

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

P R I R O D N O M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

METODA ZA REŠAVANJE NESTACIONARNOG TEMPERATURSKOG
MAGNETOHIDRODINAMIČKOG GRANIČNOG SLOJA PRI
LAMINARNOM STRUJANJU NESTIŠLJIVOG FLUIDA

- Doktorska disertacija -

Magistar Tomislav V. Ašković

dipl.maš.ing.

Rukovodilac disertacije

Prof.Dr.Viktor N.Saljniov, šef Katedre
za MEHANIČU FLUIDA Maš. fak. u Beogradu

- BEOGRAD 1976 -

S A D R Ž A J

	Spisak osnovnih oznaka	1
	U V O D	4
§ 1.	Nestacionarni MHD ravanski granični sloj	7
1.1.	Uvod	7
1.2.	Izvodjenje osnovnih jednačina nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturnog graničnog sloja	12
1.3.	Kratak pregled radova	20
§ 2.	Nestacionarni ravanski laminarni MHD brzinski granični sloj	26
2.1.	Izvodjenje univerzalne jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja	26
2.2.	Analitičko i numeričko rešenje u jednoparametarskom približenju	30
2.2.1.	Analitička rešenja	33
2.2.2.	Numerička rešenja	35
2.3.	Primer proračuna nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja	36
2.3.1.	Analiza uticaja magnetnog polja na odvajanje graničnog sloja	37
2.3.2.	Uticaj magnetnog polja na veličinu tangencijalnog napona na površini tela	40
2.3.3.	Uticaj magnetnog polja na profile brzina u graničnom sloju	41
§ 3.	Nestacionarni ravanski laminarni MHD temperaturni granični sloj	43
3.1.	Termometarski problem	43
3.1.1.	Izvodjenje univerzalne jednačine	44
3.1.2.	Analitičko i numeričko rešenje u jednoparametarskom približenju	46
3.1.3.	Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturnog graničnog sloja	50

3.2.	Slučaj zadatog promenljivog toplotnog fluksa na površini tela	52
3.2.1.	Izvodjenje univerzalne jednačine	53
3.2.2.	Analitičko i numeričko rešenje u jednoparametarskom približenju	56
3.2.3.	Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja	59
3.3.	Problem zagrevanja ili hladjenja pri zadatoj konstantnoj temperaturi na površini tela	62
3.3.1.	Izvodjenje univerzalne jednačine	62
3.3.2.	Analitičko i numeričko rešenje u jednoparametarskom približenju	65
3.3.3.	Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja	68
3.4.	Slučaj zadate promenljive temperature na površini tela	71
3.4.1.	Izvodjenje univerzalne jednačine	71
3.4.2.	Analitičko i numeričko rešenje u jednoparametarskom približenju	74
3.4.3.	Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja	77
	Z A K L J U Č A K	81
	L I T E R A T U R A	85

Spisak osnovnih oznaka

- A - normirajuća konstanta
a - koeficijent temperaturske provodnosti ($= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$)
Al- Alfvenov broj ($= N/Re_m$)
 a_k - koeficijenti-funkcije
 \vec{B} - vektor indukcije magnetnog polja
 b_k - koeficijenti-funkcije
 e_k - koeficijenti-funkcije
 c_p - specifična toplota
 d_k - koeficijenti-funkcije
 \mathcal{E} - energija
 \vec{E} - vektor napona električnog polja
 E_k - koeficijenti-funkcije
 e_k - koeficijenti-funkcije
Ec- Ekertov broj ($= v_\infty^2 / (c_p \cdot (\Delta T))$)
 \vec{F} - vektor zapreminskih sila
F - bezdimenziska strujna funkcija
f - univerzalne funkcije
g - Veberove funkcije
 G_k - koeficijenti-funkcije
Ha- Hartmanov broj ($Ha^2 = N \cdot Re$)
 \vec{J} - vektor gustine električne struje
k - celi pozitivni brojevi
L - karakteristična dužina
 M_k - koeficijenti-funkcije
 m_k - koeficijenti-funkcije
N - magnetni broj ($= \sigma \cdot B^2 / \rho$)
* N - bezdimenziski magnetni, Stjuartov broj ($= N \cdot R / v_\infty$)
Nu- Nuseltov broj ($= \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{R}{\Delta T}$)
p - pritisak
Pr- Prandtlov broj ($= \nu / a$)
Q - Džaulova toplota
 q_0 - funkcija
R - poluprečnik kružnog cilindra
Re- Rejnoldsov broj ($= v_\infty \cdot R / \nu$)
Re_m - Rejnoldsov magnetni broj ($= \mu \cdot \sigma \cdot v_\infty \cdot R$)
T - temperatura
t - vreme



- Sh- Struhalov broj ($= \dot{t} = t \cdot V_{\infty} / R$)
- \vec{U} - vektor brzine spoljašnjeg strujanja
- u - podužna brzina u graničnom sloju
- V - brzina, funkcija
- \vec{v} - vektor brzine strujanja
- v - poprečna brzina u graničnom sloju
- Φ - disipativna funkcija
- x, y - podužna i poprečna koordinata
- \dot{z} - funkcija

α_k - beskonačni skup parametara

β_k - beskonačni skup parametara

γ_k - beskonačni skup parametara

δ - debljina graničnog sloja

δ^* - debljina istiskivanja

δ^{**} - debljina gubitka impulsa

δ_k - beskonačni skup parametara

ϵ_k - beskonačni skup parametara

η - bezdimenziska poprečna koordinata

λ - koeficijent toplotne provodljivosti

λ_k - beskonačni skup parametara

μ - dinamička viskoznost

μ^* - magnetna propustljivost

μ_k - beskonačni skup parametara

ν - kinematička viskoznost

Σ - zbir

σ - elektro-provodljivost

ρ_e - zapreminska gustina naelektrisanja

τ - tangencijalni napon

φ, ϑ - funkcije

ψ - strujna funkcija

Ω - funkcija

θ_k - koeficijenti-funkcije

Δ - Laplasov operator $(= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$

∇ - Hamiltonov ("nabla") operator $(= \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j})$

ρ - gustina fluida

Značenje indeksa i simbola uz veličine

- * - bezdimenziska veličina (zvezdica iznad)
- ' - izvod po promenljivoj η ili po podužnoj koordinati x , (prim, sekund, itd.)
- - izvod po vremenu (tačka iznad)
- ~ - srazmerno, reda veličine
- ∞ - u beskonačnosti
- e - električna
- em - elektro-magnetna
- in - inercijalna
- kin - kinetička
- L - Lorencova
- m - magnetna
- p - ploča (oznaka veličina na ravnoj ploči)
- r - relativna
- vis - viskozna
- w - na površini (zidu) tela
- o - univerzalna funkcija - koeficijent ("slobodan član")
- o,l - " " " " uz parametar \mathcal{L}_1
- o,ll - " " " " " " \mathcal{L}_1^2
- lb,o - " " " " " " β_1
- lb,l - " " " " " " $\mathcal{L}_1 \beta_1$
- lc,o - " " " " " " γ_1
- lc,l - " " " " " " $\mathcal{L}_1 \gamma_1$
- lble,o - " " " " " " $\beta_1 \gamma_1$
- llb,o - " " " " " " β_1^2
-
-
-

Važi isto pravilo obeležavanja indeksa uz univerzalne funkcije - koeficijente uz parametre: $\delta_1, \epsilon_1, \lambda_1, \mu_1$.

Ostale korišćene oznake objašnjene su u tekstu.

U V O D

Magnetna hidrodinamika je kao sastavni deo fizike i od ranije poznata, pa je u okviru nje proučavana u neznatnoj meri dugi niz godina. Poslednjih dvadesetak godina međjutim, ona je postala veoma aktuelna naučna oblast koja se intenzivno i brzo razvija i za kratko vreme ona se svrstala među opširne i značajne oblasti Mehanike fluida. Do 1957 godine magnetna hidrodinamika se uglavnom primenjivala u geofizici i astronomiji. Tih godina uvidelo se da ona ima veliki značaj i za tehniku. T.G.Kauling je naime 1957 godine /1/ sakupio i prvi potpunije izložio osnovne postavke magnetne hidrodinamike. Do tada, ona je imala puni značaj samo kod proučavanja tzv. "kosmičkih" problema tj. pri izučavanju jezgra Zemlje, Sunca, zvezda i medjuzvezdanog prostora. Usled ogromnih razmera kosmičkog prostora, proučavanje pomenutih problema se svodilo, uglavnom, na posmatranje događaja i objašnjavanje uočenih kosmičkih pojava najčešće posredstvom matematičke obrade. Usled prostornih i vremenskih ograničenja u laboratorijskim uslovima, eventualni eksperimenti su dopuštali donošenje pouzdanih zaključaka samo o opštem karakteru kosmičkih pojava.

Za proteklo-relativno kratko vreme magnetna hidrodinamika se, kao savremena oblast mehanike i fizike, veoma intenzivno razvijala. Postignuti su značajni teorijski i praktični rezultati kod rešavanja mnogih problema - kojima se ova naučna oblast bavi. Sigurno je međjutim da treba uložiti još dosta naučnog i stručnog istraživačkog rada da bi se neki od smelih i ambicioznih poduhvata od ekonomskog značaja mogli primeniti u praksi. Izdvojiće se i dalje navesti samo neki najvažniji problemi.

- Problem upravljanja termonuklearnim reakcijama, iako je još u stadijumu istraživanja, eksperimentalna postrojenja zahtevaju više specijalizovanog tehničkog znanja. Međjutim i posle rešavanja svih teorijskih i praktičnih problema nuklearne sinteze doći će do porasta potrebe za rešavanjem problema projektovanja, izgradnje i eksploatacije privrednih postrojenja.

- Problem izgradnje magnetohidrodinamičkih raketnih motora za kosmičke letove koji, posredstvom plazme kao radnog tela - ubrzavane magnetnim poljem, ostvaruju veličinu specifičnog impulsa (odnos brzine isticanja gasova i ubrzanja rakete na zemlji) i preko 10 000 sekundi. Treba napomenuti radi uporedjenja da kod savremenih raketnih motora pokretanih hemijskim gorivom, veličina specifičnog impulsa ne prelazi 400 sekundi.

- Problem direktnog pretvaranja toplotne i kinetičke energije plazme u električnu energiju posredstvom postrojenja koja se zovu magnetohidrodinamički (MHD) generatori; ili pretvaranja električne energije u energiju plazme, posredstvom postrojenja poznatih pod nazivom MHD-pumpe. Ideja nije nova, ali novi su postupci koji obezbeđuju neophodni stepen jonizacije, kao i savremeni vatrostalni materijali koji omogućuju praktičnu realizaciju takve ideje. Prednosti takvih postrojenja su: odsustvo niza konstruktivnih problema - s obzirom da ne postoji pokretnih delova, manja su mehanička opterećenja, manji gabariti i veći stepeni iskorišćenja. Osnovni nedostatak - jeste potreba za visokim temperaturama, neophodnim za postizanje potrebnih stepena jonizacije.

- Problem izgradnje raznih mernih uređaja: magnetnih merača protoka, elektromagnetnih brzinomera, merača brzine morskih struja i dr.

Veliki broj do sada objavljenih radova iz oblasti magnetne hidrodinamike obuhvata sledeće pravce istraživanja: stabilnost visoko-temperaturne plazme, magnetnu gasnu dinamiku, strujanje provodnog fluida kroz cevi i kanale, teoriju MHD-mašina, teoriju MHD graničnog sloja. Pri tome osim raznovrsnosti koja postoji s obzirom na predmet proučavanja, treba ukazati na još veću raznolikost u pristupu rešavanju odnosno u postavkama pojedinih zadataka. U nekim slučajevima naime, glavni cilj predstavlja proučavanje poremećaja spoljašnjeg magnetnog polja usled strujanja elektroprovodnog fluida. U drugim slučajevima, poremećaji spoljašnjeg magnetnog polja se zanemaruju, a osnovni cilj je proučavanje uticaja magnetnog polja na hidrodinamičke karakteristike strujanja. O ovome slu-

čaju, kada je magnetni Reynoldsov broj mali i nema izvora spoljašnjeg električnog polja, biće detaljnije govora u ovom radu.

O navedenim problemima ovde su date osnovne informacije, a iscrpniji podaci i objašnjenja mogu se naći u specijalnim monografijama /1/ do /6/ i mnogobrojnim radovima.

Ovaj rad se odnosi na nestacionarni MHD brzinski i temperaturski granični sloj pri laminarnom, ravanskom strujanju nestišljivog elektroprovodnog fluida. Rezultati rada su dati u dva dela. Prvi deo obuhvata: uvodne napomene razmatranog problema, izvodjenje odgovarajućih osnovnih jednačina, kratak pregled srodnih radova u svetu i kod nas, rešenje nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturskog graničnog sloja. Naime, za izračunavanje nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja neophodno je raspolagati rešenjima odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja. Osnovne jednačine razmatranog brzinskog i temperaturskog graničnog sloja su dovedene na univerzalni oblik tj. na jednačine koje ne zavise od veličina karakterističnih za konkretne zadatke. Pri tome su analitička i numerička rešenja za univerzalne funkcije izračunata u jedno-parametarskoj aproksimaciji, razvijanjem rešenja u red. Na kraju su dati primeri proračuna nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturskog graničnog sloja, za slučaj opstrujavanja kružnog cilindra pokrenutog trzajem. Napominje se da je temperaturski granični sloj razmatran za četiri slučaja graničnih uslova na površini tela, poznatih pod nazivima: termometarski problem, toplotni fluks zadat na površini tela, problem hlađenja ili zagrevanja pri konstantnoj i pri promenljivoj (zadatoj) temperaturi tela. Na kraju dat je zaključak o dobijenim rezultatima. U drugom delu rada dat je postupak numeričkog proračuna, priloženi su neki karakteristični programi i konačno, dati su dijagrami i tablice vrednosti svih univerzalnih funkcija i nekih karakterističnih rezultata pri obradi primera, kako za brzinski tako i temperaturski nestacionarni MHD granični sloj.

§ 1. Nestacionarni MHD ravanski granični sloj

1.1. Uvod

Magnetna hidrodinamika je naučna oblast koja se bavi proučavanjem kretanja elektroprovodnog fluida izloženog dejstvu električnog i magnetnog polja. Pri kretanju provodne sredine u električnom i magnetnom polju, u njoj se javljaju električne struje. Usled uzajamnog dejstva tih struja sa elektromagnetnim poljem, dolazi do stvaranja dopunskih zapreminskih sila, koje bitno utiču na hidrodinamičke karakteristike kretanja provodne sredine. Treba podsetiti da sile iste prirode dejstvuju na čvrste provodnike kada se oni kreću u elektromagnetnom polju, i da se ova pojava široko koristi u elektrotehnici. S druge strane, indukovane električne struje u provodnoj sredini dovode do promena elektromagnetnog polja. Ta uzajamna dejstva elektromagnetnog polja i kretanja provodne sredine predstavljaju specifičnu osobenost magnetne hidrodinamike, a istovremeno dovode i do velikih teškoća pri rešavanju problema.

Iz mehanike fluida je poznato da se kretanje realnog fluida opisuje sistemom nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, i da postoje velike matematičke teškoće za njihovo rešavanje. S druge strane, električno i magnetno polje se opisuju jednačinama poznatim pod nazivom Maksvelove jednačine. S obzirom da su ove diferencijalne jednačine obične i linearne, to podgrejava nadu da se mogu dobiti rešenja za neke slučajeve, kada se sistemu jednačina kretanja dodaju i Maksvelove jednačine.

Jedan od načina, kojim se znatno uprošćava rešavanje problema strujanja realnog fluida (bilo za slučaj strujanja u kanalima bilo pri opstrujavanju tela), predstavlja teorija graničnog sloja. Ona se zasniva na uslovnoj podeli strujanja na jezgro (ili spoljašnje strujanje) i uzan granični sloj. Može se smatrati da raspodela parametara u jezgru odnosno spoljašnjem strujanju ne zavisi od graničnih uslova na površini kanala ili tela. U graničnom sloju međjutim parametri strujanja se naglo menjaju od vrednosti na površini do vred-



nosti u jezgru odnosno spoljašnjem strujanju. Velike vrednosti gradijenata brzine, temperature, magnetnog ili električnog polja u graničnom sloju u pravcu normale na površinu, imaju za posledicu pojavu velikih vrednosti tangencijalnih napona, protoka toplote, difuzionih protoka jona ili elektrona. Činjenica, da se u graničnom sloju najviše ispoljavaju disipaciona svojstva fluida, koristi se za izračunavanje trenja i prenosa toplote kroz graničnu površinu, prilikom proučavanja strujanja viskozne toploprovodne sredine. Prema ponašanju pojedinih karakterističnih veličina, razlikujemo sledeće vrste graničnih slojeva: dinamički - brzinski, temperaturski, a ukoliko postoje velike promene jačine magnetnog polja, uvodi se u razmatranje i magnetni granični sloj. U svakom slučaju radi se o asimptotskim graničnim slojevima tj. za $y \rightarrow \infty$: $u \rightarrow U_{\infty}$, $T \rightarrow T_{\infty}$ i $B \rightarrow B_{\infty}$. Debljine pojedinih graničnih slojeva su u opštem slučaju različite.

Iz mnogobrojne literature iz oblasti hidromehanike neprovodnog fluida, poznato je da se pri rešavanju nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina nailazi na velike matematičke teškoće, bilo da se radi o direktnim pokušajima rešavanja Navije-Stoksovih jednačina, bilo da se razmatraju Prandtlove jednačine graničnog sloja. Uvodjenjem u razmatranje uticaja elektromagnetnog polja, problem proučavanja kretanja provodnog fluida se još više komplikuje i otežava. Jer, osim promene vektora elektromagnetnog polja u prostoru i vremenu, mogu se menjati na veoma različite načine i fizičke karakteristike fluida: elektroprovodnost, magnetna propustljivost, viskoznost, toplotna provodljivost i dr. Zato je kod proučavanja konkretnih slučajeva strujanja neophodno da se uvode izvesne pretpostavke i ograničenja u cilju uprošćavanja polaznih jednačina i njihovog uspešnog rešavanja.

Pre nego što se izvedu polazne jednačine razmatranog problema, na osnovu kriterijuma sličnosti i dimenziske analize ukazaće se na osnovne karakteristike magnetohidrodinamičkih pojava. Na delić viskoznog, provodnog fluida, koji se kreće u elektromagnetnom polju, dejstvuju inercijalne, viskozne i elektromagnetne sile. Za pomenute sile i to po jedinici zapremine, dobijaju se na osnovu dimenziske analize sledeći izrazi /6/:

- za inercijalne sile $F_{in} \sim \rho \cdot \frac{U^2}{L}$, (1.1)

- za sile trenja $F_{vis} \sim \rho \cdot \nu \cdot \frac{U}{L^2}$, (1.2)

- za elektromagnetne sile $F_{em} \sim \sigma \cdot B_0 \cdot U$. (1.3)

Iz odnosa ovih izraza dobijaju se karakteristični bezdimenzijski brojevi, koji se koriste u magnetnoj hidrodinamici za lakše razvrstavanje mogućih strujanja provodnog fluida. Tako, na primer, iz odnosa (1.1) i (1.2) dobija se Reynoldsov broj:

$$\frac{F_{in}}{F_{vis}} \sim \frac{\rho \cdot U^2 \cdot L \cdot L}{\rho \cdot \nu \cdot U \cdot L} = \frac{U \cdot L}{\nu} = Re \quad , \quad (1.4)$$

čiji je značaj u mehanici neprovodnog fluida dobro poznat. Iz odnosa (1.3) i (1.1) dobija se Stjuartov broj:

$$\frac{F_{em}}{F_{in}} \sim \frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot U}{\rho \cdot U \cdot U} \cdot L = \frac{\sigma \cdot B_0^2}{\rho} \cdot \frac{L}{U} = N \cdot \frac{L}{U} = \overset{*}{N} \quad , \quad (1.5)$$

treba napomenuti da se ponegde u literaturi može naći broj $N = \sigma \cdot B_0^2 / \rho$, koji se zove magnetni broj. S obzirom da on ima dimenziju (s^{-1}), češće je u upotrebi bezdimenzijski magnetni Stjuartov broj $\overset{*}{N}$. U ovom radu su, prema potrebi, korišćena oba navedena oblika ovog broja. U magnetnoj hidrodinamici se često koristi još kvadratni koren odnosa (1.3) i (1.2), koji je poznat kao Hartmanov broj:

$$\left(\frac{F_{em}}{F_{vis}} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{\sigma \cdot B_0^2 \cdot U \cdot L^2}{\rho \cdot \nu \cdot U} \right)^{\frac{1}{2}} = B_0 \cdot L \cdot \left(\frac{\sigma}{\rho \cdot \nu} \right)^{\frac{1}{2}} = Ha \quad . \quad (1.6)$$

Lako se može uočiti da između Hartmanovog, Stjuartovog i Reynoldsovog broja postoji sledeća veza:

$$Ha^2 = \overset{*}{N} \cdot Re \quad . \quad (1.7)$$

Osim uzajamnog dejstva spoljašnjeg elektromagnetnog polja i indukovanih električnih struja u provodnom fluidu, ponekad je neophodno da se uzmu u obzir i poremećaji spoljašnjeg elektromagnetnog polja, koje prouzrokuje sopstveno magnetno polje indukovanih struja. Indukcija sopstvenog magnetnog polja indukovanih struja, prema /6/, data je izrazom:

$$\Delta B \sim \mu^* \cdot \sigma \cdot B_0 \cdot U \cdot L \quad (1.8)$$

Odnos (1.8) i indukcije spoljašnjeg magnetnog polja (B_0) predstavlja tzv. magnetni Reynoldsov broj:

$$\frac{\Delta B}{B_0} \sim \frac{\mu^* \cdot \sigma \cdot B_0 \cdot U \cdot L}{B_0} = \frac{U \cdot L}{\frac{1}{\mu \cdot \sigma}} = \frac{U \cdot L}{\nu_m} = Re_m \quad (1.9)$$

Ponegde se u literaturi, analogno hidrodinamici neprovodnog fluida, koristi tzv. magnetna viskoznost provodnog fluida - kao što se vidi iz (1.9) $\nu_m = 1/(\mu \cdot \sigma)$.

Kombinovanjem Re , N i Re_m brojeva mogu da se dobiju i drugi kriterijumi, karakteristični za pojave pri strujanju provodnog fluida u prisustvu magnetnog polja. Tako se, na primer, delenjem Stjuartovog broja sa Reynoldsovim magnetnim brojem dobija Alfvenov broj:

$$Al = \frac{N}{Re_m} = \frac{B_0^2}{\mu^* \cdot \rho \cdot U^2} = \frac{B_0^2}{\rho \cdot U^2} \sim \frac{\mathcal{E}_{mag}}{\mathcal{E}_{kin}} \quad (1.10)$$

koji pokazuje red veličine odnosa magnetne i kinetičke energije - računate po jedinici zapremine fluida.

Uvedeni bezdimenziski brojevi se koriste radi lakšeg postavljanja i definisanja razmatranih problema strujanja, kao i izvodjenja polaznih jednačina graničnog sloja. Radi ilustracije značaja ovih brojeva navode se neki zaključci izvedeni na osnovu njihovog reda veličine. Na primer, u slučaju strujanja pri brojevima Ha malim u odnosu na jedinicu tj. za $Ha \ll 1$, zaključuje se da su elektromagnetne sile male u odnosu na sile viskoznosti. Pri proračunu takvog strujanja može se zanemariti uticaj elektromagnetnog polja odnosno može se smatrati da se radi o strujanju viskoznog neprovodnog fluida. Za $Ha \sim 1$, mora se u proračunima voditi računa o uticaju i viskoznih i elektromagnetnih sila na parametre strujanja. Takvi slučajevi strujanja spadaju u oblast interesovanja magnetne hidrodinamike. Za $Ha \gg 1$, elektromagnetne sile su znatno veće od viskoznih sila, koje se stoga mogu zanemariti, pa se može smatrati kao da se radi o strujanju neviskoznog fluida. Ali u kolikoj meri je bitan uticaj elektromagnetnog polja na parametre strujanja, nije moguće proceniti samo na osnovu vrednosti Hartmanovog broja, već se

mora voditi računa i o redu veličine elektromagnetnih sila u odnosu na inercijske sile. Kao što je ranije istaknuto, odnos tih sila određuje magnetni Stjuartov broj (1.5). Prema tome, uticaj elektromagnetnog polja na parametre strujanja provodnog fluida može da se zanemari za slučajeve: $Ha \ll 1$ i $N^* \ll 1$. Pri vrednostima $N^* > 1$, elektromagnetne sile su istog reda veličine ili veće od sila inercije. Tada se uticaj elektromagnetnog polja na parametre strujanja mora uzeti u obzir i oni se izračunavaju na osnovu jednačina magnetne hidrodinamike, o kojima će biti više govora. Na kraju treba još da se istakne važnost magnetnog Rejnoldsovog broja. Za magneto-hidrodinamička strujanja fluida, čija je elektroprovodnost mala, sopstveno magnetno polje indukovanih struja u fluidu je zanemarljivo malo odnosno uticaj strujanja na magnetno polje praktično ne postoji. U takvim slučajevima je $Re_m \ll 1$, a razmatranje takvih strujanja se često u literaturi naziva rešavanjem problema u "bezindukcionom" približenju.



1.2. Izvođenje osnovnih jednačina nestacionarnog MHD
brzinskog i temperaturskog graničnog sloja

S obzirom na složenost problema strujanja provodnog fluida kroz elektromagnetno polje, neophodno je da se uvedu izvesne pretpostavke i uprošćenja, kako bi se problem mogao matematički da izrazi i uspešno reši. Pritom je od bitnog značaja da usvojeni fizički model ostane interesantan i u smislu praktične primene.

Izvršena istraživanja su pokazala da, ne samo jonizovani gasovi, nego i većina tečnosti poseduje svojstvo elektroprovodnosti. Naročito tečni metali imaju visoku elektroprovodnost. Čak i destilovana voda u kontaktu sa atmosferom posle kraćeg vremena postaje elektroprovodna. Stepem elektroprovodnosti fluida zavisi ne samo od njegovog hemijskog sastava, nego i od temperature i raznih primesa (prema A.N. Patraševu /4/). U elektroprovodnom fluidu, pri njegovom strujanju u elektromagnetnom polju, indukuje se struja čiji je vektor gustine unpravan na vektore brzine strujanja i magnetne indukcije. Kao rezultat uzajamnog dejstva indukovanih struja i spoljašnjeg elektromagnetnog polja, javlja se i dejstvuje na fluid nova zapreminska sila elektromagnetne prirode, poznata u literaturi pod nazivom Lorencova sila.

Iz elektrodinamike je poznata sledeća relacija za izračunavanje Lorencove sile - po jedinici zapremine fluida:

$$\vec{F}_L = \rho_e \cdot \vec{E} + [\vec{j}, \vec{B}], \quad (1.11)$$

gde vektor gustine električne struje, saglasno uopštenom Omovom zakonu iznosi

$$\vec{j} = \rho_e \cdot \vec{v}_r + \sigma \cdot \{ \vec{E} + [\vec{v}_r, \vec{B}] \}. \quad (1.12)$$

U slučajevima strujanja provodnog fluida sa malom gustinom naelektrisanja ($\rho_e \approx 0$) i u odsustvu spoljašnjeg električnog polja ($\vec{E} = 0$), izraz za Lorencovu silu (1.11) se znatno uprošćava:

$$\vec{F}_L = \sigma \cdot [[\vec{v}_r, \vec{B}], \vec{B}]. \quad (1.13)$$

Iz elektrodinamike je poznat i sledeći izraz za izračunava-

nje Džaulove toplote:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{j}^2 = \sigma \cdot [\vec{v}_r, \vec{B}]^2, \quad (1.14)$$

koji takodje važi za slučajeve definisane sa: $\varphi_e \approx 0$, $\vec{E} = 0$. Prilikom razmatranja strujanja jonizovanih gasova, mora se voditi računa o stepenu jonizacije i koncentraciji naelektrisanih čestica, pa su tada izrazi za Lorencovu silu i Džaulovu toplotu znatno komplikovaniji.

Pre nego što se pristupi izvodjenju polaznih jednačina: jednačine kretanja i energijske jednačine - za usvojeni fizički model strujanja, potrebno je da se proverí da li ostaje u važnosti uopšteni Njutnov zakon o unutrašnjem trenju ako je fluid provodan i u njemu dejstvuju elektromagnetne sile. Brižljivo sprovedeni opiti u tom smislu, pokazali su da se rešenja dobijena određivanjem viskoznih sila prema Njutnovom zakonu - dobro slažu sa rezultatima eksperimenata. Na osnovu toga danas se smatra da se viskozne sile u magnetohidrodinamičkom strujanju mogu određivati sa zadovoljavajućom tačnošću prema uopštenom Njutnovom zakonu /4/. Prema tome, za dobijanje jednačina kretanja i energijske jednačine provodnog fluida u elektromagnetnom polju, dovoljno je da se u Navije-Stoksove jednačine i energijsku jednačinu uvedu novi članovi, koji uzimaju u obzir uticaj Lorencove sile i Džaulove toplote na parametre strujanja.

U ovom radu se razmatra brzinski i temperaturski granični sloj pri nestacionarnom ravanskom laminarnom opstrujavanju tela provodnim nestišljivim fluidom, odnosno pri kretanju tela kroz provodan nestišljiv fluid, za slučaj kada je magnetno polje nepokretno u odnosu na fluid (magnetno polje i fluid se zajedno kreću i opstrujavaju nepokretno telo, ili magnetno polje i fluid su nepokretni a telo se kreće). Usvaja se da je indukcija magnetnog polja funkcija samo podužne koordinate tj. $B = B(x)$ sa linijama sila upravnim na površinu tela. Dalje se pretpostavlja da spoljašnje električno polje ne postoji i da je vrednost magnetnog Rejnoldsovog broja znatno manja od jedinice, tj. razmatraju se rešenja u tzv. "bezindukcionom" približenju. Osim toga, smatra se da su brzine strujanja mnogo manje od brzine svetlosti, i čini se uobičaj-

jena pretpostavka kod proučavanja temperaturnog graničnog sloja, da su temperaturne razlike dovoljno male (ispod 50°C) odnosno da su karakteristične veličine fizičkih svojstava fluida konstantne (viskoznost, toploprovodljivost, elektroprovodljivost, magnetna propustljivost, specifična toplota i dr.). Iako učinjene pretpostavke dovoljno uprošćavaju razmatrani problem, tako da se može pristupiti njegovom matematičkom rešavanju, usvojeni fizički model strujanja je interesantan i sa praktične tačke gledišta jer se odnosi na veliki broj magnetohidrodinamičkih strujanja od tehničkog značaja.

U slučaju opstrujavanja tela: bilo da se fluid i magnetno polje zajedno kreću a telo miruje, bilo da se telo kreće kroz nepokretne fluid i magnetno polje, linije sila magnetne indukcije se pomeraju u odnosu na telo brzinom U . Usled dejstva viskoznih sila, fluidni delići u graničnom sloju presecaju linije sila magnetne indukcije relativnim brzinama $\vec{v}_r = \vec{U} - \vec{u}$. Kao rezultat uzajamnog dejstva spoljašnjeg magnetnog polja i indukovanih struja u graničnom sloju, javljaju se: (izvodjenje vidi u prilogu P- I.1. str. 90)

- zapreminska elektromagnetna Lorencova sila

$$\vec{F}_L = -\vec{i} \cdot \sigma \cdot B^2 \cdot (u - U) = \vec{i} \cdot \sigma \cdot B^2 \cdot (U - u) , \quad (1.15)$$

- i Džaulova toplota

$$Q = \sigma \cdot B^2 \cdot (u - U)^2 . \quad (1.16)$$

Prema tome, dok se dinamička jednačina razmatranog strujanja provodnog fluida u vektorskom obliku dobija kada se u Navije-Stoksovu jednačinu uvede dopunski član (1.15)

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \nu \cdot \Delta \vec{v} + \vec{F}_L , \quad (1.17)$$

dotle jednačina kontinuiteta zadržava isti oblik kao i za strujanje neprovodnog nestišljivog fluida

$$(\nabla, \vec{v}) = \text{div } \vec{v} = 0 . \quad (1.18)$$

Odgovarajuća energijska jednačina se dobija dodavanjem člana (1.16) na energijsku jednačinu neprovodnog fluida

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} = \lambda \cdot \Delta T + \mu \cdot \Phi + Q , \quad (1.19)$$

gde je: $\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 ,$

disipativna funkcija, a " $\mu \cdot \Phi$ " predstavlja priraštaj toplote usled trenja.

Parametri spoljašnjeg električnog i magnetnog polja se određuju iz Maksvelovih jednačina, koje predstavljaju osnovne zakone-postulate elektrodinamike. U razmatranom slučaju strujanja, međjutim, spoljašnje električno polje ne postoji a vrednost magnetnog Rejnoldsovog broja je znatno manja od jedinice, odnosno uticaj sopstvenog magnetnog polja indukovanih struja na spoljašnje magnetno polje je zanemarljivo mali. Stoga se indukcija spoljašnjeg magnetnog polja može smatrati poznatom odnosno zadatom veličinom $B = B(x)$. Treba napomenuti da je zanemarljivo mala indukcija sopstvenog magnetnog polja uslovljena malom gustinom indukovane struje, ali to ne znači da je mala i Lorencova sila. Prema tome, u ovom slučaju nema potrebe da se rešavaju Maksvelove jednačine.

Jednačina kretanja (1.17) u skalarnom, razvijenom obliku za pravce x- i y- ose, s obzirom na relaciju (1.15), glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.21)$$

Energijska jednačina (1.19) u razvijenom obliku, s obzirom na relaciju (1.16), glasi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = & \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{\sigma B^2}{\rho \cdot c_p} (u - U)^2. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Uprošćavanjem jednačina kretanja (1.20), (1.21) i energijske jednačine (1.22) dolazi se do jednačina nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturnog graničnog sloja. Posmatrajući strujanje neprovodnog fluida male viskoznosti, odnosno opštije rečeno, strujanja pri velikim Rejnoldsovim brojevima, L. Prandtl je prvi (1904 godine) izvršio uprošćavanje Navije-Stoksovih jednačina procenjivanjem reda veličine pojedinih članova i zanemarivanjem članova nižeg reda veličine u odno-

su na jedinicu /7/. Tako dobijene jednačine su poznate u literaturi pod nazivom Prandtlove jednačine graničnog sloja. Na potpuno analogan način izvršice se ocenjivanje uticaja Lorencove sile i Džaulove toplote, odnosno magnetnog polja na parametre strujanja provodnog fluida i izvesti jednačine nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturskog graničnog sloja. U cilju procenjivanja reda veličine pojedinih članova jednačina (1.20), (1.21), (1.22), celishodno ih je napisati u bezdimenziskom obliku (vidi prilog P- I.2. str. 91):

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - N^* (u^* - 1); \quad (1.23)$$

$\sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim \delta_u^* \quad \sim \delta_u^{*-1} \quad \sim 1 \quad \sim \delta_u^{*2} \quad \sim 1 \quad \sim \delta_u^{*-2} \quad \sim 1 \quad \sim 1$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right); \quad (1.24)$$

$\sim \delta_u^* \quad \sim 1 \quad \sim \delta_u^* \quad \sim \delta_u^* \quad \sim 1 \quad (\because \sim \delta_u^*) \quad \sim \delta_u^{*2} \quad \sim \delta_u^* \quad \sim \delta_u^{*-1}$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr \cdot Re} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right\} + N^* Ec (u^* - 1)^2 \quad (1.25)$$

$\sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim 1 \quad \sim \delta_T^* \quad \sim \delta_T^{*-1} \quad \sim \delta_T^* \quad \sim 1 \quad \sim \delta_T^{*-2} \quad \sim \delta_u^{*2} \quad \sim 1$

Jednačina kontinuiteta (1.18) u bezdimenziskom obliku glasi:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1.26)$$

$\sim 1 \quad \sim 1$

U ovim jednačinama (1.23) do (1.26) zvezdicom su označene pojedine bezdimenziske veličine (vidi spisak oznaka, str.1).

Pored, od ranije poznatih, Rejnoldsovog (Re) i Stjuartovog (N) broja, u jednačini (1.25) su se prilikom dovodjenja na bezdimenziski oblik pojavili i Prandtlov (Pr) i Eker-tov (Ec) broj. Prandtlov broj zavisi od fizičkih karakteris-tika fluida na sledeći način:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu}{\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}} = \frac{\rho \cdot \nu \cdot c_p}{\lambda} \quad (1.27)$$

i ima vrednost za vazduh oko 0,72 ; za vodu oko 7,0 a za ulja može dostići i vrednost 1 000. Ekertov broj, u literaturi se ponekad naziva "temperaturski kriterijum", određen je sledećim izrazom:

$$Ec = \frac{U^2}{c_p \cdot (T_w - T_\infty)} = \frac{U^2}{c_p \cdot (\Delta T)_0} \quad (1.28)$$

Iz jednačine (1.24) sleduje da je $\frac{\partial p}{\partial y^*}$ reda veličine δ_u^* . Integralenjem iste jednačine u granicama od $0 - \delta_u^*$ dobija se da su razlike pritiska na granici graničnog sloja i na površini tela, u poprečnom pravcu, reda veličine δ_u^{*2} tj. zanemarljivo male. Prema tome, pritisak u graničnom sloju u pravcu poprečne koordinate y je praktično konstantan.

