АРИТМЕТИЧКЕ И АНАЛИТИЧКЕ ПРИМЕНЕ МАТЕМАТИЧКИХ СПЕКТАРА

ТЕЗА

КОНСТАНТИНА ОРЛОВА

примљена за докторски испит
на седници философског факултета у Београду 27 новембра 1934

према реферату чланова испитног одбора г. г.

Д-ра МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА, ред. проф. универзитета,
Д-ра НИКОЛЕ САЛТИКОВА, ред. проф. универзитета и
Д-ра ТАДИЈЕ ПЕЈОВИЋА, ванр. проф. универзитета.

БЕОГРАД
1935

УВОД.

Основни задатак спектралног рачуна је израчунавање неког коначног или бесконачног низа непознатих величина, ако се ове могу довести у одређену и познату зависност са неким низом целих бројева тако, да се помоћу њих могу одредити и првобитне непознате величине.

Низ целих бројева, на које се тако своди одређивање непознатих, добија се у облику појединих група децимала једног истог децималног броја S, који се назива *спектром* тражених непознатих величина. У таквом математичком спектру су растурени ти цели бројеви у један линеаран низ, у ком се њихове вредности налазе поређане једна поред друге, местимично или свуда пораздвајане низовима нула, као год што су у оптичком спектру растурене у линеаран низ боје, тако да тамни и светли појасеви и пруге тог спектра карактеришу поједине састојке неке смеше.

Теорија математичких спектара створена је пре неколико година и показало се да је она у стању да решава, на један дотле неуобичајен начин, мноштво аритметичких, алгебарских и аналитичких проблема. У овоме се раду износи неколико нових прилога ином што је досад у томе погледу урађено. Суштина тих прилога ће се, у главном, видети у следећим редовима.

У првом реду је показан начин за формирање спектра низа ма како означених бројева, а не само једнако означених. Тим се, насигурно, проширује област примене математичких спектара.

Од чисто аритметичких примена наведена је само једна, која сама по себи није од нарочитог значаја, али која бар показује да се спектрална метода може применити и на проблеме такве врсте. То је примена спектара за доказ да једна извесна класа бројева, која зависи од једног параметра, не садржи ниједан прост број.

Од алгебарских примена наведен је и решен проблем о распадљивости полинома, чији су коефицијенти цели бројеви, на факторе који су опет полиноми исто такве врсте. Ту спектрална метода има неоспорну надмоћност над досад познатим алгебарским и аритметичким методама за решавање таквих проблема. Тако Kronecker-ова метода је аритметичко-алгебарска: потребни услови су аритметички, а довољни услови алгебарски, и то изражени само као алгоритам. Спектрални начин чисто је аритметички и ниједан услов није исказан у облику алгоритма. Спектрални начин своди проблем на разлагање на аритметичке факторе само једног целог броја, док Kronecker-ова метода своди проблем на разлагање једне групе целих бројева.

За аналитичке примене спектралне методе од интереса је начин за рекурсивно израчунавање математичких спектара који се излаже у овоме раду. Такво је израчунавање могуће кадгод се проблем одређивања ограниченог или неограниченог низа функција своди на одређивање низа полинома чији су коефицијенти цели бројеви, а који су међусобно везани каквом одређеном и познатом рекурсивном релацијом. Рекурсивне везе међу полиномима повлаче за собом сличне рекурсивне везе и међу њиховим спектрима, а из релација, које те везе изражавају, могу се одредити ти спектри, па помоћу ових и сами полиноми, као и првобитне функције чије се одређивање своди на ове.

Интерес методе за рекурсивно израчунавање спектара нарочито се показује при одређивању коефицијената Mac-Laurin-ових редова за основне елиптичке функције, као и појединих њихових аналитичких комбинација. За то израчунавање постоје разне методе: Jacobi-ева, Weierstrass-ова, Hermite-ова, Halphen-ова и др. Метода основана на рекурсивном израчунавању спектара разликује се од ових тиме што се по тој методи сви коефицијенти једне такве функције одређују помоћу једнога низа целих бројева, њихових спектара, чија свака група децимала одређује по један коефицијент. Међутим, спектри су међу собом везани рекурсивним релацијама које допуштају њихово израчунавање.

Пре но што приступимо излагању нових прилога теорији математичких спектара, изложићемо најпотребније елементе те теорије, у облику у коме су они већ познати у тој теорији.

ГЛАВА ПРВА

Математички спектри.

1. Основни појмови.

Нека је дат низ целих позитивних бројева

$$(1) \qquad N_0,\ N_1,\ N_2 \ldots . N_k\,,$$

који респективно имају

$$p_0,\ p_1,\ p_2 \ldots . p_k\,,$$

цифара. Образујмо групе цифара

$$G_0,\ G_1,\ G_2 \ldots . G_k\,,$$

састављене од одговарајућих бројева N_i, испред којих стоји извесан број нула. Тај број нула није произвољан, него је одређен унапред датом једначином

$$(2) \qquad h_i = \varphi(i)$$

и мора бити толики да група G_i има h_i цифара.

Закон који одређује број цифара појединих група G_i, а који је изражен једначином (2), назива се *спектралним ритмом.*

Испишимо групе цифара G_i непосредно једну за другом и ставимо после G_0 децималну запету. Тада ћемо добити неки број S

$$S=G_0\,,\,G_1\;G_2\ldots.G_k\,.$$

Број S зове се спектром низа бројева (1) *са спектралним ритмом h_i*, а група цифара G_i зове се i-тим појасом спектра S.

Спектар се може образовати само ако је

$$h_i \geqslant p_i$$

за свако i, и тада се каже да се ритам слаже са уоченим низом, или да низ допушта тај ритам. У супротном случају каже се да се ритам не слаже са тим низом и спектар је немогуће образовати.

Ако је

$$h_1=h_2=h_3=\cdots=h_k=h$$

то се ритам зове униформним. Даље ће највише бити говора о спектрима са униформним ритмом.

Спектром функције зове се спектар коефицијената који се добијају кад се функција развије у Mac-Laurin-ов ред. Наравно да се спектар функције може образовати само тако, ако се функција може развити у Mac-Laurin-ов ред и ако су коефицијенти овог реда цели и позитивни бројеви.

Из оног што је напред речено, лако се можемо уверити да ће спектар S функције $f(x)$ са униформним ритмом h бити изражен обрасцем:

$$S=f(10^{-h}).$$

Функција $F(x)$, која својом вредношћу за једну одређену специјалну вредност независно промењљиве количине x, даје спектар низа бројева назива се *спектрална генератриса* тог низа бројева.

Један од основних проблема спектралног рачуна је баш одређивање спектралне генератрисе, јер се помоћу ње може лако добити спектар.

2. Спектар низа целих различито означених бројева.

Као спектар низа целих различито означених бројева, може служити спектар њихових апсолутних вредности и низ знакова. Међутим такав спектар је веома незгодан за руковање, нарочито зато што у примени на функције, и кад је ритам униформан, не задовољава једначину

$$S=f(10^{-h}).$$

Нама је циљ да образујемо спектар који је дат само једним бројем и који задовољава горњу једначину.

Претпоставимо да је дат низ целих различито означених бројева. Ради конкретнијег излагања нека је тај низ

$$(3) \qquad N_0,\ N_1,\ -N_2,\ N_3,\ -N_4,\ -N_5,\ N_6.$$

Из овог низа образујмо два низа, један састављен од позитивних бројева, а други од апсолутних вредности негативних. Ти ће низови бити

$$\begin{array}{ccccccc} N_0, & N_1, & \cdot\,, & N_3, & \cdot\,, & \cdot\,, & N_6 \\ \cdot\,, & \cdot\,, & N_2, & \cdot\,, & N_4, & N_5, & \cdot\ \cdot \end{array}$$

Попунимо празна места нулама и тада ћемо добити ова два низа

$$\begin{array}{llllllll} (\mathrm{I}) & N_0, & N_1, & 0, & N_3, & 0, & 0, & N_6. \\ (\mathrm{II}) & 0, & 0, & N_2, & 0, & N_4, & N_5, & 0. \end{array}$$

Узмимо сада спектрални ритам h_k тако, да задовољава неједначину:

$$h_k > p_k$$

за свако k, где p_k претставља број цифара броја N_k. Пошто су низови (I) и (II) састављени из целих позитивних бројева, а ритам h_k слаже се, према ранијој дефиницији (стр. 8), с тим низовима, то и за један и за други можемо образовати спектре с тим ритмом h_k. Нека су ти спектри S_{I} и S_{II}. Пошто је $h_k > p_k$ (а не $h_k = p_k$) то ће сваки појас почињати бар са једном нулом и спектри S_{I} и S_{II} биће

$$S_{\mathrm{I}} = N_0 \,|\, 0 \ldots 0N_1 \,|\, 0 \ldots\ldots 00 \,|\, 0 \ldots 0N_3 \,|\, 0 \ldots\ldots 00 \,|\, 0 \ldots 00 \,|\, 0 \ldots 0N_6$$
$$S_{\mathrm{II}} = 0 \,|\, 0 \ldots 00 \,|\, 0 \ldots 0N_2 \,|\, 0 \ldots 00 \,|\, 0 \ldots 0N_4 \,|\, 0 \ldots 0N_5 \,|\, 0 \ldots\ldots 00$$

Потражимо сад разлику спектара S_{I} и S_{II}

$$S = S_{\mathrm{I}} - S_{\mathrm{II}}. \tag{4}$$

Приметимо прво да испод појаса који у првом броју садржи цифре са значењем (различите од нула), налази се појас у другом броју који садржи саме нуле и обратно, изнад појаса који у другом броју садржи цифре са значењем налази се у првом броју појас састављен од самих нула. Из тога следује да се цифре другог броја могу одузети само од јединице старијег појаса јер непосредно изнад њих стоје саме нуле. Ако још уочимо чињеницу да сваки појас S_{II} почиње нулом, то је јасно да ће после одузимања, појасеви, код којих су цифре са значењем биле код S_{II}, почињати деветком. Према томе биће

$$\begin{array}{rl}
- \begin{array}{r} S_{\mathrm{I}} = N_0 \\ S_{\mathrm{II}} = 0 \end{array} & \begin{array}{l} |\,0.\,.\,.\,.\,0N_1\,|\,0.\,.\,.00\,|\,0.\,.\,.\,.\,0N_3\,|\,0\,.\,.\,00\,|\,0.\,.\,.00\,|\,0\ldots 0N_6 \\ |\,0.\,.\,.\,.\,.\,00\,|\,0.\,.\,0N_2\,|\,0\,.\,.\,.\,.\,.\,00\,|\,0\ldots 0N_4\,|\,0.\,.\,0N_5\,|\,0\ldots 00 \end{array} \\
\hline
S = S_{\mathrm{I}} - S_{\mathrm{II}} = N_0 & |\,0\ldots 0(N_1-1)\,|\,9\,.\,.\,.\,.\,|\,0\ldots 0(N_3-1)\,|\,9\,.\,.\,.\,|\,9.\,.\,.\,.\,|\,0\ldots 0N_6
\end{array}$$

Број S назваћемо спектром низа (3) са спектралним ритмом h_{k}

Јасно је према изнетом начину образовања спектра, да сваки низ има свој спектар, и за један дати спектрални ритам сваки низ има један и само један спектар. Како се такав спектар S добија показали смо. Он може бити позитиван или негативан број, што зависи од знака првог елемента низа, т. ј. од знака броја N_0.

