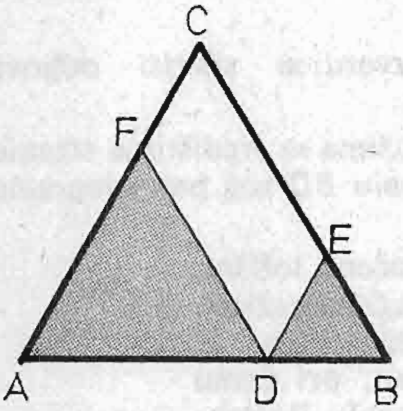
487. У трапезу $ABCD$ чије су паралелне странице $AB = 12$ cm и $DC = 6$ cm дијагонале секу средњу линију EF у тачкама P и Q. Колика је дужина дужи PQ?

Решење. — Дуж EF је средња линија трапеза те је $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$; дужи EP и QF су средње линије троуглова CDA и CDB, те је $EP = QF = \frac{1}{2} CD$. Тада ће

бити $PQ = EF-(EP+QF) = \frac{1}{2}(AB+CD)-2\cdot\frac{1}{2}\,CD = \frac{1}{2}(AB+CD-2\,CD) =$
$= \frac{1}{2}(AB-CD) = \frac{1}{2}\cdot 6\text{ cm} = 3\text{ cm}.$

488. Ако површина паралелограма на овој слици износи S, колика је онда површина осенченог троугла ABM (M је произвољна тачка на правој DC)? $[S/2]$





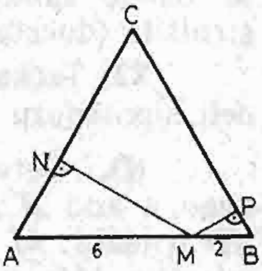
489. Кроз тачку D, која дели страницу AB једнакостраног троугла ABC у односу 2 : 1, повучено је $FD \parallel BC$ и $DE \parallel AC$ (в. слику лево!).

а) Како се односе дужине обима, а како површине осенчених троуглова? [2 : 1; 4 : 1].

b) Ако страница троугла ABC износи 3 cm, колика је онда површина четвороугла $FDEC$?

490. Из тачке M која дели страницу AB једнакостраничног троугла ABC на делове од 6 cm и 2 cm повучене су нормале (окомице) на друге две странице. Колико је удаљена тачка C од ових нормала?

Упутство. — Нека су N и P подножја нормала повучених на AC и BC. Троугао AMN је половина једнакостраничног троугла (јер су му углови 90°, 60° и 30°), па је $AN = AM/2 = 3$ cm. Тада $NC = AB - AN = 8\text{ cm} - 3\text{ cm} = 7\text{ cm}$. Дужину PC одредите сами!



491. У ромбу $ABCD$ са углом од 60° код темена A повући дијагонале и из њихове просечне тачке S описати кружницу k која пролази кроз B и D.

1) Доказати да кружница k дели сваку страницу ромба на по два једнака одсечка.

2) Израчунати површину оног дела круга који се налази ван датог ромба.

492. Утврђено је да од свих затворених линија у некој равни, које имају исту дужину (обим), кружница ограничава највећу површ.

Покажи да површина површи коју ограничава нека равна крива линија дужине L, не може бити већа од $\frac{L^2}{4\pi}$.

Решење. — Површина ограничена затвореном кривом линијом дужине L није већа од површине круга којег ограничава кружница дужине једнаке L. Из тог обима лако се може одредити полупречник кружнице: $R = \frac{L}{2\pi}$, а помоћу њега онда и површина круга. Она ће износити:

$$P_{\text{круга}} = R^2\,\pi = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\pi = \frac{L^2}{4\pi}.$$

Konkursni zadaci*

76. U pet kutija nalazi se ukupno 100 jabuka. U prvoj i drugoj kutiji ima 52 jabuke, u drugoj i trećoj 43, u trećoj i četvrtoj 34, a u četvrtoj i petoj kutiji ima 30 jabuka.

Koliko ima jabuka u svakoj od tih kutija?

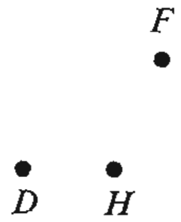
77. Od 77 kuglica, na izgled sasvim jednakih, jedna je nešto lakša od ostalih. Kako ćete pronaći tu kuglicu vršeći samo četiri merenja na terazijama sa dva tasa (bez tegova)? Postupak objasnite!

78. Odrediti x iz $100:\{[(7x+24):]\cdot 4+36\}=1$.

79. U jednakosti $(3\cdot **4)^2=492*04$ umesto zvezdica staviti odgovarajuće cifre. Dati obrazloženje.

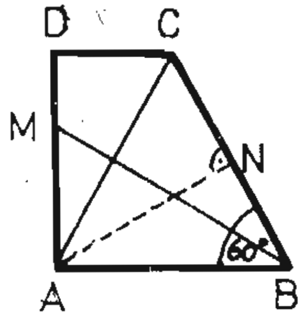
80. U paralelogramu $ABCD$ teme A spojeno je dužima sa središtima stranica BC i CD. U kojem odnosu povučene duži dele dijagonalu BD tog paralelograma? Obrazloži!

81. U trouglu ABC iz temena A bile su povučene težišna linija AD i visina AH, a iz temena B bila je povučena težišna linija BF na suprotnu stranu (D i F — podnožja tež. linija, H — podnožje visine). Zatim je trougao bio izbrisan, pri čemu su ostale samo tri tačke: D, F i H. (vidi sliku desno!) Rekonstruišite (docrtajte) trougao ABC!



82. Tačka u kojoj kružnica upisana u pravougli trougao dodiruje hipotenuzu deli hipotenuzu na delove od 4 cm i 7 cm. Odrediti površinu tog trougla.

83. Četvorougao $ABCD$ ima kod temena A prav ugao, a kod B ugao od 60°. Simetrala ugla B seče stranicu AD u tački M tako da je odsečak AM dva puta veći od odsečka MD, a normala spuštena iz temena A na stranicu BC deli ovu stranicu na dva jednaka odsečka. Izračunati stranice i površinu četvorougla $ABCD$ ako je njegov obim $O=5+\sqrt{3}$.



Napomena. — Učenici V razreda mogu rešavati zadatke 76—79, učenici VI i VII razreda — zadatke 75—81, a učenici VIII razreda sve zadatke: 76—83.

---

* Rešite ove zadatke i rešenja pošaljite uredništvu „Matematičkog lista“. Najbolja rešenja, a takođe i imena svih učenika koji su sve zadatke ili neke od njih sasvim tačno rešili, objaviće se u listu.

Najboljim rešavateljima za svaki razred dodeliće se *nagrade* na kraju školske godine.

Fond za nagrade rešavateljima konkursnih zadataka ove godine je povećan.

Svako rešenje (s tekstom i rednim brojem zadatka) treba pisati na jednoj strani papira. Svako rešenje treba čitljivo potpisati punim imenom i prezimenom, navodeći razred i odeljenje, školu i mesto, na primer: *Mirjana Rakić*, uč. VI_1 raz. Osnovne škole „Filip Filipović“, Čačak.

Zadatke rešavajte samostalno ne tražeći pomoći ni od koga. Slike crtajte precizno, a rešenja pišite obrazloženo i čitko. Neuredna, nečitljiva rešenja i rešenja (rezultati, odgovori) bez obrazloženja neće se uopšte uzimati u obzir.

Rešenja zadataka iz ovog broja poslati najkasnije do 10. I 1970. godine.

Adresa: Matematički list, Beograd, p.p. 728

Na koverti naznačiti: *Konkursni zadaci.*

Molimo rešavatelje da se u svemu pridržavaju ovog uputstva. Rešenja šaljite običnom poštom (a ne preporučeno) kako se ne biste izlagali nepotrebnim troškovima!

Rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista“ III.4—5.

69. *Dešifrovati oduzimanje:* $\overline{money}-\overline{more}=\overline{send}$.

Ovde slova označavaju nepoznate cifre. Treba pronaći te cifre. Obrazloži!

Iz $\overline{money}-\overline{more}=\overline{send}$ imamo $\overline{send}+\overline{more}=\overline{money}$ ili, još preglednije:

$$\begin{array}{rccccc} & & s & e & n & d \\ + & & m & o & r & e \\ \hline & m & o & n & e & y \end{array}$$

1) Vidimo odmah da je $m=\mathbf{1}$, a da mora biti $s+m\leqslant\overline{mo}$ (znak $\leqslant$ čitaj: manje ili jednako), tj. $s+1$ je dvocifren broj, a to može biti samo ako je $s=9$ ili $s=8$ (u tom slučaju je $e+o\geqslant 10$) Međutim, dvocifreni broj $\overline{mo}$ je manji od 12 i različit od 11; znači, da je to broj 10, pa je $o=\mathbf{0}$.

2) Ako bi bilo $z=8$, onda bismo imali da je $e+o\geqslant 10$. U tom slučaju, čak i kad bi bilo $e=9$ (i uzimajući da je $n+r\geqslant 10$), najveća vrednost zbira $e+o+1$, tj. $9+0+1$ jddnaka je 10, tj. izlazi da bi tada moralo biti $n=0=o$, a to je nemoguće. Znači, mora biti $s=\mathbf{9}$ i $e+o<10$; ali tada je $n+r\geqslant 10$ (jer bi u protivnom bilo $e=n$, protivno pretpostavci da razna slova znače različite cifre) i $e+1=n$.

3) Mora biti $n+r=10+e$ ili $n+r+1=10+e$ (ova druga mogućnost važi u slučaju da je $d+e\geqslant 10$). Ako bi bilo $n+r=10$, onda bismo — s obzirom da je $n=e+1$ — imali $e+1+r=10+e$, što znači da bi bilo $r=9$, a to nije moguće (jer smo već utvrditi da je $s=9$). Ostaje, dakle, da mora biti $n+r+1=$ $=10+e$ (to je ona druga mogućnost), tj. $(e+1)+r+1=10+e$, a odatle je $r=\mathbf{8}$ pri čemu je $d+e\geqslant 10$.

Prema tome, do sada imamo:

$$\begin{array}{rccccc} & & 9 & e & n & d \\ + & & 1 & 0 & 8 & e \\ \hline & 1 & 0 & n & e & y \end{array}$$

4) Dalje, mora do bude: $e\neq 9$, $e\neq 8$, $e\neq 7$ (jer za $e=7$ izlazi da je $n=8$), $e\neq 6$ (Ako bi bilo $e=6$, onda bi moralo biti $n=7$, pa bi najveća vrednost za d bila 5, tj $d=5$; tada $d+e=11$, a to bi značilo da je $y=1$, što je nemoguće da bude, jer je $m=1$; za $d=4$ imali bismo $d+e=10$, tj. $y=0=o$, što je takođe nemoguće da bude; ako bi pak bilo $d<4$, onda $d+e<10$, a to nije moguće s obzirom na zaključak u prethodnoj tački 3); $e\neq 2$ (jer najveća vrednost za d je $d=7$ i za $e=2$ bilo bi $d+e<10$, a to nemoguće); $e\neq 3$ (jer za $e=3$ najveći dvocifreni zbir $d+e$ je $d+e=10$ i značio bi da je $y=0$, što je nemoguće, jer smo utvrdili da je $o=0$); $e\neq 4$ (naime, za $e=4$ dvocifreni zbir $d+e$ imao bi vrednost 11, tj. $d+e=11$, što bi značilo da je $y=1=m$, a to biti ne može). Ostaje, prema tome, samo $e=\mathbf{5}$ i tada je $n=6$.

5. Imajući to u vidu, kao i već utvrđenu činjenicu da je $d+e>10$, imaćemo da je $d+5>10$, tj. $d>5$. Jedina „slobodna“ cifra, koja zadovoljava taj uslov jeste 7, tj. $d=\mathbf{7}$. Sada je $d+e=7+5=12$, što znači da je $y=2$.

Dakle, utvrdili smo da je: $m=1$, $o=0$, $s=9$, $r=8$, $e=5$, $n=6$, $y=2$, $d=7$, pa ćemo umesto $\overline{money}-\overline{more}=\overline{send}$, imati:

$$\mathbf{10652-1085=9567.}$$

Vladimir Liščević, VII_5 r. OŠ „Ž. J. Španac“, N. Beograd

70. *Sa koliko nula se završava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do 100 zaključno?*

Broj nula u dobijenom broju jednak je broju njegovih činilaca (faktora) deljivih sa 10. Ali kako je $10=2\cdot 5$, to je broj nula jednak broju činilaca deljivih sa 5 (jer njih ima manje nego činilaca deljivih sa 2). Odmah je jasno da činilaca deljivih sa 5 ima 20 (u svakoj desetici po dva) i oni daju 20 nula, a osim toga, treba uzeti u obzir još i 4 nule koje daju činioci deljivi sa 25 (a to su činioci 25, 50, 75 i 100).

Prema tome, proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do 100 zaključno završava se sa 24 nule.

Đula Barši, VI$_b$ r. OŠ „S. Gložanski“, Bečej

71. *Saobraćajući između mesta A i B, autobus prelazi preko jednog brda. Na uzbrdicama (kada ide uz brdo) brzina autobusa je 25 km na čas a na nizbrdicama (kada ide niz brdo) brzina mu je 5o km na čas. Na putu od A do B autobus provede 3,5 časa, a na putu od B do A provede 4 časa. Koliko je dug put između mesta A i B?*

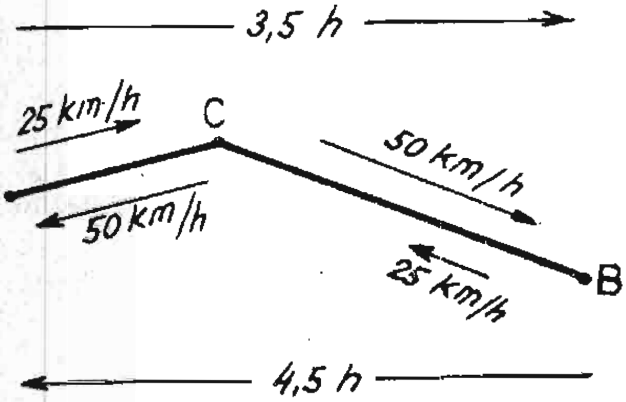
Zadatak se može rešiti na više načina. O tome vidi članak na str. 10. Ovde navodimo jedan način.

