UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
OOUR ZA MATEMATIKU, MEHANIKU I ASTRONOMIJU
INSTITUT ZA MATEMATIKU

DOKTORSKA DISERTACIJA

ANALITIČKE METODE REŠAVANJA KONTURNIH PROBLEMA ZA JEDNOSTRUKO I VIŠESTRUKO POVEZANE OBLASTI

KANDIDAT:
BOŠKO DAMJANOVIĆ

U V O D

Problemi odredjivanja analitičkih ili polianalitičkih funkcija i nekih njihovih osobina na osnovu funkcionalnih veza datih na konturi, obuhvaćeni su teorijom konturnih problema analitičkih i polianalitičkih funkcija.

Jedan od predmeta teorije konturnih problema za analitičke i neanalitičke funkcije čini izučavanje diferencijalnih, integralnih i funkcionalnih jednačina koje opisuju različite prirodne pojave. Tačne granice ove discipline nije lako odrediti. S obzirom da se metode integralnih, diferencijalnih i parcijalnih jednačina te topologije, funkcionalne i numeričke analize koriste i u teoriji konturnih problema kao što se i metode konturnih problema koriste u navedenim disciplinama to se uporedo sa razvojem raznih teorijskih i primenjenih grana matematike i teorija konturnih problema iz dana u dan sve više razvija i razvoj jednih uslovljava razvoj drugih. Danas je teorija konturnih problema za analitičke funkcije jedna od najuspešnijih grana savremene matematike koje imaju važne primene u različitim oblastima nauke. Oblast konturnih problema analitičkih i polianalitičkih funkcija obuhvata raznovrsne probleme klasične matematičke fizike i savremene tehnike i ekonomike kao na primer teoriju atomskog jezgra, automatskog upravljanja, teoriju igara, masovnog opsluživanja i mnoge druge. Veoma je teško izdvojiti neku drugu matematičku teoriju, koja bi bila tešnje povezana sa različitim prilozima od teorije konturnih problema.

Prve formulacije ovih problema čiji granični uslovi predstavljaju funkcionalnu vezu izmedju izračunatih u različitim tačkama konture graničnih vrednosti traženih analitičkih funkcija pripadaju

Riemann-u. Na početku 20. veka su konturne probleme sa pomeranjem izučavali Hilbert, Hazeman a nešto kasnije Carleman. Medjutim, prvi fundamentalni rezultati u teoriji konturnih problema za analitičke, polianalitičke i uopštene analitičke funkcije potiču od Vekue, Musheliševilija, Gahova i Litvinčuka. Oni su učinili prve pokušaje sistematizacije ove teorije. Zahvaljujući prvenstveno njima teorija konturnih problema za analitičke funkcije formirana je kao samostalna matematička disciplina. Iako se ona za poslednjih 30 godina značajno obogatila važnim rezultatima vezanim prvenstvenc za imena Zverovića, Černeckog, Baškareva, Nečaeva, itd., ipak su danas još nedovoljno istraženi konturni problemi sa pomeranjem na konačnim Riemann-ovim površinama problemi sa pomeranjem u klasi uopštenih analitičkih funkcija, konturni problemi sa mešovitim graničnim uslovima kao i problemi sa pomeranjem u slučaju deo po deo neprekidnih koeficijenata na složenim konturama, itd. Ovim savremeni sadržaj konturnih problema nije ni izdaleka iscrpljen.

Ovaj rad se sastoji od 3 glave. U prvoj glavi su navedeni neki osnovni pojmovi i neke poznate činjenice iz kompleksne analize i posebno iz teorije konturnih problema Riemann-a, Hazeman-a i Carleman-a. U njoj je ceo materijal izložen sažeto, bez dokaza, pri čemu su navedena samo ona shvatanja i činjenice koje se neposredno koriste u sledećim glavama. Druga i treća glava sadrže glavne rezultate autora. U drugoj glavi se daju kompletna rešenja nekih konturnih problema za analitičke i polianalitičke funkcije u jednostruko povezanim oblastima, dok su u trećoj glavi za iste klase funkcija ti rezultati uopšteni za višestruko povezane oblasti.

Autor smatra svojom prijatnom dužnošću da na ovom mestu izrazi iskrenu zahvalnost profesorima dr Ljubomiru Protiću i dr Miloš

Čanku na podršci i pomoći prilikom ulaženja u problematiku rada. Takodje im se zahvaljuje na nizu korisnih sugestija koje su doprinele oformljenju izgleda ove teze.

Beograd, decembar 1986. god.

I GLAVA

UVOD U TEORIJU KONTURNIH PROBLEMA SA POMERANJEM

1.1. NEKA POMOĆNA TVRDJENJA I DEFINICIJE

Uslov Höldera. Neka je $\varphi(t)$ funkcija kompleksne promenljive t, zadana na nekom skupu Z vrednosti te promenljive. Funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava uslov Höldera na tom skupu ako za bilo koje dve vrednosti t_1, t_2 promenljive t na tom skupu važi

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant A|t -t|^{\mu}$$

gde su A i μ pozitivne konstante.

Krivom Ljapunova naziva se kriva koja ima svojstvo da u svakoj njenoj tački ugao $\theta(s)$ izmedju tangente na krivu i konstantnog pravca, kao funkcija dužine luka s, zadovoljava uslov Höldera.

Prostom zatvorenom konturom se naziva zatvorena orjentisana kriva Ljapunova u kompleksnoj ravni, koja ograničava jednostruko povezanu oblast.

Indeks neprekidne funkcije. Označimo sa C(L) Banach-ovu algebru svih neprekidnih na L kompleksnih funkcija. Neka je $G \in C(L)$ i G(t) je različito od nule u svakoj tački sa L. Ako je L prosta zatvorena kontura onda se sa $[\arg G(t)]_L$ označava potpuni priraštaj funkcije arg G(t), kada promenljiva t obilazi konturu L. Ako se L sastoji od nekoliko zatvorenih kontura onda je

$$[\arg G(t)]_L = \sum_{J=1}^{n} [\arg G(t)]_L \text{ .}$$

Broj $\frac{1}{2\pi}$ $[\arg G(t)]_L$ se naziva indeksom funkcije G(t) i označava se sa Ind G(t). Indeks neprekidne funkcije je ceo broj koji ima sledeća svojstva: Ako su $G,\ F \in C(L)$ i $G(t)\cdot F(t) \neq 0$ $(t \in L)$ tada je

a) $\mathrm{Ind}\,(G(t)\cdot F(t)) = \mathrm{Ind}\,G(t) + \mathrm{Ind}\,F(t)$.

b) $\mathrm{Ind}\,\frac{F(t)}{G(t)} = \mathrm{Ind}\,F(t) - \mathrm{Ind}\,G(t)$.

c) $\mathrm{Ind}\,(G(t))^n = n\cdot\mathrm{Ind}\,G(t)$.

Iz a) sledi da za funkciju $G \in C(L)$ $(G(t) \neq 0)$ možemo izabrati broj n i tačku α tako da je $\mathrm{Ind}\,((t-\alpha)^n\cdot G(t)) = 0$.

Indeks funkcije se može takodje izraziti kroz izmenu logaritma te funkcije. Lako se vidi da je

$$\mathrm{Ind}\,G(t) = \frac{1}{2\pi i}(\ln G(t))_L = \frac{1}{2\pi}\int_L d\,\arg G(t).$$

1.2. Uopštena teorema Liouville-a

Neka su D^+ i D^- oblasti koje se dodiruju duž neke glatke zatvorene krive L. Ako se funkcije $F_1(z)$ i $F_2(z)$, analitičke respektivno u oblastima D^+ i D^-, sa isključenjem konačnog broja $n+1$ tačaka: $z_0=\infty$, z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ u kojima one mogu imati polove respektivno reda m_k $(k=0,1,2,\ldots,n)$, sa glavnim delovima

$$G_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right) = \frac{c_1^k}{z-z_k} + \ldots + \frac{c_{m_k}^k}{(z-z_k)^{m_k}},$$

$$G_0(z) = c_1^0 z + \ldots + c_{m_0}^0\cdot z^{m_0},$$

gde su c_i^k $(k=0,1,\ldots,n)$, $(i=1,2,\ldots,m_k)$ proizvoljne kompleksne konstante, poklapaju na konturi L, onda one predstavljaju u celoj ravni jednu jedinstvenu racionalnu analitičku funkciju

$$F(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right),$$

gde je C proizvoljna kompleksna konstanta. Polovi mogu ležati kako u oblastima D^+ i D^- tako i na konturi L.

1.3. GRANIČNE VREDNOSTI NEPREKIDNE FUNKCIJE

Neka je funkcija $\phi(z)$ tačke z kompleksne ravni zadana i neprekidna u okolini krive L, osim možda u tačkama same krive L. Funkcija $\phi(z)$ je neprekidno produživa na tačku t konture L sleva (ili sdesna) ako $\phi(z)$ teži k odredjenoj graničnoj vrednosti $\phi^{+}(t)$ (ili $\phi^{-}(t)$) kada z teži ka t po bilo kojem putu ostajući sleva (ili sdesna) od t u odnosu na konturu L. U tom i samo tom slučaju govorimo da funkcija $\phi(z)$ ima u tački t konture L graničnu vrednost sleva (ili graničnu vrednost sdesna). Govoreći o graničnim vrednostima funkcije $\phi(z)$ smatraćemo da su one izračunate po bilo kojem putu, sleva ili sdesna od krive L respektivno. U nekim slučajevima pod graničnim vrednostima $\phi^{+}(t)$ i $\phi^{-}(t)$ funkcije $\phi(z)$ podrazumevaju se granične vrednosti po netangentnim putevima, ili tačnije, granične vrednosti funkcije $\phi(z)$, kad z teži ka tački t sleva ili sdesna od L, tako da je oštar ugao izmedju odsečka $\overline{tz}$ i tangente na L u tački t veći od nekog fiksiranog (kako god malog) oštrog ugla. Takve granične vrednosti se ponekad nazivaju ugaonim graničnim vrednostima. One mogu postojati i onda kada ne postoje granične vrednosti po bilo kojem putu.

Osnovni problemi, karakteristični za klasičan pravac izučavanja graničnih svojstava analitičkih funkcija odredjenih u jednostruko povezanoj oblasti D kompleksne ravni z, ograničene Jordon-ovom krivom L, su:

a) Problem postojanja graničnih vrednosti, tj. pitanje o tome, pri kojim uslovima i u kom smislu postoje granične vrednosti funkcije $\phi(z)$ pri približavanju tačke z ka konturi L.

b) Problem graničnog predstavljanja funkcije $\phi(z)$ tj. pitanje o tome, pri kojim uslovima i pomoću kakvog analitičkog aparata može biti izražena zavisnost funkcije $\phi(z)$ od njene granične vrednosti na konturi L. Ovde je očigledno da će za različite klase analitičkih funkcija i analitički aparat biti različit.

c) Problem jedinstvenosti ili pitanje o tome, kakvim svojstvima treba snabdeti skup $S \subset L$, da bi se dve analitičke funkcije poklapale svuda u oblasti D ograničenoj konturom L ako se njihove granične vrednosti na S poklapaju.

Prvi rezultat u ispitivanju postojanja granične vrednosti analitičke funkcije predstavlja teorema Fatu (1906): Ako je analitička funkcija $\phi(z)$ ograničena u jediničnom krugu $D = \{z:|z| \leqslant 1\}$, $|\phi(z)| \leqslant M$, onda skoro svuda po Lebegovoj meri na jediničnoj kružnici $T = \{z;|z|=1\}$ postoje radijalne granične vrednosti $\phi(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} \phi(re^{i\theta})$. Pri iskazanim uslovima može se pokazati da postoje skoro svuda na L ne samo radijalne već i ugaone granične vrednosti.

1.4. INTEGRAL TIPA CAUCHY

Neka L označava deo po deo glatku krivu, i neka je funkcija $\phi(t)$ zadana na L, sa isključenjem eventualno konačnog broja tačaka, apsolutno integrabilna. Integral

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t - z} \tag{1.4.1}$$

gde je z bilo koja tačka ravni, se naziva integralom tipa Cauchy a funkcija $\varphi(t)$ gustinom. Ako tačka $z=t_o$ leži na konturi L onda integral $\phi(t_o)$ uopšte govoreći nema smisla. Medjutim za široku i važnu klasu funkcija $\varphi(t)$, možemo tom integralu dati odredjen smisao ako uvedemo pojam glavne vrednosti integrala Cauchy. U tu svrhu opišimo sa centrom u tački t_o kružnicu sa dovoljno malim radijusom ε da bi ona presekla krivu L tačno u dve tačke t_1 i t_2 i razmotrimo integral

$$\phi(t_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L-\ell} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_o} , \qquad (1.4.2)$$

gde ℓ označava luk $\widehat{t_1 t_2}$. Ako pri $\varepsilon \to 0$ taj integral teži ka odredjenoj graničnoj vrednosti, onda se ta granična vrednost naziva glavna vrednost integrala tipa Cauchy. Integral (1.4.1) postoji u običnom smislu ako integral (1.4.2) teži ka odredjenoj graničnoj vrednosti ma kakva god bila dužina luka ℓ, koji sadrži tačku t_o, samo ako ona teži nuli. Bitno u definiciji glavne vrednosti integrala jeste činjenica da se tačke t_1 i t_2 luka ℓ nalaze na jednakim rastojanjima od tačke t_o. Ako funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava uslov Höldera na nekom glatkom delu linije L, onda je funkcija $\phi(z)$ neprekidno produživa sleva i sdesna na taj deo. Ako funkcija $\varphi(t)$ ne zadovoljava uslov Höldera u okolini tačke $t_o \in L$ već samo u toj tački, onda i u tom slučaju $\phi(z)$ teži ka odredjenoj graničnoj vrednosti, kad z teži ka t_o, sleva ili sdesna krive L po bilo kom netangentnom putu, tj. kada oštar ugao izmedju odsečka $\overline{t_o z}$ i tangente na krivu L u tački t_o ostaje veći od neke, ma kako male, pozitivne veličine.

1.5. FORMULE PLEMELJA-SOHOCKOG

Ako je $L: t=t(s)$, $0 \leq s \leq \ell$, $t(0)=t(\ell)$, zatvorena glatka Jordan-ova kriva dužine ℓ na ravni kompleksne promenljive z, $\varphi(t)$ zadana na L kompleksna gustina integrala tipa Cauchy za koju pretpostavljamo da zadovoljava uslov Höldera

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq C|t_2 - t_1|^{\alpha} , \qquad 0 < \alpha \leq 1; \qquad (1.5.1)$$

D^+ odnosno D^- oblasti unutar odnosno van konture L, a

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \qquad z \notin L,$$

integral tipa Cauchy, onda za bilo koju tačku $t_o \in L$ postoje limesi

$$\phi^+(t_o) = \lim_{z\to t_o, z\in D^+} \phi(z),$$

$$\phi^-(t_o) = \lim_{z\to t_o, z\in D^-} \phi(z),$$

koji se izražavaju formulama Plemelja-Sohockog

$$\phi^+(t_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_o} + \frac{1}{2}\varphi(t_o) \tag{1.5.2}$$

$$\phi^-(t_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_o} - \frac{1}{2}\varphi(t_o)$$

odnosno, koji zadovoljavaju relacije

$$\phi^+(t_o) + \phi^-(t_o) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_o},$$

$$\phi^+(t_o) - \phi^-(t_o) = \varphi(t_o).$$

Integral duž konture L u desnim stranama formula Plemelja-Sohockog podrazumeva se u smislu Cauchy-jeve glavne vrednosti i predstavlja singularni integral. Na taj način prihvativši pri iskazanim uslovima $\phi^+(t)$ (ili $\phi^-(t)$) kao vrednost integrala $\phi(z)$ na L, dobijamo funkciju $\phi(z)$, neprekidnu u zatvorenoj oblasti $\overline{D^+} = D^+ \cup L$ odnosno u $\overline{D^-} = D^- \cup L$. Funkcija $\phi(z)$ analitička u D^+ i D^- neprekidno produživa na svaku tačku $t \in L$ kako sleva tako i sdesna konture L se naziva deo po deo analitičkom funkcijom sa linijom skoka L.

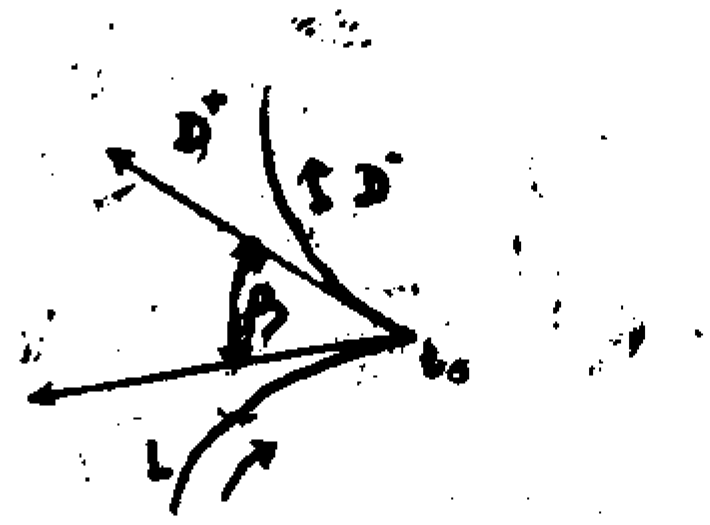
Ako je u (1.5.1) $\alpha<1$, onda su funkcije $\phi^+(t)$ i $\phi^-(t)$ takodje neprekidne po Hölderu na L sa istim eksponentom α, a ako je $\alpha=1$, onda sa bilo kojim eksponentom $\alpha'<1$. Za ugaonu tačku t_o vidi sl.

deo po deo glatke krive L formule Plemelja-Sohockog imaju oblik

$$\phi^{+}(t_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_o} + (1-\frac{\beta}{2\pi})\cdot\varphi(t_o),$$

$$\phi^{-}(t_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_o} - \frac{\beta}{2\pi}\cdot\varphi(t_o),$$

$$0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi.$$



Formule Plemelja-Sohockog igraju važnu ulogu pri rešavanju graničnih zadataka teorije funkcija i singularnih integralnih jednačina, a takodje pri rešavanju različitih praktičnih problema teorije funkcija.

Ako je L Jordan-ova kriva, a gustina $\varphi(t)$, kao i pre, neprekidna po Hölderu, onda formule (1.5.2) važe skoro svuda na L, pri čemu se pod $\phi^{+}(t_o)$ i $\phi^{-}(t_o)$ podrazumevaju ugaone granične vrednosti integrala tipa Cauchy respektivno iznutra i izvan konture L, ali funkcije $\phi^{+}(z)$ i $\phi^{-}(z)$ u tom slučaju, uopšte govoreći, nisu neprekidne u zatvorenim oblastima D^{+} i D^{-}.

1.6. Teorema Riemann-a o konformnom preslikavanju

Za ma kakve dve jednostruko povezane oblasti D_1 i D_2 proširene kompleksne ravni C, koje su različite od C, a takodje i od C bez neke njene tačke, postoji beskonačan broj analitičkih i jednolisnih u oblasti D_1 funkcija, od kojih svaka ostvaruje uzajamno jednoznačno i konformno preslikavanje oblasti D_1 na D_2. Pri tome za bilo koji par tačaka $a \in D_1$, $a \neq \infty$, i $b \in D_2$ i za bilo koji realni broj α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, postoji jedinstvena funkcija f(z) te klase za koju je $f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$. Uslov $\arg f'(a) = \alpha$ geometrijski označava da svaki beskonačno mali vektor, kojem je početak u tački a, pri preslikavanju $w = f(z)$ prelazi u beskonačno mali vektor čiji pravac obrazuje sa pravcem početnog vektora ugao α.

Riemann-ova teorema je osnovna teorema u teoriji konformnih preslikavanja i uopšte u geometrijskoj teoriji funkcija kompleksne promenljive. Zajedno sa njenim uopštavanjima na višestruko povezane oblasti ona ima veliku primenu u teoriji funkcija kompleksne promenljive, matematičke fizike, teorije elastoplastičnosti, aero i hidromehanike itd.

1.7. KONTURNI PROBLEM RIEMANN-A

Na prostoj, zatvorenoj, glatkoj konturi L, koja deli ravan kompleksne promenljive na unutrašnju oblast D^+ i spoljašnju oblast D^- zadane su kompleksne funkcije: $G(t)$ - koeficijent problema i $g(t)$ - slobodni član, koje zadovoljavaju uslov Hölder-a, te su prema tome ograničene na L, pri čemu funkcija $G(t)$ ni u jednoj tački konture ne uzima vrednost nula. Treba naći dve funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi^-(z)$, analitičke respektivno u D^+ i D^-, čije granične vrednosti na konturi L zadovoljavaju uslov

$$\phi^+(t) = G(t)\cdot\phi^-(t) + g(t). \qquad (1.7.1)$$

Ako označimo sa κ indeks funkcije $G(t)$ na konturi L, onda se rešenje konturnog problema Riemann-a u klasi funkcija predstavljivih integralima tipa Cauchy može u slučaju $\kappa \geqslant 0$ odrediti sa

$$\phi^\pm(z) = X^\pm(z)\cdot\Psi^\pm(z) + X^\pm(z)\cdot P_{\kappa-1}(z). \qquad (1.7.2)$$

Ovde je $P_{\kappa-1}(z)$ polinom stepena ne većeg od $\kappa-1$ sa proizvoljnim kompleksnim koeficijentima, $X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}$, $X^-(z) = z^{-\kappa}e^{\Gamma^-(z)}$,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln(t^{-\kappa}\cdot G(t))}{t-z}\,dt, \text{ a } \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\cdot(t-z)} .$$

Drugi sabirak na desnoj strani (1.7.2) je opšte rešenje homogenog problema $\phi^+(t) = G(t)\cdot\phi^-(t)$, a prvi sabirak je partikularno rešenje odgovarajućeg nehomogenog problema (1.7.1). Ako je $\kappa = 0$ onda problem ima jedinstveno rešenje odredjeno sa:

$$\phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)\cdot\Psi^{\pm}(z).$$

Ako je $\kappa < 0$ onda da bi rešenje $\phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z)\cdot\Psi^{\pm}(z)$ konturnog problema (1.7.1) postojalo neophodno je i dovoljno da bi komponenta $\Psi^-(z)$ integrala tipa Cauchy $\Psi(z)$ imala u tački $z = \infty$ nulu reda ne nižeg od $-\kappa+1$. Razlažući $\Psi^-(z)$ u red u okolini tačke $z = \infty$, dobijamo uslove rešivosti konturnog problema (1.7.1) pri $\kappa < 0$ u obliku:

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\cdot t^{k-1}dt = 0, \qquad k=1,2,\ldots,-\kappa-1.$$

Na taj način broj linearno nezavisnih rešenja l i broj linearno nezavisnih uslova rešivosti p konturnog problema Riemann-a odredjuje se sa $l=\max(0,\kappa+1)$, $p=\max(0,-\kappa-1)$.

1.8. Konturni problem Hazemana

Neka je L prosta zatvorena kriva Ljapunova koja deli ravan na oblasti D^+, koja sadrži koordinatni početak, i D^-, koja sadrži beskonačno daleku tačku. Konturni problem Hazemana se sastoji u nalaženju deo po deo analitičke funkcije sa linijom skoka L na kojoj je zadan konturni uslov

$$\phi^{+}(\alpha(t)) = G(t) \cdot \phi^{-}(t) + g(t) \qquad (1.8.1)$$

Ovde su $G(t)$ i $g(t)$ zadane funkcije iz klase $H_{\mu}(L)$, $G(t) \neq 0$ i $\alpha(t)$ direktno pomeranje koje zadovoljava uslove $\alpha'(t) \in H_{\mu}(L)$ i $\alpha'(t) \neq 0$ na L. Homeomorfno preslikavanje $\alpha(t)$ proste zatvorene glatke krive L na samu sebe nazivamo direktnim odnosno indirektnim pomeranjem u zavisnosti od toga da li ono čuva orijentaciju krive ili ne. Kako se oblasti D^{+} i D^{-}, na koje zadana kriva Ljapunova L deli ravan, mogu konformno preslikati na neke oblasti Δ^{+} i Δ^{-}, na koje je ravan podeljena nekom konturom Ljapunova Γ, pri čemu tačke $\alpha(t)$, pri preslikavanju oblasti D^{+} u Δ^{+}, i t, pri preslikavanju D^{-} u Δ^{-}, prelaze u jednu istu tačku nove konture Γ, to se pomeranje $\alpha(t)$ u konturnom uslovu (1.8.1) može ukloniti i na taj način konturni problem Hazemana na konturi L svesti na konturni problem Riemann-a na konturi Γ.

1.9. KONTURNI PROBLEM TIPA PROBLEMA HAZEMANA

Na prostoj, zatvorenoj, glatkoj konturi Ljapunov-a, koja deli ravan kompleksne promenljive na unutarnju oblast D^{+} i spoljnju oblast D^{-}, zadane su funkcije $G(t)$, $g(t)$ i $\alpha(t)$ koje zadovoljavaju uslov Höldera, pri čemu funkcije $G(t)$ i $\alpha'(t)$ ni u jednoj tački konture ne uzimaju vrednost nula i uz to $\alpha'(t)$ zadovoljava uslov Höldera. U konturnom problemu tipa problema Hazeman-a treba naći deo po deo analitičku funkciju $\{\phi^{+}(z), \phi^{-}(z)\}$ sa linijom skoka L ako je na njoj zadan konturni uslov oblika:

$$\phi^{+}(\alpha(t)) = G(t) \cdot \phi^{-}(t) + g(t) \qquad (1.9.1)$$

gde je $\alpha(t)$ indirektno pomeranje.

Konturni problem tipa problema Hazemana se može pomoću konformnog preslikavanja i zamene promenljivih svesti na konturni problem Hazemana. Da bi se to pokazalo dovoljno je, ne smanjujući opštost rasudjivanja, pretpostaviti da je konturni uslov (1.9.1) zadan na jediničnoj kružnici. Zaista, neka funkcije $u=u^+(z)$ i $u=u^-(z)$ konformno preslikavaju oblasti D^+ i D^- respektivno na unutrašnjost odnosno spoljašnost jedinične kružnice Γ. Sa $z^+(u)$ i $z^-(u)$ označimo inverzna preslikavanja. Zbog učinjenih pretpostavki na konturu L funkcije $u^\pm(z)$ i $z^\pm(u)$ su neprekidno produžive na L i Γ i zadovoljavaju na L odnosno na Γ uslov Höldera. Ako uvedemo nove nepoznate funkcije $F^\pm(u)=\phi^\pm(z^\pm(u))$, onda ćemo konturni uslov (1.9.1) moći napisati u obliku

$$F^+(\beta(W)) = G(z^-(W))\cdot F^-(W) + g(z^-(W)), \qquad W\in\Gamma ,$$

gde je $\beta(W)=u^+(\alpha(z^-(W)))$ inverzni homeomorfizam jedinične kružnice na samu sebe. Pretpostavimo stoga da je L jedinična kružnica $|t|=1$ i definišimo deo po deo analitičku funkciju $\{\Psi^+(z),\Psi^-(z)\}$ formulama

$$\Psi^+(z) = \overline{\phi^-(\tfrac{1}{\bar z})}, \qquad |z|<1,$$

$$\Psi^-(z) = \phi^+(\tfrac{1}{\bar z}), \qquad |z|>1.$$

Budući da je $\Psi^+(t) = \overline{\phi^-(t)}$, i $\Psi^-(t) = \phi^+(\bar t)$ to će deo po deo analitička funkcija $\{\Psi^+(z),\ \Psi^-(z)\}$ zadovoljavati konturni uslov

$$\Psi^-(\overline{\alpha(t)}) = G(t)\cdot\Psi^+(t) + g(t). \tag{1.9.2}$$

Ako sa $\beta(t)$ označimo homeomorfizam koji je inverzan k$\overline{\alpha(t)}$, onda ćemo konturni uslov (1.9.2) moći napisati u obliku konturnog uslova problema Hazemana:

$$\Psi^+(\beta(t)) = \frac{1}{G(\beta(t))}\cdot\Psi^-(t) - \frac{g(\beta(t))}{G(\beta(t))} . \tag{1.9.3}$$

1.10. KONTURNI PROBLEM CARLEMAN-A

Neka je L prosta zatvorena kriva Ljapunova u ravni kompleksne promenljive z i neka je D konačna oblast ograničena krivom L. Pretpostavimo da diferencijabilna kompleksna funkcija $\alpha(t)$, koja je zadana na konturi L i uzajamno jednoznačno je preslikava na samu sebe menjajući pri tome pravac obilaženja konture L, zadovoljava uslov Carleman-a $\alpha(\alpha(t))=t$, $t\in L$, a njen izvod $\alpha'(t)$ uslov Höldera. Konturni problem Carleman-a se sastoji u nalaženju analitičke u oblasti D funkcije $\phi(z)$ koja zadovoljava uslov Höldera u D, ako je na konturi L zadan uslov

$$\phi(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi(t) + g(t), \qquad (1.10.1)$$

gde zadane na L funkcije $G(t)$ i $g(t)$ zadovoljavaju uslov Höldera, a $G(t)\neq 0$ na L. Konturni problem Carleman-a izučava se pri pretpostavkama $G(\alpha(t))\cdot G(t)=1$ i $G(\alpha(t))\cdot g(t)+g(\alpha(t))=0$, $t\in L$, koje uklanjaju preodredjenost konturnog uslova (1.10.1). Budući da se konturni problem Carleman-a, metodom konformnog preslikavanja može svesti na konturni problem Riemann-a to se njegovo opšte rešenje dobija iz opšteg rešenja odgovarajućeg problema Riemann-a.