Kada se u jednačini (1.23) odbace članovi nižeg reda veličine u odnosu na jedinicu, a zatim ona napiše u dimenzijskom obliku, dobija se sledeća jednačina nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U) \quad (1.29)$$

Na osnovu graničnog uslova na spoljašnjoj granici asimptotskog brzinskog graničnog sloja:

$$y \rightarrow \infty, \quad u = U(x, t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \right),$$

iz jednačine (1.29) sleduje relacija

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.30)$$

sa kojom jednačina (1.29) dobija sledeći oblik, pogodan za dalji rad,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U) \quad (1.31)$$

Jednačina kontinuiteta ostaje ista, tj. :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.32)$$

Jednačine (1.31) i (1.32) sa sledećim graničnim i početnim uslovima:

$$\begin{aligned} u &= U(t, x), v = 0 \text{ pri } y = 0 \text{ i } t = 0, \\ u &= 0, v = 0 \text{ pri } y = 0 \text{ i } t > 0, \\ u &\rightarrow U(t, x) \text{ pri } y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.33)$$

predstavljaju polazne jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja za razmatrani slučaj strujanja.

Kada se u energijskoj jednačini (1.25) odbace svi članovi nižeg reda veličine u odnosu na jedinicu, i ona napiše u dimenziskom obliku, dobija se sledeća polazna jednačina nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja razmatranog strujanja:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho \cdot c_p} \cdot (u - U)^2. \quad (1.34)$$

Složenost rešavanja problema nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja se sastoji i u tome što granični uslovi mogu da budu raznovrsni. Ovde će se razmatrati sledeća četiri različita slučaja graničnih uslova na površini tela:

1. toplotno izolovana površina tela odnosno tzv. termometarski problem

$$y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad (1.35)$$

2. zadat promenljivi toplotni fluks na površini tela

$$y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = q_0(t, x); \quad (1.36)$$

3. zagrevanje odnosno hladjenje površine tela strujom fluida, pri konstantnoj temperaturi tela

$$y = 0, \quad T = T_w = \text{const.}; \quad (1.37)$$

4. zagrevanje odnosno hladjenje površine tela strujom fluida, pri promenljivoj temperaturi tela

$$y = 0, \quad T = T_w(t, x). \quad (1.38)$$

Pri tome je na spoljašnjoj granici nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja sledeći granični uslov

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad (1.39)$$

u svim slučajevima (1. do 4.) isti.

Jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja (1.31), (1.32) sa graničnim uslovima (1.33), očigledno ne

zavise od temperaturnog polja. Međutim, iz jednačine (1.34) se vidi da temperaturno polje uvek zavisi od brzinskog polja, pa se temperaturni granični sloj može proučavati samo ako se raspolaže potpunim rešenjem jednačina odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja. Iz tog razloga je u ovom radu najpre određeno rešenje nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja, a zatim su rešavani problemi nestacionarnog MHD temperaturnog graničnog sloja, za pojedine granične uslove zadate relacijama (1.35) do (1.38).

Pre nego što se predje na rešavanje izvedenog sistema diferencijalnih jednačina, razmotrimo sada uticaj spoljašnjeg magnetnog polja na strujnu sliku pri opstrujavanju tela provodnim fluidom. Drugim rečima, pokušaćemo ne rešavajući same jednačine da izvedemo neke zaključke o uticaju novih, dopunskih članova u jednačinama (1.31) i (1.34) tj. Lorencove elektromagnetne sile i Džaulove toplote, na karakteristike brzinskog i temperaturnog graničnog sloja i o eventualnim promenama u poredjenju sa odgovarajućim slučajem strujanja neprovodnog fluida.

Na osnovu izraza za Lorencovu elektromagnetnu silu (1.15) i jednačine kretanja (1.29) lako se zaključuje da je Lorencova sila istog smera kao i brzina neporemećene struje \vec{U} , jer je $(U-u) > 0$. Intenzitet Lorencove sile raste sa približavanjem površini tela, jer je na površini tela $u=0$. Na osnovu toga sleduje da Lorencova sila ima suprotno dejstvo od "kočionog" dejstva sila trenja na površini tela. Usled toga se povećava gradijent brzine na površini tela, odnosno raste vrednost tangencijalnog napona, a sa njim i sila površinskog trenja. Ovo i predstavlja jedan od glavnih efekata uticaja magnetnog polja na opstrujavanje tela.

Što se tiče pojave odvajanja graničnog sloja, poznato je da se fizički uzrok odvajanja sastoji u tome što u tzv. difuzornom delu graničnog sloja ($\frac{dp}{dx} > 0$), kinetička energija fluidnih delića nije dovoljna da savlada silu površinskog trenja i silu uslovljenu porastom pritiska. U razmatranom slučaju strujanja Lorencova sila ima u toj oblasti graničnog sloja suprotan smer, u odnosu na silu trenja i pritisnu silu, usled čega dolazi do pomeranja tačke odvajanja nizvodno. Čak

se pri dovoljno jakom magnetnom polju, može da ostvari strujanje bez odvajanja graničnog sloja.

Izvodjenje nekih opštih zaključaka o uticaju Džaulove toplote (1.16) u energijskoj jednačini (1.34), na profile temperature ili gradijente temperature u graničnom sloju, otežano je i zbog raznovrsnosti mogućih graničnih uslova. Na osnovu oskudnih podataka u literaturi, koji se odnose uglavnom na razmenu toplote pri stacionarnom strujanju u magnetohidrodinamičkim kanalima /6/, može se izvesti zaključak da magnetno polje posredstvom povećanja gradijenta brzine u blizini zidova, indirektno utiče na povećanje intenziteta razmene toplote. I pored nastojanja da u literaturi nadjem eventualno neki rad iz oblasti nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja, u tome nisam uspeo. Zato će se detaljniji zaključci, o uticaju Džaulove toplote na karakteristike nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja, dati na kraju ovog rada - korišćenjem dobijenih rezultata. To ustvari i predstavlja doprinos ovog rada.

1.3. Kratak pregled radova

Kao što je već napomenuto, magnetna hidrodinamika se bavi proučavanjem niza problema, za čije razrešavanje postoji veliki interes u savremenoj tehnici. Kao na primer: upravljanje termonuklearnim reakcijama, zatim direktno pretvaranje kinetičke i toplotne energije u električnu i obrnuto, odnosno problemi strujanja u MHD kanalima MHD-generatora, -motora, -pumpi itd. Veliki broj naučnih radova teorijskog i eksperimentalnog karaktera, publikovanih za poslednjih dvadesetak godina, potvrđuju aktuelnost razvitka magnetne hidrodinamike. Zato se opravdano može da očekuje da puni razvoj ove relativno mlade naučne oblasti tek predstoji. Jedan od pravaca u kome se magnetna hidrodinamika razvija predstavlja proučavanje strujanja u graničnom sloju.

Spoljašnje elektromagnetno polje pruža široke mogućnosti da se utiče na karakteristike strujanja provodnog fluida, kako u smislu promena profila brzina odnosno pomeranja

tačke odvajanja, tako i na promene profila temperature odnosno na razmenu toplote u graničnom sloju. Prema tome, posredstvom spoljašnjeg elektromagnetnog polja može se upravljati karakteristikama graničnog sloja. Iskorišćavanje pomenutih mogućnosti u praktične svrhe predstavlja predmet istraživanja mnogih naučnika. Metode za rešavanje problema MHD graničnog sloja razvijale su se na sličan način kao metode za rešavanje problema graničnog sloja neprovodnog fluida u klasičnoj hidromehanici. Stoga se i brojni objavljeni radovi iz oblasti stacionarnog, znatno redje - nestacionarnog, MHD brzinskog i temperaturnog graničnog sloja, mogu razvrstati u dve grupe: tačna rešenja i tzv. približne-parametarske metode rešavanja problema graničnog sloja.

Pod tačnim rešenjima se podrazumevaju rešenja dobijena metodama, koje vode neposrednom integralenju jednačina graničnog sloja. Tu spadaju kao najbrojnija tzv. "slična" rešenja, koja se dobijaju za specijalne oblike funkcije brzine spoljašnjeg strujanja. U tim slučajevima se parcijalne diferencijalne jednačine graničnog sloja svode na sistem običnih diferencijalnih jednačina. Ta rešenja, međutim, imaju uglavnom samo teorijski značaj, jer su bez neke fizičke osnove.

Približne - parametarske metode za rešavanje problema graničnog sloja su znatno složenije, s obzirom da se stvarni raspored brzina zamenjuje približnim skupom profila posredstvom parametara (jednog ili više). Stoga one poseduju dobru fizičku osnovu i imaju veliki praktičan značaj. Tu spadaju metode u kojima se koriste poznate ideje za rešavanje problema graničnog sloja neprovodnog fluida: Karman-Polhauzena, Kocić-Lojčjanskog, a poslednjih desetak godina se sa uspehom mnogo koristi ideja L.G.Lojčjanskog o univerzalizaciji jednačina graničnog sloja /17/. Ovde će biti navedeni samo neki radovi: koji su se pojavili među prvima i oni koji na neki način prethode ovom radu.

Medju prvim radovima iz oblasti MHD graničnog sloja publikovani su 1957/58 godine radovi V.J.Rossow - a /12,13,14/. U radu /12/ razmatran je stacionarni ravanski MHD brzinski granični sloj, a u radu /13/ proučavan je nestacionarni ravanski MHD brzinski i stacionarni ravanski MHD temperaturni granični sloj. U radu /14/ su vršena istraživanja utica-

ja magnetnog polja na stabilnost strujanja. Predstavljajući rešenje u vidu reda, Rossow svodi parcijalne diferencijalne jednačine: kretanja, sa članom koji uzima u obzir uticaj elektromagnetne Lorencove sile; i energijsku sa dopunskim članom usled Džaulove toplote - na rekurzivni sistem običnih diferencijalnih jednačina. Rešenja dobijena numeričkim integralenjem koristi zatim za razmatranje, u svojstvu primera, slučaja opstrujavanja ravne ploče u poprečnom magnetnom polju konstantne indukcije. Pri tome je uticaj sopstvenog magnetnog polja indukovanih struja na spoljašnje magnetno polje zanemaren, odnosno dobijena su rešenja u "bezindukcionom" približenju. Na osnovu ovih rezultata, Rossow izvodi zaključak da je u tankom sloju fluida na ploči dejstvo elektromagnetnih sila suprotno dejstvu sila viskoznosti i da prisustvo magnetnog polja povećava energiju fluidnih delića. Kao ilustraciju dobijenih rezultata daje dijagram profila brzine iz kog se vidi da gradijenti brzine u graničnom sloju rastu, sa povećanjem jačine magnetnog polja.

Koristeći Gertlerove promenljive, Sherman je u radu /15/ proučavao strujanje nestišljivog provodnog fluida u MHD graničnom sloju, pri malim magnetnim Reynoldsovim brojevima $Re_m \ll 1$. Predstavljajući strujnu funkciju u vidu reda Sherman je nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine graničnog sloja sveo na sistem običnih diferencijalnih jednačina, koje su zatim rešene postupkom numeričkog integralenja. Praktični proračuni, međjutim, su pokazali da je konvergencija reda za strujnu funkciju nezadovoljavajuća odnosno rešenja dobijena ovom metodom nisu pouzdana.

G.A.Ljubimov je u radu /16/ dao opštu postavku zadatka stacionarnog ravanskog MHD brzinskog graničnog sloja nestišljivog provodnog fluida. Pored ukazivanja na opšta svojstva MHD graničnog sloja, u ovom radu je izvršena ocena reda veličine pojedinih članova jednačina MHD graničnog sloja. Dalje, u zavisnosti od reda veličine Reynoldsovog i magnetnog Reynoldsovog broja, izvršeno razvrstavanje mogućih zadataka MHD graničnog sloja.

Sve približne-parametarske metode, iako se neke od njih zbog svoje jednostavnosti i preglednosti još ponekad

koriste, imaju osnovni nedostatak u proizvoljnosti izbora oblika funkcije (moguće su razne kombinacije trigonometrijskih i stepenih funkcija) za skup profila brzina, kojim se zamenjuje stvarni profil brzina. Utoliko su one intuitivne metode odnosno nemaju čvrstu matematičku osnovu. Metoda sukcesivnih aproksimacija za rešavanje problema MHD graničnog sloja se retko koristi. Naime, Dj. Djukić je u radu /30/ razmatrao nestacionarni MHD brzinski granični sloj u dva slučaja: eksponencijalno ubrzanog i harmoniskog kretanja tela.

Kao rezultat svog dugogodišnjeg rada na uopštavanju i usavršavanju Karman-Polhauzenove metode, L.G. Lojčjanski je 1964 godine predložio metodu /17/ kojom se Prandtlove jednačine graničnog sloja dovode na univerzalni oblik. Suština univerzalizacije se sastoji u tome što se **najpre** uvođenjem novih promenljivih a zatim i beskonačnog skupa parametara:

$$f_k = U(x) \cdot \frac{d^k U(x)}{dx^k} \cdot z^{**k}; \quad z^{**} = \frac{\delta^{**2}}{y}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

jednačine graničnog sloja i odgovarajući granični uslovi dovode na oblik nezavisan od veličina koje karakterišu konkretne zadatke razmatranog problema. U slučaju proizvoljne funkcije $U(x)$, parametri f_k predstavljaju medjusobno nezavisne veličine, pa mogu da se usvoje za nove nezavisno promenljive - umesto podužne koordinate x . Beskonačni skup parametara f_k omogućuje da se na najtačniji do sada poznati način uzme u obzir uticaj spoljašnjeg strujanja na razvoj graničnog sloja, čime je otklonjen osnovni nedostatak prethodnih približnih parametarskih metoda. Dobijene univerzalne jednačine je potrebno zatim jednom zauvek rešiti numeričkim integralenjem i rezultate srediti u tablice. Zavisno od željene tačnosti određuje se jedno-, dvo- ili više-parametarsko rešenje, integralenjem odgovarajuće parametarske aproksimacije univerzalne jednačine. Jedna od važnih odlika metode L.G. Lojčjanskog je što se već sa prvim približenjem tj. jedno-parametarskim rešenjem dobija dovoljno tačna slika strujanja u graničnom sloju. Rešavanje konkretnih zadataka je znatno olakšano i svodi se na korišćenje tablica vrednosti univerzalnih funkcija i dopunsko integralenje obične nelinearne diferencijalne jednačine impulsa.

Zahvaljujući egzaktnoj teorijskoj odnosno matematičkoj osnovi i tačnosti koju obezbeđuje, metoda Lojcjanskog /17/ je u svetu široko prihvaćena za rešavanje niza složenijih slučajeva strujanja. Ideja o univerzalizaciji jednačina graničnog sloja je ubrzo i kod nas podstakla niz autora na istraživanje u ovoj oblasti, o čemu će kasnije biti reči.

Sada će ukratko biti navedeno nekoliko radova koji su od značaja za dalji razvitak ideje o univerzalizaciji jednačina nestacionarnog graničnog sloja. Pre objavljivanja pomenute metode Lojcjanskog /17/, bilo je radova u kojima su razmatrani problemi nestacionarnog brzinskog i temperaturnog graničnog sloja, napr. /24,25,26,27/. H.Hasan je u radu /29/ predložio postupak za proračun nestacionarnog graničnog sloja, koji predstavlja generalizaciju Gertlerove metode /28/ za stacionarne probleme. U tome je, međutim, imao više uspeha M.Djurić u radu /30/. Posle toga je Dj.Djukić u radu /31/ uprostio i poboljšao rezultate M.Djurića.

Metoda L.G.Lojcjanskog /17/ je podstakla izradu i objavljivanje niza radova u kojima su izvršene univerzalizacije jednačina graničnog sloja za slučajeve složenijih strujanja. Koristeći Gertlerove promenljive, univerzalizaciju jednačina graničnog sloja izvršili su: za slučaj stacionarnog brzinskog graničnog sloja V.Saljnikov i S.Oka /19/; za slučaj jednoliko-brzorotirajućih kontura V.Saljnikov i V.Djordjević /20/ a za stacionarni temperaturni granični sloj V.Saljnikov i V.Djordjević /21/. Jednačine nestacionarnog ravnanskog brzinskog graničnog sloja doveli su na univerzalni oblik u svojim radovima najpre M.Djurić /32/, a zatim V.Saljnikov i Dj.Djukić /33/, Dj.Djukić /34/ i V.Saljnikov /35/. Za probleme nestacionarnog tridimenziskog graničnog sloja, univerzalizaciju odgovarajućih jednačina je izvršio R.Ašković /36/. B.Cijan - u radu /37/, a V.Saljnikov, B.Cijan i Dj.Djukić u radu /38/, razmatrali su nestacionarno strujanje neprovodnog fluida i jednačine temperaturnog graničnog sloja doveli na univerzalni oblik. Koristeći odgovarajuće rešenje brzinskog graničnog sloja određeno od strane M.Djurić /32/, B.Cijan je predstavljanjem rešenja u vidu reda, izračunao rešenja univerzalnih funkcija-koeficijenata reda u jedno-parametarskom približenju. Vrednosti univerzalnih funkcija,

određenih numeričkim integralenjem, date su u vidu tablica i prikazane na dijagramima. Posebnu pažnju zaslužuje rad V. Saljnikov /22/, u kojem je izborom promenljivih u opštijem obliku nego u radu /17/ uspeo da - pri rešavanju konkretnih zadataka stacionarnog brzinskog graničnog sloja - izbegne potrebu rešavanja dopunske jednačine impulsa. Ta ideja je zatim primenjena i na slučaj stacionarnog temperaturnog graničnog sloja u magistarskom radu T. Ašković /23/.

Stacionarno ravansko strujanje nestišljivog elektroprovodnog fluida u graničnom sloju, u prisustvu poprečnog magnetnog polja - pri čemu električno polje ne postoji, proučavao je Z. Boričić /39/. U radu je dat iscrpan pregled radova iz te oblasti, sa osvrtom i komentarom dobijenih rezultata. Jednačine stacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja su dovedene na univerzalni oblik i numeričkom metodom konačnih razlika, izvršeno je integralenje odgovarajućih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Pokazalo se, međutim, da se ideja Lojtcjanskog može preneti i na slučajeve nestacionarnog MHD graničnog sloja /41,42/, koristeći pritom postupak M. Džurić /32/. Bazirajući se, naime, na integralnoj jednačini graničnog sloja za slučaj ravne ploče u paralelnoj neuniformnoj struji, u prisustvu poprečnog magnetnog polja, uvode se u razmatranje beskonačni skupovi parametara - posredstvom kojih se jednačine nestacionarnog MHD graničnog sloja transformišu na univerzalni oblik. Treba napomenuti da je kod izbora normirajuće veličine, kojom se deli poprečna koordinata y pri uvodjenju nove poprečne promenljive η , prednost data debljini istiskivanja δ^* . Poznato je, naime, da se kod metode Lojtcjanskog /17/ i u nizu radova u kojima su univerzalizovane jednačine stacionarnog graničnog sloja, u tu svrhu koristi debljina gubitka impulsa δ^{**} . Međutim, dokaz L. Rozina /45/, da je kod nestacionarnih graničnih slojeva razmatranje integralne jednačine olakšano - kada se koristi debljina istiskivanja δ^* , potvrđen je i u slučaju proučavanja nestacionarnog MHD graničnog sloja. Na kraju se napominje, da je u radu /43/ već pokazana mogućnost univerzalizacije jednačina nestacionarnog laminarnog ravanskog MHD temperaturnog graničnog sloja - za slučajeve složenijih strujanja.

§ 2. Nestacionarni ravanski laminarni MHD brzinski granični sloj

Kao što je već napomenuto, iz polaznih jednačina nestacionarnog MHD brzinskog (1.31) i temperaturskog (1.34) graničnog sloja - vidi se da temperatursko polje u graničnom sloju zavisi uvek od odgovarajućeg brzinskog polja. Zato je potrebno da se najpre nadje rešenje odgovarajućeg nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja. To se može uraditi, jer su jednačine brzinskog graničnog sloja (1.31) s obzirom da se zanemaruje Arhimedova sila potiska nezavisne od temperaturskog polja.

U ovom radu su, za razmatrani fizički model strujanja, najpre izvedene univerzalne jednačine nestacionarnog laminarnog MHD brzinskog graničnog sloja; zatim je predstavljanjem rešenja u vidu reda rešena ta jednačina u jedno-parametarskoj aproksimaciji. Za neke univerzalne funkcije - koeficijente reda izračunata su analitička rešenja, a u vidu dijagrama i odgovarajućih tablica - u drugom delu rada - date su univerzalne funkcije dobijene numeričkim integralenjem običnih diferencijalnih jednačina metodom konačnih razlika. Napominje se da su u radovima /41/ i /42/ bili razmatrani slučajevi nestacionarnih MHD brzinskih graničnih slojeva, pri konstantnoj indukciji magnetnog polja, ali bez numeričkih rešenja odgovarajućih diferencijalnih jednačina. Rešavanje temperaturskog graničnog sloja, medjutim, posredstvom komplikovanih analitičkih rešenja odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja, praktično je nemoguće. Stoga je neophodno da se, posredstvom moćnih elektronskih računara, odrede odgovarajuća numerička rešenja.

2.1. Izvodjenje univerzalne jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja

Polazi se od osnovnih jednačine (1.31), (1.32):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ;$$

sa odgovarajućim graničnim i početnim uslovima (1.33)

$$u = U(t, x) , v = 0 \text{ pri } y = 0 \text{ i } t = 0 ;$$

$$u = 0 , v = 0 \text{ pri } y = 0 \text{ i } t > 0 ;$$

$$u \rightarrow U(t, x) \text{ pri } y \rightarrow \infty .$$

Pri tome će se razmatrati slučaj kada se brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja može predstaviti u obliku proizvoda dve funkcije: jedne - zavisne samo od vremena, a druge - samo od podužne koordinate tj.

$$U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x) . \quad (2.1)$$

Funkcije $\Omega(t)$ i $V(x)$ su klase C^k , $0 \leq k \leq \infty$, a uvedena pretpostavka za oblik funkcije spoljašnje brzine (2.1) obuhvata prema /8/ najveći broj interesantnih praktičnih zadataka.

Ako se u razmatranje uvede strujna funkcija $\Psi(t, x, y)$ posredstvom poznatih obrazaca: $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, sistem jednačina (1.31), (1.32) se svodi samo na jednu jednačinu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \dot{\Omega} \cdot V + \Omega^2 \cdot V \cdot V' + \\ + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} - H \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \Omega \cdot V \right) ; \end{aligned} \quad (2.2)$$

sa graničnim i početnim uslovima

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Omega \cdot V , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ pri } y = 0 \text{ i } t = 0 ;$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \text{ pri } y = 0 \text{ i } t > 0 ; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow \Omega \cdot V \text{ pri } y \rightarrow \infty .$$

Proračun nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja može da se zasniva, slično kao u radovima /32/ i /42/, na integralnoj jednačini MHD graničnog sloja za slučaj ravne ploče u neuniformnoj spoljašnjoj struji $\Omega(t)$. Ako se naime, jednačina (1.31) integriše po promenljivoj - poprečnoj koordinati "y" u granicama od 0 do ∞ dobiće se (vidi prilog P-II.1. str. 94) sledeća jednačina:

$$\frac{dz_p^*}{dt} = 2 \cdot R , \quad (2.4)$$

gde su:

$$R = \zeta_p - \alpha_1 - \beta_1 ; \quad \zeta_p = \left[\frac{\partial \frac{u_p}{\Omega}}{\partial \frac{y}{\delta_p^*}} \right]_{y=0} ; \quad \alpha_1 = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \cdot \zeta_p^* ; \quad (2.5)$$

$$\beta_1 = \frac{\Omega \cdot B^2}{\rho} \cdot \zeta_p^* = N \cdot \zeta_p^* ; \quad \zeta_p^*(t) = \frac{\delta_p^{*2}(t)}{y}$$

Pri tome veličina $\delta_p^* = \int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{\Omega}) \cdot dy = \delta_p^*(t)$ predstavlja debljinu istiskivanja na ravnoj ploči.

Umesto poprečne koordinate y , uvodi se nova promenljiva

$$\eta = A \cdot \frac{y}{\delta_p^*} , \quad (2.6)$$

gde je A - proizvoljna normirajuća konstanta.

Umesto promenljivih: vremena - t i podužne koordinate - x , uvode se sledeća tri beskonačna skupa parametara:

$$\alpha_k = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{d^k \Omega}{dt^k} \cdot \zeta_p^{*k} ,$$

$$\beta_k = \Omega^{k-1} \cdot v^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \cdot \zeta_p^{*k} , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

$$\gamma_k = \Omega^k \cdot v^{k-1} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot \zeta_p^{*k} .$$

Posredstvom izraza (2.4) i (2.7) dobijaju se sledeće formule za zamenu diferenciranja u jednačini (2.2), (vidi prilog P-II.2. str. 97):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\zeta_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}) ; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Omega \cdot v \cdot \zeta_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}) ;$$

gde su: $a_k = (-\alpha_1 + 2kR) \cdot \alpha_k + \alpha_{k+1}$,

$$b_k = (k-1) \cdot \alpha_1 \cdot \beta_k + 2kR \cdot \beta_k ,$$

$$c_k = (k \alpha_1 + 2kR) \cdot \gamma_k , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

$$\theta_k = (k-1) \cdot \gamma_1 \cdot \beta_k + \beta_{k+1} ,$$

$$G_k = (k-1) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_k + \gamma_{k+1} .$$

Potražimo sada rešenje jednačine (2.2) u sledećem obliku:

$$\Psi(t, x, y) = \frac{1}{A} \cdot \Omega \cdot v \cdot \zeta_p^* \cdot F(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}) ; \quad (2.10)$$

gde je F nova bezdimenziska funkcija strujanja, neprekidna i neograničeno diferencijabilna po svim promenljivim.

Posle uvođenja izraza (2.10) u jednačinu (2.2) i zamene diferenciranja posredstvom obrazaca (2.8) dobija se (vidi prilog P-II.3. str. 99) diferencijalna jednačina:

$$\begin{aligned}
 & A^2 \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + R \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \gamma_1 \cdot F \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \gamma_1 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 - d_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} - \beta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} + \\
 & + d_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \beta_k} + c_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \delta_k} \right) + \quad (2.11) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\theta_k \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \delta_k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\theta_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \frac{\partial F}{\partial \delta_k} \right);
 \end{aligned}$$

sa graničnim uslovima

$$\begin{aligned}
 & F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0; \\
 & \frac{\partial F}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

S obzirom da jednačina (2.11) i granični uslovi (2.12) ne sadrže nikakve veličine koje zavise od uslova konkretnih zadataka, to znači da ona predstavlja UNIVERZALNU jednačinu nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja. Prema tome, jednačinu (2.11) sa graničnim uslovima (2.12) je potrebno samo jedanput zauvek integraliti, i to za konačan broj članova zbira na desnoj strani.

Napominje se da je kod rešavanja konkretnih zadataka odnosno sa zadatim funkcijama $\Omega(t), V(x)$, neophodno da se integrali obična nelinearna diferencijalna jednačina (2.4). Iz nje se naime određuju funkcije $z_p^*(t)$ odnosno $\delta_p^*(t)$, bez kojih se ne mogu da formiraju nove promenljive (2.6) i (2.7).

U cilju upoređivanja raznih parametarskih metoda, izvršeni su proračuni graničnog sloja za neke karakteristične slučajeve (izloženi u /46/). Ti rezultati su pokazali, pri istom redu parametarskog približenja, da su rezultati dobijeni metodom Lojcjanskog /17/ najbliži tačnim vrednostima. Za ocenu konvergencije koja se postiže nekom metodom, karakteristično je dvo-parametarsko približenje. Rezultati proračuna graničnog sloja metodom Lojcjanskog u dvo-parametarskom približenju, skoro potpuno se poklapaju sa tačnim vrednostima /9/, izuzimajući malu oblast u blizini tačke odvajanja. Prema tome, rezultati dobijeni metodom L.G.Lojcjanskog /17/ u već jedno-parametarskom približenju predstavljaju glavni

deo tačnog rešenja, odnosno mogu se smatrati dovoljno tačnim za praktične proračune. Bitan uticaj na konvergenciju ima, kako ukazuje sam Lojčianski /17/, uspešan izbor parametara oblika. Naime, upoređivanjem ponašanja i reda veličine prvih (napr. prva tri) parametara oblika - duž neke određene konture (napr. kružnog cilindra), može se doći do pouzdanih zaključaka o tzv. fizičkoj konvergenciji metode.

2.2. Analitičko i numeričko rešenje u jedno-parametarskom približenju

Rešavanje univerzalne jednačine (2.11) sa beskonačnim zbirom na desnoj strani je praktično nemoguće, pa se zato ona integriše u jedno-, dvo- ili više-parametarskom približenju, bilo numeričkim postupkom, bilo razvijanjem bezdimenzisne strujne funkcije F u red po parametrima $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$. Ponekad se izračunavaju i tzv. lokalizovana rešenja, pri čemu se pod pojmom lokalizacije podrazumeva odbacivanje izvoda po nekom od parametara - dok se sam parametar zadržava. Međutim, i pored svih mogućih uprošćenja, numeričko integralenje univerzalne jednačine (2.11) predstavlja veliki i komplikovan posao, čak i kad se radi sa savremenim elektronskim računarima. Zbog toga je u ovom radu kao prvo približenje tačnim rezultatima, izračunato jedno-parametarsko rešenje i to predstavljanjem strujne funkcije F u vidu reda.

Jedno-parametarska aproksimacija univerzalne jednačine (2.11) se dobija izjednačavanjem sa nulom svih parametara $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ osim prvih tj.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0 & ; \\ \beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 = \beta_3 = \dots = 0 & ; \\ \gamma_1 \neq 0, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0 & ; \end{aligned} \quad (2.13)$$

i zamenom u (2.11) odgovarajućih koeficijenata prema (2.9)

$$\begin{aligned} a_1 &= (-\alpha_1 + 2R) \cdot \alpha_1, & a_2 &= a_3 = \dots = 0, \\ b_1 &= 2R\beta_1, & b_2 &= b_3 = \dots = 0, \\ c_1 &= (\alpha_1 + 2R) \cdot \gamma_1, & c_2 &= c_3 = \dots = 0, \\ \theta_1 &= \beta_2 = 0, & \theta_2 &= \theta_3 = \dots = 0, \\ G_1 &= \gamma_2 = 0, & G_2 &= G_3 = \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Na osnovu (2.13) i (2.14) dobija se sledeća univerzalna jednačina razmatranog problema u jedno-parametarskom približenju

$$\begin{aligned}
 & A^2 \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial \eta^3} + R^{(1)} \eta \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} + \delta_1 F^{(1)} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} - \delta_1 \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} \right)^2 - \alpha_1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} - \\
 & - \beta_1 \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} + \alpha_1 + \beta_1 + \delta_1 = -\alpha_1^2 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta \partial \alpha_1} + 2R^{(1)} \alpha_1 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta \partial \alpha_1} + \\
 & + 2R^{(1)} \beta_1 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta \partial \beta_1} + \alpha_1 \delta_1 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta \partial \delta_1} + 2R^{(1)} \delta_1 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta \partial \delta_1} ;
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

sa graničnim uslovima

$$F^{(1)} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} \rightarrow 1 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty,$$

koja se u principu može rešavati direktno numeričkim integranjem. Broj nezavisno promenljivih: $\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1$ je, medjutim, dosta veliki tako da su izrada programa i obavljanje mašinskog rada komplikovani, dugotrajni i skupi. Zato je u ovom radu jednačina (2.15) rešavana predstavljanjem bezdimenzijske strujne funkcije $F^{(1)}$ u vidu sledećeg reda:

$$\begin{aligned}
 F^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1) &= f_{0,0}(\eta) + \alpha_1 f_{0,1}(\eta) + \beta_1 f_{10,0}(\eta) + \\
 &+ \delta_1 f_{10,0}(\eta) + \alpha_1^2 f_{0,11}(\eta) + \alpha_1 \beta_1 f_{10,1}(\eta) + \alpha_1 \delta_1 f_{10,1}(\eta) + \\
 &+ \beta_1^2 f_{11,0}(\eta) + \beta_1 \delta_1 f_{11,0}(\eta) + \delta_1^2 f_{11,0}(\eta) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

a to iziskuje da se i funkcija $R^{(1)}$ predstavi u vidu odgovarajućeg reda

$$R^{(1)} = R_0 + \alpha_1 R_{1a} + \beta_1 R_{1b} + \alpha_1^2 R_{11a} + \alpha_1 \beta_1 R_{1a1b} + \beta_1^2 R_{11b} + \dots \tag{2.18}$$

Kako je za slučaj graničnog sloja na ravnoj ploči spoljašnja brzina $U = \Omega(t)$, to sleduje na osnovu (2.7) da su parametri $\delta_1 = \delta_2 = \dots = 0$, pa je s obzirom na (2.5) funkcija R zavisna samo od parametara α_1 i β_1 .

Kada se redovi (2.17) i (2.18) zamene u jednačinu (2.15), izjednačavanjem koeficijenata uz iste parametre ili grupe parametara, dobija se sledeći rekursivni sistem običnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih uni-

verzalnih funkcija - koeficijenata:

$$\begin{aligned}
 D_0(f_{0,0}) &= 0 ; \\
 D_1(f_{0,1}) &= -\frac{R_{1a}}{A^2} \eta f_{0,0}'' + \frac{1}{A^2} (f_{0,0}' - 1) ; \\
 D_1(f_{16,0}) &= -\frac{R_{1b}}{A^2} \eta f_{0,0}'' + \frac{1}{A^2} (f_{0,0}' - 1) ; \\
 D_1(f_{10,0}) &= -\frac{1}{A^2} (1 - f_{0,0}'^2 + f_{0,0}' f_{0,0}'') ; \\
 D_2(f_{16,1}) &= -\frac{R_{1a1b}}{A^2} \eta f_{0,0}'' - \frac{R_{1a}}{A^2} \eta f_{16,0}'' - \frac{R_{1b}}{A^2} \eta f_{10,1}'' + \frac{1+2R_{1a}}{A^2} f_{16,0}' + \frac{1+2R_{1b}}{A^2} f_{0,1}' ; \\
 D_2(f_{10,1}) &= -\frac{R_{1a}}{A^2} \eta f_{10,0}'' + \frac{2}{A^2} (1+R_{1a}) f_{10,0}' + \frac{1}{A^2} (2f_{0,1}' f_{0,0}' - f_{0,1}'' f_{0,0}' - f_{0,1}' f_{0,0}'') ; \\
 D_2(f_{10,0}) &= -\frac{R_{1b}}{A^2} \eta f_{10,0}'' + \frac{1+2R_{1b}}{A^2} f_{10,0}' + \frac{1}{A^2} (2f_{0,0}' f_{16,0}' - f_{16,0}'' f_{0,0}' - f_{16,0}' f_{0,0}'') ; \\
 D_2(f_{0,11}) &= -\frac{R_{1a}}{A^2} \eta f_{0,1}'' - \frac{R_{11a}}{A^2} \eta f_{0,0}'' + 2 \frac{R_{1a}}{A^2} f_{0,1}' ; \\
 D_2(f_{116,0}) &= -\frac{R_{1b}}{A^2} \eta f_{16,0}'' - \frac{R_{11b}}{A^2} \eta f_{0,0}'' + \frac{1+2R_{1b}}{A^2} f_{16,0}' ; \\
 D_2(f_{110,0}) &= 2 f_{10,0}' f_{0,0}' - f_{10,0}'' f_{0,0}' - f_{10,0}' f_{0,0}'' ;
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

gde D_k predstavlja diferencijalni operator određen izrazom:

$$D_k = \frac{d^3}{d\eta^3} + \frac{R_0}{A^2} \frac{d^2}{d\eta^2} - 2 \frac{R_0}{A^2} k \frac{d}{d\eta} , \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Odgovarajući granični uslovi pri tome glase:

$$\begin{aligned}
 f_{0,0}(0) = f_{0,0}'(0) = 0 , \quad f_{0,0}'(\infty) = 1 ; \\
 f_{0,1}(0) = f_{16,0}(0) = \dots = f_{110,0}(0) = f_{0,1}'(0) = f_{16,0}'(0) = \dots = \\
 = f_{110,0}'(0) = f_{0,1}'(\infty) = f_{16,0}'(\infty) = \dots = f_{110,0}'(\infty) = 0 .
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Da bi se sistem (2.19), (2.20) mogao rešavati, bilo analitičkim ili numeričkim postupkom, neophodno je da se odrede koeficijenti $R_{0, R_{1a}, R_{1b}, \dots, R_{11b}$, i normirajuća konstanta A .

A. U tom cilju iskoristi će se red za strujnu funkciju (2.17), koji u slučaju graničnog sloja na ravnoj ploči ne sadrži članove sa parametrima γ_k ($\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0$).

Na osnovu relacije (2.5), posle zamene redova (2.17) i (2.18), dobija se naime:

$$R = \left[\frac{\partial \frac{u_p}{\Omega}}{\partial \frac{y}{\delta_p^*}} \right]_{y=0} = \alpha_1 - \beta_1, \text{ odnosno} \quad (2.21)$$

$$R_0 + \alpha_1 \cdot R_{1a} + \beta_1 \cdot R_{1b} + \alpha_1^2 \cdot R_{11a} + \alpha_1 \beta_1 R_{1a1b} + \beta_1^2 \cdot R_{11b} + \dots =$$

$$= A \cdot \left\{ f''_{0,0} + \alpha_1 f''_{0,1} + \beta_1 f''_{1b,0} + \alpha_1^2 f''_{0,11} + \alpha_1 \beta_1 f''_{1b,1} + \beta_1^2 f''_{11b,0} + \dots \right\}_{\eta=0} - \alpha_1 - \beta_1.$$

Oдавде, izjednačavanjem koeficijenata uz iste parametre, sleđuju veze:

$$R_0 = A \cdot f''_{0,0}(0) ; \quad \frac{R_0}{A} = f''_{0,0}(0) ;$$

$$R_{1a} = A \cdot f''_{0,1}(0) - 1 ;$$

$$R_{1b} = A \cdot f''_{1b,0}(0) - 1 ;$$

$$R_{11a} = A \cdot f''_{0,11}(0) ;$$

$$R_{1a1b} = A \cdot f''_{1b,1}(0) ;$$

$$R_{11b} = A \cdot f''_{11b,0}(0) ;$$

$$\dots \dots \dots$$
(2.22)

Proizvoljnost konstanti R_0 i A dopušta, da se njihov odnos izabere i usvoji tako da omogući i olakša rešavanje sistema jednačina (2.19). Usvajanjem sledeće vrednosti tog odnosa

$$\frac{R_0}{A^2} = 2, \quad (2.23)$$

prva jednačina sistema (2.19) se dovodi na oblik diferencijalne jednačine čije rešenje predstavlja Veberova specijalna funkcija /47/ tj. ona se može rešiti čak i analitički. Zatim se mogu analitički rešiti i ostale jednačine rekursivnog sistema (2.19), kao što je pokazano u prilogu P-II.4.