Neka je C najviša tačka na putu od A do B. Ako sa x označimo dužinu puta AC, a sa y dužinu puta BC, onda ćemo za put od A do B imati

$$\frac{x}{25}+\frac{y}{50}=3,5, \qquad (1)$$

a za put od B do A biće

$$\frac{y}{25}+\frac{x}{50}=4. \qquad (2)$$



Posle uprošćavanja prethodnih jednačina (množenjem svake sa 5o), imaćemo jednačine: $2x+y=350$ i $x+2y=200$. Kad se reši sistem kojeg čine ove dve jednačine, dobiće se $x=50$ i $y=75$.

Prema tome, put od A do B iznosiće

$$ACB=x+y=50\text{ km}+75\text{ km}=125\text{ km}.$$

Mirjana Bošković, VIII$_3$ r. OŠ „M.T.“, Medveđa k/T.

72. *Zbir recipročnih vrednosti triju celih pozitivnih brojeva je 1. Nađite sve takve brojeve.*

Prvi očigledan odgovor je $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. Odatle se zaključuje da u svim ostalim slučajevima jedan od sabiraka (razlomaka) mora biti veći od $\frac{1}{3}$, i prema tome, jednak $\frac{1}{2}$. Ali tada drugi sabirak (razlomak) mora biti manji od $\frac{1}{2}$. Ako je on jednak $\frac{1}{2}$, imali bismo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Ako je, pak, on jednak $\frac{1}{4}$, onda bismo imali $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.

Očigledno, drugih slučajeva nema, jer drugi razlomak (drugi po veličini) ne može biti manji od $\frac{1}{4}$. Prema tome, imamo samo tri mogućnosti:

1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$; traženi brojevi su: 3, 3, 3.

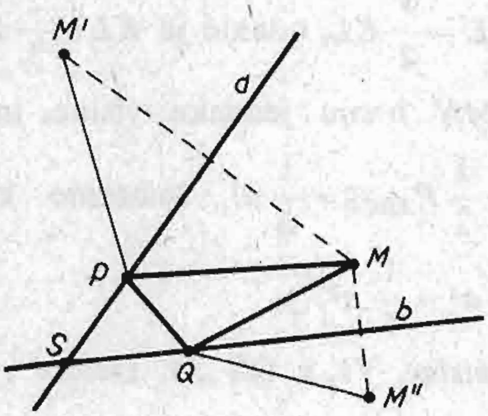
2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$; traženi brojevi su: 2, 3, 6.

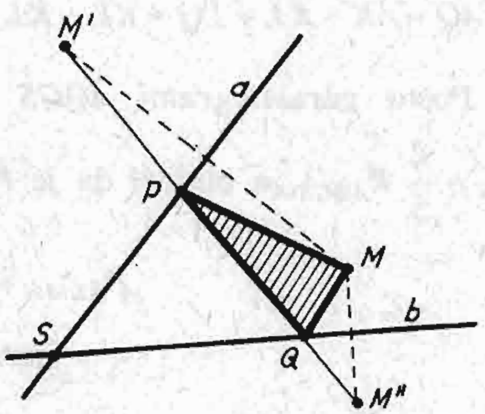
3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$; traženi brojevi su: 2, 4, 4.

Rade Plećaš, VIII r. OŠ Mikleuš

73. *Put a preseca reku b pod oštrim uglom. Kurir iz mesta M, koje je u tom uglu, treba što je moguće pre da dođe do puta a (da bi predao pismo), da usput napoji konja na reci b i zatim da se vrati u M. Kuda on treba da ide da bi utrošio što manje vremena? Nacrtajte taj put i pokažite da je on najkraći! (V. sl. dole levo!)*

Označimo sa P mesto (tačku) na putu a gde kurir treba da preda pismo, a sa Q mesto (tačku) na reci b gde će napojiti konja. Znači, kurirov put će biti $MPQM$. Tačke P i Q odredićemo tako da obim trougla MPQ bude najmanji.





Posmatrajmo tačke M' i M'' simetrične s tačkom M u odnosu na prave a i b. Tada je $MP=PM'$ i $MQ=QM''$, pa će obim trougla MPQ biti jednak $MP+PQ+MQ=M'P+QP+QM''$, tj. predstavljaće ustvari dužinu izlomljene linije $M'PQM''$. Očigledno je da će ta veličina imati najmanju vrednost kada se tačke M', P, Q i M'' budu nalazile na jednoj pravoj, tj. kada se tačke P i Q nalaze na pravoj $M'M''$ (sl. gore desno).

Prema tome, da bi se odredile tražene tačke P i Q treba učiniti sledeće: 1) najpre odrediti (konstruisati) tačke M' i M'' koje su simetrične datoj tački M u odnosu na krake a i b datog ugla; 2) povući pravu $M'M'$; i najzad 3) odrediti tačke P i Q u kojima prava $M'M''$ seče krake a i b datog ugla.

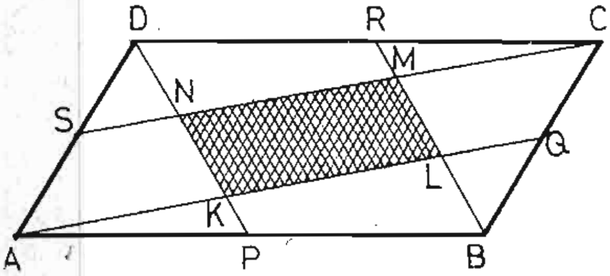
Trougao MPQ je tada traženi trougao.

Analizirajući kako da odredimo tačke P i Q, već smo pokazali da će kurirov put biti najkraći ako bude išao stranicama trougla MPQ.

Siniša Vrećica, VIII r. OŠ Generalski Stol

74. *U paralegramu ABCD tačke P, Q, R, S su središta stranica AB, BC, CD, DA. Prave AQ, BR, CS, DP seku se i obrazuju četvorougao. Dokazati da je ovaj četvorugao paralelogram. Naći površinu tog paralelograma znajući da je površina datog paralelograma* a^2.

a) Pošto je $AS=CQ$ i $AS \parallel CQ$ to je $AQCS$ paralelogram. To takođe sledi i iz podudarnosti trouglova ABQ i CDS (zašto?). Dakle je i $AQ \parallel SC$. Na isti način se dokazuje da je i $DPBR$ paralelogram, tj. da je $PD \parallel BR$.



Prema tome, pošto je $AQ \parallel SC$ i $PD \parallel AR$, četvorougao $KLMN$ je paralelogam (v. sliku!).

b) Pošto je PK srednja linija trougla ABL (jer $AP=PB$ i $PK \parallel BL$), a LQ srednja linija trougla BCM (jer je $BQ=QC$ i $LQ \parallel CM$), to je

$$AK=KL \text{ i } LQ=\frac{1}{2}CM.$$

Iz istog razloga je i $CM=MN$, te ćemo imati da je:

$$AK=KL=MN=CM=2\,LQ, \text{ pa je}$$

$$AQ=AK+KL+LQ=KL+KL+\frac{1}{2}KL=\frac{5}{2}KL, \text{ odakle je } KL=\frac{2}{5}AQ.$$

Pošto paralelogrami $AQCS$ i $KLMN$ imaju jednake visine, imaćemo:

$P_{KLMN}=\frac{2}{5}P_{AQCS}$, a budući da je $P_{AQCS}=\frac{1}{2}P_{ABCD}=\frac{1}{2}a^2$, imaćemo konačno:

$$P_{KLMN}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{5}a^2.$$

Zoran Branislav, VI_2 r. OŠ „G. Delčev“, Zemun

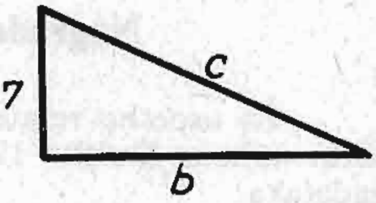
75. *U pravouglom trouglu jedna kateta je 7 cm. Odrediti druge dve stranice ako je poznato da su njihove dužine izražene prirodnim brojevima.*

Neka su dužine drugih dveju stranica c (hipotenuza) i b (kateta). Tada je $c^2-b^2=49$, odnosno

$$(c-b)\cdot(c+b)=49 \qquad (*)$$

Pošto su, prema uslovu zadatka, c i b prirodni brojevi, to su onda $c-b$ i $c+b$ takođe prirodni brojevi. Desna strana jednakosti (*) može se samo na dva načina napisati kao proizvod dva prirodna broja i to: $49\cdot 1$ ili $7\cdot 7$. S obzirom da su $c-b$ i $c+b$ dva različita prirodna broja, to će jednakost (*) biti moguća samo u slučaju da je istovremeno:

$$\left.\begin{array}{l} c-b=1 \\ c+b=49 \end{array}\right\}$$



Odatle lako dobijamo: $c=25$ i $b=24$.

Prema tome, jedino moguće rešenje je:
$c=25$ cm (hipotenuza), $b=24$ cm (druga kateta).

Kontrola. — Prema Pitagorinoj teoremi treba da bude: $a^2+b^2=c^2$. Zaista je $7^2+24^2=49+576=625=25^2$.

Dragan Andrejević, VIII_1 r. OŠ „V. Karadžić“. Negotin

Rešili konkursne zadatke iz „Matematičkog lista“ III. 4—5

Ahlin Marina, VII_1 r. OŠ »Ž. J. Španac« N. Beograd: 70; *Andrejević Dragan*, VIII_1 r. OŠ »V. Karadžić« Negotin: 69, **71**, 72, **74**, 75; *Antić Lalica*, VII_3 r. OŠ »D. Stambolić« Svrljig: 69; *Arsenović. Milan*, VIII r. OŠ Vrelo kod Uba: 75.

Barši Đula, VI_2 r. OŠ »Z. Gložanski« Bečej: 70; *Blendić Dragan*, VI_2 r. OŠ »V. Karadžić« Negotin: 69; *Bogunović Sofija*, VII r. OŠ »M. Tomić« Dobrinci: 71; *Bošković Mirjana*, VII_3 r. OŠ »M. Gorki« Titograd: **71**; *Bošković Mirjana*, VIII_3 r. OŠ »M. Tito« Medveđa kod Trstenika: 69, 71, 72, **74**, 75; *Božinović Radmilo*, VI_1 r. OŠ »Braća Ribar« Beograd: 69; *Branislav Zoran*, VI_2 r. OŠ »Goce Delčev« Zemun: **69, 71**, 73, **74**.

Carević Stanimir, V_2 r. OŠ »7. oktober« Čačak: 70; *Ćirković Radovan*, VIII_2 r. OŠ »M. Blagojević« Natalinci: 69, 71; *Đelić Jovica*, VIII_1 r. OŠ »B. Stanković« Vučje: 69, 74; *Džigal Mustafa*, VIII_5 r. OŠ »S. Marković« Sienica: 69, **70, 71**, 72, 74, **75**.

Grebović Dragoje, VIII_5 r. OŠ »S. Marković« Sjenica: 69, 70, **71**, 72, 74, **75**; *Ilić Mikica*, VII_1 r. OŠ »V. Milićević« Grocka: 69, 75; *Ivanović Slobodan*, VII_2 r. OŠ »V. Milićević« Grocka: 69, **71**; *Jandrijević Franjo*, VIII r. OŠ »Hasan Kikić« Sanski Most: 71, 75; *Jevremović Vesna*, VIII_1 r. OŠ »J. Veselinović« Šabac: 69, 71, 74; *Jokanović Dušan*, VIII_2 r. OŠ »Sveti Sava« Beograd: 69, 71, 72, **75**; *Jovanović Gordana*, VI_1 r. OŠ »S. Veljković—Zele« Bojnik k/L: 74; *Jovanović Miroslav*, VII_1 r. OŠ »Sveti Sava« Beograd: 69, 70, 71; *Jovanović Vesna*, VIII_2 r. OŠ »Braća Ribar« Beograd: 69, 71.

Knežević Vladimir, OŠ »V. Milićević« Grocka: 73; *Kostadinović Dragan*, VI_3 r. OŠ »V. Karadžić« Negotin: 69; *Krantić Olivera*, V_1 r. OŠ »M. J. Cerovac« Vrčin kod Beograda: 69, 71; *Krstić Cvetko*, VI_2 r. OŠ »S. V. Zele« Bojnik k/L: **69, 70**; *Lazović Pero*, V_3 r. OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik: 69; *Liščević Vladimir*, VII_5 r. OŠ »Ž. Jovanović—Španac« Novi Beograd: **69, 70, 74**, 75.

