О ОПШТИМ ИНТЕГРАЛИМА ПРОБЛЕМА n ТЕЛА

ОД

Д-Р МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА

ВАНР. ПРОФ. УНИВЕРЗИТЕТА.

(Примљено на скупу Академије Природних Наука 15. октобра 1910.)

У овој ћемо радњи, саопштавајући један део наших испитивања о механици дискретних материјалних тачака, прије свега предузети таково формулисање општих интеграла проблема *n* тела у којему је њихово геометриско значење јасније изражено него у облику у којему се ти интеграли у аналитичној механици приказују. То формулисање послужиће нам да поставимо неке теореме о положајима оскулационих равнина путања, као и о правцима и величинама брзина у проблему двају и проблему трију тела. Указаће се међутим и могућност да неке од постављених теорема раширимо и на случај када број посматраних тела изнаша четири и да формулишемо један једини критеријум који обухвата сва егзактна решења проблема трију дела. Овај део наших испитивања обухвата *општи* проблем *n* тела, о којему се о привлачивим силама између појединих тачака посматраног система не морају никакве специјалне претпоставке чинити, па се зато разуме само по себи да следећа излагања задржавају потпуно своју вредност и за случај када између појединих тачака

посматранога система дејствују силе *Newton*-ове гравитације.

Прије, но што приступимо излагању резултата тих испитивања, неће бити сувишно читаоца упозорити да смо при тима излагањима избегавали потпуно употребу којег одређеног координатног система. То нас је навело да се послужимо језиком векторске анализе, која геометријски карактер механичких проблема јасније изражава него аналитичка механика. О тој употреби векторске анализе у следећим излагањима ваља још ово да наведемо:

Векторска анализа, развијајући се у два разна правца, који се обично називају *Grassmann*-ов и *Hamilton-Neaviside*-ов,[1] није још добила потпуно устаљен облик, но она се у ономе облику, који јој даје овај други правац, све више и више удомаћује, па ћемо се за то послужити у следећим излагањима векторском анализом тога правца. При томе ћемо се послужити и појмом везаних вектора,[2] т. ј. такових, који се могу само дуж свога правца да помакну, апстрахирајући од *Grassmann*-ове дефиниције тих вектора као продуката двеју тачака. То ће нас ставити у могућност да се користимо свим тековинама тео-

---

[1] Види о томе н. пр. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig, 1905. стр. 111: Die geometrische und die physikalische Richtung der Vektorenrechnung.

[2] Budde, Allgemeine Mechanik der Punkte und starrer Systeme. Berlin 1890—91 назива их *„linienflüchtige Vektoren“*.

Timmerdiug употребљава у своме чланку у „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ vierter Band, erster Teilband назив *„Linienteile“*.

И *Appell* провађа у најновијем издању своје Traité de mécanique rationelle, Paris 1909. класификацију вектора на слободне и везане, разликујући три категорије:

1⁰ vecteurs non localisés ou vecteurs libres
2⁰ vecteurs localisés sur une droite ou glissant sur une droite
3⁰ vecteurs localisés en un point ou liés à un point.

Ову трећу категорију вектора нећемо требати.

рије везаних вектора, створеним у кинематици и статици крутих тела, употребљавајући векторску анализу као оруђе за описивање операција са тим величинама.

Прва добит од употребе векторских представа биће та, да ћемо главне теореме динамике дискретних материјалних тачака, како се они обично формулишу у аналитичној механици, т. ј. теорему о одржању квантитета кретања, о кретању тежишта, теорему површина, а и дефиницију *Laplace*-ове инвариабилне равнине моћи свести на једну једину теорему, у којој ће бити уједно кондензовани сви познати интеграли проблема *n* тела, осим интеграла живе силе. Та теорема послужиће нам онда за даља излагања.

Формулисање општих интеграла проблема n тела помоћу векторске анализе.

Уочимо систем од *n* материјалних тачака, које се међу собом привлаче или одбијају и на које не делују никакве спољне силе. О унутарним силама тога система не чинимо другу претпоставку доли ту, да су у посматраном интервалу континуирне. Масе тих тачака нека буду означене са $m_1, m_2, m_3, \dots . m_n$, а моментани положај њихов нека буде одређен њиховим радиусвекторима $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3 \dots \dots . \mathfrak{r}_n$ од једне тачке сравнивања *O*, одабране произвољно у простору.

Означимо са $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3 \dots \dots \mathfrak{v}_n$ векторе брзина, а са $\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3 \dots \dots \mathfrak{p}_n$ векторе акцелеранција посматраних тачака, онда постоје једначине:

$$\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{v}_i \qquad i = 1, 2, \dots . n \dots 1)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt} = \mathfrak{p}_i \quad i = 1, 2, \dots . n \dots 2)$$

Исто тако постоје једначине:

$$m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = m_i \mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \quad i = 1, 2, \dots . n \qquad \dots 3)$$

где $\mathfrak{P}_i$ означава резултанту унутарњих сила, које дејствују на тачку m_i. Ако нам је закон, по којем дејствују те унутарње силе, познат, онда једначине 3) дају једначине кретања. Такових векторских једначина имамо *n* на броју, те су еквивалентне 3 *n* једначинама између скаларних величина. Њихова интеграција даје радиусвекторе као функције времена:

$$\mathfrak{r}_i = F(t) \qquad i = 1, 2, \dots \dots . n \qquad \dots 4)$$

Та интеграција даје се само у неким специјалним случајевима провести. За случај *Newton*-ове гравитације она је у главном немогућа, ако је број посматраних материјалних тачака већи од два. Аналитична механика познаје у томе случају само десет интеграла и то: три интеграла, која изражавају закон о одржању квантитета кретања, три интеграла, која са прва три одређују кретање тежишта, три интеграла, која изражавају теорему површина и један интеграл, који изражава закон о одржању живе силе. Првих девет интеграла могу се изразити са три векторске једначине и свести у једну теорему о векторима квантитета кретања.

У то име уочимо две произвољне тачке m_i и m_k посматраног система, то постоји по принципу акције и реакције, прије свега, једначина:

$$m_i\, \mathfrak{p}_{ik} + m_k\, \mathfrak{p}_{ki} = 0 \qquad \dots 5)$$

где $\mathfrak{p}_{ik}$ и $\mathfrak{p}_{ki}$ означавају векторе међусобних акцелерација тих двеју тачака.

Та једначина казује, да су вектори $m_i \mathfrak{p}_{ik}$ и $m_k \mathfrak{p}_{ki}$ једнаки а противнога правца, но та два вектора везани су, према наведеном принципу, и на исту праву, а то можемо изразити једначином:

$$m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{p}_{ik}] + m_k [\mathfrak{r}_k \mathfrak{p}_{ki}] = O. \qquad \dots 6)$$

Ова једначина казује да је збир статичних момената вектора $m_i \mathfrak{p}_{ik}$ и $m_k \mathfrak{p}_{ki}$ обзиром на тачку O раван нули, па ће једначина 6), узев у обзир једначину 5), моћи бити задовољена само онда, ако су оба вектора $m_i \mathfrak{p}_{ik}$ и $m_k \mathfrak{p}_{ki}$ везана на исту праву.

Оваквих једначина 5) и 6) можемо да поставимо за сваку комбинацију двеју тачака посматранога система, па ћемо зато добити $\frac{n(n-1)}{2}$ једначина типуса 5) и исто толико једначина типуса 6).

Саберемо ли све једначине типуса 5), па саставимо ли све векторе $\mathfrak{p}_{i1}, \mathfrak{p}_{i2}, \mathfrak{p}_{i3}, \dots . \mathfrak{p}_{in}$, који дејствују на тачку m_i, у један једини вектор $\mathfrak{p}_i$, то добивамо једначину:

$$\sum_i m_i \mathfrak{p}_i = O \qquad \dots 7)$$

Исто тако добивамо сабирањем једначина типуса 6) једначину

$$\sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{p}_i] = O \qquad \dots 8)$$

Као што је познато, називају се продукти вектора брзина појединих тачака и њихових маса т. ј. вектори $m_1 \mathfrak{v}_1, m_2 \mathfrak{v}_2, m_3 \mathfrak{v}_3 \dots . m_n \mathfrak{v}_n$ векторима квантитета кретања тачака $m_1, m_2, m_3 \dots .. m_n$. Ми ћемо их називати покраћено квантитетима кретања и сматрати за векторе везане на праву.[1])

При операцији са тима векторима могу се они само у њиховој прави помакнути, па се састављају на исти начин као и силе које дејствују на круто тело. *Budde* назива тај начин састављања ***heteraptische Summation*** и ми ћемо тај назив, краткоће ради, где-где употребити. Исти писац употребљава за хетераптично сабирање знак $\overset{*}{+}$, а за сабирање слободних вектора знак $\overset{\frown}{+}$; ми ћемо се међутим послужити уобичајеним знаковима векторске анализе, имајући на уму да се квантитети кретања имају сматрати за везане векторе и да су за њихово сабирање потребне две векторске операције, као што ће се из следећег видети.