2.2.1. Analitička rešenja

S obzirom na relacije (2.22), uporedo sa rešavanjem običnih diferencijalnih jednačina paraboličkog tipa rekursivnog sistema (2.19), (2.20), određivani su i koeficijenti reda (2.18). Ne ulazeći ovde u dosta komplikovan postupak

za analitičko rešavanje jednačina sistema (2.19), posredstvom Veberovih funkcija odnosno integrala Gausove funkcije greške (vidi prilog P - II.4. str. 100), u nastavku su date najpre vrednosti normirajuće konstante A i konstantnih koeficijenata reda (2.18) a zatim rešenja za univerzalne funkcije - koeficijente reda (2.17).

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} ; \quad R_0 = \frac{2}{\pi} ; \quad R_{1a} = R_{1b} = -\frac{2}{3} ; \quad (2.24)$$

$$R_{11a} = \frac{\pi}{72} ; \quad R_{11ab} = \frac{\pi}{90} ; \quad R_{11b} = \frac{\pi}{180} ; \quad \dots$$

Osim toga, analitičkim putem su izračunati prvi izvodi univerzalnih funkcija

$$f'_{0,0}(\eta) = 1 - g_0(\eta) ;$$

$$f'_{0,1}(\eta) = f'_{1b,0}(\eta) = -\pi \cdot g_1(\eta) + \frac{\pi}{4} \cdot g_0(\eta) - \frac{\pi}{24} \cdot g_{-1}(\eta) ;$$

$$f'_{1c,0}(\eta) = -\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\pi\right) \cdot g_1(\eta) + \frac{\pi}{16} \cdot g_0(\eta) - \frac{\sqrt{\pi}}{6} \cdot g_{\frac{1}{2}}(\eta) + \frac{\pi}{2} \cdot g_0(\eta) + \frac{\pi}{2} \cdot g_{\frac{1}{2}}^2(\eta) - \frac{\pi}{2} \cdot g_0(\eta) \cdot g_1(\eta) ; \quad (2.25)$$

$$f'_{1b,1}(\eta) = -2\pi^2 \cdot g_2(\eta) + \frac{\pi^2}{360} \cdot g_1(\eta) - \frac{\pi^2}{16} \cdot g_0(\eta) + \frac{\pi^2}{2} \cdot g_{-1}(\eta) - \frac{\pi^2}{576} \cdot g_{-2}(\eta) ;$$

$$f'_{0,11}(\eta) = \frac{\pi^2}{576} \cdot g_{-1}(\eta) - \frac{\pi^2}{1152} \cdot g_{-2}(\eta) ;$$

$$f'_{11b,0}(\eta) = -\pi^2 \cdot g_2(\eta) + \frac{\pi^2}{720} \cdot g_1(\eta) - \frac{\pi^2}{32} \cdot g_0(\eta) + \frac{\pi^2}{4} \cdot g_{-1}(\eta) - \frac{\pi^2}{1152} \cdot g_{-2}(\eta) ;$$

koji se dalje koriste pri određivanju profila brzina u konkretnim slučajevima strujanja, o čemu će biti više reči u odeljku u kom je prikazan primer.

Za rešavanje konkretnih zadataka neophodno je, da se, u cilju određivanja nepoznate funkcije $\dot{z}_p^*(t)$ odnosno $\delta_p^*(t)$ - posredstvom kojih se formiraju nove promenljive (2.6), (2.7), reši obična nelinearna diferencijalna jednačina (2.4). Mada se to može postići numeričkim integralenjem na elektronskom računaru, ponekad je racionalno da se ona zanemarivanjem članova koji sadrže \dot{z}_p^{*n} , $n \geq 2$, linearizuje. Na taj način se dobija

(vidi prilog P- II.5. str. 104) sledeći integral:

$$z_p^*(t) = \frac{4}{\pi} \cdot e^{-\frac{4}{3} N t} \cdot \Omega(t) \cdot \int_0^t e^{\frac{4}{3} N t} \cdot \Omega(t) \cdot dt \quad (2.26)$$

čija se vrednost, za svako zadato $\Omega(t)$, lako određuje i biće korišćen kod proračuna pri rešavanju konkretnih zadataka. Prema tome, linearizovana jednačina (2.4) može da se reši analitički; a to znači da se mogu, svakako u prvom približenju, izvršiti proračuni graničnog sloja u konkretnim zadacima i bez korišćenja elektronskih računara.

2.2.2. Numerička rešenja

Posle zamenjivanja izračunatih brojnih vrednosti (2.24) u jednačine (2.19), dobija se sledeći rekurzivni sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} D_0(f_{0,0}) &= 0 ; \\ D_1(f_{0,1}) &= \frac{2}{3} \pi \eta f_{0,0}'' + \pi (f_{0,0}' - 1) ; \\ D_1(f_{1,0}) &= \frac{2}{3} \pi \eta f_{0,0}'' + \pi (f_{0,0}' - 1) ; \\ D_1(f_{1,0}) &= -\pi (1 - f_{0,0}'^2 + f_{0,0}' f_{0,0}'') ; \\ D_2(f_{1,0}) &= \frac{2}{3} \pi \eta f_{1,0}'' - \frac{\pi^2}{90} \eta f_{0,0}'' + \frac{2}{3} \pi \eta f_{0,1}'' - \frac{2}{3} \pi f_{0,1}' ; \\ D_2(f_{1,0,1}) &= \frac{2}{3} \pi (\eta f_{1,0,0}'' + f_{1,0,0}') + \pi (2f_{0,1}' f_{0,0}' - f_{0,1}'' f_{0,0}' - f_{0,1}' f_{0,0}'') ; \\ D_2(f_{1,0,1,0}) &= \frac{\pi}{3} (2\eta f_{1,0,0}'' - f_{1,0,0}') + \pi (2f_{0,1}' f_{1,0,0}' - f_{1,0,0}'' f_{0,1}' - f_{1,0,0}' f_{0,1}'') ; \\ D_2(f_{0,1,1}) &= \frac{2}{3} \pi \eta f_{0,1}'' - \frac{\pi^2}{72} \eta f_{0,0}'' - \frac{4}{3} \pi f_{0,1}' ; \\ D_2(f_{1,1,0}) &= \frac{2}{3} \pi \eta f_{1,0}'' - \frac{\pi^2}{180} \eta f_{0,0}'' - \frac{\pi}{3} f_{1,0}' ; \\ D_2(f_{1,0,0}) &= 2f_{1,0,0}' f_{0,0}' - f_{1,0,0}'' f_{0,0}' - f_{1,0,0}' f_{0,0}'' ; \end{aligned} \quad (2.27)$$

sa nepromenljivim graničnim uslovima (2.20), koji je numerički integralan - pri čemu su rezultati tj. vrednosti univerzalnih funkcija kao i sam postupak numeričkog rešavanja me-

todom konačnih razlika, dati u drugom delu ovog rada, (str. 14 do 18). Naime, numeričke vrednosti univerzalnih funkcija iz sistema (2.27) date su u tablicama T-1 i T-2, a odgovarajući grafici tih funkcija prikazani su na dijagramima: sl.1, 2 i 3. Napominje se da oni ne samo da daju jasnu predstavu o ponašanju prikazanih funkcija, već mogu da posluže i za bliže sagledavanje barem fizičke konvergencije reda (2.17).

2.3. Primer proračuna nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja

Na primeru kružnog cilindra, pokrenutog trzajem translatornom brzinom V_{∞} , razmatraće se uticaj spoljašnjeg magnetnog polja na sledeće karakteristike strujanja u graničnom sloju: pojavu odvajanja graničnog sloja, promenu gradijenta brzine na površini tela i profile brzina u graničnom sloju. S obzirom da je problem dosta složen, jer se razmatra nestacionarni brzinski granični sloj nestišljivog provodnog fluida u prisustvu poprečnog magnetnog polja, važno je da se izaberu pogodni vremenski trenuci i karakteristični magnetni Stjuartovi brojevi. Da bi se problem uprostito razmatraće se, kod svih konkretnih proračuna, slučaj kada je konstantna indukcija spoljašnjeg poprečnog magnetnog polja tj.

$$B = \text{const} . \quad (2.28)$$

Kako je brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja, u ovom slučaju, određena poznatim izrazom:

$$U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x) = 2 \cdot V_{\infty} \cdot \sin \frac{x}{R} , \text{ sleduje} \quad (2.29)$$
$$\Omega(t) = V_{\infty} \quad \text{i} \quad V(x) = 2 \cdot \sin \frac{x}{R} .$$

Napominje se da su svi primeri proračuna brzinskog i temperaturskog MHD graničnog sloja izvršeni za kružni cilindar, poluprečnika $R = 10 \text{ cm}$ i translatornu brzinu kretanja $V_{\infty} = 1,5 \text{ m/s}$. Pored toga, treba primetiti da je univerzalna jednačina u jednogparametarskom približenju, u slučajevima strujanja provodnog fluida u poprečnom magnetnom polju sa konstantnom ili promenljivom indukcijom ($B=B(x)$), formalno

ista. Međutim, sustinska razlika postoji, i uzima se u obzir parametrom oblika β_1 . Naime, dok je u slučaju konstantne indukcije magnetnog polja: $\beta_1 = N \cdot z_p^* = \frac{1}{\rho} \cdot \sigma \cdot B^2 \cdot z_p^*(t) = \beta_1(t)$,

dotle je za $B = B(x)$ parametar $\beta_1 = \frac{1}{\rho} \cdot \sigma \cdot B^2(x) \cdot z_p^*(t) = \beta_1(t, x)$. Prema tome, izračunata rešenja univerzalnih funkcija važe i koriste se kod proračuna konkretnih primera.

2.3.1. Analiza uticaja magnetnog polja na odvajanje graničnog sloja

Najpre je neophodno razmotriti uticaj spoljašnjeg magnetnog polja na odvajanje graničnog sloja iz razloga da bi, za proračun gradijenata brzine na površini tela ili profila brzine u graničnom sloju na pojedinim presecima duž tela, mogao da se izvrši izbor pogodnih vremenskih trenutaka i karakterističnih magnetnih Stjuartovih brojeva. Na osnovu raspoloživih analitičkih i numeričkih rešenja univerzalnih funkcija, biće određena vremena prvog odvajanja graničnog sloja i položaji odgovarajućih tački odvajanja - za nekoliko vrednosti magnetnog Stjuartovog broja. Pri tome se iz upoređivanja dobijenih rezultata može izvesti zaključak o tačnosti numeričkih rešenja.

Stavljajući da je $\Omega(t) = V_\infty = \text{const}$, dobija se iz izraza (2.26):

$$z_p^*(t) = \frac{3}{\pi \cdot N} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N \cdot t}\right), \quad (2.30)$$

odnosno,

$$\delta_p^*(t) = (\nu \cdot z_p^*)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3 \cdot \nu}{\pi \cdot N}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N \cdot t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.31)$$

Uvodjenjem, na uobičajeni način, bezdimenziskih brojeva: magnetnog Stjuartovog ($N^* = N \cdot R \cdot V_\infty^{-1}$) i vremenskog Struhalovog ($Sh^* = t \cdot V_\infty \cdot R^{-1}$), izrazi (2.30) i (2.31) se dovode na sledeći oblik:

$$z_p^* = \frac{3 \cdot R}{\pi \cdot N^* \cdot V_\infty} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*}\right), \quad (2.32)$$

$$\delta_p^* = \left(\frac{3 \cdot \nu \cdot R}{\pi \cdot N^* \cdot V_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.33)$$

Kako izrazi (2.6) do (2.33) postaju neodređeni za neprovođan fluid tj. za $\dot{N} = \dot{N} = 0$, primenom Lopitalovog pravila na ove izraze dobijaju se za $N \rightarrow 0$ odnosno $\dot{N} \rightarrow 0$ sledeće granične vrednosti:

$$\dot{z}_p^* = \frac{4}{\pi} \cdot t = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{R}{V_\infty} \cdot \dot{t}^* \quad , \quad (2.34)$$

$$\dot{\delta}_p^* = 2 \cdot \left(\frac{\gamma \cdot t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\pi} \cdot \frac{R}{V_\infty} \cdot \dot{t}^* \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (2.35)$$

Vreme prvog odvajanja graničnog sloja se nalazi iz uslova:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad , \quad (2.36)$$

koji se posredstvom ranije uvedenih relacija (2.6), (2.10) i (2.17) lako transformiše i dovodi na sledeći oblik

$$f_{0,0}''(0) + \alpha_1 \cdot f_{0,1}''(0) + \beta_1 \cdot f_{1,0}''(0) + \gamma_1 \cdot f_{1,0}''(0) = 0 \quad . \quad (2.37)$$

Iz definicije tri beskonačna skupa parametara (2.7): α_k , β_k i γ_k dobijaju se za $k=1$ izrazi za tri prva parametra tih skupova tj. α_1 , β_1 i γ_1

$$\alpha_1 = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \cdot \dot{z}_p^* \quad ,$$

$$\beta_1 = \frac{6}{5} \cdot 8^2 \cdot \dot{z}_p^* = N \cdot \dot{z}_p^* \quad , \quad (2.38)$$

$$\gamma_1 = \Omega \cdot V \cdot \dot{z}_p^* \quad .$$

Pri usvojenim brzinama spoljašnjeg strujanja odnosno funkcijama (2.29) $\Omega(t)$ i $V(x)$, posredstvom relacija (2.30) do (2.34), izrazi (2.38) postaju potpuno određeni i to:

- za neprovođan fluid ($N = \dot{N} = 0$)

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0 \quad , \quad \gamma_1 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{V_\infty}{R} \cdot t \cdot \cos \frac{x}{R} = \frac{8}{\pi} \cdot \dot{t}^* \cdot \cos \frac{x}{R} \quad ; \quad (2.39)$$

- za provodan fluid ($N \neq 0$, $\dot{N} \neq 0$)

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \beta_1 = \frac{3}{\pi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N \cdot t} \right) = \frac{3}{\pi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot \dot{t}^*} \right) ;$$

$$\gamma_1 = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{V_\infty}{NR} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N \cdot t} \right) \cdot \cos \frac{x}{R} = \frac{6}{\pi \cdot \dot{N}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot \dot{t}^*} \right) \cdot \cos \frac{x}{R} \quad . \quad (2.40)$$

Na osnovu vrednosti univerzalnih funkcija na površini tela, izračunatih ANALITIČKIM putem, iz relacije (2.37) se dobija sledeći izraz za vreme prvog odvajanja u proizvoljnoj tački na kružnom cilindru (vidi prilog P-II.6. str. 107):

- za neprovođan fluid ($\bar{N}^* = 0$)

$$t_{odv}^* = \frac{-1}{2 \cdot \left(1 + \frac{4}{3 \cdot \bar{N}^*}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv}} ; \quad (2.41)$$

- za provodan fluid ($\bar{N}^* \neq 0$)

$$t_{odv}^* = \frac{3 \cdot \bar{N}^*}{4 \cdot \bar{N}^*} \cdot \ln \frac{1 + \frac{3}{\bar{N}^*} \cdot \left(1 + \frac{4}{3 \cdot \bar{N}^*}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv}}{3 + \frac{3}{\bar{N}^*} \cdot \left(1 + \frac{4}{3 \cdot \bar{N}^*}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv}} . \quad (2.42)$$

S obzirom da je: $\frac{s_{odv}}{R} = \frac{1}{R} \cdot V_{\infty} \cdot t_{odv}^* = t_{odv}^*$, na osnovu izraza (2.41) i (2.42) mogu se ustvari izračunati vrednosti odgovarajućeg bezdimenziskog puta odvajanja, u zavisnosti od magnetnog Stjuartovog broja (\bar{N}^*), u zadnjoj zaustavnoj tački tj. za $\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \bar{N}^*$ odnosno $\cos\left(\frac{x}{R}\right) = \cos \bar{N}^* = -1$. Dobijena zavisnost $t_{odv}^*(\bar{N}^*)$ data je u vidu tablice T-3 i dijagrama sl.4 (u drugom delu rada, str. 19). Detaljnija analiza funkcije (2.42) pokazuje da se tačka odvajanja graničnog sloja pomera u zadnju zaustavnu tačku tj. do odvajanja uopšte neće doći, pri magnetnom Stjuartovom broju:

$$\bar{N}^* = 1 + \frac{4}{3 \cdot \bar{N}^*} \quad (= \sim 1,424413) \quad (2.43)$$

Ova vrednost je poslužila kao pouzdan kriterijum kod usvajanja ostalih vrednosti Stjuartovog broja, neophodnih za proučavanje uticaja magnetnog polja na strujanje u graničnom sloju. Na taj način su usvojene sledeće vrednosti Stjuartovog broja: $\bar{N}^* = 0,0$; $\bar{N}^* = 0,6$; $\bar{N}^* = 1,0$; ($\bar{N}^* = 1,4$); $\bar{N}^* = 2,0$; za koje je dalje izvršen proračun.

Na osnovu vrednosti univerzalnih funkcija na površini tela, izračunatih NUMERIČKIM putem tj.: $f_{0,0}''(0) = 1,128339$; $f_{0,1}''(0) = 0,591171 = f_{1b,0}''(0)$; $f_{1c,0}''(0) = 1,262529$; dobija se iz relacije (2.37) sledeći izraz za vreme prvog odvajanja u proizvoljnoj tački ili položaj tačke odvajanja u nekom trenutku vremena i to:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0$)

$$\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \arccos\left(\frac{-0,350960}{t^*_{odv}}\right); \quad (2.44)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$)

$$\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \arccos\left(\frac{1,128339 + 0,564527 \cdot (1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*_{odv}})}{2,411253 \cdot (1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*_{odv}})}\right). \quad (2.45)$$

Položaji tačke odvajanja izračunati iz izraza: (2.41), (2.42) - dobijeni na osnovu analitički, i (2.44), (2.45) - dobijenih na osnovu numerički rešenja univerzalni funkcija, za usvojene vrednosti Stjuartovog broja i nekoliko trenutaka vremena, dati su u jednoj tablici T-4 (radi lakšeg uporedjivanja slaganja rezultata) i prikazani na dijagramu sl.5 (u drugom delu rada, str. 21). Iz T-4 je očigledno slaganje rezultata zadovoljavajuće odnosno može se smatrati da je utoliko zadovoljavajuća i tačnost numeričkog proračuna.

Na osnovu izložene analize, usvojene su sledeće vrednosti magnetnih Stjuartovih brojeva (N^*) i vremenskih trenutaka (t^*):

$$N^* = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0; \quad (2.46)$$

$$t^* = 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,6; 0,9;$$

za koje su zatim izračunati: raspodela tangencijalnog napona na površini tela i profili brzine u tri izabrana preseka graničnog sloja

$$\frac{x}{R} = 30^\circ; 60^\circ \text{ i } 90^\circ. \quad (2.47)$$

2.3.2. Uticaj magnetnog polja na veličinu tangencijalnog napona na površini tela

Na osnovu obrasca za tangencijalni napon na površini tela:

$$\tau_w = \eta \cdot \gamma \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad (2.48)$$

dolazi se, posredstvom relacija (2.6), (2.10), (2.17), (2.26), do sledećih izraza za izračunavanje vrednosti tangencijalnog

napona u bezdimenziskom obliku (vidi prilog P- II.7.str. 110):

- za neprovođan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{R}{V_\infty \sqrt{Re}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot \frac{R}{V_\infty \sqrt{Re}} = \frac{1}{\sqrt{t^*}} \cdot \sin \frac{\alpha}{R} \cdot \left\{ f''_{f_{0,0}}(0) + \gamma_1 f''_{f_{1c,0}}(0) + \gamma_1^2 f''_{f_{11c,0}}(0) \right\}; \quad (2.49)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot \nu} \cdot \frac{R}{V_\infty \sqrt{Re}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot \frac{R}{V_\infty \sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \dot{N}^*}{3(1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N}^* t^*})}} \cdot \sin \frac{\alpha}{R} \cdot \left\{ f''_{f_{0,0}}(0) + \beta_1 f''_{f_{1b,0}}(0) + \gamma_1 f''_{f_{1c,0}}(0) + \beta_1 \gamma_1 f''_{f_{11bc,0}}(0) + \beta_1^2 f''_{f_{11b,0}}(0) + \gamma_1^2 f''_{f_{11c,0}}(0) \right\}; \quad (2.50)$$

pri čemu su odgovarajuće vrednosti parametara α_1 , β_1 , γ_1 definisane sa (2.39) i (2.40).

Iz izračunatih raspodela bezdimenziskog površinskog tangencijalnog napona duž konture tela, za vrednosti \dot{N}^* i t^* (2.46), odabrane su i date u vidu tablica T-5, T-6 i dijagrama sl.6 (u drugom delu rada, str. 23) raspodele bezdimenziskog površinskog tangencijalnog napona u samo dva vremenska trenutka $t^* = 0,1$ i $t^* = 0,6$.

2.3.3. Uticaj magnetnog polja na profile brzina u graničnom sloju

Vrednosti bezdimenziskih brzina u graničnom sloju izračunavaju se iz sledećih izraza, dobijenih posredstvom obrazaca (2.6), (2.10), (2.17), (vidi prilog P- II.7.str. 110) i to:

- za neprovođan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\frac{u}{V_\infty}(\eta) = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{R} \cdot \left\{ f'_{f_{0,0}}(\eta) + \gamma_1 f'_{f_{1c,0}}(\eta) + \gamma_1^2 f'_{f_{11c,0}}(\eta) \right\}; \quad (2.51)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\frac{u}{V_\infty} = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{R} \cdot \left\{ f'_{f_{0,0}}(\eta) + \beta_1 f'_{f_{1b,0}}(\eta) + \gamma_1 f'_{f_{1c,0}}(\eta) + \beta_1 \gamma_1 f'_{f_{11bc,0}}(\eta) + \beta_1^2 f'_{f_{11b,0}}(\eta) + \gamma_1^2 f'_{f_{11c,0}}(\eta) \right\}; \quad (2.52)$$

pri čemu su odgovarajuće vrednosti parametara α_1 , β_1 , γ_1 definisane sa (2.39) i (2.41).

I ovde su iz niza proračunatih bezdimenziskih profila brzina (za tri preseka (2.47), šest trenutaka vremena i četiri vrednosti Stjuartovog broja (2.46)), odabrani i dati u vidu tablica T-7 i T-8 i dijagrama sl.7. (u drugom delu rada, str. 25), bezdimenziski profili brzine samo u trenutku $t^* = 0,1$ na dva mesta kružnog cilindra, $\frac{x}{R} = 60^\circ$ i 90° .

Na osnovu analize dobijenih rezultata pri rešavanju usvojenog primera, mogu se izvesti neki zaključci o uticaju spoljašnjeg magnetnog polja na ponašanje karakterističnih veličina graničnog sloja. Naime, pri porastu magnetnog Stjuartovog broja (N^*) odnosno indukcije magnetnog polja dobijaju se sledeći efekti:

- a) tačka odvajanja se pomera nizvodno, pa je moguće da se ostvari i strujanje bez odvajanja graničnog sloja, kao što prikazuju sl.4 i 5 odnosno tablice T-3 i 4 (u drugom delu rada, str. 19) ;
- b) vrednosti bezdimenziskih gradijenata brzine odnosno bezdimenziskih tangencijalnih napona na površini tela rastu, kao što prikazuju sl.6 ili tablice T-5 i 6 (u drugom delu rada, str. 23) ;
- c) vrednosti brzine strujanja u graničnom sloju, naročito u blizini površine tela, se povećavaju - kao što prikazuju sl.7 odnosno tablice T-7 i 8 (u drugom delu rada, str. 25).

Na osnovu toga može da se zaključi da je dejstvo spoljašnjeg magnetnog polja odnosno Lorencove elektromagnetne sile suprotno dejstvu viskoznih sila. Napominje se da su ovi rezultati u saglasnosti sa rešenjima dobijenim u nekim prethodnim teorijskim radovima /39/, /42/, kao i sa eksperimentalnim rezultatima /6/, a takođe i sa pretpostavkama zasnovanim na analizi uticaja pojedinih članova u polaznim diferencijalnim jednačinama razmatranog problema strujanja.

§ 3. Nestacionarni ravanski laminarni MHD temperaturski granični sloj

Poznato je da se pri opstrujavanju zagrejanog tela neprovodnim fluidom, promena temperature zapaža samo u uskom sloju uz telo, a izvan njega je zanemarljivo mala. Ista pojava se primećuje i pri opstrujavanju nezagrejanog tela velikim brzinama, jer je pretvaranje kinetičke energije usled trenja u toplotnu najintenzivnije u tankom tzv. temperaturskom graničnom sloju uz telo. Kada su temperaturske razlike u pojedinim tačkama strujnog polja dovoljno male (ispod 50°C), može se smatrati da su odgovarajuće fizičke karakteristike fluida konstantne. Pošto nema ni razlike gustine, Arhimedova sila potiska se zanemaruje. Za usvojeni fizički model strujanja, koji se proučava u ovom radu, izvedene su u § 1. osnovne jednačine nestacionarnog ravanskog laminarnog brzinskog (1.31) i temperaturskog (1.34) graničnog sloja. Iz tih jednačina se vidi da, i pri nestacionarnom laminarnom strujanju provodnog fluida u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, jednačine (1.31) ne zavise od temperaturskog polja i mogu se posebno rešavati. Temperatursko polje, međjutim, uvek zavisi od polja brzine. To znači da se jednačine (1.34) mogu rešavati samo ako se raspolaze sa rešenjima odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja. Stoga su u § 2. najpre rešene jednačine nestacionarnog laminarnog MHD brzinskog graničnog sloja, a dobijena rešenja se u ovom § 3. koriste za rešavanje problema nestacionarnog laminarnog MHD temperaturskog graničnog sloja. Još jednom se napominje da, za razliku od brzinskog polja, u slučaju temperaturskog graničnog sloja postoji veća raznovrsnost graničnih uslova na površini tela. Naime, može biti zadata konstantna (1.37) ili promenljiva (1.38) temperatura, a može da se zada i gradijent temperature (1.35) ili (1.36).

3.1. Termometarski problem

U ovom slučaju je nestacionarni MHD temperaturski granični sloj odredjen sistemom parcijalnih diferencijalnih jed-

načina (1.31), (1.32), (1.34)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho} (u - U);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho \cdot c_p} (u - U)^2;$$

sa graničnim i početnim uslovima (1.33), (1.35), (1.39)

$$u = U(t, x), \quad v = 0 \quad \text{pri } y = 0 \text{ i } t = 0,$$

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{pri } y = 0 \text{ i } t > 0,$$

$$u = U(t, x) \quad \text{pri } y \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{za } y = 0,$$

$$T = T_\infty \quad \text{za } y \rightarrow \infty.$$

Pri tome odsustvo temperaturnog gradijenta na površini tela (1.35) predstavlja ustvari specijalan slučaj zadatog toplotnog fluksa, poznatog pod nazivom "termometarski problem". Naime, prema Furjeovom zakonu protok toplote na nekoj površini je proporcionalan gradijentu temperature u pravcu upravnom na površinu /7/ tj. $Q = \lambda \cdot (\partial T / \partial y)_{y=0}$. Da ne bi postojao protok toplote između tela i fluida, potrebno je da površina tela bude potpuno toplotno nepropustljiva. Razlika temperature površine tela i temperature spoljašnjeg fluida izvan graničnog sloja, naziva se "sopstvena" temperatura. Prema tome, za određivanje temperaturnog polja, potrebno je da se reši jednačina (1.34) sa graničnim uslovima (1.35), (1.39) - pri čemu se koristi rešenje odgovarajućeg MHD brzinskog graničnog sloja dato u § 2.

3.1.1. Izvodjenje univerzalne jednačine

S obzirom da jednačina (1.34) i granični uslovi (1.35), (1.39) ne sadrže nikakve nove promenljive veličine, u naredjenju sa jednačinama odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja (1.31), (1.33), to će i rešenje jednačine (1.34) da zavisi od istih parametara strujanja - kao i u slučaju nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja. Stoga se u cilju dovođenja

jednačine (1.34) na univerzalni oblik, umesto nezavisno promenljive y , uvodi bezdimenziska nezavisno promenljiva (2.6) - potpuno analogno kao u § 2. tj.:

$$\eta = A \cdot \frac{y}{\delta_p^*}$$

Umesto promenljivih: vremena i podužne koordinate uvode se, takodje u § 2. definisani, tri beskonačna skupa parametara oblika (2.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{d^k \Omega}{dt^k} \cdot \tilde{z}_p^{*k}; \\ \beta_k &= \Omega^{k-1} \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \cdot \tilde{z}_p^{*k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \gamma_k &= \Omega^k \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^k V}{dx^k} \cdot \tilde{z}_p^{*k}. \end{aligned}$$

Napominje se da su pri tome: brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja $U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x)$; magnetni broj $N = \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma \cdot B^2(x)$; indukcija magnetnog polja $B(x)$; debljina istiskivanja na ravnoj ploči $\delta_p^*(t)$; funkcija $\tilde{z}_p^*(t) = \frac{1}{y} \cdot \delta_p^{*2}$ kao i jednačina $\frac{d\tilde{z}_p^*}{dt} = 2 \cdot R$; poznati i korišćeni u § 2. pri rešavanju nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja. Takodje, ostaju iste formule (2.8), sa kojima se u diferencijalnim jednačinama vrši zamena diferenciranja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\tilde{z}_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{L}_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}); \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\Omega \cdot V \cdot \tilde{z}_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}); \end{aligned}$$

kao i koeficijenti - funkcije (2.9)

$$\begin{aligned} a_k &= (-\mathcal{L}_1 + 2kR) \cdot \mathcal{L}_k + \mathcal{L}_{k+1}; \\ b_k &= (k-1) \cdot \mathcal{L}_1 \cdot \beta_k + 2kR/\beta_k; \\ c_k &= k(\mathcal{L}_1 + 2R) \cdot \gamma_k; \\ \theta_k &= (k-1) \cdot \gamma_1 \cdot \beta_k + \beta_{k+1}; \\ G_k &= (k-1) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_k + \gamma_{k+1}. \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Pored strujne funkcije $\Psi(t, x, y)$, uvedene u § 2. relacijom (2.10)

$$\Psi(t, x, y) = \frac{1}{A} \cdot \Omega \cdot V \cdot \delta_p^* \cdot F(\eta, \{\mathcal{L}_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}),$$

sada se uvodi porredstvom sledećeg izraza:

$$T(\xi, \eta, \gamma) = T_{\infty} + \frac{\Omega(\xi) \cdot V(\xi)^2}{c_p} \cdot \mathcal{K}^* (\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr) ; \quad (3.1)$$

i bezdimenziska temperatura \mathcal{K}^* , koja je realna funkcija, neprekidna i neograničeni broj puta diferencijabilna po svim promenljivim.

Posle unosenja izraza (2.10) i (3.1) u jednačinu (1.34), i zamene diferenciranja prema formulama (2.8), dobija se (vidi prilog P-III.1.str. 112):

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{K}^*}{\partial \eta^2} + R\eta \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} + \gamma_i F \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\theta_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k} \right) - \\ & - \frac{\partial F}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\theta_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \gamma_k} \right) - 2\gamma_i \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{K}^* - \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \beta_k} + \right. \\ & \left. + c_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \gamma_k} \right) - 2\alpha_i \mathcal{K}^* = -A^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^2} \right)^2 - \beta_i \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 \right)^2 ; \end{aligned} \quad (3.2)$$

sa graničnim uslovima

$$\frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0 ; \quad \mathcal{K}^* = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty . \quad (3.3)$$

S obzirom da jednačina (3.2) i granični uslovi (3.3) ne zavise od veličina, koji karakterišu konkretne probleme, to znači da ona pretstavlja UNIVERZALNU jednačinu nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja za slučaj termometarskog problema, ali u nešto užem smislu nego kod brzinskog graničnog sloja. Naime, zbog prisustva Prandtlovog broja, potrebno je da se ona za svaku, odredjenu vrednost Prandtlovog broja jednom-zauvek integriše.

3.1.2. Analitičko i numeričko rešenje u jedno-parametarskom približenju

Jednačina (3.2) sadrži sume beskonačnog broja članova, pa je za njeno rešavanje neophodno da se uzme njihov konačan broj tj. da se zadrži nekoliko prvih parametara. Tako se iz (3.2) može dobiti, u zavisnosti od tačnosti koja se želi da postigne, univerzalna jednačina u jedno-, dvo- ili više-parametarskom približenju. Pri tome se rešavanjem, bilo numeričkim postupkom, bilo razvijanjem u red po parametrima

$\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, dobija rešenje odgovarajuće aproksimacije.

Prema tome, ako se u univerzalnoj jednačini (3.2), izuzev prvih parametara $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, svi ostali izjednače sa nulom tj.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \neq 0, \quad \beta_1 \neq 0, \quad \gamma_1 \neq 0, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0, \\ \theta_1 = \beta_2 = 0, \quad G_1 = \gamma_2 = 0, \quad a_1 = (-\alpha_1 + 2 \cdot R) \cdot \alpha_1, \\ b_1 = 2 \cdot R \cdot \beta_1, \quad c_1 = (\alpha_1 + 2 \cdot R) \cdot \gamma_1, \end{aligned}$$

dobija se sledeća univerzalna jednačina u jedno-parametarskom približenju:

$$\begin{aligned} \frac{A^2 \frac{\partial^2 \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \eta} + \gamma_i \cdot F \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \eta} - 2\gamma_i \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} \mathcal{K}^{*(1)} - 2\alpha_i \mathcal{K}^{*(1)} + \alpha_i^2 \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \alpha_i} - \\ - 2R \cdot \alpha_i \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \alpha_i} - 2R \cdot \beta_i \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \beta_i} - \alpha_i \gamma_i \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \gamma_i} - 2R \cdot \gamma_i \frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \gamma_i} = \\ = -A^2 \left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} \right)^2 - \beta_i \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} - 1 \right)^2; \end{aligned} \quad (3.4)$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{*(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0; \quad \mathcal{K}^{*(1)} = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Jednačina (3.4), (3.5) može u principu da se reši nekom metodom za direktno numeričko integralenje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Medjutim, s obzirom na dosta veliki broj nezavisno promenljivih u njoj, izrada programa je komplikovana i teška - a i sam mašinski rad računara je dugotrajan i skup. Iz tih razloga, jednačina (3.4), (3.5) je u ovom radu rešavana predstavljanjem rešenja u vidu reda. Koriste se iz § 2. poznati redovi: (2.17) za funkciju $F^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i (2.18) za $R^{(1)}(\alpha_1, \beta_1)$

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = f_{\alpha_0}(\eta) + \alpha_1 f_{\alpha_1}(\eta) + \beta_1 f_{\beta_0}(\eta) + \gamma_1 f_{\gamma_0}(\eta) + \alpha_1 \beta_1 f_{\alpha_1 \beta_1}(\eta) + \\ + \alpha_1 \gamma_1 f_{\alpha_1 \gamma_1}(\eta) + \beta_1 \gamma_1 f_{\beta_1 \gamma_1}(\eta) + \alpha_1^2 f_{\alpha_1^2}(\eta) + \beta_1^2 f_{\beta_1^2}(\eta) + \\ + \gamma_1^2 f_{\gamma_1^2}(\eta) + \dots \end{aligned}$$

$$R^{(1)}(\alpha_1, \beta_1) = R_0 + \alpha_1 R_{\alpha_1} + \beta_1 R_{\beta_1} + \alpha_1 \beta_1 R_{\alpha_1 \beta_1} + \alpha_1^2 R_{\alpha_1^2} + \beta_1^2 R_{\beta_1^2} + \dots$$

a to iziskuje da se i funkcija $\mathcal{K}^{*(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$ pretstavi u vidu odgovarajućeg reda:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\eta, d_1, \beta_1, \delta_1, F_1) = & \mathcal{K}_{0,0}^*(\eta) + d_1 \mathcal{K}_{0,1}^*(\eta) + \beta_1 \mathcal{K}_{16,0}^*(\eta) + \delta_1 \mathcal{K}_{1c,0}^*(\eta) + \\ & + d_1 \beta_1 \mathcal{K}_{16,1}^*(\eta) + d_1 \delta_1 \mathcal{K}_{1c,1}^*(\eta) + \beta_1 \delta_1 \mathcal{K}_{161c,0}^*(\eta) + \\ & + d_1^2 \mathcal{K}_{0,11}^*(\eta) + \beta_1^2 \mathcal{K}_{16,0}^*(\eta) + \delta_1^2 \mathcal{K}_{11c,0}^*(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Posle unošenja redova (2.17), (2.18) i (3.6) u jednačinu (3.4), (3.5) i izjednačavanja koeficijenata uz iste parametre ili grupe parametara, dobija se sledeći rekursivni sistem običnih diferencijalnih jednačina, iz kojih se određuju univerzalne funkcije - koeficijenti reda (3.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(\mathcal{K}_{0,0}^*) &= -f_{0,0}''^2; \\ \mathcal{D}_1(\mathcal{K}_{0,1}^*) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{K}_{0,0}^* + 2\pi\mathcal{K}_{0,0}^* - 2f_{0,0}''f_{0,1}''; \\ \mathcal{D}_1(\mathcal{K}_{16,0}^*) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{K}_{0,0}^* - \pi(f_{0,0}' - 1)^2 - 2f_{0,0}''f_{16,0}''; \\ \mathcal{D}_1(\mathcal{K}_{1c,0}^*) &= 2\pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* - \pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* - 2f_{0,0}''f_{1c,0}''; \\ \mathcal{D}_2(\mathcal{K}_{16,1}^*) &= \frac{2}{3}\pi(\eta\mathcal{K}_{16,0}^* + \eta\mathcal{K}_{0,1}^* + \mathcal{K}_{16,0}^*) - \frac{\pi^2}{90}\eta\mathcal{K}_{0,0}^* - \frac{4}{3}\pi\mathcal{K}_{0,1}^* - \\ & - 2f_{0,0}''f_{16,1}'' - 2f_{0,1}''f_{16,0}'' - 2\pi f_{0,1}'(f_{0,0}' - 1); \\ \mathcal{D}_2(\mathcal{K}_{1c,1}^*) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{K}_{1c,0}^* - \pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{0,1}^* - \pi f_{0,1}'\mathcal{K}_{0,0}^* + 2\pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* + \\ & + 2\pi f_{0,1}'\mathcal{K}_{0,0}^* + \frac{5}{3}\pi\mathcal{K}_{1c,0}^* - 2f_{0,0}''f_{1c,1}'' - 2f_{0,1}''f_{1c,0}''; \\ \mathcal{D}_2(\mathcal{K}_{161c,0}^*) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{K}_{1c,0}^* - \pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{16,0}^* - \pi f_{16,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* + 2\pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{16,0}^* + \\ & + 2\pi f_{16,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* - \frac{4}{3}\pi\mathcal{K}_{16,0}^* - 2f_{0,0}''f_{161c,0}'' - 2f_{16,0}''f_{1c,0}'' - 2\pi f_{1c,0}'(f_{0,0}' - 1); \\ \mathcal{D}_2(\mathcal{K}_{0,11}^*) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{K}_{0,1}^* - \frac{\pi^2}{72}\eta\mathcal{K}_{0,0}^* - \frac{\pi}{3}\mathcal{K}_{0,1}^* - 2f_{0,0}''f_{0,11}'' - f_{0,1}''^2; \\ \mathcal{D}_2(\mathcal{K}_{116,0}^*) &= \frac{2}{3}\eta\mathcal{K}_{16,0}^* - \frac{\pi^2}{180}\eta\mathcal{K}_{0,0}^* - \frac{4}{3}\pi\mathcal{K}_{16,0}^* - 2f_{0,0}''f_{116,0}'' - \\ & - f_{116,0}''^2 - 2\pi f_{16,0}'(f_{0,0}' - 1); \\ \mathcal{D}_2(\mathcal{K}_{11c,0}^*) &= -\pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{1c,0}^* - \pi f_{1c,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* + 2\pi f_{0,0}'\mathcal{K}_{1c,0}^* + \\ & + 2\pi f_{1c,0}'\mathcal{K}_{0,0}^* - 2f_{0,0}''f_{11c,0}'' - f_{1c,0}''^2; \end{aligned} \quad (3.7)$$

gde \mathcal{D}_k predstavlja diferencijalni operator određen izrazom:

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{d^2}{d\eta^2} + 2 \cdot \eta \cdot \frac{d}{d\eta} - 4 \cdot k \cdot \frac{d^0}{d\eta} \quad , \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Odgovarajući granični uslovi pri tome glase:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0,0}^*{}'(0) &= \mathcal{K}_{0,1}^*{}'(0) = \mathcal{K}_{10,0}^*{}'(0) = \dots = \mathcal{K}_{110,0}^*{}'(0) = 0, \\ \mathcal{K}_{0,0}^*(\infty) &= \mathcal{K}_{0,1}^*(\infty) = \mathcal{K}_{10,0}^*(\infty) = \dots = \mathcal{K}_{110,0}^*(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

U sistemu jednačina (3.7) zamenjene su, ranije odredjene - u § 2., vrednosti konstanti: $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $R_0 = \frac{2}{\pi}$, $R_{1a} = R_{1b} = -\frac{2}{3}$, $R_{11a} = \frac{\pi}{72}$, $R_{11ab} = \frac{\pi}{90}$ i $R_{11b} = \frac{\pi}{180}$. Takodje su i rešenja za univerzalne funkcije $f_{0,0}(\eta)$; $f_{0,1}(\eta)$; $f_{10,0}(\eta)$; ... $f_{110,0}(\eta)$, koja se pojavljuju u sistemu (3.7), određena u § 2. - pri razmatranju nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja tj. ovde se smatraju poznatim.

