D-r М. МИЛАНКОВИЋ

О РАСПОРЕДУ СУНЧЕВЕ РАДИЈАЦИЈЕ

НА ПОВРШИНИ ЗЕМЉЕ

Из XCI књ. „Гласа“ Српске Краљевске Академије

У БЕОГРАДУ

ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ

1913.

САДРЖАЈ.

О распореду сунчеве радијације на површини земље.

од
Д-РА М. МИЛАНКОВИЋА
в. професора Универзитета

(Примљено на скупу Академије Наука 5. јуна 1913.)

1. Увод.

Топлотне, па према томе и светлосне множине, што их земља прима радијацијом од сунца, узрок су свега живота и скоро свих промена на њеној површини. Распоред тих множина на површини земље зависи од релативног положаја земље према сунцу, па како се тај положај мења без престанка, то је и тај распоред подвргнут променама. Ротација земље око њене осе изазива дневне промене које се показују у промени дана и ноћи, револуција земље око сунца изазива годишње промене, оличене у годишњим добима, а постепено мењање астрономских елемената земљине путање узрок је секуларним променама распореда топлоте. Те секуларне промене су, према мишљењу неких научника, оличене у глацијалним периодама, које су се од времена на време појавиле на површини земље.

Проблем распореда тих топлотних множина на површини земље и његове периодичне и секуларне варијације важан је проблем примењене математике достојан пажње математичара.

Досадањи радови, који се баве тим проблемом, могу се поделити у две категорије. Прва категорија бави се у главном периодичким, т. ј. дневним и годишњим променама распореда сунчеве радијације на површини земље, а друга категорија секуларним.

По научној строгости и математској прецизности одскаче прва категорија радова, међу којима је најважнији рад Wiener-ов, далеко изнад друге, која испитује само екстремне случајеве секуларних варијација да би их употребила за мање или више образложене спекулације о узроцима глацијалних периода.

Небеска миханика, међутим, даје нам јасну слику о читавом току секуларних промена астрономских елемената земљине путање, па је, према томе, могуће добити јасну, научно строго образложену и математски прецизну слику секуларних варијација распореда сунчеве радијације на површини земље.

Наш ће задатак бити да са истом оном прецизношћу, са којом небеска механика решава своје probleme, испитамо феномен споменутих секуларних варијација, но како је облик у којем су досад претстављане периодичне варијације неповољан, да се, пошавши од њега, испитају и секуларне варијације, то морамо да почнемо са испитивањем периодичних варијација. Резултате, које ћемо том приликом добити, сравнићемо са досадањим резултатима, па том приликом решити неке несугласице које између досадањих радова постоје и о којима ћемо говорити на крају овога првога дела наших испитивања, који се бави периодичким варијацијама распореда сунчеве радијације на површини земље.

2. Астрономски и физикални део проблема.

Земља описује око сунца елиптичну путању. Означимо радиусвектор те путање — дакле одстојање центра земљиног од центра сунчевог у једном произвољном моменту — са ϱ и замислимо да смо са тим радијем описали око центра сунчевог једну куглу. Због савршене централне симетрије биће та кугла од сунца униформно расветљена, па ће кроз једнаке делове њене површине протицати једнаке множине радијацијоне енергије.[1]) Означимо ли са Q_0 тоталну топлотну множину, коју у јединици времена сунце шаље у интерстеларни простор, то ће у јединици времена пасти на јединицу површине кугле радиуса ϱ топлотна множина:

$$\frac{Q_0}{4\pi\varrho^2}$$

Бесконачно малени елеменат df уочене кугле примиће, према томе, у јединици времена топлотну множину:

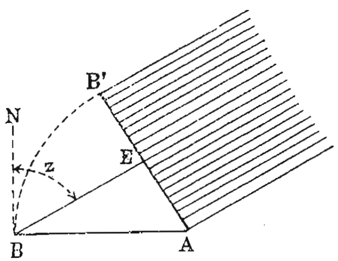
$$\frac{Q_0}{4\pi\varrho^2}\,df.$$

При томе је елеменат df нормалан на правац у којем му сунце ту множину шаље.

Уочимо сада један произвољно одабрани елеменат df осветљене земљине површине и замислимо

[1]) Претпоставка да сунце шири у свима правцима једнаке топлотне множине неће одговарати савршено истини. Зна се да сунчева атмосфера знатно утиче на његову радијацију, а распоред те атмосфере мења се, због ротације сунчеве, од екватора сунчевог ка половима. И остале физикалне особине сунчеве површине показују такође зонални распоред у истом смислу, тако да у питању радијације не постоји потпуна централна него само аксијална симетрија обзиром на осу ротације сунца. Но како се земља креће у близини равни екватора сунчевог то се неправилности сунчеве радијације неће на њеном путу показати.

да је тај елеменат без запреке земаљске атмосфере изложен сунчевој радијацији. Одстојање тога елемента је, са незнатном разликом, такође једнако ϱ али тај елеменат неће стајати нормално на правцу сунчаних зрака, него ће његова нормала (наперена од центрума земље) затварати са тим правцем угао z. Нека нам у слици 1. претставља AB уочени елеменат df земљине површине, који се због његове малоће може сматрати раван и који замишљамо нормалан на раван слике. Сунчеви зраци затварају са његовом нормалом угао $NBE = z$. Замислимо сада тај елеменат заокренут у положај AB' тако да стоји нормално на правац сунчаних зрака. У овоме положају пада на њега, према пређашњем, топлотна множина:



Сл. 1.

$$\frac{Q_0}{4\pi\varrho^2}\,df,$$

донашана призматичним снопом сунчаних зрака базе AB'. У првом положају пада на елеменат AB само један део тога снопа базе AE, која је пројекција површине AB у раван AB' и која је због $\sphericalangle EAB = z$ једнака $\cos z\, df$. Зато уочени елеменат AB прима у јединици времена топлотну множину;

$$\frac{Q_0}{4\pi\varrho^2}\cos z\, df$$

Јединица површине земљине прима, према томе, када се не узме у обзир земаљска атмосфера у јединици времена топлотну множину:

$$J = \frac{Q_0}{4\pi\varrho^2}\cos z \qquad \cdot \cdot \cdot \, 1)$$

Ту топлотну множину називамо интензитетом сунчане радијације или астрономском инсолацијом посматране површине у уоченом моменту.

Астрономска инсолација једнога елемента земљине површине зависи према једначини 1) од три фактора: од одстојања ϱ земље од сунца, од угла z, што га затварају сунчани зраци са нормалом уоченог елемента површине и од величине Q_0. Прве две величине зависе од положаја земље према сунцу те се услед ротације и револуције земље мењају без престанка, а величина Q_0, која нам претставља топлотну множину, што је сунце у јединици времена шаље у интерстеларни простор, зависи од физикалне конституције сунчеве.

Физикална конституција сунца подложена је периодичким и секуларним променама. Прва врста промена оличена је, између осталога, у феномену сунчаних пега, а друга је у вези са стадијумом развитка у којем се сунце налази. Зато се и величина $\mathbf{Q_0}$ мења периодички и секуларно. Њене периодичке промене су малене и немају знатног утицаја на температуру земаљске површине,[1]) а о њеним секуларним променама постоје само хипотезе.

Према тима хипотезама претставља разноликост светлости и спектра појединих звезда разан стадиум развитка у којем се оне данас налазе. Разноликост њиховога спектра указује на различите степене њихове разжарености, а ти степени сачуњавају један континуиран ред.[2]) Одатле се закључује да свака

[1]) Види о томе: Hann, Handbuch der Klimatologie, I. Band; Allgemeine Klimalehre. Stuttgart 1908. S. 354. ff.

[2]) Види о томе: Kobold, Der Bau des Fixsternsystems mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate. Braunschweig. 1906. S. 28. ff.

звезда, па и наше сунце, континуирно прелази из стања највеће разжарености у стање ладноће, т. ј. да величина Q_0 постепено опада. Свакако се секуларне промене величине Q_0 дешавају тако споро да се у историјској и свакако у знатном делу геолошке прошлости наше земље једва могу осетити.[1])

Зато се величина Q_0 сматра као константа. И ми ћемо у нашим следећим испитивањима рачунати са величином Q_0 као са константном величином. То можемо учинити тим пре што су све величине, које ћемо на темељу те претпоставке извести, пропорционалне величини Q_0, па се, не мењајући ни у чем наша извађања, може и варијабилност величине Q_0 узети у обзир.

Интезитет астрономске инсолације за случај када се сунце налази у средњем одстојању од земље и када сунчеве зраке падају нормално на уочену површину назива се *соларном константом*. Означимо ли њену вредност са J_0, а средње одстојање сунца од земље, т. ј. велику полуосу земљине путање са a, то ћемо добити из једначине 1) величину J_0, ако у њој ставимо $\varrho = a$ $z = o$. Зато је:

$$J_0 = \frac{Q_0}{4\pi a^2} \quad \ldots 2).$$

Елиминишемо ли из једначина 1) и 2) величину Q_0 то добивамо:

$$J = J_0 \frac{a^2}{\varrho^2} \cos z \quad \ldots 3(.$$

У следећим нашим испитивањима нећемо узети у обзир неправилности земаљске површине него ћемо

[1]) Dubois je хипотезе о секуларним варијацијама употребио за тумачење секуларних варијација земаљске климе. Види: Dubois, Die klimate der geologischen Vergangenheit und ihre Beziehung zur Entwiklungsgeschichte der Sonne. Leipzig 1893.

претпоставити да је уочени елеменат њен хоризонталан; онда је нормала тога елемента вертикална т. ј. наперена ка зениту посматраног места земљиног, а угао z једнак је зенитској дистанцији сунца у уоченом моменту. Једначина 3) казује онда да астрономска инсолација уоченога места земљине површине зависи од зенитске дистанције сунца и његовог одстојања од земље. Те две величине мењају се по познатим строго математичким законима, па је зато могуће одредити строго математски распоред сунчеве радијације на површини земље и његово мењање са временом када се не узме у обзир утицај земаљске атмосфере или када се испитује тај распоред на горњој граници земаљске атмосфере. Тај део проблема називамо *астрономским делом проблема* распореда сунчеве радијације на површини земље.

При улазу и пролазу кроз земаљску атмосферу изложени су сунчани зраци разноврсним променама: један део тих зрака, па према томе и један део топлотне енергије, бива на граници атмосфере и на облацима рефлектован у интерпланетарни простор, неки делови бивају при пролазу кроз атмосферу абсорбовани, дифузно расути или рефракцијом спречени на праволинијском кретању тако да топлотне множине сунчеве радијације стигну ослабљене и у промењеном распореду на земаљску површину него што би стизале када атмосфере неби било. Испитивање утицаја земаљске атмосфере на интензитет и распоред сунчеве радијације сачињава *физикални део проучаваног проблема*. Тај део није ни из далека приступачан тако прецизном математичком испитивању као астрономски део[1]), па је зато потребно испитивати

[1]) Види о томе: Zenker, Die Vertheilung der Wärme auf der Erdoberfläche. Berlin 1888.

сваки део проблема за себе. Ми ћемо се у овоме делу радње бавити само са астрономским делом проблема.

3. Распоред сунчеве инсолације на површини земље у једном уоченом моменту.

Уочимо на једном произвољном месту земље један малени елеменат њене површине. Нека у бесконачно маленом елементу времена dt, који следује иза произвољно одабраног момента t, пада на јединицу површине тога елемента топлотна множина dQ, онда нам диференцијални квоцијенат

$$J = \frac{dQ}{dt} \quad \ldots 4)$$

претставља ону множину топлоте која при непромењеним условима пада у јединици времена на јединицу површине на уоченом месту земље. Та је множина према једначини 3) једнака:

$$\frac{dQ}{dt} = J_0 \frac{\alpha^2}{\rho^2} \cos z \quad \ldots 5),$$

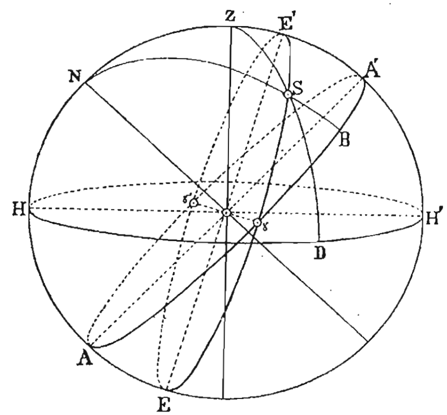
где z означава зенитску дистанцију сунца у уоченом моменту на посматраном месту земље. Зенитска дистанција сунца зависи од географске ширине φ уоченог места и од деклинације δ и часовног угла ω у уоченом моменту.

Да ту зависност математски формулишемо замислимо да нам у слици 2. претставља раван HDH' хоризонат уоченога места земаљске површине, Z зенит тога места, ABA' раван екватора, а N северни пол небеске сфере. Онда је висина пола, претстав-

љена луком HN, једнака географској ширини φ уоченога места, па је зато

$$\operatorname{arc} NZ = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Нека нам тачка S претставља моментани положај сунца, онда је лук BS једнак деклинацији сунца δ,



Сл. 2.

лук ZS његовој зенитској дистанцији z, а угао ZNS његовом сатном углу ω у уоченом моменту.

Из сферног троугла NSZ следује једначина:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\omega \quad \ldots 6),$$

па је зато:

$$\frac{dQ}{dt} = J_0 \frac{\alpha^2}{\rho^2} \{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\omega\} \quad \ldots 7).$$

Горња једначина важи само за позитивне вредности од $\frac{dQ}{dt}$, т. ј. догод је $z < \frac{\pi}{2}$. У моменту када зенитска дистанција z достигне вредност $\frac{\pi}{2}$ залази сунце под хоризонат уоченога места и инсолација престаје. Зато ваља за све вредности варијабилни, које дају негативну инсолацију, ставити:

$$\frac{dQ}{dt} = o\ .$$

Угао ω једнак је правом сунчаном времену израженом у лучној мери, ако то време бројимо као у астрономији т. ј. од правога подна када сунце пролази кроз меридијан уоченога места. То место нека има географску дужину ψ, при чему меримо те ширине почев од нултог меридијана према истоку од 0 па до 360°. Ако је у уоченом моменту сатни угао сунца на местима нултог меридијана земљине површине једнак ω_0, онда постоји очито једначина

$$\omega = \omega_0 + \psi \qquad \ldots 8).$$

Зато је распоред сунчеве радијације на површини земље у уоченом моменту претстављен једначином:

$$\frac{dQ}{dt} = J_0 \frac{a^2}{\rho^2}\{\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(\omega_0+\psi)\} \quad \ldots 9)$$

при чему се као варијабилне сматрају географске координате φ и φ.

Ставимо

$$\omega_0 + \psi = \psi_1$$

т. ј. рачунајмо географску дужину од онога меридијана над којим у уоченом моменту кулминира сунце. Онда је:

$$\frac{dQ}{dt} = J_0 \frac{a^2}{\rho^2}\{\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\psi_1\} \quad \ldots 10).$$

Инсолација достизава своју максималну вредност

$J_0 \frac{\alpha^2}{\rho^2}$ за:

$$\cos\psi_1 = 1$$

т. ј. за: $\psi_1 = 0$

и за: $\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta = 1$

или: $\cos(\varphi - \delta) = 1$

$$\varphi = \delta$$

дакле у оној тачки земљине површине над којом сунце стоји у уоченом моменту у зениту.