Magajna Zlatan, VIII_1 r. OŠ »P. Tomažič« Koper :69, 70, 71, 75; *Manojlović Dobrila*, VIII r. OŠ »M. Tomić« Dobrinci: 71; *Marinović Budimir*, VIII_3 r. OŠ »V. Milićević« Grocka: 69, **71**, 72 **75**; *Marinković Ljiljana*, VI_1 r. OŠ »M. J. Cerovac« Vrčin: 69; *Milanović Zorica*, V_2 r. OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik: 70, 71; *Milašinović Nađa*, V_2 r. OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik: 69, 70, **71**; *Milenkov Boris*, VIII_5 r. OŠ »Njegoš« Niš: 71; *Miletić Toplica*, VI_3 r. OŠ »V. Dugošević« Požarevac: 69, 71; *Milojević Mirjana*, V r. OŠ »D. Jerković« Ruma: 69; *Mihajlović Živica*, VIII r. OŠ »22. decembar« Katun kod Aleksinca: **69**, 70, 71, 72, 75; *Momčilović Dragan*, VI_3 r. OŠ »V. Dugošević« Požarevac: 69, 71; *Nicković Periša*, VII_2 r. OŠ »7. oktobar« Čačak: 74; *Nikić Milorad*, VIII_1 r. OŠ »Ž. Zrenjanin« Boka (Banat): 71, 75; *Nikolić Predrag*, VIII r. OŠ »Njegoš« Niš: **71, 74, 75**; *Nikolić Zoran*, V_1 r. OŠ »V. Milićević« Grocka: 70; *Odri Peter*, VII_2 r. OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Svetozar Miletić: 69; *Ostojić Nedeljko*, VII r. OŠ »I. G. Kovačić« Osijek: 69.

Pagon Dušan, VIII_b r. OŠ »F. Močnik« Cerkno (Slovenija): **69, 70, 71**, 74, 75; *Paunić Pavle*, V_1 r. OŠ »V. M.« Grocka: 70; *Plećaš Rade*, VIII r. OŠ Mikleuš (SRH): 69, 71, **72**, 74 75; *Poljak Josip*, VIII_b r. OŠ »L. T. Baja« Podravska Slatina: 69, 71; *Protić Vesna*, V_1 r. OŠ »V. Milićević« Grocka: 69; *Puhmajer Zoran*, VIII_3 r. OŠ »S. Jovanović« Šabac: 69, 71, 72, 75; *Rajc Jože*, VII_b r. OŠ »F. Močnik« Cerkno (Slovenija): 69.

Salatić Nada, V_a r. OŠ »A. Šantić« Sečanj: 69; *Sibinovski Zoran*, VIII_2 r. OŠ »J. Cvijić« Beograd: 71; *Spasojević Milutin*, VII_2 r. OŠ »7. oktobar« Čačak: 75; *Stanaćev Predrag*, VI_2 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd: 72; *Šain Marino*, VIII_d r. OŠ »Neven Kirac« Pula: **69, 70**, 71, 74, 75; *Šipetić Dragan*, VI_3 r. OŠ »7. oktobar« Čačak: 69; *Tišler Žaromil*, VIII_a r. OŠ »V. Nazor« Zagreb: 74; *Todorović Dragan*, VIII_1 r. OŠ »Ž. J. Španac« N. Beograd: **71**; *Tomić Draga*, VIII_1 r. OŠ »S. Jovanović« Šabac: **71, 72**; *Vrećica Siniša*, VIII r. OŠ Generalski Stol: **69, 70, 71, 72, 74, 74, 75**; *Vujičić Božidar*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka: 75; *Zdravković Stevan*, VI_2 r. OŠ »S. Veljković—Zele« Bijnik k/L: **71**.

Napomena. — Redni brojevi zadataka čija su rešenja kod pojedinih učenika naročito uspela štampani su masno. Neki učenici nisu svoje radove potpisali te njihova imena nismo mogli objaviti (mada su im rešenja tačna). Komisija za pregled konkursnih zadataka nije priznavala neobrazložene odgovore i rezultate. Bilo je i pogrešnih rešenja, naročito u zadacima 71, 73, 74. Najmanje tačnih rešenja bilo je u zadatku 73.

Nagrade rešavateljima konkursnih zadataka

Za uspešno rešavanje konkursnih zadataka objavljivanih u »Matematičkom listu« tokom školske 1968/69. godine nagrađeni su sledeći čitaoci — rešavatelji zadataka:

1. *Liščević Vladimir*, VII$_5$ r. OŠ »Ž. J. Španac«, N. Beograd	Din.	250
2. *Vrećica Siniša*, VIII r. OŠ Generalski Stol (SRH)	,,	250
3. *Pagon Dušan*, VIII$_b$ r. OŠ »F. Močnik«, Cerkno (Slovenija)	,,	250
4. *Plećaš Rade*, VIII r. OŠ Mikleuš (SRH)	,,	250
5. *Ivanović Slobodan*, VII$_2$ r. OŠ »V. Milićević«, Grocka	,,	200
6. *Bošković Mirjana*, VIII$_3$ r. OŠ »M. Tito«, Medveđa kod Trstenika	,,	200
7. *Grebović Dragoje*, VIII$_5$ r. OŠ »Svetozar Marković«, Sjenica	,,	200
8. *Džigal Mustafa*, VIII$_5$ r. OŠ »Svet. Marković«, Sjenica	,,	200
9. *Jokanović Dušan*, VIII$_2$ r. OŠ »Sveti Sava«, Beograd	,,	200
10. *Nikolić Predrag*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš«, Niš	,,	200
11. *Jovanović Miroslav*, VII$_1$ r. OŠ »Sveti Sava«, Beograd	,,	150
12. *Jevremović Vesna*, VIII$_1$ r. OŠ »Janko Veselinović«, Šabac	,,	150
13. *Marinović Budimir*, VIII$_3$ r. OŠ »V. Milićević«, Grocka	,,	150
14. *Manojlović Dobrila*, VIII r. OŠ »M. Tomić«, Dobrinci	,,	150
15. *Milanović Zorica*, V$_2$ r. OŠ »Živadin Apostolović«, Trstenik	,,	100
16. *Paunić Pavle*, V$_1$ r. OŠ »Vučko Milićević«, Grocka	,,	100
17. *Branislav Zoran*, VI$_2$ r. OŠ »Goce Delčev«, Zemun	,,	100
18. *Ilić Mikica*, VII r. OŠ »Vučko Milićević«, Grocka	,,	100
19. *Mozetić Siniša*, VII$_4$ r. OŠ »Nata Jeličić«, Šabac	,,	100
20. *Džigal Osman*, VIII$_5$ r. OŠ »Svet. Marković«, Sjenica	,,	100
21. *Šain Marino*, VIII r. OŠ »Neven Kirac«, Pula	,,	100
22. *Davor Novak*, VIII$_a$ r. OŠ »Bratstvo—Jedinstvo«, Križevci	,,	100
23. *Milić Biljana*, VIII$_3$ r. OŠ »Maršal Tito«, Medveđa k/T.	,,	100
24. *Milojević Mirjana*, V r. OŠ »Dušan Jerković«, Ruma	,,	50
25. *Milašinović Nađa*, V$_2$ r. OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik	,,	50
26. *Protić Vesna*, V$_1$ r. OŠ »Vučko Milićević«, Grocka	,,	50
27. *Momčilović Dragana*, VI$_3$ r. OŠ »Veljko Dugošević«, Požarevac	,,	50
28. *Rajc Jože*, VII$_b$ r. OŠ »F. Močnik«, Cerkno (Slovenija)	,,	50
29. *Štucin Jožek*, VII$_b$ r. OŠ »F. Močnik«, Cerkno (Slovenija)	,,	50
30. *Vujičić Božidar*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka	,,	50
31. *Ćirković Radovan*, VIII$_2$ r. OŠ »M. Blagojević«, Natalinci	,,	50
32. *Puhmajer Zoran*, VIII$_3$ r. OŠ »Sele Jovanović«, Šabac	,,	50
33. *Magajna Zlatan*, VIII$_a$ r. OŠ »Pinka Tomažiča«, Koper	,,	50

Nagrade su poslate poštom.

Napomena. — U obzir za nagrade uzeti su učenici koji su rešavali zadatke iz *svih* brojeva »Matematičkog lista« (III. 1—5), a pri određivanju visine nagrada Komisija je imala u vidu broj rešenih zadataka i kvalitet rešenja.

Za uspešno rešavanje konkursnih zadataka »Matematički list« će i u ovoj školskoj godini dodeliti nagrade (za svaki razred).

☆ ☆ ☆

TEST-ZADACI IZ MATEMATIKE*

Sami ocenite svoje znanje iz matematike

Evo prilike da sami ocenite svoje znanje iz matematike i da utvrdite da li ste nešto zaboravili od onog što ste učili prošle školske godine (jer su za svaki razred zadaci iz gradiva predhodnog razreda). Ovaj mali »ispit« će vam takođe pomoći da se privikavate i na ovu vrstu ispitivanja znanja. Da bi ocena koju sebi budete dali bila realna, potrebno je da se **strogo pridržavate** sledećih uputa:

1. Pripremite: olovku — običnu ili hemijsku, trougaonik, šestar, list čiste hartije (da ne biste pisali na samom »Mat. listu«) i časovnik.

2. Tekstove zadataka *ne treba da prepisujete*. Pošto zadatak pažljivo pročitate, stavite samo redni broj zadatka i prema onome što se u zadatku traži, *pišite samo rešenje* (*odgovor*) sa potrebnim obrazloženjima.

3. Ako vam je neki zadatak suviše težak, nemojte se zadržavati na njemu, već odmah pređite na sledeći. Ukoliko vam bude preostalo vremena, možete se kasnije vratiti i pokušati da rešite i preskočene zadatke.

4. Vreme za izradu svih zadataka za svaki razred iznosi 35 minuta (računa se od momenta kad započnete sa rešavanjem zadataka). Kada istekne tih 35 minuta *prekinete sa radom* (bez obzira koliko ste uradili) i pristupite proveravanju i ocenjivanju svog rada pomoću »ključa« (rešenja zadataka i uputstva za ocenjivanje) koji se nalazi na str. 75. Molimo vas da u »ključ« ne zagledate dok radite zadatke, jer u protivnom vaša ocena neće biti objektivna.

Pređite sada na izradu zadataka za odgovarajući razred.

V RAZRED

1. Napiši arapskim ciframa (znamenkama) broj: pet stotina deset hiljada trideset dva.

2. Izračunaj: a) $10\,245-6\,349=$;
b) $52\,004\cdot 35=$;
c) $12\,820:4=$.

3. Izračunaj: a) $7\cdot 8\cdot 0\cdot 5=$
b) $8+32:4-2=$

4. a) Koji je broj za 25 manji od miliona?
b) Koji je broj 25 puta manji od miliona?

5. Postavi (napiši) kao brojni izraz i onda izračunaj: od proizvoda (produkta) brojeva 125 i 16 oduzmi zbir brojeva 308 i 191!

6. Sumu od 65 dinara podeli Jovi, Mirku i Omeru tako da Jovo dobije 2/5 te sume, Mirko da dobije 6 dinara manje od Jove, a Omer — ostatak. Koliko je dinara dobio svaki?

7. Zbir dva broja iznosi 135, a njihova razlika (diferencija) je 15. Koji su to brojevi?

---

*) Ovo su ustvari baždareni testovi; provereni su u 40 seoskih, 25 prigradskih i 86 gradskih škola. Zbog ograničenosti prostora u listu, formulacije nekih pitanja su izmenjene, ali smisao nije.

8. Od 40 kilograma brašna dobije se 50 kilograma hleba (kruha). Koliko se kilograma hleba može dobiti od 120 kilograma takvog brašna.?

9. Izvrši preračunavanje: 13 m^2 5 dm^2 = ... cm^2 (dopuni!)

10. Jedan autobus svakog minuta prelazi po 1 km. Koliko će kilometara preći za 2 sata i 15 minuta?

11. Obim (opseg) kvadrata ima dužinu 1 metar. Kolika je površina tog kvadrata?

12. a) Duž $AB = 2$ cm na ovoj slici predstavlja jednu stranicu pravougaonika. Nacrtaj (odnosno konstruiši) taj pravougaonik (pravokutnik) ako znaš da mu je druga stranica dva puta duža od nacrtane stranice.

b) Koliki je obim (opseg) pravougaonika kojeg si nacrtao?

VI RAZRED

1. Napiši arapskim ciframa broj: pet miliona osam stotina dva.

2. Izračunaj $8 + 52 : 4 — 2 =$

3. Koliku pogrešku si učinio ako si umesto 3,817 uzeo 3,82?

4 a) Izračunaj na najjednostavniji način: $25 \cdot 83,7 \cdot 4$;

b) Koji si zakon množenja primenio?

5. a) Za koliko je broj 122 veći od 0,4?

b) Koliko je puta broj 122 veći od broja 0,4?

6. Naznači (kao brojni izraz) i onda izračunaj:

a) Zbir brojeva 0,63 i 0,4 podeli brojem 0,01

b) Od proizvoda (produkta) brojeva 77 i 13 oduzmi njihovu razliku (diferenciju).

7. Preračunaj: a) 13,4 m^3 u dm^3; b) 15 ha 7 a u ha!

8. Voz je krenuo iz Beograda u 12 sati i 38 minuta, a stigao je u Zagreb istog dana u 19 sati i 10 minuta. Koliko dugo je bio na putu?

9. Poluprečnik jedne kružnice ima dužinu 3 cm. Kolika je dužina najveće tetive u toj kružnici?

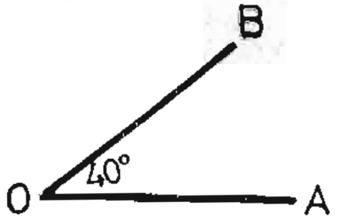
10. Koliko se kroz jednu tačku prostora može postaviti (položiti):

a) horizontalnih ravni,

b) vertikalnih ravni,

c) kosih ravni?

11. Dat je ugao $\measuredangle AOB = 40°$. a) Kroz teme O tog ugla nacrtaj pravu (pravac) MON koja će biti normalna (okomita) na krak OB (vidi sl.). b) Koliki su uglovi (izraženo u stepenima) koje povučena prava čini sa drugim krakom OA datog ugla?



