UNIVERZITET U BEOGRADU
Prirodno matematički fakultet

AMORTIZOVANE OSCILACIJE JEDNOG SPECIJALNOG OSCILATORNOG SISTEMA SA DINAMIČKIM I MEŠOVITIM VEZAMA

doktorska disertacija

BOŽIDAR D. JOVANOVIĆ
iz
Novog Sada

BEOGRAD
1973

SPISAK KORIŠĆENIH OZNAKA

Broj uz svaku oznaku označava stranu na kojoj se po prvi put pojavljuje u tekstu, a broj u maloj zagradi je redni broj obrasca u kome se po prvi put pojavljuje.

$\mathbb{A}$ 5(1.19); $\mathbb{A}_{1q1}$ 30(2.10); $\mathbb{A}_{\varphi}$ 47(3.6); $\mathbb{A}_{pq1}$ 49(3.12); $\mathbb{A}_{\psi}$ 47(3.6)

$B_{i-r}^{(i)}$ 11(1.49); $\tilde{B}_{\cdot,r}$ 22(1.120); $\mathbb{B}$ 5(1.20); $\mathbb{B}_{1q1}$ 30(2.11); $\tilde{\mathbb{B}}_{1q1}$ 30(2.1[illegible]

$\tilde{\mathbb{B}}'_{1q1}$ 31; $\mathbb{B}_{\varphi}$ 48(3.7); $\mathbb{B}_{\psi}$ 48(3.8); $\mathbb{B}_{bpq1}$ 49(3.13); $\tilde{\mathbb{B}}_{bpq1}$ 50(3.14); $\mathbb{B}_{b'pq1}$ 50(3.15)

$\tilde{\mathbb{B}}_{b'pq1}$ 50(3.16); $\tilde{\mathbb{B}}'_{bpq1}$ 51; $\tilde{\mathbb{B}}'_{b'pq1}$ 51

$\mathbb{C}$ 4(1.16); $\mathbb{C}_{c}$ 5(1.22); $\mathbb{C}_{c1q1}$ 31(2.14); $\tilde{\mathbb{C}}'_{c1q1}$ 31; $\tilde{\mathbb{C}}_{c1q1}$ 31(2.15);

$\mathbb{C}_{c\varphi}$ 49(3.10); $\mathbb{C}_{c\psi}$ 49(3.11); $\mathbb{C}_{cpq1}$ 50(3.17); $\tilde{\mathbb{C}}_{cpq1}$ 50(3.18); $\mathbb{C}_{c'pq1}$ 51(3.19);

$\tilde{\mathbb{C}}_{c'pq1}$ 51(3.20); $\tilde{\mathbb{C}}'_{cpq1}$ 51; $\tilde{\mathbb{C}}'_{c'pq1}$ 51; $\mathbb{C}_{g}$ 5(1.21); $\mathbb{C}_{g1q1}$ 31(2.13); $\mathbb{C}_{g\varphi}$ 48(3.9);

$\mathbb{C}_{g\psi}$ 48(3.9); $\mathbb{C}_{gpq1}$ 51(3.2[illegible])

$\mathbb{D}_{i}$ 6(1.28); $\mathbb{D}_{d2i}$ 15(1.80)

E_{k} 4(1.13); E_{n} 4(1.14); E_{p} 12(1.57); $\mathbb{E}_{d2i}$ 16(1.85); $\tilde{\mathbb{E}}_{d2i}$ 21(1.116)

F_{1jk} 31(2.16); ${}^{1}F_{1jk}$ 34(2.[illegible]); F_{1j1} 35(2.39); ${}^{1}F_{1j1}$ 36(2.45);

F_{12k} 37(2.47); ${}^{1}F_{12k}$ 38(2.50); ${}^{2}F_{1jk}$ 38(2.[illegible]); ${}^{3}F_{1j1}$ 40(2.64); ${}^{4}F_{1j1}$ 40(2.69);

${}^{2}F_{12k}$ 41(2.71); F_{ijk} 52(3.23); F_{iik} 53(3.30); ${}^{1}F_{ijk}$ 56(3.46); ${}^{2}F_{iik}$ 57(3.53);

F_{1iik} 53(3.33); ${}^{1}F_{1iik}$ 56(3.47); ${}^{2}F_{1iik}$ 57(3.54); F_{2iik} 53(3.34); ${}^{1}F_{2iik}$ 5[illegible]

(3.48); ${}^{2}F_{2iik}$ 57(3.55); F_{k} 33(2.25)

$\mathbb{G}^{*}_{d2i}$ 17(1.91); $\tilde{\mathbb{G}}_{d2i}$ 18(1.97); $\mathbb{G}_{k}$ 33(2.26); ${}^{1}\mathbb{G}_{k}$ 33(2.29); ${}^{1}\tilde{\mathbb{G}}_{k}$ 34(2.36)

H_{r} 3(1.6); H_{rq} 1; H_{1qr} 27; H_{pqr} 45

$\mathbb{I}_{i}$ 8(1.36)

$\mathbb{J}_{i}$ 8(1.38); $\mathbb{J}_{d2i}$ 16(1.84); $\mathbb{J}_{j}^{(v)}$ 32(2.19); ${}^{(p)}\mathbb{J}_{j}$ 32(2.20); $\mathbb{J}_{j}^{(p)}$ 32(2.20)

$\mathbb{J}_{j}^{(s)}$ 32(2.21); $\mathbb{J}_{2}^{(s)}$ 37(2.49)

$\mathbb{K}_{d2i}$ 16(1.83)

$\mathbb{L}_{i}$ 11(1.5[illegible])

$\mathbb{M}_{j}^{(v)}$ 34(2.31); $\mathbb{M}_{j}^{(s)}$ 38(2.51)

$\mathbb{N}_{i}$ 6(1.28); $\mathbb{N}_{d2i}$ 15(1.79)

P_{i} 10(1.46); ${}^{1}_{k}P$ 18(1.99); ${}^{2}_{k}P$ 18(1.107); ${}^{3}_{k}P$ 21(1.117); ${}^{4}_{k}P$ 22(1.1[illegible]

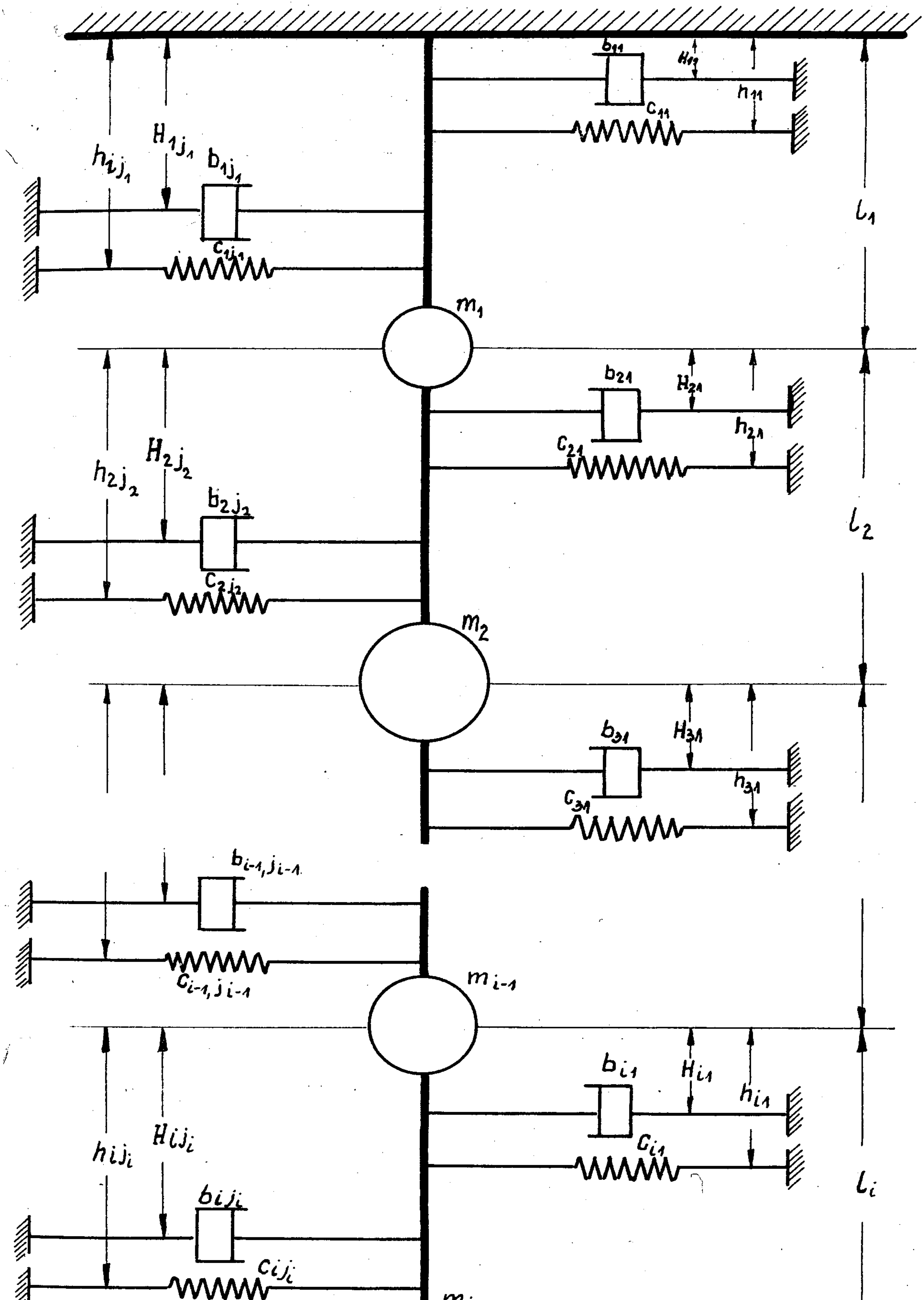
$\mathbb{Q}_{j}^{(v)}$ 39(2.60); $\mathbb{Q}_{k}^{(s)}$ 41(2.74)

$S_r^{(i)}$ 11(1.51); S_i^* 7(1.29); S_i^* 8(1.39)
V_i 7(1.31); V_i^* 8(1.40)
X_r 2(1.3); X_{rq} 3(1.10); X_{1qr} 29(2.5); X_{pqr} 47(3.3); X'_{pqr} 47(3.4)
Φ 4(1.15)

b_r 3(1.6); b_r 9(1.42); b_{rq} 1; b_{1qr} 27; b_{pqr} 45; b'_{pqr} 51
c_r 3(1.11); c_r 9(1.43); c_{rq} 1; c_{1qr} 27; c_{pqr} 45; c'_{pqr} 51
f 6(1.25); f_i 6(1.26); ${}^1f_i$ 12(1.59); ${}^2f_i$ 13(1.68); f_{d2i} 15(1.78); ${}^1f_{d2i}$ 17(1.90); ${}^2f_{d2i}$ 19(1.101); ${}^3f_{d2i}$ 20(1.109); ${}^4f_{d2i}$ 22(1.121); ${}^1\tilde{f}_{d2i}$ 18(1.96); ${}^2\tilde{f}_{d2i}$ 19(1.106); ${}^3\tilde{f}_{d2i}$ 21(1.115)
h_r 3 (1.11); h_{rq} 1; h_{1qr} 27; h_{pqr} 45
k 16(1.81)
l_r 1; l_{1qr} 27; l_{pqr} 45
m_r 1; m_{1qr} 27; m_{pqr} 45
s 7(1.30)
t nezavisno promenljiva, vreme
u 6(1.23)
v 7(1.32)
w_{rq} 2(1.4)
x_n 2; $x_{r,r.1}$ 2; x_{11i} 28(2.1); $\dot{x}_{11i}$ 28(2.2); x_{1qr} 29(2.3); $\dot{x}_{1qr}$ 29(2.4); $\dot{x}_{pqr}$ 46(3.1); $\dot{x}'_{pqr}$ 47(3.2); x^{11i} 28; x^{pq1} 45;
y 7(1.37); y_1 10(1.45); y_2 13(1.64); y_3 35(2.40); y_4 36(2.44); y_5 40(2.65); y_6 40(2.68)
z 14(1.71); z_1 14(1.75); z_2 43(2.85)

α 8 (1.36)
β 8 (1.36)
δ 6 (1.27)
ε_{11i} 28
φ_r 2; φ_{1qr} 28; φ_{pqr} 46
ψ_{pqr} 46
ω^2 6(1.27); $\tilde{\omega}^2$ 6(1.27)

$\otimes$ Kronecker-ov proizvod matrica 32
[ ] najveći ceo broj 17


H_{1j_1}
h_{ij_1}
b_{1j_1}
c_{1j_1}
b_{11}
H_{11}
h_{11}
c_{11}
l_1
m_1
b_{21}
H_{21}
h_{21}
c_{21}
H_{2j_2}
h_{2j_2}
b_{2j_2}
c_{2j_2}
l_2
m_2
b_{31}
H_{31}
h_{31}
c_{31}
$b_{i-1,j_{i-1}}$
$c_{i-1,j_{i-1}}$
m_{i-1}
b_{i1}
H_{i1}
h_{i1}
c_{i1}
h_{ij_i}
H_{ij_i}
b_{ij_i}
c_{ij_i}
l_i
m_i

SLIKA. 1

1 LINIJSKI SISTEMI

1.1 LINIJSKI SISTEMI SA PRIGUŠNICAMA I OPRUGAMA

1.1.1 i matematičkih klatna sa po j_r prigušnica i po j'_r opruga

Posmatraćemo male slobodne oscilacije sistema (sl.1), oko stabilnog položaja ravnoteže, u nepomičnoj vertikalnoj ravni. Sistem se sastoji od i matematičkih klatna, u rednoj sprezi, pričvršćenih na gornjem kraju za nepomičnu tačku, dok donji kraj niza slobodno visi. Pretpostavićemo da je konac svakog klatna tanak nesavitljiv štap, zanemarive mase, na čijem donjem kraju se nalazi materijalna tačka mase m_r, $(r=1,2,\dots,i)$. Dužine klatna su l_r, $(r=1,2,\dots,i)$. Na udaljenosti H_{rq}, $(r=1,2,\dots,i;q=1,2,\dots,j_r)$, od početka svakog klatna, pričvršćene su za nit klatna prigušnice (kočnice) čiji je otpor srazmeran prvom stepenu brzine. Obeležimo sa b_{rq}, $(r=1,2,\dots,i;q=1,2,\dots,j_r)$, koeficiente srazmere otporne sile. Osim toga su za svaki konac klatna na udaljenosti h_{rq}, $(r=1,2,\dots,i;q=1,2,\dots,j'_r)$, od početka svakog klatna, pričvršćene opruge krutosti c_{rq}, $(r=1,2,\dots,i;q=1,2,\dots,j'_r)$.

Kinetička energija E_k, funkcija rasipanja Φ, i potencijalna energija E_p celokupnog sistema je jednaka zbiru kinetičkih energija, funkcija rasipanja i potencijalnih energija svih materijalnih tačaka sistema. Prema tome mogu da se izračunaju postupnim putem.

Dvostruka kinetička energija r-te materijalne tačke je [87,str.152]

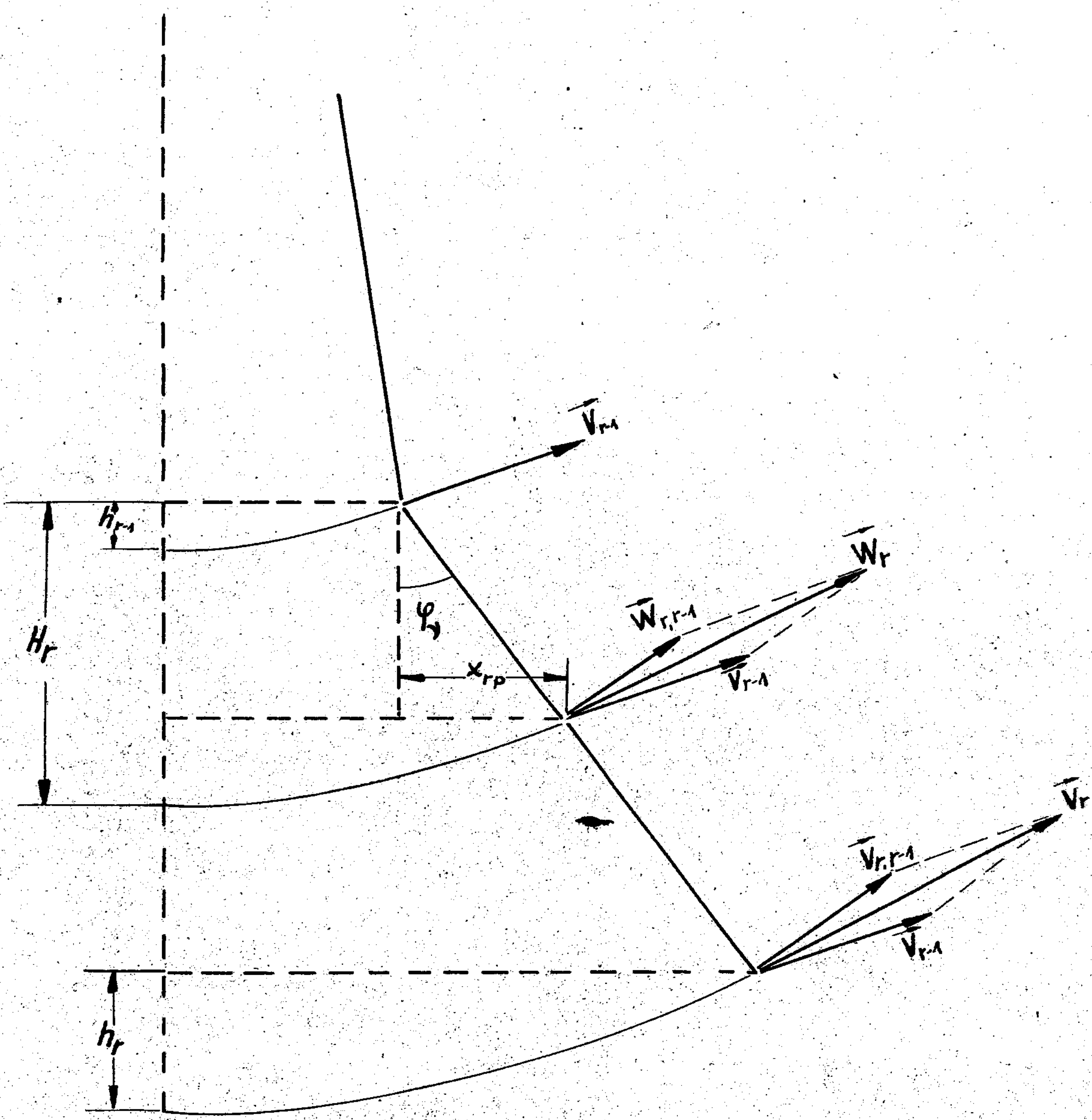
$$2\,E_k^{(r)} = 2\,E_k^{(r-1)} + m_r\,v_r^2\,,$$

gde izložioci označavaju redni broj materijalne tačke u nizu, računat od gore na dole, dok je v_r brzina posmatrane materijalne tačke. Pošto sistem vrši ravno kretanje i pošto smo pretpostavili da je konac krut, nesavitljiv, štap to se brzina materijalne tačke m_r sastoji od prenosne brzine $\vec{v}_{r-1}$ (brzine tačke m_{r-1}) i relativne brzine u odnosu na prethodnu tačku, $\vec{v}_{r,r-1}$, pa je jednaka vektorskom zbiru (sl.2)

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{r-1} + \vec{v}_{r,r-1}\,.$$

Zbog toga što posmatramo samo male oscilacije možemo ovaj vektorski zbir da smatramo za algebarski, pa je brzina, zbog $x_{r,r-1} = l_r \sin\varphi_r \approx l_r\varphi_r$,

$$v_r = v_{r-1} + v_{r,r-1},\quad \dot{x}_{r,r-1} = v_{r,r-1},\quad v_r = v_{r-1} + l_r\dot{\varphi}_r\,,$$



$\vec{V}_{r-1}$
h_{r-1}
$\vec{W}_r$
$\vec{W}_{r,r-1}$
φ_y
H_r
x_{rp}
$\vec{V}_{r-1}$
$\vec{V}_r$
$\vec{V}_{r,r-1}$
$\vec{V}_{r-1}$
h_r

SLIKA. 2.

...smo sa $x_{r,r-1}$ obeležili relativno pomeranje, mereno duž horizontale, r-te ...erijalne tačke u odnosu na r-1 -vu materijalnu tačku, sa φ_r označili ugao ...ji zaklapa nit r-tog klatna sa vertikalom. Ovaj izraz može da se primeni i ...brzinu v_2, pa na $v_3, \ldots$, pa na v_{r-1}, tako da posle sredjivanja dobijamo za ...zinu r-te materijalne tačke

$$v_r = \sum_{n=1}^{r} l_n \dot{\varphi}_n .$$

...ma tome je izraz za dvostruku kinetičku energiju r-te materijalne tačke

$$2\, E_k^{(r)} = 2\, E_k^{(r-1)} + m_r \left(\sum_{n=1}^{r} l_n \dot{\varphi}_n \right)^2 . \qquad \text{...1)}$$

Dvostruka Rayleigh-eva funkcija rasipanja r-te materijalne tačke je

$$2\, \Phi^{(r)} = 2\, \Phi^{(r-1)} + \sum_{q=1}^{j_r} b_{rq} w_{rq}^2 , \qquad \text{...2)}$$

...e smo sa w_{rq} obeležili brzinu prigušnice čiji je koeficient gušenja b_{rq}. ...vu brzinu sa kojom su srazmerni otpori prigušnica možemo da nadjemo kao kod ...netičke energije sa sl. 2 ili na ovaj način. Radi prostijeg računa smatra-...mo da je za konac klatna pričvršćena samo jedna prigušnica. Pomeranje r-te ...igušnice, X_r, je jednako zbiru pomeranja svih r-1 prethodnih materijalnih ...čaka i relativnog pomeranja, x_{rp}, same r-te prigušnice u odnosu na r-1 -vu ...terijalnu tačku :

$$X_r = \sum_{n=1}^{r-1} x_n + x_{rp} ,$$

...e su sa x_n obeležena pomeranja r-1 prethodnih materijalnih tačaka. Kako po-...tramo male oscilacije to je

$$x_n \approx l_n \varphi_n \quad , \text{ a } \quad x_{rp} \approx H_r \varphi_r .$$

...vde sledi da je pomeranje r-te prigušnice

$$X_r = \sum_{n=1}^{r-1} l_n \varphi_n + H_r \varphi_r . \qquad \text{...3)}$$

...zinu r-te prigušnice dobijamo ako diferenciramo pomeranje X_r po vremenu t. ...ko upotrebimo raniju oznaku $w_r = \dot{X}_r$, možemo brzinu ovako da napišemo

$$w_r = \sum_{n=1}^{r-1} l_n \dot{\varphi}_n + H_r \dot{\varphi}_r . \qquad \text{...4)}$$

...djutim, u našem slučaju je za konac r-tog klatna pričvršćeno ukupno j_r pri-...šnica, pa je brzina svake od njih

$$w_{rq} = \sum_{n=1}^{r-1} l_n \dot{\varphi}_n + H_{rq} \dot{\varphi}_{rq} , \qquad (q=1,2,\ldots,j_r) . \qquad \text{...5)}$$

...onačan izraz za funkciju rasipanja r-te materijalne tačke dobijamo kada izraz

(1.5) zamenimo u (1.2). Da izbegnemo ovako glomazan izraz izvršićemo redukciju na ovaj način. Podelićemo i pomnožićemo drugi sabirak u izrazu (1.2) sa H_r^2 i uvešćemo oznake

(1.6) $$b_r \dot{\varphi}_r^2 = \sum_{q=1}^{j_r} b_{rq} \left(\frac{w_{rq}}{H_r}\right)^2 ,$$

gde smo sa b_r označili REDUKOVANI KOEFICIENT GUŠENJA, a sa H_r REDUKOVANU UDALJENOST tačke vezivanja REDUKOVANE PRIGUŠNICE od početka r-tog klatna. Na ovaj način smo, umesto j_r prigušnica pričvršćenih za nit r-tog klatna na različitim udaljenostima od početka r-tog klatna i sa različitim koeficientima gušenja, dobili samo jednu prigušnicu pričvršćenu za konac r-tog klatna na udaljenosti H_r od početka r-tog klatna, a čiji je koeficient gušenja b_r. Prema tome za dvostruku Rayleigh-evu funkciju rasipanja r-te materijalne tačke dobijamo nov izraz

(1.7) $$2\,\Phi^{(r)} = 2\,\Phi^{(r-1)} + b_r H_r^2 \dot{\varphi}_r^2 .$$

Potencijalna energija r-te materijalne tačke je

(1.8) $$E_p^{(r)} = E_p^{(r-1)} + g\, m_r (h_{r-1} + h_r) + \sum_{q=1}^{j_r'} c_{rq} X_{rq}^2 ,$$

gde smo sa h_{r-1}, odnosno h_r (sl.2) obeležili podizanje r-1-ve odnosno r-te materijalne tačke, a sa X_{rq} pomeranje odgovarajuće opruge mereno duž horizontale. Ovde smo na izraz dat u [87,str.153-154] dodali sabirak koji potiče od dejstva opruga. Pošto su u pitanju male oscilacije, $h_r \approx \frac{1}{2} l_r \varphi_r^2$, to postupnim izračunavanjem podizanja h_1, pa h_2, ..., pa h_{r-1}, dobijamo za dvostruku potencijalnu energiju r-te materijalne tačke

(1.9) $$2\,E_p^{(r)} = 2\,E_p^{(r-1)} + g\, m_r \sum_{n=1}^{r} l_n \varphi_n^2 + \sum_{q=1}^{j_r'} c_{rq} X_{rq}^2 ,$$

gde pomeranje X_{rq} dobijamo iz (1.3) kada pretpostavimo da, kao što je to u našem slučaju, postoji po j_r' opruga privezanih za konac r-tog klatna, tojest kada u obrascu (1.3) umesto indeksa r stavimo rq, dakle,

(1.10) $$X_{rq} = \sum_{n=1}^{r-1} l_n \varphi_n + h_{rq} \varphi_{rq} , \quad (q=1,2,\ldots,j_r') ,$$

gde smo umesto H_{rq} stavili h_{rq}. Sada ćemo da izvršimo redukciju kao i kod prigušnica. Treći sabirak sa desne strane izraza (1.9) ćemo da pomnožimo i da podelimo sa h_r^2. Uvešćemo i nove oznake

(1.11) $$c_r \varphi_r^2 = \sum_{q=1}^{j_r'} c_{rq} \left(\frac{X_{rq}}{h_r}\right)^2 ,$$

gde smo sa c_r označili REDUKOVANU KRUTOST, a sa h_r REDUKOVANU UDALJENOST tačke vezivanja REDUKOVANE OPRUGE od početka r-tog klatna. I ovde smo umesto

...uga pričvršćenih za konac r-tog klatna na različitim udaljenostima od ...ka tog klatna i sa različitim krutostima, dobili samo jednu oprugu pri...u za nit r-tog klatna na udaljenosti h_r od početka r-tog klatna, a čija ...utost c_r. Konačan oblik izraza za dvostruku potencijalnu energiju r-te ...ijalne tačke je

$$2\, E_p^{(r)} = 2\, E_p^{(r-1)} + g\, m_r \sum_{n=1}^{r} l_n\, \varphi_n^2 + c_r\, h_r^2\, \varphi_r^2 \; .$$

Kao što su kod konzervativnog sistema materijalnih tačaka koji vrši ...oscilacije oko položaja stabilne ravnoteže [37,str.178], [38,str.423], ...su i kod posmatranog sistema matematičkih klatna sa redukovanim prigu...ima i redukovanim oprugama dvostruka kinetička i dvostruka potencijalna ...ija sistema homogene kvadratne forme generalisanih brzina $(\dot{q}_p)$, odnosno ...alisanih koordinata (q_p), pa mogu da se napišu u obliku [91,str.334]

$$2\, E_k = \sum_{p=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} a_{pr}\, \dot{q}_p\, \dot{q}_r = (\dot{q})\, \mathbb{A}\, \{\dot{q}\} \; ,$$

$$2\, E_p = \sum_{p=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} c_{pr}\, q_p\, q_r = (q)\, \mathbb{C}\, \{q\} \; .$$

Dvostruka Rayleigh-eva funkcija rasipanja Φ [5,str.190] u slučaju ...og prigušivanja - rasipanja energije - može isto tako da se napiše u ob...homogene kvadratne forme generalisanih brzina [38,str.429]

$$2\, \Phi = \sum_{p=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} b_{pr}\, \dot{q}_p\, \dot{q}_r = (\dot{q})\, \mathbb{B}\, \{\dot{q}\} \; .$$

(a_{pr}) je inerciska matrica,

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_g + \mathbb{C}_c$$

...zielastična matrica. Prvi sabirak $\mathbb{C}_g = (c_{gpr})$ potiče od dejstva teže, ...gi $\mathbb{C}_c = (c_{cpr})$ od uticaja opruga na oscilatorni sistem. $\mathbb{B} = (b_{pr})$ je ...ca rasipanja. $a_{pr} = a_{rp}$ su inerciski, $c_{gpr} = c_{grp}$, odnosno $c_{cpr} = c_{crp}$ su ...elastični koeficienti, a $b_{pr} = b_{rp}$ su koeficienti srazmere otporne sile. (q) su matrice vrste, a $\{\dot{q}\}$, $\{q\}$ matrice stupci generalisanih brzina, ...no koordinata. Kvadratna forma $2\, E_k$ je prema svojoj fizičkoj prirodi ...pozitivno definitna, tj. $2\, E_k$ je pozitivna, a nuli je jednaka samo u ...ju potpunog mirovanja $(\dot{q}) = o$ [38,str.423]. Kvadratne forme koje odgo...u matricama $\mathbb{C}_g$ i $\mathbb{C}_c$ su, ako se za koordinatni početak izabere $(q) = o$, ...ivno definitne. One su semidefinitne samo onda kada nedostaju sile za ...ine izbačaje q_p [38,str.423]. Sličan slučaj je i sa matricom $\mathbb{B}$. Odgo...juća kvadratna forma je pozitivna u slučaju pravog prigušivanja - ra...nja energije - dok je semidefinitna samo onda kada nedostaju pojedine ...ušnice [38,str.429]. Sve ove matrice su reda i koliko i sistem ima ...peni slobode oscilovanja.

Lagrange-eve diferencijalne jednačine druge vrste za ovakav oscilatorni sistem izgledaju ovako

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial E_k}{\partial q_r} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial E_p}{\partial q_r} = o \, . \tag{1.17}$$

Primenimo li ove jednačine dobijamo sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima

$$\mathbb{A}\,\{\ddot{q}\} + \mathbb{B}\,\{\dot{q}\} + \mathbb{C}\,\{q\} = \{o\} \, , \tag{1.18}$$

gde matrice imaju ovaj oblik

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} l_1^2 \sum\limits_{p=1}^{i} m_p & l_1 l_2 \sum\limits_{p=2}^{i} m_p & l_1 l_3 \sum\limits_{p=3}^{i} m_p & \cdots & l_1 l_i m_i \\ l_1 l_2 \sum\limits_{p=2}^{i} m_p & l_2^2 \sum\limits_{p=2}^{i} m_p & l_2 l_3 \sum\limits_{p=3}^{i} m_p & \cdots & l_2 l_i m_i \\ l_1 l_3 \sum\limits_{p=3}^{i} m_p & l_2 l_3 \sum\limits_{p=3}^{i} m_p & l_3^2 \sum\limits_{p=3}^{i} m_p & \cdots & l_3 l_i m_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1 l_i m_i & l_2 l_i m_i & l_3 l_i m_i & \cdots & l_i^2 m_i \end{pmatrix} , \tag{1.19}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_1 H_1^2 + l_1^2 \sum\limits_{p=2}^{i} b_p & l_1 (b_2 H_2 + l_2 \sum\limits_{p=3}^{i} b_p) & l_1 (b_3 H_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} b_p) & \cdots & l_1 b_i H_i \\ l_1 (b_2 H_2 + l_2 \sum\limits_{p=3}^{i} b_p) & b_2 H_2^2 + l_2^2 \sum\limits_{p=3}^{i} b_p & l_2 (b_3 H_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} b_p) & \cdots & l_2 b_i H_i \\ l_1 (b_3 H_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} b_p) & l_2 (b_3 H_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} b_p) & b_3 H_3^2 + l_3^2 \sum\limits_{p=4}^{i} b_p & \cdots & l_3 b_i H_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1 b_i H_i & l_2 b_i H_i & l_3 b_i H_i & \cdots & b_i H_i^2 \end{pmatrix} \tag{1.2o}$$

$$\mathbb{C}_g = g \begin{pmatrix} l_1 \sum\limits_{p=1}^{i} m_p & & & \\ & l_2 \sum\limits_{p=2}^{i} m_p & & \\ & & l_3 \sum\limits_{p=3}^{i} m_p & \\ & & & \ddots \\ & & & & l_i m_i \end{pmatrix} , \tag{1.21}$$

$$\mathbb{C}_c = \begin{pmatrix} c_1 h_1^2 + l_1^2 \sum\limits_{p=2}^{i} c_p & l_1 (c_2 h_2 + l_2 \sum\limits_{p=3}^{i} c_p) & l_1 (c_3 h_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} c_p) & \cdots & l_1 c_i h_i \\ l_1 (c_2 h_2 + l_2 \sum\limits_{p=3}^{i} c_p) & c_2 h_2^2 + l_2^2 \sum\limits_{p=3}^{i} c_p & l_2 (c_3 h_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} c_p) & \cdots & l_2 c_i h_i \\ l_1 (c_3 h_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} c_p) & l_2 (c_3 h_3 + l_3 \sum\limits_{p=4}^{i} c_p) & c_3 h_3^2 + l_3^2 \sum\limits_{p=4}^{i} c_p & \cdots & l_3 c_i h_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1 c_i h_i & l_2 c_i h_i & l_3 c_i h_i & \cdots & c_i h_i^2 \end{pmatrix} , \tag{1.22}$$

Vidimo da su matrice $\mathbb{B}$ i $\mathbb{C}_c$ potpuno iste po obliku samo što se iza znaka za zbir u pojedinim elementima nalaze veličine c umesto b.