Проведимо сада хетераптично сабирање вектора квантитета кретања тачака посматранога система употребив тачку сравнивања O за редукциону тачку.

У то име надовежимо на тачку O векторе:

$$+ m_1 \mathfrak{v}_1, - m_1 \mathfrak{v}_1, + m_2 \mathfrak{v}_2, - m_2 \mathfrak{v}_2 \dots . + m_n \mathfrak{v}_n, - m_n \mathfrak{v}_n$$

чији је хетераптични збир очито раван нули. Вектори $+ m_1 \mathfrak{v}_1, + m_2 \mathfrak{v}_2 \dots .. + m_n \mathfrak{v}_n$ који дејствују сада на исту тачку O могу се хетераптично сабрати у један поларни вектор $\mathfrak{A}$, па је тај хетераптични збир, у овоме случају, раван векторијелном збиру, зато је:

$$\sum_i m_i \mathfrak{v}_i = \mathfrak{A} \qquad \dots . 9)$$

---

[1] *Newton* је називао те векторе покретним силама. Тај назив, који се је изобичајио, био би у овоме случају згоднији него назив „квантитет кретања“, јер назив сила истиче већ својство вектора везаног на праву. И *H. Grassmann* је у својој *Bewegungslehre* називао квантитет кретања укратко силом.

Заостали вектори $-m_1 \mathfrak{v}_1, -m_2 \mathfrak{v}_2 \dots\dots -m_n \mathfrak{v}_n$ сачињавају са квантитетима кретања векторске спрегове, који се могу потпуно представити аксијалним векторима:

$$m_1 [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{v}_1], m_2 [\mathfrak{r}_2 \mathfrak{v}_2], \dots\dots\dots m_n [\mathfrak{r}_n \mathfrak{v}_n]$$

Хетераптични збир тих векторијалних спрегова може бити представљен слободним аксијалним вектором $\mathfrak{B}$ који је једнак векторијалном збиру горњих аксијалних вектора:

$$\sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i] = \mathfrak{B} \qquad \dots . 10)$$

На тај начин смо успели да хетераптични збир вектора квантитета кретања представимо поларним вектором $\mathfrak{A}$, и слободним аксијалним вектором $\mathfrak{B}$[1]).

Диференцирајмо сада једначине 9) и 10) по времену, то добивамо:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathfrak{v}_i = \sum_i m_i \mathfrak{p}_i \quad \dots 11)$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i] = \sum_i m_i [\mathfrak{v}_i \mathfrak{v}_i] + \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{p}_i] =$$

$$= \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{p}_i] \qquad \dots . 12)$$

Из ових једначина следује, обзиром на једначине 7) и 8):

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = 0 \qquad \dots . 13)$$

---

[1]) Употребив начин писања *Budde*-а, тај би се резултат могао изразити једначином:

$$m_1 \mathfrak{v}_1 \overset{*}{+} m_2 \mathfrak{v}_2 \overset{*}{+} \dots\dots\dots \overset{*}{+} m_n \mathfrak{v}_n = \mathfrak{A} \overset{*}{+} \mathfrak{B}$$

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0 \qquad \dots\dots 14)$$

Ове две једначине казују да су вектори $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ независни од времена, зато можемо да пишемо:

$$\mathfrak{A} = \text{const.} \qquad \dots . 15)$$

$$\mathfrak{B} = \text{const.} \qquad \dots . 16)$$

имајући на уму да се константност тих вектора односи на време, а да се, као што је лагано увидети, вектор $\mathfrak{B}$ мења ако редукциона тачка O мења свој положај. Вектор $\mathfrak{A}$ независан је и од положаја редукционе тачке. Та два вектора имају своје одређено механичко значење као што ћемо сада показати:

Нека нам, у то име, тачка S, радиусвектора $\mathfrak{r}_0$, представља заједничко тежиште или центрум маса посматранога система, онда је, према самој дефиницији тежишта:

$$\mathfrak{r}_0 \sum_i m_i = \sum_i m_i \mathfrak{r}_i \qquad \dots\dots 17)$$

Диференцирамо ли ову једначину по времену *t*, то добивамо:

$$\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt} \sum_i m_i = \sum_i m_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = \sum_i m_i \mathfrak{v}_i = \mathfrak{A} \quad \dots 18)$$

Израз $\frac{d\mathfrak{r}_0}{dt}$ представља и вектор брзине $\mathfrak{v}_0$ тежишта S, а израз $\sum_i m_i$ целокупну масу *M* посматранога система, па је зато значење вектора $\mathfrak{A}$ изражено једначином:

$$\mathfrak{A} = M . \mathfrak{v}_0 \qquad \dots . 19)$$

т. j. вектор $\mathfrak{A}$ представља квантитет кретања тежишта S, ако се замисли да je у њему читава маса концентрована.

Из горње једначине следује:

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{1}{M}\mathfrak{A}, \qquad \ldots\ldots 20)$$

па како су величине $\mathfrak{A}$ и M константне величине, то се тежиште система креће праволинијски, једнаком брзином.

Означимо ли са $\mathfrak{a}$ радиусвектор иницијалног положаја тежишта, т. ј. вредност његову за време $t = O$ то интеграцијом једначине 18) или 20) следује векторска једначина:

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} + \frac{t}{M}\mathfrak{A} \qquad \ldots . 21),$$

која одређује кретање тежишта.

Значење вектора $\mathfrak{B}$ произилази из следећих разматрања:

Означимо радиусвекторе тачака $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$, узете од тежишта система са $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \ldots\ldots \mathfrak{f}_n$, то je:

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{f}_i \qquad i = 1, 2, \qquad \ldots n$$

Зато je:

$$\mathfrak{B} = \sum_i m_i\,[\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i] = [\mathfrak{r}_0 \sum_i m_i \mathfrak{v}_i\,] + \sum_i [\mathfrak{f}_i\, m_i\,\mathfrak{v}_i] =$$

$$= [\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{A}] + \sum_i [\mathfrak{f}_i\,(m_i\,\mathfrak{v}_i)] \ldots\ldots 22)$$

Ова једначина казује да се вектор $\mathfrak{B}$ даде представити као збир двају аксијалних вектора: први од њих представља статични моменат квантитета кретања тежишта система, ако je у њему читава маса M концетрована, обзиром на тачку O, а други представља збир статичних момената квантитета кретања појединих тачака система обзиром на тежиште S, сматрано за непомично у проматраноме моменту.

Векторска једначина:

$$\mathfrak{B} = \sum_i m_i\,[\mathfrak{r}_i\,\mathfrak{v}_i]$$

дозвољава још једну интерпретацију:

Како je:

$$\mathfrak{v}_i = \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt},$$

то се може и да пише:

$$\mathfrak{B} = \sum_i m_i \frac{[\mathfrak{r}_i\,d\mathfrak{r}_i]}{dt}$$

Векторијални продукат $[\mathfrak{r}_i\,d\mathfrak{r}_i]$ представља двоструку управљену површину $\delta\mathfrak{f}_i$ што jу радиусвектор $\mathfrak{r}_i$ тачке m_i опише у бесконачно маленом времену dt, зато се квоциенат:

$$\frac{1}{2}\,\frac{[\mathfrak{r}_i\,d\mathfrak{r}_i]}{dt} = \mathfrak{c}_i$$

назива вектором секторске брзине тачке m_i.

Једначина:

$$\mathfrak{B} = 2\sum_i m_i \frac{\delta\mathfrak{f}_i}{dt} = 2\sum_i m_i\,\mathfrak{c}_i \ldots\ldots 23)$$

даје значење вектора $\mathfrak{B}$ као двоструки збир вектора секторских брзина појединих тачака система, помножених са масама тих тачака и казује да je тај збир константан.