Пређимо сад на одређивање низа, кад је дат спектар. Нека је тај спектар позитиван. Узимајући у обзир горњу примедбу о цифрама са значењем и нулама и пошто у првом броју S_{I} долазе цифре са значењем на местима која одговарају позитивним члановима низа (3), а у другом броју S_{II} цифре са значењем налазе се на местима која одговарају негативним члановима низа (3), то се из самог начина образовања спектра долази до закључка, да појасевима који почињу са O, одговарају позитивни а оним који почиње са 9, одговарају негативни чланови низа (3). Исто тако се види да позитивни чланови износе колико и број који се налази у одговарајућем појасу спектра S у случају, ако идући појас почиње нулом (као N_0 и N_6), или је потребно да би се добио члан низа, да се том броју дода јединица, у случају, ако идући појас почиње деветком (као N_1 и N_3).

На тај начин могу се наћи сви позитивни чланови низа (3), т. ј. може се образовати низ (1) и његов спектар S_I, а из S и S_I може се наћи S_{II}, јер је на основу једначине (4)

$$S_{II}=S_I-S.$$

Из S_{II} могу се наћи сви негативни чланови низа (3). Према томе нашли смо све чланове низа (3).

Ако је спектар негативан, то можемо, не гледајући на знак т. ј. сматрајући да је он позитиван, тражити чланове, али тада на крају рачуна, у резултату морамо променити знаке свим члановима. Остаје сад још да се покаже да је тако образовани спектар функције $f(x)$ са униформним ритмом h дат једначином

$$S=f(10^{-h}).$$

Како $f(x)$ има и позитивне и негативне коефицијенте, то можемо написати $f(x)$ у облику

$$f(x)=f_I(x)-f_{II}(x),$$

где и $f_I(x)$ и $f_{II}(x)$ имају све своје коефицијенте позитивне. Како ова једначина вреди за ма какво x, то ће важити и једначина

$$f(10^{-h})=f_I(10^{-h})-f_{II}(10^{-h}).$$

С друге стране, пошто $f_I(x)$ и $f_{II}(x)$ имају позитивне коефицијенте, то је према раније изнетом (стр. 8)

$$S_I=f_I(10^{-h})$$
$$S_{II}=f_{II}(10^{-h}).$$

Смењујући ове вредности у горњу једначину, добија се

$$f(10^{-h})=S_I-S_{II},$$

а како је и

$$S=S_I-S_{II},$$

то непосредно добијамо

$$S=f(10^{-h}).$$

Познато је да је спектар целих позитивних бројева обострано једнозначан, т. ј. сваком низу одговара за дати ритам који се слаже са тим низом, један спектар, а сваком спектру један низ бројева.

Овде то више није случај. Наиме сваком низу целих бројева одговара један спектар, али сваком спектру одговара један, или, ниједан низ.

У применама то питање нема великог значаја, али је оно од теориског значаја. Такав однос спектра и низа бројева није везан искључиво за спектре различито означених бројева, него у извесном случају и за спектре позитивних бројева. Ако претпоставимо да је p_k број цифара, броја N_k датог низа, па образујемо спектар са ритмом h_k, где је

$$h_k > p_k$$

за свако k, то ће сваки појас почињати са извесним бројем нула. Значи ни у том случају однос није обострано једнозначан, јер спектру чији појасеви (макар један, сем првог) почињу са цифром различном од нуле, не одговара ниједан низ који се слаже са h_k.

Из тога следује да је отсутност обострано једнозначног односа, особина сваког спектра у ком има обавезних празнина (мрачних делова), па били сви бројеви низа позитивни или не. Разлика је само у томе што спектар низа различито означених бројева мора имати обавезних празнина т. ј. мора бити

$$h_k > p_k$$

(јер иначе неће се знати који су чланови позитивни а који не), док низ позитивних бројева, може имати спектар било са обавезним празнинама т. ј.

$$h_k > p_k$$

било без њих т. ј.

$$h_k = p_k .$$

Поставимо сад питање каквом спектру увек одговара низ. Лако је извести закључак да ће сваком спектру, који има као почетне цифре сваког појаса l_k нула, или l_k деветки, одговорати један низ (за низ позитивних бројева могуће су само нуле), где је l_k дато једначином:

$$l_k = h_k - p_k .$$

Број l_k зваћемо ритмом обавезних празнина (rythme lacunaire).

Ови су услови и потребни и довољни.

Све што је речено важи за спектре коначних као и бесконачних низова, само за бесконачне низове треба напоменути да је потребно, ако хоћемо да знамо n бројева низа, познавати n појасева спектра и још прву цифру $n+1$-ог појаса, јер то, да ли је та цифра нула или деветка, утиче на n-ти број низа.

Навешћемо следеће примере.

1) Дат је низ

$$+1, -2, 0, -1, +8, 0, -3, 0, +6, 0, +5.$$

Број цифара чланова низа је

$$p=1,$$

одакле следује да можемо узети униформан ритам

$$h=2.$$

Тада ћемо добити

$$S_I = 1 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 08 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 06 \,|\, 00 \,|\, 05$$
$$S_{II} = 0 \,|\, 02 \,|\, 00 \,|\, 01 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 03 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 00 \,|\, 00,$$

и одузимањем:

$$S = S_I - S_{II} = 0 \,|\, 97 \,|\, 99 \,|\, 99 \,|\, 07 \,|\, 99 \,|\, 97 \,|\, 00 \,|\, 06 \,|\, 00 \,|\, 05.$$

Тај израз претставља спектар уоченог низа са датим ритмом

$$h=2$$

који се слаже са тим низом.

2) Дат је спектар низа

$$S = 2\,|\,97\,|\,99\,|\,92\,|\,06\,|\,00\,|\,04$$

са ритмом

$$h = 2$$

који се слаже с тим низом, што значи да број цифара чланова уоченог низа је

$$p = 1.$$

Одређујући позитивне бројеве низа, добијамо:

$$+3\,,\,.\,,\,.\,,\,.\,,\,+6\,,0\,,+4$$

и S_{I} биће

$$S_{\mathrm{I}} = 3\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,06\,|\,00\,|\,04.$$

Одузимајући S од S_{I} добијамо

$$\begin{array}{l} S_{\mathrm{I}} = 3\,|\,00\,|\,00\,|\,00\,|\,06\,|\,00\,|\,04 \\ S\;\, = 2\,|\,97\,|\,99\,|\,92\,|\,06\,|\,00\,|\,04 \\ \hline S_{\mathrm{II}} = 0\,|\,02\,|\,00\,|\,08\,|\,00\,|\,00\,|\,00, \end{array}$$

а из овог броја следује да су негативни бројеви низа

$$.\,,\,-2\,,\,0\,,\,-8\,,\,.\,,\,.\,,\,.\,,$$

Према томе цео низ биће:

$$+3\,,\,-2\,,\,0\,,\,-8\,,\,+6\,,\,0\,,\,+4.$$

Овде треба напоменути да је нула, иза које следује позитиван број, претстављена спектралним појасом

$$|\,00\,|$$

т. ј. сматра се као позитиван број, а кад је иза ње негативан број претстављена је спектралним појасом

$$|\,99\,|$$

т. ј. сматра се као негативан број. У оба случаја њена апсолутна вредност свакако је нула.

3. Цели бројеви као спектри.

Изнети начин формирања спектра низа било позитивних било мешовито означених бројева, даје спектар који је децималан разломак са коначним (у случају коначног низа) или бесконачним (у случају бесконачног низа) бројем децимала. У даљем излагању више нећемо правити разлике између спектра само позитивних или различито означених бројева, него ћемо увек образовати спектре са ритмом

$$h_k > p_k$$

а ако су сви бројеви низа позитивни, то је само специјалан случај, који ниуколико не мења општи начин расуђивања.

Поставимо сад питање, да ли је могуће образовати спектар који би био цео број. Јасно је да бесконачан низ не може имати таквог спектра, јер би у том случају спектар био цео број са бесконачно много цифара, што је немогуће. За коначан низ то је могуће и то на два начина.

Први начин састоји се у томе што за добивање спектра дописујемо групе цифара G_i, не с десне, но с леве стране од G_0, т. ј. спектар S ће бити

$$S = G_k\, G_{k-1} \ldots G_2\, G_1\, G_0.$$

Други начин састоји се у томе да се спектар образује на ранији начин, и после помножи са 10^P где је P број децималних места у добијеном спектру. Такав спектар

$$S = 10^P \cdot G_0, G_1\, G_2\, G_3 \ldots G_k$$

је такође цео број.

Применимо сад добијене резултате на функције. Јасно је да се цели спектри могу образовати само за полиноме. За случај униформног спектралног ритма h, спектри полинома $f(x)$, степена n биће дати једначинама:

$$S = f(10^h) \qquad \text{(на први начин)}$$
$$S = 10^{nh} f(10^{-h}) \qquad \text{(на други начин)}.$$

За целе спектре образоване на први начин, предлажем назив *инверсних спектара*, због тога што коефицијенти полинома и појасеви спектра иду инверсним редом, а на други начин — *померених спектара*, јер су сви појасеви спектра померени у истом правцу према појасевима спектра образованог на обичан начин.

Пошто смо увели целе спектре, можемо такође увести и још један нов појам у теорију математичких спектара. Наиме, спектар, као и сваки други цео број, може се разложити на аритметичке факторе. Узимајући да је спектрални ритам, помоћу ког је овај спектар образован, униформан и износи h, видећемо да поједини фактори спектра претстављају опет спектре неких полинома, док са другим то није случај.

На пример полином

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

са униформним ритмом $h = 2$, који се слаже са овим полиномом са различито означеним коефицијентима, има као спектар број S

$$S = 9702$$

Његов аритметички фактор 2 не претставља спектар никаквог полинома са ритмом h (јер се полином

$$x - 98$$

не слаже са ритмом $h = 2$, пошто има различито означене двоцифрене коефицијенте, и према томе слаже се тек са ритмом $h = 3$ и већим ритмом), док аритметички фактор 99 претставља спектар полинома

$$f_1(x) = x - 1.$$

Не улазећи у то, да ли полином (f_1), коме одговара такав аритметички фактор (99), претставља фактор првобитног полинома или не, звaћемо овај аритметички фактор (99) спектралним фактором. Лако је видети да ће аритметички фактор спектра, бити спектрални фактор, ако има бар h цифара. Према томе ће дефиниција спектралног фактора бити:

Спектрални фактор неког спектра S, који је цео број, а образован са униформним ритмом h, је сваки аритметички фактор овог броја, који има h или више цифара.

ГЛАВА ДРУГА

Рекурсивно израчунавање математичких спектара.

4. Израчунавање спектара.

Претпоставимо да имамо коначан или бесконачан низ полинома по x,

$$X_1, X_2, X_3, \dots X_s,$$

где је

$$X_i = f_i(x) \qquad (i=1, 2, 3 \dots s)$$

полином по x са целим коефицијентима. Сем тога претпоставимо да постоји рекурсивна веза:

$$X_n = F_n(X_1, X_2, \dots X_{n-1}) \tag{5}$$

где функција F_n (која може да се мења са индексом n), полином степена q_n по аргументима, са коефицијентима α_i полиномима по x чији су коефицијенти позитивни или негативни цели бројеви. Претпоставља се да та рекурсивна веза (5) важи за

$$n=p, \ p+1, \ p+2, \dots s.$$

Очигледно је тада да, знајући функције

$$X_1, X_2, \dots X_{p-1}$$

и везу (5), можемо узастопним израчунавањем одредити сваку од функција X_n.

