НАЧЕЛА

ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

У ТРИ ЧАСТИ.

ИЗРАДІО

ПОНАЙПРЕЧЕ ЗА ПОТРЕБУ АРТИЛЂРІЙСКЕ ШКОЛЕ К. С.,

ЕМИЛІЯНЪ ІОСИМОВИЋЪ,

при истой школи выше математике, механике и выше геодезіє професоръ,
школске комисіє и друштва србске словесности редовный членъ.

У БЕОГРАДУ.
У Кньигопечатньи Княжества Србскогъ.
1860.

Strebe unermüdet stets nach Erweiterung deiner Kenntnisse, und du erstrebst damit neben eigener Befriedigung und hohem geistigen Genusse, noch das erhedende Gefühl — nützlich geworden zu sein.

E. J.

Fleiss ist mehr, als Genie, und Tausende, die sich mit diesem den Hals brechen würden, ersteigen mit jenem die Höhe glücklich die sie sich vorgesetzt haben.

Justus Möser.

НАЧЕЛА' ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

II. ЧАСТЬ.

ИНФИНИТЕЗИМАЛНЫЙ РАЧУНЪ

У ТРИ КНЬИГЕ.

Reichst mit dem Endlichen nicht mehr du aus,
Musst dann zum Unendlichen flüchten;
Doch Herr musst du ganz des Endlichen sein,
Soll auch das Unendliche endlich dir werden.

Садржай.

Кньига I.

Кньига II.

Кньига III.

КНЬИГА I.

ДИФЕРЕНЦІАЛНЫЙ РАЧУНЪ.

A. Диференціаленѣ функція єдногъ пременльивогъ броя.

а) Понятія.

§ 1.

Премена неке функціє $f(x)$ збогъ увећаногъ — или умалѣногъ — пременльивога броя x съ некимъ **изчезльиво** малимъ, иначе сталнимъ или пременльивимъ броемъ, зове се исте функціє **диференціалъ**, и означуе се — за разлику одъ нѣне премене збогъ некогъ крайногъ приращтая броя x, кою смо у I. Ч. представляли съ $\Delta f(x)$ — предпоставлѣнимъ іой знакомъ d, т. є. символомъ $df(x)$.

Изчезльиво малый приращтай броя x притомъ, назива се **диференціалъ одъ** x, а означуе съ dx, за разлику одъ каквогъ крайногъ нѣговогъ приращтая, кои смо бележили съ Δx.

Диференціалъ неке функціє дакле ніє ништа друго, по нѣна разлика одъ оне функціє, кою добыямо, ако у ньой метнемо $x + dx$ место x; у символима

$$df(x) = f(x+dx) - f(x) \quad \ldots\ldots\ldots (1.$$

Определьиванѣ ове — каошто ћемо одма видити, изчезльиво мале — разлике, зове се **диференціаленѣ** дотичне функціє $f(x)$.

§ 2.

По I. Ч. §. 11. є сасвимъ уобште

$$f(x+h) - f(x) = f_1(x)h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + f_3(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Поставляюћи ту место h изчезльиво малу вредность dx, одпадаю у десной части чланови одъ другога на далѣ, као изчезльиво мали броеви выши редова, спрамъ првога члана, као изчезльиво малога првога реда (I. Ч. § 29.), и остає само да є $f(x+dx) - f(x)$, т. є.

$$df(x) = f_1(x)\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.$$

Изъ овога видимо:

1.) **диференціалъ є сваке функціє равань производу одъ нѣне прве изводне функціє са диференціаломъ пременльивога броя**; пошто є пакъ овай другій чинитель изчезльиво малый брой, то є и цео производъ $f_1(x)\,dx$ такавъ брой, и тако

2.) **диференціалъ є сваке функціє изчезльиво малый брой**; найпосле

3.) **да є при диференціаленю неке функціє све само до тога стало, да се изнађе нѣна прва изводна функція, єръ имаюћи ту, имамо съ места и траженый диференціалъ, чимъ є помложимо съ** dx.

§. 3.

Изъ горнѣгъ израза подъ 2.) слѣдує деобомъ чрезъ dx,

$$\frac{df(x)}{dx} = f_1(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.,$$

изъ чега видимо, да є **размера диференціала сваке функціє съ диференціаломъ дотичногъ пременльивогъ броя** — єръ то є безъ сумнѣ лева часть овогъ израза, т. є. количникъ $\frac{df(x)}{dx}$ —, **равна првой изводной функціи исте функціє, и као такова дакле или опетъ нека функція истогъ пременльивогъ броя, или пакъ некій, по томъ брою сталный брой** (I. Ч. §. 11.).

Та размера назива се просто **диференціалный количникъ**, а изъ доцніє увиђавны узрока іошъ **првый** диф. количникъ дотичне функціє, може се пакъ обзиромъ на горнѣій изразъ подъ 2.) назвати такођеръ и диференціалный **сачинитель**.

б.) Основна или главна правила диференціаленя.

§ 4.

1.) Ако A представля свакій уобште сталный брой, у смотреню дотичногъ пременљивогъ броя, можемо ставити

$$A = A.1 = A.x^0\text{; но тадъ имамо по § 1.}$$

$$\begin{aligned} dA &= A(x+dx)^0 - A.x^0 = A\left[(x+dx)^0 - x^0\right] \\ &= A(1-1) = A.0 \\ &= 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{I.} \end{aligned}$$

дакле є **диференціалъ свакогъ, по дотичномъ пременљивомъ брою сталнога броя, раванъ нулли.**

Изъ овога слѣдуе непосредно

2.), да **функціє єдногъ истогъ пременљивогъ броя, кое се међу собомъ само некимъ сталнимъ броемъ разликую, имаю све єданъ истый диференціалъ.**

3.) Ако є за диференціаленѣ дата функція вида $A\varphi(x)$, при чему A значи као пређе ма кои по x сталный брой, имамо по истомъ §.

$$\begin{aligned} dA\varphi(x) &= A\varphi(x+dx) - A\varphi(x) = A[\varphi(x+dx) - \varphi(x)] \\ &= A\,d\varphi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{II.} \end{aligned}$$

то ће рећи: **диференціалъ производа одъ єдногъ сталногъ чинителя и неке функціє, раванъ є производу одъ истогъ сталногъ чинителя съ диференціаломъ те функціє.**

4.) Ако є вопросна функція вида

$$F(x) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \; . \; . \; . \; . \; . \; , \text{ т. е.}$$

алгебрайскій сбиръ више функція, имамо по §. 2.

$$dF(x) = F_1(x)\,dx.$$

Но по I. Ч. § 12. є прва изводна функція одъ $F(x)$,

$$F_1(x) = f_1(x) + \varphi_1(x) + \psi_1(x) + \; . \; . \; . \; . \; . \; ;$$ дакле, ако ово съ dx помложимо, $F_1(x)\,dx$, т. е.

$$
\begin{aligned}
d.\, F(x) &= d\,[f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots] \\
&= f_1(x)\,dx + \varphi_1(x)\,dx + \psi_1(x)\,dx + \ldots \\
&= df(x) + d\varphi(x) + d\psi(x) + \ldots\ldots \quad (\text{III.},
\end{aligned}
$$

а то ће рећи: **диференціалъ алгебрайскогъ сбира одъ више функція, равanъ є алгебрайскомъ сбиру диференціала' поєдины сабирака.**

5.) Ако є пакъ вопросна функція далѣ вида

$$F(x) = f(x) \,.\, \varphi(x),$$

т. є. производъ одъ две функціє, имамо, опетъ по §. 2.,

$$d\,F(x) = F_1(x)\,dx.$$

Но по истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. є у томъ случаю прва изводна функція

$$F_1(x) = \varphi(x).\, f_1(x) + f(x).\, \varphi_1(x)\,;$$

дакле ако исту помложимо съ dx, бытће $d\,F(x)$, т. є.

$$
\begin{aligned}
d\,f(x)\,\varphi(x) &= \varphi(x)\,f_1(x)\,dx + f(x)\,\varphi_1(x)\,dx \\
&= \varphi(x)\,d\,f(x) + f(x)\,d\,\varphi(x) \quad \ldots (\text{IV}.
\end{aligned}
$$

Да се, и како се може ово докученѣ разпрострти и на више чинителя, увиђа се лако по себи; зато можемо уобште рећи: **диференціалъ производа одъ ма колико функція, равanъ є сбиру производа одъ диференціала свакогъ поєдиногъ чинителя са свима осталимъ чинительима.** Найпосле

6.) Ако є дотична функція вида

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,,$$

т. є. количникъ одъ две функціє, имамо такођеръ по §. 2.,

$$dF(x) = F_1(x)\,dx:$$

Но у истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. нашли смо за предпоставлѣну функцію

$$F_1(x) = \frac{\varphi(x)\,f_1(x) - f(x)\,\varphi_1(x)}{\varphi^2(x)}\,;$$

дакле ако помложимо съ dx, $dF(x)$, т. є.

$$d\,\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x)\,f_1(x)\,dx - f(x)\,\varphi_1(x)\,dx}{\varphi^2(x)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\,df(x) - f(x)\,d\varphi(x)}{\varphi^2(x)} \;\ldots\ldots\; \text{(V.;}$$

а то ће рећи: **диференціалъ количника две функціє, раванъ є разлици одъ производа именителя съ диференціаломъ броителя и производа броителя съ диференціаломъ именителя, — разделѣной съ квадратомъ именителя.**

Ова иста правила могли смо добыти такођеръ и изъ дотичны правила за крайне разлике функція (Ч. I. § 209.), поставляюћи у тима место $\Delta f(x)$ или $\Delta\varphi(x)$ и т. д. $df(x)$, $d\varphi(x)$, и т. д., и dx место Δx, па онда испытуюћи: шта одъ исты израза остає обзиромъ на свойства изчезљивы брова. Почетникъ ће врло добро учинити, ако то самъ покуша.

§ 5.

Съ овимъ правилама, съ изразомъ подъ 1.) у §. 1., докученѣмъ 2. §., да є диференціалъ сваке функціє раванъ производу одъ нѣне прве изводне функціє съ диференціаломъ премењивога броя, и да є све до тога стало, да изнађемо прву изводну функцію, — као найпосле іошъ и образцима у § 210. I. Ч. у станю смо изнаћи диференціалъ сваке безъ разлике функціє єдногъ премењивогъ броя. Но да извидимо овде одма єданпутъ за свагда, колики су

в.) Диференціали найглавніи — рећи ће найвећма употребляваюћи се — функція.

§ 6.

1.) $f(x) = x^n$.

Ова є функція алгебрайска; можемо дакле лако направити нѣну прву изводну функцію, по § 11. Ч. I. —

Добыямо ю по тому, ако изложителя n при x съ єдномъ єдиницомъ уманьимо, и тай степенъ после съ n помложимо. Т. є. прва є изводна функція одъ x^n,

$$f_1(x) = nx^{n-1}.$$

Мложећи дакле по §. 2. ту функцію съ dx, имамо

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx.$$

Или: Нашли смо у § 210. I. Ч.

$$\Delta x^n = \binom{n}{1} x^{n-1}.\, \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}.\, \Delta^2 x + \binom{n}{3} x^{n-3}.\, \Delta^3 x + \ldots;$$

узимаюћи ту dx место Δx, па зато и dx^n место Δx^n: изчезавaю спрамъ првога члана сви други, као изчезљиви броєви выши редова, и остає дакле само

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx,$$

као пређе. — **Или:** По §. 1. є

$$dx^n = (x + dx)^n - x^n.$$

Ако развіемо $(x + dx)^n$ по биномномъ правилу, коє, каошто знамо, важи за свакогъ уобште изложителя, и ако после одма одузмемо x^n, быва

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx + \binom{n}{2} x^{n-2}.\, d^2x + \binom{n}{3} x^{n-3}.\, d^3x + \ldots\ldots,$$

или зато што спрамъ првога члана сви други, као изчезљиви броєви выши редова, изчезавaю,

$$dx^n = nx^{n-1}.\, dx$$

као пре.

Ма кои начинъ дакле употребили, налазимо свагда да є

$$\left.\begin{array}{l} dx^n = nx^{n-1}.\, dx, \text{ и уобште} \\ d\varphi^n(x) = n\varphi^{n-1}(x)\,.\, d\varphi(x) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (I.$$

При овой єдной функціи употребисмо више начина, при другимъ пакъ іошъ слѣдуюћимъ функціяма служит ћемо

се понайвише само онимъ єднимъ, кои намъ се види, да є найпречій

Ако є при томе изложитель n некій разломакъ, н. п. $n = \frac{\nu}{\mu}$, имамо

$$dx^{\frac{\nu}{\mu}} = d\sqrt[\mu]{x^{\nu}} = \frac{\nu}{\mu}\, x^{\frac{\nu}{\mu}-1} \,.\, dx = \frac{\nu}{\mu}\, x^{\frac{\nu-\mu}{\mu}} .\, ax$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\nu}{\mu}\sqrt[\mu]{x^{\nu-\mu}} .\, dx, \quad \text{уобште} \\ d\sqrt[\mu]{f^{\nu}(x)} &= \frac{\nu}{\mu}\sqrt[\mu]{f^{\nu-\mu}(x)} \,.\, df(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}'.$$

Дакле у случаю ако є $\frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{2}$, кои є врло обичанъ,

$$\left.\begin{aligned} d\sqrt{x} &= \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \\ \text{уобште} \qquad d\sqrt{f(x)} &= \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{II}'$$

§ 7.

2.) $f(x) = a^x$.

По 2. §. диференціалъ сваке функціє, па дакле и ове, раванъ є производу одъ нѣне прве изводне функціє съ dx; прва є пакъ изводна функція одъ a^x, по I. Ч. § 161., $a^x la$; слѣдователно

$$da^x = a^x la \,.\, dx.$$

Или: По § 210. I. Ч.

$$\varDelta a^x = a^x\, (la\varDelta x + \frac{l^2 a}{2!}\, \varDelta^2 x + \frac{l^3 a}{3!}\, \varDelta^3 x + \ldots\ldots).$$

Дакле ако место $\varDelta x$ узмемо dx,

$$da^x = a^x la \,.\, dx,$$

єръ остали чланови спрамъ првога изчезаваю.

Ма како радили, стои

$$\left.\begin{array}{r} da^x = a^x la \,.\, dx, \text{ а уобште} \\ da^{\varphi(x)} = a^{\varphi(x)} la \,.\, d\varphi\,(x) \end{array}\right\} \dots\dots\dots (\mathrm{II}.$$

У случаю да є $a = e$, т. є. основица природны логаритама, быва збогъ $le = 1$,

$$\left.\begin{array}{r} de^x = e^x dx, \text{ уобште} \\ de^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)}.\, d\varphi\,(x) \end{array}\right\} \dots\dots\dots (\mathrm{II}'.$$

3.) $f(x) = log\ x$.

По истомъ пређе поменутомъ §. I. Ч. имамо

$$\varDelta\, log\, x = M\left(\frac{\varDelta x}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varDelta^2 x}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\varDelta^3 x}{x^3} - \dots\right);$$

дакле ако место $\varDelta x$ узмемо dx, мора быти

$$\left.\begin{array}{r} d\, log\, x = M\ \dfrac{dx}{x}, \text{ уобште} \\ d\, log\, \varphi\,(x) = M\ \dfrac{d\varphi\,(x)}{\varphi\,(x)} \end{array}\right\} \dots\dots\dots (\mathrm{III}.$$

За природне логаритме пакъ, при коима є $M = 1$, бытће

$$\left.\begin{array}{r} dlx = \dfrac{dx}{x}, \text{ уобште} \\ dl\varphi\,(x) = \dfrac{d\varphi\,(x)}{\varphi\,(x)} \end{array}\right\} \dots\dots\dots (\mathrm{III}'.$$

Изъ овогъ последнѣта израза слѣдуе

$$d\varphi\,(x) = \varphi\,(x)\,.\,dl\varphi\,(x) \quad \dots\dots\dots (\mathrm{III}''$$

врло употребителанъ образацъ за диференціаленѣ оны функція', кое се логаритмійски могу разправити. По томъ образцу имали бы н. п.

$$d\,[\varphi(x)]^{\psi(x)} = [\varphi(x)]^{\psi(x)} \,.\, d\,l\,[\varphi(x)]^{\psi(x)} = [\varphi(x)]^{\psi(x)} \,.$$
$$d\,[\psi(x)\,.\,l\varphi(x)]$$
$$= [\varphi(x)]^{\psi(x)} \,.\, [l\varphi(x)\,.\,d\psi(x) +$$
$$+ \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\, d\varphi(x)] \; \ldots\ldots (\mathrm{III.}'$$

§ 8.

4.) $f(x) = \sin x$.

По већъ вишепута поменутомъ §. I. Ч. имамо

$$\varDelta \sin x = \cos x \,.\, \varDelta x - \frac{1}{2!} \sin x \,.\, \varDelta^2 x - \frac{1}{3!} \cos x \,.\, \varDelta^3 x + \ldots,$$

дакле ако место $\varDelta x$ метнемо dx,

$$\left.\begin{array}{ll} d \sin x = \cos x \,.\, dx, & \text{уобште} \\ d \sin \varphi(x) = \cos \varphi(x) \,.\, d\varphi(x) & \end{array}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{IV.}$$

На истый начинъ добыямо

5.) збогъ

$$\varDelta \cos x = -\sin x \,.\, \varDelta x - \frac{1}{2!} \cos x \,.\, \varDelta^2 x + \frac{1}{3!} \sin x \,.\, \varDelta^3 x + \ldots.,$$

$$\left.\begin{array}{ll} d \cos x = -\sin x\, dx, & \text{уобште} \\ d \cos \varphi(x) = -\sin \varphi(x)\, d\varphi(x) & \end{array}\right\}{}^{*)} \ldots\ldots (\mathrm{V.}$$

---

*) **Помоћу § 1. имали бы**

$$d \sin x = \sin (x + dx) - \sin x$$
$$= \sin x \,.\, \cos dx + \cos x \,.\, \sin dx - \sin x,$$
$$d \cos x = \cos (x + dx) - \cos x$$
$$= \cos x \,.\, \cos dx - \sin x \,.\, \sin dx - \cos x,$$

или обзиромъ на то, да се cos врло малогъ лука одъ полупречника 1, а sin таквога лука одъ нулле неразликуе,

$$d \sin x = \sin x + \cos x\, dx - \sin x = \cos x\, dx$$
$$d \cos x = \cos x - \sin x\, dx - \cos x = -\sin x\, dx,$$

каошто е нађено пређашньимъ начиномъ.

§ 9.

По 5. правилу у §. 4. имамо употреблѣнѣмъ докученя подъ IV. и V.,

6.) збогъ $tang\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$d\, tang\, x = \frac{\cos x \,.\, d \sin x - \sin x \,.\, d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{dx}{\cos^2 x} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{VI.}\,;$$

7.) збогъ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$:

$$d \cot x = \frac{\sin x \,.\, d \cos x - \cos x \,.\, d \sin x}{\sin^2 x} = - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$= - \frac{dx}{\sin^2 x} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{VII.}\,;$$

8.) збогъ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$:

$$\left.\begin{aligned} d \sec x &= - \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \sec x \,.\, tang\, x \,.\, dx \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (\text{VIII.},$$

9.) збогъ $cosec\, x = \frac{1}{\sin x}$:

$$\left.\begin{aligned} d\, cosec\, x &= - \frac{d \sin x}{\sin^2 x} = - \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= - cosec\, x \,.\, \cot x \,.\, dx \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\; (\text{IX}.$$

§ 10.

10.) $f(x) = \sin v \,.\, x.$

Изъ тригонометріє (§ 4.) знамо, да є

$$\sin v \,.\, x = 1 - \cos x\,;$$

дакле по §. 4. (правило III. и I.), а обзиромъ на § 8. мора быти

$$d\ \sin v\,.\,x = -\ d\ \cos x = \sin x\,.\,dx\ .\ .\ .\ .\ .\ (X.$$

Сасвимъ истимъ начиномъ налазимо

11.) збогъ $\cos v\,.\,x = 1 - \sin x$,

$$d\ \cos v\,.\,x = -\ d\ \sin x = -\ \cos x\,.\,dx\ .\ .\ .\ .\ (XI.$$

§ 11.

12.) Ставимо $x = \sin z$; быт'ће по образцу IV., § 8.,

$$dx = \cos z\,.\,dz, \text{ и одатле}$$

$$dz = \frac{dx}{\cos z} = \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Но z по предпоставлѣню ніє ништа друго, но лукъ, коєга є *sin* раванъ x, т. є. $z = arc\,(\sin = x)$; ако дакле место z узмемо овай изразъ, стои

$$d\ arc\ (\sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (XII.$$

13.) Ако є $x = \cos z$, имамо по образцу V., §. 8.,

$$dx = -\ \sin z\,.\,dz, \text{ и одатле}$$

$$dz = -\frac{dx}{\sin z} = -\frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ т. є.}$$

$$d\ arc\ (\cos = x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (XIII.$$

14.) За $x = tang\ z$ быва по обр. VI., §. 9.,

$$dx = d\,tang\,z = \frac{dz}{\cos^2 z},$$

и одатле

$$dz = \cos^2 z\,.\,dx = \frac{dx}{\sec^2 z} = \frac{dx}{1+tang^2 z} = \frac{dx}{1+x^2},$$

то ће рећи

$$d\,arc\,(tang = x) = \frac{dx}{1+x^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (XIV.$$

15.) За $x = cot\, z$ слѣдує по обр. **VII.**, §. 9.,

$$dx = -\frac{dz}{sin^2 z},$$

и одтуда

$$dz = -\, sin^2 z\,.\,dx = -\frac{dx}{cosec^2 z} = -\frac{dx}{1+cot^2 x} = -\frac{dx}{1+x^2},$$

т. є.

$$d\; arc\,(cot = x) = -\frac{dx}{1+x^2} \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; (XV.$$

16.) За $x = sec\, z$, по обр. **VIII.**, §. 9.,

$$dx = sec\, z\,.\,tang\, z\,.\,dz,$$

и одатле

$$dz = \frac{dx}{sec\, z\,.\,tang\, z} = \frac{dx}{sec\, z\sqrt{sec^2 z - 1}} = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},\quad т.\ є.$$

$$d\; arc\,(sec = x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; (XVI.$$

17.) За $x = cosec\, z$, по обр. **IX.** (§. 9.),

$$dx = -\, cosec\, z\,.\,cot\, z\,.\,dz,$$

и одтудъ

$$dz = -\frac{dx}{cosec\, z\,.\,cot\, z} = -\frac{dx}{cosec\, z\sqrt{cosec^2 z - 1}} = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

т. є.

$$d\; arc\,(cosec = x) = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \;\cdots\cdots\; (XVII.$$

18.) За $x = sin\, v\,.\,z$, по обр. X., §. 10.,

$$dx = sin\,.\,z\;dz;$$

одатле пакъ

$$dz = \frac{dx}{sin\, z} = \frac{dx}{\sqrt{1 - cos^2 z}} = \frac{dx}{\sqrt{(1 - cos\, z)(1 + cos\, z)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{sin v\,.\,z\,[1 + (1 - sin\, v\,.\,z)]}} = \frac{dx}{\sqrt{sin\, v\,.\,z\,(2 - sinv.z)}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{x\,(2 - x)}} = \frac{dx}{\sqrt{2\,x - x^2}},$$

т. є.

$$d\; arc\,(sin\, v\,. = x) = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \;\cdots\cdots\cdots\; (XVIII.$$

Найпосле

19.) За $x = cos\, v\,.\,z$, на сасвимъ истый начинъ, а помоћу обр. **XI.** (§. 10.),

$$d\, arc\,(cos\, v\,. = x) = -\frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \text{XIX.}$$

Врло добро урадитћемо безъ сумнѣ, ако узмемо одма за упражнѣнѣ и неколико

г.) Примера.

§ 12.

1.) Чему є равань

$$d\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{2}{3}} = d\,X^{\frac{2}{3}}\ ?$$

Найпре имамо по образцу I. (или I'.) § 6.

$$d\,X^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}X^{-\frac{1}{3}}\,d\,X = \frac{2}{3}\cdot\frac{d\,X}{\sqrt[3]{X}}\,;$$

употреблѣнѣмъ правила III. §. 4., вопросный диференціалъ далѣ

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{X}}\cdot\left(d\,2x^3 - d\,\frac{a}{x^2} + d\,x\sqrt[3]{2x^2} + d\,\frac{x}{lx}\right);$$

употреблѣнѣмъ правила II. §. 4. и обр. I. §. 6. на $d\ 2\,x^3$, — правила V. §. 4. и обр. I. §. 6. съ обзиромъ на правило II. §. 4. на $d\,\frac{a}{x^2}$, — правила IV. §. 4. и обр. I'. §. 6. съ обзиромъ на правило II. §. 4. на $d\ x\sqrt[3]{2x^2}$, — найпосле правила V. §. 4. и обр. III'. §. 7. на $d\,\frac{x}{lx}$: вопросный диференціалъ далѣ

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{X}} \cdot \left(6x^2 + \frac{2a}{x^3} + \sqrt[3]{2x^2} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{2x^2} + \frac{lx - 1}{l^2x}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{X}} \cdot \left(6x^2 + \frac{2a}{x^3} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2} + \frac{1}{lx^2} \cdot l\,\frac{x}{e}\right) dx\ ;$$

дакле коначно

$$d\ \left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{18\,x^5 . l^2x + 6a\,l^2x + 5\,x^3\,l^2x\,\sqrt[3]{2x^2} + 3x^3 l\,\frac{x}{e}}{\left(2x^3 - \frac{a}{x^2} + x\sqrt[3]{2x^2} + \frac{x}{lx}\right)^{\frac{1}{3}}}\, dx.$$

§ 13.

2.) $d\,\dfrac{a^x - a^{\sin x}}{a^x + a^{\sin x}} = d\,X = ?$

По правилу **V.** у §. 4.

$$d\ X = \frac{(a^x + a^{\sin x}) . d\,(a^x - a^{\sin x}) - (a^x - a^{\sin x}) . d\,(a^x + a^{\sin x})}{(a^x + a^{\sin x})^2};$$

по правилу **III.** §. 4., обр. **II.** §. 7. и **IV.** §. 8., истый диференціалъ далѣ

$$= \frac{\begin{array}{c}(a^x + a^{\sin x}) . (a^x\,la\,dx - a^{\sin x}\ la\ \cos x\ .\ dx - \\ -(a^x - a^{\sin x})\ (a^x la\,dx + a^{\sin}\ la \cos x\ .\ dx)\end{array}}{(a^x + a^{\sin x})^2}$$

$$= \frac{2\,la\ .\ a^{x + \sin x}\ (1 - \cos\ x)}{(a^x + a^{\sin x})^2} \cdot dx\ ;$$

найпосле ако место ($1 - \cos x$) узмемо (по тригонометріє § 29.) $2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$, вопросный диференціалъ, т. є.

$$d\ \frac{a^x - a^{\sin x}}{a^x + a^{\sin x}} = \frac{4la\ .\ \sin^2 \frac{x}{2}\ .\ a^{x + \sin x}}{(a^x + a^{\sin x})^2} \cdot dx \cdot$$

3.) $d\,(l\,sin\,v\,.\,x - a^{\cos x})^{x^2} = d\,X^{x^2} = ?$

По §. 7. обр. III.″,

$$d\,X^{x^2} = X^{x^2}. \cdot \left(l\,X\,.\,dx^2 + \frac{x^2}{X}\,d\,X\right)$$

$$= X^{x^2-1}.\,(2x\,X\,l\,X\,dx + x^2 d\,X),$$

далѣ после

$$= X^{x^2-1} \cdot \left[2x\,X\,l\,X\,dx + x^2\left(\frac{d\,sin\,v\,.\,x}{sin\,v\,.\,x} + a^{\cos x}.\,la\,sin\,x\,dx\right)\right]$$

(обр. III′. §. 7., обр. II. §. 7. и обр. V. §. 8.),

$$= X^{x^2-1} \cdot \left[2x\,X\,l\,X\,dx + x^2\left(\frac{sin\,x}{sin\,v\,.\,x} + a^{\cos x}.\,la\,sin\,x\right)dx\right]$$

(обр. X. §. 10.),

$$= \frac{X^{x^2-1}}{sin\,v.x} \cdot [2x\,X\,l\,X.\,sin\,v\,.\,x + x^2(sin\,x + a^{\cos x}.\,la\,sin\,x\,sin\,v\,.\,x)]\,dx`$$

при чему место X валя узети $l\,sin\,v\,.\,x - a^{\cos x}$.

§ 14.

4.) $d\,l\,(1 \pm x) = \dfrac{d\,(1 \pm x)}{1 \pm x} = \pm\,\dfrac{dx}{1 \pm x}$

(обр. III′. §. 7. и правило III. §. 4.)

5.) $d\,l\,(1 \pm x^2) = \dfrac{d\,(1 \pm x^2)}{1 \pm x^2} = \pm\,\dfrac{2x\,dx}{1 \pm x^2}$

(пређ. обр. и правило, и осимъ тога іошъ I. обр. §. 6.)

6.) $$d\,l\,(x \pm \sqrt{1+x^2}) = \frac{d\,(x \pm \sqrt{1+x^2})}{x \pm \sqrt{1+x^2}} = \frac{1 \pm \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x \pm \sqrt{1+x^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{x \pm \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\pm\,(x \pm \sqrt{1+x^2})}{x \pm \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \pm\,\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

(обр. III′. §. 7., правило III. §. 4. и обр. I′. §. 6.)

7.) $$\frac{d\,l\,(x\pm\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{d\,(x\pm\sqrt{x^2-1})}{x\pm\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{-1}\,.\,(x\pm\sqrt{x^2-1})}\cdot dx$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{x\pm\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{-1}\,.\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{\pm\,(x\pm\sqrt{x^2-1})}{x\pm\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(осимъ пређашньи образаца и правила іошъ прав. II. §. 4.).

Сравни овай диференціалъ съ *d arc* (*sin* = *x*) и *d arc* (*cos* = *x*) у §. 11. подъ XII. и XIII.

8.) $$d\,\frac{l\,(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}=\frac{d\,(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}\,.\,(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\,.\,(\sqrt{1-x^2}\pm x\sqrt{-1})}\cdot dx$$

$$=\frac{-x\mp\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{x\mp\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{\mp\,(\sqrt{x^2-1}\mp x)}{\sqrt{x^2-1}\mp x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(исти обр. и правила као пре).

9. $$d\,\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l\,\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,d\left[l(1+x\sqrt{-1})-l(1-x\sqrt{-1})\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left[\frac{d(1+x\sqrt{-1})}{1+x\sqrt{-1}}-\frac{d(1-x\sqrt{-1})}{1-x\sqrt{-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,dx=\frac{dx}{1+x^2}$$

(образци II. и III. § 4., и обр. III'. § 7).

Сравни овай диференціалъ съ $d\ arc\ (tang=x)$ у § 11. подъ XIV.

10.) $$d\,l\,\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}+x}=d\left[l(\sqrt{1-x^2}-x)-l(\sqrt{1-x^2}+x)\right]$$

$$=\frac{d(\sqrt{1-x^2}-x)}{\sqrt{1-x^2}-x}-\frac{d(\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}+x}$$

$$=\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\sqrt{1-x^2}-x}\,dx-\frac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}\,dx$$

$$=\left(\frac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-x}-\frac{-x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+x}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\left[-\frac{(x+\sqrt{1-x^2})^2+(-x+\sqrt{1-x^2})^2}{(\sqrt{1-x^2}-x).(\sqrt{1-x^2}+x)}\right].\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2\,dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

11.) $d \cdot \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\, d \left[l(1+x) - l(1-x) \right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{dx}{1-x^2}$$

(прав. III. § 4. и обр. III'. § 7.)

§ 15.

12.) $d\, \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, d\, (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} . \sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}} . \sqrt{-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right) dx$$

(прав. II. и III. § 4., и обр. II'. § 7.)

На истый начинъ добыямо

13.) $d\, \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1} - e^{-x\sqrt{-1}} . dx\sqrt{-1}\right)$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right) dx = \frac{-1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right) dx$$

$$= -\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} . dx$$

Сравни ова два диференціала међу собомъ, и са $d \sin x$ и $d \cos x$ у § 8., съ обзиромъ на то, шта е првый изразъ $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, а шта другій $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$? (I. Ч. § 163.)

§ 16.

14.) $d\, llx = \frac{d\, lx}{lx} = \frac{dx}{x\, lx}$ (обр. III'. § 7.)

15.) $d\; l\; tang\; x = \frac{d\; tang\; x}{tang\; x} = \frac{dx}{tang\; x\; cos^2 x} = \frac{dx}{sin\; x\; cos\; x}$

$= \frac{2\; dx}{sin\; 2x}$

(обр. III'. § 7. и тригоном. §§ 15. и 26.).

16.) $d\; sin\; lx = cos\; lx\; .\; d\; lx = cos\; lx \cdot \frac{dx}{x} = \frac{cos\; lx}{x} \cdot dx$
(обр. IV. § 8. и III'. § 7.).

17.) $d\; cos\; a^x = -\; sin\; a^x . da^x = -\; sin\; a^x . a^x la\; dx$
$= -\; la\; .\; a^x sin\; a^x . dx$ (обр. V. § 8. и II. § 7.)

18.) $de^{sin\, x} = e^{sin\, x} . d\; sin\; x = e^{sin\, x} . cos\; x\; dx$ (обр. II'. § 7. и IV. § 8.).

19.) $da^{lx} = a^{lx} . la\; .\; dlx = a^{lx}\; la \cdot \frac{dx}{x} = \frac{a^{lx} la}{x} . dx$
(обр. II. и III'. § 7.).

20.) $de^{sin\, a^{lx}} = e^{sin\, a^{lx}} . d\; sin\; a^{lx}$ (обр. II'. § 7.),
притомъ $d\; sin\; a^{lx} = cos\; a^{lx} . da^{lx}$ (обр. IV. § 8.),
притомъ $da^{lx} = a^{lx} la\; dlx$ (обр. II. § 7.),
притомъ $dlx = \frac{dx}{x}$ (обр. III'. § 7.);

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$de^{sin\, a^{lx}} = e^{sin\, a^{lx}} . cos\; a^{lx} . a^{lx} la\; . \frac{dx}{x}$$

21.) $d\; cos\; a^{l\, sin\, a^x} = -\; sin\; a^{l\, sin\, a^x} . da^{l\, sin\, a^x}$ (обр. V. § 8.),
притомъ $da^{l\, sin\, a^x} = a^{l\, sin\, a^x} . la\; .\; dl\; sin\; a^x$ (обр. II. § 7.),
притомъ $dl\; sin\; a^x = \frac{d\; sin\; a^x}{sin\; a^x}$ (обр. III'. § 7.),
$= \frac{cos\; a^x}{sin\; a^x} . da^x$ (об. IV. § 8.);
$= cot\; a^x . da^x$,
притомъ $da^x = a^x la\; dx$ (обр. II. § 7.);

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$d\,cos\,a^{l\,sin\,a^x} = -\,sin\,a^{l\,sin\,a^x} .\ a^{l\,sin\,a^x} .\ la\ .\ cot\,a^x .\ a^x la\ .\ dx$$

$$= -\,la\,.\,sin\,a^{l\,sin\,a^x} .\ a^{l\,sin\,a^x + x} .\ cot\,a^x .\ dx$$

22.) $da^{e^{a^{lx}}} = a^{e^{a^{lx}}} .\ la\ .\ de^{a^{lx}}$,

притомъ $de^{a^{lx}} = e^{a^{lx}} .\ da^{lx}$,

притомъ $da^{lx} = a^{lx} .\ la\ .\ dlx$,

притомъ $d\,lx = \frac{dx}{x}$ (об. II., II'. и III'. § 7.);

дакле после надлежне замене, вопросный

$$da^{e^{a^{lx}}} = a^{e^{a^{lx}}} .\ l^2a\ .\ e^{a^{lx}} .\ a^{lx} .\ \frac{dx}{x} = a^{e^{a^{lx}} + lx} .\ l^2a\ .\ e^{a^{lx}} .\ \frac{dx}{x}\ .$$

23.) $da^{sin\ v\ e^{x\,cos\,v\,x}} = a^{sin\,x\,e^{x\,cos\,v\,x}} .\,la\,.\,d\,sin\,v\,e^{x\,cos\,v\,x}$,

притомъ $d\,sin\,v\,e^{x\,cos\,v\,x} = sin\,e^{x\,cos\,v\,x} .\,de^{x\,cos\,v\,x}$,

притомъ $de^{x\,cos\,v\,x} = e^{x\,cos\,v\,x} .\,d\,x\,cos\,v\,x$,

притомъ $d\,x\,cos\,v\,.\,x = (cos\,v\,x\,dx + x d\,cos\,v\,x)$,

притомъ $d\,cos\,v\,x = -\,cos\,x\,.\,dx$ (обр. II. § 7., X. § 10., II'. § 7., XI. § 10.); дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$da^{sin\ v\ e^{x\,cos\,v\,.\,x}} = a^{sin\ v\ e^{x\ cos\ v\ x}} .\,la\,.\,sin\,e^{x\,cos\,v\,x} .\,e^{x\,cos\,v\,x}$$
$$.\ (cos\,v\ x - x\,cos\,x)\ dx.$$

24.) $d\,sec\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}} = sec\,a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}} \times$

$\times\ tang\ a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}} \times da^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v=x)}}$

притомъ $da^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}} = a^{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}}$

$\times\ la\,.\,d\,cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.\,=x)}$, притомъ $d\,cot\,e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}} = -\dfrac{de^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}}{sin\,e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}}$,

притомъ $de^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}} = e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}} .\, dl\,arc\,(sin\,v\,. = x)$,

притомъ $d\,l\,arc\,(sin\,v\,. = x) = \dfrac{d\,arc\,(sin\,v\,. = x)}{arc\,(sin\,v\,. = x)}$,

притомъ $d\,arc\,(sin\,v\,. = x) = \dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

(обр. **VIII.** § 9., **II.** § 7., **VII.** § 9., **II'.** § 7., **III'.** § 7., **XVIII.** § 11.); дакле после надлежне замене, вопросный диференціалъ

$$= sec\,a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}} .\, tang\,a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}} .\, a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}} .\, la$$

$$\times \frac{-e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}\,dx}{sin^2 e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}} .\, arc\,(sin\,v\,. = x) . \sqrt{2x - x^2}}$$

$$= -\frac{\begin{matrix}[sec\,a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}} .\, tang\,a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}} \\ \times\, a^{\mathrm{cot\,e^{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}} .\, e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}}]\end{matrix}}{sin^2 e^{\mathrm{l\,arc\,(sin\,v\,.=x)}} .\, arc\,(sin\,v\,. = x) . \sqrt{2x - x^2}}\,dx.$$

Найпосле

$$25.)\ d\,\frac{arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}})}{cot\,(xa^{lx})}$$

$$= \frac{cot(xa^{lx})\,d\,arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}) - arc\,(cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}) . dcot(xa^{xl})}{cot^2\,(xa^{lx})},$$

притомъ 1.) $d\,arc\,(cos = \sqrt{\dfrac{x}{lx}}) = -\dfrac{d\sqrt{\dfrac{x}{lx}}}{\sqrt{1 - \dfrac{x}{lx}}}$

$$= -\frac{\sqrt{lx} . d\sqrt{\frac{x}{lx}}}{\sqrt{lx - x}},$$

а ту опеть $d\sqrt{\frac{x}{lx}} = \frac{d\,\frac{x}{lx}}{2\sqrt{\frac{x}{lx}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}}\,.\,d\,\frac{x}{lx}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}}\,.\,\frac{lx.dx - xdlx}{l^2x}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{lx}{x}}\,.\,\frac{lx-1}{l^2x}\,dx$$

$$= \frac{lx-1}{2\,lx\sqrt{xlx}}\,.\,dx\,,$$

2.) $d\cot(xa^{lx}) = -\frac{dxa^{lx}}{\sin^2(xa^{lx})} = -\frac{a^{lx}dx + xda^{lx}}{\sin^2(xa^{lx})}$

$$= -\frac{a^{lx}dx + xa^{lx}la\,.\,dlx}{\sin^2(xa^{lx})} = -\frac{a^{lx} + a^{lx}la}{\sin^2(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{a^{lx}(1+la)}{\sin^2(xa^{lx})}\,.\,dx\,;$$

дакле ако надлежно заменемо, вопросный

$$d\,\frac{arc\left(\cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\right)}{\cot(xa^{lx})}$$

$$= -\frac{\cot(xa^{lx})\frac{lx-1}{2lx\sqrt{xlx-x^2}} + arc\left(\cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\right)\frac{a^{lx}(1+la)}{\sin^2(xa^{lx})}}{\cot^2(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{\left[\sin(xa^{lx})\cos(xa^{lx})(lx-1) - 2arc\left(\cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\right)lx.a^{lx}(1+la) \times \sqrt{xlx-x^2}\right]}{2lx\sqrt{xlx-x^2}.\,\cos^2(xa^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{\left[\sin(2xa^{lx})(lx-1) - 4\,arc\left(\cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\right)lx\,.\,a^{lx}.\,.(1+la)\sqrt{x\,lx-x^2}\right]}{4\,lx\,.\sqrt{x\,lx-x^2}\cos^2(x\,a^{lx})}\,dx$$

$$= -\frac{\sin(2xa^{lx})l\frac{x}{e} - 4\,arc\left(\cos = \sqrt{\frac{x}{lx}}\,lx\right)a^{lx}.lae.\sqrt{xlx-x^2}}{4\,lx\,.\sqrt{x\,lx-x^2}.\,\cos^2(xa^{lx})}\,dx$$

д.) Выши диференціали.