Аналитичка механика није у стању да горњу теорему тако опћенито формулише, јер не може да изразује директно векторске операције, него се служи пројекцијама секторских површина на три равнине. Из векторске једначине 23) могу се извести познате три скаларне једначине аналитичне механике, које изражавају принцип површина, ако се она помножи скаларно са јединичним векторима $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Положимо кроз тачку О једну произвољну равнину *E*. Аксијални јединични вектор, нормалан на ту равнину, нека буде означен са $\mathfrak{e}_0$. Помножимо ли са тим вектором једначину 23) скаларно, то добивамо:

$$\sum_i m_i \frac{\delta\mathfrak{f}_i \cdot \mathfrak{e}_0}{dt} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{e}_0 \qquad \ldots\ldots 24)$$

Скаларни продукат $\delta\mathfrak{f}_i \cdot \mathfrak{e}_0$ представља пројекцију површине $\delta\mathfrak{f}_i$ на равнину Е или површину dF_i, што ју пројекција радиусвектора $\mathfrak{r}_i$ опише по равнини Е у бесконачно маленом времену *dt*. Скаларни продукат $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{e}_0$ представља пројекцију вектора $\mathfrak{B}$, на нормалу равнине Е, па како је вектор $\mathfrak{B}$, према пређашњем, независан од времена, то је и та пројекција константна скаларна величина, рецимо 2 C. Једначина 24) добива према томе облик:

$$\sum_i m_i \frac{dF_i}{dt} = C \qquad \ldots\ldots\ldots 25),$$

па изражава принцип површина језиком аналитичне механике.

Рекли смо да константа 2 C представља пројекцију вектора $\mathfrak{B}$ на нормалу равнине Е; та ће пројекција имати своју највећу вредност ако равнина Е буде нормална на вектор $\mathfrak{B}$. Равнина, која има

својство, да за њу леви збир једначине 25) достигне највећу могућу вредност зове се инвариабилна равнина *Laplace*-ова, па зато можемо да кажемо:

Инвариабилна равнина *Laplace*-ова за тачку O нормална је на вектор $\mathfrak{B}$.

Из свега досадањег следује да једначина 16) изражава у потпуној опћенитости закон површина и дефинише положај *Laplace*-ове равнине, нормалне на вектор $\mathfrak{B}$.

Резултате досадањих излагања можемо да резимирамо у теорему:

Теорема: *Сматрају ли се моментани вектори квантитета кретања материјалних тачака система, на који не дејствују никакове спољне силе, за векторе везане на праве, то се они даду по познатим правилима редукције везаних вектора (или хетераптичке сумације) помоћу једне непомичне тачке O редуковати на један поларан вектор* $\mathfrak{A}$ *и један аксијалан вектор* $\mathfrak{B}$, *па означимо ли са* $\mathfrak{r}_0$ *радиусвектор тежишта система, узет од тачке O, а са* $\mathfrak{a}$ *његову иницијалну вредност (за време* $t = o$*), то, за време читавог кретања, постоје векторске једначине:*

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \text{const.}\\ \mathfrak{B} &= \text{const.}\\ \mathfrak{r}_0 &= \mathfrak{a} + \frac{t}{M}\mathfrak{A} \end{aligned}\right| \qquad \ldots\ldots 26)$$

Иницијалним условима одређени су константни вектори $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, *и* $\mathfrak{a}$, *па како је за њихову одредбу потребно девет скаларних констаната, независних једна од друге, то горње једначине представљају девет општих интеграла проблема n тела, те прва од њих изражава* *закон о одржању квантитета кретања, друга закон површина,* а *трећа одређује кретање тежишта.*

Према законима о редукцији везаних вектора, могу се вектори квантитета кретања свих посматраних тачака према различитом избору редукционе тачке O на небројено много начина свести на два укрштена вектора, која не мењају своју вредност за време кретања.

Даду ли се вектори квантитета кретања редуковати на један једини поларни вектор, то је тај вектор независан од редукционе тачке, везан на једну непомичну праву простора и константан за време кретања.

Помножимо ли једначину:

$$m_i \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt} = \mathfrak{P}_i$$

скаларно са $\mathfrak{v}_i = \dfrac{d\mathfrak{r}_i}{dt}$ то добивамо:

$$m_i \mathfrak{v}_i \, d\mathfrak{v}_i = \mathfrak{P}_i \, d\mathfrak{r}_i$$

Замислимо да смо оваковe једначине поставили за све тачке система па сабрали, то следује:

$$\sum_i m_i \mathfrak{v}_i \, d\mathfrak{v}_i = \sum_i \mathfrak{P}_i \, d\mathfrak{r}_i$$

Десна страна ове једначине представља збир елементарних радња читавога система, па ако су силе $\mathfrak{P}_i$ само функције положаја система, онда је тај збир диференцијал функције сила *U*.

$$\sum_i m_i \mathfrak{v}_i \, d\mathfrak{v}_i = d\,U$$

Интеграција ове једначине даје:

$$\frac{1}{2}\sum m_i \mathfrak{v}_i^2 = U + C \quad \ldots . 27) \,,$$

где C означава интеграциону константу. У овој једначини долазе само скаларни продукти, па је зато та једначина скаларна, а представља десети познати општи интеграл проблема *n* тела: интеграл живе силе.

Често пута је од користи посматрати кретање тачака система обзиром на тежиште система, т. ј. одабрати тачку сравнивања O у тежишту самом, па како се оно креће, према пређашњем, једнаком брзином $\mathfrak{v}_0$, то ће релативне брзине појединих тачака система бити представљене векторима:

$$(\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n \,,$$

а њихови квантитети кретања векторима:

$$m_i (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n$$

Вектор $\mathfrak{A}$ биће у овоме случају једнак:

$$\mathfrak{A}_0 = \sum_i m_i (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) = \sum_i m_i \mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0 \sum_i m_i$$

Из једначине 18) следује:

$$\mathfrak{v}_0 \sum_i m_i = \sum_i m_i \mathfrak{v}_i,$$

зато је:

$$\mathfrak{A}_0 = 0 \qquad \ldots\ldots 28)$$

Ова једначина казује, да се код релативног кретања обзиром на тежиште вектори квантитета кретања редукују на један векторски спрег. Тај спрег представљен је аксијалним вектором:

$$\mathfrak{B}_0 = \sum_i m_i \, [\mathfrak{s}_i (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0)] = \sum_i m_i \, [\mathfrak{s}_i \, \mathfrak{v}_i] + [\mathfrak{v}_0 \sum_i m_i \, \mathfrak{s}_i]$$

Како је:

$$\sum_i m_i \mathfrak{f}_i = \sum_i m_i (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0) = \sum_i m_i \mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_0 \sum_i m_i$$

то је обзиром на једначину 17):

$$\sum_i m_i \mathfrak{f}_i = 0,$$

а

$$\mathfrak{B}_0 = \sum_i m_i [\mathfrak{f}_i \mathfrak{v}_i] \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 29)$$

Ову би исту вредност добили када би сматрали тежиште за непомично, зато је вектор $\mathfrak{B}$ независан од кретања тежишта.

Особине кретања у општем проблему двају тела

Под општим проблемом двају тела разумевамо испитивање кретања двеју материјалних тачака, које се привлаче или одбијају по произвољном закону и на које не дејствују никакове спољне силе. У томе случају могуће је, на темељу опште теореме, представљене једначинама 26), извести нека општа својства кретања, која се тичу моментаних положаја оскулационих равнина путања и праваца кретања.

О оскулационима равнинама путања. Једначинама 7) и 8) изразили смо да се силе $\mathfrak{P}_1 = m_1 \mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{P}_2 = m_2 \mathfrak{p}_2$, којима дејствују посматране тачке једна на другу, држе у равнотежи, па да су зато везане и на исти правац који спаја моментане положаје тачака m_1 и m_2. Вектори акцелерација $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ добивају се деобом везаних вектора $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ са скаларним величинама m_1 и m_2, па зато и они падају у исти правац. Позната је особина криволинијског кретања, да вектор акцелерације пада у оскулациону равнину путање, из чега следује, да моментани положаји оскулационих равнина путања обеју тачака пролазе кроз праву, која спаја моментане положаје њихове. Зато следује:

Теорема: *Моментани положаји оскулационих равнина путања двају тела (материјалних тачака), која се привлаче по произвољном закону и на која не дејствују никакове спољне силе, секу се увек у правој која спаја моментане положаје тих тачака.*

О моментанима правцима кретања. Према општој теореми, представљеној једначинама 26), дефинисан је типус, на који се даду свести моментани вектори квантитета кретања, иницијалним деловима, па према томе какови су ти иницијални услови, разликујемо четири разна случаја, у којима се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, на један векторски спрег, на два укрштена вектора. Те случајеве испитиваћемо сваки за себе.

1° Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на нулу, т. ј.:

$$\mathfrak{A} = 0 \qquad \mathfrak{B} = 0$$

онда је:

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} = \text{const.}$$

Тежиште система је непомично, вектори квантитета кретања леже у истој правој, која пролази кроз непомични положај тежишта; моментани правци кретања добивају се деобом вектора квантитета кретања са скаларним величинама m_1 и m_2, па се зато оба тела крећу истоме правцу брзинама инверзно пропорционалним њиховим масама. Сукоб се може десити у непомичном тежишту система.

На овај се случај даде свести и случај када иницијални вектори квантитета кретања дају један једини вектор који пролази кроз тежиште система. Јер посматрамо ли сада релативна кретања обзиром на тежиште, т. ј. одаберемо ли тежиште за редукциону тачку, то је обзиром на једначине (28 и 29):

$$\mathfrak{A}_0 = 0 \qquad \mathfrak{B}_0 = 0$$

Оба тела крећу се на једној правој брзинама инверзно пропорционалним њиховим масама, а та права креће се у простору транслатсорно једнаком брзином. Путање обеју тачака леже у једној те истој равни; сукоб се може десити у путањи тежишта система.

Овај случај може настати распрштењем једнога тела, које се креће транслаторно једнаком брзином, у два тела; јер прије распрштења дају вектори квантитета кретања један вектор који пролази кроз тежиште система, а тај се вектор не мења под утицајем унутарњих сила.

2°. Иницијални вектори квантитета кретања даду се редуковати на један једини вектор $\mathfrak{A}$. Одаберемо ли, дакле, редукциону тачку O у прави тога вектора, то је:

$$\mathfrak{a} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2$$

$$\mathfrak{B} = 0$$

Вектор — $\mathfrak{A}$ држи се у равнотежи са векторима $m_1 \mathfrak{v}_1$ и $m_2 \mathfrak{v}_2$, т. ј. та три вектора редукују се на нулу. Према познатим законима о састављању везаних вектора морају се та три вектора сећи у једној тачки, а како је вектор $\mathfrak{A}$ у простору фиксиран, то из тога следује, да се вектори $m_1 \mathfrak{v}_1$ и $m_2 \mathfrak{v}_2$, а према томе и вектори $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$, секу увек у једној у простору фиксираној правој. Оба ова вектора представљају и моментане правце кретања, који неће моћи

оставити равнину иницијалних праваца кретања, па зато можемо да формулишемо теорему:

Теорема. *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања двају тела редуковати на један једини вектор, то се оба тела крећу у једној равни, која садржава тај вектор, а њихови моментани правци кретања секу се увек у непомичној правој тога вектора.*

И у овоме случају могуће је, на темељу опште теореме, испитати могућност сукоба тих двеју тачака. Не пролази ли вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се ово креће по једној у простору фиксираној правој, рецимо $\mathfrak{N}$, паралелно везаном вектору $\mathfrak{A}$. Како се моментани правци кретања секу увек у вектору $\mathfrak{A}$, то би се сукоб могао десити само у тој правој, но како тежиште система не може да остави праву $\mathfrak{N}$, то би се сукоб морао у исто време десити и у правој $\mathfrak{N}$. Сукоб је дакле у посматраноме коначном простору немогућ, но оба тела могу проћи бесконачно близу једно поред другог. Пролази ли вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се овај случај сваља на пређашњи.

3°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на један спрег:

$$\mathfrak{A} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 = o$$

Тежиште система је непомично; оба тела кретаће се у равнини њихових иницијалних брзина која је у овоме случају идентична са *Laplace*-овом инвариабилном равнином за произвољну тачку простора; моментани правци кретања увек су међусобно паралелни, па је зато могуће заменити у горњој једначини векторске вредности $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ са њиховим скаларним износима. Величине тих брзина инверзно су пропорционалне масама m_1 и m_2. Сукоб обеју тачака није могућ.

Ако се оба тела привлаче силом P, која зависи само од њиховог међусобног одстојања, па ако су иницијалне брзине v_1 и v_2 нормалне на праву, што спаја оба тела, а представљене величинама:

$$v_1^2 = l\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{P}{m_1+m_2}\,;\quad v_2^2 = l\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{P}{m_1+m_2}$$

где l означава иницијално одстојање обеју тела, тада су радиуси кривине ϱ_1 и ϱ_2 путања у иницијалном моменту:

$$\varrho_1 = \frac{m_1 v_1^2}{P} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,l \qquad \varrho_2 = \frac{m_2 v_2^2}{P} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,l$$

Центрум кривине обеју путања пада у заједничко тежиште, па ће зато оба тела описивати око непомичнога заједничкога тежишта концентричне кругове.

4°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на два укрштена вектора.

Овај случај даде се, помоћу једначина 28) и 29), свести на пређашњи случај 3°, ако се посматрају релативна кретања обеју материјалних тачака око њиховог заједничког тежишта. Зато се ово кретање састоји из два: оба тела крећу се по законима претходног случаја у инвариабилној равни њиховога заједничког тежишта, а ова раван креће се транслаторном брзином у правцу вектора $\mathfrak{A}$. Подударају ли се правци вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, на који се даду редуковати квантитети кретања, употребив заједничко тежиште као редукциону тачку т. ј. пролази ли централна оса вектора квантитета кретања кроз тежиште система, па одговарају ли иницијалне брзине специјазним условима пређашњега случаја, онда опи-

сују оба тела хеликсе исте висине хода, обавијене око концентричних кружних цилиндера. Ако су обе масе једнаке, онда су оба ова хеликса конгруентна и леже диаметрално на истоме цилиндеру, тако, да су увијена један у други.

Сукоб обеју материјалних тачака је немогућ, јер би у томе случају хетераптични збир вектора квантитета кретања дегенерисао на један једини вектор.

Особине кретања у општем проблему трију тела.

Под општим проблемом трију тела разумевамо испитивање кретања трију материјалних тачака m_1, m_2 и m_3, које се привлаче или одбијају по произвољном закону и на које не дејствују никакове спољне силе. Сва следећа извађања важе дакле и за случај *Newton*-ове гравитације, на који ћемо се случај такође специјално обазрети.

Означења. Означимо углове троугла, што га посматране три материјалне тачке склапају, са A, B и C, а стране троугла, сматране за векторе, са $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, при чему $\mathfrak{a}$ лежи наспрам A, $\mathfrak{b}$ наспрам B, а $\mathfrak{c}$ наспрам C. Позитивни правац обилажења нека иде од A ка B ка C. Употребив *Grassmann*-ову дефиницију диференције тачака можемо и да пишемо:

$$\mathfrak{a} = C - B \quad \mathfrak{b} = A - C \quad \mathfrak{c} = B - A \qquad \ldots 30)$$

Масе материјалних тачака у угловима A, B, C нека буду означене са m_1 m_2 m_3.

S нека буде заједничко тежиште те три масе m_1, m_2, m_3, а радиусвектори повучени од њега према тим масама т. ј. тачкама A, B, C нека буду означени са $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_3$.

Употребив *Grassmann*-ову дефиницију диференције тачака можемо да пишемо:

$$\mathfrak{f}_1 = A - S, \quad \mathfrak{f}_2 = B - S, \quad \mathfrak{f}_3 - C - S \ldots . \; 31)$$

Исто тако нека представљају $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_0$ радиусвекторе тачака A, B, C, S од од произвољне тачке простора O т. ј.

$$\mathfrak{r}_1 = A - O, \; \mathfrak{r}_2 = B - O, \; \mathfrak{r}_3 = C - O, \; \mathfrak{r}_0 = S - O \ldots 32)$$

Према дефиницији тежишта постоји једначина:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, \mathfrak{r}_0 = m_1\, \mathfrak{r}_1 + m_2\, \mathfrak{r}_2 + m_3\, \mathfrak{r}_3$$

а обзиром на једначине 32):

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, S = m_1 A + m_2 B + m_3 C \ldots . \; 33)$$

која изражава уједно фундаменталну једначину *Moebius*-овог барицентричног рачуна. Ту једначину можемо писати и у облику:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \; (S - S) = m_1 \; (A - S) + m_2 \; (B - S) + \\ + m_3\, (C - S),$$

па је обзиром на једначине 31):

$$m_1\, \mathfrak{f}_1 + m_2\, \mathfrak{f}_2 + m_3\, \mathfrak{f}_3 = o \ldots . \; 34)$$

Сила, којом дејствује тачка C на тачку B, т. ј. унутарња сила у позитивном правцу вектора $\mathfrak{a}$ нека буде означена са $\mathfrak{P}_a$, а сила којом дејствује тачка B на тачку C, т. ј. унутарња сила у негативном правцу вектора $\mathfrak{a}$ нека буде означена са $-\mathfrak{P}_a$, јер су ове две силе једнаке, а противнога правца. Исто тако нека $\mathfrak{P}_b$ и $\mathfrak{P}_c$ представљају унутарње силе у позитивном правцу вектора $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, а $-\mathfrak{P}_b$ и $-\mathfrak{P}_c$ силе у негативном правцу тих вектора.