1.11. KONTURNI PROBLEM TIPA CARLEMAN-A

Na prostoj zatvorenoj krivoj Ljapunova L ravni kompleksne promenljive koja ograničava konačnu oblast D zadane su funkcije $G(t)$, $g(t)$ i $\alpha(t)$ koje zadovoljavaju uslov Höldera, pri čemu funkcije $G(t)$ i $\alpha'(t)$ ni u jednoj tački konture ne uzimaju vrednost nula i uz to $\alpha'(t)$ zadovoljava uslov Höldera. U konturnom problemu tipa

Carleman-a treba naći funkciju $\phi(z)$, analitičku u oblasti D čije granične vrednosti na konturi L zadovoljavaju uslov

$$\phi(\alpha(t)) = G(t)\cdot\overline{\phi(t)} + g(t), \qquad (1.11.1)$$

gde je $\alpha(t)$ direktno pomeranje koje zadovoljava uslov Carleman-a. Konturni problem tipa Carleman-a izučava se pri pretpostavkama $G(\alpha(t))\cdot\overline{G(t)}=1$ i $G(\alpha(t))\,\overline{g(t)}+g(\alpha(t))=0$, $t\in L$, koje uklanjaju preodredjenost konturnog uslova (1.11.1). Budući da ne postoji jednostavniji i do sada izučen konturni problem koji bi bio konformno ekvivalentan konturnom problemu tipa Carleman-a, to se on rešava metodom singularnih integralnih jednačina. Predstavivši traženu analitičku funkciju $\phi(z)$ integralom tipa Cauchy sa gustinom $\varphi(t)$ i izračunavši pomoću formula Plemelja-Sohockog konturne vrednosti $\phi(\alpha(t))$ i $\phi(t)$ moći ćemo konturni problem (1.11.1) svesti na bezuslovno i jednoznačno rešivu integralnu jednačinu Fredholma

$$(\mathcal{F}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{\overline{\tau'^2(\tau)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{g(t)}{\alpha^{\kappa/2}(t)\cdot X(\alpha(t))},$$

gde je $X(z)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\gamma(\alpha(t))}{t-z}\,dt\right)$, a $\gamma(t)$ rešenje jednačine $(\mathcal{F}\gamma)(t)=\ln\left(\frac{\overline{t}^{\kappa/2}}{\alpha^{\kappa}(t)}G(t)\right)$

Rešivši integralnu jednačinu $(\mathcal{F}\varphi)(t) = \frac{g(t)}{\alpha^{\frac{\kappa}{2}}(t)\cdot X(\alpha(t))}$ dobićemo gustinu $\varphi(t)$ integralnog predstavljanja rešenja $\phi(z)$ a zatim i rešenje konturnog problema (1.11.1). Ako je indeks κ funkcije $G(t)$ nenegativan, onda rešenje glasi:

$$\phi(z) = z^{\frac{\kappa}{2}}\cdot X(z)\left(\sum_{j=0}^{\kappa} B_j\cdot W_j(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\alpha(t))}{t-z}\,dt\right) \qquad (1.11.2)$$

gde je

$W_o(z) = 1$

$$W_{2k-1}(z) = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{2k-1}(\alpha(t))}{t-z}\,dt,$$

$$W_{2k}(z) = \frac{i}{z^k} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{2k}(\alpha(t))}{t-z}\,dt,$$

$\varphi_j(t)$ su rešenja integralnih jednačina $(\mathcal{J}\varphi_j)(t) = g_j(t)$,

$$g_{2k-1}(t) = \frac{1}{t^k} - \frac{1}{\alpha^k(t)}, \quad g_{2k}(t) = -\frac{i}{t^k} - \frac{i}{\alpha^k(t)}, \quad k=1,2,\dots,\frac{\kappa}{2},$$

a $B_j, j=0,1,\dots,\kappa$ su proizvoljne realne konstante.

Ako je za negativan indeks κ funkcije $G(t)$ ispunjeno

$$\mathrm{Re}\int_L \frac{\varphi(\alpha(t))}{t^{j+1}}\,dt = 0, \qquad \mathrm{Im}\int_L \frac{\varphi(\alpha(t))}{t^{j+1}}\,dt = 0$$

$$j = 0,1,2,\dots,\frac{\kappa}{z} - 1$$

onda je konturni problem (1.11.1) i u tom slučaju rešiv i njegovo rešenje je dano formulom

$$\phi(z) = z^{\kappa}\cdot X(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\alpha(t))}{t-z}\,dt + c\right), \qquad c \in R. \qquad (1.11.3)$$

1.12. POLIANALITIČKA FUNKCIJA

Svako rešenje poliharmonijske jednačine $\Delta^n U = 0$, $n \in N$, gde je Δ operator Laplace-a naziva se poliharmonijskom funkcijom reda n. F.D.Gahov [12] je pokazao da se poliharmonijska funkcija $U(x,y)$ reda n može predstaviti u obliku

$$U(x,y) = \mathrm{Re}\sum_{p=0}^{n-1} z^p \bar{z}^p \cdot \varphi_p(z), \qquad (1.12.1)$$

gde su $\varphi_p(z)$ $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$ analitičke funkcije.

Poliharmonijskom funkcijom reda n spregnutom sa $U(x,y)$ se naziva funkcija

$$V(x,y) = \operatorname{Im} \sum_{p=0}^{n-1} z^p \bar{z}^p \cdot \varphi_p(z). \qquad (1.12.2)$$

Funkcija $F(z,\bar{z})=U(x,y)+iV(x,y)$, gde su $U(x,y)$ i $V(x,y)$ dve spregnute poliharmonijske funkcije reda n, naziva se polianalitičkom funkcijom reda n. Iz jednakosti (1.12.1) i (1.12.2) sledi da se ona može prikazati u obliku:

$$F(z,\bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} z^p \cdot \bar{z}^p \cdot \varphi_p(z). \qquad (1.12.3)$$

Konturni problemi za polianalitičke funkcije reda n se mogu pomoću predstavljanja (1.12.3) svesti na n konturnih problema za analitičke funkcije $\varphi_p(z)$, $p=0,1,\ldots,n-1$.

1.13. ISTORIJSKI RAZVOJ KONTURNIH PROBLEMA ZA ANALITIČKE I POLIANALITIČKE FUNKCIJE

Konturni problem Riemann-a za analitičke funkcije formulisan je u 19. veku. Prvo rešenje homogenog konturnog problema Riemann-a, dao je Hilbert, svevši problem na integralnu jednačinu Fredholma. Potpuno rešenje problema Riemann-a za jednostruko povezanu oblast dao je Gahov [12].

Hvedelidze [48] je uopštio to rešenje na višestruko povezanu oblast. Prvo rešenje problema Riemann-a sa prekidnim koeficijentima dali su Hilbert i Plemelj.

Krikunov [30] je rešio uopšteni konturni problem Riemann-a $\phi^+(t) = G_1(t)\cdot\phi^-(t)+G_2(t)\cdot\overline{\phi^-(t)}+g(t)$ svodeći ga na rešavanje singularnih integralnih jednačina.

Čibrikova [34] je dala rešenje uopštenog konturnog problema Riemann-a sa prekidnim koeficijentima.

Metode svodjenja konturnih problema za poliharmonijske i polianalitičke funkcije u slučaju jednostavnih kontura (prava i kružnica) na konturni problem Hilbert-a detaljno je razradio Ganin [14].

1931. godine Carleman je postavio problem traženja analitičke funkcije u oblasti ograničenoj zatvorenom krivom L, po zadanom konturnom uslovu

$$\phi^{+}(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi^{+}(t), \tag{1.13.1}$$

gde je $\alpha(t)$ indirektno pomeranje i predložio istraživanje problema pri uslovima $\alpha(\alpha(t)) = t$, $G(t)\cdot G(\alpha(t))=1$. Carleman je sveo problem (1.13.1) na integralnu jednačinu Fredholma ne rešavajući je.

Potpuno rešenje konturnog problema Carleman-a za ograničenu jednostruko povezanu oblast D, dobio je 1947. godine, pomoću metode integralnih jednačina Kveselava.

1959. godine Litvinčuk je takodje primenjujući metod integralnih jednačina dao rešenje konturnog problema Carleman-a za neograničenu jednostruko povezanu oblast.

1970. godine Černecki je u radu [52] ustanovio konformnu ekvivalentnost problema Carleman-a sa problemom Riemann-a.

Rešenje konturnog problema tipa problema Carleman-a za unutrašnjost jediničnog kruga, dao je Hasabov u radu [46].

U zajedničkim radovima [32] i [33] Litvinčuka i Hasabova taj rezultat je uopšten na slučaj bilo koje ograničene jednostruko povezane oblasti. Osim toga u radovima [32] i [33] dato je i rešenje problema tipa problema Carleman-a za slučaj neograničene jednostruko povezane oblasti.

Timofeev [44] je rešio nekoliko nelinearnih konturnih problema Carlemana za analitičke funkcije koji predstavljaju uopštenja konturnih problema Carleman-a i tipa Carleman-a.

1979. godine u radu [9] Gabrinović je dao definiciju metaanalitičke funkcije reda n. U istom radu on je formulisao i rešio konturni problem tipa Carleman-a za metaanalitičke funkcije što predstavlja uopštenje njegovog rada [8] za polianalitičke funkcije.

Mihajlov je u [35] i u [36] izučio uopšteni konturni problem Riemann-a $\phi^{+}(t)=G_1(t)\cdot\phi^{-}(t)+G_2(t)\cdot\overline{\phi^{-}(t)}+g(t)$ u slučaju kada kontura L ograničava višestruko povezanu oblast D, $G_1(t)$ i $G_2(t)$ su neprekidne funkcije na L, a $g(t)\in L_p(L)$, $1<p<\infty$.

Vekua i Isahanov su u [7] i u [25] razmatrali konturne probleme čiji granični uslovi sadrže i izvode traženih funkcija.

Mišnjakov [37] i Jacenko [27] su istražili konturne probleme tipa problema Hazeman-a na zatvorenoj Riemann-ovoj površi u klasi uopštenih analitičkih funkcija.

Čočiev [55] je razmatrao problem Hazeman-a u slučaju kada je funkcija $\alpha'(t)$ jednaka nuli ili beskonačnosti u konačnom broju tačaka c konture.

Čibrikova [54] je razmatrala problem Carleman-a u slučaju kada zadani koeficijenti problema imaju prekide prve vrste ili su jednaki nuli ili beskonačnosti u konačnom broju tačaka konture Ljapunova.

U radu [1] Ajzenštat je izučio konturni problem Carleman-a u još opštijoj postavki. On je primenjujući metod konformnog preslikavanja rešio konturni problem Carleman-a sa prekidnim koeficijentima u slučaju višestruko povezane oblasti. Osim toga u istom radu on je dobio rešenje problema Carleman-a za deo po deo glatku konturu bez povratnih tačaka.

Vekua [6] je rešio konturni problem Carleman-a za sistem nepoznatih funkcija u slučaju kada elementi matrice G(t) i vektor g(t) imaju konačan broj tačaka prekida na konturi Ljapunov-a.

Rogozin [40] i Hon Czun [47] su izučili problem Carleman-a u klasi uopštenih analitičkih funkcija.

Uopšten konturni problem Riemann-a u klasi uopštenih analitičkih funkcija istražio je Bojarski [3].

Teoriju konturnih problema sa pomeranjem Carleman-a i kompleksno konjugovanim graničnim vrednostima za funkcije analitičke u višestruko povezanoj oblasti prvi je razmotrio Zverovič [20],[21].

Mišnjakov je u [37] prvi razmotrio konturni problem Carleman-a za višestruko povezanu oblast u klasi uopštenih analitičkih funkcija.

Potpuno rešenje tog problema dao je Černecki [51] metodom konformnog preslikavanja.

Kas je u [29] istražio konturni problem $\phi(\alpha_1(t))=G(t)\cdot\phi(\alpha_2(t))$ $t\in L$, gde su $\alpha_1(t)$ i $\alpha_2(t)$ preslikavanja konture Ljapunova L na sebe.

U radu [41] Rogozin je rešio konturni problem Riemann-a na realnoj osi pod pretpostavkom da koeficijent i slobodni član imaju beskonačan broj prekida prve vrste i da su ograničeni u okolini beskonačnosti. Rezultati dobijeni pri rešavanju homogenog i nehomogenog problema u osnovi su analogni odgovarajućim rezultatima u slučaju klasične postavke problema.

Zverović je u [22] razmotrio na Riemann-ovoj površi konturni problem $\phi(\alpha(t))=G(t)\cdot\phi(t)+g(t)$, $t\in L$ u slučaju kada koeficijenti matrice $G(t)$ i vektor $g(t)$ imaju prekide prve vrste u konačnom broju tačaka. 1984. godine je Dolbesult Pierre u [19] uopštio formule Plemelja-Sohockog o graničnim vrednostima integrala tipa Cauchy na funkcije više promenljivih. Buzinovskij i Svetnoj su u [4] rešili matrični problem Riemann-a $\phi^+(t)=G(t)\cdot\phi^-(t)+g(t)$, $t\in L$, $\phi^-(\infty)=0$, na prostoj glatkoj zatvorenoj konturi L, pri uslovu da matrica $G(t)$ ($\det G(t)\neq 0$, $t\in L$), vektor $g(t)$ i njihovi uzastopni izvodi do reda $k\geqslant 0$ uključivo u tačkama $t_j\in L$ $(j=1,2,\dots,k)$ imaju prekide prve vrste.

Osnovne rezultate koji se odnose na istraživanje algebre singularnih operatora sa jezgrom Cauchy i deo po deo neprekidnim koeficijentima dali su Gohberg i Krupnik [15],[16]. U vezi toga treba napomenuti i rezultate Vasilevskog i Šapiro [5].

Rad [47] Sozanova predstavlja prvi rad posvećen mnogodimenzionim singularnim inegralnim jednačinama sa pomeranjem. Može se još uvek smelo tvrditi da u tom pravcu pravi rad tek predstoji.

I I G L A V A

KONTURNI PROBLEMI ZA JEDNOSTRUKO POVEZANE OBLASTI

U ovoj glavi dobijena su rešenja nekih konturnih problema za analitičke i polianalitičke funkcije, izračunat je broj linearno nezavisnih rešenja tih konturnih problema nad poljem realnih brojeva i ustanovljeni su uslovi pri kojima su oni rešivi. Konstruisan je i algoritam za rešavanje ovakvih konturnih problema koji ćemo koristiti i u sledećoj glavi.

Rezultati sadržani u ovoj glavi predstavljaju uopštenja u odnosu na broj kontura i broj traženih analitičkih ili polianalitičkih funkcija sličnih konturnih problema formulisanih za funkcije analitičke ili polianalitičke unutar jedne proste zatvorene konture Ljapunova.

2.1. KONTURNI PROBLEM ZA FUNKCIJE ANALITIČKE U JEDNOSTRUKO POVEZANIM OBLASTIMA

Neka su S^+ i D^+ konačne jednostruko povezane oblasti ograničene zatvorenim krivama Ljapunova L odnosno Γ . Za pozitivan pravac obilaženja kontura L i Γ izaberimo onaj pri kojem oblasti S^+ odnosno D^+ ostaju sleva. Dopustićemo da se oblast S^+ i D^+ mogu seći ili poklapati jedna sa drugom.

Neka je $\alpha(t)$ zadana na L funkcija koja zadovoljava uslove:

a) homeomorfno preslikava zatvorenu konturu L na zatvorenu konturu menjajući pravac obilaženja;

b) ima neprekidan po Hölderu izvod koji je različit od nule u svim tačkama konture L.

Neka je $\alpha^{-1}(t)$ funkcija inverzna funkciji $\alpha(t)$.

Postavka problema: Naći funkcije $\phi_1^+(z)$ i $\phi_2^+(z)$ analitičke respektivno u oblastima S^+ i D^+ ako je poznat konturni uslov:

$$\phi_2^+(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi_1^+(t) + g(t) \quad , \qquad t\in L, \qquad (2.1.1)$$

gde su G(t) i g(t) neprekidne po Hölderu funkcije na konturi L pri čemu je $G(t)\neq 0$ na L.

Sličan konturni problem razmatrali su mnogi autori (npr. Isahanov, Gavdzinski, Nečaev). U radovima Isahanova [26] i Gavdzinskog i Nečaeva [11] su korišćenjem različitih integralnih predstavljanja analitičkih funkcija pronadjene funkcije $\phi_1^+(z)$ i $\phi_2^+(z)$ analitičke respektivno u višestruko povezanim oblastima S^+ i D^+ koje su neprekidne u Hölderovom smislu na granici oblasti ako je poznat konturni uslov $\phi_1^+(\alpha(t))=a(t)\cdot\phi_2^+(t)+b(t)\cdot\phi_2^+(t)+h(t)$. U radu [11] se ukazuje i na mogućnost rešenja problema (2.1.1) za dve višestruko povezane oblasti metodom konformnog preslikavanja pomoću rasudjivanja iz monografije [12]. Ovde je problem (2.1.1) rešen metodom singularnih integralnih jednačina.

Lema 2.1.1. Ako su $\phi_1^+(z)$ i $\phi_2^+(z)$ analitičke funkcije respektivno u oblastima S^+ i D^+ i

$$\phi_2^+(\alpha(t)) = \phi_1^+(t) \qquad t\in L, \qquad (2.1.2)$$

onda je $\phi_1^+(z)=C$, $z\in S^+$ $\phi_2^+(z)=C$, $z\in D^+$, gde je C proizvoljna kompleksna konstanta.

Dokaz: Potražimo rešenje problema u obliku

$$\phi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\phi_1^+(t)}{t-z}\,dt, \qquad z \in S^+,$$

$$\phi_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi_2^+(t)}{t-z}\,dt, \qquad z \in D^+, \tag{2.1.3}$$

Korišćenjem relacije (2.1.2) dobićemo da se za funkciju $\phi_2(z)$, pomoću Cauchyeve integralne formule, prva od formula Plemelja-Sohockog (1.5.2) može zapisati u obliku:

$$\frac{1}{z}\,\phi_1^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\phi_1^+(\tau)\alpha'(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} = 0, \qquad t \in L .$$

S obzirom da za funkciju $\phi_1(z)$ na osnovu Cauchyeve integralne formule i (1.5.2) važi

$$\frac{1}{2}\,\phi_1^+(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\phi_1^+(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = 0, \qquad t \in L,$$

to se sabiranjem poslednje dve jednakosti dobija

$$\phi_1^+(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L K(t,\tau)\phi_1^+(\tau)\,d\tau = 0, \qquad t \in L, \tag{2.1.4}$$

gde je $K(t,\tau) = \frac{1}{t-\tau} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}$, $\qquad t,\tau \in L.$

Zbog uslova postavljenih na funkciju $\alpha(t)$ i na konturu L, lako se proverava da je $K(t,\tau) = \frac{K_0(t,\tau)}{|\tau - t|^\gamma}$, $t,\tau \in L$, $0 \leq \gamma = \text{const} < 1$, gde je $K_0(t,\tau)$ neka funkcija koja zadovoljava uslov Höldera na L.

Na taj način, granična vrednost $\phi_1^+(t)$, bilo koje funkcije koja je analitička u oblasti S^+, na čijoj granici je zadovoljen uslov (2.1.1) je rešenje integralne jednačine Fredholma (2.1.3), koja ima samo konačan broj linearno nezavisnih rešenja. Budući da granična vrednost svakog rešenja konturnog problema (2.1.2) zadovoljava jednačinu (2.1.4) to dobijamo da konturni problem (2.1.2) ima samo konačan broj linearno nezavisnih rešenja. Odmah se vidi da je $\phi_2^+(z)=C$, $z\in D^+$, $\phi_1^+(z)=C$, $z\in S^+$, gde je C kompleksna konstanta, rešenje konturnog problema (2.1.2).

Pretpostavimo sad da su rešenja problema (2.1.2) analitičke funkcije $\phi_1^+(z)$ i $\phi_2^+(z)$ različite od konstante. Stepenovanjem sa bilo kojim prirodnim brojem k jednakost $\phi_2^+(\alpha(t))=\phi_1^+(t)$, dobijamo

$$\phi_2^+(\alpha(t))^k = \phi_1^+(t)^k. \tag{2.1.5}$$

Odavde se vidi da su zajedno sa $\phi_1^+(z)$ i $\phi_2^+(z)$ rešenja problema (2.1.2) i analitičke funkcije $\phi_1^+(z)^k$ i $\phi_2^+(z)^k$ gde je k bilo koji prirodan broj. Sva ova rešenja su linearno nezavisna i prebrojivo ih je mnogo. Ovo je kontradikcija, pa problem nema drugih rešenja osim kompleksnih konstanti.

Razmotrimo specijalan slučaj

$$\phi_2^+(\alpha(t)) = \phi_1^+(t) + g(t) \qquad t\in L, \tag{2.1.6}$$

problema (2.1.1) i dokažimo prvo sledeću lemu.

<u>Lema 2.1.2</u>. Kanonička integralna jednačina Fredholma

$$(\mathcal{J}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau-t}\right)\cdot\varphi(\tau)d\tau = 0, \tag{2.1.7}$$

nema netrivijalnih rešenja.

<u>Dokaz</u>: Neka je $\varphi(t)$ rešenje jednačine (2.1.7). Razmotrimo, integrale tipa Košija

$$\begin{aligned}\phi_1^+(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt, && z\in S^+,\\ \phi_2^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, && z\in D^+.\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Lako se vidi da je $(\mathcal{T}\varphi)(t) = \phi_2^+(\alpha(t)) - \phi_1^+(t) = 0$. Na osnovu leme (2.1.1) se dobija da je $\phi_2^+(z) = C$, $z \in D^+$, $\phi_1^+(z) = C$, $z \in S^+$, gde je C proizvoljna kompleksna konstanta. Na taj način je

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)+C}{t-z}\,dt = 0, \qquad z \in S^+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))-C}{t-z} = 0, \qquad z \in D^+. \tag{2.1.9}$$

Iz jednakosti (2.1.9) sledi da su funkcije $\varphi(\alpha^{-1}(t))-C$ i $\varphi(t)+C$ granične vrednosti na L i Γ respektivno funkcija $\chi^-(z)$ i $\Psi^-(z)$ analitičkih redom u oblastima S^- i D^-, tj.

$$\varphi(\alpha^{-1}(t))-C = \Psi^-(t), \qquad t \in \Gamma,$$

$$\varphi(t) + C = \chi^-(t), \qquad t \in L. \tag{2.1.10}$$

Isključivši funkciju $\varphi(t)$ iz poslednjih jednakosti dobijamo konturni problem:

$$\Psi^-(\alpha(t)) + C = \chi^-(t) - C, \qquad t \in L. \tag{2.1.11}$$

Konturni uslov (2.1.11) se može napisati u obliku homogenog konturnog problema $U_2^-(\alpha(t)) = U_1^-(t)$, gde je $U_2^-(z) = \Psi^-(z)+C$, $z \in D^-$, a $U_1^-(z) = \chi^-(z)-C$, $z \in S^-$. Analogno lemi 2.1.1. se dokazuje da je opšte rešenje poslednjeg problema proizvoljna kompleksna konstanta K, tj. $U_2^-(z) = K$, $z \in D^-$, $U_1^-(z) = K$, $z \in S^-$, pa je

$$\Psi^-(z) + C = K, \qquad z \in D^-$$

$$\chi^-(z) - C = K, \qquad z \in S^-. \tag{2.1.12}$$

Zahtevamo li da su funkcije $\chi^-(z)$ i $\Psi^-(z)$ u beskonačno dalekoj tački jednake nuli dobićemo $C=K$ i $-C=K$ pa je $C=K=0$.

Odavde je $\chi^-(z)=0$ za $z\in S^-$ i $\Psi^-(z)=0$ za $z\in D^-$ pa je zbog (2.1.10) $\varphi(t)=0$ za $t\in L$. Ovim je lema 2.1.2 dokazana.

Na osnovu leme 2.1.2 i alternative Fredholma sledi da postoji jedinstveno rešenje $\varphi(t)$ integralne jednačine Fredholma

$$(\mathcal{F}\varphi)(t) = g(t) = \phi_2^+(\alpha(t)) - \phi_1^+(t), \qquad t\in L, \tag{2.1.13}$$

tj. konturni problem (2.1.6) uvek ima jedno rešenje koje se može predstaviti formulom (2.1.8). Nadjimo ostala rešenja problema (2.1.1). Stavimo li da je poznato rešenje problema (2.1.6) dano sa:

$$\Psi_1^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt, \qquad z\in S^+$$

$$\Psi_2^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \qquad z\in D^+,$$

onda ćemo jednačinu (2.1.13) moći zapisati u obliku

$$\phi_2^+(\alpha(t)) - \phi_2^+(\alpha(t)) = \phi_1^+(t) - \phi_1^+(t), \qquad t\in L. \tag{2.1.14}$$

Na osnovu leme 2.1.1 iz (2.1.14) se dobija

$$\phi_2^+(z) = \Psi_2^+(z) + C, \quad z\in D^+ \quad \text{i} \quad \phi_1^+(z) = \Psi_1^+(z) + C, \quad z\in S^+.$$

Na taj način opšte rešenje problema (2.1.6) ima oblik

$$\phi_1^+(z) = C - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt, \qquad z\in S^+,$$

$$\phi_2^+(z) = C + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \qquad z\in D^+,$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine (2.1.12) a C je proizvoljna kompleksna konstanta.

Rešimo sada homogeni konturni problem oblika:

$$\phi_2^+(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi_1^+(t), \qquad t\in L. \qquad (2.1.15)$$

Ispitajmo prvo slučaj kad je $\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = 0$. Razmotrimo konturni problem

$$\Gamma_2^+(\alpha(t)) - \Gamma_1^+(t) = \ln G(t), \qquad t\in L, \qquad (2.1.16)$$

gde se pod ln G(t) podrazumeva jednoznačna funkcija koja pripada klasi $H_\mu(L)$. U skladu sa ranije rečenim, funkcije

$$\Gamma_1^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \qquad z\in S^+,$$
$$\Gamma_2^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \qquad z\in D^+, \qquad (2.1.17)$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{T}\varphi)(t) = \ln G(t)$, su partikularna rešenja problema (2.1.16).

Na taj način, koeficijent G(t) problema (2.1.15) možemo predstaviti u obliku

$G(t) = \dfrac{X_{01}^+(\alpha(t))}{X_0^+(t)}$, gde su $X_0^+(z) = e^{\Gamma_1^+(z)}$, $z\in S^+$ i $X_{01}^+(z) = e^{\Gamma_2^+(z)}$, $z\in D^+$.

Konturni uslov (2.1.15) se sada može predstaviti na sledeći način:

$$\frac{\phi_2^+(\alpha(t))}{\phi_2^+(\alpha(t))} = \frac{\phi_1^+(t)}{X_0^+(t)}, \qquad t\in L.$$

Dakle, funkcije $F_2^+(z) = \dfrac{\phi_2^+(z)}{X_{01}^+(z)}$, $z\in D^+$ i $F_1^+(z) = \dfrac{\phi_1^+(z)}{X_0^+(z)}$, $z\in S^+$, zadovoljavaju konturni uslov

$$F_2^+(\alpha(t)) = F_1^+(t), \qquad t\in L. \qquad (2.1.18)$$

Saglasno lemi 2.1.1. opšte rešenje problema (2.1.18) daje se formulama $F_1^+(z) = C$ i $F_2^+(z) = C$, gde je C proizvoljna kompleksna konstanta. Dakle, funkcije $\phi_2^+(z) = C\cdot e^{\Gamma_2^+(z)}$, $z \in D^+$ i $\phi_1^+(z) = C\cdot e^{\Gamma_1^+(z)}$, $z \in S^+$, su opšte rešenje problema (2.1.15) pri $\kappa = 0$.