Из горњих једначина следује без потешкоће, но још директније из геометријске конфигурације, да је максимум инсолације остварен само у тој тачки. Инсолација је равна нули за све вредности од φ и ψ_1 које задовољавају једначину:

$$\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\psi_1 = 0$$

или

$$\cos\psi_1 = -\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\delta \qquad \ldots 11).$$

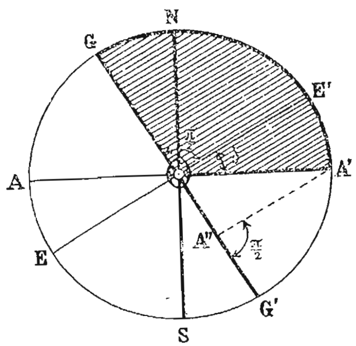
Ако сматрамо земљу као куглу и претпоставимо да сунчеви зраци, због великог одстојања сунца од земље, падају паралелно на њу, онда је једначина 11) задовољена за све тачке онога највећега круга земљиног у којем сунчеви зраци тангирају земљину површину и којега је пол тачка $\psi_1 = 0$; $\varphi = \delta$. Тај круг називамо *гранични круг инсолације* у уоченом моменту, јер дели земљу у две хемисфере, од којих је једна у свима својима тачкама изложена инсолацији, а друга у опште није инсолирана.

Инсолирана хемисфера пројицира се у правцу сунчаних зрака у раван граничнога круга, па како сунчани зраци падају нормално на ту раван, то је целокупна инсолација споменуте хемисфере:

$$J_H = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} r^2 \pi \qquad \dots \; 12),$$

где r означава радиус земљине кугле.

Само када је деклинација сунца равна нули пролази гранични круг инсолације кроз полове земљине и онда су њена северна и јужна хемисфера једнако инсолиране па су тоталне инсолације сваке од њих равне половини горње вредности. Иначе стоји раван граничнога округа косо према оси земљиној, па су у посматраном моменту северна и јужна хемисфера неједнако инсолиране. Да бисмо у томе случају одредили њихове тоталне инсолације нека нам у слици 3. круг $A N A' S$ претставља онај меридијан земљин над којим у уоченом моменту кулминира сунце; N нека претставља северни, S јужни пол земљин, а $A A_1$ пресек екватора са равни слике. Сунчани зраци нека су паралелни правој $E' E$, т. ј. нека права $G G'$ — нормална на $E' E$ — претставља пресек равни граничнога круга са равни слике, угао $E' O A' = \delta$ деклинацију сунца, а сектор $G O A' E' N$ је пројекцију инсолиранога дела северне хемисфере у раван слике. Пројекција тога инсолиранога дела у раван граничнога круга састоји се



Сл. 3.

из полукруга радијуса r и полуелипсе, које је велика полуоса једнака такође r, а мала полуоса једнака дужини $O A''$ т. ј. $r \sin \delta$. Површина те пројекције једнака је према томе:

$$\frac{\pi}{2} r^2 + \frac{\pi}{2} r^2 \sin \delta,$$

па је зато тотална инсолација северне хемисфере у уоченом моменту јединака:

$$J_N = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin \delta) \qquad \dots \; 13).$$

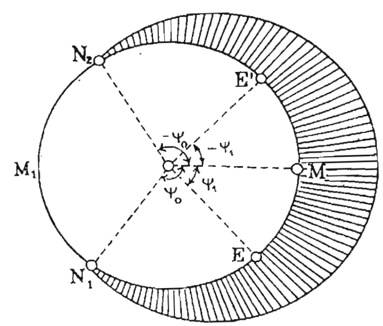
Инсолација јужне хемисфере је, као што је лако увидети једнака:

$$J_S = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin \delta) \qquad \dots \; 14),$$

тако да је:

$$J_N + J_S = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} r^2 \pi \qquad \dots \; 15).$$

Уочимо сада један паралелни круг земљин $N_1 M N_2$ (слика 4.) који сече гранични круг инсолације у тачкама N_1 и N_2. У тима је тачкама инсолација равна нули, а у тачки M, у чијем се меридијану сунце у уоченом моменту налази, достизава свој максимум. Распоред инсолације дуж посматране параделе претстављен је једначином 10) у којој је ψ_1 варијабилно и означава угао што га радице уочене тачке E паралеле затвара са радијем тачке M. Из те једначине следује



Сл. 4.

да су инсолације симетричних тачака паралеле према тачки M по знаку и по величини једнаке. Углови ψ_0 и $(-\psi_0)$ тачака N_1 и N_2 у којима инсолација исчезава одређени су једначином:

$$\cos\psi_0 = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta \quad \ldots 16).$$

Део $N_1 M_1 N_2$ уочене паралеле није у опште инсолиран.

Посматрајмо сада бесконачно узани појас земљине површине који се налази између уочене и бесконачно јој блиске паралеле, т. ј. између паралела φ и $\varphi + d\varphi$. Радиус паралеле φ једнак је $r\cos\varphi$, а површина df уоченог појаса је:

$$df = 2\pi r^2 \cos\varphi \, d\varphi.$$

На елеменат тога појаса између меридијана ψ_1 и $\psi_1 + d\psi_1$ пада у јединици времена топлотна множина:

$$J r^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi_1$$

и на читав појас множина:

$$d Q_\varphi = r^2 \cos\varphi \, d\varphi \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} J \, d\psi_1$$

Квоцијенат w, који добивамо када ту тоталну множину топлоте, која у јединици времена пада на посматрани појас, поделимо површином df појаса, зовемо *средњом инсолацијом паралеле* φ у уоченом моменту. Према томе је:

$$w = \frac{d Q_\varphi}{df}$$

или

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\psi_0}^{+\psi_0} J \, d\psi_1 \quad \ldots 17).$$

Узмемо ли у обзир једначине 4) и 10), то добивамо:

$$w = \frac{1}{\pi} J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \{\psi_0 \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \sin\psi_0\} \quad \ldots 18),$$

Угао ψ_0 одређен је једначином 16) тако да се за једно одређено φ величина w мења само са величинама ρ и δ. Средња инсолација једне уочене паралеле зависи, према томе, само од релативног положаја тежишта сунца и земље, дакле само од револуције земље око сунца а не зависи од ротације земље око своје осе. Она би остала иста и када би земља извађала бржу или спорију ротацију. Исто то важи и за тоталне инсолације J_N и J_S земљиних хемисфера.

О мењању валичина w, J_N и J_S у току године говорићемо касније.

4. О мењању интензитета инсолације у току једнога дана.

Интензитет инсолације на једном произвољном месту земљине површине и у једном произвољно одабраном моменту времена дат је, према једначинама 4) и 7), изразом:

$$J = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \left\{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\omega\right\} \quad \ldots 19),$$

или ако ставимо:

$$\left.\begin{aligned} J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \sin\varphi \sin\delta &= A \\ J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \cos\varphi \cos\delta &= B \end{aligned}\right\} \quad \ldots 20)$$

изразом:

$$J = A + B\cos\omega \quad \ldots 21).$$

Посматра ли се мењање величине J у току једнога дана, то се за време тога интервала величине ϱ и δ мењају тако незнатно да се могу сматрати као константне. Онда су у једначини 21) величине A и B такође константне, па је величина J представљена као функција сатнога угла ω сунца једном синусоидалном линијом.

Разуме се само по себи да једначина 21) вреди само за оне вредности угла ω које дају позитивно J, а те вредности леже између сатнога угла излазка сунца и сатнога угла његовог залазка. Ти су углови ω_0, једнаки по величини, а противнога знака, дати једначином:

$$\cos\omega_0 = -\frac{A}{B} = -\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta \quad \ldots 22)$$

т. ј.

$$\omega_0 = \pm \arccos(-\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\delta) \quad \ldots 22^a)$$

једначина 21) вреди; према томе, за интервал:

$$-\omega_0 < \omega < +\omega_0$$

а за остале вредности величине ω је J равно нули.

Средини посматранога интервала одговара вредност $\omega = o$, т. ј. моменат када сунце пролази кроз меридијан или право подне.

Средње вредности величина ϱ и δ у уоченом дневноми нтервалу одговарају, према томе, правом подну. Са тима величинама, које се за сваки дан године налазе израчунате у астрономским годишњацима, ваља одредети величине A и B, па нам онда једначина 21) представља мењање интензитета инсолације у току уоченога дана.

Сатни угао ω, изражен у сатима, даје право сунчано време. Означимо ли интервал од 24^h са τ, а право сунчано време са t_ω, то је:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} t_\omega \quad \ldots 23).$$

Желимо ли да величину J изразимо као функцију средњега времена t, то ћемо поступити овако: Астрономски годишњаци дају нам за сваки дан године средње време у правом подну или време које показује тачан сат, регулисан по средњем времену, у моменту када центар сунца пролази кроз меридијан уоченога места. То време E назива се једначином времена, па је она величина коју треба одузети средњем времену да се добије право време: Зато је:

$$t_\omega = t - E \quad \ldots 24)$$

или

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}(t - E) \quad \ldots 25),$$

тако да једначина 21) добива овај облик:

$$J = A + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - E) \quad \ldots 26)$$

У астрономским годишњицама дата је за сваки дан године промена $\triangle\delta$ величине δ у току једнога сата, а може се из њих одредити и промена $\triangle\varrho$ величине ϱ за један сат у уоченом дану. Означимо ли са δ_m и ϱ_m вредности величина δ и ϱ у средњем подну уоченога дана, то је са великом тачности

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \varrho_m + \triangle\varrho \cdot t \\ \delta &= \delta_m + \triangle\delta \cdot t \end{aligned}\right\} \quad \ldots 27),$$

па се на тај начин при одређењу величина A и B може узети у обзир и варијабилност величина ϱ и δ.

5. О мењању интензитета инсолације у току године.

Проучава ли се мењање интезитета инсолације у једном дужем интервалу времена него што је дан, то се величине ϱ и δ, па зато и величине A и B, из једначина 20) не могу сматрати константне нити се може претпоставити да се ϱ и δ мења линеарно са временом као што је учињено при формирању једначина 27). Сада ваља сматрати све три величине ϱ, δ, ω у једначини 19) као варијабилне и наш је следећи задатак да их изразимо као функције једне једине варијабилне.

Нека нам, у то име, у слици 2 ESE' претставља еклиптику, т. ј. ону привидну путању по којој се сунце креће на привидној сфери звезда стајачица. Раван еклиптике сече се са равни екватора у правој $\mathfrak{s}\,\mathfrak{s}'$ коју зовемо еквинокцијалном линијом, при чему је $\mathfrak{s}$ пролетна, а $\mathfrak{s}'$ јесења еквинокцијална тачка. Обе равни затварају између себе угао $\sphericalangle S\mathfrak{s}B = \varepsilon$ који називамо нагиб еклиптике. Моментани положај сунца нека буде S, онда се лук arc $\mathfrak{s}S = \lambda$ назива правом дужином сунца у уоченом моменту. Часовни угао пролетнога еквинокција, т. ј. лук $A'\mathfrak{s} = \theta$, назива се звездано време уоченога момента изражено у лучној мери, а лук arc $\mathfrak{s}B = \alpha$ ректасцензијом сунца. Зато постоји једначина:

$$\theta = \alpha + \omega \quad \dots 28)$$

Из правоуголног сферног троугла $\mathfrak{s}BS$ следују даље ове једначине:

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda \quad \dots 29)$$

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda \quad \dots 30)$$

$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\varepsilon\sin\lambda \quad \dots 31),$$

па је зато:

$$\cos\omega = \cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha \quad \dots 32)$$

$$\cos\delta\cos\omega = \cos\theta\cos\delta\cos\alpha + \sin\theta\cos\delta\sin\alpha$$

или обзиром на једначине 30) и 31):

$$\cos\delta\cos\omega = \cos\theta\cos\lambda + \cos\varepsilon\sin\theta\sin\lambda \quad \dots 33)$$

Ставимо ли изразе 29) и 33) у једначину 19) то добивамо.

$$J = J_0 \frac{a^2}{\varrho^2}\Big\{\sin\varepsilon\sin\varphi\sin\lambda + \cos\varphi\cos\lambda\cos\theta + + \cos\varepsilon\cos\varphi\sin\lambda\sin\theta\Big\} \quad \dots 34)$$

У овој су једначини варијабилне величине:

$$\varrho,\quad \lambda,\quad \theta,$$

а оне се могу изразити као функције средњега времена t које одабиремо као независну варијабилну. Средње време почињемо бројати од почетка уочене астрономске године, а часове бројимо, као у астрономији, од 0 до 24^h. Ако нам τ означава интервал од 24^h, а T интервал тропичне године, т. ј. величину $365{\cdot}242201\ \tau$, онда се средње време претвара у звездано множењем разломком

$$\frac{366{\cdot}242201}{365{\cdot}242201} = \frac{T+\tau}{T}$$

Уоченом средњем времену t нека одговара звездано време t_s, изражено у сатима. Ако је у иницијалном моменту, т. ј. јануар 1.0^h, звездано време t_0^s, онда постоји једначина:

$$t_s = t_0^s + \frac{T+\tau}{T} \quad \dots 35)$$

Између звезданог времена t_s, израженог у сатима, и звезданог времена θ, израженог у лучној мери, постоји једначина:

$$\theta = \frac{2\pi}{\tau}\, t_s$$

па је зато:

$$\theta = \frac{2\pi}{\tau}\, t_0^s + \frac{2\pi}{\tau}\, \frac{T+\tau}{T}$$

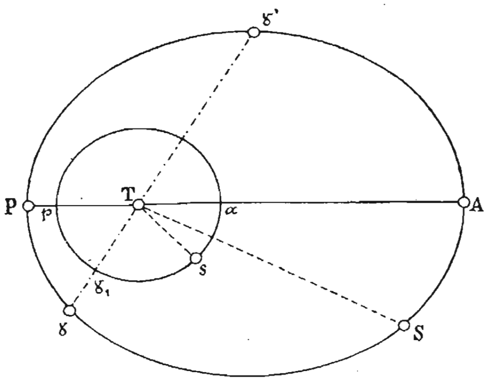
Израз:

$$\frac{2\pi}{\tau}\, t_0^s = \theta_0$$

представља звездано време иницијалног момента у лучној мери: па је зато:

$$\theta = \theta_0 + \frac{2\pi}{\tau}\, t + \frac{2\pi}{T} \quad \cdot \cdot \cdot \; 36).$$

Остаје још да се одреде величине ϱ и λ као функције времена t. Нека у слици 5. представља елипса



Сл. 5.

P в A в' еклиптику, а *T* фокус те елипсе у којем се привидно земља налази; од крајњих тачака велике осе *P A*, нека *P* представља перигеум, а *A* апогеум.

Права *в в'* нека представља еквинокцијалну линију, па нека *в* буде пролетна, а *в'* јесења еквинокцијална тачка. У уоченом моменту нека се сунце налази привидно у тачки *S*, т. ј. нека угао $\sphericalangle$ *в* $S = \lambda$ представља праву дужину сунца. Замислимо једну мобилну тачку s, која се креће униформом брзином у кругу произвољног радиуса *T s* око тачке *T* тако да се налази у положају *p* када се сунце налази у положају *P*, а у положају *a* када се сунце налази у положају *A*. Како је време обилажења сунца око еклиптике једнако *T*, то је угловна брзина те фиктивне тачке једнака:

$$\frac{2\pi}{T},$$

па се зове средње кретање. У перигеуму *P* креће се сунце својом највећом, а у апогеуму *A* својом најмањом привидном брзином. Брзина фиктивне тачке лежи између тих двеју брзина, зато ће сунце на луку *P в A* истрчавати испред фиктивне тачке, а на луку *A в' P* заостајати, па док се у уоченом моменту сунце буде налазило у положају *S* дотле ће се у томе моменту фиктивна тачка налазити у положају s. Угао $P\,T\,s = L$ зове се средња дужина сунца, а диференција углова

$$\lambda - L = \xi \quad \cdot \cdot \cdot \; 37),$$

т. ј. угао $\sphericalangle s\,T\,S$ једначином центра.