Пол гравитације. Саставимо унутарње силе које делују на материјалне тачке m_1, m_2 и m_3, па их означимо редом са $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$, онда постоје једначине:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_b \\ \mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_c \\ \mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_a \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \; 35)$$

Сматрамо ли сада те силе у посматраноме моменту за везане векторе, то је аналогно пређашњим ознакама:

$$\mathfrak{A}_p = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 = o \ldots\ldots . \; 36)$$

$$\mathfrak{B}_p = [\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{P}_1] + [\mathfrak{r}_2\, \mathfrak{P}_2] + [\mathfrak{r}_3\, \mathfrak{P}_3] = [(\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3)\, \mathfrak{P}_a] + \\ + [(\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1)]\, \mathfrak{P}_b] + [(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, \mathfrak{P}_c]$$

Из једначина 30) и 32) следује:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1,$$

зато је:

$$\mathfrak{B}_p = [\mathfrak{P}_a\, \mathfrak{a}] + [\mathfrak{P}_b\, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{P}_c\, \mathfrak{c}] = o \; \ldots 37),$$

јер вектори $\mathfrak{P}_a$ и $\mathfrak{a}$, па $\mathfrak{P}_b$ и $\mathfrak{b}$, па $\mathfrak{P}_c$ и $\mathfrak{c}$ имају исте правце.

Једначине 36) и 37) казују, да је хетерантични збир везаних вектора $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ раван нули, а из тога следује, да би се силе $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ $\mathfrak{P}_3$, кад би, без промене свога међусобнога положаја, дејствовале на круто тело, држале у равнотежи.[1] Зато се силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ секу у једној те истој тачки, равнине трију тела m_1, m_2 и m_3. Ту тачку називаћемо *полом гравитације*, а означити ћемо ју са словом Ω.

Падају ли сва три тела у исти правац, тада падају и силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ у исти правац, па се не секу. У овоме случају дефинишемо пол гравитације као граничан положај пола гравитација троугла ABC, када се тачке A, B, C приближују једној правој.

Ако се посматрана три тела привлаче, онда падају силе $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$ у унутарње углове троугла трију тела, па зато лежи пол гравитације у томе случају у троуглу, а леже ли сва три тела у истоме правцу, између оба крајња тела.

Критеријум познатих егзактних решења проблема трију тела. Испитивајмо услове под којима пол гравитације Ω пада у тежиште S посматраних трију маса m_1, m_2 и m_3. Ти ће услови бити изражени векторским једначинама:

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_c = \lambda\mathfrak{f}_1 \\ -\mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_a = \mu\mathfrak{f}_2 \\ -\mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_b = \nu\mathfrak{f}_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 38)$$

где λ, μ, ν означавају скаларне факторе, јер ако су горње једначине задовољене, онда се праве радиус-вектора $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_3$ подударају са правама сила $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$, па се зато и тачке S и Ω поклапају. Саберемо ли горње три једначине, то добивамо:

---

[1] Употребив ознаке Budde-ове (види наше примедбе на стр. 2 и 7) могле би се операције изведене једначинама 36) и 37) једном једначином изразити: Једначине 35) могу се писати у облику: $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_c \overset{*}{-} \mathfrak{P}_b$; $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_a \overset{*}{-} \mathfrak{P}_c$ $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_b \overset{*}{-} \mathfrak{P}_a$, а одатле следује директно: $\mathfrak{P}_1 \overset{*}{+} \mathfrak{P}_2 \overset{*}{+} \mathfrak{P}_3 \overset{*}{=} o$, Ова једначина садржава у себи једначине 36) и 37).

$$\lambda\mathfrak{f}_1 + \mu\mathfrak{f}_2 + \nu\mathfrak{f}_3 = o \quad \ldots\ldots 39)$$

Ова једначина казује, да су вектори $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_3$ компланарни; сравнимо ли ју са једначином 34), то видимо да ће — ако сва три посматрана тела не леже у истој правој — она моћи бити задовољена само онда ако је:

$$\lambda = km_1 \qquad \mu = km_2 \qquad \nu = km_3$$

где k означава један произвољни константни скаларни фактор. Тако услови, да тачке Ω и S падну заједно добивају облик:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_c &= km_1\mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_a &= km_2\mathfrak{f}_2 \\ \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_b &= km_3\mathfrak{f}_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 40)$$

Ови услови важе према учињеним предпоставкама само онда када сва три тела не леже у истој правој. Но како смо за случај, да сва три тела леже у истој правој, пол гравитације дефинисали као гранични положај пола троугла ABC када се тачке A, B и C приближују истој правој, то ће једначине 40) важити и за тај случај.

Горњима једначинама можемо дати и други облик, ако векторе $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и $\mathfrak{f}_3$ изразимо векторима $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. Замислимо у тежишту S концентрисану масу

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

то је моменат те масе обзиром на коју год тачку E, равнине трију тела, једнак збиру момената маса m_1, m_2 и m_3, размештених у угловима A, B и C обзиром на ту исту тачку E. Ово познато својство добија се — у смислу *Grassmann*-овог векторског рачуна —

и мултипликацијом једначине 33) са тачком Е. Заменемо ли тачку Е редом са тачкама А, В и С, то добивамо једначине:

$$\left.\begin{aligned} M\mathfrak{f}_1 &= m_3\,\mathfrak{b} - m_2\,\mathfrak{c} \\ M\mathfrak{f}_2 &= m_1\,\mathfrak{c} - m_3\,\mathfrak{a} \\ M\mathfrak{f}_3 &= m_2\,\mathfrak{a} - m_1\,\mathfrak{b} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\; 41)$$

а обзиром на једначине 40):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_c &= \frac{k}{M}\, m_3\, m_1\, \mathfrak{b} - \frac{k}{M}\, m_1\, m_2\, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{P}_c - \mathfrak{P}_a &= \frac{k}{M}\, m_1\, m_2\, \mathfrak{c} - \frac{k}{M}\, m_2\, m_3\, \mathfrak{a} \\ \mathfrak{P}_a - \mathfrak{P}_b &= \frac{k}{M}\, m_2\, m_3\, \mathfrak{a} - \frac{k}{M}\, m_3\, m_1\, \mathfrak{b} \end{aligned}\right\} \dots\dots\; 42)$$

Праве сила $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$ и вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ подударају се, зато ће горње једначине — не леже ли сва три тела у истој правој — бити задовољене, ако је:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= k'\, m_2\, m_3\, \mathfrak{a} \\ \mathfrak{P}_b &= k'\, m_3\, m_1\, \mathfrak{b} \\ \mathfrak{P}_c &= k'\, m_1\, m_2\, \mathfrak{c} \end{aligned}\right\} \dots\dots\; 43),$$

при чему смо константу $\frac{k}{M}$ заменили са константом k'.

Испитивајмо сада случајеве када се посматрана три тела привлаче силама које су пропорционалне њиховим масама и које су иначе само функција њихових одстојања, т. ј. абсолутних износа a, b, c, вектора $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ када је дакле:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P}_a &= m_2\, m_3\, \varphi(a)\, \mathfrak{a}_0 \\ \mathfrak{P}_b &= m_3\, m_1\, \varphi(b)\, \mathfrak{b}_0 \\ \mathfrak{P}_c &= m_1\, m_2\, \varphi(c)\, \mathfrak{c}_0 \end{aligned}\right\} \dots\dots\; 44),$$

при чему $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ $\mathfrak{c}_0$ означују јединачне векторе, те је

$$\mathfrak{a} = a\,\mathfrak{a}_0 \quad \mathfrak{b} = b\,\mathfrak{b}_0 \quad \mathfrak{c} = c\,\mathfrak{c}_0$$

Износе a, b, c узимамо увек позитивне. Случајеве, када посматрана три тела не леже и када леже у истој правој, испитиваћемо сваки за себе.