Definicija 2.1.1. Funkcije $X_0^+(z) = e^{\Gamma_1^+(z)}$ i $X_{01}^+(z) = e^{\Gamma_2^+(z)}$ koje formiraju partikularno rešenje problema (2.1.14) nazivamo fundamentalnim funkcijama konturnog problema (2.1.15). Funkcije $X_0^+(z)$ i $X_{01}^+(z)$, su analitičke u S^+ odnosno u D^+ i različite od nule u $S^+ \cup L$ odnosno $D^+ \cup \Gamma$. One zadovoljavaju konturni uslov (2.1.15) pri $\kappa = 0$, a granične vrednosti $X_0^+(t)$ i $X_{01}^+(t)$ zadovoljavaju uslov Höldera redom na konturama L odnosno Γ.

Razmotrimo sada opšti slučaj, kad je indeks κ bilo koji realan broj. Pretpostavimo da koordinatni početak pripada oblasti S^+. Definišimo funkciju $G_0(t)$ na sledeći način: $G_0(t) = t^{\kappa}\cdot G(t)$ za $t \in L$. Sada je $\frac{1}{2\pi}[\arg G_0(t)]_L = 0$ pa za homogeni konturni problem sa koeficijentom $G_0(t)$ postoje kao što je pokazano, fundamentalne funkcije $X_0^+(z)$ i $X_{01}^+(z)$ analitičke respektivno u S^+ i D^+ različite od nule redom u $S^+ \cup L$ i $D^+ \cup \Gamma$, koje na L imaju granične vrednosti $X_0^+(t) \in H_\mu(L)$ odnosno $X_{01}(t) \in H_\mu(\Gamma)$ i koje zadovoljavaju konturni uslov $X_{01}^+(\alpha(t)) = G_0(t)\cdot X_0^+(t)$. Ove funkcije su odredjene formulama:

$$X_0^+(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\right), \qquad z \in S^+,$$

$$X_{01}^+(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt\right), \quad z \in D^+,$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje jednačine $(\mathfrak{J}\varphi)(t) = \ln G_0(t)$.

Definicija 2.1.2. Funkcije $X_1^+(z) = z^{-\kappa} \cdot X_o^+(z)$ i $X_2^+(z) = X_{o1}^+(z)$, definisane respektivno u oblastima S^+ i D^+, nazivaćemo kanoničkim funkcijama konturnog problema (2.1.15). One zadovoljavaju konturni uslov homogenog konturnog problema i imaju nulti red svuda u oblasti definisanosti sem funkcije $X_1^+(z)$ koja u koordinatnom početku ima red κ. Ranije definisane fundamentalne funkcije su kanoničke funkcije konturnog problema (2.1.15) sa nultim Košijevim indeksom koeficijenta $G(t)$ problema. Pri $\kappa < 0$ kanoničke funkcije predstavljaju jedno od rešenja konturnog problema (2.1.15). Iz svega rečenog sledi da se na konturi L koeficijent $G(t)$ problema (2.1.15) može predstaviti u obliku:

$$G(t) = \frac{X_2^+(\alpha(t))}{X_1^+(t)}, \quad t \in L. \tag{2.1.19}$$

Supstitucijom izraza (2.1.19) u konturni uslov (2.1.15) i deleći obe strane dobijene jednakosti sa $X_1^+(\alpha(t))$ dobijamo:

$$\frac{\phi_2^+(\alpha(t))}{X_2^+(\alpha(t))} = \frac{\phi_1^+(t)}{t^{-\kappa} X_o^+(t)}, \qquad t \in L. \tag{2.1.20}$$

Razmotrimo posebno slučaj u kojem je $\kappa \geqslant 0$ od onog u kojem je $\kappa < 0$.

a) Neka je $\kappa < 0$.

Tada funkcija $\dfrac{\phi_1^+(z)}{z^{-\kappa} X_o^+(z)}$, $z \in S^+$, ima u tački $z = 0$ pol reda $-\kappa$ pa se prema tome može predstaviti u obliku:

$$\frac{\phi^+(z)}{z^{-\kappa} X_o^+(z)} = \sum_{i=1}^{-\kappa} \frac{C_i}{z^i} + \Psi_1^+(z), \qquad z \in S^+, \tag{2.1.21}$$

gde je $\Psi_1^+(z)$ za sada neodredjena analitička funkcija u S^+, a C_i $(i=1,2,\dots,-\kappa)$ kompleksne konstante. Definišimo funkciju $\Psi_2^+(z)$ analitičku u D^+ sa:

$$\Psi_2^+(z) = \frac{\Phi_2^+(z)}{X_2^+(z)}, \qquad z \in D^+. \tag{2.1.22}$$

Nakon zamene reprezentacija (2.1.21) i (2.1.22) u (2.1.20) dolazimo do konturnog uslova za funkcije $\Psi_1^+(z)$ i $\Psi_2^+(z)$:

$$\Psi_2^+(\alpha(t)) - \Psi_1^+(t) = \sum_{k=1}^{-\kappa} \left(\frac{a_k}{t^k} - i\cdot\frac{b_k}{t^k}\right), \quad t \in L, \tag{2.1.23}$$

gde je $a_k = \mathrm{Re}\, C_k$, $b_k = \mathrm{Im}\, C_k$. Uvedemo li oznake $g_{2k-1}(t) = \frac{1}{t^k}$, $g_{2k}(t) = \frac{i}{t^k}$, $B_{2k-1}=a_k$, $B_{2k}=b_k$, $k=1,2,\dots,-\kappa$, onda ćemo konturni uslov (2.1.23) moći napisati u obliku:

$$\Psi_2^+(\alpha(t)) - \Psi_1^+(t) = \sum_{j=1}^{-2\kappa} B_j g_j(t), \qquad t \in L. \tag{2.1.24}$$

Ovo je konturni problem koji smo rešili. Njegovo opšte rešenje ima oblik:

$$\begin{aligned} \Psi_1^+(z) &= B_o - \sum_{j=1}^{-2\kappa} \frac{B_j}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_j(t)}{t-z}\, dt, \quad z \in S^+, \\ \Psi_2^+(z) &= B_o + \sum_{j=1}^{-2\kappa} \frac{B_j}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi_j(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\, dt, \quad z \in D^+, \end{aligned} \tag{2.1.25}$$

gde je B_o proizvoljna kompleksna konstanta, a $\varphi_j(t)$ su rešenja integralnih jednačina Fredholma $(\mathcal{F}\varphi_j)(t) = g_j(t)$, $j=1,2,\dots,-2\kappa$.

Stavimo da je $B_{2k+1} = \mathrm{Re}\, B_o$, $B_{2k+2} = \mathrm{Im}\, B_o$ i definišimo funkcije:

$$\begin{aligned} W_{2k-1}(z) &= \frac{1}{z^k} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_{2k-1}(t)}{t-z}\, dt, \qquad z \in S^+, \\ W_{2k}(z) &= \frac{i}{z^k} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_{2k}(t)}{t-z}\, dt, \qquad z \in S^+, \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

$k=1,2,\dots,-\kappa,$

$$W_{-2\kappa+1}(z) = 1, \; W_{-2\kappa+2}(z) = i, \qquad z \in S^+,$$

i

$$V_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \qquad z \in D^+,$$

$$k=1,2,\ldots,-2\kappa.$$

$$V_{-2\kappa+1}(z) = 1, \; V_{-2\kappa+2}(z) = i, \; z \in D^+.$$

Sistemi funkcija $\{W_i\}$ i $\{V_i\}$ $i=1,2,\ldots,-2\kappa+2$, su sistemi linearno nezavisnih funkcija. Iskoristivši oznake (2.1.26) i formule (2.1.21), (2.1.22) i (2.1.25) dobijamo opšte rešenje homogenog konturnog problema (2.1.15) u slučaju kada je indeks $\kappa < 0$ u obliku:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= z^{-\kappa}\cdot X_o^+(z)\cdot\sum_{i=1}^{-2\kappa+2} B_i W_i(z), && z \in S^+, \\ \Phi_2^+(z) &= X_{o1}^+(z)\cdot\sum_{i=1}^{-2\kappa+2} B_i V_i(z), && z \in D^+. \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

b) Neka je $\kappa \geqslant 0$.

Funkcija $\dfrac{\phi_1^+(z)}{z^{-\kappa}X_o^+(z)}$ je sada analitička u S^+ i za $\kappa > 0$ jednaka nuli u koordinatnom početku, a funkcija $\dfrac{\phi_2^+(z)}{X_2^+(z)}$ je analitička u D^+. Dakle, na konturni problem (2.1.20) je primenjiva lema 2.1.1, saglasno sa kojom imamo:

$$\frac{z^{\kappa}\phi_1^+(z)}{X_o^+(z)} = C, \; z \in S^+, \quad \text{i} \quad \frac{\phi_2^+(z)}{X_2^+(z)} = C, \; z \in D^+, \tag{2.1.28}$$

gde je C proizvoljna kompleksna konstanta.

Ako je $\kappa = 0$, onda iz (2.1.28) nalazimo $\phi_1^+(z) = C\cdot X_1^+(z)$, $z \in S^+$, $\phi_2^+(z) = C\cdot X_2^+(z)$, $z \in D^+$, tj. dobijamo već nadjeno opšte rešenje homogenog problema (2.1.16) sa Košijevim indeksom koeficijenta G(t) jednakim nuli. Ovo rešenje je očigledno sadržano i u formuli (2.1.27), ako dopustimo da ona važi i za $\kappa = 0$. Ako je $\kappa>0$, onda je leva strana prve jednačine iz (2.1.28) za z=0 jednaka nuli. Dakle, mora biti C=0 i prema tome $\phi_1^+(z)=0$, $z \in S^+$, $\phi_2^+(z)=0$, $z \in D^+$. Na taj način pri $\kappa > 0$ homogen konturni problem (2.1.15) nema netrivijalnih rešenja. Ovim je dokazana sledeća teorema:

TEOREMA 2.1.1. Neka je $\kappa = [\arg G(t)]_L$. Broj l linearno nezavisnih rešenja unutarnjeg homogenog konturnog problema (2.1.15) izračunava se po formuli: $l=\max(0,2\cdot(-k+1))$. Sva netrivijalna rešenja problema (2.1.15) nalaze se po formulama (2.1.27).

Razmotrimo sad opšti slučaj (2.1.1). Kao što smo već videli koeficijent G(t) sa indeksom κ problema (2.1.1) se može predstaviti u obliku:

$$G(t) = \frac{X_2^+(\alpha(t))}{t^{-\kappa}X_0^+(t)}, \qquad t \in L.$$

Zamenom ovog izraza u konturni uslov (2.1.1) posle očiglednih transformacija dobijamo:

$$\frac{\phi_2^+(\alpha(t))}{X_2^+(\alpha(t))} - \frac{\phi_1^+(t)}{t^{-\kappa}X_0^+(t)} = \frac{g(t)}{X_2^+(\alpha(t))}, \quad t \in L. \tag{2.1.29}$$

Ovo je specijalan slučaj konturnog uslova postavljenog problema za funkcije $F_1^+(z) = \dfrac{\phi_1^+(z)}{z^{-\kappa}X_0^+(z)}$, $z \in S^+$ i $F_2(z) = \dfrac{\phi_2^+(z)}{X_2^+(z)}$, $z \in D^+$, koji smo već rešili. Razmotrimo posebno slučaj u kojem je $\kappa > 0$ od slučaja u kojem je $\kappa \leqslant 0$.

a) Neka je $\kappa \leqslant 0$. Analogno ranije izloženom dobijamo rešenje problema (2.1.29) a odatle i opšte rešenje konturnog problema (2.1.1) u obliku:

$$\phi_1^+(z) = z^{-\kappa} X_o^+(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa+2} B_i W_i(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt\Big), \quad z\in S^+,$$

$$\phi_2^+(z) = X_2^+(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa+2} B_i V_i(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt\Big), z\in D^+, \tag{2.1.30}$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine Fredholma $(\mathfrak{F}\varphi)(t) = \dfrac{g(t)}{X_2^+(\alpha(t))}$.

b) Neka je $\kappa > 0$.

U ovom slučaju ako rešenje problema (2.1.1) postoji, onda se ono može predstaviti u obliku:

$$\phi_1^+(z) = z^{-\kappa} X_o^+(z)\cdot\Big(\frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + C_o\Big), \qquad z\in S^+$$

$$\phi_2^+(z) = X_2^+(z)\cdot\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt + C_o\Big), \qquad z\in D^+ \tag{2.1.31}$$

gde je C_o proizvoljna kompleksna konstanta.

Iz formule (2.1.31) se vidi da je za rešivost problema (2.1.1) u ovom slučaju neophodno i dovoljno da bi analitička u S^+ funkcija

$$\phi_*^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + C_o,$$

imala u tački z=0 nulu reda ne manju od κ. Radi nalaženja odgovarajućeg uslova rešivosti razvićemo funkciju ϕ_1^+ u red Tejlora u okolini tačke z=0. Na taj način je funkcija

$$\phi_1^+(z) = z^{-\kappa} X_0^+(z)\cdot(C_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^{j+1}}\,dt),$$

analitička u S^+ ako i samo ako su koeficijenti uz $z^0, z^1, \ldots$ $\ldots, z^{\kappa-1}$ funkcije u zagradi jednaki nuli. Odavde dobijamo neophodne i dovoljne uslove rešivosti problema (2.1.1):

$$C_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = 0, \tag{2.1.32}$$

$$\int_L \frac{\varphi(t)}{t^{j+1}}\,dt = 0, \quad j=1,2,\ldots,\kappa-1. \tag{2.1.33}$$

Uslovi (2.1.32) i (2.1.33) se mogu zapisati u obliku $2\cdot(\kappa-1)$ realnih uslova rešivosti. Da bi se to videlo dovoljno je izabrati realnu konstantu C_0, tako da bi bilo:

$$\mathrm{Re}C_0 = \mathrm{Re}\,(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt),$$

i

$$\mathrm{Im}C_0 = \mathrm{Im}\,(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt). \tag{2.1.34}$$

U uslovu (2.1.33) možemo odvojiti realne i imaginarne delove i na taj način od njega dobiti $2\kappa-2$ realnih uslova rešivosti:

$$\mathrm{Re}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^{j+1}}\,dt = 0, \quad \mathrm{Im}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^{j+1}}\,dt = 0, \quad j=1,2,\ldots,\kappa-1. \tag{2.1.35}$$

Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

<u>TEOREMA 2.1.2</u>. Ako je $\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \leq 0$ onda je nehomogeni konturni problem (2.1.1) bezuslovno rešiv i njegovo rešenje, predstavljeno formulom (2.1.30) sadrži $2(-\kappa+1)$ proizvoljnih realnih konstanti. Ako je $\kappa > 0$, onda je problem (2.1.1) rešiv ako i samo ako je ispunjeno $2(\kappa-1)$ realnih uslova rešivosti (2.1.34) i (2.1.35) i njegovo jedinstveno rešenje se dobija po formuli (2.1.31).

Navedimo jedan prost primer koji ilustruje metod rešavanja navedenog konturnog problema (2.1.1). S obzirom da se prema Riemann-ovoj teoremi bilo koje dve oblasti mogu komformno preslikati jedna na drugu, pretpostavićemo da su oblasti S^+ i D^+ krugovi. Kako se bilo koja dva kruga mogu odgovarajućom translacijom i homotetijom prevesti jedan u drugi možemo, jednostavnosti radi, smatrati da je krug D^+ ograničen konturom Γ potpuno sadržan u krugu S^+ ograničenom konturom L. Stoga, neka je napr. $L: |t|=2$, $\Gamma: |t| = \frac{1}{2}$.

Označimo sa $\alpha(t) = \frac{1}{t}$ homeomorfizam konture L na konturu Γ i razmotrimo konturni problem

$$\phi_2^+\left(\frac{1}{t}\right) = \phi_1^+(t) + t - \frac{1}{t}, \qquad t \in L, \tag{2.1.36}$$

gde su funkcije $\phi_2^+(z)$ i $\phi_1^+(z)$ analitičke respektivno u oblastima $D^+: |t| \leqslant \frac{1}{2}$ i $S^+: |t| \leqslant 2$.

Potražimo rešenje problema (2.1.34) u obliku

$$\phi_1^+(z) = C - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=2} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt, \qquad z \in S^+$$

$$\phi_2^+(z) = C + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{\varphi(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\, dt, \qquad z \in D^+,$$

gde je C neka kompleksna konstanta.

Korišćenjem formula Plemelja-Sohockog (1.5.2) problem (2.1.36) se može svesti na bezuslovno i jednoznačno rešivu integralnu jednačinu Fredholma

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \left(\frac{-\frac{1}{\tau^2}}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}} - \frac{1}{\tau - t} \right) \cdot \varphi(\tau)\, d\tau = t - \frac{1}{t}$$

odnosno na

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=2} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} d\zeta = t - \frac{1}{t}, \quad t \in L .$$

S obzirom da je rešenje ove jednačine funkcija $\varphi(t) = t - \frac{1}{t}$ biće rešenje problema (2.1.36) odredjeno sa

$$\phi_1^+(z) = C - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=2} (t - \frac{1}{t}) \cdot \frac{dt}{t-z} = C-z, \qquad z \in S^+,$$

$$\phi_2^+(z) = C + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=\frac{1}{2}} (\frac{1}{t} - t) \cdot \frac{dt}{t-z} = C-z, \qquad z \in D^+.$$

2.2. KONTURNI PROBLEM ZA FUNKCIJE POLIANALITIČKE U JEDNOSTRUKO POVEZANIM OBLASTIMA

Neka su S i D konačne jednostruko povezane oblasti ograničene zatvorenim krivama Ljapunova L odnosno Γ. Za pozitivan pravac obilaženja kontura L i Γ izaberimo onaj pri kojem oblasti S odnosno D ostaju sleva. Dopustićemo da se oblasti S i D mogu i seći ili poklapati jedna sa drugom.

Neka je $\alpha(t)$ zadana na L funkcija koja zadovoljava uslove:

a) homeomorfno preslikava zatvorenu konturu L na zatvorenu konturu Γ menjajući pravac obilaženja;

b) ima neprekidan po Hölderu izvod koji je različit od nule u svim tačkama konture L.

Neka je $\alpha^{-1}(t)$ funkcija inverzna funkciji $\alpha(t)$.

Tražićemo funkcije $W_1(z,\bar{z})$ i $W_2(z,\bar{z})$ polianalitičke u S odnosno D, čije granične vrednosti na konturama L i Γ respektivno, zadovoljavaju sledećih n konturnih uslova

$$D^k W_2(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = A_k(t)\cdot D^k W_1(t,\bar{t}) + B_k(t), \quad t \in L, \tag{2.2.1}$$

$$(k=0,1,\ldots,n-1),$$

gde je D poznati diferencijalni operator Kolosova, tj. za $W=u+i\cdot v$ je $DW=(u'_x-v'_y)+i\cdot(u'_y+v'_x)=2W'_{\bar{z}}$ i $D^k=D(D^{k-1})$, a $A_k(t)$ i $B_k(t)$ su na konturi L neprekidne po Hölderu funkcije i $A_k(t)\neq 0$ na L za $k=0,1,\ldots,n-1$. Funkcije $W_1(z,\bar{z})$ i $W_2(z,\bar{z})$ ćemo tražiti u obliku

$$W_1(z,\bar{z})=\sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^v U_v(z), \quad z\in S \ \text{ i } \ W_2(z,\bar{z})=\sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^v U_v(z), \quad z\in D, \tag{2.2.2}$$

gde su $U_v(z)$ odnosno $V_v(z)$ proizvoljne analitičke funkcije u S odnosno D a n je prirodan broj koji predstavlja red polianalitičke funkcije.

Posmatrajmo prvo specijalan slučaj:

$$D^k W_2(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = D^k W_1(t,\bar{t}), \qquad t\in L, \tag{2.2.3}$$

problema (2.2.1). Iz relacije (2.2.2) sledi:

$$\begin{aligned} D^k W_1(t,\bar{t}) &= 2^k\sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots(v-k+1)\, t^{-v-k}\cdot U_v(t), \quad t\in L,\\ D^k W_2(t,\bar{t}) &= 2^k\sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots(v-k+1)\, t^{v-k}\cdot V_v(t), \quad t\in L. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Zbog relacija (2.2.4) se konturni uslov (2.2.3) može napisati u obliku

$$2^k\sum_{v=k}^{n-1}\frac{v!}{(v-k)!}\cdot\overline{\alpha(t)}^{\,v-k}\cdot V_v(\alpha(t)) = 2^k\sum_{v=k}^{n-1}\frac{v!}{(v-k)!}\cdot\bar{t}^{\,v-k}\cdot U_v(t), \quad t\in L,$$

$$(k=0,1,\ldots,n-1)$$

i na taj način svesti na n konturnih uslova za funkcije $U_v(z)$ i $V_v(z)$ $(v=0,1,\ldots,n-1)$, analitičkih respektivno u oblastima S i D.

Na osnovu ovoga za $k=n-1$ iz (2.2.3) dobijamo prvo $V_{n-1}(\alpha(t)) = U_{n-1}(t)$, $t\in L$, a zatim $U_{n-1}(z)=C_{n-1}$, $z\in S$ i $V_{n-1}(z)=C_{n-1}$, $z\in D$, gde je C_{n-1} kompleksna konstanta.

Za k=n-2 imamo na isti način prvo $V_{n-2}(\alpha(t))=U_{n-2}(t)+(n-1)\cdot(\bar{t}C_{n-1}-\overline{\alpha(t)}C_{n-1})$, $t\in L$, a zatim $U_{n-2}(z)=C_{n-2}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{n-2}(t)}{t-z}dt$ za $z\in S$ i

$$V_{n-2}(z) = C_{n-2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_{n-2}(\alpha^{-1}(t))}{t-z} dt$$ za $z\in D$, gde je funkcija

$\varphi_{n-2}(t)$ rešenje integralne jednačine Fredholma:

$$(\mathcal{J}\varphi)(t)\equiv\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau-t}\right)\cdot\varphi(\tau)d\tau=(n-1)(\bar{t}-\overline{\alpha(t)})\cdot C_{n-1}$$

a C_{n-1} i C_{n-2} su proizvoljne kompleksne konstante.

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo na kraju sledeći sistem od n konturnih uslova:

$$V_p(\alpha(t))=U_p(t)+\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}(\bar{t}^j\cdot U_{p+j}(t) - \overline{\alpha(t)}^j\cdot V_{p+j}(\alpha(t))),\ t\in L,$$
$$(p=0,1,\dots,n-1),$$

kojem je rešenje:

$$U_p(z) = C_p - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)}{t-z} dt, \quad z\in S,$$
$$V_p(z) = C_p + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_p(\alpha^{-1}(t))}{t-z} dt,\ z\in D,\ (p=0,1,\dots,n-1), \tag{2.2.5}$$

gde su $\varphi_p(t)$ rešenja integralnih jednačina $(\mathcal{J}\varphi_p)(t) = g_p(t)$ a

$$g_p(t)=\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}(\bar{t}^j\cdot U_{p+j}(t)-\overline{\alpha(t)}^j\cdot V_{p+j}(\alpha(t))),\ t\in L, \tag{2.2.6}$$

Na taj način opšte rešenje konturnog problema (2.2.3) glasi:

$$W_1(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^v\cdot U_v(z), \qquad z\in S,$$
$$W_2(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^v\cdot U_v(z), \qquad z\in D,$$

gde su u S odnosno D analitičke funkcije $U_v(z)$ odnosno $V_v(z)$ odredjene sa (2.2.5).

Neka sada konturni uslov ima oblik:

$$D^k W_2(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = A_k(t)\cdot D^k W_1(t,\bar{t}), \quad t \in L. \tag{2.2.7}$$

Ispitajmo prvo slučaj kad su $\kappa_k = \frac{1}{2\cdot\pi}[\arg A_k(t)]_L = 0$ $(k=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1)$.

Na osnovu (2.2.4) i (2.2.7) sledi:

$$2^k \sum_{v=k}^{n-1} \frac{v!}{(v-k)!}\cdot\overline{\alpha(t)}^{\,v-k}\cdot V_v(\alpha(t)) = A_k(t)\cdot 2^k \sum_{v=k}^{n-1} \frac{v!}{(v-k)!}\cdot \bar{t}^{\,v-k}\cdot U_v(t), \tag{2.2.8}$$

$$t \in L, \quad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

odakle za k=n-1 dobijamo prvo relaciju

$$V_{n-1}(\alpha(t)) = A_{n-1}(t)\cdot U_{n-1}(t), \quad t \in L, \tag{2.2.9}$$

a zatim partikularno rešenje problema (2.2.9) u obliku:

$$U_{n-1}(z) = e^{\Gamma_{1,n-1}(z)}, \qquad z \in S,$$

$$V_{n-1}(z) = e^{\Gamma_{2,n-1}(z)}, \qquad z \in D,$$

gde je

$$\Gamma_{1,n-1}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{n-1}(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in S,$$

$$\Gamma_{2,n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_{n-1}(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \quad z \in D,$$

a $\varphi_{n-1}(t)$ je rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{F}\varphi_{n-1})(t) = \ln A_{n-1}(t)$, $t \in L$.

Na osnovu ovoga se koeficijent $A_{n-1}(t)$ može predstaviti u obliku $A_{n-1}(t) = \dfrac{X_{o,n-1}(\alpha(t))}{Y_{o,n-1}(t)}$, $t \in L$, gde su $Y_{o,n-1}(t) = e^{\Gamma_{1,n-1}(t)}$, $t \in L$ i $X_{o,n-1}(t) = e^{\Gamma_{2,n-1}(t)}$, $t \in \Gamma$ a konturni problem (2.2.9) se može svesti na problem sa konturnim uslovom

$$\frac{V_{n-1}(\alpha(t))}{X_{0,n-1}(\alpha(t))} = \frac{U_{n-1}(t)}{Y_{0,n-1}(t)}, \quad t\in L.$$

Rešivši ovaj problem dobijamo $U_{n-1}(z) = B_{n-1}\cdot e^{\Gamma_{1,n-1}(z)}$, $z\in S$ i $V_{n-1}(z) = B_{n-1}e^{\Gamma_{2,n-1}(z)}$, $z\in D$, gde je B_{n-1} kompleksna konstanta.

Za k=n-2 iz (2.2.8) se dobija konturni problem

$$V_{n-2}(\alpha(t))=A_{n-2}(t)\cdot U_{n-2}(t)=(n-1)\cdot(A_{n-2}(t)\cdot\bar{t}\cdot U_{n-1}(t)-\overline{\alpha(t)}\cdot V_{n-1}(\alpha(t))),$$

a zatim njegovo rešenje u obliku:

$$\begin{aligned} U_{n-2}(z) &= Y_{o,n-2}(z)\cdot(B_{n-2} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{n-2}(t)}{t-z}dt), \quad z\in S, \\ V_{n-2}(z) &= X_{o,n-2}(z)\cdot(B_{n-2}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_{n-2}(\alpha^{-1}(t))}{t-z}dt), \quad z\in D, \end{aligned} \qquad (2.2.10)$$

gde je $Y_{o,n-2}(z)$ i $X_{o,n-2}(z)$ partikularno rešenje problema $V_{n-2}(\alpha(t))=A_{n-2}(t)\cdot U_{n-2}(t)$, $t\in L$, a $\varphi_{n-2}(t)$ je rešenje integralne jednačine Fredholma $(\mathcal{F}\varphi_{n-2})(t) = \frac{g_{n-2}(t)}{X_{o,n-2}(\alpha(t))}$, $g_{n-2}(t) = (n-1)\cdot(A_{n-2}(t)\cdot\bar{t}\cdot U_{n-1}(t)- \overline{\alpha(t)}\cdot V_{n-1}(\alpha(t)))$, $t\in L$, a B_{n-2} je proizvoljna kompleksna konstanta.

Nastavljajući ovaj postupak dobija se na kraju sledeći sistem nehomogenih konturnih uslova za funkcije $U_p(z)$ i $V_p(z)$ analitičkih respektivno u oblastima S i D:

$$V_p(\alpha(t))=A_p(t)\cdot U_p(t)+\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}(A_p(t)\cdot\bar{t}^j\, U_{p+j}(t)-\overline{\alpha(t)}^j V_{p+j}(\alpha(t))),$$

$$(p=0,1,\dots,n-1),$$

čije je rešenje:

$$U_p(z)=Y_{o,p}(z)\cdot\left(B_p - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)}{t-z}\,dt\right), \quad z\in S,$$
$$V_p(z)=X_{o,p}(z)\left(B_p + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_p(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt\right), \quad z\in D, \tag{2.2.11}$$
$$(p=0,1,\dots,n-1),$$

gde su $Y_{o,p}(z)$ i $X_{o,p}(z)$ partikularna rešenja problema $V_p(\alpha(t))=$ $= A_p(t)\cdot U_p(t)$, $t\in L$, a $\varphi_p(t)$ su rešenja integralnih jednačina
$$(\mathfrak{J}\varphi_p)(t) = \frac{g_p(t)}{X_{o,p}(\alpha(t))},$$

$$g_p(t) = \sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\left(A_p(t)\cdot \bar{t}^j U_{p+j}(t) - \overline{\alpha(t)}^j V_{p+j}(\alpha(t))\right), \quad t\in L,$$
$$(p=0,1,\dots,n-1),$$

a B_p su kompleksne konstante.