Нама је циљ да се ово израчунавање, за које из алгебре знамо да је могуће, изведе *аритметички* и то помоћу *математичких спектара.*

Претпоставимо да познати полиноми

$$X_1\,,X_2\,,X_3\,,\ldots X_{n-1},$$

респективно допуштају познате униформне спектралне ритме

$$h_1, h_2, h_3, \ldots\ h_{n-1},$$

и претпоставимо за тренутак да знамо и спектрални ритам h_n који се слаже са полиномом X_n. а који је већи од свих ритама h_1, h_2, $h_3 \ldots$ h_{n-1}, т. ј.

$$h_n > h_i \qquad\qquad (i=1,\,2,\,3\ldots\ n-1)$$

Како се одређује h_n, показаћемо доцније.

Тада се могу образовати спектри полинома

$$X_1, X_2, \ldots\ X_{n-1}, X_n,$$

са ритмом h_n и ти спектри биће

$$S_1, S_2, \ldots\ S_{n-1}, S_n\,.$$

S_i су дати обрасцима

$$S_i = f_i(10^{-h_n}). \tag{6}$$

С друге стране, образац (5) важи за ма какву вредност x, па према томе и за

$$x = 10^{-h_n}.$$

За ту вредност образац (5) постаје

$$f_n\,(10^{-h_n}) = F_n\,(f_1(10^{-h_n}), f_2(10^{-h_n}), \ldots f_{n-1}(10^{-h_n}))$$

или према једначинама (6):

$$S_n = F_n\,(S_1, S_2, \ldots S_{n-1}). \tag{7}$$

Тиме смо показали да кад постоји веза између полинома X_i, то постоји веза истог облика и између њихових спектара S_i.

Пређимо сад на одређивање униформног ритма h_n. Зато одредимо прво горњу границу коефицијената полинома

$$X^{q_n},$$

где је X полином чији је степен једнак степену највећег (по степену) од полинома

$$X_1, X_2, X_3, \ldots X_{n-1},$$

а чији су коефицијенти једнаки модулима највећих, по модулу, одговарајућих коефицијената поменутих полинома. Обележимо са h највећи од ритама

$$h_1, h_2, h_3, \ldots h_{n-1}.$$

Тада, примењујући узастопно на полином X^{q_n} биномни образац, и сматрајући први члан полинома X као први члан бинома, а све остале чланове као његов други члан, долазимо до закључка да је највећи коефицијент полинома X^{q_n} мањи од

$$\left[\binom{q_n}{E\left(\frac{q_n}{2}\right)}\right]^{q_n} 10^{hq_n}$$

где симбол $E(k)$ означује највећи цео број садржан у броју k.

Ако број чланова полинома α_k, који има од свих полинома α_i (коефицијената полинома F_n) највише чланова, обележимо са r_n, а модуо највећег (по модулу) коефицијента свих полинома α_i са a_n, то модуо највећег коефицијента ма ког члана полинома F_n, кад се овај израчуна као полином по x, неће прећи вредност

$$a_n r_n \left[\binom{q_n}{E\left(\frac{q_n}{2}\right)}\right]^{q_n} 10^{h q_n}$$

Ако број чланова полинома F_n означимо са m_n, модуо највећег коефицијента полинома X неће прећи вредност

$$a_n r_n m_n \left[\left\{ \frac{q_n}{E\left(\frac{q_n}{2}\right)} \right\} \right]^{q_n} 10^{hq_n},$$

т. ј. полином X_n допушта униформан ритам

$$(8) \quad h_n = hq_n + E\left[\log a_n r_n m_n + q_n \log \left\{ \frac{q_n}{E\left(\frac{q_n}{2}\right)} \right\} \right] + 2.$$

Како образац (8) важи за свако n почев од p

$$n = p,\ p+1,\ p+2, \ldots\ s,$$

то се из њега види да ће за ове вредности n ритам h_n (ако га одређујемо по обрасцу (8)) бити увек већи од сваког ритма h_k нижег ранга

$$h_n > h_k, \quad n = p, p+1, p+2 \ldots s, \quad k = 1, 2, 3 \ldots n-1\ .$$

Стога образац (8) постаје

$$(9) \quad h_n = h_{n-1}\, q_n + E\left[\log a_n r_n m_n + q_n \log \left\{ \frac{q_n}{E\left(\frac{q_n}{2}\right)} \right\} \right] + 2$$

$$n = p+1,\ p+2, \ldots\ s$$

са претпоставком да је ритам h_p одређен по обрасцу (8), а ритми

$$h_{p+1},\ h_{p+2} \ldots h_{n-1}$$

по обрасцу (9).

Образац (9) даје могућност да се одреди ритам, који се слаже са X_n, *а да и не морамо знати полиноме*

$$X_p,\ X_{p+1} \ldots X_{n-1}$$

као ни њихове спектре.

Тиме смо доказали да је увек могуће, кад постоји рекурсивна веза између полинома X_i, која очигледно вреди за ма какву вредност x, наћи униформни ритам h, такав, да вредност

$x=10^{-h_n}$, која претвара полиноме у њихове спектре, претвори уочену везу између полинома у везу истог облика између одговарајућих спектара.

Према томе, знајући полиноме

$$X_1, X_2, \ldots X_{p-1},$$

који одређују ритме:

$$h_1, h_2, \ldots h_{p-1},$$

и рекурсивну веза (5) за вредности

$$p, p+1, \ldots n,$$

из које се добијају величине:

$$\begin{array}{l} q_p, \; q_{p+1}, \ldots \; q_n, \\ a_p, \; a_{p+1}, \ldots \; a_n, \\ r_p, \; r_{p+1}, \ldots \; r_n, \\ m_p, m_{p+1}, \ldots \; m_n, \end{array}$$

можемо, према обрасцу (9), односно (8), одредити ритме

$$h_p, h_{p+1}, \ldots h_{n-1},$$

и најзад и сам тражени ритам h_n. Затим, пошто образујемо за ритам h_n спектре полинома

$$X_1, X_2, \ldots X_{p-1},$$

т. ј. бројеве

$$S_1, S_2, \ldots S_{p-1},$$

можемо, према обрасцу (7), израчунати спектре

$$S_p, S_{p+1}, \ldots S_n.$$

Ако знамо спектар S_n, знаћемо и полином X_n, а ово израчунавање смо извршили чисто аритметички, јер логаритми, уколико они улазе у формуле, уводе се само ради ознаке, док они стварно показују број цифара, т. ј. један чисто аритметички факт. Исто тако смо извршили израчунавање полинома X_n не одређујући саме полиноме

$$X_p, X_{p+1}, \dots X_{n-1}.$$

Образац (8), односно (9), је најопштији образац за уочени проблем; за поједине специјалне случајеве, у вези са ограничењем облика полинома F_n, могу се поставити специјални обрасци који би давали мањи ритам од онога што се за ове случајеве добија из општег обрасца. Тако образац (8), за случај да је F_n квадратна функција, т. ј. за

$$q_n = 2$$

постаје

$$h_n = 2h + E(\log 4a_n r_n m_n) + 2.$$

У случају, кад у функцију F_n не улазе квадрати аргумената, згоднији је образац

$$h_n = h + h_k + E(\log 4a_n r_n m_n) + 2,$$

где је h_k други по величини од ритама

$$h_1, h_2, \dots h_{n-1}.$$

Ако сем тога, у полиному F_n недостају поједини производи, имаћемо образац

$$(10) \qquad h_n = h_q + h_r + E(\log 4a_n r_n m_n) + 2,$$

где су h_q и h_r ритми полинома X_q и X_r, који задовољавају услов да у полиному F_n постоји производ

$$X_q X_r$$

и да је збир

$$h_q + h_r$$

већи од збира свих осталих парова ритама, који одговарају полиномима, који се множе.

5. Примена на одређивање коефицијената елиптичних функција.

Основне елиптичне функције $Sn\,z$, $Cn\,z$, $dn\,z$, могу се развити у Mac-Laurin-ов ред, јер тачка $z=0$ није сингуларна тачка за ове функције. Кад извршимо то развијање добићемо:

$$Sn\,z = A_0 + A_1 z + A_2 \frac{z^2}{2!} + A_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$Cn\,z = B_0 + B_1 z + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$dn\,z = C_0 + C_1 z + C_2 \frac{z^2}{2!} + C_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

Познато је да су коефицијенти

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \ldots$$

$$B_0,\ B_1,\ B_2, \ldots$$

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots$$

полиноми по модулу k^2 са коефицијентима целим бројевима. Сматраћемо, без потребе да то понављамо, да је тај параметар k^2 исти за све три функције, као и за све елиптичне и помоћне функције које ћемо у току рада навести. Ови коефицијенти су дати следећим обрасцима:

$$(11) \qquad A_n = \left[\frac{d^n}{dz_n} Sn\,z\right]_{z=0}, \quad B_n = \left[\frac{d^n}{dz_n} Cn\,z\right]_{z=0}, \quad C_n = \left[\frac{d^n}{dz_n} dn\,z\right]_{z=0}.$$

Између елиптичних функција постоје познате везе

$$\frac{d}{dz} Sn\,z = Cn\,z\,dn\,z,$$

$$(12) \qquad \frac{d}{dz} Cn\,z = -Sn\,z\,dn\,z,$$

$$\frac{d}{dz} dn\,z = -k^2 Sn\,z\,Cn\,z.$$

Диференцирајући једначине (12) $(n-1)$ пута, примењујући при томе за израз с десне стране Leibnitz-ов образац, и најзад стављајући $z=0$, имаћемо с обзиром на једначине (11), следеће симболичке рекурсивне везе

$$
\begin{aligned}
A_n &= (B+C)^{(n-1)} \\
B_n &= -(A+C)^{(n-1)} \qquad (13)\\
C_n &= -k^2(A+B)^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

где при степеновању треба сменити A^i, B^i, C^i са A_i, B_i, C_i а код првог и последњег члана треба дописати као чиниоце

$$A_0,\ B_0,\ C_0.$$

На први поглед изгледа да овај случај није обухваћен уоченим проблемом, јер овде имамо три низа функција, док тамо имамо само један низ. Међутим ако ставимо

$$A_i = U_{3i} \quad B_i = U_{3i+1} \quad C_i = U_{3i+2},$$

имаћемо само један низ функција U од којих се свака наредна изражава помоћу претходних.

Пошто су у сва три обрасца (13) величине

$$a_n,\ r_n,\ m_n,$$

од којих зависи ритам исте и исти ритам се слаже са три полинома

$$A_0,\ B_0,\ C_0,$$

то ће полиномима

$$A_n,\ B_n,\ C_n,$$

одговарати исти ритам.