Pretpostavimo li da je rešenje sistema diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima (1.18) dato u obliku

(1.23) $$\{q\} = \{r\}\, e^{ut} ,$$

gde je $\{r\}$ amplitudni vektor, a u sopstvena vrednost, onda dobijamo sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina

(1.24) $$(u^2\, \mathbb{A} + u\, \mathbb{B} + \mathbb{C})\, \{r\} = \{o\} .$$

Uslov da pored trivijalnog rešenja $\{r\} = \{o\}$ postoje i druga rešenja pretstavlja karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema

(1.25) $$f(u) = \left|\, u^2\, \mathbb{A} + u\, \mathbb{B} + \mathbb{C} \,\right| = o .$$

1.1.2 Homogen sistem od i matematičkih klatna sa po j_r prigušnica i po j_r' opruga

Kada je sistem homogen, tojest kada su sve mase klatna uzajamno jednake, $m_r = m$, $(r=1,2,\dots,i)$, sve dužine klatna uzajamno jednake, $l_r = l$, $(r=1,2,\dots,i)$, sve redukovane udaljenosti tačaka vezivanja redukovanih prigušnica od početka pojedinih klatna uzajamno jednake, $H_r = H$, $(r=1,2,\dots,i)$, sve redukovane udaljenosti tačaka vezivanja redukovanih opruga od početka odgovarajućih klatna uzajamno jednake, $h_r = h$, $(r=1,2,\dots,i)$, svi redukovani koeficienti gušenja uzajamno jednaki, $b_r = b$, $(r=1,2,\dots,i)$, sve redukovane krutosti opruga uzajamno jednake, $c_r = c$, $(r=1,2,\dots,i)$, problem se uprošćava, jer elastodinamičke matrice $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}_g$, $\mathbb{C}_c$ sada postaju prostije $\mathbb{N}_i$, $\mathbb{S}_i$, $\mathbb{D}_i$, $\mathbb{V}_i$, gde smo sa indeksima označili red odgovarajuće matrice. Karakteristična jednačina (1.25) sada postaje

(1.26) $$f_i(u) = \left|\, u^2\mathbb{N}_i + \delta\, u\, \mathbb{S}_i + \omega^2\, \mathbb{D}_i + \tilde{\omega}^2\, \mathbb{V}_i \,\right| = o ,$$

gde smo uveli oznake

(1.27) $$\delta = \frac{b}{m} , \quad \omega^2 = \frac{g}{l} , \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{c}{m} ,$$

dok su nove matrice

(1.28) $$\mathbb{N}_i = \begin{pmatrix} i & i-1 & i-2 & \dots & 2 & 1 \\ i-1 & i-1 & i-2 & \dots & 2 & 1 \\ i-2 & i-2 & i-2 & \dots & 2 & 1 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbb{D}_i = \begin{pmatrix} i & & & & \\ & i-1 & & & \\ & & i-2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$(1.29)\qquad \mathcal{S}_i = \begin{pmatrix} s^2+i-1 & s+i-2 & s+i-3 & \dots & s+1 & s \\ s+i-2 & s^2+i-2 & s+i-3 & \dots & s+1 & s \\ s+i-3 & s+i-3 & s^2+i-3 & \dots & s+1 & s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ s+1 & s+1 & s+1 & \dots & s^2+1 & s \\ s & s & s & \dots & s & s^2 \end{pmatrix},$$

gde je uvedena nova oznaka

$$(1.30)\qquad s = \frac{H}{l},$$

$$(1.31)\qquad \mathbb{V}_i = \begin{pmatrix} v^2+i-1 & v+i-2 & v+i-3 & \dots & v+1 & v \\ v+i-2 & v^2+i-2 & v+i-3 & \dots & v+1 & v \\ v+i-3 & v+i-3 & v^2+i-3 & \dots & v+1 & v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ v+1 & v+1 & v+1 & \dots & v^2+1 & v \\ v & v & v & \dots & v & v^2 \end{pmatrix},$$

sa oznakom

$$(1.32)\qquad v = \frac{h}{l}.$$

U razvijenom obliku determinanta (1.26) izgleda ovako

$$)\quad f_i(u) = \begin{vmatrix} iu^2+\delta(s^2+i-1)u+\omega^2 i+\tilde{\omega}^2(v^2+i-1) & (i-1)u^2+\delta(s+i-2)u+\tilde{\omega}^2(v+i-2) \\ (i-1)u^2+\delta(s+i-2)u+\tilde{\omega}^2(v+i-2) & (i-1)u^2+\delta(s^2+i-2)u+\omega^2(i-1)+\tilde{\omega}^2(v^2+i-2) \\ (i-2)u^2+\delta(s+i-3)u+\tilde{\omega}^2(v+i-3) & (i-2)u^2+\delta(s+i-3)u+\tilde{\omega}^2(v+i-3) \\ \cdot & \cdot \\ 2u^2+\delta(s+1)u+\tilde{\omega}^2(v+1) & 2u^2+\delta(s+1)u+\tilde{\omega}^2(v+1) \\ u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2 v & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2 v \end{vmatrix}$$

Da bismo dobili pogodniji oblik, oduzećeme počev od najgornje vrste, nižu od susedne iznad nje, [92,str.278], pa će da bude

$$f_i(u) = \begin{vmatrix} u^2+\delta(s^2-s+1)u+\omega^2 i+\tilde{\omega}^2(v^2-v+1) & \delta(s-s^2)u-\omega^2(i-1)+\tilde{\omega}^2(v-v^2) \\ u^2+\delta u+\tilde{\omega}^2 & u^2+\delta(s^2-s+1)u+\omega^2(i-1)+\tilde{\omega}^2(v^2-v+1) \\ u^2+\delta u+\tilde{\omega}^2 & u^2+\delta u+\tilde{\omega}^2 \\ \cdot & \cdot \\ u^2+\delta u+\tilde{\omega}^2 & u^2+\delta u+\tilde{\omega}^2 \\ u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2 v & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2 v \end{vmatrix}$$

Sada ćemo slično da uradimo i sa stupcima. Počev od prvog sa leve strane ćemo da oduzmemo susedni desni stubac. Tako ćemo da postupimo sve do

$$
\begin{array}{lcc|c|}
)u^2+\delta(s+i-3)u+\tilde{\omega}^2(v+i-3) & \cdots & 2u^2+\delta(s+1)u+\tilde{\omega}^2(v+1) & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v \\
)u^2+\delta(s+i-3)u+\tilde{\omega}^2(v+i-3) & \cdots & 2u^2+\delta(s+1)u+\tilde{\omega}^2(v+1) & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v \\
(s^2+i-3)u+\omega^2(i-2)+\tilde{\omega}^2(v^2+i-3) & \cdots & 2u^2+\delta(s+1)u+\tilde{\omega}^2(v+1) & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v \\
 & \cdots & & \\
2u^2+\delta(s+1)u+\tilde{\omega}^2(v+1) & \cdots & 2u^2+\delta(s^2+1)u+2\omega^2+\tilde{\omega}^2(v^2+1) & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v \\
u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v & \cdots & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v & u^2+\delta s^2u+\omega^2+\tilde{\omega}^2v^2
\end{array} = 0
$$

(-)

$$
\begin{array}{lcc|c|}
 & \cdots & 0 & 0 \\
2)+\tilde{\omega}^2(v-v^2) & \cdots & 0 & 0 \\
-2)+\tilde{\omega}^2(v^2-v+1) & \cdots & 0 & 0 \\
 & \cdots & . & . \\
\tilde{\omega}^2 & \cdots & u^2+\delta(s^2-s+1)u+2\omega^2+\tilde{\omega}^2(v^2-v+1) & \delta(s-s^2)u-\omega^2+\tilde{\omega}^2(v-v^2) \\
\tilde{\omega}^2v & \cdots & u^2+\delta su+\tilde{\omega}^2v & u^2+\delta s^2u+\omega^2+\tilde{\omega}^2v^2
\end{array} = 0.
$$

(-)

pretposlednjeg stupca sa desne strane.

$$(1.34)\quad f_i(u)=\begin{vmatrix} u^2+\delta(2s^2-2s+1)u+\omega^2(2i-1)+\tilde\omega^2(2v^2-2v+1) & \delta s(1-s)u-\omega^2(i-1)+\tilde\omega^2 \\ \delta s(1-s)u-\omega^2(i-1)+\tilde\omega^2 v(1-v) & u^2+\delta(2s^2-2s+1)u+\omega^2(2i-3 \\ o & \delta s(1-s)u-\omega^2(i-2)+\tilde\omega^2 \\ \cdot & \cdot \\ o & o \\ o & o \end{vmatrix}$$

Dobijena determinanta ima elemente različite od nule samo na glavnoj diagonali i na dvema susednim, uporednim diagonalama. Jedna od njih je iznad, a druga ispod glavne diagonale. Svi ostali elementi su jednaki nuli. Dakle, u svakoj vrsti, izuzev prve i poslednje, postoje samo po tri elementa različita od nule, a koji se nalaze na spomenutim diagonalama. U prvoj i poslednjoj vrsti postoje samo po dva elementa različita od nule na istim diagonalama.

Sada karakteristična jednačina sistema može da se napiše u ovom obliku

$$(1.35)\qquad f_i(y) = \left|\, y^2\, \mathbb{I}_i + \alpha\, y\, \mathbb{S}_i^* + \mathbb{J}_i + \beta\, \mathbb{V}_i^* \,\right| = o\ ,$$

sa novim oznakama

$$(1.36)\qquad \alpha = \frac{\delta}{\omega}\ , \qquad \beta = \left(\frac{\tilde\omega}{\omega}\right)^2\ ,$$

novom sopstvenom vrednosti

$$(1.37)\qquad y = \frac{u}{\omega}\ ,$$

i novim matricama

$$(1.38)\qquad \mathbb{I}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1\ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbb{J}_i = \begin{pmatrix} 2i-1 & -(i-1) & & & \\ -(i-1) & 2i-3 & -(i-2) & & \\ & -(i-2) & 2i-5 \ddots & & \\ & & & 3 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(1.39)\qquad \mathbb{S}_i^* = \begin{pmatrix} 2s^2-2s+1 & s(1-s) & & & \\ s(1-s) & 2s^2-2s+1 & s(1-s) & & \\ & s(1-s) & 2s^2-2s+1 \ddots & & \\ & & & 2s^2-2s+1 & s(1-s) \\ & & & s(1-s) & s^2 \end{pmatrix},$$

$$(1.40)\qquad \mathbb{V}_i^* = \begin{pmatrix} 2v^2-2v+1 & v(1-v) & & & \\ v(1-v) & 2v^2-2v+1 & v(1-v) & & \\ & v(1-v) & 2v^2-2v+1 \ddots & & \\ & & & 2v^2-2v+1 & v(1-v) \\ & & & v(1-v) & v^2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
v(1-v) & 0 & \cdots & 0 & \\
+\tilde{\omega}^2(\ldots^2-2v+1) & \delta(1-s)u-\omega^2(i-2)+\tilde{\omega}^2v(1-v) & \cdots & 0 & 0 \\
v(1-v) & u^2+\delta(2s^2-2s+1)u+\omega^2(2i-5)+\tilde{\omega}^2(2v^2-2v+1) & \cdots & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
 & 0 & \cdots & u^2+\delta(2s^2-2s+1)u+3\omega^2+\tilde{\omega}^2(2v^2-2v+1) & \delta s(1-s)u-\omega^2+\tilde{\omega}^2v(1-v) \\
 & 0 & \cdots & \delta s(1-s)u-\omega^2+\tilde{\omega}^2v(1-v) & u^2+\delta s^2u+\omega^2+\tilde{\omega}^2v^2
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Matrica I_i je jedinična matrica dok su J_i, S_i^*, V_i^* Jakobi-eve matrice reda i.

Postupnim razvijanjem karakteristične jednačine (1.35) dobijamo ovaj rekurzivni obrazac

(1.41)
$$f_i(y) = [y^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+2i-1+\beta(2v^2-2v+1)]\ f_{i-1}(y) - \\ - [\alpha s(1-s)y-(i-1)+\beta v(1-v)]^2\ f_{i-2}(y) = o .$$

Ovaj izraz nam omogućava neposredno izračunavanje karakterističnog polinoma bez razvijanja daterminante.

1.1.3 Homogen sistem od i matematičkih klatna sa po j_r prigušnica i po j_r' opruga redukovanih na same materijalne tačke

Pretpostavimo li da smo prigušnice i opruge redukovali na same materijalne tačke, drugim rečima da smo drugi sabirak u izrazu (1.2) i treći sabirak u (1.9) podelili i pomnožili sa l_r, $(r=1,2,\dots,i)$, dobili bismo umesto (1.6) i (1.11) ove izraze

(1.42)
$$b_r^*\ \dot{\varphi}_r^2 = \sum_{q=1}^{j_r} b_{rq}\ \left(\frac{w_{rq}}{l_r}\right)^2 ,$$

(1.43)
$$c_r^*\ \varphi_r^2 = \sum_{q=1}^{j_r'} c_{rq}\ \left(\frac{X_{rq}}{l_r}\right)^2 .$$

Na ovaj način bismo sveli sistem sa j_r različitih prigušnica pričvršćenih na različitim udaljenostima od početka r-tog klatna za njegov konac i sa različitim koeficientima gušenja, i sa j_r' opruga pričvršćenih za nit r-tog klatna na različitim udaljenostima od početka tog klatna a sa različitim krutostima, na sistem koji se sastoji od samo jedne redukovane prigušnice, čiji je koeficient gušenja b_r, i od jedne redukovane opruge krutosti c_r, vezane kao i redukovana prigušnica za samo r-tu materijalnu tačku. U ovom slučaju matrice (1.2o) i (1.22) dobijaju potpuno isti oblik koji ima matrica (1.19), samo što se iza znaka za zbir u njihovim elementima umesto masa m_r nalaze redukovani koeficienti gušenja b_r^*, odnosno redukovane krutosti c_r^*.

Uzmimo sada da je takav redukovani sistem homogen, tojest da su sve mase klatna uzajamno jednake, $m_r = m$, sve dužine klatna uzajamno jednake, $l_r = l$, svi redukovani koeficienti gušenja uzajamno jednaki, $b_r^* = b$, sve redukovane krutosti opruga uzajamno jednake, $c_r^* = c$, $(r=1,2,\dots,i)$. Tada dobijamo iz (1.3o) $s = 1$, a iz (1.32) $v = 1$, pa matrice S_i^* i V_i^* postaju jedinične matrice, $S_i^* = I_i$, $V_i^* = I_i$, a karakteristična jednačina takvog sistema postaje

(1.44)
$$f_i(y_1) = \left| y_1\ I_i + J_i \right| = o ,$$

gde smo uveli novu sopstvenu vrednost

(1.45) $$y_1 = \frac{u^2 + \delta u + \bar{\omega}^2}{\omega^2} .$$

Karakteristična jednačina (1.44) izgleda ovako u obliku determinante

(1.46) $$f_i(y_1) = \begin{vmatrix} y_1+2i-1 & -(i-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(i-1) & y_1+2i-3 & -(i-2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -(i-2) & y_1+2i-5 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_1+3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & y_1+1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

dok je odgovarajući rekurzivni obrazac

(1.47) $$f_i(y_1) = (y_1+2i-1)\, f_{i-1}(y_1) - (i-1)^2\, f_{i-2}(y_1) = 0 ,$$

gde je po definiciji $f_0(y_1) = 1$.

Pomoću obrasca (1.47) lako se izračunavaju karakteristični polinomi. Obeležimo koeficiente tih polinoma sa B_r onda nam Tablica 1 daje njihove vrednosti za sisteme sa 1, 2, ..., 10 klatna.

T A B L I C A 1

	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
								1	[illegible]
							1	4	[illegible]
						1	9	18	[illegible]
					1	16	72	96	2[illegible]
				1	25	200	600	600	12[illegible]
			1	36	450	2400	5400	4320	72[illegible]
		1	49	882	7350	29400	52920	35280	504[illegible]
	1	64	1568	18816	117600	376320	564480	322560	4032[illegible]
[illegible]	81	2592	42336	381024	1905120	5080320	6531840	3265920	36288[illegible]
[illegible]	4050	86400	1058400	7620480	31752000	72576000	81648000	36288000	362880[illegible]

Koeficienti B_r mogu da se izračunaju pomoću karakterističnih polinoma ili možemo da ih dobijemo i neposredno. Karakteristična jednačina (1.44), odnosno (1.46) može i ovako da se napiše

(1.48) $$f_i(y_1) \equiv P_i(y_1) = \sum_{r=0}^{i} B_{i-r}\, y_1^{i-r} = 0 .$$

Iz Tablice 1 je očigledno da je $B_i^{(i)} = 1$, $B_{i-1}^{(i)} = i^2$, $B_o^{(i)} = i!$, gde je ...ložiocu dat broj klatna u sistemu, dok indeks označava redni broj. Medju- ...opšta veza izmedju koeficienata može da se napiše u obliku rekurzivnog ...asca

$$B_{i-r}^{(i)} = B_{i-r-1}^{(i-1)} + (2i-1)\, B_{i-r}^{(i-1)} - (i-1)^2\, B_{i-r}^{(i-2)} , \qquad (1.49)$$

...smo sa r obeležili redni broj koeficienta karakterističnog polinoma, $r=o, ..., i$.

Ako sa $S_r^{(i)}$ obeležimo skalare Jakobieve matrice J_i date sa (1.38) ... zbog (1.44) postoji ova veza izmedju njih i koeficienata karakterističnog ...polinoma (1.48)

$$B_{i-r}^{(i)} = S_r^{(i)} . \qquad (1.50)$$

...a za rekurzivni obrazac za skalare Jakobieve matrice dobijamo

$$S_r^{(i)} = S_{r-1}^{(i-1)} + (2i-1)\, S_r^{(i-1)} - (i-1)^2\, S_r^{(i-2)} . \qquad (1.51)$$

Odavde sledi da je [87,str.162] u opštem slučaju

$$S_r^{(i)} = r!\, \binom{i}{r}^2 = \binom{i}{r} \frac{i!}{(i-r)!} . \qquad (1.52)$$

...ma tome karakteristični polinom (1.48) sada postaje

$$P_i(y_1) = \sum_{r=o}^{i} r!\, \binom{i}{r}^2 y_1^{i-r} = o , \qquad (1.53)$$

$$P_i(y_1) = \sum_{r=o}^{i} \frac{i!}{(i-r)!} \binom{i}{r} y_1^{i-r} = o . \qquad (1.54)$$

Ovaj polinom pretstavlja osnovni Laguerre-ov polinom [43,str.45] kod ...je [73,str.134T] umesto promenljive y_1 stavljena njena negativna vred... $-y_1$.

Stavimo li da je $P_i(y_1) = w$, onda taj polinom zadovoljava diferenci...nu jednačinu drugog reda

$$y_1 \frac{d^2 w}{dy_1^2} + (1 + y_1) \frac{dw}{dy_1} - i\, w = o . \qquad (1.55)$$

...enimo li u ovu diferencijalnu jednačinu $y_1 = -t$, dobijamo posle sredjiva... ...novu diferencijalnu jednačinu [36,obrazac (5.1.2)]

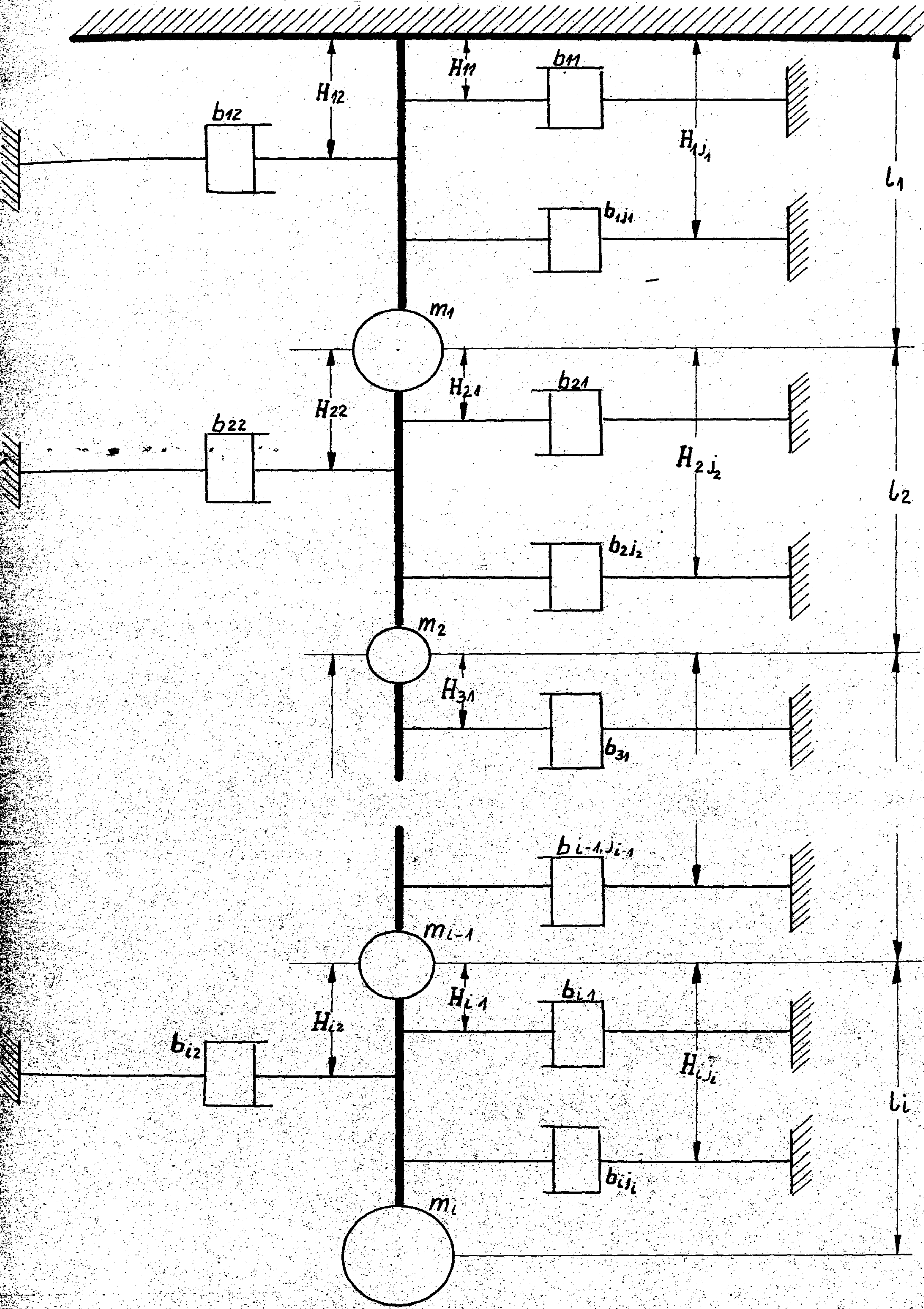
$$t \frac{d^2 w}{dt^2} + (1 - t) \frac{dw}{dt} + i\, w = o ,$$

...a se od citirane, za $\alpha = o$, razlikuje samo u oznakama.

Prema tome ako sa $L_i(y)$ obeležimo Lagerov polinom i-tog reda sa pro...nljivom y, onda u našem slučaju važi

$$\underline{\underline{f_i(y_1) = L_i(-y_1)}} . \qquad (1.56)$$

Specijalan slučaj i matematičkih klatna sa po jednom prigušnicom i ...jednom oprugom je obradjen u radu [73,str.T133-T135].


H12
H11
b11
b12
H1j1
b1j1
l1
m1
H21
b21
H22
b22
H2j2
l2
b2j2
m2
H31
b31
bi-1,ji-1
mi-1
Hi1
bi1
Hi2
bi2
Hiji
li
biji
mi

SLIKA. 3.

1.1.4 – i matematičkih klatna sa po j_r prigušnica

Neka je dat oscilatorni sistem koji je jednak sistemu prikazanom u 1.1.1 bez opruga (sl.3).

Dvostruka kinetička energija ovakvog oscilatornog sistema je data u obliku (1.13). Odgovarajuća dvostruka funkcija rasipanja je data sa (1.15), dok je dvostruka potencijalna energija

(1.57) $$2\,E_p = (q)\,\mathbb{C}_g\,\{q\}\,.$$

Primena Lagranževih diferencijalnih jednačina druge vrste (1.17) daje sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima

(1.58) $$\mathbb{A}\{\ddot{q}\} + \mathbb{B}\,\{\dot{q}\} + \mathbb{C}_g\,\{q\} = \{o\}\,,$$

dok je karakteristična jednačina posmatranog oscilatornog sistema

(1.59) $$^1f_i(u) = \left|\, u^2\,\mathbb{A} + u\,\mathbb{B} + \mathbb{C}_g \,\right| = o\,,$$

gde smo koristili matrice (1.19), (1.2o) i (1.21).

Napomenimo da smo i kod ovog sistema izvršili redukciju j_r prigušnica privezanih za svaku nit klatna, na samo jednu prigušnicu čiji je redukovani koeficient gušenja b_r, a koja je za konac r-tog klatna pričvršćena na udaljenosti H_r od početka tog klatna, $(r=1,2,\ldots,i)$.

1.1.5 Homogen sistem od i matematičkih klatna sa po j_r prigušnica

Prema definiciji homogenog sistema datoj u 1.1.2 dobijamo iz (1.26), odnosno (1.59) karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema

(1.60) $$^1f_i(u) = \left|\, u^2\,\mathbb{N}_i + \delta\,u\,\mathbb{S}_i + \omega^2\,\mathbb{D}_i \,\right| = o\,,$$

gde smo koristili oznake (1.27) i matrice (1.28) i (1.29).

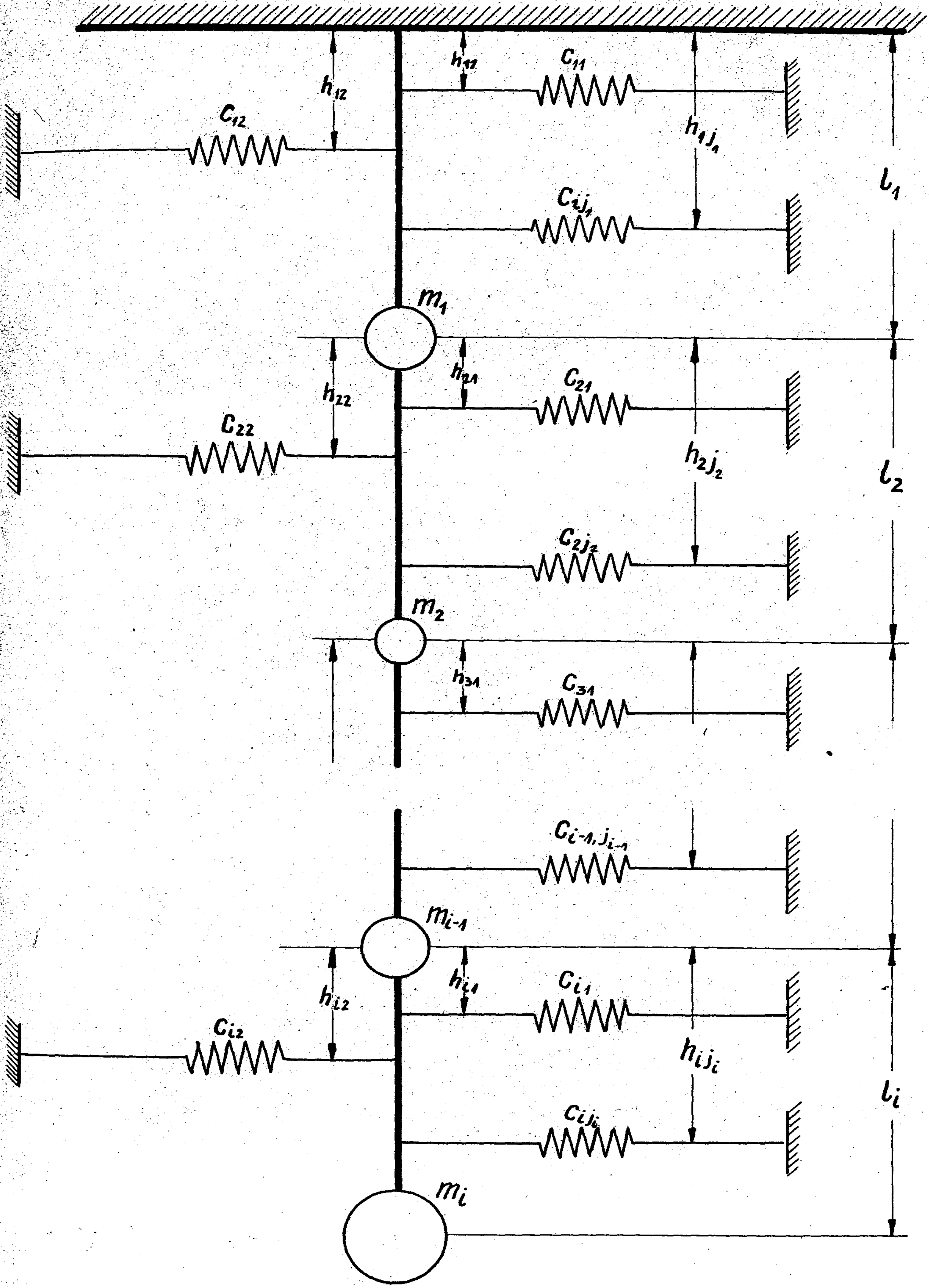
Oduzećemo, kao i u 1.1.2, vrstu od vrste i stubac od stupca, pa karakteristična jednačina dobija nov oblik

(1.61) $$^1f_i(y) = \left|\, y^2\,\mathbb{I}_i + \alpha\,y\,\mathbb{S}_i^* + \mathbb{J}_i \,\right| = o\,,$$

gde smo upotrebili sopstvenu vrednost (1.37), oznaku (1.36) i matrice (1.38) i (1.39).

Postupno razvijanje determinante (1.61) nam daje rekurzivni obrazac za izračunavanje karakterističnih polinoma

(1.62) $$^1f_i(y) = \left[y^2+\alpha(2s^2-2s+1)y + 2i - 1\right]\,{}^1f_{i-1}(y) - \left[\alpha s(1-s)y - (i-1)\right]^2\,{}^1f_{i-2}(y) = o\,.$$



h_{12}
h_{11}
C_{11}
C_{12}
h_{1j_1}
l_1
C_{ij_1}
m_1
h_{21}
C_{21}
h_{22}
C_{22}
h_{2j_2}
l_2
C_{2j_2}
m_2
h_{31}
C_{31}
$C_{i-1,j_{i-1}}$
m_{i-1}
h_{i1}
C_{i1}
h_{i2}
C_{i2}
h_{ij_i}
l_i
C_{ij_i}
m_i

SLIKA. 4.

1.1.6 Homogen sistem od i matematičkih klatna sa po j_r prigušnica redukovanih na same materijalne tačke

Pretpostavimo li da smo redukciju prigušnica izvršili na same materijalne tačke, kao u 1.1.3, karakteristična jednačina takvog sistema se, u odnosu na ranije posmatrane sisteme, još više uprošćava i postaje

(1.63) $$ {}^1f_i(y_2) = \left| y_2 \mathbb{I}_i + \mathbb{J}_i \right| = o , $$

gde smo uveli novu sopstvenu vrednost

(1.64) $$ y_2 = \frac{u^2 + \delta u}{\omega^2} . $$

Rekurzivni obrazac za karakteristične polinome ima isti oblik kao i (1.47) samo za novu sopstvenu vrednost y_2

(1.65) $$ {}^1f_i(y_2) = (y_2+2i-1)\ {}^1f_{i-1}(y_2) - (i-1)^2\ {}^1f_{i-2}(y_2) = o . $$

Primenimo li ovde razmatranja iz 1.1.3 zaključili bismo da je

(1.66) $$ \underline{\underline{{}^1f_i(y_2) = L_i(-y_2)}} . $$

Specijalan slučaj i matematičkih klatna sa po jednom prigušnicom je podrobno obradjen u [73,str.128T-132T].

1.1.7 i matematičkih klatna sa po j_r' opruga

Posmatrani sistem je jednak oscilatornom sistemu koji je prikazan u 1.1.1 bez prigušnica (sl.4).

Kinetička energija ovog oscilatornog sistema se podudara sa onom u 1.1.1 i izražena je u obliku (1.13), a potencijalna energija u obliku (1.14).

Lagranževe diferencijalne jednačine druge vrste (1.17) dovode do sistema diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima

(1.67) $$ \mathbb{A}\ \{\ddot{q}\} + \mathbb{C}\ \{q\} = o . $$

Uslov da odgovarajući sistem algebarskih homogenih jednačina ima i druga rešenja, sem trivijalnog, daje karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema u obliku

(1.68) $$ {}^2f_i(u) = \left| u^2\ \mathbb{A} + \mathbb{C} \right| = o . $$

Napomenimo da smo i kod ovog sistema prethodno izvršili redukciju j_r' opruga privezanih za svaki konac klatna na samo jednu oprugu pričvršćenu za nit svakog klatna, na udaljenosti h_r od početka klatna, a čija je redukovana krutost c_r , $(r=1,2,\ldots,i)$.