Napominje se da je rekurzivni sistem običnih diferencijalnih jednačina (3.7) sa graničnim uslovima (3.9) moguće rešiti i analitičkim putem, za slučaj $Pr = 1,0$. Medjutim, rešavanje ovih jednačina je sada znatno komplikovanije i teže, pošto se na desnim stranama pojavljuju proizvodi Veberovih funkcija - što otežava izračunavanje pojedinih partikularnih integrala. Stoga se navode analitička rešenja samo nekoliko prvih jednačina sistema (3.7), (3.9), koja glase:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0,0}^*(\eta) &= g_0(\eta) - \frac{1}{2} g_0^2(\eta); \\ \mathcal{K}_{0,1}^*(\eta) &= \frac{5}{2} \pi g_1(\eta) - \frac{5}{3} \pi g_0(\eta) g_1(\eta) - \frac{\pi}{24} g_1(\eta) g_0(\eta) + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} g_0^2(\eta) + \frac{\pi}{24} g_1(\eta) - \frac{\pi}{2} g_0(\eta); \\ \mathcal{K}_{10,0}^*(\eta) &= \frac{5}{2} \pi g_1(\eta) - \frac{5}{3} \pi g_0(\eta) g_1(\eta) - \frac{\pi}{24} g_1(\eta) g_0(\eta) + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} g_0^2(\eta) + \frac{\pi}{24} g_1(\eta); \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Numeričkim integralenjem - metodom konačnih razlika - sistema jednačina (3.7) sa graničnim uslovima (3.9), određena su rešenja za svih deset univerzalnih funkcija - koeficijentata reda (3.6): $\mathcal{K}_{0,0}^*(\eta)$; $\mathcal{K}_{0,1}^*(\eta)$; $\mathcal{K}_{10,0}^*(\eta)$; ... $\mathcal{K}_{110,0}^*(\eta)$, i to za sledeće tri vrednosti Prandtlovog broja: $Pr = 0,72$; $1,0$ i $7,0$. Odgovarajuće numeričke vrednosti univerzalnih funkcija date su u tablicama T-9 do T-14, a grafici tih funkcija su prikazani na dijagramima sl.8 do sl.16 (u drugom delu rada, str. 31).

3.1.3. Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog
graničnog sloja

Proračun karakterističnih veličina nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja izvršen je za konkretan slučaj opstrujavanja kružnog cilindra, poluprečnika $R=10$ cm pokre-
nutog trzajem konstantnom brzinom $V_{\infty}=1,5$ m/s kroz provodan
nestišljiv fluid. Pri tome se pretpostavlja da je indukcija
spoljašnjeg magnetnog polja konstantna tj. $B = \text{const}$. Brzina
spoljašnjeg potencijalnog strujanja je u ovom slučaju odre-
đjena izrazom (2.29): $U(t,x) = \Omega(t) \cdot V(x) = V_{\infty} \cdot 2 \sin \frac{x}{R}$, a para-
metri oblika $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ su isti kao u § 2. tj. određeni
su sledećim relacijama:

- za neprovođan fluid (2.39)

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{8}{\pi} \cdot t^* \cdot \cos \frac{x}{R};$$

- i za provodan fluid (2.40)

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \frac{3}{\pi} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*}\right);$$

$$\gamma_1 = \frac{6}{\pi \cdot N^*} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*}\right) \cdot \cos \frac{x}{R}.$$

Iz izraza (3.1) i reda (3.6) dobijeni su sledeći bez-
dimenzijski obrasci za izračunavanje "sopstvene" temperature
($T_e = T_{y=0}$) na površini kružnog cilindra i to:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0$)

$$\frac{T_e\left(\frac{x}{R}\right) - T_{\infty}}{V_{\infty}^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^* (0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{10,0}^* (0) + \gamma_1^2 \cdot \mathcal{K}_{110,0}^* (0) \right\}; \quad (3.11)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$)

$$\frac{T_e\left(\frac{x}{R}\right) - T_{\infty}}{V_{\infty}^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^* (0) + \beta_1 \cdot \mathcal{K}_{10,0}^* (0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{10,0}^* (0) + \right. \\ \left. + \beta_1 \cdot \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{160,0}^* (0) + \beta_1^2 \cdot \mathcal{K}_{110,0}^* (0) + \gamma_1^2 \cdot \mathcal{K}_{110,0}^* (0) \right\}. \quad (3.12)$$

Posredstvom izraza (3.11), (2.39) i (3.12), (2.40), ko-
risteći pri tome numerička rešenja za odgovarajuće univerzal-

ne funkcije, izračunate su raspodele bezdimenziske "sopstvene" temperature na površini cilindra za: tri ranije usvojene vrednosti Prandtlovog broja $Pr = 0,72 ; 1,0$ i $7,0$ kao i vrednosti (2.46) Stjuartovog broja $N^* = 0,0 ; 0,6 ; 1,0 ; 2,0$ i vremenskih trenutaka $t^* = 0,01 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,6$ i $0,9$. Zbog obimnosti dobijenih rezultata, odabrani su i dati u vidu tablica T-15 do T-20 i dijagrama sl.17,18,19 (u drugom delu rada, str. 46) raspodele bezdimenziske "sopstvene" temperature za samo dva vremenska trenutka $t^* = 0,1$ i $t^* = 0,9$.

Na osnovu izraza (3.1) i (3.6) dobijaju se sledeći izrazi za izračunavanje bezdimenziske temperature u graničnom sloju i to:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0$)

$$\frac{T(\eta) - T_{\infty}}{v_{\infty}^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{9,0}^*(\eta) + \gamma_1 \mathcal{K}_{10,0}^*(\eta) + \gamma_1^2 \mathcal{K}_{11,0}^*(\eta) \right\}; \quad (3.13)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$)

$$\frac{T(\eta) - T_{\infty}}{v_{\infty}^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{9,0}^*(\eta) + \beta_1 \mathcal{K}_{10,0}^*(\eta) + \gamma_1 \mathcal{K}_{11,0}^*(\eta) + \beta_1 \gamma_1 \mathcal{K}_{16,0}^*(\eta) + \beta_1^2 \mathcal{K}_{11,0}^*(\eta) + \gamma_1^2 \mathcal{K}_{11,0}^*(\eta) \right\}. \quad (3.14)$$

Iz izraza (3.13), (2.39) i (3.14), (2.40), koristeći pri tome numerička rešenja za odgovarajuće univerzalne funkcije, izračunati su bezdimenziski profili temperature u tri preseka $\frac{x}{R} = 30^\circ, 60^\circ$ i 90° , za iste vrednosti Prandtlovog i Stjuartovog broja i vremenskih trenutaka - kao u prethodnom slučaju pri izračunavanju raspodele "sopstvene" temperature. Takodje su i ovde odabrani i dati u vidu tablica T-21 do T-26 i dijagrama sl.20,21,22 (u drugom delu rada, str. 52) bezdimenziski profili temperature samo u trenutku $t^* = 0,1$ za dva preseka $\frac{x}{R} = 60^\circ$ i 90° .

Analiza rezultata dobijenih u ovom odeljku pokazuje da u slučaju tzv. termometarskog problema, porast magnetnog Stjuartovog broja (N) odnosno indukcije magnetnog polja doводи do sledećih pojava:

a) bezdimenziska "sopstvena" temperatura raste i dostiže, pri

određenom Prandtlovom broju, maksimalnu vrednost za $\frac{x}{R} = 90^\circ$. Najveće temperature na površini tela u okolini tačke $\frac{x}{R} = 90^\circ$, mogu se objasniti činjenicom da njjoj odgovaraju najveće brzine i gradijenti brzine strujanja, koji s druge strane prouzrokuju najveći priraštaj Džaulove toplote i toplote usled trenja. Sa povećanjem Prandtlovog broja, vrednosti sopstvenih temperatura još više rastu - ali karakter njihove raspodele duž površine cilindra ostaje isti, kao što prikazuju T-15 do T-20 odnosno sl.17,18,19 (u drugom delu, str. 46). Ovo se može objasniti boljim svojstvom provodjenja toplote kod fluida sa većom vrednošću Prandtlovog broja;

- b) vrednosti bezdimenziskih temperatura fluida u graničnom sloju rastu, naročito u blizini površine tela. Sa porastom Prandtlovog broja, vrednosti bezdimenziskih temperatura postaju još veće, a osim toga - brže teže vrednosti temperature u beskonačnosti, kao što se vidi iz tablica T-21 do T-26 odnosno dijagrama sl.20,21,22 (u drugom delu, str. 52). To očigledno pokazuje da je, pri većim vrednostima Prandtlovog broja, debljina temperaturskog graničnog sloja manja i to kako za neprovođan tako i provođan fluid. Takav uticaj veličine Prandtlovog broja na debljinu temperaturskog graničnog sloja neprovođnog fluida je poznat već od ranije /7/. Za provodne fluide, međjutim, pri određenoj vrednosti Prandtlovog broja, debljina temperaturskog graničnog sloja ima tendenciju blagog porasta - sa povećanjem indukcije magnetnog polja odnosno porastom Stjuartovog broja, (kao što se vidi iz dijagrama sl.20 do sl.22, u drugom delu, str. 55). Takav rezultat je u saglasnosti sa zaključkom da spoljašnje magnetno polje povećava energiju fluidnih delića u graničnom sloju.

3.2. Slučaj zadanog promerljivog toplotnog fluksa na površini tela

U slučaju zadanog-proizvoljnog protoka toplote na površini tela, nestacionarni MHD temperaturski granični sloj je određen sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina (1.31),

(1.32), (1.34):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho} (u - U);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho \cdot c_p} (u - U)^2;$$

sa odgovarajućim graničnim i početnim uslovima (1.33), (1.36) i (1.39)

$$u = U(t, x), \quad v = 0 \quad \text{pri } y = 0 \quad \text{i } t = 0,$$

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{pri } y = 0 \quad \text{i } t > 0,$$

$$u = U(t, x) \quad \text{pri } y \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = q_0(t, x) \quad \text{za } y = 0,$$

$$T = T_\infty \quad \text{za } y \rightarrow \infty.$$

S obzirom da je, prema Furjeovom zakonu, protok toplote na nekoj površini proporcionalan gradijentu temperature u pravcu upravnom na površinu /7/ tj. $q = \lambda \cdot (\partial T / \partial y)_{y=0}$, sleduje da granični uslov na površini tela (1.36) pretstavlja ustvari zadatak odgovarajući protok toplote. Potrebno je podsetiti da se razmatraju strujanja, kada se spoljašnja brzina može predstaviti u obliku (2.1): $U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x)$ tj. u vidu proizvoda dve funkcije sa razdvojenim promenljivim t i x . Slično tome, ovde se razmatraju samo ona strujanja kod kojih se gradijent temperature na površini tela može zadati funkcijom analognog oblika:

$$q_0(t, x) = Y_0(t) \cdot X(x), \quad (3.15)$$

pri čemu su $Y_0(t)$ i $X(x)$ realne funkcije klase C^k , $0 \leq k \leq \infty$.

Prema tome, za određivanje raspodele temperature u razmatranom slučaju strujanja, potrebno je da se reši jednačina (1.34) sa graničnim uslovima (1.36) i (1.39). S obzirom da ovaj sistem zavisi od brzinskog polja, pritom se koriste rešenja odgovarajućeg nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja - koja su određena u § 2.

3.2.1. Izvođenje univerzalne jednačine

Iz prethodnog izlaganja se vidi da temperatursko polje zavisi, ne samo od karakteristika brzinskog polja, već i od

funkcija $Y_0(t)$ i $X(x)$ odnosno od zadatog promenljivog gradijenta temperature na površini tela. Prema tome, za dovodjenje jednačina (1.34), (1.36), (1.39) na univerzalni oblik, pored nove promenljive η , (2.6) i beskonačnih skupova parametara oblika α_k , β_k , γ_k , (2.7) - potrebno je da se uvedu dva nova beskonačna skupa parametara definisana sledećim relacijama:

$$\delta_k = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^k Y}{dt^k} \cdot z_p^{*k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

$$\epsilon_k = \Omega^k \cdot V^k \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{d^k X}{dx^k} \cdot z_p^{*k}$$

Dok su od ranije poznate funkcije: $z_p^*(t)$ iz (2.5), $\Omega(t)$ i $V(x)$ iz (2.1) odnosno (2.29), $X(x)$ iz (3.15), dotle je novo-uvedena funkcija $Y(t)$ određena sledećom relacijom:

$$Y(t) = Y_0(t) \frac{\delta_p^*(t)}{A} \quad (3.17)$$

Posredstvom izraza (2.4), (2.7), (3.16) dobijaju se sledeće formule (vidi prilog P-III.2. str. 113), sa kojima se u jednačini (1.34) vrši zamena diferencijiranja

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{z_p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + d_k \frac{\partial}{\partial \delta_k} + e_k \frac{\partial}{\partial \epsilon_k}); \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Omega \cdot V \cdot z_p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + E_k \frac{\partial}{\partial \epsilon_k})$$

Pri tome su koeficijenti - funkcije: a_k , b_k , c_k , θ_k i G_k od ranije poznati odnosno određeni relacijama (2.9) u § 2., a d_k , e_k i E_k - su određeni sledećim izrazima:

$$d_k = (-\delta_1 + 2 \cdot k \cdot R) \cdot \delta_k + \delta_{k+1},$$

$$e_k = (k \cdot \alpha_1 + 2 \cdot k \cdot R) \cdot \epsilon_k, \quad (3.19)$$

$$E = (k \cdot \gamma_1 - \epsilon_1) \cdot \epsilon_k + \epsilon_{k+1}$$

Potražimo sada rešenje za raspored temperature u obliku:

$$T(t, x, y) = T_{\infty} + \frac{U^2}{c_p} \cdot \mathcal{K}(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, P_r) + Y \cdot X \cdot \mathcal{K}^*(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, \{\delta_k\}, \{\epsilon_k\}, P_r), \quad (3.20)$$

gde su: $U(t, x)$, $X(x)$, $Y(t)$, \mathcal{K}^* i \mathcal{K}^{**} realne funkcije, neprekidne i neograničeni broj puta diferencijabilne po svim promenljivim.

Posle uvođenja strujne funkcije $\Psi(t, x, y)$ u obliku (2.10), posredstvom poznatih relacija $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, i izraza (3.20) za temperaturu, u jednačinu (1.34) i zameñe diferenciranja sa formulama (2.8), (3.18), dobijaju se sledeće dve parcijalne diferencijalne jednačine - sa odgovarajućim graničnim uslovima (vidi prilog P-III.2.str.):

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{K}^*}{\partial \eta^2} + R\eta \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} + \gamma_1 F \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \delta_k}) - \\ & - \frac{\partial F}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \delta_k}) - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \delta_k}) - \quad (3.2') \\ & - 2\gamma_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{K}^* - 2\alpha_1 \mathcal{K}^* = -A^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 \right)^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}^*}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0; \quad \mathcal{K}^* = 0 \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (3.3')$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{K}^{**}}{\partial \eta^2} + R\eta \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \eta} + \gamma_1 F \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \eta} - \delta_1 \mathcal{K}^{**} - \epsilon_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{K}^{**} + \\ & + \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \delta_k}) - \frac{\partial F}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \delta_k}) + \quad (3.21) \\ & + E_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \epsilon_k} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \delta_k} + d_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \delta_k} + e_k \frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \epsilon_k}) = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{**}}{\partial \eta} = 1 \quad \eta = 0; \quad \mathcal{K}^{**} = 0 \quad \eta \rightarrow \infty; \quad (3.22)$$

iz kojih se određuju bezdimenzijske temperature - funkcije \mathcal{K}^* i \mathcal{K}^{**} . Pri tome su funkcije F i R od ranije poznate tj. određene pri razmatranju nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja u § 2. S obzirom da se jednačina (3.2') sa graničnim uslovima (3.3') potpuno poklapa sa jednačinom (3.2) i odgovarajućim graničnim uslovima (3.3) termometarskog problema, to su i njihova rešenja identična. Prema tome, može se smatrati da je rešenje za funkciju $\mathcal{K}^*(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\delta_k\}, Pr)$ poznato tj. određeno pri proučavanju termometarskog problema u odeljku 3.1. Ostaje da se odredi funkcija $\mathcal{K}^{**}(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\delta_k\}, \{\epsilon_k\}, Pr)$

rešavanjem jednačine (3.21) sa graničnim uslovima (3.22), koja pretstavlja UNIVERZALNU jednačinu - jer ne zavisi od veličina koje karakterišu konkretne zadatke. Napominje se da i u ovom slučaju pojam univerzalnosti važi u užem smislu nego kod brzinskog graničnog sloja. Naime, pošto jednačina (3.21) zavisi od Prandtlovog broja koji se ne može eliminisati, potrebno je da se ona integriše posebno za svaku određenu vrednost Prandtlovog broja.

3.2.2. Analitičko i numeričko rešenje u jednoparametarskom približenju

S obzirom da jednačina (3.21) sadrži sume beskonačnog broja članova, to je za njeno rešavanje neophodno da se uzme njihov konačan broj, a to se postiže zadržavanjem nekoliko prvih parametara uvedenih beskonačnih skupova (2.7), (3.16). Tako se iz (3.21) može dobiti, u zavisnosti od tačnosti koja se želi da postigne, univerzalna jednačina u jedno-, dvo- ili više-parametarskom približenju. Pri tome se rešavanjem, bilo numeričkim postupkom, bilo razvijanjem u red po parametrima α_k , β_k , γ_k , δ_k , ϵ_k , dobija rešenje u odgovarajućem približenju.

Prema tome, ako se u univerzalnoj jednačini (3.21), izuzev prvih parametara α_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 , ϵ_1 , svi ostali izjednače sa nulom tj. prema (2.7), (2.9), (3.16), (3.19) uvrste sledeći izrazi

$$\begin{aligned} \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \gamma_1 \neq 0, \delta_1 \neq 0, \epsilon_1 \neq 0, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \delta_2 = \delta_3 = \dots = 0, \\ \epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots = 0, \quad a_1 = (-\alpha_1 + 2 \cdot R) \cdot \alpha_1, \quad b_1 = 2 \cdot R \cdot \beta_1, \\ c_1 = (\alpha_1 + 2R) \cdot \gamma_1, \quad d_1 = (-\delta_1 + 2 \cdot R) \cdot \delta_1, \\ e_1 = (\alpha_1 + 2R) \cdot \epsilon_1, \quad \theta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0, \quad E_1 = (\gamma_1 - \epsilon_1) \cdot \epsilon_1, \end{aligned}$$

dobija se sledeća univerzalna jednačina u jednoparametarskom približenju:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{Pr} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \eta} + \gamma_1 \cdot F \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \eta} - \delta_1 \cdot \mathcal{K}^{** (1)} - \epsilon_1 \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} \cdot \mathcal{K}^{** (1)} - \\ - \gamma_1 \cdot \epsilon_1 \cdot \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \epsilon_1} + \epsilon_1 \cdot \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \epsilon_1} - 2R \cdot \alpha_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \alpha_1} + \alpha_1 \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \alpha_1^2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2R \cdot \beta_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \beta_1} - 2R \cdot \gamma_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \gamma_1} - \alpha_1 \gamma_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \gamma_1} - 2R \cdot \delta_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \delta_1} + \\
 & + \delta_1^2 \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \delta_1} - 2R \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \varepsilon_1} - \alpha_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \varepsilon_1} = 0 ;
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

sa odgovarajućim graničnim uslovima

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{** (1)}}{\partial \eta} = 1 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{K}^{** (1)} = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty. \tag{3.24}$$

S obzirom da je broj nezavisno promenljivih u jednačini (3.23) veći, u poredjenju sa analognim prethodnim slučajevima, utoliko je njeno rešavanje direktnim numeričkim integralenjem - teže. Stoga je sistem (3.23), (3.24) rešavan predstavljanjem rešenja u vidu reda. Pritom se koriste iz § 2. poznati redovi (2.17) za funkciju $F^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i (2.18) za funkciju $R^{(1)}(\alpha_1, \beta_1)$, a bezdimenzisku temperaturu $\mathcal{K}^{** (1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, Pr)$ predstavljamo u vidu sledećeg reda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}^{** (1)}(\eta; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, Pr) = & \mathcal{K}_{0,0}^{**}(\eta) + \alpha_1 \mathcal{K}_{0,1}^{**}(\eta) + \beta_1 \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta) + \gamma_1 \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta) + \\
 & + \delta_1 \mathcal{K}_{14,0}^{**}(\eta) + \varepsilon_1 \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta) + \alpha_1^2 \mathcal{K}_{0,11}^{**}(\eta) + \alpha_1 \beta_1 \mathcal{K}_{10,1}^{**}(\eta) + \\
 & + \alpha_1 \gamma_1 \mathcal{K}_{10,1}^{**}(\eta) + \alpha_1 \delta_1 \mathcal{K}_{14,1}^{**}(\eta) + \alpha_1 \varepsilon_1 \mathcal{K}_{10,1}^{**}(\eta) + \beta_1^2 \mathcal{K}_{110,0}^{**}(\eta) + \\
 & + \beta_1 \gamma_1 \mathcal{K}_{110,0}^{**}(\eta) + \beta_1 \delta_1 \mathcal{K}_{1614,0}^{**}(\eta) + \beta_1 \varepsilon_1 \mathcal{K}_{1610,0}^{**}(\eta) + \gamma_1^2 \mathcal{K}_{110,0}^{**}(\eta) + \\
 & + \gamma_1 \delta_1 \mathcal{K}_{1414,0}^{**}(\eta) + \gamma_1 \varepsilon_1 \mathcal{K}_{1410,0}^{**}(\eta) + \delta_1^2 \mathcal{K}_{114,0}^{**}(\eta) + \\
 & + \delta_1 \varepsilon_1 \mathcal{K}_{1410,0}^{**}(\eta) + \varepsilon_1^2 \mathcal{K}_{110,0}^{**}(\eta) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Posle unošenja redova (2.17), (2.18) i (3.25) u jednačinu (3.23), (3.24) i izjednačavanja koeficijenata uz iste parametre ili grupe parametara, dobija se sledeći rekurzivni sistem običnih diferencijalnih jednačina, iz kojih se određuju univerzalne funkcije - koeficijenti reda (3.25)

$$\begin{aligned}
 D_0(\mathcal{K}_{0,0}^{**}) &= 0 ; & D_1(\mathcal{K}_{0,1}^{**}) &= \frac{2}{3} \pi \eta \mathcal{K}_{0,0}^{**'} ; \\
 D_1(\mathcal{K}_{10,0}^{**}) &= \frac{2}{3} \pi \eta \mathcal{K}_{0,0}^{**'} ; & D_1(\mathcal{K}_{10,0}^{**}) &= -\pi f_{0,0} \mathcal{K}_{0,0}^{**'} ; \\
 D_1(\mathcal{K}_{14,0}^{**}) &= \pi \mathcal{K}_{0,0}^{**} ; & D_1(\mathcal{K}_{10,0}^{**}) &= \pi f_{0,0}' \mathcal{K}_{0,0}^{**} ;
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$D_2(\mathcal{K}_{110,0}^{**}) = 0 ;$$

i odgovarajući granični uslovi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0,0}^{**'}(0) = 1, \quad \mathcal{K}_{0,1}^{**'}(0) = \mathcal{K}_{16,0}^{**'}(0) = \mathcal{K}_{10,0}^{**'}(0) = \dots = \mathcal{K}_{110,0}^{**'}(0) = 0; \\ \mathcal{K}_{0,0}^{**}(\infty) = \mathcal{K}_{0,1}^{**}(\infty) = \mathcal{K}_{16,0}^{**}(\infty) = \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\infty) = \dots = \mathcal{K}_{110,0}^{**}(\infty) = 0; \end{aligned} \quad (3.27)$$

pri čemu diferencijalni operator \mathcal{D}_k zadržava isti oblik (3.8). (Potpun rekurzivni sistem (3.26) od 21 jednačine dat je u drugom delu rada, str. 58). Treba primetiti da su u sistemu jednačina (3.26) zamenjene vrednosti konstanti: $A, R_0, R_{1a}, R_{1b}, R_{11a}, R_{11ab}, R_{11b}$ (2.24) - određene u § 2. Univerzalne funkcije - koeficijenti reda (2.17): $f_{0,0}(\eta), f_{0,1}(\eta), \dots, f_{110,0}(\eta)$, koje se pojavljuju u ovom sistemu, takodje su određene u § 2. i ovde se smatraju poznatim.

Za slučaj Prandtlovog broja $Pr=1,0$ mogu se, posredstvom Veberovih - specijalnih funkcija, izračunati analitička rešenja običnih diferencijalnih jednačina (3.26) - i ovde se navode za nekoliko prvih jednačina:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{0,0}^{**}(\eta) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot g_0(\eta) ; \quad \mathcal{K}_{0,0}^{**'}(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot g_{-\frac{1}{2}}(\eta) ; \\ \mathcal{K}_{0,1}^{**}(\eta) = \mathcal{K}_{16,0}^{**}(\eta) &= -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{12} \cdot \left\{ g_1(\eta) + \frac{1}{4} \cdot g_{-1}(\eta) \right\} ; \\ \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta) &= \frac{1}{2} \cdot \pi^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{ g_1(\eta) + \frac{1}{16} \cdot g_{-1}(\eta) - \frac{1}{2} g_0(\eta) \cdot g_1(\eta) \right\} - \frac{\pi}{12} \cdot g_{-\frac{1}{2}}(\eta) ; \\ \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta) &= \frac{1}{8} \cdot \pi^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{ g_0(\eta) - 2 \cdot g_1(\eta) \right\} ; \\ \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta) &= \frac{1}{8} \cdot \pi^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{ g_0(\eta) - 6 \cdot g_1(\eta) + 2 \cdot g_1^2(\eta) \right\} . \end{aligned} \quad (3.28)$$

S druge strane, metodom konačnih razlika, izvršeno je numeričko integralenje sistema (3.26), (3.27), pri čemu su određena rešenja za prvih šest univerzalnih funkcija: $\mathcal{K}_{0,0}^{**}(\eta), \mathcal{K}_{0,1}^{**}(\eta), \mathcal{K}_{16,0}^{**}(\eta), \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta), \mathcal{K}_{10,0}^{**}(\eta)$ - i to za tri vrednosti Prandtlovog broja: $Pr=0,72; 1,0$ i $7,0$. Numeričke vrednosti tih univerzalnih funkcija date su u tablicama T-27 do T-29, i grafički su prikazane na dijagramima sl.23 do sl.26 (u drugom delu rada, str. 61).

3.2.3. Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja

Na primeru opstrujavanja kružnog cilindra poluprečnika $R = 10$ cm, provodnim nestišljivim fluidom, u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja konstantne indukcije $B = \text{const}$ - izvršeno je proračunavanje karakterističnih veličina temperaturskog MHD graničnog sloja razmatranog problema. Pri tome je kružni cilindar pokrenut trzajem konstantnom brzinom $V_{\infty} = 1,5$ m/s a brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja je određena poznatim izrazom (2.29): $U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x) = 2 \cdot V_{\infty} \cdot \sin \frac{x}{R}$. Osim toga, pretpostavlja se da je temperaturski gradijent na površini cilindra u svim tačkama isti i da se menja linearno sa vremenom tj. da je zadat sledećom funkcijom:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = q_0(t, x) = Y_0(t) \cdot X(x) = c_1 \cdot t \quad (3.29)$$

Na osnovu (3.29) i relacije (3.17) proizilazi da je:

$$X(x) = 1 ; \quad Y(t) = Y_0(t) \cdot \frac{\delta_p^{**}(t)}{A} = c_1 \cdot t \cdot \frac{\delta_p^{**}(t)}{A} \quad (3.30)$$

Dok su parametri oblika $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ već od ranije poznati i određeni izrazima: (2.40) za provodan i (2.39) za neprovodan fluid, dotle se parametri δ_1 i ϵ_1 određuju na osnovu definicije (3.16) i relacija (3.30) tj. iz sledećih izraza (vidi prilog P-III.3, str. 116) i to:

- za neprovodan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\epsilon_1 = 0, \quad \delta_1 = \frac{6}{\pi} \quad (3.31)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\epsilon_1 = 0, \quad \delta_1 = \frac{3}{\pi \cdot \dot{N} \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot t}\right) + \frac{2}{\pi} \cdot e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot t} \quad (3.32)$$

Iz izraza (3.20) za temperaturu i redova (3.6), (3.25) za funkcije $\mathcal{K}^{*(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$ i $\mathcal{K}^{*(2)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \epsilon_1, \delta_1, Pr)$, dobijeni su sledeći bezdimenzijski obrasci za izračunavanje "sopstvene" temperature (T_e) na površini kružnog cilindra (vidi prilog P-III.4, str. 118) i to:

- za neprovođan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\frac{T_e\left(\frac{x}{R}\right) - T_\infty}{v_\infty^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^*(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{16,0}^*(0) \right\} - \frac{2 \cdot D_1}{\sqrt{Re}} \cdot t^{1,5} \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^{**}(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{16,0}^{**}(0) + \delta_1 \cdot \mathcal{K}_{1d,0}^{**}(0) \right\}; \quad (3.33)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\frac{T_e\left(\frac{x}{R}\right) - T_\infty}{v_\infty^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^*(0) + \beta_1 \cdot \mathcal{K}_{16,0}^*(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{1c,0}^*(0) \right\} + \frac{D_1 \cdot t}{\sqrt{Re}} \cdot \sqrt{\frac{3}{N} \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot t}\right)} \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^{**}(0) + \beta_1 \cdot \mathcal{K}_{16,0}^{**}(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{1c,0}^{**}(0) + \delta_1 \cdot \mathcal{K}_{1d,0}^{**}(0) \right\}; \quad (3.34)$$

pri čemu je sa D_1 označena sledeća veličina:

$$D_1 = c_1 \cdot R^2 \cdot c_p \cdot v_\infty^{-3}. \quad (3.35)$$

S obzirom na relaciju (3.29), konstanta c_1 ima dimenziju

$$[c_1] = \frac{^{\circ}K}{m \cdot s}, \text{ a usvojena je ista vrednost kao u radu /37/}$$

tj. iznosi: $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, pri čemu znak minus znači da toplota prelazi sa tela na fluid. Što se tiče veličine D_1 lako se pokazuje da je ona bezdimenziska tj.

$$[D_1] = \left[c_1 \cdot \frac{R^2}{v_\infty} \cdot \frac{c_p}{v_\infty^2} \right] = \frac{^{\circ}K}{m \cdot s} \cdot \frac{m^2}{m} \cdot \frac{J \cdot s^2}{^{\circ}K \cdot kg \cdot m^2} \equiv 1,$$

i ima vrednost:

$$D_1 = -\frac{3}{3} \cdot \frac{0,1^2}{1,5^3} \cdot 1005,3288 = -1,719783.$$

Iz obrazaca (3.33), (3.34) izračunate su, na osnovu: numeričkih rešenja za univerzalne funkcije $\mathcal{K}_{0,0}^*(0), \mathcal{K}_{16,0}^*(0), \dots, \mathcal{K}_{1d,0}^*(0), \mathcal{K}_{0,0}^{**}(0), \mathcal{K}_{16,0}^{**}(0), \dots, \mathcal{K}_{1d,0}^{**}(0)$, odgovarajućih vrednosti parametara $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ određenih relacijama (2.39), (3.31), (2.40), (3.32) kao i vrednosti konstante $D_1 = -1,719783$, raspodele "sopstvene" temperature na površini cilindra. Napominje se da je proračun izvršen za vrednost Prandtlovog broja $Pr = 0,72$ odnosno za vazduh. S druge strane, vrednosti specifične toplote (c_p) i kinematske viskoznosti (ν) za vazduh iznose: $c_p = 1005,3288 \text{ J/}^{\circ}K \text{ kg}$, $\nu = 0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$, sa kojima su izračunate vrednosti konstante D_1 i Rejnoldsovog broja: $Re = \frac{1}{\nu} \cdot v_\infty \cdot R = \frac{150 \cdot 10}{0,15} = 10000$. Osim toga, vrednosti Stjuarto-

vog. broja (N^*) i vremenskih trenutaka (t^*) su iste kao u § 2. tj. određene su relacijom (2.46): $N^* = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0$ i $t^* = 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,6; 0,9$. Kao ilustracija dobijenih rezultata, odabrani su i dati u vidu tablica T-30, T-31 i dijagrama sl. 27 (u drugom delu rada, str. 68) raspodele bezdimenzijske "sopstvene" temperature za samo dva trenutka vremena $t^* = 0,1$ i $t^* = 0,9$.