Одредимо сад тај ритам. Пошто је

$$a_n = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ E\left(\frac{n-1}{2}\right) \end{matrix} \right\},\ r_n = 1,\ m_n = n,$$

то образац (10) који се може применити у овом случају, постаје

$$(14) \qquad h_n = h_q + h_r + E\left[\log 4n \left\{\begin{matrix} n-1 \\ E\left(\frac{n-1}{2}\right)\end{matrix}\right\}\right] + 2.$$

Приметимо да је тражење ритама h_q и h_r олакшано тиме што за њихове индексе постоји веза

$$q + r = n - 1.$$

Ако образујемо спектре полинома A_i, B_i и C_i по $x = k^2$ са ритмом h_n, који се слаже са свима полиномима

$$A_0,\ A_1, \ldots A_n,$$
$$B_0,\ B_1, \ldots B_n,$$
$$C_0,\ C_1, \ldots C_n,$$

то ће међу спектрима постојати следеће рекурсивне везе:

$$(15) \qquad \begin{aligned} S_n^1 &= (S^2 + S^3)^{(n-1)}, \\ S_n^2 &= -(S^1 + S^3)^{(n-1)}, \\ S_n^3 &= -10^{-h_n}(S^1 + S^2)^{(n-1)}, \end{aligned}$$ L 2

где изложитељи у заградама показују наведени символички начин степеновања, а бројеви

$$S_i^1,\ S_i^2,\ S_i^3,$$

претстављају спектре полинома

$$A_i, B_i, C_i.$$

Помоћу добијених образаца ћемо израчунати по 10 првих коефицијената за сваку од основних елиптичних функција $Sn\,z$, $Cn\,z$ и $dn\,z$. Ради тога потребно је и довољно да знамо да је

$$(16) \qquad A_0 = 0, \quad B_0 = 1, \quad C_0 = 1.$$

Одредимо прво ритме. Из (16) имамо

$$h_0 = 2,$$

а даље према (14) имаћемо

$$
\begin{aligned}
&h_1 = h_0 + h_0 + E(\log 4) + 2 = 6\ ^{*} \\
&h_2 = h_1 + h_0 + E(\log 8) + 2 = 10 \\
&h_3 = h_2 + h_0 + E(\log 24) + 2 = 15 \\
&h_4 = h_3 + h_0 + E(\log 48) + 2 = 20 \\
(17)\qquad &h_5 = h_4 + h_0 + E(\log 120) + 2 = 26 \\
&h_6 = h_5 + h_0 + E(\log 240) + 2 = 32 \\
&h_7 = h_6 + h_0 + E(\log 560) + 2 = 38 \\
&h_8 = h_7 + h_0 + E(\log 1120) + 2 = 45 \\
&h_9 = h_8 + h_0 + E(\log 2520) + 2 = 52\,.
\end{aligned}
$$

При образовању спектара функција A_n, B_n, C_n, за сваки број n можемо узимати одговарајући му ритам, али како у израчунавању спектра наредног полинома улазе спектри претходних, то да не бисмо морали израчунавати више спектара, са различитим ритмима, једног истог полинома, узећемо највећи ритам

$$h_9 = 52$$

и са њим ћемо извршити целокупно израчунавање. Истина имаћемо због тога спектре веће дисперсије, али зато за сваки полином имамо само један његов спектар.

Образујмо сада за уочени ритам спектре полинома

$$A_0,\ B_0,\ C_0,$$

т. ј. бројеве

$$S_0^1 = 0,\quad S_0^2 = 1,\quad S_0^3 = 1,$$

који су, уосталом, независни од ритма, пошто се полиноми своде на константе. Затим, према формулама (15), узастопно ћемо израчунати тражене спектре смењујући у њима раније на-

*) Што се двапут узима исти ритам h_0 супротно ранијој формули, по којој се морају узимати ритми само различитих функција, потпуно је разумљиво кад се зна да ритам h_0 имају три различите функције A_0, B_0, C_0, од којих се по две у обрасцима (13) множе.

ђене спектре. Формуле (15) у развијеном облику су:

$$
\begin{aligned}
S_1^1 &= S_0^2\, S^3 \\
S_1^2 &= -S_0^1\, S_0^3 \\
S_1^3 &= -10^{-52}\, S_0^1\, S_0^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2^1 &= S_0^2\, S_1^3 + S_1^2\, S_0^3 \\
S_2^2 &= -(S_0^1\, S_1^3 + S_1^1\, S_0^3) \\
S_2^3 &= -10^{-52}\,(S_0^1\, S_1^2 + S_1^1\, S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_3^1 &= S_0^2\, S_2^3 + 2S_1^2\, S_1^3 + S_2^2\, S_0^3 \\
S_3^2 &= -(S_0^1\, S_2^3 + 2S_1^1\, S_1^3 + S_2^1\, S_0^3) \\
S_3^3 &= -10^{-52}(S_0^1\, S_2^2 + 2S_1^1\, S_1^2 + S_2^1\, S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4^1 &= S_0^2\, S_3^3 + 3S_1^2\, S_2^3 + 3S_2^2\, S_1^3 + S_3^2\, S_0^3 \\
S_4^2 &= -(S_0^1\, S_3^3 + 3S_1^1\, S_2^3 + 3S_2^1\, S_1^3 + S_3^1\, S_0^3) \\
S_4^3 &= -10^{-52}\,(S_0^1\, S_3^2 + 3S_1^1\, S_2^2 + 3S_2^1\, S_1^2 + S_3^1\, S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_5^1 &= S_0^2\, S_4^3 + 4S_1^2\, S_3^3 + 6S_2^2\, S_2^3 + 4S_3^2\, S_1^3 + S_4^2\, S_0^3 \\
S_5^2 &= -(S_0^1\, S_4^3 + 4S_1^1\, S_3^3 + 6S_2^1\, S_2^3 + 4S_3^1\, S_1^3 + S_4^1\, S_0^3) \\
S_5^3 &= -10^{-52}\,(S_0^1\, S_4^2 + 4S_1^1\, S_3^2 + 6S_2^1\, S_2^2 + 4S_3^1\, S_1^2 + S_4^1\, S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_6^1 &= S_0^2\, S_5^3 + 5S_1^2\, S_4^3 + 10S_2^2\, S_3^3 + 10S_3^2\, S_2^3 + 5S_4^2\, S_1^3 + S_5^2\, S_0^3 \\
S_6^2 &= -(S_0^1\, S_5^3 + 5S_1^1\, S_4^3 + 10S_2^1\, S_3^3 + 10S_3^1\, S_2^3 + 5S_4^1\, S_1^3 + S_5^1\, S_0^3) \\
S_6^3 &= -10^{-52}\,(S_0^1\, S_5^2 + 5S_1^1\, S_4^2 + 10S_2^1\, S_3^2 + 10S_3^1\, S_2^2 + 5S_4^1\, S_1^2 + S_5^1\, S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_7^1 &= S_0^2S_6^3 + 6S_1^2S_5^3 + 15S_2^2S_4^3 + 20S_3^2S_3^3 + 15S_4^2S_2^3 + 6S_5^2S_1^3 + S_6^2S_0^3 \\
S_7^2 &= -(S_0^1S_6^3 + 6S_1^1S_5^3 + 15S_2^1S_4^3 + 20S_3^1S_3^3 + 15S_4^1S_2^3 + 6S_5^1S_1^3 + S_6^1S_0^3) \\
S_7^3 &= -10^{-52}(S_0^1S_6^2 + 6S_1^1S_5^2 + 15S_2^1S_4^2 + 20S_3^1S_3^2 + 15S_4^1S_2^2 + 6S_5^1S_1^2 + S_6^1S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_8^1 &= S_0^2S_7^3 + 7S_1^2S_6^3 + 21S_2^2S_5^3 + 35S_3^2S_4^3 + 35S_4^2S_3^3 + 21S_5^2S_2^3 + 7S_6^2S_1^3 + S_7^2S_0^3 \\
S_8^2 &= -(S_0^1S_7^3 + 7S_1^1S_6^3 + 21S_2^1S_5^3 + 35S_3^1S_4^3 + 35S_4^1S_3^3 + 21S_5^1S_2^3 + \\
&\qquad + 7S_6^1S_1^3 + S_7^1S_0^3) \\
S_8^3 &= -10^{-52}(S_0^1S_7^2 + 7S_1^1S_6^2 + 21S_2^1S_5^2 + 35S_3^1S_4^2 + 35S_4^1S_3^2 + 21S_5^1S_2^2 + \\
&\qquad + 7S_6^1S_1^2 + S_7^1S_0^2)
\end{aligned}
$$

$$S_9^1 = S_0^2 S_8^3 + 8S_1^2 S_7^3 + 28S_2^2 S_6^3 + 56S_3^2 S_5^3 + 70S_4^2 S_4^3 + 56S_5^2 S_3^3 + 28S_6^2 S_2^3 +$$
$$+ 8S_7^2 S_1^3 + S_8^2 S_0^3$$

$$S_9^2 = -(S_0^1 S_8^3 + 8S_1^1 S_7^3 + 28S_2^1 S_6^3 + 56S_3^1 S_5^3 + 70S_4^1 S_4^3 + 56S_5^1 S_3^3 +$$
$$+ 28S_6^1 S_3^2 + 8S_7^1 S_1^3 + S_8^1 S_0^3)$$

$$S_9^3 = -10^{-52}(S_0^1 S_8^2 + 8S_1^1 S_7^2 + 28S_2^1 S_6^2 + 56S_3^1 S_5^2 + 70S_4^1 S_4^2 + 56S_5^1 S_3^2 +$$
$$+ 28S_6^1 S_2^2 + 8S_7^1 S_1^2 + S_8^1 S_0^2).$$ L3

Резултат израчунавања спектара помоћу ових формула биће

$$S_0^1 = 0$$
$$S_1^1 = 1$$
$$S_2^1 = 0$$
$$S_3^1 = \cancel{-1,0|_{51}\,1^*} \qquad -1,|0_{51}\,1^*$$
$$S_4^1 = 0$$
$$S_5^1 = 1,|0_{50}\,14|0_{51}\,1$$
$$S_6^1 = 0$$
$$S_7^1 = -1|0_{49}\,135|0_{49}\,135|0_{51}\,1$$
$$S_8^1 = 0$$
$$S_9^1 = 1,|0_{48}\,1228|0_{48}\,5478|0_{48}\,1228|0_{51}\,1$$

$$S_0^2 = 1 \qquad\qquad S_0^3 = 1$$
$$S_1^2 = 0 \qquad\qquad S_1^3 = 0$$
$$S_2^2 = -1 \qquad\qquad S_2^3 = -0,|0_{51}\,1$$
$$S_3^2 = 0 \qquad\qquad S_3^3 = 0$$
$$S_4^2 = 1,|0_{51}\,4 \qquad\qquad S_4^3 = 0,|0_{51}\,4|0_{51}\,1$$
$$S_5^2 = 0 \qquad\qquad S_5^3 = 0$$
$$S_6^2 = -1,|0_{50}\,44|0_{50}\,16 \qquad\qquad S_6^3 = -0,|0_{50}\,16|0_{50}\,44|0_{51}\,1$$
$$S_7^2 = 0 \qquad\qquad S_7^3 = 0$$
$$S_8^2 = 1,|0_{49}\,408|0_{49}\,912|0_{50}\,64 \qquad\qquad S_8^3 = 0,|0_{50}\,64|0_{49}\,912|0_{49}\,408|0_{51}\,1$$
$$S_9^2 = 0 \qquad\qquad S_9^3 = 0$$

Из добијених спектара можемо добити полиноме који им одговарају. Ако у овима сменимо x са k^2, добићемо следеће вредности за коефицијенте основних елиптичних функција, познате у теорији тих функција:

*) Под O_n подразумева се низ од n нула.

$A_0=0$

$A_1=1$

$A_2=0$

$A_3=-(1+k^2)$

$A_4=0$

$A_5=1+14k^2+k^2$

$A_6=0$

$A_7=-(1+135k^2+135k^4+k^6)$

$A_8=0$

$A_9=1+1228k^2+5478k^4+$
$+1228k^6+k^8$.

$B_0=1$

$B_1=0$

$B_2=-1$

$B_3=0$

$B_4=1+4k^2$

$B_5=0$

$B_6=-(1+44k^2+16k^4)$

$B_7=0$

$B_8=1+408k^2+912k^4+64k^6$

$B_9=0$

$C_0=1$

$C_1=0$

$C_2=-k^2$

$C_3=0$

$C_4=4k^2+k^4$

$C_5=0$

$C_6=-(16k^2+44k^4+k^6)$

$C_7=0$

$C_8=64k^2+912k^4+408k^6+k^8$

$C_9=0.$

Приметимо за ово израчунавање да је извршено само са претпоставком да се знају

$$A_0,\ B_0,\ C_0,$$

без икаквих података о функцијама

$$A_i,\ B_i,\ C_i.$$

Изгледа да смо се послужили податком да су те функције полиноми по k^2, са коефицијентима целим бројевима. Али се тај податак може добити из образаца (13), из којих се види да су функције

$$A_i,\ B_i,\ C_i.$$

полиноми по k^2 са целим коефицијентима.*

---

* Према томе потребно је знати само обрасце (12), тако да се проблем може формулисати и на овај начин: то је тражење коефицијената развијања у Mac-Laurin-ов ред оних функција, које задовољавају једначине (12), а које као прве коефицијенте ових редова имају дате вредности A_0, B_0, C_0.