§. 17.

Видили смо у §. 2., да є диференціалъ сваке функціє $f(x)$ раванъ производу одъ нѣне прве изводне функціє $f_1(x)$ са диференціаломъ променльивога броя x, т. є. да є

$$d\,f(x) = f_1(x) \cdot dx\ ;$$

пошто є пакъ, каошто смо видили у I. Ч. §. 11., прва изводна функція $f_1(x)$ или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій, по томъ брою сталный брой: **то є дакле диференціалъ сваке функціє $f(x)$ или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій по x сталный брой.**

Ако є 1.) $f_1(x)$ сталанъ брой, и притомъ dx такођеръ сталанъ, онда, каошто є лако увидити, съ $d\,f(x)$, т. є. са $f_1(x)\,dx$ неможемо никакву више премену предузети, разумемо онакову, каошто смо протолковали у §. 1.

Ако є напротивъ 2.) или $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, а dx притомъ сталанъ брой, или $f_1(x)$ сталанъ брой а dx променльивъ: онда, каошто є такођеръ лако увидити, у $d\,f(x)$, т. є. у $f_1(x)\,dx$ можемо наново узети $x + dx$ место x, и пытати за промену збогъ тога, т. є. за $d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx$. Тимъ пре пакъ можемо то наравно учинити, ако є

3.) не само $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, него уєдно и dx променльивъ брой.

Нашъ посао дакле бытћe сада, да извидимо, како се налази $d\,d\,f(x)$ у ова два последня случая; ради олакшице пакъ сматратћемо притомъ случай, гди є $f_1(x)$ сталанъ а dx променльивъ брой, само као особитый случай онога, у комъ є поредъ $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, уєдно dx променльивъ брой.

Имамо дакле изнаћи $d\,d\,f(x)$ найпре у случаю, ако є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, dx пакъ сталанъ брой, а после у случаю, ако є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, и уєдно dx цременльивый брой.

§ 18.

Уобште є

$$d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx\,.$$

Предпоставляюћи ту, да є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, а dx сталанъ брой, имамо пре свега по правилу II. § 4.

$$d\,d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx = dx\,.\,d\,f_1(x).$$

Но диференціалъ є $f_1(x)$, као уобште сваке функціє диференціалъ, раванъ производу одъ **нѣне** прве изводне функціє са dx, а прва є изводна функція прве изводне функціє неке функціє нико другій, но друга изводна функція ове функціє; слѣдователно

$$d\,d\,f(x = dx\,.\,d\,f_1(x) = dx\,.\,f_2(x)\,dx$$
$$= f_2(x)\,d^2x\,.$$

Диференціалъ даференціала неке $f(x)$, т. є. $d\,d\,f(x)$ зове се **другій** диференціалъ те функціє, а означує се подобно разлици разлике, кою смо у **I. Ч.** представляли съ $\overset{2}{\Delta} f(x)$, символомъ $\overset{2}{d} f(x)$. Служећи се съ овимъ символомъ, имамо дакле, да є при горнѣмъ предпоставлѣню.

$$\overset{2}{d} f(x) = f_2(x)\,d^2x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha.,$$

то ће рећи: **другій диференціалъ сваке $f(x)$, раванъ є производу одъ нѣне друге изводне функціє са квадратомъ диференціала пременљивога броя x, т. є. съ d^2x.**

Изъ тога израза слѣдує просто овай важный другій

$$\frac{\overset{2}{d}\,f(x)}{d^2x} = f_2(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \beta.,$$

кои показує, да є размера одъ другогъ диференціала сваке $f(x)$ са квадратомъ диференціала пременљивога броя, равна другой изводной функція исте функціє $f(x)$, и као такова дакле или опетъ нека функція одъ x, или пакъ некій по x сталный брой.

Та се размера зове **другій диференціалный количникъ**, или обзиромъ на изразъ $\alpha.$), **другій диференціалный сачинитель** дотичне функціє $f(x)$.

§ 19.

Ако є у другомъ диференціалу функціє $f(x)$, при сталномъ dx, $f_2(x)$ опеть нека функція одъ x, имамо

$$d\,{}^2d\,f(x) = d\,.\,f_2(x)\,d^2x = d^2x\,.\,d\,f_2(x)\,,$$

или, изъ узрока што є $d\,f_2(x)$, као уобште диференціалъ сваке функціє одъ x, производъ одъ прве изводне функціє те $f_2(x)$ са dx, а прва изводна функція одъ $f_2(x)$ нико другій ніє, но **трећа** изводна функція основне функціє $f(x)$:

$$\begin{aligned} d\,{}^2d\,f(x) &= d^2x\,.\,d\,f_2(x) = d^2x\,.\,f_3(x)\,dx \\ &= f_3(x)\,d^3x. \end{aligned}$$

$d\,{}^2d\,f(x)$ зове се **трећій** диференціалъ функціє $f(x)$, а означуе се ради краткоће, символомъ ${}^3d\,f(x)$. Служећи се тиме имамо дакле

$${}^3d\,f(x) = f_3(x)\,d^3x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma.,$$

т. є. да є **трећій диференціалъ сваке функціє $f(x)$ равнъ производу одъ нѣне треће изводне функціє $f_3(x)$ са кубомъ — d^3x — диференціала одъ x.**

Одтудъ опетъ слѣдуе непосредно

$$\frac{{}^3d\,f(x)}{d^3x} = f_3(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \delta.,$$

то ће рећи: размера одъ ${}^3d\,f(x)$ съ кубомъ диференціала одъ x, равна є трећой изводной функціи функціє $f(x)$, и као такова или опеть нека функція одъ x, или пакъ некій, по x сталный брой.

Та размера зове се **трећій** диференціалный количникъ, или обзиромъ на изразъ $\gamma.$), трећій диференціалный сачинитель дотичне функціє $f(x)$.

На истый начинъ налазимо, ако є $f_3(x)$ поредъ сталнога dx опеть нека функція одъ x,

а одатле
$$\left.\begin{aligned} {}^{4}d\,f(x) &= f_4(x)\,d^4x \\ \frac{{}^{4}d\,f(x)}{d^4x} &= f_4(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon.,$$

и т. д., докъ найпосле уобште:

$$\left.\begin{aligned} {}^{n}d\,f(x) &= f_n(x)\,d^nx \\ \frac{{}^{n}d\,f(x)}{d^nx} &= f_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.$$

§ 20.

${}^{2}d\,f(x)$, ${}^{3}d\,f(x)$, ... ${}^{n}d\,f(x)$ зову се скупа выши диференціали функціє $f(x)$, изъ предходећи §§а пакъ видимо, да се ти диференціали, при предпоставлѣню dx сталанъ брой, односно изъ $d\,f(x)$, ${}^{2}d\,f(x)$, ${}^{3}d\,f(x)$, ... ${}^{n-1}d\,f(x)$ на онай истый начинъ, т. є. по истимъ правилама и образцима добыяю, као $d\,f(x)$ изъ $f(x)$. —

Садъ да видимо, како се налазе выши диференціали $f(x)$ у случаю, гди є поредъ премен̓льивога dx, $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x.

§ 21.

Опетъ велимо: уобште є $d\,f(x) = f_1(x)\,dx$.

Предпоставляюћи ту да є $f_1(x)$ опетъ нека функція одъ x, дакле **премен̓льива**, а dx такођеръ **премен̓льивъ**: слѣдуе по IV. правилу §а 4.

$$\begin{aligned} {}^{2}d\,f(x) = d\,f_1(x)\,dx &= dx\,.\,d\,f_1(x) + f_1(x)\,.\,d\,dx \\ &= dx\,.\,f_2(x)\,dx + f_1(x)\,.\,{}^{2}dx \\ &= f_2(x)\,d^2x + f_1(x)\,.\,{}^{2}dx \quad \ldots \quad (\text{а.,} \end{aligned}$$

и одтудъ
$$\frac{{}^{2}d\,f(x)}{d^2x} = f_2(x) + f_1(x)\,\frac{{}^{2}dx}{d^2x} \quad \ldots\ldots \quad (\text{б.}$$

Узимаюћи у а.) да є и $f_2(x)$ опетъ нека функція одъ x, добыямо далѣ помоћу III. и IV. правила §а 4., прећашньи докученя подъ 3.) и образца I. §а 6.:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}d\,f(x) &= d^2x\,.\,d\,f_2(x) + f_2(x)\,d\,d^2x + {}^{2}dx\,.\,d\,f_1(x) + f_1(x).d\,{}^{2}dx \\
&= d^2x.f_3(x)\,dx + f_2(x).\,2\,dx.{}^{2}dx + {}^{2}dx\,.\,f_2(x)\,dx + f_1(x).{}^{3}dx \\
&= f_3(x)\,d^3x + 3\,f_2(x)\,.{}^{2}dx\,.\,dx + f_1(x)\,.{}^{3}dx \;.\;.\;.\;.\;.\;(\text{в.},
\end{aligned}
$$

и одтудъ

$$\frac{{}^{3}d\,f(x)}{d^3x} = f_3(x) + 3\,f_2(x)\,\frac{{}^{2}dx}{d^2x} + f_1(x)\,\frac{{}^{3}dx}{d^3x} \quad .\;\;.\;\;.\;\;(\text{г.}$$

И т. д.

Ово є безъ сумнѣ довольно за подпуно увиђанѣ, да су изрази выши диференціала у овомъ сада сматраномъ случаю истина сложеніи одъ оны у првомъ случаю, но да нњиово налазенѣ неподлежи никаквой другой тешкоћи.

§ 22.

После овога врло є лако докучити више диференціале функціє $f(x)$ іошъ и у случаю, ако є само dx пременљивъ брой, $f_1(x)$ пакъ по x стална.

Изъ пређашнњи израза подъ а., б., в. и г.), слѣдує уричући $f_1(x)$ као сталну, збогъ $f_2(x) = f_3(x) = \dots = $ тада нулли,

$${}^{2}df(x) = f_1(x)\,.\,{}^{2}dx\,,\ \text{дакле}\ \frac{{}^{2}d\,f(x)}{d^2x} = f_1(x)\,\cdot\,\frac{{}^{2}dx}{d^2x}\;;$$

$${}^{3}df(x) = f_1(x)\,.\,{}^{3}dx\,,\quad „\quad \frac{{}^{3}d\,f(x)}{d^3x} = f_1(x)\,\cdot\,\frac{{}^{3}dx}{d^3x}\;;$$

. . . .

све онако исто, као што бы нашли независно одъ помеnуты израза изъ $d\,f(x) = f_1(x)\,dx$, предпоставляюћи одма, да є $f_1(x)$ сталанъ брой, а само dx пременљивъ.

§ 23.

За ова два последня случая (§. 21. и 22.) имамо іошъ слѣдуюће приметити:

dx као сталанъ може се на разный начинъ меняти, и зато остаю у истимъ случаевима выши диференціали функціє $f(x)$, или што є свеєдно нѣни выши диференціални количници дотле неопределѣни, доклегодъ се задаткомъ или природомъ дотичнога предмета неутврде вредности количника $\frac{{}^2dx}{d^2x}$, $\frac{{}^3dx}{d^3x}$, и т. д. Довольно є међутимъ, да є условлѣнъ или иначе познатъ само првый, т. є. само $\frac{{}^2dx}{d^2x}$, єръ се съ ньимъ, каошто ћемо одма видити, врло лако могу определити и сви остали.

Ако є $\frac{{}^2dx}{d^2x} = \varphi(x)$ нека известна (дата, или природомъ задатка подаюћа се) функція одъ x, добыямо

$${}^2dx = \varphi(x)\, d^2x\,;$$

одтудъ пакъ, узимаюћи лево и десно диференціале по правилу IV. § 4., слѣдуе

$$\begin{aligned} {}^3dx &= d^2x \,.\, d\varphi(x) + \varphi(x)\, dd^2x \\ &= d^2x \,.\, \varphi_1(x)\, dx + 2\varphi(x) \,.\, {}^2dx \,.\, dx \\ &= \varphi_1(x)\, d^3x + 2\varphi(x) \,.\, {}^2dx \,.\, dx\,; \end{aligned}$$

дакле ако съ d^3x разделимо,

$$\frac{{}^3dx}{d^3x} = \varphi_1(x) + 2\varphi(x)\,\frac{{}^2dx}{d^2x} = \varphi_1(x) + 2\varphi^2(x),$$

подпуно определѣнъ.

На истый начинъ можемо изнаћи изъ $\frac{{}^3dx}{d^2x}$ четвртый диференціалный количникъ, изъ овога после 5., и т. д. свакій слѣдуюћій.

§ 24.

Другій диференціалный количникъ $\frac{{}^2dx}{d^2x}$ у случаєвима о коима говорисмо, утврђує се обично задаванѣмъ друге іошъ неке функціє поредъ дате, съ условіємъ: да првый диференціалъ те друге функціє буде сталанъ брой.

Тако н. п. ако бы тражили выше диференціале одъ e^{lx} съ тимъ условіємъ, да првый диференціалный количникъ одъ $\sin lx$ буде сталанъ брой имали бы

$$d \sin lx = \cos lx \, . \, dlx = \frac{\cos lx}{x} \, . \, dx \, ,$$

и тай треба да є = некомъ сталномъ брою; тога ради ако наново диференціалимо, мора быти

$$^2d \sin lx = d \, . \, \frac{\cos lx}{x} = dx \, . \, d \, \frac{\cos lx}{x} + \frac{\cos lx}{x} \, . \, ddx$$

$$= dx \, . \, \frac{- x \sin lx \, . \, dlx - \cos lx \, . \, dx}{x^2} + \frac{\cos lx}{x} \, dx$$

$$= - \frac{\sin lx + \cos lx}{x^2} \, d^2x + \frac{\cos lx}{x} \, . \, {}^2dx$$

$$= \frac{x \cos lx \, . \, {}^2dx - (\sin lx + \cos lx) \, d^2x}{x^2}$$

= o, т. є.

$$x \cos lx \, . \, {}^2lx - (\sin lx + \cos lx) \, d^2x = 0 \, ,$$

и одтудъ

$$\frac{{}^2dx}{d^2x} = \frac{\sin lx + \cos lx}{x \cos lx} \, ,$$

подпуно **опредѣлѣнъ**.

Ово наново диференціалећи добыли бы трећій диференціалный количникъ, изъ тога после на истый начинъ 4., и т. д. све слѣдуюће такођеръ подпуно **опредѣлѣне**.

Ако дакле потомъ узмемо

$$de^{lx} = e^{lx} . \, dlx = \frac{e^{lx}}{x} \, . \, dx \, ,$$

и наново диференціалимо, слѣдуе

$$ {}^{2}\!de^{\mathrm{lx}} = dx \,.\, d\,\frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} + \frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} \,.\, {}^{2}\!dx $$

$$ = dx \,.\, \frac{xde^{\mathrm{lx}} - e^{\mathrm{lx}}.\, dx}{x^2} + \frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} \,.\, {}^{2}\!dx $$

$$ = dx \,.\, \frac{e^{\mathrm{lx}} - e^{\mathrm{lx}}}{x^2} \cdot dx + \frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} \cdot {}^{2}\!dx $$

$$ = \frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} \cdot {}^{2}\!dx \text{ , и одтудъ} $$

$$ \frac{{}^{2}\!de^{\mathrm{lx}}}{d^2x} = \frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} \,.\, \frac{{}^{2}\!dx}{d^2x} , $$

а ако іошъ за $\frac{{}^{2}\!dx}{d^2x}$ узмемо нѣгову нађену вредность,

$$ \frac{{}^{2}\!de^{\mathrm{lx}}}{d^2x} = \frac{e^{\mathrm{lx}}}{x} \,.\, \frac{\sin lx + \cos lx}{x \cos lx} = \frac{e^{\mathrm{lx}}.\, (\sin lx + \cos lx)}{x^2 \cos lx} , $$

подпуно **определѣнъ.**

Подобно добыли бы и остале выше диференціалне количнике вопросне функціє, све **определѣне.**

Садъ намъ само іошъ остаѥ узети за упражнѣнѣ у вышемъ диференціаленю неколико

Примера

съ предпоставлѣнѣмъ, да ѥ dx сталанъ.

§ 25.

1.) Нашли смо у § 6.

$$ dx^{\mathrm{n}} = nx^{\mathrm{n}-1}.\, dx. $$

Узимаюћи наново диференціалъ, добыямо по истогъ § образцу I.

$$ {}^{2}\!dx^{\mathrm{n}} = n\,(n-1)\; x^{\mathrm{n}-2}.\, d^2x = n^{2|-1}.\, x^{\mathrm{n}-2}.\, d^2x. $$

Одатле на истый начинъ

$${}^{3}dx^{n} = n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}.\,d^{3}x = n^{3|-1}.\,x^{n-3}.\,d^{3}x.$$

И на истый начинъ далѣ, докъ найпосле уобште

$${}^{v}dx^{n} = n^{v|-1}.\,x^{n-v}.\,d^{v}x,$$

Ако бы притомъ брой n быо **цео и положанъ**, онда є ${}^{n}dx^{n}$, збогъ $x^{n-n} = x^{0} = 1$ сталанъ брой, и зато сви іошъ выши диференціали одъ x^{n} нулле. При свакомъ другомъ брою n пакъ, може се диференціалити безъ края.

2.) У §. 7. добыли смо $da^{x} = a^{x}\,la\,.\,dx$; зато

$${}^{2}d\,a^{x} = la\,dx\,.\,d\,a^{x} = la\,dx\,.\,a^{x}\,la\,dx = a^{x}\,la^{2}\,.\,d^{2}x\,;$$

одтудъ опетъ ${}^{3}d\,a^{x} = a^{x}\,l^{3}a\,.\,d^{3}x$, и т. д. докъ уобште

$${}^{n}d\,a^{x} = {}^{n}d\,a^{x} = a^{x}\,l^{n}a\,.\,d^{n}x.$$

3.) У истомъ §у имали смо $d\,lx = \frac{dx}{x}$ мора дакле быти

$${}^{2}d\,lx = dx\,.\,d\,\frac{1}{x} = dx\,.\,\frac{-dx}{x^{2}} = -\frac{d^{2}x}{x^{2}}\,,$$

$${}^{3}d\,lx = -\,d^{2}x\,.\,d\,\frac{1}{x^{2}} = -\,d^{2}x\,.\,\frac{-\,2\,dx}{x^{3}} = +\,\frac{2\,d^{3}x}{x^{3}}\,,$$

$${}^{4}d\,lx = -\,2\,d^{3}x\,.\,d\,\frac{1}{x^{3}} = 2\,d^{3}x\,.\,\frac{-\,3\,dx}{x^{4}} = \frac{-\,2\,.\,3\,d^{4}x}{x^{4}}\,,$$

и т. д. докъ найпосле

$${}^{n}d\,lx = (-1)^{n-1}\,.\,(n-1)\,!\,.\,\frac{d^{n}x}{x^{n}}\,.$$

4.) По § 8. є $d\,sin\,x = cos\,x\,.\,dx$; зато по истомъ §-у

$$ {}^{2}d\ sin\ x = -\ sin\ x\,.\,d^2x, $$

$$ {}^{3}d\ sin\ x = -\ cos\ x\,.\,d^3x\ , $$

$$ {}^{4}d\ sin\ x = sin\ x\,.\,d^4x\ , $$ и т. д. докъ уобште

$$ {}^{2n-1}d\ sin\ x = (-1)^{n+1}\ cos\ x\,.\,d^{2n-1}x\ , $$

$$ {}^{2n}d\ sin\ x = (-1)^{n}\ sin\ x\,.\,d^{2n}x. $$

5.) § 10. показуе $d\ sin\ v\,.\,x = sin\ x\ dx$; бытће дакле

$$ {}^{2}d\ sin\ v\,.\,x = cos\ x\,.\,d^2x\ , $$

$$ {}^{3}d\ sin\ v\,.\,x = -\ sin\ x\,.\,d^3x\ , $$

$$ {}^{4}d\ sin\ v\,.\,x = -\ cos\ x\,.\,d^4x\ , $$

. . . . , уобште

$$ {}^{2n-1}d\ sin\ v\,.\,x = (-1)^{n+1}\,.\ sin\ x\,.\,d^{2n-1}x\ , $$ а

$$ {}^{2n}d\ sin\ v\,.\,x = (-1)^{n+1}\,.\ cos\ x\,.\,d^{2n}x. $$

6.) У § 11. имали смо $d\ arc\ (sin = x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; мора дакле быти

$$ {}^{2}d\ arc\ (sin = x) = dx\,.\,d\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} $$

$$ = dx\,.\,(-\tfrac{1}{2})\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\,(-2\,x\,dx) $$

$$ = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\ x\ d^2x $$

$$ = \frac{x\ d^2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\ , $$

$$ {}^{3}d\ arc\ (sin = x) = d^2x\,.\,d\ x\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} $$

$$ = d^2x\,.\,[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx + x\,d\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}] $$

$$ = d^2x.[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx - \tfrac{3}{2}\,x\,(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.d(1-x^2)] $$

$$= d^2x\left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx - \tfrac{3}{2}x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}.(-2x\,dx)\right]$$

$$= \left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right]\ d^3x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\left[1+3\,x^2(1-x^2)^{-1}\right]\ d^3x$$

$$= (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\left[1+\frac{3\,x^2}{1-x^2}\right]d^3x$$

$$= \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1+2x^2)\,d^3x}{(1-x^2)}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\,d^3x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{(1+2x^2)\,d^3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

И т. д., найпосле

7.) **По § 13.** є $d\,ll\,x = \frac{dx}{x\,lx}\cdot$ Дакле

$$ {}^{2}d\,ll\,x = dx\cdot d\frac{1}{x\,lx} = dx\cdot\frac{-d\,x\,lx}{x^2\ l^2x}$$

$$= -\ dx\cdot\frac{lx\,dx+dx}{x^2\ l^2x} = -\frac{lx+1}{x^2\,lx^2}\cdot d^2x$$

$$ {}^{3}d\,ll\,x = -\,d^2x\,.\,d\,\frac{lx+1}{x^2\ lx^2}$$

$$= -\,d^2x\,.\,\frac{x^2\,l^2x\,.\,d\,(lx+1)-(lx+1)\,d\,x^2\ l^2x}{x^4\,l^4x}$$

$$= -\,d^2x\,.\,\frac{x^2l^2x\cdot\frac{dx}{x}-(lx+1)\,(l^2x.2xdx+x^2\,d\,l^2x)}{x^4\,.\,l^4x}$$

$$= -\,d^2x\cdot\frac{x\,l^2x\,.\,dx-(lx+1)\left(2\,x\,l^2x\,dx+x^2\,2lx\,\frac{dx}{x}\right)}{x^4\ l^4x}$$

$$= - d^2x \cdot \frac{xl^2x dx - 2xl^3x dx - 2xl^2x dx - 2xl^2x dx - 2xlx dx}{x^4 \; l^4x}$$

$$= d^2x \cdot \frac{3\,x\,l^2x\;dx + 2\,x\,l^3x\;dx + 2\,x\,lx\;dx}{x^4\;lx^4}$$

$$= \frac{2 + 3\,lx + 2\,l^2x}{x^3\;l^3x} \cdot d^3x\;,\text{ и т. д.}$$

е.) Телеровъ образацъ.

§ 26.

По § 11. Ч. I. имамо

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f_1(x)\,h + f_2(x)\,\frac{h^2}{2!} \pm f_3(x)\,\frac{h^3}{3!} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Узимаюћи место $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... у §§ 3., 18. и 19. нађене ньиове вредности, добыя овай образацъ видъ

$$f(x \pm h) = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx}\,h + \frac{{}^2d f(x)}{d^2x} \cdot \frac{h^2}{2!} \pm \frac{{}^3df(x)}{d^3x} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

у комъ є познатъ подъ именомъ **Телеровъ** (Taylor) **образацъ, Телеровъ редъ,** или **Телерова Теорема.**

Тай є образацъ у анализи одъ врло велике важности, постои (као што є у 11 § I. Ч. већъ речено), докъ є x неопредѣлѣнъ или обштій брой, за **сваку** безъ разлике функцію, служи пакъ пре свега за опредѣльиванѣ премене функціє $f(x)$ збогъ нараштая или умаляя броя x съ **произволнимъ** броємъ h, а после, осимъ другога, іошъ за развіянѣ функція у редове.

Казато є већъ у пређепоменутомъ § I. Ч., али опетъ споминѣмо: ако $f(x)$ ніє функція алгебрайска раціонална цела, онда є на ню употреблѣный телеровъ редъ безкраянъ, збогъ чега у таковомъ случаю добро валя пазити на нѣгову сбирльивость. Да ли є сбирльивъ показаћe по § 121. I. Ч. изразъ

$$D_n = \frac{f_{n-1}(x)\,\frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}\cdot f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}}{f_{n-1}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!} - f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}} = \frac{f_n(x)\,\frac{h^n}{n!}}{1 - \frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)}\cdot\frac{h}{n}}$$

тиме, што у случаю сбирљивости истый изразъ при $n = \infty$ мора быти $= 0$.

Найпосле іошъ примећавамо, да ћемо мы у будуће телеровъ редъ, гдигодъ узтреба, збогъ веће простоте употреблявати у ономъ првомъ нѣговомъ, іошъ изъ І. Ч. познатомъ виду, а и иначе писат'ћемо одяко изъ истогъ узрока место $\frac{d\,f(x)}{dx}$, $\frac{\overset{2}{d}\,f(x)}{d^2(x)}$, и т. д. свуда $f_1(x)$, $f_2(x)$, и т. д. кое молимо да се єданпутъ за свагда запамти.

Садъ да видимо горе споменута два употреблѣня телеровогъ реда.

§ 27.

1.) Тражи се премена функціє

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$$

збогъ $x - 1$ место x.

Ту є $f_1(x) = 12x^2 - 6x + 2$, $f_2(x) = 24x - 6$, $f_3(x) = 24$, а остали диференціални количници сви $= 0$. Дакле є збогъ $h = -1$ по вопросномъ образцу

$$f(x-1) = f(x) - (12x^2 - 6x + 2).1 + (24x - 6).\frac{1}{2\,!} - 24\cdot\frac{1}{3\,!}$$
$$= f(x) - 12x^2 + 18x - 9,$$

и одтудъ дате функціє тражена премена:

$$f(x - 1) - f(x) = -12x^2 + 18x - 9.$$

2.) Шта быва одъ $f(x) = \sin x$, ако у истой узмемо $2x = x + x$ место x?

Збогъ $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = -\sin x$, $f_3(x) = -\cos x$, $f_4(x) = \sin x$, и т. д. (§ 25.), имамо по телеровомъ образцу $f(x + x) = f(2x)$, т. є.

$$\sin 2x = \sin x + \cos x \,.\, x - \sin x \,.\, \frac{x^2}{2\,!} - \cos x \,\frac{x^3}{3\,!} + \sin x \,.\, \frac{x^4}{4\,!} - \cdot\cdot$$

$$= \sin x.(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \cdots) + \cos x.(x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \cdots\cdot).$$

Но по I. Ч. § 163. заграђеный чинитель првога члана ніє нико другій но $\cos x$, а заграђеный чинитель другога члана опетъ нико другій но $\sin x$. Дакле съ обзиромъ на то

$$\sin 2x = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,$$

каогодъ што смо нашли у тригонометріи на другій начинъ.

3.) Шта добыямо одъ $f(x) = \cos x$, ако место x узмемо $x + y$?

Ту є по § 8. $f_1(x) = - \sin x$, $f_2(x) = - \cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \cos x$, ... Дакле ако у датой функціи место x узмемо $x + y$, мора быти по телеровомъ образцу $f(x + y)$, т. є.

$$\cos(x + y) = \cos x - \sin x \,.\, y - \cos x \,.\, \frac{y^2}{2\,!} + \sin x \,\frac{y^3}{3\,!} + \cos x \,\frac{y^4}{4\,!}$$

$$- \sin x \,.\, \frac{y^5}{5\,!} - \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$= \cos x.(1 - \frac{y^2}{2\,!} + \frac{y^4}{4\,!} - \cdot\cdot) - \sin x.(y - \frac{y^3}{3\,!} + \frac{y^5}{5\,!} - \cdot\cdot\cdot)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \text{(I. Ч. § 163.)}$$

каогодъ што смо нашли у тригонометріи.

§ 28.

1.) Тражи се редъ за lx.

По § 25. су диференціални количници одъ $f(y) = ly$, по реду $f_1(y) = \frac{1}{y}$, $f_2(y) = \frac{-1}{y^2}$, $f_3(y) = \frac{2\,!}{y^3}$, $f_4(y) = \frac{3\,!}{y^4}$, и т. д. Мора дакле быти по телеровомъ образцу

$$f(y+z)=ly+\frac{z}{y}-\frac{z^2}{2!\,y^2}+\frac{2!\,z^3}{3!\,y^3}-\frac{3!\,z^4}{4!\,y^4}+\cdots\cdots$$

$$=ly+\frac{z}{y}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{y^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{y^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{y^4}+\cdots\cdots,$$

и одтудъ, ако узмемо $y=1$, а $z=x-1$, заогъ $l1=0$:

$$lx=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots\cdot,$$

каогодъ што є нађено у I. Ч. § 162.

2.) Иште се редъ за $f(x)=sin\,x$.

По § 25. єсу количници одъ $f(y)=sin\,y$ по реду:

$$f_1(y)=cos\,y\,,\,f_2(y)=-sin\,y\,,\,f_3(y)=-cos\,y\,,\,f_4(y)=sin\,y,\ldots$$

По телеровомъ образцу мора дакле быти $f(y+z)$, т. є.

$$sin\,(y+z)=sin\,y+cos\,y\,.\,z-sin\,y\,.\,\frac{z^2}{2\,!}-cos\,y\,.\,\frac{z^3}{3\,!}+sin\,y\,.\,\frac{z^4}{4\,!}$$

$$+\,cos\,y\,.\,\frac{z^5}{5\,!}-\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,,$$

и одтудъ, ако узмемо $y=0$, а z изменемо съ x, збогъ $sin\,0=0$, а $cos\,0=1$:

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\cdots\cdots,$$

каогодъ у I. Ч. § 163. на другій начинъ. — Найпосле

3.) Тражи се редъ за $f(x)=\sqrt{x}$.

По § 6. обр. I. имамо одъ $f(y)=\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}$ диференціалне количнике редомъ $f_1(y)=\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$, $f_2(y)=-\frac{1}{2^2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}$,

$$f_3(y)=\frac{3}{2^3}\cdot y^{-\frac{5}{2}},\ f_4(y)=-\frac{3\,.\,5}{2^4}\cdot y^{-\frac{7}{2}},\ f_5(y)=\frac{3\,.\,5\,.\,7}{2^5}y^{-\frac{9}{2}},\ldots$$

Мора быти дакле по телеровомъ образцу

$$f(y+z) = (y+z)^{\frac{1}{2}}, \text{ т. є.}$$

$$\sqrt{y+z} = y^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} . z - \frac{1}{2^2} \cdot y^{-\frac{3}{2}} . \frac{z^2}{2!} + \frac{1.3}{2^2} \cdot y^{-\frac{5}{2}} . \frac{z^3}{3!} -$$

$$- \frac{1.3.5}{2^4} \cdot y^{-\frac{7}{2}} . \frac{z^4}{4!} + \frac{1.3.5.7}{2^5} \cdot y^{-\frac{9}{2}} . \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots,$$

одатле пакъ, ако узмемо $y = 1$, а $z = x - 1$:

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2} (x-1)^2 - \frac{1}{2^2.2!} (x-1)^2 + \frac{1.3}{2^3.3!} (x-1)^3 -$$

$$- \frac{1.3.5}{2^4.4!} (x-1)^4 + \frac{1.3.5.7}{2^5.5!} (x-1)^5 - \ldots.$$

§ 29.

Тражећи телеровимъ образцемъ $f(x+h)$ за известне вредности броя x, догодитће се при деловнимъ и логаритмійскимъ функціяма, и **само** при таковима, да чланови траженога реда, или одма одъ првога, или пакъ одъ каквогъ другогъ надалѣ, постаю за уречену вредность одъ x вида $\frac{a}{o}$, т. є. **безкрайни.** То є знакъ, да се при дотичной $f(x)$ тражена $f(x+h)$ за оно x неможе развити у редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ** изложительима. При функціама првога рода садржатће у таковомъ случаю захтеваный редъ степене одъ h съ **одречнимъ** изложительима, — при онима другога рода степене одъ h съ положнимъ деловнимъ изложительима, а при последньима появлює се трансцендентный брой lh, кои се, каошто смо већъ видили на другомъ месту (I. Ч. § 162.) никако неможе развити у редъ степена одъ h съ целимъ изложительима. Све то пакъ случитће се и при тима функціяма само онда, ако у деловной функціи имевитель, у ирраціоналной подкореный брой, а у логаритмійской найпосле онай брой, кога се тиче знакъ логаритма: постаю за уречено x равни нулли.

У свакомъ таковомъ случаю дакле издає насъ телеровъ образацъ, и морамо се зато служити за определьиванѣ реда $f(x+h)$ другимъ, ако млого пута и неудобніимъ простимъ начиномъ. Да пакъ све овде примет'ћено доиста тако постои, о томе уверит'ће насъ довольно слѣдуюћи §§-и.

§ 30.

1.) Тражи се редъ $f(x+h)$ одъ $f(x)=\frac{x}{x-a}$, за $x=a$.

При той є функціи

$$f_1(x)=-\frac{a}{(x-a)^2},\ f_2(x)=\frac{2!\,a}{(x-a)^3},$$

$$f_3(x)=-\frac{3!\,a}{(x-a)^4},\ \text{и т. д.}$$

Имамо дакле по телеровомъ образцу

$$f(x+h)=\frac{x}{x-a}-\frac{a}{(x-a)^2}\cdot h+\frac{2!\,a}{(x-a)^3}\cdot\frac{h^2}{2!}-\frac{3!\,a}{(x-a)^4}\cdot\frac{h^3}{3!}+\dots$$

$$=\frac{x}{x-a}-\frac{a}{(x-a)^2}\cdot h+\frac{a}{(x-a)^3}\cdot h^2-\frac{a}{(x-a)^4}\cdot h^3+\dots,$$

а ако место x узмемо уречену нѣгову вредность a:

$$f(a+h)=\frac{a}{0}-\frac{a}{0}\cdot h+\frac{a}{0}\cdot h^2-\dots\dots,$$

изъ чега видимо да $f(x+h)$ за $x=a$ развити у редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ** изложительима **ніє могуће.**

И доста, ако у датой функціи узмемо $a+h$ место x, и после далѣ просто поступимо, слѣдує

$$f(a+h)=\frac{a+h}{a+h-a}=\frac{a+h}{h}=\frac{a}{h}+1=ah^{-1}+1,\quad \text{т. є.}$$

функція не съ положнимъ, но **одречнимъ** целимъ степеномъ одъ h.