12. Pod sobe ima oblik kvadrata kome je obim (opseg) 12,8 m. Koliko je potrebno pločica od plastične mase oblika kvadrata, čija je stranica 2 dm, da bi se pokrio taj pod?

VII RAZRED

1. Koja cifra (znamenka) treba da stoji umesto zvezdice (*) u broju 57*4 da bi taj broj bio deljiv sa 9?

2. Šta je veće i za koliko: $\frac{5}{9}$ ili $\frac{2}{3}$?

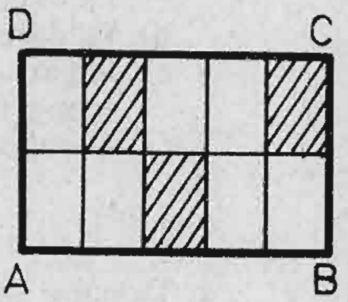
3. Izračunaj: a) $\frac{2}{3}:3=$? ; b) $2\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=$?

4. Izrazi osenčeni deo pravougaonika *ABCD* (v. sl.):

a) razlomkom: ....

b) decimalnim brojem: ....

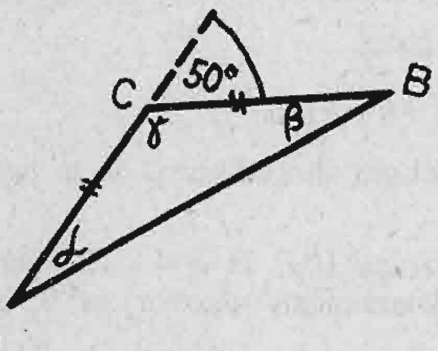
c) u procentima: ....

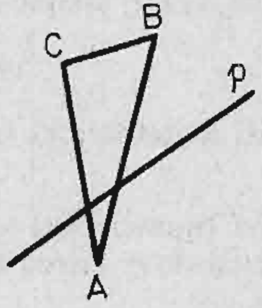


5. Koliko iznosi 25% broja $3\frac{1}{5}$?

6. Posle sniženja za 20% cena jednom odelu sada iznosi 560 dinara. Kolika je bila cena tom odelu pre sniženja cene?

7. Trougao *ABC* na donjoj slici (levo) je jednakokrak (*AC*=*BC*). Spoljašnji ugao kod temena *C* tog trougla je 50°. Koliki su unutrašnji uglovi trougla *ABC*?

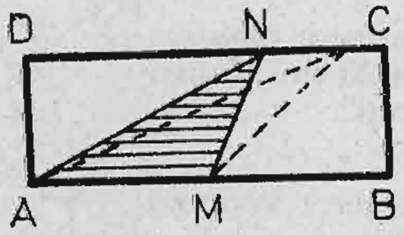


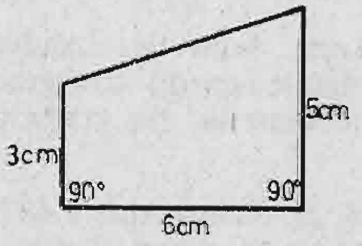


8. Konstruiši figuru koja je simetrična datom trouglu *ABC* na gornjoj slici (desno) u odnosu na pravu *p* (osa simetrije).

9. Obim (opseg) jednakostraničnog trougla (trokuta) kome je stranica jednaka $\frac{2}{3}$ dm iznosi .... (dopuni rečenicu!).

10. Stranice pravougaonika *ABCD* na donjoj slici (levo) imaju dužine 30 mm i 10 mm. Neka je tačka *M* središte stranice *AB*, a *N* — proizvoljna tačka na stranici *CD*. Kolika je površina trougla *ABM* (osenčenog na slici)? Odgovor obrazloži!





11. Izračunati površinu četvorougla *ABCD* na gornjoj slici (desno). Na samoj slici ubeleženi su potrebni podaci.

12. Ovde je navedeno nekoliko matematičkih iskaza (rečenica) od kojih su neki tačni a neki netačni. Napiši odnosno zaokruži samo ona slova pored kojih je napisana tačna rečenica:

a) Svaka prava koja polovi duž je njena simetrala.
b) Kvadrat ima samo dve ose simetrije.
c) Prečnik je najveća tetiva kružnice.
d) Poluprečnik kružnice je duž koja spaja dve tačke kružnice.
e) Jedan ugao (kut) jednakostraničnog trougla jednak je trećini opruženog (ispruženog, ravnog) ugla.
f) U tupougli trougao ne može se upisati kružnica.

VIII RAZRED

1. Dopuni sledeće iskaze (rečenice) tako da budu tačni:

a) Za 8 veći od broja (—5) jeste broj ....
b) Izraz 4 · (—2,5) · 0 · (—1) jednak je ....
c) Količnik broja 0,56 i broja (—8) je..........

2. Napiši izraz koji predstavlja:

a) trostruki proizvod (produkt) brojeva a i b: ....;
b) trećinu zbira (sume) brojeva a i b: ....;
c) zbir (sumu) kubova brojeva a i b: ....

3. Napiši kraće (jednostavnije) izraz:

$$aaaa+aab+b+b+b=$$

4. Napiši matematički (matematičkom simbolikom) da je broj X za 5 manji od broja Y.

5. Brojna (numerička) vrednost izraza $10a^2$ za $a=$ —0,3 jednaka je (napiši odnosno zaokruži slovo pored kojeg se nalazi tačan odgovor): a) 9; b) —9; c) —0,9; d) 0,9; e) —6.

6. Pomnoži: $7x \cdot 4x^2 \cdot x=$

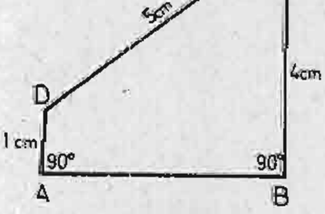
7. Reši jednačinu $\frac{x}{4} - 5 = 3.$

8. U jednoj školi ima ukupno 550 đaka, pri tome muških ima za 70 više nego ženskih. Koliko ima muških, a koliko ženskih?

9. U kružnicu prečnika 7 cm upisan je pravilan šestougao (šesterokut). Za koliko centimetara je obim (opseg) te kružnice veći od obima tog šestougla? Uzmi da je $\pi \approx 22/7$.

10. Na karti koja je izrađena u razmeri (mjerilu) 1:1000000, rastojanje između dva grada iznosi 20 cm. Koliko kilometara su udaljena ta dva grada u stvarnosti?

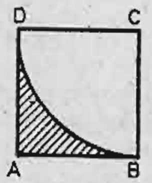
11. Kolika je dužina duži AB na ovoj slici? Potrebni podaci ubeleženi su na samoj slici.



12. Dat je kvadrat *ABCD* stranice $a=2$ cm. Iz temena *C* kao centra opisan je kružni luk $\overset{\frown}{BD}$ (v. sl.). Izračunaj:

a) dužinu luka $\overset{\frown}{BD}$;

b) površinu osenčenog dela kvadrata (vidi sliku!).



»KLJUČ« ZA OCENJIVANJE TEST-ZADATAKA sa str. 71—75.

Idite od zadatka do zadatka i ukoliko se vaše rešenje (rezultat, odgovor) poklapa sa ovde navedenim, onda za dotični zadatak ili pitanje upišite sebi onoliko bodova koliko je ovim »ključem« predviđeno.

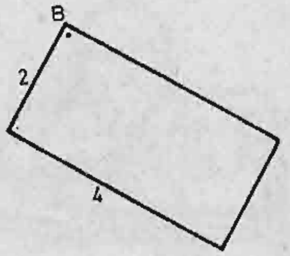
Zatim saberite bodove.

Ako imate:

od **0** do **10** bodova, ocena je **nedovoljan (1)**;
od **11** do **13** bodova, ocena je **dovoljan (2)**;
od **14** do **16** bodova, ocena je **dobar (3)**;
od **17** do **18** bodova, ocena je **vrlo dobar (4)**,
od **19** do **20** bodova, ocena je **odličan (5)**.

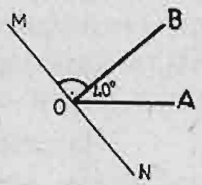
V RAZRED

1. 510 032 (1 *bod*). **2.** a) 3 896 (1 *bod*); b) 1 820 140 (1 *bod*); c) 3 205 (1 *bod*). **3.** a) 0 (1 *bod*); b) 14 (1 *bod*). **4.** a) 999 975 (1 *bod*); b) 40000 (1 *bod*). **5.** $125 \cdot 16 — (308+191) = 2000 — 499 = 1501$ (2 *boda*). **6.** Jova: 26, Mirko: 20, Omer: 18 (1 *bod*). **7.** Ti brojevi su 75 i 60 (2 *boda*). **8.** 150 kg hleba (1 *bod*). **9.** 130 500 cm^2 (1 *bod*). **10.** 135 km (1 *bod*). **11.** 625 cm^2 = = 6 dm^2 25 cm^2 (1 *bod*). **12.** a) Vidi sliku desno! (2 *boda*); b) 12 cm (1 *bod*).



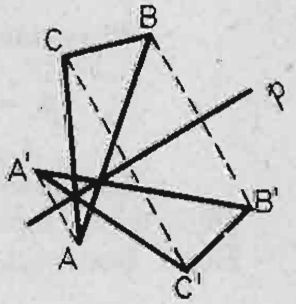
VI RAZRED

1. 5 000 802 (1 *bod*). **2.** Prvo se izvrši deljenje, pa je $8+13—2=19$ (1 *bod*). **3.** Pogreška je 0,003 (1 *bod*). **4.** a) $(25 \cdot 4) \cdot 83{,}7 = 100 \cdot 83{,}7 = 8370$ (1 *bod*); b) Zakon asocijacije za množenje (1 *bod*). **5.** a) Za 121,6 (1 *bod*); b) 305 puta (1 *bod*). **6.** a) $(0{,}63+0{,}4):0{,}01 = 1{,}03:0{,}01 = 103$ (1 *bod*; ako je napisan samo rezultat, onda 0 bodova); b) $77 \cdot 13 — (77 — 13) = 1001 — 64 = 937$ (1 *bod*; ako je napisan samo rezultat, onda 0 bodova). **7.** a) 13 400 dm^3 (1 *bod*); b) 15,07 ha (1 *bod*). **8.** 6 sati i 32 minuta (1 *bod*). **9.** Jednaka je prečniku, tj. 6 cm (1 *bod*). **10.** a) samo jedna (1 *bod*), b) bezbroj (1 *bod*), c) bezbroj (1 *bod*). **11.** a) Vidi sliku desno! (1 *bod*); b) $\sphericalangle AON = 50°$ i $\sphericalangle AOM = 130°$ (1 *bod*). **12.** Potrebno je 256 pločica (2 *boda*).



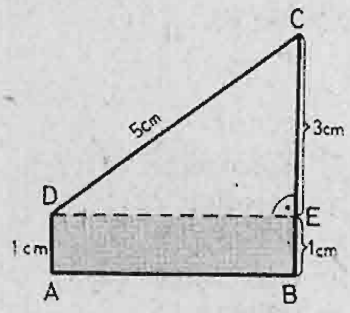
VII RAZRED

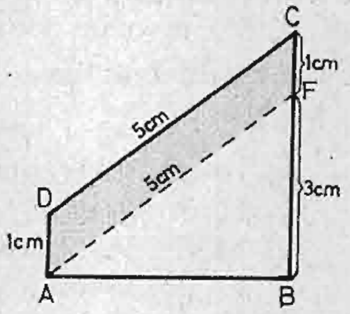
1. To je cifra 2 (1 *bod*). **2.** Veće je 2/3 za 1/9 (1. *bod*) **3.** a) 2/9 (1 *bod*); b) $2\,{}^{1}/_{15}$ (1 *bod*). **4.** a) 3/10 (1 *bod*); b) 0,3 (1 *bod*); c) 30% (1 *bod*). **5.** To je ustvari 0,25 broja 3,2, što iznosi 0,8 (1 *bod*; ispravan je i rezultat 4/5). **6.** Pre sniženja cena je bila 700 dinara (2 *boda*). **7.** $\alpha = \beta = 25°$, $\gamma = 130°$ (1 *bod*). **8.** Vidi sliku desno! (1 *bod*). **9.** Obim iznosi 2 dm (1 *bod*). **10.** Osnovica trougla *ABM* jednaka je polovini duži *AB*, a visina koja joj odgovara jednaka je visini pravougaonika; tada $P = 1/2\ (15 \cdot 10)\ mm^2 = 75\ mm^2$ (2 *boda*; ispravni su takođe i rezultati: 0,75 cm^2 ili 3/4 cm^2; ako odgovor nije obrazložen, onda 1 *bod*). **11.** Tražena površina je 24 cm^2 (2 *boda*). **12.** c) i e) (2 *boda*; ako je zaokruženo samo jedno od ovih slova, *c* ili *e*, onda 1 *bod*; ako je slučajno zaokruženo neko od drugih slova, onda 0 bodova — bez obzira da li su zaokružena i slova *c* ili *e*).



VIII RAZRED

1. a) 3 (1 *bod*); b) 0 (1 *bod*); c) —0,07 (1 *bod*). **2.** a) $3ab$ (1 *bod*); b) $\frac{1}{3}(a+b)$ ili $\frac{a+b}{3}$ ili $(a+b):3$ (1 *bod*); c) a^3+b^3 (1 *bod*). **3.** a^4+a^2b+3b (1 *bod.*). **4.** $Y—X=5$ ili $Y—5=X$ ili $Y=X+5$ (1 *bod*; dovoljno je navesti jedan od ovih odgovora). **5.** Tačan je rezultat pod d) (2 *boda*), jer $10x^2 = 10\cdot(—0{,}3)^2 = 10\cdot 0{,}09 = 0{,}9$. **6.** $28x^4$ (1 *bod*). **7.** $x = 32$ (1 *bod*). **8.** Muških ima 310, a ženskih 240 (1 *bod*). **9.** Obim kružnice je 22 cm, a obim upisanog šestougla 21 cm; znači, obim kružnice je duži za 1 cm (2 *boda*; ako vam je rezultat 0,98 cm, onda 1 bod). **10.** 200 km (1 *bod*). **11.** $AB=DE=4$cm— dobijeno primenom Pitagorine teoreme (poučka) na neosenčeni trougao — v. sliku dole! (2 *boda*). **12.** a) Dužina luka BD iznosi π cm, ili približno 3,14 cm (1 *bod*); b) Površina osenčene figure je $(4—\pi)\cdot$cm^2 ili, približno, 0,9 cm^2 (1 *bod*).





МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Републичко такмичење ученика основних школа СР Србије у школској 1968/69. години

Републичком такмичењу у шк. 1968/69. години предходила су три ступња такмичења: *I-школска* (V—VIII р., 30. III 1969. год.); *II-оӣшӣинска* (VI, VII и VIII р., 13. IV 1969. год.); *III-међуоӣшӣинска* (VII и VIII р., 4. V 1969. год.).

Ово *реӣубличко ӣакмичење*, треће по реду, одржано је 1. VI 1969. године у Београду. Учествовало је 100 ученика VIII разреда и то: 92 ученика који су се квалификовали кроз предходне ступњеве такмичења и 8 ученика који су били најбољи на Математичком конкурсу Фонда младих талената при редакцији листа »Борба« (в. »Борбу« од 23. IV 1969. год.).

Задатке за све ступњеве такмичења, изузев школског, саставила је Републичка комисија за младе математичаре. За тачно решење сваког од 5 задатака на свим ступњевима такмичења додељивано је по 5 бодова. Иако је ниво задатака у односу на раније године био нешто виши, ипак су постигнути добри резултати.

Резулӣаӣи III реӣубличкоі ӣакмичења су следећи:

I наірада

Бошковић Мирјана, ОШ »Маршал Тито« у Медвеђи код Трстеника, *Пеӣрушић Зоран*, ОШ »21. мај«, Ниш; *Граховац Јелица*, ОШ »Иван Гундулић«; Нови Београд.

II награда

Јокановић Душан, ОШ »Свети Сава«, Београд.

III награда

Грбић Мирослав, ОШ »Ј. Ј. Змај«, Рума; *Брковић Милена*, ОШ »Др Драгиша Мишовић«, Чачак; *Ивановић Љубиша*, ОШ »Доситеј Обрадовић«, Пожаревац; *Ђорђевић Предраг*, ОШ »Рада Миљковић«, Светозарево.

Похвале

Јевремовић Весна, ОШ »Јанко Веселиновић«, Шабац; *Ленерт Петар*, ОШ »Прва пролетерска бригада«, Београд; *Јованов Ђурица*, ОШ »Лукреција Анкуцић«, Самош (Панчево); *Ћирић Слободанка*, ОШ »Вељко Дугошевић«, Београд; *Павловић Драган*, ОШ »Свети Сава«, Београд; *Спахић Миодраг*, ОШ »Ната Јеличић«, Шабац; *Томић Драгана*, ОШ »Нада Пурић«, Ваљево; *Шкондрић Мирјана*, ОШ »25. мај«, Нови Београд; *Стојиљковић Драган*, ОШ »Милан Мијалковић«, Светозарево.

Задаци на III републичком такмичењу

Београд, 1. VI. 1969.

1. Одредити a и b тако да разломак (количник)

$$\frac{3-\left(4-\frac{a-b}{3}\right)^2}{\left(\frac{b}{3}+\frac{a-b}{4}-5\right)^2+5}$$

има највећу вредност. Колика је та највећа вредност?

2. Које године *XX* века је рођен човек који у 1969. години навршава онолико година колико износи збир цифара његове године рођења?

3. Два села удаљена су 12 km. Пешак је пошао из свог села у 9 часова и 25 минута и стигао је у друго село у 13 часова и 15 минута. Сутрадан се вратио, али је кренуо у 11 часова и стигао у своје село у 14 часова и 40 минута.

Одредити на којем растојању од његовог села се налази место на путу које је пешак прошао оба дана у исто време и у колико часова је он пролазио поред тог места?

4. Тежиште T троугла ABC је на кружници конструисаној над страницом $AB=c$ као над пречником, при чему је $\sphericalangle TAB=30^\circ$.

а) Конструисати троугао ABC ако је $c=8$ cm.

b) Изразити површину троугла ABC у функцији од дужине c странице AB, а затим израчунати ту површину за $c=8$ cm.

5. Основа (база) купе има површину 7π cm^2. Када се развија омотач те купе добије се осмина круга.

Израчунати површину и запремину те купе.

Резултати и упутства, — **1.** Највећа вредност биће кад је истовремено $4-(a-b)/3=0$ и $b/3+(a-b)/4=0$ или, после упрошћавања: $a-b=12$ и $3a+b=60$, па се решавањем овог система једначина добија да мора бити: $a=18$, $b=6$. Тражена највећа вредност је $3/5$. (5 *поена*: 4+1)

2. Ако су x и y последње две цифре године рођења, онда је година рођења $1900+10x+y$, те ћемо према услову имати да је $1969-(1900+10x+y)=1+9+x+y$, тј. $11x+2y=59$, одакле $y=(59-11x):2$. Имајући у виду да су x и y једноцифрени природни бројеви, лако закључујемо да мора бити $x=5$, $y=2$. Дакле, човек је рођен 1952. године и у 1969. години навршава 17 година. (*5 поена*)

3. Наводимо једну варијанту решења. Означимо села са A и B, а тражену тачку између њих са C. Ако време рачунамо од 0.00 часова, онда је пешак првог дана путовао 3 часа и 50 минута, тј. $3\frac{5}{6}$ часа, те му је брзина била $12:3\frac{5}{6}=\frac{6}{23}$ (km/h); другог дана, на повратку из B у A, путовао је 3 h 40 min., тј. $3\frac{2}{3}$ h, те му је брзина била $12:3\frac{2}{3}=\frac{3}{11}$ (km/h). Ако време проласка пешака кроз тачку C означимо са t, с обзиром на услове задатка, можемо поставити једначину $AC+BC=12$, тј.

$\frac{6}{23}\left(t-9\frac{5}{12}\right)+\frac{3}{11}(t-11)=12$, одакле је $t=12{,}1$ (часова). Тражена тачка C удаљена је од првог села A за $AC=\frac{6}{23}\left(12\frac{1}{10}-9\frac{5}{12}\right)=8\frac{2}{5}$ (km). Према томе, тражено место удаљено је од пешаковог села 8,4 km и пешак је кроз њега оба дана прошао у 12 часова и 6 минута. (5 *поена* : 4+1)

4. Цртај слику! Нека је O — средиште странице AB. Тада: $AO=OB=OT=c/2$, $\sphericalangle ATO=\sphericalangle TAB=30^\circ$, $\sphericalangle TOB=30^\circ+30^\circ=60^\circ=\sphericalangle OTB=\sphericalangle OBT$; $\sphericalangle ATB=90^\circ$ (што се могло и одмах закључити — перифер. угао над пречником!); $TC=2\cdot OT=2\cdot(c/2)=c$. a) Троугао AOT може се лако конструисати и онда добити теме C, јер $TC=c$. Троугао ABC је тражени. b) Повуцимо висину из C на страницу AB; нека је њено подножје D. Троугао ODC је половина једнакостраничног троугла, па је $CD=h=\frac{1}{2}OC\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}c\sqrt{3}=\frac{3}{4}c\sqrt{3}$; тада ће површина троугла ABC бити $P=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}c\cdot\frac{3}{4}c\sqrt{3}=\frac{3}{8}c^2\sqrt{3}$. За $c=8$ добићемо $P=24\sqrt{3}$ (cm^2). (5 *поена* : 2+2+1)

5. Одмах имамо да је $r^2=7$, тј. $r=\sqrt{7}$ cm, а из услова $r\pi s=\frac{1}{8}\pi s^2$ налазимо $s=8r$, те из $H^2=s^2-r^2$ добијамо $H^2=63r^2=63\cdot7=7\cdot7\cdot9$, тј. $H=21$ cm. Запремина купе је тада $V=\frac{1}{3}\cdot7\pi\cdot21=49\pi\approx154$ (cm^3), а површина је $P=7\pi+\sqrt{7}\cdot\pi\cdot\sqrt{7}=7\pi+56\pi=63\pi\approx198$ (cm^2) (5 *поена*)

* * *

Прелаз преко реке

(Задатак за досетљиве)

На обали реке стоје три одрасла лица и два дечака. На располагању имају само један чамац у који може да се смести само једно одрасло лице или само два дечака. Како ће сви прећи на другу страну реке?

Решење. — Најпре ће чамцем прећи оба дечака, па ће један од њих вратити чамац натраг. Затим ће прећи једно одрасло лице, а онда ће чамац вратити онај дечак који је раније био пребачен на ту страну реке. Поновивши такву операцију прелажења још два пута, свих петоро ће прећи на другу страну реке.

MATEMATIČKA RAZONODA

ZANIMLJIVOSTI O BROJEVIMA

Neobične jednakosti

I. Broj 369 može se prikazati kao zbir i razlika proizvoda brojeva koji su sastavljeni od tih istih cifara i to tako da te cifre dolaze istim redom:

$$369=3\cdot69+36\cdot9-3\cdot6\cdot9.$$

Evo još dva broja koji imaju takvo svojstvo:

$$639=6\cdot39+63\cdot9-6\cdot3\cdot9$$
$$688=6\cdot88+68\cdot8-6\cdot8\cdot8.$$

II. Evo još nekoliko ništa manje zabavnih primera. Ima brojeva koji su jednaki zbiru dvaju proizvoda, takvih da je u svakome od njih redosled cifara isti kao i u datom broju:

$$655=6\cdot55+65\cdot5$$
$$1258=1\cdot258+125\cdot8$$
$$6208=6\cdot208+620\cdot8$$

Pogledajte i ovaj zaista elegantan primer te vrste:

$$13\cdot52+13\cdot52=1352$$

No to još nije sve. Ima primera, poput navedenih, u kojima imamo zbir od po tri jednaka proizvoda!

$$2\cdot4+2\cdot4+2\cdot4=24$$
$$17\cdot34+17\cdot34+17\cdot34=1734$$
$$167\cdot334+167\cdot334+167\cdot334=167334.$$

Interesantno, zar ne?

III. Pogledajte ova tri primera:

1) $19+37=56$ 2) $18+39=57$ 3) $29+38=67$
$1\cdot9+3\cdot7=5\cdot6$ $1\cdot8+3\cdot9=5\cdot7$ $2\cdot9+3\cdot8=6\cdot7.$

Šta zapažate? Ako se između cifara u sabircima i zbiru postavi tačka — znak množenja — onda će jednakost ostati i dalje u važnosti. Ima li još takvih slučajeva?

IV. Šta kažete za ove dve jednakosti:

$$3^2+2=2^2+3,$$
$$2^5\cdot9^2=2592?$$

V. Postoje samo dva para celih brojeva čiji je zbir jednak njihovom proizvodu. To su parovi: (2 ; 2) i (0 ; 0). I zaista: $2+2=2\cdot2$ i $0+0=0\cdot0$.

Međutim, ukoliko se ne zahteva da brojevi budu celi, onda se može naći kolikogod hoćete parova brojeva čiji su zbir i proizvod međusobno jednaki, na primer:

1) $11+1{,}1=11\cdot1{,}1=12{,}1$
2) $3+1{,}5=3\cdot1{,}5=4{,}5$
3) $5+1{,}25=5\cdot1{,}25=6{,}25$
4) $-3+0{,}75=(-3)\cdot0{,}75=-2{,}25.$

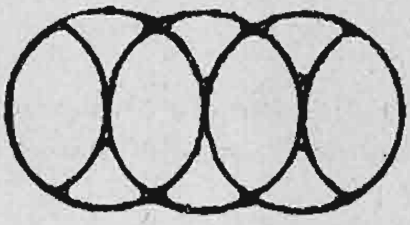
Itd.

ДА ЛИ СТЕ ДОСЕТЉИВИ?

Распоређивање бројева

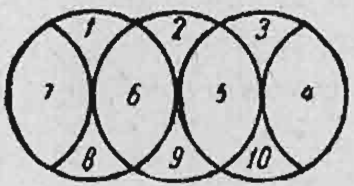
На доњем цртежу видите три круга који се секу. На тај начин је сваки од њих подељен на 4 дела. Као што се види, свега је добијено десет делова.

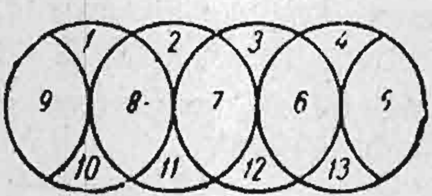
У тако добијене делове кругова распоредите прве десет природних бројева тако да збир бројева у сваком кругу буде исти; у датом случају тај збир може бити 22 (најпростији случај), 23 и 24, а такође 20 и 21.



У четири таква круга распоредите природне бројеве од 1 до 13 тако да у сваком кругу збир бројева износи 28 (најпростији случај). Међутим, у овом случају распоред се може извршити тако да у сваком кругу збир буде и 25, и 26, итд. све до 31. Покажите то!

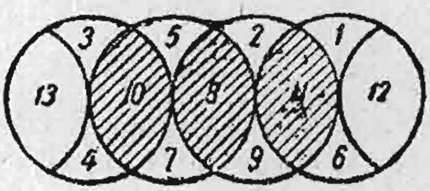
Решење. — Распоред бројева у најпростијим случајевима може се извршити на следећи начин:





У општијем случају, тј. када имамо четири круга а збир у сваком треба да буде 30, можемо поступити на следећи начин.