1.1.8 Homogen sistem od i matematičkih klatna sa po j_r' opruga

Iskoristimo li definiciju homogenog sistema iz 1.1.2 onda obrazac 26), odnosno (1.68) daje karakterističnu jednačinu ovakvog redukovanog ilatornog sistema u obliku

69) $$ {}^2f_i(u) = \left| u^2\, \mathbb{N}_i + \omega^2\, \mathbb{D}_i + \tilde{\omega}^2\, \mathbb{V}_i \right| = o , $$

smo koristili oznake (1.27) i matrice (1.28), (1.31).

Posle oduzimanja vrsta od vrsta i stubaca od stubaca, kao u 1.1.2, kteristična jednačina postaje

o) $$ {}^2f_i(z) = \left| z\, \mathbb{I}_i + \mathbb{J}_i + \beta\, \mathbb{V}_i^{*} \right| = o , $$

smo upotrebili oznaku (1.36) i uveli novu sopstvenu vrednost

1) $$ z = \left(\frac{u}{\omega}\right)^2 , $$

je sa sopstvenom vrednosti (1.37) vezana ovim izrazom

2) $$ z = y^2 , $$

ristili smo i matrice (1.38), (1.4o).

Determinantu (1.7o) možemo postupno da razvijemo pa da dobijemo re- ivni obrazac za karakteristične polinome

3) $$ {}^2f_i(z) = \left[z + 2i - 1 + \beta(2v^2 - 2v + 1) \right] {}^2f_{i-1}(z) - \left[\beta v(1-v) - (i-1) \right]^2\, {}^2f_{i-2}(z) = o . $$

1.1.9 Homogen sistem od i matematičkih klatna sa po j_r' opruga redukovanih na same materijalne tačke

Ako redukciju opruga izvršimo na same materijalne tačke, kao u 1.1.3, kteristična jednačina ovakvog oscilatornog sistema postaje

4) $$ {}^2f_i(z_1) = \left| z_1\, \mathbb{I}_i + \mathbb{J}_i \right| = o , $$

smo uveli novu sopstvenu vrednost

5) $$ z_1 = \frac{u^2 + \tilde{\omega}^2}{\omega^2} . $$

Karakteristične polinome izračunavamo pomoću rekurzivnog obrasca koji po obliku jednak sa (1.47), odnosno (1.65) samo za sopstvenu vrednost z_1

6) $$ {}^2f_i(z_1) = (z_1 + 2i - 1)\, {}^2f_{i-1}(z_1) - (i-1)^2\, {}^2f_{i-2}(z_1) = o . $$

Podrobno razmatranje kao u 1.1.3 dovodi nas do zaključka

7) $$ \underline{\underline{{}^2f_i(z_1) = L_i(-z_1)}} . $$

Specijalan slučaj i matematičkih klatna sa po jednom oprugom je po- no ispitan u [87, str. 176-179].

1.2 LINIJSKI SISTEMI DUBLETA SA PRIGUŠNICAMA I OPRUGAMA

1.2.1 2i matematičkih klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Dat je nehomogeni oscilatorni sistem koji se po svom sastavu potpuno [p]odara sa sistemom posmatranim u 1.1.1, pošto je izvršena redukcija na po [jed]nu prigušnicu i po jednu oprugu vezanu za svaku nit klatna, jedino se broj [klat]na povećao sa i na 2i.

Prema tome je dvostruka kinetička energija ovog sistema data u mat[ričn]om obliku (1.13), Relijeva funkcija rasipanja sa (1.15), dok je dvostru[ka p]otencijalna energija data sa (1.14) uz napomenu o broju klatna. Tada je [kara]kteristična jednačina posmatranog oscilatornog sistema data sa (1.25).

1.2.2 Homogen sistem od i dubleta sa redukovanim prigušnicama i redukovanim oprugama

DUBLET čine dva matematička klatna u rednoj sprezi. Niti ovih klatna [su ta]nki kruti štapovi zanemarive mase, a na čijim krajevima se nalaze mate[rija]lne tačke. Prva materijalna tačka ima masu M, a druga masu m.

Posmatraćemo male slobodne oscilacije, u vertikalnoj nepomičnoj [ravn]i, sistema koji sačinjavaju i jednakih dubleta u rednoj sprezi, oko ver[tik]alnog stabilnog položaja ravnoteže. Gornji kraj niza je pričvršćen za ne[pomi]čnu tačku, dok donji slobodno visi. Za konac svakog klatna je, u ravni [osc]ilovanja, na redukovanoj udaljenosti H, od početka svakog klatna, pričvr[šće]na po jedna redukovana prigušnica čiji je redukovani koeficient gušenja [b]. Osim toga je za nit svakog klatna privezana, na redukovanoj udaljenosti h [od] početka svakog klatna, po jedna redukovana opruga čija je redukovana kru[tos]t c.

Karakteristična jednačina ovog oscilatornog sistema se dobija iz [jed]načine (1.25), ako joj povisimo red na 2i i ako u nju zamenimo $m_p = M$, $m_r =$ [m,] $l_p = l_r = l$, $H_p = H_r = H$, $h_p = h_r = h$, $b_p = b_r = b$, $c_p = c_r = c$, $(p=1,3,\dots,2i-1; r=$ [2,]$4,\dots,2i)$. Dakle,

$$f_{d2i}(u) = \left| u^2 \mathbb{N}_{d2i} + \delta u\, \mathbb{S}_{d2i} + \omega^2 \mathbb{D}_{d2i} + \tilde{\omega}^2 \mathbb{V}_{d2i} \right| = o, \tag{1.78}$$

[gd]e smo koristili oznake (1.27) i matrice

$$\mathbb{N}_{d2i} = \begin{pmatrix} ik+i & (i-1)k+i & (i-1)k+i-1 & \dots & k+2 & k+1 & 1 \\ (i-1)k+i & (i-1)k+i & (i-1)k+i-1 & \dots & k+2 & k+1 & 1 \\ (i-1)k+i-1 & (i-1)k+i-1 & (i-1)k+i-1 & \dots & k+2 & k+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ k+2 & k+2 & k+2 & \dots & k+2 & k+1 & 1 \\ k+1 & k+1 & k+1 & \dots & k+1 & k+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.79}$$

$$(1.80)\quad \mathbb{D}_{d2i} = \begin{pmatrix} ik+i & & & & & \\ & (i-1)k+i & & & & \\ & & (i-1)k+i-1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & k+2 & \\ & & & & & k+1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

sa oznakom

$$(1.81)\quad k = \frac{M}{m} ,$$

dok se matrice $\mathbb{S}_{d2i}$ i $\mathbb{V}_{d2i}$ dobijaju iz matrica (1.29) i (1.31) kada se u njima i zameni sa 2i. Indeks d označava da se veličine odnose na dublete.

Karakteristična jednačina dobija prostiji oblik ako, kao i ranije, oduzmemo vrste od vrsta i stupce od stubaca. Najzad je

$$(1.82)\quad f_{d2i}(y) = \left| \, y^2 \, \mathbb{K}_{d2i} + \alpha y \mathbb{S}^*_{d2i} + \mathbb{J}_{d2i} + \beta \mathbb{V}^*_{d2i} \, \right| = o ,$$

gde smo koristili oznake (1.36), sopstvenu vrednost (1.37) i matrice

$$(1.83)\quad \mathbb{K}_{d2i} = \begin{pmatrix} k & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & k & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & k & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$(1.84)\quad \mathbb{J}_{d2i} = \begin{pmatrix} (2i-1)k+2i & -[(i-1)k+i] & & & & & \\ -[(i-1)k+i] & (2i-2)k+2i-1 & -[(i-1)k+i-1] & & & & \\ & -[(i-1)k+i-1] & (2i-3)k+2i-2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2k+3 & -(k+1) & \\ & & & & -(k+1) & k+2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

dok se matrice S^*_{d2i} i V^*_{d2i} dobijaju iz matrica (1.39) i (1.40) ako im povisimo red na 2i.

Ako uvedemo novu matricu, koja je kao i (1.84), Jakobi-eva matrica,

$$(1.85)\quad \mathbb{E}_{d2i} = \mathbb{J}_{d2i} + \beta \mathbb{V}^*_{d2i} ,$$

karakteristična jednačina (1.82) dobija prostiji oblik

$$(1.86)\quad f_{d2i}(y) = \left| \, y^2 \mathbb{K}_{d2i} + \alpha \, y \, \mathbb{S}^*_{d2i} + \mathbb{E}_{d2i} \, \right| = o .$$

Postupno razvijanje determinante (1.86) daje rekurzivni obrazac

$$(1.87)\quad \begin{aligned} f_{d2i}(y) &= \{ky^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+\beta(2v^2-2v+1)+(2i-1)k+2i\} \, f_{d,2i-1}(y) - \\ &- \{\alpha s(s-1)y+\beta v(v-1)+(i-1)k+i\}^2 \, f_{d,2i-2}(y) = o , \end{aligned}$$

gde je

$$f_{d,2i-1}(y)=\{y^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+\beta(2v^2-2v+1)+(2i-1)k+2i-1\}\,f_{d,2i-2}(y)-\{\alpha s(s-1)y+\beta v(v-1)+(i-1)k+i-1\}^2\,f_{d,2i-3}(y)=o\,, \tag{1.88}$$

ili, ako uvedemo pojam "najveći ceo broj" [19,str.7], onda izrazi (1.87) i (1.88) mogu sažeto da se napišu ovako

$$f_{d\nu}(y)=\Big[\{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}y^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+\beta(2v^2-2v+1)+(\nu-1)k+\nu\Big]\,f_{d,\nu-1}(y)-\{\alpha s(s-1)y+\beta v(v-1)+[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^2\,f_{d,\nu-2}(y)=o\,,\quad(\nu=1,2,\ldots,2i), \tag{1.89}$$

gde uglaste zagrade, [ ], označavaju najveći ceo broj.

1.2.3 Homogen sistem sastavljen od i dubleta sa redukovanim prigušnicama i redukovanim oprugama pričvršćenim u istim tačkama za niti klatna

Sistem je nešto prostiji od onog u prethodnom odeljku, jer smo pretpostavili da su sve redukovane udaljenosti, kako tačaka vezivanja redukovanih prigušnica tako i tačaka pričvršćenja redukovanih opruga uzajamno jednake, $H = h$. Zbog (1.3o) i (1.32) je $s = v$, pa su i matrice (1.39) i (1.4o), primenjene na ovaj slučaj, uzajamno jednake, $S^{*}_{d2i}= V^{*}_{d2i}$. Zbog toga karakteristična jednačina (1.86) postaje

$$^{1}f_{d2i}(y)=\left|\,y^2\mathbb{K}_{d2i}+(\alpha y+\beta)\,S^{*}_{d2i}+\mathbb{J}_{d2i}\right|=o\,, \tag{1.90}$$

ili ako uvedemo novu matricu

$$G^{*}_{d2i}=(\alpha y+\beta)\,S^{*}_{d2i}\,, \tag{1.91}$$

karakterističnu jednačinu ovog oscilatornog sistema pišemo ovako

$$^{1}f_{d2i}(y)=\left|\,y^2\,\mathbb{K}_{d2i}+G^{*}_{d2i}+\mathbb{J}_{d2i}\right|=o\,. \tag{1.92}$$

Rekurzivni obrasci (1.87), (1.88), (1.89) sada izgledaju ovako

$$^{1}f_{d2i}(y)=\{ky^2+(\alpha y+\beta)(2s^2-2s+1)+(2i-1)k+2i\}\,{}^{1}f_{d,2i-1}(y)-\{(\alpha y+\beta)s(s-1)+(i-1)k+i\}^2\,{}^{1}f_{d,2i-2}(y)=o\,, \tag{1.93}$$

$$^{1}f_{d,2i-1}(y)=\{y^2+(\alpha y+\beta)(2s^2-2s+1)+(2i-1)k+2i-1\}\,{}^{1}f_{d,2i-2}(y)-\{(\alpha y+\beta)s(s-1)+(i-1)k+i-1\}^2\,{}^{1}f_{d,2i-3}(y)=o\,, \tag{1.94}$$

ili

$$^{1}f_{d,\nu}(y)=\Big[\{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}y^2+(\alpha y+\beta)(2s^2-2s+1)+(\nu-1)k+\nu\Big]\,{}^{1}f_{d,\nu-1}(y)-\{(\alpha y+\beta)s(s-1)+[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^2\,{}^{1}f_{d,\nu-2}(y)=o\,,\quad(\nu=1,2,\ldots,2i)\,. \tag{1.95}$$

1.2.4 Homogen sistem sastavljen od i dubleta sa prigušnicama i oprugama redukovanim na same materijalne tačke

U ovome slučaju su zbog (1.30) i (1.32) s = 1 i v = 1, što znači da matrice $\mathbb{S}^{*}_{d2i}$ i $\mathbb{V}^{*}_{d2i}$ postale jedinične matrice, $\mathbb{S}^{*}_{d2i}= \mathbb{I}_{2i}$, $\mathbb{V}^{*}_{d2i}= \mathbb{I}_{2i}$. Pretome je karakteristična jednačina (1.90) dobila ovaj oblik

$$ {}^{1}\tilde{f}_{d2i}(y) = \left| \; y^{2}\,\mathbb{K}_{d2i} + \tilde{\mathbb{C}}_{d2i} + \mathbb{J}_{d2i} \; \right| = 0 \, , \tag{1.96}$$

novom matricom

$$ \tilde{\mathbb{C}}_{d2i} = (\,\alpha\, y + \beta\,)\, \mathbb{I}_{2i} \, , \tag{1.97}$$

su rekurzivni obrasci (1.93), (1.94) i (1.95) postali

$$ {}^{1}\tilde{f}_{d2i}(y) = \{ky^{2}+\alpha y+\beta+(2i-1)k+2i\}\; {}^{1}\tilde{f}_{d,2i-1}(y)-\{(i-1)k+i\}^{2}\; {}^{1}\tilde{f}_{d,2i-2}(y)=0 ,$$

$$ {}^{1}\tilde{f}_{d,2i-1}(y)=\{y^{2}+\alpha y+\beta+(2i-2)k+2i-1\}\; {}^{1}\tilde{f}_{d,2i-2}(y)-\{(i-1)k+i-1\}^{2}\; {}^{1}\tilde{f}_{d,2i-3}(y)=0 ,$$

sažeto

$$ \begin{aligned} {}^{1}_{k}P_{\nu}(y) = &\Big[\{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}y^{2}+\alpha y+\beta+(\nu-1)k+\nu\Big]\; {}^{1}_{k}P_{\nu-1}(y) - \\ &- \{[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^{2}\; {}^{1}_{k}P_{\nu-2}(y) = 0 \, , \qquad (\nu=1,2,\ldots,2i) \, , \end{aligned} \tag{1.98}$$

smo uveli oznaku

$$ {}^{1}_{k}P_{\nu}(y) \equiv {}^{1}\tilde{f}_{d2i}(y) \, . \tag{1.99}$$

Napomenimo da je [74,str.20], sa sopstvenom vrednosti (1.45)

$$ {}^{1}_{1}P_{\nu}(y) = L_{\nu}(-y_{1}) \, . \tag{1.100}$$

1.2.5 Sistem od i dubleta sa redukovanim prigušnicama

Posmatrajmo sistem koji odgovara sistemu datom u 1.2.1 ali bez opruga. Dvostruka kinetička energija ovakvog oscilatornog sistema je data u liku (1.13), odgovarajuća funkcija rasipanja u obliku (1.15), a dvostruka tencijalna energija u obliku (1.57). Primenimo li Lagranževe diferencijaljednačine druge vrste (1.17) dobijamo sistem diferencijalnih jednačina ugog reda sa konstantnim koeficientima (1.58), dok je odgovarajuća karaktetična jednačina (1.59). Napomenimo samo da su sada sve matrice reda 2i koko i sistem ima stepeni slobode, i da svaka prigušnica ustvari pretstavlja dukovanu prigušnicu.

1.2.6 Homogen sistem od i dubleta sa redukovanim prigušnicama

Prema definiciji homogenog sistema sastavljenog od dubleta, datoj u ...2 dobijamo iz (1.59), odnosno (1.78) karakterističnu jednačinu u obliku

(1.1o1) $$ {}^{2}f_{d2i}(u) = \left| u^2 \mathbb{N}_{d2i} + S u\, \mathbb{S}_{d2i} + \omega^2 \mathbb{D}_{d2i} \right| = 0 , $$

...smo koristili oznake (1.27) i matrice (1.79), (1.29), (1.8o), pri čemu ...kod druge povisili red sa i na 2i .

Oduzimanje vrsta od vrsta i stubaca od stubaca daje za izraz (1.1o1)

(1.1o2) $$ {}^{2}f_{d2i}(y) = \left| y^2 \mathbb{K}_{d2i} + \alpha\, y\, \mathbb{S}^{*}_{d2i} + \mathbb{J}_{d2i} \right| = 0 , $$

...smo uzeli sopstvenu vrednost (1.37) i upotrebili oznake (1.36) i matrice ...83), (1.39) reda 2i, (1.84).

Postupno razvijanje determinante (1.1o2) dovodi do rekurzivnog obrasca

(1.1o3) $$ \begin{aligned} {}^{2}f_{d2i}(y) = {} & \{ky^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+(2i-1)k+2i\}\; {}^{2}f_{d,2i-1}(y) - \\ & - \{\alpha s(s-1)y+(i-1)k+i\}^2\; {}^{2}f_{d,2i-2}(y) = 0 , \end{aligned} $$

(1.1o4) $$ \begin{aligned} {}^{2}f_{d,2i-1}(y) = {} & \{y^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+(2i-2)k+2i-1\}\; {}^{2}f_{d,2i-2}(y) - \\ & - \{\alpha s(s-1)y+(i-1)k+i-1\}^2\; {}^{2}f_{d,2i-3}(y) = 0, \end{aligned} $$

... sažeto

(1.1o5) $$ \begin{aligned} {}^{2}f_{d\nu}(y) = {} & \left[\{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}y^2+\alpha(2s^2-2s+1)y+(\nu-1)k+\nu\right]\; {}^{2}f_{d,\nu-1}(y) - \\ & - \{\alpha s(s-1)y+[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^2\; {}^{2}f_{d,\nu-2}(y) = 0, \quad (\nu=1,2,\dots,2i). \end{aligned} $$

1.2.7 Homogen sistem od i dubleta sa prigušnicama redukovanim na same materijalne tačke

Redukujemo li prigušnice na same materijalne tačke, kao u 1.2.4, do...jamo da je karakteristična jednačina

(1.1o6) $$ {}^{2}\tilde{f}_{d2i}(y) = \left| y^2 \mathbb{K}_{d2i} + \alpha\, y\, \mathbb{I}_{2i} + \mathbb{J}_{d2i} \right| = 0 , $$

...rekurzivni obrasci (1.1o3), (1.1o4), (1.1o5) postaju

$$ {}^{2}\tilde{f}_{d2i}(y)=\{ky^2+\alpha y+(2i-1)k+2i\}\; {}^{2}\tilde{f}_{d,2i-1}(y) - \{(i-1)k+i\}^2\; {}^{2}\tilde{f}_{d,2i-2}(y) = 0 , $$

$$ {}^{2}\tilde{f}_{d,2i-1}(y)=\{y^2+\alpha y+(2i-2)k+2i-1\}\; {}^{2}\tilde{f}_{d,2i-2}(y)-\{(i-1)k+i-1\}^2\; {}^{2}\tilde{f}_{d,2i-3}(y) = 0 , $$

...li kraće

(1.1o7) $$ \begin{aligned} {}^{2}_{k}P_{\nu}(y) = {} & \left[\{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}y^2+\alpha y+(\nu-1)k+\nu\right]\; {}^{2}_{k}P_{\nu-1}(y) - \\ & - \{[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^2\; {}^{2}_{k}P_{\nu-2}(y) = 0 , \quad (\nu=1,2,\dots,2i) , \end{aligned} $$

smo koristili oznaku sličnu sa (1.99).

Primetimo da je [74,str.22]

(1.1o8) $$ {}_1^1P_\nu(y) = L_\nu(-y_2) , $$

smo upotrebili sopstvenu vrednost (1.64).

1.2.8 Sistem od i dubleta sa redukovanim oprugama

Posmatraćemo male oscilacije sistema koji je jednak oscilatornom sistemu datom u 1.2.1 ali bez prigušnica.

Dvostruka kinetička energija tog oscilatornog sistema je data u obliku (1.13), a dvostruks potencijalna energija u obliku (1.14) pri čemu su matrice reda 2i.

Lagranževe diferencijalne jednačine druge vrste (1.17) daju sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima (1.67), a odgovarajuća karakteristična jednačina data u obliku (1.68).

1.2.9 Homogen sistem od i dubleta sa redukovanim oprugama

Karakteristična jednačina homogenog sistema sastavljenog od i dubleta sa redukovanim oprugama se dobija iz (1.69), odnosno (1.78) i ona gleda ovako

(1.1o9) $$ {}^3f_{d2i}(u) = \left| u^2\mathbb{N}_{d2i} + \omega^2\mathbb{D}_{d2i} + \tilde{\omega}^2\mathbb{V}_{d2i} \right| = 0 , $$

smo koristili oznake (1.27) i matrice (1.79), (1.8o), (1.31) reda 2i.

Posle oduzimanja vrsta od vrsta i stubaca od stubaca dobijamo karakterističnu jednačinu u obliku

(1.11o) $$ {}^3f_{d2i}(z) = \left| z\,\mathbb{K}_{d2i} + \mathbb{J}_{d2i} + \beta\mathbb{V}^*_{d2i} \right| = 0 , $$

smo koristili oznaku (1.36), sopstvenu vrednost (1.71) i matrice (1.83), (1.84), (1.4o) reda 2i.

Pomoću matrice (1.85) karakteristična jednačina (1.11o) se izražava ovako

(1.111) $$ {}^3f_{d2i}(z) = \left| z\,\mathbb{K}_{d2i} + \mathbb{E}_{d2i} \right| = 0 . $$

Postupnim razvijanje ove determinante dobijamo rekurzivni obrazac

(1.112) $$ \begin{aligned} {}^3f_{d2i}(z) &= \{kz+\beta(2v^2-2v+1)+(2i-1)k+2i\}\ {}^3f_{d,2i-1}(z) - \\ &- \{\beta v(v-1)+(i-1)k+i\}^2\ {}^3f_{d,2i-2}(z) = 0 , \end{aligned} $$

(1.113)
$$ {}^3f_{d,2i-1}(z) = \{z+\beta(2v^2-2v+1)+(2i-2)k+2i-1\}\,{}^3f_{d,2i-2}(z) - $$
$$ - \{\beta v(v-1)+(i-1)k+i-1\}^2\,{}^3f_{d,2i-3}(z) = o\ , $$

(1.114)
$$ {}^3f_{d\nu}(z) = \left[\left\{(k-1)\left(\left[\tfrac{\nu}{2}\right]-\left[\tfrac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}z+\beta(2v^2-2v+1)+(\nu-1)k+\nu\right]\,{}^3f_{d,\nu-1}(z) - $$
$$ - \left\{\beta v(v-1)+\left[\tfrac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\tfrac{\nu}{2}\right]\right\}^2\,{}^3f_{d,\nu-2}(z) = o\ ,\quad (\nu=1,2,\ldots,2i). $$

1.2.10 Homogen sistem od i dubleta sa oprugama redukovanim na same materijalne tačke

Izvršimo li redukciju opruga na same materijalne tačke, za karakterističnu jednačinu takvog oscilatornog sistema dobijamo ovaj izraz

(1.115)
$$ {}^3\tilde{f}_{d2i}(z) = \left|\, z\,\mathbb{K}_{d2i} + \tilde{\mathbb{E}}_{d2i}\,\right| = o\ , $$

smo uveli novu matricu

(1.116)
$$ \tilde{\mathbb{E}}_{d2i} = \mathbb{J}_{d2i} + \beta\,\mathbb{I}_{2i}\ . $$

Ako razvijemo determinantu (1.115) dobijamo ove rekurzivne obrasce

$$ {}^3\tilde{f}_{d2i}(z) = \{kz+\beta+(2i-1)k+2i\}\,{}^3\tilde{f}_{d,2i-1}(z)-\{(i-1)k+i\}^2\,{}^3\tilde{f}_{d,2i-2}(z) = o\ , $$

$$ {}^3\tilde{f}_{d,2i-1}(z)=\{z+\beta+(2i-2)k+2i-1\}\,{}^3\tilde{f}_{d,2i-2}(z)-\{(i-1)k+i-1\}^2\,{}^3\tilde{f}_{d,2i-3}(z) = o\ , $$

$$ {}^3_kP_\nu(z) = \left[\left\{(k-1)\left(\left[\tfrac{\nu}{2}\right]-\left[\tfrac{\nu-1}{2}\right]\right)+1\right\}z+\beta+(\nu-1)k+\nu\right]\,{}^3_kP_{\nu-1}(z) - $$
$$ - \left\{\left[\tfrac{\nu-1}{2}\right]k+\left[\tfrac{\nu}{2}\right]\right\}^2\,{}^3_kP_{\nu-2}(z) = o\ ,\quad (\nu=1,2,\ldots,2i)\ . $$

oznakom sličnom onoj u (1.99).

Napomenimo da je [74,str.24]

(1.118)
$$ {}^3_1P_\nu(z) = L_\nu(-z)\ . $$

1.2.11 Sistem sastavljen od i dubleta

Dat je nehomogeni sistem koji se sastoji od i dubleta, dakle jednak oscilatornom sistemu datom u 1.2.1 ali bez prigušnica i opruga.

Dvostruka kinetička energija ovog sistema je data sa (1.13), dok je struka potencijalna energija data sa (1.57). Primena Lagranževih jednačina druge vrste (1.17) nas dovodi na sistem diferencijalnih jednačina drugog da sa konstantnim koeficientima

(1.119)
$$ \mathbb{A}\{\ddot{q}\} + \mathbb{C}_g\{q\} = \{o\}\ . $$

Pretpostavimo li da su rešenja ovog sistema data u obliku (1.25) dobijamo

...omogenih linearnih algebarskih jednačina

$$(u^2 \mathbb{A} + \mathbb{C}_g)\{r\} = \{o\}.$$

...pored trivijalnog rešenja postoje i druga rešenja ovog sistema jedna-
...stavlja karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema

$$^4f_{d2i}(u) = \left| u^2 \mathbb{A} + \mathbb{C}_g \right| = o.$$

1.2.12 Homogen sistem sastavljen od i dubleta

...Homogen sistem se sastoji od i jednakih dubleta. Sve dužine klatnâ u ...rnom sistemu su uzajamno jednake, $l_p = l_r = l$, dok su mase klatnâ nai- ...M i m, tojest $m_p = M$, $m_r = m$, $(p=1,2,\dots,2i-1; r=2,4,\dots,2i)$. Karakte- ...jednačina ovog sistema sledi iz (1.78), odnosno (1.121) :

$$^4f_{d2i}(u) = \left| u^2 \mathbb{N}_{d2i} + \omega^2 \mathbb{D}_{d2i} \right| = o,$$

...upotrebili oznaku (1.27) i matrice (1.79), (1.80).

...Oduzimanje vrsta od vrsta i stubaca od stubaca daje

$$^4f_{d2i}(z) = \left| z\,\mathbb{K}_{d2i} + \mathbb{J}_{d2i} \right| = o,$$

...koristili sopstvenu vrednost (1.71) i matrice (1.83), (1.84).

...Karakteristične polinome dobijamo postupnim razvijanjem determinante ...u obliku rekurzivnog obrasca

$$^4f_{d2i}(z) = \{kz+(2i-1)k+2i\}\, {}^4f_{d,2i-1}(z) - \{(i-1)k+i\}^2\, {}^4f_{d,2i-2}(z) = o,$$

$$^4f_{d,2i-1}(z) = \{z+(2i-2)k+2i-1\}\, {}^4f_{d,2i-2}(z) - \{(i-1)k+i-1\}^2\, {}^4f_{d,2i-3}(z) = o,$$

$$^4_kP_\nu(z) = \left[\{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}z+(\nu-1)k+\nu\right]\, {}^4_kP_{\nu-1}(z) -$$

$$- \{[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^2\, {}^4_kP_{\nu-2}(z) = o, \quad (\nu=1,2,\dots,2i),$$

...vedena oznaka

$$^4_kP_{2i}(z) \equiv {}^4f_{d2i}(z) = \sum_{r=0}^{2i} \tilde{B}_{2i,2i-r}\, z^{2i-r} = o,$$

$$^4_kP_{2i-1}(z) \equiv {}^4f_{d,2i-1}(z) = \sum_{r=0}^{2i-1} \tilde{B}_{2i-1,2i-r-1}\, z^{2i-r-1} = o.$$

...$(p=1,2,\dots,2i; q=o1,2,\dots,2i)$ su obeleženi odgovarajući koeficienti ...$^4_kP_p(z)$, a za koje postoje ovi rekurzivni obrasci

$$\tilde{B}_{2i,2i-r} = \{(2i-1)k+2i\}\, \tilde{B}_{2i-1,2i-r} + k\, \tilde{B}_{2i-2,2i-r-1} -$$

$$- \{(i-1)k+i\}^2\, \tilde{B}_{2i-2,2i-r}, \quad (r=o,1,2,\dots,2i),$$

$$\tilde{B}_{2i-1,2i-p} = \{(2i-2)k+2i-1\}\, \tilde{B}_{2i-2,2i-p} + \tilde{B}_{2i-3,2i-p-1} -$$

$$- \{(i-1)k+i-1\}^2\, \tilde{B}_{2i-3,2i-p}, \quad (p=1,2,\dots,2i),$$

$$\tilde{B}_{\nu,\nu-r} = \{(\nu-1)k+\nu\}\,\tilde{B}_{\nu-1,\nu-r} + \{(k-1)([\tfrac{\nu}{2}]-[\tfrac{\nu-1}{2}])+1\}\,\tilde{B}_{\nu-1,\nu-r-1} -$$

(129)

$$- \{[\tfrac{\nu-1}{2}]k+[\tfrac{\nu}{2}]\}^2\,\tilde{B}_{\nu-2,\nu-r}\ ,(\nu=1,2,\ldots,2i;r=o,1,2,\ldots,2i).$$

Po definiciji je uvek

(130)
$$_{k}^{4}P_{o}(z) = 1\ ,$$

(131)
$$\tilde{B}_{p,-r} = o\ ,\ (p=1,2,\ldots,2i;r=o,1,2,\ldots,2i).$$

1.2.12.1 Homogeni sistemi od i dubleta za k = 1, 2, 3, 4

Homogeni sistem dubleta kod koga je k = 1, što ustvari prestavlja ...ogeni sistem matematičkih klatna kod koga su sve mase jednake, je podrob- ...proučen u [43] i [87,str.154-17o].

Koeficienti karakterističnih polinoma za ostale vrednosti za k su ... za po pet dubleta u priloženim tablicama i to : Tablica 2 je izračunata ... k = 2, Tablica 3 za k = 3 i Tablica 4 za k = 4 *).

---

*) Numerički centar Matematičkog instituta SRS je preuzeo izračunava- ... korena karakterističnih polinoma iz navedenih tablica, ali rad, iz tehni- ...h razloga, još nije sproveden do kraja.