На исти начин можемо израчунати коефицијенте других елиптичних, као и Weierstrass-ових помоћних елиптичних функција.

Уочимо, као пример, функцију Sn^2z, чије развијање у Mac-Laurin ов ред даје

$$Sn^2z = L_0 + L_1 z + L_2 \frac{z^2}{2!} + L_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Коефицијенти развијања ове функције дате су обрасцем:

$$L_n = \left[\frac{d^n}{dz^n} Sn^2 z \right]_{z=0} .$$

Како је

$$\frac{d^n}{dz^n} Sn^2 z = 2 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (Sn\, z Sn' z),$$

то примењујући на израз са десне стране Leibnitz-ов образац и стављајући $z=0$ добићемо

$$(18) \qquad L_n = 2(A + A_1)^{(n-1)}$$

где при степеновању треба сменити A^k са A_k, A_1^k са A_{k+1} и сем тога првом и последњем члану треба дописати A_1 односно A_0.

Одредимо сад ритам за L_n, како би поред везе између коефицијената L_n постојала исто таква веза између њихових спектара. Раније смо показали да се са функцијом

$$(A+B)^{(n)}$$

слаже ритам h_{n+1}, одређен према обрасцу (10). Уочимо сад функцију

$$(A+A)^{(n)} ,$$

како су све величине, које улазе у образац за одређивање ритма, исте за одговарајуће функције A и B, то и ова функција мора допуштати ритам h_{n+1}. Упоређујући ову последњу функцију са функцијом

$$(A+A_1)^{(n-1)}$$

види се да прва функција има све своје коефицијенте по модулу веће (или једнаке) модулима одговарајућих коефицијената друге, те према томе друга функција допушта исто тако ритам h_{n+1}. Према томе ће функција L_n допуштати униформни ритам

$$H_n = h_{n+1} + E(\log 2) + 1,$$

т. ј.

$$H_n = h_{n+1} + 1.$$

Ако сад образујемо спектре са овим ритмом, који се, осим тога, слаже и са сваким од полинома

$$A_0, A_1, \ldots A_n,$$

то ће између спектара постојати веза

$$Q_n = 2\,(S^1 + S_1^1)^{(n-1)},$$

где је Q_n спектар коефицијента L_n, а степеновање у загради има напред наведено симболично значење.

Помоћу ових образаца не може се одредити коефицијент L_0, који, у осталом, има вредност

$$L_0 = [Sn^2 z]_{z=0} = A_0^2 = 0.$$

На први поглед изгледа да образац (18) није рекурсиван, пошто за одређивање L_n не служе коефицијенти L_i нижег ранга него коефицијенти

$$A_0, A_1, \ldots A_n.$$

Слични су случајеви и са другим функцијама, које ћемо анализирати, али ипак све те везе могу се сматрати рекурсивним. То ћемо показати пошто редом испитамо све те функције.

Пређимо сад на функцију

$$Z(z) = k^2 \int_0^z Sn^2 z\, dz\,.$$

Њено развијање у Mac-Laurin ов ред даје

$$Z(z) = M_0 + M_1 z + M_2 \frac{z^2}{2!} + M_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

где коефицијенти имају вредност

$$M_n = \left[\frac{d^n}{dz^n} Z\right]_{z=0}.$$

Како је

$$\frac{d^n}{dz^n} Z = k^2 \frac{d^n}{dz^n} \int_0^z Sn^2 z dz = k^2 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} Sn^2 z,$$

то стављајући у последњу формулу $z=0$ добијамо

$$(19) \qquad M_n = k^2 L_{n-1}$$

и сви се коефицијенти M_i могу одредити помоћу коефицијената L_i нижег ранга. Како је пак

$$\frac{d^n}{dz^n} Z = k^2 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} Sn^2 z = 2k^2 \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} (Sn\, z\, Sn' z),$$

то примењујући Leibnitz ов образац и стављајући $z=0$, добија се веза

$$M_n = 2k^2(A + A_1)^{(n-2)}, \tag{20}$$

где све ознаке имају пређашње значење.

Из формуле (19) се види да ће ритам који се слаже са M_n бити

$$K_n = H_{n-1}$$

или кад се стави вредност за H_{n-1} из раније формуле

$$K_n = h_n + 1.$$

Кад за овај ритам образујемо спектре, (а тај ритам ће се, сем тога, слагати са полиномима

$$L_0,\ L_1,\ \ldots\ L_{n-1}$$

односно са

$$A_0,\ A_1,\ \ldots\ A_{n-1}),$$

спектри ће бити везани једначином

$$P_n = 10^{-K_n}\, Q_{n-1}$$

или

$$P_n = 2\,.\,10^{-K_n}\,(S^1 + S_1^1)^{(n-2)}$$

где је P_n спектар полинома M_n.

Коефицијент M_0 не може се одредити из ових веза, уосталом, његова је вредност

$$M_0 = [Z]_{z=0} = k^2 \int_0^0 Sn^2 z\, dz = 0.$$

Коефицијент M_1 може се одредити из формуле (19) која даје

$$M_1 = k^2 L_0 = 0,$$

а сви остали коефицијенти M_i из формула (19) или (20), односно из формула за спектре, које им одговарају.

Израчунајмо помоћу обрасца (20) 8 првих коефицијената функције $Z(z)$. Образац за ритам биће

$$K_7 = h_7 + 1;$$

ако узмемо вредност за h_7 из формула (17) т. ј. $h_7 = 38$ добићемо $K_7 = 39$.

Са овим ћемо ритмом имати следеће вредности за спектре S_i^1 полинома A_i, помоћу којих се одређују спектри P_i полинома M_i;

$$S_0^1 = 0 \quad S_1^1 = 1 \quad S_2^1 = 0 \quad S_3^1 = -1,/0_{38}\,1$$
$$S_4^1 = 0 \quad S_5^1 = 1,/0_{37}\,14/0)_{38}1 \quad S_6^1 = 0.$$

Рекурсивне релације за спектре у развијеном облику биће

$$P_2 = 2\,.\,10^{-39}\, S_0^1 S_1^1$$
$$P_3 = 2\,.\,10^{-39}\, [S_0^1 S_2^1 + (S_1^1)^2]$$
$$P_4 = 2\,.\,10^{-39}\, [S_0^1 S_3^1 + 3 S_1^1 S_2^1]$$
$$P_5 = 2\,.\,10^{-39}\, [S_0^1 S_4^1 + 4 S_1^1 S_3^1 + 3(S_2^1)^2]$$
$$P_6 = 2\,.\,10^{-39}\, (S_0^1 S_5^1 + 5 S_1^1 S_4^1 + 10\, S_2^1 S_3^1)$$
$$P_7 = 2\,.\,10^{-39}\, [S_0^1 S_6^1 + 6 S_1^1 S_5^1 + 15 S_2^1 S_4^1 + 10 (S_3^1)^2]$$

Резултат израчунавања спектара је

$$P_2 = 0, \quad P_3 = 0,/0_{38}\,2, \quad P_4 = 0, \quad P_5 = -0,/0_{38}\,2/0_{38}\,2, \quad P_6 = 0,$$
$$P_7 = 0,/0_{37}\,32/0_{36}\,208/0_{37}\,32.$$

Полиноми што одговарају тим спектрима су

$$M_0 = 0 \quad M_1 = 0 \quad M_2 = 0 \quad M_3 = 2k^2 \quad M_4 = 0$$
$$M_5 = -(2k^2 + 2k^4) \quad M_6 = 0 \quad M_7 = 32k^2 + 208k^4 + 32k^6.$$

И овим је задатак довршен.

Уочимо сад Weierstrass-ове помоћне елиптичне функције. Функција $Al(z)$ дефинисана је обрасцем

$$Al(z) = e^{-\int_0^z Z(z)\,dz}\;.$$

Развијање у Mac-Laurin-ов ред даје

$$Al(z) = N_0 + N_1 z + N_2 \frac{z^2}{2!} + N_3 \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

где су коефицијенти дати једначином

$$N_n = \left[\frac{d^n}{dz^n} Al(z)\right]_{z=0}.$$

Како је

$$\frac{d}{dz} Al(z) = -Z(z) Al(z)$$

то, диференцирајући ову једначину $(n-1)$ пута, примењујући Leibnitz-ов образац и најзад стављајући $z=0$ добићемо симболички образац

$$(21) \qquad N_n = -(M+N)^{(n-1)}.$$

Пошто је таква рекурсивна веза истог облика као и код основних елиптичних функција, то ће образац за ритам l_n, који се слаже са полиномом N_n, бити сличан формули (14),

$$l_n = K_q + l_r + E\left[\log 4n \binom{n-1}{E\frac{n-1}{2}}\right] + 2,$$

где су K_q односно l_r ритми оних полинома M_q, односно N из $O\ N_n$
обрасца (21) код којих збир ритама $K_n + l_r$, који одговара члану $M_q\ N_r$, је већи од збирова ритама свих осталих полинома, који се међусобно множе. Тражење тих ритама олакшано је тим што између њихових индекса постоји веза

$$q + r = n - 1.$$

Ако за ритам l_n образујемо одговарајуће спектре, а овај ће се ритам сем тога слагати са полиномима

$$M_0,\ M_1, \ldots M_{n-1}$$
$$N_0,\ N_1, \ldots N_{n-1},$$

добићемо за те спектре везу истог облика као што је образац (21) т. ј.

$$T_n = -(P+T)^{(n-1)},$$

где је T_n спектар полинома N_n.