Збир (сума) бројева 1, 2, 3, . . . , 12 и 13 једнак је 91 (у то се и сами можете уверити). У сваком кругу збир уписаних бројева мора бити 30, што значи да ће у сва четири круга збир свих уписаних бројева бити 120. Међутим, број 120 већи је од 91 за 29. То се може објаснити тиме што се кругови секу, па се неки бројеви — а то су они у заједничким деловима кругова — рачунају двапут. Због тога разлику 29 морају сачињавати управо та три заједничка броја. Такви бројеви могу бити, на пример, 8, 10 и 11 (наравно, могуће је изабрати и неку другу тројку бројева који ће бити у заједничким деловима кругова, на пример: 7, 10 и 12 и т. сл.). Зато ћемо најпре распоредити бројеве 8, 10 и 11 у заједничке делове датих кругова, а преостале бројеве (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12 и 13) распоредићемо у поједине делове, бирајући их тако да збир четири броја у сваком кругу буде једнак 30. Једно од могућих решења приказано је на цртежу десно.



И остали случајеви решавају се на сличан начин.

Нађите још неко решење!

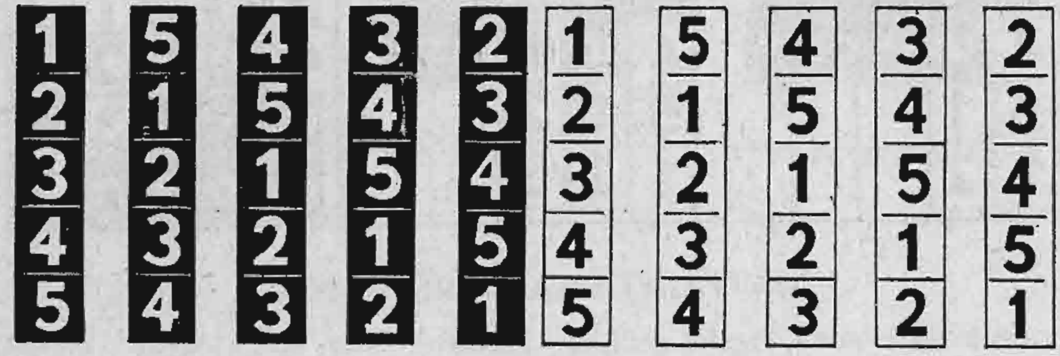
MATEMATIČKE IGRE

Jedna korisna zabava: Igra brojevima

Igru, koju ćemo vam opisati, preporučuje svojim čitaocima jedan francuski dečji časopis

Igraju dvoje. Jedan partner dobija pet jednakih crnih uzanih pravougaonika s ispisanim belim ciframa, a drugi dobija pet belih pravougaonika iste veličine kao i kod prvoga — ali s crnim ciframa (kao što je to prikazano na sl. 1). Ove kartice treba unapred napraviti od hartije ili kartona (pogodno je da im dimenzije budu 5 cm sa 1 cm).

Partneri treba da odigraju bar dve partije, jer igrač koji čini drugi hod (potez) ima prednost od 15 bodova (što će vam biti jasno iz objašnjenja koje sledi).



Sl. 1

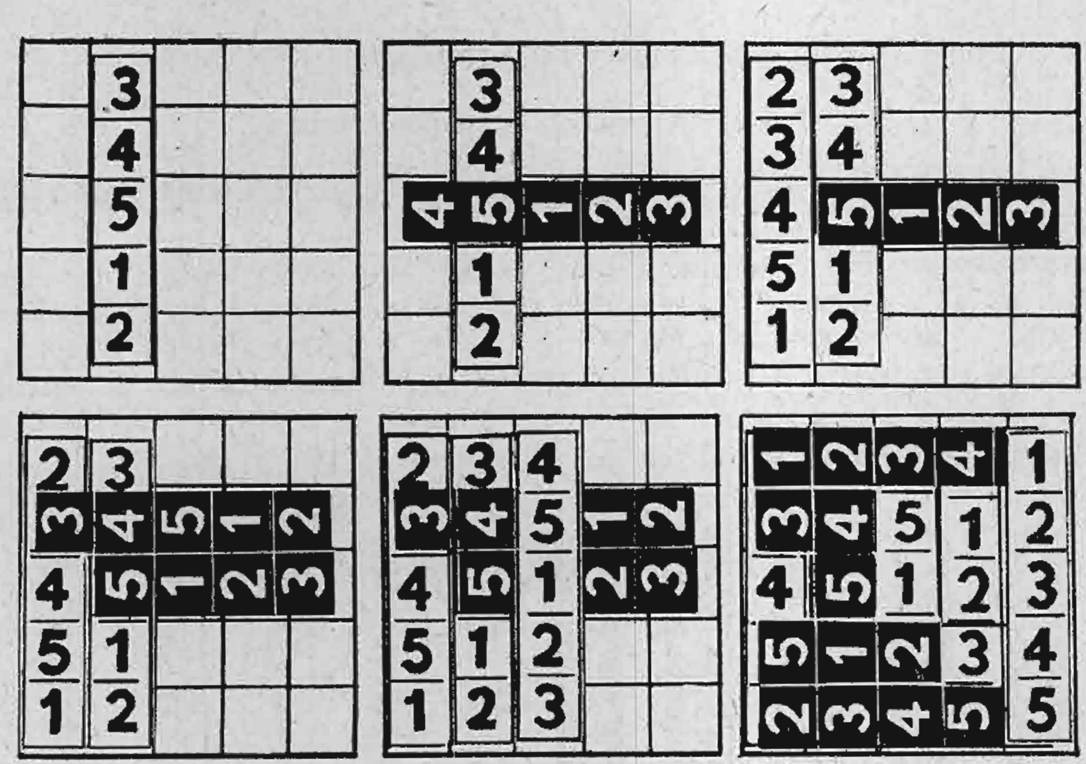
Pravila igre. — Igra se na tabli sa 25 polja. Igrač koji igru počinje stavlja na tablu prvu pločicu (po svom izboru). On je može staviti vertikalno ili horizontalno, ali je u daljem toku obavezan da svoje pločice stavlja samo u tom pravcu. Igrači se mogu dogovoriti da pločice postavljaju ne samo onako kao što je to pokazano na slici 2, već i tako da na vertikalno postavljenim pločicama cifre mogu biti i prevrnute, a takođe i na horizontalnim. Nije obavezno da se pločice postavljaju jedna pored druge; između njih mogu biti i razmaci (do 3 širine kartice).

Drugi igrač svoje pločice postavlja obavezno normalno (okomito) u odnosu na protivnikove i takođe u toku cele igre mora tako postupati. Igrači postavljaju pločice naizmenično. Svaki igrač nastoji da prekrije (poklopi) što veće brojeve na protivnikovim pločicama; pri tome se protivnikova cifra prekriva odgovarajućom svojom cifrom (petica dolazi na peticu, trojka na trojku itd.). Pobednik je onaj igrač na čijim pločicama na kraju partije — kada su postavljene sve pločice — ostane veći zbir (suma) nepokrivenih brojeve.

Primer. — Počinje »beli«, tj. igrač koji ima bele pločice: »Crni«, tj. drugi igrač, prekriva, naravno, najveću „cifru“ beloga. (To je petorka koja se prekriva petorkom crnoga). Sa svoje strane, beli zatim prekriva četvorku crnoga . . . itd. (V. sliku 2 na sledećoj strani).

Na kraju partije kod partnera koji je bio beli (tj. koji je prvi bio na »potezu«), zbir nepokrivenih cifara bio je 31, a kod crnoga je taj zbir bio 44. Znači, pobedio je crni.

Ova igra može odlično poslužiti učenicima koji uče aritmetiku, jer u toku igre stalno se moraju brojevi sabirati napamet kako bi se pronašao najbolji potez ili hod.

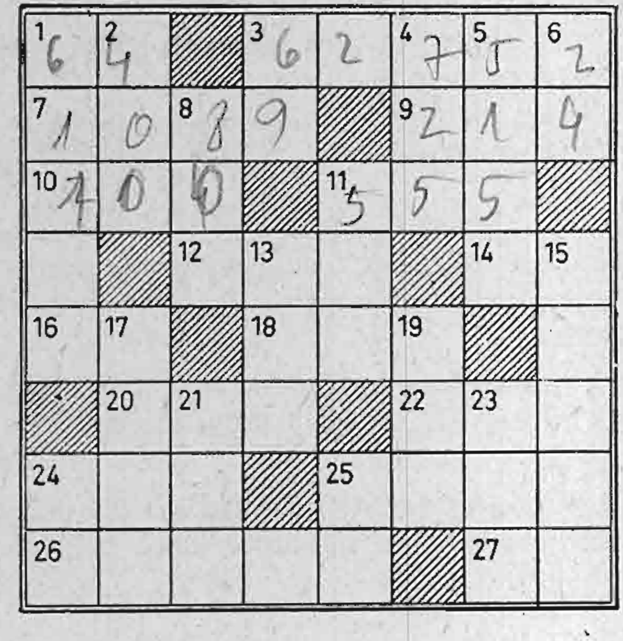


MATEMATIČKA UKRŠTENICA

Popunjavanje neke figure rečima, kao što je to slučaj kod ukrštenih reči, može biti zamenjeno popunjavanjem slobodnih polja figure brojevima u skladu sa nekim postavljenim uslovima. Najčešće se ti brojevi dobijaju rešavanjem matematičkih zadataka.

U svako polje upisuje se samo *po jedna arapska cifra*, pri čemu se prva cifra traženog broja upisuje u numerisani kvadratić, a poslednja — u poslednji kvadratić vrste ili stupca ili ispred »prepreke« koju obično pretstavlja deblja crta ili osenčeni kvadratić. Decimalni zarezi se ne unose, kao ni imenovanja mernih jedinica. Ovde se brojevi, kao i reči u običnim ukrštenicama, čitaju horizontalno (sleva udesno) i vertikalno (odozgo nadole). Kao i kod ukrštenica sa rečima i ovde rešavanje treba započinjati od pitanja koja su za odgovor lakša.

Evo jedne ukrštenice koju će lako moći rešiti svi učenici V—VIII razreda.



1 6	2 4	▨	3 6	2	4 7	5 5	6 2
7 1	0	8 8	9	▨	9 2	1	4
10 1	0	0	▨	11 5	5	5	▨
	▨	12	13		▨	14	15
16	17	▨	18		19	▨	
▨	20	21		▨	22	23	
24			▨	25			
26					▨	27	

Vodoravno:

1. Površina kvadrata stranice 8.
3. Zapremina (volumen) kvadra čije su dimenzije 53, 37 i 32.
7. Još 880 pa bi bilo 1969.
9. Vrednost za x iz $156+x=370$.
10. Najmanji trocifreni broj.
11. Broj kome su sve tri cifre iste.
12. Najveći trocifreni prost broj (Prost je onaj broj koji nije deljiv nijednim drugim brojem osim sa 1 i sa samim sobom).
14. Broj koji podeljen sa 7 daje količnik 2 i ostatak 1.
16. Kvadrat broja 7.
18. Najveći trocifreni broj,
20. Broj centimetara u 2 m 4 dm.
22. Trocifreni broj kome je srednja cifra za 2 veća od zbira prve i zadnje cifre.
24. Broj koji se jednako čita kako sleva udesno tako i sdesna ulevo.
25. Najveći četvorocifreni broj koji se može napisati uz pomoć cifara 2, 5, 5 i 6.
26. Proizvod (umnožak) zbira i razlike brojeva pod 20 i 24 vodoravno.
27. Ugao, izražen u stepenima, koji kazaljke na satu zatvaraju u 8 sati i 30 minuta.

Uspravno:

1. Proizvod brojeva 298 i 205 uvećan za polovinu broja 168.
2. Broj koji se dobije kad se dve desetice pomnože sa dve desetice.
3. Rezultat od $68+12:4-2=$
4. Broj koji je 25 puta veći od 29.
5. Zbir svih prirodnih brojeva od 1 do 101 (zaključno).
6. Broj koji je 10 puta manji od broja pod 20 horizontalno.
8. Broj stotnina (stotih) u 8,09.
11. Broj u kome je svaka sledeća cifra za dva veća od prethodne.
13. Koliko dinara ima Dragan ako njegov drug Milan ima dva puta više od njega, a zajedno imaju 2970 d?
15. Površina pravougaonika čije su stranice 305 i 185.
17. Broj sekundi u 2° 34' 38".
19. Zbir (suma) svih neparnih brojeva između 180 i 190.
21. Za toliko treba smanjiti 600 da bi se dobilo 187.
23. Broj čiji zbir cifara iznosi 20.
24. Stranica kvadrata čiji obim (opseg) iznosi 48.
25. Isti se broj dobije i kada se hartija na kojoj je napisan okrene za 180°

Rešenje

Ako ste pravilno popunili prethodnu ukrštenicu (križaljku), onda ste dobili

Vodoravno: 1. *64*, 3. *62752*, 7. *1089*, 9. *214*, 10. *100*, 11. *555*, 12. *997*, 14. *15*, 16. *49*, 18. *999*, 20. *240*, 22. *284*, 24. *171*, 25. *6552*, 26. *28359*, 27. *75;*

Uspravno: 1. *61174*, 2. *400*, 3. *69*, 4. *725*, 5. *5151*, 6. *24*, 8. *809*, 11. *579*, 13. *990*, 15. *56425*, 17. *9278*, 19. *925*, 21. *413*, 21. 23. *857*, 14. *12*, 25. *69*.

Zadatak. — Sastavite i sami neku matematičku ukrštenicu i pošaljite nam je. Najuspelije ukrštenice objavićemo u „ Mat. listu".