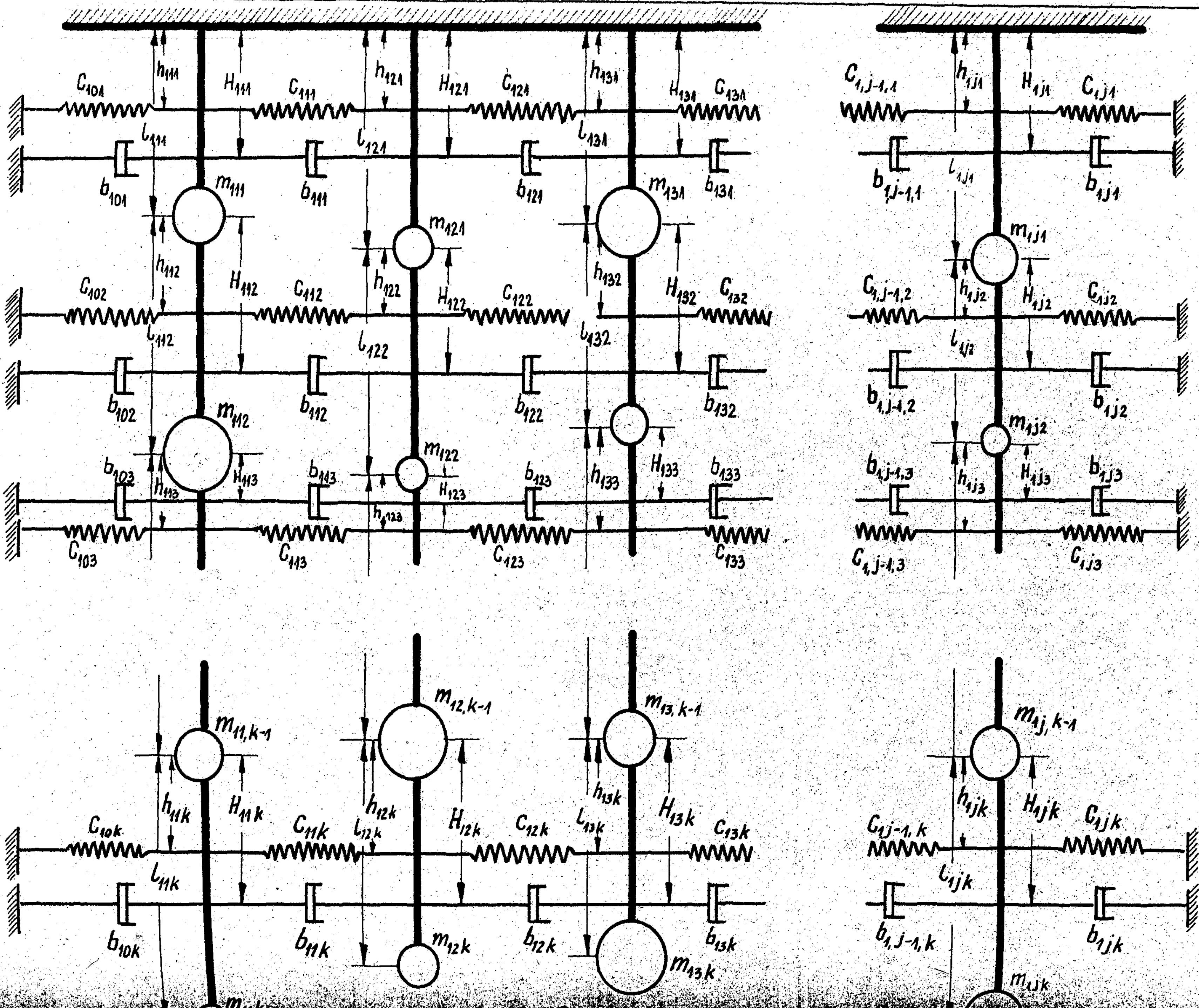
B_{10}	B_9	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0	n
									1	1	1
								2	6	3	2
							2	20	36	12	3
						4	60	240	288	72	4
					4	112	948	2688	2520	504	5
				8	288	3492	17604	36288	27216	4536	6
			8	440	8640	74880	293976	498960	317520	45360	7
		16	1056	26160	311040	1886112	5704992	7983360	4354560	544320	8
	16	1456	51408	901680	8417952	42075072	108275616	132088320	63685440	7076160	9
32	33360	140880	3064320	37661904	267287040	1075900320	2331750240	2476656000	1061424000	106142400	10

TABLICA 3

n	B_{10}	B_9	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0	n
1										1	1	1
2									3	8	4	2
3								3	35	60	20	3
4							9	144	560	640	160	4
5						9	297	2816	7920	7200	1440	5
6					27	1080	13956	71232	142560	103680	17280	6
7				27	1755	39660	377364	1517856	2527200	1572480	224640	7
8			81	6048	165312	2099712	13138560	39561216	53913600	28753920	3594240	8
9		81	8721	357984	7105728	72276096	376528512	970862592	1160939520	549918720	61102080	9
10	243	29160	1373220	3814720	431965056	3196984320	13047098880	27971543040	29023488000	12220416000	1222041600	10

T A B L I C A 4

B_{10}	B_9	B_8	B_7	B_6	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0
									1	1
								4	10	5
							4	54	90	30
						16	280	1080	1200	300
					16	616	6560	18480	16500	3300
				64	2880	40320	210600	415800	297000	49500
			64	4864	126000	1321920	5468400	9028800	5544000	792000
		256	21760	662720	9086400	59140800	179064000	240768000	126720000	15840000
	256	32256	1529280	34312320	381283200	2075068800	5395032000	6386688000	2993760000	332640000
024	140800	7488000	198000000	2811240000	21832200000	90952200000	194751000000	199584000000	83160000000	8316000000



h_{111} H_{111} c_{101} c_{111} l_{111} b_{101} b_{111} m_{111}
h_{121} H_{121} c_{121} l_{121} b_{121} m_{121}
h_{131} H_{131} c_{131} l_{131} b_{131} m_{131}
h_{112} H_{112} c_{102} c_{112} l_{112} b_{102} b_{112} m_{112}
h_{122} H_{122} c_{122} l_{122} b_{122} m_{122}
h_{132} H_{132} c_{132} l_{132} b_{132}
h_{113} H_{113} b_{103} b_{113} c_{103} c_{113}
h_{123} H_{123} b_{123} c_{123}
h_{133} H_{133} b_{133} c_{133}
$c_{1,j-1,1}$ h_{1j1} H_{1j1} c_{1j1} l_{1j1} $b_{1,j-1,1}$ b_{1j1} m_{1j1}
$c_{1,j-1,2}$ h_{1j2} H_{1j2} c_{1j2} l_{1j2} $b_{1,j-1,2}$ b_{1j2} m_{1j2}
$b_{1,j-1,3}$ h_{1j3} H_{1j3} b_{1j3} $c_{1,j-1,3}$ c_{1j3}
$m_{11,k-1}$ h_{11k} H_{11k} c_{10k} c_{11k} l_{11k} b_{10k} b_{11k} m_{11k}
$m_{12,k-1}$ h_{12k} H_{12k} c_{12k} l_{12k} b_{12k} m_{12k}
$m_{13,k-1}$ h_{13k} H_{13k} c_{13k} l_{13k} b_{13k} m_{13k}
$m_{1j,k-1}$ h_{1jk} H_{1jk} $c_{1j-1,k}$ c_{1jk} l_{1jk} $b_{1,j-1,k}$ b_{1jk} m_{1jk}

SLIKA 5

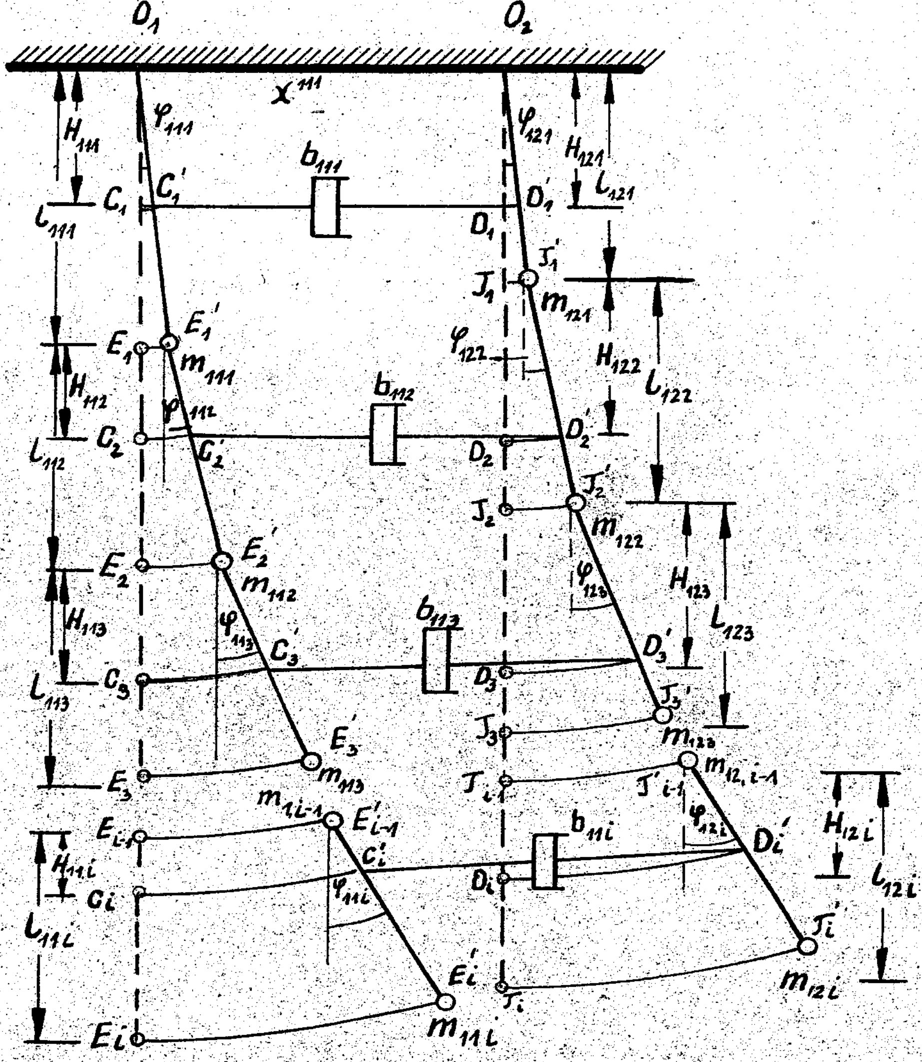
2 RAVANSKI SISTEMI

2.1 RAVANSKI SISTEMI SA PRIGUŠNICAMA I OPRUGAMA

2.1.1 Vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Posmatramo ravanski oscilatorni sistem (sl.5) koji je sastavljen od izova k-strukih matematičkih klatna u rednoj sprezi, pričvršćenih sa gor- strane za nepokretnu horizontalu, tako da donji deo slobodno visi. Svi i klatna su tanki kruti štapovi dužine l_{1qr}, $(q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$, marive mase, a na čijim donjim krajevima se nalaze materijalne tačke ma- m_{1qr}, $(q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$. Svaka nit je na redukovanoj udaljenosti , $(q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$, od početka svakog klatna, povezana sa su- om niti sa po jednom redukovanom prigušnicom čiji je otpor srazmeran pr- stepenu brzine, a čiji je redukovani koeficient gušenja b_{1qr}, $(q=1,2,\ldots$ $r=1,2,\ldots,k)$. Osim toga je svaki konac na redukovanoj udaljenosti h_{1qr}, $2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$, od početka svakog klatna, povezan sa susednim om sa po jednom redukovanom oprugom čija je redukovana krutost c_{1qr}, $2,\ldots,j-1;r=1,2,\ldots,k)$. Ako kažemo da je sistem VEZAN smatramo da su i krajnji, sa obe strane sistema, nizova klatna vezane redukovanim pri- bama za nepomične tačke u ravni oscilovanja sistema. U ovom slučaju su ovani koeficienti gušenja b_{1qr}, $(q=o,1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$. Isto važi opruge, pa su krutosti opruga c_{1qr}, $(q=o,1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$. POLUVE- SISTEM je onaj sistem kod koga su, ili samo levi ili samo desni krajnji i vezani redukovanim prigušnicama, odnosno redukovanim oprugama, pa ta- dolaze u obzir redukovani koeficienti gušenja b_{1qr}, odnosno redukovane osti opruga c_{1qr}, ili za q = o ili za q = j. SLOBODAN je onaj sistem či- i levi i desni krajnji nizovi, sa spoljne strane, slobodni, što znači e dolaze u obzir redukovani koeficienti gušenja b_{1qr}, odnosno redukovane osti opruga c_{1qr}, ni za q = o, ni za q = j. Posmatraćemo male slobodne acije vezanog sistema u svojoj nepomičnoj vertikalnoj ravni, oko svog kalnog stabilnog položaja ravnoteže, u kome su sve prigušnice i sve e u vodoravnom položaju. Dakle, u ravnotežnom položaju su i prigušnice ruge raspoređene u vodoravne paralelne nizove.

Dvostruka kinetička energija ovog oscilatornog sistema je izražena



SLIKA. 6.

matričnom obliku (1.13), dvostruka Reli-eva funkcija rasipanja u matričnom obliku (1.15), a dvostruka potencijalna energija u matričnom obliku (1.14).

Elemente inercijske matrice $\mathbb{A}$ i kvazielastične matrice $\mathbb{C}_g$ izračunavamo na isti način kao u 1,1.1, dok pomeranja potrebna za izračunavanje elemenata kvazielastične matrice $\mathbb{C}_c$ i brzine kojima su srazmerni otpori redukovanih prigušnica, potrebne za izračunavanje elemenata matrice rasipanja $\mathbb{B}$ dobijamo na ovaj način.

Radi prostijeg rada ćemo da pretpostavimo da smo iz čitavog sistema izdvojili delove od po i klatna prva dva niza leve strane i da smo ih oslobodili spoljašnjih redukovanih prigušnica i svih redukovanih opruga, što znači da je ostalo samo i redukovanih prigušnica koje uzajamno povezuju odgovarajuće niti klatnâ ova dva niza.

Sa slike 6 je

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1E_1'}+\overrightarrow{E_1'E_2'}+\overrightarrow{E_2'E_3'}+ \dots +\overrightarrow{E_{i-1}'C_i'}+\overrightarrow{C_i'D_i'}+\overrightarrow{D_i'J_{i-1}'}+ \dots +\overrightarrow{J_3'J_2'}+\overrightarrow{J_2'J_1'}+\overrightarrow{J_1'O_2}, \text{ ili}$$

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1E_1'}+\overrightarrow{E_1'E_2'}+\overrightarrow{E_2'E_3'}+ \dots +\overrightarrow{E_{i-1}'C_i'}+\overrightarrow{C_i'D_i'}-\overrightarrow{J_{i-1}'D_i'}- \dots -\overrightarrow{J_2'J_3'}-\overrightarrow{J_1'J_2'}-\overrightarrow{O_2J_1'} .$$

Projekcija vektora $\overrightarrow{O_1O_2}$ na horizontalu zbog

$$(\overrightarrow{O_1O_2},\vec{j}) = x^{111}, (\overrightarrow{O_1E_1'},\vec{j})=l_{111}\sin\varphi_{111}, (\overrightarrow{E_r'E_{r+1}'},\vec{j})=l_{11,r+1}\sin\varphi_{11,r+1},$$

$$(\overrightarrow{E_{i-1}'C_i'},\vec{j})=H_{11i}\sin\varphi_{11i}, (\overrightarrow{C_i'D_i'},\vec{j})=x^{11i}\cos\varepsilon_{11i}, (\overrightarrow{J_{i-1}'D_i'},\vec{j})=H_{12i}\sin\varphi_{12i},$$

$$(\overrightarrow{J_{r+1}'J_r'},\vec{j})=l_{12,r+1}\sin\varphi_{12,r+1}, (\overrightarrow{O_2J_1'},\vec{j})=l_{121}\sin\varphi_{121},$$

gde je $\vec{j}$ jedinični vektor u pravcu horizontale, ε_{11i} ugao koji zaklapa prigušnica sa vodoravnim pravcem, a koji je, kao i svi ostali uglovi za male oscilacije mali, što znači da može da se stavi da je

$$\sin\alpha \approx \alpha \quad \text{i} \quad \cos\alpha \approx 1, \text{ daje}$$

$$x^{111}=l_{111}\varphi_{111}+l_{112}\varphi_{112}+l_{113}\varphi_{113}+\dots+l_{11,i-1}\varphi_{11,i-1}+H_{11i}\varphi_{11i}+x^{11i}-$$
$$-H_{12i}\varphi_{12i}-l_{12,i-1}\varphi_{12,i-1}-\dots-l_{123}\varphi_{123}-l_{122}\varphi_{122}-l_{121}\varphi_{121} .$$

Kako je traženo pomeranje i-te prigušnice $x_{11i} = x^{111} - x^{11i}$, gde smo sa x^{111} obeležili udaljenost $\overline{O_1O_2}$, a sa x^{11i} relativno pomeranje i-te prigušnice u odno-su na i-1 -vu, konačno dobijamo

(2.1) $$x_{11i} = \sum_{p=1}^{i-1} l_{12p}\varphi_{12p}+H_{12i}\varphi_{12i}- \sum_{p=1}^{i-1} l_{11p}\varphi_{11p}-H_{11i}\varphi_{11i} ,$$

a odavde, posle diferenciranja po vremenu t, sledi i brzina kojoj je srazmeran otpor prigušnice

(2.2) $$\dot{x}_{11i} = \sum_{p=1}^{i-1} l_{12p}\dot{\varphi}_{12p}+H_{12i}\dot{\varphi}_{12i}- \sum_{p=1}^{i-1} l_{11p}\dot{\varphi}_{11p}-H_{11i}\dot{\varphi}_{11i} .$$

S obzirom na to da se nizovi uzajamno razlikuju po indeksima, to iz obrazaca (2.1) i (2.2) slede opšti obrasci za pomeranje prigušnica i njihove brzine

$$x_{1qr} = \sum_{p=1}^{r-1} l_{1,q+1,p}\varphi_{1,q+1,p} + H_{1,q+1,r}\varphi_{1,q+1,r} - \sum_{p=1}^{r-1} l_{1qp}\varphi_{1qp} - H_{1qr}\varphi_{1qr}, \quad (q=1,2,\ldots,j-1;\ r=1,2,\ldots,k), \tag{2.3}$$

$$\dot{x}_{1qr} = \sum_{p=1}^{r-1} l_{1,q+1,p}\dot{\varphi}_{1,q+1,p} + H_{1,q+1,r}\dot{\varphi}_{1,q+1,r} - \sum_{p=1}^{r-1} l_{1qp}\dot{\varphi}_{1qp} - H_{1qr}\dot{\varphi}_{1qr}, \quad (q=1,2,\ldots,j-1;\ r=1,2,\ldots,k). \tag{2.4}$$

Za krajnje prigušnice koje su privezane za nepomične tačke u ravni oscilovanja važe isti obrasci samo treba da se uzme u obzir da je za te tačke i ugao okretanja φ_{1or}, odnosno φ_{1jr}, kao i njegov izvod po vremenu $\dot{\varphi}_{1or}$, odnosno $\dot{\varphi}_{1jr}$ jednak nuli.

Ako zamislimo da smo umesto redukovanih prigušnica zadržali i redukovanih opruga, a uklonili sve prigušnice i oba niza oslobodili od spoljnih redukovanih opruga, onda bi nam izraz (2.3), ako u njega umesto redukovane udaljenosti redukovane prigušnice $H_{1,q+1,r}$ zamenimo redukovanu udaljenost redukovane opruge $h_{1,q+1,r}$, dao obrazac za pomeranje redukovane opruge :

$$X_{1qr} = \sum_{p=1}^{r-1} l_{1,q+1,p}\varphi_{1,q+1,p} + h_{1,q+1,r}\varphi_{1,q+1,r} - \sum_{p=1}^{r-1} l_{1qp}\varphi_{1qp} - h_{1qr}\varphi_{1qr}, \quad (q=1,2,\ldots,j-1;\ r=1,2,\ldots,k). \tag{2.5}$$

Primedbe za krajnje redukovane prigušnice važe i za krajnje redukovane opruge.

Dalji postupak za izračunavanje matrica je isti kao u 1.1.1 .

Prema tome su inerciska matrica, matrica rasipanja i kvazielastične matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{111} & & & & & \\ & \mathbb{A}_{121} & & & & \\ & & \mathbb{A}_{131} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{A}_{1,j-1,1} & \\ & & & & & \mathbb{A}_{1j1} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{111} & -\tilde{\mathbb{B}}_{111} & & & & \\ -\tilde{\mathbb{B}}'_{111} & \mathbb{B}_{121} & -\tilde{\mathbb{B}}_{121} & & & \\ & -\tilde{\mathbb{B}}'_{121} & \mathbb{B}_{131} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{B}_{1,j-1,1} & -\tilde{\mathbb{B}}_{1,j-1,1} \\ & & & & -\tilde{\mathbb{B}}'_{1,j-1,1} & \mathbb{B}_{1j1} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$(2.8)\quad \mathbb{C}_g = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{g111} & & & & & \\ & \mathbb{C}_{g121} & & & & \\ & & \mathbb{C}_{g131} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{C}_{g1,j-1,1} & \\ & & & & & \mathbb{C}_{g1j1} \end{pmatrix}$$

$$(2.9)\quad \mathbb{C}_c = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{c111} & -\tilde{\mathbb{C}}_{c111} & & & & \\ -\tilde{\mathbb{C}}'_{c111} & \mathbb{C}_{c121} & -\tilde{\mathbb{C}}_{c121} & & & \\ & -\tilde{\mathbb{C}}'_{c121} & \mathbb{C}_{c131} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbb{C}_{c1,j-1,1} & -\tilde{\mathbb{C}}_{c1,j-1,1} \\ & & & & -\tilde{\mathbb{C}}'_{c1,j-1,1} & \mathbb{C}_{c1j1} \end{pmatrix},$$

gde su matrice elementi

$$(2.1o)\quad \mathbb{A}_{1q1} = \begin{pmatrix} l_{1q1}^2 \sum_{r=1}^{k} m_{1qr} & l_{1q1} l_{1q2} \sum_{r=2}^{k} m_{1qr} & l_{1q1} l_{1q3} \sum_{r=3}^{k} m_{1qr} & \cdots \\ l_{1q1} l_{1q2} \sum_{r=2}^{k} m_{1qr} & l_{1q2}^2 \sum_{r=2}^{k} m_{1qr} & l_{1q2} l_{1q3} \sum_{r=3}^{k} m_{1qr} & \cdots \\ l_{1q1} l_{1q3} \sum_{r=3}^{k} m_{1qr} & l_{1q2} l_{1q3} \sum_{r=3}^{k} m_{1qr} & l_{1q3}^2 \sum_{r=3}^{k} m_{1qr} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ l_{1q1} l_{1qk} m_{1qk} & l_{1q2} l_{1qk} m_{1qk} & l_{1q3} l_{1qk} m_{1qk} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$(2.11)\quad \mathbb{B}_{1q1} = \sum_{n=q-1}^{q} \begin{pmatrix} b_{1n1} H_{1q1}^2 + l_{1q1}^2 \sum_{r=2}^{k} b_{1nr} & l_{1q1}(b_{1n2} H_{1q2} + l_{1q2} \sum_{r=3}^{k} b_{1nr}) \\ l_{1q1}(b_{1n2} H_{1q2} + l_{1q2} \sum_{r=3}^{k} b_{1nr}) & b_{1n2} H_{1q2}^2 + l_{1q2}^2 \sum_{r=3}^{k} b_{1nr} \\ l_{1q1}(b_{1n3} H_{1q3} + l_{1q3} \sum_{r=4}^{k} b_{1nr}) & l_{1q2}(b_{1n3} H_{1q3} + l_{1q3} \sum_{r=4}^{k} b_{1nr} \\ \cdot & \cdot \\ l_{1q1} b_{1nk} H_{1qk} & l_{1q2} b_{1nk} H_{1qk} \end{pmatrix}$$

$$(2.12)\quad \tilde{\mathbb{B}}_{1q1} = \begin{pmatrix} b_{1q1} H_{1q1} H_{1,q+1,1} + l_{1q1} l_{1,q+1,1} \sum_{r=2}^{k} b_{1qr} & l_{1q1}(b_{1q2} H_{1,q+1,2} + l \\ l_{1,q+1,1}(b_{1q2} H_{1q2} + l_{1q2} \sum_{r=3}^{k} b_{1qr}) & b_{1q2} H_{1q2} H_{1,q+1,2} + l_{1q2} \\ l_{1,q+1,1}(b_{1q3} H_{1q3} + l_{1q3} \sum_{r=3}^{k} b_{1qr}) & l_{1,q+1,2}(b_{1q3} H_{1q3} + \\ \cdot & \cdot \\ l_{1,q+1,1} b_{1qk} H_{1qk} & l_{1,q+1,2} b_{1q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots_{q1} l_{1qk} m_{1qk} \\ \cdots_{q2} l_{1qk} m_{1qk} \\ \cdots_{q3} l_{1qk} m_{1qk} \\ \cdot \\ \cdots l^2_{1qk} m_{1qk} \end{pmatrix}, \quad (q=1,2,\ldots,j),$$

$$\begin{pmatrix} \cdots_{q1}(b_{1n3}H_{1q3}+l_{1q3}\sum_{r=4}^{k} b_{1nr}) & \cdots & l_{1q1} b_{1nk} H_{1qk} \\ \cdots_{q2}(b_{1n3}H_{1q3}+l_{1q3}\sum_{r=4}^{k} b_{1nr}) & \cdots & l_{1q2} b_{1nk} H_{1qk} \\ b_{1n3}H^2_{1q3}+l^2_{1q3}\sum_{r=4}^{k} b_{1nr} & \cdots & l_{1q3} b_{1nk} H_{1qk} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ l_{1q3} b_{1nk} H_{1qk} & \cdots & b_{1nk} H^2_{1qk} \end{pmatrix}, \quad (q=1,2,\ldots,j)$$

$$\begin{pmatrix} \cdots_{q+1,2}\sum_{r=3}^{k} b_{1qr}) & l_{1q1}(b_{1q3}H_{1,q+1,3}+l_{1,q+1,3}\sum_{r=4}^{k} b_{1qr}) & \cdots & l_{1q1} b_{1qk} H_{1,q+1,k} \\ \cdots_{,q+1,2}\sum_{r=3}^{k} b_{1qr} & l_{1q2}(b_{1q3}H_{1,q+1,3}+l_{1,q+1,3}\sum_{r=4}^{k} b_{1qr}) & \cdots & l_{1q2} b_{1qk} H_{1,q+1,k} \\ \cdots_{q3}\sum_{r=4}^{k} b_{1qr} & b_{1q3}H_{1q3}H_{1,q+1,3}+l_{1q3}l_{1,q+1,3}\sum_{r=4}^{k} b_{1qr} & \cdots & l_{1q3} b_{1qk} H_{1,q+1,k} \\ & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdots_{1qk} & l_{1,q+1,3} b_{1qk} H_{1qk} & \cdots & b_{1qk} H_{1qk} H_{1,q+1,k} \end{pmatrix},$$

$$(q=1,2,\ldots,j-1)$$

$$(2.13)\quad \mathbb{C}_{g1q1}=\begin{pmatrix} l_{1q1}\sum\limits_{r=1}^{k}m_{1qr} & & & & \\ & l_{1q2}\sum\limits_{r=2}^{k}m_{1qr} & & & \\ & & l_{1q3}\sum\limits_{r=3}^{k}m_{1qr} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & l_{1qk}m_{1qk} \end{pmatrix},(q=1,\ldots,$$

$$(2.14)\,\mathbb{C}_{c1q1}=\sum_{n=q-1}^{q}\begin{pmatrix} c_{1n1}h_{1q1}^{2}+l_{1q1}^{2}\sum\limits_{r=2}^{k}c_{1nr} & l_{1q1}(c_{1n2}h_{1q2}+l_{1q2}\sum\limits_{r=3}^{k}c_{1nr}) \\ l_{1q1}(c_{1n2}h_{1q2}+l_{1q2}\sum\limits_{r=3}^{k}c_{1nr}) & c_{1n2}h_{1q2}^{2}+l_{1q2}^{2}\sum\limits_{r=3}^{k}c_{1nr} \\ l_{1q1}(c_{1n3}h_{1q3}+l_{1q3}\sum\limits_{r=4}^{k}c_{1nr}) & l_{1q2}(c_{1n3}h_{1q3}+l_{1q3}\sum\limits_{r=4}^{k}c_{1nr}) \\ \cdot & \cdot \\ l_{1q1}c_{1nk}h_{1qk} & l_{1q2}c_{1nk}h_{1qk} \end{pmatrix}$$

$$(2.15)\ \tilde{\mathbb{C}}_{c1q1}=\begin{pmatrix} c_{1q1}h_{1q1}h_{1,q+1,1}+l_{1q1}l_{1,q+1,1}\sum\limits_{r=2}^{k}c_{1qr} & l_{1q1}(c_{1q2}h_{1,q+1,2}+l_{1,q}\cdots \\ l_{1,q+1,1}(c_{1q2}h_{1q2}+l_{1q2}\sum\limits_{r=3}^{k}c_{1qr}) & c_{1q2}h_{1q2}h_{1,q+1,2}+l_{1q2}l_{1}\cdots \\ l_{1,q+1,1}(c_{1q3}h_{1q3}+l_{1q3}\sum\limits_{r=4}^{k}c_{1qr}) & l_{1,q+1,2}(c_{1q3}h_{1q3}+l_{1}\cdots \\ \cdot & \cdot \\ l_{1,q+1,1}c_{1qk}h_{1qk} & l_{1,q+1,2}c_{1qk}\cdots \end{pmatrix}$$

$$(q=1,2,\ldots,j-1)\ ,$$

gde je matrica $\tilde{\mathbb{B}}'_{1q1}$ transponovana matrica $\tilde{\mathbb{B}}_{1q1}$, a $\tilde{\mathbb{C}}'_{c1q1}$ transponovana matrica $\mathbb{C}_{c1q1}$. Uporedimo li matricu (2.11) sa (2.14) i matricu (2.12) sa (2.15) vidimo da su one potpuno jednake po obliku samo što je u drugim stavljeno c, odnosno h umesto b, odnosno H, što je logična posledica načina dobijanja obeju grupa matrica.

Primenimo li Lagranževe jednačine druge vrste (1.17) dobijamo sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima (1.18). Pretpostavimo li da je rešenje ovog sistema dato u obliku (1.23) dobijamo sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina (1.24). Uslov da pored trivijalnog rešenja $\{r\} = \{o\}$ postoje i druga rešenja pretstavlja karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema koja se sada ovako piše

$$(2.16)\qquad F_{1jk}(u) = \left|\ u^{2}\mathbb{A} + u\,\mathbb{B} + \mathbb{C}\ \right| = o\ .$$

$$
\begin{matrix}
l_{1q1}(c_{1n3}h_{1q3}+l_{1q3}\sum_{r=4}^{k}c_{1nr}) & \cdots & l_{1q1}c_{1nk}h_{1qk} \\
l_{1q2}(c_{1n3}h_{1q3}+l_{1q3}\sum_{r=4}^{k}c_{1nr}) & \cdots & l_{1q2}c_{1nk}h_{1qk} \\
c_{1n3}h_{1q3}^{2}+l_{1q3}^{2}\sum_{r=4}^{k}c_{1nr} & \cdots & l_{1q3}c_{1nk}h_{1qk} \\
\vdots & \cdots & \cdot \\
l_{1q3}c_{1nk}h_{1qk} & \cdots & c_{1nk}h_{1qk}^{2}
\end{matrix}\right) , \quad (q=1,2,\ldots,j) ,
$$

$$
\begin{matrix}
{}_{1,2}\sum_{r=3}^{k}c_{1qr}) & l_{1q1}(c_{1q3}h_{1,q+1,3}+l_{1,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}c_{1qr}) & \cdots & l_{1q1}c_{1qk}h_{1,q+1,k} \\
{}_{q+1,2}\sum_{r=3}^{k}c_{1qr} & l_{1q2}(c_{1q3}h_{1,q+1,3}+l_{1,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}c_{1qr}) & \cdots & l_{1q2}c_{1qk}h_{1,q+1,k} \\
{}_{3}\sum_{r=4}^{k}c_{1qr} & c_{1q3}h_{1q3}h_{1,q+1,3}+l_{1q3}l_{1,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}c_{1qr} & \cdots & l_{1q3}c_{1qk}h_{1,q+1,k} \\
 & \cdot & \cdots & \cdot \\
{}_{1qk} & l_{1,q+1,3}c_{1qk}h_{1qk} & \cdots & c_{1qk}h_{1qk}h_{1,q+1,k}
\end{matrix}\right) ,
$$

2.1.2 Homogen vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Kod homogenog sistema su sve mase klatna uzajamno jednake, $m_{1qr} = m$, sve dužine klatna uzajamno jednake, $l_{1qr} = l$, sve redukovane udaljenosti tačaka vezivanja redukovanih prigušnica od početka pojedinih klatna uzajamno jednake, $H_{1qr} = H$, sve redukovane udaljenosti tačaka vezivanja redukovanih opruga od početka odgovarajućih klatna uzajamno jednake, $h_{1qr} = h$, svi redukovani koeficienti gušenja uzajamno jednaki, $b_{1or} = b_{1qr} = b$, sve redukovane krutosti redukovanih opruga uzajamno jednake, $c_{1or} = c_{1qr} = c$, $(q=1,2,\dots,j;\ r=1,2,\dots,k)$. Sada su

$$
(2.17)\qquad
\begin{aligned}
&\mathbb{A}_{1q1} = l^2 m\, \mathbb{N}_k\,, \quad \mathbb{B}_{1q1} = 2\, b\, l^2\, \mathbb{S}_k\,, \quad \tilde{\mathbb{B}}_{1q1} = b\, l^2\, \mathbb{S}_k\,,\\
&\mathbb{C}_{g1q1} = l\, m\, \mathbb{D}_k\,, \quad \mathbb{C}_{c1q1} = 2\, c\, l^2\, \mathbb{V}_k\,, \quad \tilde{\mathbb{C}}_{c1q1} = c\, l^2\, \mathbb{V}_k\,,
\end{aligned}
$$

pa su matrice koje odgovaraju energijama i funkciji rasipanja postale

$$
(2.18)\qquad \mathbb{A} = l^2 m\, \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{N}_k, \quad \mathbb{B} = b l^2 \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k, \quad \mathbb{C} = c l^2 \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k + g l m\, \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{D}_k,
$$

gde smo sa $\otimes$ obeležili takozvani KRONECKER-OV ili TENZORSKI PROIZVOD MATRICA [15,str.95-98] (1.28), (1.29), (1.31), (1.38) reda j, odnosno k. Ovde smo uveli novu matricu

$$
(2.19)\qquad \mathbb{J}_j^{(v)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix},
$$

gde (v) u izložiocu matrice $\mathbb{J}_j^{(v)}$ označava da se ta matrica odnosi na vezan sistem, dok indeks kod matrica u (2.18) i (2.19) označava red matrice. Odgovarajuće matrice za poluvezan sistem, odnosno za slobodan sistem ćemo da označimo sa (p), odnosno (s) u izložiocu. Za takve slučajeve imamo

$$
(2.20)\qquad {}^{(p)}\mathbb{J}_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_j^{(p)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
(2.21)\qquad \mathbb{J}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix},
$$

gde smo sa ${}^{(p)}\mathbb{J}_j$ obeležili matricu za sistem slobodan sa leve a vezan sa desne strane, dok je $\mathbb{J}_j^{(p)}$ matrica koja odgovara sistemu koji je vezan sa leve a slobodan sa desne strane [96,I,str.23o].

Zanimljivo je da se napomene da je

$$\det \mathbb{J}_j^{(v)} = j + 1 .$$

Karakteristična jednačina posmatranog sistema je

$$(2.22)\quad F_{1jk}(u) = \left| u^2\mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{N}_k + \delta u\, \mathbb{J}_j^{(v)} \boxtimes \mathbb{S}_k + \omega^2 \mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{D}_k + \bar{\omega}^2 \mathbb{J}_j^{(v)} \boxtimes \mathbb{V}_k \right| = o ,$$

gde smo koristili oznake. (1.27).