Коефицијент N_0 се не може одредити помоћу ове везе; уосталом, његова је вредност

$$N_0 = [Al(z)]_{z=0} = e^{-\int_0^0 Z(z)\,dz} = 1.$$

Уочимо сад друге Weierstrass-ове помоћне елиптичне функције $Al_1(z)$, $Al_2(z)$, $Al_3(z)$. Оне су дефинисане једначинама:

$$Al_1(z) = Snz\, Al(z),$$
$$Al_2(z) = Cnz\, Al(z),$$
$$Al_3(z) = dnz\, Al(z).$$

Развијање ових функција у Mac-Laurin-ов ред даје:

$$Al_1(z) = N_0^1 + N_1^1 z + N_2^1 \frac{z^2}{2!} + N_3^1 \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$Al_2(z) = N_0^2 + N_1^2 z + N_2^2 \frac{z^2}{2!} + N_3^2 \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$Al_3(z) = N_0^3 + N_1^3 z + N_2^3 \frac{z^2}{2!} + N_3^3 \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

где су коефицијенти дати обрасцима:

$$N_n^1 = \left[\frac{d^n}{dz^n} Al_1(z)\right]_{z=0} \qquad N_n^2 = \left[\frac{d^n}{dz^n} Al_2(z)\right]_{z=0}$$
$$N_n^3 = \left[\frac{d^n}{dz^n} Al_3(z)\right]_{z=0}.$$

Према томе, а обзиром на обрасце који дефинишу ове функције, имаћемо следеће симболичке везе међу коефицијентима:

$$N_n^1 = (A+N)^{(n)} ,$$
$$N_n^2 = (B+N)^{(n)} ,$$
$$N_n^3 = (C+N)^{(n)} .$$

Очигледно је да ће ритам за функције N_n^1, N_n^2 и N_n^3 истог ранга бити исти, а за његово одређивање ћемо се послужити обрасцем (10). Како је за овај случај

$$h_q = h_q , \quad h_r = l_r , \quad a_n = \binom{n}{E\left(\frac{n}{2}\right)} , \quad r_n = 1, \quad m_n = n+1,$$

то је ритам дат обрасцем

$$l_n^1 = l_n^2 = l_n^3 = h_q + l_r + E\left[\log 4(n+1)\binom{n}{E\left(\frac{n}{2}\right)}\right] + 2,$$

где индекси q и r имају раније значење, а задовољавају услов

$$q + r = n.$$

Ако са овим ритмом образујемо спектре (а ритам ће се слагати са полиномима:

$$A_0, A_1, \ldots A_n ,$$
$$B_0, B_1, \ldots B_n ,$$
$$C_0, C_1, \ldots C_n ,$$
$$N_0, N_1, \ldots N_n),$$

то ћемо за спектре имати следеће везе:

$$T_n^1 = (S^1 + T)^{(n)} ,$$
$$T_n^2 = (S^2 + T)^{(n)} ,$$
$$T_n^3 = (S^3 + T)^{(n)} .$$

Јасно је да се помоћу тих образаца не могу одредити коефицијенти N_0^1, N_0^2 и N_0^3; ови коефицијенти имају, уосталом, вредности:

$$N_0^1 = [Al_1(z)]_{z=0} = SnO\, Al(O) = A_0 N_0 = 0,$$
$$N_0^2 = [Al_2(z)]_{z=0} = CnO\, Al(O) = B_0 N_0 = 1,$$
$$N_0^3 = [Al_3(z)]_{z=0} = dnO\, Al(O) = C_0 N_0 = 1.$$

Тиме је и тај низ задатака довршен.

Показаћемо сад зашто се везе, које не изгледа да су рекурсивне, ипак могу сматрати као такве. Ако посматрамо коефицијенте свих девет уочених функција и ставимо:

$$A_i = U_{9i} \quad B_i = U_{9i+1} \quad C_i = U_{9i+2} \quad L_i = U_{9i+3},$$
$$M_i = U_{9i+4} \quad N_i = U_{9i+5} \quad N_i^1 = U_{9i+6} \quad N_i^2 = U_{9i+7} \quad N_i^3 = U_{9i+8},$$

добићемо низ функција U, где се свако U одређује помоћу функција U нижег ранга, а спектрални ритам за тражену функцију U, који се добија помоћу ранијих формула, слаже се са свим оним функцијама U нижег ранга, које одређују тражену функцију U. Напоменућемо још да је за цео проблем потребно и довољно да знамо само функције:

$$U_0 = A_0 \quad U_1 = B_0 \quad U_2 = C_0 \quad U_3 = L_0 \quad U_4 = M_0$$
$$U_5 = N_0 \quad U_6 = N_0^1 \quad U_7 = N_0^2 \quad U_8 = N_0^3.$$

Сама чињеница што су све функције U полиноми по k^2, и што су коефицијенти појединих функција U цели бројеви, може се извести из облика рекурсивних формула, које смо извели. Јасно је, дакле, да су све овде употребљене везе за испитане функције као и за њихове спектре рекурсивне.

ГЛАВА ТРЕЋА

Проблеми о полиномима.

6. Распадљивост полинома са целим коефицијентима. — Циљ нам је да дамо чисто аритметичку методу, погодну за примене, за разлагање полинома са целим коефицијентима на полиноме такође са целим коефицијентима.

За то разлагање постоји *Kronecker*-ова метода[10]. Она је мешовита, *аритметичко-алгебарска*. Наиме *потребни* услови су *аритметички*, а *довољни* су *алгебарски*. Ови су последњи изражени у врло незгодном облику (као алгоритам) тако да их ни сам *Kronecker* не зове *довољним* условима, но каже да тај алгоритам даје могућност да се разложе полиноми „in endlich viele Schritten“.

Друга метода, која је скоро објављена у једном мом раду[12], је спектрална метода, она је чисто *аритметичка* и ниједан њен услов није у облику алгоритма. Недостатак који она има је тај што се после разлагања фактори — полиноми, добијају уређени, не по степенима од x, но по степенима од $(x - l)$ где је l извесна константа. Та чињеница, која с теориског гледишта не претставља никакав недостатак, у применама претставља незгоду, јер се такво разлагање не може применити напр. на извесне проблеме из теорије бројева. Проналазак спектара низа различито означених бројева је омогућио да се тај недостатак отклони. Тако ћемо овде изнети нову спектралну методу која је у ствари усавршена ранија спектрална метода.

Напоменимо још да се помоћу *Kronecker*-ове методе своди разлагање полинома на разлагање извесног броја целих бројева, док се помоћу спектралне методе своди исти проблем на разлагање *једног јединог* целог броја.

Нека је дат полином $f(x)$ степена n, са целим коефицијентима A_i, и њега треба разложити на факторе — полиноме $f_i(x)$, који такође имају целе коефицијенте.

Пошто су познати коефицијенти A_i полинома $f(x)$, то се може наћи горња граница модула корена, а кад се зна горња граница модула корена, то се може наћи граница коју не може прећи ниједан коефицијент (по модулу) фактора, са целим коефицијентима, полинома $f(x)$ и без познавања самих тих фактора—полинома. Према томе је могуће наћи униформни ритам h, који се слаже са свима тим факторима. Исто тако пошто знамо да број фактора не може бити већи од n, а степен појединих фактора мањи је од n, док модули њихових коефицијената не прелазе извесну нађену границу, то и производ таквих фактора мора за модуле својих коефицијената такође имати извесну границу која се може одредити. Наравно да се та граница може непосредно добити пошто знамо полином $f(x)$ који је *у ствари* производ тих фактора, али ми сад сматрамо да је он непознат и тражимо границу за коефицијенте полинома производа из полинома фактора који допуштају униформни ритам h, и који, кад се помноже, дају полином n-тог степена. Према томе је увек могуће наћи униформни ритам H, који се слаже са *производом таквих фактора*. Детаљније о бројевима h и H говорићемо на крају овог одељка, где ћемо дати начин за израчунавање тих бројева.

Пошто су овако дефинисани појмови поступак за разлагање полинома је следећи:

Да би се полином $f(x)$ са целим коефицијентима разложио на факторе $f_i(x)$, нераспадљиве полиноме исте врсте, треба образовати цели инверсни) спектар S, полинома $f(x)$, са униформним ритмом H т. ј. број*

$$S = f(10^H).$$

Затим га разложити на спектралне факторе S_i ширине H са празнинама (обавезним мрачним деловима) ширине $H—h$.

*) Исто тако место целог инверсног, може се употребити цели померени спектар, при чему се доказ врло мало мења.

Бројеви S_i биће спектри нераспадљивих фактора полинома $f(x)$ т. ј. спектри полинома $f_i(x)$, а кад су познати спектри познати су и сами полиноми.

Показаћемо да су ови услови у исти мах и *потребни* и *довољни*.

Како је $f(x)$ дељиво са сваким својим фактором $f_i(x)$, и како $f_i(x)$ има целе коефицијенте, и допушта ритам h, то спектар S_i мора бити фактор спектра S, јер су ти спектри у ствари бројне вредности одговарајућих полинома за $x = 10^H$, и то спектрални фактор горе наведених особина.

Услов је дакле *потребан*.

С друге стране, сваком спектру S_i, одговара по један полином $f_i(x)$ са целим коефицијентима, а производу свих полинома $f_i(x)$, пошто је ритам H довољно велик, одговараће производ свих спектара S_i, то јест број S. Како производ свих полинома $f_i(x)$ допушта ритам H, то се добијају две функције $f(x)$ и $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$ са целим коефицијентима, које имају исти спектар S за исти ритам H. Како тај ритам допуштају обе функције, то је ово према теорији математичких спектара могуће само тако, ако је

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} f_i(x).$$

Услов је дакле и *довољан*.

Очигледно је да су полиноми $f_i(x)$ нераспадљиви, ако се има на уму да је разлагање броја S на спектралне факторе горњих особина вршено догод је оно могуће.

Покажимо сад како се одређују бројеви h и H.

Полином $f(x)$ може се написати у облику

$$f(x) = A_0 \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \tag{22}$$

а према томе сваки од полинома фактора $f_i(x)$ мора имати облик

$$(23) \qquad f_i(x) = B_i \prod_{k=m_i}^{r_i} (x - \alpha_k)$$

где су α_k корени полинома $f(x)$, B_i делитељ коефицијента A_0 $(r_i - m_i + 1)$, степен полинома $f_i(x)$ који има за корене корене полинома $f(x)$ почев од m_i-тог, па до r_i-тог.

Модули коефицијената полинома $f_i(x)$ не могу бити већи од модула коефицијената полинома

$$P_i(x) = B_i \prod_{k=m_i}^{r_i} (x + |\alpha_k|)$$

што следује из очигледног става да модули коефицијената производа полинома могу се само повећати (а никако смањити кад се место коефицијената полинома фактора од којих је састављен производ ставе њихови модули. Из исто тако очигледног става, да се коефицијенти производа од више полинома, чији су сви коефицијенти позитивни, неће смањити, ако неке од тих коефицијената повећамо, излази да модули коефицијената полинома $f_i(x)$, неће бити већи од одговарајућих коефицијената полинома

$$Q_i(x) = B_i \prod_{k=m_i}^{r_i} (x + l) = B_i \, (x + l)^{r_i - m_i + 1}$$

где је l горња граница модула корена полинома $f(x)$ (она се може наћи рецимо по Mac-Laurin-овој методи). Ако степен полинома $f_i(x)$ означимо са p_i, т. ј. ставимо

$$r_i - m_i + 1 = p_i,$$

то ћемо добити

$$Q_i(x) = B_i \, (x + l)^{p_i} .$$

Како је највећи коефицијент овог полинома мањи од

$$B_i \begin{pmatrix} p_i \\ E\left(\frac{p_i}{2}\right) \end{pmatrix} l^{p_i}$$

и како је за све ове полиноме

$$B_i \leqslant A_0$$
$$p_i \leqslant n-1$$

то сви коефицијенти свих полинома $Q_i(x)$, па према томе и свих полинома $P_i(x)$ и свих полинома $f_i(x)$, не прелазе по модулу величину

$$A_0 \begin{pmatrix} n-1 \\ E\left(\frac{n-1}{2}\right) \end{pmatrix} l^{n-1}.$$

Из тога следује да ће сви полиноми $f_i(x)$ допуштати униформни спектрални ритам

$$h = E(L_1) + 2 \tag{24}$$

где је

$$L_1 = \log \binom{n-1}{\nu_1} + (n-1)\log[A_0 + |A_k|] - (n-2)\log A_0, \tag{25}$$

где је

$$\nu_1 = E\left(\frac{n-1}{2}\right) \tag{26}$$

а A_k највећи (по модулу) коефицијент полинома $f(x)$. На тај начин број h је одређен.