Не леже ли тела у истоме правцу, тада можемо да применимо једначине 43). Сравнимо ли те једначине са једначинама 44), које можемо писати и у облику:

$$\mathfrak{P}_a = m_2 m_3 \frac{\varphi(a)}{a}\, \mathfrak{a}$$

$$\mathfrak{P}_b = m_3 m_1 \frac{\varphi(b)}{b}\, \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{P}_c = m_1 m_2 \frac{\varphi(c)}{c}\, \mathfrak{c}$$

то добивамо:

$$\frac{\varphi(a)}{a} = k' \quad \frac{\varphi(b)}{b} = k' \quad \frac{\varphi(c)}{c} = k'.$$

Услови да пол гравитације $\boldsymbol{\Omega}$ падне у тежиште S изражени су дакле једначинама:

$$\frac{\varphi(a)}{a} = \frac{\varphi(b)}{b} = \frac{\varphi(c)}{c} \qquad \dots\; 45)$$

Падају ли сва три тела у један те исти правац, онда нам ваља употребити једначине 40). Јединични вектори $\mathfrak{a}_0$ $\mathfrak{b}_0$ $\mathfrak{c}_0$ падају сада у исту праву, а правац њихов зависи од реда тачака A, B и C. Узмимо, да су тела распоређена по правој тако, да у позитивном правцу јединичног вектора $\mathfrak{c}_0$ долази прво тело m_1 па тело m_2 па тело m_3, а да тежиште лежи између m_1 и m_2, онда је:

$$\mathfrak{a}_0 = - \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}$$

и

$$\mathfrak{P}_a = + m_2 m_3 \varphi(a) \mathfrak{c}_0$$

$$\mathfrak{P}_b = - m_3 m_1 \varphi(b) \mathfrak{c}_0$$

$$\mathfrak{P}_c = + m_1 m_2 \varphi(c) \mathfrak{c}_0$$

Означимо још:

$$\mathfrak{s}_1 = s_1 \mathfrak{c}_0 \qquad \mathfrak{s}_2 = s_3 \mathfrak{c}_0 \qquad \mathfrak{s}_3 = s_3 \mathfrak{c}_0$$

где s_1, s_2, s_3 означавају скаларне величине, при чему је према утврђеном реду тачака s_1 негативно, а s_2 и s_3 позитивно, па ставимо све горње вредности у једначине 40), то добивамо:

$$\left.\begin{aligned} - m_3 \varphi(b) - m_2 \varphi(c) &= k s_1 \\ m_1 \varphi(c) - m_3 \varphi(a) &= k s_2 \\ m_2 \varphi(a) + m_1 \varphi(b) &= k s_3 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots . 49)$$

Једначине 41) прелазе, у овоме случају, у скаларне једначине:

$$M s_1 = - m_3 b - m_2 c$$

$$M s_2 = m_1 c - m_3 a$$

$$M s_3 = m_2 a + m_1 b$$

Субституцијом ових једначина у једначине 46) добивамо:

$$m_3 \varphi(b) + m_2 \varphi(c) = \frac{k}{M}(m_8 b + m_2 c)$$

$$m_1 \varphi(c) - m_3 \varphi(a) = \frac{k}{M}(m_1 c - m_3 a)$$

$$m_2 \varphi(a) + m_1 \varphi(b) = \frac{k}{M}(m_2 a + m_1 b)$$

Од ових трију једначина само су две независне, јер трећа следује из осталих двеју. Из прве и треће од њих добивамо:

$$\frac{m_2 \varphi(a) + m_1 \varphi(a + c)}{m_2 a + m_1 (a + c)} = \frac{m_3 \varphi(a + c) + m_2 \varphi(c)}{m_3 (a + c) + m_2 c}$$

или:

$$m_1 [c \varphi(a + c) - (a + c) \varphi(c)] + m_2 [c \varphi(a) - a \varphi(c)] +$$
$$+ m_3 [(a + c) \varphi(a) - a \varphi(a + c)] = 0 \qquad \ldots 47)$$

Ако је функција φ хомогена функција n-тог степена свога аргумента, то можемо горњој једначини, делећи ју са c^{n+1}, дати облик:

$$m_1 [\varphi(1 + \frac{a}{c}) - (1 + \frac{a}{c}) \varphi(1)] + m_2 [\varphi(\frac{a}{c}) - \frac{a}{c} \varphi(1)]$$
$$+ m_3 [(1 + \frac{a}{c}) \varphi(\frac{a}{c}) - \frac{a}{c} \varphi(1 + \frac{a}{c})] = 0$$

Ставимо ли:

$$\frac{a}{c} = z$$

то је услов, да пол гравитације $\boldsymbol{\Omega}$ падне у тежиште S изражен једначином:

$$m_1 [\varphi(1 + z) - (1 + z) \varphi(1)] = m_2 [\varphi(z) - z \varphi(1)] +$$
$$+ m_3 [(1 + z) \varphi(z) - z \varphi(1 + z)] = 0 \qquad \ldots 48)$$

Ако је међусобна атракција појединих тела пропорционална n-тој потенцији њиховог одстојања т. ј. ако је

$$\varphi(x) = x^n,$$

то услов 45) добија облик:

$$a^{n-1} = b^{n-1} = c^{n-1}$$

или:

$$a = b = c \qquad \ldots . 49)$$

т. ј. три посматрана тела леже на врховима истостранога троугла. Леже ли сва три тела на истој правој, то према услову 48) постоји између њихових одстојања релација:

$$m_1 [(1 + z)^n - (1 + z)] + m_2 [z^n - z] + m_3 [(1 + z) z^n -$$
$$- z (1 + z)^n] = 0 \qquad \ldots . 50)$$

Овој једначини може се дати и облик:

$$(m_1 - m_3 z) [m_2 + m_3 (1 + z)^n] = [m_2 + m_3 (1 + z)].$$
$$(m_1 - m_3 z^n) \qquad \ldots . 51)$$

Обратимо још нарочиту пажњу случају када између посматраних трију тела дејствују силе *Newton*-ове гравитације. У томе је случају:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2},$$

па услов 45) добива облик

$$a = b = c \qquad \ldots .. 52)$$

т. ј. и у овоме случају леже посматрана три тела на врховима истостранога троугла.

Услов 48), који предпоставља да сва три тела леже на истој правој добива облик:

$$m_1 z^2 [1 - (1 + z)^3] + m_2 (1 + z)^2 (1 - z^3) +$$
$$+ m_3 [(1 + z)^3 - z^3] = 0 \qquad \ldots . 53)$$

Једначине 49), 51) и 52), 53) одређују потпуно оне констелације трију тела у којима, једино, тачке Ω и S падају заједно; прве две једначине важе за случај када између посматраних трију тела дејствују силе, пропорционалне n-тој потенцији њиховог одстојања, а друге две једначине важе за случај када између тела дејствују силе *Newton*-ове гравитације.

Сравнимо ли ове једначине са једначинама *Laplace*-овим, које карактеризују оне констелације трију тела при којима је егзактна интеграција њихових једначина кретања могућа, ако између њих дејствују привлачне силе као што је горе наведено, то видимо, да су наше једначине потпуно једнаке једначинама *Laplace*-овим.[1]) Како су те констелације једине, за које је решење проблема трију тела до сада успело, то следује:

Теорема: *Потребни и довољни критериум, да се проблем трију тела — која се привлаче пропорционално произвољној потенцији њиховог одстојања (случај Newton-ове гравитације овде је садржан) — може, према данашњем стању науке, егзактно да реши, одређен је условом, да та три тела сачињавају увек такову констелацију, у којој пол гравитације пада у тежиште система.*

Могуће је доказати да горњи критериум важи и за случајеве када се силе, којима се посматрана три тела привлаче владају и по којем другоме закону, но испитивање тога случаја излази изван оквира ове радње.

---

[1]) Успореди: Laplace, Traité de mécanique céleste. Tome quatrième Chapitre VI. Sur quelques cas ou l'on peut rigouresement obtenir le mouvement d' un système de corps qui s' attirent. (стр. 307—313 издања француске академије).