Oduzmimo, kao u ranijim slučajevima, vrste od vrsta i stupce od stubaca u determinanti (2.22) pa ćemo dobiti nov oblik karakteristične jednačine

$$(2.23)\quad F_{1jk}(y) = \left| y^2\mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{I}_k + \alpha y\, \mathbb{J}_j^{(v)} \boxtimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{J}_j^{(v)} \boxtimes \mathbb{V}_k^* \right| = o ,$$

gde smo koristili sopstvenu vrednost (1.37), oznake (1.36) i matrice (1.38), (1.39), (1.4o) reda j odnosno k.

Postupnim razvijanjem determinante (2.23) dobijamo rekurzivni obrazac za izračunavanje karakterističnih polinoma

$$(2.24)\quad F_{1jk}(y) = (y^2\mathbb{I}_k + 2\alpha y \mathbb{S}_k^* + \mathbb{J}_k + 2\beta \mathbb{V}_k^*)\, F_{1,j-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{S}_k^* + \beta \mathbb{V}_k^*)^2\, F_{1,j-2,k}(y) = o.$$

Može da se pokaže da je činilac uz $F_{1,j-1,k}(y)$ ustvari izraz (1.35) za homogen liniski oscilatorni sistem koji se sastoji od k matematičkih klatna u rednoj sprezi sa po dve prigušnice i po dve opruge paralelno vezane za nit svakog klatna.

Uvedemo li matrice

$$(2.25)\quad \mathbb{F}_k = y^2\, \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k ,$$

$$(2.26)\quad \mathbb{G}_k = \alpha\, y\, \mathbb{S}_k^* + \beta\, \mathbb{V}_k^* ,$$

možemo karakterističnu jednačinu (2.23) da napišemo u novom obliku

$$(2.27)\quad F_{1jk}(y) = \left| \mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{F}_k + \mathbb{J}_j^{(v)} \boxtimes \mathbb{G}_k \right| = o ,$$

a rekurzivni obrazac (2.24) postaje

$$(2.28)\quad F_{1jk}(y) = (\mathbb{F}_k + {}^1\mathbb{G}_k)\, F_{1,j-1,k}(y) - (\mathbb{G}_k)^2\, F_{1,j-2,k}(y) = o ,$$

gde smo uveli još jednu novu matricu

$$(2.29)\quad {}^1\mathbb{G}_k = 2\,\alpha\, y\, \mathbb{S}_k^* + 2\,\beta\, \mathbb{V}_k^* .$$

Izraz sličan obrascu (2.27) je naveden u [57,str.22o] za ravanski sistem opruga sa nepomičnim granicama, a ne i prigušnica i opruga kao što je ovde slučaj, samo su tamo opruge bile vezane za same materijalne tačke, a umesto krutih konaca klatna bile su postavljene opruge.

<u>2.1.3 Homogen vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku</u>

Ako pretpostavimo da smo i prigušnice i opruge redukovali na same materijalne tačke, onda matrice S_k^* i W_k^* postaju jedinične matrice $\mathbb{I}_k$, pa je karakteristična jednačina takvog sistema

(2.30) $$ {}^1F_{1jk}(y) = \left| \left[y^2\mathbb{I}_j+(\alpha y+\beta)\mathbb{J}_j^{(v)}\right] \boxtimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{J}_k \right| = o , $$

ili ako uvedemo novu matricu

(2.31) $$ \mathbb{M}_j^{(v)} = y^2 \mathbb{I}_j + (\alpha y + \beta) \mathbb{J}_j^{(v)} , $$

karakteristična jednačina postaje

(2.32) $$ {}^1F_{1jk}(y) = \left| \mathbb{M}_j^{(v)} \boxtimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{J}_k \right| = o . $$

Odgovarajući rekurzivni obrazac za karakteristične polinome je

(2.33) $$ {}^1F_{1jk}(y)=\left[(y^2+2\alpha y+2\beta)\mathbb{I}_k+\mathbb{J}_k\right] {}^1F_{1,j-1,k}(y)-\left[(\alpha y+\beta)\mathbb{I}_k\right]^2 {}^1F_{1,j-2,k}(y)= o . $$

Lako se pokazuje da je činilac od ${}^1F_{1,j-1,k}(y)$ ustvari izraz (1.44) za homogeni liniski oscilatorni sistem koji se sastoji od k matematičkih klatna u rednoj sprezi sa po dve prigušnice i po dve opruge paralelno vezane za same materijalne tačke.

Medjutim, ako koristimo matricu (2.25) i matricu (1.97) reda k, karakteristična jednačina može i ovako da se napiše

(2.34) $$ {}^1F_{1jk}(y) = \left| \mathbb{I}_j \boxtimes \mathbb{F}_k + \mathbb{J}_j^{(v)} \boxtimes \tilde{\mathbb{G}}_k \right| = o , $$

a rekurzivni obrazac postaje

(2.35) $$ {}^1F_{1jk}(y) = (\mathbb{F}_k + {}^1\tilde{\mathbb{G}}_k)\, {}^1F_{1,j-1,k}(y) - (\tilde{\mathbb{G}}_k)^2\, {}^1F_{1,j-2,k}(y) = o , $$

gde smo uveli novu matricu

(2.36) $$ {}^1\tilde{\mathbb{G}}_k = 2\,(\alpha\, y + \beta)\, \mathbb{I}_k . $$

<u>2.1.4 Vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom</u>

Oscilatorni sistem se sada sastoji od j klatna različitih dužina obešenih o istu horizontalu, a čije su susedne niti povezane sa po jednom redukovanom prigušnicom na redukovanoj udaljenosti H od gornje horizontale i sa po jednom redukovanom oprugom na redukovanoj udaljenosti h od gornje horizontale. I levo i desno krajnje klatno je vezano sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom za nepomične tačke u ravni oscilovanja sistema. Udaljenosti tačaka pričvršćenja, kako redukovanih prigušnica tako i redukovanih opruga, su uzajamno jednake zbog toga što smo pretpostavili da, u stabilnom ravnotežnom položaju čine vodoravne nizove paralelne sa gornjom horizontalom o koju su obešena sva klatna.

Matrice $\mathbb{A}_{1q1}$, $\mathbb{B}_{1q1}$, $\tilde{\mathbb{B}}_{1q1}$, $\mathbb{C}_{g1q1}$, $\mathbb{C}_{c1q1}$, $\tilde{\mathbb{C}}_{c1q1}$ degenerišu u ovome slučaju u samo jedan element :

$$(2.37)\qquad \begin{array}{l} \mathbb{A}_{1q1}=l_{1q1}^2 m_{1q1},\ \mathbb{B}_{1q1}=H^2\sum_{n=q-1}^{q} b_{1n1},\ \tilde{\mathbb{B}}_{1q1}=H^2\, b_{1q1},\\ \mathbb{C}_{g1q1}=l_{1q1}m_{1q1},\ \mathbb{C}_{c1q1}=h^2\sum_{n=q-1}^{q} c_{1n1},\ \tilde{\mathbb{C}}_{c1q1}=c_{1q1}\, h^2, \end{array} \qquad (q=1,2,\dots,j)$$

pa su matrice $\mathbb{A}$ i $\mathbb{C}_g$ postale diagonalne matrice, a $\mathbb{B}$ i $\mathbb{C}_c$ Jakobi-eve matrice, dok je karakteristična jednačina zadržala oblik (2.16).

2.1.5 Homogen vezan"ravanski"sistem od j1 klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Homogen sistem ima sve mase uzajamno jednake, $m_{1q1}=m$, sve dužine klatna uzajamno jednake, $l_{1q1}=l$, sve redukovane koeficiente gušenja uzajamno jednake, $b_{1o1}=b_{1q1}=b$, i sve redukovane krutosti redukovanih opruga uzajamno jednake, $c_{1o1}=c_{1q1}=c$, $(q=1,2,\dots,j)$. Inerciska matrica, matrica rasipanja i kvazielastična matrica postaju sada

$$(2.38)\qquad \mathbb{A}=l^2 m\, \mathbb{I}_j,\ \mathbb{B}=b\, H^2\mathbb{J}_j^{(v)},\ \mathbb{C}=g\, l\, m\, \mathbb{I}_j + c\, h^2\mathbb{J}_j^{(v)},$$

pa je karakteristična jednačina ovog oscilatornog sistema

$$(2.39)\qquad F_{1j1}(u)=\left| u^2\mathbb{I}_j+\delta s^2 u\, \mathbb{J}_j^{(v)}+\omega^2\mathbb{I}_j+\tilde{\omega}^2 v^2\mathbb{J}_j^{(v)}\right| = o,$$

gde smo koristili oznake (1.27) i matrice (1.38), (2.2o). Uvedemo li novu sopstvenu vrednost

$$(2.4o)\qquad y_3=\frac{u^2+\omega^2}{\delta s^2 u+\tilde{\omega}^2 v^2},$$

karakteristična jednačina postaje

$$(2.41)\qquad F_{1j1}(y_3)=\left| y_3\, \mathbb{I}_j+\mathbb{J}_j^{(v)}\right| = o,$$

ili u obliku determinante

$$(2.42)\qquad F_{1j1}(y_3)=\begin{vmatrix} y_3+2 & -1 & o & \dots & o & o\\ -1 & y_3+2 & -1 & \dots & o & o\\ o & -1 & y_3+2 & \dots & o & o\\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot\\ o & o & o & \dots & y_3+2 & -1\\ o & o & o & \dots & -1 & y_3+2 \end{vmatrix} = o.$$

Postupno razvijanje ove determinante daje rekurzivni obrazac

$$F_{1j1}(y_3) = (y_3+2)\, F_{1,j-1,1}(y_3) - F_{1,j-2,1}(y_3) = o\,. \tag{2.43}$$

Uporedimo li rezultat koji je dobio R. Grammel [68,str.229], [21, str.166] sa (2.43) vidimo da se oni razlikuju samo u znaku, što je logična posledica različitih pretpostavki o izgledu rešenja sistema homogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Grammel je pretpostavio da je rešenje $\{q\} = \{r\} \cos ut$, dok je kod nas pretpostavka (1.23). Druga razlika je u tome što je Grammel posmatrao samo sistem opruga koje su vezane za same materijalne tačke, pa je stoga njegov rezultat sadržan u našem.

2.1.6 Homogen vezan"ravanski"sistem od j1 klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku

Kod ovog sistema smo izvršili redukciju i prigušnica i opruga na same materijalne tačke, pa je zbog (1.30) $s = 1$, a zbog (1.32) $v = 1$. Ako uzmemo novu sopstvenu vrednost

$$y_4 = \frac{u^2 + \omega^2}{\delta s^2 u + \tilde{\omega}^2 v^2}\,, \tag{2.44}$$

dobijamo karakterističnu jednačinu u ovom obliku

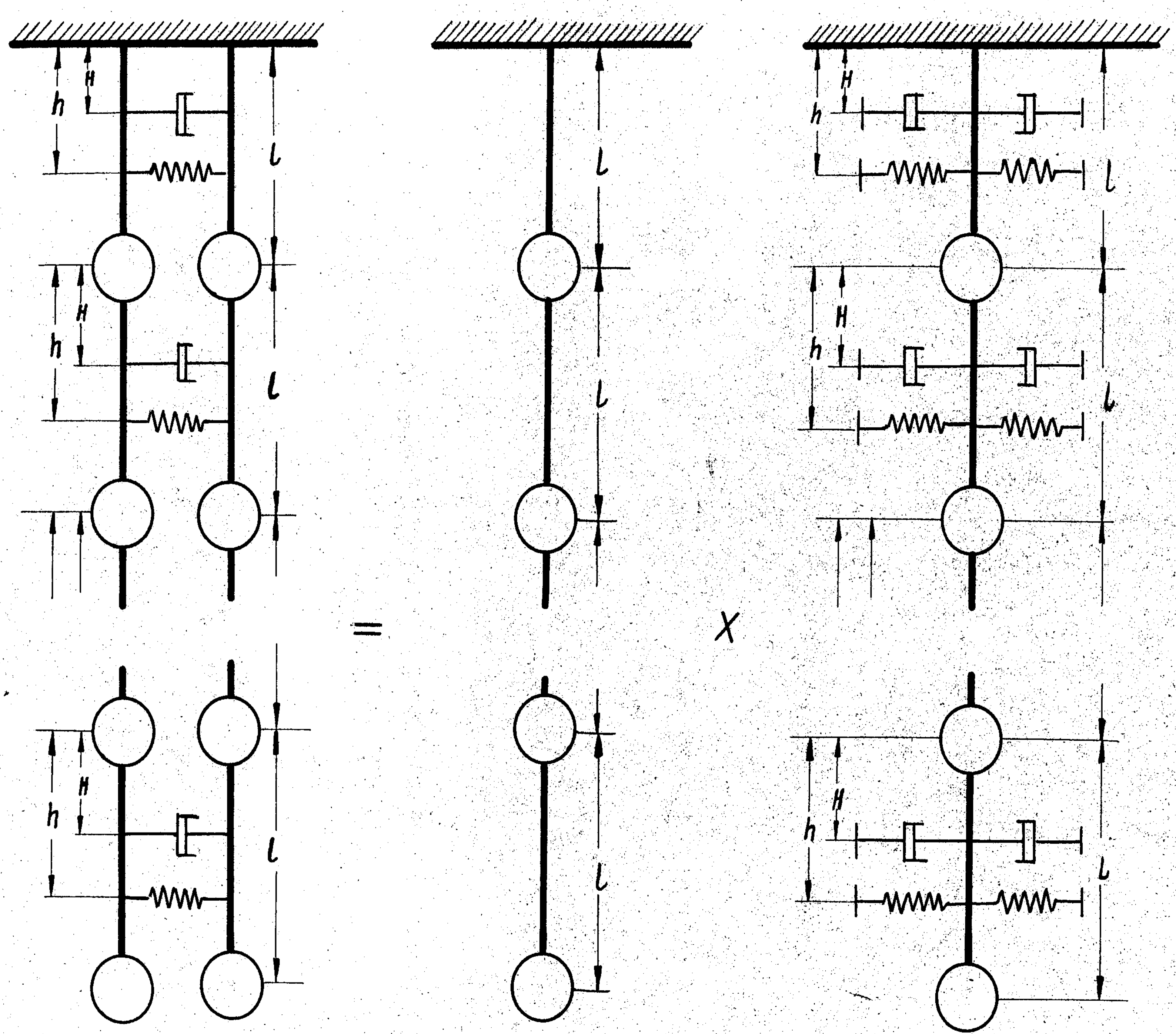
$$^1F_{1j1}(y_4) = \left| \, y_4 \, \mathbb{I}_j + \mathbb{J}_j^{(v)} \right| = o\,, \tag{2.45}$$

koji je jednak sa (2.41) samo je ovde nova sopstvena vrednost na mestu stare. Isti je slučaj i kod rekurzivnog obrasca koji sada izgleda ovako

$$^1F_{1j1}(y_4) = (y_4+2)\, {}^1F_{1,j-1,1}(y_4) - {}^1F_{1,j-2,1}(y_4) = o\,. \tag{2.46}$$

2.1.7 Slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Kod POLUVEZANIH SISTEMA dvostruka kinetička energija ima matrični oblik (1.13), a dvostruka potencijalna energija je izražena u matričnom obliku (1.14), gde je inerciska matrica data u obliku (2.6), kvazielastična matrica u obliku zbira (1.16) sabiraka (2.8) i (2.9). Dvostruka Relieva funkcija rasipanja je izražena u matričnom obliku (1.15) sa matricom rasipanja (2.7). Razlika u odnosu na vezane sisteme se ispoljava u matricama elementima matrice $\mathbb{B}$ i matrice $\mathbb{C}_c$. Ako je sistem slobodan sa leve strane onda se zbir pred matricom (2.11), odnosno (2.14) ne odnosi na element u gornjem levom uglu, a ako je slobodan sa desne strane, onda se kvadrat redukovane udaljenosti, u elementu u donjem desnom uglu, množi samo sa jednim a ne sa dva sabirka b_{1nr}, odnosno c_{1nr}.



SLIKA 7

Za SLOBODAN SISTEM su i inerciska matrica i kvazielastična matrica $\mathbb{C}_g$ jednake sa odgovarajućim matricama kod vezanog sistema. Opet se menjaju matrice (2.11) i (2.14) koje sada i u gornjem levom i u donjem desnom uglu imaju samo po jednog činioca uz kvadrat odgovarajuće redukovane udaljenosti.

Od svih mogućih slobodnih sistema ćemo da posmatramo samo jedan naročit slučaj koji ima zanimljivu osobenost. To je slobodan sistem od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom.

2.1.8 Homogen slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Pozovemo li se na ranije navedene osobine homogenog sistema možemo, polazeći od izraza (2.22), odmah da napišemo karakterističnu jednačinu za ovaj oscilatorni sistem

$$(2.47)\qquad F_{12k}(y) = \left| y^2 \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_k + \alpha y\, \mathbb{J}_2^{(s)} \otimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{J}_k + \beta \mathbb{J}_2^{(2)} \otimes \mathbb{V}_k^* \right| = 0 ,$$

gde je prema (2.21)

$$(2.48)\qquad \mathbb{J}_2^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Posle razvijanja i sredjivanja determinante (2.47) dobijamo

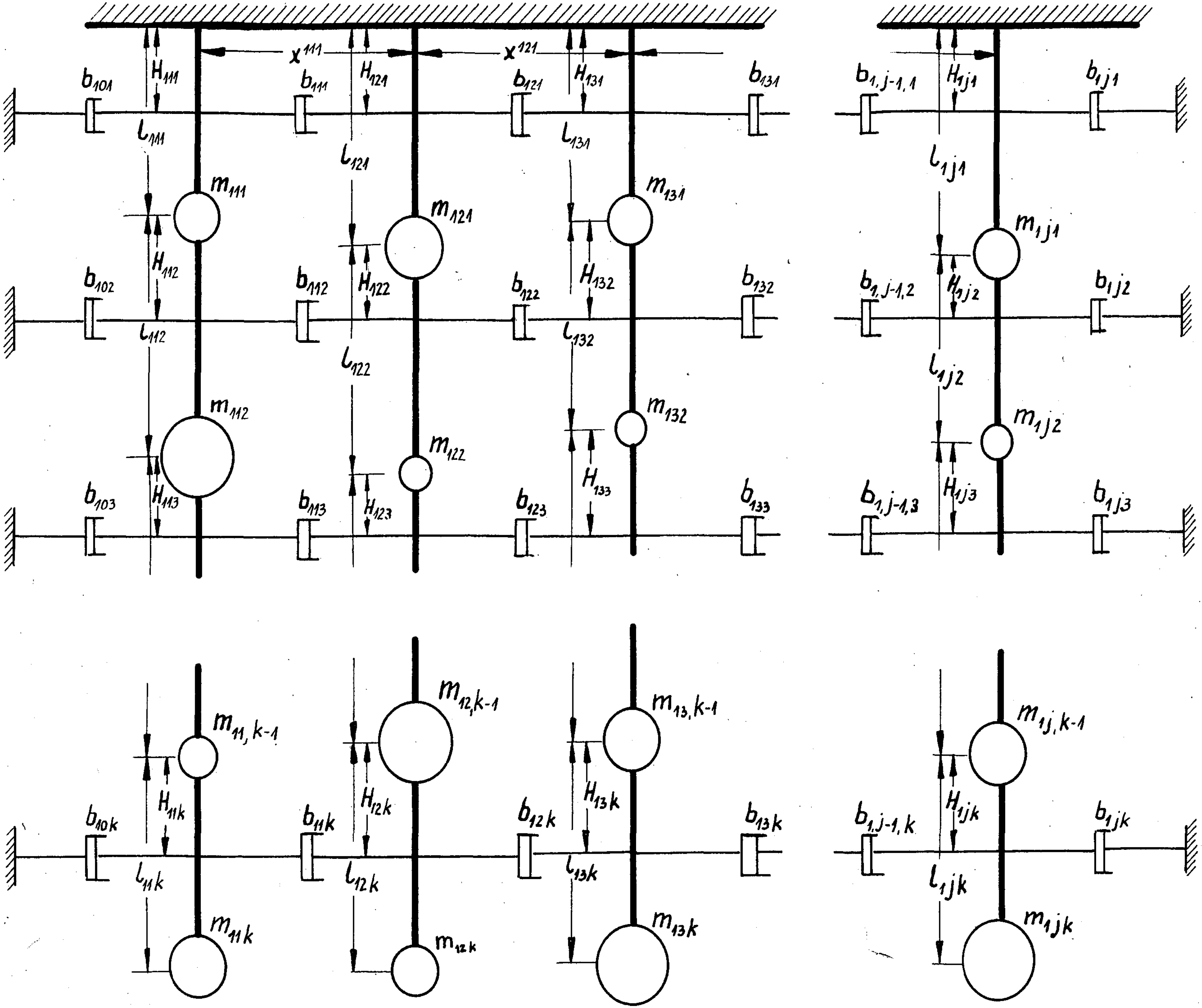
$$(2.49)\qquad F_{12k}(y) = (y^2 \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k)(y^2 \mathbb{I}_k + 2\alpha y\, \mathbb{S}_k^* + 2\beta \mathbb{V}_k^* + \mathbb{J}_k) = 0 .$$

Uporedimo li ovo sa (1.35) lako možemo da pokažemo da je karakteristična jednačina homogenog slobodnog ravanskog sistema od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom, ustvari, proizvod karakteristične jednačine slobodnih oscilacija jednog k-strukog homogenog matematičkog klatna i karakteristične jednačine slobodnog oscilovanja još jednog k-strukog homogenog matematičkog klatna sa po dve prigušnice i po dve opruge paralelno vezane za niti klatna na jednakim udaljenostima, od početka odgovarajućeg klatna, H, odnosno h, što shematski može ovako da se prikaže (sl.7).

Homogen slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom oprugom je podrobno obradjen u [87,str.181-184].

2.1.9 Homogen slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku

Pošto su sada i s = 1 i v = 1, imamo $\mathbb{S}_k^* = \mathbb{I}_k$ i $\mathbb{V}_k^* = \mathbb{I}_k$ pa je karakteristična jednačina sada dobila ovaj oblik


x^111
x^121
H111
H121
H131
H1j1
b101
b111
b121
b131
b1,j-1,1
b1j1
l111
l121
l131
l1j1
m111
m121
m131
m1j1
H112
H122
H132
H1j2
b102
b112
b122
b132
b1,j-1,2
b1j2
l112
l122
l132
l1j2
m112
m122
m132
m1j2
H113
H123
H133
H1j3
b103
b113
b123
b133
b1,j-1,3
b1j3
m11,k-1
m12,k-1
m13,k-1
m1j,k-1
H11k
H12k
H13k
H1jk
b10k
b11k
b12k
b13k
b1,j-1,k
b1jk
l11k
l12k
l13k
l1jk
m11k
m12k
m13k
m1jk

SLIKA. 8.

(2.50) $$^{1}F_{12k}(y) = \left| [y^2 \mathbb{I}_2 + (\alpha y+\beta)\mathbb{J}_2^{(s)}] \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{J}_k \right| = o ,$$

ili ako uvedemo novu matricu sličnu matrici (2.31), po obliku,

(2.51) $$\mathbb{M}_2^{(s)} = y^2 \mathbb{I}_2 + (\alpha y + \beta) \mathbb{J}_2^{(s)} ,$$

dobijamo

(2.52) $$^{1}F_{12k}(y) = \left| \mathbb{M}_2^{(s)} \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{J}_k \right| = o .$$

Razvijanje i sredjivanje determinante (2.52) daje

(2.53) $$^{1}F_{12k}(y) = (y^2 \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k)[(y^2 + 2\alpha y + 2\beta)\mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k] = o .$$

Uporedimo li ovo sa (1.44), uzimajući u obzir sopstvenu vrednost (1.45), i sa (1.56) lako dokazujemo da je

(2.54) $$^{1}F_{12k}(y) = L_k(-y)\, L_k(-y^2-2\alpha y-2\beta) .$$

Homogen slobodan sistem u ravni od 2k klatna sa po jednom oprugom privezanom za samu materijalnu tačku je dat u [87,str.184].

2.2 RAVANSKI SISTEMI SA PRIGUŠNICAMA

2.2.1 Vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Neka je dat ravanski oscilatorni sistem koji je jednak sistemu prikazanom u 2.1.1 bez opruga (sl.8).

Dvostruka kinetička energija ovakvog oscilatornog sistema je data u matričnom obliku (1.13), Reli-eva funkcija rasipanja u obliku (1.15), a dvostruka potencijalna energija je izražena u obliku (1.57), gde je inerciska matrica (2.6), matrica rasipanja (2.7), a kvazielastična matrica (2.8).

Tada je karakteristična jednačina pretstavljena u obliku (1.59).

2.2.2 Homogen vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Ranije navedene osobine homogenog sistema nam omogućuju da, polazeći od obrasca (2.23), odmah napišemo odgovarajuću karakterističnu jednačinu

(2.55) $$^{2}F_{1jk}(y) = \left| y^2 \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{I}_k + \alpha y\, \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{J}_k \right| = o ,$$

dok je rekurzivni obrazac za karakteristične polinome

(2.56) $$^{2}F_{1jk}(y) = (y^2 \mathbb{I}_k + 2\alpha y \mathbb{S}_k^* + \mathbb{J}_k)\, {}^{2}F_{1,j-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{S}_k^*)^2\, {}^{2}F_{1,j-2,k}(y) = o.$$

Uporedi li se ovaj izraz sa (1.61) može da se pokaže da je činilac uz ${}^2F_{1,j-1,k}(y)$ ustvari obrazac (1.61) za homogeni liniski sistem od k matematičkih klatna u rednoj sprezi sa po dve prigušnice paralelno vezane za konac svakog klatna.

Iskoristimo li matricu (2.25) karakteristična jednačina može i ovako da se napiše

(2.57) $$ {}^2F_{1jk}(y) = \left| \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{F}_k + \alpha\, y\, \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k^* \right| = o \,. $$

Obrazac (2.56) sada izgleda ovako

(2.58) $$ {}^2F_{1jk}(y) = (\mathbb{F}_k + 2\,\alpha\, y\, \mathbb{S}_k^*)\ {}^2F_{1,j-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{S}_k^*)^2\ {}^2F_{1,j-2,k}(y) = o. $$

2.2.3 Homogen vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom prigušnicom redukovanom na samu materijalnu tačku

U ovome slučaju matrica $\mathbb{S}_k^*$ postaje jedinična matrica, $\mathbb{S}_k^* = \mathbb{I}_k$, pa je karakteristična jednačina za ovaj sistem

(2.59) $$ {}^2F_{1jk}(y) = \left| \mathbb{Q}_j^{(v)} \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{J}_k \right| = o \,, $$

gde smo uveli novu matricu

(2.60) $$ \mathbb{Q}_j^{(v)} = y^2\, \mathbb{I}_j + \alpha\, y\, \mathbb{J}_j^{(v)} \,. $$

Sada dobijamo za rekurzivni obrazac

(2.61) $$ {}^2F_{1jk}(y) = [(y^2 + 2\alpha y)\mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k]\ {}^2F_{1,j-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{I}_k)^2\ {}^2F_{1,j-2,k}(y) = o \,. $$

Vidimo da je i u ovome slučaju činilac uz ${}^2F_{1,j-1,k}(y)$ ustvari obrazac (1.63) za homogeni liniski sistem od k matematičkih klatna u rednoj sprezi sa po dve prigušnice paralelno vezane za materijalnu tačku svakog klatna.

Medjutim, ako koristimo matricu (2.25) karakteristična jednačina je

(2.62) $$ {}^2F_{1jk}(y) = \left| \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{F}_k + \alpha\, y\, \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{I}_k \right| = o \,, $$

a rekurzivni obrazac je

(2.63) $$ {}^2F_{1jk}(y) = (\mathbb{F}_k + 2\alpha y \mathbb{I}_k)\ {}^2F_{1,j-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{I}_k)^2\ {}^2F_{1,j-2,k}(y) = o \,. $$

2.2.4 Vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Oscilatorni sistem je jednak sistemu prikazanom u 2.1.4 samo bez opruga.

Matrice elementi inerciske matrice, matrice rasipanja i kvazielastične matrice degenerišu u jedan element dat sa (2.37). Tada matrice $\mathbb{A}$ i $\mathbb{C}_g$ postaju diagonalne matrice, a $\mathbb{B}$ postaje Jakobi-eva matrica.

Karakterističnu jednačinu sada pišemo ovako

(2.64) $$^{3}F_{1jk}(u) = \left| u^2\,\mathbb{A} + u\,\mathbb{B} + \mathbb{C}_g \right| = o\ .$$

2.2.5 Homogen vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Iskoristimo li osobine homogenog oscilatornog sistema opisane u 2.1.5 i uvedemo li novu sopstvenu vrednost

(2.65) $$y_5 = \frac{u^2 + \omega^2}{\delta s^2 u}\ ,$$

odgovarajuća karakteristična jednačina postaje

(2.66) $$^{3}F_{1j1}(y_5) = \left| y_5\,\mathbb{I}_j + \mathbb{J}_j^{(v)} \right| = o\ ,$$

što može da se napiše u obliku determinante (2.42) ako u nju, umesto y_3 stavimo y_5. Ista primedba važi i za rekurzivni obrazac, koji je sada sličan obrascu (2.43)

(2.67) $$^{3}F_{1j1}(y_5) = (y_5+2)\ {}^{3}F_{1,j-1,1}(y_5) - {}^{3}F_{1,j-2,1}(y_5) = o\ .$$

2.2.6 Homogen vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom prigušnicom redukovanom na samu materijalnu tačku

Redukujemo li prigušnice na same materijalne tačke, sopstvena vrednost (2.65), zbog s = 1, postaje

(2.68) $$y_6 = \frac{u^2+\omega^2}{\delta\, u}\ ,$$

a karakteristična jednačina

(2.69) $$^{4}F_{1j1}(y_6) = \left| y_6\,\mathbb{I}_j + \mathbb{J}_j^{(v)} \right| = o\ ,$$

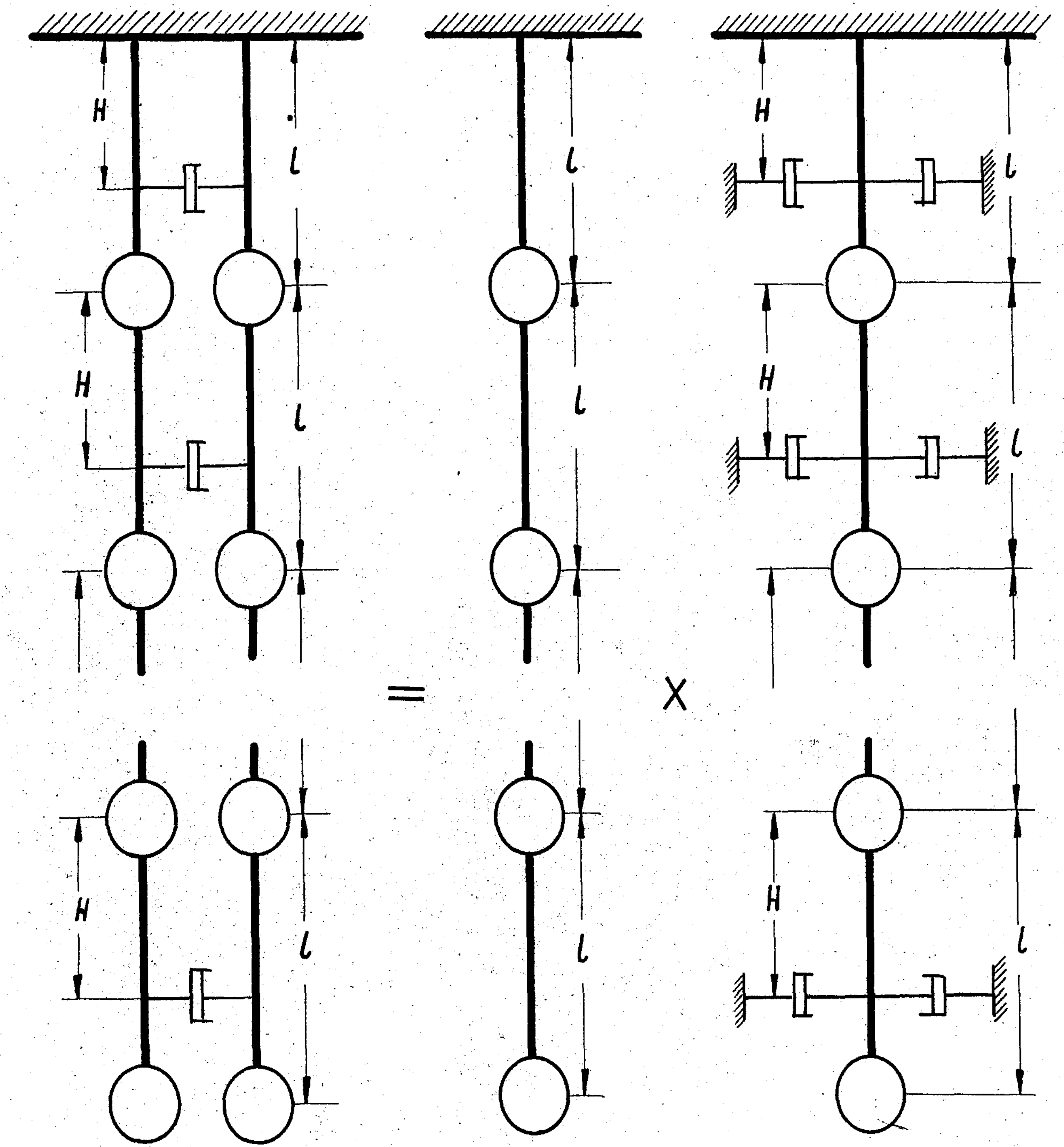
i rekurzivni obrazac

(2.70) $$^{4}F_{1j1}(y_6) = (y_6+2)\ {}^{4}F_{1,j-1,1}(y_6) - {}^{4}F_{j,j-2,1}(y_6) = o\ ,$$

zadržavaju spoljni oblik (2.66), odnosno (2.67) samo za y_6 umesto y_5.