Пређимо сад на одређивање униформног ритма H, који се слаже са производом свих полинома $f_i(x)$. Пошто сваки полином $f_i(x)$ допушта ритам h, то су сви његови коефицијенти мањи по модулу од коефицијената полинома

$$R_i(x) = 10^h (x+1)^{p_i}$$

чији су сви коефицијенти позитивни. Према томе ће производ свих полинома $f_i(x)$ т. ј. производ полинома

$$f_1(x) f_2(x) \ldots . f_m(x)$$

имати коефицијенте мање од одговарајућих коефицијената производа

$$R_1(x) R_2(x) \ldots . R_m(x)$$

т. ј. полинома

$$10^{mh}(x+1)^{p_1+p_2+\ldots.+p_m}$$

где је m број полинома на које се $f(x)$ распада. Како је

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n$$

а

$$m \leqslant n$$

то ће производ

$$\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$$

имати коефицијенте по модулу мање од коефицијената полинома

$$10^{nh}(x+1)^n$$

чији је највећи коефицијент

$$10^{nh}\binom{n}{E\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Према томе ће производ $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$ допуштати униформни ритам

$$H = nh + E(L_2) + 2 \tag{27}$$

где је

$$L_2 = \log\binom{n}{\nu_2} \tag{28}$$

а

$$\nu_2 = E\left(\frac{n}{2}\right) \tag{29}$$

Тиме је одређивање бројева h и H завршено.

Напоменимо да се разлагање полинома са рационалним коефицијентима своди на разлагање полинома са целим коефицијентима. Према томе се спектрална метода може применити и на разлагање полинома у области апсолутне рационалности.

Ради веће јасности решимо следећи пример.

Пример.

Разложити полином

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

на факторе, нераспадљиве полиноме са целим коефицијентима.

Одредимо прво бројеве h и H. За уочени случај биће

$$A_0 = 1 \qquad |A_k| = 7 \qquad n = 4,$$

стога према обрасцима (26) (25) (24) имамо

$$\nu_1 = E\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \qquad L_1 = \log\binom{3}{1} + 3\log 8 - 2\log 1 = 3, \ldots .$$

$$h = 3 + 2 = 5,$$

а према обрасцима (29) (28) (27) добија се

$$\nu_2 = E\left(\frac{4}{2}\right) = 2 \qquad L_2 = \log\binom{4}{2} = 0, \ldots$$

$$H = 4 \,.\, 5 + 2 = 22.$$

Према томе спектар S биће

$$S = f(10^{22}) = 10_{21}\, 50_{21}\, 29_{21}\, 30_{21}\, 2.$$

Овај спектар треба разложити на спектралпе факторе са појасевима ширине $H = 22$ цифре и са празнинама од $H - h = 17$ цифара. Ток разлагања је

$$\begin{array}{r|l}
10_{21}\, 50_{21}\, 29_{21}\, 30_{21}\, 2 & 10_{21}\, 19_{22} \\
10_{21}\, 29_{21}\, 8 & 10_{21}\, 29_{21}\, 8 \\
1 &
\end{array}$$

Како нађени фактори задовољавају све постављене услове то су

$$S_1 = 1 \mid 0_{21}\, 1 \mid 9_{22} \qquad S_2 = 1 \mid 0_{21}\, 2 \mid 9_{21}\, 8$$

спектри нераспадљивих фактора — полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а сами ти полиноми, према поступку изнетом у првој глави, биће

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 1. \qquad f_2(x) = x^2 + 3x - 2.$$

Овим је пример завршен.

7. Метода за тражење највећег заједничког делитеља полинома са целим коефицијентима.

Спектрална метода може се применити и на тражење највећег заједничког делитеља датог скупа полинома. Она је од важности са теориског гледишта, јер се алгебарски проблем своди на чисто аритметички. Та метода нема практичне важности зато што за тај проблем постоји врло једноставна алгебарска метода.

Тај се проблем може решавати помоћу разлагања сваког полинома на факторе, па се тако може применити све што је речено у првом делу ове главе са малом рачунском олакшицом (наиме место множења нераспадљивих фактора — полинома имаћемо множење одговарајућих спектара).

Међутим, за исти проблем може се поставити и једна директна метода.

Нека су $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ полиноми са целим коефицијентима, са претпоставком да су коефицијенти уз највећи степен од x позитивни и да коефицијенти сваког полинома посебице немају заједничких фактора. Ова два последња услова ниуколико не ограничавају произвољност полинома.

Спектрална метода састоји се у следећем:

Треба на основу ранијих образаца одредити бројеве h и H тако да се они слажу са свима полиномима. Затим треба образовати на напред изложени начин спектре $S_1, S_2, \ldots S_m$, и наћи њихов највећи заједнички аритметички делитељ S*). Тај ће број S бити само онда спектар највећег заједничког делитеља, ако његови појасеви немају заједничких фактора и имају празнине бар од $H-h$ цифара. Ако то није случај, спектар највећег заједничког делитеља биће број Σ, једнак највећем аритметичком фактору броја S, који задовољава горње услове.

Ови су услови у исти мах и потребни и довољни.

Да појасеви спектра највећег заједничког делитеља не могу имати заједничких фактора, види се из тога што би онда сви полиноми $f_i(x)$ морали имати те константне факторе, а то се противи претпоставци.

Доказаћемо да је Σ спектар највећег заједничког делитеља, а тиме ће бити доказано целокупно горње тврђење.

---

*)Што се тиче начина на који се добија S, приметићемо да, ако је број полинома 2, S се може наћи и методом узастопног дељења.

Пошто су сви спектри S_i дељиви са бројем Σ, а овај број задовољава горње услове, то ће полином $\varphi(x)$, који му одговара, бити фактор свих полинома $f_i(x)$.

Сетимо се сада да највећи заједнички делитељ полинома садржи све нераспадљиве заједничке факторе-полиноме, а из тога следује да је он вишег степена од свих осталих делитеља. Његов ће спектар имати, према томе, више појасева него спектар ма ког другог заједничког делитеља, што значи да ће он бити највећи број између спектара свих делитеља.

Како је Σ једини број који задовољава све те услове, то је он спектар највећег заједничког делитеља. Овим је доказ завршен.*)

Ради очигледнијег приказивања директне методе за тражење највећег заједничког делитеља полинома навешћемо пример.

Пример.

Наћи највећи заједнички делитељ полинома

$$f_1(x)=2x^3+20x^2+63x+65$$

$$f_2(x)=4x^3+30x^2+76x+65.$$

Прво морамо према формулама (26) (25) (24) потражити h за сваки полином па онда узети највећу вредност за h.

За први полином биће

$$v_1=E\left(\frac{2}{2}\right)=1 \quad L_1=\log\binom{2}{1}+2\log(2+65)-\log 2=3,\ldots.$$

$$h=3+2=5.$$

За други полином биће

*) Приметимо да се на сличан начин спектрална метода може применити и на тражење најмањег заједничког садржатеља скупа полинома. За тај проблем не постоји једноставна алгебарска метода тако да питање има и практичног интереса.

$$\nu_1=E\left(\frac{2}{2}\right)=1 \quad L_1=\log\binom{2}{1}+2\log(4+76)-\log 4=3,\ldots.$$

$$h=3+2=5.$$

Према томе за h се узима

$$h=5.$$

Пошто је степен оба полинома исти ($n=3$) то се тражење H према обрасцима (29) (28) (27) може одмах извршити за оба полинома (иначе би требало одредити H за сваки полином засебно и затим узети за H највећу нађену вредност). Према обрасцима (29) (28) (27) добија се

$$\nu_2=E\left(\frac{3}{2}\right)=1 \quad L_2=\log\binom{3}{1}=0,\ldots \qquad H=3\,.\,5+2=17.$$

Сада образујмо спектре са униформним ритмом $H=17$

$$S_1=f_1(10^{17})=2\,|\,0_{15}\,20\,|\,0_{15}\,63\,|\,0_{15}\,65$$

$$S_2=f_2(10^{17})=4\,|\,0_{15}\,30\,|\,0_{15}\,76\,|\,0_{15}\,65$$

Потражимо највећи заједнички делитељ бројева S_1 и S_2. Рачун даје

$$\begin{array}{cc|c} 2\,0_{15}\,20\,0_{15}\;63\,0_{15}\,65 & 4\,0_{15}\,30\,0_{15}\,76\,0_{15}\,65 & 10\,0_{15}\,50\,0_{15}\,65 \\ 20_{15}\,1 & 40_{15}\,1 & \end{array}$$

Према томе је

$$S=10\,/\,0_{15}\,50\,/\,0_{15}\,65$$

највећи заједнички делитељ бројева S_1 и S_2. Он истина задовољава услов о празнинама, т. ј. да празнине морају бити ширине од $H-h=12$ цифара, али његови појасеви имају заједнички фактор. Зато морамо наћи тај фактор и поделити њиме број S.

Ток рачуна је овај:

$$\begin{array}{rrr|l} 10 & 50 & 65 & 5 \\ 2 & 10 & 13 & \end{array}$$

$$10 \mid 0_{15}\, 50 \mid 0_{15}\, 65 : 5 = 2 \mid 0_{15}\, 10 \mid 0_{15}\, 13.$$

Према томе спектар Σ највећег заједничког делитеља је

$$\Sigma = 2 \mid 0_{15}\, 10 \mid 0_{15}\, 13,$$

јер је то највећи фактор броја S који задовољава све наведене услове. Њему одговара полином

$$\varphi(x)=2x^2+10x+13$$

и то је највећи заједнички делитељ полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

Примена математичких спектара на теорију бројева.

8. Класе које не садрже простих бројева.

Посматрајмо класу бројева следеће структуре

$$(30) \qquad N_1\, c_n\, N_2\, c_n\, N_3\, c_n \ldots N_{k-1}\, c_n\, N_k \qquad k \geqslant 3$$

$$n = 0, 1, 2 \ldots.$$

где су N_i макакви бројеви са истим бројем цифара p, а c_n је низ од n цифара, на неким местима израза (30) су све ове цифре нуле, тако да имамо низ од n узастопних нула $00 \ldots 00 = 0_n$, док су на другим све ове цифре деветке, тако да имамо низ од n узастопних цифара 9 $99 \ldots 99 = 9_n$. Број n варира од 0 до ∞.

За сваку ћемо класу бројева структуре (30) доказати следећу теорему:

За сваку класу бројева (30) могу се одредити три цела позитивна броја n_1, n_2, n_3. Ако се деси да се специјалан број уочене класе, који одговара вредности $n = n_1$, сматран као спектар са ритмом $H = n_1 + p$, може разложити на спектралне факторе са празнинама ширине n_2, то ниједан број те класе који одговара вредностима $n \geqslant n_3$ није прост.

Да бисмо то доказали, образујмо полином

$$(31) \quad f(x) = P_1 x^{k-1} + P_2 x^{k-2} + P_3 x^{k-3} + \cdots + P_{k-1}\, x + P_k$$

где је $P_i = N_i$ ако низу цифара N_i претходе нуле и следују за њим нуле, $P_i = N_i + 1$ ако низу цифара N_i претходе нуле а следују за њим деветке, $P_i = -(10^p - N_i)$ ако низу цифара N_i претходе деветке а следују за њим нуле, и најзад $P = -(10^p - N_i - 1)$ ако низу цифара N_i претходе деветке и следују за њим деветке.

Из овога се види да су сви бројеви класе (30) спектри полинома (31) са униформним ритмом $H=n+p$, т. ј. да се сви ти бројеви могу написати у облику

$$f(10^{n+p}) \tag{32}$$

где наравно n варира од 0 до ∞ и тим се варирањем добијају различити бројеви уочене класе.

Претпоставимо сад да се полином $f(x)$, чији су сви коефицијенти цели бројеви, разлаже на факторе $f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_m(x)$, полиноме са целим коефицијентима. Тада је

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_m(x).$$

Бројеви (32) или што је исто (30) могу се у том случају написати у облику

$$f_1(10^{n+p})\, f_2(10^{n+p}) \ldots f_m(10^{n+p}). \tag{33}$$

Али то још не значи да сваки број (32) мора имати бар m фактора, јер полиноми $f_i(x)$, пошто њихови коефицијенти могу бити различито означени, за поједине вредности $x=10^{n+p}$ могу бити јединица т, ј.

$$f_i(10^{n+p}) \tag{34}$$

раван јединици. У том случају број (32) разлагао би се на аритметичке факторе чији је број мањи од m, и штавише могао би да буде и прост.