Na taj način opšte rešenje konturnog problema (2.2.7) glasi $W_1(z,\bar{z})=\sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^v U_v(z)$, $z\in S$, $W_2(z,\bar{z})=\sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^v V_v(z)$, $z\in D$, gde su funkcije $U_v(z)$ i $V_v(z)$ analitičke respektivno u S i D odredjene sa (2.2.11).

Razmotrimo sada slučaj kada su indeksi κ_p funkcija $A_p(t)$ bilo koji realni brojevi. Pretpostavimo da koordinatni početak pripada oblasti S i definišimo funkciju $A_{o,p}(t)$ na sledeći način:

$A_{o,p}(t) = t^{-\kappa}\cdot A_p(t)$ za $t\in L$. Sada je $\frac{1}{2\pi}\,[\arg A_{o,p}(t)]=0$ pa za homogeni konturni problem sa koeficijentom $A_{o,p}(t)$ postoje funkcije $Y_{o,p}(z)$ i $X_{o,p}(z)$ analitičke respektivno u S i D i različite od nule redom u $S\cup L$ i $D\cup\Gamma$ koje na konturi L odnosno Γ imaju granične vrednosti $Y_{o,p}(t)\in H_\mu(L)$ i $X_{o,p}(t)\in H_\mu(\Gamma)$ i koje zadovoljavaju konturni uslov $X_{o,p}(\alpha(t))=A_{o,p}(t)\cdot Y_{o,p}(t)$, $t\in L$. Ove funkcije su odredjene formulama:

$$Y_{o,p}(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)}{t-z}\,dt\right), \qquad z \in S,$$

$$X_{o,p}(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi_p(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt\right), \qquad z \in D,$$

gde je $\varphi_p(t)$ rešenje jednačine $(\mathfrak{J}\varphi_p)(t) = \ln A_{o,p}(t)$.

Iz svega ovoga sledi da se na konturi L koeficijenti $A_p(t)$ problema (2.2.7) mogu predstaviti u obliku

$$A_p(t) = \frac{X_{o,p}(\alpha(t))}{t^{\kappa}\cdot Y_{o,p}(t)}, \quad t \in L, \; p=0,1,\dots,n-1. \tag{2.2.12}$$

Iz relacija (2.2.4), (2.2.7) i (2.2.12) dobija se analogno već opisanom postupku sistem konturnih uslova

$$\frac{V_p(\alpha(t))}{X_{o,p}(\alpha(t))} = \frac{U_p(t)}{t^{\kappa}\cdot Y_{o,p}(t)} + G_p(t), \quad G_p(t) = \frac{g_p(t)}{X_{o,p}(\alpha(t))}, \tag{2.2.13}$$

$$t \in L, \quad (p=0,1,\dots,n\ 1).$$

Označimo sa $\Psi_{2,p}(z)$ funkcije analitičke u D čije su granične vrednosti $\frac{V_p(\alpha(t))}{X_{o,p}(\alpha(t))}$, $t \in L$, i razmotrimo posebno slučaj u kojem su svi $\kappa_p \geq 0$ od onog u kojem su svi $\kappa_p < 0$, $p=0,1,\dots,n-1$.

(a) Neka su $\kappa_p < 0$, $p=0,1,\dots,n-1$.

Funkcije $\frac{U_p(z)}{z^{-\kappa_p} Y_{o,p}(z)}$, $z \in S$, imaju u tački $z=0$ pol reda $-\kappa_p$ pa se prema tome mogu predstaviti u obliku

$$\frac{U_p(z)}{z^{-\kappa_p} Y_{o,p}(z)} = \sum_{i=1}^{-\kappa_p} \frac{C_{i,p}}{z^i} + \Psi_{1,p}(z), \qquad z \in S, \tag{2.2.14}$$

gde su $\Psi_{1,p}(z)$ za sada neodredjene analitičke funkcije u S, a $C_{i,p}$, $p=0,1,\dots,n-1$ su kompleksne konstante.

Uvedemo li oznake $B_{2k-1,p}=\mathrm{Re}\ C_{k,p}$ $B_{2k,p}=\mathrm{Im}\ C_{k,p}$, $g^*_{2k-1}(t) = \frac{1}{t^k}$
$g^*_{2k}(t) = \frac{i}{t^k}$ dobićemo zbog (2.2.13)

$$\Psi^+_{1,p}(z) = C_p - \sum_{k=1}^{-2\kappa_p} \frac{B_{k,p}}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_k(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)\,dt}{t-z}, \quad z\in S,$$

$$\Psi^+_{2,p}(z) = C_p + \sum_{k=1}^{-2\kappa_p} \frac{B_{k,p}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda_p(\alpha^{-1}(t))\,dt}{t-z}, \quad z\in D,$$

gde su C_p proizvoljne kompleksne konstante a $\varphi_i(t)$ i $\lambda_p(t)$ su rešenja integralnih jednačina Fredholma $(\mathfrak{F}\varphi_i)(t) = g^*_i(t)$, $i=1,2,\ldots$ $\ldots,-2\kappa_p$, $(\mathfrak{F}\lambda_p)(t)=G_p(t)$, $p=0,1,\ldots,n-1$.

Ako stavimo da je $B_{-2\kappa_p+1,p}=\mathrm{Re}\ C_p$, $B_{-2k_p+2,p}=\mathrm{Im}\ C_p$ i definišemo funkcije:

$$\begin{aligned} M_{2k-1}(z) &= \frac{1}{z^k} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{2k-1}(t)}{t-z}\,dt, & z\in S,\\ M_{2k}(z) &= \frac{i}{z^k} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{2k}(t)}{t-z}\,dt, & z\in S, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

$$k=1,2,\ldots,-\kappa_p,$$

$$M_{-2k_p+1}(z) = 1, \quad M_{-2k_p+2}(z) = i, \quad z\in S,$$

i

$$N_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \qquad z\in D,$$

$$k=1,2,\ldots,-2\kappa_p,$$

$$N_{-2\kappa_p+1}(z) = 1, \quad N_{-2\kappa_p+2} = i, \quad z\in D,$$

gde su funkcije $\varphi_k(t)$ rešenja integralne jednačine Fredholma $(\mathfrak{F}\varphi_k)(t) = g^*_k(t)$, $k=1,2,\ldots,-2\kappa_p$, onda ćemo opšte rešenje homogenog konturnog problema (2.2.7) u slučaju $\kappa_p < 0$ moći predstaviti u obliku

$$W_1(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^v U_v(z), \qquad z \in S,$$
$$W_2(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^v V_v(z), \qquad z \in D, \tag{2.2.16}$$

gde su $U_v(z) = z^{-\kappa_v} Y_{o,v}(z)\left(\sum_{i=1}^{-2\kappa_v+2} B_{i,v} M_i(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_v(t)dt}{t-z}\right)$, $z \in S$,

$$V_v(z) = X_{o,v}(z)\left(\sum_{i=1}^{-2\kappa_v+2} B_{i,v} N_i(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda_v(\alpha^{-1}(t))dt}{t-z}\right), \quad z \in D.$$

(b) Neka su $\kappa_p \geqslant 0$ $(p=0,1,\ldots,n-1)$.

Funkcije $\frac{U_p(z)}{z^{-\kappa_p} Y_{o,p}(z)}$ su sada analitičke u S i za $\kappa_p > 0$ jednake nuli u koordinatnom početku, a funkcije $\frac{V_p(z)}{X_{o,p}(z)}$ su analitičke u D. Na osnovu ovoga iz (2.2.13) dobijamo

$$\frac{z^{\kappa_p} U_p(z)}{Y_{o,p}(z)} = C_p - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)dt}{t-z}, \quad z \in S,$$
$$\frac{V_p(z)}{X_{o,p}(z)} = C_p + \frac{i}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda_p(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt, \quad z \in D. \tag{2.2.17}$$

Ako je $\kappa_p = 0$, onda iz (2.2.17) nalazimo $U_p(z) = Y_{op}(z)\cdot\left(C_p - \frac{1}{2\pi i}\cdot\right.$ $\left.\cdot\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t-z}\,dt\right)$, $z \in S$,

$$V_p(z) = X_{o,p}(z)\cdot\left(C_p + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda_p(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt\right), \quad z \in D,$$

odnosno $W_1(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^v U_v(z)$, $z \in S$ i $W_2(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^v V_v(z)$, $z \in D$, tj. dobijamo već nadjeno opšte rešenje homogenog problema (2.2.7) sa Košijevim indeksom koeficijenta $A_p(t)$ jednakim nuli. Ovo je rešenje očigledno sadržano i u formuli (2.2.15) ako dopustimo da ona važi i za $\kappa_p=0$.

U slučaju da je $\kappa_p > 0$ $(p=0,1,\dots,n-1)$ rešenje problema (2.2.7) ako uopšte postoji, se može predstaviti u obliku

$$W_1(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^v U_v(z),\ z\in S,\ W_2(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^v V_v(z),\ z\in D, \quad (2.2.18)$$

gde su

$$U_v(z) = z^{-\kappa_v} X_{o,v}(z)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_v(t)}{t-z}\,dt + C_v\right), \quad z\in S,$$

$$V_v(z) = X_{o,v}(z)\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda_v(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt + C_v\right), \ z\in D,$$

gde je funkcija $\lambda_v(t)$ rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{F}\lambda_v)(t) = \dfrac{g_v(t)}{X_{o,v}(\alpha(t))}$, $(v=0,1,\dots,n-1)$, a C_v je proizvoljna kompleksna konstanta.

Iz (2.2.18) se vidi da je za rešivost problema (2.2.7) u ovom slučaju neophodno i dovoljno da bi analitička u S funkcija $U_{*,p}(z) = \dfrac{-1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t-z}dt + C_p$ imala u tački $z=0$ nulu reda ne manju od κ_p. Radi nalaženja odgovarajućih uslova rešivosti razvićemo funkcije $U_{*,p}(z)$ u Tejlorov red u okolini tačke $z=0$. Na taj način su funkcije $U_p(z)$, $(p=0,1,\dots,n-1)$ analitičke u S, ako su svi koeficijenti uz $z^o, z^1, \dots, z^{\kappa_p-1}$ u razvoju

$$U_{*,p}(z)=C_p-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t^{j+1}}\,dt, \ z\in S,$$

jednaki nuli. Odavde dobijamo neophodne i dovoljne uslove rešivosti problema (2.2.7).

$$C_p - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt = 0, \tag{2.2.19}$$

$$\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t^{j+1}}\,dt = 0, \tag{2.2.20}$$

$j=1,2,\ldots,\kappa_p-1,\ p=0,1,\ldots,n-1.$

Uslovi (2.2.19) i (2.2.20) se mogu zapisati u obliku $\sum_{p=0}^{n-1}(2\kappa_p-2)$ realnih uslova rešivosti. Da bi se ovo videlo dovoljno je izabrati kompleksne onstante C_p tako da bi bilo:

$$\operatorname{Re} C_p = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt\right), \tag{2.2.21}$$

$$\operatorname{Im} C_p = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt\right), \tag{2.2.22}$$

$p=0,1,\ldots,n-1.$

U uslovu (2.2.20) možemo odvojiti realne i imaginarne delove i na taj način od njega dobiti $\sum_{p=0}^{n-1}(2\kappa_p-2)$ realnih uslova rešivosti:

$$\operatorname{Re}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t^{j+1}}\,dt = 0, \quad \operatorname{Im}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t^{j+1}}\,dt = 0, \tag{2.2.23}$$

$j=1,2,\ldots,\ \kappa_p-1,\quad p=0,1,\ldots,n-1.$

Razmotrimo sada opšti slučaj (2.2.1). Korišćenjem relacije (2.2.4) navedeni konturni problem se svodi na sledeći sistem konturnih problema za analitičke funkcije $U_p(z)$, $z\in S$ i $V_p(z)$, $z\in D$, $p=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1$:

$$V_p(\alpha(t))=A_p(t)\cdot U_p(t)+\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\left(A_p(t)\cdot \bar{t}^{\,j}U_{p+j}(t)-\overline{\alpha(t)}^{\,j}V_{p+j}(\alpha(t))\right)+\frac{B_p(t)}{p!!}$$

$(p=0,1,\ldots,n-1)$, gde je $\sum_{j=1}^{0}a_j=0$ po definiciji.

Uzimajući u ovom sistemu prvo p=n-1 pa p=n-2 itd. i prikazujući koeficijente $A_p(t)$ u obliku $A_p(t) = \dfrac{X_{o,p}(\alpha(t))}{t^{-\kappa_p}\cdot Y_{o,p}(t)}$, $t \in L$, gde su $X_{o,p}(z)$, $z\in S$ i $Y_{o,p}(z)$, $z \in D$, komponente rešenja problema

$V_p(\alpha(t))=A_{o,p}(t)\cdot U_p(t)$, $A_{o,p}(t)=t^{-\kappa_p}A_p(t)$, $t \in L$, u kojem je $\frac{1}{2\pi}[\arg A_{o,p}(t)]_L=0$, nalazimo redom funkcije $U_{n-1}(z)$, $z\in S$ i $V_{n-1}(z)$, $z \in D$, pa $U_{n-2}(z)$, $z \in S$ i $V_{n-2}(z)$, $z \in D$, itd. U slučaju $\kappa_p \leq 0$ (p=0,1,... ...,n-1) bi dobili

$$
\begin{aligned}
U_p(z) &= z^{-\kappa_p}Y_{o,p}(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa_p+2} B_{i,p}\cdot M_i(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t-z}\,dt\Big), \quad z \in S \\
V_p(z) &= X_{o,p}(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa_p+2} B_{i,p}\cdot N_i(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda_p(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt\Big), \quad z \in D,
\end{aligned}
\tag{2.2.24}
$$

gde je $\lambda_p(t)$, p=0,1,....,n-1, rešenje integralne jednačine

$$(\mathcal{T}\lambda_p)(t) = \frac{\frac{1}{p!}B_p(t)+g_p(t)}{X_{o,p}(\alpha(t))},$$ a $M_i(z)$ i $N_i(z)$, $i=1,2,....,-2\kappa_p+2$

su funkcije odredjene sa (2.2.15). Na taj način bi u slučaju $\kappa_p \leq 0$, (p=0,1,...,n-1) rešenje konturnog problema (2.2.1) mogli zapisati u obliku

$$W_1(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^v\cdot U_v(z),\ z \in S,\quad W_2(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^v\cdot V_v(z),\ z \in D, \tag{2.2.25}$$

gde su funkcije $U_v(z)$ i $V_v(z)$, v=0,1,....,n-1 odredjene sa (2.2.24)

U slučaju da je $\kappa_p > 0$ (p=0,1,...,n-1) rešenje problema (2.2.1), ako uopšte postoji, se može predstaviti u obliku

$$W_1(z,\bar z)=\sum_{v=0}^{n-1}\bar z^v U_v(z),\quad W_2(z,\bar z)=\sum_{v=0}^{n-1}\bar z^v V_v(z),$$ gde su

$$U_v(z)=z^{-\kappa_v}\cdot Y_{o,v}(z)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\lambda_v(t)}{t-z}\,dt+C_v\right),\quad z\in S,$$

$$V_v(z)=X_{o,v}(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\lambda_v(\alpha^{-1}(t))}{t-z}\,dt+C_v\right),\quad z\in D, \tag{2.2.26}$$

λ_v je rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{T}\lambda_v)(t)=\dfrac{B_v(t)+g_v(t)}{X_{o,v}(\alpha(t))}$,

$(v=0,1,\dots,n-1)$, a C_v je proizvoljna kompleksna konstanta.

Iz (2.2.26) se vidi da je za rešivost problema (2.2.1) u ovom slučaju neophodno i dovoljno da bi analitička u S funkcija

$$U_{*,v}(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int\frac{\lambda_v(t)}{t-z}\,dt+C_v$$

imala u tački z=0 nulu reda ne manju od κ_v.

Odavde dobijamo neophodne i dovoljne uslove rešivosti problema (2.2.1):

$$C_v=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\lambda_v(t)}{t}\,dt,\qquad v=0,1,\dots,n-1, \tag{2.2.27}$$

$$\mathrm{Re}\int_L\frac{\lambda_v(t)}{t^{j+1}}\,dt=0,\qquad \mathrm{Im}\int_L\frac{\lambda_v(t)}{t^{j+1}}\,dt=0, \tag{2.2.28}$$

$$j=1,2,\dots,\kappa_v-1,\qquad v=0,1,\dots,n-1.$$

Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

TEOREMA 2.2.1. Ako su za sve $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$ indeksi $\kappa_p = \frac{1}{2\pi}[\arg A(t)]_L \leqslant 0$, onda je konturni problem (2.2.1) bezuslovno rešiv i njegovo rešenje, predstavljeno formulom (2.2.25) sadrži $2\sum_{p=0}^{n-1}(-\kappa_p+1)$ proizvoljnih realnih konstanti. Ako su pak svi $\kappa_p > 0$, $p=0,1,\dots$ $\dots,n-1$, onda je problem (2.2.1) rešiv ako i samo ako je ispunjeno $2\sum_{p=0}^{n-1}(\kappa_p-1)$ realnih uslova rešivosti (2.2.28) i njegovo jedinstveno rešenje se dobija po formuli (2.2.26) u kojoj je C_v odredjeno sa (2.2.27).

Primer. Odrediti funkcije $W_1(z,\bar z)$ i $W_2(z,\bar z)$ bianalitičke respektivno u oblastima S^+ i D^+ ograničenih kružnicom $L: |t|=2$ odnosno $\Gamma: |t| = \frac{1}{2}$ ako njihove granične vrednosti zadovoljavaju sledeći sistem od dva konturna uslova

$$\begin{aligned} W_2\left(\frac{1}{t},\frac{1}{\bar t}\right) &= W_1(t,\bar t)+t-\frac{1}{t}+\frac{15}{4} \\ DW_2\left(\frac{1}{t},\frac{1}{\bar t}\right) &= DW_1(t,t)+\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot 2 \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Ovde je $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, $A_o(t)=A_1(t)=1$, $B_o(t)=t-\frac{1}{t}+\frac{15}{4}$ i $B_1(t)=2(t-\frac{1}{t}$

Bianalitičke funkcije $W_1(z,\bar z)$ i $W_2(z,\bar z)$ potražićemo u obliku

$$\begin{aligned} W_1(z,\bar z) &= U_o(z)+\bar z\cdot U_1(z) \\ W_2(z,\bar z) &= V_o(z)+\bar z\cdot V_1(z) \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Ako vrednosti (2.2.30) i vrednosti areolarnih izvoda

$$DW_1(z,\bar z) = 2\cdot U_1(z)$$

$$DW_2(z,\bar z) = 2\cdot V_1(z)$$

zamenimo u konturne uslove (2.2.29) dobićemo

$$V_o(\tfrac{1}{t}) + \tfrac{1}{\bar{t}}\cdot V_1(\tfrac{1}{t}) = U_o(t) + \bar{t}\cdot U_1(t) + t - \tfrac{1}{t} + \tfrac{15}{4} \tag{2.2.31}$$

$$2V_1(\tfrac{1}{t}) = 2U_1(t) + 2(t - \tfrac{1}{t}) \tag{2.2.32}$$

Uslov (2.2.32) predstavlja konturni problem (2.1.1) za odredjivanje analitičkih funkcija $U_1(z)$ i $V_1(z)$. Rešavanjem ovog problema pokazujemo da je $U_1(z) = -z$, $z \in S^+$ i $V_1(z) = -z$, $z \in D^+$.

Zamenom ovih vrednosti u (2.2.31) dobijamo

$$V_o(\tfrac{1}{t}) - \tfrac{1}{t}\cdot\tfrac{1}{\bar{t}} = U_o(t) - t\cdot\bar{t} + t - \tfrac{1}{t} + \tfrac{15}{4} \tag{2.2.33}$$

Kako je, na kružnici L, $t\cdot\bar{t} = 4$ to uslov (2.2.33) prelazi u

$$V_o(\tfrac{1}{t}) = U_o(t) + t - \tfrac{1}{t} \tag{2.2.34}$$

Rešenje konturnog problema (2.2.34) je $U_o = -z$, $z \in S^+$, $V_o(z) = -z$, $z \in D^+$, tako da tražene bianalitičke funkcije imaju oblik

$$W_1(z,\bar{z}) = -z - \bar{z}\cdot z, \qquad z \in S^+,$$

$$W_2(z,\bar{z}) = -z - \bar{z}\cdot z, \qquad z \in D^+,$$

gde je C proizvoljna kompleksna konstanta.

2.3. Konturni problem tipa Carleman-a za polianalitičke funkcije

Za razliku od rada [49] M.Čanka, koji je razmatrao konturni problem skoka funkcije, kao važan, ali ipak samo specijalan slučaj problema Carleman-a, za areolarnu jednačinu n-tog stepena, ovde će biti formulisana i dokazana teorema o egzistenciji rešenja konturnog problema tipa Carleman-a za polianalitičke funkcije i dato njegovo rešenje u opštem slučaju u eksplicitnom obliku.

Ovim je u isto vreme uopšten i rezultat M.P.Ganin-a [14]. Naime, konturni problem Hilbert-a za polianalitičke funkcije, koji je razmotrio M.P.Ganin je specijalan slučaj konturnog problema tipa Carleman-a za polianalitičke funkcije koji će ovde biti razmotren.

Postavka konturnog problema tipa Carleman-a za polianalitičke funkcije

Na prostoj, zatvorenoj, glatkoj konturi Ljapunova L, koja deli ravan kompleksne promenljive na unutarnju oblast D^+ i spoljnju oblast D^-, zadane su funkcije $A_k(t)$ i $B_k(t)$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ i $\alpha(t)$ koje zadovoljavaju uslov Höldera, pri čemu funkcije $A_k(t)$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ i $\alpha'(t)$ ni u jednoj tački konture ne uzimaju vrednost nula i uz to $\alpha'(t)$ zadovoljava uslov Höldera. Treba odrediti polianalitičku funkciju reda n oblika

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{z}^{\nu} \varphi_{\nu}(z), \qquad z \in D^+ \tag{2.3.1}$$

pri čemu su $\varphi_\nu(z)$: $(\nu=0,1,\dots,n-1)$ proizvoljne analitičke funkcije u D^+, čija granična vrednost na konturi L zadovoljava sledećih n konturnih uslova tipa Carleman-a

$$D^k W(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = A_k(t)\cdot D^k W(t,\bar{t}) + B_k(t), \quad t \in L, \tag{2.3.2}$$

$$(k=0,1,\dots,n-1)$$

gde je $\alpha(t)$ direktno pomeranje koje zadovoljava uslov Carleman-a $\alpha(\alpha(t)) = t$.

Konturni problem tipa Carleman-a
za polianalitičke funkcije

S obzirom da iz relacije (2.3.1) slede jednakosti

$$D^k W(t,\bar{t}) = 2^k \sum_{v=k}^{n-1} v(v-1)\ldots(v-k+1)\bar{t}^{v-k}\cdot\varphi_v(t),\quad t\in L, \qquad (2.3.3)$$
$$(k=0,1,\ldots,n-1)$$

to se lako može pokazati da se konturni problem tipa Carleman-a za polianalitičku funkciju $W(z,\bar{z})$ može svesti na n-konturnih problema tipa Carleman-a za analitičke funkcije $\varphi_p(z)$ $(p=0,1,\ldots$ $\ldots,n-1)$. Naime, zbog relacije (2.3.3) konturni uslov (2.3.2) može se napisati u obliku

$$2^k\cdot\sum_{v=k}^{n-1}\frac{v!}{(v-k)!}\,\overline{\alpha(t)}^{v-k}\cdot\varphi_v(\alpha(t))=A_k(t)\cdot 2^k\cdot\sum_{v=k}^{n-1}\frac{v!}{(v-k)!}t^{v-k}\cdot\overline{\varphi_v(t)}+B_k(t), \qquad (2.3.4)$$

$$(k=0,1,\ldots,n-1).$$

Za k=n-1 iz (2.3.4) se dobija

$$\varphi_{n-1}(\alpha(t))=A_{n-1}(t)\cdot\overline{\varphi_{n-1}(t)}+\frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!!},\quad t\in L.$$

Stavljajući k=n-2 iz (2.3.4) se dobija konturni problem za analitičke funkcije:

$$\varphi_{n-2}(\alpha(t))=A_{n-2}(t)\overline{\varphi_{n-2}(t)}+(n-1)\cdot(A_{n-2}(t)\cdot t\overline{\varphi_{n-1}(t)}-\overline{\alpha(t)}\cdot\varphi_{n-1}(\alpha(t))+\frac{B_{n-2}(t)}{(n-2)!!}$$

Dalje se indukcijom može pokazati da je

$$\varphi_{n-k}(\alpha(t))=A_{n-k}(t)\cdot\overline{\varphi_{n-k}(t)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{n-k+j}{j}(A_{n-k}(t)\cdot t^j\cdot\overline{\varphi_{n-k+j}(t)}-\overline{\alpha(t)}^j\cdot\varphi_{n-k+j}(\alpha(t)))+\frac{B_{n-k}(t)}{(n-k)!!}$$

$$(k=1,2,\ldots,n)$$

ili, što je isto,

$$\varphi_p(\alpha(t))=A_p(t)\cdot\overline{\varphi_p(t)}+\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}(A_p(t)\cdot t^j\cdot\overline{\varphi_{p+j}}(t)-\overline{\alpha(t)}^j\cdot\varphi_{p+j}(\alpha(t)))+\frac{B_p(t)}{p!!}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1),$$

gde se po definiciji stavlja $\sum_{j=1}^{0} a_j = 0$.

Stavimo li da je

$$g_p(t) = \begin{cases} f_p(t) + \dfrac{B_p(t)}{p!!} & (p=0,1,\ldots,n-2), \\ \dfrac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!!} & p = n-1, \end{cases} \tag{2.3.5}$$

gde je

$$f_p(t) = \sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\cdot(A_p(t)\, t^j\, \overline{\varphi_{p+j}(t)} - \overline{\alpha(t)}^j\cdot\varphi_{p+j}(\alpha(t)), t\in L, \tag{2.3.6}$$

tada se konturni uslovi (2.3.4) mogu napisati u obliku

$$\varphi_p(\alpha(t)) = A_p(t)\cdot\overline{\varphi_p(t)} + g_p(t), \quad t\in L, \tag{2.3.7}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1).$$

Odavde je, zbog $\alpha(\alpha(t)) = t$

$$\varphi_p(t) = A_p(\alpha(t))\cdot\overline{\varphi_p(\alpha(t))}+g_p(\alpha(t)), \quad t\in L, \tag{2.3.8}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1).$$

Iz relacije (2.3.8) i konjugovane relacije (2.3.7) dobijaju se jednačine

$$(1-A_p(\alpha(t))\cdot\overline{A_p(t)})\cdot\varphi_p(t) = A_p(\alpha(t))\cdot\overline{g_p(t)}+g_p(\alpha(t)),$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1),$$

iz kojih se vidi da ako je za sve indekse p, $1-A_p(\alpha(t))\cdot\overline{A_p(t)}\neq 0$ na konturi L, onda odgovarajući sistem homogenih konturnih problema tipa Carleman-a

$$\varphi_p(\alpha(t)) = A_p(t)\cdot\overline{\varphi_p(t)}, \quad t\in L, \tag{2.3.9}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1),$$

nema netrivijalnih rešenja. S obzirom da je u ovom slučaju, za sve $p\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $g_p(t)=0$ i $\varphi_p(t)=0$, pa prema tome i $B_p(t)=0$, to sledi da odgovarajući homogeni konturni problem za polianalitičke funkcije (2.3.2) ima jedinstveno rešenje $W(z,\bar z)=0$.

Razmotrimo sada sistem nehomogenih konturnih problema tipa Carleman-a.