Означимо дужину перигеума, т. ј. лук $в_1$ *a p* са $\boldsymbol{\Pi}$, праву аномалију сунца, т. ј. угао $P\,T\,S$, са $\boldsymbol{\nu}$, а средњу аномалију сунца, т. ј. угао $P\,T\,s$ са φ, то постоје, као што из слике следује, ове релације:

$$\nu - \varphi = \xi \quad \cdot \cdot \cdot \; 38)$$

$$360^0 - \boldsymbol{\Pi} = \varphi - L$$

тако да се у свима тригонометриским функцијама може ставити:

$$L = \Pi + \varphi \qquad \cdots 39)$$

Пролази ли сунце кроз перигеум у моменту t_0, то је, због константне угловне брзине фиктивне тачке,

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) \qquad \cdots 40),$$

па је, узев у обзир једначине 37) и 39) и 40),

$$\lambda = \Pi + \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \xi \qquad \cdots 41).$$

Одређење величина ξ од ϱ као функција времена t, предмет је небеске механике. Означимо ли нумерички ексцентрицитет земљине путање око сунца са e, то су горње величине дате изразима:*)

$$\frac{\varrho}{a} = 1 - e\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0) - \frac{e^2}{2}\left[\cos\frac{4\pi}{T}(t - t_0) - 1\right] -$$

$$- \frac{e^3}{2^3}\left[3\cos\frac{6\pi}{T}(t - t_0) - 3\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right] - \cdots 42)$$

$$\xi = 2e\sin\frac{2\pi}{T}(t - t_0) + \frac{5}{4}e^2\sin\frac{4\pi}{T}(t - t_0) +$$

$$+ \frac{e^3}{1.2.^2 3}\left[13\sin\frac{6\pi}{T}(t - t_0) - 3\sin\frac{2\pi}{T}t - t_0)\right] + \cdots 43),$$

па су периодичке функције времена са периодом T. Ексцентрицитет земљине путање веома је мален

*) Види н. пр. Souchon, Traité d'astronomie pratique. Paris 1883. стр. 151. и 153.

($e = 0{\cdot}0168$), па се зато у горњим једначинама могу све веће потенције његове занемарити тако да добивамо:

$$\frac{\varrho}{a} = 1 - e\cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \qquad \cdots 44)$$

$$\xi = 2e\sin\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \qquad \cdots 45)$$

$$\lambda = \Pi + \frac{2\pi}{T}(t - t_0) + 2e\sin\frac{2\pi}{T}(t - t_0) \cdots 46)$$

Ставимо ли вредности за θ, ϱ, λ из једначина 36) 44) и 46) у једначину 34), то добивамо инсолацију J произвољне тачке земљине површине представљену као функцију времена t.

6. Топлотна множина $Q\tau$ која у току једнога дана падне на уочену јединицу земљине површине.

На јединицу земљине површине у произвољној географској ширини φ пада у јединици времена, према једначини 21), топлотна множина:

$$\frac{dQ}{dt} = A + B\cos\omega \qquad \cdots 47).$$

У интервалу од једнога дана могу се величине A и B, представљене једначинама 20), сматрати као константне, те при томе ваља у те једначине ставити за ϱ и δ оне вредности које одговарају подну уоченога дана.

У једначини 47) означава t средње време, па је

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{bt_\omega}\cdot\frac{dt_\omega}{dt}$$

где t_ω означава право време. Квоцијенат $\frac{dt_\omega}{dt}$ означава брзину рашћења правог времена, па се никада не разликује осетно од јединице. Зато можемо ставити:

$$\frac{dQ}{dt_\omega} = A + B \cos \omega \quad \cdot \cdot \cdot 48).$$

За време уоченога дана пада на јединицу површине топлотна множина:

$$Q\tau = \int_{t_a}^{t_u} (A + B \cos \omega) \, dt_\omega \quad \cdot \cdot \cdot 49),$$

где t_a означава право време изласка, а t_u право време заласка сунчевог. Како је, према једначини 23),

$$t_\omega = \frac{\tau}{2\pi} \omega \quad \cdot \cdot \cdot 50),$$

то је:

$$Q_\tau = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (A + B \cos \omega) \, d\omega \quad \cdot \cdot \cdot 51)$$

где $(-\omega_0)$ означава сатни угао изласка, $(+\omega_0)$ сатни угао залазка сунчевог. Изведемо ли горњу интеграцију, то добивамо:

$$Q_\tau = \frac{\tau}{\pi} (A \omega_0 + B \sin \omega_0) \quad \cdot \cdot \cdot 52),$$

или због једначина 20):

$$Q_\tau = J_0 \frac{\tau}{\pi} \frac{a^2}{\rho^2} \{\omega_0 \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_0 \cos \varphi \cos \delta\} \quad 53),$$

при чему је, према једначини 22):

$$\omega_0 = \text{arc} \cos (-\text{tang}\, \varphi \, \text{tang}\, \delta) \quad \cdot \cdot \cdot 54).$$

За оне географске ширине, за које, у уоченом дану:

$$\text{tang}\, \varphi \, \text{tang}\, \delta \geqq 1,$$

т. ј. на којима сунце тога дана не залази, ваља ставити $\omega_0 = \pi$, па је у томе случају:

$$Q_\tau = J_0 \tau \frac{a^2}{\rho^2} \sin \varphi \sin \delta \quad \cdot \cdot \cdot 55).$$

7. Однос између средње инсолације w паралеле φ и топлотне множине Q_τ која у току једнога дана падне на јединицу површине у географској ширини φ.

Средња инсолација w паралеле φ дата је једначинама 18) и 16), а топлотна множина Q_τ, која у току једнога дана падне на јединицу површине географске ширине φ, једначинама 53) и 54). Из тих једначина следује да је:

$$Q_\tau = \tau w \quad \cdot \cdot \cdot 56)$$

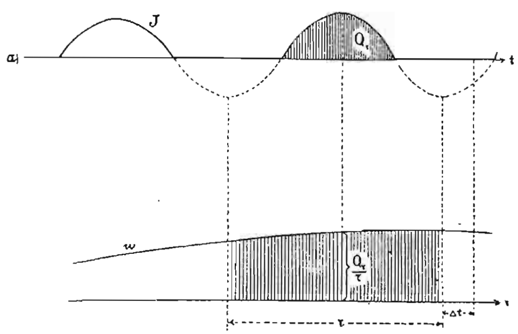
или:

$$w = \frac{Q\tau}{\tau} \quad \cdot \cdot \cdot 57),$$

при чему τ означава интервал од 24^h.

w означава, дакле, ону топлотну множину која би пала на јединицу површине у току једнога дана, када се радиусвектор ρ и деклинација δ сунца неби за то време мењали, подељену са дужином дана. Она представља, према томе, једну средњу топлотну множину на јединицу времена, па како је при њеном формирању узет као интервал, којега се средња топлотна множина тражи, један дан, то је из ње елиминисан дневни ток инсолације и његови дисконтинуитети који се указују при настућу ноћи. Зато је висина w само функција радиусвектора ρ и деклинације сунца δ, а елементи ротације земљине не појављују се у њој.

Фунција J, која је зависила и од звезданог времена, дакле од ротације земље око своје осе, постајала је за све паралелне кругове између поларних кругова за време свакога дневнога интервала дисконтинуирна, јер са наступом ноћи престаје инсолација, па се место свих негативних вредности величине J има ставити вредност нула. То није случај са функцијом w; она не постаје у интервалу од једнога дана дисконтинуирна, јер за паралелне кругове између поларних кругова она у опште не постаје никада равна нули, а у арктичним зонама само онда када ноћ траје дуже од 24 сата.



Ск. 6.

Нека нам таласаста крива J у слици 6a) представља инсолацију J као функцију времена t, за један паралелни круг неарктичке зоне. У току сваког интервала τ постала би функција J негативна, а ми морамо све негативне вредности заменити са вредности нула, тако да је J представљено дисконтинуирном дебело извученом кривом. Топлотна множина, која у току интервала τ падне на јединицу површане, представљена је шрафираном површином Q_τ. При израчунавању величине Q_τ, помоћу једначина 53) и 54) узели смо ϱ и δ као константе величине и у те једначине ставили њихове вредности које од-

говарају подну уоченога дана дакле — са неосетним занемарењем — максималној ординати криве J у посматраном интервалу.

Нека нам у слици 6b) крива w представља средњу инсолацију исте паралеле φ као функцију времена, онда је ордината те криве, која одговара подну уоченога дана, према једначини 57), једнака $\frac{Q_\tau}{\tau}$. Ординате криве w, које одговарају другом којем моменту уоченога дана, једнаке су оној топлотној множини која би у интервалу од 24^h пала на јединицу површине, када би ϱ и δ било за све време једнако, радиусвектору и деклинацију сунца тога момента, подељеном са τ. Зато ће шрафирана површина криве w, која одговара интервалу τ, представљати — са незнатним занемарењем — топлотну множину $Q\tau$ која у току тога интервала падне на јединицу површине у уоченој географској ширини φ. Топлотна множина Q, која у произвољном броју дана који сачињавају интервал времена од t_1 до $t_2 = t_1 + n\tau$ падне на јединицу површине, биће представљена површином криве w која одговара томе интервалу, дакле интегралом:

$$Q = \int_{t_1}^{t_1 + n\tau} w \, dt \qquad \ldots 58).$$

Ту топлотну множину могли бисмо одредити и интеграцијом функције J, но при томе би морали узети у обзир дисконтинуитете те функције, т. ј. искључити из интеграције интервале у којима би она постала негативна, тако да би Q било претстављено коначним збиром интеграла, па би тај збир имао толико чланова колико би посматрани интервал времена имао дана.

Једначина 58) само је онда довољно тачна када интервал t_1 до t_2 садржава у себи цео број дана. То следује из слике 6. Замислимо да смо уочени интервал τ продужили за време $\triangle t$ које је мање од пола ноћи посматраног дана. Тиме продужењем интервала не мења се топлотна множина, јер за време ноћи нема инсолације као што јо то представљено сликом 6а), но према слици 6b) расте десна страна једначине 58) и зато она у томе случају не представља фактичну множину топлоте која пада у посматраном интервалу на јединицу порвшине. Једино када интервал t_1 до t_2 садржава у себи цео број дана једнаке су површине захваћене кривама J и w.

Рестрингција, да интервал t_1 до t_2 мора садржавати у себи цео број дана, отпада када говоримо о средњим топлотним множинама W што их прима уочена паралела у томе интервалу и које дефинишемо једначином:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} w \, dt \qquad \cdot \cdot \cdot \; 59).$$

Разлика између величина Q и W, дефинисаних једначинама 58) и 59), је ова: Величина Q означава ону топлотну множину која у посматраном интервалу пада на једну одређену јединицу површине у географској ширини φ, а величина W означава ону топлотну множину што би ју примала та иста јединица површине када би за време тога интервала сва места уочене паралеле φ примила једнаке топлотне множине. У величини W су, према томе, неједнакости распореда топлотних множина дуж једне паралеле изједначене. Те неједнакости су у кратким интервалима времена велике. Тако на пример може у интервалу од пола дана једно место паралеле φ да прими читаву дневну топлотну множину Q_τ, а

место које лежи диаметрално на истој паралели да не прими ништа. У току једнога тоталнога обрта би та максимална диференција потпуно исчезла када се за то време неби промениле величине ρ и δ. Како је мењање тих величина незнатно, то у току једнога дана примају све тачке једне те исте паралеле подједнаке топлотне множине. Увађањем величине W стварамо појам средњих топлотних множина дуж паралела и омогућавамо испитивање распореда топлотних множина у меридијоналном правцу, т. ј. од паралеле до паралеле. Величину W назваћемо средњом топлотном множином примљеном од паралеле φ у интервалу t_1 до t_2.

Желимо ли да одредимо величину W, то морамо све варијабилне у интегралу једначине 59) изразити помоћу једне једине да бисмо могли интеграцију извести. Као независну варијабилну, помоћу које су изражене остале, одабрао је *Wiener* у своме раду, о којем ћемо још говорити, праву дужину сунца λ, па му је пошло за руком да интеграл једначине 59) изрази помоћу *Legendre*-ових елиптичних интеграла прве, друге и треће врсте. Тај облик величине W није згодан за испитивање њених секуларних промена које потичу од секуларних варијација астрономских елемената земљине путање. Зато ћемо ми величину w развити у тригонометријску серију са аргументом λ у коме ћемо облику моћи да изведемо интеграцију 59) и да испитамо секуларне промене величине W. У исти мах имаћемо, узев у обзир једначину 56), и величину Q_τ изражену помоћу тригонометријске серије, што ће нам омогућити испитивање годишњих варијација температуре тла изазваних радијацијом сунца. Зато ћемо приступити развијању величине w у тригонометријску серију.

8. Развијање величине w у тригонометријски ред по потенцијама од $\sin\lambda$.

При развијању величине w, дефинисане једначинама 18) и 16), у ред ваља разликовати случајеве када се уочена паралела налази у арктичним зонама и када се налази у неартичној зони земље, т. ј. када је $\varphi > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и када је $\varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Мићемо се прво бавити случајем када се уочена паралела налази у неарктичној зони, т. ј. претпоставити да је испуњем услов

$$\varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \ldots 60).$$

Ставимо ли, краткоће ради:

$$\operatorname{tang}\varphi = n \quad \ldots 61)$$

$$\sin\varepsilon = k \quad \ldots 62)$$

онда добивају једначине 18) и 16) облик:

$$w = \frac{1}{\pi} J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \cos\varphi \{ n\psi_0 \sin\delta + \cos\delta \sin\psi_0 \} \quad \ldots 63)$$

$$\cos\psi_0 = -n \operatorname{tang}\delta \quad \ldots 64).$$

Зато је:

$$\sin\psi_0 = \sqrt{1 - \cos^2\psi_0} = \sqrt{1 - n^2 \operatorname{tang}^2\delta} =$$

$$= \sqrt{1 - n^2 \frac{\sin^2\delta}{1 - \sin^2\delta}} = \sqrt{\frac{1 - (1+n^3)\sin^3\delta}{\cos^2\delta}}$$

т. j.

$$\cos\delta \sin\psi_0 = \sqrt{1 - (1+n^2)\sin^2\delta}.$$

Из једначина 29) и 62) следује:

$$\sin\delta = k \sin\lambda \quad \ldots 65),$$

па је зато:

$$\cos\delta \sin\psi_0 = \sqrt{1 - k^2(1+n^2)\sin^2\lambda} \quad \ldots 66).$$

Овај се израз може за свако λ развити у ред, ако је:

$$k^2(1+n^2) < 1$$

т. j.

$$\sin^2\varepsilon\,(1 + \operatorname{tang}^2\varphi) < 1$$

$$\sin^2\varepsilon \sec^2\varphi < 1$$

$$\sin\varepsilon < \cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

дакле, ако је:

$$\varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

а то је у ствари претпостављено условом 60).

Развијемо ли, према томе, израз 66) у ред, то добивамо:

$$\cos\delta \sin\psi_0 = 1 - \frac{1}{2}(1+n^2)k^2\sin^2\lambda - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2.\,1}(1+n^2)^2 k^4 \sin^4\lambda -$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3.\,2.\,1}(1+n^2)^3 k^6 \sin^6\lambda - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{4.\,3.\,2.\,1}(1+n^2)^4 k^8 \sin^8\lambda -$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{5.\,4.\,3.\,2.\,1}(1+n^2)^5 k^{10} \sin^{10}\lambda - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1}(1+n^2)^6 k^{12} \sin^{12}\lambda -$$

$$- \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1}(1+n^2)^7 k^{14} \sin^{14}\lambda - \cdots \quad \ldots 67).$$

Даље је:

$$\sin\left(\psi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\psi_0 = n \operatorname{tang}\delta,$$

па зато:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \arcsin n \operatorname{tang}\delta \quad \cdot \cdot \cdot 68).$$

Израз $\arcsin n \operatorname{tang}\delta$ може се развити у ред ако је:

$$-1 < n \operatorname{tang}\delta < 1,$$

т. j.

$$\operatorname{tang}^2\varphi \operatorname{tang}^2\delta < 1$$

$$\operatorname{tang}^2\varphi < \operatorname{cotg}^2\delta$$

$$\varphi < \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Деклинација δ, мењајући своју величину у току године, достизава своју максималну вредност за време летног солстиција, па је у томе моменту једнака нагибу еклиптике ε. Зато је за развијање израза 65) у ред потребно и довољно да буде:

$$\varphi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

а то је претпостављено условом 60).