О оскулационима равнинама путања. Силе $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{P}_3$, које дејствују на посматрана три тела, секу се у полу гравитације који лежи у равнини тих трију тела, зато се и вектори акцелерација секу у тој тачки. Према познатоме својству криволинијскога кретања пролазе кроз те векторе и моментани положаји оскулационих равнина путања тих трију тела. Зато следује:

Теорема: *Моментани положаји оскулационих равнина путања трију тела (материјалних тачака), која се привлаче по произвољном закону и на која не дејствују никакове спољне силе, секу је увек у једној тачки равнине тих трију тела: у полу гравитације.*

Ако између та три тела дејствују силе које привлаче, онда та тачка лежи у троуглу што га та три тела ограничавају.

Из пређашњега следује такође и ово:

У моменту, када се посматрана три тела налазе на врховима истостранога троугла, секу се оскулационе равнине њихових путања у њиховом заједничком тежишту.

О моментанима правцима кретања. Према општој теореми, представљеној једначинама 26) дефинисан је типус, на који се даду свести моментани вектори квантитета кретања, иницијалним деловима, па према томе какови су ти иницијални услови разликујемо, као и при испитивању проблема двају тела, четири разна случаја, у којима се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, на један једини вектор, на један векторски спрег, на два укрштена вектора. Те случајеве испитиваћемо сваки за себе.

1° Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на нулу, т. ј.:

$$\mathfrak{A} = 0 \quad , \quad \mathfrak{B} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{a} = \text{const.}$$

Тежиште система је непомично. Према познатима законима о састављању везаних вектора, задовољавају три везана вектора, која се редукују на нулу, (држе у равнотежи) овим деловима: они леже у истој равни и секу се у једној те истој тачки.[1]) Зато ће се и за време кретања моментани вектори квантитета кретања $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{m}_2 \mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{m}_3 \mathfrak{v}_3$ сећи у једној тачки равни трију тела. Ти вектори дају и моментане правце кретања, па зато следује:

Теорема: *Редукују ли се иницијални вектори квантитета кретања трију тела на нулу, то се та три тела крећу у истој равни, а њихови моментани правци кретања секу се и истој тачки.*

Разуме се само по себи да тачка пресека тих трију права може у извесноме моменту лежати и у бесконачности; онда су моментани правци кретања паралелни.

Сукобе ли се два од посматраних трију тела, то моментани правац трећега мора пролазити кроз непомично тежиште система. Могућ је и случај, да се сва три тела у један мах сукобе, а такав се сукоб може само десити у непомичном тежишту система.

На овај се случај даде свести и случај када иницијални вектори квантитета кретања дају један једини вектор, који пролази кроз тежиште система. Јер посматрамо ли сада релативна кретања обзиром на тежиште т. ј. одаберемо ли тежиште за редукциону тачку, то је обзиром на једначине 28) и 29):

$$\mathfrak{A}_0 = 0 \qquad \mathfrak{B}_0 = 0$$

---

[1]) Види н. пр. Appell, Traité de mécaniquc rationelle I. Paris 1902 № 107.

Релативне путање, обзиром на тежиште, лежаће у једној равни, а моментани правци тога релативнога кретања сећи ће се у истој тачки.

Овај случај може настати распрштењем једнога тела, које се креће праволинијски једнаком брзином, у три тела, јер прије распрштења дају вектори квантитета кретања један вектор, који пролази кроз тежиште система, а тај се вектор не мења под утицајем унутарњих сила.[1]

2°. Иницијални вектори квантитета кретања даду се редуковати на један једини вектор $\mathfrak{A}$. Одаберемо ли, дакле, редукциону тачку O у прави тога вектора, то је:

$$\mathfrak{A} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 + m_3 \mathfrak{v}_3$$

$$\mathfrak{B} = 0$$

Вектор $-\mathfrak{A}$ држи се у равнотежи са векторима $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ и $m_3 \mathfrak{v}_3$ т. ј. та четири вектора редукују се на нулу. Према познатима законима о састављању везаних вектора сачињавају праве тих вектора уједно и четири генератрисе истога система једне те исте витоперне површине (surface reglée, Regelfläche) другога реда.[2] Положај вектора $\mathfrak{A}$ фиксиран је у простору, па зато следује:

Теорема: *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања трију тела редуковати на један једини вектор, тада сачињавају увек моментани правци кретања тих трију тела са непомичном правом тога вектора четири генератрисе истога система једне витоперне површине другога реда.*

Сече ли моментани правац кретања једнога од посматраних тела, н. пр. m_3 непомичну праву вектора $\mathfrak{A}$, онда типус од четири укрштена вектора: $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$ и $-\mathfrak{A}$, који се редукују на нулу, дегенерише на три вектора $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ и $(m_3 \mathfrak{v}_3 - \mathfrak{A})$, а ови се морају сећи у истој тачки, па се зато и вектори $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$ морају сећи; витопера површина дегенерише на две равни које се секу. Зато следује:

Правило. *У моменту када правац кретања једнога од трију посматраних тела пресече везани вектор $\mathfrak{A}$, секу се међусобно и моментани правци кретања осталих двају тела.*

О могућности сукоба посматраних тела — која сматрамо за материјалне тачке без димензије — даду се формулисати ови закључци:

У моменту, када се два од посматраних три тела сукобе, н. пр. m_1 и m_2 дегенерише типус од четири укрштена вектора: $m_1 \mathfrak{v}_1 \, m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$ и — A на три $(m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2)$, $m_3 \mathfrak{v}_3$ и $\mathfrak{A}$. а ови се морају сећи у истој тачки, па ће зато вектор $m_3 \mathfrak{v}_3$, а према томе и моментани правац кретања тела m_3 сећи вектор $-\mathfrak{A}$. Сукоб је могућ само онда ако моментани правац кретања једнога од трију тела пресече, или је паралелан везаном вектору $\mathfrak{A}$.

Не пролази ли везани вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се сва три тела не могу у исти мах сукобити, јер се тежиште система креће на једној у простору фиксираној правој $\mathfrak{N}$, паралелној вектору $\mathfrak{A}$, но коначно удаљеној од њега, па би се сукоб морао десити у исто време и у $\mathfrak{A}$ и у $\mathfrak{N}$.

Пролази ли вектор $\mathfrak{A}$ кроз тежиште система, тада се овај случај свађа на предходни.

3°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на један спрег:

---

[1] О овоме смо случају опширније реферисали: „Особина кретања у једноме специјализираном проблему трију тела“. LXXIX књига „Гласа Српске Краљевске Академије“.

[2] Види н. пр. Appell, Traité de mécanique rationele. I. Paris 1902. № 107.

$$\mathfrak{A} = m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2 + m_3 \mathfrak{v}_3 = 0$$

Горња једначина казује да је тежиште система непомично и да су вектори квантитета кретања компланарни. Зато важи за моментане правце кретања:

Теорема. *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања трију тела редуковати на један векторски спрег, тада су моментани правци кретања тих трију тела увек компланарни.*

4°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на два укрштена вектора или на један појединачни вектор и један спрег.

Посматрамо ли релативна кретања, обзиром на тежиште, то је према једначини 28):

$$\mathfrak{A} = 0$$

Овај се случај сваћа, дакле, на пређашњи, те су моментани правци релативног кретања обзиром на тежиште увек компланарни.

Како се, према пређашњем, вектори квантитета кретања могу редуковати и на два укрштена вектора $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, фиксирана у простору, то се вектори: $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$, — $\mathfrak{A}_1$ и — $\mathfrak{A}_2$ редукују на нулу. Према познатим законима о редукцији везаних вектора, морају свих тих пет вектора припадати једној линеарној конгруенцији.[1] Како овај случај представља општи случај кретања трију тела, а предходни су специјалне врсте његове, то следује:

Теорема: *Моментани правци кретања трију тела сачињавају са две у простору фиксиране праве увек једну линеарну конгрусницију.*

---

[1] Види н. пр. Appell, Traité de mécanique rationelle I. Paris 1902, № 107.

О брзинама приближавања. Ако се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, онда се, према пређашњем, сва три тела крећу у равни њихових иницијалних брзина. Раставимо ли векторе брзина $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{v}_3$ тих трију тела сваку у две компоненте, које падају у праве што спајају посматрано тело са остала два, то те брзине називамо брзинама приближавања. Између величина тих брзина постоји, за време читавога кретања, једна стална релација, коју ћемо сада доказати.