2.2.7 Slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Dvostruka kinetička energija ovog sistema je izražena u matričnom obliku (1.13), dvostruka Reli-eva funkcija u obliku (1.15), a dvostruka potencijalna energija u obliku (1.57).



SLIKA. 9.

Inerciska matrica je (2.6), matrica rasipanja (2.7), a kvazielastična matrica je (2.8) uz primedbe date u 2.1.7 o promenama koje nastaju u matricama elementima matrice rasipanja.

Karakteristična jednačina ima oblik (1.59).

Posmatraćemo slobodan sistem od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom.

2.2.8 Homogen slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Obrazac (2.55) daje karakterističnu jednačinu posmatranog sistema

$$ {}^{2}F_{12k}(y) = \left| \; y^2 \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_k + \alpha\, y\, \mathbb{J}_2^{(s)} \otimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{J}_k \; \right| = 0 , \tag{2.71} $$

gde smo koristili matricu (2.48), a iz (2.56) dobijamo

$$ {}^{2}F_{12k}(y) = (y^2 \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k)(y^2 \mathbb{I}_k + 2\alpha y \mathbb{S}_k^* + \mathbb{J}_k) = 0 . \tag{2.72} $$

Uporedi li se ovo sa (1.61) može da se pokaže da je karakteristična jednačina homogenog slobodnog ravanskog sistema od 2k klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom ustvari proizvod karakteristične jednačine slobodnih oscilacija jednog k-strukog homogenog matematičkog klatna i karakteristične jednačine slobodnog oscilovanja još jedno k-strukog homogenog matematičkog klatna sa po dve prigušnice paralelno vezane za niti klatna na jednakim udaljenostima H od početka odgovarajućeg klatna, što shematski može ovako da se prikaže (sl.9).

2.2.9 Homogen slobodan ravanski sistem od 2k klatna sa po jednom prigušnicom redukovanom na samu materijalnu tačku

U ovom slučaju je zbog s = 1, $\mathbb{S}_k^* = \mathbb{I}_k$, pa je karakteristična jednačina za ovaj sistem

$$ {}^{1}F_{12k}(y) = \left| \; (y^2 \mathbb{I}_2 + \alpha y\, \mathbb{J}_2^{(s)}) \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{J}_k \; \right| = 0 , \tag{2.73} $$

ili ako upotrebimo matricu

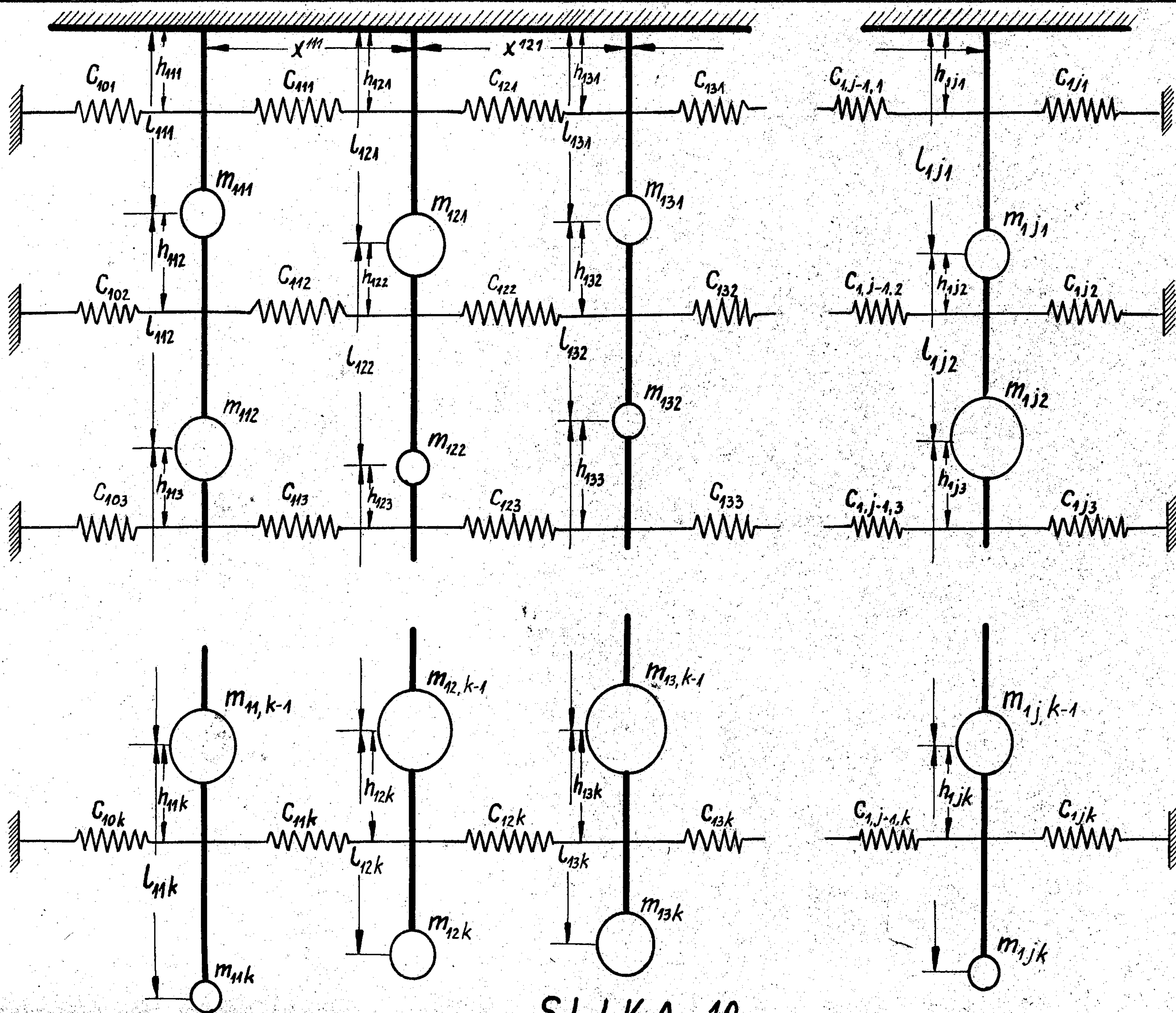
$$ \mathbb{Q}_2^{(s)} = y^2\, \mathbb{I}_2 + \alpha\, y\, \mathbb{J}_2^{(s)} , \tag{2.74} $$

koja liči na matricu (2.60),

$$ {}^{1}F_{12k}(y) = \left| \; \mathbb{Q}_2^{(s)} \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{J}_k \right| = 0 . \tag{2.75} $$

Rekurzivni obrazac (2.72) sada postaje

$$ {}^{1}F_{12k}(y) = (y^2 \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k)[(y^2 + 2\alpha y)\mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k] = 0 . \tag{2.76} $$



x^111
x^121
h_111
h_121
h_131
h_1j1
C_101
C_111
C_121
C_131
C_1,j-1,1
C_1j1
l_111
l_121
l_131
l_1j1
m_111
m_121
m_131
m_1j1
h_112
h_122
h_132
h_1j2
C_102
C_112
C_122
C_132
C_1,j-1,2
C_1j2
l_112
l_122
l_132
l_1j2
m_112
m_122
m_132
m_1j2
h_113
h_123
h_133
h_1j3
C_103
C_113
C_123
C_133
C_1,j-1,3
C_1j3
m_11,k-1
m_12,k-1
m_13,k-1
m_1j,k-1
h_11k
h_12k
h_13k
h_1jk
C_10k
C_11k
C_12k
C_13k
C_1,j-1,k
C_1jk
l_11k
l_12k
l_13k
m_11k
m_12k
m_13k
m_1jk

SLIKA. 10.

Uporedimo li ovaj obrazac sa (1.63) i sa (1.66), uzimajući u obzir sopstvenu vrednost (1.64), zaključujemo da je

$$ {}^{1}F_{12k}(y) = L_k(-y)\, L_k(-y^2-2\alpha y) \;. \tag{2.77} $$

2.3 RAVANSKI SISTEMI SA OPRUGAMA

2.3.1 Vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom redukovanom oprugom

Neka je dat oscilatorni ravanski sistem koji je jednak sistemu prikazanom u 2.1.1 bez prigušenja (sl.1o).

Dvostruka kinetička energija ovakvog oscilatornog sistema je izražena u matričnom obliku (1.13), a dvostruka kinetička energija u obliku (1.14). Inerciska matrica je (2.6) a kvazielastična matrica je (1.16), gde su odgovarajuće matrice (2.8) i (2.9).

Tada je karakteristična jednačina oblika (1.68).

2.3.2 Homogen vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom redukovanom oprugom

Koristimo li ranije pomenute osobenosti homogenih sistema, možemo, polazeći od (2.23), ovako da napišemo karakterističnu jednačinu ovog sistema

$$ F_{1jk}(z) = \left| z\, \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k^* \right| = o \;, \tag{2.78} $$

gde smo upotrebili sopstvenu vrednost (1.71).

Postupno razvijanje ove determinante daje rekurzivni obrazac

$$ F_{1jk}(z) = (z\, \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k + 2\beta \mathbb{V}_k^*)\, F_{1,j-1,k}(z) - (\beta \mathbb{V}_k^*)^2\, F_{1,j-2,k}(z) = o \;. \tag{2.79} $$

Uporedi li se ovaj izraz sa (1.7o) može da se pokaže da je činilac uz $F_{1,j-1,k}(z)$ ustvari obrazac (1.7o) za homogen liniski sistem od k matematičkih klatna sa po dve opruge paralelno vezane za konac svakog klatna.

Ako upotrebimo matricu (2.25), koristeći vezu (1.72), izmedju sopstvenih vrednosti z i y, karakteristična jednačina postaje

$$ F_{1jk}(z) = \left| \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{F}_k + \beta\, \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k^* \right| = o \;, \tag{2.8o} $$

a rekurzivni obrazac (2.79) sada pišemo ovako

$$ F_{1jk}(z) = (\mathbb{F}_k + 2\beta \mathbb{V}_k^*)\, F_{1,j-1,k}(z) - (\beta \mathbb{V}_k^*)^2\, F_{1,j-2,k}(z) = o \;. \tag{2.81} $$

2.3.3 Homogen vezan ravanski sistem od jk klatna sa po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku

Zbog $v = 1$ matrica $\mathbb{V}_k^*$ postaje jedinična matrica, $\mathbb{V}_k^* = \mathbb{I}_k$, pa za karakterističnu jednačinu sistema dobijamo ovaj izraz

(2.82) $$^1F_{1jk}(z) = \left| \mathbb{L}_j^{(v)} \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_j \otimes \mathbb{J}_k \right| = o ,$$

gde smo uveli novu matricu

(2.83) $$\mathbb{L}_j^{(v)} = z\,\mathbb{I}_j + \beta\,\mathbb{J}_j^{(v)} .$$

Rekurzivni obrazac za karakteristične polinome je sada

(2.84) $$^1F_{1jk}(z) = [(z+2\beta)\mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k]\ {}^1F_{1,j-1,k}(z) - (\beta\mathbb{I}_k)^2\ {}^1F_{1,j-2,k}(z) = o .$$

Činilac uz $^1F_{1,j-1,k}(z)$ ustvari pretstavlja izraz (1.7o) za homogeni liniski sistem od k matematičkih klatna sa po dve opruge koje su paralelno pričvršćene za same materijalne tačke klatna.

2.3.4 Vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom redukovanom oprugom

Oscilatorni sistem je jednak sistemu prikazanom u 2.1.4 samo bez prigušnica.

Matrice elementi inerciske matrice i kvazielastične matrice degenerišu u po jedan element dat u (2.37). Matrice $\mathbb{A}$ i $\mathbb{C}_g$ postaju diagonalne matrice, a $\mathbb{C}_c$ postaje Jakobi-eva matrica.

Karakteristična jednačina sistema je

(2.85) $$F_{1j1}(u) = \left| u^2\,\mathbb{A} + \mathbb{C} \right| = o .$$

2.3.5 homogen vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom redukovanom oprugom

Na osnovu poznatih osobina homogenog oscilatornog sistema i uz pomoć sopstvene vrednosti

(2.86) $$z_2 = \frac{u^2 + \omega^2}{\tilde{\omega}^2 v^2} ,$$

karakteristična jednačina posmatranog oscilatornog sistema postaje

(2.87) $$F_{1j1}(z_2) = \left| z_2\mathbb{I}_j + J_j^{(v)} \right| = o ,$$

što može da se napiše u obliku determinante (2.42) ako umsto y_3 stavimo z_2.

Slično je i kod rekurzivnog obrasca koji je sada

(2.88) $$F_{1j1}(z_2) = (z_2+2)\ F_{1,j-1,1}(z_2) - F_{1,j-2,1}(z_2) = o\ .$$

2.3.6 Homogen vezan "ravanski" sistem od j1 klatna sa po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku

Ako se redukcija opruga izvrši na same materijalne tačke, sopstvena vrednost (2.86), zbog v = 1, postaje

(2.89) $$z_3 = \frac{u^2 + \omega^2}{\bar{\omega}^2}\ .$$

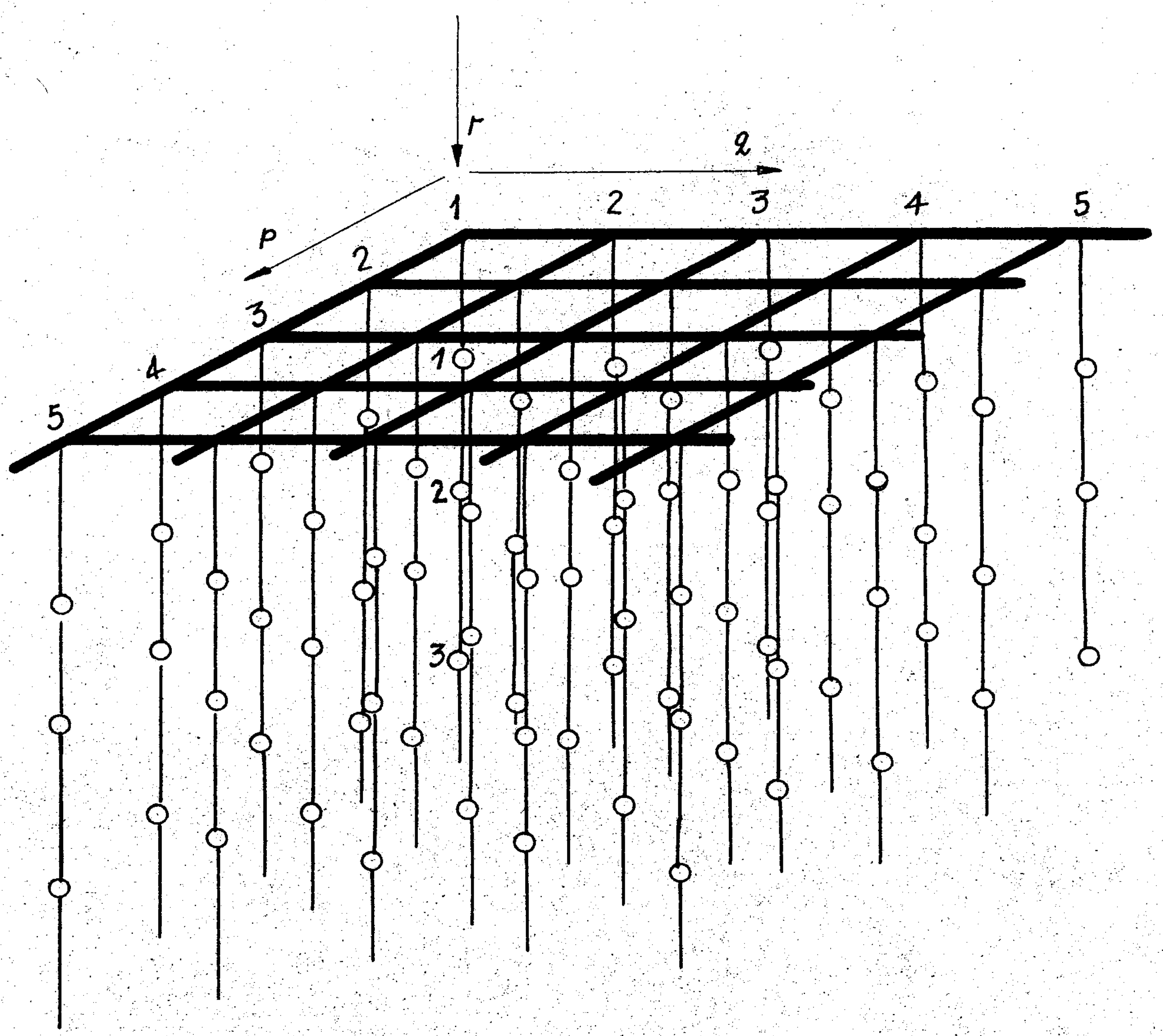
Medjutim, ni karakteristična jednačina (2.87), koja je u ovom slučaju postal

(2.9o) $${}^1F_{1j1}(z_3) = \left| z_3\, \mathbb{I}_j + \mathbb{J}_j^{(v)} \right| = o\ ,$$

a ni rekurzivni obrazac (2.88), koji se sada ovako piše

(2.91) $${}^1F_{1j1}(z_3) = (z_3+2)\ {}^1F_{1,j-1,1}(z_3) - {}^1F_{1,j-2,1}(z_3) = o\ ,$$

ustvari ne menjaju svoj spoljni oblik, jedino su sopstvene vrednosti z_2 i z_3 izmenile svoja mesta.



SLIKA. 11.

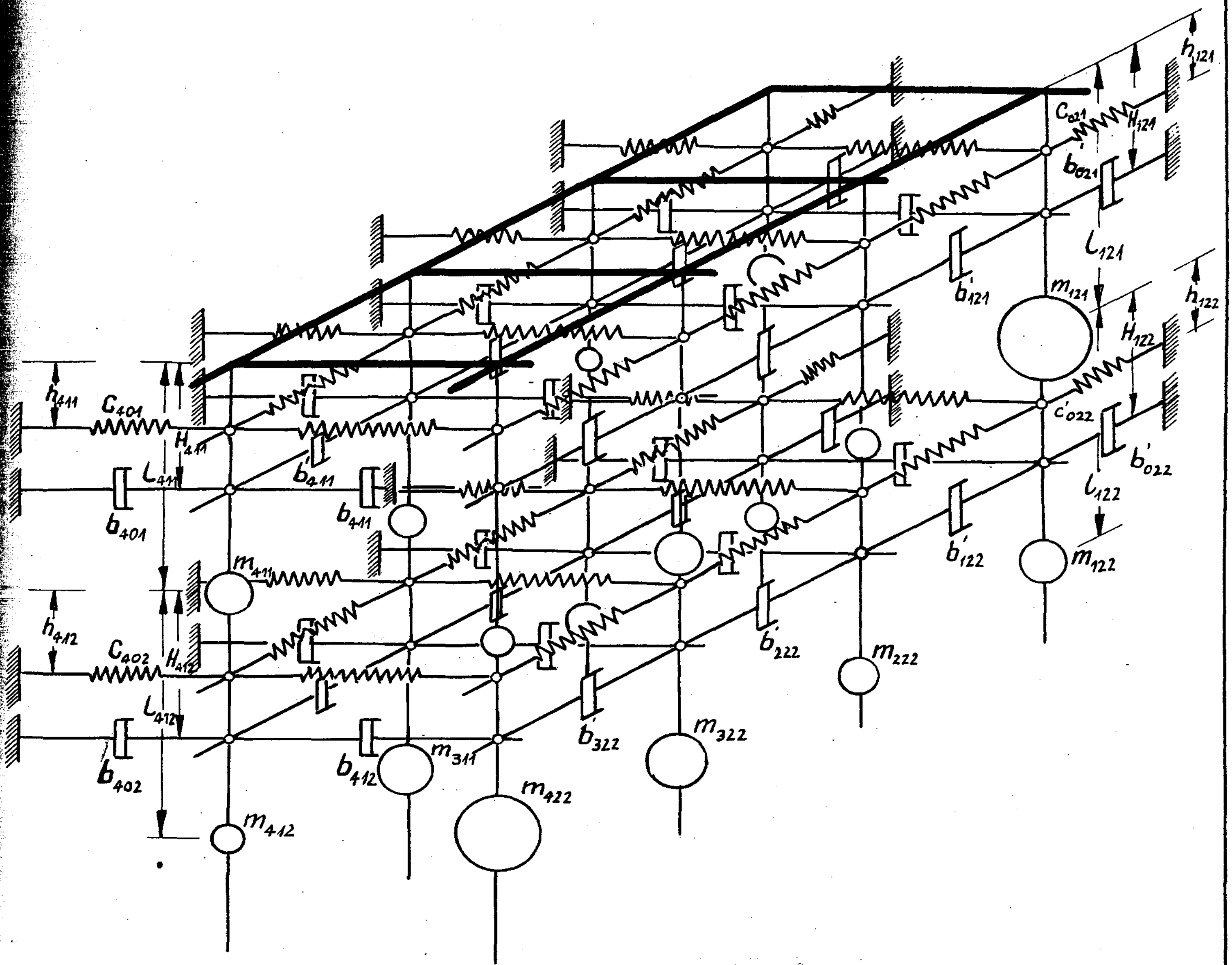
3 PROSTORNI SISTEMI

3.1 PROSTORNI SISTEMI SA PRIGUŠNICAMA I OPRUGAMA

3.1.1 Vezan prostorni sistem od ijk klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Dat je prostorni oscilatorni sistem (sl.11) i (sl.12) koji se sastoji od i puta j k-strukih matematičkih klatna koja su sa gornje strane pričvršćena za čvorove nepomične vodoravne ravne rešetke sastavljene od i-1 puta j-1 pravougaonih okaca. Okca su tako rasporedjena da dva pravougaonika sa jednom zajedničkom stranom imaju i njoj uporedne strane jednake. Preostale dve strane ovih pravougaonika zadovoljavaju taj isti uslov za one druge susedne pravougaonike. Dužine ivica tih pravougaonika ćemo da obeležimo sa x^{pq1}, $(p=1,2,\ldots,i-1;q=1,2,\ldots,j-1)$. Na taj način dobijamo nizove od po i-1, odnosno j-1 pravougaonika sa po dve uporedne jednake strane. Konac svakog klatna je tanak nesavitljiv štap dužine l_{pqr}, $(p=1,2,\ldots,i;q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$, zanemarive mase, a na čijem se donjem kraju nalazi materijalna tačka mase m_{pqr}, $(p=1,2,\ldots,i;q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$. Svaka nit je na redukovanoj udaljenosti H_{pqr}, $(p=1,2,\ldots,i;q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$, od početka svakog klatna, sa Kardanovim zglobom pričvršćenom prigušnicom, čiji je otpor srazmeran prvom stepenu brzine, a čiji je redukovani koeficient gušenja b_{pqr}, $(p=1,2,\ldots,i-1;q=1,2,\ldots,j-1;r=1,2,\ldots,k)$, povezana sa susednim nitima. Osim toga je svaki konac klatna, na redukovanoj udaljenosti h_{pqr}, $(p=1,2,\ldots,i;q=1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$, od početka svakog klatna, povezan sa po jednom redukovanom oprugom, čija je redukovana krutost c_{pqr}, $(p=1,2,\ldots,i-1;q=1,2,\ldots,j-1;r=1,2,\ldots,k)$, sa susednim koncima. U vertikalnom stabilnom položaju ravnoteže sistema i prigušnice i opruge čine ravanske rešetke pravougaonika koje su uporedne i podudarne sa gornjom osnovnom rešetkom za koju su pričvršćeni svi nizovi klatna. Napomenimo još i to da su u stabilnom položaju ravnoteže sva klatna rasporedjena u i uzajamno uporednih ravni sa po j k-strukih matematičkih klatna sa prigušnicama i oprugama u istoj ravni. Prva od takvih ravni, za p = 1, prikazana je na sl.5 .

Oscilatorni sistem je VEZAN kada su i niti klatna,koja se nalaze u sve četiri bočne površi, vezane sa po jednom reukovanom prigušnicom, odnosno oprugom za nepomične tačke : 1) u obema uzajamno upravnim ravnima u kojima se nalaze četiri k-struka klatna preseka bočnih ivičnih površi, 2) u ravni upravnoj na bočnu ivičnu površ sistema za sva ostala "spoljna"


h411
C401
H411
L411
b401
b'411
b411
m411
h412
C402
H412
L412
b402
b412
m311
m412
m422
m322
m222
b'322
b'222
h121
C021
H121
b021
L121
b'121
m121
h122
H122
c'022
b'022
L122
b'122
m122

SLIKA. 12.

klatna. U tom slučaju su redukovani koeficienti gušenja b_{pqr}, odnosno redukovane krutosti opruga c_{pqr}, $(p=o,1,2,\ldots,i;q=o,1,2,\ldots,j;r=1,2,\ldots,k)$. TRIČETVRTVEZANI SISTEM je onaj sistem kod koga na jednoj celoj bočnoj površi nema ni jedne redukovane prigušnice, odnosno redukovane opruge. U ovome slučaju od indeksâ p ili q kod b_{pqr}, odnosno c_{pqr} ne ulazi u obzir ili prva vrednost o ili poslednja i, ili j. POLUVEZAN SISTEM na dve bočne površi nema ni jednu spoljnu redukovanu prigušnicu, odnosno redukovanu oprugu. Sada ne ulaze u obzir dve vrednosti kod indeksa p ili q i to ili od svakog po jedna ili obe od jednog indeksa. ČETVRTVEZANI SISTEM na tri bočne površi nema ni jednu spoljnu redukovanu prigušnicu odnosno redukovanu oprugu i sada ne ulaze u obzir ukupno tri vrednosti za indekse p i q. SLOBODAN SISTEM nema ni na jednoj bočnoj površi ni jednu spoljnu redukovanu prigušnicu, odnosno redukovanu oprugu, pa su indeksi $p=1,2,\ldots,i-1$, $q=1,2,\ldots,j-1$.

Posmatraćemo male slobodne oscilacije vezanog sistema sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom oko vertikalnog stabilnog položaja ravnoteže.

Dvostruka kinetička energija ovog oscilatornog sistema je izražena u matričnom obliku (1.13), dvostruka Reli-eva funkcija rasipanja u matričnom obliku (1.15), a dvostruka potencijalna energija u matričnom obliku (1.16).

Oscilacije klatna u prostoru posmatraćemo kao skup projekcija skretanja sistema, od stabilnog ravnotežnog položaja, na dve uzajamno upravne vertikalne ravni koje se podudaraju sa dve bočne površi sistema koje se seku. Kao što je na slici 11 prikazano, koristićemo levi koordinatni sistem Opqr, gde se prve dve koordinate računaju u vodoravnoj ravni, dok je r usmerena vertikalno nadole. Projekcije generalisanih koordinata q_{pqr}, u ovom slučaju uglova skretanja, na ravan Oqr ćemo da obeležimo sa φ_{pqr}, a na ravan Opr sa ψ_{pqr}, gde se indeks p, u prvom slučaju, i indeks q, u drugom slučaju, odnose na posmatrani "sloj", tj. označavaju redni broj ravni uporedne sa koordinatnom ravni.

Kinetička i potencijalna energija, koja potiče od dejstva teže, se za svaku projekciju izračunavaju kao u 2.1.1, dok se brzina kojoj je srazmeran otpor prigušnica izračunava ovako. Obrázac (2.4) sada pretstavlja projekciju brzine pomeranja redukovane prigušnice na ravan Oqr, i ako mu stavimo indeks p umesto 1, da označimo sloj, možemo ovako da ga napišemo

$$(3.1)\quad \mathring{x}_{pqr} = \sum_{n=1}^{r-1} l_{p,q+1,n}\mathring{\varphi}_{p,q+1,n} + H_{p,q+1,r}\mathring{\varphi}_{p,q+1,r} - \sum_{n=1}^{r-1} l_{pqn}\mathring{\varphi}_{pqn} - H_{pqr}\mathring{\varphi}_{pqr}\,, \quad (p=1,2,\ldots,i-1;q=1,2,\ldots,j-1:r=1,\ldots,k)$$

Sličan izraz dobijamo i za projekciju brzine pomeranja redukovane prigušnice na ravan Opr

$$\dot{x}'_{pqr} = \sum_{n=1}^{r-1} l_{p+1,qn}\dot{\psi}_{p+1,qn} + H_{p+1,qr}\dot{\psi}_{p+1,qr} - \tag{3.2}$$
$$- \sum_{n=1}^{r-1} l_{pqn}\dot{\psi}_{pqn} - H_{pqr}\dot{\psi}_{pqr}\ , \quad (p=1,2,\dots,i-1;q=1,2,\dots,j-1;r=1,2,\dots,k).$$

Obrazac (2.5) pretstavlja projekciju pomeranja redukovane opruge na ravan Oqr. Ako sada umesto indeksa 1 stavimo indeks p, koji označava sloj u kome se nalazi posmatrana opruga, dobijamo projekciju pomeranja r-te redukovane opruge u q-tom nizu, a u p-tom sloju na ravan Oqr u obliku

$$X_{pqr} = \sum_{n=1}^{r-1} l_{p,q+1,n}\varphi_{p,q+1,n} + h_{p,q+1,r}\varphi_{p,q+1,r} - \tag{3.3}$$
$$- \sum_{n=1}^{r-1} l_{pqn}\varphi_{pqn} - h_{pqr}\varphi_{pqr}\ , \quad (p=1,2,\dots,i-1;q=1,2,\dots,j-1;r=1,2,\dots,k).$$

Projekcija pomeranja iste te opruge na ravan Opr je

$$X'_{pqr} = \sum_{n=1}^{r-1} l_{p+1,qn}\psi_{p+1,qn} + h_{p+1,qn}\psi_{p+1,qn} - \tag{3.4}$$
$$- \sum_{n=1}^{r-1} l_{pqn}\psi_{pqn} - h_{pqr}\psi_{pqr}\ , \quad (p=1,2,\dots,i-1;q=1,2,\dots,j-1;r=1,2,\dots,k).$$

Za "spoljne" redukovane prigušnice odnosno redukovane opruge važe isti obrasci samo treba da se uzme u obzir da je tada ugao skretanja φ_{por} i φ_{pjr}, odnosno ψ_{oqr} i ψ_{iqr} kao i njegov prvi izvod po vremenu $\dot{\varphi}_{por}$ i $\dot{\varphi}_{pjr}$, odnosno $\dot{\psi}_{oqr}$ i $\dot{\psi}_{iqr}$ jednak nuli.