2.) Иште се редъ $f(x+h)$ одъ $f(x) = a\sqrt{x(x-b)}$, за $x=b$.

Ту су диференціални количници редомъ

$$f_1(x) = \frac{a(2x-b)}{2\sqrt{x(x-b)}},\quad f_2(x) = -\frac{ab^2}{4x(x-b)\sqrt{x(x-b)}},$$

и т. д. Збогъ тога по телеровомъ образцу уобште

$$f(x+h) = a\sqrt{x(x-b)} + \frac{a(2x-b)}{2\sqrt{x(x-b)}}\cdot h - \dots\dots\dots,$$

а ако узмемо $x=b$,

$$f(b+h) = 0 + \frac{ab}{0}\cdot h - \dots\dots\dots,$$

за знакъ, да се $f(x+h)$ одъ дате функціє $f(x)$, за $x=b$ неможе представити као редъ степена одъ h съ **целимъ положнимъ** изложительима.

И доиста, ако у $f(x)$ узмемо $b+h$ место x, слѣдує

$$f(b+h) = a\sqrt{(b+h)h} = ah^{\frac{1}{2}}.(b+h)^{\frac{1}{2}}$$

$$= ah^{\frac{1}{2}}.\left(b^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{h}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{h^2}{2!\,b^{\frac{3}{2}}} + \dots\dots\dots\right),$$

истина као редъ степена одъ h, али не съ **целимъ**, но **деловнимъ** положнимъ изложительима.

Найпосле

3.) Потребна є $f(x+h)$ одъ $f(x) = x + a.l(x-a)$, за $x=a$.

Ту є

$$f_1(x) = \frac{x}{x-a},\quad f_2(x) = -\frac{a}{(x-a)^2},\quad f_3(x) = \frac{2!\,a}{(x-a)^3},\ \text{и т. д.}$$

Дакле по Телеру

$$f(x+h) = [x+al(x-a)] + \frac{x}{x-a}\cdot h - \frac{a}{(x-a)^2}\cdot\frac{h^2}{2!} + \dots$$

и одтудъ $f(a+h) = (a+al0) + \frac{a}{0} \cdot h - \frac{a}{0} \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots\dots$

$$= (a - a\infty) + \frac{a}{0} \cdot h - \dots\dots\dots ,$$

изъ чега є видити, да се $f(x+h)$ одъ дате функціє неможе развнти у редъ степена одъ h съ целимъ положнимъ изложитељима.

И доиста, ако у датой функціи узмемо $a+h$ место x, добыямо $f(x+h) = a + h + lh$, а познато є, да се lh никако неможе изразити као редъ по целимъ положнимъ степенима одъ h.

Іошъ да испытамо поизближе $f(x+h)$ у случаю, гди се $f(x)$ неможе развити у редъ степена' одъ h съ целимъ положнимъ изложитељима.

§ 31.

Ако су $f(x)$ и $f(x+h)$ и при **изчезљивомъ** брою h за какву известну вредность броя $x = \alpha$ **доистне**: онда разлику $f(x+h) - f(x)$ или никако неможемо развити у редъ по h, или пакъ тай редъ може садржати само степене одъ h съ **положнимъ**, иначе целимъ или деловнимъ изложитељима. Єръ ако бы допустили да h у томъ реду може стаяти и съ одреченимъ изложитељима, онда бы свакій чланъ съ таковимъ h за $h = 0$ постао вида $\frac{\alpha}{0}$, и она бы разлика тако была **безкрайна**, кое при горнѣмъ предпоставлѣню, по комъ нѣна вредность за $h = 0$ мора быти такођеръ $= 0$, никако неможе да буде.

Ово предпославщи узмимо, да смо на какавъ нибудъ начинъ за $x = \alpha$ нашли разлику $f(x+h) - f(x)$, уређену по растућимъ степенима одъ h,

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = A_1 h^{n_1} + A_2 h^{n_2} + A_3 h^{n_3} + \dots \quad (1.,$$

тако дакле, да у овоме реду стои

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots\dots\dots\dots \quad (2.$$

У томъ случаю може быти првый изложитель n_1 само $\leqq 1$; єръ ако бы быо > 1, онда бы могли првомъ члану $A_1 h^{n_1}$ предпоставити другій съ h^1, коєга є сачинитель $A = 0$, тако да є после **првый** изложитель опетъ не > 1, но $= 1$.

Исто тако можемо доказати, да другій изложитель n_2 неможе быти > 2, но само $\leqq 2$, трећій n_3 не > 3, но само $\leqq 3$; и т. д.

Сматрајући у горньой єдначини подъ 1.) брой h као променльивъ, и образујући у той єдначини лево и десно редомъ све изводне функціє (диференціалне количнике) по h, имамо обзиромъ на то, да є $f(\alpha)$ по h сталанъ брой: прва изводна функція одъ $x + h$ по h, т. є.

$$\left.\begin{aligned}
f_1(\alpha+h)_h &= n_1 A_1 h^{n_1-1} + n_2 A_2 h^{n_2-1} + n_3 A_3 h^{n_3-1} + \ldots\ldots \\
f_2(\alpha+h)_h &= n_1^{2|-1}.A_1 h^{n_1-2} + n_2^{2|-1}.A_2 h^{n_2-2} + n_3^{2|-1}.A_3 h^{n_3-2} + \\
f_3(\alpha+h)_h &= n_1^{3|-1}.A_1 h^{n_1-3} + n_2^{3|-1}.A_2 h^{n_2-3} + n_3^{3|-1}.A_3 h^{n_3-3} + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} (3.,$$

при чему є, каошто знамо изъ **I. Ч.**, $n_1^{2|-1} = n_1(n_1 - 1)$, $n_1^{3|-1} = n_1(n_1 - 1)\ (n_1 - 2)$, и т. д.

Постављајући садъ у овимъ изразима $h = 0$, добыямо лево по реду $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $\ldots\ldots$, т. є. диференціалне количнике одъ $f(x)$ за $x = \alpha$, десно пакъ остає одъ свакога оно, чему су ти количници при $h = 0$ за $x = \alpha$ равни. Но исти изрази показую после ясно:

1.) Ако є $n_1 < 1$, онда по првомъ одъ ньи, было иначе $n_2 \leqq 2$, $n_2 \leqq 3$, и т. д., постає $f_1(\alpha)$ вида $\frac{a}{0} = \infty$; ако є пакъ $n_1 = 1$, онда слѣдує

$$A_1 = f_1(\alpha).$$

2.) Ако є $n_1 = 1$, и притомъ $n_2 < 2$, остали пакъ изложительи односно $\leqq 3$, $\leqq 4$, и т. д., онда збогъ тога што првый чланъ у другомъ изразу, као нулли раванъ одпада, слѣдуе $f_2(\alpha) = \frac{a}{0} = \infty$; напротивъ ако є поредъ $n_1 = 1$ брой $n_2 = 2$, онда быва по истомъ изразу $2\, A_2 = f_2(\alpha)$, тако да є у томъ случаю

$$A_2 = \frac{1}{2\,!}\, f_2(\alpha).$$

3.) Ако є $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, и притомъ $n_3 < 3$, а остали изложительи односно $\leqq 4$, $\leqq 5$, и т. д.: онда по трећемъ изразу, зато што првый нѣговъ чланъ као нулли раванъ одпада, постає $f_3(\alpha) = \frac{a}{0} = \infty$; ако є пакъ поредъ $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ изложитель $n_3 = 3$, онда добыямо одъ истога израза $3\,!\, A_3 = f_3(\alpha)$, тако да є тадъ

$$A_3 = \frac{1}{3\,!}\, f_3(\alpha).$$

И т. д., и т. д.

Сабираюћа сва ова докученя видимо: **ако є у разлици $f(x+h) - f(x)$ $f_{n+1}(\alpha)$ првый сачинитель, кои за $x = \alpha$ постає вида $\frac{a}{0} = \infty$; онда су нѣни чланови, до заключно $f_n(\alpha)\,\frac{h^n}{n\,!}$, сви онаки исти као у телеровомъ образцу, слѣдуюћій пакъ чланъ садржи деловный степенъ одъ h, кога изложитель мора лежати између n и $n+1$.**

ж.) Маклореновъ образацъ.

§ 32.

Съ намеромъ да развіемо $f(x)$ у редъ по целимъ положнимъ степенима одъ x, поставимо

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Определююћи диференціалне количнике ове єдначине налазимо

$$f_1(x) = C_1 + 2\,C_2 x + 3\,C_3 x^2 + \ldots\ldots$$

$$f_2(x) = 2\,C_2 + 6\,C_3 x + \ldots\ldots\ldots$$

$$f_3(x) = 6\,C_3 x + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Како пакъ одъ x независни сачинительи у горнѣмъ реду мораю важити при свакой вредности тога броя, то є свеєдно съ коіомъ ћемо ій определити. Найпростіє, безъ сумнѣ, урадит'ћемо то съ $x = 0$. Съ томъ пакъ слѣдує изъ предходећи єдначина'

$$C_0 = f(\underset{0}{x})\,,\; C_1 = f_1(\underset{0}{x})\,,\; C_2 = \frac{1}{2}\cdot f_2(\underset{0}{x})\,,\; C_3 = \frac{1}{6}\cdot f_3(\underset{0}{x})\,,\ \text{и т. д.,}$$

При чему количницима придата *o* означує, да є у истима узето $x = 0$.

Поставляюћи дакле ове вредности у горе узетый редъ, имамо

$$f(x) = f(\underset{0}{x}) + f_1(\underset{0}{x})\,x + \frac{1}{2\,!}\cdot f_2(\underset{0}{x})\,x^2 + \frac{1}{3\,!} f_3(\underset{0}{x})\,x^3 + \;.\;.\;(1.,$$

образацъ кои є, по нѣговомъ изнашаоцу, познатъ подъ именомъ **простый Маклореновъ** образацъ.

До истогъ образца долазимо такођеръ, ако у телеровомъ образцу узмемо найпре $x = 0$, а после заменемо h съ x.

Поставляюћи пакъ у телеровомъ образцу найпре $x = \alpha$, а после $x - \alpha$ место h, слѣдує образацъ

$$f(x) = f(\underset{\alpha}{x}) + f_1(\underset{\alpha}{x})\,.\,(x - \alpha) + f_2(\underset{\alpha}{x})\,.\,\frac{(x-\alpha)^2}{2\,!} + \;.\;.\;(2.,$$

кои се зове **обштій** маклореновъ образацъ, и одъ коєга є онай пређашньій само особитый тай случай, кадъ є $\alpha = 0$.

Ако притомъ кои одъ диференціалны количника' изпадне ∞, онда є то знакъ, да се дотична функція неможе развити у редъ целы положны степена' одъ x.

Употребимо одма тай образацъ на кою функцію.

§ 33.

1.) Тражи се редъ за $f(x) = \sin x$.

При той є

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x, & \text{дакле} & f(\underset{0}{x}) = 0 \\ f_1(x) = \cos x, & „ & f_1(\underset{0}{x}) = 1 \\ f_2(x) = -\sin x, & „ & f_2(\underset{0}{x}) = 0 \\ f_3(x) = -\cos x, & „ & f_3(\underset{0}{x}) = -1 \\ f_4(x) = \sin x, & „ & f_4(\underset{0}{x}) = 0 \\ f_5(x) = \cos x, & „ & f_5(\underset{0}{x}) = 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array}$$

и зато по вопросномъ образцу, $f(x)$, т. є.

$$\sin x = x - \frac{x}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

као дояко већъ неколико пута на другій начинъ.

2.) Иште се редъ за $f(x) = lx$.

Ту є

$$\begin{array}{lll} f(x) = lx, & \text{дакле} & f(\underset{0}{x}) = -\infty \\ f_1(x) = \frac{1}{x}, & „ & f_1(\underset{0}{x}) = \frac{1}{0} = \infty \\ f_2(x) = -\frac{1}{x^2}, & „ & f_2(\underset{0}{x}) = -\frac{1}{0} = -\infty \\ f_3(x) = \frac{2\,!}{x^3}, & „ & f_3(\underset{0}{x}) = \frac{2\,!}{0} = \infty \\ f_4(x) = -\frac{3\,!}{x^4}, & „ & f_4(\underset{0}{x}) = -\frac{3\,!}{0} = -\infty \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ; \end{array}$$

изъ чега видимо, што већъ знамо, да се lx неможе представити као редъ целы положны степена' одъ x.

3.) Развити $f(x) = \sqrt{1-x}$ у редъ по x.

Ту є

$$f(x) = \sqrt{1-x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad , \text{дакле } f(\underset{0}{x}) = 1$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad . \; . \; . \; . \; , \quad " \quad f_1(\underset{0}{x}) = -\frac{1}{2}$$

$$f_2(x) = -\frac{1\,.\,1}{2^2}\cdot\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} \quad . \; , \quad " \quad f_2(\underset{0}{x}) = -\frac{1\,.\,1}{2^2}$$

$$f_3(x) = -\frac{1\,.\,3}{2^3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2\sqrt{1-x}}, \quad " \quad f_3(\underset{0}{x}) = -\frac{1\,.\,3}{2^3}$$

$$f_4(x) = -\frac{1.3.5}{2^4}\cdot\frac{1}{(1-x)^3\sqrt{1-x}}, \quad " \quad f_4(\underset{0}{x}) = -\frac{1.3.5}{2^4}$$

. . . .

и зато по маклореновомъ образцу

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2^2}\cdot x^2 - \frac{1\,.\,3}{2^3}\cdot x^3 - \frac{1.3.5}{2^4}\cdot x^4 - \; . \; . \; . \; .$$

§ 34.

Ако є првый диференціалный количникъ, за развіянѣ у редъ дате функціє, функція деловна или ирраціонална, онда нѣни выши диференціални количници бываю све сложеніи и незгодніи, и збогъ тога є само развіянѣ такове функціє помоћу телеровогъ или маклореновогъ образца доста неудобно. Олакше пролазимо у таковомъ случаю начиномъ, кои ћемо употребити на слѣдуюће примере.

1.) Тражи се редъ за $f(x) = tang\, x$. Поставимо

$$tang\, x = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \; . \; . \; . \; .$$

Ако разсудимо да овай изразъ стои за сваку тангенту, а да є $tang\, 0 = 0$, онда увиђамо да у реду тангенте нема члана безъ x, т. є. да є $C_0 = 0$, тако да имамо само ставити

$$tang\, x = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (а.$$

Узимаюћи диференціале слѣдує, ако съ dx одма скратимо,

$$\frac{1}{cos^2 x} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (б.$$

и одтудъ, ако ослободимо одъ именителя,

$$1 = cos^2 x\,(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \;.\;.\;.\;.\;.).$$

Диференціалећи наново, добыямо

$$0 = -\,2\, sin\, x\, cos\, x\;(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \;.\;.\;.\;.)$$
$$+\, cos^2 x\;(2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.);$$

или ако скратимо съ $cos\, x$,

$$0 = -\,2\, sin\, x\;(C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \;.\;.\;.\;.)$$
$$+\, cos\, x\;(2C_2 + 6C_3 x + 12C_4 x^2 + \;.\;.\;.\;.).$$

Овде садъ место $sin\, x$ и $cos\, x$ ньиове редове узимаюћи, после мложеня свршуюћи и найпосле скраћуюћи слѣдує

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
2C_2 + 6C_3 & x + 12C_4 & x^2 + 20C_5 & x^3 + 30C_6 & x^4 + 42C_7 & x^5 + \;.\;.\;.\;.\;. = 0, \\
-2C_1 & -5C_2 & -9C_3 & -14C_4 & -20C_5 & \\
 & & +\frac{1}{3}C_1 & +\frac{3}{4}C_2 & +\frac{5}{4}C_3 & \\
 & & & & -\frac{1}{60}C_1 &
\end{array}$$

и одтудъ

$2C_2 = 0$, ... дакле $C_2 = 0$

$6C_3 - 2C_1 = 0$, ... „ $C_3 = \frac{1}{3} C_1$

$12C_4 - 5C_2 = 0$, ... „ $C_4 = 0$

$$20C_5 - 9C_3 + \tfrac{1}{3}\,C_1 = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{дакле} \quad C_5 = \tfrac{2}{15}\,C_1$$

$$30C_6 - 14C_4 + \tfrac{3}{4}\,C_2 = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad „ \quad C_6 = 0$$

$$42C_7 - 20C_5 + \tfrac{5}{4}\,C_3 - \tfrac{1}{60}\,C_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \quad „ \quad C_7 = \tfrac{136}{2520}\,C_1$$

и т. д.; а ако ове вредности метнемо у єдначину б.) и после поставимо $x = 0$, налазимо

$$\frac{1}{cos^2 0} = \frac{1}{1} = 1 = C_1.$$

Све те вредносли пакъ найпосле узете у єдначину а.), даю

$$tang\, x = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + \frac{136}{2520}\,x^7 + \ldots\ldots,$$

каогодъ што смо нашли у **I. Ч. § 164.**

2.) Тражи се редъ за $f(x) = arc\,(tang = x)$.

Метнимо

$$arc\,(tang = x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Узимаюћи диференціале добыямо

$$\frac{1}{1 + x^2} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \ldots\ldots\ldots,$$

или збогъ

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + \ldots\ldots,$$

и одтудъ по правилу сачинителя'

$$C_1 = 1,\; C_2 = 0,\; C_3 = -\tfrac{1}{3},\; C_4 = 0,\; C_5 = \tfrac{1}{5},\; \ldots\ldots;$$

слѣдователно ако ове вредности поставимо у узетый редъ:

$$arc\,(tang = x) = C_0 + x - \tfrac{1}{3}\,x^3 + \tfrac{1}{5}\,x^5 - \ldots\ldots;$$

а ако се нато обазремо, да є за $x=0$ и $arc\,(tang=0)=0$, па зато и $C_0=0$:

$$arc\,(tang=x) = x - \tfrac{1}{3}\,x^3 + \tfrac{1}{5}\,x^5 - \tfrac{1}{7}\,x^7 + \ldots\ldots$$

§ 35.

Завршуюћи овай предметъ да развіемо овимъ истимъ начиномъ іошъ єдну функцію, коя истина неспада у функціє споменуте у прећашнѣмъ §-у, али истый начинъ већма обяснява.

Иште се редъ за

$$f(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots)^n.$$

Поставимо

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a^3x^3 + \ldots)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots$$

Узимаюћи найпре логаритме добыямо

$$nl(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = l(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \ldots);$$

ово пакъ диференціалећи слѣдує

$$\frac{n(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots)}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots} = \frac{C_1 + 2Cx + 3C_3x^2 + \ldots}{C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots},$$

и одтудъ, ако одъ именителя ослободимо

$$\begin{array}{r|r|r|l}
na_1C_0 + na_1C_1 & x + na_1C_2 & x^2 + na_1C_3 & x^3 + \ldots\ldots\ldots \\
2na_2C_0 & 2na_2C_1 & 2na_2C_2 & \\
 & 3na_3C_0 & 3na_3C_1 & \\
 & & 4na_4C_0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
= a_0C_1 + 2a_0C_2 & x + 3a_0C_3 & x^2 + 4a_0C_4 & x^4 + \ldots\ldots; \\
a_1C_1 & 2a_1C_2 & 3a_1C_3 & \\
 & a_2C_1 & 2a_2C_2 & \\
 & & a_3C_1 &
\end{array}$$

а одатле опетъ по правилу сачинителя'

$$a_0C_1=na_1C_0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{дакле} \quad C_1=n\frac{a_1}{a_0}C_0,$$

$$2a_0C_2+a_1C_1=na_1C_1+2na_2C_0, \; . \; . \quad ,, \quad C_2=\binom{n}{2}\frac{a_1^2}{a_0^2}C_0+n\frac{a_2}{a_0}C_0,$$

$$3a_0C_3+2a_1C_2+a_2C_1=na_1C_2+2na_2C_1$$

$$+3na_3C_0, \; \text{дакле} \quad C_2=\binom{n}{3}\frac{a_1^3}{a_0^3}C_0+n^{2|-1}\cdot\frac{a_2a_1}{a_0^2}C_0$$

$$+n\frac{a_3}{a_0}C_0;$$

и т. д.

Узимаюћи садъ све ове вредности у горню едначину а.) слѣдуе

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^n=C_0+\binom{n}{1}\frac{a_1}{a_0}C_0x+\left[\binom{n}{2}\frac{a_1^2}{a_0^2}+n\frac{a_2}{a_0}\right]C_0x^2$$

$$+\left[\binom{n}{3}\cdot\frac{a_1^3}{a_0^3}+n^{2|-1}\frac{a_2a_1}{a_0^2}+n\frac{a_2}{a_0}\right]C_0x^3+\ldots\ldots\ldots;$$

Ако се пакъ обазремо нато, да овай изразъ мора важити за сваку вредность одъ x, па и за $x=0$, а за то x слѣдуе $C_0=a_0^n$: имамо коначно

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^n=a_0^n+na_0^{n-1}a_1x+[na_0^{n-1}a_2+\binom{n}{2}a_0^{n-2}a_1^2]x^2+$$

$$+\ldots\ldots,$$

т. є. полиномный образацъ, каошто смо га нашли на другій начинъ у I. Ч. § 20.

Б. Диференціаленъ функція више променльивы броева.

а.) Простый диференціалъ функція више променльивы броева.

§ 36.

Сваку функцію $v=f(x,y)$ два, međу собомъ независна променльива броя x и y, можемо на троякій начинъ съ изчезльиво малимъ прираштаима променьивати; т. є.

1.) ако у ньой само x пременимо у $x + dx$, или ако 2.) само y пременимо у $y + dy$, или ако найпосле 3.) у истый махъ x пременимо у $x + dx$ а y у $y + dy$.

У првомъ случаю быт'ће нѣна изчезлъиво мала премена, т. є. нѣнъ диференціалъ,

$$dv = f(x + dx, y) - f(x, y), \text{ у другомъ}$$

$$dv = f(x, y + dy) - f(x, y), \text{ а у последнѣму}$$

$$dv = f(x + dx, y + dy) - f(x, y).$$

Прва два диференціала вопросне функціє v, т. є. они при коима се само єданъ пременлъивый брой меня, а другій остає сталанъ, — зову се **почастни или парціални** нѣни диференціали, првый **почастный по** x, а другій **почастный по** y.

Диференціалъ пакъ исте функціє v у трећемъ случаю, т. є. кадъ се оба пременлъива броя меняю, зове се **целый или тоталный** нѣнъ диференціалъ.

Да бы знали да ли є диференціалъ функціє $v = f(x, y)$ два пременлъива броя x и y почастанъ или цео, и у првомъ случаю по коме одъ та два броя узетъ: означит'ћемо одяко целый диференціалъ просто съ dv или $df(x, y)$, почастне диференціале пакъ односно съ dv_x, dv_y или $df(x, y)_x$, $df(x, y)_y$.

§ 37.

У § 214. I. Ч. видили смо, да се $f(x + h, y + k)$ може свагда развити у редъ вида

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + (Mh + Nk) + \frac{1}{2}(Qh^2 + 2PQhk + Rk^2)$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

при чему M, N, O, P, ... представляю неке крайне функціє одъ x и y.

Ако изъ те єдначине определимо разлику $f(x + h, y + k) - f(x, y)$, и после место h узмемо dx, а место k

dy, изчезавају у десной части те разлике сви други чланови спрамъ првога, као изчезљиво мали броєви выши редова, и остаε $f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$, т. є. **целый диференціалъ** функціє v,

$$dv = M\,dx + N\,dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1.,$$

при чему M и N єсу неке крайне функціє оба променљива броя x и y.

Узимаюћи у овомъ изразу да є y сталанъ брой, бытћe, збогъ $dy = 0$, $dv = M\,dx$. Но то тадъ ніє ништа друго, него почастный диференціалъ функціє v по x, и зато можемо писати

$$dv_x = M\,dx\text{, а } M = f_1(x,y)_x.$$

Исто тако бытће, ако у истомъ изразу 1. сматрамо x као сталанъ брой, $dx = 0$, и збогъ тога $dv = N\,dy$, коє опетъ ніє ништа друго, но почастный диференціалъ функціє v по y, тако да у томъ случаю можемо ставити.

$$dv_y = N\,dy\text{, а } N = f_1(x,y)_y.$$

По обоєму стои дакле

$$dv = dv_x + dv_y\text{, или } dv = f_1(x,y)_x . dx + f_1(x,y)_y . dy \quad . \; . \; . \; . \quad (2.,$$

т. є. целый диференціалъ функціє $v = f(x,y)$ два променљива броя x и y, раванъ є сбиру нѣны почастны диференціала.

Да се пакъ ово може разпрострети и на функціє више променљивы броєва него два, увиђа се по себи.

§ 38.

Ова два §а показую довољно, да за диференціаленѣ функція више променљивы броєва, осимъ савршеног познаваня свію показаны правила за диференціале функція єдногъ променљивогъ броя, и онога што смо у истимъ §§ма дознали, — далѣ ништа више непотребуємо, до єдногъ само іошъ упражняваня, поредъ приметбе, да є определѣиванѣ целогъ диференціала помоћу почастны, у млогомъ случаю удобніє одъ непосреднога, ако збогъ ничега другога, а оно зато што на првый начинъ изнађеный целый диференціалъ добыямо одма уређена по диференціалима променљивы броєва, коє є много пута башъ потребно.

Садъ узмимо кои примеръ.

§ 39.

1.) Тражи се целый диференціалъ функціє $v = sin\,x\,cos\,y$.

Ту є $dv_x = cos\,x\,cos\,y\,dx$, $dv_y = -sin\,x\,sin\,y\,dy$, дакле

$$dv = dv_x + dv_y = cos\,x\,cos\,y\,dx - sin\,x\,sin\,y\,dy.$$

2.) Потребанъ є целый диференціалъ функціє $v = \frac{x^2}{\sqrt{x-y}}$

Ту є

$$dv_x = \frac{2x\sqrt{x-y} - \frac{x^2}{2\sqrt{x-y}}}{x-y}\,dx = \frac{4x(x-y) - x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\,dx$$

$$= \frac{3x^2 - 4xy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\,dx,$$

$$dv_y = \frac{x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\,dy; \text{ дакле}$$

$$dv = dv_x + dv_y = \frac{3x^2 - 4xy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\,dx + \frac{x^2}{2(x-y)\sqrt{x-y}}\,dy$$

$$= \frac{(3x^2 - 4xy)\,dx + x^2.dy}{2(x-y)\sqrt{x-y}}.$$

3.) Иште се диференціалъ функціє $v = y^x$.

При той є $dv_x = y^x ly\,.\,dx$, а $dv_y = xy^{x-1}.\,dy$;

дакле целый диференціалъ.

$$dv = dv_x + dv_y = y^x ly\,.\,dx + xy^{x-1}.\,dy.$$

4.) Нуждань є целый диференціалъ функціє

$$v = \frac{x\,ly - sin\,x\,.\,l\,sin\,y}{y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x}\,.$$

Ту имамо

$$dv_x = \frac{\left[\,(y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x)\,(ly - cos\,x\,.\,l\,sin\,y)\,dx - (x\,ly - sin\,x\,.\,l\,sin\,y)\,\left(\frac{y}{x} - sin\,y\,cot\,x\right)\right]}{(y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x)^2}$$

$$dv_y = \frac{\left[(ylx - siny\,.\,lsinx)\left(\frac{x}{y} - sinx.coty\right) - (xly - sinx.lsiny)\,.\,(lx - cos\,y\,.\,l\,sin\,x)\right]}{(y\,lx - sin\,y\,.\,l\,sin\,x)^2}\,dy\,;$$

дакле $dv = dv_x + dv_y$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}(ylx - siny\,.\,lsinx)\left[(ly - cosx\,.\,lsiny)dx + \left(\frac{x}{y} - sinx\,coty\right)dx\right]\\ -(xly - sinx\,.\,lsiny)\,.\left[\left(\frac{y}{x} - siny\,cot\,x\right)dx + (lx - cosy\,.\,lsinx)dy\right]\end{array}\right\}}{(y\,lx - sin\,y\,.\,lsin\,x)^2}$$

Найпосле

5.) Тражи се целый диференціалъ функціє $v = x\,sin\,(ylz)$

При той имамо $dv_x = sin\,(y\,lz)\,.\,dx$,

$dv_y = x\,cos\,(y\,lz)\,.\,lz\,.\,dy$,

$dv_z = x\,cos\,(ylz)\,.\,y\,.\,\frac{dz}{z}$; дакле траженый целый диференціалъ

$$dv = sin\,(ylz)\,.\,dx + xlz\,.\,cos\,(ylz)\,.\,dy + \frac{xy}{z}\,.\,cos\,(yl\,z)\,.\,dz$$

б.) Айлерово правило за єдностепене функціє.

§ 40.

Ако є $v = f(x, y) = Ax^a y^\alpha + Bx^b y^\beta + Cx^c x^\gamma + \ldots\ldots$ и притомъ $a + \alpha = b + \beta = c + \gamma = \ldots = n$, т. є. ако є функція v **едностепена** (хомогена) n. реда, одъ два променльива броя x и y, и мы определимо нѣне почастне диференціалне количнике: добыямо

$$f_1(x, y)_x = Aax^{a-1}.y^{\alpha} + Bbx^{b-1}.y^{\beta} + Ccx^{c-1}.y^{\gamma} + \ldots\ldots$$

$$f_1(x, y)_y = A\alpha x^{a}.y^{\alpha-1} + B\beta x^{b}y^{\beta-1} + C\gamma x^{c}.y^{\gamma-1} + \ldots\ldots$$

Мложећи прввй количникъ съ x а другій съ y, и после производе сабирајући, слѣдує

$$f_1(x, y)_x . x + f_1(x, y)_y . y$$

$$= A(a+\alpha)x^{a}y^{\alpha} + B(b+\beta)x^{b}y^{\beta} + C(c+\gamma)x^{c}y^{\gamma} + \ldots$$

$$= n(Ax^{a}y^{\alpha} + Bx^{b}y^{\beta} + Cx^{c}y^{\gamma} + \ldots\ldots),$$ т. є.

$$f_1(x, y)_x . x + f_1(x, y)_y . y = nv.$$

Овай важный образацъ зове се **Айлерово правило за едностепене функціє**, и служи осимъ другога за испытиванѣ точности целога диференціала функціє два променльива броя, определѣногъ помоћу почастны диференціала; лако є пакъ разпростретиі га на едностепене функціє и произвольно колико више променльивы броєва.

Изъ горньи израза видимо уєдно, да су почастни диференціални количници едностепене функціє опетъ такове функціє, но єдногъ реда ниже.

За подпуно уверенѣ о истинитости вопросногa правила, ево и єданъ примеръ.

§ 41.

Имамо єдностепену функцію 2. реда одъ три променльива броя x, y и z,

$$v = f(x, y, z) = 2x^2 + xy - 3yz + \frac{z^4}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{z}.$$

При той є

$$f_1(x, y, z)_x = 4x + y - 2\frac{z^4}{x^3},$$

$$f_1(x, y, z)_y = x - 3z - \frac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{z},$$

$$f_1(x, y, z)_z = -3y + 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{z^2};\ \text{дакле}$$

$$f_1(x, y, z)_x \cdot x + f_1(x, y, z)_y \cdot y + f_1(x, y, z)_z \cdot z =$$

$$= 4x^2 + 2xy + 2\frac{z^4}{x^2} - 6yz - \frac{y^3}{z}$$

$$= 2\left(2x^2 + xy + \frac{z^4}{x^2} - 3yz - \frac{1}{2} \cdot \frac{y^3}{d}\right),$$

т. є. доиста $= 2v$.

Само іошъ валя приметити, да исто правило постои іошъ и у томъ случаю, ако се у комъ члану вопросне єдностепене функціє налази какавъ трансцендентный чинитель нулногъ степена. Н. п. и при функціи $v = f(x, y) = x^2 - y^2 \sin\frac{x}{y} + 2xy$, у коіой є $\frac{x}{y}$ нулнога степена, каошто ћемо одма видити.

$$f_1(x, y)_x = 2x - y \cos\frac{x}{y} + 2y,$$

$$f_1(x, y)_y = -2y \sin\frac{x}{y} + x \cos\frac{x}{y} + 2x;\ \text{дакле}$$

$$f_1(x, y)_x \cdot x + f_1(x, y)_y \cdot y = 2x^2 + 4xy - 2y^2 \sin\frac{x}{y}$$

$$= 2\left(x^2 + 2xy - y^2 \sin\frac{x}{y}\right);\ \text{доиста}$$

$$= 2v.$$

в.) Выши диференціали функція више премен҄ливы броєва.

§ 42.

Све што є речено за выше диференціале функція єдногъ премен҄ивогъ броя, постои и за функціє више премен҄ивы броєва. Ако є т. є. за $v = f(x,y)$, $dv = Mdx + Ndy$, при чему M и N, каошто смо видили у §-у **17.**, представляю опетъ неке функціє одъ x и y: онда можемо dv, т. є. $Mdx + Ndy$ опетъ диференціалити, тако да притомъ сматрамо dx и dy као сталне броєве, или єданъ одъ нъи као премен҄ивъ а онай другій сталанъ, или найпосле оба као премен҄иве броєве.

За сва слѣдуюћа сматраня выши диференціала уричемо овде єданпутъ за свагда dx и dy као **сталне** броєве.

При томъ предпоставлѣню бытћe подпуный

$${}^{2}dv = d \,.\, dv = dMdx + dNdy.$$

$$= dx \,.\, dM + dy \,.\, dN \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha$$

или
$${}^{2}dv = dx \,.\, df_1(x,y)_x + dy \,.\, df_1(x,y)_y$$

$$= dx \,.\, [f_2(x,y) \,.\, dx + f_2(x,y)_{x,y} \,.\, dy] + dy \,.\, [f_2(x,y) \,.\, dx + f_2(x,y)_y \,.\, dy]$$

$$= f_2(x,y)_x \,.\, d^2x + [f_2(x,y)_{x,y} + f_2(x,y)_{y,x}]\, dx\, dy + f_2(x,y)_y \,.\, d^2y$$

$$= {}^{2}dv_x + ({}^{2}dv_{x,y} + {}^{2}dv_{y,x}) + {}^{2}dv_y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\beta.$$

Другій диференціалъ функціє v можеао дакле добыти или непосредно по образцу α.), или помоћу почастногъ диференціаленя по образцу β.) Тако н. п. кадъ бы се тражіо другій диференціалъ функціє $v = \sin x \cos y$, имали бы, збогъ

$$dv = \cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy,$$

непосреднимъ диференціаленѣмъ

$${}^2dv = dx \cdot d\cos x \cos y - dy \cdot d\sin x \sin y$$

$$= dx \cdot (-\sin x \cos y\, dx - \cos x \sin y\, dy)$$

$$- dy \cdot (\cos x \sin y\, dx + \sin x \cos y\, dy)$$

$$= -\sin x \cos y \cdot d^2x - 2\cos x \sin y \cdot dx\, dy - \sin x \cos y \cdot d^2y);$$

помоћу почастны диференціала пакъ, збогъ

$$dv_x = \cos x \cos y\, dx,\quad dv_y = -\sin x \sin y\, dy \qquad (\S\ 39.),$$

$${}^2dv_x = -\sin x \cos y\, d^2x,\quad {}^2dv_{x,y} = -\sin y \cos x\, dx\, dy,$$

$${}^2dv_{y,x} = -\cos x \sin y\, dy\, dx,\quad {}^2dv_y = -\sin x \cos y\, d^2y,$$

дакле по обр. β.)

$${}^2dv = -\sin x \cos y \cdot d^2x - 2\cos x \sin y \cdot dx\, dy - \sin x \cos y \cdot d^2y.$$

г.) Телеровъ и маклореновъ образацъ за функціє два променльива броя.

§ 43.

Нека є $f(x,y)$ уобште нека функція два међу собомъ независна променльива броя x и y.

Поставляюћи у истой $x+h$ место x, бытће по телеровомъ образцу за функціє едногъ променльивогъ броя, ако нову функцію означимо съ $\varphi(x,y)$:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + f_1(x,y)_x \cdot h + f_2(x,y)_x \cdot \frac{h^2}{2!} + f_2(x,y)_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots;$$

Узимаюћи овде пакъ $y+k$ место y, и означуюћи нову функцію съ $\psi(x,y)$, добыямо по истомъ правилу

$$\psi(x,y)=\varphi(x,y)+\varphi_1(x,y)_y\cdot k+\varphi_2(x,y)_y\cdot\frac{k^2}{2!}+\varphi_3(x,y)_y\cdot\frac{k^3}{3!}+\cdots$$

Како є пакъ

$$\varphi_1(x,y)_y=f_1(x,y)_y+f_2(x,y)_{x,y}\cdot h+f_3(x,y)_{2x,y}\cdot\frac{h^2}{2!}+f_4(x,y)_{3x,y}\cdot\frac{h^3}{3!}$$
$$+\,\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_2(x,y)_y=f_2(x,y)_y+f_3(x,y)_{x,2y}\cdot h+f_4(x,y)_{2x,2y}\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_1(x,y)_y=f_3(x,y)_y+f_4(x,y)_{x,3y}\cdot h+f_5(x,y)_{2x,3y}\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

то є, ове вредности у $\psi(x,y)$ узимаюћи, ова функція, т. є.