Slično izvođenju izraza (3.33), (3.34) - dobijaju se sledeći obrasci za izračunavanje bezdimenzijske temperature u graničnom sloju i to:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0$)

$$\frac{T(\eta) - T_\infty}{v_\infty^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^*(\eta) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{1c,0}^*(\eta) \right\} - \frac{2 \cdot D_1}{\sqrt{\text{Re}}} \cdot t^{3/2} \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^{**}(\eta) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{1c,0}^{**}(\eta) + \delta_1 \cdot \mathcal{K}_{1d,0}^{**}(\eta) \right\}; \quad (3.36)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$)

$$\frac{T(\eta) - T_\infty}{v_\infty^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^*(\eta) + \beta_1 \cdot \mathcal{K}_{1b,0}^*(\eta) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{1c,0}^*(\eta) \right\} + \frac{D_1 \cdot t^*}{\sqrt{\text{Re}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{N^*} \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot N^* \cdot t^*} \right)} \cdot \left\{ \mathcal{K}_{0,0}^{**}(\eta) + \beta_1 \cdot \mathcal{K}_{1b,0}^{**}(\eta) + \gamma_1 \cdot \mathcal{K}_{1c,0}^{**}(\eta) + \delta_1 \cdot \mathcal{K}_{1d,0}^{**}(\eta) \right\}. \quad (3.37)$$

Iz obrazaca (3.36), (3.37) izračunati su, na osnovu numeričkih rešenja za univerzalne funkcije $\mathcal{K}_{0,0}^*(\eta), \mathcal{K}_{1b,0}^*(\eta), \dots, \mathcal{K}_{1d,0}^*(\eta), \mathcal{K}_{0,0}^{**}(\eta), \mathcal{K}_{1b,0}^{**}(\eta), \mathcal{K}_{1c,0}^{**}(\eta), \dots, \mathcal{K}_{1d,0}^{**}(\eta)$, odgovarajućih vrednosti parametara određenih relacijama (2.39), (3.31), (2.40), (3.32) kao i vrednosti konstante: $D_1 = -1,719783$ i Reynoldsovog broja $\text{Re} = 10\,000$, bezdimenzijski profili temperature u tri preseka $\frac{x}{R} = 30^\circ, 60^\circ$ i 90° . Proračun je izvršen za Prandtlov broj $\text{Pr} = 0,72$ i iste vrednosti (2.46) Stjuartovog broja i vremenskih trenutaka kao u prethodnim slučajevima. Takođe su i ovde odabrani i dati u vidu tablica T-32, T-33 i dijagrama sl.28 (u drugom delu rada, str. 79) bezdimenzijski profili temperature samo u trenutku $t^* = 0,1$ za dva preseka $\frac{x}{R} = 60^\circ$ i 90° .

Analiza rezultata dobijenih pri rešavanju razmatranog primera, pokazuje da povećanje Stjuartovog broja odnosno indukcije spoljašnjeg magnetnog polja prouzrokuje sledeće efekte:

- a) bezdimenziska "sopstvena" temperatura raste i dostiže maksimalnu vrednost u preseku odredjenom sa $\frac{x}{R} = 90^\circ$, kao što prikazuju T-30, T-31 odnosno dijagram sl.27 (u drugom delu rada, str. 68);
- b) vrednosti bezdimenziskih temperatura fluida u graničnom sloju rastu, naročito u blizini površine tela, kao što se vidi iz već pomenutih tablica T-32, T-33 odnosno dijagrama sl.28.

Kao i u slučaju termometarskog problema, i ovde se efekti prouzrokovani spoljašnjim magnetnim poljem mogu objasniti činjenicom da preseku odredjenom sa $\frac{x}{R} = 90^\circ$, odgovaraju najveće brzine i gradijenti brzine strujanja u graničnom sloju, koji s druge strane prouzrokuju najveći priraštaj Džaulove toplote i toplote usled trenja. Ovaj rezultat takodje potvrđuje pretpostavku da spoljašnje magnetno polje povećava energiju fluidnih delića u graničnom sloju.

3.3. Problem zagrevanja ili hladjenja pri zadatoj konstantnoj temperaturi na površini tela

U slučaju zadate konstantne temperature na površini tela, nestacionarni MHD temperaturski granični sloj je odredjen sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina (1.31), (1.32), (1.34):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho} (u - U);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho \cdot c_p} (u - U)^2;$$

sa odgovarajućim graničnim i početnim uslovima (1.33), (1.37) i (1.39)

$$u = U(t, x), \quad v = 0 \quad \text{pri} \quad y = 0 \quad \text{i} \quad t = 0,$$

$$u = v = 0 \quad \text{pri} \quad y = 0 \quad \text{i} \quad t > 0,$$

$$u = U(t, x) \quad \text{pri} \quad y \rightarrow \infty,$$

$$T = T_w = \text{const} \quad \text{pri} \quad y = 0,$$

$$T = T_\infty \quad \text{pri} \quad y \rightarrow \infty.$$

Za određivanje raspodele temperature u graničnom sloju za razmatrani slučaj strujanja, potrebno je da se reši jednačina (1.34) sa graničnim uslovima (1.37) i (1.39). S obzirom da ovaj sistem zavisi od brzinskog polja, pritom se koriste rešenja odgovarajućeg nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja - koja su određena u § 2.

3.3.1. Izvodjenje univerzalne jednačine

Jednačina (1.34) i granični uslovi (1.37), (1.39) očigledno ne sadrži nove promenljive, u poredjenju sa jednačinama (1.31), (1.32) i graničnim i početnim uslovima (1.33) odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja. Stoga će i rešenja oba ova sistema jednačina da zavise od istih parametara strujanja. Prema tome, u cilju dovodjenja jednačine (1.34) na univerzalni oblik, koristi se umesto promenljive y , ranije uvedena bezdimenzijska promenljiva η (2.6)

$$\eta = A \frac{y}{\delta_p^*},$$

a umesto promenljivih t i x , koriste se takodje ranije definisani, tri beskonačna skupa parametara oblika (2.7) tj.

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{d^k \Omega}{dt^k} \cdot \tilde{z}_p^{*k};$$

$$\mathcal{B}_k = \Omega \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \cdot \tilde{z}_p^{*k}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{Y}_k = \Omega \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^k V}{dx^k} \cdot \tilde{z}_p^{*k}.$$

Napominje se da su pri tome: brzina spoljnjeg potencijalnog strujanja $U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x)$; magnetni broj $N = \frac{c}{g} \cdot B^2(x)$; indukcija magnetnog polja $B(x)$; debljina istiskivanja na ravnoj ploči $\tilde{z}_p^*(t)$; funkcija $\tilde{z}_p^*(t) = \frac{1}{\mathcal{Y}} \cdot \delta_p^{*2}$ kao i jednačina $\frac{d\tilde{z}_p^*}{dt} = 2 \cdot R$ - poznati i korišćeni u § 2. pri rešavanju nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja. Takodje ostaju iste formule (2.8), sa kojima se u diferencijalnim jednačinama vrši zamena diferenciranja:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sum_p^*} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}) ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Omega \cdot V \cdot \sum_p^*} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}) ;$$

kao i koeficijenti - funkcije (2.9)

$$a_k = (-\alpha_1 + 2 \cdot k \cdot R) \cdot \alpha_k + \alpha_{k+1} ,$$

$$b_k = (k-1) \cdot \alpha_1 \cdot \beta_k + 2 \cdot k \cdot R \cdot \beta_k ,$$

$$c_k = (k \cdot \alpha_1 + 2 \cdot k \cdot R) \cdot \gamma_k ,$$

$$\theta_k = (k-1) \cdot \gamma_1 \cdot \beta_k + \beta_{k+1} ,$$

$$G_k = (k-1) \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_k + \gamma_{k+1} .$$

Pored preuzimanja strujne funkcije $\Psi(t, x, y)$, uvedene u § 2. relacijom (2.10)

$$\Psi(t, x, y) = \frac{1}{A} \cdot \Omega(t) \cdot V(x) \cdot \delta_p^*(t) \cdot F(\eta; \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}) ;$$

sada će se rešenje za temperaturu $T(t, x, y)$, u graničnom sloju razmatranog slučaja, da potraži u sličnom obliku:

$$T(t, x, y) = T_{\infty} + \frac{U^2}{c_p} \cdot \mathcal{H}^*(\eta; \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr) + (T_w - T_{\infty}) \cdot \mathcal{H}^{**}(\eta; \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr) ; \quad (3.38)$$

gde su F , \mathcal{H}^* , \mathcal{H}^{**} , realne funkcije neprekidne i neograničeni broj puta diferencijabilne po svim promenljivim.

Posle uvođenja izraza (2.10) i (3.38) u jednačinu (1.34), i zamene diferenciranja prema formulama (2.8), dobijaju se sledeće dve jednačine - sa odgovarajućim graničnim uslovima (vidi prilog P-III.5, str. 120):

$$\frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^*}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + \gamma_1 \cdot F \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k}) - \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) - 2\gamma_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{H}^* - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \alpha_k} +$$

(3.39)

$$+ b_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) - 2\alpha_1 \mathcal{H}^* = -A^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 \right)^2 ;$$

$$\mathcal{H}^* = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^* = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty ; \quad (3.40)$$

$$\frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} + \gamma_1 \cdot F \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k} \right) - \quad (3.41)$$

$$- \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \gamma_k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \gamma_k} \right) = 0 ;$$

$$\mathcal{H}^{**} = 1 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^{**} = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (3.42)$$

S obzirom da jednačine (3.39), (3.41) i granični uslovi (3.40), (3.42) ne zavise od veličina koje karakterišu konkretne zadatke, one predstavljaju UNIVERZALNE jednačine nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja za slučaj zadate konstantne temperature na površini tela. Prema tome, u cilju određivanja univerzalnih funkcija - bezdimenzijskih temperatura $\mathcal{H}^*(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr)$, $\mathcal{H}^{**}(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr)$ potrebno je da se ove jednačine, za određenu vrednost Prandtlvog broja, jednom-zauvek integrale.

3.3.2. Analitičko i numeričko rešenje u jedno-parametarskom približenju

Postupak dobijanja jedno-parametarskih univerzalnih jednačina u ovom slučaju, potpuno je sličan postupku koji je bio primenjen u slučaju termometarskog problema ili brzinskog graničnog sloja. Naime, ako se u univerzalnim jednačinama (3.35), (3.41) izuzev prvih parametara $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, svi ostali izjednače sa nulom, dobijaju se sledeće dve univerzalne jednačine u jednoparametarskom približenju - sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$\frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \eta^2} + R^{(1)} \cdot \eta \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \eta} + \gamma_1 \cdot F \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \eta} - 2 \cdot \gamma_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \mathcal{H}^{*(1)} - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \mathcal{H}^{*(1)} + \alpha_1^2 \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \alpha_1} - 2 \cdot R \cdot \alpha_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \alpha_1} - 2 \cdot R \cdot \beta_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \beta_1} - \alpha_1 \cdot \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \gamma_1} - \quad (3.43)$$

$$- 2 \cdot R \cdot \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{*(1)}}{\partial \gamma_1} = - A^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 \right)^2 ;$$

$$\mathcal{H}^{*(1)} = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^{*(1)} = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty; \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \eta^2} + R^{(1)} \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \eta} + \gamma_1 F^{(1)} \frac{\partial \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \eta} + \alpha_1^2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \alpha_1} - 2R^{(1)} \alpha_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \alpha_1} - \\ & - 2R^{(1)} \beta_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \beta_1} - \alpha_1 \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \gamma_1} - 2R^{(1)} \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{** (1)}}{\partial \gamma_1} = 0 ; \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\mathcal{H}^{** (1)} = 1 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^{** (1)} = 0 \quad \text{za} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

Iz istih razloga kao u prethodnim-razmatranim slučajevima, jednačine (3.43) i (3.45) su dalje rešavane predstavljanjem rešenja u vidu reda. Pri tome se koriste iz § 2. poznati redovi: (2.17) za funkciju $F^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i (2.18) za funkciju $R^{(1)}(\alpha_1, \beta_1)$, a bezdimenziske funkcije $\mathcal{H}^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$ i $\mathcal{H}^{** (1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$ se predstavljaju u obliku sličnih redova:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr) = & \mathcal{H}_{0,0}^*(\eta) + \alpha_1 \mathcal{H}_{0,1}^*(\eta) + \beta_1 \mathcal{H}_{1,0}^*(\eta) + \gamma_1 \mathcal{H}_{1,0}^*(\eta) + \\ & + \alpha_1 \beta_1 \mathcal{H}_{1,1}^*(\eta) + \alpha_1 \gamma_1 \mathcal{H}_{1,1}^*(\eta) + \beta_1 \gamma_1 \mathcal{H}_{1,1,0}^*(\eta) + \dots \\ & + \alpha_1^2 \mathcal{H}_{0,11}^*(\eta) + \beta_1^2 \mathcal{H}_{1,1,0}^*(\eta) + \gamma_1^2 \mathcal{H}_{1,1,0}^*(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{** (1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr) = & \mathcal{H}_{0,0}^{**}(\eta) + \alpha_1 \mathcal{H}_{0,1}^{**}(\eta) + \beta_1 \mathcal{H}_{1,0}^{**}(\eta) + \gamma_1 \mathcal{H}_{1,0}^{**}(\eta) + \\ & + \alpha_1 \beta_1 \mathcal{H}_{1,1}^{**}(\eta) + \alpha_1 \gamma_1 \mathcal{H}_{1,1}^{**}(\eta) + \beta_1 \gamma_1 \mathcal{H}_{1,1,0}^{**}(\eta) + \dots \\ & + \alpha_1^2 \mathcal{H}_{0,11}^{**}(\eta) + \beta_1^2 \mathcal{H}_{1,1,0}^{**}(\eta) + \gamma_1^2 \mathcal{H}_{1,1,0}^{**}(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

Posle unošenja redova (2.17), (2.18), (3.47), (3.48) u jednačine (3.43) i (3.45) i izjednačavanja koeficijenata uz iste parametre ili grupe parametara, dobijaju se sledeće dva rekurzivna sistema običnih diferencijalnih jednačina, iz kojih se određuju univerzalne funkcije - koeficijenti redova (3.47) i (3.48)

$$D_0(\mathcal{H}_{0,0}^*) = -f_{0,0}''^2 ;$$

$$D_1(\mathcal{H}_{0,1}^*) = \frac{2}{3} \pi \eta \mathcal{H}_{0,0}^{*'} + 2\pi \mathcal{H}_{0,0}^* - 2f_{0,0}'' f_{0,1}'' ; \quad (3.49)$$

$$D_1(\mathcal{H}_{1,0}^*) = \frac{2}{3} \pi \eta \mathcal{H}_{0,0}^{*'} - 2f_{0,0}'' f_{1,0}'' - \pi (f_{0,0}' - 1)^2 ;$$

$$\begin{aligned} D_2(\mathcal{H}_{1,1,0}^*) = & -\pi f_{0,0}'' \mathcal{H}_{1,0}^{*'} - \pi f_{1,0}'' \mathcal{H}_{0,0}^{*'} + 2\pi f_{0,0}' \mathcal{H}_{1,0}^* + 2\pi f_{1,0}' \mathcal{H}_{0,0}^* - \\ & - 2f_{0,0}'' f_{1,1,0}'' - f_{1,0}'' f_{1,0}'' ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(\mathcal{H}_{0,0}^{**}) &= 0 ; \\ \mathcal{D}_1(\mathcal{H}_{0,1}^{**}) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{H}_{0,0}^{**'} ; \\ \mathcal{D}_1(\mathcal{H}_{16,0}^{**}) &= \frac{2}{3}\pi\eta\mathcal{H}_{0,0}^{**'} ; \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\mathcal{D}_2(\mathcal{H}_{11c,0}^{**}) = -\pi f_{0,0} \mathcal{H}_{16,0}^{**'} - \pi f_{11c,0} \mathcal{H}_{0,0}^{**'} ;$$

i odgovarajući granični uslovi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0,0}^*(0) = \mathcal{H}_{0,1}^*(0) = \mathcal{H}_{16,0}^*(0) = \dots = \mathcal{H}_{11c,0}^*(0) &= 0 ; \\ \mathcal{H}_{0,0}^*(\infty) = \mathcal{H}_{0,1}^*(\infty) = \mathcal{H}_{16,0}^*(\infty) = \dots = \mathcal{H}_{11c,0}^*(\infty) &= 0 ; \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0,0}^{**}(0) = 1 ; \mathcal{H}_{0,1}^{**}(0) = \mathcal{H}_{16,0}^{**}(0) = \dots = \mathcal{H}_{11c,0}^{**}(0) &= 0 ; \\ \mathcal{H}_{0,0}^{**}(\infty) = \mathcal{H}_{0,1}^{**}(\infty) = \mathcal{H}_{16,0}^{**}(\infty) = \dots = \mathcal{H}_{11c,0}^{**}(\infty) &= 0 ; \end{aligned} \tag{3.52}$$

pri čemu diferencijalni operator \mathcal{D}_k zadržava isti oblik (3.8). (Potpuni rekurzivni sistemi (3.49) i (3.50) od po deset jednačina dati su u drugom delu rada, str. 72, 88). Treba primetiti da su u sistemu jednačina (3.49) i (3.50) zamenjene vrednosti konstanti: $A, R_0, R_{1a}, \dots, R_{11b}$, (2.24) koje su određene u § 2. Univerzalne funkcije - koeficijenti reda (2.17): $f_{0,0}(\eta), f_{0,1}(\eta), f_{16,0}(\eta), \dots, f_{11c,0}(\eta)$, koje se pojavljuju u jednačinama ovih rekurzivnih sistema, takodje su određene u § 2. i ovde se smatraju poznatim.

Za slučaj Prandtlvog broja $Pr=1,0$ mogu se, posredstvom Veberovih - specijalnih funkcija, izračunati analitička rešenja običnih diferencijalnih jednačina (3.49), (3.50) i ovde se navode ta rešenja za nekoliko prvih jednačina iz oba sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0,0}^*(\eta) &= \frac{1}{2}g_0(\eta) - \frac{1}{2}g_0^2(\eta) ; \\ \mathcal{H}_{0,1}^*(\eta) &= \pi \cdot g_1(\eta) - \frac{\pi}{4}g_0(\eta) + \frac{\pi}{4}g_0^2(\eta) - \pi g_0(\eta) \cdot g_1(\eta) - \\ &\quad - \frac{\pi}{24}g_0(\eta) \cdot g_{-1}(\eta) + \frac{\pi}{48}g_{-1}(\eta) ; \\ \mathcal{H}_{16,0}^*(\eta) &= \frac{\pi}{4}g_0^2(\eta) - \pi g_0(\eta) \cdot g_1(\eta) - \frac{\pi}{24}g_0(\eta) \cdot g_{-1}(\eta) + \\ &\quad + \frac{\pi}{48}g_{-1}(\eta) ; \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{0,0}^{**}(\eta) &= g_0(\eta) \\
 \mathcal{H}_{0,1}^{**}(\eta) &= \mathcal{H}_{16,0}^{**}(\eta) = \frac{\pi}{24} \cdot g_{-1}(\eta) ; \\
 \mathcal{H}_{16,0}^{**}(\eta) &= -\left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot g_0(\eta) - \frac{\pi}{16} g_{\frac{1}{2}}(\eta) + \frac{\sqrt{\pi}}{6} g_{\frac{1}{4}}(\eta) + \frac{\pi}{2} g_0(\eta) \cdot g_{\frac{1}{4}}(\eta) \\
 \mathcal{H}_{0,11}^{**}(\eta) &= \frac{\pi^2}{1152} g_{-2}(\eta) + \frac{\pi^2}{192} g_{-1}(\eta) ;
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Pored toga, metodom konačnih razlika, izvršeno je numeričko integralenje sistema jednačina (3.49), (3.50), (3.51), (3.52). Na taj način su određena rešenja za svih dvadeset univerzalnih funkcija-koeficijenata redova (3.47), (3.48) i to za tri vrednosti Prandtlovog broja: $Pr = 0,72; 1,0$ i $7,0$. Numeričke vrednosti tih univerzalnih funkcija date su u tablicama T-34 do T-45 i one su grafički prikazane na dijagramima sl.29 do sl.40 (u drugom delu rada, str. 76 do 101).

3.3.3. Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja

Na primeru osrujavanja kružnog cilindra poluprečnika $R = 10$ cm, provodnim nestišljivim fluidom u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja konstantne indukcije $\mathbf{B} = \text{const}$, izvršeno je proračunavanje karakterističnih veličina temperaturskog MHD graničnog sloja razmatranog problema. Pri tome je kružni cilindar pokrenut trzajem konstantnom brzinom $V_{\infty} = 1,5$ m/s a brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja je određena poznatim izrazom (2.29): $U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x) = 2 \cdot V_{\infty} \cdot \sin \frac{x}{R}$. Takodje, od ranije su poznati parametri oblika $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ti. određeni su izrazima (2.39) za neprovodan i (2.40) za provodan fluid.

Iz izraza za temperaturu (3.38) i redova (3.47), (3.48) za funkcije $\mathcal{H}^{(i)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$ i $\mathcal{H}^{** (i)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$, dobijeni su sledeći obrasci za izračunavanje gradijenta temperature odnosno Nuseltovog broja na površini tela (vidi prilog P-III.6, str. 122) i to:

- za neprovodan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\frac{\text{Nu}(\frac{x}{R})}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{(\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0}}{\sqrt{\text{Re}} \cdot \frac{(\Delta T)_0}{R}} = \frac{0,5}{\sqrt{t}} \cdot \left\{ 4 \cdot \text{Ec} \cdot \sin^2 \frac{x}{R} \cdot [\mathcal{H}_{0,0}^*(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{H}_{1c,0}^*(0)] + \mathcal{H}_{0,0}^{**}(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{H}_{1c,0}^{**}(0) \right\}; \quad (3.55)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\frac{\text{Nu}(\frac{x}{R})}{\sqrt{\text{Re}}} = \frac{\sqrt{\dot{N}}}{\sqrt{3(1-e^{-\frac{4}{3}\dot{N}t})}} \cdot \left\{ 4 \cdot \text{Ec} \cdot \sin^2 \frac{x}{R} \cdot [\mathcal{H}_{0,0}^*(0) + \beta_1 \cdot \mathcal{H}_{1b,0}^*(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{H}_{1c,0}^*(0)] + \mathcal{H}_{0,0}^{**}(0) + \beta_1 \cdot \mathcal{H}_{1b,0}^{**}(0) + \gamma_1 \cdot \mathcal{H}_{1c,0}^{**}(0) \right\}. \quad (3.56)$$

Iz obrazaca (3.55), (3.56) izračunate su, na osnovu numeričkih rešenja za univerzalne funkcije $\mathcal{H}_{0,0}^*(0)$, $\mathcal{H}_{0,1}^*(0)$, $\mathcal{H}_{1b,0}^*(0)$, \dots , $\mathcal{H}_{1c,0}^*(0)$, $\mathcal{H}_{0,0}^{**}(0)$, $\mathcal{H}_{0,1}^{**}(0)$, $\mathcal{H}_{1b,0}^{**}(0)$, \dots , $\mathcal{H}_{1c,0}^{**}(0)$, odgovarajućih vrednosti parametara α_1 , β_1 , γ_1 određenih relacijama (2.39) (2.40) i za slučaj kada je Ekertov broj $\text{Ec} = 1$, raspodele veličine $\text{Nu}/\sqrt{\text{Re}}$ na površini kružnog cilindra. Proračun je izvršen za Prändtlov broj $\text{Pr} = 0,72$ i vrednosti Stjuartovog broja i vremenskih trenutaka određenih relacijom (2.46): $\dot{N} = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0$ i $t = 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,6; 0,9$. Kao ilustracija dobijenih rezultata, odabrani su i dati u vidu tablica T-46 do T-49 i dijagrama sl.41 (u drugom delu rada, str. 102) rezultati raspodele $\text{Nu}/(\text{Re})^{1/2}$ na površini cilindra za tri vremenska trenutka: $t = 0,01; 0,1; 0,9$.

Iz izrasa za temperaturu (3.38) i redova (3.47), (3.48) za funkcije $\mathcal{H}^{(*)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \text{Pr})$ i $\mathcal{H}^{(**)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \text{Pr})$ dobija se sledeći obrazac za izračunavanje bezdimenziskih temperatura u graničnom sloju i to:

$$\frac{T(\eta) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = 4 \cdot \text{Ec} \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{R} \right) \cdot \left\{ \mathcal{H}_{0,0}^*(\eta) + \beta_1 \cdot \mathcal{H}_{1b,0}^*(\eta) + \gamma_1 \cdot \mathcal{H}_{1c,0}^*(\eta) \right\} + \mathcal{H}_{0,0}^{**}(\eta) + \beta_1 \cdot \mathcal{H}_{1b,0}^{**}(\eta) + \gamma_1 \cdot \mathcal{H}_{1c,0}^{**}(\eta). \quad (3.57)$$

Za slučaj Ekertovog broja $\text{Ec} = 1$ izračunati su, na osnovu numeričkih rešenja univerzalnih funkcija $\mathcal{H}_{0,0}^*(\eta)$, $\mathcal{H}_{0,1}^*(\eta)$, $\mathcal{H}_{1b,0}^*(\eta)$, $\mathcal{H}_{1c,0}^*(\eta)$, $\mathcal{H}_{0,0}^{**}(\eta)$, $\mathcal{H}_{0,1}^{**}(\eta)$, $\mathcal{H}_{1b,0}^{**}(\eta)$, $\mathcal{H}_{1c,0}^{**}(\eta)$ i odgovarajućih

vrednosti parametara oblika $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, određenih relacijama (2.39), (2.40), bezdimenziski profili temperature iz obrasca (3.57). Proračun je izvršen za Prandtl-ov broj $Pr = 0,72$, u tri preseka $\frac{x}{R} = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ i za vrednosti Stjuartovog broja i vremenskih trenutaka određenih relacijom (2.46): $N^* = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0$ i $t^* = 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,6; 0,9$. Takođe su i ovde odabrani i dati u vidu tablica T-50 do T-58 i dijagrama sl.42 i sl.43 (u drugom delu rada, str. 105) profili bezdimenziske temperature za dva preseka određena sa $\frac{x}{R} = 60^\circ$ i $\frac{x}{R} = 90^\circ$ u vremenskim trenucima $t^* = 0,1$ i $t^* = 0,9$.

Analiza dobijenih rezultata pokazuje da povećanje Stjuartovog broja (N^*) odnosno indukcije magnetnog polja prouzrokuje sledeće efekte:

- a) vrednosti Nuseltovog broja, u pojedinim vremenskim trenucima, rastu i dostižu maksimalne vrednosti u okolini tačke određene sa $\frac{x}{R} = 90^\circ$, kao što prikazuje dijagram sl.41;
- b) vrednosti bezdimenziskih temperatura u graničnom sloju rastu, kao što prikazuju dijagrami sl.42,43, a prema tome raste i debljina temperaturskog graničnog sloja provodnog fluida - u poredjenju sa debljinom temperaturskog graničnog sloja neprovodnog fluida.

S obzirom da se u narednom odeljku razmatra nestacionarni MHD temperaturski granični sloj pri zadatoj promenljivoj temperaturi na površini tela, može se smatrati da ovde razmatrani problem zagrevanja ili hladjenja pri zadatoj konstantnoj temperaturi na površini tela pretstavlja specijalni slučaj tog opštijeg problema. Pogotovo što se, na osnovu dobijenih rezultata u ova dva slučaja, mogu izvesti slični zaključci - detaljnije obrazloženje efekata prouzrokovanih spoljašnjim magnetnim poljem biće dati u narednom odeljku.

3.4. Slučaj zadate promenljive temperature na površini tela

Nestacionarni MHD temperaturski granični sloj u slučaju zadate promenljive temperature na površini tela, određen je sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina (1.31), (1.32), (1.34)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho} (u - U);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot B^2}{\rho \cdot c_p} (u - U)^2;$$

sa graničnim i početnim uslovima (1.33), (1.38) i (1.39)

$$u = U(t, x), \quad v = 0 \quad \text{pri} \quad y = 0 \quad \text{i} \quad t = 0,$$

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{pri} \quad y = 0 \quad \text{i} \quad t > 0,$$

$$u = U(t, x) \quad \text{pri} \quad y \rightarrow \infty,$$

$$T = T_w(t, x) \quad \text{pri} \quad y = 0,$$

$$T = T_\infty \quad \text{kad} \quad y \rightarrow \infty.$$

U ovom radu se razmatraju strujanja za koja se, analogno izrazu (2.1) za spoljašnju brzinu $U(t, x)$, zadata temperatura zida $T_w(t, x)$ može izraziti u obliku proizvoda dve funkcije sa razdvojenim promenljivim tj.

$$T_w(t, x) - T_\infty = \varphi(t) \cdot \mathcal{V}(x), \quad (3.58)$$

gde su funkcije $\varphi(t)$ i $\mathcal{V}(x)$ klase C^k , $0 \leq k \leq \infty$.

Za određivanje raspodele temperature u razmatranom slučaju strujanja, potrebno je da se reši energijska jednačina (1.34) sa graničnim uslovima (1.38), (1.39). Pri tome se koriste rešenja odgovarajućeg nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja - koja su određena u § 2.

3.4.1. Izvodjenje univerzalne jednačine

Iz peraznih diferencijalnih jednačina (1.31), (1.32), (1.34) je očigledno da raspodela temperature u graničnom slo-

ju zavisi ne samo od brzinskog polja, već i od promenljive temperature zida (3.58) tj. od zadatih funkcija $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{v}(x)$. Stoga se jednačina (1.34) može dovesti na univerzalni oblik samo ako se, pored ranije uvedene nove promenljive η (2.6) i beskonačnih skupova parametara $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ (2.7), uvedu još dva nova beskonačna skupa parametara λ_k i μ_k - koji će da uzimaju u obzir uticaj promenljive temperature zida. Ova dva nova beskonačna skupa parametara su definisana sledećim izrazima:

$$\lambda_k = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{d^k \varphi}{dt^k} \cdot \xi_p^{*k};$$

$$\mu_k = \Omega \cdot V \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot \xi_p^{*k}.$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ (3.59)

Posredstvom izraza (2.4), (2.6), (3.59) dobijene su sledeće formule (vidi prilog P-III.7, str. 123), sa kojima se vrši zamenjena diferenciranja u jednačini (1.34)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\xi_p^*} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + l_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} + m_k \frac{\partial}{\partial \mu_k});$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\Omega \cdot V \cdot \xi_p^*} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + M_k \frac{\partial}{\partial \mu_k});$$

(3.60)

pri čemu su koeficijenti a_k, b_k, c_k, θ_k i G_k poznati od ranije odnosno određeni relacijama (2.9) u § 2., a l_k, m_k i M_k su određeni sledećim izrazima:

$$l_k = (-\lambda_1 + 2 \cdot k \cdot R) \cdot \lambda_k + \lambda_{k+1},$$

$$m_k = (k \cdot \alpha_1 + 2 \cdot k \cdot R) \cdot \mu_k,$$

$$M_k = (k \cdot \gamma_1 - \mu_1) \cdot \mu_k + \mu_{k+1}.$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ (3.61)

Potražimo sada rešenje za raspodelu temperature u obliku:

$$T(t, x, y) = T_{\infty} + \frac{U(t, x)}{c_p} \cdot \mathcal{H}^*(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr) + (T_w - T_{\infty}) \cdot \mathcal{H}^{***}(\eta, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, \{\lambda_k\}, \{\mu_k\}, Pr);$$

(3.62)

gde su: $U(t, x)$, $\varphi(t)$, $v(x)$, \mathcal{H}^* i \mathcal{H}^{***} realne funkcije, neprekidne i neograničeni broj puta diferencijabilne po svim promenljivim.

Posle uvođenja strujne funkcije $\psi(t, x, y)$ u obliku (2.10), posredstvom poznatih relacija $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, i izraza (3.62) za temperaturu, u jednačinu (1.34) i zamene diferenciranja prema formulama (2.8), (3.60), dobijaju se sledeće dve parcijalne diferencijalne jednačine - sa odgovarajućim graničnim uslovima (vidi prilog P-III.7, str. 123):

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^*}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + \delta_i F \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + \\ & + G_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k}) - \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) - 2\delta_i \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{H}^* - 2\alpha_i \mathcal{H}^* - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) = -A^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)^2 - \beta_i \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 \right)^2 ; \end{aligned} \quad (3.39')$$

$$\mathcal{H}^* = 0 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^* = 0 \quad \text{kad} \quad \eta \rightarrow \infty ; \quad (3.40')$$

$$\begin{aligned} & \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} + \delta_i F \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + \\ & + G_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k}) - \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\theta_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \gamma_k} + M_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \mu_k}) - (\mu_i \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{H}^{***} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \gamma_k} + l_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \lambda_k} + m_k \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \mu_k}) - \lambda_i \mathcal{H}^{***} = 0 ; \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\mathcal{H}^{***} = 1 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^{***} = 0 \quad \text{kad} \quad \eta \rightarrow \infty . \quad (3.64)$$

iz kojih se odredjuju bezdimenziske temperature- funkcije \mathcal{H}^* i \mathcal{H}^{***} . Pri tome su funkcije F i R od ranije poznate tj. određene pri razmatranju nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja u § 2. S obzirom da se jednačina (3.39') i granični uslovi (3.40') potpuno poklapaju sa jednačinom (3.39) i graničnim uslovima (3.40) - to su i njihova rešenja identična. Prema tome, može se smatrati da je rešenje za funkciju $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\eta; \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, Pr)$ poznato tj. određeno u odeljku 3.3. pri razmatranju problema zagrevanja ili hladjenja sa zadatom konstantnom temperaturom na površini tela. Ostaje da se odredi funkcija $\mathcal{H}^{***}(\eta; \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\}, \{\lambda_k\}, \{\mu_k\}, Pr)$ rešavanjem jednačine (3.63) sa graničnim uslovima (3.64), koja pretstavlja UNIVERZALNU jednačinu - jer ne zavisi od veličina koje karakterišu konkretne zadatke. Napominje se da i u ovom slučaju pojam univerzalnosti vazi u užem smislu nego kod brzinskog graničnog sloja. Naime, pošto jednačina (3.63) zavisi od Prandt-

lovog broja, koji se ne može eliminisati, potrebno je da se ona integriše posebno za svaku određenu vrednost Prandtlovog broja.

3.4.2. Analitičko i numeričko rešenje u jedno-parametarskom približenju

S obzirom da jednačina (3.63) sadrži sume beskonačnog broja članova, to je za njeno rešavanje neophodno da se uzme njihov konačan broj - što se postiže zadržavanjem nekoliko prvih parametara uvedenih beskonačnih skupova (2.7), (3.59). Tako se iz (3.63) može dobiti, u zavisnosti od tačnosti koja se želi da postigne, univerzalna jednačina u jedno-, dvo- ili više-parametarskom približenju. Pri tome se rešavanjem, bilo numeričkim postupkom, bilo razvijanjem u red po parametrima $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \lambda_k, \mu_k$, dobija rešenje u odgovarajućem približenju.

Prema tome, ako se u univerzalnoj jednačini (3.63), izuzev prvih parametara $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1$, svi ostali izjednače sa nulom tj. prema (2.7), (2.9), (3.59), (3.61) uvrste sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\neq 0, \beta_1 \neq 0, \gamma_1 \neq 0, \lambda_1 \neq 0, \mu_1 \neq 0, \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \beta_2 = \beta_3 = \dots = \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0, \\ \mu_2 = \mu_3 = \dots = 0, \quad a_1 &= (-\alpha_1 + 2R) \cdot \alpha_1, \quad b_1 = 2R \cdot \beta_1, \\ c_1 &= (\alpha_1 + 2R) \cdot \gamma_1, \quad d_1 = (-\lambda_1 + 2R) \cdot \lambda_1, \quad m_1 = (\alpha_1 + 2R) \cdot \mu_1, \\ \theta_1 = \beta_2 = 0, \quad G_1 = \gamma_2 = 0, \quad M_1 &= (\gamma_1 - \mu_1) \cdot \mu_1, \end{aligned}$$

dobija se sledeća univerzalna jednačina u jednoparametarskom približenju, sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \eta^2} + R \cdot \eta \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \eta} + \delta_1 F^{(\eta)} \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \eta} - \zeta_1 \frac{\partial F^{(\eta)}}{\partial \eta} \mathcal{H}^{***(\eta)} - \delta_1 \zeta_1 \frac{\partial F^{(\eta)}}{\partial \eta} \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \zeta_1} + \\ + \zeta_1 \frac{\partial F^{(\eta)}}{\partial \eta} \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \zeta_1} + \alpha_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \alpha_1} - 2R \alpha_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \alpha_1} - 2R \beta_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \beta_1} - \alpha_1 \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \gamma_1} - \quad (3.65) \\ - 2R \gamma_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \gamma_1} + \lambda_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \lambda_1} - 2R \lambda_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \lambda_1} - \alpha_1 \mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \mu_1} - 2R \mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}^{***(\eta)}}{\partial \mu_1} - \lambda_1 \mathcal{H}^{***(\eta)} = 0; \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}^{***(\eta)} = 1 \quad \text{za} \quad \eta = 0, \quad \mathcal{H}^{***(\eta)} = 0 \quad \text{kad} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (3.66)$$

S obzirom na veliki broj nezavisno promenljivih: η , $\alpha_1, \beta_1, \delta_1, \lambda_1, \zeta_1$, u jednačini (3.65) - izrada programa za njeno direktno numeričko integralenje i sâm mašinski rad računara bili bi dosta komplikovani, dugotrajni i skupi. Stoga je sistem (3.65), (3.66) rešavan predstavljanjem rešenja u vidu reda. Pri tome se koriste iz § 2. poznati redovi (2.17) za funkciju $F^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1)$ i (2.18) za funkciju $R(\alpha_1, \beta_1)$, a bezdimenzisku temperaturu $\mathcal{H}^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \lambda_1, \zeta_1, Pr)$ predstavljamo u vidu sledećeg reda:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{***}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \lambda_1, \zeta_1, Pr) = & \mathcal{H}_{0,0}^{***}(\eta) + \alpha_1 \mathcal{H}_{0,1}^{***}(\eta) + \beta_1 \mathcal{H}_{16,0}^{***}(\eta) + \\ & + \delta_1 \mathcal{H}_{10,0}^{***}(\eta) + \lambda_1 \mathcal{H}_{11,0}^{***}(\eta) + \zeta_1 \mathcal{H}_{11m,0}^{***}(\eta) + \alpha_1^2 \mathcal{H}_{9,11}^{***}(\eta) + \alpha_1 \beta_1 \mathcal{H}_{16,1}^{***}(\eta) + \\ & + \alpha_1 \delta_1 \mathcal{H}_{10,1}^{***}(\eta) + \alpha_1 \lambda_1 \mathcal{H}_{11,1}^{***}(\eta) + \alpha_1 \zeta_1 \mathcal{H}_{11m,1}^{***}(\eta) + \beta_1^2 \mathcal{H}_{116,0}^{***}(\eta) + \beta_1 \delta_1 \mathcal{H}_{16,10}^{***}(\eta) + \\ & + \beta_1 \lambda_1 \mathcal{H}_{16,11,0}^{***}(\eta) + \beta_1 \zeta_1 \mathcal{H}_{16,11m,0}^{***}(\eta) + \delta_1^2 \mathcal{H}_{110,0}^{***}(\eta) + \delta_1 \lambda_1 \mathcal{H}_{10,11,0}^{***}(\eta) + \\ & + \delta_1 \zeta_1 \mathcal{H}_{10,11m,0}^{***}(\eta) + \lambda_1^2 \mathcal{H}_{11,1,0}^{***}(\eta) + \lambda_1 \zeta_1 \mathcal{H}_{11,11m,0}^{***}(\eta) + \zeta_1^2 \mathcal{H}_{11m,0}^{***}(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (3.67)$$

Posle unošenja redova (2.17), (2.18) i (3.67) u jednačinu (3.65), (3.66) i izjednačavanja koeficijenata uz iste parametre ili grupe parametara, dobija se sledeći rekursivni sistem običnih diferencijalnih jednačina, iz kojih se određuju univerzalne funkcije - koeficijenti reda (3.67) sa odgovarajućim graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} D_0(\mathcal{H}_{0,0}^{***}) &= 0 ; \\ D_1(\mathcal{H}_{0,1}^{***}) &= \frac{2}{3} \pi \eta \mathcal{H}_{0,0}^{***'} ; \\ D_1(\mathcal{H}_{16,0}^{***}) &= \frac{2}{3} \pi \eta \mathcal{H}_{0,0}^{***'} ; \\ D_1(\mathcal{H}_{10,0}^{***}) &= -\pi f_{10,0} \mathcal{H}_{0,0}^{***'} ; \\ D_1(\mathcal{H}_{11,0}^{***}) &= \pi \mathcal{H}_{0,0}^{***'} ; \\ D_1(\mathcal{H}_{11m,0}^{***}) &= \pi f_{11,0} \mathcal{H}_{0,0}^{***'} ; \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} D_2(\mathcal{H}_{11m,0}^{***}) &= 0 \quad (\text{POSLEDNJA, 21, JEDNAČINA}) \\ \mathcal{H}_{0,0}^{***}(0) &= 1 ; \quad \mathcal{H}_{0,1}^{***}(0) = \mathcal{H}_{16,0}^{***}(0) = \mathcal{H}_{10,0}^{***}(0) = \dots = 0 , \\ \mathcal{H}_{0,0}^{***}(\infty) &= \mathcal{H}_{0,1}^{***}(\infty) = \mathcal{H}_{16,0}^{***}(\infty) = \mathcal{H}_{10,0}^{***}(\infty) = \dots = 0 . \end{aligned} \quad (3.69)$$

pri čemu diferencijalni operator \mathcal{D}_k zadržava isti oblik (3.8). (Potpun rekurzivni sistem (3.68) od 21 jednačine dat je u drugom delu rada, str. 114). Treba primetiti da su u sistemu jednačina (3.68) zamenjene vrednosti konstanti: $A, R_0, R_{1a}, R_{1b}, R_{11a}, R_{11ab}, R_{11b}$, - određene u § 2., (2.24). Univerzalne funkcije - koeficijenti reda (2.17): $f_{0,0}(\eta), f_{0,1}(\eta), f_{1,0}(\eta), \dots, f_{11,0}(\eta)$, koje se pojavljuju u ovom sistemu, takodje su određene u § 2. i ovde se smatraju poznatim.