Ako je $1-A_p(\alpha(t))\cdot\overline{A_p(t)}\neq 0$, za $p=0,1,\ldots,n-1$, onda problem (2.3.7) predstavlja problem nalaženja analitičkih funkcija $\varphi_p(z)$ u oblasti ograničenoj konturom L po poznatim njihovim graničnim vrednostima $\gamma_p(t)=\dfrac{A_p(\alpha(t))\cdot g_p(t)+g_p(\alpha(t))}{1-A_p(\alpha(t))\cdot\overline{A_p(t)}}$, $p=0,1,\ldots,n-1$ na konturi L pa na osnovu Cauchy-jeve teoreme ima jedinstveno rešenje

$$\varphi_p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\gamma_p(t)}{t-z}\,dt, \quad z\in D^+ \tag{2.3.10}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1),$$

gde je $\gamma_p(t)$ funkcija koja na konturi L zadovoljava uslov Höldera. Stoga, odgovarajući konturni problem za polianalitičke funkcije ima rešenje oblika

$$W(z,\bar z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{n-1}\bar z^{\nu}\int_L \frac{\gamma_p(t)}{t-z}\,dt, \quad z\in D^+.$$

Ako bi za neko $p \in (0,1,\dots,n-1)$ bilo

$$A_p(\alpha(t))\cdot\overline{A_p(t)} = 1, \qquad t\in L,$$

i

$$A_p(\alpha(t))\cdot\overline{g_p(t)} + g_p(\alpha(t)) \neq 0, \qquad t\in L,$$

onda takodje konturni problem za polianalitičku funkciju tipa Carlemana (2.3.2) nema rešenja.

Odavde proizlazi da ako je za svako $p \in (0,1,\dots,n-1)$

$$A_p(\alpha(t))\cdot\overline{A_p(t)} = 1, \qquad t\in L, \tag{2.3.10}$$

i

$$A_p(\alpha(t))\cdot\overline{g_p(t)} + g_p(\alpha(t)) = 0, \qquad t\in L, \tag{2.3.11}$$

onda je konturni problem za polianalitičke funkcije tipa Carleman-a netrivijalan.

Pretpostavimo stoga da uz već postavljene uslove na funkcije $g_p(t)$, $\alpha(t)$ i $A_p(t)$ važe i uslovi (2.3.10) i (2.3.11). Budući da su tada indeksi κ_p funkcija $A_p(t)$ $(p=0,1,\dots,n-1)$ parni brojevi, biće

$$A_p(t) = \frac{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}{\overline{t^{m_p}X_{o,p}(t)}}, \qquad t\in L, \tag{2.3.12}$$

$$(p=0,1,\dots,n-1)$$

gde je

$$m_p = \frac{\kappa_p}{2}, \quad X_{o,p} = \exp\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\gamma_p(\alpha(t))}{t-z}\,dt\Big), \qquad z\in D^+,$$

a $\gamma_p(t)$ $(p=0,1,\dots,n-1)$ rešenja sistema jednačine

$$(\mathcal{T}\gamma_p)(t) = \ln\Big(\frac{\bar{t}^{m_p}}{\alpha^{m_p}(t)}\cdot A_p(t)\Big), \qquad t\in L.$$

gde je

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{\overline{\tau'^2(s)}}{\overline{\tau}-\overline{t}}\right)\cdot\varphi(\tau)d\tau .$$

Sada se konturni uslovi (2.3.7) mogu napisati u obliku

$$\frac{\varphi_p(\alpha(t))}{\alpha^{m_p}\cdot X_{o,p}(\alpha(t))} - \frac{\overline{\varphi_p(t)}}{\overline{t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)}} = \frac{g_p(t)}{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}, \tag{2.3.13}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1).$$

Dokažimo da funkcije

$$h_p(t) = \frac{g_p(t)}{\alpha^{m_p}\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}, \quad (p=0,1,\ldots,n-1),$$

zadovoljavaju uslove

$$h_p(\alpha(t))+\overline{h_p(t)} = 0, \qquad (p=0,1,\ldots,n-1). \tag{2.3.14}$$

U tom cilju proverimo, s obzirom na (2.3.5), sledeće jednakosti

$$\frac{f_p(\alpha(t))}{t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)} + \frac{\overline{f_p(t)}}{\overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}} = 0 \quad (p=0,1,\ldots,n-1), \tag{2.3.15}$$

i

$$\frac{B_p(\alpha(t))}{P!!\cdot t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)} + \frac{\overline{B_p(t)}}{P!!\ \overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}} = 0, \tag{2.3.16}$$

$$(p=0,1,\ldots,n-1).$$

Prema (2.3.12) biće

$$\frac{B_p(\alpha(t))}{P!!\cdot t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)} + \frac{\overline{B_p(t)}}{P!!\cdot \overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}} =$$

$$= \frac{1}{P!!\cdot \overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}}\left(\frac{\overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}}{t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)}\cdot B_p(\alpha(t))+\overline{B_p(t)}\right) =$$

$$= \frac{1}{p!\,l\cdot \alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}\,\overline{(A_p(t)\cdot \overline{B_p(\alpha(t))} + B_p(t))} = 0$$

Time je dokazano da važi relacija (2.3.16).

Na isti način je za svako $p \in (0,1,\ldots,n-1)$

$$\frac{\overline{f_p(t)}}{\overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}} + \frac{f_p(\alpha(t))}{t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\cdot(\overline{A_p(t)}\cdot \bar{t}^{j}\cdot \varphi_{p+j}(t) - \alpha(t)^{j}\cdot\overline{\varphi_{p+j}(\alpha(t))})}{\overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}}$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\cdot(A_p(\alpha(t))\cdot\alpha(t)^{j}\cdot\overline{\varphi_{p+j}(\alpha(t))} - \bar{t}^{j}\cdot\varphi_{p+j}(t))}{t^{m_p}\cdot X_{o,p}(t)}$$

$$= \frac{1}{\overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}}\,(\overline{A_p(t)}\cdot\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\cdot(A_p(\alpha(t))\,\alpha(t)^{j}\cdot\overline{\varphi_{p+j}(\alpha(t))} - \bar{t}^{j}\varphi_{p+j}(t))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\cdot(\overline{A_p(t)}\cdot\bar{t}^{j}\cdot\varphi_{p+j}(t) - \alpha(t)^{j}\cdot\overline{\varphi_{p+j}(\alpha(t))}))$$

$$= \frac{1}{\overline{\alpha^{m_p}(t)\cdot X_{o,p}(\alpha(t))}}\,(\sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}\cdot(\alpha(t)^{j}\cdot\overline{\varphi_{p+j}(\alpha(t))} - \overline{A_p(t)}\cdot\bar{t}^{j}\cdot\varphi_{p+j}(t))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-p-1}\binom{p+j}{j}(\overline{A_p(t)}\cdot\bar{t}^{j}\cdot\varphi_{p+j}(t) - \alpha(t)^{j}\cdot\overline{\varphi_{p+j}(\alpha(t))})) = 0$$

pa važi i relacija (2.3.15).

Prema tome, sistem (2.3.13) možemo posmatrati kao sistem konturnih problema Carleman-a po skoku za funkcije $\dfrac{\varphi_p(z)}{z^{m_p}\cdot X_{o,p}(z)}$ $(p=0,1,\ldots,n-1)$, koje u opštem slučaju imaju pol reda m_p, te se mogu predstaviti u obliku

$$\frac{\varphi_p(z)}{z^{m_p}\cdot X_{o,p}(z)} = \frac{c_{1,p}}{z} + \frac{c_{2,p}}{z^2} + \dots + \frac{c_{m,p}}{z^m} + \Psi_p(z),$$

$$(p=0,1,\dots,n-1),$$

gde su $\Psi_p(z)$ analitičke funkcije u oblasti D^+ a $c_{i,p}$ $(i=1,2,\dots,m)$, kompleksne konstante. Odavde

a) za $\varkappa_p \geqslant 0$, $p=0,1,\dots,n-1$, dobijamo rešenje sistema (2.3.13) u obliku:

$$\varphi_p(z) = z^{\frac{\varkappa_p}{2}}\cdot X_{o,p}(z)\cdot\Big(\sum_{j=0}^{\varkappa_p}\gamma_{j,p}\cdot U_{j,p}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Psi_p(\alpha(t))}{t-z}\Big)$$

$$(p=0,1,\dots,n-1),$$

gde su $\Psi_p(t)$, $(p=0,1,\dots,n-1)$ rešenja sistema integralnih jednačina

$$(\mathfrak{F}\Psi_p)(t) = h_p(t),$$

funkcije $U_{i,p}$ $(i=0,1,\dots,{}_p)$, $(p=0,1,\dots,n-1)$ odredjene relacijama

$$U_{o,p}(z) = 1,$$

$$U_{2j-1,p}(z) \equiv \frac{1}{z^j} + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Psi_{2j-1,p}(\alpha(t))}{t-z}\,dt,$$

$$U_{2j,p}(z) \equiv \frac{i}{z^j} + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Psi_{2j,p}(\alpha(t))}{t-z}\,dt,$$

$\Psi_{j,p}(t)$, $(j=1,2,\dots,\varkappa_p)$, $(p=0,1,\dots,n-1)$ rešenja integralnih jednačina

$$(\mathfrak{F}\Psi_{j,p})(t) = g_j(t),$$

funkcije $g_j(t)$, $(j=1,2,\dots,\varkappa_p)$ odredjene relacijama

$$g_{2j-1}(t) = \frac{1}{\bar{t}^j} - \frac{1}{\alpha(t)^j},$$

$$g_{2j}(t) = -\frac{i}{\bar{t}^j} - \frac{i}{\alpha(t)^j},$$

a konstante $\gamma_{j,p}$, za $j \in \{1,2,\dots,\kappa_p\}$ i $p \in \{0,1,\dots,n-1\}$ dobijaju se iz relacija

$$\gamma_{2j-1,p} = \operatorname{Re} C_{j,p},$$

$$\gamma_{2j,p} = \operatorname{Im} C_{j,p} .$$

Zamene li se ovako nadjene analitičke funkcije $\varphi_p(z)$ u relaciju (2.3.1), dobija se rešenje konturnog problema za polianalitičke funkcije tipa Carleman-a, u slučaju $\kappa_p \geqslant 0$ u obliku

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^v z^{\frac{\kappa_v}{2}} X_{o,v}(z)\left(\sum_{j=0}^{\kappa_v} \gamma_{j,v} U_{j,v}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Psi_v(\alpha(t))}{t-z}\,dt\right) \quad (2.3.17)$$

b) za $\kappa_p < 0$, $p=0,1,\dots,n-1$, rešenje sistema (2.3.13) ako postoji dobija se po obrascu

$$\varphi_p(z) = z^{\frac{\kappa_p}{2}} X_{o,p}(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Psi_p(\alpha(t))}{t-z}\,dt + C_p\right), \quad C_p \in R,$$

gde su $\psi_p(t)$ rešenja sistema integralnih jednačina

$$(\mathfrak{J}\psi_p)(t) = h_p(t), \qquad (p=0,1,\dots,n-1).$$

Uslovi koji garantuju postojanje rešenja sistema (2.3.13), pa prema tome i rešenja konturnog problema za polianalitičke funkcije u ovom slučaju, mogu se napisati u obliku

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Psi_p(\alpha(t))}{t}\cdot dt = 0, \quad (2.3.18)$$

$$\operatorname{Re} \int_L \frac{\Psi_p(\alpha(t))}{t^{j+1}} dt = 0, \tag{2.3.19}$$

$$\operatorname{Im} \int_L \frac{\Psi_p(\alpha(t))}{t^{j+1}} dt = 0, \tag{2.3.20}$$

$$(j=1,2,\ldots,-\frac{\varkappa_p}{2} - 1); \quad (p=0,1,\ldots,n-1),$$

ukoliko C_p $(p=0,1,\ldots,n-1)$ izaberemo tako da je

$$C_p + \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Psi_p(\alpha(t))}{t} dt = 0.$$

Samo rešenje konturnog problema za polianalitičke funkcije, tipa Carleman-a (2.3.2) dobijamo pomoću formule:

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{z}^{\nu} z^{\frac{\varkappa_\nu}{2}} \cdot X_{o,\nu}(z) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Psi_\nu(\alpha(t))}{t-z} dt + C_\nu\right) \tag{2.3.21}$$

$$(C_\nu \in R).$$

Na osnovu napred izloženog važi sledeća

<u>TEOREMA 2.3.1</u>. Ako su za svako $p \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ indeksi $\varkappa_p$ konturnih uslova problema tipa Carleman-a (2.3.2) nenegativni, onda konturni problem za polianalitičke funkcije tipa Carleman-a jeste bezuslovno rešiv i njegovo rešenje koje se daje formulom (2.3.17), sadrži $\sum_{p=0}^{n-1} \varkappa_p + n$ proizvoljnih realnih konstanti. Ako su za svako $p \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ indeksi $\varkappa_p$ konturnih uslova problema tipa Carleman-a (2.3.2) negativni, onda je konturni problem za polianalitičke funkcije tipa Carleman-a rešiv ako i samo ako je ukupno ispunjeno $-\sum_{p=0}^{n-1} \varkappa_p - n$ realnih uslova rešivosti (2.3.18), (2.3.19) i (2.3.20) i njegovo rešenje koje se daje formulom (2.3.21) ne sadrži ni jednu proizvoljnu konstantu.

2.4. PRIBLIŽNO REŠAVANJE KONTURNOG PROBLEMA HAZEMANA

Neka je Γ prosta zatvorena kriva Ljapunova, koja deli kompleksnu ravan na oblasti D^+ koja sadrži koordinatni početak, i D^- koja sadrži beskonačno daleku tačku. Konturni problem Hazemana se sastoji u nalaženju deo po deo analitičke funkcije $\phi(z)$ sa linijom skoka Γ ako je zadana sledeća funkcionalna veza izmedju njenih graničnih vrednosti u tačkama t i $\alpha(t)$ konture Γ.

$$\phi^+(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi^-(t) + g(t). \tag{2.4.1}$$

Ovde su G(t) i g(t) zadane funkcije koje zadovoljavaju uslov Höldera na Γ i $G(t)\neq 0$, a homeomorfizam $\alpha(t)$ konture Γ na samu sebe koji čuva pravac obilaženja takav da izvod $\alpha'(t)\in H(\Gamma)$ nije jednak nuli ni u jednoj tački konture Γ.

U radu [43] Tihonenko je našao približno rešenje konturnog problema (2.4.1) u slučaju kada je kontura kružnica $|t| = 1$. On je tražio prvo približno rešenje integralne jednačine Fredholma pridružene konturnom uslovu (2.4.1) u obliku interpolacionog polinoma $\varphi_1(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n} a_k t^k$ po čvorovima $t_j = e^{\frac{2\pi i j}{2n+1}}$, j=0,1,2,...,2n. Za odredjivanje konstanti a_k Tihonenko je dobio sistem linearnih algebarskih jednačina koji je rešiv za dovoljno velike n. Približno rešenje problema Hazemana konstruisano je zatim po formulama

$$\phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_1(\alpha_{-1}(t))}{t-z}\,dt, \qquad \phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_1(t)dt}{t-z}$$

Ovde će biti izložena metoda približnog rešavanja konturnog problema Hazemana za poluravan, zasnovana na teoremi koja će radi opštosti primene biti dokazana za opštu linearnu jednačinu u opštem vektorskom prostoru.

Razmotrimo linearnu nehomogenu jednačinu opšteg oblika $Af = g$, gde je $A:X \to Y$, zadan linearni operator sa vektorskog prostora X u vektorski prostor Y, g je element prostora Y a f traženi element u prostoru X.

Problem nalaženja približnog rešenja jednačine $Af=g$, pod uslovom da ono postoji, zamenićemo problemom nalaženja tačnog rešenja jednostavnije približne jednačine $A_1f_1=g$, gde je $f_1 \in X$ a $g_1 \in Y$. Razmotrit ćemo slučaj kada element f_1 uzet za približno rešenje početne jednačine, pripada istom prostoru X, kojem pripada tačno rešenje f početne jednačine. Osim toga, da bi razlika ovih rešenja bila što manja, pretpostavljat ćemo da je $f-f_1 \in X_o \subset X$, gde je X_o linearan vektorski potprostor prostora X. Ova pretpostavka će biti ostvarena, ako se operatori A i A_1 kao i elementi g i g_1 u nekom smislu malo razlikuju. Dovoljni uslovi koji obezbedjuju takvu bliskost operatora A i A_1 kao i elemenata g i g_1 sadržani su u sledećem tvrdjenju [13].

<u>TEOREMA 2.4.1</u>. Ako

a) jednačina $A_1f_1 = g_1$ ima jedinstveno rešenje f_1;

b) $g-g_1 \in Y_o$, gde je Y_o linearni potprostor prostora Y;

c) operator $A-A_1$ preslikava prostor X u prostor Y_o;

d) na prostoru Y_o odredjen je inverzni operator A_1^{-1}, koji preslikava Y_o u X_o;

e) na prostoru X_o postoji inverzni operator, operatora $I+A_1^{-1}(A-A_1)$, gde je I jedinični operator;

tada jednačina $Af=g$ ima jedinstveno rešenje dato sa

$$f = f_1 + (I+A_1^{-1}))^{-1} \cdot A_1^{-1}(Af_1-g). \tag{2.4.2}$$

Uz to važi $f-f_1 \in X_0 \subset X$ i $Af_1 - g \in Y_0$.

Dokaz. Iskoristivši pretpostavke b) i c) dobija se

$$Af_1-g = Af_1-A_1f_1+(g_1-g) = (A-A_1)f_1-(g-g_1) \in Y_0,$$

što predstavlja relaciju $Af_1-g \in Y_0$.

Pretpostavivši da rešenje f jednačine $Af = g$ postoji, napišimo element Af_1-g u drugom obliku: $Af_1-g=(A-A_1)(f_1-f)+A_1(f_1-f)$ ili $A_1\varphi = \psi$, gde je $\varphi = f_1-f$ i $\psi = (Af_1-g)-(A-A_1)(f_1-f) \in Y_0$.

Budući da, saglasno sa pretpostavkom d) teoreme imamo $\varphi = A_1^{-1}\ \psi \in X$ biće $f-f_1 \in X_0$.

Sada se lako dobija $(I+A_1^{-1}(A-A_1))(f_1-f) = A_1^{-1}(Af_1-g)$.

Odavde se na osnovu pretpostavke e) teoreme dobija relacija (2.4.2). Prema tome, ako rešenje jednačine $Af=g$ postoji, onda je ono jedinstveno i ima oblik (2.4.2).

Imajući u vidu dobijanje pregledne ocene približnog rešenja, pretpostavimo da je X_0 normiran banahov prostor. Sada, ako važe prve četiri pretpostavke teoreme i ako je peta pretpostavka zamenjena zahtevom ograničenosti operatora $A_1^{-1}(A-A_1)$ čija je norma

$$\| A_1^{-1}\ (A-A_1)\| < 1, \tag{2.4.3}$$

onda važe sva tvrdjenja teoreme, jer iz (2.4.3) sledi da operator $I + A_1^{-1}(A-A_1)$ ima ograničen inverzni operator. Iz formule (2.4.2) lako se dobija ocena greške

$$\|f-f_1\|_{X_o} \leq \frac{\|A_1^{-1}(Af_1-g)\|_{X_o}}{1-\|A_1^{-1}(A-A_1)\|}$$

Da bi rešili konturni problem Hazemana za poluravan mi ćemo ga prvo svesti na jednostavniji konturni problem bez pomeranja $\alpha(t)$. U tu svrhu označimo sa $U^+(z)$ i $U^-(z)$ funkcije koje gornju i donju poluravan D^+ i D^- kompleksne promenljive $z=x+iy$ konformno preslikavaju na gornju odnosno donju poluravan Δ^+ i Δ^- kompleksne promenljive $w=u+iv$, pri čemu tačka $\alpha(x)$ pri preslikavanju D^+ u Δ^+ i tačka x pri preslikavanju D^- u Δ^- prelaze u jednu istu tačku u realne ose kompleksne ravni w, tj. funkcije $U^+(z)$ i $U^-(z)$ zadovoljavaju uslov $U^+(\alpha(x))=U^-(x)$. Budući da funkcija $U^-(x)$ ne može biti konstantna a mora uzajamno jednoznačno preslikati oblast D^- u Δ^- to sledi da ona ima prost pol pa ćemo je tražiti u obliku $U^-(z) = z+U_1^-(z)$, gde je $U_1^-(z)$ funkcija analitička u D^- i jednaka nuli u beskonačno dalekoj tački. Funkcije $U^+(z)$ i $U^-(z)$ se mogu prema [31] na jedinstven način odrediti formulom

$$U^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\alpha_{-1}(x))dx}{x-z}, \quad U^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x-z}dx + z,$$

gde je $\varphi(x)$ rešenje bezuslovno i jednoznačno rešive integralne jednačine Fredholma

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) \equiv \varphi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(x)} - \frac{1}{t-x}\right)\cdot\varphi(t)\,dt = x.$$

Označimo sa $U_{-1}^-(w)$ funkciju inverznu funkciji $U^-(z)$ i definišimo deo po deo, u kompleksnoj ravni w, analitičku funkciju $V=\{V^+,V^-\}$ jednakostima $\phi^+(z)=V^+(U^+(z))$, $\phi^-(z)=V^-(U^-(z))$. Za uvedenu funkciju V konturni uslov ima oblik

$$V^+(u) = H(u)\cdot V^-(u) + h(u) \qquad -\infty < u < \infty \tag{2.4.4}$$

gde je $H(u)=G(U^-_{-1}(u))$, a $h(u)=g(U^-_{-1}(u))$.

Jednostavnosti radi pretpostavimo da je indeks κ konturnog problema (2.4.4) jednak nuli, da funkcije $H(U)$ i $h(u)$ pripadaju prostoru $L_2(-\infty,+\infty)$ i da funkcije $V^+(u)$ i $V^-(u)$ tražimo respektivno u prostorima L_2^+ i L_2^-.

L^+_2 je prostor funkcija $F^+(u)$ analitički produživih na gornju poluravan $\mathrm{Im}\,w > 0$, za koje postoji konstanta C takva da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^+(u+iv)|^2 du \le C \qquad \text{za sve } v > 0$$

Analogno se uvodi prostor L_2^- sa zamenom gornje poluravni sa donjom.

Uporedjujući problem (2.4.4) sa jednačinom $Af = g$ zaključujemo da za linearni vektorski prostor X možemo uzeti prostor vektor funkcija $V=(V^+(u),V^-(u))$, $V^+\in L_2^+$, $V^-\in L_2^-$, a operatore A i A_1 odrediti jednakostima $AV = V^+(u) - H(u)\cdot V^-(u)$; $A_1V = V^+(u)-H_1(u)\cdot V^-(u)$; u kojima funkcije $H(u)$ i $H_1(u)$, u svakoj tački konture različite od nule, imaju indeks nula i zadovoljavaju uslov Höldera.

S obzirom da je u ovom slučaju $Y=L_2(-\infty,\infty)$, a funkcije $H(u)$ i $H_1(u)$ ograničene, onda ovi operatori preslikavaju prostor X u Y. Jednačina $A_1V_1= h_1$ u ovom slučaju predstavlja konturni problem Riemann-a za poluravan

$$V_1^+(u) - H_1(u)\cdot V_1^-(u) = h_1(u), \tag{2.4.5}$$

gde funkcija $h_1 \in L_2(-\infty,\infty)$ zadovoljava uslov Höldera, koji ima pri navedenim pretpostavkama jedinstveno rešenje $V_1^{\pm}(z)=X^{\pm}(z)\cdot\Psi^{\pm}(z)$ gde je

$$X^{\pm}(z)=e^{\Gamma^{\pm}(z)}, \quad \Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln H_1(t)}{t-z}\,dt, \quad \Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_1(t)\,dt}{X^+(t)\cdot(t-z)},$$

pa je prema tome zadovoljena prva pretpostavka teoreme. Druga i treća pretpostavka teoreme će važiti ako stavimo

$$Y_o = L_2(-\infty,\infty).$$

Nadjimo inverzni operator A_1^{-1} operatora A_1, koji je definisan jednakošću $V_1=A_1^{-1}h_1$, gde je V_1 rešenje jednačine $A_1V_1=h_1$.

Budući da u našem slučaju poslednja jednačina predstavlja konturni uslov problema Riemann-a (2.4.5), možemo iskoristiti formule koje daju rešenje ovog problema. Ove formule poprimaju mnogo jednostavniji oblik ako iskoristimo projekcione operatore P^+ i P^-. Oni se uvode na sledeći način.

Ako je $F(x)$ zadana funkcija koja pripada prostoru $L_2(-\infty,\infty)$, onda po formulama Plemelj-a biće $F(x)=F^+(x)-F^-(x)$; $F^+(x)\in L_2^+$; $F^-(x)\in L_2^-$, gde se $F^+(x)$ i $F^-(x)$ odredjuju na jedinstven način. Stavlja se po definiciji $P^+F(x)=F^+(x)$, $P^-F(x)=-F^-(x)$. Ovi operatori poseduju sledeća svojstva: $P^++P^-=I$, gde je I jedinični operator, $(P^+)^2=P^+$; $(P^-)^2=P^-$; $P^+P^-=P^-P^+=0$.

Rešenje problema (2.4.5), kojem je indeks jednak nuli, sada se može predstaviti u obliku

$$V_1^{\pm}(u) = X_1^{\pm}(u)\cdot\Psi_1^{\pm}(z), \tag{2.4.6}$$

gde je $X_1^{\pm}(u) = \exp(\pm P^{\pm}\ln H_1(u))$; $\quad \Psi^{\pm}(u) = \pm P^{\pm}\left(\frac{h_1(u)}{X_1^{+}(u)}\right)$.

Na ovaj način je $A_1^{-1}h_1 = \left(\left(X_1^{+}(u)\cdot P^{+}\left(\frac{h_1(u)}{X_1^{+}(u)}\right);\ -X_1^{-}(u)\cdot P^{-}\left(\frac{h_1(u)}{X_1^{+}(u)}\right)\right)\right)$.

Uzme li se uz ovo za prostor X_o, prostor X, odmah se vidi da važi i četvrti uslov teoreme. Uvedimo u prostor X_o normu sa:

$$\|V\|_{X_o} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|V^{+}(u)|^2du + \int_{-\infty}^{\infty}|V^{-}(u)|^2du\right)^{\frac{1}{2}}$$

i ocenimo normu operatora $A_1^{-1}(A-A_1)$.

$$\|A_1^{-1}(A-A_1)V\|_{X_o} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_1^{+}(u)\cdot P^{+}\left(\frac{(A-A_1)V}{X_1^{+}(u)}\right)\right|^2 du\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\left|X_1^{-}(u)\cdot P^{-}\left(\frac{(A-A_1)V}{X_1^{+}(u)}\right)\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\max_u |X_1^{+}(u)|^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|P^{+}\left(\frac{(A-A_1)V}{X_1^{+}(u)}\right)\right|^2 du\right.$$

$$\left.+\max_u |X_1^{-}(u)|^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|P^{-}\left(\frac{(A-A_1)V}{X_1^{+}(u)}\right)\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Stavi li se da je $M=\max(\max_u |X_1^{+}(u)|\ ;\ \max_u |X_1^{-}(u)|)$ i iskoristili se formula

$$\int_{-\infty}^{\infty}|P^{+}\Psi(u)|^2du + \int_{-\infty}^{\infty}|P^{-}\Psi(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(u)|^2du,$$

dobija se

$$\|A_1^{-1}(A-A_1)V\|_{X_o} \leqslant M\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(A-A_1)V}{X_1^+(u)}\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= M\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{(H_1(u)-H(u))\cdot V^-(u)}{X_1^+(u)}\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant M\cdot\varepsilon\ \|V\|_{X_o},$$

gde je $\varepsilon = \max_u \left|\frac{H_1(u)-H(u)}{X_1^+(u)}\right|$.

Na ovaj način, zahtevajući da je $M\cdot\varepsilon < 1$ biće $\|A_1^{-1}(A-A_1)\| \leqslant M\cdot\varepsilon<1$ pa će i peti uslov teoreme biti zadovoljen, što će za posledicu imati da jednačina (2.4.4) ima jedinstveno rešenje dato sa formulom

$$V = V_1 + (I+A_1^{-1}(A-A_1))^{-1}\ A_1^{-1}(AV_1-h), \tag{2.4.7}$$

gde je $V_1(u) = (V_1^+(u);\ V_1^-(u))$ njeno približno rešenje odredjeno sa (2.4.6).