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)$$
$$+[f_1(x,y)_x\cdot h+f_1(x,y)_y\cdot k]$$
$$+\frac{1}{2!}[f_2(x,y)_x\cdot h^2+2f_2(x,y)_{x,y}\cdot hk+f_2(x,y)_y\cdot k^2]$$
$$+\frac{1}{3!}[f_3(x,y)_x\cdot h^3+3f_3(x,y)_{2x,y}\cdot h^2k$$
$$+3f_3(x,y)_{x,2y}\cdot hk^2+f_3(x,y)_yk^3]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

а то є телеровъ образацъ за функціє два пременљива броя, кои пре свега служи за опредељиванћ промене такове функціє, збогъ еднодобне промене пременљивы броєва у $x+h$ и $y+k$.

§ 44.

Поставляюћи у томъ образцу $x=0$ и $y=0$, и узимаюћи после x место h а y место k, добыямо образацъ

$$f(x,y)=f(\underset{0}{x},y)+[f_1(\underset{0}{x},y)_x\cdot x+f_1(\underset{0}{x},y)_y\cdot y]$$

$$+\frac{1}{2!}[f_2(\underset{0}{x},y)_x\cdot x^2+2f_2(\underset{0}{x},y)_{x,y}\cdot xy+f_2(\underset{0}{x},y)_y\cdot y^2$$

$$+\frac{1}{3!}[f_3(\underset{0}{x},y)_x\cdot x^3+3f_3(\underset{0}{x},y)_{2x,y}\cdot x^2y+3f_3(\underset{0}{x},y)_{x,2y}\cdot$$

$$xy^2+f_3(\underset{0}{x},y)_y\cdot y^3]$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

у комъ, диференціалнимъ количницима придата 0 показуе, да є у истима узето $x=0$ и $y=0$, и кои служи за развіянѣ функціє два променљива броя по степенима исты броєва.

Ово очевидно ніє ништа друго, но маклореновъ образацъ за функціє два променљива броя.

Служећи се тимъ образцемъ за развіянѣ н. п. функціє $f(x,y)=xya^{x+y}$ у редъ имамо

$$f(\underset{0}{x},y)=0,$$

$f_1(x,y)_x=ya^{x+y}.(1+x\,la)$, зато $f_1(\underset{0}{x},y)_x=0$,

$f_1(x,y)_y=xa^{x+y}.(1+y\,la)$, " $f_1(\underset{0}{x},y)_y=0$,

$f_2(\underset{0}{x},y)_x=ya^{x+y}.\,la\,(2+x\,la)$, " $f_2(\underset{0}{x},y)_x=0$,

$f_2(\underset{0}{x},y)_y=xa^{x+y}.\,la\,(2+y\,la)$, " $f_2(\underset{0}{x},y)_y=0$,

$f_2(\underset{0}{x},y)_{x,y}=(1+x\,la)\,(1+y\,la)a^{x+y}$, " $f_2(\underset{0}{x},y)_{x,y}=1$,

$f_3(\underset{0}{x},y)_x=yl^2aa^{x+y}.(3+x\,la)$. " $f_3(\underset{0}{x},y)_x=0$,

$f_3(\underset{0}{x},y)_y=xl^2a\,.\,a^{x+y}.(3+y\,la)$, " $f_3(\underset{0}{x},y)_y=0$,

$f_3(\underset{0}{x},y)_{2x,y}=la\,.\,a^{x+y}.(2+xla)\,(1+yla)$ " $f_3(\underset{0}{x},y)_{2x,y}=2\,la$,

$f_3(\underset{0}{x},y)_{x,2y}=la\,.\,a^{x+y}.(2+y\,la)\,(1+x\,la)$, " $f_3(\underset{0}{x},y)_{x,2y}=2\,la$.

. . . .

и одтудъ видимо лако, да за сачинителѣ вопросного реда само одъ мешовиты диференціалны количника дате функціє нешто добыямо, а да чисти диференціални количници испадаю сви $= 0$. Пренебрегаваюћи дакле ове при далѣмъ послу, имамо іошъ

$$f_4(x,y)_{3x,y} = l^2 a.a^{x+y}.(3+xla)(1+yla), \text{ зато } f_4(\underset{0}{x.}y)_{3x,y} = 3l^2 a,$$

$$f_4(x,y)_{x,3y} = l^2 a.a^{x+y}.(3+yla)(1+xla), \quad \text{„} \quad f_4(\underset{0}{x.}y)_{x,3y} = 3l^2 a,$$

$$f_4(x,y)_{2x,2y} = l^2 a.a^{x+y}.(2+xla)(2+yla), \quad \text{„} \quad f_4(\underset{0}{x.}y)_{2x,2y} = 4l^2 a,$$

и т. д.

Слѣдователно траженый по горнѣмъ образцу редъ

$$xy\,a^{x+y} = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{3}lax^2y + \tfrac{1}{3}laxy^2 + \tfrac{1}{8}l^2ax^3y + \tfrac{1}{6}l^2ax^2y^2 + \tfrac{1}{8}l^2axy^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ову функцію xya^{x+y} можемо писати и овако: $xya^x a^y$. Нѣнъ редъ дакле добыли бы просто, т. є. безъ употреблѣня маклореновогъ образца, ако бы за a^x и a^y узели ньнове редове, и те међу собомъ, а ньновъ производъ после съ xy помложили. Тай посао оставлямо прилѣжномъ почетнику.

§ 45.

Ако узмемо у функціи $f(x, y)$ § 43. найпре $y+k$ место y, а у новой функціи после $x+h$ место x, добыямо на истый начинъ као тамо,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + [f_1(x, y)_y k + f_1(x, y)_x h]$$
$$+ \frac{1}{2!}[f_2(x,y)_y k^2 + 2f_2(x,y)_{y,x}.kh + f_2(x,y)_x.h^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Уєдначаваюћи пакъ овай изразъ $f(x+h, y+k)$ съ онимъ у поменутомъ §, слѣдує по правилу сачинителя

$$f_2(x,y)_{x,y} = f_2(x,y)_{y,x},\ f_3(x,y)_{2x,y} = f_3(x,y)_{y,2x},$$

и т. д., уобште

$$f_{\alpha+\beta}(x, y)_{\alpha x, \beta y} = f_{\alpha+\beta}(x, y)_{\beta y, \alpha x},$$

изъ чега видимо, да є сасвимъ сведно, хоħемо ли неку функцію два променльива броя x и y найпре α пута по x па онда β пута по y диференціалити, или пакъ найпре β пута по y а после α пута по x. Ево у томъ обзиру и єданъ примеръ.

По §. 42. є за $f(x, y) = sin\, x \,cos\, y$;

$$f_2(x, y)_{2x} = -sin\, x \,cos\, y.$$

Диференціалеħи ово наново по y, добыямо

$$f_3(x, y)_{2x, y} = sin\, x \,sin\, y.$$

По § 39. пакъ имамо

$f_1(x, y)_y = -sin\, x \,sin\, y$; дакле ако ово застопце

двапутъ диференціалимо по x,

$f_3(x, y)_{y, 2x} = sin\, x \,sin\, y$, и тако доиста оно што пре.

§ 46.

По § 35. бр. 2.), стои за $v = f(x, y)$

$$dv = f_1(x, y)_x . dx + f_1(x, y)_y . dy$$
$$= M\, dx + N\, dy$$

Диференціалеħи M по y, N пакъ по x, добыямо

$$\frac{d\, M_y}{dy} = f_2(x, y)_{x, y};\text{ а } \frac{d\, N_x}{dx} = f_2(x, y)_{y, x}.$$

Но по преħашнѣмъ є §у $f_2(x, y)_{x, y} = f_2(x, y)_{y, x}$; мора дакле быти при функціама два променльива броя x и y,

$$\frac{d\, M_y}{dy} = \frac{d\, N_x}{dx}.$$

Ово докученѣ служи за увераванѣ о точности изнађеногъ целогъ диференціала какве функціє два променљива броя x и y, или као то датогъ каквогъ израза, састои се пакъ у томъ, да сачинителя одъ dx диференціалимо по y, а сачинителя одъ dy по x, па онда видимо да ли су диференціални количници одтудъ еднаки, каошто по томъ докученю мораю быти, ако є добывеный или датый диференціалъ добаръ.

Тако н. п.

1.) нашли смо у § 39. као целый диференціалъ функціє $v = y^x$

$$dv = y^x ly \,.\, dx + xy^{x-1} .\, dy.$$

При тому є $M = y^x ly$, а $N = xy^{x-1}$.

Диференціалећи M по y, добыямо количникъ

$$\frac{dM_y}{dy} = ly \cdot xy^{x-1} + \frac{y^x}{y} = y^{x-1} .\, (x\,ly + 1).$$

Узимаюћи пакъ диференціалъ одъ N по x, слѣдуе количникъ

$$\frac{dN_x}{dx} = y^{x-1} + yx^{x-1} .\, ly = y^{x-1} .\, (1 + xly).$$

Овай є колитникъ очевидно онакавъ истый као прећашньй, и по тому, на основу горнѣга докученя, у поменутомъ §-у нађеный диференціалъ вопросне функціє исправанъ. — Или

2.) Дать є изразъ $a^x ly \,.\, dx + yl \sin x \,.\, dy$ као целый диференціалъ неке функціє v два променљива броя x и y, па се пыта да ли є тай диференціалъ исправанъ.

При тому имамо $M = a^x ly$, а $N = yl \sin x$.

Диференціалећи M по y, а N по x, добыямо количнике

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{a^x}{ly} \quad \text{и} \quad \frac{dN_x}{dx} = y \cot x,$$

два различна броя, збогъ чега по горнѣмъ докученю датый изразъ неможе быти целый диференціалъ никакове функціє два променльива броя x и y.

§ 47.

У предходећемъ §-у нађено условіє за точность целога диференціала функціє два променльива броя, може се лако разпрострети и на функціє више променльивы броєва. Показат'ћемо то само іошъ за функціє три променльива броя.

Нека є $v=f(x,y,z)$ уобште такова нека функція.

По § 37. имамо за такову функцію

$$dv = M.dx + N.dy + O.dz,$$

при чему є

$$M=f_1(x,y,z)_x,\ N=f_1(x,y,z)_y,\ O=f_1(x,y,z)_z.$$

Диференціалећи M єданпутъ по y другипудъ по z, N єданпутъ по x другипутъ по z, O єданпутъ по x другипутъ по y, — добыямо количнике

$$\frac{dM_y}{dy} = f_2(x,y,z)_{x,y} \text{ и } \frac{dM_z}{dz} = f_2(x,y,z)_{x,z},$$

$$\frac{dN_x}{dx} = f_2(x,y,z)_{y,x} \text{ и } \frac{dN_z}{dz} = f_2(x,y,z)_{y,z},$$

$$\frac{dO_x}{dx} = f_2(x,y,z)_{y,x} \text{ и } \frac{dO_y}{dy} = f_2(x,y,z)_{y,z}.$$

Но по § 45. є

$$f_2(x,y,z)_{x,y}=f_2(x,y,z)_{y,x},\ f_2(x,y,z)_{x,z}=f_2(x,y,z)_{z,x},$$
$$f_2(x,y,z)_{y,z}=f_2(x,y,z)_{z,y}.$$

Слѣдователно мора быти при свакой функціи три променльива броя x, y и z,

$$\frac{dM_y}{dy}=\frac{dN_x}{dx},\ \frac{dM_z}{dz}=\frac{dO_x}{dx},\ \frac{dN_z}{dz}=\frac{dO_y}{dy}.$$

д.) Диференціаленѣ скривены функція.

§ 48.

Све што смо дояко показали, тицало се само одкривены функція; сада пакъ да видимо іошъ и како се диференціале функціе скривене, т. є. функціе вида

$$f(x, y, z, \ldots) = 0.$$

Пре свега сматраймо такове функціе одъ само два премен.ъива броя, представляюћи ій са $f(x,y)=0$, предпоставляюћи пакъ, да є притомъ x независно, а y зависно променљивый брой, дакле да є y нека функція одъ x.

Нека є промена одъ y збогъ промене одъ x у $x+h$, $y+k$; бытће збогъ тога што $f(x,y)=0$ постои при свакой вредности одъ x, такођеръ и $f(x+h, y+k)=0$, па ако одъ ове єдначине прву одузмемо, и $f(x+h, y+k) - f(x,y)=0$, т. є. $\Delta f(x,y)=0$; дакле найпосле ако узмемо $h=dx$ а $k=dy$, и

$$d\,f(x,y)=0,$$

то ће рећи: **диференціалъ сваке скривене функціе два премен.ъива броя раванъ є нулли.**

Но по § є 37.

$$df(x,y)=f_1(x,y)_x.\,dx+f_1(x,y)_y.\,dy,$$

при чему є y сматрано као независно одъ x. Зато ако ову вредность узмемо у пређашньій изразъ, стои

$$\left.\begin{array}{l} df(x,y)=f_1(x,y)_x.\,dx+f_1(x,y)_y.\,dy=0 \\ \text{и одтудъ} \\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_1(x,y)_x}{f_1(x,y)_y} \end{array}\right\} \;\ldots\;(I.$$

Изъ тога пакъ видимо, да **ћемо првый диференціалный количникъ у изразу** $f(x,y)=0$ **скривене функціе** y **одъ** x **добыти, ако** $f(x,y)$ **тако диференціалимо,** као да y независи одъ x, па онда тай диференціалъ метнемо $= 0$, и одтудъ определимо $\frac{dy}{dx}$.

Имамо н. п. скривену функцію y у

$$f(x, y) = x^2 - 3\,x\,ly + y^2 \sin x + a = 0.$$

Диференціалећи ово као да y независи одъ x, налазимо

$$(2\,x - 3\,ly + y^2 \cos x)\,dx - (3\,\frac{x}{y} - 2\,y \sin x)\,dy = 0,$$

одкуда слѣдує

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x - 3\,ly + y^2 \cos x}{3\,\frac{x}{y} - 2\,y \sin x} = \frac{2xy - 3y\,ly + y^3 \cos x}{3\,x - 2\,y^2 \sin x}.$$

§ 49.

Диференціалећи $d\,f(x, y) = 0$ наново, слѣдує изъ прве єдначине подъ 1.) у пређашнѣмъ §у, на истимъ основима и съ приметбомъ, да є притомъ dx сталанъ брой, dy пакъ збогъ $y = \varphi\,(x)$ променљивъ:

$$\begin{aligned}{}^{2}d\,f(x, y) &= dx\,.\,[f_2(x, y)_{x}\,dx + f_2(x, y)_{x,y}\,.\,dy]\\ &\quad + dy\,.\,[f_2(x, y)_{y,x}\,.\,dx + f_2(x, y)_{y}\,.\,dy]\\ &\quad + f_1(x, y)_{y}\,.\,{}^{2}dy\\ &= f_2(x, y)_{x}\,.\,d^2x + 2\,f_2(x, y)_{x,y}\,dx\,dy + f_2(x, y)_{y}\,.\,d^2y\\ &\quad + f_1(x, y)_{y}\,.\,{}^{2}dy = 0,\end{aligned}$$

и одтудъ

$$\frac{{}^{2}dy}{d^2x} = -\,\frac{f_2(x, y)_{x} + 2\,f_2(x, y)_{x,y}\,.\,\frac{dy}{dx} + f_2(x, y)_{y}\,.\,\frac{d^2y}{d^2x}}{f_1(x, y)_{y}}.$$

Подобнимъ начиномъ можемо садъ лако изнаћи и друге выше диференціале и диференціалне количнике скривене функціє.

У примеру пређашнѣгъ §а имали смо

$$f_1(x,y)_x = 2x - 3ly + y^2 \cos x,\ f_1(x,y)_y = -3\frac{x}{y} + 2y \sin x.$$

Образуюћи за тай примеръ све што треба у име другогъ диференціалногъ количника скривене функціє y, имамо

$$f_2(x,y)_x = 2 - y^2 \sin x,$$

$$f_2(x,y)_{x,y} = -\frac{3}{y} + 2y \cos x,$$

$$f_2(x,y)_y = 3\frac{x}{y^2} + 2 \sin x;$$

дакле обзиромъ нато, да є притомъ по пређашнѣмъ §у

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 3y\,ly + y^2 \cos x}{3x - 2y^2 \sin x},$$

$$\frac{{}^2dy}{d^2y} = -\Big[(2 - y^2 \sin x) - 2\big(\frac{3}{y} - 2\cos x\big)\cdot\frac{2xy - 3y\,ly + y^2 \cos x}{3x - 2y^2 \sin x} +$$

$$+ \big(3\frac{x}{y^2} + 2 \sin x\big)\cdot\frac{(2xy - 3y\,ly + y^2 \cos x)^2}{(3x - 2y^2 \sin x)^2}\Big] : \big(-3\frac{x}{y} + 2y \sin x\big)$$

$$= [(2 - y^2 \sin x)y^2 (3x - 2y^2 \sin x)^2 - 2(3 - 2y \cos x)y \times$$

$$\times (2xy - 3yly + y^2 \cos x)(3x - 2y^2 \sin x) + (3x + 2y^2 \sin x)$$

$$\times (2xy - 3y\,ly + y^2 \cos x)^2] : y^2 (3x - 2y^2 \sin x)^3.$$

§ 50.

Ако имамо єдначину $f(x, y, z) = 0$, онда одъ та три променльива броя x, y и z, могу быти найвише два независно променльиви, а трећій нека функція оба нѣи. Нека су независно променльиви броєви x и y. Трећій променльивый брой z тадъ, као нѣиова функція, може се менятн 1. ако се єданъ само одъ она два меня, а другій є притомъ сталанъ, или 2. ако се у истый махъ обадва меняю.

Ако се меня само x, имамо

$$f_1(x, y, z)_x \cdot dx + f_1(x, y, z)_z \cdot dz_x = 0\,;$$

ако се пакъ меня само y, бытће

$$f_1(x, y, z)_y \cdot dy + f_1(x, y, z)_z \cdot dz_y = 0.$$

Сабираюћи ова два почастна диференціала, имамо дакле при предпоставлѣной єдначини целый диференціалъ.

$$d\,f(x, y, z) = f_1(x, y, z)_x \cdot dx + f_1(x, y, z)_y \cdot dy$$

$$+ f_1(x, y, z)_z \cdot (dz_x + dz_y) = 0\,, \qquad \text{или}$$

зато што $dz_x + dz_y$ очевидно ніє ништа друго, но целый диференціалъ броя z као функціє одъ x и y, т. є. $= dz$:

$$d\,f(x, y, z) = f_1(x, y, z)_x \cdot dx + f_1(x, y, z)_y \cdot dy + f_1(x, y, z)_z \cdot dz = 0.$$

Да се и како се сва доякошня докученя могу лако разпрострети уобште на єдначине одъ произволно колико променлѣивы броєва, одъ кои є єданъ нека функція свію осталы, а ови међу собомъ независни, — као и коимъ бы се начиномъ добыли выши диференціали не само предпостоєће функціє, но и сваке друге подобне: безъ сумнѣ непотребує сада никакова више обяснѣня; али намъ за позднію потребу (при интегралномъ рачуну) остає іошъ слѣдуюће приметити.

§ 51.

Ако се у датой скривеной функціи налази какавъ сталанъ брой, онда се тай при диференціаленю наравно губи, и диференціална єдначина одговара као такова свима онима **особитимъ** єдначинама одъ прве, даваюћи ономъ сталномъ брою произволне вредности.

Но место тогъ сталногъ броя може се такођеръ и свакій другій, у датой єдначини као чинитель или именитель стоєћій сталный брой, изъ диференціалне єдначине лако уклонити тиме, да га у првой одъ други одлучимо, и после нову єдначину диференціалимо.

Тако н. п. ако имамо скривену функцію $x^2 - ay^2 + b = 0$, па место b хоћемо или треба да уклонимо изъ диференціалне єдначине те функціє сталный брой a, делитћемо найпре исту функцію са y^2, чимъ добыямо

$$\frac{x^2}{y^2} - a + \frac{b}{y^2} = 0,$$

а дудъ диференціалећи

$$\frac{2x}{y^2}\,dx - \frac{2(x^2+b)}{y^3}\,dy = 0, \quad \text{или}$$

$$2xy\,dx - 2(x^2+b)\,dy = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+b},$$

диференціалну єдначину **безъ** a.

До ове исте єдначине можемо доћи іошъ и на тай начинъ, да дату функцію, као што є, диференціалимо, изъ добывене диференціалне єдначине a определимо, и после ту нѣгову вредность заменемо у датой єдначини. Тимъ путемъ имали бы

$$2x\,dx - 2ay\,dy = 0, \quad \text{одтудъ}$$

$$a = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy},$$

а съ томъ вредности изъ прве (дате) єдначине

$$x^2 - xy \cdot \frac{dx}{dy} + b = 0, \quad \text{т. є.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+b} \quad \text{као пре.}$$

§ 52.

На овай истый начинъ можемо не само єданъ, но коликогодъ хоћемо или треба сталны броєва изъ дате скривене функціє уклонити, па найпосле и све, у име чега треба само да диференціаленѣ онолико пута поновимо, колико онаки броєва истребити желимо или морамо.

Диференціалећи єдначину $xy\,dx - (x^2 + b)\,dy = 0$ за истребльиванѣ и другогъ сталногъ броя b, слѣдує

$$y\,d^2x + x\,dx\,dy - 2\,x\,dx\,dy - (x^2 + b)\,.\,{}^2dy = 0\,, \quad \text{т. є.}$$

$$y\,d^2x - x\,dx\,dy - x^2\,.\,{}^2dy - b\,.\,{}^2dy = 0\,;$$

и одтудъ

$$b = \frac{y\,d^2x - x\,dx\,dy - x^2\,.\,{}^2dy}{{}^2dy}\,;$$

съ томъ пакъ вредности изъ горнѣ єдначине

$$xy\,dx - \frac{x^2\,.\,{}^2dy + y\,.\,d^2x - x\,dx\,dy - x^2\,.\,{}^2dy}{{}^2dy}\,dy = 0, \quad \text{т. є.}$$

$$xy\,dx\,.\,{}^2dy - y\,d^2x\,.\,dy + x\,dx\,.\,d^2y = 0\,, \quad \text{или}$$

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{dy}{x\,dx} - \frac{d^2y}{y\,d^2x}\,.$$

В. Употреблѣнѣ диференціалнога рачуна у анализи.

а.) Определьиванѣ правы вредностій функція, появлююћи се подъ видовима $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\,.\,\infty$ и $\infty - \infty$.

§ 53.

Догађа се много пута, да деловна нека функція за известну какву вредность променльивога броя, прима видъ $\frac{0}{0}$, премда є при истой вредности тога броя и сама известне, определити се могуће вредности. Тако н. п.

бывa функція $v = \frac{a(x^2 - a^2)}{\sqrt{x-a}}$ за $x = a$ очевидно вида $v = \frac{0}{0}$, у ствари є пакъ за то x известно $= 0$, о чему се лако уверавамо, ако броителѣвогъ чинителя доведемо подъ кореный знакъ и скратимо, а после у изразу $v = a \times (x + a)\sqrt{x-a}$ поставимо $x = a$.

Да є ова функція v при непосредной замени одъ x съ a постала вида $\frac{0}{0}$, причиніо є, као што є лако было приметити, заєднички чинитель броителя и именителя $\sqrt{x-a}$, и то ће се за $x = a$ догодити уобште при свакой оной деловной функціи, коє броитель и именитель имаю заєдничкога чинителя $(x - a)$ у некомъ целомъ или деловномъ степену.

Нека є $v \frac{X_1(x - a)^m}{X_2(x - a)^n}$ такова функція, притомъ пакъ X_1 и X_2 неке, чинителя $(x - a)$ више несадржеће функціє одъ x. Та функція постає очевидно при непосредной замени одъ x съ a вида $\frac{0}{0}$; ако пакъ найпре оногъ чинителя $(x - a)$, кои то причинява, уклонимо, нѣна права вредность може быти уобште или 0, или $\frac{X_1}{X_2}$, или ∞, почемъ буде односно $m \gtreqless n$. Но тога чинителя одкрити и уклонити ніє свагда тако лако као у показаномъ примеру и другимъ подобнима; зато показатћемо у слѣдуюћимъ §§-ма, како се праве вредности функція, скривене у символу $\frac{0}{0}$, лако могу одкрити помоћу диференціалнога рачуна.

§ 54.

У име тога нека є уобште $v = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ такова деловна функція, коя за неку известну вредность $x = a$ постає вида $\frac{0}{0}$.

Узимаюћи у той функціи $x+v$ место x, добыямо по телеровомъ образцу за функціє єдногъ променљивогъ броя,

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)}=\frac{f(x)+f_1(x)\,v+f_2(x)\cdot\frac{v^2}{2!}+\cdot\cdot\cdot}{\varphi(x)+\varphi_1(x)\,v+\varphi_2(x)\cdot\frac{v^2}{2!}+\cdot\cdot\cdot}\;.\;.\;.\;.\;.\;(\alpha.$$

Узимаюћи овде пакъ за x ону вредность a, бываю $f(x)$ и $\varphi(x)$ свака $=0$, и десна часть може се збогъ тога скратити съ v, тако да ако све то урадимо, слѣдує

$$\frac{f(\underset{a}{x}+v)}{\varphi(\underset{a}{x}+v)}=\frac{\underset{1}{f}(\underset{a}{x})+\underset{2}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v}{2!}+\underset{3}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{3!}+\cdot\cdot\cdot\cdot}{\underset{1}{\varphi}(\underset{a}{x})+\underset{2}{\varphi}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v}{2!}+\underset{3}{\varphi}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{3!}+\cdot\cdot\cdot},$$

при чему брой a свуда показує, да є у дотичнимъ функціяма место x узето a.

Найпосле стављаюћи у овомъ последнѣмъ изразу $v=0$, остає тражена вредность дате функціє за $x=a$,

$$\frac{f(\underset{a}{x})}{\varphi(\underset{a}{x})}=\frac{0}{0}=\frac{\underset{1}{f}(\underset{a}{x})}{\underset{1}{\varphi}(\underset{a}{x})}\;,$$ а то ће рећи:

права вредность деловне функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, коя за $x=a$ постає вида $\frac{0}{0}$, равна є количнику одъ еиференціалногъ количника бротеля, чрезъ диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у тима диференціалнимъ количницима $x=a$.

Ради болѣгъ разумеваня, а уєдно и за упражненѣ, узмимо одма кои примеръ.

§ 55.

1.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a\,(x^2-a^2)}{\sqrt{x-a}},$$

коя, каошто смо видили у § 53., за $x=a$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є функціи диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = 2ax\,,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}}\,;$$

дакле количникъ одъ та два количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{2ax}{\frac{1}{2\sqrt{x-a}}} = 4ax\sqrt{x-a},$$

и зато за $x = a$ тражена вредность дате функціє

$$\frac{f(\underset{a}{x})}{\varphi(\underset{a}{x})} = \frac{0}{0} = 4a^2 . 0 = 0\,,$$

каошто смо већъ дознали у поменутомъ §-у на другій начинъ.

2.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^3 + (la - 2)x^2 - (2la + 1)x + 2}{x^2 - 2(1 - la)x - 4la},$$

коя, каошто лако можемо видити, за $x = 2$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x) = 3x^2 + 2(la - 2)x - 2la - 1\,,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x) = 2x - 2(1 - la)\,;$$

дакле количникъ тій диференціалны количника'

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{3x^2 + 2(la - 2)x - 2la - 1}{2x - 2(1 - la)}\,;$$

одтудъ пакъ тражена вредность дате функціє за $x = 2$:

$$\frac{\underset{2}{f(x)}}{\underset{2}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0} = \frac{3 \,.\, 4 + 2\,(la - 2)\;2 - 2la - 1}{2 \,.\, 2 - 2\,(1 - la)}$$

$$= \frac{3 + 2la}{2 + la}.$$

3.) Имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a^x \,.\, cos\, x}{l\, sin\, x \,.\, (1 - sin\, x)},$$

коя за $x = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, быва $\frac{0}{0}$.

Диференціалный количникъ нѣнога бронтеля є

$$f_1(x) = a^x(la \,.\, cos\, x - sin\, x),$$

диференціалный количникъ именителя пакъ

$$\varphi_1(x) = (1 - sin\, x) \,.\, cot\, x - l\, sin\, x \,.\, cos\, x;$$

дакле количникъ одъ та два количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{a^x(la \,.\, cos\, x - sin\, x)}{(1 - sin\, x)\, cot\, x - l\, sin\, x \,.\, cos\, x}.$$

и зато тражена вредность дате функціє за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\underset{\frac{\pi}{2}}{f(x)}}{\underset{\frac{\pi}{2}}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0} = \frac{a^{\frac{\pi}{2}} . \,(la \,.\, cos\, \frac{\pi}{2} - sin\, \frac{\pi}{2})}{(1 - sin\, \frac{\pi}{2})\, cot\, \frac{\pi}{2} - l\, sin\, \frac{\pi}{2} \,.\, cos\, \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-\, a^{\frac{\pi}{2}}}{-\, 0} = \infty.$$

§ 56.

Ако бы се догодило, да се у изразу α.) § 54. са $x = a$ потиру не само $f(x)$ и $\varphi(x)$, но тій функція диференціални количници $f_1(x)$ и $\varphi_1(x)$, тако да остає

$$\frac{f(\underset{a}{x}+v)}{\varphi(\underset{a}{x}+v)} = \frac{\underset{2}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{2!}+\underset{3}{f}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^3}{3!}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}{\underset{2}{\varphi}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^2}{2!}+\underset{3}{\varphi}(\underset{a}{x})\cdot\frac{v^3}{3!}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot},$$

онда, ако найпре скратимо съ $\frac{v^2}{2!}$ и после поставимо $v=0$, слѣдує тражена вредность дате функціє за $x=a$:

$$\frac{f(\underset{a}{x})}{\varphi(\underset{a}{x})} = \frac{0}{0} = \frac{\underset{2}{f}(\underset{a}{x})}{\underset{2}{\varphi}(\underset{a}{x})},$$ то ће рећи:

у томъ є случаю права вредность те функціє равна количнику одъ другогъ диференціалногъ количника бронтеля, чрезъ другій диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у свакомъ за x брой a.

Н. п. имамо функцію

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a^x(1-sin\,x)}{la\,(cot\,x-2\,cos\,x+\frac{1}{2}\,sin\,2x)},$$

коя, каошто лако можемо видити за $x=\frac{\pi}{0}$ постає $\frac{0}{0}$.

При той є диференціалный количникъ броителя

$$f_1(x)=a^x la\,.\,(1-sin\,x)-a^x cos\,x,$$

а диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_1(x)=la\,(-cosec^2x+2sin\,x+cos\,2x);$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{a^x la\,(1-sin\,x)-a^x cos\,x}{la\,(-cosec^2x+2sin\,x+cos\,2x)},$$

кои за $x=\frac{\pi}{2}$ постає очевидно такођеръ $\frac{0}{0}$.

Другій є диференціалный количникъ броителя

$$f_2(x) = a^x la\,[la\,(1\ sin\,x) - cos\,x + sin\,x],$$

другій диференціалный количникъ именителя

$$\varphi_2(x) = la\,[-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2\,x];$$

дакле количникъ тій количника'

$$\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{a^x la\,[la\,(1 - sin\,x) - cos\,x + sin\,x]}{la(-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2x)}$$

$$= \frac{a^x\,[la\,(1 - sin\,x) - cos\,x + sin\,x]}{-2\,cosec\,x\,.\,cot\,x + 2\,cos\,x - 2\,sin\,2\,x},$$

и зато тражена вредность дате функціє за $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f(x)_{\frac{\pi}{2}}}{\varphi(x)_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{0}{0} = \frac{a^{\frac{\pi}{2}}}{-0} = -\infty.$$

§ 57.

Предпоставляюћи далѣ да за $x = a$ изчезавају при деловной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ редомъ іошъ и други, треһи и т. д. диференціални количници броителя и именителя, — и испытуюћи на истый начинъ као до сада, шта збогъ тога быва съ функціомъ $\frac{f(x)_a}{\varphi(x)_a} = \frac{0}{0}$? долазимо найпосле до тогъ обштегъ докученя: да є **права вредность функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ у случаю, ако $n - 1$ прві количника броителя и именителя за $x = a$ изчезавају, равна количнику одъ n. диференціалногъ количника броителя, чрезъ n. диференціалный количникъ именителя, узимаюћи у истима $x = a$**; т. є. да є

$$\frac{f(x)_a}{\varphi(x)_a} = \frac{0}{0} = \frac{f_n(x)_a}{\varphi_n(x)_a}.$$

§ 58.

Предходећій начинъ одкриваня правы вредностій деловны функція, появлююћи се подъ видомъ $\frac{0}{0}$, основанъ є на употреблѣню телеровога образца. Собомъ дакле слѣдує, да се тай начинъ у свима онима случаима неће моћи употребити, у коима насъ и самъ тай образацъ издає.

Ово ће се догодити при свакой оной деловной функціи $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, гди се или самъ броитель, или самъ именитель, или обадва при оной вредности одъ x, коя причинява, да вопросна фрнкція постає $\frac{0}{0}$, неда развити у редъ **целы положны** степена вишка v.

У таковомъ случаю дакле неостає ништа друго, но служити се за определьиванѣ вопросне вредности, познатимъ изъ § 29. простимъ начиномъ. Т. є. валя у броителю и именителю дотичне деловне функціє узети $x+v$ место x, све рачуне посвршивати, и нову деловну функцію после по могућству скратити, найпосле пакъ іошъ v съ нулломъ заменути.

Тако н. п. ако є вопросна деловна функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[5]{1-x^2}}$, бытће за $x=1$, иста функція $=\frac{0}{0}$, и та ће се нѣна вредность така показати, ма колико пута броителя и именителя диференціалили. Зато, да бы ю одкрили, ставлямо

$$\frac{f(x+v)}{\varphi(x+v)} = \frac{(x+v)\sqrt[3]{1-x-v}}{\sqrt[5]{1-x^2-2xv-v^2}}.$$

То быва за $x=1$,

$$\frac{f(x_1+v)}{\varphi(x_1+v)} = \frac{(1+v)\sqrt[3]{-v}}{\sqrt[5]{-2v-v^2}} = \frac{(1+v).v^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{1}{5}}.(2-v)^{\frac{1}{5}}} = \frac{(1+v)\,v^{\frac{2}{15}}}{(2-v)^{\frac{1}{5}}}.$$

Одтудъ пакъ, ако узмемо $v=0$, слѣдуе тражена вредньость дате функціе за $x=1$:

$$\frac{f(\underset{1}{x})}{\varphi(\underset{1}{x})}=\frac{0}{0}=\frac{0}{2^{\frac{1}{3}}}=0.$$

§ 59.

Догађа се далѣ такођеръ, да нека деловна функція $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ за неку известну вредность броя x прима видъ $\frac{\infty}{\infty}$.

Такову функцію можемо писати, безъ повреде нѣне вредности, овако: $\frac{1}{\varphi(x)}:\frac{1}{f(x)}$. Но тако представлѣна постае за ону вредность одъ x, $\frac{0}{0}$, и може се дакле лако одкрити на еданъ одъ дояко показана два начина.

Вредность дакле деловне функціе $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, за $x=a$ скривену у символу $\frac{\infty}{\infty}$, наћиђемо, ако диференціалный количникъ изврнутога именителя разделимо съ диференціалнимъ количникомъ изврнутога броителя, узевши у свакомъ одъ тіи количника $x=a$.

Тако н. п. ако е вопросна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1+tg\,x}{sec\,x},$$

коя за $x=\frac{\pi}{2}$, збогъ $tg\,\frac{\pi}{2}=sec\,\frac{\pi}{2}=\infty$, постае $\frac{\infty}{\infty}$: имамо диференціалный количникъ изврнутога именитиля

$$\frac{d\,\frac{1}{sec\,x}}{dx}=\frac{d\;cos\;x}{dx}=-sin\,x,$$

а диференціалный количникъ изврнутога броителя

$$\frac{d\frac{1}{1+tgx}}{dx} = \frac{-d(1+tg\,x)}{(1+tg\,x)^2.\,dx} = \frac{-\frac{1}{cos^2x}}{(1+tgx)^2} = -\frac{1}{cos^2x\,(1+tg\,x)^2}$$

$$= -\frac{1}{cos^2x + 2\,sin\,x\,cos\,x + sin^2x} = -\frac{1}{(cos\,x + sin\,x)^2};$$

дакле количникъ тій количника

$$\frac{-\,sin\,x}{-\frac{1}{(cos\,x + sin\,x)^2}} = sin\,x\,(cos\,x + sin\,x)^2,$$

и зато тражена вредность горнѣ функціє за $x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{f(x)_{\frac{\pi}{2}}}{\varphi(x)_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\infty}{\infty} = 1\,.\,(0+1)^2 = 1.$$

§ 60.

Коипутъ наилаєимо на производе одъ две функціє, кои за известну вредность променлъивога броя примаю неопредѣлѣный видъ $(0\,.\,\infty)$. Тако н. п. постає функція $f(x) = lx\,.\,cot\,.\,(x-1)$ за $x=1$ вида $0\,.\,\infty$.

У таковомъ случаю, да бы у символу $0\,.\,\infty$ скривену вредность вопросне функціє одкрили, изражавамо ову као количникъ одъ оногъ нѣногъ чинителя, кои за дотичну вредность променлъивога броя постає $=0$, раздѣлѣнъ съ разломкомъ 1 чрезъ оногъ другогъ чинителя, кои за исту вредность променлъивога броя бывa $=\infty$; єръ на тай начинъ постає после вопросна функція при той вредности променлъивога броя вида $\frac{0}{0}$, кои є сасвимъ у нашой власти. Съ другимъ речма накратко: **у томъ случаю налазимо праву вредность символа $0\,.\,\infty$, ако диференціалный количникъ чинителя коя постає 0, разделимо съ диференціалнимъ количникомъ извpнутогъ оногъ другогъ чинителя, кои быва ∞, узевши у свакомъ одъ тій количника ону вредность променлъивога броя, коя то причинява.**

Поступаюћи тако съ горе споменутомъ функціомъ, налазимо

$$\frac{d.lx}{dx}=\frac{1}{x},\quad \frac{d\,\frac{1}{cot\,(x-1)}}{dx}=\frac{d\,tg\,(x-1)}{dx}=\frac{1}{cos^2\,(x-1)};$$

дакле количникъ та два количника

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{cos^2\,(x-1)}}=\frac{cos^2\,(x-1)}{x},$$

и зато тражена вредность вопросне функціє за $x=1$, скривена у символу $0\,.\,\infty=\frac{cos^2(1-1)}{1}=\frac{cos^2\,0}{1}=\frac{1}{1}=1.$

§ 61.