Зато је:

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2} + n \operatorname{tang}\delta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} n^3 \operatorname{tang}^3\delta +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} n^5 \operatorname{tang}^5\delta + \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\frac{1}{7}\cdot n^7 \operatorname{tang}^7\delta +$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} n^9 \operatorname{tang}^9\delta + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{1}{11}\cdot n^{11} \operatorname{tang}^{11}\delta +$$

$$\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{1}{13} n^{13} \operatorname{tang}^{13}\delta + \cdot \cdot \cdot 69).$$

Како је:

$$\operatorname{tang}\delta = \sqrt{\frac{\sin\delta}{1-\sin^2\delta}} = k\sin\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{1}{2}} \quad \cdot \cdot \cdot 70)$$

и

$$\psi_0 \sin\delta = \psi_0\, k \sin\lambda \quad \cdot \cdot \cdot 71),$$

то добивамо, ако ставимо вредност за tang из 70) у 69) па на тај начин добивену вредност за ψ_0 у 71):

$$\psi_0 \sin\delta = \frac{\pi}{2} k\sin\lambda + n\, k^2 \sin^2\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} n^3 k^4 \sin^4\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} n^5 k^6 \sin^6\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{5}{2}} +$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} n^7 k^8 \sin^8\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{7}{2}} +$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} n^9 k^{10} \sin^{10}\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{9}{2}} +$$

$$+ \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1}{11} n^{11} k^{12} \sin^{12}\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{11}{2}} +$$

$$+ \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{1}{13} n^{13} k^{14} \sin^{14}\lambda\,(1-k^2\sin^2\lambda)^{-\frac{13}{2}} + \cdot \cdot \cdot 72).$$

Развимо сада све чланове у заградама у ред и узмимо у коначном резултату у обзир све чланове до четрнаесте потенције од $k \sin \lambda$ онда добивамо:

$$(1-k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \lambda + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2.\ 1} k^4 \sin^4 \lambda +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3.\ 2.\ 1} k^6 \sin^6 \lambda + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{4.\ 3.\ 2.\ 1} n^8 \sin^8 \lambda +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} k^{10} \sin^{10} \lambda + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} k^{12} \sin^{12} \lambda$$

$$(1-k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} k^2 \sin^2 \lambda + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{2.\ 1} k^4 \sin^4 \lambda +$$

$$+ \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{3.\ 2.\ 1} k^6 \sin^6 \lambda + \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{4.\ 3.\ 2.\ 1} k^8 \sin^8 \lambda +$$

$$+ \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} k^{10} \sin^{10} \lambda + \cdots$$

$$(1-k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2} k^2 \sin^2 \lambda + \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{2.\ 1} k^4 \sin^4 \lambda +$$

$$+ \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{3.\ 2.\ 1} k^6 \sin^6 \lambda + \frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{4.\ 3.\ 2.\ 1} k^8 \sin^8 \lambda + \cdots$$

$$(1-k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{7}{2}} = 1 + \frac{7}{2} k^2 \sin^2 \lambda + \frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{2.\ 1} k^4 \sin^4 \lambda +$$

$$+ \frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{3.\ 2.\ 1} k^6 \sin^6 \lambda + \cdots$$

$$(1-k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{9}{2}} = 1 + \frac{9}{2} k^2 \sin^2 \lambda + \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{11}{2}}{2.\ 1} k^4 \sin^4 \lambda + \cdots$$

$$(1-k^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{11}{2}} = 1 + \frac{11}{2} k^2 \sin^2 \lambda + \cdots$$

Горњи чланови у вези са једначином 72) и 67) дају следећи израз у којем су чланови сложени по потенцијама од $\sin \lambda$

$$\cos \delta \sin \psi_0 + n\, \psi_0 \sin \delta = 1 + \frac{\pi}{2} n\, k \sin \lambda -$$

$$\frac{1}{2}(1+n^2)\, k^2 \sin^2 \lambda - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2.\ 1}(1+n^2)^2 k^4 \sin^4 \lambda +$$

$$+ n^2 k^2 \sin \lambda + \frac{1}{2} n^2 k^4 \sin^4 \lambda +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} n^4 k^4 \sin^2 \lambda +$$

$$- \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.\ 1.\ 3}{3.\ 2.\ 1}(1+n^2)^3 k^6 \sin^6 \lambda -$$

$$- \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.\ 1.\ 3.\ 5}{4.\ 3.\ 2.\ 1}(1+n^2)^4 k^8 \sin^8 \lambda +$$

$$+ \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.\ 3}{2.\ 1} n^2 k^6 \sin^6 \lambda + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.\ 3.\ 5}{3.\ 2.\ 1} n^2 k^8 \sin^3 \lambda +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} n^4 k^6 \sin^6 \lambda + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3.\ 5}{2.\ 1} n^4 k^8 \sin^8 \lambda +$$

$$+ \frac{1.\ 3}{2.\ 4}\cdot\frac{1}{5}\cdot n^6 k^6 \sin^6 \lambda + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.\ 3}{2.\ 4} n^6 k^8 \sin^8 \lambda +$$

$$+ \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6}\cdot\frac{1}{7} n^8 k^8 \sin^8 \lambda -$$

$$- \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1.\ 1.\ 3.\ 5.\ 7}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}(1+n^2)^5 k^{10} \sin^{10} \lambda -$$

$$- \frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.\ 1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}(1+n^2)^6 k^{12} \sin^{12} \lambda +$$

$$+ \frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{4.\ 3.\ 2.\ 1} n^2 k^{10} \sin^{10} \lambda +$$

$$+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{5.4.3.2.1}n^2k^{12}\sin^{12}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5.7}{2.1}n^4k^{10}\sin^{10}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3.5.7.9}{4.3.2.1}n^4k^{12}\sin^{12}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5.7}{2.1}n^6k^{10}\sin^{10}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5.7.9}{3.2.1}n^6k^{12}\sin^{12}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}n^8k^{10}\sin^{10}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{7.9}{2.1}n^8k^{12}\sin^{12}\lambda+$$

$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9}n^{10}k^{10}\sin^{10}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot n^{10}k^{12}\sin^{12}\lambda+$$

$$+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1}{11}n^{12}k^{12}\sin^{12}\lambda-$$

$$-\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1.1.3.5.7.9.11}{7.6.5.4.3.2.1}(1+n^2)^7k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.3.5.7.9.11}{6.5.4.3.2.1}n^2k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3.5.7.9.11}{5.4.3.2.1}n^4k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5.7.9.11}{4.3.2.1}n^6k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{7.9.11}{3.2.1}n^8k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{9.11}{2.1}n^{10}k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot n^{12}k^{14}\sin^{14}\lambda+$$

$$+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{1}{13}n^{14}k^{14}\sin^{14}\lambda.$$

Ставимо сада:

$$a_1=-\frac{1}{2}(1+n^2)+n^2=\frac{1}{2}(-1+n^2)$$

$$a_2=\frac{1}{2^3}\left[-(1+n^2)^2+2^2.n^2+\frac{2^2.}{3}n^4\right]$$

$$a_3=\frac{1}{2^4}\left[-(1+n^2)^3+2.3.n^2+2^2.n^4+\frac{2.3.}{5}n^6\right]$$

$$a_4=\frac{1}{2^7}\left[-5(1+n^2)^4+2^3.5n^2+2^3.5n^4+2^2.3n^6+2^3.\frac{5}{7}n^8\right]$$

$$a_5=\frac{1}{2^8}\cdot\frac{1}{3}\Big|-3.7.(1+n^2)^5+2.3.5.7\,n^2+2^3.5.7\,n^4+$$

$$2^2.9.7\,n^6+2^3.3.5.\,n^8+\frac{2.5.7}{3}n^{10}\Big]$$

$$a_6=\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1}{3}\Big[-7.9\,(1+n^2)^6+2^2.3.7.9\,n^2+2^2.5.7.9\,n^4+$$

$$+2^3\;3.7.9\,n^6+2^3.3.5.9\,n^8+2^2.3.5.7\,n^{10}+2^2.3.7.9\,\frac{n^{12}}{11}\Big]$$

$$a_7=\frac{1}{2^{11}}\Big[-3.11\,(1+n^2)^7+2.7.3.11\,n^2+2^2.7.3.11\,n^4+$$

$$=2.7.9.11\,n^6+2^3.5.3.11\,n^8+2.5.7.11^{10}+2^2.7.9\,n^{12}+$$

$$+2.7.3.11\,\frac{n^{14}}{13}\Big]$$

т. ј.

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}(-1+n^2)\\
a_2 &= \frac{1}{8}(-1+2n^2)+\frac{1}{24}n^4\\
a_3 &= \frac{1}{16}(-1+3n^2+n^4)+\frac{1}{80}n^6\\
a_4 &= \frac{5}{128}(-1+4n^2+2n^4)+\frac{1}{32}n^6+\frac{5}{896}n^8\\
a_5 &= \frac{7}{128}\left(-1+5n^2+\frac{10}{3}n^4+2n^6\right)+\frac{5}{256}n^8+\frac{7}{2304}n^{10}\\
a_6 &= \frac{21}{1024}(-1+6n^2+5n^4+4n^6)+\\
&\quad+\frac{1}{1024}(45n^8+14n^{10})+\frac{21}{11264}n^{12}\\
a_7 &= \frac{33}{2048}(-1+7n^2+7n^4+7n^6+5n^8)+\\
&\quad+\frac{7}{2048}(11n^{10}+3n^{12})+\frac{33}{26624}n^{14}
\end{aligned}\right\} \quad 73)$$

онда је:

$$\cos\delta\sin\psi_0+n\,\psi_0\sin\delta = 1+\frac{\pi}{2}n\,k\sin\lambda+$$
$$+a_1k^2\sin^2\lambda+a_2k^4\sin^4\lambda+a_3k^6\sin^6\lambda+a_4k^8\sin^8\lambda+$$
$$+a_5k^{10}\sin^{10}\lambda+a_6k^{12}\sin^{12}\lambda+a_7k^{14}\sin^{14}\lambda+\cdot\cdot\quad\cdot\;74)$$

или:

$$\cos\delta\sin\psi_0+n\,\psi_0\sin\delta = 1+\frac{\pi}{2}n\,k\sin\lambda+$$
$$+\sum_m a_m k^{2m}\sin^{2m}\lambda \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;75)$$

Тако је, према једначини 63):

$$w=\frac{1}{\pi}J_0\frac{a^2}{\rho^2}\cos\varphi\left\{1+\frac{\pi}{2}n\,k\sin\lambda+\sum_m a_m k^{2m}\sin^{2m}\lambda\right\} \quad 76)$$

где су коефиоријенти a_m; $m = 1, 2, 3, \cdot\cdot\cdot\cdot$ дати једначинама 73).

Горње развијање у ред било је везано на услов 60). Испитивајмо сада случај када се уочена паралела налази у арктичној зони земље, т. ј. када је

$$\varphi > \frac{\pi}{2} \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;77)$$

Феномен радијације арктичких зона разликује се по својој природи од радијације осталих зона земље тиме, што у једном извесном интервалу године — ми ћемо тај интервал назвати дуги дан — сунце за време $\tau = 24^h$ у опште не залази под хоризонат, у другом једном интервалу године — за време друге ноћи — у опште не излази над хоризонат док се у осталима деловима године — интервали са дневним изласком и заласком сунца — посматрани феломен принципијелно не разликује од феломена радијације неарктичких зона земље.

Уочимо, дакле, једну паралелу географске ширине φ, која задовољава услов 77). Сатни углови изласка и заласка сунчевог одређени су једначином 22), или употребив ознаку 61), једначином:

$$\cos\omega_0 = -n\tang\delta \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;78)$$

Интервал дугога дана године, т. ј. када сунце престаје да залази свакога дана наступа у моменту када ω_0 достигне вредност π, т. ј. $\cos\omega_0$ вредност -1, дакле у моменту када деклинација сунца достигне вредност одређену једначином:

$$n\tang\delta = 1 \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;79)$$

Догод деклинација сунца задовољава неједнакост

$$n \operatorname{tang} \delta > 1 \quad \cdot \cdot \cdot 80)$$

сунце не залази под хоризонат. Зато је интервал дугога дана одређен неједначином 80).

Интервал дуге ноћи, т. ј. када сунце престаје да изалази свакога дана наступа у моменту када ω_0 опада до вредности нула, т. ј. када је $\cos \omega_0 = 1$, дакле у моменту када деклинација сунца опадне до вредности одређене једначином:

$$n \operatorname{tang} \delta = -1 \quad \cdot \cdot \cdot 81).$$

Та је вредност за паралеле северних географских ширина негативна.

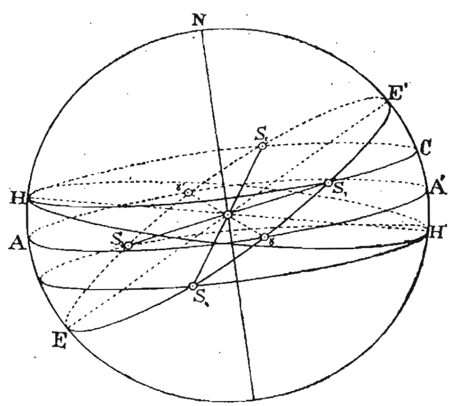
Догод деклинација сунца задовољава неједнакост

$$n \operatorname{tang} \delta < -1 \quad \cdot \cdot \cdot 82)$$

сунце не изалази над хоризонат. Зато је интервал дуге ноћи одређен неједначином 82).

Догод деклинација сунца задовољава услов:

$$-1 < n \operatorname{tang} \delta < +1 \quad \cdot \cdot \cdot 83)$$



Сл. 7.

сунце изалази и залази свакога дана, па су интервали дневнога излазка и залазка сунца одређени неједначином 83).

Нека нам у слици 7 представља HH' раван хоризонта једног уоченога места земљине површине којега географска ширина φ задовољава услов 77). AA' нека буде раван екватора, EE' раван еклиптике, а N северни

пол, онда је лук HN једнак географској ширини φ уоченога места. Положимо кроз тачку N, у којој се сече меридијан са хоризонтом, круг $H\,S_1\,C$ паралелан са екватором који сече еклиптику у тачки S_1, онда је $\operatorname{arc} NS_1 = \varphi$, а деклиниција δ тачке S_1 еклиптике:

$$\delta = \operatorname{arc} S_1 B = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

т. ј.

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{1}{\operatorname{tang} \varphi} = \frac{1}{n}$$

или

$$n \operatorname{tang} \delta = 1.$$

Када сунце у своме привидном годишњем току достигне тачку S_1 еклиптике онда почиње, као што то следује из јединачне 79) и као што се може видети из горње слике, интервал другога дана који траје до год сунце не стигне у тачку S_2 еклиптике која има исту деклинацију као и тачка S_1, Од тачке S_2 па до тачке S_3 еклиптике, која има исту деклинацију као и тачке S_1 и S_2 но противнога знака, траје интервал дневнога излазка и залазка сунца. Од тачке S_3 па до тачке S_4 еклиптике, која има исту деклинацију као и тачка S_3, траје интервал дуге ноћи, а од тачке S_4 па до тачке S_1 опет интервал дневнога излазка и залазка сунца.

