O membranama jednakog otpora.

NAPISAO

Dr. M. MILANKOVIĆ.

(Preštampano iz 175. knjige „Rada“ Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti.)

U ZAGREBU

TISAK DIONIČKE TISKARE

1908.

U ovoj ćemo radnji da izvedemo nekoje općenitije zaključke iz slijedeća dva mehanička problema:

1. Neka se dade gibivoj membrani oblik takove rotacione površine, da debljina membrane, koja se mijenja od tačke do tačke meridijana, bude u svakoj tački njezinoj proporcionalna silama istezanja normalnima na meridijanske i usporedničke presjeke, a izazvanima vlastitom težinom membrane. Neka osim toga sile istezanja u spomenuta dva smjera budu jedna drugoj jednake, tako da membrana u svima svojim tačkama pokazuje jednak otpor prema silama istezanja u obadva smjera.

2. Neka se riješi isti problem, ako je membrana mjesto svojom vlastitom težinom opterećena kapljevinom sadržanom u prostoru, koji je obuhvaćen membranom.

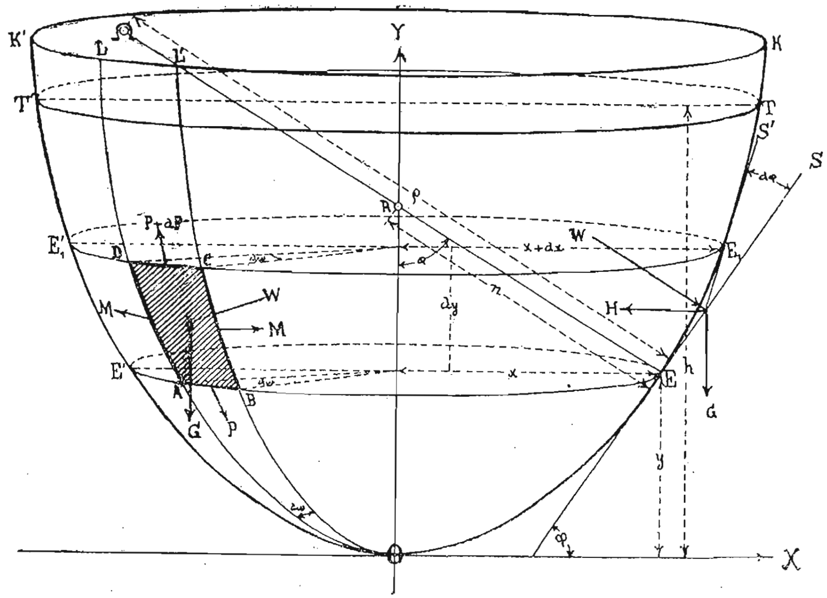
Prvi problem u ovom obliku nije do danas bio ispitivan, i ako se je S c h w e d l e r bavio pitanjima o silama istezanja u elastičnim rotacionim površinama[1]. Drugim problemom bavio se je na pobudu prof. dra. I n t z e a prof. dr. F o r c h h e i m e r, koji je razvio jednačinu membrane jednakog otpora za pritisak vode[2], no to, da se na takove membrane nailazi u prirodnim pojavama, ostalo mu je neopaženo, a baš je ta veza između tehničkih problema i prirodnih pojava od osobitog interesa za svakog ispitivača prirode. To nam je prof. dr. F o r c h h e i m e r lično priznao.

[1] S c h w e d l e r, Die Konstruction der Kuppeldächer. Zeitschrift für Bauwesen. 1866.

[2] F o r c h h e i m e r, Berechnung ebener und gekrümmter Behälterböden. Zeitschrift für Bauwesen. 1894.

Na matematičko ispitivanje drugoga problema ne ćemo mnogo riječi da trošimo, nego samo toliko, koliko nam je nužno, da dokažemo naše zaključke. Prvim ćemo se problemom malo više da pozabavimo.