Za slučaj Prandtlovog broja $Pr=1,0$ mogu se, posredstvom Veberovih - specijalnih funkcija, izračunati analitička rešenja običnih diferencijalnih jednačina (3.68) - i ovde se navode za nekoliko prvih jednačina:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{0,0}^{***}(\eta) &= g_0(\eta); \\ \mathcal{H}_{0,1}^{***}(\eta) &= \mathcal{H}_{1,0}^{***}(\eta) = \frac{\pi}{24} g_{-1}(\eta); \\ \mathcal{H}_{1,0}^{***}(\eta) &= -\left(\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}\right) g_1(\eta) - \frac{\pi}{16} g_{-1}(\eta) + \frac{\pi}{2} g_0(\eta) g_1(\eta) + \frac{\sqrt{\pi}}{6} g_{\frac{1}{2}}(\eta); \\ \mathcal{H}_{1,1}^{**}(\eta) &= \pi g_1(\eta) - \frac{\pi}{4} g_0(\eta); \\ \mathcal{H}_{1m,0}^{***}(\eta) &= (\pi+2) g_1(\eta) - \frac{\pi}{4} g_0(\eta) - \frac{\pi}{2} g_{\frac{1}{2}}^2(\eta). \end{aligned} \quad (3.70)$$

.....

S druge strane, metodom konačnih razlika, izvršeno je numeričko integralenje sistema (3.68), (3.69), pri čemu su određena rešenja za prvih šest univerzalnih funkcija: $\mathcal{H}_{0,0}^{***}(\eta), \mathcal{H}_{0,1}^{***}(\eta), \mathcal{H}_{1,0}^{***}(\eta), \mathcal{H}_{1,1}^{**}(\eta), \mathcal{H}_{1m,0}^{***}(\eta)$ - i to za tri vrednosti Prandtlovog broja $Pr=0,72; 1,0$ i $7,0$. Numeričke vrednosti tih univerzalnih funkcija date su u tablicama T-59 do T-61 i grafički su prikazane na dijagramima sl.44 do sl.47 (u drugom delu rada, str. 114).

Na osnovu numeričkih vrednosti univerzalnih funkcija - koeficijenata redova (3.47), (3.67), izvršen je u narednom odeljku, proračun nestacionarnog MHD temperaturnog graničnog sloja za jedan konkretan zadatak.

3.4.3. Primer proračuna nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja

Na primeru opstrujavanja kružnog cilindra poluprečnika $R = 10$ cm, provodnim nestišljivim fluidom, u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja konstantne indukcije $B = \text{const}$ - izvršeno je proračunavanje karakterističnih veličina temperaturskog MHD graničnog sloja razmatranog problema. Pri tome je kružni cilindar pokrenut trzajem konstantnom brzinom $V_\infty = 1,5$ m/s a brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja je određena poznatim izrazom (2.29): $U(t, x) = 2 \cdot V_\infty \cdot \sin \frac{x}{R} = \Omega(t) \cdot V(x)$. Osim toga, pretpostavlja se da je temperatura na površini cilindra u svim tačkama ista i da se menja sa vremenom linearno tj. da je zadata funkcijom sledećeg oblika:

$$T_w(t, x) - T_\infty = \varphi(t) \cdot \mathcal{V}(x) = c_2 \cdot t, \quad (3.71)$$

iz koje odmah sleduje

$$\varphi(t) = c_2 \cdot t, \quad \mathcal{V}(x) = 1. \quad (3.72)$$

Dok su parametri oblika $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ već od ranije poznati i određeni izrazima: (2.39) za neprovodan fluid i (2.40) za provodan fluid, dotle se parametri λ_1 i μ_1 određuju na osnovu definicije (3.59) i relacija (3.72) tj. iz sledećih izraza (vidi prilog P-III.8, str. 126) i to:

- za neprovodan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{4}{\pi}, \quad (3.73)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{3}{\pi \cdot \dot{N} \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot t} \right). \quad (3.74)$$

Iz izraza (3.62) za temperaturu i redova (3.47), (3.67) za funkcije $\mathcal{H}^{(1)*}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$ i $\mathcal{H}^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, Pr)$, dobijeni su sledeći obrasci za izračunavanje gradijenata temperature odnosno Nuseltovog broja na površini cilindra (vidi prilog P-III.9, str. 127), i to:

- za neprovođan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\frac{Nu(\frac{x}{R})}{Ec \cdot \sqrt{Re}} = \frac{2}{\sqrt{t}} \cdot \sin^2(\frac{x}{R}) \cdot \left\{ \mathcal{H}'_{0,0}(0) + \delta_1 \mathcal{H}'_{1c,0}(0) \right\} + \frac{D_2}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \mathcal{H}''_{0,0}(0) + \delta_1 \mathcal{H}''_{1c,0}(0) + \lambda_1 \mathcal{H}''_{1l,0}(0) \right\}; \quad (3.75)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\frac{Nu(\frac{x}{R})}{Ec \cdot \sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\dot{N}}{3(1-e^{-\frac{4}{3} \cdot \dot{N} \cdot t})}} \cdot \left\{ 4 \cdot \sin^2 \frac{x}{R} \cdot \left[\mathcal{H}'_{0,0}(0) + \beta_1 \mathcal{H}'_{1b,0}(0) + \delta_1 \mathcal{H}'_{1c,0}(0) \right] + D_2 \cdot t \cdot \left[\mathcal{H}''_{0,0}(0) + \beta_1 \mathcal{H}''_{1b,0}(0) + \delta_1 \mathcal{H}''_{1c,0}(0) + \lambda_1 \mathcal{H}''_{1l,0}(0) \right] \right\} \quad (3.76)$$

pri čemu je sa D_2 označena sledeća veličina:

$$D_2 = c_2 \cdot R \cdot c_p \cdot v_\infty^{-3} \quad (3.77)$$

S obzirom na relaciju (3.71), konstanta c_2 ima dimenziju $[c_2] = \frac{0K}{s}$, a usvojena je vrednost: $c_2 = 0,335771$ što omogućuje da se za konstantu D_2 dobije ista vrednost kao u radu /37/ - tako da se mogu upoređivati rezultati koji se odnose na neprovođan fluid. Lako se pokazuje da je D_2 bezdimenziona veličina tj.

$$[D_2] = \left[c_2 \frac{R \cdot c_p}{v_\infty \cdot v_\infty^2} \right] = \frac{0K}{s} \cdot \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{\frac{m^2}{s^2}} \cdot \frac{J}{kg \cdot 0K} = 1,$$

i za vazduh ima vrednost:

$$D_2 = \frac{c_2 \cdot R \cdot c_p}{v_\infty^3} = \frac{0,335771 \cdot 0,1 \cdot 1005,3288}{1,5^3} = 10.$$

Iz obrazaca (3.75), (3.76) izračunate su, na osnovu numeričkih rešenja za univerzalne funkcije $\mathcal{H}'_{0,0}(0)$, $\mathcal{H}'_{1b,0}(0)$, $\mathcal{H}'_{1c,0}(0)$, $\mathcal{H}''_{0,0}(0)$, $\mathcal{H}''_{1b,0}(0)$, $\mathcal{H}''_{1c,0}(0)$, $\mathcal{H}''_{1l,0}(0)$, odgovarajućih vrednosti parametara α_1 , β_1 , δ_1 , λ_1 , ζ_1 , odredjenih relacijama (2.39), (3.73), (2.40), (3.74), kao i vrednosti konstante $D_2 = 10$, raspodele veličine $Nu/(Ec \cdot \sqrt{Re})$ na površini kružnog cilindra. Proračun je izvršen za Prandtlov broj $Pr = 0,72$ i vrednosti Stjuartovog broja i vremenskih trenutaka odredjenih relacijom (2.46): $\dot{N} = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0$ i $t = 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,6; 0,9$. Kao ilustracija dobijenih rezultata, odabrani su i dati u vidu

tablica T-62 do T-65 i dijagrama sl.48 (u drugom delu rada, str. 121) rezultati za raspodelu $Nu/(Ec \cdot \sqrt{Re})$ na površini cilindra u tri vremenska trenutka: $t^* = 0,01; 0,1$ i $0,6$.

Iz izraza (3.62) za temperaturu i redova (3.47), (3.67) za funkcije $\mathcal{H}^* (\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, Pr)$ i $\mathcal{H}^{***} (\eta, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \lambda_1, \mu_1, Pr)$ dobija se sledeći obrazac za izračunavanje bezdimenziskih temperatura u graničnom sloju:

$$\frac{T(\eta) - T_\infty}{v_\infty^2 / c_p} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left\{ \mathcal{H}_{0,0}^*(\eta) + \beta_1 \mathcal{H}_{16,0}^*(\eta) + \delta_1 \mathcal{H}_{10,0}^*(\eta) \right\} + D_2 \cdot t^* \cdot \left\{ \mathcal{H}_{0,0}^{***}(\eta) + \beta_1 \mathcal{H}_{16,0}^{***}(\eta) + \delta_1 \mathcal{H}_{10,0}^{***}(\eta) + \lambda_1 \mathcal{H}_{10,0}^{***}(\eta) \right\}. \quad (3.79)$$

Iz obrasca (3.79) su, na osnovu numeričkih rešenja za univerzalne funkcije $\mathcal{H}_{0,0}^*(\eta), \mathcal{H}_{16,0}^*(\eta), \mathcal{H}_{10,0}^*(\eta), \mathcal{H}_{0,0}^{***}(\eta), \dots, \mathcal{H}_{10,0}^{***}(\eta)$, odgovarajućih vrednosti parametara $\alpha_1, \beta_1, \delta_1, \lambda_1, \mu_1$, određenih relacijama (2.39), (3.73), (2.40), (3.74), kao i vrednosti konstante $D_2 = 10$, izračunate raspodele bezdimenziske temperature u graničnom sloju. Proračun je izvršen za Prandtl-ov broj $Pr = 0,72$, u tri preseka određena sa $\frac{x}{R} = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ i za vrednosti Stjuartovog broja i vremenskih trenutaka određenih relacijom (2.46): $\bar{N} = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0$ i $t^* = 0,01; 0,05; 0,1; 0,3; 0,6$ i $0,9$. Zbog obimnosti dobijenih rezultata, odabrani su i kao ilustracija dati u vidu tablica T-66 do T-73 i dijagrama sl.49 i sl.50 (u drugom delu rada, str. 124) profili bezdimenziske temperature u dva preseka određena sa $\frac{x}{R} = 60^\circ$ i $\frac{x}{R} = 90^\circ$ za četiri vremenska trenutka $t^* = 0,01; 0,1; 0,6$ i $0,9$.

Analiza dobijenih rezultata pri rešavanju razmatranog primera, pokazuje da povećanje Stjuartovog broja \bar{N} odnosno indukcije magnetnog polja prouzrokuje sledeće efekte:

- vrednosti Nuseltovog broja Nu , u pojedinim vremenskim trenucima, rastu i dostižu maksimalne vrednosti u okolini tačke određene sa $\frac{x}{R} = 90^\circ$, kao što se vidi iz dijagrama sl.48 odnosno tablica T-62 do T-65 (II deo, str. 121);
- vrednosti bezdimenziskih temperatura u graničnom sloju rastu, kao što prikazuju dijagrami sl.49,50 odnosno tablice T-66 do T-73 (II deo, str. 124), a prema tome raste

i debljina temperaturskog graničnog sloja provodnog fluida - u poredjenju sa odgovarajućom debljinom temperaturskog graničnog sloja neprovodnog fluida.

Navedeni efekti uticaja spoljašnjeg magnetnog polja mogu se objasniti činjenicom, da su u okolini tačke $\frac{x}{R} = 90^\circ$, najveće brzine i gradijenti brzine strujanja u graničnom sloju - koji s druge strane prouzrokuju najveći priraštaj Džaulove toplote i toplote usled trenja. Iz dijagrama sl.48 se vidi da su za male vrednosti vremena, na primer za $t^* < \sim 0,01$ Nuseltov broj odnosno gradijent temperature na površini tela $(\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0}$ stalno pozitivni, a to znači da toplota prelazi sa fluida na telo tj. telo se zagreva. Za veće vremenske intervale, na primer $t^* > \sim 0,1$ temperatura tela se, saglasno usvojenom graničnom uslovu (3.71), toliko poveća da je Nuseltov broj stalno negativan - što znači da toplota prelazi sa tela na fluid odnosno telo se hladi. Iz istog dijagrama se, za vremenski interval $\sim 0,01 < t^* < \sim 0,1$, mogu prema vrednostima (znaku) Nuseltovog broja da odrede zone površine cilindra u kojima se telo: zagreva strujom fluida tj. $Nu > 0$ ili hladi strujom fluida tj. $Nu < 0$. Napominje se da se u slučaju neprovodnog fluida ovi rezultati u potpunosti slažu sa rešenjima B.Cijana dobijenim u radu /37/.

Z A K L J U Č A K

Proučavanje karakterističnih veličina brzinskog i temperaturskog graničnog sloja pri nestacionarnom laminarnom strujanju nestišljivog elektroprovodnog fluida, u prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja, prètstavlja znatno složeniji problem - u poredjenju sa odgovarajućim problemom neprovodnog fluida. Dejstvom spoljašnjeg magnetnog polja može se ostvariti pomeranje tačke odvajanja, promena profila brzine i temperature u graničnom sloju - usled čega se menjaju i vrednosti njihovih gradijenata na površini tela, odnosno menjaju se tangencijalni napon i prenos toplote na površini tela. Prema tome, posredstvom spoljašnjeg magnetnog polja, može se da upravlja karakteristikama graničnog sloja. Stoga se vrše mnoga teorijska i eksperimentalna istraživanja sa ciljem iznalaženja praktičnih mogućnosti za korišćenje efekata magnetnog polja u tehničke svrhe.

U uvodnom delu ovog rada detaljnije je ukazano na složenost, ali istovremeno i značaj i aktuelnost problema kojima se bavi magnetna hidrodinamika. Jedan od pravaca u kojem se ona razvija, predstavlja teorija MHD graničnog sloja. Na osnovu podataka iz raspoložive literature, može se konstatovati da je nestacionarni MHD brzinski granični sloj nedovoljno proučavan; međjutim, o nestacionarnom MHD temperaturskom graničnom sloju postoje samo najopštija razmatranja energijske jednačine. Stoga je u ovom radu razmatran fizički model koji predstavlja nestacionarno, laminarno strujanje u graničnom sloju elektroprovodnog nestišljivog fluida u prisustvu magnetnog polja, čija je indukcija $B = B(x)$ funkcija samo podužne koordinate sa linijama sila upravnim na površinu tela. S obzirom da električno polje ne postoji, a da je sopstveno magnetno polje indukovanih struja u fluidu zanemarljivo malo, dobijena su rešenja u tzv. "bezindukcionom" približenju. Osim toga, predpostavlja se da su temperaturske razlike male (ispod 50°C) pa se može smatrati da su u tom slučaju fizičke karakteristike fluida konstantne. Stoga se Arhimedova sila potiska može

da zanemari, a jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja postaju nezavisne od raspodele temperature i mogu odvojeno da se rešavaju. Za rešavanje jednačina temperaturskog graničnog sloja međjutim, koje su uvek zavisne od raspodele brzine, neophodno je da se koriste rešenja odgovarajućeg brzinskog graničnog sloja. Zbog toga su u ovom radu najpre rešene jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja razmatranog problema strujanja. Napominje se da su u izvesnim radovima /41,42,43/ razmatrani slični slučajevi nestacionarnog MHD graničnog sloja sa konstantnom indukcijom spoljašnjeg magnetnog polja, ali nisu tražena numerička rešenja. Stoga se rezultati navedenih radova nisu mogli koristiti u ovom radu.

Za razmatrani slučaj strujanja, najpre su polazne jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja dovedene na tzv. UNIVERZALNI oblik tj. oblik u kojem ne zavise od veličina koje karakterišu konkretne zadatke. Zbog većeg broja nezavisno promenljivih, rešavanje univerzalne jednačine u jednoparametarskom približenju, koja predstavlja nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu, direktnim numeričkim integralenjem - bilo bi dosta komplikovano, dugotrajno i skupo. Stoga je ona rešavana predstavljanjem rešenja u vidu reda. Takvim postupkom se univerzalna jednačina u jednoparametarskom približenju svodi na rekurzivni sistem običnih diferencijalnih jednačina, a njihova rešenja određuju univerzalne funkcije-koeficijente reda. S obzirom da se ove jednačine mogu rešiti i analitičkim putem, u radu su data ta rešenja za neke jednačine. Nezavisno od toga, u radu su izračunata rešenja za sve univerzalne funkcije, posredstvom numeričkog integralenja pomenutog rekurzivnog sistema jednačina elektronskim računarnom. Numerička rešenja univerzalnih funkcija su data u vidu tablica i grafički prikazana na dijagramima u drugom delu ovog rada. Na primeru kružnog cilindra pokrenutog trzajem izvršen je - na osnovu numeričkih rešenja univerzalnih funkcija - proračun nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja. Analiza dobijenih rezultata pokazuje da se sa porastom indukcije magnetnog polja odnosno sa porastom Stjuartovog broja: tačka odvajanja pomera nizvodno, vrednosti brzine strujanja u graničnom sloju i gradijenata brzine na površini tela povećavaju. Na

Stoga sleduje zaključak da je dejstvo magnetnog polja, Lorencove elektromagnetne sile, suprotno dejstvu viskoznosti.

Na osnovu rešenja brzinskog polja odnosno jednačina nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja razmatranog strujanja, proučavan je nestacionarni MHD temperaturski granični sloj i to za četiri slučaja graničnih uslova, poznatih sledećim nazivima:

1) termometarski problem, kada je površina tela toplotno izolovana tj. ne postoji razmena toplote između tela i fluida;

2) slučaj zadatog promenljivog toplotnog fluksa na površini tela;

3) problem zagrevanja ili hladjenja pri zadatoj konstantnoj temperaturi na površini tela;

4) slučaj zadate promenljive temperature na površini tela. U ovim slučajevima temperatura fluida na dovoljnom udaljenju od tela neporemećenom strujanju, ona je uvek zadata i konstantna.

Polazna energijska jednačina razmatranog strujanja odnosi se na jednačinu nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja za sva četiri slučaja graničnih uslova na površini tela. Svedena je na univerzalni oblik. S obzirom da je ta jednačina linearna, pri njenom rešavanju se može - u slučaju potrebe - izvršiti superpozicija rešenja, što predstavlja olakšavajuću okolnost. Naime, pri rešavanju problema sa složenijim graničnim uslovima mogu da se koriste ranije dobijena rešenja odgovarajućeg problema sa prostijim graničnim uslovima. Na

ovakav način bilo je potrebno da se odredi ukupno pet novih funkcija - bezdimenziskih temperatura: $\mathcal{K}^{*(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$, $\mathcal{L}^{*(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1, Pr)$, $\mathcal{H}^{*(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$, $\mathcal{H}^{***(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr)$, $\mathcal{H}^{(1)}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, Pr)$.

Univerzalne jednačine u jednoparametarskom približenju su rešene predstavljanjem ovih funkcija u vidu redova. Takvim postupkom se one svode na rekurzivne sisteme običnih diferencijalnih jednačina, koje određuju univerzalne funkcije-koefficijente redova. Numeričko integralenje ovih jednačina je izvršeno za vrednosti Prandtlovog broja $Pr = 0,72; 1,0; 7,0$.

U slučaju kada je vrednost Prandtlovog broja $Pr=1,0$ mogu se rešenja dobiti i analitičkim putem, i u radu su data analitička rešenja za neke jednačine. Na primeru kružnog cilindra pokrenutog trzajem razmatrana su, za sva četiri slučaja graničnih uslova na površini tela, ponašanja karakterističnih veličina nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja. Za termometarski problem i u slučaju zadanog promenljivog toplotnog fluksa na površini tela, izvršen je proračun bezdimenzisne "sopstvene" temperature i raspodele bezdimenzisne temperature u graničnom sloju. Za problem zagrevanja ili hlađenja pri zadatoj konstantnoj temperaturi tela i u slučaju zadate promenljive temperature na površini tela, izračunate su raspodele Nuseltovog broja na površini cilindra - na osnovu kojih se može pratiti razmena toplote između tela i fluida odnosno mogu odrediti na površini cilindra: zona zagrevanja ($Nu > 0$, toplota prelazi sa fluida na telo) i zona hlađenja ($Nu < 0$, toplota prelazi sa tela na fluid). Takodje su izračunate raspodele bezdimenziskih temperatura u graničnom sloju. Svi proračuni nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturskog graničnog sloja na konkretnom primeru opstrujavanja kružnog cilindra, izvršeni su za četiri karakteristična Stjuartova broja i u šest odabranih vremenskih trenutaka.

Na osnovu analize dobijenih rezultata mogu se izvesti neki zajednički zaključci o uticaju spoljašnjeg magnetnog polja na karakteristike nestacionarnog MHD temperaturskog graničnog sloja. Naime, sa povećanjem Stjuartovog broja (N), odnosno indukcije magnetnog polja, povećava se:

- a) "sopstvena" temperatura i razmena toplote na površini tela, u slučaju termometarskog problema i zadanog promenljivog toplotnog fluksa na površini tela;
- b) temperatura u graničnom sloju odnosno debljina temperaturskog graničnog sloja, u poredjenju sa odgovarajućom debljinom temperaturskog graničnog sloja neprovodnog fluida.

Prema tome, može se konstatovati da spoljašnje magnetno polje, odnosno elektromagnetna Lorencova sila i Džaulova toplota, prouzrokuju povećanje energije delića provodnog fluida u MHD graničnom sloju.

L I T E R A T U R A

- /1/ Cowling G.T.: "Magnetohydrodynamics", Interscience Publ. L.T.D.London, 1957.
- /2/ Sutton G., Sherman A.: "Engineering Magnetohydrodynamics", Mc Graw-Hill Book Company, New York 1965.
- /3/ Kulikovskij G.A., Ljubimov A.G.: "Magnitnaja gidrodinamika", Gos.izd.fiz.mat.lit., Moskva 1970.
- /4/ Patrašev N.A. i dr.: "Prikladnaja gidrodinamika", voenoe izd., Moskva 1970.
- /5/ Vatažin B.A., Ljubimov A.G., Regirer A.S.: "Magnitogidrodinamičeskoe tečenje v kanaluh", izd.Nauka, Moskva 1970.
- /6/ Branover G.G., Cinober B.A.: "Magnitnaja gidrodinamika nesžimaemih sred", izd.Nauka, Moskva 1970.
- /7/ Schlichting H.: "Grenzschicht-theorie", Karlsruhe 1951.
- /8/ Lojčjanskij L.G.: "Laminarnij pograničnij sloj", Gos.izd.fiz.mat.lit., Moskva 1962.
- /9/ Lojčjanskij L.G.: "Mehanika židkosti i gaza", izd.Nauka, Moskva 1970.
- /10/ Voronjec K., Obradović N.: "Mehanika fluida", izd.Gradj.knjiga, Beograd 1960.
- /11/ Whittaker T.E., Watson H.G.: "A course of modern analysis", ruski prevod, Gos.izd.fiz.mat.lit.Moskva/63.
- /12/ Rossow V.J.: "On Flow of Električally Conducting Fluids over a Flat Plate in the Presence of a transverse magnetic Field", NACA Rep.1358.
- /13/ Rossow V.J.: "On Flow of Electricaly Conducting Fluids over a Flat Plate in the Presence of a transverse magnetic Field", NACA, T.N.3971.
- /14/ Rossow V.J.: "Boundary-layer stability Diagrams for Električally conducting Fluids in the Presence of a magnetic Field", NACA, T.N.4282.
- /15/ Sherman A.: "Viskous Magnetohydrodynamics boundary-layer", The Physik of Fluids, vol.4, N^o5, 1961.
- /16/ Ljubimov A.G.: "K postanovke zadači o magnetogidrodinamičeskom pograničnom sloje", PMM, T26, v.5, 1962.

- /17/ Lojčjanskij L.G.: "Universalnije uravnenija i parametri-
českie približenija v teorii laminarnogo
pograničnog sloja", PMM, T29, v.1, 1965.
- /18/ Oka S.N.: "Univerzalne jednačine temperaturskog gra-
ničnog sloja pri stacionarnom laminarnom
strujanju nestišljivog fluida", Mag.rad od-
branjen na Elektrotehničkom fakultetu u
Beogradu 1966.
- /19/ Saljnikov V.N., Oka S.N.: "Ob odnoj vozmožnoj forme univer-
saljnih uravnenija laminarnogo pogranično-
go sloja", Izv.A.N.SSSR, MŽG, 1, Moskva 1969.
- /20/ Saljnikov V.N., Djordjević V.D.: "Univerzalizacija jedna-
čine graničnog sloja za slučaj jednoliko-
brzotirajućih kontura", Zbornik radova
SANU, Beograd 1970.
- /21/ Saljnikov V.N., Djordjević V.D.: "Universalisierung der Glei-
chung vom Temperaturgrenzschichten", ZAMM,
48, H.8, 1968.
- /22/ Saljnikov V.N.: "Obobšćenie universaljnogo uravnenija te-
orii laminarnogo pograničnog sloja L.G.
Lojčjanskogo", PIM, T.13 (27), Beograd 1972.
- /23/ Ašković T.V.: "Metoda za proračun temperaturskog granič-
nog sloja pri laminarnom stacionarnom stru-
janju nestišljivog fluida", Mag.rad odbranjen
na Prirodno-Mat.fakultetu u Beogradu 1973.
- /24/ Ašković R.V.: "Etude de la couche limite laminaire tridi-
mensionnelle en regime instationnaire", Ra-
pport A-9 du Lab.d'Aerodynamique, Univers.
Laval, Quebec, 1967.
- /25/ Ašković R.V.: "Traitement de la couche limite thermique
laminaire tridimensionnelle en regime in-
stationnaire compte-tenu de la pousse d'Ar-
chimede", Int.J.Heat Mass Transfer. Vol.15,
Pergamon Press 1972.
- /26/ Djordjević V.D.: "Opredelenie nestacionarnogo temperatur-
nogo polja ploskom obtekanii kontura pro-
izvoljnoj formi", PIM, T.5, (19), Beograd, 1965.
- /27/ Djurić M.Dj.: "One-parameter Solution of thermal boundary
-layer past a flat plate", PIM, T.7, (21), Be-
ograd 1967.

- /28/ Gortler H.: "A new Series for the Calculation of steady laminar boundary layer flows", I. Math. Mech. 6. p.1-66, 1957.
- /29/ Hassan H.A.: "On unsteady laminar boundary layers", I. fluid mech., vol.9, 1960.
- /30/ Djurić M. Dj.: "A method for solution of unsteady incompressible laminar boundary layers", PIM. T.6 (20) Beograd 1966.
- /31/ Djukić Dj. S.: "Jedna metoda tretiranja laminarnog nestacionarnog ravanskog graničnog sloja nestišljivog fluida", Mat. Vesnik, 7, (22), 3, Beograd, 1970.
- /32/ Djurić M. Dj.: "On the universal form of unsteady incompressible boundary-layer equation", PIM. T. 9, (23), Beograd 1969.
- /33/ Saljnikov V.N., Djukić Dj. S.: "L universalisation des equations de la couche limite laminaire instationnaire", Simp. de l'IUTAM, Univ. Laval, Quebec 1971.
- /34/ Djukić Dj. S.: "Univerzalne jednačine nestacionarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti pri proizvoljnoj brzini spoljašnjeg strujanja", Mat. Vesnik, 8. (23), Beograd 1971.
- /35/ Saljnikov V.N.: "Sur une forme possible d'equations universelles de la couche limite laminaire instationnaire", C.R. Acad. Sc. Paris, T. 272, p. 830-833, 1971.
- /36/ Ašković R.V.: "Equations universelles de la couche limite laminaire tridimensionnelle en regime instationnaire et leur traitement", Simp. de l'IUTAM, Univ. Laval, Quebec, 1971.
- /37/ Cijan B.J.: "Metoda za rešavanje temperaturskog graničnog sloja pri nestacionarnom laminarnom ravanskom strujanju nestišljive tečnosti", Doktorska disertacija odbranjena na Prir. Mat. fakultetu u Beogradu 1972.
- /38/ Saljnikov V.N., Cijan B.J., Djukić Dj. S.: "Univerzalne jednačine temperaturskog laminarnog nestacionarnog graničnog sloja", saopšt. na XII Jug. kongr. prim. mehanike, Ohrid 1974.

- /39/ Boričić Z.: "Univerzalne jednačine magnetohidrodinamičkog graničnog sloja i njihova parametarska rešenja",Dokt.disertacija odbranjena na Tehničkom fakultetu u Nišu 1971.
- /40/ Djukić Dj.S.: "O nestacionarnom MHD graničnom sloju nestišljive tečnosti",Mat.Vesnik,8.(23),Beograd 1971.
- /41/ Ašković R.V.,Ašković T.V.: "Une contribution a l'etude de la couche limite magnetohydrodynamique d'un ecouement de revolution en regime non stationnaire",PIM.17,(31),Beograd 1974.
- /42/ Ašković R.V.: "Sur une methode approchee de traiter la couche limite laminaire magnetohydrodynamique en regime non stationnaire",Acad.Royale de Belgique,T.LX,Bruxelles 1974-10.
- /43/ Ašković T.V.: "O jednoj mogućnosti tretiranja MHD temperaturskog nestacionarnog laminarnog graničnog sloja",Saopš.na XII Jug.kongresu prim.i rac.mehanike, Ohrid 1974.
- /44/ Boričić Z.: "MHD-difuzioni granični sloj nestišljivog fluida",Saopš.na XII Jug.kongr.prim.i rac.mehanike, Ohrid 1974.
- /45/ Rozin L.A.: P.M.M. T.XXI. v.5, 1957 .
- /46/ Saljnikov V.N.: "Methods modernes de resolution des equations de la couche limite laminaire",Faculte des Sciences,Laboratoire de Dynamique des fluides, Poitiers, 1969.
- /47/ Lavrentjev M.A.,Šabat B.V.: "Metodi teorii funkcii kompleksnogo peremeno",Izd.Nauka,Moskva/73.
- /48/ Houng N.V.: "Solution numerique des equations differentielles issue d'un problem concernant la couche limite tridimensionnelle instationnaire",Univ.Laval, Quebec 1970.
- /49/ Parezanović N.: "Algoritmi i programski jezik FORTRAN IV", Matematički institut, Beograd 1972.
- /50/ Akademija nauka Latvijas SSR: "Voprosi magnitnoj gidrodinamiki",Izd.Akad.nauka Latv.SSR,Riga,1963.

Upotrebljene skraćenice časopisa

- NACA Rep. - National Advisory Committee for Aeronautics Report
NACA T.N. - National Advisory Committee for Aeronautics Technical Note
PIM - Publications de l'Institut Mathématique
PMM - Prikladnaja Matematika i Mehanika
ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik

P R I L O Z I

-I.1. Izvođenje izraza za Lorencovu elektromagnetnu silu i Džulovu toplotu (1.15), (1.16)

Kod razmatranog slučaja nestacionarnog MHD brzinskog i temperaturnog graničnog sloja, pri laminarnom strujanju provodnog fluida: spoljašnje električno polje ne postoji, magnetno polje i fluid su međusobno u relativnom mirovanju /ili miruju ili se zajedno reću/, linije sile magnetne indukcije su upravne na površinu tela opšti izrazi za zapreminsku Lorencovu elektromagnetnu silu i Džulovu toplotu /1.13/, /1.14/ glase:

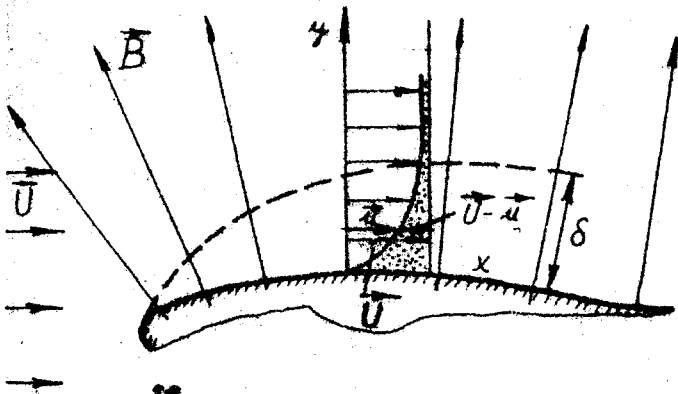
$$\vec{F}_b = G [(\vec{v}_r, \vec{B}) \vec{B}] ;$$

$$q = \frac{(j, j)}{G} = G (\vec{v}_r, \vec{B})^2$$

de su:

- G - elektroprovodljivost fluida
- \vec{v}_r - relativna brzina fluidnih delića u graničnom sloju u odnosu na linije sile magnetne indukcije.
- $\vec{j} = G [\vec{v}_r, \vec{B}]$ - vektor gustine električne struje.

Da bi se obavile operacije vektorskog računa u izrazima /1.13/ /1.14/, potrebno je utvrditi veličinu relativne brzine \vec{v}_r . Iz priložene skice opstrujavanja tela provodnim fluidom, sa brzinom spoljnjeg potencijalnog strujanja \vec{U} , može se zaključiti da je vektor relativne brzine između fluidnih delića i linije sile magnetne indukcije $\vec{v}_r = \vec{U} - \vec{u}$ sa smerom koji je suprotan pozitivnom pravcu x - ose.



Sada konačno mogu izračunati izrazi za Lorencovu silu i Džulovu toplotu. Najpre se izračuna:

$$[\vec{v}_r, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -U & u & v \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = -kU/U-u/ = \vec{k}B/u-U/ \quad /1.1/$$

zatim:

$$\vec{F}_L = G [(\vec{v}_r, \vec{B}) \vec{B}] = G \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -B/U-u/ \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} G B^2 /U-u/ = -\vec{i} \cdot B^2 /u-U/ \quad /1.2/$$

$$q = G (\vec{v}_r, \vec{B})^2 = G \cdot k k /B^2 /u-U/ = G B^2 /u-U/ \quad /1.3/$$

p-I.2. -Izvođenje jednačine kretanja /1.31/ i energijske jednačine /1.34/ u bezdimenziskom obliku.