Деклинације тачака S_1, S_2, S_3, S_4 одређене су условима 79) и 81) које можемо спојити у један једини:

$$n^2 \operatorname{tang}^2 \delta = 1$$

из којега следује једначина:

$$\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 \delta} = \sin^2 \delta \quad \ldots 84).$$

Означимо ли са λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 дужине тачака S_1, S_2,

S_3, S_4, па узмемо ли у обзир једначине 65) и 84), то ће те дужине бити четири корена једначине

$$\sin^2 \lambda = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + n^2} \qquad \ldots\ 85).$$

При томе је:

$$\left.\begin{aligned} & o < \lambda_1 < \frac{\pi}{2} \\ & \frac{\pi}{2} < \lambda_2 < \pi \\ & \pi < \lambda_3 < \frac{3}{2}\pi \\ & \frac{3}{2}\pi < \lambda_3 < 2\pi \end{aligned}\right| \qquad \ldots\ 86).$$

те је:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \pi - \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \pi + \lambda_1 \\ \lambda_4 &= 2\pi - \lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ 86a).$$

За време интервала дуге ноћи, т. ј. за дужине:

$$\lambda_3 < \lambda < \lambda_4$$

је уочена паралела потпуно неосветљена, па је за тај интервал стално:

$$w = o \qquad \ldots\ 87).$$

За време интервала дугога дана, т. ј. за дужине

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$$

је уочена паралела потпуно осветљена, па је зато

$$\psi_0 = \pi$$

тако је једначина *18*) добива облик:

$$w = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \sin\varphi \sin\delta \qquad \ldots\ 88).$$

или обзиром на једначину *65*)

$$w = J_0 \frac{a^2}{\rho^2} k \sin\varphi \sin\lambda \qquad \ldots\ 89)$$

Ред *76*) редукује се, према томе, у интервалу дугога дана на један једини члан.

Обратимо сада пажњу на величину w у интервалима дневнога изласка и заласка сунца, т. ј. за дужине:

$$\begin{gathered} o < \lambda < \lambda_1 \\ \lambda_2 < \lambda < \lambda_3 \\ \lambda_4 < \lambda < 2\pi \end{gathered}$$

У тима је интервалима ψ_0 коначно и различито од π, па се зато w не може изразити као функција од $\sin \lambda$ у експлицитном коначном облику. Питајмо дали је у томе случају дозвољено развијање функције w у тригонометријски ред. То је развијање, као што следује из једначина *66*) и *68*), дозвољено ако је:

$$k^2 (1 + n^2) \sin^2 \lambda < 1$$

и

$$-1 < n \operatorname{tang} \delta < 1 .$$

Оба су ова услова, као што то следује из једначина *83*) и *85*), испуњена у посматраном интервалу, развијање функције w у серију дозвољено, па зато једначина *76*) важи и у овом случају.

Рекапитулишући досадање резултате можемо да кажемо:

Величина w представљена је за све ширине неарктичне зоне изразом *76*); за арктичне зоне важи тај израз само за интервал дневнога изласка и заласка сунца, па се он у интервалу дугога дана редукује на израз *89*), а у интервалу дуге ноћи на израз *87*).

Појам средње инсолације w паралеле не може се применити на пол који је једна математска тачка.

Ред $\sum_m a_m k^{2m} \sin^{2m} \lambda$ који се појављује у изразу за w и помоћу којега су изведени и следећи резултати конвергира врло рапидно. То ће показати нумерички резултати који ће бити публиковани у радњи о секуларним варијацијама распореда сунчеве радијације на површини земље.

9. Средња топлотна множина W која пада на паралелу φ за време док сунце превали један произвољан део еклиптике.

Средња топлотна множина W, примљена у интервалу t_1 до t_2 од паралеле φ, дата је изразом 59), којему можемо дати облик:

$$W = \int_{\lambda'}^{\lambda''} w \frac{dt}{d\lambda} d\lambda \quad \ldots 90).$$

Сада представља W ону средњу топлотну множину која пада на уочену паралелу за време док сунце преваљује интервал еклиптике од λ' до λ''.

Из једначина 76) 87) и 89) следује да је w представљено изразом:

$$w = \frac{1}{\pi} J_0 \frac{a^2}{\varrho^2} \cos\varphi \cdot f(\lambda) \quad \ldots 91)$$

при чему је $f(\lambda)$ једнако:

a) за неарктичку зону за све дужине λ и за арктичке зоне за дужине λ еклиптике које одговарају интервалу дневног изласка и заласка сунца:

$$f(\lambda) = 1 + \frac{\pi}{2} n k \sin\lambda + \sum_m a_m k^{2m} \sin^{2m}\lambda \quad \ldots 92)$$

b) за арктичке зоне за дужине λ које одговарају интервалу дугога дана:

$$f(\lambda) = \pi n k \sin\lambda \quad \ldots 93);$$

c) за арктичне зоне за дужине λ, које одговарају интервалу дуге ноћи:

$$f(\lambda) = 0 \quad \ldots 94).$$

Зато добива једначина 90) овај облик:

$$W = \frac{1}{\pi} J_0 a^2 \cos\varphi \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{1}{\varrho^2} \frac{dt}{d\lambda} f(\lambda)\, d\lambda \quad \ldots 95).$$

Израз $\frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\lambda}{dt}$ претставља нам секторску брзину релативног кретања сунчевог око земље или такође секторску брзину кретања земље око сунца, а та је, према Kepler-овом закону, константна. У интервалу T од године дана опише земља потпуну површину елипсе, дакле величину $a b \pi$, где је b мала полуоса земљине путање, зато је секторска брзина једнака:

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{a b \pi}{T} \quad \ldots 96).$$

Ставимо ли горњу вредност у једначину 95), то добивамо:

$$W = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \int_{\lambda'}^{\lambda''} f(\lambda)\, d\lambda \quad \ldots 97).$$

Да бисмо горњу интеграцију извели даћемо величини $f(\lambda)$ облик линеарне функције синуса и косинуса лукова $\lambda,\ 2\lambda,\ 4\lambda\ .\,,\,.\,.$

У то име ставимо:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda + i\sin\lambda &= u \\ \cos\lambda - i\sin\lambda &= v \end{aligned}\right\} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 98)$$

где i означава имагинарну јединицу. Онда је

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\lambda &= u + v \\ 2\, i\sin\lambda &= u - v \end{aligned}\right\} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 99)$$

па зато:

$$(2i)^{2m}\sin^{2m}\lambda = (u - v)^{2m}$$

или ако развијемо у ред и узмемо у обзир да је

$$i^2 = -1$$

$$(-1)^m\, 2^{2m}\sin^{2m}\lambda = u^{2m} - \binom{2m}{1} u^{2m-1} v + \binom{2m}{2} u^{2m-2} v^2 - \cdots$$

Десна страна горње једначине има непаран број чланова. Сложимо ли два по два члана са истим биномијалним коефицијентима заједно, то добивамо:

$$(-1)^m\, 2^{2m}\sin^{2m}\lambda = (u^{2m} + v^{2m}) - \binom{2m}{1} u\, v\,(u^{2m-2} + v^{2m-2}) +$$

$$+ \binom{2m}{2} u^2 v^2 (u^{2m-4} + v^{2m-4}) - \cdots\cdots \mp \binom{2m}{m} u^m v^m \quad .\ .\ 100).$$

Једначине 98) дају:

$$u\,v = \cos^2\lambda + \sin^2 = 1 \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 101)$$

$$u^{2n} + v^{2n} = (\cos\lambda + i\sin\lambda)^{2n} + (\cos\lambda - i\sin\lambda)^{2n}.$$

Но како је према Moivre-овом образцу:

$$(\cos\lambda + i\sin\lambda)^{2n} = \cos 2n\lambda + i\sin 2n\lambda$$

$$(\cos\lambda + i\sin\lambda)^{2n} = \cos 2n\lambda - i\sin 2n\lambda\,,$$

то је:

$$u^{2n} + v^{2n} = 2\cos 2n\lambda \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 102).$$

Применимо ли једначине 101) и 102) на изразе у једначини 100), то добивамо:

$$(-1)^m\, 2^{2m-1}\sin^{2m}\lambda = \cos 2m\lambda - \binom{2m}{1}\cos(2m-2)\lambda +$$

$$+ \binom{2m}{2}\cos(2m-4)\lambda - \cdots\cdots \mp \binom{2m}{m}\frac{1}{2} \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 103).$$

Ставимо ли у горњој једначини редом $m = 1,\ 2,\ 3, \cdots 7$, то добивамо ове изразе:

$$-2\sin^2\lambda = \cos 2\lambda - \binom{2}{1}\frac{1}{2}$$

$$+2^3\sin^4\lambda = \cos 4\lambda - \binom{4}{1}\cos 2\lambda + \binom{4}{2}\frac{1}{2}$$

$$-2^5\sin^6\lambda = \cos 6\lambda - \binom{6}{1}\cos 4\lambda + \binom{6}{2}\cos 2\lambda - \binom{6}{3}\frac{1}{2}$$

$$+2^7\sin^8\lambda = \cos 8\lambda - \binom{8}{1}\cos 6\lambda + \binom{8}{2}\cos 4\lambda -$$

$$- \binom{8}{3}\cos 2\lambda + \binom{8}{3}\frac{1}{2}$$

$$-2^9\sin^{10}\lambda = \cos 10\lambda - \binom{10}{1}\cos 8\lambda + \binom{10}{2}\cos 6\lambda -$$

$$- \binom{10}{3}\cos 4\lambda + \binom{10}{4}\cos 2\lambda - \binom{10}{5}\frac{1}{2}$$

$$+2^{11}\sin^{12}\lambda = \cos 12\lambda - \binom{12}{1}\cos 10\lambda + \binom{12}{2}\cos 8\lambda -$$

$$-\binom{12}{3}\cos 6\lambda + \binom{12}{4}\cos 4\lambda - \binom{12}{5}\cos 2\lambda + \binom{12}{6}\frac{1}{2}$$

$$-2^{13}\sin^{14}\lambda = \cos 14\lambda - \binom{14}{1}\cos 12\lambda + \binom{14}{2}\cos 10\lambda -$$

$$-\binom{14}{3}\cos 8\lambda + \binom{14}{4}\cos 6\lambda - \binom{14}{5}\cos 4\lambda +$$

$$+\binom{14}{6}\cos 2\lambda - \binom{14}{7}\frac{1}{2}$$

Субституишемо ли на тај начин добивене вредности за $\sin^2\lambda$, $\sin^4\lambda$, $\sin^6\lambda \cdots\cdots$ у једначину 92), то добивамо:

$$f(\lambda) = 1 + \frac{\pi}{2} n k \sin\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^2}\binom{2}{1} a_1 k^2 - \frac{1}{2} a_1 k^2 \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^4}\binom{4}{2} a_2 k^4 - \frac{1}{2^3}\binom{4}{1} a_2 k^4 \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^6}\binom{6}{3} a_3 k^6 - \frac{1}{2^5}\binom{6}{2} a_3 k^6 \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^8}\binom{8}{4} a_4 k^8 - \frac{1}{2^7}\binom{8}{3} a^4 k^8 \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{5} a_5 k^{10} - \frac{1}{2^9}\binom{10}{4} a_5 k^{10} \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{12}}\binom{12}{6} a_6 k^{12} - \frac{1}{2^{11}}\binom{12}{5} a_6 k^{12} \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{14}}\binom{14}{7} a_7 k^{14} - \frac{1}{2^{13}}\binom{14}{6} a_7 k^{14} \cos 2\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^3} a_2 k^4 \cos 4\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^5}\binom{6}{1} a_3 k^6 \cos 4\lambda - \frac{1}{2^5} a_3 k^6 \cos 6\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^7}\binom{8}{2} a_4 k^8 \cos 4\lambda - \frac{1}{2^7}\binom{8}{1} a_4 k^8 \cos 6\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^9}\binom{10}{3} a_5 k^{10} \cos 4\lambda - \frac{1}{2^9}\binom{10}{2} a_5 k^{10} \cos 6\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{11}}\binom{12}{4} a_6 k^{12} \cos 4\lambda - \frac{1}{2^{11}}\binom{12}{3} a_6 k^{12} \cos 6\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{13}}\binom{14}{5} a_7 k^{14} \cos 4\lambda - \frac{1}{2^{13}}\binom{14}{4} a_7 k^{14} \cos 6\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^7} a_4 k^8 \cos 8\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^9}\binom{10}{1} a_5 k^{10} \cos 8\lambda - \frac{1}{2^9} a_5 k^{10} \cos 10\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{11}}\binom{12}{2} a_6 k^{12} \cos 8\lambda - \frac{1}{2^{11}}\binom{12}{1} a_6 k^{12} \cos 10\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{13}}\binom{14}{3} a_7 k^{14} \cos 8\lambda - \frac{1}{2^{13}}\binom{14}{2} a_7 k^{14} \cos 10\lambda +$$

$$+\frac{1}{2^{11}} a_6 k^{12} \cos 12\lambda$$

$$+\frac{1}{2^{13}}\binom{14}{1} a_7 k^{14} \cos 12\lambda - \frac{1}{2^{13}} a_7 k^{14} \cos 14\lambda \qquad 104).$$

Ставимо ли, краткоће ради:

$$
\left.
\begin{aligned}
b_0 &= 1 + \frac{1}{2^2}\binom{2}{1} a_1 k^2 + \frac{1}{2^4}\binom{4}{2} a_2 k^4 + \frac{1}{2^6}\binom{6}{3} a_3 k^6 + \\
&\quad + \frac{1}{2^8}\binom{8}{4} a_4 k^8 + \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{5} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^{12}}\binom{12}{6} a_6 k^{12} + \\
&\quad + \frac{1}{2^{14}}\binom{14}{7} a_7 k^{14} \\
b_1 &= \frac{1}{2}\Big\{ a_1 k^2 + \frac{1}{2^2}\binom{4}{1} a_2 k^4 + \frac{1}{2^4}\binom{6}{2} a_3 k^6 + \frac{1}{2^6}\binom{8}{3} a_4 k^8 + \\
&\quad + \frac{1}{2^8}\binom{10}{4} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^{10}}\binom{12}{5} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^{12}}\binom{14}{6} a_7 k^{14} \Big\} \\
b_2 &= \frac{1}{2^3}\Big\{ a_2 k^4 + \frac{1}{2^2}\binom{6}{1} a_3 k^6 + \frac{1}{2^4}\binom{8}{2} a_4 k^8 + \frac{1}{2^6}\binom{10}{3} a_5 k^{10} + \\
&\quad + \frac{1}{2^8}\binom{12}{4} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^{10}}\binom{14}{5} a_7 k^{14} \Big\} \\
b_3 &= \frac{1}{2^5}\Big\{ a_3 k^6 + \frac{1}{2^2}\binom{8}{1} a_4 k^8 + \frac{1}{2^4}\binom{10}{2} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^6}\binom{12}{3} a_6 k^{12} + \\
&\quad + \frac{1}{2^8}\binom{14}{4} a_7 k^{14} \Big\} \\
b_4 &= \frac{1}{2^7}\Big\{ a_4 k^8 + \frac{1}{2^2}\binom{10}{1} a_5 k^{10} + \frac{1}{2^4}\binom{12}{2} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^6}\binom{14}{3} a_7 k^{14} \Big\} \\
b_5 &= \frac{1}{2^9}\Big\{ a_5 k^{10} + \frac{1}{2^2}\binom{12}{1} a_6 k^{12} + \frac{1}{2^4}\binom{14}{2} a_7 k^{14} \Big\} \\
b_6 &= \frac{1}{2^{11}}\Big\{ a_6 k^{12} + \frac{1}{2^2}\binom{14}{4} a_7 k^{14} \Big\} \\
b_7 &= \frac{1}{2^{13}} a_7 k^{14}
\end{aligned}
\right\} \quad 105)
$$

онда је:

$$f(\lambda) = \frac{\pi}{2} n k \sin\lambda + \sum_{m=0}^{m=7} (-1)^m b_m \cos 2m\lambda \quad . \quad . \quad . \quad 106).$$