Sada se iz jednakosti (2.4.7) lako dobija da se srednje kvadratno odstupanje izmedju tačnog $V(u)=(V^+(u),V^-(u))$ i približnog $V_1(u)=$ $=(V_1^+(u),V_1^-(u))$ rešenja problema (2.4.4) ocenjuje nejednakošću

$$\|V - V_1\|_{X_o} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|V^+(u)-V_1^+(u)|^2 du + \int_{-\infty}^{\infty}|V^-(u)-V_1^-(u)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{M}{1-M\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{V_1^+(u)-H(u)\cdot V_1^-(u)-h(u)}{X_1^+(u)}\right|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} .$$

III GLAVA

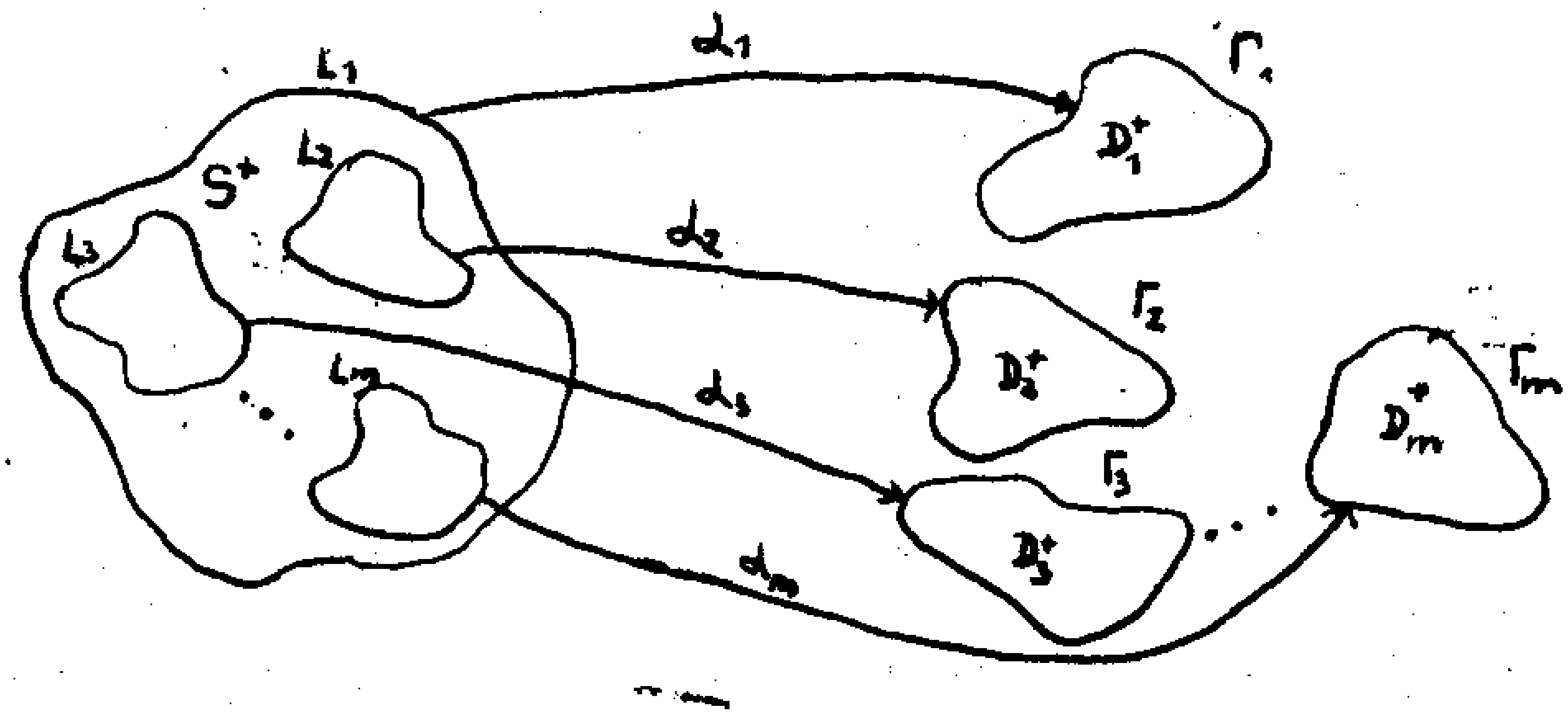
KONTURNI PROBLEMI ZA VIŠESTRUKO POVEZANE OBLASTI

U ovoj glavi prošireni su neki rezultati druge glave na konturne probleme za funkcije analitičke ili polianalitičke u višestruko povezanoj oblasti ograničenoj složenom konturom L koja se sastoji iz konačnog broja prostih zatvorenih krivih Ljapunova. Za zadanu višestruko povezanu oblast i zadane jednostruko povezane oblasti, razmotren je i rešen problem nalaženja funkcija od kojih je svaka analitička ili polianalitička u jednoj od zadanih oblasti, ako je poznata funkcionalna veza izmedju graničnih vrednosti traženih funkcija u odgovarajućim tačkama odgovarajućih kontura. Osim toga, konstruisano je kanoničko rešenje pomoću kojeg se izražavaju sva ostala rešenja.

Pretpostavljeno je da je broj zatvorenih kontura koje ograničavaju višestruko povezanu oblast jednak broju zatvorenih kontura koje ograničavaju sve ostale zadane jednostruko povezane oblasti.

3.1. KONTURNI PROBLEM ZA FUNKCIJU ANALITIČKU U VIŠESTRUKO POVEZANOJ OBLASTI

Neka je S^+ konačna m-povezana oblast, u ravni kompleksne promenljive, ograničena sa m zatvorenih disjunktnih krivih Ljapunova $L_1, L_2, \ldots, L_m$, pri čemu kontura L_1 sadrži unutar sebe sve ostale i neka su D_j^+ $(j=1,2,\ldots,m)$ konačne oblasti takodje u ravni kompleksne promenljive z, ograničene respektivno nepresecajućim prostim, glatkim, zatvorenim konturama Γ_j $(j=1,2,\dots,m)$. Granicu oblasti S^+ označimo sa L, tj. stavimo da je $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$. Za pozitivan pravac obilaženja konture L odnosno Γ_j izaberimo onaj pri kojem oblast S^+ odnosno D_j^+ ostaje sleva. Komplemente jednostruko povezanih oblasti ograničenih konturama Γ_j označimo sa D_j^-, $j=1,2,\dots,m$.



Jednostruko povezane oblasti, ograničene zatvorenim konturama L_j, $j=2,3,\dots,m$, označimo sa S_j^- a komplement od konačne oblasti ograničene konturom L_1 označimo sa S_1^-.

Neka je $\alpha_j^{-1}(t)$ zadana na Γ_j funkcija koja zadovoljava uslove:

a) homeomorfno preslikava zatvorenu konturu Γ_j na neku zatvorenu konturu koja pripada granici L oblasti S^+ menjajući pravac obilaženja;

b) funkcija $\alpha_j^{-1}(t)$ ima neprekidan po Hölderu izvod koji je različit od nule u svim tačkama konture Γ_j;

c) $\alpha_j^{-1}(\Gamma_j) \cap \alpha_k^{-1}(\Gamma_k) = \emptyset$, za $j \neq k$, $j,k=1,2,\dots,m$.

Neka je $\alpha_j(t)$ funkcija inverzna funkciji $\alpha_j^{-1}(t)$, $j=1,2,\dots,m$.

Uvedimo funkciju

$$\omega(t,L_k) = \delta_{kj}, \quad t\in L_j, \quad k,j=1,2,\dots,m,$$

gde je $\delta_{k,j}=1$, ako je $k=j$ i $\delta_{k,j}=0$, ako je $k\neq j$. Na konturi L definišimo funkciju $\alpha(t)$ pomoću formule:

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{m} \omega(t,L_j)\cdot\alpha_j(t), \qquad t\in L_j, \; j=1,2,\dots,m.$$

Sada je očigledno da $\alpha(t)$ preslikava L na $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j$.

Postavka problema: Naći funkcije $\phi^+(z)$ i $\phi_j^+(z)$, $j=1,2,\dots,m$, analitičke respektivno u oblastima S^+, D_j^+ ako su poznati konturni uslovi

$$\phi_j^+(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi^+(t) + g(t), \qquad t\in L_j, \tag{3.1.1}$$

$$j=1,2,\dots,m,$$

gde su $G(t)$ i $g(t)$ neprekidne po Hölderu funkcije na konturi L pri čemu je $G(t)\neq 0$ na L.

Lema 3.1.1. Ako su $\phi^+(z)$ i $\phi_j^+(z)$, $j=1,2,\dots,m$, analitičke funkcije respektivno u oblastima S^+ i D_j^+ i

$$\phi_j^+(\alpha(t)) = \phi^+(t), \qquad t\in L_j, \; j=1,2,\dots,m, \tag{3.1.2}$$

onda je $\phi^+(z) = C$, $z\in S^+$, $\phi_j^+(z) = C$, $z\in D_j^+$, gde je C proizvoljna kompleksna konstanta.

Dokaz: Uzmimo proizvoljne tačke $a_0\in S_1^-$ i $a_j\in D_j^-$, $j=1,2,\dots,m$ i rešenje problema potražimo u obliku

$$\phi^+(z) = \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\phi^+(t)dt}{(t-z)(t-a_o)} \qquad z \in S^+,$$

$$\phi_j^+(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\phi_j^+(t)dt}{(t-z)(t-a_j)} \qquad z \in D_j^+, \quad j=1,2,\ldots,m.$$

Ako izračunamo granične vrednosti korišćenjem formula Plemelja--Sohockog onda pomoću uslova (3.1.2) dobijamo da granična vrednost npr. komponente $\phi^+(z)$ rešenja $(\phi^+(z),\phi_1^+(z),\phi_2^+(z),\ldots,\phi_m^+(z))$ konturnog problema (3.1.2) zadovoljava integralnu jednačinu

$$\phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{k(\tau,t)\ \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{t-a_o}{(\tau-a_o)\cdot(\tau-t)}\right)\cdot\phi^+(\tau)d\tau = 0 \qquad (3.1.3)$$

gde je

$$k(\tau,t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(t)-a_j}{\alpha(\tau)-a_j} & \tau,t \in L_j, \quad j=1,2,\ldots,m, \\ 0 & \tau \in L_j,\ t \in L_k,\ j\neq k,\ j,k=1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Ova integralna jednačina je kanonička jednačina Fredholma pa ima konačan broj linearno nezavisnih rešenja. Budući da je granična vrednost svakog rešenja konturnog problema (3.1.2) rešenje jednačine (3.1.3) to dobijamo da konturni problem (3.1.2) ima samo konačan broj linearno nezavisnih rešenja. Odmah se vidi da je $\phi_j^+(z) = C$, $z \in D_j^+$, $\phi^+(z) = C$, $z \in S^+$, gde je C kompleksna konstanta, rešenje konturnog problema (3.1.2).

Pretpostavimo sada da su rešenje problema (3.1.2) analitičke funkcije $\phi^+(z)$, $\phi_1^+(z),\ldots,$ $\phi_m^+(z)$ različite od konstante. Stepenovanjem sa bilo kojim prirodnim brojem k jednakost $\phi_j^+(\alpha(t))=\phi^+(t)$, $j=1,2,\ldots,m$, dobijamo $\phi_j^+(\alpha(t))^k=\phi^+(t)^k$, $k=1,2,\ldots$.

Odavde se vidi da su zajedno sa $\phi^+(z)$, $\phi_1^+(z)$, ..., $\phi_m^+(z)$ rešenje problema i analitičke funkcije $\phi^+(z)^k$, $\phi_1^+(z)^k$, ..., $\phi_m^+(z)^k$ gde je k bilo koji prirodan broj. Sva ova rešenja su linearno nezavisna i prebrojivo ih je mnogo. Ovo je kontradikcija, pa problem nema drugih rešenja osim kompleksnih konstanti.

Razmotrimo specijalan slučaj

$$\phi_j^+(\alpha(t)) = \phi^+(t) + g(t), \qquad t \in L_j, \quad j=1,2,\ldots,m, \tag{3.1.5}$$

problema (3.1.1) i dokažimo prvo sledeću lemu.

<u>Lema 3.1.2</u>. Kanonička integralna jednačina Fredholma

$$(\mathcal{T}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{k(\tau,t)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{t-a_o}{(\tau-a_o)(\tau-t)}\right)\cdot\varphi(\tau)d\tau = 0 \tag{3.1.6}$$

nema netrivijalnih rešenja.

<u>Dokaz</u>. Neka je $\varphi(t)$ rešenje jednačine (3.1.6). Razmotrimo, za proizvoljne tačke $a_o \in S_1^-$ i $a_j \in D_j^-$, $j=1,2,\ldots,m$ integrale tipa Košija:

$$\phi^+(z) = -\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \quad z \in S^+,$$

$$\phi_j^+(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}dt, \quad z \in D_j^+, \tag{3.1.7}$$

$$j=1,2,\ldots,m,$$

gde je $\alpha_j^{-1}(t)$ homeomorfizam inverzan k $\alpha_j(t)$. Lako se vidi da je $(\mathcal{T}\varphi)(t) = \phi_j^+(\alpha(t)) - \phi^+(t) = 0$. Na osnovu leme 3.1.1 se dobija da je $\phi_j^+(z)=C$, $z \in D_j^+$, $\phi^+(z)=C$, $z \in S^+$, gde je C proizvoljna kompleksna konstanta. Na taj način je:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)+C}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\,dt = 0, \qquad z\in S^+,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))-C}{(t-a_j)(t-z)}\,dt = 0, \quad z\in D_j^+,\ j=1,2,\dots,m. \tag{3.1.8}$$

Iz jednakosti (3.1.8) sledi da su funkcije $\frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))-C}{t-a_j}$ i $\frac{\varphi(t)+C}{t-a_o}$ granične vrednosti na Γ_j i L_j respektivno funkcija Ψ_j^- i χ_j^- analitičkih redom u oblastima D_j^- i S_j^-, $j=1,2,3,\dots,m$, tj.

$$\varphi(\alpha_j^{-1}(t))-C = (t-a_j)\cdot\Psi_j^-(t), \qquad t\in\Gamma_j, \tag{3.1.9}$$
$$\varphi(t)+C = (t-a_o)\cdot\chi_j^-(t), \qquad t\in L_j,\ j=1,2,\dots,m.$$

Isključivši funkciju $\varphi(t)$ iz poslednjih jednakosti dobijamo konturni problem

$$(\alpha(t)-a_j)\cdot\Psi_j^-(\alpha(t))+C = (t-a_o)\cdot\chi_j^-(t)-C, \quad t\in L_j. \tag{3.1.10}$$

Konturni uslov (3.1.10) se može napisati u obliku homogenog konturnog problema $U_j^-(\alpha(t))=U^-(t)$, $j=1,2,\dots,m$, gde je $U_j^-(z)=(z-a_j)\cdot\Psi_j^-(z)+C$, $z\in D_j^-$, a $U^-(z)=(z-a_o)\cdot\chi_j^-(z)-C$, $z\in S_j^-$, $j=1,2,\dots,m$. Analogno lemi 3.1.1 se dokazuje da opšte rešenje poslednjeg problema su kompleksne konstante, tj. $U_j^-(z)=K$, $z\in D_j^-$, $U^-(z)=K$, $z\in\bigcup_{j=1}^{m}S_j^-$, pa je

$$(z-a_j)\cdot\Psi_j^-(z)+C = K, \qquad z\in D_j^-,$$
$$(z-a_o)\cdot\chi_j^-(z)-C = K, \qquad z\in S_j^-,\ j=1,2,\dots,m. \tag{3.1.11}$$

Uzmemo li u (3.1.11) da je za neko fiksirano k, $k\in\{1,2,\dots,m\}$, $j=k$ i zamenimo li u prvoj od jednakosti iz (3.1.11) z sa a_k, a u drugoj z sa $a_o\in S_1^-$, dobićemo $C=K$ i $-C=K$ pa je $C=K=0$.

Odavde je $\Psi_j^-(z)=0$ $z\in D_j^-$, $j=1,2,\ldots,m$, i $\chi_j^-(z)=0$ $z\in S_j^-$, $j=1,2,\ldots,m$, pa je zbog (3.1.9) $\varphi(t)=0$ $t\in L$. Ovim je lema 3.1.2 dokazana.

Na osnovu leme 3.1.2 i alternative Fredholma sledi da postoji jedinstveno rešenje $\varphi(t)$ integralne jednačine Fredholma

$$(\mathfrak{J}\varphi)(t) = g(t) = \phi_j^+(\alpha(t)) - \phi^+(t), \tag{3.1.12}$$

tj. konturni problem (3.1.5) uvek ima jedno rešenje koje se može predstaviti formulom (3.1.7). Nadjimo ostala rešenja problema. Stavimo li da je poznato rešenje problema (3.1.5) dano sa:

$$\Psi^+(z) = -\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \qquad z\in S^+,$$

$$\phi_j^+(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))\,dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)}, \qquad z\in D_j^+,$$

onda ćemo jednačinu (7.1.12) moći zapisati u obliku

$$\phi_j^+(\alpha(t)) - \Psi_j^+(\alpha(t)) = \phi^+(t) - \Psi^+(t).$$

Na osnovu leme 3.1.1 iz (3.1.13) se dobija

$\phi_j^+(z) = \Psi_j^+(z)+C$, $z\in D_j^+$ i $\phi^+(z) = \Psi^+(z)+C$, $z\in S^+$, gde je C kompleksna konstanta.

Na taj način opšte rešenje problema (3.1.5) ima oblik

$$\begin{aligned}\phi^+(z) &= C - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \quad z\in S^+,\\ \phi_j^+(z) &= C + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))\,dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)}, \quad z\in D_j^+,\ j=1,2,\ldots,m,\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

gde su a_o i a_j tačke koje pripadaju oblastima S_1^-, D_j^-, $j=1,2,\ldots$ $\ldots,m$, respektivno, $\varphi(t)$ je rešenje integralne jednačine (3.1.12) a C je proizvoljna kompleksna konstanta.

Neka sada granični uslov ima homogen oblik

$$\phi_j^+(\alpha(t)) = G(t)\cdot\phi^+(t), \quad t\in L_j, \quad j=1,2,\ldots,m. \tag{3.1.14}$$

Ispitajmo prvo slučaj kad je $\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = 0$.

Razmotrimo konturni problem

$$\Gamma_j^+(\alpha(t)) - \Gamma^+(t) = \ln G(t), \tag{3.1.15}$$

gde se pod ln G(t) podrazumeva jednoznačna funkcija koja pripada klasi $H_\mu(L)$. U skladu sa ranije rečenim funkcije

$$\Gamma^+(z) = -\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}, \quad z\in S^+,$$

$$\Gamma_j^+(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_j)}, \quad z\in D_j^+,$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{F}\varphi)(t) = \ln G(t)$, su partikularna rešenja problema (3.1.15).

Na taj način, koeficijent G(t) možemo predstaviti u obliku

$$G(t) = \frac{X_{oj}^+(\alpha(t))}{X_o^+(t)}, \text{ gde je } \quad X_o^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \text{ i } X_{oj}^+(z) = e^{\Gamma_j^+(z)}.$$

Konturni uslov (3.1.14) se sada može predstaviti na sledeći način:

$$\frac{\phi_j^+(\alpha(t))}{X_{oj}^+(\alpha(t))} = \frac{\phi^+(t)}{X_o^+(t)}, \quad t\in L.$$

Dakle, funkcije $F_j^+(z) = \dfrac{\phi_j^+(z)}{X_{oj}^+(z)}$, $z \in D_j^+$ i $F^+(z) = \dfrac{\phi^+(z)}{X_o^+(z)}$, $z \in S^+$ zadovoljavaju konturni uslov

$$F_j^+(\ (t)) = F^+(t),\ t \in L. \qquad (3.1.16)$$

Saglasno lemi 3.1.1 opšte rešenje problema (3.1.16) daje se formulama $F^+(z)=C$, $z \in S^+$, $F_j^+(z)=C$, $z \in D_j^+$, $j=1,2,\dots,m$, gde je C proizvoljna kompleksna konstanta. Dakle, funkcije $\phi_j^+(z) = C \cdot e^{\Gamma_j^+(z)}$, $z \in D^+$ i $\phi^+(z) = C \cdot e^{\Gamma^+(z)}$, $z \in S^+$, su opšte rešenje problema (3.1.14) pri $\kappa = 0$.

<u>Definicija 3.1.1</u>. Funkcije

$$X_o^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\ z \in S^+,$$

$$X_{o,j}^+(z) = e^{\Gamma_j^+(z)},\ z \in D_j^+,\quad j=1,2,\dots,m,$$

koje formiraju rešenje problema (3.1.14) zvaćemo fundamentalnim funkcijama konturnog problema (3.1.14). Funkcije $X_o^+(z)$ i $X_{oj}^+(z)$, $j=1,2,\dots,m$ su respektivno analitičke u S^+ i D_j^+, $j=1,2,\dots,m$ i redom različite od nule u $S^+ \cup L$ i $D_j^+ \cup \Gamma_j$. One zadovoljavaju konturni uslov (3.1.14) pri $\kappa = 0$, a granične vrednosti $X_o^+(t)$ i $X_{oj}^+(t)$ zadovoljavaju uslov Höldera redom na konturama L i Γ_j, $j=1,2,\dots,m$.

Razmotrimo sada opšti slučaj, kada je indeks κ problema (3.1.14) bilo koji realan broj. Pretpostavimo da koordinatni početak pripada oblasti S^+. Definišimo funkciju $G_o(t)$ na sledeći način:

$$G_o(t) = t^{-\kappa} G(t), \qquad t \in L.$$

Sada je $\frac{1}{2\pi}$ $[\arg G_o(t)]_L = 0$, pa za homogeni konturni problem sa koeficijentom $G_o(t)$ postoje, kao što je pokazano, fundamentalne funkcije $X_o^+(z)$ i $X_{oj}^+(z)$, $j=1,2,\dots,m$, analitičke respektivno u S^+ i D_j^+ različite od nule redom u $S^+ \cup L$ i $D_j^+ \cup \Gamma_j$, koje na L i Γ_j imaju respektivno granične vrednosti $X_o^+(t) \in H_\mu(L)$ i $X_{oj}^+(t) \in H_\mu(\Gamma_j)$ i koje zadovoljavaju konturni uslov $X_{oj}^+(\alpha(t)) = G_o(t)\cdot X_o^+(t)$.

Te funkcije su odredjene formulama

$$X_{oj}^+(z) = \exp\left(\frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\right), \quad z \in D_j^+,$$

$$X_o^+(z) = \exp\left(-\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}\right), \quad z \in S^+, \tag{3.1.17}$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje jednačine $(\mathfrak{J}\varphi)(t) = \ln G_o(t)$.

<u>Definicija 3.1.2</u>. Funkcije $X^+(z) = z^{-\kappa}X_o^+(z)$, $X_j^+(z) = X_{oj}^+(z)$ definisane respektivno u oblastima S^+ i D_j^+, $j=1,2,\dots,m$, nazivaćemo kanoničkim funkcijama konturnog problema (3.1.14). Kanoničke funkcije zadovoljavaju konturni uslov homogenog konturnog problema (3.1.14) i imaju nulti red svuda u oblasti svoje definicije sem funkcije $X^+(z)$ koja u koordinatnom početku ima red $-\kappa$. Ranije definisane fundamentalne funkcije su kanoničke funkcije konturnog problema (3.1.14 sa nultim Košijevim indeksom koeficijenta $G(t)$ problema. Pri $\kappa < 0$ kanoničke funkcije predstavljaju jedno od rešenja konturnog problema (3.1.14). Iz svega rečenog sledi da se na konturi L koeficijent $G(t$ problema (3.1.14) može predstaviti u obliku

$$G(t) = \frac{X_j^+(\alpha(t))}{X^+(t)}, \quad t \in L_j. \tag{3.1.18}$$

Zamenom izraza (3.1.18) u konturni uslov (3.1.14) i deleći obe strane dobijene jednakosti sa $X_j^+(\alpha(t))$ dobijamo:

$$\frac{\phi_j^+(\alpha(t))}{X_j^+(\alpha(t))} = \frac{\phi^+(t)}{t^{-\kappa}\cdot X_o^+(t)}, \quad t\in L. \tag{3.1.19}$$

Razmotrimo posebno slučaj u kojem je $\kappa \geqslant 0$ od slučaja u kojem je $k < 0$.

(a) Neka je $\kappa < 0$.

Tada funkcija $\dfrac{\phi^+(z)}{z^{-\kappa}\cdot X_o^+(z)}$, $z\in S^+$ ima u tački $z=0$ pol reda $-\kappa$ pa se prema tome može predstaviti u obliku:

$$\frac{\phi^+(z)}{z^{-\kappa}X_o^+(z)} = \sum_{i=1}^{-\kappa} \frac{C_i}{z^i} + \Psi^+(z), \tag{3.1.20}$$

gde je $\Psi^+(z)$ za sada neodredjena analitička funkcija u S^+ a C_i kompleksne konstante. Definišimo funkcije $\Psi_j^+(z)$ analitičke u D_j^+ sa:

$$\Psi_j^+(z) = \frac{\phi_j^+(z)}{X_j^+(z)}. \tag{3.1.21}$$

Nakon zamene reprezentacija (3.1.20) i (3.1.21) u (3.1.19) dolazimo do konturnih uslova za funkcije $\Psi^+(z)$ i $\Psi_j^+(z)$:

$$\Psi_j^+(\alpha(t)) - \Psi^+(t) = \sum_{k=1}^{-\kappa} \left(\frac{a_k}{t^k} + \frac{i\cdot b_k}{t^k} \right), \quad t\in L, \tag{3.1.22}$$

gde je $a_k = \mathrm{Re}\, C_k$ a $b_k = \mathrm{Im}\, C_k$.

Uvedemo li iznake $g_{2k-1}(t) = \frac{1}{t^k}$, $g_{2k}(t) = \frac{i}{t^k}$, $B_{2k-1}=a_k$ i $B_{2k}=b_k$, $k=1,2,\dots,-\kappa$, onda ćemo konturni uslov (3.1.21) moći napisati u obliku:

$$\Psi_j^+(\alpha(t)) - \Psi^+(t) = \sum_{k=1}^{-2\kappa} B_k \cdot g_k(t), \qquad t \in L. \tag{3.1.23}$$

Ovo je konturni problem koji smo već rešili. Njegovo opšte rešenje ima oblik:

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) &= C - \sum_{k=1}^{-2\kappa} \frac{B_k \cdot (z-a_o)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_k(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \quad z \in S^+, \\ \Psi_j^+(z) &= C + \sum_{k=1}^{-2\kappa} \frac{B_k \cdot (z-a_j)}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_k(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)} dt, \quad z \in D_j^+, \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

gde je C proizvoljna kompleksna konstanta, a $\varphi_i(t)$ rešenja integralnih jednačina Fredholma $(\mathcal{F}\varphi_i)(t) = g_i(t)$, $i=1,2,\ldots,-2\kappa$.

Stavimo da je $B_{-2\kappa+1} = \mathrm{Re}C$, $B_{-2\kappa+2} = \mathrm{Im}C$ i definišimo funkcije:

$$\begin{aligned} W_{2k-1}(z) &= \frac{1}{z^k} - \frac{z-a_o}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_{2k-1}(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \quad z \in S^+, \\ W_{2k}(z) &= \frac{i}{z^k} - \frac{z-a_o}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_{2k}(t)}{(t-a_o)\cdot(t-z)} dt, \quad z \in S^+, \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

$$k=1,2,\ldots,-\kappa$$

$$W_{-2\kappa+1}(z) = 1, \quad W_{-2\kappa+2}(z) = i, \quad z \in S^+,$$

i

$$V_{k,j}(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_k(\alpha_j^{-1}(t))dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)}, \quad z \in D_j^+,$$

$$k=1,2,\ldots,-2\kappa, \quad j=1,2,\ldots,m,$$

$$V_{-2\kappa+1,j}(z) = 1, \quad V_{-2\kappa+2,j}(z) = i, \quad z \in D_j^+.$$

Za svako fiksirano j sistemi funkcija $\{W_i\}$ i $\{V_{i,j}\}$ $i=1,2,\ldots$ $\ldots,-2\kappa+2$, $j=1,2,\ldots,m$ su sistemi linearno nezavisnih funkcija.

Iskoristivši oznake (3.1.25) i formule (3.1.20), (3.1.21) i (3.1.24) dobijamo opšte rešenje homogenog konturnog problema (3.1.14) u slučaju kada je indeks $\kappa < 0$ u obliku:

$$\begin{aligned} \phi^+(z) &= z^{-\kappa}X_o^+(z)\sum_{k=1}^{-2\kappa+2} B_k\cdot W_k(z), \qquad z\in S^+, \\ \phi_j^+(z) &= X_{o,j}^+(z)\sum_{k=1}^{-2\kappa+2} B_k\cdot V_{k,j}(z), \qquad z\in D_j^+,\ j=1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

(b) Neka je $\kappa \geqslant 0$.

Tada je funkcija $\dfrac{\phi^+(z)}{z^{-\kappa}X_o^+(z)}$ analitička u S^+ i za $\kappa > 0$ jednaka nuli u tački $z = 0$. Funkcija $\dfrac{\phi_j^+(z)}{X_j^+(z)}$, $j=1,2,\ldots,m$ su analitičke u D_j^+.