U to ime neka je u slici 1. predstavljen meridijanski presjek OEE_1K jedne neizmjerno tanke potpuno gibive membrane. Uzmimo još za sad, da je meridijan u dijelu, što ga promatramo, konkavan prema svojoj osi — koju ćemo da uzmemo za ordinatnu os našega ortogonalnog sistema — i da u polu O ima horizontalnu tangentu OX, koju ćemo za apscisnu os da odaberemo. Membrana neka bude obješena na čvrstom krugu KK'.



Slika 1.

Neka osim toga označuje:

σ_m istezanje u tački E (sa koordinatama x, y) normalno na meridijanski presjek, a uzeto na jedinicu dužine presjeka.

σ_p istezanje u tački E normalno na usporednički presjek uzeto na jedinicu dužine presjeka.

Zbog simetrije membrane i opterećenja istezanja su σ_m i σ_p na čitavoj usporednici EE' konstantna.

Neka E_1E_1' predstavlja usporednicu, koja je usporednici EE' neizmjerno bliska, a $(\sigma_m + d\sigma_m)$ i $(\sigma_p + d\sigma_p)$ istezanja u tačkama ove usporednice.

Neka OL i OL' predstavljaju dva neizmjerno bliska meridijana, a $d\omega$ neka označuje onaj neizmjerno mali kut, što ga oba ova meridijana između sebe zatvaraju.

Promatrajmo sada neizmjerno mali elemenat $ABCD$, što je ograničen gore označenim neizmjerno bliskim usporednicama i meridijanima. Na nj djeluje pet sila, i to:

1. sila istezanja M meridijanskog presjeka AD
2. sila istezanja M meridijanskog presjeka BC
3. sila istezanja P usporedničkog presjeka AB
4. sila istezanja $P+dP$ usporedničkog presjeka DC
5. vlastita težina G elementa membranina $ABCD$.

Tih pet sila moraju da drže ravnotežu, te nam zakon ravnoteže predstavlja odmah jedan odnošaj između tih sila, koje su opet zavisne o obliku i debljini membrane i njezina opterećenja. Taj zakon matematički formulirati to je sada naš zadatak.

Neka u tu svrhu označuje:

g specifičnu težinu materijala membrane,
δ debljinu membrane u tački E, pa uvjerimo se, da je:

$$\widehat{AB} = x d\omega$$

$$\widehat{DC} = (x+dx) d\omega$$

$$\widehat{AD} = \widehat{BC} = ds = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

to je onda:

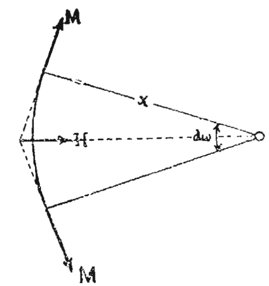
$$M = \sigma_m \, . \, ds$$

$$P = \sigma_p \, . \, x d\omega$$

$$P+dP = [\sigma_p \, . \, x + d(\sigma_p \, . \, x)] \, d\omega$$

$$G = g \, . \, \delta \, . \, x \, d\omega \, ds.$$

Obje sile M daju horizontalnu rezultantu H, koja je (slika 2.)



Slika 2.

$$H = 2M \sin \frac{d\omega}{2} = M d\omega$$

ili

$$H = \sigma_m \, ds \, d\omega.$$

Sile H, P, $(P+dP)$ i G, što djeluju na elemenat $ABCD$, leže sada sve u jednoj vertikalnoj ravnini. Zamislimo ih na meridijanski elemenat EE_1 kretnjom oko osi OY prenesene, to će sila P da padne u pravac SE tangente na meridijan u tački E, a sila $(P+dP)$ u pravac E_1S' tangente na meridijan u tački E_1; sila H je horizontalna, a G vertikalna. Luk EE_1 neizmjerno je malen, pa zbog ravnoteže mora da bude zbroj sviju komponenata gornjih sila u pravcu tangente ES jednak nuli, a zbroj sviju komponenata istih sila u pravcu normale ER također jednak nuli.