Изрази 91) и 97) добивају следеће облике који важе за неарктичну зону потпуно, а за артичке зоне у интевалима дневног изласка и залазка сунца:

$$
\begin{aligned}
w = \frac{1}{\pi} J_0 \frac{a^2}{\rho^2} \cos\varphi \Big\{ \frac{\pi}{2} n k \sin\lambda + \\
+ \sum_{m=0}^{m=7} (-1)^m b_m \cos 2m\lambda \Big\} \quad . \quad . \quad . \quad 107)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \int_{\lambda'}^{\lambda''} \Big[\frac{\pi}{2} nk \sin\lambda + \\
+ \sum_{m=0}^{m=7} (-1)^m b_m \cos 2m\lambda \Big] d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad 108)
\end{aligned}
$$

т. ј.

$$
\begin{aligned}
W = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \int_{\lambda'}^{\lambda''} \Big[\frac{\pi}{2} nk \sin\lambda + b_0 - b_1 \cos\lambda + \\
+ b_2 \cos 4\lambda - b_3 \cos 6\lambda + b_4 \cos 8\lambda - b_5 \cos 10\lambda + \\
+ b_6 \cos 12\lambda - b_7 \cos 14\lambda \Big] d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad 109)
\end{aligned}
$$

Интеграција ове једначине даје:

$$
\begin{aligned}
W = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \Big\{ b_0 (\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} n k (\cos\lambda'' - \cos\lambda') - \\
- \frac{b_1}{2} (\sin 2\lambda'' - \sin 2\lambda') + \frac{b_2}{4} (\sin 4\lambda'' - \sin 4\lambda') -
\end{aligned}
$$

$$-\frac{b_3}{6}(\sin 6\lambda''-\sin 6\lambda')+\frac{b_4}{8}(\sin 8\lambda''-\sin 8\lambda')-$$

$$-\frac{b_5}{10}(\sin 10\lambda''-\sin 10\lambda')+\frac{b_6}{12}(\sin 12\lambda''-\sin 12\lambda')-$$

$$-\frac{b_7}{14}(\sin 14\lambda''-\sin 14\lambda')\Big\} \quad \cdots 110)$$

или:

$$W=\frac{T}{2\pi^2}J_0\frac{a}{b}\cos\varphi\Big\{b_0(\lambda''-\lambda')-\frac{\pi}{2}nk(\cos\lambda''-\cos\lambda')+$$

$$+\sum_{m=1}^{m=7}(-1)^m\frac{b_m}{2m}(\sin 2m\lambda''-\sin 2m\lambda')\Big\} \quad \cdots 111)$$

Ова једначина представља нам средњу топлотну множину која пада на уочену паралелу за време док се сунце креће на еклиптици од дужина λ' до λ''. За арктичке зоне за време интервала дугога дана добива величина W, обзиром на једначине 97) и 93), овај облик:

$$W=\frac{T}{2\pi}J_0\frac{a}{b}nk\cos\varphi\int_{\lambda'}^{\lambda''}\sin\lambda\,d\lambda$$

т. ј.

$$W=\frac{T}{2\pi}J_0\frac{a}{b}k\sin\varphi(\cos\lambda'-\cos\lambda'') \quad \cdots 112).$$

Примењена на пол, т. ј. за $\varphi=\frac{\pi}{2}$, добива горња једначина облик:

$$W=\frac{T}{2\pi}J_0\frac{a}{b}k(\cos\lambda'-\cos\lambda'') \quad \cdots 112_a)$$

па представља фактичну топлотну множину која пада на јединицу површине на полу док сунце преваљује лук еклиптике ад λ' до λ''.

Једначине 111) и 112) су најважнији резултати наше радње. Из њих следују, пре свега, ове конзеквенције;

Величина W је инваријантна према субституцији:

$$\varphi=-\varphi$$

$$\lambda'=\lambda'+\pi$$

$$\lambda''=\lambda''+\pi$$

где је:

$$\cos(\lambda'+\pi)=-\cos\lambda'$$

$$\cos(\lambda''+\pi)=-\cos\lambda''$$

тако да промена знака од n не утиче на промену члана:

$$\frac{\pi}{2}nk(\cos\lambda''-\cos\lambda')$$

и јер је:

$$\sin 2(\lambda+\pi)=\sin 2\lambda$$

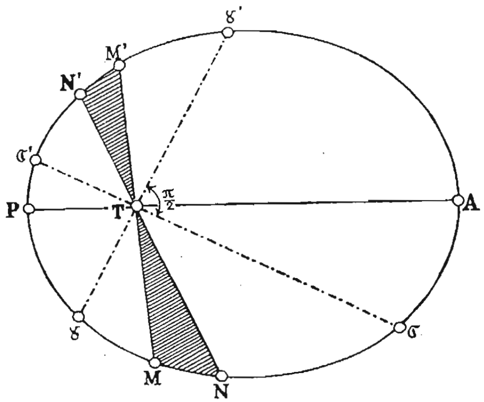
$$\sin 4(\lambda+\pi)=\sin 4\lambda$$

. . . .

а сем тога долази и у коефицијентима b, дефинисаним једначинама 103) и 73), увек у парној потенцији

Овај инваријабилитет величине W према горњој субституцији доказује, да је средња множина топлоте што ју једна паралела северне хемисфере добија за време док сунце преваљује део еклиптике од λ' до λ'' једнака средњој топлотној множини што ју добива паралела јужне хемисфере, а исте географске ширине, док сунце преваљује део еклиптике између дужина $\lambda'+\pi$ и $\lambda''+\pi$.

Нека нам у слици 8 представља елипса $P ♈ A ♈'$ еклиптику, T онај њен фокус у којем се привидно земља налази, а ♈ нека буде пролетна еквинокцијална тачка, онда следује из пређашњег, да је средња множина топлоте, што ју добива једна паралела северне хемисфере док сунце преваљује лук еклиптике MN, јед-



Сл. 8.

нака средњој множини топлоте што ју добива паралела исте географске ширине јужне хемисфере док сунце преваљује лук еклиптике $M' N'$. Како то важи за све паралеле, то је средња множина топлоте што ју добива северна хемисфера док сунце преваљује лук еклиптике MN једнака средњој множини топлоте што ју добива јужна хемисфера док сунце преваљује лук еклиптике $M' H'$.*)

Важно је да већ сада споменемо — и ако ћемо о томе касније опширније говорити — да једнакост споменутих топлотних множина неби и при потпуном

*) Види такође чланак: *Le Gourant de Tromelin,* Sur la répartition calorifique de la chaleur du soleil à la surface des hémisphères nord et sud du globe terrestre. Comptes rendus. Tome 115. 1892.

хомогенитету земаљске површине условљавала једнакост термичких прилика северне и јужне хемисфере, јер времена, за која северна и јужна хемисфера примају исте топлотне множине, нису једнака пошто сунце преваљује, према Kepler-овом закону, лук MN у другом времену него лук $M' N'$.

10. Средње топлотне множине W, примљене за време астрономских годишњих доба.

Нека нам у слици 8. представља ♈ пролетну, а ♈' јесењу еквинокцијалну тачку, σ летни, а σ' зимњи солстициум, онда је права $\sigma\,\sigma'$ нормална на еквинокцијалну линију ♈ ♈'. Времена, за која сунце у своме привидноме току преваљује квадрантне ♈ σ, σ ♈', ♈' σ' σ' ♈, зову се астрономска годишња доба. Према томе обухвата:

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{пролетни квадрант} & \text{I} & \text{интервал од } \lambda = o & \text{до } \lambda = \dfrac{\pi}{2} \\[2ex]
\text{летни} \quad » & \text{II} & » \quad » \ \lambda = \dfrac{\pi}{2} & » \ \lambda = \pi \\[2ex]
\text{јесењи} \quad » & \text{III} & » \quad » \ \lambda = \pi & » \ \lambda = \dfrac{3}{2}\pi \\[2ex]
\text{зимњи} \quad » & \text{IV} & » \quad » \ \lambda = \dfrac{3}{2}\pi & » \ \lambda = 2\pi
\end{array}\right\} \quad 113).$$

Означимо са

$$W_{\mathrm{I}},\ W_{\mathrm{II}},\ W_{\mathrm{III}},\ W_{\mathrm{IV}}$$

топлотне множине, што их прима паралела северне географске ширине φ за време док сунце преваљује квадранте I, II, III, IV, а са

$$W'_{\mathrm{I}},\ W'_{\mathrm{II}},\ W'_{\mathrm{III}},\ W'_{\mathrm{IV}}$$

топлотне множине, што их прима паралела јужне географске ширине φ за време док сунце превађује квадранте I, II, III, IV, онда следује из резултата прећашње главе да је за све географске ширине φ:

$$\left.\begin{aligned} W'_{\mathrm{I}} &= W_{\mathrm{III}} \\ W'_{\mathrm{II}} &= W_{\mathrm{IV}} \\ W'_{\mathrm{III}} &= W_{\mathrm{I}} \\ W'_{\mathrm{IV}} &= W_{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 114)$$

Израчунамо ли, помоћу једначине 111) и релација 113), величине W_{I}, W_{II}, W_{III}, W_{IV} за произвољну паралелу неарктичне зоне то добивамо:

$$W_{\mathrm{I}} = \frac{T}{4\pi} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\{b_0 + nk\} \quad \ldots 115)$$

$$W_{\mathrm{II}} = \frac{T}{4\pi} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\{b_0 + nk\} \quad \ldots 116)$$

$$W_{\mathrm{III}} = \frac{T}{4\pi} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\{b_0 - nk\} \quad \ldots 117)$$

$$W_{\mathrm{IV}} = \frac{T}{4\pi} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\{b_0 - nk\} \quad \ldots 118)$$

За географске ширине арктичких зона ваља при израчунавању величина W_{I}, W_{II}, W_{III}, W_{IV} употребити једначину 111) за интервал са дневним излазком и залазком сунца, а једначину 112) за интервал дугога дана. Узев у обзир релације 113) и 86) добивамо:

$$W_{\mathrm{I}} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\Big\{b_0 (\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} nk(\cos\lambda'' -$$

$$- \cos\lambda') + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} (\sin 2m\lambda'' - \sin 2m\lambda')\Big\}_{\lambda'=0}^{\lambda''=\lambda_1} +$$

$$+ \frac{T}{2\pi} J_0 \frac{a}{b} k \sin\varphi \,(\cos\lambda' - \cos\lambda',)_{\lambda'=\lambda_1}^{\lambda''=\frac{\pi}{2}}$$

$$W_{\mathrm{I}} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\Big\{b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} nk + \frac{\pi}{2} nk \cos\lambda_1 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m\lambda_1\Big\} \quad \ldots\ldots 119)$$

$$W_{\mathrm{II}} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\Big\{ b_0 (\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} nk (\cos\lambda'' -$$

$$- \cos\lambda') + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} (\sin 2m\lambda'' - \sin 2m\lambda')\Big\}_{\lambda'=\lambda_2}^{\lambda=\pi} +$$

$$+ \frac{T}{2\pi} J_0 \frac{a}{b} k \sin\varphi \,(\cos\lambda' - \cos\lambda'')_{\lambda'=\frac{\pi}{2}}^{\lambda''=\lambda_2}$$

но како је: $\lambda_2 = \pi - \lambda_1$
то је:

$$W_{\mathrm{II}} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\Big\{b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} nk + \frac{\pi}{2} nk \cos\lambda_1 +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m\lambda_1\Big\} \quad \ldots 120).$$

Како је у интервалу дуге ноћи т. ј. од λ_3 до $\frac{3}{2}\pi$ топлотна множина W равна је нули, то је:

$$W_{\mathrm{III}} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \,\Big\{b_0 (\lambda'' - \lambda') - \frac{\pi}{2} nk (\cos\lambda'' -$$

$$- \cos\lambda') + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} (\sin 2m\lambda'' - \sin 2m\lambda')\Big\}_{\lambda'=\pi}^{\lambda''=\lambda_3}$$

но како је:

$$\lambda_3 = \pi + \lambda_1$$

то је:

$$W_{III} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \{b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} nk + \frac{\pi}{2} nk \cos\lambda_1 + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \text{isn}\, 2m\lambda_1\} \quad \ldots\ 121).$$

На исти начин добивамо:

$$W_{IV} = \frac{T}{2\pi^2} J_0 \frac{a}{b} \cos\varphi \{b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} nk + \frac{\pi}{2} nk \cos\lambda_1 + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m\lambda_1\} \quad \ldots\ 122)$$

Из једначина 114) до 122) следује да је све географске ширине:

$$\left.\begin{aligned} W_{II} &= W_I \\ W_{IV} &= W_{III} \\ W'_{II} &= W'_I \\ W'_{IV} &= W'_{III} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 123)$$

Зато се могу свих осам величина:

$$W_I,\ W_{II},\ W_{III},\ W_{IV},\ W''_I,\ W'_{II},\ W'_{III},\ W'_{IV}$$

изразити помоћу величина W_I и W_{III}. Ове две величине карактеризују распоред топлотних множина на земљи у току године. Још је боље место тих величина увести величине W_e и W_h што их прима уочена паралела за време летне и за време зимске

полугодине. Те су величине, према једначинама 123), једнаке:

$$\left.\begin{aligned} W_e &= 2\, W_I \\ W_h &= 2\, W_{III} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 124).$$

Означимо ли ексцентрицитет еклиптике са e, то је:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad \ldots\ 125),$$

па су полугодишње топлотне множине W_e и W_h, према једначинама 115), 117), 119) и 121), дате изразима:

a) за неарктичку зону;

$$W_e = \frac{T}{2\pi} J_0 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cos\varphi \{b_0 + nk\} \quad \ldots\ 126)$$

$$W_h = \frac{T}{2\pi} J_0 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cos\varphi \{b_0 - nk\} \quad \ldots\ 127)$$

b) за арктичке зоне:

$$W_e = \frac{T}{\pi^2} J_0 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cos\varphi \left\{ b_0 \lambda_1 + \frac{\pi}{2} nk + \frac{\pi}{2} nk \cos\lambda_1 + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m\lambda_1 \right\} \quad \ldots\ 128)$$

$$W_h = \frac{T}{\pi^2} J_0 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \cos\varphi \left\{ b_0 \lambda_1 - \frac{\pi}{2} nk + \frac{\pi}{2} nk \cos\lambda_1 + \sum_{m=1}^{m=7} (-1)^m \frac{b_m}{2m} \sin 2m\lambda_1 \right\} \quad \ldots\ 129),$$

при чему је λ_1, према једначинама 85) и 86), дато са:

$$\left.\begin{aligned} \sin\lambda_1 &= \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} \\ o &< \lambda_1 < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 130)$$

c) на полу је:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \lambda_1 = o$$

па зато:

$$W_e = \frac{T}{\pi} J_0 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} k \quad . \; . \; . \; 131)$$

$$W_h = o \quad . \; . \; . \; 132).$$

11. Тоталне топлотне множине што их примају северна и јужна хемисфера земљина у току године.