Prema tome su inercijska matrica, matrica rasipanja i kvazielastična matrica, koja je data u obliku (1.16)

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_\varphi & \\ & \mathbb{A}_\psi\end{pmatrix},\quad \mathbb{B}=\begin{pmatrix}\mathbb{B}_\varphi & \\ & \mathbb{B}_\psi\end{pmatrix},\quad \mathbb{C}_g=\begin{pmatrix}\mathbb{C}_{g\varphi} & \\ & \mathbb{C}_{g\psi}\end{pmatrix},\quad \mathbb{C}_c=\begin{pmatrix}\mathbb{C}_{c\varphi} & \\ & \mathbb{C}_{c\psi}\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

gde smo sa indeksima φ i ψ obeležili matrice koje se odnose na ravan Oqr, odnosno na ravan Opr, dok same matrice elementi izgledaju ovako

$$\mathbb{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbb{A}_{111} & & & \\ & \mathbb{A}_{121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{A}_{1j1}\end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix}\mathbb{A}_{211} & & & \\ & \mathbb{A}_{221} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{A}_{2j1}\end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix}\mathbb{A}_{i11} & & & \\ & \mathbb{A}_{i21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{A}_{ij1}\end{bmatrix} \end{bmatrix}, \ (\alpha=\varphi,\psi), \tag{3.6}$$

$$(3.7)\quad \mathbb{B}_{\varphi}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{b111} & -\tilde{\mathbb{B}}_{b111} & & & \\ -\tilde{\mathbb{B}}'_{b111} & \mathbb{B}_{b121} & -\tilde{\mathbb{B}}_{b121} & & \\ & -\tilde{\mathbb{B}}'_{b121} & \mathbb{B}_{b131} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{B}_{b1j1} \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{bi11} & -\tilde{\mathbb{B}}_{bi11} & & & \\ -\tilde{\mathbb{B}}'_{bi11} & \mathbb{B}_{bi21} & -\tilde{\mathbb{B}}_{bi21} & & \\ & -\tilde{\mathbb{B}}'_{bi21} & \mathbb{B}_{bi31} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{B}_{bij1} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$(3.8)\quad \mathbb{B}_{\psi}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{b'111} & & & \\ & \mathbb{B}_{b'121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{B}_{b'1j1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbb{B}}_{b'111} & & & \\ & -\tilde{\mathbb{B}}_{b'121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\tilde{\mathbb{B}}_{b'1j1} \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbb{B}}'_{b'111} & & & \\ & -\tilde{\mathbb{B}}'_{b'121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\tilde{\mathbb{B}}'_{b'1j1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{b'211} & & & \\ & \mathbb{B}_{b'221} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{B}_{b'2j1} \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{b'i11} & & & \\ & \mathbb{B}_{b'i21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{B}_{b'ij1} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$(3.9)\quad \mathbb{C}_{g\alpha}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{g111} & & & \\ & \mathbb{C}_{g121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{C}_{g1j1} \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{g211} & & & \\ & \mathbb{C}_{g221} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{C}_{g2j1} \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{gi11} & & & \\ & \mathbb{C}_{gi21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{C}_{gij1} \end{bmatrix} \end{bmatrix},\ (\alpha=\varphi,\psi),$$

$$(3.10)\quad \mathbb{C}_{c\varphi}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{c111} & -\tilde{\mathbb{C}}_{c111} & & & \\ -\tilde{\mathbb{C}}'_{c111} & \mathbb{C}_{c121} & -\tilde{\mathbb{C}}_{c121} & & \\ & -\tilde{\mathbb{C}}'_{c121} & \mathbb{C}_{c131} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{C}_{c1j1} \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{ci11} & -\tilde{\mathbb{C}}_{ci11} & & & \\ -\tilde{\mathbb{C}}'_{ci11} & \mathbb{C}_{ci21} & -\tilde{\mathbb{C}}_{ci21} & & \\ & -\tilde{\mathbb{C}}'_{ci21} & \mathbb{C}_{ci31} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{C}_{cij1} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$(3.11)\quad \mathbb{C}_{c\psi}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{c'111} & & & \\ & \mathbb{C}_{c'121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{C}_{c'1j1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbb{C}}_{c'111} & & & \\ & -\tilde{\mathbb{C}}_{c'121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\tilde{\mathbb{C}}_{c'1j1} \end{bmatrix} & & \\ \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbb{C}}'_{c'111} & & & \\ & -\tilde{\mathbb{C}}'_{c'121} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\tilde{\mathbb{C}}'_{c'1j1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{c'211} & & & \\ & \mathbb{C}_{c'221} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{C}_{c'2j1} \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{c'i11} & & & \\ & \mathbb{C}_{c'i21} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{C}_{c'ij1} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

gde su

$$(3.12)\quad A_{pq1}=\begin{pmatrix} l^2_{pq1}\sum_{r=1}^{k}m_{pqr} & l_{pq1}l_{pq2}\sum_{r=2}^{k}m_{pqr} & l_{pq1}l_{pq3}\sum_{r=3}^{k}m_{pqr} & \cdots \\ l_{pq1}l_{pq2}\sum_{r=2}^{k}m_{pqr} & l^2_{pq2}\sum_{r=2}^{k}m_{pqr} & l_{pq2}l_{pq3}\sum_{r=3}^{k}m_{pqr} & \cdots \\ l_{pq1}l_{pq3}\sum_{r=3}^{k}m_{pqr} & l_{pq2}l_{pq3}\sum_{r=3}^{k}m_{pqr} & l^2_{pq3}\sum_{r=3}^{k}m_{pqr} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ l_{pq1}l_{pqk}m_{pqk} & l_{pq2}l_{pqk}m_{pqk} & l_{pq3}l_{pqk}m_{pqk} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$(3.13)\quad \mathbb{B}_{bpq1}=\sum_{n=q-1}^{q}\left(\begin{matrix} b_{pn1}H^2_{pq1}+l^2_{pq1}\sum_{r=2}^{k}b_{pnr} & l_{pq1}(b_{pn2}H_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k}b_{pnr}) \\ l_{pq1}(b_{pn2}H_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k}b_{pnr}) & b_{pn2}H^2_{pq2}+l^2_{pq2}\sum_{r=3}^{k}b_{pnr} \\ l_{pq1}(b_{pn3}H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}b_{pnr}) & l_{pq2}(b_{pn3}H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}b_{pnr}) \\ \cdot & \cdot \\ l_{pq1}b_{pnk}H_{pqk} & l_{pq2}b_{pnk}H_{pqk} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \ldots_{pqk} m_{pqk} \\ \ldots_{pqk} m_{pqk} \\ \ldots_{pqk} m_{pqk} \\ \cdot \\ \ldots_{k} m_{pqk} \end{matrix}\right), \quad (p=1,2,\ldots,i;\ q=1,2,\ldots,j),$$

$$\left.\begin{matrix} b_{pn3} H_{pq3} + l_{pq3} \sum_{r=4}^{k} b_{pnr}) & \ldots & l_{pq1} b_{pnk} H_{pqk} \\ b_{pn3} H_{pq3} + l_{pq3} \sum_{r=4}^{k} b_{pnr}) & \ldots & l_{pq2} b_{pnk} H_{pqk} \\ \ldots_{n3} H^2_{pq3} + l^2_{pq3} \sum_{r=4}^{k} b_{pnr} & \ldots & l_{pq3} b_{pnk} H_{pqk} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ l_{pq3} b_{pnk} H_{pqk} & \ldots & b_{pnk} H^2_{pqk} \end{matrix}\right), \quad (p=1,2,\ldots,i;\ q=1,2,\ldots,j),$$

.14)
$$\tilde{B}_{bpq1} = \begin{pmatrix} b_{pq1}H_{pq1}H_{p,q+1,1}+l_{pq1}l_{p,q+1}\sum_{r=2}^{k} b_{pqr} & l_{pq1}(b_{pq2}H_{p,q+1,2}+l_{p,q+\ldots} \\ l_{p,q+1,1}(b_{pq2}H_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} b_{pqr}) & b_{pq2}H_{pq2}H_{p,q+1,2}+l_{pq2}l_{p,q\ldots} \\ l_{p,q+1,1}(b_{pq3}H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k} b_{pqr}) & l_{p,q+1,2}(b_{pq3}H_{pq3}+l_{pq3}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ l_{p,q+1,1}b_{pqk}H_{pqk} & l_{p,q+1,2}b_{pqk}H_{pqk}\ldots \end{pmatrix}$$

.15)
$$\mathbb{B}_{b'pq1} = \sum_{n=p-1}^{p} \begin{pmatrix} b'_{nq1}H^2_{pq1}+l^2_{pq1}\sum_{r=2}^{k} b'_{nqr} & l_{pq1}(b'_{nq2}H_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} b'_{nqr}\ldots \\ l_{pq1}(b'_{nq2}H_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} b'_{nqr}) & b'_{nq2}H^2_{pq2}+l^2_{pq2}\sum_{r=3}^{k} b'_{nqr}\ldots \\ l_{pq1}(b'_{nq3}H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k} b'_{nqr}) & l_{pq2}(b'_{nq3}H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k} b'_{nqr}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ l_{pq1}b'_{nqk}H_{pqk} & l_{pq2}b'_{nqk}H_{pqk} \end{pmatrix}$$

.16)
$$\tilde{\mathbb{B}}_{b'pq1} = \begin{pmatrix} b'_{pq1}H_{pq1}H_{p+1,q1}+l_{pq1}l_{p+1,q1}\sum_{r=2}^{k} b'_{pqr} & l_{pq1}(b'_{pq2}H_{p+1,q2}+l_{p+1\ldots} \\ l_{p+1,q1}(b'_{pq2}H_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} b'_{pqr}) & b'_{pq2}H_{pq2}H_{p+1,q2}+l_{pq2}l_{p+1\ldots} \\ l_{p+1,q1}(b'_{pq3}H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=3}^{k} b'_{pqr}) & l_{p+1,q2}(b'_{pq3}H_{pq3}+l_{pq3}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ l_{p+1,q1}b'_{pqk}H_{pqk} & l_{p+1,q2}b'_{pqk}H_{pq\ldots} \end{pmatrix}$$

.17)
$$\mathbb{C}_{cpq1} = \sum_{n=q-1}^{q} \begin{pmatrix} c_{pn1}h^2_{pq1}+l^2_{pq1}\sum_{r=2}^{k} c_{pnr} & l_{pq1}(c_{pn2}h_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} c_{pnr}\ldots \\ l_{pq1}(c_{pn2}h_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} c_{pnr}) & c_{pn2}h^2_{pq2}+l^2_{pq2}\sum_{r=3}^{k} c_{pnr}\ldots \\ l_{pq1}(c_{pn3}h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k} c_{pnr}) & l_{pq2}(c_{pn3}h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k} c_{pnr}\ldots \\ \cdot & \cdot \\ l_{pq1}c_{pnk}h_{pqk} & l_{pq2}c_{pnk}h_{pqk} \end{pmatrix}$$

.18)
$$\tilde{\mathbb{C}}_{cpq1} = \begin{pmatrix} c_{pq1}h_{pq1}h_{p,q+1,1}+l_{pq1}l_{p,q+1,1}\sum_{r=2}^{k} c_{pqr} & l_{pq1}(c_{pq2}h_{p,q+1,2}+l_{p,q\ldots} \\ l_{p,q+1,1}(c_{pq2}h_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k} c_{pqr}) & c_{pq2}h_{pq2}h_{p,q+1,2}l_{pq2}l_{p,q\ldots} \\ l_{p,q+1,1}(c_{pq3}h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k} c_{pqr}) & l_{p,q+1,2}(c_{pq3}h_{pq3}+l_{pq\ldots} \\ \cdot & \cdot \\ l_{p,q+1,1}c_{pqk}h_{pqk} & l_{p,q+1,2}c_{pqk}h_{\ldots} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
\cdots qr) & l_{pq1}(b_{pq3}H_{p,q+1,3}+l_{p,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}b_{pqr}) & \cdots & l_{pq1}b_{pqk}H_{p,q+1,k} \\
\cdots pqr & l_{pq2}(b_{pq3}H_{p,q+1,3}+l_{p,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}b_{pqr}) & \cdots & l_{pq2}b_{pqk}H_{p,q+1,k} \\
 & b_{pq3}H_{pq3}H_{p,q+1,3}+l_{pq3}l_{p,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}b_{pqr} & \cdots & l_{pq3}b_{pqk}H_{p,q+1,k} \\
 & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & l_{p,q+1,3}b_{pqk}H_{pqk} & \cdots & b_{pqk}H_{pqk}H_{p,q+1,k}
\end{pmatrix}
(p=1,2,\ldots,i-1;\ q=1,2,\ldots,j-1),
$$

$$
\begin{pmatrix}
\cdots q3H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}b'_{nqr}) & \cdots & l_{pq1}b'_{nqk}H_{pqk} \\
\cdots q3H_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}b'_{nqr}) & \cdots & l_{pq2}b'_{nqk}H_{pqk} \\
\cdots H^{2}_{pq3}+l^{2}_{pq3}\sum_{r=4}^{k}b'_{nqr} & \cdots & l_{pq3}b'_{nqk}H_{pqk} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
l_{pq3}b'_{nqk}H_{pqk} & \cdots & b'_{nqk}H^{2}_{pqk}
\end{pmatrix},\quad (p=1,2,\ldots,i;\ q=1,2,\ldots,j),
$$

$$
\begin{pmatrix}
\cdots qr) & l_{pq1}(b'_{pq3}H_{p+1,q3}+l_{p+1,q3}\sum_{r=4}^{k}b'_{pqr}) & \cdots & l_{pq1}b'_{pqk}H_{p+1,qk} \\
\cdots qr & l_{pq2}(b'_{pq3}H_{p+1,q3}+l_{p+1,q3}\sum_{r=4}^{k}b'_{pqr}) & \cdots & l_{pq2}b'_{pqk}H_{p+1,qk} \\
 & b'_{pq3}H_{pq3}H_{p+1,q3}+l_{pq3}l_{p+1,q3}\sum_{r=4}^{k}b'_{pqr} & \cdots & l_{pq3}b'_{pqk}H_{p+1,qk} \\
 & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & l_{p+1,q3}b'_{pqk}H_{pqk} & \cdots & b'_{pqk}H_{pqk}H_{p+1,qk}
\end{pmatrix},\ (p=1,2,\ldots,i-1;\ q=1,2,\ldots,j-1),
$$

$$
\begin{pmatrix}
\cdots 3h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c_{pnr}) & \cdots & l_{pq1}c_{pnk}h_{pqk} \\
\cdots 3h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c_{pnr}) & \cdots & l_{pq2}c_{pnk}h_{pqk} \\
\cdots {}^{2}_{pq3}+l^{2}_{pn3}\sum_{r=4}^{k}c_{pnr} & \cdots & l_{pq3}c_{pnk}h_{pqk} \\
\cdot & \cdots & \cdot \\
l_{pq3}c_{pnk}h_{pqk} & \cdots & c_{pnk}h^{2}_{pqk}
\end{pmatrix},\quad (p=1,2,\ldots,i;\ q=1,2,\ldots,j),
$$

$$
\begin{pmatrix}
\cdots qr) & l_{pq1}(c_{pq3}h_{p,q+1,3}+l_{p,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}c_{pqr}) & \cdots & l_{pq1}c_{pqk}h_{p,q+1,k} \\
\cdots pqr & l_{pq2}(c_{pq3}h_{p,q+1,3}+l_{p,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}c_{pqr}) & \cdots & l_{pq2}c_{pqk}h_{p,q+1,k} \\
 & c_{pq3}h_{pq3}h_{p,q+1,3}+l_{pq3}l_{p,q+1,3}\sum_{r=4}^{k}c_{pqr} & \cdots & l_{pq3}c_{pqk}h_{p,q+1,k} \\
 & \cdot & \cdots & \cdot \\
 & l_{p,q+1,3}c_{pqk}h_{pqk} & \cdots & c_{pqk}h_{pqk}h_{p,q+1,k}
\end{pmatrix},\ (p=1,2,\ldots,i-1;\ q=1,2,\ldots,j-1),
$$

$$(3.19)\quad \mathbb{C}_{dpq1} = \sum_{n=p-1}^{p} \begin{pmatrix} c'_{nq1}h^2_{pq1}+l^2_{pq1}\sum_{r=2}^{k}c'_{nqr} & l_{pq1}(c'_{nq2}h_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k}c'_{nqr}) & \cdots \\ l_{pq1}(c'_{nq2}h_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k}c'_{nqr}) & c'_{nq2}h^2_{pq2}+l^2_{pq2}\sum_{r=3}^{k}c'_{nqr} & \cdots \\ l_{pq1}(c'_{nq3}h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c'_{nqr}) & l_{pq2}(c'_{nq3}h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c'_{nqr}) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \\ l_{pq1}c'_{nqk}h_{pqk} & l_{pq2}c'_{nqk}h_{pqk} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$(3.20)\quad \mathbb{C}_{cpq1} = \begin{pmatrix} c'_{pq1}h_{pq1}h_{p+1,q1}+l_{pq1}l_{p+1,q1}\sum_{r=2}^{k}c'_{pqr} & l_{pq1}(c'_{pq2}h_{p+1,q2}+l_{p+1,\ldots} & \cdots \\ l_{p+1,q1}(c'_{pq2}h_{pq2}+l_{pq2}\sum_{r=3}^{k}c'_{pqr}) & c'_{pq2}h_{pq2}h_{p+1,q2}+l_{pq2}l_{p+1,\ldots} & \cdots \\ l_{p+1,q1}(c'_{pq3}h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr}) & l_{p+1,q2}(c'_{pq3}h_{pq3}+l_{pq3}\ldots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \\ l_{p+1,q1}c'_{pqk}h_{pqk} & l_{p+1,q2}c'_{pq2}h_{pqk} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$(3.21)\quad \mathbb{C}_{gpq1} = \begin{pmatrix} l_{pq1}\sum_{r=1}^{k}m_{pqr} & & & \\ & l_{pq2}\sum_{r=2}^{k}m_{pqr} & & \\ & & l_{pq3}\sum_{r=3}^{k}m_{pqr} & \\ & & & \ddots \\ & & & & l_{pqk}m_{pqk} \end{pmatrix}$$

$$(p=1,2,\ldots,i;\ q=1,2,\ldots,j)\ ,$$

gde su sa ' obeleženi redukovani koeficienti gušenja, b'_{pqr}, redukovanih prigušnica, odnosno redukovane krutosti redukovanih opruga, c'_{pqr}, koje u položaju stabilne ravnoteže leže u ravnima uporednim sa ravni Opr, dok b_{pqr}, odnosno c_{pqr}, pripadaju redukovanim prigušnicama, odnosno redukovanim oprugama koje leže u ravnima uporednim sa ravni Oqr.

Matrice sa oznakom ' pretstavljaju transponovane matrice odgovarajućih matrica, naprimer, $\mathbb{C}'_{c'111}$ je transponovana matrica matrice $\mathbb{C}_{c'111}$.

Ako primenimo Lagranž-ove diferencijalne jednačine druge vrste (1.17), dobijamo sistem diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficientima (1.18).

Pretpostavićemo da je rešenje tog sistema diferencijalnih jednačina dato u obliku (1.23), gde je

$$(3.22)\qquad \{q\} = \begin{Bmatrix}\varphi\\ \psi\end{Bmatrix} \quad i \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} r_\varphi \\ r_\psi \end{Bmatrix}\ ,$$

pa dobijamo sistem homogenih linearnih algebarskih jednačina (1.24). Uslov

$$\left.\begin{array}{lcl} \ldots h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr}) & \cdots & l_{pq1}c'_{pqk}h_{pqk} \\ \ldots h_{pq3}+l_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr}) & \cdots & l_{pq2}c'_{pqk}h_{pqk} \\ \ldots {}^{2}_{pq3}+l^{2}_{pq3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr} & \cdots & l_{pq3}c'_{pqk}h_{pqk} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ l_{pq3}c'_{pqk}h_{pqk} & \cdots & c'_{pqk}h^{2}_{pqk} \end{array}\right), \quad (p=1,2,\ldots,i;q=1,2,\ldots,j),$$

$$\left.\begin{array}{lllcl} \ldots qr) & l_{pq1}(c'_{pq3}h_{p+1,q3}+l_{p+1,q3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr}) & \cdots & l_{pq1}c'_{pqk}h_{p+1,qk} \\ \ldots qr & l_{pq2}(c'_{pq3}h_{p+1,q3}+l_{p+1,q3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr}) & \cdots & l_{pq2}c'_{pqk}h_{p+1,qk} \\ & c'_{pq3}h_{pq3}h_{p+1,q3}+l_{pq3}l_{p+1,q3}\sum_{r=4}^{k}c'_{pqr} & \cdots & l_{pq3}c'_{pqk}h_{p+1,qk} \\ & \cdot & \cdots & \cdot \\ & l_{p+1,q3}c'_{pqk}h_{pqk} & \cdots & c'_{pqk}h_{pqk}h_{p+1,qk} \end{array}\right), \quad (p=1,2,\ldots,i-1; q=1,2,\ldots,j-1),$$

da pored trivijalnog rešenja $\{r\} = \{o\}$ postoje i druga rešenja pretstavlja karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema

$$(3.23) \qquad F_{ijk}(u) = \left| u^2 \mathbb{A} + u \mathbb{B} + \mathbb{C} \right| = o \, .$$

3.1.2 Homogen vezan prostorni sistem od iik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom

Posmatraćemo homogen prostorni sistem čija je nepomična rešetka, za koju su vezana k-struka matematička klatna, kvadratnog oblika, drugim rečima oscilatorni sistem čine i slojeva od po i k-strukih matematičkih klatna.

Kod homogenog sistema su sve mase klatna uzajamno jednake, ..., sve dužine klatna uzajamno jednake, $l_{pqr} = l$, sve redukovane prigušnice vezane na uzajamno jednakim redukovanim udaljenostima od početka odgovarajućih klatna, $H_{pqr} = H$, sve redukovane opruge vezane na uzajamno jednakim redukovanim udaljenostima od početka odgovarajućih klatna, $h_{pqr} = h$, svi redukovani koeficienti gušenja uzajamno jednaki, $b_{por} = b_{pqr} = b$, $b'_{oqr} = b'_{pqr} = b$, i sve redukovane krutosti redukovanih opruga uzajamno jednake, $c_{por} = c_{pqr} = c$, $c'_{oqr} = c'_{pqr} = c$, $(p=1,2,\dots,i; q=1,2,\dots,j; r=1,2,\dots,k)$.

Tada zbog

$$(3.24) \qquad \begin{gathered} \mathbb{A}_{pq1} = l^2 m\, \mathbb{N}_k,\ \mathbb{B}_{bpq1} = 2bl^2 \mathbb{S}_k,\ \tilde{\mathbb{B}}_{bpq1} = bl^2 \mathbb{S}_k,\ \mathbb{B}_{dpq1} = 2bl^2 \mathbb{S}_k,\ \tilde{\mathbb{B}}_{dpq1} = bl^2 \mathbb{S}_k, \\ \mathbb{C}_{gpq1} = lm\, \mathbb{D}_k,\ \mathbb{C}_{cpq1} = 2cl^2 \mathbb{V}_k,\ \tilde{\mathbb{C}}_{cpq1} = cl^2 \mathbb{V}_k,\ \mathbb{C}_{dpq1} = 2cl^2 \mathbb{V}_k,\ \tilde{\mathbb{C}}_{dpq1} = cl^2 \mathbb{V}_k, \end{gathered}$$

matrice elementi supermatrica (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) postaju redom

$$(3.25) \qquad \begin{gathered} l^2 m\, \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{N}_k,\ bl^2 \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k,\ 2bl^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{S}_k,\ bl^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{S}_k, \\ lm\, \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{D}_k,\ cl^2 \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k,\ 2cl^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k,\ cl^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k, \end{gathered}$$

a same supermatrice dobijaju oblik

$$(3.26) \qquad \begin{gathered} \mathbb{A}_\alpha = l^2 m\, \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{N}_k,\ \mathbb{B}_\varphi = b\, l^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k, \\ \mathbb{B}_\psi = b\, l^2 \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{S}_k,\ \mathbb{C}_{g\alpha} = l\, m\, \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{D}_k\ , \ (\alpha = \varphi, \psi), \\ \mathbb{C}_{c\varphi} = c\, l^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k,\ \mathbb{C}_{c\psi} = c\, l^2 \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k. \end{gathered}$$

Najzad, inerciska matrica, matrica rasipanja i kvazelastična matrica postaju

$$(3.27) \qquad \mathbb{A} = l^2 m \begin{pmatrix} \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{N}_k & \\ & \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{N}_k \end{pmatrix},$$

$$(3.28) \qquad \mathbb{B} = bl^2 \begin{pmatrix} \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k & \\ & \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{S}_k \end{pmatrix},$$

$$(3.29)\quad \mathbb{C} = [illegible]\begin{pmatrix} I_i\otimes I_i\otimes I_k & \\ & I_i\otimes I_i\otimes I_k\end{pmatrix} + c[illegible]\begin{pmatrix} I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k & \\ & J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k\end{pmatrix},$$

gde smo koristili matrice (1.28), (1.29), (1.31), (1.38), (2.19) kao i Kroneker-ov proizvod matrica uveden u 2.1.2 . Sada karakteristična jednačina posmatranog oscilatornog sistema dobija oblik

$$(3.30)\quad F_{iik}(u) = \left| u^2\begin{pmatrix} I_i\otimes I_i\otimes I_k & \\ & I_i\otimes I_i\otimes I_k\end{pmatrix} + \delta u\begin{pmatrix} I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k & \\ & J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k\end{pmatrix} + \omega^2\begin{pmatrix} I_i\otimes I_i\otimes D_k & \\ & I_i\otimes I_i\otimes D_k\end{pmatrix} - \tilde{\omega}^2\begin{pmatrix} I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k & \\ & J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k\end{pmatrix}\right| = 0,$$

Izvršimo li sada sličnu transformaciju, tojest oduzimanje vrsta od vrsta i stubaca od stubaca kod poslednjih činilaca u Kroneker-ovim proizvodima, karakteristična jednačina postaje

$$(3.31)\quad F_{iik}(y) = \begin{vmatrix} y^2 I_i\otimes I_i\otimes I_k + \alpha y I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k^* + I_i\otimes I_i\otimes J_k + \beta I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k^* & 0 \\ 0 & y^2 I_i\otimes I_i\otimes I_k + \alpha y J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k^* + I_i\otimes I_i\otimes J_k + \beta J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k^* \end{vmatrix} = 0,$$

gde smo upotrebili matrice (1.38), (1.39), (1.40) i (2.19).

Razvijemo li ovu determinantu prema Laplace-u, [33, str. 21], dobijamo karakterističnu jednačinu u obliku proizvoda dve determinante

$$(3.32)\quad F_{iik}(y) = \left| y^2 I_i\otimes I_i\otimes I_k + \alpha y I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k^* + I_i\otimes I_i\otimes J_k + \beta I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k^* \right| \cdot \left| y^2 I_i\otimes I_i\otimes I_k + \alpha y J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k^* + I_i\otimes I_i\otimes J_k + \beta J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k^* \right| = 0 .$$

Odavde sledi da je

$$(3.33)\quad F_{1iik}(y) = \left| y^2 I_i\otimes I_i\otimes I_k + \alpha y I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k^* + I_i\otimes I_i\otimes J_k + \beta I_i\otimes J_i^{(v)}\otimes V_k^* \right| = 0,$$

i

$$(3.34)\quad F_{2iik}(y) = \left| y^2 I_i\otimes I_i\otimes I_k + \alpha y J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k^* + I_i\otimes I_i\otimes J_k + \beta J_i^{(v)}\otimes I_i\otimes V_k^* \right| = 0 .$$

Izraz sličan (3.33) i (3.34) je naveo Egervary [57, str. 222] za pravougaonu dvodimenzionu rešetku sa nepokretnim granicama, samo su kod njega materijalne tačke bile uzajamno vezane elastičnim vezama.

S obzirom na osobinu Kroneker-ovog proizvoda matrica [15, str. 96]

$$(3.35)\quad (A + B)\otimes C = (A\otimes C) + (B\otimes C),$$

determinanta (3.33) može i ovako da se napiše

$$(3.36)\quad F_{1iik}(y) = \left| I_i \otimes (y^2 I_i\otimes I_k + \alpha y J_i^{(v)}\otimes V_k^* + I_i\otimes J_k + \beta J_i^{(v)}\otimes V_k^*) \right| = 0 .$$

Očigledno je da ova determinanta ima elemente, uzajamno jednake i jednake po vrednosti izrazu u maloj zagradi, samo duž glavne dijagonale, dok su svi ostali elementi jednaki nuli, pa može da se napiše u obliku stepena

$$F_{1iik}(y) = (y^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \alpha y\, \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{J}_j^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k^*)^i = o \,.$$

Ako uzmemo da je izložilac i = 1, dobijamo

(3.36) $$F_{11ik}(y) = y^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \alpha\, y\, \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k^* = o \,.$$

Uporedi li se ovaj obrazac sa (2.23) odmah se vidi da je

(3.37) $$F_{11ik}(y) \equiv F_{1ik}(y) \,.$$

Unesemo li sada ovu vrednost za $F_{11ik}(y)$ u izraz (3.35), sledi da je

(3.38) $$\underline{F_{1iik}(y) = \mathbb{I}_i \otimes F_{1ik}(y)} \,,$$

ili rečima, determinanta (3.33) pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice i-tog reda $\mathbb{I}_i$ (i je broj slojeva) i karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom, pričvršćenom na redukovanoj udaljenosti H od početka odgovarajućeg klatna, i po jednom redukovanom oprugom privezanom, na redukovanoj udaljenosti h od početka odgovarajućeg klatna, za nit toga klatna (osobenosti svakog sloja).

Postupno razvijanje izraza (3.34), napisanog u obliku determinante, daje rekurzivni obrazac

(3.39) $$F_{2iik}(y) = (y^2 \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + 2\alpha y \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{S}_k^* + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + 2\beta \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k^*)\, F_{2i,i-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{S}_k^* + \beta \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k^*)^2\, F_{2i,i-2,k}(y) = o \,.$$

Kako je [15,str.96]

(3.40) $$(\mathbb{A}\, \mathbb{B}) \otimes (\mathbb{C}\, \mathbb{D}) = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C})(\mathbb{B} \otimes \mathbb{D}) \,,$$

ili rečima, Kroneker-ov proizvod dva proizvoda od po dve matrice, jednak je proizvodu Kroneker-ovih proizvoda odgovarajućih matrica, to je za $\mathbb{A} = \mathbb{B}$ i $\mathbb{C} = \mathbb{D}$

(3.41) $$\mathbb{A}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C})^2 ,$$

tojest, Kroneker-ov proizvod kvadrata matrica jednak je kvadratu Kroneker-ovog proizvoda tih matrica.

Prema tome je

$$[\mathbb{I}_i \otimes (\alpha y \mathbb{S}_k^* + \beta \mathbb{V}_k^*)]^2 = \mathbb{I}_i^2 \otimes (\alpha y \mathbb{S}_k^* + \beta \mathbb{V}_k^*)^2 = \mathbb{I}_i \otimes (\alpha y \mathbb{S}_k^* + \beta \mathbb{V}_k^*)^2 ,$$

zbog čega rekurzivni obrazac (3.39) postaje

(3.42) $$F_{2iik}(y) = \mathbb{I}_i \otimes [(y^2 \mathbb{I}_k + 2\alpha y \mathbb{S}_k^* + \mathbb{J}_k + 2\beta \mathbb{V}_k^*)\, F_{2i,i-1,k}(y) - (\alpha y \mathbb{S}_k^* + \beta \mathbb{V}_k^*)^2\, F_{2i,i-2,k}(y)] = o \,.$$

Uzmemo li da je prvi indeks i = 1 i uporedimo li dobijeni izraz sa (2.24), uzimajući pri tom u obzir da je ovde 2 kao indeks samo oznaka, a nije povezan sa brojem klatna, odnosno slojeva, dobijamo da je, slično (3.38)

(3.43) $$F_{2iik}(y) = I_i \otimes F_{1ik}(y) \,,$$

tojest, determinanta (3.34) pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice i-tog reda I_i (i je redni broj sloja uporednog sa ravni Opr, dok je u prodjašnjem slučaju bio redni broj sloja uporednog sa ravni Oqr) i karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom, pričvršćenom na redukovanoj udaljenosti H od početka odgovarajućeg klatna, i po jednom redukovanom oprugom pričvršćenom, na redukovanoj udaljenosti h od početka odgovarajućeg klatna, za konac toga klatna.

Koristimo li izraze (3.38) i (3.43) dobijamo, zbog (3.32), karakterističnu jednačinu posmatranog oscilatornog sistema u obliku

(3.44) $$F_{iik}(y) = [\, I_i \otimes F_{1ik}(y) \,][\, I_i \otimes F_{1ik}(y) \,] = o \,,$$

ili ako primenimo vezu (3.40), sledi

$$F_{iik}(y) = (I_i \; I_i) \otimes [F_{1ik}(y)]^2 = o \,.$$

Pošto je $(I_i \; I_i) = I_i$ dobijamo konačan izraz za karakterističnu jednačinu

(3.45) $$F_{iik}(y) = I_i \otimes [F_{1ik}(y)]^2 = o \,,$$

ili, karakteristična jednačina malih slobodnih oscilacija homogenog prostornog sistem od iik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom je ustvari Kroneker-ov proizvod jedinične matrice i-tog reda, I_i, i kvadrata karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom i po jednom redukovanom oprugom. I kod prostornog i kod ravanskog sistema su redukovane prigušnice pričvršćene na redukovanoj udaljenosti H od početka odgovarajućih klatna, a redukovane opruge su pričvršćene na redukovanoj udaljenosti h od početaka odgovarajućih klatnâ, za nit tih klatnâ.

3.1.3 Homogen vezan prostorni sistem od iik klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku

Ako prigušnice i opruge kod svakog klatna redukujemo na same materijalne tačke, kao u 1.1.3, onda redukovane udaljenosti prigušnica i redukovane udaljenosti opruga postaju jednake dužinama klatna, H = 1, h = 1. Tada je zbog (1.30) s = 1, a zbog (1.32) v = 1, pa matrice S_k^* i V_k^* postaju jedinične matrice, $S_k^* = I_k$, $V_k^* = I_k$.

Karakteristična jednačina takvog oscilatornog sistema je

$$(3.46)\qquad {}^1F_{iik}(y) = \left| I_i \otimes [y^2 I_i + (\alpha y + \beta) J_i^{(v)}] \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| \cdot$$
$$\cdot \left| [y^2 I_i + (\alpha y + \beta) J_i^{(v)}] \otimes I_i \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 ,$$

a ovo može, pomoću matrice (2.31), da se napiše i u ovom obliku

$$(3.47)\qquad {}^1F_{1iik}(y) = \left| I_i \otimes M_i^{(v)} \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 ,$$

i

$$(3.48)\qquad {}^1F_{2iik}(y) = \left| M_i^{(v)} \otimes I_i \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 .$$

Lako može da se pokaže da i sada važi

$$(3.49)\qquad \underline{{}^1F_{1iik}(y) = I_i \otimes {}^1F_{1ik}(y)} ,$$

tojest, determinanta (3.47) pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice i-tog reda, I_i, i karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku svakog klatna.

Za rekurzivni obrazac (3.39) sada dobijamo

$$(3.50)\qquad {}^1F_{2iik}(y) = [(y^2+2\alpha y+2\beta) I_i \otimes I_k + I_i \otimes J_k]\, {}^1F_{2i,i-1,k}(y) -$$
$$- [(\alpha y+\beta) I_i \otimes I_k]^2\, {}^1F_{2i,i-2,k}(y) = 0 ,$$

ili ako se pozovemo na obrazac (3.41) i rezultat uporedimo sa (2.33), sledi

$$(3.51)\qquad \underline{{}^1F_{2iik}(y) = I_i \otimes {}^1F_{1ik}(y)} ,$$

ili, determinanta (3.48) pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice I_i i karakteristične jednačina malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistem od ik klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku svakog klatna.