Найпосле догодитће се, да добыємо разлику две функціє истогъ пременљивогъ броя, коя за неку вредность тога броя постає неопределћнога вида $\infty-\infty$.

Да бы у томъ символу скривену вредность функціє $v=f(x)-\varphi(x)$ докучили, ставлямо ако є $\frac{1}{f(x)}=f'(x)$ а $\frac{1}{\varphi(x)}=\varphi'(x)$,

$$v=\frac{1}{f'(x)}-\frac{1}{\varphi'(x)},$$

у комъ виду иста функція при оной вредности пременљивога броя, збогъ $f'(x)=\frac{1}{\infty}=0$ и $\varphi'(x)=\frac{1}{\infty}=0$, постає већъ разрешенога вида $\frac{0}{0}$.

Тако н. п. ако имамо определити вредность разлике $\mathit{cot}\,(x-1) - \frac{1}{lx}$ за $x=1$, при комъ є x очевидно $\infty - \infty$, — быт'ће збогъ $\frac{1}{\mathit{cot}\,(x-1)} = \mathit{tang}\,(x-1)$ и $1 : \frac{1}{lx} = lx$;

$$\mathit{cot}\,(x-1) - \frac{1}{lx} = \frac{1}{\mathit{tang}(x-1)} - \frac{1}{lx} = \frac{lx - tg\,(x-1)}{lx\,.\,tg\,(x-1)},$$

у комъ є садъ виду иста разлика за $x=1$, очевидно $= \frac{0}{0}$.

Быт'ће дакле зато, што є диференціалный количникъ броителя $\frac{\cos^2(x-1)-x}{x\cos^2(x-1)}$, а диференціалный количникъ именителя $\frac{tg\,(x-1)+x\,lx)}{x\cos^2(x-1)}$: количникъ тіи количника $\frac{\cos^2(x-1)-x}{tg\,(x-1)+x\,lx}$; дакле за $x=1$ вредность вопросне разлике

$$\frac{\cos^2(1-1)-1}{tg\,(1-1)+1\,.\,l1} = \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0},$$

опетъ неопредѣлѣнога вида, тако да збогъ тога морамо узети друге диференціалне количнике броителя и именителя разломка $\frac{lx - tg\,(x-1)}{lx\,.\,tg\,(x-1)}$; или, што є у ствари свеєдно, али по послу простіє, да поступамо съ $\frac{\cos^2(x-1)-x}{tg\,(x-1)+x\,lx}$ као съ функціомъ, коя за известно $x=1$ быва $\frac{0}{0}$.

Имамо дакле далѣ диференціалный количникъ броителя тога разломка $-2\cos(x-1)\sin(x-1)-1$, а диференціалный количникъ именителя

$$\frac{1}{\cos^2(x-1)} + lx + 1 = \frac{1+(lx+1)\cos^2(x-1)}{\cos^2(x-1)};$$

зато количникъ та два количника

$$-\frac{2\cos^3(x-1)\sin(x-1)-\cos^2 x}{1+(lx+1)\cos^2(x-1)};$$

а зато опетъ тражена вредность горнѣ разлике за $x = 1$:

$$\frac{-2\, cos^3 0 \,.\, sin\, 0 - cos^2 0}{1 + (l1 + 1)\, cos^2 0} = \frac{-1}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

б.) Определьиванѣ *максима’* и *минима’* функція.

1.) Максима и минима функція єдногъ пременльивогъ броя.

§ 62.

Ако є функція $f(x)$ за неку известну вредность пременльивога броя x у истый махъ већа одъ $f(x-h)$ и $f(x+h)$, или є у истый махъ маня одъ тій свои оближньи вредностій, и h є притомъ некій врло малый, одъ нулле єдва разликуюћи се брой, — онда каже се: $f(x)$ є за ону вредность одъ x у првомъ случаю **максимумъ** (већина), а у другомъ **минимумъ** (маньина), и то ће рећи, да иста функція за оно x постизава у првомъ случаю єдну одъ найвећи, а у другомъ єдну одъ найманьи свои вредностій, кое уобште може имати. Тако н. п. быва функція $f(x) = x\,(a-x)$ за $x = \frac{a}{2}$ **максимумъ** єръ є съ тимъ x сама $= \frac{a^2}{4}$, а нѣне две оближнѣ вредности

$$\left(\frac{a}{2} - h\right)\left[a - \left(\frac{a}{2} - h\right)\right] = \left(\frac{a}{2} + h\right)\left[a - \left(\frac{a}{2} + h\right)\right] = \frac{a^2}{4} - h^2$$

очевидно и при найманѣмъ брою h обе манѣ одъ нѣ; напротивъ є вредность функціє $f(x) = 1 - 2x + x^2$ за $x = 1$ **наймания** коя може быти, єръ є съ тимъ x сама $= 0$ или потрвена, а нѣне две оближнѣ вредности обе $= h^2$, дакле и при найманѣмъ h веће одъ нулле.

Ово понятіє максимума и минимума функція подпуно сваћаюћи, увиђамо:

1.) да є нека функція онда **максимумъ**, ако су разлике између сваке нѣне оближнѣ вредности и нѣ саме обе

одречне, а онда **минимумъ**, кадъ су напротивъ те разлике обе **положне**, **т. є. максимумъ**, ако є за неко x $f(x-h)-f(x)$ и $f(x+h)-f(x)$ **одречно**, а **минимумъ** ако є $f(x-h)-f(x)$ и $f(x+h)-f(x)$ **положно**; дакле

2.) да за **максимумъ** вредность дотичне функціє съ постепенимъ увећаванѣмъ или умаляванѣмъ пременльивога броя непремено мора донекле растити па онда падати, а за **минимумъ** донекле падати па онда растити, и

3.) да неке функціє по своіой природи могу имати више максима, или више минима, или и максима и минима, међу коима наравно єданъ максимумъ бытће найвећій, а єданъ минимумъ найманьій; напротивъ опетъ неке функціє немаю никаквога ни максимума ни минимума, као н. п. $f(x)=\frac{a}{x}$, коя се при постепеномъ увећаваню броя x безъ престанка умалява, а при постепеномъ умаляваню тога броя безъ края увећава. Найвећій одъ свію **односны** (релативны) максима зове се **абсолутный максимумъ**, а найманьій одъ свію минима **абсолутный минимумъ**.

§ 63.

Нека є α такова вредность пременльивога броя x, по коіой бы нѣгова нека функція $f(x)$ могла имати максима или минима, ако є то само иначе могуће.

По телеровомъ образцу добыямо разлике између оближньи вредностій функціє $f(x)$ и нѣ саме за ону вредность $x=\alpha$,

$$f(\underset{\alpha}{x}-h)-f(\underset{\alpha}{x})=-\underset{1}{f}(\underset{\alpha}{x})\cdot h+\underset{2}{f}(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{h^2}{2!}-\underset{3}{f}(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots \quad \text{и}$$

$$f(\underset{\alpha}{x}+h)-f(\underset{\alpha}{x})=+\underset{1}{f}(\underset{\alpha}{x})\cdot h+\underset{2}{f}(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{h^2}{2!}+\underset{3}{f}(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{h^3}{3!}+\ldots\ldots$$

Збогъ изчезльиво мале вредности броя h, првый є членъ сваке одъ ове две разлике већій одъ сбира осталы чланова, и по тому знакъ є прве разлике одречанъ, а друге положанъ. По предходећемъ §-у пакъ треба да су те разлике за максимумъ или минимумъ непремено єднакога знака. Докле се годъ дакле сачинитель првога члана єдне и друге разлике, т. є. првый диференціалный количникъ вопросне функціє при оной вредности броя $x = a$ непотире, дотле вредность исте функціє за ту вредность одъ x неможе быти ни максимумъ ни минимумъ. Потре ли се пакъ тай количникъ съ $x = a$, онда зависи све одъ сачинителя другога члана, т. є. одъ другогъ диференціалногъ количника вопросне функціє, кои є, збогъ свагда положнога броя h^2, у обе разлике єданъ истый.

Испадне ли дакле у томъ случаю за $x = a$ другій диференціалный количникъ вопросне функціє **одречанъ**, онда є вредность исте функціє при $x = a$ **максимумъ**; покаже ли се пакъ тай количникъ съ томъ вредности одъ x **положанъ**, онда є при истой вредности одъ x вредность вопросне функціє **минимумъ**.

Ако бы се съ истомъ вредности $x = a$ осимъ првогъ диференціалногъ количника іошъ и другій потрео, али не уєдно и трећій, онда вопросна функція, по тому што є тада трећій членъ сваке одъ оне две разлике већій одъ осталы членова, а у свакой другаче означенъ, опетъ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ. Ако пакъ исто x потире и тай трећій диференціалный количникъ, онда зависи опетъ све одъ четвртогъ количника, онако као пређе одъ другога, и вопросна ће функція дакле у томъ случаю за $x = a$ быти максимумъ или минимумъ, почемъ тай количникъ съ истимъ x испадне одречанъ или положанъ.

§ 64.

Испытуюћи на овай начинъ и далѣ, долазимо найпосле до слѣдуюћегъ правила за определьиванѣ максима и минима функція єдногъ претенльивогъ броя: **Треба вопросну функцію диференціалити и после испытати, кое вредности премѣнльивога броя нѣнъ првый диференціалный количникъ потиру? т. є. валя после поставити тай количникъ $= 0$ и определити све корене те єдначине; за кою одъ тій вредности премѣнльивога**

броя постаѥ другій диференціалный количникъ вопросне функціѥ *одречанъ*, **при той ѥ иста функція** *максимумъ*, — **за кою пакъ тай количникъ быва** *положанъ*, **при той ѥ иста функція** ***минимумъ***.

Ако коя одъ тій, изъ ѥдначине $f_1(x) = 0$ нађены вредности броя x потире и другій диференціалный количникъ, онда у смотреню таковы вредности валя пређи на выше диференціалне количнике дотичне функціѥ, при чему за безпарне важи све оно што о првомъ, а за парне све што о другомъ.

Ако пакъ ѥдначина $f_1(x) = 0$ недаѥ никакву вредностъ за x, или показуѥ какво противусловіѥ, онда вопросна функція нема за никакву вредностъ тога броя минимума или максимума, осимъ ако ѥ такова, да се нѣне ближнѣ вредности немогу развити у редове съ положнимъ целимъ степенима вишка h, коѥ ће быти, ако иста вопросна функція ніѥ цела раціонална; ѥръ у томъ случаю може се догодити, да оближнѣ вредности дате функціѥ садрже башъ за оне вредности променљивога броя степене вишка h съ деловнимъ изложитељима, за коѥ дата функція постаѥ максимумъ или минимумъ, и зато за тай случай валя понаособъ іошъ слѣдуюће приметити: Ако ѥ h^v првый деловный степенъ вишка у оближнљимъ функціяма $f(x-h)$ и $f(x+h)$, онда v или ѥ $>$ или ѥ < 1. Ако ѥ $v > 1$, онда су разлике између оближнљи функція и вопросне до онога члана сасвимъ онаке исте, као кадъ садрже саме целе степене одъ h, и дакле у томъ случаю за максимумъ или минимумъ іошъ ѥднако $f_1(x) = 0$; ако ѥ пакъ $v < 1$, онда, по §-у **31.**, за ону вредностъ одъ x, за кою вопросна функція быва максимумъ или минимумъ, постаѥ одма првый диференціалный количникъ $f_1(x) = \frac{1}{0}$, и зато валя при испытиваню функція о коима говоримо, $f_1(x)$ не само $= 0$, но и $= \frac{1}{0}$ поставити, па онда (изъ узрока што насъ диференціалный рачунъ у таковомъ случаю издаѥ) у датой $f(x)$ узъ сваку одтудъ нађену вредностъ одъ x узети ѥданпутъ $-h$, а другипутъ $+h$, и извидити, да ли тиме образоване оближнѣ вредности $f(x-h)$ и $f(x+h)$ испадаю обе манѣ одъ $f(x)$

при узетой вредности одъ x, дакле вопросна функція **максимумъ**, или обе веће одъ $f(x)$ при узетой вредности одъ x, дакле $f(x)$ **минимумъ**.

Све ово обяснитће веһма слѣдуюһи

Примери.

§ 65.

1.) Пыта се за кое вредности броя x постае функція $z = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ максимумъ или минимумъ?

Диференціалеһи ту функцію налазимо

$$\frac{dz}{dx} = x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{, а}$$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 3x^2 - 4x - 1 \,.$$

Поставляюһи пакъ $\frac{dz}{dx} = 0$, слѣдую одтудъ за x вредности $x = -1$, $+1$ и 2.

Съ првомъ одъ тій вредности постае

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 3 + 4 - 1 = 6,$$

съ другомъ $$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 3 - 4 - 1 = -2,$$

съ треһомъ $$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 12 - 8 - 1 = 3\,.$$

Дакле е вопросна функція при $x = 1$ максимумъ, а при $x = -1$ и 2 минимумъ.

2.) Има ли функція $z = x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ максима или минима, и за кое вредности броя x?

При той є функціи $\frac{dz}{dx} = 2x + 2$, а $\frac{{}^2dz}{d^2x} = 2$, брой **положанъ**, а одъ x **независанъ**, положанъ дакле при свакой вредности одъ x, па и при оной коя слѣдує изъ єдначине $\frac{dz}{dx} = 2x + 2 = 0$, т. є. при $x = -1$; и по тому вопросна є функція z за $x = 1$ **минимумъ**, а максимума нема никаквога.

3.) Има ли каковы вредностій броя x, за коє бы функція $z = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2 - 7$ была максимумъ или минимумъ, и коє су?

Диференціалећи добыямо

$$\frac{dz}{dx} = 12x^5 - 60x^3 + 48x,$$ а

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 60x^4 - 180x^2 + 48;$$ постављаюћи пакъ

$\frac{dz}{dx} = 12x^5 - 60x^3 + 48x = x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$, добыямо за x вредности $0, -1, +1, -2$ и $+2$.

Съ првомъ одъ тій вредностій постає

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = +48,$$

съ другомъ . . . . . $= -72$,

съ трећомъ . . . . . $= -72$,

съ четвртомъ . . . . $= +288$,

съ петомъ . . . . . . $= +288$.

Вопросна є функція дакле при $x = -1$ и $+1$ **максимумъ**, а при $x = 0$, -2 и $+2$ **минимумъ**.

4.) Траже се максима и минима функ. $z = x^4 - x^3 + 2$, и вредности одъ x, за коє иста функція быва єдно или друго.

Ту є $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2$,

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 12x^2 - 6x.$$

Ставлюћи $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3) = 0$, слѣдую за x вредности 0 двапутъ, и $\frac{3}{4}$.

Ова друга вредность $x = \frac{3}{4}$, дає

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 12 \cdot \frac{9}{16} - 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{4} - \frac{18}{4} = \frac{9}{4};$$

дакле є вопросна функція при томъ x **минимумъ**.

Съ првомъ вредности $x = 0$ пакъ потире се и другій диференціалный количникъ, збогъ чега морамо испытати слѣдуюће выше количнике.

Имамо $\frac{{}^3dz}{d^3x} = 24x - 6$. Но тай съ $x = 0$ непостає и самъ $= 0$. Зато вопросна функція за $x = 0$ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ.

5.) За коє вредности броя x постає функція

$$z = (1 - x)(1 + x^2) - (1 + x)(1 - x^2) - 2x(x - 1) + a$$

максимумъ или минимумъ?

Диференціалећи добыямо

$$\frac{dz}{dx} = -(1+x^2) + 2x(1-x) - (1-x^2) + 2x(1+x) - 2(x-1) - 2x$$

$= 0$ самъ по себи. То ће рећи тай є количникъ при свакой вредности променльивога броя раванъ нулли, и зато вопросна функція неможе имати ни максима ни минима. И доиста, ако у ньой назначене рачуне свршимо, потиру се сви променльиви чланови међу собомъ, и остає само сталный брой a, кои наравно као такавъ неможе быти ни већій ни маньій.

6.) Извидити имали функція $z = \frac{x - 1}{x(x + 1)}$ максима или минима, и за коє вредности броя x.

Нѣнъ є првый диференціалный количникъ

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2(x + 1)^2},$$ а другій

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = -\frac{x^2(x+1)^2 . 2(x-1) - (x^2 - 2x - 1)[2x(x+1)^2 + 2x^2(x+1)]}{x^4(x+1)^4}$$

$$= -\frac{2x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 2x - 1)(2x + 1)}{x^3(x + 1)^3}$$

$$= -\frac{2(x^3 - 3x^2 - 3x - 1)}{x^3(x + 1)^3}.$$

Поставляюћи првый $= 0$, слѣдує $x^2 - 2x - 1 = 0$, и одтудъ

$$x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Како є пакъ вопросна функція деловна, то треба да узмемо іошъ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{0}$, т. є. $\frac{dx}{dz} = 0$, одкудъ добыямо $x^2(x + 1)^2 = 0$, дакле $x(x + 1) = 0$, и одтудъ $x = 0$ и $= -1$.

Съ првомъ вредности $x = 1 + \sqrt{2}$ быва

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = -\frac{12 + 8\sqrt{2}}{(7 + 5\sqrt{2})(20 + 14\sqrt{2})}$$

одречанъ, и зато вопросна функція при той вредности одъ x **максимумъ**.

Съ другомъ є вредности $x = 1 - \sqrt{2}$ другій диференціалный количникъ

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = -\frac{12 - 8\sqrt{2}}{(7 - 5\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})},$$

збогъ $5\sqrt{2} > 7$ а $20 > 14\sqrt{2}$, **положанъ**, зато пакъ вопросна функція при той вредности одъ x **минимумъ**.

Съ трећомъ вредности $x = 0$ имамо две оближнѣ вредности

$$\frac{0 - h - 1}{(0 - h)(0 - h + 1)} = \frac{-(h + 1)}{-h(1 - h)} = \frac{h + 1}{h(1 - h)}, \text{ а}$$

$$\frac{0 + h - 1}{(0 + h)(0 + h + 1)} = \frac{h - 1}{h(h + 1)} = \frac{-(1 - h)}{h(h + 1)},$$

т. є. єдна **положна**, а друга **одречна**, и зато вопросна функція при той вредности одъ x ни максимумъ ни минимумъ.

Найпосле съ $x = -1$ оближнѣ две вредности єдна

$$\frac{-1 - h - 1}{(-1 - h)(-1 - h + 1)} = \frac{-(2 + h)}{-(1 + h).(-h)} = -\frac{2 + h}{(1 + h)\,h}$$

одречна, а

друга $\frac{-1 + h - 1}{(-1 + h)(-1 + h + 1)} = \frac{-(2 - h)}{-(1 - h)\,h} = \frac{2 - h}{(1 - h)\,h}$ **положна**,

и по тому вопросна функція и при томъ x ни максимумъ ни минимумъ.

7.) Пыта се има ли функція $z = x^{\frac{1}{2}}.\,(a - x)^{\frac{2}{3}}$ максима или минима, и за коє вредности одъ x?

Ту є

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}.\,(a - x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\,x^{\frac{1}{2}}.\,(a - x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3a - 7x}{6\,x^{\frac{1}{2}}.\,(a - x)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = \frac{-42\,x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{1}{3}} - 6(3a - 7x)\left[\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}.(a - x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\,x^{\frac{1}{2}}.(a - x)^{-\frac{2}{3}}\right]}{36\,x\,.\,(a - x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-42\,x^{\frac{1}{2}}.\,(a - x)^{\frac{1}{3}} - 6\,(3\,a - 7\,x)\,.\left[\frac{(a - x)^{\frac{1}{3}}}{2\,x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3\,(a - x)^{\frac{2}{3}}}\right]}{36\,x\,.\,(a - x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{-7x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{3}}-(3a-7x)\cdot\frac{3(a-x)-2x}{6x^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{2}{3}}}}{6x.(a-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{-42x(a-x)-(3a-7x)(3a-5x)}{36x^{\frac{3}{2}}.(a-x)^{\frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{7x^2-6ax-9a^2}{36x^{\frac{3}{2}}.(a-x)^{\frac{4}{3}}}. \text{ *)}$$

Поставляюћи $\frac{dz}{dx}=0$, **добыямо єдначину**

$$3a-7x=0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$x=\frac{3}{7}a$$

Съ овомъ є вредности другій диференціалный количникъ

$$\frac{{}^{2}lz}{d^2x}=\frac{\frac{9}{7}a^2-\frac{18}{7}a^2-9a^2}{36\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{3}{2}}.\left(a-\frac{3}{7}a\right)^{\frac{4}{3}}}=-\frac{72a^2}{7.36\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{3}{2}}.\left(\frac{4}{7}a\right)^{\frac{4}{3}}}$$

очевидно **одречанъ**, и зато вопросна функція при той вредности одъ x **максимумъ.**

Иста є функція ирраціонална. Морамо дакле нѣнъ првый диференціалный количникъ $\frac{dz}{dx}$ **іошъ ставити** $=\frac{1}{0}$. **Одтудъ слѣдує єдначина**

$$6x^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{1}{3}}=0, \quad \text{а изъ те}$$

$$x=0 \text{ и } x=a.$$

---

*) При овомъ и пређашнѣмъ примеру ставили смо цео посао другогъ диференціалногъ количника само збогъ тога, да бы болѣ увидили оно што ћемо показати у слѣдуюћемъ §у.

Образуюћи оближнѣ две вредности дате функ. при свакой одъ ове две вредности броя x, имамо при првой

$$(0-h)^{\frac{1}{2}}.(a-0+h)^{\frac{2}{3}}=(-h)^{\frac{1}{2}}.(a+h)^{\frac{2}{3}} \text{ єдна } \textbf{мнима},$$

$$\text{а } (0+h)^{\frac{1}{2}}.(a-0-h)^{\frac{2}{3}}=h^{\frac{1}{2}}.(a-h)^{\frac{2}{3}} \text{ друга } \textbf{положна}.$$

вопросна функція дакле прелази за то $x=0$ съ мнимога у реелно, то ће рећи: она постизава при той вредности одъ x свою **граничну** вредность.

При другой вредности $x=a$ имамо

$$(a-h)^{\frac{1}{2}}.(a-a+h)^{\frac{2}{3}}=(a-h)^{\frac{1}{2}}.h^{\frac{2}{3}} \text{ и}$$

$$(a+h)^{\frac{1}{2}}.(a-a-h)^{\frac{2}{3}}=(a+h)^{\frac{1}{2}}.(-h)^{\frac{2}{3}},$$

т. є. обе оближнѣ вредности **положне**, и зато вопросна функція при той вредности $x=a$ быва **минимумъ**.

§ 66.

Другій диференціалный количникъ, кои са своимъ знакомъ решава, да ли дата нека функція $z=f(x)$ постає за кою изъ єдначине првогъ диференціалногъ количника нађену вредность променљивогъ броя x максимумъ или минимумъ, испада при деловнимъ и ирраціоналнимъ функціяма понайвише доста сложенъ, и самъ є посао, коимъ до нѣга долазимо, обично доста дангубанъ. Зато ћемо да покажемо, како и на основу чега можемо лакше докучити знакъ тога количника при известной некой вредности променљивога броя, добывену изъ єдначине $\frac{dz}{dx}=0$.

Ако представимо броителя и именителя првогъ диференціалногъ количника дате функціє z односно са X_1 и X_2, имамо

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = \frac{d\,\frac{X_1}{X_2}}{dx} = \frac{X_2 \,.\, \frac{d\,X_1}{dx} - X_1 \,.\, \frac{d\,X_2}{dx}}{X_2^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{d\,X_1}{dx}\right)}{X_2} - \frac{X_1}{X_2} \,.\, \frac{\left(\frac{d\,X_2}{dx}\right)}{X_2}.$$

Ако пакъ разсудимо, да мы знакъ тога диференціалногъ количника испытуємо за оне вредности променљивогъ броя, коє првый диференціалный количникъ потиру, т. є. при коима є $\frac{dz}{dx} = \frac{X_1}{X_2} = 0$: онда увиђамо, да за такове вредности остає само

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = \frac{\left(\frac{d\,X_1}{dx}\right)}{X_2},$$

изразъ, кои є и простіи и лакше се добыя, него целый диференціалный количникъ безъ обзири на то.

При функціама дакле о коима говоримо, ніє нуждно направити и испытати цео другій диференціалный количникъ, но само овай простіи изразъ, коме є онъ съ прећашњимъ обзиромъ равнъ, и кои ніє ништа друго, но количникъ одъ диференціалногъ количника броителя првогъ диференціалногъ количника вопросне функціє, и именителя тогъ истогъ диференціалногъ количника.

Тако поступаюћи имали бы при 6. примеру прећашнѣгъ §а, при комъ є

$$\frac{dz}{dx} = \frac{X_1}{X_2} = -\,\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 \,.\, (x+1)^2},$$

за оне вредности броя x, за коє є истый количникъ $= 0$, т. є. за $x = 1 \pm \sqrt{2}$,

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\,\frac{\left[\frac{d\,(x^2 - 2x - 1)}{dx}\right]}{x^2 \,.\, (x+1)^2} = -\,\frac{2x - 2}{x^2 \,.\, (x+1)^2},$$

кои изразъ при $x = 1 + \sqrt{2}$ постаε

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = -\frac{2\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^{2}.(2+\sqrt{2})^{2}}$$ **одречанъ**,

а при $x = 1 - \sqrt{2}$

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = \frac{2\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^{2}.(2-\sqrt{2})^{2}}$$ **положанъ**,

каогодъ што смо нашли у поменутомъ §у, али овде очевидно млого простіε. —

Съ истомъ, ако не можда съ іошъ веђомъ користи можемо употребити ову приметбу и при ирраціоналнимъ функціяма, гди првый диференціалный количникъ свагда мора быти деловна функція.

Тако н. п. имали бы по тому при последнѣмъ примеру пређашнѣгъ §а, за оне вредности броя x, при коима ε $\frac{dz}{dx} = 0$, збогъ $\frac{dz}{dx} = \frac{3a - 7x}{6x^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{1}{3}}}$:

$$\frac{{}^{2}dz}{d^{2}x} = -\frac{7}{6x^{\frac{1}{2}}.(a-x)^{\frac{1}{3}}},$$

кои за $x = \frac{3}{7}a$ постаε $= -\frac{7}{6\left(\frac{3}{7}a\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{4}{7}\cdot a\right)^{\frac{1}{3}}}$ **одречанъ**,

као и тамо, тако да ε по тому вопросна функція **минимумъ**, али смо ово дознали очевидно съ млого манѣ труда.

§ 67.

Испытиванѣ максима и минима **скривены** функція быва на основу § 48. сасвимъ на истый начинъ, као и одкривены функція. Т. ε. диференціалимо дату скривену функцію по поменутомъ §у, као да εданъ премеңљивый брой одъ другога независи; ставлямо диференціалный количникъ зависногъ пременљивогъ броя по независномъ $= 0$; определюємо одтудъ помоћу дате функціє вредности пременљивы броєва, и испытуємо после какавъ испада съ ньима другій диференціалный количникъ. За коє є одъ тіи вредностій овай количникъ **одречанъ**, за те є зависный брой, као функція независнога, **максимумъ**, — за коє пакъ тай количникъ испада **положанъ**, за те є истый брой **минимумъ**.

Слѣдуюћій примеръ обяснит'ће ово больма.

Пыта се, за коє вредности броя x постає одъ нѣга зависный брой y максимумъ или минимумъ, ако є

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1.$$

Диференціалећи имамо

$$2y\,dy - 2m(y\,dx + x\,dy) + 2x\,dx = 0, \text{ и одтудъ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Поставляюћи овай количникъ $= 0$, слѣдує

$$my - x = 0, \text{ и одтудъ}$$

$$y = \frac{x}{m},$$

а съ овомъ вредности изъ дате єдначине 1).

$$x = \frac{ma}{\pm\sqrt{1-m^2}}, \text{ дакле } y = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}} \; . \; . \; . \; . \; (2.$$

Да бы садъ видили, да ли є y, као функція одъ x, при овой нађеной вредности броя x максимумъ или минимумъ, треба намъ другій диференціалный количникъ. Тай є уобште

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{x(1-m^2)\cdot\frac{dy}{dx} + y(m^2-1),}{(y-mx)^2},$$

за нађену вредность одъ x пакъ, коя првый диференціалный количникъ $\frac{dy}{dx}$ потире,

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{y\,(m^2 - 1)}{(y - mx)^2} = -\frac{1}{a\sqrt{1-m^2}}.$$

Овай є другій диференціалный количникъ дакле за $x = \frac{m\,a}{+\sqrt{1-m^2}}$ **одречанъ**, а за $x = \frac{m\,a}{-\sqrt{1-m^2}}$ **положанъ**, и по тому y као функція одъ x за прву вредность **максимумъ**, а за другу **минимумъ.**

Но првый є диференціалный количникъ функція деловна. Морамо га дакле іошъ метнути $= \frac{1}{0}$, одкуда слѣдує $y - mx = 0$, т. є. $y = mx$.

За ово y имамо по датой єдначини 1.)

$$x = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}}, \text{ дакле } y = \frac{m\,a}{\pm\sqrt{1-m^2}} \quad . \; . \; . \; . \quad (3.$$

Да бы садъ дознали є ли y при овомъ x максимумъ или минимумъ, нека є вишакъ броя y, збогъ изчезљивогъ вишка h броя x, k. Имамо за обличнѣ вредности дате функціє съ нађенимъ вредностима одъ x и y

$$k^2 - 2\,m\,h\,k + 2\,a\,h\sqrt{1-m^2} + h^2 = 0, \quad \text{и одтудъ}$$

$$k = mh \pm \sqrt{(m^2 - 1)h^2 - 2\,ah\sqrt{1 - m^2}},$$

кои изразъ показує ясно, да є k при $x = \frac{a}{+\sqrt{1-m^2}}$ **доистно**, ако є h **одречно**, а **мнимо**, ако є h положно; напротивъ k є при $x = \frac{a}{-\sqrt{1-m^2}}$ **мнимо**, ако є h **одречно**, а **доистно**, ако є h **положно.**

Обличнѣ су вредности броя y дакле, за обе вредности броя $x = \frac{a}{\pm\sqrt{1-m^2}}$, єдна **доистна**, а друга **мнима**, и по тому y ніє ни за єдно ни за друго x максимумъ или минимумъ, него постизава за обе **граничне** вредности.

§ 68.

Осимъ показаны примера у предходећимъ §§-ма, да разрешимо за упражненѣ у овомъ важномъ предмету, іошъ неколико, колико занимљивы, толико и полезны

Задатака.

1.) **Брой *a* да се раздели на две части тако, да сбиръ квадрата исты нѣговы частій буде *наймањій*.**

Ставляюћи сбиръ квадрата тражены частій датога броя $= v$, а єдну одъ тіи частій x, быт'ће она друга $(a - x)$, а

$$v = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2.$$

Диференціалећи слѣдуе

$$\frac{dv}{dx} = 4x - 2a, \quad \frac{{}^{2}dv}{d^{2}x} = 4;$$

првый диференціалный количникъ пакъ, ставлѣнъ $= 0$, дає $x = \frac{a}{2}$.

Но другій є диференціалный количникъ **сталанъ** брой, а **положанъ**; остає дакле положанъ при свакой вредности броя x, па и при оной, съ коіомъ вопросный сбиръ само може быти максимумъ или минимумъ.

По тому сбиръ v є за $x = \frac{a}{2}$ **минимумъ**, то ће рећи: брой a валя **преполовити**, да бы сбиръ квадрата нѣговы частій быо **наймањій**.

2.) **Разделити брой *a* на две части тако, да производъ квадрата єдне съ кубомъ друге буде *найвећій*.**

Нека є тай производъ y, а єдна часть броя a нека є x; треба да буде

$y = x^2.(a - x)^3$ **максимумъ**.

Имамо $\frac{dy}{dx}=2x.(a-x)^3-3x^2.(a-x)^2=x(a-x)^2.(2a-5x)$.

То ставляюћи $=0$, слѣдує $x=0$, $x=a$ и $x=\frac{2}{5}a$.

Другій є диференціалный количникъ притомъ

$$\frac{{}^2dy}{d^2x}=(a-x)^2.(2a-5x)-2x(a-x)(2a-5x)-5x(a-x)^2$$

Овай количникъ постає за трећу вредность одъ x, т. є. за $x=\frac{2}{5}a$,

$$\frac{{}^2dy}{d^2x}=-2a\cdot\left(\frac{3}{5}a\right)^2$$ **одречанъ**, дакле є y за то x **максимумъ**; то ће рећи, да бы производъ одъ квадрата єдне части броя a, съ кубомъ оне друге нѣгове части бьо найвећій, мора быти прва часть $\frac{2}{5}a$, а друга $\frac{3}{5}a$.

Оне друге две вредности за x, т. є. $x=0$ и $x=a$, очевидно неодговарају задатку.

3.) Дата є права $\overline{AB}$, и изванъ нѣ имамо две точке *P* и *Q*. Да се изнађе у истой правой такова точка *M*, да сбиръ на ию повучены прави' изъ *P* и *Q* буде *найманьій*. (Види слику на страни.)

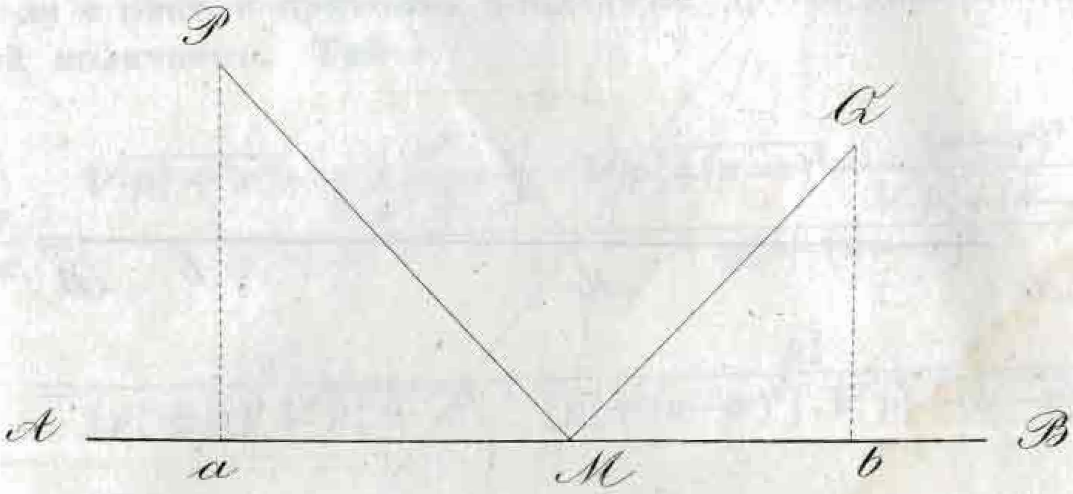
Спустимо изъ точкій P и Q управне $\overline{Pa}=p_1$ и $\overline{Qb}=p_2$ на дату праву $\overline{AB}$. Бытће, збогъ тога што є положай исты точкій према правой $\overline{AB}$ утврђенъ, обе те управне p_1 и p_2, заєдно съ нѣиовимъ међусобнимъ разстоянѣмъ $\overline{ab}=\alpha$, познате. Ставимо іошъ одстоянѣ вопросне точке M одъ a, $=x$. Бытће

$$\overline{PM}=\sqrt{p_1^2+x^2},\quad \overline{QM}=\sqrt{p_2^2+(\alpha-x)^2},$$

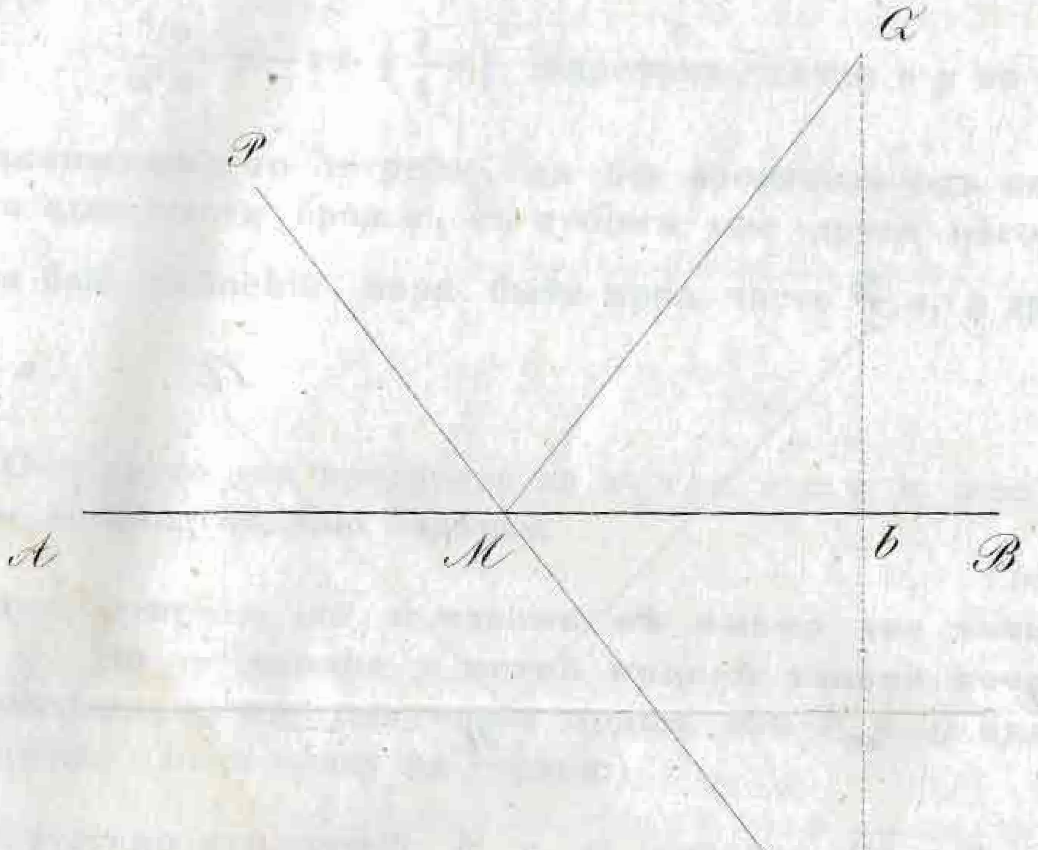
дакле вопросный сбиръ

$$y=\overline{PM}+\overline{QM}=\sqrt{p_1^2+x^2}+\sqrt{p_2^2+(\alpha-x)^2}.$$

къ страни 98.