У то име означимо са $\mathfrak{v}_{12}$ и $\mathfrak{v}_{13}$ компоненте брзине $\mathfrak{v}_1$; прва од њих пада у правац $m_1 - m_2$, а друга у правац $m_1 - m_3$. Аналогне компоненте брзина $\mathfrak{v}_2$ и $\mathfrak{v}_3$ означимо са $\mathfrak{v}_{21}$, $\mathfrak{v}_{23}$ и $\mathfrak{v}_{31}$, $\mathfrak{v}_{32}$, онда је:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= \mathfrak{v}_{12} + \mathfrak{v}_{13} \\ \mathfrak{v}_2 &= \mathfrak{v}_{23} + \mathfrak{v}_{21} \\ \mathfrak{v}_3 &= \mathfrak{v}_{31} + \mathfrak{v}_{32} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . 54)$$

Услов, да се вектори квантитета кретања редукују на нулу, може се, по познатим законима статике, изразити и условима, да статични моменти тих вектора, обзиром на три произвољне тачке равни трију тела — које не леже у истој правој — буду равни нули.[1])

Одаберемо ли за тачке редукције момената врхове A, B и C троугла трију тела, то ће ти услови бити изражени једначинама:

$$\begin{aligned} m_2 \mathfrak{v}_{23} - m_3 \mathfrak{v}_{32} &= 0 \\ m_3 \mathfrak{v}_{31} - m_1 \mathfrak{v}_{13} &= 0 \\ m_1 \mathfrak{v}_{12} - m_2 \mathfrak{v}_{21} &= 0 \end{aligned}$$

---

[1]) Ibid № 101.

У свакој од ових једначина стоје такове брзине, које падају у исту праву, зато можемо њихове векторијелне вредности $\mathfrak{v}$ заменити са њиховима скаларним вредностима v, па добивамо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_{12}}{v_{21}} &= \frac{m_2}{m_1} \\ \frac{v_{23}}{v_{32}} &= \frac{m_3}{m_2} \\ \frac{v_{31}}{v_{13}} &= \frac{m_1}{m_3} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots . 55)$$

Из ових једначина следује:

Теорема. *Ако се иницијални вектори квантитета кретања трију тела редукују на нулу, онда су скаларни односи брзина приближавања, које одговарају истој страници троугла тих трију тела константни и једнаки инверзном односу маса оних двају тела, која ограничавају ту страницу.*

Особине кретања у општем проблему четири тела.

Под општим проблемом четири тела разумевамо — аналогно пређашњим предпоставкама — испитивање кретања четири материјалне тачке m_1, m_2, m_3 m_4, које се привлаче или одбијају по произвољном закону и на које не дејствују никакове спољне силе.

И у овоме случају могуће је доказати неке особине кретања тих четири тела.

О моментанима правцима кретања. Саставимо ли иницијалне векторе квантитета кретања, то можемо све могуће случајеве груписати у три групе, према томе да ли се ти вектори редукују на нулу, на један

једини вектор или на два вектора, (укрштена или паралелна сачињавајући један векторски спрег).

1°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на нулу.

Онда, према пређашњем, сачињавају праве тих вектора уједно и четири генератрисе истога система једне витоперне површине другога реда. Зато постоји и за моментане правце кретања следећа:

Теорема. *Редукују ли се иницијални вектори квантитета кретања четири тела на нулу, то сачињавају моментани правци кретања тих тела четири генератрисе истога система једне витоперне површине другога реда.*

На овај се случај даде, према пређашњим извађањима, свести и случај када иницијални вектори квантитета кретања дају један једини вектор, који пролази кроз тежиште система.

2°. Иницијални вектори квантитета кретања даду се редуковати на један једини вектор $\mathfrak{A}$.

Онда се хетераптични збир вектора $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$, $m_4 \mathfrak{v}_4$ и $-\mathfrak{A}$ редукује на нулу, па праве тих пет вектора сачињавају једну линеарну конгруенцију. Зато постоји за моментане правце кретања следећа

Теорема. *Даду ли се иницијални вектори квантитета кретања четири тела редуковати на један једини вектор, тада сачињавају моментани правци кретања тих четири тела са правом тога вектора једну линеарну конгруенцију.*

3°. Иницијални вектори квантитета кретања редукују се на два укрштена вектора $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ или на један векторски спрег.

Ова два вектора можемо фиксирати у простору и онда када сачињавају један векторски спрег. Хетераптични збир вектора $m_1 \mathfrak{v}_1$, $m_2 \mathfrak{v}_2$, $m_3 \mathfrak{v}_3$, $m_4 \mathfrak{v}_4$, —

$\mathfrak{A}_1$ и $-$ $\mathfrak{A}_2$ раван је нули, па зато сачињавају праве тих шест вектора, по познатим законима о састављању везаних вектора, један линеарни комплекс.1)

Теорема. *Моментани правци кретања четири тела сачињавају са две у простору фиксиране праве увек један линеарни комплекс.*

О брзинама приближавања. Ако се иницијални вектори квантитета кретања редукују на нулу, онда се, аналогно пређашњем случају, може доказати да су односи брзина приближавања независни од времена.

У то име раставимо брзине $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, $\mathfrak{v}_4$ посматрана четири тела у компоненте које падају у праве оштрица тетраедра што га та четири тела ограничавају. Те брзине називамо брзинама приближавања, па је, аналогно пређашњим означењима:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{v}_1 &= \mathfrak{v}_{12} + \mathfrak{v}_{13} + \mathfrak{v}_{14}\\ \mathfrak{v}_2 &= \mathfrak{v}_{23} + \mathfrak{v}_{24} + \mathfrak{v}_{21}\\ \mathfrak{v}_3 &= \mathfrak{v}_{34} + \mathfrak{v}_{31} + \mathfrak{v}_{32}\\ \mathfrak{v}_4 &= \mathfrak{v}_{41} + \mathfrak{v}_{42} + \mathfrak{v}_{43}\end{aligned}\right\} \quad \ldots 56)$$

Услов, да се вектори квантитета кретања редукују на нулу, може се изразити и условима, да збир статичних момената тих вектора обзиром на сваку оштрицу једнога тетраедра мора бити раван нули.2) Одаберемо ли за тетраедар редукције момената, тетраедар, што га посматрана четири тела ограничавају, то из горњег услова следује, да је збир статични момената горњих векора обзиром на сваки од четири рогља тога тетраедра раван нули. Из услова, опет, да је збир статичних момената обзиром на један

---

1) Ibid № 107.

2) Ibid № 100.

рогаљ тетраедра раван нули, следује, да се вектори који дејствују у страни тетраедра, која лежи наспрам тога рогља, морају редуковати на нулу. Употребимо ли услове, формулисане код брзина приближавања трију тела, то добивамо једначине:

$$\begin{aligned}m_1\,\mathfrak{v}_{12} - m_2\,\mathfrak{v}_{21} &= 0\\ m_2\,\mathfrak{v}_{23} - m_3\,\mathfrak{v}_{32} &= 0\\ m_3\,\mathfrak{v}_{31} - m_1\,\mathfrak{v}_{13} &= 0\\ m_1\,\mathfrak{v}_{14} - m_4\,\mathfrak{v}_{41} &= 0\\ m_2\,\mathfrak{v}_{24} - m_4\,\mathfrak{v}_{42} &= 0\\ m_8\,\mathfrak{v}_{34} - m_4\,\mathfrak{v}_{43} &= 0\end{aligned}$$

У свакој од ових једначина стоје само такове брзине које падају у исту праву, зато можемо њихове векторијалне вредности $\mathfrak{v}$ заменити њиховим скаларним вредностима, па добивамо:

$$\left.\begin{aligned}\frac{v_{12}}{v_{21}} &= \frac{m_2}{m_1}\\ \frac{v_{23}}{v_{22}} &= \frac{m_3}{m_2}\\ \frac{v_{31}}{v_{13}} &= \frac{m_1}{m_3}\\ \frac{v_{14}}{v_{41}} &= \frac{m_4}{m_1}\\ \frac{v_{24}}{v_{42}} &= \frac{m_4}{m_2}\\ \frac{v_{34}}{v_{43}} &= \frac{m_4}{m_3}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 57)$$

Из горњих једначина следује:

Теорема. *Редукују ли се иницијални вектори квантитета кретања четири тела на нулу, онда су скаларни односи брзина приближавања, које одговарају истој оштрици тетраедра та четири тела, константни и једнаки инверзном количнику маса оних двају тела, која ограничавају ту оштрицу.*

(Београд 9. IX. 1910.)