Dakle, na konturni problem (3.1.18) je primenljive lema 3.1.1 saglasno sa kojom imamo:

$$\frac{z^{\kappa}\phi^+(z)}{X_o^+(z)} = C,\ z\in S^+ \quad \text{i} \quad \frac{\phi_j^+(z)}{X_j^+(z)} = C,\ z\in D_j^+, \tag{3.1.27}$$

gde je C kompleksna konstanta.

Ako je $\kappa = 0$, onda iz (3.1.27) nalazimo

$$\phi^+(z) = C\cdot X_o^+(z), \qquad z\in S^+,$$

$$\phi_j^+(z) = C\cdot X_j^+(z), \qquad z\in D_j^+,\ j=1,2,\ldots,m,$$

tj. dobijamo već nadjeno opšte rešenje homogenog problema (3.1.14) sa Košijevim indeksom koeficijenta G(t) jednakim nuli. Ovo rešenje je očigledno sadržano i u formuli (3.1.25) ako dopustimo da ona važi i za $\kappa = 0$. Ako je $\kappa > 0$, onda je leva strana prve jednačine iz (3.1.26) za $z=0$ jednaka nuli. Dakle, mora biti $C=0$ i prema tome $\phi^+(z)=0$, $z \in S^+$ i $\phi_j^+(z)=0$, $z \in D_j^+$, $j=1,2,\ldots,m$. Na taj način pri $\kappa > 0$ homogen konturni problem (3.1.14) nema netrivijalnih rešenja. Ovim je dokazana sledeća teorema:

<u>TEOREMA 3.1.1.</u> Neka je $\kappa = \frac{[\arg G(t)]_L}{2\pi}$. Broj l linearno nezavisnih rešenja unutarnjeg homogenog konturnog problema (3.1.14) izračunava se po formuli $l=\max(0,2(-\kappa+1))$. Sva netrivijalna rešenja problema (3.1.14) se nalaze po formulama (3.1.26).

Razmotrimo sada opšti slučaj (3.1.1)($g(t)\neq 0$). Kao što smo već videli koeficijent $G(t)$ sa indeksom κ problema (3.1.1) se može predstaviti u obliku:

$$G(t) = \frac{X_j^+(\alpha(t))}{t^{-\kappa} X_o^+(t)}, \quad t \in L_j.$$

Zamenom ovog izraza u konturni uslov (3.1.1), posle očiglednih transformacija dobijamo:

$$\frac{\phi_j^+(\alpha(t))}{X_j^+(\alpha(t))} - \frac{\phi^+(t)}{t^{-\kappa} X_o^+(t)} = \frac{g(t)}{X_j^+(\alpha(t))}, \quad t \in L \tag{3.1.28}$$

Ovo je specijalan slučaj konturnog uslova (3.1.1) postavljenog problema za funkcije $F^+(z) = \frac{\phi^+(z)}{X^+(z)}$, $z \in S^+$ i $F_j^+(z) = \frac{\phi^+(z)}{X_j^+(z)}$, $z \in D_j^+$, koji smo već rešili (videti str. 75).

Razmotrimo posebno slučaj u kojem je $\kappa > 0$ od onog u kojem je $\kappa \leq 0$.

(a) Neka je $\kappa \leq 0$. Analogno ranije izloženom dobijamo rešenje $F^+(z)$, $F_j^+(z)$, $j=1,2,\dots,m$, problema (3.1.28) a odatle i opšte rešenje konturnog problema (3.1.1) u obliku:

$$\phi^+(z)=z^{-\kappa}X_o^+(z)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{-2\kappa+2}B_k W_k(z)-\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}\Big),\ z\in S^+,$$

$$\phi_j^+(z)=X_j^+(z)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{-2\kappa}B_k V_{k,j}(z)+\frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\Big),\ z\in D_j^+, \tag{3.1.29}$$

gde je $\varphi(t)$ rešenje integralne jednačine Fredholma $(\mathcal{J}\varphi)(t)=\dfrac{g(t)}{X_j^+(\alpha(t))}$

(b) Neka je $\kappa > 0$.

U ovom slučaju ako rešenje problema postoji, onda se ono može prikazati u obliku:

$$\phi^+(z) = z^{-\kappa}X_o^+(z)\cdot\Big(-\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}+C_o\Big),\ z\in S^+,$$

$$\phi_j^+(z) = X_j^+(z)\cdot\Big(\frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{\varphi(\alpha_j^{-1}(t))dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)}+C_o\Big),\ z\in D_j^+, \tag{3.1.30}$$

gde je C_o kompleksna konstanta.

Iz formule (3.1.30) se vidi da je za rešivost problema (3.1.1) u ovom slučaju neophodno i dovoljno da bi analitička u S^+ funkcija

$$\phi_*^+(z) = -\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}+C_o,$$

imala u tački $z=0$ nulu reda ne manju od κ. Radi nalaženja odgovarajućeg uslova rešivosti razvićemo funkciju $\phi^+(z)$ u red Tejlora u okolini tačke $z=0$. Na taj način je funkcija

$$\phi^+(z) = z^{-\kappa}X_o^+(z)\left(C_o - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t(t-a_o)} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j(z-a_o)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{(t-a_o)t^{j+1}}\right),$$

analitička u S^+ ako i samo ako su koeficijenti uz $z^o, z^1, \dots, z^{\kappa-1}$ funkcije u zagradi jednaki nuli. Odavde dobijamo neophodne i dovoljne uslove rešivosti problema (3.1.1):

$$C_0 - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t} = 0, \tag{3.1.31}$$

$$\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t^{j+1}} = 0, \qquad j=1,2,\dots,\kappa-1. \tag{3.1.32}$$

Uslovi (3.1.31) i (3.1.32) se mogu prikazati u obliku $2(\kappa-1)$ realnih uslova rešivosti. Da bi se to videlo dovoljno je izabrati kompleksnu konstantu C_o, tako da bi bilo:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} C_o &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t}\right), \\ \operatorname{Im} C_o &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t}\right). \end{aligned}\right. \tag{3.1.33}$$

U uslovu (3.1.32) možemo odvojiti realne i imaginarne delove i na taj način od njega dobiti $2\kappa-2$ realnih uslova rešivosti:

$$\operatorname{Re}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t^{j+1}} = 0, \quad \operatorname{Im}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t^{j+1}} = 0, \quad j=1,2,\dots,\kappa-1. \tag{3.1.34}$$

Ovim smo dokazali sledeću teoremu:

TEOREMA 3.1.2. Ako je $\kappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \leqslant 0$, onda je nehomogeni konturni problem (3.1.1) bezuslovno rešiv i njegovo rešenje, predstavljeno formulom (3.1.29) sadrži $2(-\kappa+1)$ proizvoljnih realnih konstanti. Ako je $\kappa > 0$, onda je problem (3.1.1) rešiv ako i samo ako je ispunjeno $2(\kappa-1)$ realnih uslova rešivosti (3.1.34) i njegovo jedinstveno rešenje se dobija po formuli (3.1.30).

3.2. Konturni problem za funkciju polianalitičku u višestruko povezanoj oblasti

Neka je S^+ konačna m-povezana oblast, ograničena sa m zatvorenih disjunktnih krivih Ljapunova $L_1, L_2, \dots, L_m$, pri čemu kontura L_1 sadrži unutar sebe sve ostale i neka su D_j^+ $(j=1,2,\dots,m)$ konačne oblasti u ravni kompleksne promenljive z, ograničene respektivno nepresecajućim prostim, glatkim, zatvorenim konturama Γ_j $(j=1,2,\dots,m)$. Granicu oblasti S^+ označimo sa L, tj. stavimo da je $L=\bigcup_{j=1}^{m} L_j$. Za pozitivan pravac obilaženja konture L odnosno Γ_j izaberimo onaj pri kojem oblasti S^+ odnosno D_j^+ ostaju sleva. Komplemente oblasti ograničene konturama Γ_j, $j=1,2,\dots,m$, označimo sa D_j^-.

Jednostruko povezanu oblast, ograničenu zatvorenom konturom L_j $(j=2,3,\dots,m$, označimo sa S^-, a komplement od konačne oblasti ograničene konturom L_1 označimo sa D_j^-.

Neka je $\alpha_j^{-1}(t)$ zadana na Γ_j funkcija koja zadovoljava uslove:

a) homeomorfno preslikava zatvorenu konturu Γ_j na neku zatvorenu konturu koja pripada granici L oblasti S^+ menjajući pravac obilaženja;

b) funkcija $\alpha_j^{-1}(t)$ ima neprekidan po Hölderu izvod koji je različit od nule u svim tačkama konture Γ_j.

c) $\alpha_j^{-1}(\Gamma_j) \cap \alpha_k^{-1}(\Gamma_k) = \emptyset$ za $j \neq k$, $j,k=1,2,\dots,m$.

Neka je $\alpha_j(t)$, $t \in L$ funkcija inverzna funkciji $\alpha_j^{-1}(t)$, $t \in \Gamma_j$, $j=1,2,\dots,m$.

Uvedimo funkciju

$$\omega(t,\Gamma_k) = \delta_{k,j}, \quad t\in\Gamma_j, \quad k,j=1,2,\ldots,m,$$

gde je $\delta_{k,j}=1$, ako je $k=j$ i $\delta_{k,j}=0$ ako je $k\neq j$. Na konturi L definišimo funkciju $\alpha(t)$ pomoću formule:

$$\alpha(t) = \sum_{j=1}^{m}\omega(t,L_j)\cdot\alpha_j(t), \quad t\in L_j, \quad j=1,2,\ldots,m.$$

Sada je očigledno da $\alpha(t)$ preslikava L na $\Gamma=\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_j$ sa menjanjem pravca obilaženja na $\bigcup_{j=1}^{m} L_j$.

Tražićemo funkcije $W(z,\bar{z})$ i $W_j(z,\bar{z})$ koji su polianalitičke reda n u S^+ odnosno D_j^+ i čije granične vrednosti na konturi L odnosno Γ zadovoljavaju sledećih n konturnih uslova

$$D^kW_j(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = A_k(t)\cdot D^kW(t,\bar{t}) + B_k(t), \quad t\in L, \qquad (3.2.1)$$

$$k=0,1,\ldots,n-1, \quad j=1,2,\ldots,m,$$

gde je D poznati diferencijalni operator Kolosova tj. za $W=u+i\cdot v$ je $DW=(u'_x-v'_y)+i(u'_y+v'_x)=2\cdot W'_{\bar{z}}$ i $D^k=D(D^{k-1})$, a $A_k(t)$ i $B_k(t)$ su na konturi L neprekidne po Hölderu funkcije i $A_k(t)\neq 0$ na L za $k=0,1,\ldots,n-1$.
Funkcije $W(z,\bar{z})$ i $W_j(z,\bar{z})$ ćemo tražiti u obliku

$$W(z,\bar{z})=\sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^vU_v(z) \quad i \quad W_j(z,\bar{z})=\sum_{v=0}^{n-1}\bar{z}^vU_{v,j}(z), \qquad (3.2.2)$$

gde su $U_v(z)$ odnosno $U_{v,j}(z)$ proizvoljne analitičke funkcije u S^+ odnosno D_j^+, a n je prirodan broj koji predstavlja red polianalitičke funkcije.

Za odredjivanje traženih m+1 polianalitičkih funkcija biće potrebno odrediti $(m+1)\cdot n$ analitičkih funkcija iz zadanih $n\cdot m$ konturnih uslova

Posmatrajmo prvo specijalan slučaj:

$$D^k W_j(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = D^k W(t,\bar{t}), \quad t\in L, \quad j=1,2,\dots,m, \quad k=0,1,\dots,n-1, \tag{3.2.3}$$

problema (3.2.1). Iz relacije (3.2.2) sledi:

$$\begin{aligned} D^k W(t,\bar{t}) &= 2^k \sum_{v=k}^{n-1} v\cdot(v-1)\dots(v-k+1)\cdot \bar{t}^{v-k}\cdot U_v(t), \\ D^k W_j(t,\bar{t}) &= 2^k \sum_{v=k}^{n-1} v\cdot(v-1)\dots(v-k+1)\cdot \bar{t}^{v-k}\cdot U_{v,j}(t). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Zbog relacija (3.2.4) se konturni uslov (3.2.3) može napisati u obliku:

$$2^k \sum_{v=k}^{n-1} \frac{v!}{(v-k)!}\cdot\overline{\alpha(t)}^{v-k}\cdot U_{v,j}(\alpha(t)) = 2^k \sum_{v=k}^{n-1}\frac{v!}{(v-k)!}\cdot \bar{t}^{v-k}\cdot U_v(t),$$

i na taj način, za svako fiksirano j, $j=1,2,\dots,m$, svesti na n konturnih uslova za funkcije $U_v(z)$ i $U_{v,j}(z)$, $v=0,1,\dots,n-1$, analitičkih respektivno u oblastima S^+ i D_j^+.

Za $k=n-1$ iz (3.2.3) i (3.2.4) dobijamo prvo problem $U_{n-1,j}(\alpha(t)) = U_{n-1}(t)$, a zatim njegovo rešenje $U_{n-1}(z) = C_{n-1}$, $z\in S^+$ i $U_{n-1,j} = C_{n-1}$, $z\in D_j^+$, gde je C_{n-1} kompleksna konstanta.

Za $k=n-2$ iz (3.2.3) i (3.2.4) imamo na isti način prvo problem

$U_{n-2,j}(\alpha(t)) = U_{n-2}(t)+(n-1)\cdot(\bar{t}\, C_{n-1} - \overline{\alpha(t)}\cdot C_{n-1})$, a zatim njegovo

rešenje $U_{n-2}(z) = C_{n-2} - \dfrac{z-a_o}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\varphi_{n-2}(t)}{(t-z)\cdot(t-a_o)}\,dt$ za $z\in S^+$ i

$U_{n-2,j}(z) = C_{n-2} + \dfrac{z-a_j}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_j} \dfrac{\varphi_{n-2}(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-z)\cdot(t-a_j)}\,dt$ za $z\in D_j^+$ gde je funkcija

$\varphi_{n-2}(t)$ rešenje integralne jednačine Fredholma:

$$(\mathcal{J}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{k(\tau,t)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{t-a_j}{(\tau-a_o)\cdot(\tau-t)}\right)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau =$$

$$= (n-1)\cdot(t-\alpha(t))\cdot C_{n-1},$$

gde je

$$k(\tau,t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(t)-a_j}{\alpha(\tau)-a_j}, & \tau,t \in L_j, \quad j=1,2,\ldots,m \\ 0 & \tau\in L_j, \quad t\in L_k, \quad t\neq k, \; j,k=1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

C_{n-1} i C_{n-2} su proizvoljne kompleksne konstante, a $a_o \in S_1^-$ i $a_j \in D_j^-$.

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo na kraju sledeći sistem konturnih uslova:

$$U_{p,j}(\alpha(t)) = U_p(t) + \sum_{i=1}^{n-p-1}\binom{p+i}{i}\cdot\left(\bar{t}^{\,i}\cdot U_{p+i}(t) - \overline{\alpha(t)}^{\,i}\cdot U_{p+i,j}(\alpha(t))\right),$$

$$p=0,1,\ldots,n-1, \qquad j=1,2,\ldots,m,$$

kojem je rešenje:

$$\begin{aligned} U_p(z) &= C_p - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)\,dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}, \quad z\in S^+, \\ U_{p,j}(z) &= C_p + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_p(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-z)\cdot(t-a_j)}\,dt, \quad z\in D_j^+, \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

gde su $\varphi_p(t)$ rešenja integralnih jednačina $(\mathcal{J}\varphi_p)(t) = g_{p,j}(t)$, $t\in L$, $p=0,1,\ldots,n-1$, $j=1,2,\ldots,m$, a

$$g_{p,j}(t) = \sum_{i=1}^{n-p-1}\binom{p+i}{i}\cdot\left(\bar{t}^{\,i}\cdot U_{p+i}(t) - \overline{\alpha(t)}^{\,i}\cdot U_{p+i,j}(\alpha(t))\right). \tag{3.2.6}$$

Na taj način opšte rešenje konturnog problema (3.2.3) glasi:

$$
\begin{aligned}
W(z,\bar{z}) &= \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^{v}\cdot U_{v}(z), \qquad z \in S^{+}, \\
W_{j}(z,\bar{z}) &= \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^{v}\cdot U_{v,j}(z), \qquad z \in D_{j}^{+},
\end{aligned} \tag{3.2.6a}
$$

gde su u S^{+} odnosno D_{j}^{+} analitičke funkcije $U_{v}(z)$ odnosno $U_{v,j}(z)$ odredjene sa (3.2.5).

Razmotrimo sada homogeni konturni uslov

$$
D^{k}W_{j}(\alpha(t),\overline{\alpha(t)}) = A_{k}(t)\cdot D^{k}W(t,\bar{t}), \qquad t \in L. \tag{3.2.7}
$$

Ispitajmo prvo slučaj kad su $\kappa_{k} = \frac{1}{2\pi}\,\{\arg A_{k}(t)\}_{L} = 0$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

Na osnovu (3.2.4) i (3.2.7) sledi:

$$
2^{k}\sum_{v=k}^{n-1} \frac{v!}{(v-k)!}\cdot\overline{\alpha(t)}^{\,v-k}\cdot U_{v,j}(\alpha(t)) = A_{k}(t)\cdot 2^{k}\sum_{v=k}^{n-1}\frac{v!}{(v-k)!}\cdot\bar{t}^{\,v-k}\cdot U_{v}(t), \quad t \in L, \tag{3.2.8}
$$

$$
k=0,1,\ldots,n-1, \qquad j=1,2,\ldots,m,
$$

odakle za $k=n-1$ dobijamo prvo relaciju

$$
U_{n-1,j}(\alpha(t)) = A_{n-1}(t)\cdot U_{n-1}(t), \tag{3.2.9}
$$

a zatim partikularno rešenje problema (3.2.9) u obliku:

$$
U_{n-1}(z) = e^{\Gamma_{n-1}(z)},
$$

$$
U_{n-1,j}(z) = e^{\Gamma_{n-1,j}(z)},
$$

gde je

$$
\Gamma_{n-1}(z) = -\frac{z-a_{o}}{2\pi i}\int_{L} \frac{\varphi_{n-1}(t)}{(t-a_{o})\cdot(t-z)}\,dt, \qquad z \in S^{+},
$$

$$\Gamma_{n-1,j}(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{\varphi_{n-1}(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)(t-z)}\,dt, \qquad z\in D_j^+$$

a $\varphi_{n-1}(t)$ je rešenje integralne jednačine $(\mathcal{F}\varphi_{n-1})(t)=\ln A_{n-1}(t)$. Na osnovu ovoga se koeficijent $A_{n-1}(t)$ može predstaviti u obliku

$$A_{n-1}(t) = \frac{X_{o,n-1,j}(\alpha(t))}{X_{o,n-1}(t)},\ t\in L,\ \text{gde je}\ X_{o,n-1}(t)=e^{\Gamma_{n-1}(t)},\ t\in L\ \text{i}$$

$X_{o,n-1,j}(t) = e^{\Gamma_{n-1,j}(t)}$, $t\in\Gamma_j$, pa se konturni problem (3.2.9) može svesti na problem sa konturnim uslovom $\dfrac{U_{n-1,j}(\alpha(t))}{X_{o,n-1,j}(\alpha(t))} = \dfrac{U_{n-1}(t)}{X_{o,n-1}(t)}$.

Rešivši ovaj problem dobijamo $U_{n-1}(z) = B_{n-1}\cdot e^{\Gamma_{n-1}(z)}$, $z\in S^+$ i

$U_{n-1,j}(z) = B_{n-1}\cdot e^{\Gamma_{n-1,j}(z)}$, $z\in D_j^+$ a B_{n-1} je kompleksna konstanta.

Za k=n-2 iz (3.2.8) se dobija konturni problem

$$U_{n-2,j}(\alpha(t)) = A_{n-2}(t)\cdot U_{n-2}(t)+(n-1)\cdot(A_{n-2}(t)\cdot\bar{t}\cdot U_{n-1}(t) - \overline{\alpha(t)}\cdot U_{n-1,j}(\alpha(t))),$$

a zatim njegovo rešenje u obliku:

$$\begin{aligned} U_{n-2}(z) &= X_{o,n-2}(z)\cdot\Big(B_{n-2} - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_{n-2}(t)}{(t-z)\cdot(t-a_o)}\,dt\Big),\quad z\in S^+,\\ U_{n-2,j}(z) &= X_{o,n-2,j}(z)\cdot\Big(B_{n-2} + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{\varphi_{n-2}(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-z)\cdot(t-a_j)}\,dt\Big),\quad z\in D_j^+, \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

gde je $\varphi_{n-2}(t)$, $t\in L$ rešenje integralne jednačine Fredholma

$$(\mathcal{F}\varphi_{n-2})(t) = \frac{g_{n-2,j}(t)}{X_{0,n-2,j}(\alpha(t))},\quad t\in L,$$

$$g_{n-2,j}(t) = (n-1)\cdot(A_{n-2}(t)\cdot\bar{t}\cdot U_{n-1}(t) - \overline{\alpha(t)}\cdot U_{n-1,j}(\alpha(t))),$$

B_{n-2} je proizvoljna kompleksna konstanta, a $X_{o,n-2}(z)$ i $X_{o,n-2,j}(z)$ su partikularna rešenja problema

$$U_{n-2,j}(\alpha(t)) = A_{n-2}(t)\cdot U_{n-2}(t), \quad t\in L.$$

Nastavljajući ovaj postupak dobija se na kraju sledeći sistem nehomogenih konturnih uslova za funkcije $U_p(z)$ i $U_{p,j}(z)$ analitičkih respektivno u oblastima S^+ i D_j^+:

$$U_{p,j}(\alpha(t))=A_p(t)\cdot U_p(t)+\sum_{i=1}^{n-p-1}\binom{p+i}{i}\cdot(A_p(t)\cdot \bar{t}^{\,i}\cdot U_{p+i}(t)-\overline{\alpha(t)}^{\,i}\cdot U_{p+i,j}(\alpha(t))),$$
$$p=0,1,\dots,n-1, \quad j=1,2,\dots,m,$$

čije je rešenje:

$$U_p(z) = X_{o,p}(z)\cdot\left(B_p - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)\,dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}\right), \quad z\in S^+,$$
$$U_{p,j}(z) = X_{o,p,j}(z)\cdot\left(B_p+\frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{\varphi_p(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-z)\cdot(t-a_j)}\,dt\right), \quad z\in D_j^+, \tag{3.2.11}$$
$$p=0,1,\dots,n-1, \quad j=1,2,\dots,m,$$

gde su $X_{o,p}(z)$ i $X_{o,p,j}(z)$ partikularna rešenja problema $U_{p,j}(\alpha(t)) = A_p(t)\cdot U_p(t)$, $t\in L$, a $\varphi_p(t)$ su rešenja integralnih jednačina $(\mathfrak{I}\varphi_p)(t) = \dfrac{g_{p,j}(t)}{X_{o,p,j}(\alpha(t))}$, $t\in L_j$,

$$g_{p,j}(t)=\sum_{i=1}^{n-p-1}\binom{p+i}{i}\cdot(A_p(t)\cdot \bar{t}^{\,i}U_{p+i}(t)-\overline{\alpha(t)}^{\,i}\cdot U_{p+i,j}(\alpha(t))),$$
$$p=0,1,\dots,n-1, \quad j=1,2,\dots,m,$$

a B_p su kompleksne konstante.

Na taj način opšte rešenje homogenog konturnog problema (3.2.7) glasi

$W(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^v U_v(z)$, $W_j(z,\bar{z}) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar{z}^v U_{v,j}(z)$, gde su funkcije $U_v(z)$ i $U_{v,j}(z)$ analitičke respektivno u S^+ i D_j^+ odredjene sa (3.2.11).

Razmotrimo sada slučaj kada su indeksi κ_p funkcija $A_p(t)$ bilo koji realni brojevi. Pretpostavimo da koordinatni početak pripada oblasti S^+ i definišimo funkciju $A_{o,p}(t)$ na sledeći način:

$A_{o,p}(t) = t^{-\kappa_p} \cdot A_p(t)$ za $t \in L$. Sada je $\frac{1}{2\pi}[\arg A_{o,p}(t)]_L = 0$ pa za homogeni konturni problem sa koeficijentom $A_{o,p}(t)$ postoje funkcije $X_{o,p}(z)$ i $X_{o,p,j}(z)$ analitičke respektivno u S^+ i D_j^+ i različite od nule redom u $S^+ \cup L$ i $D_j^+ \cup \Gamma_j$ koje na konturi L odnosno Γ_j imaju granične vrednosti $X_{o,p}(t) \in H_\mu(L)$ i $X_{o,p,j}(t) \in H_\mu(\Gamma_j)$ i koje zadovoljavaju konturni uslov $X_{o,p,j}(\alpha(t)) = A_{o,p}(t) \cdot X_o(t)$, $t \in L$. Ove funkcije su odredjene formulama:

$$X_{o,p}(z) = \exp\left(-\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\right), \quad z \in S^+,$$

$$X_{o,p,j}(z) = \exp\left(\frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_p(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\,dt\right), \quad z \in D_j^+,$$

gde je $\varphi_p(t)$ rešenje jednačine $(\mathcal{J}\varphi_p)(t) = \ln A_{o,p}(t)$. Iz svega ovoga sledi da se na konturi L koeficijenti $A_p(t)$ problema (3.2.7) mogu predstaviti u obliku

$$A_p(t) = \frac{X_{o,p,j}(\alpha(t))}{t^{-\kappa_p} X_{o,p}(t)}, \quad t \in L,\ p=0,1,\dots,n-1,\ j=1,2,\dots,m. \qquad (3.2.12)$$

Iz relacija (3.2.4), (3.2.7) i (3.2.12) dobija se analogno već opisanom postupku sistem konturnih uslova:

$$\frac{U_{p,j}(\alpha(t))}{X_{o,p,j}(\alpha(t))} = \frac{U_p(t)}{t^{-\kappa p} X_{o,p}(t)} + G_{p,j}(t), G_{p,j}(t) = \frac{g_{p,j}(t)}{X_{o,p,j}(\alpha(t))} \qquad (3.2.13)$$

$$t \in L_j.$$

Označimo sa $\Psi_{j,p}(z)$ funkcije $\dfrac{U_{p,j}(z)}{X_{o,p,j}(z)}$, $z \in D_j^+$ i posmatrajmo prvo slučaj u kojem su svi $\kappa_p \geqslant 0$ a zatim onaj u kojem su svi $\kappa_p < 0$, $p=0,1,\ldots,n-1$.

a) Neka su $\kappa_p < 0$, $p=0,1,\ldots,n-1$.

Funkcije $\dfrac{U_p(z)}{z^{-\kappa_p} X_{o,p}(z)}$ imaju u tački $z=0$ pol reda $-\kappa_p$ pa se prema tome mogu predstaviti u obliku:

$$\frac{U_p(z)}{z^{-\kappa_p} X_{o,p}(z)} = \sum_{i=1}^{-\kappa_p} \frac{C_{i,p}}{z^i} + \Psi_p(z), \qquad z \in S^+, \qquad (3.2.14)$$

gde su $\Psi_p(z)$ za sada neodredjene analitičke funkcije u S^+, a $C_{i,p}$, $p=0,1,\ldots,n-1$, su kompleksne konstante.

Uvedemo li oznake $B_{2k-1,p} = \mathrm{Re}\, C_{k,p}$, $B_{2k,p} = \mathrm{Im}\, C_{k,p}$, $g^*_{2k-1}(t) = \dfrac{1}{t^k}$, $g^*_{2k}(t) = \dfrac{i}{t^k}$, $t \in L$, dobićemo zbog (3.2.13)

$$\Psi_p(z) = C_p - \sum_{k=1}^{-2\kappa_p} \frac{B_{k,p}\cdot(z-a_o)}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_k(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)} - \frac{z-a_o}{2\pi i} \int_L \frac{\lambda_p(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)},$$

$$\Psi_{p,j}(z) = C_p + \sum_{k=1}^{-2\kappa_p} \frac{B_{k,p}\cdot(z-a_j)}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_k(\alpha_j^{-1}(t))dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)} + \frac{z-a_j}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\lambda_p(\alpha_{-1}^j(t))dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)},$$

gde su C_p proizvoljne kompleksne konstante a $\varphi_i(t)$ i $\lambda_p(t)$ su rešenja integralnih jednačina Fredholma $(\mathcal{F}\varphi_i)(t)=g_i^*(t)$, $(\mathcal{F}\lambda_p)(t) = G_{p,j}(t)$, $p=0,1,\ldots,n-1$, $i=1,2,\ldots,-2\kappa_p$, $j=1,2,\ldots,m$.