къ страни 99.



Диференціалећи имамо садъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{p_1^2 + x^2}} - \frac{\alpha - x}{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}} = \frac{x}{\overline{PM}} - \frac{\alpha - x}{\overline{QM}}$$

$$= \frac{\overline{aM}}{\overline{PM}} - \frac{\overline{bM}}{\overline{QM}}.$$

Ставляюћи ово $= 0$, слѣдує

$$\frac{\overline{aM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{bM}}{\overline{QM}},$$

изъ чега видимо, да вопросный сбиръ y само тако **може** быти минимумъ, ако су троугли PaM и QbM подобни; да ли є пакъ и притомъ, показаћe другій диференціалный количникъ. Тай є

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{\sqrt{p_1^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{p_1^2 + x^2}}}{p_1^2 + x^2} + \frac{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2} - \frac{(\alpha - x)^2}{\sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}}}{p_2^2 + (\alpha - x)^2}$$

$$= \frac{p_1^2}{(p_1^2 + x)^2 \sqrt{p_1^2 + x^2}} + \frac{p_2^2}{[p_2^2 + (\alpha - x)^2] . \sqrt{p_2^2 + (\alpha - x)^2}},$$

и испада съ вредности $x = \frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2}$, коя слѣдує изъ єдначине $\frac{dy}{dx} = 0$, очевидно **положанъ**. Слѣдователно y є за то x доиста **минимумъ**.

Горнѣ докученѣ, да троугли PaM и QbM мораю быти подобни, дакле **угли** PMa и QMb **равни**, подає за налазакъ вопросне точке M слѣдуюћій простый стройный начинъ: продужити валя єдну одъ управниʼ, н. п. $\overline{Qb}$, па онда, одсекавъ $\overline{bq} = \overline{bQ}$, точку q саставити съ P; пресекъ те праве $\overline{qP}$ съ датомъ правомъ $\overline{AB}$ бытћe тражена точка M, єръ на тай начинъ постає $< QMb = qMb = PMa$. (Слика на страни.)

4.) **Преко условлѣне точке M између кракова датога угла AOB, положити єдну праву $\overline{PQ}$ тако, да одсеченый троугалъ OPQ буде найманьый.** (Види слику на страни.)

Повуцимо изъ M праву $\overline{MC} \parallel \overline{OB}$, а $\overline{MD} \perp \overline{OA}$; быт'ће праве $\overline{MD}$ и $\overline{OC}$ известне и сталне. Нека є ради краткоће $\overline{OC} = a$, $\overline{MD} = b$, садржай вопроснога троугла $OPQ = y$, найпосле $\overline{CP} = x$.

Троугли су CPM и OPQ подобни, а садржай првога равань є $\frac{1}{2} bx$. Има се дакле

$$y : \tfrac{1}{2} bx = \overline{OP}^2 : \overline{CP}^2 = (\overline{OC} + \overline{CP})^2 : \overline{CP}^2$$

$$= (a + x)^2 : x^2,$$ и одтудъ слѣдуе

$$y = \frac{b}{2} \cdot \frac{(a + x)^2}{x}.$$

Диференціалећи садъ ову єдначину добыямо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2x(a + x) - (a + x)^2}{x^2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{x^2 - a^2}{x^2};$$

то пакъ ставлѣно $= 0$, дає $x = \pm a$.

Другій є диференціалный количникъ

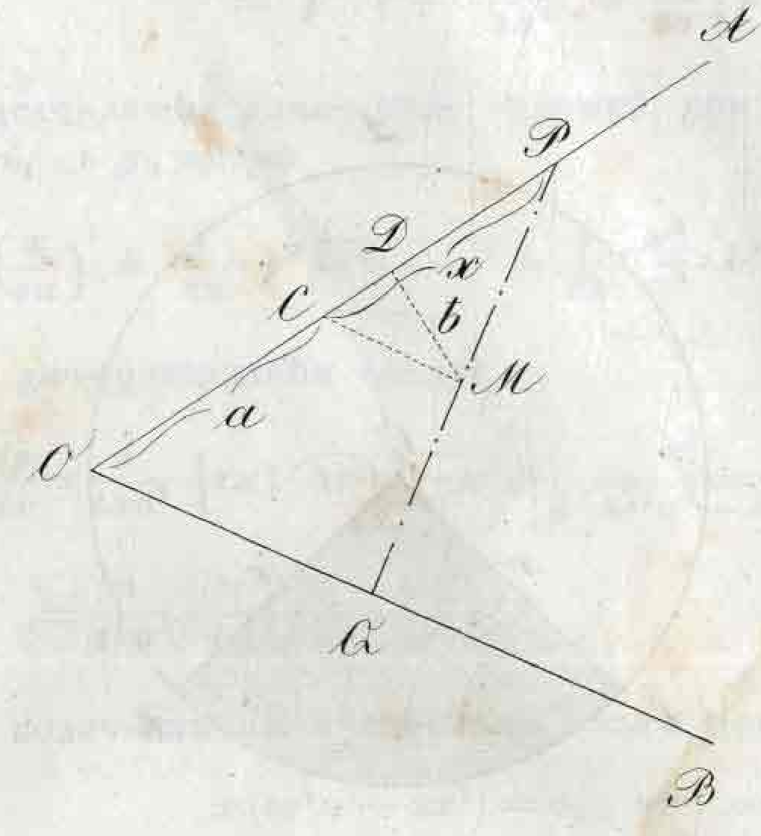
$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{b}{2} \cdot \frac{2x^3 - 2x(x^2 - a^2)}{x^4} = \frac{a^2 b}{x^3},$$

кои съ $x = + a$ испада **положанъ**.

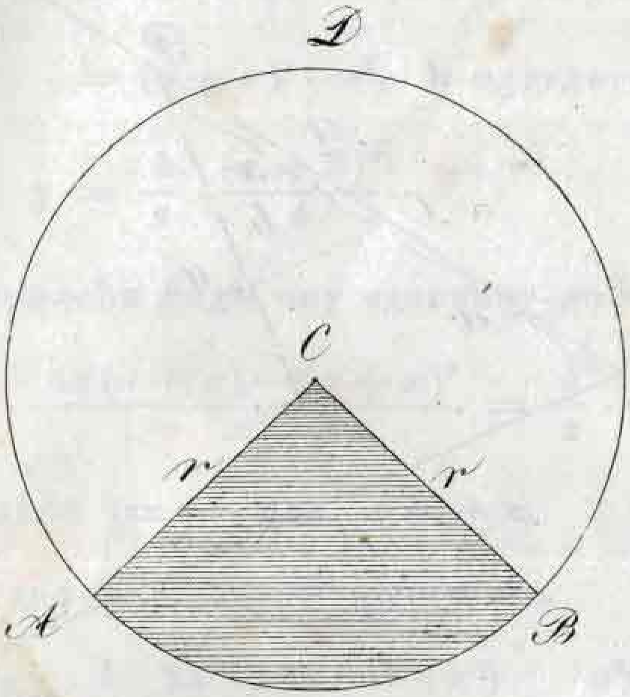
Вопросный є дакле троугалъ **найманьый** и као такавъ $= 2ab$, ако є $x = a$.

За ону другу вредность $x = - a$ показуе се истый троугалъ као *максимумъ*; но то неможе быти, єръ бы тай максимумъ быо $y = \frac{b}{2} \cdot \frac{(a - a)^2}{-2a} = 0$, т. є. маньый одъ нађенога минимума. Смисао тога максимума извидити, оставлямо прилѣжномъ ученику.

къ страни 100.



къ страни 101.



5.) Дато є окружіє полупречника r. **Да се извади одъ истога толико парче** ACB, **како бы садржай купе** (**конуса**), **коя ће добыти остатакъ окружія за површіє, бьо найвећій.** (Види слику на страни.)

Нека є лукъ ADB, кои ће образовати периферію основице вопросне купе, $= x$; бытће полупречникъ исте основице $= \frac{x}{2\pi}$. Како ће пакъ полупречникъ r датога окружія быти страна (ивица) тражене купе, то ове высина мора быти

$$= \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2}.$$

Представляюћи дакле купе садржай, кои мора быти максимумъ, съ y, имамо

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2} = \frac{1}{24} \cdot \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{4r^2\pi - x^2}.$$

Ово диференціалећи слѣдуе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{24\pi^2} \cdot \left[2x\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \cdot \frac{8r^2\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}}.$$

Тай количникъ пакъ ставлѣнъ $= 0$, дає єдначину

$x(8r^2\pi^2 - 3x^2) = 0$, изъ коє слѣдуе

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = 2r\pi \,.\, \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Прва одъ овы вредностій, као задатку неодговараюћа, одпада, друга пакъ дає другій диференціалный количникъ (обзиромъ на § 66.)

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{8r^2\pi^2 - 9x^2}{\sqrt{4r^2\pi^2 - x^2}} = \frac{8r^2\pi^2 - 24r^2\pi^2}{\sqrt{4r^2\pi^2 - 4r^2\pi^2 \,.\, \frac{2}{3}}},$$

очевидно **одречанъ**, тако дакле, да є y за то x **максимумъ.**

6.) **Изнаћи купу окружне основице, коя є при датомъ површію найвећега садржая.**

Означуюћи полупречникъ вопросне купе съ x, высину са z, а познато површіє съ a^2: мора быти

$$a^2 = 2\pi x \,.\, \tfrac{1}{2} \sqrt{x^2 + z^2} = \pi x \sqrt{x^2 + z^2},$$

одкуда слѣдуе

$$z = \frac{1}{\pi x} \cdot \sqrt{a^4 - \pi^2 x^4}\,,$$

тако да садъ имамо садржай купе, кои треба да буде максимумъ, представляюћи га съ y,

$$y = \frac{1}{3}\, x^2 \pi \,.\, \frac{1}{\pi x} \sqrt{a^4 - \pi^2 x^4} = \frac{1}{3}\, x \sqrt{a^4 - \pi^2 x^4}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{a^4 x^2 - \pi^2 x^6}.$$

Диференціалећи быва

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^4 x - 3\pi^2 x^5}{\sqrt{a^4 x^2 - \pi^2 x^4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^4 x - 3\pi^2 x^5}{3y}.$$

Ово пакъ поставлѣно $= 0$, дае $x = 0$ и $x = \dfrac{a}{\sqrt{\pi \sqrt{3}}}$.

Прва вредность $x = 0$ одпада, єръ незадоволява задатакъ; съ другомъ пакъ постае другій диференціалный количникъ (обзиромъ на § 66.)

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \frac{1}{9} \cdot \frac{a^4 - 15\pi^2 x^4}{y} = \frac{a^4 - 5a^4}{9y}\,,$$

одречанъ, такавъ дакле да є вопросна купа y, при той вредности нѣнога полупречника x, каошто се захтевало, **найвећа.**

2.) Максима и минима функція два пременльива броя.

§ 69.

Ако є $v = f(x, y)$ уобште нека функція два, међу собомъ независна броя x и y, па хоћемо испытати, за кое вредности тій броєва иста функція постає максимумъ или минимумъ, има се приметити слѣдуюће.

§ 70.

Уобште є, ако у датой фунцкіи прелази x у $x + h$ а y у $y + k$, заменююћи $f(x + h, y + k)$ ради краткоће съ V, по § 37.

$$V - v = \left(\frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k\right) + \ldots\ldots$$

Ако ће пакъ дата функція v за какве вредности броєва x и y постати максимумъ или минимумъ, морају быти нѣне оближнѣ вредности при тима вредностима пременльивы броєва, у првомъ случаю све манѣ, а у другомъ све веће одъ нѣ. Тій нѣны оближньи вредностій има свега четири, т. є.

$$V_1 = f(x - h, y + k) \quad \text{са} \quad V_2 = f(x + h, y + k) \quad \text{и}$$

$$V_3 = f(x - h, y - k) \quad \text{са} \quad V_4 = f(x + h, y - k),$$

при чему h и k єсу изчезльиви броєви.

За максимумъ дакле морају быти све четири функціє V_1, V_2, V_3 и V_4 манѣ, а за минимумъ све четири веће одъ v; а то ће наравно онда быти, ако се покажу разлике $V_1 - v$, $V_2 - v$, $V_3 - v$ и $V_4 - v$ при дотичнимъ вредностима пременльивы броєва x и y, у првомъ случаю све четири **одречне**, а у другомъ случаю све заедно **положне**.

Како су пакъ те разлике по горнѣмъ образцу

$$V_1 - v = \left[- \frac{dv}{dx} \cdot h + \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_2 - v = \left[+ \frac{dv}{dx} \cdot h + \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_3 - v = \left[- \frac{dv}{dx} \cdot h - \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots$$

$$V_4 - v = \left[+ \frac{dv}{dx} \cdot h - \frac{dv}{dy} \cdot k\right] + \ldots\ldots,$$

и сваке знакъ, при изчезљиво малимъ броєвима h и k, зависи одъ првога члана, а ти су први чланови свагда разно означени: то є лако увидити, да вопросна **функція v неможе никако быти ни максимумъ ни минимумъ, докле годъ се сваке првый чланъ, съ истимъ вредностима одъ x и y, непотру**; а то опетъ очевидно ніє могуће иначе, него ако є свакій одъ почастны прві диференціалны количника функціє v, при тима вредностима одъ x и y, за себе раванъ нулли, т. є. само ако є

$$\frac{dv}{dx} = 0 \text{ и уєдно } \frac{dv}{dy} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.$$

§ 71.

Догоди ли се то пакъ, онда могућность максима и минима функціє v зависи одъ знака дрвги чланова оны разлика, као сада найвећи одъ осталы.

У томъ случаю стоє те разлике овако:

$$V_1 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 - 2\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_2 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 + 2\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_3 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 + 2\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

$$V_4 - v = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x} \cdot h^2 - 2\frac{{}^2dv}{dxdy} \cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y} \cdot k^2\right] + \ldots\ldots$$

Други су чланови дакле у томъ случаю свега само двояки, т. є.

$$\frac{1}{2}\left[\frac{{}^2dv}{d^2x}\cdot h^2 \pm 2\,\frac{{}^2dv}{dx\;dy}\cdot hk + \frac{{}^2dv}{d^2y}\cdot k^2\right],$$

и по тому вопросна функція v у истомъ случаю, за дотичне вредности броєва x и y, бытће максимумъ или минимумъ, почемъ тай двоякій изразъ за исте вредности одъ x и y, испадне одречанъ или положанъ.

§ 72.

Да бы сада лакше могли увидити, подъ коимъ условіяма може быти єдно, и подъ коимъ друго, то заменимо найпре, ради краткоће, $\frac{{}^2dv}{d^2x}$ съ m, $\frac{{}^2dv}{dx\;dy}$ съ n, а $\frac{{}^2dv}{d^2y}$ съ p, па онда додаймо ономъ двоякомъ изразу решавајућегъ другогъ члана и одузмимо одъ нѣга єданпутъ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2$, а другипутъ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\cdot h^2$. Бытће

$$\frac{1}{2}\,(mh^2 \pm 2\,n\,hk + p\,k^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{m}\cdot k^2$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,(h \pm \frac{n}{m}k)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mp - n^2}{m}\cdot k^2 \quad .\;.\;.\;.\;. \quad (\alpha.,$$

или

$$\frac{1}{2}\,(mh^2 \pm 2\,n\,hk + p\,k^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\cdot h^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{p}\,h^2$$

$$= \frac{1}{2}\,p\,(k \pm \frac{n}{p}\,h)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mp - n^2}{p}\cdot h^2 \quad .\;.\;.\;.\;. \quad (\beta.,$$

изъ чега опетъ видимо, да знакъ другога члана зависи само одъ m, p, и разлике $mp - n^2$, єръ $(h \pm \frac{n}{m}\,k)^2$ и k^2, или $(k \pm \frac{n}{p}\,h)^2$ и h^2, на нѣга, као свагда положни броеви, никако невліяю.

То приметивши увиђамо лако

изъ α.): решаваюћій изразъ испада **одречанъ**, и зато вопросна функція **максимумъ**, ако є за дотичне вредности одъ x и y, m **одречно**, и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **одречно**; напротивъ истый изразъ быт'ће **положанъ**, и зато вопросна функція **минимумъ**, ако є m **положно**, и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **положно**; —

изъ β.): решаваюћій изразъ быт'ће **одречанъ**, и зато вопросна функція **максимумъ**, ако є p **одречно** и притомъ $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **одречно**, напротивъ истый изразъ быт'ће **положанъ**, и збогъ тога вопросна функція **минимумъ**, ако є p **положно**, и заєдно $mp - n^2 = 0$ или такођеръ **положно**. Или, ако оба та докученя у єдно сведемо: функція v быт'ће за **оне** вредности броєва x и y, нађене изъ єдначина' нѣны првы почастны диференціалны количнака', **максимумъ**, съ коима испадаю нѣни чисти други почастни диференціални количници m и p **одречни**, и притомъ производъ тій количника, mp или $=$ или $>$ одъ квадрата n^2, мешовитогъ другогъ почастногъ диференціалногъ количника n; напротивъ функція v быт'ће за **оне** вредности одъ x и y, добывене изъ поменуты єдначина', **минимумъ**, при коима нѣни чисти почастни други диференціални количници m и p испадаю **положни**, и уєдно є производъ тій количника, mp или $=$ или $>$ одъ n^2, т. є. одъ квадрата мешавитогъ другогъ почастногъ диференціалногъ количника n.

§ 73.

По свему тому дакле, ако имамо испытати, да ли дата нека функція $v = f(x, y)$, два пременљива броя x и y, постає за какове вредности тій броєва максимумъ или минимумъ? треба исту функцію по свакомъ пременљивомъ брою почастно диференціалити, свакій нѣнъ првый почастный диференціалный количникъ метнути $= 0$, и изъ тій єдначина' после изнаћи све вредности броєва x и y; направивши затимъ све друге почастне нѣне диференціалне количнике, валя сваку спрегу нађены тій вредности одъ x и y у исте поставити, па видити, съ коiомъ постаю чисти други диференцiални количници обадва одречни, или обадва положни, а поредъ тога iошъ ньиовъ производъ $>$ или $=$ квадрату мешавитогъ другогъ диференцiалногъ количника? За сваку ону спрегу одъ x и y, при коiой су поредъ овогъ последнђгъ условiя чисти други количници **одречни**, бытђе вопросна функцiя **максимумъ**; напротивъ за сваку ону спрегу, где поредъ истога условiя ти количници испадаю **положни**, бытђе вопросна функцiя **минимумъ**.

§ 74.

Осимъ тога приметити валя iошъ:

1.) **У** случаю, ако су први почастни диференцiални количници функцiє целе, па ньиове єдначине недаю никакве вредности пременльивы броєва, или показую каково противусловiє, — онда вопросна функцiя непостає низакакве вредности тiй броєва максимумъ или минимумъ.

2.) **У** случаю пакъ, ако су поменути количници функцiє деловне, па ньиове єдначине недаю никакве вредности пременльивы броєва, — онда, изъ исты узрока као при функцiяма єдногъ само пременльивогъ броя (§ 64), треба свакiй одъ тiй количника поставити iошъ и $= \frac{1}{0}$, или што є свеєдно, именителя свакогъ одъ ньи $= 0$, па видити, недаю ли те єдначине какве вредности за пременльиве броєве? Добыю ли се одтудъ какове вредности тiй броєва, онда є вопросна функцiя за оне ньиове спреге максимумъ или минимумъ, съ коима испадаю нђне оближнђ вредности односно све одречне, или све положне. Недобыю ли се пакъ ни одтудъ вредности пременльивы броєва, или покажули и те єдначине какво противусловiє, — онда вопросна функцiя нема никаква максимума или минимума. — Найпосле

3.) **У** случаю, ако се съ нађенимъ вредностима пременльивы броєва изъ єдначина' првы почастны диференцiалны количника потру и други чланови решаваюђи разлика' $V_1 - v$, $V_2 - v$, $V_3 - v$ и $V_4 - v$, — онда требало бы испытиванѣ максимума и минимума предузети помоћу слѣдуюћи чланова исты разлика. Но како су выши диференціални количници вопросне функціє, изъ кои се ти чланови состоє, што далѣ то све сложеніи, и збогъ тога испытиванѣ посредствомъ ньи све теже: то є у таковомъ случаю найболѣ служити се самимъ оближньимъ вредностима дате функціє при онимъ, друге чланове разлика потирућимъ вредностима променльивы броєва, — видити т. є. какве испадаю оближнѣ вредности съ тима вредностима, да ли све одречне, или све положне, или єдне одречне а друге положне? да бы после могли казати: у првомъ є случаю вопросна функція максимумъ, у другомъ минимумъ, а у трећемъ неможе быти ни єдно, ни друго.

Садъ да узмемо, колико за болѣ обяснѣнѣ свега дояко изложенога, толико и ради нуждногa упражненя у томъ важномъ предмету, іошъ и неколико

Задатака.

§ 75.

1.) **Разделити брой a на три части тако, да производъ разлика' између нѣга и сваке нѣгове части буде максимумъ.**

Означуюћи єдну часть датога броя a съ x, другу съ y, бытће трећа $(a-x-y)$, а разлике између нѣга и тій частій $(a-x)$, $(a-y)$ и $(x+y)$. Дакле ако производъ овы разлика', кои треба да буде максимумъ, назовемо z, имамо

$$z=(a-x)(a-y)(x+y)=x^2(y-a)+x(y-a)^2-ay(y-a).$$

Поступаюћи садъ по упутству предходећи §§-а, добыямо

$$\frac{dz}{dx}=2x(y-a)+(y-a)^2,$$

$$\frac{dz}{dy}=x^2+2x(y-a)-a(2y-a);$$

ти количници, поставлѣни свакій $= 0$, даю едначине

$$2x + y - a = 0$$

$$x^2 + 2(y - a)x - a(2y - a) = 0;$$

изъ овы пакъ слѣдуе само една, задатку одговараюћа спрега, $y = \frac{1}{3}a$ съ $x = \frac{1}{3}a$

Далѣ имамо

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = 2(y - a), \frac{{}^2dz}{d^2y} = 2x - 2a, \frac{{}^2dz}{dx\,dy} = 2x + 2(y - a),$$

и ти количници постаю за нађено x и y, односно $= -\frac{4}{3}a, -\frac{4}{3}a$ и $-\frac{2}{3}a$; дакле прва два оба одречни, и ньиовъ производъ $\frac{16}{9}a^2 > \frac{4}{9}a^2$ квадрата трећега. Слѣдователно функція z е за $x = y = \frac{1}{3}a$ **максимумъ**, а то ће рећи: датый брой a бытће по условію задатка разделѣнъ, ако су све три нѣгове части еднаке.

Тако исто морао бы се делити брой a на три части, кадъ бы се искало, да производъ сбирова одъ две и две части, или сбиръ производа сваке две и две буде максимумъ, о чему нека се почетникъ увери самъ.

2.) **Разделити брой a на три части x, y и $(a - x - y)$ тако, да сбиръ количника' одъ треће $a - x - y$ са свакомъ одъ првы, буде минимумъ.**

Означуюћи вопросный сбиръ са z, имамо

$$z = \frac{a - x - y}{x} + \frac{a - x - y}{y},$$

и то треба да буде минимумъ. Да видимо може ли быти.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y - a}{x^2} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - ay - x^2}{x^2 y},$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x} + \frac{x - a}{y^2} = \frac{x^2 - ax - y^2}{xy^2}.$$

Ти количници ставлѣни свакій $= 0$, даю єдначине $y^2 - ay - x^2 = 0$ и $x^2 - ax - y^2 = 0$, изъ кои слѣдує $x = y = 0$.

То исто налазимо, и ако ставимо

$$\frac{y^2 - ay - x^2}{x^2 y} = \frac{1}{0} \text{ и } \frac{x^2 - ax - y^2}{xy^2} = \frac{1}{0}.$$

Но те вредности задатку неодговараю, а друге недобыямо; зато функція z нема ни максима ни минима, а то ће рећи: датый брой a никако неможе се делити по условію.

3.) **Построити троугалъ, кой є при датой периферіи *найвећегъ* садржая.**

Означуюћи съ $2S$ дату периферію (сбиръ страна) троугла, а съ x, y и $2S - x - y$ нѣгове стране, имамо познатимъ начиномъ вопросный нѣговъ садржай, кой да буде максимумъ,

$$z = \sqrt{S(S-x)(S-y)(x+y-S)}; \text{ и одтудъ}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{S(S-y)(2S-2x-y)}{2z}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{S(S-x)(2S-2y-x)}{2z}.$$

Ови количници, поставлѣни свакій $= 0$, даю само

$$2S - 2x - y = 0 \text{ и } 2S - 2y - x = 0,$$

као задатку одговараюће єдначине за x и y. Изъ тій пакъ слѣдує $x = y$, дакле $2S - 3x = 0$, и одтудъ $x = \frac{1}{3} \cdot 2S$.

Слѣдователно вопросный троугалъ, да бы могао быти максимумъ, мора быти **равностранъ**. Да ли є пакъ то и као такавъ, показатће слѣдуюћи други диференціални количници:

$$\frac{{}^2dz}{d^2x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{S^2}{z},\ \frac{{}^2dz}{d^2y} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{S^2}{z}\ \text{и}\ \frac{{}^2dz}{dx\,dy} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{S^2}{z}.$$

Ти бываю за нађене вредности одъ x и y, односно $= -\frac{3}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3}{2\sqrt{3}}$. Како є пакъ поредъ одречна прва два іощъ њиовъ производъ $3 >$ одъ квадрата $\frac{3}{4}$ трећега, то є z при тима вредностима одъ x и y **максимумъ**, и по тому: троугалъ дате периферіе бытће **найвећега** садржая, ако є **равностранъ**.

4.) Какавъ мора быти правый параллелопипедъ, да бы скупно нѣгово површіє при известной запремини было *найманѣ?*

Представляюћи съ x, y и z размере вопросногa параллелопипеда при условлѣной нѣговой запремини c^3, имамо нѣгово површіє, коє треба да буде минимумъ,

$$v = 2\,xy + 2\,xz + 2\,yz,\ \text{или збогъ}\ xyz = c^3,$$

т. є. $z = \frac{c^3}{xy}$:

$$v = 2\,(xy + \frac{c^3}{x} + \frac{c^3}{y}).$$

Овай изразъ дає

$$\frac{dv}{dx} = 2\,(y - \frac{c^3}{x^2})\ \text{и}\ \frac{dv}{dy} = 2\,(x - \frac{c^3}{y^2});$$

изъ овы количника пакъ, поставлѣны свакій $= 0$, слѣдуе $x^2y = xy^2 = c^3$, т. є. $x = y = c$, а съ тима іощъ и $z = \frac{c^3}{xy} = c$.

Ако ће дакле површіє вопроснога параллелопипеда быти минимумъ, мора истый быти коцка.

Далѣ имамо друге диференціалне количнике за нађене вредности одъ x, y и z,

$$\frac{{}^2dv}{d^2x} = \frac{4c^3}{x^3} = 4, \frac{{}^2dv}{d^2y} = \frac{4c^3}{y^3} = 4, \frac{{}^2dv}{dx\,dy} = 2 \text{ ; и}$$

одтудъ видимо, да су оба прва положни, и ньиовъ производъ 16 > одъ квадрата 4 трећега, дакле да є при нађенимъ размерама параллелопипеда, нѣгово површіє доиста *найманѣ*.

в.) Определьиванѣ абсолутны максима’ и минима’, и граничны вредностій функція.

§ 76.

Абсолутный максимумъ, или абсолутный минимумъ неке функціє (§ 62), или є єданъ одъ релативны максима или релативны минима, или є пакъ **гранична** вредность дотичне функціє, т. є. такова вредность, гди иста функція прелази изъ доистнога у мнимо. Ако смо дакле изнашли сваколика максима и минима, и све граничне вредности неке функціє, онда међу тима налази се непремено и нѣнъ абсолутный максимумъ и абсолутный минимумъ.

Определьиванѣ односны максима и минима видили смо у предходећимъ §§-ма; остає само іошъ да покажемо изтраживанѣ **граничны** вредностій.

§ 77.

Дата нека функція $f(x)$ постизава по предходећему за $x = \alpha$ тако свою граничну вредность, ако є при той вредности променльивога броя єдна нѣна оближня вредность доистна, а она друга мнима, свеєдно коя єдно а коя друго. Како су пакъ $f(x-h)$ и $f(x+h)$ у случаю ако се за $x=\alpha$ могу развити у редове съ целимъ **положнимъ** степенима броя h, каошто смо већъ видили пре, свагда обе доистне, — то дакле редови исты функція, ако ће $f(x)$ да постигне за $x=\alpha$ свою граничну вредность, мораю за $x=\infty$ непремено садржати чланове съ деловнимъ изложительима одъ h. И то є довольно за увиђанѣ, да ћемо све вредности $x=\alpha$ променљивога броя, при коима вопросна функція постизава граничне вредности изнаћи: ако на основу пређе споменутога §а поставимо $f_1(x)=\frac{1}{0}$, $f_2(x)=\frac{1}{0}$; и т. д., изъ тій єдначина' све вредности одъ x определимо, и после ближнѣ функціє дате функціє са свакомъ одъ нѣи испытамо у томъ обзиру, да ли испадаю єдна доистна а друга мнима? за коє x то буде, при томе постає $f(x)$ **гранична** вредность.

Овай посао показат'ће подробніє примери слѣдуюћегъ

§ 78.

1.) Има ли функція $v=f(x)=(1-x).\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{3}{2}}$ граничны вредностій, и за коє вредности броя x?

При той су $f_1(x)=\frac{dv}{dx}=-\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$f_2(x)=\frac{{}^2dv}{d^2x}=-\frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_3(x)=\frac{{}^3dv}{d^3x}=-\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Ставляюћи ове количнике редомъ свакій $=\frac{1}{0}$, видимо, да єдначина одъ првога недає никакву вредность за x, а да єдначине одъ осталы све само $x=1$ показую. Дата функція дакле само при овоме x могла бы постићи свою граничну вредность. — Да видимо какве се показую оближнѣ вредности дате функціє при томе x.

$$f(1-h) = [1-(1-h)].\sqrt{1-(1-h)} = h.\sqrt{h}\,,$$

$$f(1+h) = [1-(1+h)].\sqrt{1-(1+h)} = -h.\sqrt{-h}\,;$$

прва є доистна, а друга мнима; дакле вредность вопросне функціє при $x=1$ доиста гранична вредность, и та є $f(x)=v=0$.

2.) За коє вредности одъ x постизава функція

$$f(x) = \frac{a+x}{\sqrt{a-x}} \text{ граничне вредности?}$$

$$f_1(x) = \frac{3a-x}{2(a-x)\sqrt{a-x}}\,,\quad f_2(x) = \frac{7a-x}{4(a-x)^2.\sqrt{a-x}}\,,$$

. . . .

Ови количници, каогодъ и сви слѣдуюћи, поставлѣни $= \frac{1}{0}$, даю само єдну вредность $x=a$. Дата функція дакле само при той вредности могла бы постићи свою граничну вредность.

Оближнѣ нѣне вредности съ тимъ x єсу

$$f(a-h) = \frac{a+a-h}{\sqrt{a-(a-h)}} = \frac{2a-h}{\sqrt{h}}\,,$$

$$\text{и}\quad f(a+h) = \frac{a+a+h}{\sqrt{a-(a+h)}} = \frac{2a+h}{\sqrt{-h}}\,:$$

дакле єдна доистна а друга мнима, и зато є вредность дате функціє за $x=a$ доистна гранична вредность. Та є

$$f(x) = \frac{2a}{0} = \infty.$$

3.) За кое вредности одъ x быва вредность функціє

$$f(x) = a^2 - x^2 + (ax - x^2)^{\frac{5}{2}}$$ гранична вредность?

$$f_1(x) = -2x - \frac{5}{2}(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}.(a - 2x)$$

$$f_2(x) = -2 - \frac{5.3}{2^2}\cdot(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}.(a - 2x)^2 - 5(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$f_3(x) = \frac{5.3.1}{2^3}\cdot(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(a - 2x)^3 - 5.3.(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}.(a - 2x)$$

и т. д., при чему є лако приметити, да ће сви слѣдуюћи количници садржати некій **одречный** степенъ одъ $(ax - x^2)$.

Ставляюћи ове количнике редомъ $= \frac{1}{0}$, недобыямо одъ єдначине првога и другога никакву вредность за x, трећа єдначина пакъ и све остале даю само єдну вредность $x = a$.

Съ томъ вредности быва

$$f(a - h) = a^2 - (a - h)^2 + [a(a - h) - (a - h)^2]^{\frac{5}{2}}$$

$$= 2ah - h^2 + (ah - h^2)^{\frac{5}{2}}$$ доистна, а

$$f(a + h) = -2ah - h^2 + (-ah - h^2)^{\frac{5}{2}}$$ очевидно **мнима**.

По тому вредность дате функціє при $x = a$ гранична є вредность, и као такова $= 0$.

Као последнѣ употреблѣнѣ диференціалнога рачуна у анализи, да покажемо іошъ и

г.) Определьиванѣ вредностій функція, за вредности променльивога броя $=\infty$.

§ 79.

То є при већой части функція врло лакъ посао, ако приметимо слѣдуюће:

Кадъ є x безкрайно, онда є $\frac{1}{x}$ изчезльиво мало или o. Ако дакле имамо изнаћи вредность функціє $f(x)$ за $x=\infty$, треба само место x узети $\frac{1}{z}$, и нову функцію помоћу маклореновогъ образца (или и просто) развити у редъ степена одъ z, па онда іошъ поставити $z=0$; што остане быт'ће тражена вредность $f(x)$ за $x=\infty$.

Ово безъ сумнѣ непотребує никаква даля обясненя; но има доста случаєва, гди се съ тимъ начиномъ неможе изаћи на край, и гди се дакле чему другомъ досетити валя.

То ће быти, кадгодъ се у дотичной функціи буду налазили логаритми; у комъ случаю пре свега валя уклонити логаритамъ. Како то быва, неможе се уобште рећи, но показат'ћемо на єдномъ примеру.

Ако тражимо вредность функціє $v=\frac{1-lx}{(x-1)^n}$ за $x=\infty$, можемо за уклоненѣ логаритма ставити $lx=z$, дакле $x=e^z$. Тадъ быва

$$v=\frac{1-z}{(e^z-1)^n}=\frac{1-z}{\left(z+\frac{z^2}{2\,!}+\frac{z^3}{3\,!}+\ldots\right)^n}$$

$$=\frac{1-z}{z^n\left(1+\frac{z}{2\,!}+\frac{z^2}{3\,!}+\ldots\right)^n}$$

$$=\frac{1}{z^n.\left(1+\frac{z}{2\,!}+\ldots\right)^n}-\frac{1}{z^{n-1}.\left(1+\frac{z}{2\,!}+\ldots\right)^n}$$

$$=\frac{1}{z^{n-1}.\left(1+\frac{z}{2\,!}+\ldots\right)^n}\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right)\cdot$$

Ставляюћи овде пакъ $z = l\,(x = \infty) = \infty$, постає овай изразъ очевидно (збогъ $\frac{1}{z} = \frac{1}{\infty} = 0$), при **положномъ** брою n,

$$= -\frac{1}{\infty} = -0,$$ а при **одречномъ** n

$$= -\infty;$$

и по тому вопросна є функція за $x = \infty$ равна 0, ако є n положно, а $= -\infty$, ако є n одречно.

* * *

КНЬИГА II.

ИНТЕГРАЛНЫЙ РАЧУНЪ.

А. Интеграленѣ функція єдногъ пременльивогъ броя.

а) Понятія.

§ 80.

Ако є $\varphi(x)\,dx$ нека дата диференціална функція по x, па се тражи основна функція, т. є. она функція $f(x)$, одъ коє диференціаленѣмъ та дата постає: онда посао, коимъ добыямо основну функцію $f(x)$, зове се **интеграленѣ** дате функціє, а сама основна функція $f(x)$ притомъ, нѣнъ **интегралъ**.

Да се дата диференціална функція има интегралити, означуєсе предпоставлѣнимъ іой знакомъ $\int$, тако да пишемо, и по предходећему треба да є $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$ (читай интегралъ функціє φ одъ x пута dx, раванъ є функціи f одъ x).

Интеграленѣ є дакле противный рачунъ диференціаленю, и знаци се $\int$ и d зато, кадъ се као налажући састану, узаамно поричу и поништаваю.

§ 81.

По горнѣмъ понятію треба да є $df(x) = \varphi(x)\,dx$, т. є. диференціалъ тражене функціє (интеграла) равanъ датой диференціалной функціи, а у § 4. видили смо, да се при диференціаленю сталии броєви губе, и да є збогъ тога диференціалъ свію функція єдногъ истогъ променльивогъ броя, коє се међу собомъ само съ некимъ сталнимъ броємъ разликую, єданъ истый.

Лако є дакле увидити, да обратно **интегралъ сваке дате диференціалне функціє има безбройно млого вредностій, коє се међу собомъ све само съ некимъ, іошъ непознатимъ сталнимъ броєвима разликую, и да є зато свакій интегралъ уобште, т. є. до известногъ одкрића принадлежећегъ му сталнога броя, неопредељнъ.**

Интегралъ, кои тай непознатый сталный брой іошъ садржи, зове се **подпуный или обштій**, интегралъ напротивъ, у комъ є истый брой већъ приміо неку известну вредность, зове се **особитый.**

Обштій интегралъ дакле добыямо, ако изпађеномъ особитомъ интегралу додамо іошъ некій непознатый сталный брой.