Prvi od ovih uslova ravnoteže izražen je jednačinom:

$$(P+dP)\cos d\varphi - P - H\cos\varphi - G\sin\varphi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; 1)$$

a drugi uslov jednačinom:

$$H\sin\varphi + (P+dP)\sin d\varphi - G\cos\varphi = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

a kako se može da stavi:

$$\cos d\varphi = 1 \quad \sin d\varphi = d\varphi$$

$$dx = \cos\varphi \, . \, ds \quad dy = \sin\varphi \, . \, ds,$$

to iz jednačina 1) i 2), kad u njih stavimo nađene vrijednosti za G, H $(P+dP)$ i zanemarimo neizmjerno malene vrijednosti višega reda, izlaze jednačine:

$$x d\sigma_p + (\sigma_p - \sigma_m) dx - g \,.\, \delta \,.\, x \,.\, dy = 0 \quad \ldots\ldots 3)$$

$$\sigma_m \frac{\sin\varphi}{x} + \sigma_p \frac{d\varphi}{ds} - g \,.\, \delta \,.\, \cos\varphi = 0 \quad \ldots\ldots 4)$$

Naš zahtjev glasi, da istezanja σ_m i σ_p budu u svakoj tački jedno drugome jednaka i proporcionalna debljini membrane u toj tački t. j.:

$$\sigma_p = \sigma_m = k \,.\, \delta,$$

gdje k označuje jednu konstantu. S obzirom na ovaj uslov glase jednačine 3) i 4)

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{g}{k} dy \quad \ldots\ldots 5)$$

$$\frac{\sin\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{ds} = \frac{g}{k} \cos\varphi \quad \ldots\ldots 6)$$

Iz jednačine 5) izlazi integracijom:

$$\delta = C e^{\frac{g}{k} y},$$

gdje C označuje integracionu konstantu. Označuje li δ_0 debljinu membrane u polu, to je za $y = 0$ $\delta = \delta_0$, dakle $C = \delta_0$.

Zato je zakon variranja za debljinu membrane izražen jednačinom:

$$\underline{\underline{\delta = \delta_0 \, e^{\frac{g}{k} y}}} \quad \ldots\ldots 7)$$

Uzmemo li u obzir, da je:

$$\frac{\sin\varphi}{x} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

gdje n označuje dužinu normale ER, a ρ radij krivine meridijana u tački E, to izlazi iz jednačine 6):

$$\underline{\underline{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{n} = \frac{g}{k} \cos\varphi}} \quad \ldots\ldots 8)$$

To je tražena jednačina meridijana.

Općenito je svojstvo rotacionih površina, da dužine ρ i n predstavljaju takođe i glavne radije krivine R_1 i R_2 rotacione površine u tački E. Zato jednačina

$$\underline{\underline{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{g}{k} \cos\varphi}} \quad \ldots\ldots 9)$$

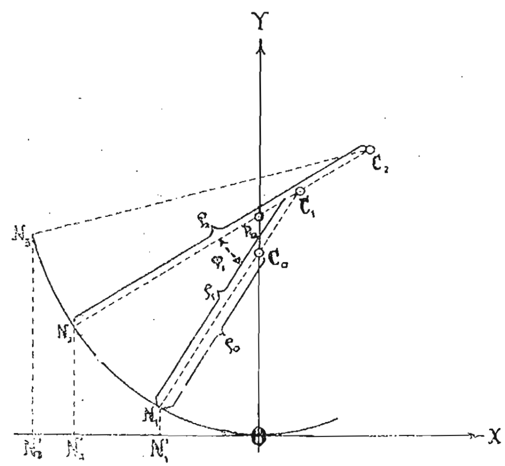
definira potpuno traženu rotacionu površinu.

Iz jednačine 8) izlazi jedna jednostavna konstrukcija meridijanske krivulje, koja se u tome sastoji, da se konstruira niz kružnih lukova, koji se po volji približuje traženoj krivulji.

Ako su dakle veličine g i k zadane, onda je radij krivine u polu poznat i jednak:

$$\rho_0 = 2 \frac{k}{g} \quad \ldots\ldots 7),$$

jer je za pol $n = \rho = \rho_0$.