Stavimo da je $B_{-2\kappa_p+1,p} = \mathrm{Re}\, C_p$, $B_{-2\kappa_p+2,p} = \mathrm{Im}\, C_p$ i definišimo funkcije:

$$M_{2k-1}(z) = \frac{1}{z^k} - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{2k-1}(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \quad z\in S^+,$$

$$M_{2k}(z) = \frac{i}{z^k} - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{2k-1}(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}, \quad z\in S^+, \qquad k=1,2,\ldots,-2\kappa_p.$$

$$M_{-2\kappa_p+1}(z) = 1, \quad M_{-2\kappa_p+2}(z) = i, \quad z\in S^+, \tag{3.2.15}$$

i

$$N_{k,j}(z) = \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi_k(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\,dt, \quad z\in D_j^+,$$

$$k=1,2,\ldots,-2\kappa_p, \quad j=1,2,\ldots,m,$$

$$N_{-2\kappa_p+1,j}(z) = 1, \quad N_{-2\kappa_p+2,j}(z) = i, \quad z\in D_j^+,$$

gde su $\varphi_k(t)$ rešenja integralnih jednačina Fredholma $(\mathcal{F}\varphi_k)(t) = g_k^*(t)$, $t\in L$, $k=1,2,\ldots,-2\kappa_p$, $j=1,2,\ldots,m$. Sada ćemo opšte rešenje homogenog konturnog problema (3.2.7) u slučaju $\kappa_p < 0$ moći predstaviti u obliku:

$$W(z,\bar z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar z^\nu U_\nu(z), \quad z\in S^+,$$

$$W_j(z,\bar z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar z^\nu U_{\nu,j}(z), \quad z\in D_j^+, \tag{3.2.16}$$

gde su

$$U_p(z)=z^{-\kappa_p}X_{o,p}(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa_p+2} B_{i,p}\cdot M_i(z) - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\Big),\ z\in S^+,$$

$$U_{p,j}(z)=X_{o,p,j}(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa_p+2} B_{i,p}\cdot N_{i,j}(z) + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\lambda_p(\alpha_j^{-1}(t))dt}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\Big),\ z\in D_j^+,$$

b) Neka su $\kappa_p \geqslant 0$, $p=0,1,\dots,n-1$.

Funkcije $\dfrac{U_p(z)}{z^{-\kappa_p}X_{o,p}(z)}$ su sada analitičke u S^+ i za $\kappa_p > 0$ jednake nuli u koordinatnom početku, a funkcije $\dfrac{U_{p,j}(z)}{X_{o,p,j}(z)}$ su analitičke u D_j^+. Na osnovu ovoga iz (3.2.13) dobijamo

$$\frac{z^{\kappa_p}U_p(z)}{X_{o,p}(z)} = C_p - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)},\quad z\in S^+,$$

$$\frac{U_{p,j}(z)}{X_{o,p,j}(z)} = C_p + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\lambda_p(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-z)\cdot(t-a_j)}\,dt,\quad z\in D_j^+. \tag{3.2.17}$$

Ako je $\kappa_p=0$, onda iz (3.2.17) nalazimo $U_p(z) = X_{o,p}(z)\Big(C_p - \dfrac{z-a_o}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\lambda_p(t)dt}{(t-z)\cdot(t-a_o)}\Big)$, $z\in S^+$, $U_{p,j}(z) = X_{o,p,j}(z)\Big(C_p + \dfrac{z-a_j}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_j}\dfrac{\lambda_p(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-z)\cdot(t-a_j)}dt\Big)$, $z\in D_j^+$, odnosno

$$W(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1}\bar z^v U_v(z)\quad i\quad W_j(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1}\bar z^v U_{v,j}(z),$$

tj. dobijamo već nadjeno opšte rešenje homogenog problema (3.2.7) sa Košijevim indeksom koeficijenta $A_p(t)$ jednakim nuli. Ovo je rešenje očigledno sadržano i u formuli (3.2.16), ako dopustimo da ono važi i za $\kappa_p=0$, $p=0,1,\dots,n-1$.

U slučaju da je $\kappa_p \geq 0$, $p=0,1,\dots,n-1$ rešenje problema (3.2.7) ako uopšte postoji, se može predstaviti u obliku

$$W(z,\bar z)=\sum_{v=0}^{n-1} \bar z^{v}\cdot U_v(z),\ z\in S^+,\ W_j(z,\bar z)\sum_{v=0}^{n-1} \bar z^{v}\cdot U_{v,j}(z),\ z\in D_j^+,$$

gde je

$$U_v(z)=z^{-\kappa_v}\cdot X_{o,v}(z)\cdot\left(C_v-\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_v(t)\,dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\right),\ z\in S^+,$$

$$U_{v,j}(z)=X_{o,v,j}(z)\cdot\left(C_v+\frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\lambda_v(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\,dt\right),\ z\in D_j^+, \tag{3.2.18}$$

$\lambda_v(t)$ je rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{F}\lambda_v)(t) = \dfrac{g_v(t)}{X_{o,v,j}(\alpha(t))}$, $t\in L$, a C_v je proizvoljna kompleksna konstanta, $v=0,1,\dots,n-1$, $j=1,2,\dots,m$.

Iz (3.2.18) se vidi da je za rešivost problema (3.2.7) u ovom slučaju neophodno i dovoljno da bi analitička u S^+ funkcija

$$U_{*,p}(z) = -\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\,dt + C_p$$ imala u tački $z=0$ nulu reda ne manju od κ_p. Radi nalaženja odgovarajućih uslova rešivosti razvićemo funkciju $U_{*,p}(z)$ u Tejlorov red u okolini tačke $z=0$. Na taj način će funkcije $U_p(z)$ biti analitičke u S^+, ako svi koeficijenti uz $z^o, z^1,\dots,z^{\kappa_p-1}$ u razvoju:

$$U_{*,p}(z)=C_p-\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t(t-a_o)}\,dt-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j\cdot(z-a_o)}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)\,dt}{(t-a_o)\cdot t^{j+1}},\quad z\in S^+,$$

budu jednaki nuli. Odavde dobijamo neophodne i dovoljne uslove rešivosti problema (3.2.7).

$$C_p - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt = 0, \tag{3.2.19}$$

$$\int_L \frac{\lambda_p(t)\,dt}{t^{j+1}} = 0, \tag{3.2.20}$$

$j=1,2,\ldots,\kappa_p-1,\ p=0,1,\ldots,n-1.$

Uslovi (3.2.19) i (3.2.20) se mogu zapisati u obliku $\sum_{p=0}^{n-1}(2\kappa_p-2)$ realnih uslova rešivosti. Da bi se ovo videlo dovoljno je izabrati realne konstante C_p tako da bi bilo:

$$\operatorname{Re} C_p = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt\right), \tag{3.2.21}$$

$$p=0,1,\ldots,n-1.$$

$$\operatorname{Im} C_p = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)}{t}\,dt\right), \tag{3.2.22}$$

U uslovu (3.2.20) možemo odvojiti realne i imaginarne delove i na taj način od njega dobiti $\sum_{p=0}^{n-1}(2\kappa_p-2)$ realnih uslova rešivosti:

$$\operatorname{Re}\int_L \frac{\lambda_p(t)\,dt}{t^{j+1}} = 0, \qquad \operatorname{Im}\int_L \frac{\lambda_p(t)\,dt}{t^{j+1}} = 0, \tag{3.2.23}$$

$j=1,2,\ldots,\kappa_p-1,\quad p=0,1,\ldots,n-1.$

Razmotrimo sada opšti slučaj (3.2.1). Korišćenjem relacije (3.2.4) se navedeni konturni problem svodi na sledeći sistem konturnih problema za analitičke funkcije:

$$U_{p,j}(\alpha(t)) = A_p(t)\cdot U_p(t) + \sum_{i=1}^{n-p-1}\binom{p+i}{i}\cdot\left(A_p(t)\cdot \bar{t}^{\,i}\cdot U_{p+i}(t) - \overline{\alpha(t)}^{\,i}\cdot U_{p+i,j}(\alpha(t))\right) + \frac{B_p(t)}{p!!},$$

$$p=0,1,\ldots,n-1.$$

Uzimajući u ovom sistemu prvo p=n-1 pa p=n-2, itd. i prikazujući koeficijente $A_p(t)$ u obliku

$$A_p(t) = \frac{X_{o,p,j}(\alpha(t))}{t^{-\kappa_p} X_{o,p}(t)}, \quad t\in L,$$

gde su $X_{o,p}(z)$ i $X_{o,p,j}(z)$ partikularna rešenja problema:

$U_{p,j}(\alpha(t))=A_{o,p}(t)\cdot U_p(t)$, $A_{o,p}(t) = t^{-\kappa_p} A_p(t)$ u kojem je $\frac{1}{2\pi}[\arg A_{o,p}(t))]_L = 0$, nalazimo redom funkcije $U_{n-1}(z)$ i $U_{n-1,j}(z)$ pa $U_{n-2}(z)$ i $U_{n-2,j}(z)$ itd. U slučaju $\kappa_p \leqslant 0$, p=0,1,...,n-1 bi dobili

$$U_p(z)=z^{-\kappa_p} X_{o,p}(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa_p+2} B_{i,p} M_i(z) - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_p(t)\,dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\Big),\quad z\in S^+,$$

$$U_{p,j}(z)=X_{o,p,j}(z)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{-2\kappa_p+2} B_{i,p} N_{i,j}(z) + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\lambda_p(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\,dt\Big),\quad z\in D_j^+, \tag{3.2.24}$$

gde je $\lambda_p(t)$, $t\in L$ rešenje integralne jednačine $(\mathfrak{T}\lambda_p)(t) =$ $= \dfrac{g_p(t)+\frac{1}{p!!}\cdot B_p(t)}{X_{o,p,j}(\alpha(t))}$, a $M_i(z)$ i $N_{i,j}(z)$, i=1,2,...,$-2\kappa_p+2$, p=0,1,... ...,n-1, j=1,2,...,m su funkcije odredjene sa (3.2.15).

Na taj način bi u slučaju $\kappa_p \leqslant 0$, p=0,1,...,n-1 rešenje konturnog problema (3.2.1) mogli zapisati u obliku:

$$W(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^{v} U_v(z),\quad z\in S^+,$$

$$W_j(z,\bar z) = \sum_{v=0}^{n-1} \bar z^{v} U_{v,j}(z),\quad z\in D_j^+, \tag{3.2.25}$$

gde su funkcije $U_v(z)$ i $U_{v,j}(z)$, $v=0,1,\dots,n-1$ odredjene sa (3.2.24).

U slučaju da je $\kappa_p > 0$, $p=0,1,\dots,n-1$ rešenje problema (3.2.1) ako uopšte postoji, se može predstaviti u obliku

$$W(z,\bar z)=\sum_{v=0}^{n-1} z^{v} U_v(z),\quad z\in S^+,\quad W_j(z,\bar z)=\sum_{v=0}^{n-1} \bar z^{v} U_{v,j}(z),\quad z\in D_j^+,$$

gde je

$$U_v(z)=z^{-\kappa_v} X_{o,v}(z)\left(C_v - \frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_v(t)\,dt}{(t-a_o)\cdot(t-z)}\right),\quad z\in S^+,$$

$$U_{v,j}(z)=X_{o,v,j}(z)\left(C_v + \frac{z-a_j}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \frac{\lambda_v(\alpha_j^{-1}(t))}{(t-a_j)\cdot(t-z)}\,dt\right),\quad z\in D_j^+, \tag{3.2.26}$$

$\lambda_v(t)$ je rešenje integralne jednačine $(\mathcal{T}\lambda_v)(t) = \dfrac{\frac{1}{v!}B_v(t)+g_v(t)}{X_{o,v,j}(\alpha(t))}$,

$t\in L$, a C_v je proizvoljna kompleksna konstanta, $v=0,1,\dots,n-1$, $j=1,2,\dots,m$.

Iz (3.2.26) se vidi da je za rešivost problema (3.2.1) u ovom slučaju neophodno i dovoljno da bi analitička u S^+ funkcija

$$U_{*,v}(z) = -\frac{z-a_o}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_v(t)}{(t-a_o)(t-z)}\,dt + C_v$$ imala u tački $z=0$ nulu reda ne manju od κ_v.

Odavde dobijamo neophodne i dovoljne uslove rešivosti problema (3.2.1)

$$C_v = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda_v(t)}{t}\,dt, \tag{3.2.27}$$

$$\mathrm{Re}\int_L \frac{\lambda_v(t)\,dt}{t^{j+1}} = 0,\qquad \mathrm{Im}\int_L \frac{\lambda_v(t)\,dt}{t^{j+1}} = 0, \tag{3.2.28}$$

$j=1,2,\ldots,\kappa_p-1, \quad v=0,1,\ldots,n-1.$

Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

<u>TEOREMA</u>. Ako za sve $p\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ indeksi $\kappa_p = \frac{1}{2\pi}[\arg A_p(t)]_L$ konturnog problema (3.2.1) nisu veći od nule, onda je taj problem bezuslovno rešiv i njegovo rešenje, predstavljeno formulom (3.2.25) sadrži $2\sum_{p=0}^{n-1}(-\kappa_p+1)$ proizvoljnih realnih konstanti. Ako su pak svi $\kappa_p > 0$, $p=0,1,\ldots,n-1$, onda je problem (3.2.1) rešiv ako i samo ako je ispunjeno $2\sum_{p=0}^{n-1}(\kappa_p-1)$ realnih uslova rešivosti (3.2.28) i njegovo jedinstveno rešenje se dobija po formuli (3.2.26) u kojoj je C_v odredjeno sa (3.2.27).

ZAKLJUČAK

Konturni problemi za analitičke i polianalitičke funkcije i sa njima povezani singularni integralni operatori pojavljuju u različitim oblastima nauke: teoriji diferencijalnih jednačina, matematičkoj fizici, teoriji elasto-plastičnosti, elektrodinamici itd. S obzirom da se metode rešavanja ovakvih problema oslanjaju na metode teorije funkcija kompleksne promenljive, teorije singularnih integralnih jednačina, funkcionalne i numeričke analize itd, to je jasno da je daljnji progres razvoja ove teorije nedeljiv od odgovarajućeg progresa u navedenim oblastima nauke. Razvoj konturnih problema za analitičke i polianalitičke funkcije može odvijati na dva podjednako važna polja: teoretskom i primenjenom. Na teoretskom polju mogu se razmatrati razna uopštenja u odnosu na konturne uslove i geometriju konture, kao i na klasu funkcija u kojoj se traži rešenje problema i tako njihovim razvojem doprinosi se razvoju teorije konturnih problema. S druge strane, s obzirom da se često odgovarajući matematički problemi teorije elastičnosti, plastičnosti, viskoznosti i raznih grana matematičke fizike povezanih sa integralnim i parcijalnim jednačinama ili njihovim sistemima Furijeovim transformacijama mogu svesti na konturne probleme teorije funkcija kompleksne promenljive, to se na polju primene može očekivati i mnogo šire korišćenje konturnih problema u tim oblastima nauke. Metode rešavanja nekih klasa takvih problema dali su: Čerepanov [50], Annin [2], Čerski [53], Fan Tang Da [45] i drugi.

Do danas je objavljeno nekoliko monografija i više od 500 radova u kojima se teorija konturnih problema i singularnih integralnih jednačina razvija u najrazličitijim pravcima.

Napomenimo da je 1970. godine započela nova intenzivna etapa u razvijanju teorije konturnih problema za analitičke i neanalitičke funkcije. Za poslednjih 15 godina objavljeno je više od 100 radova po toj tematici. Ta etapa je obogaćena novim problemima i metodama kao što su: istraživanje osnovnih konturnih problema sa pomeranjem na riemanovoj površi, razvijanje neterovske teorije i veoma opštih klasa problema sa pomeranjem i s njima povezanim funkcionalnim jednačinama, istraživanje konturnih problema sa pomeranjem koji ne pripadaju normalnom neterovskom tipu, razmatranje singularnih slučajeva u teoriji konturnih problema sa pomeranjem (slučaj prekidnih koeficijenata i sl) kao i rešavanje konturnih problema u klasi uopštenih analitičkih funkcija.

Na kraju, sve jasnije se naziru prilozi konturnih problema i singularnih integralnih jednačina u različitim teorijama od praktičnog značaja. Iz tih teorija treba napomenuti:

1) Teoriju konturnih problema za diferencijalne parcijalne jednačine mešovitog (eliptičko-hiperboličkog tipa i njihove sisteme);

2) Teoriju beskonačno malih savijanja površi pozitivne krivine;

3) Teorije plastičnosti i elastičnosti.

Ovim je ujedno opravdan timski rad visokospecijalizovanih stručnjaka raznih naučnih oblasti, a u poslednje vreme, zbog potreba primene, i uključivanje posebno stručnjaka iz oblasti računskih mašina i numeričke analize.

Danas je teorija istraživanja osnovnih konturnih problema sa pomeranjem dobila već konačan oblik. Medjutim, teorija konturnih problema sa pomeranjem opštijih oblika od osnovnih još je daleko od završetka.

Tek u poslednje vreme je konstruisana teorija Netera za jednu dosta opštu klasu problema sa pomeranjem. Teoreme o broju rešenja i uslovima rešivosti dobijene su samo za niz specijalnih slučajeva. To isto se može reći i za teoriju singularnih integralnih jednačina sa pomeranjem jer se čak i najprostije takve jednačine svode na probleme sa pomeranjem veoma opšteg oblika.

L I T E R A T U R A

[1] Ajzenštat A.V., Zadača Karlemana s razrivnim sdvigom, Teorija funkcij kompleksnovo peremennovo i kraevie zadači, Izd-vo Čuvašo-kovo in-ta 2(1974).

[2] Annin B.D., Sadovskij V.M. Uprugo-plastičeskoe kručenie steržnja pramougoljnove sečenija - Mehanika tverdovo tela, 1981, No 5.

[3] Bojarskij B.V., Ob obobščennoj graničnoj zadače Xilberta Soobšć. AN Gruz., SSR 25, 4(1960).

[4] Buzinovskij B.P., Svetnoj A.P., Videlenije osobennostej rešenij matričnoj zadači Rimana s razrivnimi koeficientami, Odes.gos.ped. in-t Odessa, 1985.

[5] Vasilevskij H.L., Šapiro M.V., Ob algebre, poroždennoj singuljarnimi integraljnimi operatorami so sdvigom Karlemana i kusočno neprerivnimi koeficientami, Ukr.matem.Žurnal 27, 2(1975).

[6] Vekua N.P. Sistemi singuljarnih integraljnih uravnenij i nekotorie graničnie zadači, Nauka, M., 1970.

[7] Vekua I.N., Obobšćennie analitičeskie funkcij, Fizmatgiz, M., 1959.

[8] Gabrinović V.A., Kraevaja zadača tipa Karlemana dlja polianalitičeskih funkcij, Vesci akademii navuk Belaruskaj SSR No3, 1977.

[9] Gabrinović V.A., O kraevoj zadače tipa Karlemana dlja metaanalitičeskih funkcij, Dokladi Akademii nauk BSSR, Tam XXI, No2, 1977.

[10] Gavrilov S.K., Issledovanie po smešannim dvuhelementnim kraevim zadačam teorii analitičeskih funkcij, kand.dissertacija, Odessa, 1974.

[11] Gavdzinskij V.N., Nečaev A.P., Kraevaja zadača dlja pari funkcij, analitičeskih v nesovpadajuščih oblastjah, Ukrainskij matematičeskij žurnal, T.31, No6, 1979.

[12] Gahov E.D. Kraevie zadači Moskva Nauka 1977.

[13] Gahov F.D., Čerskij, Ju.J., Uravnenija tipa svertki, Nauka, Moskva, 1978.

[14] Ganin M.P., Kraevie zadači dlja polianalitičeskih funkcij, Dokl. A.N., SSSR, 5-80, No3, 1951.

[15] Gohberg J.C., Krupnik N.Ja., Ob algebre, poroždennoj odnomernimi singuljarnimi integraljnimi operatorami s kusočno neprerivnimi koeficientami Funkc.analiz 4, 3(1970).

[16] Gohberg J.C., Krupnik N.Ja.Singuljarnie integraljnije operatori s kusočno neprerivnimi koeficientami i ih simvoli, Izv. AN SSSR, ser.matem. 35, 4(1971).

[17] Gohberg J.C., Krupnik N.Ja., Vvedenie v teoriju odnomernih singuljarnih integraljnih operatorov, Izd-ov AN MSSR, Kišinev, 1973.

[18] Goluzin G.M., Geometričeskaja teorija funkcij kompleksnovo peremennovo, Nauka, M., 1965.

[19] Dolbeault Pierre, Theoreme de Plemelj en plusieurs variables, Riv, mat.Univ.Parma, 10, 1984.

[20] Zverović E.J., Kraevaja zadača tipa zadači Karlemana dlja mnogosvjaznoj oblasti, Matem.sb. 64, 4(1964).

[21] Zverović E.J., Kraevaja zadača tipa zadači Karlemana dlja mnogosvjaznoj oblasti, DAN SSSR 1956, 6(1964).

[22] Zverovič L.F. Vektorno-matričnie kraevie zadači so sdvigom i saprjaženiem v slučae razrivnih koefficientov, Teoria funkcija kompleks.peremennono i kraev. zadači, 1982, No4.

[23] Zverovič E.J., Kraevie zadači s sdvigom na abstraktnih rimanovih poverhostjah, Sibirsk.matem.ž. 7, 4(1966).

[24] Ivanov V.V., Teorija približennih metodov i ee primenenija k čislennoma rešeniju singuljarnih integralnih uravnenij, Kiev: Nauk dumka, 1968.

[25] Isahanov R.S., Ob odnoj zadače linejnovo soprjaženija dlja kusočno holomorfnih vektorov, Soobšč. AN. Gruz. SSR, 53, 3(1969).

[26] Isahanov R.S., O nekatorih graničnih zadač teorii analitičeskih funkcij. Trudi Mat.in-ta AN Gruz SSR, 52, 1976.

[27] Jasenko S.A., Obobšćennaja kraevaja zadača Gazemana na zamknutoj rimanovoj povjerhnosti, DAN USSR, ser.A, 1(1974).

[28] Yurčenko S.J., Kraevaja zadača tipa zadači Hazemana, Učen. zap. Kabardino-Balkarskovo in-ta 22(1966).

[29] Kas V.A., O kraevih zadačah s beskonačnimi indeksami i nevzaimnoodnoznačnimi sdvigami, Mat.zametki, 1981, 30 No6.

[30] Krikunov Jn.M., O rešenii obobšćennoj kraevoj zadači Rimana i linejnih singuljarnih integro-differencialjnih uravnenij, Uč.zap.Kar.in-ta, matematika 112, 10(1952).

[31] Litvinčuk G.S., Kraevie zadači i singuljarnie integralnie uravnenija so sdvigam. M.: Nauka, 1977.

[32] Litvinčuk G.S., Hasahov E.G., Ob odnom tipe singuljarnih integraljnih uravnenij, Sibir, matem.Ž. 5, 3(1964).

[33] Litvinčuk G.S., Hasahov E.G., K teorii singuljarnih integraljnih uravnenij, podčinjajuščihsja alternative Fredholma, DAN. SSSR 140, 1(1961).

[34] Litvinčuk G.S. Nečaev A.P., Obobščenaja kraevaja zadača Karlemana, Matem. sbornik 82, 1(1970).

[35] Mihajlov L.G., Ob odnoj graničnoj zadače linejnovo soprja-ženija, DAN SSSR 139, 2(1961).

[36] Mihajlov L.G., Novij klass osobih integralnih uravnenij i evo priloženie k differencialnim uravnenijam s singuljarnimi koefficientami, Dušanbe, 1963.

[37] Mišnjakov N.T., Kraevie zadači so sdvigam v klasse obob-ščennih analitičeskih funkcij na zamknutih riemanovih poverhnostjah, Izv.vuzov, matematika, 11(1968).

[38] Nečaev A.P., Ob odnoj kraevoj zadače dljov dvuh funkcij, analitičeskih v oblasti, DAN USSR 10(1969).

[39] Nečaev A.P., Pro odnu krajovu zadaču dlja pari funkcij ana-litičnih v oblasti, Donov. AN URSR, No 10, 1969.

[40] Rogožin V.S., Obščaja shema rešenija kraevih zadač v pro-stranstve obobščennih funkcij, DAN SSSR 164, 2(1965).

[41] Rogožin S.V., O kraevoj zadače Riemana s beskonečnim čislom razrivov 1-vo roda ee koefficienta, Vestn. Belorus.Un-ta, Ser.1. Fiz.mat.meh. Minsk, 1982.

[42] Sazonov L.J., Bisinguljarnoe uravnenije so sdvigom v pros-transtve Lp, Matem.zametki 13, 3(1973).

[43] Tihonenko N.Ja, Približennoe rešenie zadači Hazemana, Ukrainskij matem. ž. 26, 6(1974).

[44] Timofeev E.K., Nelinejnie kraevie zadači teorii analitičeskih funkcij, kand.dissertacija, Poctov - na Donu,1969.

[45] Fan Tang Da, Kraevie zadači teorii funkcij, rešaemie metodom faktorizacii, i integralnie uravnenija tipa svertki, kand. dissertacija, Odessa, 1972.

[46] Hasahov E.G., Kraevaja zadača tipa zadači Karlemana, Izv. vuzov, matematika 2 (1963).

[47] Hom Grin J., Kraevaja zadača Karlemana dlja elliptičeskih sistem uravnenij pervovo porjadka, Scienta Sinica, 12, 8 (1963).

[48] Hvedelidze, O kraevoj zadače Puaneare teorii logarifmičeskovo potenciala dlja mnogosvazanoj oblasti, AN. Gruz. SSSR, T.II, No7, 10, 1941.

[49] Čanak M., Konturni problem tipa Karlemana za areolarnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda, Matematički vesnik, 5(18) (33), 1981, Beograd

[50] Čerepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture, New York, McGraw Hill, 1979.

[51] Černeckij V.A., Kraevaja zadača Karlemana dlja mnogosvjaznoj oblasti v klasse obobšćennih analitičeskih funkcij, Izv.AN. Arm. SSR, matematika 5, 4(1970).

[52] Černeckij V.A., O korformnoj ekvivalentnosti kraevoj zadači Karlemana i kraevoj zadači Riemana na razamknutom konture DAN SSSR 190, 1 (1970).

53 Čerskij Jn. J., Normalno razrešimoe uravnenije plavnovo perehoda, DAN SSSR 190, 1 (1970).

54 Čibrikova L.J., Osobie slučai obobšćennoj zadači Riemana, Uč.zap. Kazanskovo in-ta 112, 10(1952).

55] Čočiev T.Z., Ob odnoj graničnoj zadače teorii funkcij, Soobšć. AN Gruz. SSR 27, 3(1961).

56 Šeško M.A., Ob obšćej zadače linejnovo soprjaženija dlja sistemi n par funkcij Izv. AN. BSSR, seria fiz.-matem.nauk 1 (1967).

57 Šeško M.A., O kraevih zadačah s soprjaženiem, kandidatskaja disertacija, Minsk, 1967.

S A D R Ž A J

Strana

UVOD 1

I GLAVA

UVOD U TEORIJU KONTURNIH PROBLEMA SA POMERANJEM

1.1. Neka pomoćna tvrdjenja i definicije 4
1.2. Uopštena teorema Liouville-a 5
1.3. Granične vrednosti neprekidne funkcije 6
1.4. Integral tipa Cauchy 7
1.5. Formule Plemelja-Sohockog 8
1.6. Teorema Riemann-a o konformnom preslikavanju 10
1.7. Konturni problem Riemann-a 11
1.8. Konturni problem Hazeman-a 12
1.9. Konturni problem tipa problema Hazeman-a 13
1.10. Konturni problem Carleman-a 15
1.11. Konturni problem tipa problema Carleman-a 15
1.12. Polianalitičke funkcije 17
1.13. Istorijski razvoj konturnih problema 18

II GLAVA

KONTURNI PROBLEMI ZA JEDNOSTRUKO POVEZANE OBLASTI

2.1. Konturni problem za funkcije analitičke u jednostruko povezanim oblastima 23
2.2. Konturni problem za funkcije polianalitičke u jednostruko povezanim oblastima 38
2.3. Konturni problem tipa problema Carleman-a za polianalitičke funkcije 52
2.4. Približno rešavanje konturnog problema Hazeman-a 63

Strana

III GLAVA

KONTURNI PROBLEMI ZA VIŠESTRUKO POVEZANE OBLASTI

3.1. Konturni problem za funkciju analitičku u višestruko povezanoj oblasti 71

3.2. Konturni problem za funkciju polianalitičku u višestruko povezanoj oblasti 87

Zaključak 103

Literatura 106