Jednačine kretanja u skalarnom, razvijenom obliku za pravce x-ose i y-ose glase /1.20/, /1.21/

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{GB^2}{\rho} (u-U);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right);$$

a energetska jednačina u razvijenom obliku (1.22)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\rho \gamma}{\rho c_p} \cdot \Phi + \frac{GB^2}{\rho c_p} (u-U)^2$$

gde je disipativna funkcija data izrazom:

$$\Phi = 2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

Ove jednačine se mogu napisati u bezdimenziskom obliku posredstvom sledećih bezdimenzijskih veličina:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \bar{u} = \frac{u}{U}; \quad \bar{v} = \frac{v}{U}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}; \quad \bar{t} = \frac{t}{\left(\frac{L}{U} \right)}$$

$$\bar{T} = \frac{T}{(\Delta T)} = \frac{T}{(T_w - T_\infty)}$$

gde su:

L - karakteristična dužina

U - karakteristična brzina

ρU^2 - karakteristični pritisak (jednak dvostrukom DINAMIČKOM pritisku)

(L/U) - karakteristično vreme

(ΔT) - karakteristična temperatura (jednaka razlici temperature na površini tela T_w i temperature neporemećenje struje fluida T_∞)

Jednačine (1.20), (1.21) i (1.22) u bezdimenziskom obliku

glase:

$$\frac{U^2}{L} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{U}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{GB^2}{\rho} \cdot U (\bar{u} - 1)$$

odno snno:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\gamma}{UL} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{GB^2}{\rho} \frac{L}{U} (\bar{u} - 1); \quad (1.4)$$

analogno:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right); \quad (1.5)$$

$$\frac{U(\Delta T)_0}{L} \left(\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{t}^*} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{x}^*} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{y}^*} \right) = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial \bar{x}^{*2}} + \frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial \bar{y}^{*2}} \right) + \frac{\gamma}{c_p} \frac{U^2}{L^2} \Phi + \frac{\sigma B^2}{\rho c_p} U^2 (\bar{u} - 1)^2;$$

odno sno :

$$\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{t}^*} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{x}^*} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \bar{y}^*} = \frac{\lambda}{\rho c_p \gamma} \frac{1}{U L} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial \bar{x}^{*2}} + \frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial \bar{y}^{*2}} \right) + \frac{\gamma}{U L^2 c_p (\Delta T)} \Phi + \frac{\sigma B^2 L}{\rho} \frac{U^2}{U c_p (\Delta T)} (\bar{u} - 1)^2 \quad (I.6)$$

gde je bezdimenziska disipativna funkcija Φ^* :

$$\Phi^* = 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{x}^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \bar{y}^*} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{y}^*} + \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \bar{x}^*} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{x}^*} + \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial \bar{y}^*} \right)$$

U bezdimenziskim jednačinama (I.4), (I.5), (I.6) javljaju se karakteristični bezdimenzijski brojevi:

$$\frac{\gamma}{U L} = \frac{1}{Re}$$

- recipročna vrednost Rejnoldsovog broja,

$$\frac{\sigma B^2 L}{\rho U} = N^*$$

- magnetni Stjuartov broj,

$$\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p \cdot \gamma} = \frac{1}{Pr}$$

- recipročna vrednost Prandtlovog broja,

$$\frac{U^2}{c_p (\Delta T)_0} = E_c$$

- Ekertov broj ili temperaturski kriterijum,

o kojima je bilo više govora u uvodnom delu rada.

Važno je napomenuti da je, pri izvođenju jednačina graničnog sloja (brzinskog i temperaturskog), uprošćavanje jednačina kretanja i energijske jednačine, zanemarivanjem nekih članova - opravdano samo ako je debljina graničnog sloja mala, a to je ispunjeno kad strujanja fluida male viskoznosti odnosno pri velikim Rejnoldsovim brojevima. Do reda veličine debljine graničnog sloja može se doći iz uslova da su u graničnom sloju viskozne i inercijalne sile istog reda veličine (7)

$$\mu \frac{U}{\delta_u^2} \sim \rho \frac{U^2}{L}, \quad \delta_u \sim \sqrt{\nu \frac{L}{U}} \quad \text{ODNOSNO} \quad \frac{\delta_u}{L} = \delta_u^* \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

Prema tome za male vrednosti viskoznosti, odnosno za velike vrednosti Rejnoldsovog broja, zaista je ispunjen uslov:

$$\frac{\delta_u}{L} = \delta^* \ll 1$$

Analogno, za temperaturski granični sloj (detaljnije o tome vidi [7]) je ispunjen uslov:

$$\delta_T^{*2} = \left(\frac{\delta_T}{L}\right)^2 \sim \frac{1}{Pr Re} ;$$

pa pošto je vrednost Prantlovog broja: za vazduh 0,72; za vodu ~7,0 a za ulja može dostići i vrednost 1000 (zavisno od viskoznosti), sleduje takođe:

$$\frac{\delta_T}{L} = \delta_T^* \ll 1$$

II.1. Izvođenje integralne jednačine /2.4/ $-\frac{d^*z}{dt} = 2R$

Polazeći od jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog loja /1.31/:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial B^2}{\rho} (u-U);$$

koristeći jednačinu kontinuiteta (1.32):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

može se jednačina (1.31) napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v) = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial B^2}{\rho} (u-U) \quad (II.1)$$

Jednačina kontinuiteta (1.32) se može napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (U \cdot v) = u \frac{\partial U}{\partial x} \quad (II.2)$$

Kada se (II.2) oduzme od (II.1) - dobija se:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2 - U \cdot u) + \frac{\partial}{\partial y} (u \cdot v - U \cdot v) = \frac{\partial}{\partial t} (U - u) + \frac{\partial U}{\partial x} (U - u) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial B^2}{\rho} (u - U) \quad (II.3)$$

ili u transformisanom obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t} (U - u) + \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] + \frac{\partial U}{\partial x} (U - u) + \frac{\partial B^2}{\rho} (U - u) = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (II.4)$$

Integralimo jednačinu (II.4) po promenljivoj y u granicama od 0 do ∞ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} (U - u) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u(U - u) dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} v(U - u) dy + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial B^2}{\rho} \right) \int_0^{\infty} (U - u) dy = -\nu \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \quad (II.5)$$

S obzirom na granične uslove (1.33):

$$u=0, v=0, \text{ ZA } y=0$$

$$u \rightarrow U, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ KADA } y \rightarrow \infty;$$

dobija se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} v(U - u) dy = v(U - u) \Big|_0^{\infty} \equiv 0,$$

$$-\nu \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_0^{\infty} \equiv 0$$

pa jednačina (11.5) postaje:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[U \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[U^2 \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \right] + \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{G B^2}{\rho} U \right) \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (11.6)$$

Kada se uvedu veličine:

- debljina istiskivanja $\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$,
- debljina gubitka impulsa $\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$,
- tangencijalni napon na površini tela $\tau_w = \rho \cdot \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$

jednačina (11.6) se konačno može napisati u vidu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (U \cdot \delta^*) + \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta^{**}) + \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{G B^2}{\rho} U \right) \cdot \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (11.7)$$

Za slučaj opstrujavanja ravne ploče su :

$$U(t, x) = U(t), \quad B(x) = B_1 = \text{const.}, \quad (11.8)$$

pa će debljina istiskivanja i debljina gubitka impulsa biti:

$$\begin{aligned} \delta_p^* &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_p^*(t) \\ \delta_p^{**} &= \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \delta_p^{**}(t) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Kada se (11.8) i (11.9) zamene u jednačinu (11.7) dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Omega \delta_p^*) + \frac{\partial}{\partial x} (\Omega^2 \delta_p^{**}) + \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x} \delta_p^* + \frac{G B_1^2}{\rho} \Omega \delta_p^* &= \frac{\tau_w}{\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\Omega \cdot \delta_p^*) + \frac{G B_1^2}{\rho} \Omega \cdot \delta_p^* &= \frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned} \quad (11.10)$$

Uvodimo sada funkcije ζ_p^* i z_p^* na sledeći način:

$$\zeta_p^* = \frac{\delta_p^*}{\Omega} \cdot \frac{\tau_w}{\rho \cdot \nu} = \frac{\delta_p^*}{\Omega} \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} \right)_{y=0} = \left[\frac{\partial \left(\frac{u_p}{\Omega} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta_p^*} \right)} \right]_{y=0} = \zeta_p^*(t), \quad (11.11)$$

$$z_p^* = \frac{\delta_p^{**2}}{\nu} = z_p^*(t) \quad (11.12)$$

Diferenciranjem po vremenu izraza (11.12) dobijaju se:

$$\begin{aligned} \frac{d z_p^*}{dt} = z_p^{*'} &= 2 \delta_p^* \cdot \frac{d \delta_p^*}{dt} = 2 R, \\ 2 \frac{\delta_p^{*2}}{\nu} \cdot \frac{d \delta_p^*}{dt} &= 2 R \therefore \frac{d \delta_p^*}{dt} = \frac{R}{z_p^*} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Sada se jednačina (II.10) može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Omega \dot{z}_p^*) + \frac{GB_1^2}{\rho} \cdot \Omega \ddot{z}_p^* &= \frac{\gamma \Omega}{\rho} \cdot \zeta_p, \\ \Omega' \dot{z}_p^* + \Omega \ddot{z}_p^* + \frac{GB_1^2}{\rho} \cdot \Omega \dot{z}_p^* &= \frac{\gamma \Omega}{\rho} \cdot \zeta_p, \\ \frac{\Omega'}{\Omega} \cdot \dot{z}_p^* + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{z}_p^*}{\Omega} \right) + \frac{GB_1^2}{\rho} \cdot \frac{\dot{z}_p^*}{\Omega} &= \zeta_p, \\ \frac{1}{2} \frac{d\dot{z}_p^*}{dt} + \frac{\Omega'}{\Omega} \cdot \dot{z}_p^* + \frac{GB_1^2}{\rho} \cdot \dot{z}_p^* &= \zeta_p \end{aligned} \tag{II.14}$$

Koristeći relacije (2.7) za parametre α_k, β_k tj.

$$\alpha_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} \dot{z}_p^*, \quad \beta_1 = \frac{GB_1^2}{\rho} \cdot \dot{z}_p^*$$

konačno se dobija tražena integralna jednačina:

$$\frac{d\dot{z}_p^*}{dt} = 2(\zeta_p - \alpha_1 - \beta_1) = 2R,$$

ili

$$R = \zeta_p - \alpha_1 - \beta_1.$$

(II.15)

-II.2. Izvođenje formula za diferenciranje /2.8/

Polazi se od izraza /2.7/ za beskonačne skupove parametara:

$$\alpha_k = \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} \cdot \dot{z}_p^* ;$$

$$\beta_k = \Omega^{k-1} \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \cdot \dot{z}_p^* ; \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$\gamma_k = \Omega^k \cdot \dot{z}_p^* \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^k V}{dx^k}$$

iz ovih izraza se dobijaju sledeće relacije:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k &= \frac{d\alpha_k}{dt} = \left(-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2} \cdot \frac{d^k \Omega}{dt^k} + \frac{1}{\Omega} \frac{d^{k+1} \Omega}{dt^{k+1}} \right) \cdot \dot{z}_p^* + \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} \cdot k \cdot \dot{z}_p^* \cdot \frac{d\dot{z}_p^*}{dt} = \\ &= \left(-\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \alpha_k + \frac{d^{k+1} \Omega}{\dot{z}_p^*} \right) + 2kR \frac{\alpha_k}{\dot{z}_p^*} \quad / \cdot (\dot{z}_p^*) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_p^* \dot{\alpha}_k = (-\alpha_1 + 2kR) \alpha_k + d_{k+1} = a_k ; \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k}{\partial t} &= (k-1) \cdot \dot{\Omega} \cdot \Omega^{k-2} \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \cdot \dot{z}_p^* + \Omega^{k-1} \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \cdot k \cdot \dot{z}_p^* \cdot \frac{d\dot{z}_p^*}{dt} = \\ &= (k-1) \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \beta_k + 2kR \frac{\beta_k}{\dot{z}_p^*} \quad / \cdot (\dot{z}_p^*) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_p^* \frac{\partial \beta_k}{\partial t} = (k-1) a_1 \beta_k + 2kR \beta_k = b_k ; \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} &= k \cdot \dot{\Omega} \cdot \Omega^{k-1} \cdot \dot{z}_p^* \cdot V \cdot \frac{d^k V}{dx^k} + \Omega^k \cdot k \cdot \dot{z}_p^* \cdot \frac{d\dot{z}_p^*}{dt} \cdot V^{k-1} \cdot \frac{d^k V}{dx^k} = \\ &= k \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \gamma_k + 2kR \frac{\gamma_k}{\dot{z}_p^*} \quad / \cdot (\dot{z}_p^*) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_p^* \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} = (k \cdot a_1 + 2kR) \gamma_k = c_k ; \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k}{\partial x} &= \Omega^{k-1} (k-1) V' V^{k-2} \frac{d^{k-1} N}{dx^{k-1}} \dot{z}_p^* + \Omega^{k-1} V^{k-1} \frac{d^k N}{dx^k} \cdot \dot{z}_p^* = \\ &= (k-1) \frac{V'}{V} \beta_k + \frac{\beta_{k+1}}{\Omega V \dot{z}_p^*} \quad / \cdot (\Omega V \dot{z}_p^*) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

$$\Omega V \ddot{z}_p \cdot \frac{\partial \beta_k}{\partial x} (k-1) \gamma_1 \beta_k + \beta_{k+1} = \Theta_k; \quad (\text{II.19})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x} &= \Omega \ddot{z}_p (k-1) V' V^{k-2} \frac{d^k V}{dx^k} + \Omega \ddot{z}_p \cdot V^{k-1} \frac{d^{k+1} V}{dx^{k+1}} = \\ &= (k-1) \frac{V'}{V} \gamma_k + \frac{\gamma_{k+1}}{\Omega V \ddot{z}_p} / (\Omega V \ddot{z}_p) \end{aligned}$$

$$\Omega V \ddot{z}_p \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial x} = (k-1) \gamma_1 \gamma_k + \gamma_{k+1} = G_k \quad (\text{II.20})$$

Sada se mogu napisati formule za zamenu diferenciranja na sledeći način- koristeći (II.16) - (II.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial a_k} \cdot \frac{da_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial b_k} \cdot \frac{\partial \beta_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{\ddot{z}_p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial}{\partial a_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k}), \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k} \cdot \frac{\partial \beta_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \cdot \frac{\partial \gamma_k}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{\Omega V \ddot{z}_p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\Theta_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + G \frac{\partial}{\partial \gamma_k}). \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

II.3. Izvođenje univerzalne jednačine nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja /2.11/

Jednačina nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja /1.31/ jednačina kontinuiteta /1.32/,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (u - U);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

Uvođenjem strujne funkcije $\psi(t, x, y)$, posredstvom poznatih relacija $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, za razmatrana strujanja sa:
 $U(t, x) = \Omega(t)V(x)$ i $B = B(x)$, svode se na jednu jednačinu (2.2).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Omega'V + \Omega^2 VV' + V \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\sigma B^2}{\rho} (\frac{\partial \psi}{\partial y} - \Omega V)$$

Postavljanjem strujne funkcije u obliku (2.10)

$$\psi(t, x, y) = \frac{1}{A} \Omega V \cdot \delta_p^* F(\eta; \{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\})$$

i koristeći relacije: (2.6) za $\eta(t, y) = A \frac{y}{\delta_p^*}$ i (II.16) do (II.22), pojedinim članovima jednačine (2.2) se mogu napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{A}{\delta_p^*}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -A \frac{y \delta_p^*}{\delta_p^{*2}} = -\frac{\delta_p^*}{\delta_p^*} \cdot \eta = -\frac{B}{z_p} \cdot \eta, \quad (II.23)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{A} \Omega V \delta_p^* \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{A}{\delta_p^*} = \Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad (II.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Omega V \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \cdot \frac{A}{\delta_p^*}, \quad (II.25)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \Omega V \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \cdot \frac{A^2}{\delta_p^{*2}}, \quad (II.26)$$

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{A} \Omega \delta_p^* \left\{ V' F + V \left[\frac{1}{\Omega V z_p} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial F}{\partial \rho_k} + b_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k}) \right] \right\}, \quad (II.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{A} \Omega \delta_p^* \left\{ V \frac{A}{\delta_p^*} \frac{\partial F}{\partial \eta} + V \left[\frac{1}{\Omega V z_p} \frac{A}{\delta_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \rho_k} + b_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \gamma_k}) \right] \right\}, \quad (II.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} (\Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta}) = \Omega' V \frac{\partial F}{\partial \eta} + \Omega V \frac{\partial}{\partial \eta} (\frac{\partial F}{\partial \eta}) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Omega V \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial F}{\partial \eta}) = \\ &= \Omega' V \frac{\partial F}{\partial \eta} + \Omega V \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \left(-\frac{B}{z_p} \eta\right) + \frac{\Omega V}{z_p} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \rho_k} + b_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \gamma_k} + c_k \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \delta_k}). \end{aligned}$$

(II.29)

Kada se izrazi (II.24)-(II.29) zamene u jednačinu (2.2), dobije se univerzalna jednačina (2.11).

P-II.4 postupak analitičkog rešavanja običnih diferencijalnih
Jednačina sa rešenjima za prve dve jednačine sistema (2.25)

Veberova funkcija $g_\alpha(\eta)$ - definisana izrazom:

$$g_\alpha(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(2\alpha+1)} \int_{\eta}^{\infty} (\gamma-\eta)^{2\alpha} \cdot e^{-\gamma^2} \cdot d\gamma \quad (\text{II.30})$$

je specijalna funkcija (II) koja predstavlja rešenje diferencijalne jednačine:

$$g_\alpha''(\eta) + 2\eta g_\alpha'(\eta) - 4\alpha g_\alpha(\eta) = 0 \quad (\text{II.31})$$

Veberova funkcija zadovoljava relaciju:

$$g_\alpha'(\eta) = -g_{\alpha-\frac{1}{2}}(\eta), \quad (\text{II.32})$$

a na osnovu osobine (II.32) je : $g_\alpha'' = -g_{\alpha-\frac{1}{2}}' = g_{\alpha-1}$ pa se (II.31) može napisati u obliku:

$$g_{\alpha-1}(\eta) - 2\eta g_\alpha'(\eta) - 4\alpha g_\alpha(\eta) = 0 \quad (\text{II.33})$$

Važna osobina Veberove funkcije sleduje iz definicije (II.30)

$$g_\alpha(\infty) = 0 \quad (\text{II.34})$$

za $\alpha = 0$, Veberova funkcija je jednaka funkciji greške:

$$g_0(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\gamma^2} \cdot d\gamma = \text{erf} \eta \quad (\text{II.35})$$

Iz (II.33) za $\eta = 0$ sleduje: $g_{\alpha-1}(0) = 4\alpha g_\alpha(0)$, na osnovu čega se dobija vrednost Veberove funkcije za $\eta = 0$, napr.:

$$g_0(0) = 1; g_{\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}; g_1(0) = \frac{1}{4}; g_{\frac{3}{2}}(0) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}; g_2(0) = \frac{1}{32}$$

$$g_{\frac{5}{2}}(0) = \frac{1}{60\sqrt{\pi}}; g_{-\frac{1}{2}}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; g_{-1}(0) = 0; g_{-\frac{3}{2}}(0) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}; g_{-2}(0) = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$g_{-\frac{5}{2}}(0) = \frac{24}{\sqrt{\pi}}; g_{-3}(0) = 0; \dots$$

Na osnovu ovih osobina, Veberova funkcija omogućava izračunavanje analitičkih rešenja običnih diferencijalnih jednačina, koje se dobiju pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina nestacionarnog graničnog sloja prestavljanjem rešenja u vidu reda. U smislu primera daju se rešenja prve dve jednačine rekurzivnog sistema (2.27).

Prva jednačina sa graničnim uslovima glasi:

$$f_{00}'''' + \frac{R_0}{A^2} \eta \cdot f_{00}'' = 0 ; f_{00}(0) = f_{00}'(0) = 0 ; f_{00}'(\infty) = 1 \quad (II.37)$$

Kada se usvoji vrednost za $\frac{R_0}{A^2} = 2$, ova jednačina se može napisati u vidu:

$$(f_{00}')'' + 2\eta \cdot (f_{00}')' - 4 \cdot 0 \cdot (f_{00}') = 0 \quad (II.38)$$

pa se rešenje traži u obliku ($\alpha = 0$):

$$f_{00}' = C_1 \cdot g_0 + C_2 \quad (II.39)$$

Konstante c_1 i c_2 se određuju iz graničnih uslova:

$$f_{00}'(\infty) = 1 \therefore 1 = C_1 \cdot g_0(\infty) + C_2 \rightarrow C_2 = 1 \quad (II.40)$$

$$f_{00}'(0) = 0 \therefore 0 = C_1 \cdot g_0(0) + 1 \rightarrow C_1 = -1$$

Prema tome rešenje (II.39) glasi:

$$f_{00}'(\eta) = \frac{df_{00}}{d\eta} = 1 - g_0(\eta) \quad (II.41)$$

Integraljenjem (II.41) dobijamo:

$$f_{00}(\eta) = \eta + g_{\frac{1}{2}}(\eta) + C = \eta + g_{\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (II.42)$$

$$f_{00}(0) = 0 = 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} + C \therefore C = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Na osnovu (II.41) lako se dobija: $f_{00}''(\eta) = g_{-\frac{1}{2}}(\eta)$ odnosno: $f_{00}''(0) = g_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ a iz relacija (2.22) je poznato: $R_0 = A \cdot f_{00}''(0)$. Prema tome, sada se mogu izračunati konstante A i R_0 :

$$R_0 = 2A^2 = A \cdot f_{00}''(0) \therefore A = \frac{1}{2} f_{00}''(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} ; R_0 = \frac{2}{\pi} \quad (II.43)$$

Druga jednačina, sistema (2.27), sa graničnim uslovima glasi:

$$f_{0,1}''' + 2\eta f_{0,1}'' - 4f_{0,1}' = -\frac{R_{1a}}{A^2} \eta f_{0,0}'' - \frac{1}{A^2} (1 - f_{0,0}'), \quad (\text{II.44})$$

$$f_{0,1}(0) = f_{0,1}'(0) = f_{0,1}'(\infty) = 0 \quad (\text{II.45})$$

Iz jednačine (II.33), za $\alpha = 0$, dobija se:

$$\eta g_{-1/2} = \frac{1}{2} g_{-1} \quad (\text{II.46})$$

Desna strana jednačine (II.44), posredstvom jednačina (II.41) i (II.45): $1 - f_{0,0}' = g_0$, $f_{0,0}'' = g_{-1/2}$, $\eta f_{0,0}'' = \eta g_{-1/2} = \frac{1}{2} g_{-1}$, može da se napiše u vidu:

$$f_{0,1}''' + 2\eta f_{0,1}'' - 4f_{0,1}' = -\frac{R_{1a}}{2A^2} g_{-1} - \frac{1}{A^2} g_0 \quad (\text{II.47})$$

Partikularno rešenje jednačine (II.47) tražimo u obliku:

$$f_{0,1p}' = k_1 g_{-1} + k_2 g_0 \quad (\text{II.48})$$

Zamenimo (II.48) u jednačinu (II.47):

$$1g_{-1}'' + k_2 g_0'' + 2\eta \cdot k_1 g_{-1}' + 2\eta k_2 g_0' - 4k_1 g_{-1} - 4k_2 g_0 = -\frac{R_{1a}}{2A^2} g_{-1} - \frac{1}{A^2} g_0$$

$$1(g_{-1}'' + 2\eta g_{-1}' + 4g_{-1} - 8g_{-1}) + k_2(g_0'' + 2\eta g_0' - 4g_0) = -\frac{R_{1a}}{2A^2} g_{-1} - \frac{1}{A^2} g_0$$

$(\alpha = -1) \equiv 0$
 $(\alpha = 0) \equiv 0$

a odavde sleduje, koristeći pritom rezultat (II.43):

$$k_1 = \frac{R_{1a}}{16A^2} = \frac{\pi}{16} R_{1a}, \quad k_2 = \frac{1}{4A^2} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{II.49})$$

Rešenje homogenog dela jednačine (II.47) traži se u obliku:

$$f_{0,1h}'(\eta) = c g_1(\eta) \quad (\text{II.50})$$

odnosno ukupno rešenje jednačine (II.47) je:

$$f_{0,1}' = f_{0,1h}' + f_{0,1p}' = c g_1 + \frac{\pi}{16} R_{1a} g_{-1} + \frac{\pi}{4} g_0 \quad (\text{II.51})$$

Granični uslov $f_{0,1}'(0) = 0$ je očigledno automatski zadovoljen
 c obzirom na (II.34), a konstanta c se određuje iz graničnog uslo-
 va:

$$f_{0,1}(0) = 0 = c g_1(0) + \frac{\pi}{16} R_{1a} g_{-1}(0) + \frac{\pi}{4} g_0(0) \quad (II.52)$$

Koristeći "nulte" vrednosti Veberovih funkcija (II.36), iz
 (II.52) se dobija:

$$0 = c \cdot \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} R_{1a} \cdot 0 + \frac{\pi}{4} \cdot 1, \quad c = -\pi \quad (II.53)$$

Na osnovu relacije (2.22): $R_{1a} = A \cdot f_{0,1}'(0) - 1$, rešenja (II.51)
 i vrednosti Veberovih funkcija (II.36), sada se može odrediti vre-
 dnost konstante R_{1a} :

$$\begin{aligned} R_{1a} &= A \cdot f_{0,1}'(0) - 1 = A \cdot (C g_1' + K_1 g_{-1}' + K_2 g_0')_{\eta=0} - 1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[+\pi g_{\frac{3}{2}}(0) - \frac{\pi}{16} R_{1a} g_{-\frac{3}{2}}(0) - \frac{\pi}{4} g_{\frac{1}{2}}(0) \right] - 1 = \\ &= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{R_{1a}}{16} \frac{4}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) - 1; \end{aligned} \quad (II.54)$$

$$R_{1a} = 1 \cdot \frac{R_{1a}}{4} - \frac{1}{2} - 1 \quad \therefore R_{1a} = -\frac{2}{3}$$

Konačno rešenje (II.51) glasi:

$$f_{0,1}'(\eta) = -\pi g_1(\eta) - \frac{\pi}{24} g_{-1}(\eta) + \frac{\pi}{4} g_0(\eta) \quad (II.55)$$

Integraljenjem jednačine (II.55) dobija se:

$$f_{0,1}(\eta) = \pi g_{\frac{3}{2}}(\eta) + \frac{\pi}{24} g_{-\frac{1}{2}}(\eta) - \frac{\pi}{4} g_{\frac{1}{2}}(\eta) + C_1 \quad (II.56)$$

Rešenje (II.56) se lako nalazi, jer izvod tog izraza mora da
 bude (II.55) - a pritom se vodi računa o osobini (II.32): $g_{\alpha}' = -g_{\alpha - \frac{1}{2}}$
 konstanta C_1 se određuje iz graničnog uslova:

$$f_{0,1}(0) = 0 = \pi g_{\frac{3}{2}}(0) + \frac{\pi}{24} g_{-\frac{1}{2}}(0) - \frac{\pi}{4} g_{\frac{1}{2}}(0) + C_1 \quad \therefore C_1 = 0, \quad (II.57)$$

pa je rešenje (II.56) potpuno određeno.

Na potpuno analogan način u radu su rešene i ostale jednačine
 rekurzivnog sistema (227).

P-II.5. Analitičko rešenje linearn^(IZOVA)e jednačine (2.4)

$$\frac{d\dot{z}_p}{dt} = 2R$$

Integralna jednačina (II.15) u linearizovanom obliku, koristeći pritom red (2.18) za funkciju R, glasi:

$$\frac{d\dot{z}_p}{dt} = 2(R_0 + R_{1a} \alpha_1 + R_{1b} \beta_1), \quad (II.58)$$

- gde su: $\alpha_1 = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \dot{z}_p$, $\beta_1 = \frac{6B_1^2}{g} \dot{z}_p = N \cdot \dot{z}_p$

dalje jednačina (II.58) se može napisati u vidu:

$$\frac{d\dot{z}_p}{dt} - (2R_{1a} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + 2R_{1b} N) \dot{z}_p = 2R. \quad (II.59)$$

Rešenje homogenog dela jednačine (II.59) je:

$$\frac{d\dot{z}_p}{\dot{z}_p} = (2R_{1a} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} + 2R_{1b} N) dt,$$

$$\frac{d\dot{z}_p}{\dot{z}_p} = 2R_{1a} d(\ln \Omega) + 2R_{1b} N dt,$$

$$\ln \dot{z}_p = 2R_{1a} \ln \Omega + 2R_{1b} N \cdot t + \ln C_1$$

$$\dot{z}_p = C_1 \Omega^{2R_{1a}} \cdot e^{2R_{1b} N \cdot t} \quad (II.60)$$

Varijacijom konstanti - dobija se rešenje jednačine (II.59):

$$\frac{d\dot{z}_p}{dt} = \frac{dC_1}{dt} \Omega^{2R_{1a}} \cdot e^{2R_{1b} N t} + C_1 (2R_{1a} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \Omega^{2R_{1a}-1} \cdot e^{2R_{1b} N t} + \Omega^{2R_{1a}} \cdot 2R_{1b} N \cdot e^{2R_{1b} N t}),$$

zamenimo $\frac{d\dot{z}_p}{dt}$ i (II.60) u jednačinu (II.59)

$$C_1' \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} + 2R_{1a} C_1 \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} + 2R_{1b} C_1 N \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} - 2R_{1a} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} C_1 \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} - 2R_{1b} N C_1 \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} = 2R_0,$$

$$\therefore C_1' \cdot \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} = 2R_0$$

$$C_1' = 2R_0 \cdot \Omega^{-2R_{1a}} \cdot e^{-2R_{1b} N t}$$

$$C_1 = 2R_0 \int_0^t \Omega^{-2R_{1a}} e^{-2R_{1b} N \cdot t} dt + C$$

Prema tome, rešenje jednačine (II.59) glasi:

$$\dot{z}_p^* = 2R_0 \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} \int_0^t \Omega^{-2R_{1a}} e^{-2R_{1b} N t} dt + C \Omega^{2R_{1a}} e^{2R_{1b} N t} \quad (II.62)$$

pošto je za $t = 0$, $\dot{z}_p^* = 0$ odnosno $z_p^* = 0 \therefore C = 0$, i kada se zamenе vrednosti konstanti $R_0 = \frac{\rho}{\pi}$, $R_{1a} = R_{1b} = -\frac{2}{3}$, rešenje (II.62) dobija konačan oblik:

$$\dot{z}_p^* = \frac{4}{\pi} \Omega^{-\frac{4}{3}} e^{-\frac{4}{3} N t} \int_0^t \Omega^{\frac{4}{3}} e^{\frac{4}{3} N t} dt \quad (II.63)$$

Za slučaj opstrujavanja kružnog cilindra, brzina spoljašnjeg strujanja je određena izrazom (2.29)

$$U(t, x) = \Omega(t) V(x) = V_{\infty} \cdot 2 \sin \frac{x}{R}$$

odnosno za $\Omega(t) = V_{\infty}$, može da se izračuna (II.63):

$$\dot{z}_p^* = \frac{\rho^2}{\gamma} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{4}{3} N t} \cdot \frac{3}{4N} e^{\frac{4}{3} N t} \Big|_0^t$$

$$\dot{z}_p^* = \frac{3}{\pi N} (1 - e^{-\frac{4}{3} N t}) \quad (II.64)$$

$$\dot{z}_p^* = \sqrt{\frac{3V}{\pi N}} \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{4}{3} N t}}$$

- za neprovođan fluid ($N = 0$) vrednost funkcije \dot{z}_p^* je:

$$\dot{z}_p^* = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{3(1 - e^{-\frac{4}{3} N t})}{\pi N} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{4}{3} t e^{-\frac{4}{3} N t}}{\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot t \quad (II.65)$$

$$\dot{z}_p^* = \sqrt{\gamma \dot{z}_p^*} = 2 \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} t$$

Kada se u izraze (II.64) i (II.65) zamene:

$$N = N \frac{V_{\infty}}{R} \quad ; \quad t = t \frac{R}{V_{\infty}}, \text{ DOBILA SE}$$

- za neprovođan fluid ($N = 0$)

$$\dot{z}_p^* = \frac{4R}{\pi V_{\infty}} t^* = \frac{\dot{z}_p^*}{\gamma} ; \quad A = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (II.64')$$

$$\dot{J}_p^* = 2E \sqrt{\frac{t^*}{Re}}$$

$$\frac{\dot{J}_p^*}{A} = 2E \sqrt{\frac{t^*}{Re}}$$

(II.64')

- za provodan fluid ($N \neq 0$)

$$\dot{z}_p^* = \frac{3R}{\pi V_0 N^*} (1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*})$$

$$\dot{J}_p^* = \frac{R}{\sqrt{\pi Re}} \cdot \sqrt{\frac{3}{N^*}} (1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*}) ;$$

(II.65')

$$\frac{\dot{J}_p^*}{A} = \frac{R}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{3}{N^*}} (1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*})$$

P-II.6. Izvođenje izraza za vreme prvog odvajanja MHD brzinskog graničnog sloja

Vreme prvog odvajanja graničnog sloja se određuje iz uslova

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \text{ koji se uvođenjem strujne funkcije u obliku (2.10)}$$

$$\Psi(t, x, y) = \frac{1}{A} \cdot U \cdot \int_0^t F(\eta, \{\alpha_k\} \{\beta_k\} \{\gamma_k\})$$

i reda (2.17) za funkciju F, svodi na sledeći uslov:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} = 0, \text{ odnosno} \tag{II.66}$$

$$f_{q0}''(0) + \alpha_1 \cdot f_{0,1}''(0) + \beta_1 \cdot f_{1,0}''(0) + \gamma_1 \cdot f_{1,0}''(0) = 0$$

Za razmatreni slučaj opstrujavanja kružnog cilindra: $U(t, x) = \Omega(t) \cdot V(x) = V_0 \sin \frac{x}{R}$, izlazi da je $\alpha_1 = 0$ tj. izraz (II.66) se uprošćava. Vreme prvog odvajanja MHD graničnog sloja se može izračunati na osnovu analitičkih i numeričkih rešenja za univerzalne funkcije $f_{q0}(\eta) \dots f_{1,0}(\eta)$

a) Koristeći analitička rešenja (2.25) i vrednosti Veberovih funkcija (II.36) - dobiju se sledeće vrednosti univerzalnih funkcija $f_{q0}''(0) \dots f_{1,0}''(0)$:

$$f_{q0}''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; f_{0,1}''(0) = f_{1,0}''(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}; f_{1,0}''(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \tag{II.67}$$

Sa ovim vrednostima univerzalnih funkcija i odgovarajućim izrazima za parametre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$: (II.72) - za neprovođan fluid, i (II.73) - za provodan fluid, iz jednačine (II.66) se dobijaju sledeće relacije za vreme prvog odvajanja:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0, \alpha_1 = \beta_1 = 0$)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8}{\pi} t_{odv}^* \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 0$$

$$t_{odv}^* = \frac{-1}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv}} \tag{II.68}$$

- za provodan fluid ($N \neq 0, \alpha_1 = 0$)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t_{odv}^*}\right) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{3} + \frac{6}{N^* \pi} \left(1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t_{odv}^*}\right) \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 0$$

$$t_{odv}^* = \frac{3}{4N^*} \ln \frac{1 + \frac{3}{N^*} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv}}{3 + \frac{3}{N^*} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv}} \tag{II.69}$$

Iz izraza (II.68) i (II.69) najpre se izračunaju vremena prvog odvajanja u zadnjoj zaustavnoj tački ($\frac{x}{R} = \bar{u}$) za četiri vrednosti magnetna Stujartova broja ($N^* = 0,0; 0,6; 1,0; 2,0$).