Slika 3.

Konstruiramo li s tim radijem $\rho_0 = \overline{OC_0}$ po volji kratki luk ON_1 (sa centralnim kutom φ_1), možemo ga da držimo za elemenat meridijanske krivulje. Za novu tačku N_1 vrijedi odnošaj

$$n_1 = \rho_0 \,,$$

te je radij krivine ρ_1 u toj tački definiran jednačinom:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{g}{k} \cos\varphi_1 \,,$$

s kojim se opet može da opiše po volji kratki luk N_1N_2. Za novu tačku N_2 je

$$n_2 = \overline{N_2R_2} \,,$$

te se ponavljanjem pređašnjega postupka može da konstruira meridijanska krivulja $ON_1N_2N_3$ . . po volji tačno.

Prijeđimo sada na ispitivanje tehničkog značenja gornjega problema. Već na prvi pogled vidi se, da on ima srodnosti sa problemom lančanice jednakoga otpora[1], pa kao što nam lančanica jednakoga otpora predstavlja u obrnutom položaju svome teoretski najpovoljniji oblik svoda, opterećena svojom vlastitom težinom[2], tako nam površina, što smo je sada ispitali, predstavlja najpovoljniji oblik kupole. Isto tako kao i kod svoda jednakog otpora mora se i ovdje pretpostaviti, da je debljina kupole neizmjerno malena prema radiju krivine[3].

Kupola dakle, koja ima oblik površine predstavljene jednačinom 9) i kojoj debljina varira po zakonu predstavljenim jednačinom 7), bit će, izložena samo utjecaju svoje vlastite težine, u svima tačkama svojima jednako napregnuta. Dade li se takovoj kupoli takova debljina, da konstanta k predstavlja najveće dopušteno naprezanje materijala, od kojega je kupola sagrađena, to će materijal biti u svakoj tački kupole potpuno izrabljen. Tehničke konstrukcije, koje

[1] Vidi: Bobillier et Finck, Solution de deux problèmes de statique. Annales de mathématiques XVII.
Coriolis, Note sur la chaînette d'égale résistance. Liouville 1836.

[2] Vidi: Hagen, Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1844.

[3] Vidi: Milankovitch, Theorie der Druckkurven. Zeitsch. für Mathematik u. Physik. Band 55.

su tako izvedene, da je u svima dijelovima njihovim materijal, od kojega su sagrađene, jednako i do dopuštene granice napregnut, sa mehaničko-ekonomskog su gledišta najsavršenije, te je poznavanje tih „teoretski najpovoljnijih oblika" od velike važnosti za tehničke nauke.

Iz jednačine 9) izlazi, da svakomu materijalu specifične težine g, a dopuštenog naprezanja k odgovara samo jedna jedina kupola teoretski najpovoljnijeg oblika; debljina u polu nema utjecaja na oblik kupole. To je sve analogno svojstvima lančanice jednakog otpora.

Iz svojstva lančanice jednakoga otpora, da ima vertikalne asimptote, izlazi, da je njom moguće premostiti samo otvor manji od udaljenja obiju asimptota. To udaljenje zavisno je samo o konstanti $\frac{g}{k}$, te se ne da pojačanjem debljine lanca uvećati; zato se i zove „naravna granica" te konstrukcije[1].

Pitanje je sada, da li i kupola jednakog otpora ima svoju naravnu granicu, to jest da li njen meridijan ima vertikalnih asimptota.

Kriterij za vertikalnu asimptotu meridijanske krivulje jest, da za $\lim \varphi = \frac{\pi}{2}$ bude $\lim \rho = \infty$, a osim toga da $\lim n$ u tom slučaju ne bude neizmjerno velik.

Iz jednačine 8) izlazi:

$$n = \frac{1}{\frac{g}{k} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{\rho}} \,,$$

pa je zato:

$$\lim_{\substack{\rho = \infty \\ \varphi = \frac{\pi}{2}}} n = \frac{1}{0} = \infty \,,$$

što dokazuje, da meridijan kupole jednakog otpora nema vertikalnih asimptota.