Konačno dobijamo karakterističnu jednačinu malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog prostornog sistema od iik klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku u obliku

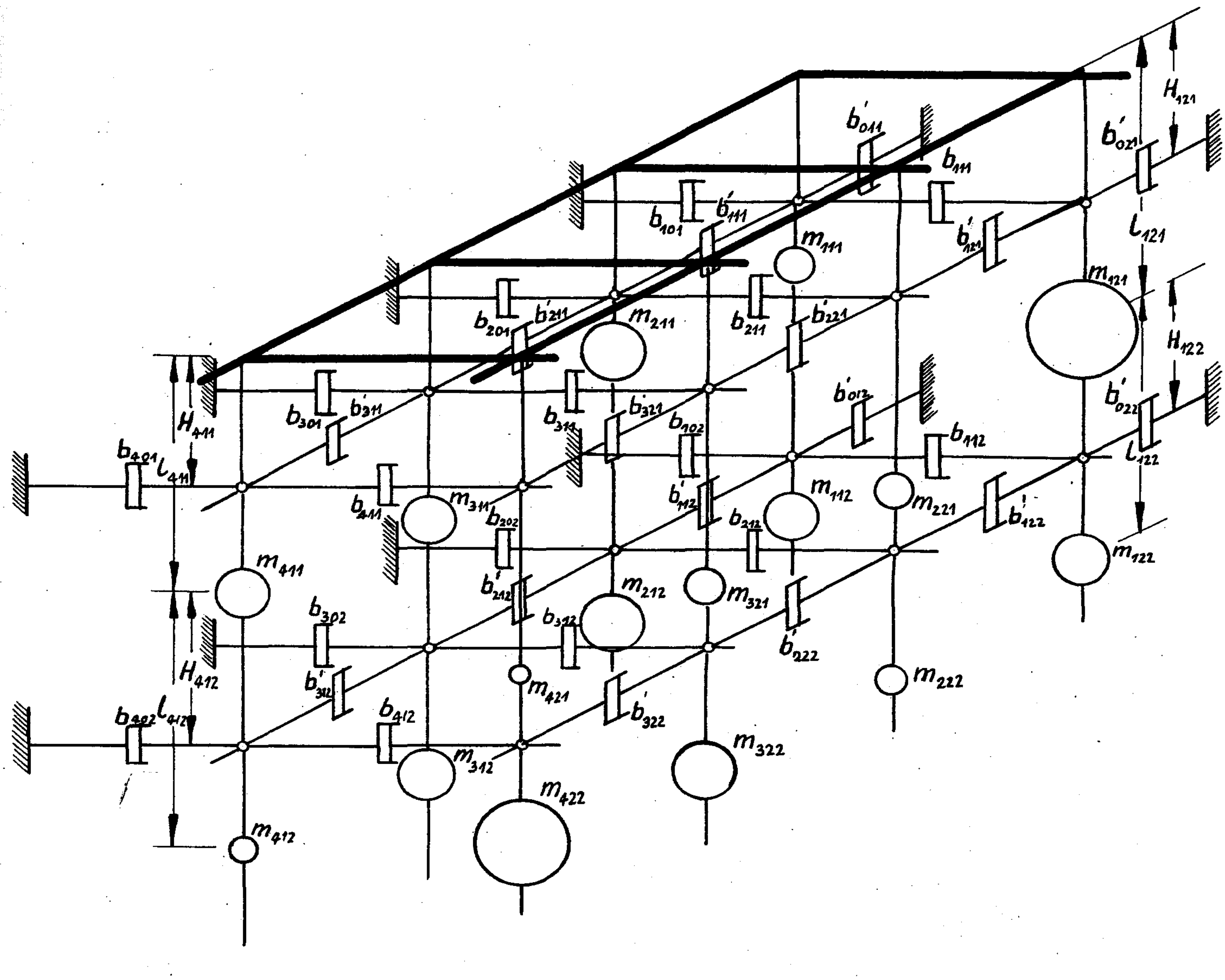
$$(3.52)\qquad \underline{\underline{{}^1F_{iik}(y) = I_i \otimes [{}^1F_{1ik}(y)]^2 = 0}} ,$$

koja ustvari pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice i-tog reda, I_i, i kvadrata karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom prigušnicom i po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku svakog klatna.

3.2 PROSTORNI SISTEMI SA PRIGUŠNICAMA

3.2.1 Vezan prostorni sistem od ijk klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Dat je prostorni oscilatorni sistem koje je jednak sistemu prikaza-



H121
b'011
b'021
b111
b101
b'111
b'121
L121
m111
m121
H122
b201
b'211
m211
b211
b'221
H411
b301
b'311
b311
b'321
b102
b'012
b'022
b112
L122
b401
L411
b411
m311
b'112
m112
m221
b202
b212
b'122
m122
m411
b'212
m212
m321
b302
b312
b'222
H412
b'312
m421
m222
b402
L412
b412
b'322
m312
m322
m422
m412

SLIKA. 13.

nom u 3.1.1 bez opruga (sl.13). Prvi sloj sistema je dat na sl.8 .

Dvostruka kinetička energija sistema je izražena u matričnom obliku (1.13), dvostruka Reli-ova funkcija rasipanja u matričnom obliku (1.15), a dvostruka potencijalna energija u matričnom obliku (1.57), gde su inercijska matrica, matrica rasipanja i kvazielastična matrica date se (3.5).

Tada je karakteristična jednačina data u obliku (1.59).

3.2.3 Homogen vezan prostorni sistem od iik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom

Zbog ranije opisanih osobina homogenog sistema karakteristična jednačina oscilatornog sistema koji se sastoji od i slojeva od po i k-strukih matematičkih klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom postaje

$$(3.53)\quad {}^2F_{iik}(y) = \begin{vmatrix} y^2 I_i \otimes I_i \otimes I_k + \omega y\, I_i \otimes J_i^{(v)} \otimes S_k^* + I_i \otimes I_i \otimes J_k & 0 \\ 0 & y^2 I_i \otimes I_i \otimes I_k + \omega y\, J_i^{(v)} \otimes I_i \otimes S_k^* + I_i \otimes I_i \otimes J_k \end{vmatrix} = 0 ,$$

a ona se razdvaja na dve determinante

$$(3.54)\quad {}^2F_{1iik}(y) = \left| y^2 I_i \otimes I_i \otimes I_k + \omega y\, I_i \otimes J_i^{(v)} \otimes S_k^* + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 ,$$

i

$$(3.55)\quad {}^2F_{2iik}(y) = \left| y^2 I_i \otimes I_i \otimes I_k + \omega y\, J_i^{(v)} \otimes I_i \otimes S_k^* + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 .$$

Može da se pokaže, kao u 3.1.2, da je determinanta (3.54) ustvari Kroneker-ov proizvod jedinične matrice I_i i karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom, pričvršćenom za nit odgovarajućeg klatna na redukovanoj udaljenosti $\bar{v}$ od početka tog klatna.

$$(3.56)\quad \underline{{}^2F_{1iik}(y) = I_i \otimes {}^2F_{1ik}(y)} .$$

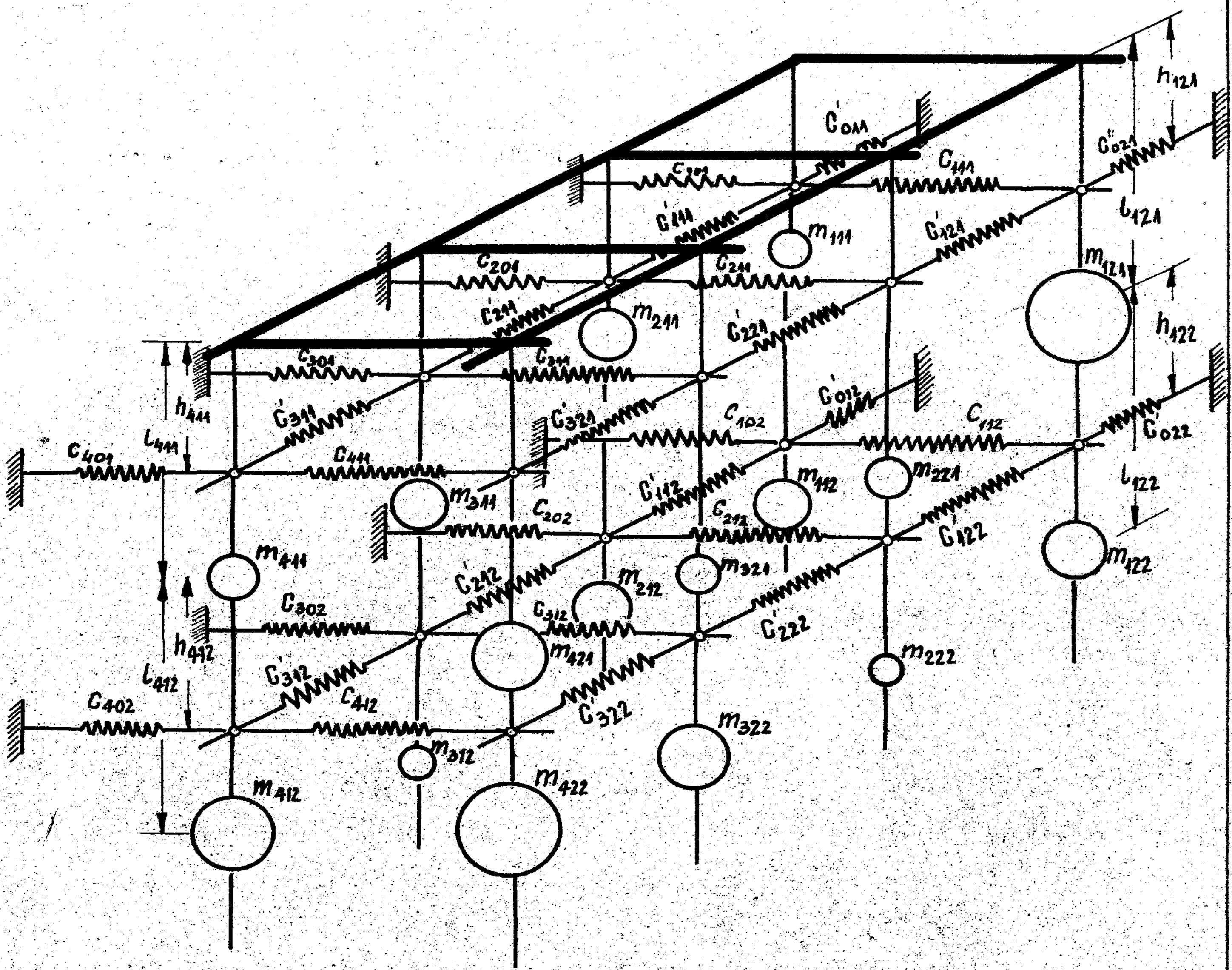
Lako se dokazuje da i za determinantu (3.55) važi

$$(3.57)\quad \underline{{}^2F_{2iik}(y) = I_i \otimes {}^2F_{1ik}(y)} .$$

Tada karakteristična jednačina malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog prostornog sistema od iik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom postaje

$$(3.58)\quad \underline{\underline{{}^2F_{iik}(y) = I_i \otimes [{}^2F_{1ik}(y)]^2 = 0}} ,$$

i pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice I_i i kvadrata karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog



h_{121}
C'_{011}
C'_{021}
C_{101}
C_{111}
l_{121}
C'_{111}
m_{111}
C'_{121}
m_{121}
C_{201}
C_{211}
C'_{211}
m_{211}
C'_{221}
h_{122}
C_{301}
C_{311}
h_{411}
C'_{311}
C'_{321}
C_{102}
C'_{012}
C_{112}
C'_{022}
C_{401}
l_{411}
C_{411}
m_{311}
C'_{112}
m_{112}
m_{221}
l_{122}
C_{202}
C_{212}
C'_{122}
m_{411}
C'_{212}
m_{212}
m_{321}
m_{122}
C_{302}
C_{312}
h_{412}
m_{421}
C'_{222}
l_{412}
C'_{312}
C_{412}
m_{222}
C_{402}
C'_{322}
m_{312}
m_{322}
m_{412}
m_{422}

SLIKA. 14.

sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom prigušnicom. I kod prostornog i kod ravanskog sistema su redukovane prigušnice pričvršćene za konce klatna na redukovanoj udaljenosti H od početka odgovarajućeg klatna.

3.2.3 Homogen vezan prostorni sistem od iik klatna sa po jednom prigušnicom redukovanom na samu materijalnu tačku

U ovom slučaju matrica S_k^* postaje jedinična matrica, $S_k^* = I_k$, pa je odgovarajuća karakteristična jednačina

$$(3.59)\qquad \begin{aligned} {}^2F_{iik}(y) = {} & \left| I_i \otimes (y^2 I_i + \alpha y\, J_i^{(v)}) \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| \cdot \\ & \cdot \left| (y^2 I_i + \alpha y\, J_i^{(v)}) \otimes I_i \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 , \end{aligned}$$

a ona se razdvaja na dve determinante

$$(3.60)\qquad {}^2F_{1iik}(y) = \left| I_i \otimes (Q_i^{(v)} \otimes I_k + I_i \otimes J_k) \right| = 0 ,$$

i

$$(3.61)\qquad {}^2F_{2iik}(y) = \left| Q_i^{(v)} \otimes I_i \otimes I_k + I_i \otimes I_i \otimes J_k \right| = 0 ,$$

gde smo koristili matricu (2.60).

Opet može da se pokaže da važi

$$(3.62)\qquad \underline{{}^2F_{1iik}(y) = I_i \otimes {}^2F_{1ik}(y)} ,$$

i

$$(3.63)\qquad \underline{{}^2F_{2iik}(y) = I_i \otimes {}^2F_{1ik}(y)} .$$

Prema tome karakteristična jednačina malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog prostornog sistema od iik klatna sa po jednom prigušnicom redukovanom na samu materijalnu tačku postaje

$$(3.64)\qquad \underline{\underline{{}^2F_{iik}(y) = I_i \otimes [{}^2F_{1ik}(y)]^2 = 0}} ,$$

i pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice I_i i kvadrata karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom prigušnicom redukovanom na samu materijalnu tačku.

3.3 PROSTORNI SISTEMI SA OPRUGAMA

3.3.1 Vezan prostorni sistem od ijk klatna sa po jednom redukovanom oprugom

Dat je prostorni oscilatorni sistem koji je jednak sistemu prikazanom u 3.1.1 bez prigušnica (sl.14). Prvi sloj sistema je dat na sl.10 .

Dvostruka kinetička energija ovog sistema je izražena u matričnom obliku (1.13), a dvostruka potencijalna energija u matričnom obliku (1.14), gde su inerciska matrica i kvazielastične matrice date sa (3.5).

Karakteristična jednačina je tada data u obliku (1.68).

3.3.2 Homogen vezan prostorni sistem od iik klatna sa po jednom redukovanom oprugom

Koristimo li poznate osobine homogenog sistema možemo ovako da napišemo karakterističnu jednačinu oscilatornog sistema koji se sastoji od i slojeva od po i k-strukih matematičkih klatna sa po jednom redukovanom oprugom

$$F_{iik}(z) = \begin{vmatrix} z\,\mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k^{*} & o \\ o & z\,\mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k^{*} \end{vmatrix} = o\,, \tag{3.65}$$

gde smo koristili sopstvenu vrednost (1.71).

Determinanta (3.65) se razdvaja na dve determinante

$$F_{1iik}(z) = \left| z\,\mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{V}_k^{*} \right| = o\,, \tag{3.66}$$

i

$$F_{2iik}(z) = \left| z\,\mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k + \beta\, \mathbb{J}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{V}_k^{*} \right| = o\,. \tag{3.67}$$

Može da se pokaže, kao u 3.1.2, da je determinanta (3.66) ustvari Kroneker-ov proizvod matrice $\mathbb{I}_i$ i karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom oprugom, pričvršćenom za nit odgovarajućeg klatna na redukovanoj udaljenosti h od početka tog klatna :

$$\underline{F_{1iik}(z) = \mathbb{I}_i \otimes F_{1ik}(z)}\,. \tag{3.68}$$

Slično važi i za determinantu (3.67) :

$$\underline{F_{2iik}(z) = \mathbb{I}_i \otimes F_{1ik}(z)}\,. \tag{3.69}$$

Za karakterističnu jednačinu malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog prostornog sistema od iik klatna sa po jednom redukovanom oprugom dobijamo ovaj izraz

$$F_{iik}(z) = \mathbb{I}_i \otimes [F_{1ik}(z)]^2 = o\,, \tag{3.70}$$

a on pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice $\mathbb{I}_i$ i kvadrata karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom redukovanom oprugom. Kod oba sistema, prostornog i ravanskog, su redukovane opruge vezane za niti klatna na redukovanoj udaljenosti h od početka odgovarajućeg klatna.

3.3.3 Homogen vezan prostorni sistem od iik klatna sa po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku

Zbog v = 1, matrica $\mathbb{V}_k^*$ postaje jedinična matrica, $\mathbb{V}_k^* = \mathbb{I}_k$, pa za karakterističnu jednačinu dobijamo

$$(3.71)\qquad {}^1F_{iik}(z) = \left| \mathbb{I}_i \otimes (z\,\mathbb{I}_i + \beta\,\mathbb{J}_i^{(v)}) \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k \right| \cdot \left| (z\,\mathbb{I}_i + \beta\,\mathbb{J}_i^{(v)}) \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k \right| = 0 ,$$

a ona se razdvaja na dve determinante

$$(3.72)\qquad {}^1F_{1iik}(z) = \left| \mathbb{I}_i \otimes (\mathbb{L}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k) \right| = 0 ,$$

i

$$(3.73)\qquad {}^1F_{2iik}(z) = \left| \mathbb{L}_i^{(v)} \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_k + \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{I}_i \otimes \mathbb{J}_k \right| = 0 ,$$

gde smo koristili matricu (2.83).

Lako se pokazuje da je i u ovom slučaju

$$(3.74)\qquad \underline{{}^1F_{1iik}(z) = \mathbb{I}_i \otimes {}^1F_{1ik}(z)} ,$$

i

$$(3.75)\qquad \underline{{}^1F_{2iik}(z) = \mathbb{I}_i \otimes {}^1F_{1ik}(z)} .$$

Karakteristična jednačina malih oscilacija homogenog vezanog prostornog sistema od iik klatna sa po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku dobija, prema tome, ovaj oblik

$$(3.76)\qquad \underline{\underline{{}^1F_{iik}(z) = \mathbb{I}_i \otimes [{}^1F_{iik}(z)]^2 = 0}} ,$$

i pretstavlja Kroneker-ov proizvod jedinične matrice i-tog reda, $\mathbb{I}_i$, i kvadrata karakteristične jednačine malih slobodnih oscilacija homogenog vezanog ravanskog sistema od ik klatna sa po jednom oprugom redukovanom na samu materijalnu tačku svakog klatna.

L I T E R A T U R A

1 Udžbenici i monografije

[1] A.A.Andronov, A.A.Vitt i S.E.Haĭkin, Teorija Kolebaniĭ, Fizmatgiz, Moskva, 1959

[2] Ivan M.Babakov, Teorija kolebaniĭ, Gostehizdat, Moskva, 1958

[3] W.G.Bickley and A.Talbot, An Introduction to the Theory of Vibrations, Oxford, Clarendon Oress, 1961

[4] C.B.Biezeno und R.Grammel, Technische Dynamik, zweite Auflage, Bd. I, II, Springer verlag, Berlin, 1953

[5] Anton Bilimović, Racionalna Mehanika II, Mehanika sistema, Naučna Knjiga, Beograd, 1951

[6] R.E.D.Bishop and D.C.Johnson, The Mechanics of Vibrations, Cambridge University Press, 1960

[7] B.V.Bulgakov, Kolebanija, Gostehizdat, Moskva, 1954

[8] R.F.Chisnell, Vibrating Systems, The Free Press, Glencoe, 1960

[9] Lothar Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1963

[10] R.Courant and D.Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol.I, II, Interscience Publishers, New York, First english edition, 1953

[11] R.A.Frazer, W.J.Duncan and A.R.Collar, Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations, Cambridge University Press, 1955

[12] F.R.Gantmacher und M.G.Krein, Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme, Akademie Verlag, Berlin, 1960

[13] G.Goldstein, Klassičeskaja Mehanika, Gostehizdat, Moskva, 1957

[14] D.Ter Haar, Elements of Hamiltonian Mechanics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961

[15] Paul R.Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, Second Edition, D.Van Nostrand Company Inc., Princeton, N.J., 1958

[16] Den J.P.Hartog, Mechanical Vibrations, 4th Edition, McGraw Hill, New York, 1956

[17] Erhard Hübner, Technische Schwingungslehre, Springer-Verlag, Berlin, 1957

[18] D.S.Jones, Electrical and Mechanical Oscillations, The Free Press, Glencoe, 1961

[19] Jovan Karamata, Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala, SAN, Posebna izdanja, Knjiga CLIV, Beograd, 1949

[20] Tong N.Kin, Theory of Mechanical Vibrations, John Wiley & Sons, New York, 1960

[21] Karl Klotter, Technische Schwingungslehre, 2. Auflage, Bd.II, Springer-Verlag, Berlin, 1960

[22] N.W.McLachlan, Theory of Vibrations, Dover Publications, New York, 1951

[23] Wilchelm Macke, Wellen, ein Lehrbuch der Theoretischen Physik, Nachdruck der zweiten Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1962

[24] Erwin Madelung, Die mathematischen Hilfsmitteln des Physikers, Springer-Verlag, Berlin, 1957

[25] Kurt Magnus, Schwingungen, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1961

[26] Ernst Oehler, Technische Schwingungslehre, Verlag W.Girardet, Essen, 1952

[27] Louis A. Pipes, Matrix Methods for Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1963

[28] Danilo P. Rašković, Teorija oscilacija, Naučna knjiga, Beograd, 1960

[29] Alfred Recknagel, Physik, Schwingungen und Wellen, Veb Verlag Technik, Berlin, 1957

[30] Erich Schneider, Mathematische Schwingungslehre, Springer-Verlag, Berlin, 1924

[31] M.Schuler, Mechanische Schwingungslehre, Tl.I, II, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1958, 1959

[32] Dž.L. Sing, Klassičeskaja Dinamika, Fizmatgiz, Moskva, 1963

[33] V.I.Smirnov, Kurs vysšeĭ matematiki, Tom III/1, izdanie sed'moe, Gostehizdat, Moskva, 1956

[34] Fritz Söchtig, Berechnung mechanischer Schwingungen, Wien, Springer-Verlag, 1951

[35] John William Strutt, Baron Rayleigh, The Theory of Sound, Vol.I, II, Dover Publications, New York, 1945

[36] Gabor Szegö, Orthogonal Polynomials, The American Mathematical Society, Providence, 1959

[37] E.T.Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Fourth Edition, Cambridge University Press, 1959

[38] R.Zurmühl, Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Dritte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1961

2 Radovi

[39] S.N.Afriat, Composite Matrices, Quart.J.Math. Oxford (2),5(1954), 81-98

[4o] A.Basch, Über Schwingungen von Systemen mit zwei Freiheitsgraden, Österr.Ingenieur-Arch., Bd.8(1954), H.2/3, 83-86

[41] C.B.Biezeno und R. Grammel, Die Eigenschaften der Determinanten aus Maxwellschen Einflusszahlen und ihre Anwendnug bei Eigenwertproblemen, Ingenieur-Arch , Bd.8(1937), H.5, 364-372

[42] G.N.Bojadžiev i N.V.Stojanov, Razpoloženie na dvoľno mahalo pri periodičnite mu dviženija oko ravnovesnoto položenije v edna ravnina, podložena na rotacija okollo edna neľna vertikalna os, God.na Maš.-Elektr.Inst. Tom 7(196o), Kn.1, 15-24

[43] O.Bottema, Die Schwingungen eines zusammengesetzten Pendels, Jahres d.Dtsch.mathem. Vereinigung, Bd.41(1932), H.1/4, 42-6o

[44] O.Bottema, Die Schwingungszahlen linear-elastischen Systeme, Ing.-Arch.,Bd.3o(1961), H.4, 288-291

[45] G.Bradistilov, Existenz und Eigenschaften der periodischen Bewegungen des n-fachen Pendels in der Ebene, Godišnik Uni.vSofia, Fac.Phys.-Mth., 38(1942), Livre 1, 249-282

[46] G.Bradistilov, The Position of Three Consecutively Connected Mathematical Pendulums in One Plane in their Periodic Motion about a Position of Stable Equilibrium, Bulgar.Akad.Nauk, Izv.Mat.Inst. 1, No2 (1954), 135-145

[47] G.Bradistilov, Položenie sistemy treh posledovatel'no soedinnenyh matematičeskih majatnikov nahodjaščiesja v odnoǐ ploskosti, pri ee periodičeskom dviženii vokrug položenija ustoǐčivog ravnovešija, Prikl. matem. i mehanika, 19(1955), No.1, 113-118

[48] G.Bradistilov, Sur les solutions périodiques et asymptotiques du mouvement autour de l'état d'équilibre d'un système de N-pendules physiques succesivement liés dans un plan, Dokl.Bolgar AN, 8(1955),4,5-8

[49] G.Bradistilov, Über periodische Bewegungen des n-fachen Pendels in der Ebene, Math.Annalen, Bd.116(1932), 6o2-6o9

[5o] G.Bradistilov, Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene, Math.Annalen, 116(1932), 181-2o3

[51] G.Bradistilov et G.Boyadjiev, Cas général des mouvements périodiques relatifs d'un pendule physique double situé dans un plan soumis à rotation, Bull.Inst.polit. din Jaşi, Ser.nouă, 8(12)(1962),Fasc.1-2, 74-82

[52] G.Bradistilov und G. Boyadjiev, Exixtenz periodischer Bewegungen eines n-fachen Pendels im Falle dass einige Wurzeln seiner charakteristischen Gleichung ein Vielfaches einer and ren sind, ZAMM, 39(1959), H. 7/8, 284-29o

[53] G.Bradistilov i G.Bojadžiev, Obšč slučaĭ na relativni periodični dviženija na dvoĭno fizično mahalo ležašče v edna ravnina podložena na rotacija, Godišnik Maš.-Elektr.Inst, 6(1959), Kn.1, 1-12

[54] G.Bradistilov i G.Bojadžiev, Relativni periodični i asimptotični dviženija na n-kratno fizično mahalo v edna ravnina, podložena na rotacija s postojanna skorost, Bulgar.Akad.Nauk, Izv.Mat.Inst.,3(1959), Kn2,19-3?

[55] G.Bradistilov i G.Bojadžiev, Relativni periodični dviženija na edna sistema ot n fizični mahal razpoloženi v'v vertikalna ravnina, kojato se v'rti okolo edna neĭna vertikalna os, Godišnik Maš.Elektr.Inst., 5(1958) Kn.1, 5-21

[56] R.Courant, Zur Theorie der kleinen Schwingungen, ZAMM, 2(1922), H.4, 278-285

[57] E.Egerváry, On Hypermatrices whose Blocks are Commutable in Pairs and their Applications in Lattice-Dynamics, Acta Sci.Math. Szeged, 15(1954), Fasc. 3-4, 211-222,

[58] Jenő Egerváry, Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és annak alkalmazásáról a rácsdinamikában,Magy.tud.Akad.Alkalm.mat. int.közl.,3[1954(1955)], No.1-2, 31-47

[59] E.Egerváry, Über einige Anwendungen von Hypermatrizen, deren Blöcke vertauschbar sind, ZAMM, 37(1957)

[6o] Paul Erdős, Kleine Schwingungen dynamischer Systeme, ZAMP, 4(1953), H.3, 215-219

[61] Sigurd Falk, Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette, Ing.-Arch.,23(1955), H.5, 314-328

[62] Sigurd Falk, Klassifikation gedämpfter Schwingungssysteme und Eingrenzung ihrer Eigenwerte, Ing.-Arch., 29(196o), H.6, 436-444

[63] O.Föppl, Drehschwingungen von Wellen und geradlinige Schwingungen vom Massen zwischen Fed rn, ZAMM, 1(1921), H.5, 367-373

[64] K.A.Foss, Co-ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic System, J.Appl.Mech., 25(1958), 361-364

[65] A.T.Fuller and R.H.Macmillan, Expressions for the Damping and Natural Frequency of Linear Systems, Quart.Journ.Mech.and Applied Math.,19(1956) Pt.3, 345-359

[66] P.Funk, Über die Berechnung der kritischen Drehzahlen bei homogenen und fast homogenen Maschinen, ZAMM, 15(1935), H.3, 113-12o

[67] R. Grammel, Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme, Ing.-Arch., 10(1939), H.1, 35-46

[68] R. Grammel, Über Schwingungsketten, Ing.-Arch., 14(1943), H.4, 213-[illegible]

[69] W. Hahn, Die mechanische Deutung einer geometrischen Differenzengleichung, ZAMM, 33(1953), H.8/9, 270-[illegible]

[70] K. Hampl, Zur Berechnung von Schwingungen mit quadratischer Dämpfung, Ing.-Arch., 6(1935), H.3, 213-21[illegible]

[71] J.P. den Hartog, Recent Work in Vibrations, J.Appl.Mech., 4(1937), A.136 - A-138

[72] E. Hübner, Eigenschwingungszahlen zusammengestzter Schwinguns.Systeme, Ing.-Arch., 29(1960), H.2, 134-139

[73] Božidar D. Jovanović i Danilo P. Rašković, Amortizovane oscilacije jednog specijalnog oscilatornig sistema sa dinamičkim i mešovitim vezama, Tehnika, 16(1961), Br.6, 1286-T135

[74] Božidar D. Jovanović, Kleine Ausschläge besonderer Schwingerketten, Publ. de l'Inst.Math.,Beograd, 3(17)(1963), 13-26

[75] Božidar D. Jovanović, Kleine Auschläge in räumlichen Schwingungsgittern, ZAMM, 43(1963), Sonderheft, T79-T80

[76] Božidar D. Jovanović, On Small Vibrations of special Oscillating Systems, u štampi

[77] Karl Klotter, Free Oscillations of Systems Having Quadratic Damping and Arbitrary Restoring Forces, J.Appl.Mech., 22(1955), 493-499

[78] Karl Klotter, Kopplung mechanischer Schwingungen, Ing.-Arch.,5(1934), H.3, 156-163

[79] H. E. Koch, Mechanische Siebketten, ZAMM, 14(1934), H.3, 173-177

[80] R. Ludwig, Der Einfluss kleiner Änderungen der Koeffizienten der Differentialgleichung eines schwingungsfähigen Systems auf Dämpfung und Frequenz, ZAMM, 38(1958), H.3/4, 1[illegible]-162

[81] R. E. McCalley, Co-ordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic System, Discussion, J.Appl.Mech.,26(1959), 306-307

[82] Georg Pick, Über die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen von Schwingungsproblemen, ZAMM, 2(1922), H.5, 353-357

[83] Theodor Pöschl, Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten, Ing.-Arch., 20(1952), H.3, 189-194; 21(1953), H.6, 396-398; 22(1954), H.4, 294

[84] Theodor Pöschl und Lothar Collatz, Über die Berechnung und Darstellung der Eigenfrequenzen homogener Maschinen mit Zusatzdrehmasse, ZAMM 18(1938), H.3, 186-194

[85] W. Quade, Die Schwingungsvorgänge in Systemen mit zwei Freiheitsgraden, ZAMM, 14(1934), H.6, 365-366

[86] K. Quade, Über die Schwingungsvorgänge in gekoppelten Systemen, Ing.-Arch., [illegible]

[87] Danilo P. Rašković, Neke karakteristike frekventnih jednačina malih oscilacija specijalnih sistema sa dinamičkim i mešovitim vezama, Zbornik rad. Mat. Inst. S.A.N., [illegible]

[88] Danilo P. Rašković, Neke osobine skalara jedne specijalne Jakobijeve matrice, Zbornik rad. SAN, 63, Mat. Inst. SAN, 7(1959), [illegible]

[89] Danilo P. Rašković, On Small Damped Vibrations of Some Particular Vibrating Systems with Dynamic and Mixed Constraints, ZAMM, 41(1961), T1o5

[90] Danilo P. Rašković, On Some Characteristics of the Frequency Equation of Small Vibrations of Holonomic Conservative Systems with Static Couplings, Quart. of Appl. Mathematics, 14(1956), No.3, 3o9-311

[91] Danilo P. Rašković, On Some Characteristics of the Frequency Equations of Small Vibrations of Some Particular Holonomic Conservative Systems Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 9(1956), Pt.3, 334-344

[92] Danilo P. Rašković, Über die Eigenschaften der Frequenzgleichung eines schwingenden Systems, ZAMM, 37(1957), H. 7/8, 278-279

[93] Pál Rózsa, Elasztikusan kapcsolt korpuszkuláris rendszerek kis rezgéseinek vizsgálata mátrixszámítás alkalmazásával, Magy. tud. Akad. Alkalm. mat. int. közl., 2(1955), 51-82

[94] Pal Roža, O primenenii kletočnih matric v mehanike korpuskuljarnyh sistem, Usp. mat. nauk, 14(1959), vyp.4(88), 2o7-211

[95] Gerhart Rudolph, Resonanzschwingungen von quadratisch gedämpften Systemen, ZAMM, 19(1939), H.1, 56-57

[96] D.E. Rutherford, Some Continuant Determinants Arising in Physics and Chemistry, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, A62(1947), 229-236; A63(1952), 232-241

[97] Giovanni Scotto Lavina, Il calcolo delle vibrazioni propire e di quelle forzate e smorzate nei sistemi discreti con collegamenti elastici limitati, Rend. Ist. lombardo sci. e lettere, Sci. mat., fis., 3(196o), 527-548

[98] R.L. Prall-Mach, Co-ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic System, Discussion, J. Appl. Mech., 26(1959), 3o7

[99] A. Weigand, Die gedämpfte homogene Schwingungskette, ZAMM, 28(1958), H.1/2, 29-39

[100] A. Weigand, Die homogene Schwingungskette mit innerer und äusserer Dämpfung, Wiss. Zschr. d. Hochsch. f. Eltechn Ilmenau, 4(1958), H.1, 17-24

[101] H. Weinel, Eine Erweiterung des Grammelschen Verfahrens zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenfuktionen, Ing.-Arch., 1o(1939), H.4, 283-291

[102] H. Thoemle, Kinetische Nachgiebigkeit und Steifigkeit, ZAMM, 42(1962) H.3, 89-1o2

S A D R Ž A J