B.

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА ИЗ РУБРИКЕ „ЗРНЦА“ У „МАТЕМАТИЧКОМ ЛИСТУ“ III. 4—5.

За досетљиве

1. Сваки број осим нуле (јер нула не може бити делилац).

2. 4 партије.

3. 11 стубова.

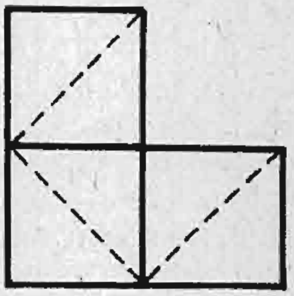
4. Решење је дато на левој слици.

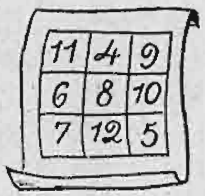
Магични квадрат

Види десну слику!

Тренинг пажње и посматрачог дара

Друга и четврта.





11	4	9
6	8	10
7	12	5

ЗРНЦА

Минут за размишљање

1, Како ћете уз помоћ само пет двојки добити број 7?

Решење. — 1) $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 : 2 = 7$,
2) $22 : 2 - 2^2 = 7$.

Поред ова два, позната су такође и друга решења. Нађите их!

2. Треба пола стотине поделити половином. Колико ће се добити?

3. Подели број 188 тако да резултат буде јединица.

4. Колико ће се добити ако се шест десетица подели са две десетице?

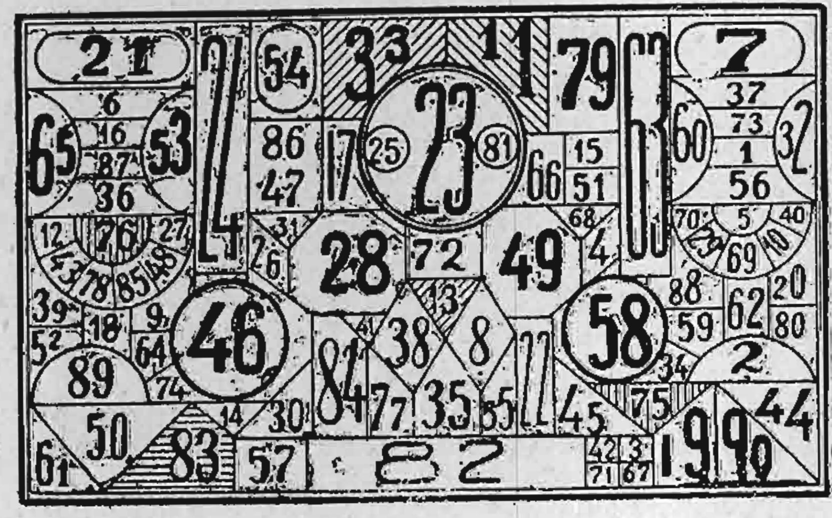
5. Колико страна има незаоштрена шестострана оловка?

Упутство. Колико страна има шестострана призма? Модел такве једне призме представља, на пример, незаоштрена оловка. Дакле?

Тренинг пажње

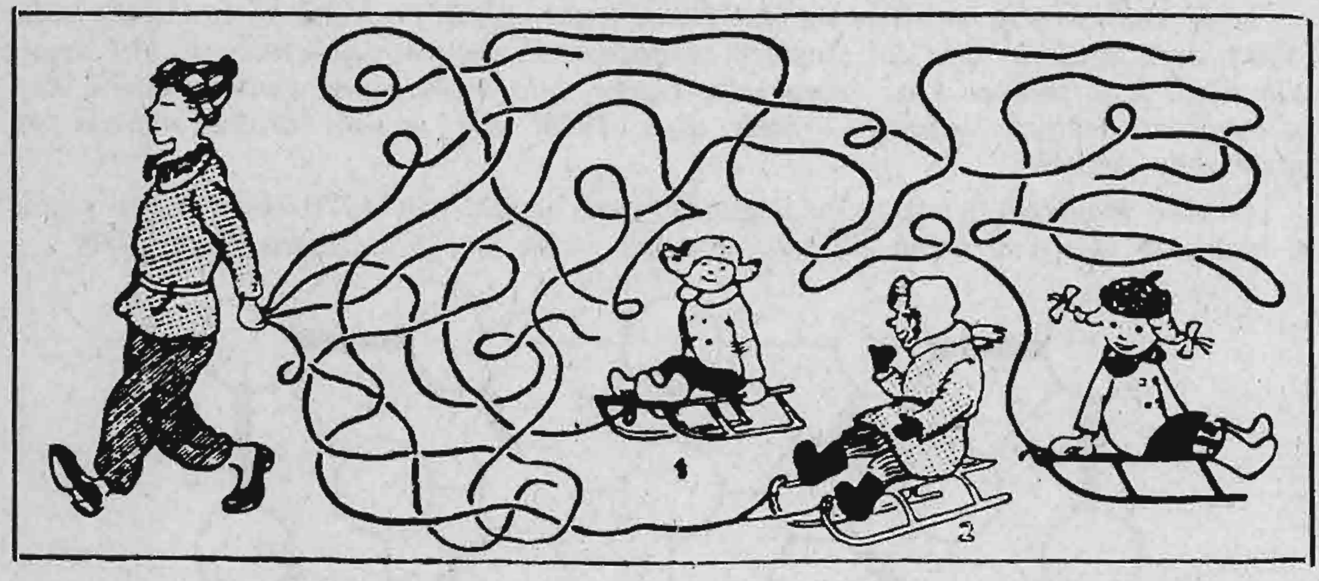
На следећем цртежу написани су сви природни бројеви од 1 до 90. Пронађи што брже редом све те бројеве (изговори их или напиши редом: 1, 2, 3, . . ., 89, 90); при томе мери време помоћу часовника.

Ако си то постигао за мање од 10 минута, онда се мора признати да имаш »око соколово« и да си врло пажљив.



Проверите свој посматрачки дар!

Кога он вуче?



Привредна реформа

Наставница захтева од ученице да напише пет мешовитих бројева. Ученица пише у једном крају табле, врло стиснуто. На упозорење наставнице, да има доста места на табли, па не треба штедети, чује се глас једнога ученика: »Привредна реформа!«

* * *

NAGRADNI ZADATAK BR. 12

4	·		:		3	+		0	=	3	
	:	2	+			—			=	3	
	·	2	+	1		:			=		8

	8	—		3	+			+			=		0

Popunite preostale kvadratiće ciframa tako da sve naznačene računske operacije budu tačno izvršene; pri vertikalnom sabiranju brojeva iznad crte treba da se dobiju brojevi koji su napisani ispod crte.

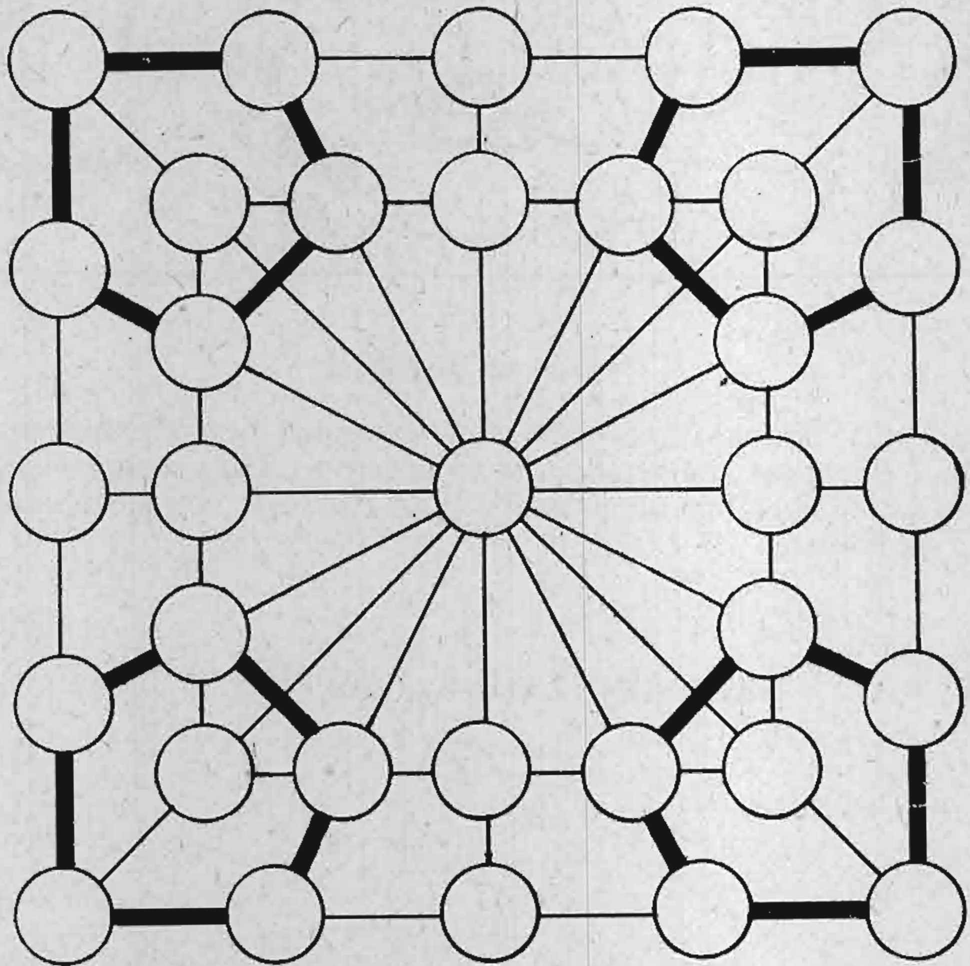
Za pravilno rešenje ovog zadatka biće nagrađeno 20 učenika. Po potrebi odlučiće žreb. Rešenja treba poslati najkasnije **do 10. I 1970. godine** na adresu: **Matematički list, Beograd, p.p. 728.** Ne zaboravite da na samom radu navedete svoje ime i prezime, razred, školu i mesto (za manja mesta i poštu). Na koverti obavezno naznačite: »Nagradni zadatak br. 12«. Rešenja i imena nagrađenih objavićemo u »Matematičkom listu« br. IV.3.

NAGRADNI ZADATAK BR. 13

(Specijalni novogodišnji)

U svaki kružić na ovoj magičnoj figuri treba upisati po jedan broj tako da suma (zbir) ***pet*** *brojeva bilo duž stranica spoljašnjeg ili unutrašnjeg kvadrata, bilo uzduž svih linija koje prolaze kroz centar cele figure, bilo u temenima četiri petougla koji su označeni debljim linijama — bude uvek* ***1970!*** *Svi upisani brojevi moraju biti međusobno različiti.*

Ako magičnu figuru tačno popunite, onda u njoj zbir 1970 treba da se pojavi ni manje ni više, već tačno 20 puta. Kao što vidite, sve je u znaku broja 1970!



MATEMATIČKI LIST
Beograd
KUPON
za nagradni zadatak br. 13

Biće nagrađeni **svi čitaoci** — pretplatnici »Matematičkog lista« koji pošalju tačno rešenje ovog zadatka. Žreb neće odlučivati, tj. nema lutrijskog izvlačenja. Nagradni fond za ovaj zadatak iznosi 5000 dinara **(pola miliona starih dinara)**!

Rešenja treba poslati u zapečaćenoj koverti najkasnije **do 10. I 1970. godine** na adresu: **MATEMATIČKI LIST, Beograd, p.p. 728.** Uz rešenje obavezno priložiti (nalepiti) nagradni kupon (vidi levo!), a na samom rešenju napišite svoje ime i prezime, razred (za učenike), školu i mesto (za manja mesta i poštu). Na koverti (omotu) naznačite: »*Nagradni zadatak br. 13*«.

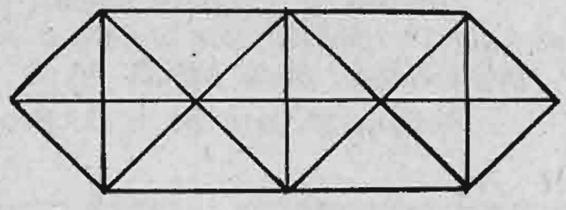
Da ne biste sekli »Matematički list«, preporučujemo vam da sami nacrtate na hartiji ovakvu figuru (naravno, nešto veću), ispunite je kao što se u zadatku traži i pošaljete zajedno sa nagradnim kuponom kojeg morate iseći.

Rešenje i imena nagrađenih objavićemo u »Matematičkom listu« IV. 3.

Želimo vam dobru novogodišnju zabavu!

NAGRADNI ZADATAK BR. 14

Koliko ima svega trouglova na ovom crtežu?→

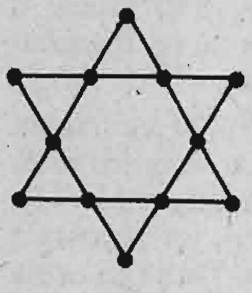


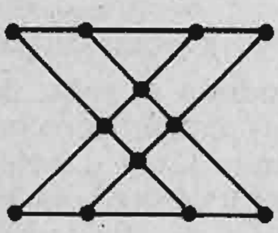
Uslovi za slanje rešenja i dodelu nagrada za ovaj zadatak isti su kao i za nagradni zadatak br. 12.

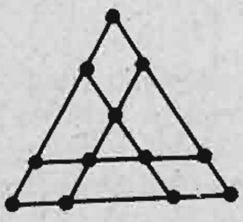
REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 10

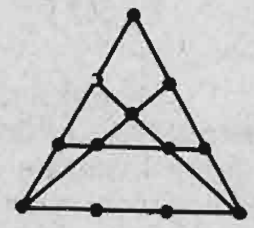
Zadatak je glasio: *Kako ćete rasporediti* 12 *sijalica u* 6 *redova tako da u svakom redu budu po* 4 *sijalice*? *Nacrtati traženi raspored sijalica.*

Zadatak ima više rešenja. Četiri rešenja data su na ovoj slici.