Означимо са dN и dS топлотне множине што их примају северна и јужна хемисфера земљина у елементу времена dt, онда су инсолације обају хемисфера у једном уоченом моменту дате изразима 13) и 14), па је зато:

$$\frac{dN}{dt} = J_0 \frac{a^2}{\varrho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 + \sin\delta) \quad . \; . \; . \; 133)$$

$$\frac{dS}{dt} = J_0 \frac{a^2}{\varrho^2} \frac{\pi}{2} r^2 (1 - \sin\delta) \quad . \; . \; . \; 134).$$

Док сунце преваљује интервал еклиптике од λ' до λ'' примају северна и јужна хемисфера топлотне множине:

$$N = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

$$S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda$$

или обзиром на горње две једначине и једначине 65) и 96):

$$N = \frac{T}{4} J_0 \frac{a}{b} r^2 \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 + k \sin\lambda)\, d\lambda \quad . \; . \; . \; 135)$$

$$S = \frac{T}{4} J_0 \frac{a}{b} r^2 \int_{\lambda'}^{\lambda''} (1 - k \sin\lambda)\, d\lambda \quad . \; . \; . \; 136),$$

или ако интеграцију изведемо и узмемо још у обзир једначину 125):

$$N = \frac{T}{4} J_0 \frac{r^2}{\sqrt{1 - e^2}} \left\{ (\lambda'' - \lambda') - k(\cos\lambda'' - \cos\lambda') \right\} \quad . \; 137)$$

$$S = \frac{T}{4} J_0 \frac{r^2}{\sqrt{1 - e^2}} \left\{ (\lambda'' - \lambda') + k(\cos\lambda'' - \cos\lambda') \right\} \quad . \; 138),$$

Означимо са N_e и N_h топлотне множине што их прима северна хемисфера за време своје летне и зимње полугодине, т. ј. у интервалима $\lambda' = o$ до $\lambda' = \pi$ и $\lambda' = \pi$ до $\lambda'' = 2\pi$, а за S_e и S_h топлотне множине што их прима јужна хемисфера за време своје летње и зимње полугодине, т. ј. у интервалима $\lambda' = \pi$ до $\lambda'' = 2\pi$ и $\lambda' = o$ до $\lambda'' = \pi$, то следује из горњих једначина:

$$N_e = S_e = \frac{T}{4} J_0 \frac{r^2}{\sqrt{1 - e^2}} (\pi + 2k) \quad . \; . \; . \; 139)$$

$$N_h = S_h = \frac{T}{4} J_0 \frac{r^2}{\sqrt{1 - e^2}} (\pi - 2k) \quad . \; . \; . \; 140).$$

Из горњих једначина следује да северна хемисфера прима за време своје летне полугодине исту топлотну множину као и јужна за време њене летне полугодине. То исто важи и за зимске полугодине. Топлотне множине, што их прима свака хемисфера за време своје летне и зимске полугодине, стоје у пропорцији:

$$\frac{N_e}{N_h} = \frac{S_e}{S_h} = \frac{\pi + 2k}{\pi - 2k} \quad \cdots \quad 141).$$

12. О неједнакости астрономских годишњих доба и њеним последицама.

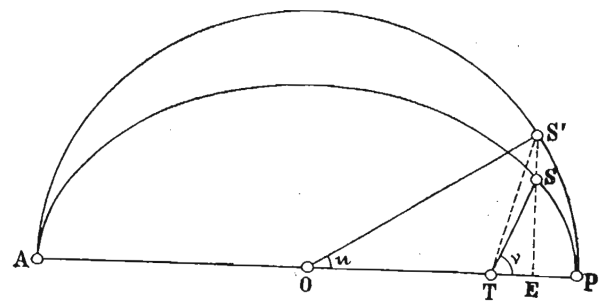
Астрономским годишњим добима називамо интервале времена у којима сунце преваљује квадранте еклиптике дефинисане релацијама 113).

Радиусвектор сунца описује, према Kepler-овом закону, у једнаким интервалима времена једнаке површине, а како површине сектора $\gamma\, T\, \sigma$, $\sigma\, T\, \gamma'$, $\lambda'\, T\, \sigma'$, $\sigma'\, T\, \gamma$ (слика 8.), који одговарају годишњим добима, нису једнаке, то ће и дужине годишњих доба бити неједнаке. Једино када апсидна линија $P\,A$ и еквинокцијална $\gamma\gamma'$ падају заједно, једнака је дужина пролећа дужини зиме, а дужина лета дужини јесени, а када те две линије стоје нормално једна на другу онда је дужина пролећа једнака дужини лета, а дужина јесени дужини зиме.

Означимо са $F_{\rm I}$, $F_{\rm II}$, $F_{\rm III}$, $F_{\rm IV}$ површине уочених квадратних сектора, који одговарају годишњим добима, а са $T_{\rm I}$, $T_{\rm II}$, $T_{\rm III}$, $T_{\rm IV}$ дужине астрономског пролећа, лета, јесени и зиме северне хемисфере, па узмемо ли у обзир да је секторска брзина дата једначином 96), онда је, према Kepler-овом закону:

$$\left.\begin{aligned} T_{\rm I} &= \frac{F_{\rm I}}{ab\pi}\,T \\ T_{\rm II} &= \frac{F_{\rm II}}{ab\pi}\,T \\ T_{\rm III} &= \frac{F_{\rm III}}{ab\pi}\,T \\ T_{\rm IV} &= \frac{F_{\rm IV}}{ab\pi}\,T \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad 142).$$

Одређење дужина астрономских доба свађа се, према горњим једначинама, на један чисто геометријски проблем: на квадратуру сектора елипсиних.



слика 9.

Нека у слици 9. представља елипса $P\,S\,A$ еклиптику, а T фокус у којем се привидно земља налази, онда је P перигеум, а A апогеум. У уоченом моменту нека се сунце налази привидно у тачки S, онда је угао $P\,T\,S = \nu$ права аномалија сунца. Опишимо преко велике осе елипсине полукруг $P\,S'\,A$ и начинимо $S\,S' \perp A\,P$, онда се угао $S'\,O\,P = u$ назива ексцентричном аномалијом положаја S.

Између ексцентричне аномалије u и праве аномалије ν постоји позната једначина:

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{\nu}{2} \quad \cdots \quad 143).$$

где e означава ексцентрицитет еклиптике.

Означимо, краткоће ради:

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = m \qquad \ldots 144)$$

онда је:

$$\operatorname{tang}\frac{u}{2} = m \operatorname{tang}\frac{\nu}{2} \qquad \ldots 145)$$

Површина елипсиног сектора $P\,T\,S$ односи се према површини сектора $P\,T\,S'$ као мала оса елипсе према великој. Зато је:

$$\text{area } P\,T\,S = \frac{b}{a}\,\text{area } T\,O\,S'$$

но како је:

$$\text{area } P\,T\,S' = \text{area } P\,O\,S' - \text{area } T\,O\,S' =$$

$$= \frac{1}{2}a^2 u - \frac{1}{2}a^2 e \sin u$$

то је:

$$\text{area } P\,T\,S = \frac{ab}{2}(u - e \sin u) \qquad \ldots 146)$$

Помоћу једначина 146) и 145) можемо извести квадратуру сектора F_{I}, F_{II}, F_{III}, F_{IV} еклиптике па одредити дужине астрономских годишњих доба. При субституцији угла u из једначине 145) у једначину 146) можемо корисно употребити следећу Langrange-ову методу.

Применом Euler-ових образаца можемо једначини 145) дати овај облик:

$$\frac{e^{i\frac{u}{2}} - e^{-i\frac{u}{2}}}{e^{i\frac{u}{2}} + e^{-i\frac{u}{2}}} = m\,\frac{e^{i\frac{\nu}{2}} - e^{-i\frac{\nu}{2}}}{e^{i\frac{\nu}{2}} + e^{-i\frac{\nu}{2}}},$$

где e означава сада базу природних логаритама, а i имагинарну јединицу.

Из горње једначине следује:

$$\frac{e^{iu}-1}{e^{iu}+1} = m\,\frac{e^{i\nu}-1}{e^{i\nu}+1}\,.$$

Израчунамо ли из ове једначине e^{iu}, то добивамо:

$$e^{iu} = \frac{e^{i\nu}+1+m\,(e^{i\nu}-1)}{e^{i\nu}+1-m\,(e^{i\nu}-1)} = \frac{(1+m)e^{i\nu}+1-m}{(1-m)e^{i\nu}+1+m}\,.$$

Означимо, краткоће ради:

$$\frac{1-m}{1+m} = \mu \qquad \ldots 147)$$

онда је:

$$e^{iu} = \frac{e^{i\nu}+\mu}{\mu\,e^{i\nu}+1} = e^{i\nu}\,\frac{1+\mu\,e^{-i\nu}}{1+\mu\,e^{i\nu}}$$

а ако овај израз логаритмирамо:

$$i\,u = i\,\nu + \operatorname{lognat}(1+\mu\,e^{-i\nu}) - \operatorname{lognat}(1+\mu\,e^{i\nu}) \quad \ldots 148)$$

Ред

$$\operatorname{lognat}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

конвергентан је догод је $x < 1$, зато ћемо логаритме у једначини 148) моћи развити у ред ако је:

$$\mu\,e^{-i\nu} < 1$$

$$\mu\,e^{i\nu} < 1\,.$$

Горња два услова можемо заменити са следећа два, која добивамо ако горње неједнакости међусобно помножимо и саберемо:

$$\mu^2 < 1$$

$$\mu \cos \nu < 2 \ .$$

Ови ће услови бити сигурно испуњени ако буде било:

$$\mu < 1 \ .$$

Из једначина 147) и 144) следује:

$$\mu = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \quad \cdots 149),$$

па је, према томе, μ мање од јединице и развијање логаритама једначине 148) у ред дозвољено, зато је:

$$i\, u = i\, \nu + \left(\mu\, e^{-i\nu} - \frac{\mu^2}{2} e^{-2i\nu} + \frac{\mu^3}{3} e^{-3i\nu} - \frac{\mu^4}{4} e^{-4i\nu} + \cdots\right) -$$

$$- \left(\mu\, e^{i\nu} - \frac{\mu^2}{2} e^{2i\nu} + \frac{\mu^3}{3} e^{3i\nu} - \frac{\mu^4}{4} e^{4i\nu} + \cdots\right)$$

т. ј,

$$i\, u = i\, \nu - \mu\left(e^{i\nu} - e^{-i\nu}\right) + \frac{\mu^2}{4}\left(e^{2i\nu} - e^{-2i\nu}\right) -$$

$$- \frac{\mu^3}{3}\left(e^{3i\nu} - e^{-3i\nu}\right) + \frac{\mu^4}{4}\left(e^{4i\nu} - e^{-4i\nu}\right) - \cdots$$

Но како је:

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2\, i \sin x \ .$$

то је:

$$u = \nu - 2\,\mu \sin \nu + \mu^2 \sin 2\,\nu - 2\,\frac{\mu^3}{3} \sin 3\,\nu +$$

$$3\,\frac{\mu^4}{4} \sin 4\,\nu - + \quad \cdots 150)$$

при чему је μ дато изразом 149), у којем e означава ексцентрицитет еклиптике. Из једначине 149) следује:

$$\frac{d\mu}{de} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

па како је $0 < e < 1$ то је горњи диференцијални квоцијенат увек позитиван, па μ расте са e и достизава своју највећу вредност када и e.

Ексцентрицитет e еклиптике мења се секуларно, но не прелази никада величину 0·07, зато је максимална вредност од μ једнака 0·035. Израз за $\sin u$ можемо, према томе, добити ако применимо Taylor-ов ред:

$$\sin(\nu + x) = \sin \nu + x \cos \nu - \frac{x^2}{2} \sin \nu \quad \cdots 151)$$

на једначину 150), при чему стављамо:

$$x = -2\,\mu \sin \nu + \mu^2 \sin 2\,\nu \ .$$

Зато је:

$$\sin u = \sin \nu - \mu \sin 2\,\nu + 2\,\mu^2 \cos^2 \nu \sin \nu - 2\,\mu^2 \sin^3 \nu \quad 152)$$

Из једначина 150) и 152) следује:

$$u - e \sin u = \nu - (e + 2\,\mu) \sin \nu + \mu\,(e + \mu) \sin 2\,\nu -$$

$$- 2\, e\, \mu^2 \sin \nu \cos 2\,\nu + \cdots$$

Зато је обзиром на 146):

$$\text{area } PTS = \frac{ab}{2}\{\nu - (e+2\mu)\sin\nu + \mu(e+\mu)\sin 2\nu -$$
$$- 2e\mu^2 \sin\nu\cos 2\nu\} \quad \cdots 153).$$

Помоћу ове једначине можемо извести квадратуру сектора елипсиних и одредити дужине астрономских годишњих доба.

Нас интересују у првом реду дужине летне и зимске полугодине. Означимо ли са ν_0 аномалију сунца када се оно налази у пролетној еквинокцијалној тачки, то описује радиусвектор сунца за време летне полугодине површину $F_I + F_{II}$ између ономалија $\nu = \nu_0$ и $\nu = \nu_0 + \pi$, за време зимске полугодине површину $F_{III} + F_{IV}$ између аномалија $\nu = \nu_0 + \pi$ и $\nu = \nu_0 + 2\pi$. Зато је:

$$\left.\begin{aligned} F_I + F_{II} &= \frac{ab}{2}\begin{Bmatrix}\pi + 2(e+2\mu)\sin\nu_0 + \\ + 4e\mu^2\sin\nu_0\cos 2\nu_0\end{Bmatrix} \\ F_{III} + F_{IV} &= \frac{ab}{2}\begin{Bmatrix}\pi - 2(e+2\mu)\sin\nu_0 - \\ - 4e\mu^2\sin\nu_0\cos 2\nu_0\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\} \quad 154).$$

Означимо ли са T_e и T_h дужине летне и зимске полугодине северне хемисфере т, ј.

$$\left.\begin{aligned} T_e &= T_I + T_{II} \\ T_h &= T_{III} + T_{IV}\end{aligned}\right\} \quad \cdots 155),$$

то следује из једначина 142), 154), 155):

$$\left.\begin{aligned} T_e &= \frac{T}{2}\left\{1 + \frac{2}{\pi}(e+2\mu)\sin\nu_0 + \frac{4}{\pi}e\mu^2\sin\nu_0\cos 2\nu_0\right\} \\ T_h &= \frac{T}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi}(e+2\mu)\sin\nu_0 - \frac{4}{\pi}e\mu^2\sin\nu_0\cos 2\nu_0\right\}\end{aligned}\right\} 156).$$

Хоћемо ли да се задовољимо са мањом тачности то можемо горње изразе још више упростити.

Занемаримо ли више потенције и од μ и e, то је, према једначини 149):

$$\mu = \frac{e}{2},$$

па зато једначине 156) добивају облик:

$$\left.\begin{aligned} T_e &= \frac{T}{2}\left\{1 + \frac{4e}{\pi}\sin\nu_0\right\} \\ T_h &= \frac{T}{2}\left\{1 - \frac{4e}{\pi}\sin\nu_0\right\}\end{aligned}\right\} \quad \cdots 157).$$

Догод ја e малено, као што је случај за нашу земљу, дотле су једначине 157) довољно тачне.

Означимо ли са T_e' и T_h' дужине летне и зимске године јужне хемисфере то је:

$$\left.\begin{aligned} T_e' &= T_h \\ T_h' &= T_e\end{aligned}\right\} \quad \cdots 158).$$

Неједнакост годишњих доба један је од узрока неједнакости термичких прилика северне и јужне хемисфере. Јужна хемисфера прима додуше за време своје летне полугодине топлотну множину W_e' која је једнака топлотној множини W_e, што ју прима северна хемисфера за време своје летне полугодине, јер је према 114) и 124)

$$W_e' = 2W_{III}' = 2W_I = W_e \quad \cdots 159)$$

а за време своје зимске полугодине исту топлотну множину W_h' као и северна за време своје зимске полугодине јер је:

$$W_h' = 2\,W_{\mathrm{I}}' = 2\,W_{\mathrm{III}} = W_h \quad \cdots 160)$$

али је дужина летне полугодине T_e' јужне хемисфере, према 158) и 156), друга него дужина T_e летне полугодине северне хемисфере. Исто то важи и за зимске полугодине.

Базу за сравњивање термичких прилика, изазваних на северној и јужној хемисфери радијацијом сунца, добићемо ако уведемо појам средњих сезонских топлотних множина Q_{I}, Q_{II}, Q_{III}, Q_{IV}, које добивамо ако топлотну множину што ју прима уочени паралелни круг за време једнога годишњег доба поделимо са трајањем тога доба.