Овай сталный брой представля се обично съ писмомъ C, као почетнимъ писмомъ речи constans, одкрива се пакъ у известнимъ случаєвима изъ саме природе дотичнога предмета. Тако н. п. ако є обштій $\int \frac{dx}{x} = lx + C$, а изъ природе тичућегъ се предмета зна се, да истый $\int$ за $x = \alpha$ быва $= a$, имамо обзиромъ нато, $a = l\alpha + C$, одкуда слѣдує $C = a - l\alpha$, а съ томъ вредности после **особитый** $\int \frac{dx}{x} = lx + a - l\alpha = l\frac{x}{\alpha} + a$.

§ 82.

Да свакій обштій интегралъ доиста мора садржати некій іошъ непознатый сталный брой, и да съ тога после што у предходећемъ §-у поглавито рекосмо, доиста све онако постои, — уверавамо се іошъ и на слѣдуюћій начинъ.

Ако є $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$, имамо по §-у 80. $f_1(x) = \varphi(x)$, дакле $f_2(x) = \varphi_1(x)$, $f_3(x) = \varphi_2(x)$, и т. д., и зато по простомъ маклореновомъ правилу (§ 32.), ако место одъ x више независећегъ, т. є. по нѣму сталнога броя $f(\underset{0}{x})$ узмемо C,

$$\int \varphi(x)dx = f(x) = C + \varphi(\underset{0}{x}).x + \underset{1}{\varphi}(\underset{0}{x}).\frac{x^2}{2!} + \underset{2}{\varphi}(\underset{0}{x}).\frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

изразъ, кои съ неизвестнимъ, по x сталнимъ броємъ C, горе речено подпуно потврђує.

Да є пакъ десна часть истога израза доиста общта вредность траженога интеграла, увиђамо съ места, чимъ образуємо прву нѣгову функцію; єръ тадъ слѣдує обзиромъ нато, да є C по x стално,

$$f_1(x) = \varphi(\underset{0}{x}) + \varphi_1(\underset{0}{x}).x + \varphi_2(\underset{0}{x}).\frac{x^2}{2!} + \ldots, \text{ т. є. } f_1(x) = \varphi(x),$$

каошто по понятію интеграла треба да буде, єръ десна часть ове єдначине по поменутомъ маклореновомъ образцу ніє нико другій, но $\varphi(x)$.

Осимъ пређашнѣга потврђеня увиђамо изъ дотичнога израза іошъ и то, да и како можемо представити интегралъ сваке диференціалне функціє у виду безкрайнога реда степена одъ x или $(x - a)$ (§ 32.). Да ће пакъ тай редъ быти краянъ, ако є $\varphi(x)$ у вопросномъ интегралу функція алгебрайска раціонална цела, безъ сумнѣ непотребує нарочнога доказа.

§ 83.

По роду дате функціє, као диференціалъ, разликуємо и разне родове интеграла. Имамо т. є. просте и выше интеграле.

Ако є дата диференціална функція првый или простый диференціалъ, онда є тражена функція нѣнъ првый или простый интегралъ; ако є пакъ она функція другій, трећій, и т. д. диференціалъ, онда є тражена функція односно нѣнъ другій, трећій, и т. д. интегралъ. По себи пакъ разуме се, да выше интеграле истимъ путемъ морамо тражити, као и выше диференціале; каогодъ што смо т. є. другій, трећій, и остале выше диференціале добыли єданпутъ, двапутъ и односно више пута повторенимъ диференціаленѣмъ, тако исто налазимо другій, трећій, и остале выше интеграле єданпутъ, двапутъ, и дотично више пута повторенимъ интеграленѣмъ. **Уобште**, ако є ${}^{n}d f(x) = \varphi(x)\, d^{n}x$, т. є. $\varphi(x)\, d^{n}x$ n-ный диференціалъ функціє $f(x)$, онда є обратно $f(x) = {}^{n}\!\int \varphi(x)\, d^{n}x$, т. є. функція $f(x)$ n-ный интегралъ функціє $\varphi(x)\, d^{n}x$, и добыямо є интегралећи ову последню застопце n пута.

§ 84.

При интеграленю сваке дате диференціалне функціє старамо се пре свега, да нѣнъ интегралъ, или непосредно или после некогъ нѣногъ преображая добыємо у виду крайне функціє. Ово на жалость при већой части интеграла ніє могуће, али гдигодъ се може, ту служе, поредъ другогъ доякошнѣгъ знаня, ниже слѣдуюћа **основна правила и образци**. Што се пакъ тиче начина, како се дате диференціалне функціє, гди мора быти, за употреблѣнѣ тій правила и образаца удешавају, то є лако увидити, да се о тому немогу поставити никакова општа правила. Ту служи понайвише само собствено промотренѣ и оштроуміє, и све што се у томъ обзиру може урадити, састои се у упућиваню съ разрешенѣмъ неколико, таково удешаванѣ изискуюћи интеграла. Мы ћемо то урадити мало касніє при поставляню помоћны образаца.

б.) Основна правила и образци.

§ 85.

1.) Простимъ извртанѣмъ правила II. и III. §-а 4. слѣдує

$$\text{I.)}\quad \int A\varphi(x)\,dx = A\int\varphi(x)\,dx \quad \text{и}$$

$$\text{II.)}\quad \int[f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx \pm \ldots] = \int f(x)\,dx \pm \int\varphi(x)\,dx \pm \ldots$$

Првый одъ ова израза показує, да **при интегралению функціє, коя є снабдевена съ каквимъ сталнимъ чинителѣмъ, овога одма као чинителя и интеграла предъ интегралный знакъ извадити можемо и валя.**

По другомъ є пакъ изразу **интегралъ алгебрайскогъ сбира више диференціалны функція раванъ алгебрайскомъ сбиру интеграла поедины тій функція.**

2.) Интегралећи правило IV. поменутога §-а, и определяваюћи после $\int\varphi(x)\,df(x)$, слѣдує

$$\text{III.)}\quad \int\varphi(x)\,df(x) = \varphi(x)\,f(x) - \int f(x)\,d\varphi(x),$$

изразъ, кои садржи **правило** такозваногъ **почастногъ интеграленя.**

3.) Ако у $\int f(x)\,dx$ узмемо место x произвольну неку функцію $\varphi(z)$, коя x више несадржи, добыямо

$$\text{IV.)}\quad \int f(x)\,dx = \int f[x=\varphi(z)]\,.\,d\varphi(z) = \int\{f[x=\varphi(z)]\,.\,\varphi_1(z)\}\,.\,dz,$$

изразъ, у комъ є садржано **правило интеграленя заменомъ.**

4.) Пошто є $d\,alf(x) = a\,.\,\dfrac{df(x)}{f(x)}$, мора быти обратно

$$\text{V.)}\quad \int a\,.\,\frac{df(x)}{f(x)} = a\,.\,lf(x),$$

то ће рећи: **ако є при датой деловной диференціалной функціи, немотрећи на сталне чинителѣ, броитель ди-**

ференціалъ именителя, онда є траженый интегралъ природный логаритамъ именителя, съ надлежнимъ обзиромъ на оне чинителѣ.

§ 86.

Простимъ извртанѣмъ образаца §§ 6. — 14. слѣдую

1.) $$\int x^n . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2.) $$\int a^x . dx = \frac{a^x}{la}$$

3.) $$\int e^x . dx = e^x$$

4.) $$\int \frac{dx}{x} = lx$$

5.) $$\int sin\, x . dx = -\, cos\, x$$
$$= sin\, v . x$$

6.) $$\int cos\, x . dx = sin\, x$$
$$= -\, cos\, v . x$$

7.) $$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tang\, x$$

8.) $$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\, cot\, x$$

9.) $$\int \frac{sin\, x . dx}{cos^2 x} = sec\, x$$

10.) $$\int \frac{cos\, x . dx}{sin^2 x} = -\, cosec\, x$$

11.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,(sin = x) = -\, arc\,(cos = x)$$

12.) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc(tang = x) = -\, arc(cot = x)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} . l\, \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

13.) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc(sec = x) = -\, arc(cosec = x)$$

14.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = arc\,(sin\, v . = x) = -\, arc\,(cos\, v . = x)$$

15.) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = l(x+\sqrt{1+x^2}) = -\, l(x-\sqrt{1+x^2})$$

16.) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x}{1-x}.$$

За ове образце имамо іошъ приметити: 1.) да свакомъ одъ нъи за подпуный интегралъ валя іошъ придати некій сталный брой; 2.) да сви стоє тако исто, ако место x узмемо ма какву функцію, и 3.) да ако за неке одъ нъи и имамо више вредностій, ове зато немораю быти безусловно єднаке, но могу се међу собомъ разликовати съ каквимъ сталнимъ броємъ.

в.) Помоћни образци.

§ 87.

1.) Ставимо у име определяваня $\int(a+bx)^n \,.\, dx$, было n ма какавъ брой, $a+bx=z$. Бытће $dx=\frac{dz}{b}$, а $\int(a+bx)^n.\,dx=\frac{1}{b}\int z^n.\,dz=\frac{z^{n+1}}{b(n+1)}$ (1. обр. пређ. §-а), или ако садъ повратимо место z горню нѣгову вредность,

$$17.)\quad \int(a+bx)^n.\,dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)}.$$

2.) На истый начинъ налазимо и $\int x^{n-1}\,dx.(a+bx^n)^m$, при комъ є $x^{n-1}\,dx$, немотрећи на сталне чинителѣ b и n, диференціалъ одъ $a+bx^n$, брoеви m и n притомъ были какви му драго.

Поставляюћи т. є. $a+bx^n=z$, слѣдує $x^{n-1}\,dx=\frac{dz}{bn}$, и зато вопросный $\int x^{n-1}\,dx.(a+bx^n)^m=\frac{1}{bn}\int z^m\,dz=\frac{z^{m+1}}{bn(m+1)}$, или ако повратимо вредность одъ z,

$$18.)\quad \int x^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^m=\frac{(a+bx^n)^{m+1}}{bn\,(m+1)}.$$

Поставляюћи овде $n=1$, и изменююћи m съ n, слѣдує сасвимъ просто прећашный интегралъ.

3.) Диференціалећи $a + bx^n$ добыямо $bn \,.\, x^{n-1} \,.\, dx$, тако да стои

$$A\,x^{n-1}.\,dx = \frac{A}{bn}\cdot d\,(a + bx^n)\,;$$

и да збогъ тога по V. правилу § 85. можемо рећи:

$$19.)\quad \int\frac{A\,x^{n-1}\,.\,dx}{a + bx^n} = \frac{A}{bn}\cdot l\,(a + bx^n)\,.$$

§ 88.

Требаю намъ интеграли $\int\frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}}$ и $\int\frac{dx}{a \pm bx^2}$.

Ту опажамо лако, да є првый съ горньимъ знакомъ у именителю найвећма наликъ на 15., а съ дольнимъ знакомъ на 11. интегралъ §а 86.; другій є пакъ найвећма наликъ на 12., съ горньимъ знакомъ, а на 16. съ дольнимъ. На те дакле интеграле трудимо се свести ій, и получуємо то слѣдуюћимъ путемъ. Вадимо у именителю a као заєдничкога чинителя, и ставлямо после $\frac{b}{a}x^2 = z^2$, т. є. $x = z\sqrt{\frac{a}{b}}$, дакле $dx = dz\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot$ Тиме є изразъ

$$\frac{dx}{\sqrt{a \pm bx^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a}.\sqrt{1 \pm \frac{b}{a}x^2}} = \frac{dz}{\sqrt{b}.\sqrt{1 \pm z^2}}$$

очевидно сведенъ на найпре споменута два образца, а

$$\frac{dx}{a \pm bx^2} = \frac{dx}{a\left(1 \pm \frac{b}{a}\,x^2\right)} = \frac{dz}{\sqrt{ab}\,.\,(1 \pm z^2)}$$

на 12. и 16., тако да є сада сасвимъ просто по 15. и 11. образцу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot l\,(z+\sqrt{1+z^2}),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot arc\,(sin=z)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot arc\,(cos=z)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{\sqrt{1-z^2)}}\,{}^{*)}),$$

а по **12.** и **16.** образцу

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot arc\,(tang=z)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\cdot l\,\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}},$$

$$\int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot l\,\frac{1+z}{1-z}.$$

Збогъ тога, ако повратимо вредность $z=x\sqrt{\frac{a}{b}}$,

20.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\left[l\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})-l\sqrt{a}\right]$$ или

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot l\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx}\right),$$ ако $-\frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

приброимо одма неизвестномъ сталномъ брою C, —

---

*) Кадъ є $\sin=z$, онда є $\cos=\sqrt{1-\sin^2}=\sqrt{1-z^2}$, и зато $tang=\frac{\sin}{\cos}=\frac{z}{\sqrt{1-z^3}}$.

$$21.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ arc\left(sin=x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot arc\left(cos=x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\ arc\left(tang=\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}\right),$$

$$22.)\ \int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot arc\left(tang=x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\cdot l\,\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}},\ \text{а}$$

$$23.)\ \int\frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot l\,\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}.$$

§ 89.

1.) За интеграле $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx\pm cx^2}}$ и $\int\frac{dx}{a+bx\pm cx^2}$ стављамо односно $x\pm\frac{b}{2c}=z$, т. є. $x=z\mp\frac{b}{2c}$, чимъ постає $a+bx\pm cx^2=\left(a\mp\frac{b^2}{4c}\right)\pm cz^2$, а $dx=dz$, тако да є после

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int\frac{dz}{\sqrt{\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\int\frac{dz}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2}},$$

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \int \frac{dz}{\left(a - \frac{b^2}{4c}\right) + cz^2},$$

$$\int \frac{dx}{a + bx - cx^2} = \int \frac{dz}{\left(a + \frac{b^2}{4c}\right) - cz^2},$$

првый очевидно сведенъ на онай подъ 20. (пређ. §), другій на 21., трећій на 22., а четвртый на 23.

Заменююћи дакле у овимъ образцима a съ $\left(a \pm \frac{b^2}{4c}\right)$, b са c, а x са z, слѣдуе

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot l \left[2\,cz + \sqrt{(4ac - b^2) + 4c^2z^2}\right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot arc\left(sin = \frac{2cz}{\sqrt{4\,a\,c + b^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot arc\left(cos = \frac{2cz}{\sqrt{4\,a\,c + b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot arc\left(tang = \frac{2cz}{\sqrt{(4ac + b^2) - 4c^2z^2}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot arc\left(tang = \frac{2cz}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot l \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - 2cz}{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2cz},$$

$$\int \frac{dx}{a + bx - cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{4ac + b^2}} \cdot l \frac{\sqrt{4ac + b^2} + 2cz}{\sqrt{4ac + b^2} - 2cz},$$

или ако место z узмемо надлежно $x \pm \frac{b}{2c}$, 24.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l\,(2cx+b+2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx+cx^2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot l\left(\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right),$$

25.) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\left(sin=\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\left(cos=\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\,arc\left(tang=\frac{2cx-b}{2\sqrt{c}.\sqrt{a+bx-cx^2}}\right),$$

26.) $$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot arc\left(tang=\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot l\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}-(2cx+b)}{\sqrt{b^2-4ac}+(2cx+b)},$$

27.) $$\int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{1}{\sqrt{4ac+b^2}}\cdot l\,\frac{\sqrt{4ac+b^2}+(2cx-b)}{\sqrt{4ac+b^2}-(2cx-b)}.$$

Одъ две вредности 26. интеграла стои прва за случай ако є $4ac > b^2$, а друга при $4ac < b^2$. Ако бы пакъ случайно было $4\,ac = b^2$, постаю оба израза безкрайни, за знакъ, да вопросный интегралъ у томъ случаю ніє трансцендентанъ. Ево одма увереня: кадъ є $b^2 = 4\,ac$, онда є $b = 2\sqrt{ac}$, а $a + bx + cx^2 = a + 2\sqrt{ac}\,.\,x + cx^2 = (\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2$, и зато у томъ случаю

$$\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}=\int\frac{dx}{(\sqrt{a}+x\sqrt{c})^2}=-\frac{1}{\sqrt{c}\cdot(\sqrt{a}+x\sqrt{c})}$$

доиста алгебрайска функція.

2.) Узимаюћи у обр. 24. $-\frac{1}{x}$ место x, дакле $\frac{dx}{x^2}$ место dx, и изменюючи после c съ α, $-b$ са β, а a са γ, слѣдує

$$28.)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot l\left[\frac{2\sqrt{\alpha}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x}-(2\alpha+\beta x)\right].$$

Истимъ начиномъ добыямо изъ образца 25.

$$29.)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{-\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot arc\left(sin=\frac{\beta x-2\alpha}{x\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right).$$

§ 90.

1.) Ако бы, съ намеромъ да изнађемо $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$, у образцима 24. и 25. узели $c=0$, добыли бы нуллу; али тай интегралъ, каошто ћемо одма видити, и ніє трансцендентанъ, но алгебрайскій.

По образцу 17. § 87. имамо просто $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\int(a+bx)^{-\frac{1}{2}}.dx=\frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{b}\cdot\sqrt{a+bx}$. На истый добыямо $\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx}}=-\frac{2}{b}\sqrt{a-bx}$, тако да садъ убште стои.

$$30.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{a\pm bx}}=\pm\frac{2}{b}\sqrt{a\pm bx}.$$

2.) Поставляюћи далѣ у горньимъ образцима подъ 28. и 29., за $\int\frac{dx}{x\sqrt{\beta x+\gamma x^2}}$, $\alpha=0$, постаю обе вредности истога интеграла безкрайне, за знакъ да тай интегралъ ніє трансцендентанъ, но алгебрайскій. И доиста ако у предходећемъ 30. интегралу узмемо $-\frac{1}{x}$, γ и $-\beta$ место x, a и b, слѣдує као алгебрайскій

$$31.)\quad \int\frac{dx}{x\sqrt{\pm\beta x+\gamma x^2}}=\mp\frac{2}{\beta x}\cdot\sqrt{\pm\beta x+\gamma x^2}$$

3.) Ако є $f(x)=a+bx\pm cx^2$, имамо $l\,f(x)=l(a+bx\pm cx^2)$, а $d\,l\,f(x)=\frac{b\pm 2cx}{f(x)}\,dx=\frac{b\,dx}{f(x)}\pm\frac{2cx\,.\,dx}{f(x)}$. Одтудъ пакъ слѣдує $\frac{x\,dx}{f(x)}=\pm\frac{d\,l\,f(x)}{2c}\mp\frac{b\,dx}{2c\,f(x)}$, и зато

$$\int\frac{x\,dx}{f(x)}=\pm\frac{l\,f(x)}{2c}\mp\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{f(x)},\ \text{т. є.}$$

$$32.)\quad \int\frac{x\,dx}{a+bx\pm cx^2}=\pm\frac{l(a+bx\pm cx^2)}{2c}\mp\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{a+bx\pm cx^2},$$

образацъ, съ коимъ интегралъ лево, као вопросный, доводимо на познате подъ 26. и 27.

Садъ смо, очевидно, у станю изнаћи и интегралъ функціє вида

$$\frac{(a\pm bx)\,dx}{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}.$$

6.) Найпосле ако имамо изнаћи $\int\frac{ax^m\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}$, ставлямо $\alpha+\beta x=z$, дакле $x=\frac{z-\alpha}{\beta}$, $x^m=\frac{(z-\alpha)^m}{\beta^m}$, а $dx=\frac{dz}{\beta}$. Тимъ быва вопросный, по реду

$$33.)\quad \int\frac{ax^m\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}=\frac{a}{\beta^{m+1}}\int\frac{(z-\alpha)^m dz}{z^n},$$

и добыямо га дакле у случаю ако є m **цео положанъ** брой, развіяюћи найпре $(z-\alpha)^m$ по биномномъ правилу, и делећи после све чланове тога степена са z^n, єръ тадъ смо га свели на интегралъ алгебрайскогъ сбира самы диференціалны монома, кои се сада лако налази помоћу правила I. и II. § 85. и 1. обр. § 86. — Да пакъ найпосле іошъ валя повратити горню вреднесть за z, разуме се по себи.

За особитый случай да є $m = 0$, слѣдує изъ предходеђегъ образца

$$34.)\quad \int \frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x)^n} = \frac{a}{\beta}\int\frac{dz}{z^2} = -\frac{a}{\beta\,(n-1)(\alpha+\beta x)^{n-1}}.$$

Особиты примера за упражнянанѣ у употребляваню овы образаца неузимамо овде зато никаковы, єръ ђемо ій доцніє врло често и на найразличитіи начинъ употребљавати.

г.) Интеграленѣ алгебрайски функція целы раціоналны

§ 91.

Диференціалне функціє алгебрайске раціоналне целе све су вида

$$ax^a\,dx + bx^\beta\,dx + cx^\gamma\,dx + \ldots, \ldots\ldots,$$

и ништа ніє лакше сада интегралити, но такову функцію. по правилама **I** и **II.** § 85. и образцу **1.** § 86. По тима имамо съ места

$$\int (ax^a dx + bx^\beta dx + cx^\gamma dx + \ldots) = a\int x^a dx + b\int x^\beta dx + c\int x^\gamma dx + \ldots$$

$$= \frac{ax^{a+1}}{a+1} + \frac{bx^{\beta+1}}{\beta+1} + \frac{cx^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \cdots + C.$$

Н. п. $\int (1 - 2x + 3x^2 - 7x^6)\,dx = x - x^2 + x^3 - x^7 + C.$

Неимаюђи ништа више о томъ послу ређи, приступамо одма къ

д.) Интеграленю алгебрайски деловны функція.

§ 92.

Осимъ дояко веђъ показаны оны образаца, кои се тичу таковы функція, имамо о њиовомъ интеграленю іошъ слѣдуюђе приметити.

Дата диференціална деловна функція или є чиста или нечиста. Ако є нечиста добыямо, простомъ деобомъ броителя чрезъ именителя, место нѣ алгебрайскій сбиръ одъ єдне целе функціє и єдне деловне чисте; после чега имамо нѣнъ интегралъ по § 85. раванъ алгебрайскомъ сбиру интеграла те две функціє. Како пакъ интеграленѣ оне целе функціє неподлежи сада никаквой више тешкоћи, то є дакле притомъ само іошъ до тога стало, да видимо, како се налази интегралъ оне деловне чисте функціє, ако т. є. ніє случайно такова, да є нѣнъ интегралъ у єдномъ одъ пређе споменуты образаца већъ разрешенъ. Представимо ю съ $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Начинъ, коимъ изтражуємо интегралъ такове функціє, састои се уобште у томе, да є по упутству I. Ч. разлажемо у почастне разломке, и после ове интегралимо; при чему наравно валя разликовати понаособъ све могуће случаєве у смотреню рода именителѣвы чинителя. Подробніє дѣйствую о томе слѣдуюћи §§-и.

§ 93.

Ако се именитель $\varphi(x)$ састои изъ самы **дойстны неєднаки** чинителя, онда є свакій вида $\frac{a}{\alpha + \beta x}$, и у томъ се дакле случаю вопросный $\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ састои изъ сбира самы интеграла вида $\int\frac{a\,dx}{a + \beta x}$, кои се лако налазе образцемъ 19. у § 87.

Ово и у знацима изражено, стои за поменутый случай

$$\int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx = \int\frac{a_1\,dx}{\alpha_1+\beta_1 x} + \int\frac{a_2\,dx}{\alpha_2+\beta_2 x} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{a_1}{\beta_1}\cdot l(\alpha_1+\beta_1 x) + \frac{a_2}{\beta_2}\cdot l(\alpha_2+\beta_2 x) + \cdots\cdots$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1+2x^2}{2+3x-3x^2-2x^3}=\frac{1+2x^2}{(1-x)(2+x)(1+2x)},$$

коя се по § 107. I. Ч. састои изъ почастны разломака

$$\frac{1}{3(1-x)},\ \frac{-1}{2+x}\ \text{и}\ \frac{1}{3(1+2x)},\text{— имамо}$$

$$\int\frac{(1+2x^2)\,dx}{2+3x-3x^2-2x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1-x}-\int\frac{dx}{2+x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{1+2x}$$

$$=-\frac{1}{3}l(1-x)-l(2+x)+\frac{1}{3}l(1+2x)+C.$$

§ 94.

Ако именитель $\varphi(x)$ има и **прости мнимы**, дакле **квадратны доистны**, **неєднаки** чинителя вида $(x-m)^2+n^2$, онда у интегралу вопросне функціє $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ добыямо, осимъ интеграла пређашнѣга вида, іошъ и овога: $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}$.

Овакавъ интегралъ добыямо лако, поставляюћи $x-m=z$, єръ тиме быва $x=m+z$, $dx=dz$, и зато

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\int\frac{[(a+bm)+bz]\,dz}{n^2+z^2}=\int\frac{(a+bm)\,dz}{n^2+z^2}+$$
$$+\int\frac{bz\,dz}{n^2+z^2}$$

$$=(a+bm)\int\frac{dz}{n^2+z^2}+b\int\frac{z\,dz}{n^2+z^2},$$

тако да после првый одъ ова два интеграла десно можемо изнаћи по образцу 22. § 88., а другій по мало пре споменутомъ 19. образцу § 87. — Подвргаваюћи ій тима образцима налазимо

$$(a+bm)\int\frac{dz}{n^2+z^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{n}),$$ а

$$b\int\frac{z\,dz}{n^2+z^2}=\frac{b}{2}\cdot l\,(n^2+z^2),$$ и зато

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\,(tang=\frac{z}{n})+\frac{b}{2}\cdot l\,(n^2+z^2),$$

или, ако повратимо место z нѣгову вредность $x-z$, свакій интегралъ у вопросномъ случаю, вида

$$\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}=\frac{a+bm}{n}\cdot arc\left(tang=\frac{x-m}{n}\right)+b\,.\,l\sqrt{(x-m)^2+n^2}.$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{x^2+x-1}{x^3-4x^2+9x-10}=\frac{x^2+x-1}{(x-2)[x-(1+2\sqrt{-1})].[x-(1-2\sqrt{-1})]}$$

$$=\frac{x^2+x-1}{(x-2)(x^2-2x+5)}=\frac{x^2+x-1}{(x-2)\,[(x-1)^2+4]},$$

коя се, по 109. §-у I. Ч., састои изъ доистны почастны разломака $\frac{1}{x-2}$ и $\frac{3}{x^2-2x+5}=\frac{3}{(x-1)^2+4}$, — имамо по горнѣму, збогъ $a=1$, $b=0$, $m=1$, $n=2$ при интегралу другогъ почастногъ разломка,

$$\int\frac{(x^2+x-1)\,dx}{x^3-4x^2+9x-10}=\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}$$

$$=l\,(x-2)+\frac{3}{2}\,arc\left(tang=\frac{x-1}{2}\right)+C.$$

На истый начинъ као овде $\int\frac{(a+bx)\,dx}{(x-m)^2+n^2}$, определяю се, обзиромъ на §§ 194. — 198. I. Ч., и интеграли вида $\int\frac{dx}{x^n\pm a^n}$ и $\int\frac{x^m dx}{x^n\pm a^n}$, ако су бройви m и n *цели положни.*

§ 95.

Ако именитель $\varphi(x)$ има еднаки просты доистны чинителя, онда вопросный интегралъ садржаt'ће и интеграле вида $\int\frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}$, кое лако разрешавамо образцемъ 17. § 87.

По томъ є образцу свакій таковый

$$\int\frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x)^n}=\frac{a}{b(n-1)(\alpha+\beta)^{n-1}}+C.$$

Н. п. ако є вопросна деловна функція.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{2x^2-x+2}{x^2.(x-1)(2x+1)^2},$$

коя се састои изъ почастны разломака $-\frac{2}{x^2}, \frac{7}{x}, \frac{1}{3(x-1)}, -\frac{8}{(2x+1)^2}$ и $\frac{-44}{3(2x+1)}$, — имамо

$$\int\frac{(2x^2-x+2)dx}{x^2.(x-1)(2x+1)^2}=-2\int\frac{dx}{x^2}+7\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}$$

$$-8\int\frac{dx}{(2x+1)^2}-\frac{44}{3}\int\frac{dx}{2x+1}.$$

Првый одъ десны интеграла определює се по обр. 1., а другій обр. 4. § 86., — трећій и последньій по обр. 19. § 87., а четвртый пређе поменутимъ образцемъ 17. истога §-а.

Поступаюћи съ ньима по тима образцима, слѣдує

$$\int\frac{(2x^2-x+2)dx}{x^2(x-1)(2x+1)^2}=\frac{2}{x}+7lx+\frac{1}{3}\,l\,(x-1)+\frac{4}{2x+1}{}^{*)}$$

$$-\frac{22}{3}\,l\,(2x+1)$$

---

*) Узимаюћи у горнѣмъ образцу за $\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$, $a=1$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $n=2$, быва $\int\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{2(1-2)(1+2x)^{2-1}}=-\frac{1}{2(1+2x)}$.

§ 96.

Найпосле ако именитель $\varphi(x)$ има и **еднаки** просты **мнимы**, дакле **еднаки квадратны** доистны чинителя, онда наилазимо іошъ на интеграле вида $\int\frac{(a+bx)dx}{[(x-m)^2+n^2]^r}$.

Свакій таковый интегралъ доводи се, истомъ заменомъ као у § 94., на интегралъ вида

$$\int\frac{(a+bz)\,dz}{(z^2+n^2)^r}=a\int\frac{dz}{(z^2+n^2)^r}+b\int\frac{zdz}{(z^2+n^2)^r}.$$

Последньій одъ ова два интеграла може се лако изнаћи по обр. 18. § 97.; како се пакъ добыя онай првый, то ћемо видити текъ доцніє.

e.) Интеграленѣ алгебрайски ирраціоналны функція.

§ 97.

Осимъ дотичны образаца у §§-а 86. — 90., имамо іошъ приметити уобште, да се интеграленѣ ирраціоналны диференціалны функція сматра као већъ готовъ посао, ако смо само у станю дати имъ видъ раціоналанъ. Съ тога бытће задатакъ слѣдуюћи §§-а показати, како се то постизава у некимъ случаєвима, єръ да се за то немогу поставити обшта правила, разуме се лако по себи.

§ 98.

1.) Ако се у датой диференціалной функціи, поредъ раціоналны израза налази само ирраціоналный овакавъ: $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, — онда валя ставити $a+bx=z^n$, дакле $x=\frac{z^n-a}{b}$, а $dx=\frac{nz^{n-1}\,dz}{b}$, па ће нова функція, тиме добывена, быти раціонална.

Н. п. ако имамо $\int(2x^2-x+2)\,dx\sqrt[5]{1-2x}$, па поставимо $1-2x=z^5$, — постае $x=\frac{1-z^5}{2}$, $dx=-\frac{5}{2}z^4dz$, $2x^2-x+2=\frac{1}{2}(4-z^5+z^{10})$, дакле $\int(2x^2-x+2)dx\sqrt[5]{1-2x}$ $=-\frac{5}{4}\int(4-z^5+z^{10})z^5\,dz=-\frac{5}{4}\int(4z^5-z^{10}+z^{15})\,dz$ **раціоналанъ**, и по правилама I. и II. § 85. и обр. 1. § 86. раванъ $-\frac{5}{4}z^6\left(\frac{2}{3}-\frac{z^5}{11}+\frac{z^{10}}{16}\right)=-\frac{5}{2112}z^6(352-48z^5+33z^{10})$, — а ако іошъ повратимо вредность $z=(1-2x)^{\frac{1}{5}}$,

$$\int(2x^2-x+2)\,dx\cdot\sqrt[5]{1-2x}=-\frac{5}{2112}(1-2x)\left[352-48(1-2x)+33(1-2x)^2\right]\sqrt[5]{1-2x}.$$

2.) Ако пакъ у датой функціи имамо осимъ $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ іошъ и $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$, онда треба метнути $a+bx=z^{ns}$, дакле $x=\frac{z^{ns}-a}{b}$, а $dx=\frac{ns}{b}\cdot z^{ns-1}.\,dz$, и тиме бытће опетъ нова функція раціонална.

Н. п. за $\int\frac{\sqrt{x}-2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ ставлямо $x=z^6$, дакле $dx=6z^5dz$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$, а $\sqrt[3]{x^2}=z^4$, чимъ быва вопросный.

$$\int\frac{\sqrt{x}-2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=-6\int\frac{2z^9-z^4}{2z^5+1}\,dz$$

очевидно раціоналанъ.

Овай новый интегралъ израђенъ, показуе се раванъ $\int\left(z^4-\frac{2z^4}{2z^5+1}\right)dz=\frac{z^5}{5}-\frac{1}{5}\,l\,(2z^5+1)$, и зато ако заменемо и после вредность $z=\sqrt[6]{x}$ повратимо:

$$\int\frac{\sqrt{x}-2x\sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{6}{5}\left[l\,(2\sqrt[6]{x^5}+1)-\sqrt[6]{x^5}\right]+C.$$

§ 99.

Поступаюћи по овимъ упутствама добыямо сасвимъ лако

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b}\cdot\sqrt{a+bx}\text{, каогодъ у § 90. подъ 30.,}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b^2}\cdot\left[\frac{1}{3}(a+bx)-a\right]\cdot\sqrt{a+bx}$$

$$=-\frac{2}{3b^2}(2a-bx)\,.\sqrt{a+bx},$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{b^3}\left[\frac{1}{5}(a+bx)^2-\frac{2}{3}a(a+bx)+a^2\right]\cdot\sqrt{a+bx}$$

$$=\frac{2}{15b^3}(8a^2-4abx+3b^2x^2)\,.\sqrt{a+bx}\,,$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot l\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}.$$

Како є пакъ $\sqrt{a+bx}=\frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{a}{\sqrt{a+bx}}+\frac{bx}{\sqrt{a+bx}}$, а $x\sqrt{a+bx}=\frac{ax+bx^2}{\sqrt{a+bx}}=\frac{ax}{\sqrt{a+bx}}+\frac{bx^2}{\sqrt{a+bx}}$, то можемо садъ, каошто є лако увидити, сасвимъ просто определити и интеграле $\int dx\sqrt{a+bx}$ и $\int x\sqrt{a+bx}$.

§ 100.

1.) Ако се у датой диференціалной функціи наоди произвольный, н. п. $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$, постат'ће раціонална, чимъ ставимо $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}=z^n$.

Н. п. ако є $\int\left[x-(2+x)\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}\right]dx$; морамо ставити $\frac{2-x}{1+2x}=z^3$, дакле $x=\frac{2-z^3}{1+2z^3}$, а $dx=9\,\frac{z^2dz}{(1+2z^3)^2}$; тиме постає

$$\int\left[x-(2+x)\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}\right].\,dx=9\int\frac{z^2dz(2-4z-z^3-3z^4)}{(1+2z^3)^3}$$

$$=9\int\frac{(2z^2-4z^3-z^5-3z^6)\,dz}{(1+2z^3)^3},$$

очевидно раціоналанъ. Разрешавамо га на тай начинъ, да найпре разложимо $1+2z^3$ по I. Ч. § 104. у просте чинитель, после деловну функцію $\frac{2z^2-4z^3-z^5-3z^6}{(1+2z^3)^2}$ познатимъ начиномъ у почастне разломке, а даль поступамо по § 96.; после свега тога пакъ враћамо за z нѣгову горню вредность $\sqrt[3]{\frac{2-x}{1+2x}}$.

2.) Ако се пакъ налазе више корена одъ $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}$, н. п. $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$ и $\sqrt[r]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^s}$, онда преводимо дату функцію у другу раціоналну тиме, што мећемо $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}=z^{mr}$.

Н. п. ако имамо интегралити функцію

$$\frac{x\sqrt[3]{(1+x)^2}.\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)}.\sqrt[3]{(1-x)^2}-\sqrt[3]{(1+x)}.\sqrt[6]{(1-x)^5}}\,dx,$$

делимо найпре броителя и именителя, да бы ю довели на споменутый случай, са $\sqrt{(1-x)}.\sqrt[3]{(1-x)^2}$. Тиме бывa одъ нѣ

$$\frac{x\sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^8}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}}dx.$$ Садъ ставлямо $\frac{1+x}{1-x}=z^6$,

дакле $x=\frac{z^6-1}{z^6+1}$, а $dx=\frac{12z^5dz}{(z^6+1)^2}$, чимъ постає вопросный интегралъ $=\int\frac{(z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7)\,dz}{(z^6+1)^3}$, очевидно раціоналанъ.

Како пакъ треба далѣ поступати, за цело садъ више ніє потребно толковати.

3.) У станю смо садъ интегралити и такове функціє, коє садрже више корена одъ $a+bx^n$ или одъ $\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}$, н. п. $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$ и $(a+bx)^{\frac{t}{u}}$ или $\left(\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}\right)^{\frac{r}{s}}$ и $\left(\frac{a+bx^n}{\alpha+\beta x^n}\right)^{\frac{t}{u}}$, — само ако поредъ тога имаю іошъ заєдничкога чинителя x^{n-1}; єръ прелазе у томъ случаю съ места у пређе толковане подъ 1. и 2., чимъ само метнемо $x^n=z$.

§ 101.

Ако дата диференціална функція осимъ $\sqrt{a+bx+cx^2}$ несадржи никакавъ другій **ирраціоналный** брой, али тай єданъ макаръ и вишепута, — онда можемо є превести у раціоналну функцію на єданъ одъ слѣдуюћа три начина.

1.) Ставлямо $\sqrt{a+bx+cx^2}=x\sqrt{c}+z$, дакле $x=\frac{z^2-a}{b-2z\sqrt{c}}$, а $dx=-2\frac{z^2\sqrt{c}-bz+a\sqrt{c}}{(b-2z\sqrt{c})^2}dz$, чимъ постає дата функція раціонална, и може се после интегралити по некомъ одъ доякошнњи §§-а.

Овако поступа се нарочно у случаю, кадъ є c положанъ брой.