[1] Vidi: A. Ritter, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, Leipzig 1899, strana 363.

*

Kupola jednakog otpora nema kao svod jednakog otpora svoje naravne granice, te je njom moguće presvoditi po volji veliki prostor.

Za pol kupole vrijede odnošaji:

$$\rho = n \quad \varphi = 0;$$

zato iz jednačine 9) izlazi, da je naprezanje materijala u polu kupole jednako

$$k = \frac{g}{2}\rho. \quad . . . . 10)$$

Naprezanje materijala u polu kupole nezavisno je prema tome o debljini kupole, a i o daljem obliku njezinu, jer se gornji elemenat kupole može držati kao kupola za sebe.

Pošto naprezanje k kod pojedinih materijala ne smije da prekorači stalnu granicu, to izlazi zaključak:

Radij krivine meridijana u polu kupole makar kakoga oblika, a sagrađene od materijala, kojega je specifična težina g, a dopušteno naprezanje k, ne može prekoračiti veličinu $\rho_0 = 2\frac{k}{g}$.

Kupolama se iz arhitektonsko-estetskih obzira daje ponajviše oblik kugle; kod njih je dakle ρ konstantan, pa zbog toga, što je kružna kupola mehanički nepovoljnije konstruirana nego kupola jednakog otpora, to radij njen mora da bude manji od vrijednosti $2\frac{k}{g}$.

Kružna kupola ima svoju naravnu granicu, te radij njen mora biti manji od vrijednosti $2\frac{k}{g}$.

Prijeđimo sada na ispitivanje drugoga mehaničkog problema, što smo ga na početku ove radnje postavili, pa zadržimo ista označenja kao i kod ispitivanja prvoga problema. Razlika između oba problema sastoji se u tom, što na elemenat $ABCD$ mjesto njegove vlastite težine G djeluje sada pritisak vode, koji je jednak:

$$W = g(h-y)xd\omega ds,$$

ako je h udaljenost pola od površine vode.

Sila G djelovala je vertikalno, dok sila W djeluje okomito na elemenat, pa zato će uslov, da zbroj sviju komponenata sila, što djeluju na elemenat EE' u pravcu tangente ES, bude jednak nuli, sada glasiti:

$$(P+dP)\cos d\varphi - P - H\cos\varphi = 0 \quad . . . . 11),$$

a uslov, da zbroj sviju komponenata u pravcu normale ER bude ravan nuli, bit će izražen jednačinom:

$$H\sin\varphi + (P+dP)\sin d\varphi - W = 0 \quad . . . . 12).$$

Analogno kao kod prvog problema dobivaju se iz ovih jednačina jednačine:

$$\sigma_p dx + x d\sigma_p = \sigma_m dx \quad . . . . 13)$$

$$\frac{\sigma_p}{\rho} + \frac{\sigma_m}{n} = g(h-y) \quad . . . . 14).$$

Prema našem zahtjevu treba da je:

$$\sigma_p = \sigma_m = k\delta,$$

pa je stoga s obzirom na jednačinu 13)

$$d\sigma_p = 0$$

ili

$$\sigma_p = \sigma_m = k\delta = \text{konstantno}$$

t. j. normalna istezanja i debljina membrane δ na čitavoj su površini konstantna.

Membrana jednakog otpora, opterećena pritiskom vode, ima svugdje istu debljinu, a oblik joj je određen jednačinom meridijana, koja se dobiva iz jednačine 14) i slijedećih i koja glasi:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{n} = \frac{g}{k\delta}(h-y) \quad . . . . 15).$$

Prijeđimo na tehničko značenje ovoga problema. Membrana jednakog otpora protiv pritiska vode predstavlja nam takođe teoretski najpovoljniji oblik reservoira za vodu, jer je u reservoiru takovog oblika materijal u svima tačkama jednako i potpuno izrabljen.

Jednačinu 15) razvio je — kao što je u početku ove radnje spomenuto — Forchheimer, no pođimo sada jedan korak dalje.