Пошто је нама циљ да услове горње теореме изведемо непосредно из бројева (30), а знамо из треће главе да се разлагање полинома може свести на разлагање броја — његовог спектра на спектралне факторе, то

1^0 потражићемо онај специјални број класе (30), а сви бројеви ове класе су спектри полинома (31) са различитим ритмовима, који је спектар полинома (31) са довољно великим ритмом, како би његова разложивост на спектралне факторе била сигуран знак разложивости полинома (31) на факторе-полиноме са целим коефицијентима.

2^0 Вредност n која карактерише овај специјалан број мора бити таква да сви изрази (34) буду различити од јединице.

Пређимо сад на то тражење. Према ином што је изнето у трећој глави одељак 6 за сваки полином, па према томе и за полином (31), могу се наћи два цела броја h и H таква да ако се спектар тог полинома $f(x)$ са ритмом H т. ј. број

$$S = f(10^H)$$

разлаже на спектралне факторе са празнинама ширине $H-h$, то се полином $f(x)$ разлаже на факторе — полиноме са целим коефицијентима. Бројеви h и H су дати формулама (24) и (27). За полином (31) они се могу одредити и непосредно из класе. бројева (30), тако да полином (31) уопште не мора да се образује. Да не бисмо прекидали излагање нећемо сад показивати како се h и H одређују из бројева класе (30), него ћемо то учинити на крају, после доказа.

Специјалан број који тражимо под 1^0 биће, према изнетом, онај, чија вредност n задовољава једначину

$$n + p = H$$

одакле је

$$n = H - p,$$

што и претставља број n_1 теореме коју доказујемо

$$(35) \qquad n_1 = H - p.$$

Како празнине у спектралним факторима који се добијају разлагањем спектра, т. ј. броја $f(10^{n_1+p})$ морају бити ширине $H-h$ то је

$$(36) \qquad n_2 = H - h.$$

Пошто сви фактори $f_i\ (x)$, на које се разлаже $f(x)$, допуштају ритам h, то ниједан број

$$f_i\ (10^h)$$

не може бити јединица јер претставља спектар полинома са ритмом који се слаже са тим полиномом. Према томе ако буде

$$n + p \geqslant h$$

то ниједан од бројева (34) није јединица, и услов под 2° је испуњен. Из те неједначине се добија

$$n \geqslant h - p$$

и најзад

$$(37) \qquad n_3 = h - p.$$

Тиме су сва три броја n_1, n_2, n_3 одређени и горња је теорема доказана. Остаје још да се покаже како се непосредно одређују h и H. Обрасци према којим се они одређују гласе:

$$\nu_1 = E\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$L_1 = \log\binom{n-1}{\nu_1} + (n-1)\log\left[A_0 + |A_k|\right] - (n-2)\log A_0$$

$$h = E(L_1) + 2$$

$$\nu_2 = E\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$L_2 = \log\binom{n}{\nu_2}$$

$$H = nh + E(L_2) + 2.$$

Пошто је n степен полинома (31), то је

$$n = k - 1$$

$$A_0 = P_1 \leqslant N_1 + 1$$

јер P_1 мора бити позитиван број,

$$|A_k| < 10^p .$$

Према томе горње једначине ће бити

$$\nu_1 = E\left(\frac{k-2}{2}\right)$$

$$L_1 = \log\binom{k-2}{\nu_1} + (k-2)\log(N_1 + 1 + 10^p) - (k-3)\log(N_1 + 1).$$

$$h = E(L_1) + 2$$

$$\nu_2 = E\left(\frac{k-1}{2}\right) \tag{38}$$

$$L_2 = \log\binom{k-1}{\nu_2}$$

$$H = (k-1)h + E(L_2) + 2$$

Пошто у ове формуле улазе само k, N_1 и p, а све се ове величине могу непосредно одредити из класе (30), то је тиме показано непосредно налажење бројева h и H. Навешћемо пример.

Пример.

Дата је класа бројева

$$(39) \qquad 9_n\,09_n\,10_n\,1,$$

која се може написати и овако

$$09_n\,09_n\,10_n\,1.$$

Овде је

$$N_1=0 \qquad N_2=0 \qquad N_3=1 \qquad N_4=1$$

$$k=4 \qquad v=1.$$

Одредимо величине h и H. Према обрасцима (38), биће

$$v_1=E\left(\frac{2}{2}\right)=1$$

$$L_1=\log\binom{2}{1}+2\log 11-\log 1=2,\ldots.$$

$$h=2+2=4$$

$$v_2=E\left(\frac{3}{1}\right)=1$$

$$L_2=\log\binom{3}{1}=0,\ldots$$

$$H=3.4+2=14.$$

Даље ћемо према обрасцима (35) (36) (37) одредити n_1, n_2, n_3. Тако се добија

$$n_1=13 \quad n_2=10 \quad n_3=3.$$

Стога треба разложити број

$$9_{13}\,09_{13}\,10_{13}\,1$$

на спектралне факторе са празнинама ширине 10 цифара. Ток разлагања је овај

$$\begin{array}{r|l}
9_{13}\,09_{13}\,10_{13}\,1 & 1 \mid 0_{13}\,1 \\
9_{12}\,10_{14}\,1 & 9_{12}\,10 \mid 0_{13}\,1 \\
1 &
\end{array}$$

и пошто је такво разлагање могуће, то ниједан број класе (39) за све вредности $n \geqslant 3$ није прост. Међутим одмах се види да за $n=0$ имамо у тој класи *прост број 11*.

APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES ET ANALYTIQUES DES SPECTRES MATHÉMATIQUES.

THÈSE

présentée à l'Université de Beograd pour obtenir le grade de docteur (sciences mathématiques)

par

CONSTANTIN ORLOFF

(Soutenue le 6 Decembre 1934 devant la comission d'Examen).

Application arithmétiques et analytiques des spectres mathématiques.

RÉSUMÉ.

Le procédé spectral de calcul numérique consiste à *disperser* en un *spectre numérique* les inconnues primitives ou auxiliaires d'un problème, comme l'analyseur disperse, en analyse spectrale chimique, un faisceau de rayons lumineux en un spectre lumineux.

C'est ainsi que l'on calcule une suite limitée ou illimitée d'inconnues a_0, a_1, $a_2 \ldots$ à l'aide de groupes consécutifs de décimales d'un nombre S rattaché au problème et appelé *spectre* des a_n. Un tel procédé de calcul est applicable toutes les fois que les a_n se trouvent en correspondence connue avec un suite auxiliaire limitée ou illimitée de nombres entiers, de sorte que, ces derniers nombres connus ou calculables, à l'aide d'un spectre déterminent les a_n.

Comme l'on sait, le procédé spectral conduit à des solutions de divers problèmes d'Arithmétique, d'Algèbre dt d'Analyse. Le présent ouvrage apporte une contribution aux applications de ce procédé, en y ajoutant un perfectionement qui contribuera à élargir le domaine de ces applications. Notamment, l'auteur montre comment on peut former des spectres des suites de nombres entiers affectés de signes quelconques sans connaître à l'avance la loi de répartition de ces signes.

Parmi les applications arithmétiques l'auteur en indique l'une qui ne présente pas, en elle-même, un grand intérêt, mais a l'avantage de montrer que le procédé spectral est applicable à des problèmes de cette nature. L' application consiste à démontrer qu'une certaine classe de nombres entiers,qui contient une infinité de nombres, ne contient aucun nombre premier.

Comme application algébrique l auteur traite le problème de décomposition d'un polynome $f(x)$, dont les coefficients sont des nombres entiers, en facteurs qui sont également des polynomes à coefficients entiers. Pour la solution de ce problème Kronecker a donné une méthode mixte, arithmétique et algébrique; les conditions nécessaires y sont arithmétiques, et les conditions suffisantes algébriques, exprimées à l'aide d'un algorithme. Le procédé spectral, qui est exclusivement arithmétique, ramène le problème à la décomposition d'un seul nombre entier en facteurs arithmétiques. Tandis que suivant la méthode de Kronecker, il faut décomposer un certain nombre de nombres entiers.

Dans certains problèmes d'Analyse interviennent les spectres des inconnues liées entre elles par des relations de récurrence. Tel ait, par exemple, le cas ou l'on a à déterminer une suite limitée ou illimitée de fonctions qui se ramènent à la détermination d'une suite de polynomes à coefficients nombres entiers, les polynomes étant liés par des relations de récurrence données. L'avantage de la méthode spectrale apparait nettement dans le problème du dévéloppement de fonctions elliptiques en série de puissances. Diverses méthodes, par exemple celle d'Hermite, ou de Weierstrass, résolvent le problème au moyen des procédés usuels dans la théorie des séries tayloriennes. La méthode fondée sur l'application des spectres des fonctions liées par des relations de réccurence, en diffère complètement. Elle fournit les coefficients a l'aide de groupes successifs de décimales de certains nombres, leurs spectres, de manière que chaque spectre détermine un ensemble de coefficients.

Tout ce qui est exposé dans cet ouvrage est appliqué à des exemples qui l'éclaircicent et mettent en évidence les avantages de la méthode.

ЛИТЕРАТУРА.

Michel Petrovitch

1. Les spectres numériques (avec Préface de M. E. Borel) Gauthier-Villars, Paris 1919.
2. Problèmes arithmétiques sur les équations différentielles. (Bull. de la Société mathématique de France 52, 1924).
3. Correspondence entre la fonction et la fraction décimale (Proced. of the V internat. Congr. of mathematics Toronto 1924).
4. Spectres des probabilités. (Enseignement mathématique 24, 1925).
5. Spectres des fonctions d'une variable représentables analytiquement (Comptes rendus du 50-ième Congrès de l'Association Française pour l'avancement des Sciences, Lyon 1926).
6. Spectres numériques des phénomènes. (Glas Srp. Kralj. Akad. CXXVII, 1927)
7. Un mode de représentation approximative de fonctions. (Glas Srp. Kralj. Akad. CXXVII, 1927).
8. Leçons sur les spectres mathématiques professés à la Sorbonne. Gauthier-Villars, 1928.
9. Procédés spectrales de calcul numerique en Astronomie. (Annuaire de l'Observatoire astronomique de Belgrade 2, 1930).

L. Kronecker.

10. Grundzüge einer arithmetischen Teorie der algebraischen Grössen. (Journal f. Math. 92, 1882).

J. Molk.

11. Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. (Acta Mathematica 6, 1885).

C. Orloff.

12. Примена спектралног рачуна на проблеме о полиномима (Глас Срп. Краљ. Ак. CLII, 1932).
[Application du calcul spectral aux problèmes sur les polynomes (Bull. de l'Ac. Roy. Serbe № 1, 1933)].
13. Рекурсивно израчунавање математичких спектара (Глас Срп. Краљ. Ак. CLIV, 1933).
[Évaluation des spectres mathématiques à l'aide des relations de récurrence (Bull. de l'Ac. Roy. Serbe № 1. 1933].

САДРЖАЈ.

ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ.

					стоји	треба да стоји
На	21. стр.	16.	ред	одозго	h	$h_{\text{р}}$
„	25. „	13.	„	„	S^{3}	S^{2}
„	28. „	4.	„	„	$28\,S_6^1\,S_3^2$	$28\,S_6^1\,S_2^3$
„	28. „	12.	„	„	$-1{,}0\,\vert_{51}\,1$	$-1{,}\vert\,0_{51}\,1$
„	35. „	13.	„	„	N_1	$N_{\text{г}}$