Средњим сезонским топлотним множинама називамо, према томе, величине:

$$Q_i = \frac{W_i}{T_i} \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}.$$

Од веће су важности средње сезонске топлотне множине летне и зимске полугодине. Оне су дате за северну хемисферу изразима:

$$\left.\begin{aligned} Q_e &= \frac{W_e}{T_e} \\ Q_h &= \frac{W_h}{T_h} \end{aligned}\right\} \quad \cdots 161)$$

а за јужну, узев у обзир једначине 158) 159) 160):

$$\left.\begin{aligned} Q'_e &= \frac{W'_e}{T'_e} = \frac{W_e}{T_h} \\ Q'_h &= \frac{W'_h}{T'_h} = \frac{W_h}{T_e} \end{aligned}\right\} \quad \cdots 162).$$

Једначине 161) и 162) казују да средње полугодишње сезонске топлотне множине за исте паралелне кругове северне и јужне хемисфере нису једнаке. Оне су једнаке само онда када је

$$T_e = T_h$$

или, због једначина 156), када је

$$\nu_0 = 0$$

т. ј. када се еквинокцијална линија подудара са апсидном.*)

Субституцијом величина W_e, W_h, T_e, T_h из једначина 126) до 132) и 156) у једначине 161) и 162) добивамо величине Q_e, Q_h, Q'_e, Q'_h као функције географске ширине φ уоченога паралелнога круга и астрономских елемената:

$$e,\ \varepsilon,\ \nu_0$$

па су те једначине од велике важности за испитивање секуларних промена распореда сунчеве радијације на површини земље о којима ћемо говорити у другом делу ове радње.

13. Преглед литературе.

Потребно је да се обазремо на најважније досадање радове о предмету којим се наша радња бави, потпуности ради, а и зато, да расветлимо и одклонимо неке несугласице у тима радовима.

*) О случају када се еквинокцијална и апсидна линија подударају вели Laplace, Mécanique Céleste, Livre VI. § 31. „Je trouve par les formules précédentes que ce phénomène a eu lieu vers l'an 4004 avant l'ère chrétienne, époque où la plupart de nos chronologistes placent la création du monde, et qui, sous se point de vue, peut être considérée comme une époque astronomique“.

Од првих радова на овом пољу заслужује нашу пажњу рад *Lambert*-ов [1]), у којем је ударен темељ математском испитивању распореда сунчеве радијације на површини земље и у којем је први пут покушано математско формулисање утицаја земаљске атмосфере. *Lambert*-ов закон абсорпције још је и данас полазна тачка за испитивање физикалнога дела проблема распореда сунчеве радијације, но тај део није предмет ове наше радње, која се бави само са астрономским делом проблема. Од колике је користи строго дељење астрономскога дела проблема од физикалнога, то најбоље доказује *Poisson*-ов рад о распореду сунчеве радијације на површини земље, који под насловом: „Mouvement de la chaleur dans l' interieur et à la surface de la terre", заузима један знатан део његовога познатога и класичног дела о математској теорији топлоте. [2]) У томе раду не дели *Poisson* астрономски део проблема од физикалног него их третира заједно, па како физикални закони, који регулишу овај други део проблема, нису у оно доба били довољно познати, то је из формално врло елегантних математских извађања *Poisson*-ових веома тешко издвојити оне резултате који би и данас имали своју вредност.

Тако је тек *Meech* [3]) дошао до првих нумеричких резултата о распореду сунчане радијације у меридионалном правцу но његови резултати обухватају само оне топлотне множине што их прима уочена паралела у току целе године.

Прву потпунију математску теорију проучаванога проблема пружио је *Wiener,* [4]) али математски облик, у којем је он дошао до својих резултата, није погодан за испитивање секуларних промена распореда сунчеве радијације на површини земље; сем тога је његовој радњи пребацивано да није строго формулисала проблеме које је испитивала. Ова замерка била је узрок да смо при третирању свих проблема, којима се наша радња бави, обратили нарочиту пажњу на егзактно

[1]) *Lambert,* Pyrometrie. Berlin, 1779.

[2]) *Poisson,* Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1835.

[3]) *Meech,* On the relative intensity of the heat and light of the Sun etc. Smithsonian contributions to Knowledge, Vol. IX. Washington 1856.

[4]) *Wiener,* Ueber die Stärke der Bestrahlung des Erde durch di Sonne in den verschiedenen Breiten und Jahreszeiten. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bd 22. 1877. Sonderabdruck Karlruhe 1876.

формулисање њихово, да бисмо тиме расветлили сва питања која су у *Wiener*-овој радњи изгледала нејасна.

Hargreaves [1]) је распоред сунчеве радијације на површини земље испитивао са нарочитим обзиром на секуларне промене астрономских елемената земљине путање, али се при томе ограничио на екстремне случајеве тих промена, док смо ми ставили себи задатак да испитамо читав ток проучаванога феномена. Различитост циљева наше радње и *Hargreaves*-ове видеће се при испитивању споменутих секуларних промена.

Hopfner [2]) је математском проблему распореда сунчеве радијације на површини земље посветио два рада која су изашла у извештајима бечке академије наука. О тима радовима морамо опширније проговорити, па ћемо се том приликом обазрети и на рад *Angot*-ов [3]) о истом предмету.

Hopfner почиње своја испитивања са једначином коју смо ми означили са 7), па вели: wir wollen vorerst zeigen, dass durch eine einfache Zerlegung der Strahlungsfunktion in zwei Komponenten die Behandlung des vorliegenden Problems sich ungemein vereinfacht und an Uebersichtlichkeit gewinnt. У то име интегрира он споменуту једначину између произвољних граница t_0 и t, па тако долази до једначине која са нашим ознакама има овај облик:

$$Q = J_0 a^2 \sin\varphi \int_{t_0}^{t} \frac{\sin\delta}{\varrho} dt + J_0 a^2 \cos\varphi \int_{t_0}^{t} \frac{\cos\delta \cos\omega}{\varrho^2} dt$$

Ова полазна једначина *Hopfner*-ова је погрешна, јер се горња интеграција сме извести само између оних граница

[2]) *Hargreaves,* Distribution of Solar Radiation on the Surface of the Earth, and its dependence on Astronomical Elements. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XVI. 1896.

[3]) *Hopfner,* Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde. Wiener Sitzungsberichte Bd. CXIV. Abt. II a. 1905.

Hopfner, Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne etc. Wiener Sitzungsberichte Bd. CXVI. Abt. II a. 1907.

[4]) *Angot,* Recherches théoriques sur la distribution de la chaleur à la surface du globe. Annales du Bureau Central Météorol. de France. Mémoires de 1883. Paris 1885.

између којих је величина Q стално позитивна. Чим Q престаје бити позитивно престаје инсолација сасвим, па се преко таквих интервала несме интеграција протегнути. Но *Hopfner* иде још даље. Он вели да величине:

$$Q_a = J_0 a^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\cos\delta \cos\varpi}{\varrho^2} dt$$

$$Q_p = \pm J_0 a^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\sin\delta}{\varrho} dt$$

представљају оне топлотне множине што их у времену t_0 до t примају јединице површине на екватору и на полу, па долази до једначине:

$$Q\varphi = Q_a \cos\varphi \pm Q_p \sin\varphi$$ [1]

Ово резоновање је погрешно, јер све када би границе t_0 и t биле тако одабране да је између њих Q стално позитивно да, дакле, прва од наведених једначина важи, неће те границе бити такве да је између њих Q_a стално позитивно, па да друга од наведених једначина важи. То је сигурно онда случај када дан на уоченој паралели φ траје дуже од дванаест сати.

Doležal је у једној својој радњи, која је такође публикована у извештајима бечке академије,[2] дао графичку представу феномена сунчеве радијације на површини земље, па је и он формулисао наведене четири једначине, но он одређује интеграционе границе у првој једначини тако, да је између њих Q стално позитивно, па је та једначина код њега коректна. Али из коректности прве једначине не следује, као што смо показали, коректност друге једначине, па ни коректност четврте. Но код *Doležal*-а је ова четврта једначина само један

[1]) Прво цитирани рад Hopfner-ов стр. 1321.

[2]) *Doležal,* Ueber die graphische Bestimmung der Intensität und Quantität der solaren Bestrahlung. Wiener Sitzungsberichte. Bd CXVII. Abt. II a. 1908

споредни резултат који не ставља у питање ваљаност његових осталих закључака.

Hopfner, напротив, мисли да је овом четвртом једначином нашао важан и једноставан закон о распореду сунчеве радијације на површини земље, на који може да базира своја даља испитивања, јер држи да су величине Q_a и Q_p независне од географске ширине φ уочене параделе. Како је један од полова земљиних увек инсолиран то се, оперишући са оба пола, може важење треће од наведених једначина акцептирати, али не важење друге једначине. Одреде ли се интеграционе границе t_0 и t тако да важи прва једначина као код Doležal-а, онда Q_a не значи топлотну множину што ју у ствари прима јединица површине на екватору, јер у интервалу t_0 и t престаје инсолација уочене површине ако је дан дужи од 12^h. Ако то није случај онда се интеграција друге једначине може извести, али је тада Q_a функција граница t_0 и t, па према томе, и функција од φ. Q_a није, дакле, независно од φ.

Но нису ово једини некоректни закључци, које је *Hopfner* у својим радњама учинио и ако су они сами довољни да одузму сваку вредност свим његовим даљим закључцима. Он долази, између осталога, до једначина које би биле еквивалентне нашој једначини 34) али тада, у намери да све независне изразн помоћу једне једине, он ставља звездано време θ једнако средњој дужини сунца. Његова мотивација за тај поступак је ова:

Sternzeit ist bekanntlich jene Zeit, deren Einheit durch die einmalige Rotation der Erde um ihre Achse gegeben ist. Die Zeit dieser Rotation kann als völlig konstant betrachtet werden, so dass also in gleichen Zeiten stets eine gleiche Anzahl von Erdrotationen erfolgt. Mit dieser gleichförmigen Bewegung als Zeitmass kann eine andere gleichförmige Bewegung in unserem Sonnensystem in Beziehung gebracht werden. Bekanntlich durchläuft die mittlere (fiktive) Sonne mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Ekliptik, so dass also in gleichen Zeiten gleiche Kreisbögen in der Ekliptik durchlaufen werden. ...Wird nun, wie die mittlere Sonnenlänge, die verstrichene Sternzeit von demselben Punkte an, dem Frühlingspunkte der mittleren Sonne, gezählt, so kann behufs Zeitmessung diese direkt gleich der mittleren Sonnenlänge im

Zeitmasse gesetzt werden. Es darf daher in dem Integrale die Sternzeit durch die mittlere Sonnenlänge ersetzt werden.[1])

Пре свега је јасно, да се звездано време не може почињати мерити од момента када средње сунце пролази кроз еквинокцијалну тачку, јер звездано време нема никакове везе са кретањем средњег сунца те се по својој дефиницији мора почињати мерити од пролаза еквинокцијалне тачке кроз меридијан уоченога места. Оно је, дакле, за сваки меридијан у једном те истом моменту другачије. Сем тога се тригонометријске функције звезданог времена, које се појављују у нашој једначини 34) а и у Hopfner-овим једначинама, могу, према нашој једначини 36), раставити у хармоничне функције времена са две периоде: τ и T, док тригонометријске функције средње дужине као функције времена имају само једну периоду T.

Није, дакле, чудо што се *Hopfner*-ови резултати, базирани на кривим предпоставкама, не слажу са резултатима осталих испитивача истога проблема. Но *Hopfner* је убеђен да су његови резултати тачни, а сви остали погрешни. Говорећи о раду *Zenker*-овом, који смо споменули у уводу, и који је базиран на *Wiener*-овим испитивањима вели *Hopfner*: Anders ist es bedauerlicherweise mit der analytischen Seite des Problems bestellt. *Zenker*, der mittlere Wärmemengen berechnet, legt seiner Untersuchung die von *Wiener* abgeleiteten Zahlenwerte und Gleichungen zu Grunde, bezüglich deren der Verfasser bereits gelegentlich der Behandlung des Problems der solaren Strahlung nachzuweisen in der Lage war, dass ihnen eine auf unrichtigen Voraussetzungen basierende Ausgangsgleichung su Grunde liegt.[2])

Но резултати *Wiener*-ови су потпуно коректни, те би се његовој радњи једино замерити могло, да његова извађања нису довољно јасно мотивисана, па је због тога потребно било да у овој радњи основне чињенице проучаванога феномена прецизније испитамо но што је то *Wiener* учинио.

По својој принципијелној страни слаже се наша радња потпуно са Wiener-овом, па се од ње разликује само по својој формалној страни. Ми смо у уводу казали да је било потребно дати законима проучаванога феномена такав математски облик

[1]) Прво цитирани рад Hopfner-ов стр. 1330.

[2]) Други цитирани рад Hopfner-ов стр. 210—211.

да се помоћу њега могу испитивати секуларне промене распореда сунчеве радијације на површини земље. То је овом радњом учињено.

Angot, је у његовој напред цитираној радњи, која се већим делом бави физикалном страном проучаванога проблема, величину W одредио на тај начин да је, израчунавши за известан број дана величину Q_τ, конструисао криву w као што је то у нашој слици 6. представљено, па је **онда** површину захваћену том кривом интегрисао графичним начином. Та метода није, можда, математски елегантна, па има све недостатке графичних метода, али је принципиелно тачна.

Hopfner је, међутим, и *Angot*-ову методу подвргао најоштријој критици:

Es lässt sich nun zeigen, dass der eben geschilderte Vorgang bei der Integration nicht einwandfrei ist und daher nicht zu dem angestrebten Ziele führt...[1])

Trotz der grossen Rechenarbeit hat *Angot* sein Ziel nicht erreicht.[2])

Напослетку *Hopfner* осуђује наушално све дотадање испитиваче проучаванога проблема:

Dies wäre ein Beweis für die Unsicherheit der Autoren selbst hinsichtlich der physikalischen Bedeutung der von ihnen berechneten Wärmemengen.[3])

Узроци свих тих несугласица леже, као што из пређашњег следује, у некоректности *Hopfner*-ових закључака. То је било потребно доказати и зато смо о његовим радовима морали опширније проговорити.

14. Преглед важнијих означења.

1) Астрономски елементи.

φ географска ширина уоченога места земље.

ψ географска дужина уоченога места земље.

$n = \text{tang}\ \varphi$.

ϱ радиусвектор земља—сунце.

[1]) Други цитирани рад Hopfner-ов стр. 215.

[2]) Ibid. стр. 221.

[3]) Ibid. стр. 219.

z зенитска дистанција сунца.
δ деклинација сунца.
ω сатни угао сунца.
α ректасцензија сунца.
λ права дужина сунца.
L средња дужина сунца.
ν права аномалија сунца.
ν_0 права аномалија сунца у пролетној еквинокцијалној тачки.
ζ средња аномалија сунца.
ε нагиб еклиптике према екватору.
$k = \sin \varepsilon$.
a велика полуоса земљине путање.
b мала полуоса земљине путање.
e екцентрицитет земљине путање.
r радиус земаљске кугле.
θ звездано време у лучној мери.
t_s звездано време у сатима.
t_w право сунчано време.
t средње сунчано време.
τ интервал од 24^h.
T дужина године.
T_{I} дужина астрономског пролећа.
T_{II} дужина астрономског лета.
T_{III} дужина астрономске јесени.
T_{IV} дужина астрономске зиме.
T_e дужина летне подугодине.
T_h дужина зимске полугодине.

2) Топлотне множине.

$J = \dfrac{dQ}{dt}$ топлотна множина која пада у јединици времена на јединицу уочене површине.

J_N топлотна множина која пада у јединици времена на северну хемисферу земље.

J_S топлотна множина која пада у јединици времена на јужну хемисферу земље.

w средња инсолација паралеле φ у уоченом моменту.

Q_τ топлотна множина која пада у току једнога дана на јединицу површине.

W средња топлотна множина која пада на паралелу φ у датом интервалу године.

W_{I}, W_{II}, W_{III} и W_{IV} средње топлотне множине које падају на паралелу φ за време астрономског пролећа, лета, јесени и зиме.

W_e средња топлотна множина која пада на паралелу φ за време летне полугодине.

W_h средња топлотна множина која пада на паралелу φ за време зимске полугодине.