Iz razlaganja, što slijede iza jednačine 8), izlazi, da se jednačina 15) može da piše i ovako:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{g}{k\delta}(h-y) \quad \ldots . \; 16).$$

Ova jednačina potpuno je identična s jednačinom meridijana vodene kapi, koja visi na horizontalnoj površini[1], pa se zato naša istraživanja mogu formulirati ovako:

Slobodno viseći reservoir za vodu, koji je tako konstruiran, da mu je kod pritiska od vode materijal u svima tačkama jednako napregnut, ima matematički tačan oblik vodene kapi, koja visi na horizontalnoj površini

Ili:

Vodena kap viseći na horizontalnoj površini zauzima potpuno oblik teoretski najpovoljnije konstruiranoga reservoira za vodu.

Inhaltsangabe.

Das Problem, die Gestalt einer absolut biegsamen, unausdehnbaren Membrane zu bestimmen, welche nach einer Rotationsfläche derart geformt ist, dass sie dem Einflusse ihres Eigengewichtes ausgesetzt, in allen ihren Punkten, sowol in der Meridianrichtung als auch in der Parallelkreisrichtung gleich gespannt erscheint, ergiebt die Lösung, dass die Form einer solchen Membrane durch die Gleichung:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{g}{k}\cos\varphi$$

[1] Vidi n. pr. Mathieu, Théorie de la capillarité. Paris 1883. Str. 134.

definiert ist, wo R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche und φ den Neigungswinkel der Meridiantangente gegen die Horizontale bedeutet. g ist das spezifische Gewicht und k die zugelassene Normalspannung des Membranenmateriales. Die Stärke der Membrane ist gegeben durch die Gleichung:

$$\delta = \delta_0 \, . \, e^{\frac{g}{k} y},$$

wo δ_0 die Stärke der Membrane im Pole bedeutet.

Die technische Bedeutung dieses mechanischen Problemes ist, dass die soeben angeführten Gleichungen auch die Form einer Kuppelfläche gleichen Widerstandes darstellen, welche sich als die theoretisch günstigste Form dieser Konstruktionsart erweist.

Es wird bewiesen, dass die Meridiankurve dieser Fläche keine vertikalen Asymptoten und somit die Kuppel gleichen Widerstandes keine natürliche Grenze besitzt. Dagegen darf der Krümmungsradius im Pole die Grösse $2\frac{k}{g}$ nicht überschreiten, woraus geschlossen wird, dass die kugelförmigen Kuppeln eine natürliche Grenze haben, welche unter dieser Grösse liegt.

Das analoge mechanische Problem, die Gestalt einer Membrane zu bestimmen, welche dem Druck des in derselben eingeschlossenen Wassers überall den gleichen Widerstand entgegensetzt, ergiebt die Lösung, dass die Form der Membrane definiert ist durch die Gleichung:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{g}{k\delta}(h-y),$$

wo h die Entfernung des Wasserspiegels vom Pole der Membrane und y den vertikalen Abstand des betrachteten Punktes der Fläche vom Pole bedeutet. Die Stärke δ der Membrane soll in diesem Falle überall konstant sein.

Die technische Bedeutung dieses zweiten Problems ist die, dass die soeben angeführte Gleichung auch die Form eines freistehenden Wasserreservoirs gleichen Widerstandes darstellt, welches die theoretisch günstigste Form seiner Konstruktionsart ist. Nachdem die abgeleitete Gleichung mit der Gleichung eines auf einer horizontalen Fläche hängenden Wassertropfens identisch ist, so folgen die Schlüsse:

Ein freistehendes Wasserreservoir, welches so geformt ist, dass es der Beanspruchung durch den Wasserdruck überall denselben Widerstand entgegenstellt, hat mathematisch genau die Form eines auf einer horizontalen Fläche hängenden Wassertropfens.

Ein auf einer horizontalen Fläche hängender Wassertropfen hat mathematisch genau die Form des theoretisch am günstigsten konstruierten Wasserreservoires.