Iz izraza (II.69) može se zaključiti da u zadnjoj zaustavnoj tački, odnosno do odvajanja graničnog sloja uopšte ne dolazi, ($\frac{x}{R} = \pi, t_{odv}^* \rightarrow \infty, e^{-\frac{4}{3}N^*t_{odv}^*} \rightarrow 0$) pri vrednosti magnetnog Stujartovog broja $N^* = 1 + \frac{4}{3\pi} \approx 1,4244$. Na taj način se izaberu vrednosti magnetnih Stujartovih brojeva i odgovarajući intervali vremena $N^* = 0 \therefore t^* \approx 0,4 \div 3,0$; $N^* = 0,6 \therefore t^* \approx 0,5 \div 4,0$; $N^* = 1,0 \therefore t^* \approx 0,8 \div 5,0$; $N^* = 1,4 \therefore t^* \approx 2,0 \div 7$ pa se iz sledećih izraza izračunavaju položaji tačke odvajanja u raznim trenucima vremena:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0, \alpha_1 = \beta_1 = 0$)

$$\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \arccos \frac{-1}{2\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)t_{odv}^*} \quad (II.70)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0, \alpha_1 = 0$)

$$\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \arccos \frac{2\left(e^{-\frac{4}{3}N^*t_{odv}^*} - 1\right) - 1}{\frac{3}{N^*} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)} \quad (II.71)$$

b) Koristeći numerička rešenja - vrednosti univerzalnih funkcija, data u drugom delu rada:

$$f_{0,0}''(0) = 1,128339; f_{0,1}''(0) = f_{1,0}''(0) = 0,591171;$$

$$f_{1,0}''(0) = 1,262529;$$

kao i relacije (II.70), (II.71) za parametre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, - iz jednačine (II.66) se dobijaju sledeće relacije za vreme prvog odvajanja ili položaj tačke odvajanja u proizvoljnom trenutku vremena:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0, \alpha_1 = \beta_1 = 0$)

$$1,128339 + \frac{6}{\pi} t_{odv}^* \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} \cdot 1,262529 = 0 \quad (II.72)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0; \alpha_1 = 0$)

$$1,128339 + \frac{6}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{4}{3}N^*t_{odv}^*}\right) 0,591171 + \frac{6}{N^*\pi} \left(1 - e^{-\frac{4}{3}N^*t_{odv}^*}\right) \cos\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} \cdot 1,262529 = 0 \quad (II.73)$$

Iz izraza (II.72) i (II.73), mogu se izračunati napr. položaj tačke odvajanja $(\frac{x}{R})_{odv}$, u izvesnim, razmatranim trenucima vremena (t_{odv}^*);

- za neprovođan fluid ($\dot{N}=0, \alpha_1=\beta_1=0$)

$$\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \arccos\left(-\frac{0,350960405}{t_{odv}^*}\right); \quad (II.74)$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0, \alpha_1=0$)

$$\left(\frac{x}{R}\right)_{odv} = \arccos\left\{-\frac{1,128359 + 0,564527(1 - e^{-\frac{4}{3}\dot{N}t_{odv}^*})}{\dot{N} \cdot (1 - e^{-\frac{4}{3}\dot{N}t_{odv}^*})}\right\}. \quad (II.75)$$

P-11.7. Izvođenje izraza za bezdimenzijski tangencijalni napon na površini tela (2.49), (2.50)

Na osnovu relacija (II.64), (II.65), vrednost konstante $A = \frac{1}{\sqrt{3t^*}}$ (2.7) i izraza (2.7) za beskonačne skupove parametara $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, u slučaju opstrujavanja kružnog cilindra vrednosti parametara oblika $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, se izračunavaju iz sledećih izraza:

- neprovođan fluid ($\dot{N}^* = 0$)

$$\dot{z}_p^* = \frac{4}{\pi} t^* = \frac{4R}{\pi V_\infty} t^* = \frac{\dot{z}_p}{V}; \quad (t^* = \frac{V_\infty}{R} t);$$

$$\alpha_1 = \frac{\dot{\Omega}}{R} \dot{z}_p^* = 0, \quad (\Omega = V_\infty);$$

(II.76)

$$\beta_1 = N \cdot \dot{z}_p^* = 0, \quad (N = N \cdot \frac{R}{V_\infty});$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \Omega V' \dot{z}_p^* = 2 \frac{V_\infty}{R} \cos \frac{x}{R} \cdot \frac{4}{\pi} \frac{R}{V_\infty} t^* = \\ &= \frac{8}{\pi} t^* \cos \frac{x}{R}, \quad (V(x) = 2 \sin \frac{x}{R}); \end{aligned}$$

- provodan fluid ($\dot{N}^* \neq 0$)

$$\dot{z}_p^* = \frac{\dot{z}_p^{*2}}{V} = \frac{3 \cdot R}{\pi \dot{N} \cdot V_\infty} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N} t^*});$$

$$\alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = \frac{3}{\pi} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N} t^*});$$

$$\gamma_1 = \frac{6}{\pi \dot{N}} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N} t^*}) \cos \frac{x}{R};$$

(II.77)

Tangencijalni napon na površini tela se izračunava iz obrasca:

$$\tau_w = \gamma \rho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \text{dakle, potražimo najpre } \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{A}{\dot{z}_p^*} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (U \frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0} = 2 V_\infty \sin \frac{x}{R} \cdot \frac{A}{\dot{z}_p^*} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0}$$

- za neprovođan fluid ($\dot{N}^* = 0$)

$$\frac{A}{\dot{z}_p^*} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_\infty R}{\gamma \rho R t^*}} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{Re}{t^*}};$$

(II.78)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{2V_{\infty}}{R} \sqrt{\frac{Re}{\gamma}} \sin \frac{x}{R} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} \quad (II.78)$$

konačno, tangencijalni napon u bezdimenzijskom obliku

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot \gamma} \cdot \frac{R}{V_{\infty} \sqrt{Re}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{R}{V_{\infty} \sqrt{Re}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin \frac{x}{R} \left\{ f_{0,0}''(0) + \gamma_1 f_{1,0,0}'(0) + \gamma_1'' f_{1,0,0}''(0) \right\} \quad (II.79)$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$)

$$\frac{A}{\rho \cdot \gamma} = \sqrt{\frac{N^* \cdot V_{\infty} R}{\nu \cdot Re \cdot 3(1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*})}} = \frac{\sqrt{Re}}{R} \sqrt{\frac{N^*}{3(1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*})}}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 2V_{\infty} \sin \frac{x}{R} \frac{\sqrt{Re}}{R} \sqrt{\frac{N^*}{3(1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*})}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} \quad (II.80)$$

a tangencijalni napon -u bezdimenzijskom vidu:

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot \gamma} \cdot \frac{R}{V_{\infty} \sqrt{Re}} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{R}{V_{\infty} \sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{4N^*}{3(1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t^*})}} \cdot \sin \frac{x}{R} \cdot \left\{ f_{0,0}'(0) + \beta_1 f_{1,0,0}'(0) + \gamma_1 f_{1,0,0}''(0) + \beta_1 \gamma_1 f_{1,0,0,0}'(0) + \beta_1^2 f_{1,0,0}''(0) + \gamma_1'' f_{1,0,0}''(0) \right\} \quad (II.81)$$

P-III.1. Izvođenje univerzalne jednačine (3.2)

TERMOBETARSKI
-temperaturni problem-

Za energijsku jednačinu (1.34) sa graničnim uslovima (1.35), (1.39):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho \cdot c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\delta B^2}{\rho \cdot c_p} (u-U)^2,$$

- rešenja za temperaturu se traže u obliku (3.1):

$$T(z, x, y) = T_\infty + \frac{\Omega^2(t) \cdot V^2(x)}{c_p} \cdot K^* \left(\eta, \{ \alpha_k \}, \{ \beta_k \}, \{ \gamma_k \}, P_1 \right).$$

S obzirom da se u ovom slučaju koriste isti beskonačni skupovi parametara $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ (2.7) -kao kod nestacionarnog MHD brzinskog graničnog sloja (3.2.)- analognim postupkom kao u P-II.3, pojedini članovi energijske jednačine se mogu napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\Omega \dot{\Omega} V^2}{c_p} K^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial K^*}{\partial t} + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial K^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \quad (III.1)$$

$$= \frac{2\Omega \dot{\Omega} V^2}{c_p} K^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{1}{z_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial K^*}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial K^*}{\partial \beta_k} + c_p \frac{\partial K^*}{\partial \gamma_k} \right) - \frac{\Omega^2 V^2 P_1}{c_p} \frac{1}{z_p^*} \eta \frac{\partial K^*}{\partial \eta}$$

$u, v, \frac{\partial u}{\partial y}$ data su u P-II.3 relacijama (II.24), (II.25) i (II.27):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2\Omega^2 V V'}{c_p} K^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial K^*}{\partial x} = \quad (III.2)$$

$$= \frac{2\Omega^2 V V'}{c_p} K^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{1}{\Omega V z_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_k \frac{\partial K^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial K^*}{\partial \gamma_k} \right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial K^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{A}{z_p^*} \frac{\partial K^*}{\partial \eta}; \quad (III.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{A}{z_p^*} \frac{\partial K^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{A^2}{z_p^{*2}} \frac{\partial^2 K^*}{\partial \eta^2}; \quad (III.4)$$

Kada se izrazi (II.24), (II.25), (II.27), (III.1)-(III.4) zamene u jednačinu (1.34) - jednostavnim transformacijama i sređivanjem dolazi se do univerzalne jednačine (3.2)

III.2. Izvođenje univerzalne jednačine (3.21)

- zadatak: toplotni fluks na površini tela-

Iz izraza (3.16) za beskonačne skupove parametara oblika δ_k^* i

ϵ_k :

$$\delta_k^* = \frac{1}{Y} \frac{d^k Y}{dt^k} \frac{1}{z_p^*}$$

$$\epsilon_k = \Omega^k V^k \frac{1}{X} \frac{d^k X}{dx^k} \frac{1}{z_p^*}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

dobiju se sledeće relacije $\frac{dz_p^*}{dt} = 2R$

$$\frac{\partial \delta_k^*}{\partial t} = -\frac{\dot{Y}}{Y^2} \frac{d^k Y}{dt^k} \frac{1}{z_p^*} + \frac{1}{Y} \frac{d^{k+1} Y}{dt^{k+1}} \frac{1}{z_p^*} + \frac{1}{Y} \frac{d^k Y}{dt^k} \cdot k \cdot \frac{1}{z_p^{*k+1}} \frac{dz_p^*}{dt} =$$

$$= -\frac{\dot{Y}}{Y} \delta_k^* + \frac{1}{z_p^*} \delta_{k+1}^* + \frac{2kR}{z_p^*} \delta_k^* \quad / \cdot (z_p^*)$$

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} = k \cdot \Omega^k \frac{1}{X} \frac{d^k X}{dx^k} \frac{1}{z_p^*} \frac{dz_p^*}{dt} + \Omega^k V^k \frac{1}{X} \frac{d^k X}{dx^k} \cdot k \cdot \frac{1}{z_p^{*k+1}} \frac{dz_p^*}{dt} =$$

$$= k \cdot \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \epsilon_k + \frac{2kR}{z_p^*} \epsilon_k \quad / \cdot (z_p^*)$$

$$z_p^* \frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} = (k \alpha_1 + 2kR) \epsilon_k = \rho_k$$

(III.6)

$$\frac{\partial \epsilon_k}{\partial x} = \Omega^k \frac{1}{z_p^*} \left(\frac{kV^{k-1} V' d^k X}{X dx^k} - \frac{V^k X' d^k X}{X^2 dx^k} + \frac{V^k d^{k+1} X}{X dx^{k+1}} \right) =$$

$$= \frac{kV'}{V} \cdot \left(\frac{\Omega^k V^k d^k X}{X dx^k} \frac{1}{z_p^*} \right) - \frac{X'}{X^2} \left(\frac{\Omega^k V^k d^k X}{X dx^k} \frac{1}{z_p^*} \right) + \frac{\Omega^k V^k d^{k+1} X}{X dx^{k+1}} \frac{1}{z_p^*} \quad / \cdot (\Omega V z_p^*)$$

$$\Omega V z_p^* \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x} = k (\Omega V z_p^*) \epsilon_k - \left(\frac{\Omega V X'}{X} z_p^* \right) \epsilon_k + \epsilon_{k+1} =$$

$$= (k \cdot \delta_1 - \epsilon_1) \epsilon_k + \epsilon_{k+1} = E_k$$

(III.7)

$$\boxed{z_p^* \frac{\partial \delta_k^*}{\partial t} = (-\delta_1 + 2kR) \cdot \delta_k^* + \delta_{k+1}^* = d_k^*}$$

(III.5)

Koristeći relacije (II.16)-(II.20) i (III.5)-(III.7) sada se mogu napisati formule za zamenu diferenciranja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \delta_k} \frac{\partial \delta_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{\sum p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + d_k \frac{\partial}{\partial \delta_k} + e_k \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \right); \end{aligned} \quad (III.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{1}{\Omega V \sum p} \sum_{k=1}^{\infty} \left(O_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + E_k \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \right). \end{aligned} \quad (III.9)$$

Rešenje za temperaturu se traži u obliku (3.20):

$$T(t,x,y) = T_{\infty} + \frac{\Omega(t) V \alpha^2}{c_p} K^* (\eta \{ \alpha_k \} \{ \beta_k \} \{ \gamma_k \} \{ \delta_k \} \{ \epsilon_k \} \{ P_r \}) + Y(t) X(x) K^{**} (\eta \{ \alpha_k \} \{ \beta_k \} \{ \gamma_k \} \{ \delta_k \} \{ \epsilon_k \} \{ P_r \}).$$

Posredstvom (II.24)-(II.28) i (3.20): Energijska jednačina (1.34):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{G B^2}{\rho c_p} (u-U)^2$$

se očigledno rastavlja na dve jednačine- od kojih je jedna identična sa jednačinom temperaturskog problema, a druga glasi:

$$\begin{aligned} \dot{Y} \cdot X \cdot K^* + Y \cdot X \cdot \frac{\partial K^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + Y \cdot X \cdot \frac{\partial K^*}{\partial t} + \Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta} (Y X K^* + Y X \frac{\partial K^*}{\partial x}) - \\ - \frac{\Omega \delta p^*}{A} (V F + V \frac{\partial F}{\partial x}) Y X \frac{A}{\delta p^*} \frac{\partial K^*}{\partial \eta} = \frac{\delta}{P_r} Y X \frac{A^2}{\delta p^{*2}} \frac{\partial^2 K^*}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (III.10)$$

Kada se u jednačini (III.10) zameni (II.23): $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{R}{\sum p} \cdot \eta$ dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{P_r} Y X \frac{A^2}{\delta p^{*2}} \frac{\partial^2 K^*}{\partial \eta^2} + \frac{Y X R}{\sum p} \eta \frac{\partial K^*}{\partial \eta} + Y X \Omega V F \frac{\partial K^*}{\partial \eta} + Y X \Omega V \frac{\partial K^*}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial x} - \\ - Y X K^* - Y X \frac{\partial K^*}{\partial t} - Y X \Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta} K^* - Y X \Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial K^*}{\partial x} = 0; \end{aligned} \quad (III.11)$$

a posle zamene diferenciranja prema formulama (II.21), (II.22) i

(III.8) i (III.9) konačno se dobija jednačina (3.21):

$$\begin{aligned}
 & \frac{A^2}{P^*} \cdot \frac{YX}{z_p^*} \cdot \frac{\partial^2 K^{**}}{\partial \eta^2} + \frac{YX}{z_p^*} R \eta \frac{\partial K^{**}}{\partial \eta} + \frac{YX}{z_p^*} (\rho V^{\uparrow} z_p^*) F \frac{\partial K^{**}}{\partial \eta} + \\
 & + \frac{YX}{z_p^*} \frac{\partial K^{**}}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (O_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F}{\partial \delta_k}) - \frac{YX}{z_p^*} \cdot (\frac{Y^{\uparrow}}{X} z_p^*) K^{**} - \\
 & - \frac{YX}{z_p^*} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \delta_k} + d_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \rho_k} + e_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \epsilon_k}) - \\
 & - \frac{YX}{z_p^*} \cdot (\frac{X'}{X} \rho V^{\uparrow} z_p^*) \frac{\partial F^{**}}{\partial \eta} K^{**} - \frac{YX}{z_p^*} \frac{\partial F}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (O_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \delta_k} + E_k \frac{\partial K^{**}}{\partial \epsilon_k}) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{III.12}$$

P-III.3. Izvođenje izraza za parametre δ_1 i ϵ_1
(3.31), (3.32)

Prema (3.29) toplotni fluks na površini tela je zadan funkcijom:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = Q_0(t, x) = Y_0(t) \cdot X(x) = c_1 t \quad ,$$

a na osnovu relacije (3.29) i (3.17) proizilazi (3.30):

$$X(x) = 1, \quad Y(t) = Y_0 \cdot \frac{d\delta_p^*}{A} = c_1 \cdot t \cdot \frac{d\delta_p^*}{A}$$

Na osnovu (3.16) za $k = 1$ se dobija:

$$\delta_1 = \frac{Y}{c_1 t} \dot{z}_p^* \quad , \quad (III.13)$$

$$\epsilon_1 = R V \frac{X'}{X} \cdot \dot{z}_p^* = 0$$

Parametar δ_1 se dalje može napisati:

$$\delta_1 = \frac{\dot{z}_p^*}{c_1 t \frac{d\delta_p^*}{A}} \cdot \left(c_1 \frac{d\delta_p^*}{A} + c_1 t \cdot \frac{d\delta_p^*}{A} \right) = \frac{\dot{z}_p^*}{t} + \dot{z}_p^* \frac{d\delta_p^*}{d\delta_p^*}$$

a od ranije je poznata relacija (2.4):

$$\dot{z}_p^* = \frac{d\delta_p^{*2}}{y}, \quad \frac{d\dot{z}_p^*}{dt} = -2R = -2\delta_p^* \frac{d\delta_p^*}{y}$$

$$\therefore \frac{d\delta_p^{*2}}{y} \cdot \frac{d\delta_p^*}{d\delta_p^*} = R, \quad \frac{d\delta_p^*}{d\delta_p^*} = \frac{R}{\dot{z}_p^*}$$

pa konačno izraz za δ_1 glasi:

$$\delta_1 = \frac{\dot{z}_p^*}{t} + R \quad (III.14)$$

Zamenjujući u (III.14) odgovarajuće vrednosti funkcija \dot{z}_p^* i R , za neprovođan fluid - (II.77), (2.18), dobijaju se izrazi (3.31) i (3.32):

- neprovodan fluid ($\dot{N}^* = 0, \alpha_1 = \beta_1 = \varepsilon_1 = 0$)

$$\dot{z}_p^* = \frac{4t}{\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{R}{V_{\infty}} t^*,$$

$$R = R_0 + \alpha_1 R_{1a} + \beta_1 R_{1b} = R_0 = \frac{2}{\pi},$$

$$\therefore S_1 = \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{6}{\pi};$$

(3.31)

- provodan fluid ($\dot{N}^* \neq 0, \alpha_1 = \varepsilon_1 = 0$)

$$\dot{z}_p^* = \frac{3R}{\pi V_{\infty} \dot{N}^*} \cdot (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N}^* t^*}),$$

$$R = R_0 + \alpha_1 R_{1a} + \beta_1 R_{1b} = \frac{2}{\pi} + \frac{3}{\pi} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N}^* t^*}) \cdot (-\frac{2}{3})$$

$$S_1 = \frac{\dot{z}_p^*}{t} + R = \frac{3}{\pi \dot{N}^* \underbrace{t V_{\infty}}_{\equiv t^*} \frac{R}{R}} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N}^* t^*}) + \frac{2}{\pi} e^{-\frac{4}{3} \dot{N}^* t^*} \quad (3.32)$$

P-III.4. Izvođenje izraza za "sopstvenu" temperaturu (3.33), (3.34)

Polazeći od rešenja za temperaturu (3.20):

$$T = T_{\infty} + \frac{U^2}{c_p} K^*(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr) + Q_0 \frac{d_p^*}{A} K^{**}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, d_1, E_1, Pr)$$

i relacije (2.29), (3.29):

$$U(t, x) = 2V_{\infty} \sin \frac{x}{R}; Q_0(t, x) = C_1 t;$$

Kao i vrednosti (II.64') i (II.65') za $\frac{d_p^*}{A}$ dobijaju se sledeći izrazi za izračunavanje "sopstvene" temperature ($T_e \equiv T(\eta=0)$):
 - za neprovodan fluid ($N^* = 0$)

$$T_e - T_{\infty} = \frac{4V_{\infty} \sin \frac{2x}{R}}{c_p} K^*(0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr) + \frac{C_1 t R c_p}{V_{\infty} V_{\infty}^2} \cdot \frac{V_{\infty}^2}{c_p} \frac{2R\sqrt{t}}{\sqrt{Re}} K^{**}(0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, d_1, E_1, Pr)$$

- odnosno:

$$\frac{T_e - T_{\infty}}{V_{\infty}^2/c_p} = 4 \sin \frac{2x}{R} \left\{ K_{0,0}^*(0) + \gamma_1 K_{10,0}^*(0) \right\} + \frac{2D_1 t^{3/2}}{\sqrt{Re}} \left\{ K_{0,0}^{**}(0) + \gamma_1 K_{10,0}^{**}(0) + d_1 K_{1d,0}^{**}(0) \right\} \quad (3.33)$$

gde je: $D_1 = \frac{C_1 R^2 c_p}{V_{\infty}^3};$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$)

$$T_e - T_{\infty} = \frac{4V_{\infty}^2 \sin \frac{2x}{R}}{c_p} K^*(0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr) + C_1 \frac{R}{V_{\infty}} \frac{V_{\infty}^2}{c_p} \frac{R}{V_{\infty}^2} \frac{R}{\sqrt{Re}} \cdot \sqrt{\frac{5}{N^*}} (1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t}) \cdot K^*(0; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, d_1, E_1, Pr)$$

odno sno:

$$\frac{T_e - T_{\infty}}{V_{\infty}^2/c_p} = 4 \sin \frac{2x}{R} \left\{ K_{0,0}^*(0) + \beta_1 K_{10,0}^*(0) + \gamma_1 K_{10,0}^*(0) \right\} + \frac{D_1 t^{3/2}}{\sqrt{Re}} \cdot \sqrt{\frac{5}{N^*}} (1 - e^{-\frac{4}{3} N^* t}) \left\{ K_{0,0}^{**}(0) + \beta_1 K_{10,0}^{**}(0) + \gamma_1 K_{10,0}^{**}(0) + d_1 K_{1d,0}^{**}(0) \right\} \quad (3.34)$$

Obrasci (3.36) i (3.37) za bezdimenziske profile temperatura izvode se na identičan način, samo je $y \neq 0$. Naravno, vrednosti

parametara $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ - određuju se posredstvom odgovarajućih obrazaca za neprovođan ili provođan fluid.

P-III.5. Izvođenje univerzalnih jednačina (3.39) i (3.41);

$$T_w = \text{const.}$$

Rešenje za temperaturu u ovom slučaju se traži u obliku (3.38):

$$T(x, y) = T_{\infty} + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \mathcal{H}(\eta \{ \alpha_k \} \{ \beta_k \} \{ \gamma_k \} Pr) + (T_w - T_{\infty}) \mathcal{H}^{**}(\eta \{ \alpha_k \} \{ \beta_k \} \{ \gamma_k \} Pr)$$

Posredstvom relacija (II.21)-(II.27) i (3.38), pojedini članovi energijske jednačine (1.34):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{G B^2}{\rho c_p} (u - V)^2$$

moгу se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{2\Omega\dot{\Omega}V^2}{c_p} \mathcal{H}^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t} + \\ &+ (T_w - T_{\infty}) \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + (T_w - T_{\infty}) \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial t} = \end{aligned} \quad (III.15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\Omega\dot{\Omega}}{c_p} \mathcal{H}^* - \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{R}{z_p} \eta \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \cdot \frac{1}{z_p} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) - \\ &- (T_w - T_{\infty}) \frac{R}{z_p} \eta \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} + (T_w - T_{\infty}) \frac{1}{z_p} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \gamma_k}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{2\Omega^2 V V'}{c_p} \mathcal{H}^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x} + (T_w - T_{\infty}) \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial x} = \\ &= \frac{2\Omega^2 V V'}{c_p} \mathcal{H}^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{1}{\Omega V z_p} \sum_{k=1}^{\infty} (D_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) + \\ &+ (T_w - T_{\infty}) \frac{1}{\Omega V z_p} \sum_{k=1}^{\infty} (D_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \gamma_k}); \end{aligned} \quad (III.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{A}{\delta_p^*} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + (T_w - T_{\infty}) \frac{A}{\delta_p^*} \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \quad (III.17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\Omega^2 V^2}{c_p} \frac{A^2}{\delta_p^*} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^*}{\partial \eta^2} + (T_w - T_{\infty}) \frac{A^2}{\delta_p^*} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta^2} \quad (III.18)$$

Kada se (III.35)8(III.38)-zamene u energijsku jednačinu(1.34) dobija se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \cdot 2(\Omega V z_p^*) \mathcal{H}^* - \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \cdot R \eta \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) + \\
 & \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \cdot 2(\Omega V z_p^*) \frac{\partial F^*}{\partial m} \mathcal{H}^* + \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \cdot \frac{\partial F^*}{\partial m} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \gamma_k}) - \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} (\Omega V z_p^*) \cdot \\
 & + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial m} - \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial m} \sum_{k=1}^{\infty} (O_k \frac{\partial F^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F^*}{\partial \gamma_k}) - \frac{(T_w - T_{\infty})}{z_p^*} \frac{R}{z_p^*} \eta \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial m} + \\
 & \frac{T_w - T_{\infty}}{z_p^*} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial x_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \gamma_k}) + \frac{(T_w - T_{\infty})}{z_p^*} \cdot \frac{\partial F^*}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (O_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \gamma_k}) - \\
 & \frac{(T_w - T_{\infty})}{z_p^*} (\Omega V z_p^*) \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} - \frac{(T_w - T_{\infty})}{z_p^*} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (O_k \frac{\partial F^*}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial F^*}{\partial \gamma_k}) = \\
 & \frac{A^2}{Pr} \cdot \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{H}^*}{\partial m^2} + A^2 \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} (\frac{\partial^2 F^*}{\partial m^2})^2 + (\frac{GB^2}{\rho} \frac{1}{z_p^*}) \cdot \frac{\Omega^2 V^2}{c_p z_p^*} (\frac{\partial F^*}{\partial m} - 1)^2 + \\
 & + \frac{A^2}{Pr} \cdot \frac{T_w - T_{\infty}}{z_p^*} \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{**}}{\partial m^2} \tag{III.19}
 \end{aligned}$$

Jednačine (III.19) se očigledno rastavlja na dve tražene jednačine (3.39), (3.41) za određivanje univerzalnih funkcija \mathcal{H}^* i \mathcal{H}^{**} .

P-III.6. Izvođenje izraza (3.55) i (3.56) za $Nu\sqrt{Re}$ - na površini tela

Iz izraza za temperaturu (3.38), vrednosti Nusseltovog broja na površini tela se izračunava prema obrascu: $(\Delta T)_0 = T_w - T_\infty$

$$Nu = \left. \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \frac{R}{(\Delta T)_0} = \frac{R}{(\Delta T)_0} \cdot \frac{A}{\delta_p^*} \left\{ \frac{R^2 V^2}{c_p} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} + (\Delta T)_0 \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \right\},$$

za: $U = \Omega V = 2 V_\infty \sin \frac{x}{R}$

biće:

$$Nu = R \frac{A}{\delta_p^*} \left\{ \frac{4 V_\infty^2 \sin^2 \frac{x}{R}}{c_p (\Delta T)_0} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \right\}$$

Kada se uvede Ekersonov broj i usvoji brojna vrednost

$$Ec = \frac{V_\infty^2}{c_p (\Delta T)_0} \equiv 1$$

dobija se:

$$Nu = R \frac{A}{\delta_p^*} \left\{ 4 \cdot Ec \cdot \sin^2 \frac{x}{R} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \right\} \quad (\text{III.20})$$

Koristeći od ranije poznate izraze za $\left(\frac{A}{\delta_p^*} \right)$:

-za neprovođan fluid (II.78) i provođan fluid (II.80), dobijaju se traženi izrazi (3.55), (3.56) za $Nu\sqrt{Re}$.

P-III.7. Izvođenje univerzalne jednačine (3.63).

- proizvoljna, zadata temperatura na površini tela-

Iz izraza (3.59) za beskonačne skupove parametara oblika

λ_k i μ_k :

$$\lambda_k = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d^k \rho}{dt} \cdot \frac{1}{z_p^k};$$

$$k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$\mu_k = \Omega^k \cdot V^k \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot \frac{1}{z_p^k};$$

dobijaju se sledeće relacije: $\left(\frac{d^* z_p}{dt} = 2R\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_k}{\partial t} &= -\frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \cdot \frac{d^k \rho}{dt^k} \cdot \frac{1}{z_p^k} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d^{k+1} \rho}{dt^{k+1}} \cdot \frac{1}{z_p^k} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d^k \rho}{dt^k} \cdot k \cdot \frac{1}{z_p^{k+1}} \cdot \frac{d^* z_p}{dt} = \\ &= -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \cdot \lambda_k + \frac{1}{z_p^*} \cdot \lambda_{k+1} + \frac{2kR}{z_p^*} \cdot \lambda_k / z_p^* \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$z_p^* \cdot \frac{\partial \lambda_k}{\partial t} = (-\lambda_1 + 2kR) \cdot \lambda_k + \lambda_{k+1} = l_k;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_k}{\partial t} &= k \cdot \Omega^{k-1} \cdot \dot{\Omega} \cdot V^k \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot \frac{1}{z_p^k} + \Omega^k \cdot V^k \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot k \cdot \frac{1}{z_p^{k+1}} \cdot \frac{d^* z_p}{dt} = \\ &= k \cdot \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \cdot \mu_k + \frac{2kR}{z_p^*} \cdot \mu_k / z_p^* \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$$z_p^* \cdot \frac{\partial \mu_k}{\partial t} = (k \cdot \lambda_1 + 2kR) \mu_k = m_k;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_k}{\partial x} &= \Omega^k \cdot \frac{1}{z_p^k} \left(\frac{k \cdot V^{k-1} \cdot V'}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} - \frac{V^k \cdot v'}{v^2} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} + \frac{V^k}{v} \cdot \frac{d^{k+1} v}{dx^{k+1}} \right) = \\ &= k \cdot \frac{V'}{V} \cdot \left(\frac{\Omega^k V^k}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot \frac{1}{z_p^k} \right) - \frac{v'}{v} \left(\frac{\Omega^k V^k}{v} \cdot \frac{d^k v}{dx^k} \cdot \frac{1}{z_p^k} \right) + \frac{\Omega^k V^k}{v} \cdot \frac{d^{k+1} v}{dx^{k+1}} \cdot \frac{1}{z_p^k} / \Omega V z_p^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega V z_p^* \frac{\partial \mu_k}{\partial x} &= k (\lambda_1 \cdot \mu_k) - (\lambda_1 \cdot \mu_k) + \frac{\Omega^{k+1} V^{k+1}}{v} \cdot \frac{d^{k+1} v}{dx^{k+1}} \cdot \frac{1}{z_p^{k+1}} = \\ &= (k \cdot \lambda_1 - \lambda_1) \mu_k + \mu_{k+1} = M_k. \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Koristeći relacije (II.16)8(II.20) i (III.21)-(III.23) dobijaju se formule za zamenu diferenciranja:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \nu_k} \frac{\partial \nu_k}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Omega V} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + l_k \frac{\partial}{\partial \mu_k} + m_k \frac{\partial}{\partial \nu_k} \right); \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\Omega V} \sum_{k=1}^{\infty} \left(G_k \frac{\partial}{\partial \beta_k} + H_k \frac{\partial}{\partial \gamma_k} + M_k \frac{\partial}{\partial \mu_k} \right). \quad (\text{III.25})$$

Rešenja za temperaturu se traži u obliku (3.62)

$$T(x, y, t) = T_{\infty} + \frac{\Omega \epsilon(t) V_{\infty}^2}{\rho c_p} \mathcal{H}^*(\eta \{ \alpha_k \} \{ \beta_k \} \{ \gamma_k \} \{ \mu_k \} \{ \nu_k \} Pr) + \rho(t) v_{\infty} \mathcal{H}^{***}(\eta \{ \alpha_k \} \{ \beta_k \} \{ \gamma_k \} \{ \mu_k \} \{ \nu_k \} Pr)$$

Posredstvom relacija (II.24)-(II.28) i (3.62) energijska jednačina (1.34):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{GB^2}{\rho c_p} (u-U)^2$$

se rastavlja na dve jednačine, od kojih je jednačina za određivanje funkcije \mathcal{H}^* identična sa jednačinom (3.39), a jednačina za određivanje funkcije \mathcal{H}^{***} glasi:

$$\rho v \mathcal{H}^{***} + \rho v \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho v \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial t} + \Omega V \frac{\partial F}{\partial \eta} (\rho v \mathcal{H}^{***} + \rho v \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial x}) -$$

$$- \frac{\Omega \rho_p}{A} (V \cdot F + V \frac{\partial F}{\partial x}) \rho v \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} \frac{A}{\rho_p} = \frac{\lambda}{Pr} \left(v \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta^2} \frac{A^2}{\rho_p^2} \right). \quad (\text{III.26})$$

Kada se u jednačinu (III.26) zameni (II.23): $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{R}{\Omega V} \eta$, i izvrši zamena diferenciranja prema formulama (II.21), (II.22), (III.24), (III.25) - konačno se dobija jednačina (3.63):

$$\frac{\rho v}{\rho_p} \left\{ \frac{A^2}{Pr} \frac{\partial^2 \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta^2} + R \eta \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} + (\Omega V \frac{\lambda}{\rho_p}) F \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(G_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + H_k \frac{\partial F}{\partial \gamma_k} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & (\Omega V \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{L}) \cdot \frac{\partial F}{\partial \eta} \mathcal{H} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \sum_{k=1}^{\infty} (Q_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta_k} + G_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_k} + M_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_k}) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha_k} + b_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \beta_k} + c_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_k} + l_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_k} + m_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_k}) - \\
 & - (\frac{\psi}{\varphi} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t}) \cdot \mathcal{H} \} = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.27}$$

r-III.8. Izvođenje izraza za parametre λ_1 i μ_1 (3.73), (3.74)

Prema (3.58) temperatura na površini tela je zadana funkcijom oblika:

$$T_w(t, x) - T_{\infty} = f(t) \cdot \vartheta(x) = c_e \cdot t;$$

$$\therefore f(t) = c_e t; \quad \vartheta(x) = 1.$$

Iz obrasca za temperaturu oblika λ_k, μ_k , (3.59) za $k = 1$, dobijaju se izrazi za parametre λ_1 i μ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_p} = \frac{c_e}{c_e} \cdot \frac{\dot{q}_p}{t}, \quad \mu = \Omega \sqrt{\frac{t}{\rho}} \cdot \dot{q}_p = 0 \quad (\text{III.28})$$

Koristeći izraze (11.72), (11.73) za funkciju \dot{z}_p^* - parametar oblika λ_1 se izračunava iz obrasca:

- za neprovođan fluid ($\dot{N} = 0$)

$$\lambda_1 = \frac{4}{\pi} \quad (\text{III.29})$$

- za provodan fluid ($\dot{N} \neq 0$)

$$\lambda_1 = \frac{3}{\frac{\sqrt{\pi} t}{R} \cdot \dot{N} \cdot \pi} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N} t}) = \frac{3}{\pi \cdot \dot{N} \cdot t} (1 - e^{-\frac{4}{3} \dot{N} t}). \quad (\text{III.30})$$

P-III.9. Izvođenje izraza za $\frac{Nu}{Ec\sqrt{Re}}$; (3.75), (3.76) na površini tela

iz izraza (3.62) tj. rešenje za temperaturu:

$$T(x, y) = T_{\infty} + \frac{U^2}{c_p} \mathcal{H}(\eta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, Pr) + (T_w - T_{\infty}) \cdot \mathcal{H}^{***}(\eta, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda_2, Pr)$$

i relacija (2.29), (3.58):

$$U(x) = 2V_{\infty} \sin \frac{x}{R} ; T_w - T_{\infty} = c_2 \cdot t$$

gradijent temperature na površini tela iznosi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{A}{\delta_p^*} \left\{ \frac{4V_{\infty}^2 \sin^2 \frac{x}{R}}{c_p} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} + \frac{c_2 R t}{V_{\infty}} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \right\} \quad (III.31)$$

Koristeći iz (II.64'), (II.65') vrednosti za $\frac{A}{\delta_p^*}$ - dobijaju se iz (III.31) sledeće relacije:

- za neprovođan fluid ($N^* = 0$) prema (II.64'):

$$\begin{aligned} \frac{A}{\delta_p^*} &= \frac{\sqrt{Re}}{2R\sqrt{t^*}} , \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} &= \frac{\sqrt{Re}}{2R\sqrt{t^*}} \cdot \frac{V_{\infty}^2}{c_p} \left\{ 4 \sin^2 \frac{x}{R} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} + \frac{c_2 R t}{V_{\infty}^2} \cdot \frac{c_p}{V_{\infty}^2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \right\} = \\ &= \frac{V_{\infty}^2 (\Delta T)_0}{c_p (\Delta T)_0 R} \cdot \sqrt{Re} \left\{ \frac{2}{\sqrt{t^*}} \sin^2 \frac{x}{R} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} + \frac{c_2 R c_p \sqrt{t^*}}{V_{\infty}^3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \right\} = \\ &= Ec \cdot \frac{(\Delta T)_0}{R} \cdot \sqrt{Re} \left\{ \frac{2}{\sqrt{t^*}} \sin^2 \frac{x}{R} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} + D_2 \cdot \frac{\sqrt{t^*}}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{***}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \right\} ; \end{aligned}$$

odakle se očigledno dobija (3.75):

$$\begin{aligned} \frac{Nu(x)}{Ec\sqrt{Re}} &= \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{R}{(\Delta T)_0}}{Ec\sqrt{Re}} = \frac{2}{\sqrt{t^*}} \sin^2 \frac{x}{R} \left\{ \mathcal{H}'_{00}(0) + \gamma_1' \mathcal{H}'_{10}(0) \right\} + \\ &+ \frac{D_2 \sqrt{t^*}}{2} \left\{ \mathcal{H}^{***'}_{00}(0) + \gamma_1 \mathcal{H}^{***'}_{10}(0) + \lambda_1 \mathcal{H}^{***'}_{11}(0) \right\} ; \end{aligned}$$

- za provodan fluid ($N^* \neq 0$) prema (II.65'):

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{\sqrt{Re}}{E} \cdot \sqrt{\frac{N^*}{5(1-e^{-\frac{4}{3}N^*t^*})}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\sqrt{Re}}{E} \sqrt{\frac{N^*}{5(1-e^{-\frac{4}{3}N^*t^*})}} \left\{ 4 \frac{V_{\infty}^2}{c_p} \sin^2 \frac{x}{R} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^* + \frac{c_2 R t^*}{V_{\infty}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^{***} \right\} =$$

$$= \frac{V_{\infty}^2}{c_p (\Delta T)_0} \cdot \frac{\sqrt{Re}}{E} \cdot \sqrt{\frac{N^*}{5(1-e^{-\frac{4}{3}N^*t^*})}} \cdot \left\{ 4 \sin^2 \frac{x}{R} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^* + \frac{c_2 R c_p}{V_{\infty}^3} t^* \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^{***} \right\}$$

i konačno se dobija (3.76):

$$\frac{Nu\left(\frac{x}{R}\right)}{Ec\sqrt{Re}} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} \frac{R}{\Delta T_0}}{Ec\sqrt{Re}} =$$

$$= \sqrt{\frac{N^*}{5(1-e^{-\frac{4}{3}N^*t^*})}} \left\{ 4 \sin^2 \frac{x}{R} \left[\mathcal{H}'_{0,0}(0)^* + \beta_1 \mathcal{H}'_{1,0}(0)^* + \gamma_1 \mathcal{H}'_{1,0}(0)^* \right] + \right. \\ \left. + D_2 t^* \left[\mathcal{H}'_{0,0}(0)^{***} + \beta_2 \mathcal{H}'_{1,0}(0)^{***} + \gamma_1 \mathcal{H}'_{1,0}(0)^{***} + \lambda_1 \mathcal{H}'_{1,0}(0)^{***} \right] \right\}.$$