Primljeno je više od 400 rešenja, od toga 276 tačnih.

Žrebom je odlučeno da se između onih koji su poslali tačno rešenje nagrade sa **po 20 dinara** sledeći učenici:

1. *Antić Dragan*, VII$_2$ r. OŠ »M. Mijalković«, Svetozarevo
2. *Božinović Radmilo*, VI$_1$ r. OŠ »Braća Ribar«, Beograd
3. *Bukša Mladen*, VII$_b$ r. OŠ Križanićeva, Zagreb
4. *Đurđević Branko*, V$_3$ r. OŠ »Ž. Popović«, Vladimirci
5. *Funtak Franjo*, VIII$_a$ r. OŠ »S. Došen«, Kloštar Podravski
6. *Gašpar Ivan*, VIII r. OŠ Staševica, p. Vel. Prolog (Dalmacija)
7. *Kušar Joži*, VII$_c$ r. OŠ »Ivan Gundulić«, Novi Beograd
8. *Lemić Ljubica*, VIII$_c$ r. OŠ »M. Tomić—Slobodan«, Nova Gradiška
9. *Ivanović Slavko*, VI$_1$ r. OŠ »25. maj«, Krupanj
10. *Milić Gordana*, V r. OŠ »S. Ivanović«, Roge (kod Požege Užičke)
11. *Mišić Dragana*, V$_2$ r. OŠ »Vuk Karadžić«, Požarevac
12. *Mitić Stanko*, VI$_3$ r. OŠ »B. Stanković«, Vučje kod Leskovca
13. *Mitrović Divna*, V$_1$ r. OŠ »Ž. Apostolović«, Trstenik
14. *Poledica Ljubiša*, VII$_2$ r. OŠ »M.V. Zverac«, Bratljevo (kod Ivanjice)
15. *Radovanović Ljiljana*, VI$_2$ r. OŠ »Milan Munjas«, Ub
16. *Tabački Ružica*, VI$_1$ r. OŠ »J. J. Zmaj«, Zrenjanin
17. *Šarenac Snežana*, VI$_a$ r. OŠ »Đ. Jakšić«, Međa (Banat)
18. *Vasić Anđelko*, VII$_b$ r. OŠ »Petar Dokić«, Maglaj
19. *Vesić Dragan*, V$_3$ r. OŠ »Dr Dragiša Mišović«, Čačak
20. *Zivlaković Marko*, VIII$_c$ r. OŠ »France Prešeren«, Kranj

Nagrade su poslate poštom.
Dobitnicima nagrada čestitamo!

REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 11

Zadatak je glasio: *Popuniti preostala polja ovog kvadrata* (sl. 1) *brojevima od* 4 *do* 19 *tako da zbir brojeva u svakom pravcu, tj. po horizontalama, vertikalama i dijagonalama, budu jednak* 46.

Rešenje je dato na sl. 2. Brojevi koji su već bili dati štampani su masnije

8	13		
	18	17	
		5	16
			15

Sl. 1

8	**13**	14	11
7	**18**	**17**	4
19	6	**5**	**16**
12	9	10	**15**

Sl. 2

Objašnjenje. — Kvadrat izdeljen na manje kvadratiće popunjene brojevima tako da je zbir brojeva u svakom pravcu, tj. po horizontalama, vertikalama i dijagonalama, uvek isti, zove se *magični kvadrat*.

Kvadrat koji u svakom redu ima po četiri manja kvadrata (tzv. »polja«) — kao što je to slučaj u našem zadatku — zove se magični kvadrat četvrtog reda.

Karakteristično svojstvo magičnog kvadrata 4. reda, da je zbir 4 centralna broja (kao i svaka 4 broja uz vrhove kvadrata) jednak zbiru brojeva u svakom redu datog kvadrata — konstanti magičnog kvadrata (koja u našem slučaju iznosi 46), omogućuje nam da najpre nađemo četvrti broj u centralnom kvadratu, jer preostala tri broja već imamo. Naime, iz $18 + 17 + 5 + * = 46$ dobijamo $* = 6$. Dalje je onda lako odrediti ostale brojeve.

* * *

Primljeno je 712 rešenja, od toga 588 tačnih.

Uz pomoć žreba odlučeno je da se između onih koji su zadatak tačno rešili nagrade sa **po 20 dinara** sledeći učenici:

1. *Dimitrijević Ljubiša*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Voka Savić«, Lazarevac
2. *Dobnikar Luka*, VIII$_b$ r. OŠ »Prežihov Voranc«, Ljubljana
3. *Halać Kadira*, VII$_2$ r. OŠ Brod kod Foče
4. *Jurec Đurđica*, V$_a$ r. OŠ Cirkvena (kod Bjelovara)
5. *Kostić Miomir*, VI$_1$ r. OŠ »Vuk Karadžić«, Vranje
6. *Kastratović Milica*, V$_2$ r. OŠ »IV kraljevački bataljon«, Kraljevo
7. *Krumova Jordanka*, VIII$_b$ r. OŠ »Strašo Pindžur«, Negotino (Vardar)
8. *Leontijević Vera*, VII$_2$ r. OŠ »S. Filipović«, Divci (kod Valjeva)
9. *Ljupković Zoran*, V$_6$ r. OŠ »Ljuba Nešić«, Zaječar
10. *Mašić Miljana*, V$_a$ r. OŠ »M. Petković—Fećko«, Platičevo
11. *Mladenović Borivoje*, VII$_1$ r. OŠ »Ratko Vukićević«, Niš
12. *Nedeljković Ikonija*, VI r. OŠ »J. Šerbanović«, Ranovac
13. *Nešić Sredoje*, VI$_3$ r. OŠ »Boško Vrebalov«, Melenci (Banat)
14. *Pejović Dragomir*, VI$_b$ r. OŠ »Petefi Šandor«, Novi Sad
15. *Popović Miladinka*, VI$_2$ r. OŠ »M. Pijade«, Vranić (kod Beograda)
16. *Purger Tibor*, VII$_c$ r. OŠ »Ady Endre«, Kanjiža
17. *Rakanović Sead*, V$_a$ r. OŠ »Braća Hrnčić«, Bosanski Novi
18. *Rožić Vera*, VIII$_c$ r. OŠ »J. Stančić«, Buševac (kraj Zagreba)
19. *Savić Gordana*, VII$_c$ r. OŠ »Vladimir Gortan«, Rijeka
20. *Vranić Vujadin*, VI$_1$ r. OŠ »Svetozar Marković«, Sjenica

Nagrade su poslate poštom.

Dobitnicima nagrada čestitamo!

PRIZNANJA ŠKOLAMA

Pored osam škola koje su **nagrađene** (videti »Matematički list« III. 4—5, treća strana korica), izvesnom broju škola MATEMATIČKI LIST je dodelio posebne diplome, odnosno pohvalnice u znak priznanja za rad na popularisanju »Matemat. lista« (dakle i matematike) u šk. 1968/69. god. Objavljujemo spisak tih škola.

a) **Diplome** su dobile škole:

OŠ »Vožd Karađorđe« Niš, OŠ »M. Pijade« Niš, OŠ »Lj. Nešić« Zaječar, OŠ »Dr D. Mišović« Čačak, OŠ »D. Jerković« T. Užice, OŠ »N. Dimić« Gospić, OŠ »M. V. Seljak« Barajevo, OŠ »I. L. Ribar« Sombor, OŠ »S. Bajić—Paja« Pećinci, OŠ »V. Karadžić« Ripanj, OŠ »Narodni heroji« Knin, OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Sisak, OŠ »P. Tomažiča« Koper, OŠ »29. noemvri« Skopje.

b) **Pohvalnice** su dobile škole:

OŠ »S. Nikolajević« Beograd, OŠ »M. Pavlović« Čačak, OŠ »B. Božović« Titograd, OŠ »D. Davidović« Smederevo, OŠ »J. J. Zmaj« Pančevo, OŠ »N. Purić« Valjevo, OŠ »M. Filipović« Bijeljina, OŠ »Fočanske omladinske čete« Brod kod Foče, OŠ »Kustošija« Zagreb, OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Čonoplja, OŠ »Njegoš« Niš, OŠ »IV kraljevački bataljon« Kraljevo, OŠ »G. Janković« Blažuj kod Sarajeva, OŠ »D. Pavičić« Herceg Novi, OŠ »F. Prešeren« Kranj, OŠ »Đ. Jakšić« Ćuprija, OŠ »F. Filipović« Čačak, OŠ »21. maj« Niš, OŠ »G. Šiliha« Velenje, OŠ Bosilegrad, OŠ »M. Mijalković« Svetozarevo, OŠ »R. Herceg« Varaždin, OŠ »N. Tesla« Zrenjanin, OŠ »D. Obradović« Beograd, OŠ »F. Višnjić« Beograd, OŠ Čačinci.

MATEMATIČKI LIST, tj. njegov poseban Savezni žiri, dodeliće slična priznanja školama i na kraju ove školske godine. Pri tome će se uzimati u obzir uslovi objavljeni u našem raspisu br. **255/69** (odeljak **Konkurs**), koji je početkom ove školske godine upućen svim osnovnim školama u zemlji. Ovde ukratko ponavljamo da će se pri dodeli nagrada, diploma i pohvalnica uzimati u obzir sledeće: broj i procenat pretplatnika na „Mat. list“ u odnosu na ukupan broj učenika V—VIII razreda, ažurnost u dostavljanju pretplate, broj primeraka koje plaća škola, saradnja pretplatnika u listu (posebno, učešće učenika u rešavanju konkursnih i drugih zadataka u listu), rad matematičkih sekcija i rezultati matematičkih takmičenja. Škole koje žele da konkurišu za ova priznanja treba da dostave potvrdu o ukupnom broju učenika V—VIII r. i informaciju o radu matematičke sekcije. Rezultati konkursa biće objavljeni u „Mat. listu“ i dnevnoj štampi. Želeli bismo da u ovoj školskoj godini spisak nagrađenih i pohvaljenih škola bude još duži. Međutim, to zavisi od samih škola.

POMOĆ ŠKOLAMA POSTRADALIM OD ZEMLJOTRESA

Redakcija „Matematičkog lista“ donela je odluku da osnovnim školama koje su najviše postradale od nedavnog zemljotresa u Bosanskoj krajini i prošle godine u Crnoj Gori (a pre svega onim školama koje su bile pretplatnici na ovaj časopis) *besplatno* uputi 1500 kompleta (7500 primeraka) ovog časopisa u vrednosti preko 10000,00 dinara, što znači da će 1500 učenika primati „Matematički list“ besplatno, a koji će to učenici biti odlučiće same škole.

U tom cilju je od nadležnih organa sa postradalih područja (opštinskih skupština i prosvetno-pedagoških zavoda) već zatraženo da Redakciji dostave spiskove — adrese škola kojima je pomenuta pomoć najpotrebnija.

Ukoliko se broj pretplatnika „Matematičkog lista“ iz drugih škola naše zemlje poveća, onda će se srazmerno povećati i pomoć postradalim školama.

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. **,,Matemat.** list“ namenjen je *svim učenicima* V—VIII r. osnovne škole.

3. **Prodajna cena pojedinom broju je 1,50 dinara.** Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 7,50 dinara. Naručioci za više od 10 kompleta imaju 10% *rabata* od prednje cene, a ukoliko unapred, tj. prilikom naručivanja, uplate celokupni iznos pretplate imaju 20% *rabata* od prednje cene (tj. plaćaju 1,20 din. po komadu, odnosno 6 dinara za komplet od pet brojeva). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbe se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun ,,Matematičkog lista“ broj 608-8-1433-10**. Pri tome **obavezno** treba navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostavljati i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi (na koje brojeve i po koliko primeraka od svakog broja). Uplatnica sa navedenim podacima takođe može služiti kao narudžbenica.

4. Raspolažemo još izvesnim količinama svih brojeva lista iz šk. 1967/68. god. (br. II.1—5) i šk. 1968/69. god. (br. III.1—5) i isporučujemo ih odmah.

5. Mole se poverenici ,,Mat. lista“ da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Beograd, p.p. 728.

SADRŽAJ

1. Nekoliko reči o matematici 1
2. *Др М. Илић-Дајовић:* Решавање конструктивних задатака, I. 5
3. *Др И. Бандић:* Дељивост са 11 8
4. *J. Martić i B. Marinković:* Varijante pri rešavanju zadataka 10
5. Знате ли све о четвороуглу? 19
6. *B. Marinković:* Azbuka kibernetike, I i II deo 20
7. Ljudi na Mesecu (Let ,,Apola 11“ na Mesec u slici i reči) 33
8. Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole 57
9. Одабрани задаци 58
10. Konkursni zadaci 64
11. Rešenja konkursnih zadataka iz ,,Mat. lista“ III. 4—5 65
12. Rešili konkursne zadatke iz ,,Matemat. lista“ III. 4—5. 69
13. Nagrade rešavateljima konkursnih zadataka 70
14. Test-zadaci iz matematike 71
15. Математичка такмичења ученика основних школа 76
16. Matematička razonoda (Zanimljivosti o brojevima. Da li ste dosetljivi? Matematičke igre. Matematička ukrštenica. Zrnca — sitne zanimljivosti) 84
17. Nagradni zadatak br. 12 85
18. Nagradni zadatak br. 13 (specijalni novogodišnji) 86
19. Nagradni zadatak br. 14 87
20. Rezultati konkursa za nagradni zadatak br. 10 87
21. Rezultati konkursa na nagradni zadatak br. 11 88
22. Priznanja školama. . . . . 3. str. korica

CENA 3 DINARA