2.) Мећемо $\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz$, дакле $x=\frac{b-2z\sqrt{a}}{z^2-c}$, а $dx=2\,\frac{z^2\sqrt{a}-bz-c\sqrt{a}}{(z^2-c)^2}\,dz$.

Овай начинъ употреблява се, кадъ є брой a положанъ. — Найпосле

3.) Разлажемо найпре $a+bx+cx^2$ у корене чинителѣ (Ч. I. § 104.); притомъ налазимо $x=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\alpha$ и $x=-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\beta$, тако да є после $a+bx+cx^2=c.(x+\alpha)(x+\beta)$; — затимъ ставлямо $(x+\alpha)(x+\beta)=(\alpha+x)^2.z^2$, дакле $\sqrt{a+bx+cx^2}=(\alpha+x).z\sqrt{c}$, $x=\frac{\beta-\alpha z^2}{z^2-1}$, а $dx=\frac{2(\alpha-\beta)zdz}{(z^2-1)}$. Съ овимъ x постає $\sqrt{a+bz+cx^2}=-\frac{(\alpha-\beta)z^2}{z^2-1}$, а съ овомъ вредности и нађеномъ за dx, вопросный интегралъ раціоналанъ.

Овай трећій начинъ може се употребити, быо брой c положанъ или одречанъ, само ако су броєви α и β притомъ доистни.

Приметити само іошъ валя, да бы при првомъ начину рачунъ нешто простіи быо, кадъ бы пре свега извукли $\sqrt{c}$ као заедничкогъ чинителя, и после бы метнули $\frac{b}{c}=m$, а $\frac{a}{c}=n$; єръ тиме имали бы место $\sqrt{a+bx+cx^2}$, $\sqrt{n+mx+x^2}$, а то треба ставити само $=x+z$. — Подобно быо бы при другомъ начину рачунъ простіи, кадъ бы $\sqrt{a}$ као заедничкогъ чинителя извадили, и после $\frac{b}{a}=p$, а $\frac{c}{a}=q$ поставили; єръ тиме бы место $\sqrt{a+bx+cx^2}$ имали $\sqrt{1+px+qx^2}$, кое после валя поставити само $=1+xz$.

Напослѣдку по себи разуме се, да ћемо овимъ истимъ начинима вопросну цѣль іошъ и у томъ случаю постићи, ако се буде налазіо $\sqrt{a+bx+cx^2}$ у другомъ каквомъ степену.

§ 102.

1.) Ако се у датой функціи налази поредъ $\sqrt{a+bx}$ іошъ и $\sqrt{\alpha+\beta x}$, ставлямо $\sqrt{a+bx} = z\sqrt{\alpha+\beta x}$, дакле $a + bx = z^2(\alpha+\beta x)$, $x = \frac{\alpha z^2 - a}{b - \beta z^2}$, а $dx = \frac{2(\alpha b - a\beta)z\,dz}{(b-\beta z^2)^2}$.

Тиме бываю, каошто видимо, броеви x и dx, изражени чрезъ z и dz, раціоналии, али се после зато место $\sqrt{a+bx}$ налази $z\sqrt{\alpha+\beta x}$, осимъ што $\sqrt{\alpha+\beta x}$ може стаяти више пута.

Заменюючи затимъ x съ нѣговомъ вредности, израженомъ чрезъ z, постаѥ $\sqrt{\alpha+\beta x} = \frac{\sqrt{\alpha b - a\beta}}{\sqrt{b-\beta z^2}}$, чимъ ѥ вопросный интегралъ, збогъ у нѣму налазећегъ се $\sqrt{b-\beta z^2}$, сведенъ на случай пређашнѣгъ §-а.

Тако н. п. ако ѥ вопросна функція $\frac{(x-1)\sqrt{x+1}-x}{(x+1)\sqrt{x-1}+x} \times$ $\times\, dx$, ставляюћи $\sqrt{x+1} = z\sqrt{x-1}$, дакле $x = \frac{z^2+1}{z^2-1}$, $x - 1 = \frac{2}{z^2-1}$, $x+1 = \frac{2z^2}{z^2-1}$, а $dx = -\frac{4z\,dz}{(z^2-1)^2}$, — имамо нову функцію одъ z:

$$-4\,\frac{2z^2\sqrt{2} - z(z^2+1)\sqrt{z^2-1}}{(z^2-1)^2.[2z^2.\sqrt{2}+(z^2+1)\sqrt{z^2-1}]}\,.\,dz\,,$$

коя збогъ $\sqrt{z^2-1}$, подлежи предходећемъ §-у.

Ставляюћи дакле, по тога §-а 3. упутству, $z^2 - 1 = (z+1)(z-1) = (z-1)^2 . v^2$, т. е. $z = \frac{v^2+1}{v^2-1}$, $z^2 = \frac{(v^2+1)^2}{(v^2-1)^2}$,

$z^2 + 1 = 2\frac{v^4+1}{(v^2-1)^2}$, $z^2 - 1 = 4\frac{v^2}{(v^2-1)^2}$, а $dz = -4\frac{v\,dv}{(v^2-1)^2}$, — добыямо нову функцію одъ v,

$$\frac{(v^2-1)(v^4-1)^2 . \sqrt{2 - 2v(v^8-1)}}{v^3 . [(v^4-1)(v^2+1)\sqrt{2 + 2v(v^4+1)}} . dv,$$

коя е раціонална, и моћи се зато лако интегралити по доякошньимъ §§-ма.

2.) Ако се пакъ у датой диференціалной функціи налазе квадратни корени одъ разны функція другога степена, онда се наилази на интегралъ функціе

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}},$$

гди $f(x)$ представля какву нибудъ алгебрайску функцію, — кои се врло тешко, и у већой части случаева никако неможе ураціоналити.

Такови интеграли називаю се **елиптични трансцендenти**, а занимали су се съ ньима найзнатніи аналитици, и одъ старіи*), и одъ млађи. Али како се о ньима уобште іошъ врло мало зна, а у особите случаеве упуштаюћи се морали бы прекорачити границе овога дела: то се морамо за сада задовольити само съ овомъ напоменомъ.

---

*) Одъ овы нарочито Айлеръ, Лагранжъ и Лежандръ, а одъ новіи особито Якоби и Абелъ. — Лежандръ назива елиптичнимъ трансцендентима све интеграле садржане у

$$\int \frac{A + B\sin^2 z}{C + D\sin^2 z} . \frac{dz}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 z}},$$

кои се добыя известнимъ некимъ преображенѣмъ горнѣга.

ж.) Интеграленѣ израза $x^m . dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

§ 103.

Докъ є при изразу $x^m . dx (a + bx^n)^v$ изложитель v положанъ или одречанъ цео брой, дотле интеграленѣ истога израза, ма какви поредъ тога были изложительи m и n, неподлежи никаквой тешкоћи. Єръ, ако при положномъ изложителю v развіємо $(a + bx^n)^v$ по биномномъ правилу, и све чланове тога степена после помложимо са $x^m dx$, имамо место вопросного интеграла интегралъ алгебрайскогъ сбира самы монома, кои є, каошто знамо, лако разрешенъ. Ако є пакъ изложитель v одречанъ, онда валя само датый изразъ разложити у почастне разломке, и после далѣ по § 95. поступати.

Изъ тій узрока говоритћемо овде о интограленю израза $x^m . dx (a + bx^n)^v$ само у томъ случаю, ако є биномъ $(a + bx^n)^v$ ирраціоналанъ. т. є. ако є изложитель v чистый разломакъ $\frac{r}{s}$.

§ 104.

Осимъ у она два особита случая, гди є или $m = o$ а $n = 1$, или є $x^m dx$ диференціалъ одъ x^n, кое смо у § 87. већъ разрешили подъ образцима **17.** и **18.**, може се вопросный интегралъ іошъ у два случая определити као раціоналанъ. Кадъ и како? видитћемо, докъ се овде найпре уверимо, да при томъ послу изложителѣ m и n можемо предпоставити као целе, иначе или положне или одречне, єръ се други случаєви у томъ обзиру сви дају свести на тай єданъ.

Найпре узмимо да є m положанъ или одречанъ разломакъ $\frac{\alpha}{\beta}$; т. є. $m = \pm \frac{\alpha}{\beta}$, а n положанъ разломакъ $\frac{\gamma}{\delta}$; дакле вопросный изразъ вида $x^{\pm\frac{\alpha}{\beta}} . dx \left(a + bx^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}}$.

Поставляюћи $x = z^{\beta\delta}$, быва $x^{\pm\frac{a}{\beta}} = z^{\pm a\delta}$; $x^{\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\beta\gamma}$; $dx = \beta\delta . z^{\beta\delta - 1} . dz$, а съ тима вредностима

$$\int x^{\pm\frac{a}{\beta}} . dx \left(a + bx^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}} = \beta\delta \int z^{\delta(\beta \pm a) - 1} . dz \left(a + bz^{\beta\gamma}\right)^{\frac{r}{s}},$$

у комъ су изложительи одъ z очевидно цели брoеви, првый положанъ или одречанъ, а другій положанъ.

Сада нека є, поредъ прећашнћга m изложитель $n = -\frac{\gamma}{\delta}$, т. є. одречанъ разломакъ.

Ставляюћи у томъ случаю найпре $x = \frac{1}{z}$, быва $x^{\pm\frac{a}{\beta}} = z^{\pm\frac{a}{\beta}}$, $x^{-\frac{\gamma}{\delta}} = z^{\frac{\gamma}{\delta}}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, чимъ є вопросный

$$\int x^{\pm\frac{a}{\beta}} . dx \left(a + bx^{-\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}} = -\int z^{-\frac{2\beta \pm a}{\beta}} dz \left(a + bz^{\frac{\gamma}{\delta}}\right)^{\frac{r}{s}}$$

очевидно сведенъ на прећашньій случай, дакле посредно опетъ на онай са целимъ изложительима, тако да сада основано можемо предпоставити изложителћ m и n у испытати имаюћемъ се интегралу израза $x^m dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$, као целе брoеве.

§ 105.

1.) Узмимо $a + bx^n = z^s$. Постає $x = b^{-\frac{1}{n}} . (z^s - a)^{\frac{1}{n}}$; $x^m = b^{-\frac{m}{n}} . (z^s - a)^{\frac{m}{n}}$, $dx = \frac{sb^{-\frac{1}{n}}}{n} . z^{s-1} . dz (z^s - a)^{\frac{1}{n} - 1}$, а съ тима вредностима

$$\int x^m dx (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} . \int z^{r+s-1} . dz (z^s - a)^{\frac{m+1}{n} - 1};$$

изъ чега є видити, да ће новый интегралъ быти раціоналанъ, ако є случайно $\frac{m+1}{n}$ цео, положанъ или одречанъ брой, и моћи ће се у томъ случаю лако определити єднимъ одъ споменута два начина у § 103.

Н. п. ако є датый изразъ $x^3dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, имамо $m=3$, $n=2$, $a+bx^n=2-x^2=z^2$, $r=1$, $s=2$, $a=2$, $b=-1$, дакле вопросный интегралъ по горнѣмъ образцу,

$$\int x^8dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\int z^2dz\,(z^2-2) \quad \text{раціоналанъ,}$$

а то зато што є $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2=$ цео брой. Израђенъ є $=\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}$, тако да ако повратимо вредность $z=\sqrt{2-x^2}$, имамо

$$\int x^3\,dx\,(2-x^2)^{\frac{1}{2}}=(2-x^2)\left[\frac{1}{5}\,(2-x^2)-\frac{2}{3}\right]\cdot\sqrt{2-x^2}+C.$$

2.) Извуцимо x^n као заєдничкогъ чинителя бинома $(a+bx^n)$, и поставимо затимъ $ax^{-n}+b=z^s$. Бытће $x=a^{\frac{1}{n}}.(z^s-b)^{-\frac{1}{n}}$, $x^{m+\frac{nr}{s}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}.(z^s-b)^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$, $dx=-\frac{s}{n}\times$ $\times a^{\frac{1}{n}}.(z^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}.z^{s-1}.dz$, а съ тима вредностима вопросный

$$\int x^mdx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=\int x^{m+\frac{nr}{s}}.\,dx\,(ax^{-n}+b)^{\frac{r}{s}}$$

$$=-\frac{s}{n}.a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}\int z^{r+s-1}.\,dz\,(z^s-b)^{-(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s})-1}.$$

Овай интегралъ, очевидно, бытће раціоналанъ, ако є случайно $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ цео брой, и моћи ће се разрешити по єдномъ одъ споменута два начина у § 103.

Н. п. ако є датый изразъ

$$\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}}=x^{-2}.dx\,(2-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

имамо после извлаченя броя x^2, као заєдничкога чинителя бинома $2-x^2$, $m=-2$, $n=2$, $2x^{-2}-1=z^2$, $a=2$, $b=-1$, $r=-1$, $s=2$, дакле вопросный интегралъ по горнѣмъ образцу

$$\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int dz=-\frac{1}{2}z, \text{ раціоналанъ,}$$

зато што є $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=\frac{-2+1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ цео брой.

Враћаюћи вредность $z=\sqrt{2x^{-2}-1}=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$, имамо коначно

$$\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{2-x^2}}=-\frac{\sqrt{2-x^2}}{2x}.$$

§ 106.

За упражненѣ испытаймо, спадаюли

$$\int\frac{dx}{x^3.\sqrt[3]{1+x^3}} \text{ и } \int\frac{dx\sqrt{1+2x}}{x}$$

у кои одъ изложена два особита случая?

При првомъ є $m=-3$, $n=3$, $r=-1$, $s=3$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{3}=-\frac{2}{3}$, збогъ чега се тай интегралъ по првомъ начину предходећегъ §а неможе разрешити, али га, збогъ $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$, можемо по ономъ другомъ. По тога начина общтемъ образцу, обзиромъ на то да є $a=1$ и $b=1$, слѣдує

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int z\,dz=-\frac{z^2}{2}=-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}+C.$$

При другомъ є интегралу $m=-1$, $n=1$, $r=1$, $s=2$, дакле $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{1}=0$, а $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, збогъ чега истый интегралъ можемо добыти по првомъ начину, никако пакъ по другомъ. Общтій образацъ првога начина дає, збогъ $a=1$ и $b=2$,

$$\int\frac{dx\sqrt{1+2x}}{x}=2\int\frac{z^2dz}{z^2-1}=2\int(dz+\frac{dz}{z^2-1})=2(z-\int\frac{dz}{1-z^2})$$

$$=2z-l\frac{1+z}{1-z}=2\sqrt{1+2x}-l\frac{1+\sqrt{1+2x}}{1-\sqrt{1+2x}}+C.$$

§ 107.

Помоћу овы §§-а, у § 103. споменуты образаца §-а 95. и дотичны упутства за интеграленѣ ирраціоналны функція, у станю смо врло млого интеграла вопросногa ирраціоналногъ вида на прекій начинъ превести у раціоналне, и као такове у крайной форми определити; али несравнѣно више случаєва остаю, гди то или никако нiє могуће, или само са врло великимъ трудомъ. Тога ради поставит'ћемо у слѣдуюћему, нарочно за такове случаєве, іошъ неколико образаца, съ коима вопросный интегралъ доводимо на друге истога вида, али у коима изложитель m, или изложитель $\frac{r}{s}$, или обадва бываю све простiи, докъ се найпосле недође до таквогъ интеграла, кои є или већъ познатъ, или се може изнаћи на єданъ одъ дояко познати начина.

§ 108.

1.) Очевидно є $x^m.dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=x^{m-n+1}.x^{n-1}.dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$.

Ставляюћи у III. правилу § 85., по комъ є

$$\int \varphi(x)\, d\, f(x) = \varphi(x)\, f(x) - \int f(x)\, d\, \varphi(x)\,,$$

$\varphi(x) = x^{m-n+1}$, а $d\, f(x) = x^{n-1}.\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}$, слѣдуе збогъ

$f(x) = \int x^{n-1}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn\,(r+s)} \cdot (a + bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$ (§ 87. обр. 18.), а $d\varphi(x) = (m - n + 1)\, x^{m-n}.\, dx$, —

$$\int x^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn\,(r+s)} \cdot x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$- \frac{s(m-n+1)}{bn\,(r+s)} \int x^{m-n}\, dx\, (a + bx^n)^{\frac{r}{s}+1} \;\ldots\; (\alpha.,$$

или збогъ $x^{m-n}.\, dx\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}+1} = x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}.\,(a+bx^n) = ax^{m-n}.\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} + bx^m.\, dx\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$,

$$\int x^m\, dx\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{bn(r+s)} \cdot x^{m-n+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$- \frac{as\,(m-n+1)}{bn\,(r+s)} \int x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$- \frac{s\,(m-n+1)}{n\,(r+s)} \int x^m\, dx\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}},$$

найпосле ако надлежно скратимо,

$$\int x^m.\, dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{b\,[nr + s(m+1)]}\, x^{m-n+1}.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}$$

$$- \frac{as\,(m-n+1)}{b\,[nr + s(m+1)]} \cdot \int x^{m-n}.\, dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} \;\ldots\; (\mathrm{I}.$$

2.) Изъ овогъ образца последнѣій интегралъ определеюћи слѣдуе

$$\int x^{m-n}.dx(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{x^{m-n+1}.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m-n+1)}$$

$$- \frac{b\,[nr + s(m+1)]}{as\,(m-n+1)} \int x^m\, dx\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}},$$

а одтудъ опетъ, ако место m узмемо $m + n$,

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m+1)}$$

$$-\frac{b[nr+s(m+n+1)]}{as\,(m+1)}\int x^{m+n}.\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} \;\ldots\ldots\; (\mathrm{II}.$$

3.) Горньій образацъ α.), ако у нѣму найпре узмемо $\frac{r}{s}-1$ место $\frac{r}{s}$, а $m+n$ место m, и после определимо $\int x^m\,dx(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, — дає

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{x^{m+1}.a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{m+1}$$

$$-\frac{bnr}{s\,(m+1)}.\int x^{m+n}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1} \;\ldots\; (\beta.$$

Одовудъ пакъ, изражаваюћи bx^{m+n} овако: $x^m.bx^n = x^m.[(a+bx^n)-a] = x^m.(a+bx^n)-ax^m$, добыямо

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{m+1}$$

$$-\frac{nr}{s\,(m+1)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$+\frac{anr}{s\,(m+1)}.\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1},$$

а ако надлежно скратимо,

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = \frac{s\,x^{m-1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{s\,(m+1)+nr}$$

$$+\frac{anr}{s\,(m+1)+nr}.\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}-1} \;..\; (\mathrm{III}.$$

4.) Найпосле ако изъ овогъ образца определимо десный интегралъ и после изменимо $\frac{r}{s}$ са $\frac{r}{s}+1$, слѣдує

$$\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = -\frac{s\,x^{m+1}.(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{an\,(r+s)}$$

$$+\frac{s(m+n+1)+nr}{an\,(r+s)}\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1} \;\ldots\; (\mathrm{IV}.$$

§ 109.

Одъ изнађены овы образаца служи I. за умалявань положногъ, а II. за увећаванѣ одречногъ изложителя m, кадъ є изложитель $\frac{r}{s}$ у обзиру на крайньій интегралъ сходанъ; — III. є за умалявань положногъ, а IV. за увећаванѣ одречногъ изложителя $\frac{r}{s}$, у случаю ако є изложитель m за крайньій интегралъ удесанъ.

Ако треба изложителя m умалявати, и уедно изложителя $\frac{r}{8}$ увећавати, или обратно овога умалявати а оногa увећавати, могу у многимъ случаєвима врло добро послужити споредни горньи образци подъ α.) и β.).

Догодиће се при употребляваню вопросны образаца, да именительи у десной части постаю равни нули, и зато дотичный образацъ неупотребанъ; но на срећу се то башъ при таковимъ случаєвима появлює, где се вопросный интегралъ другимъ некимъ пречимъ путемъ лако доводи или на интегралъ монома, или на интегралъ раціоналногъ каквогъ разломка, тако дакле да оне образце и непотребуємо.

За упражненѣ у употребляваню исты образаца узмимо одма неколико

Примера.

§ 110.

1.) $\int x^5 . dx\, (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = ?$

Ако у образцу I. метнемо $m = 5$, $n = 2$, $r = 1$, $s = 2$, $a = 2$, $b = -1$, слѣдуе

$$\int x^5 . dx\, (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7} x^4 . (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{7} \int x^3\, dx\, (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Са $m = 3$ поредъ исты други вредностій, добыямо

$$\int x^3\,dx\,(2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}x^2(2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}\int x\,dx\,(2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Како є пакъ $x\,dx$, безъ обзира на сталногъ чинителя, диференціалъ одъ x^2, то є по образцу 18. § 87.

$$\int x\,dx\,(2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Заменюючи дакле све по реду добыямо

$$\int x^5 dx (2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{7}x^4(2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{35}x^2(2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{32}{105}(2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -(15x^4 - 24x^2 - 32).(2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.) $\int \frac{dx}{x^4.\sqrt{1 + x^2}} = \int x^{-4}.\,dx\,(2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = ?$

Образацъ II., узимаюћи у нѣму $m = -4$, $n = 2$, $r = -1$, $s = 2$, $a = b = 1$, — дає

$$\int x^{-4}.\,dx\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}x^{-3}.(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{-2}.\,dx(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Са $m = -2$ пакъ, поредъ исты други вредностій, налазимо

$$\int x^{-2}.\,dx\,(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = -x^{-1}.(1 + x^2)^{\frac{1}{2}},$$

и зато ако надлежно заменемо, вопросный

$$\int x^{-4}\,dx.(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}x^{-3}.(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-1}.(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x}\right)\sqrt{1 + x^2}$$

$$= -\frac{1}{3x^3}(1 - 2x^2)\sqrt{1 + x^2} + C.$$

3.) $\int\frac{dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}}{x}=\int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}=?$

По III. образцу, ако у истомъ ставимо $m=-1$, $n=1$, $a=b=1$; $r=5$, $s=2$, — слѣдуе

$$\int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\int x^{-1}\,dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

По томъ истомъ, са $r=3$ поредъ пређашньи други вредностій

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{1}{2}}.$$

И опетъ по нѣму са $r=1$,

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{\frac{1}{2}}=2(1+x)^{\frac{1}{2}}+\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Како є пакъ по § 99.

$$\int x^{-1}.\,dx\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x}}=l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1},$$

то є, ако уредно заменемо, вопросный

$$\int\frac{dx\,(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x}=\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+2(1+x)^{\frac{1}{2}}+l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$=2\left[\frac{1}{5}(1+x)^{2}+\frac{1}{3}(1+x)+1\right].\sqrt{1+x}+l\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

4.) $\int\frac{x^{2}\,dx}{\sqrt{(2-x)^{3}}}=\int x^{2}\,dx\,(2-x)^{-\frac{3}{2}}=?$

По образцу IV., узимаюћи $m=2$, $n=1$, $r=-3$, $s=2$, $a=2$, $b=-1$, имамо

$$\int\frac{x^{2}\,dr}{\sqrt{(2-x)^{3}}}=x^{3}(2-x)^{-\frac{1}{2}}-5\int x^{2}.\,dx\,(2-x)^{-\frac{1}{2}},$$

а овай е последнъій интегралъ по § 99. $= -2\left[\frac{1}{5}(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x)+4\right]\cdot\sqrt{2-x}$; дакле ако ову нѣгову вредность заменемо, вопросный

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2-x)^3}} = \frac{x^3}{\sqrt{2-x}} + 10\left[\frac{1}{5}(2-x)^2 - \frac{4}{3}(2-x)+4\right]\cdot\times$$

$$\times\sqrt{2-x} + C.$$

§ 111.

Осимъ овы примера употребытѣемо образце § 108. іошъ на разрешенѣ често появлююћи се интеграла

$$\int dx\sqrt{a\pm bx^2},\ \int\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{x^2-1}}\ \text{и}\ \int\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}},$$

за свако цело, положно или одречно m.

1.) Ако у образцу III. поменутога §-а узмемо $m=0$, $n=2$, $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, добыямо

$$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}};$$

ако пакъ место последнѣгъ интеграла узмемо нѣгову вредность по 20. образцу § 88., истый

35.) $$\int dx\,(a+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \int dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{b}}\,l\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}) + C.$$

На истый начинъ

$$\int dx\,(a-bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x\,(a-bx^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}},$$

или ако место последнѣгъ интеграла метнемо нѣгову вредность по 21. образцу пређе поменутога §-а,

36.) $$\int dx\sqrt{a-bx^2}=\frac{1}{2}\,x\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}\,arc\left(sin=x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C.$$

2.) Ставляюћи у образцу I. $n=2$, $r=-1$, $s=2$, $a=1$, $b=-1$, слѣдуе уобште

$$\int\frac{x^{m}.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}.\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}.\,dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

ту пакъ узимаюћи место m найпре по реду све безпарне, а после све парне броеве, добыямо подпуный

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{x^3.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2.1}{3.1}\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{x^5.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^4}{5}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{4}{5}\int\frac{x^3.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{x^4}{5}+\frac{4.1}{5.3}\,x^2+\frac{4.2.1}{5.3.1}\right)\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{x^7.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^6}{7}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{6}{7}\int\frac{x^5.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\left(\frac{x^6}{7}+\frac{6.1}{7.5}\,x^4+\frac{6.4.1}{7.5.3}\,x^2+\frac{6.4.2.1}{7.5.3.1}\right)\sqrt{1-x^2}+C,$$

. . . .

$$\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\,arc\,(sin=x)+C,$$

$$\int\frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^3}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{4}\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\Big(\frac{x^3}{4}+\frac{3.1}{4.2}x\Big)\sqrt{1-x^2}+\frac{3.1}{4.2}\,arc\,(sin=x)+C,$$

$$\int\frac{x^6.dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^5}{6}\cdot\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\Big(\frac{x^5}{6}+\frac{5.1}{6.4}x^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}x\Big)\sqrt{1-x^2}$$

$$+\frac{5.3.1}{6.4.2}\,arc\,(sin=x)+C,$$

. . . .

3.) Обзирући се нато, да є образацъ II. нарочно за одречногъ изложителя m, узимаюћи т. є. у истомъ образцу одма таково m, стои

$$\int\frac{dx\,.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{x^m}=-\frac{(a+bx^n)^{\frac{r}{s}+1}}{a\,(m-1)\,x^{m-1}}$$

$$+\frac{b\,[nr-s\,(m-n-1)]}{as\,(m-1)}\int\frac{dx\,.\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}}{x^{m-n}}\ldots(v.,$$

тако да ако метнемо $n=2$, $r=-1$, $s=2$, $a=1$, $b=-1$, имамо уобште подпуный

$$\int\frac{dx}{x^m.\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}.\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Овай интегралъ, каошто се лако увиђа, излази найпосле на $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; зато да пре свега другога изнађемо тай.

Образацъ 28. § 89., ако ставимо $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -$, дае

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}-2}{x}\right) = l\frac{(-2).(1-\sqrt{1-x^2})}{x}$$

$$= l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + l(-2) = l\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

(ако т. е. $l(-2)$ прибронмо сталномъ брою C)

$$= -l\frac{x}{1-\sqrt{1-x^2}} = -l\frac{x(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$$

$$= -l\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = -lX,$$

ако т. е. ради краткоће у далҍмъ послу ставимо

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = X.$$

Садъ узмимо у горнҍмъ образцу m найпре по реду $=$ безпарнимъ, а после парнимъ броевима. Слҍдуе

$$\int \frac{dx}{x^3.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\,lX + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^5.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{4x^4}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3.\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3.1}{4.3\,x^2}\right)\sqrt{1-x^2} - \frac{3.1}{4.2}\,lX + C,$$

$$\int\frac{dx}{x^7.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6x^6}.\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x^5.\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{6x^6}+\frac{5.1}{6.4.x^4}+\frac{5.3.1}{6.4.2.x^2}\right).\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{5.3.1}{6.4.2}\,lX + C;$$

. . . .

$$\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{1.x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^4.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3.x^3}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3.1.x}\right)\sqrt{1-x^2}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^6.\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5.x^5}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{5x^5}+\frac{4}{5.3.x^3}+\frac{4.2}{5.3.1.x}\right).\sqrt{1-x^2}+C,$$

. . . .

4.) Узимаюћи у свима предходећимъ образцима подъ 2. и 3. место x, $\frac{1}{x}$, дакле место dx, $-\frac{dx}{x^2}$, — добыямо по реду

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^4.\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{1}{3x^3}+\frac{2.1}{3.1.x}\right)\sqrt{x^2-1}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^6.\sqrt{x^2-1}} = \left(\frac{1}{5x^5}+\frac{4.1}{5.3.x^3}+\frac{4.2.1}{5.3.1.x}\right)\sqrt{x^2-1}+C,$$

. . . .

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\,arc\,(sin=\frac{1}{x})$$

$$\int\frac{dx}{x^3.\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\,arc\,(sin=\frac{1}{x})+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^5.\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3\,.\,1}{4.2\,.\,x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3.1}{4.2}\,arc\,(sin=\frac{1}{x})+C,$$

. . . .

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=l\,(x+\sqrt{x^2-1})+C,$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\,l\,(x+\sqrt{x^2-1})+C,$$

. . . .

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+C,$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2.1}{3.1}\right)\sqrt{x^2-1}+C.$$

. . . .

5.) Найпосле, збогъ $\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=x^m.dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=x^{m-\frac{1}{2}}\times$ $\times\,dx(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$, слѣдуе изъ образца I., ставляюћи у истомъ $2a$ место a, $b=-1$, $m-\frac{1}{2}$ место m, $n=1$, $r=-1$, $s=2$,—

$$\int\frac{x^m.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{1}{m}\,x^{m-\frac{1}{2}}.\sqrt{2a-x}+\frac{a(2m-1)}{m}\int\frac{x^{m-1}.\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}\,..\quad(a.$$

Подобно изъ образца v.)

$$\int\frac{dx}{x^m.\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a(2m-1)x^m}$$

$$+\frac{m-1}{a(2m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-1}.\sqrt{2ax-x^2}}\,.\,.\,.\,.\,.\quad(b.$$

два образаца, съ коима доводимо вопросне интеграле постепено на друге истога рода, съ маньимъ изложительмъ m, докъ првый найпосле на

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=arc\left(sin\,.\,v=\frac{x}{a}\right)\quad \text{(обр. 14. § 86.)}$$

$$=C-arc\left(sin=\frac{a-x}{a}\right)\ ^{*)}\text{, или}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=-\sqrt{2ax-x^2}-arc\left(sin=\frac{a-x}{a}\right)\ ^{**)}\text{, — а дру-}$$

гій на $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=arc\left(sin\,v=\frac{x}{a}\right)$, или

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{1}{ax}\sqrt{2ax-x^2}$$

(§ 90. обр. 31.).

з.) Неколико образаца за интеграле функція са $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$.

§ 112.

Место прекогъ интеграленя функція, кое садрже $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$, пробитачніє є у млогимъ случаєвима изнаћи вопросный интегралъ помоћу таковы образаца, съ

---

*) $\mathrm{arc}\left(\sin\,.\,v=\frac{x}{a}\right)=\mathrm{arc}\left(\cos=1-\frac{x}{a}\right)=90^0-\mathrm{arc}\left(\sin=1-\frac{x}{a}\right)$
$=C-\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{a-x}{a}\right)$

**) ставляюћи у *a.*) $m=1$.

коима га постепено доводимо на друге, већъ познате интеграле. Зато ћемо у слѣдуюћимъ §§-ма неколико тога свойства образаца поставити, и одма на друге, іошъ потребне интеграле употребити.

§ 113.

Образци III. и IV. § 108., ставляюћи $m = 0$, $n = 2$, и $c + x$ место x, даю

$$\int dx \, . \, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$= \frac{s}{s+2r} \cdot (c + x) \cdot [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}}$$

$$+ \frac{2ar}{s+2r} \int dx \; [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}-1}$$

и $\int dx \, . \, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}}$

$$= - \frac{s}{2a(r+s)} \cdot (c+x) \, . \, [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}+1}$$

$$+ \frac{2r + 3s}{2a(r+s)} \int dx \; [(a + bc^2) + 2bcx + bx^2]^{\frac{r}{s}+1} ;$$

одавде пакъ, ставляюћи $a + bc^2 = \alpha$, $2bc = \beta$ и $b = \gamma$, т. е. $a = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\gamma}$, $b = \gamma$ и $c = \frac{\beta}{2\gamma}$, — слѣдуе

$$\int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}} = \frac{(\beta + 2\gamma x) \, s}{2\gamma \, (s + 2r)} \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}}$$

$$+ \frac{(4\alpha\gamma - \beta^2) r}{2\gamma \, (2r + s)} \cdot \int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1} \quad . \, . \, (A.$$

и $\int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}} = - \frac{(\beta + 2\gamma x) \, s}{(4\alpha\gamma - \beta^2)(r+s)} \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}+1}$

$$+ \frac{2\gamma \, (2r + 3s)}{(4\alpha\gamma - \beta^2)(r+s)} \cdot \int dx \, (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{r}{s}+1} ,$$

или место овогъ последнѣгъ образца, узевши у призренѣ да истый, каогодъ и онай IV., одъ кога є добывенъ, стои нарочно за одречногъ изложителя $\frac{r}{s}$; другій

$$\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}}}=\frac{(\beta+2\gamma x)\,s}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-s)(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}}$$

$$+\frac{2\,(2r-3s)}{(4\alpha\gamma-\beta^2)(r-s)}\cdot\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{r}{s}-1}}\ldots(B.$$

§ 114.

1.) Изъ горнѣгъ образца A.), ако узмемо $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, слѣдує

$$\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma}\int dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

т. є.

$$\int dx\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}=\frac{\beta\pm2\gamma x}{\pm4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}$$

$$+\frac{\pm4\alpha\gamma-\beta^2}{\pm8\gamma}\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x\pm\gamma x^2}},$$

и дакле, ако место последнѣгъ интеграла узмемо нѣгове вредности по образцима 24. и 25. § 89.,

37.) $$\int dx\cdot\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{\beta+2\gamma x}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}\,l\left[2\gamma x+\beta+2\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\right]$$

$$38.)\ \int dx \sqrt{\alpha+\beta x-\gamma x^2} = \frac{2\gamma x-\beta}{4\gamma}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$$

$$+\frac{4\alpha\gamma+\beta^2}{8\gamma\sqrt{\gamma}}.\, arc\left(sin = \frac{2\gamma x-\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma+\beta^2}}\right)$$

2.) Съ $\alpha = 0$, $\beta = 2a$ и $\gamma = 1$, добыямо изъ предходећа два образца

$$39.)\ \int dx \sqrt{2ax+x^2} = \frac{1}{2}(a+x)\sqrt{2ax+x^2} - \frac{a^2}{2}\, l\,(x+a$$

$$+\sqrt{2ax+x^2}) + C$$

$$40.)\ \int dx \sqrt{2ax-x^2} = \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\, arc\left(sin = \frac{x-a}{a}\right) + C.$$

3.) Ако у триному $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ узмемо $x = y - \frac{\beta}{2\gamma}$ $= \frac{2\gamma y-\beta}{2\gamma}$, прелази по теоріи выши єдначина (I. Ч.) истый триномъ у биномъ вида $a + by^2$, при чему є $a = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\gamma}$, а $b = \gamma$.

Пошто є пакъ при той замени іошъ $dx = dy$, то слѣдує

$$41.)\ \int x^{\mathrm{m}}.\, dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}} = \int \left(y-\frac{\beta}{2\gamma}\right)^{\mathrm{m}}.\, dy\,(a+by^2)^{\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}}$$

$$= (-1)^{\mathrm{m}}.\int\left(\frac{\beta}{2\gamma}-y\right)^{\mathrm{m}}.\, dy\,(a+by^2)^{\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}}.$$

При овоме имамо приметити: ако є m цео положанъ брой, онда се десный интегралъ састои изъ $m+1$ интеграла, вида $\int Ay^{\mathrm{r}}.\, dy\,(a+by^2)^{\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}}$, кое можемо определити по пређашньимъ §§-ма. Шта више, и іошъ обштіи $\int x^{\eta}. dx\,(\alpha + \beta x^{k} + \gamma x^{2k})^{\frac{r}{s}}$ може се условно на тай истый начинъ изнаћи, еръ чимъ метнемо $x^{k} = z$, прелази у $\frac{1}{k}\int z^{\frac{m+1}{k}} . dz\,(\alpha + \beta z + \gamma z^{2})^{\frac{r}{s}}$, т. е. у пређашньій, тако да нѣгово решенѣ после, ако е само $\frac{m+1}{k}$ цео положанъ брой, неподлежи никаквой дальой теготи.

4.) Изъ пређашнѣгъ 41. интеграла, чимъ метнемо $m = 1$, а $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$, постае

$$\int x dx \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^{2}} = -\int\left(\frac{\beta}{2\gamma} - y\right) . dy . (a + by^{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\beta}{2\gamma}\int dy . (a + by^{2})^{\frac{1}{2}} + \int y dy . (a + by^{2})^{\frac{1}{2}},$$

узимаюћи пакъ место ова два интеграла десно ньиове односне вредности по обр. 35. § 111. и обр. 18. § 87., слѣдуе

$$\int x dx . \sqrt{a + \beta x + \gamma x^{2}} = -\frac{\beta}{4\gamma}[y\sqrt{a + by^{2}} + \frac{a}{\sqrt{b}}\, l\,(y\sqrt{b} +$$

$$+ \sqrt{a + by^{2}})] + \frac{1}{3}(ab + y^{2}) . \frac{\sqrt{a + by^{2}}}{b}.$$

Найпосле повративши место y и $a + by^{2}$ ньиове односне вредности $y = x + \frac{\beta}{2\gamma} = \frac{2\gamma x + \beta}{2\gamma}$ и $\alpha + \beta x + \gamma x^{2}$, остае

$$42.)\quad \int x dx . \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^{2}} = -\frac{\beta}{8\gamma^{2}} . [(\beta + 2\gamma x)\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^{2}}$$

$$+ \frac{4\alpha\gamma - \beta^{2}}{2\sqrt{\gamma}}\, l\,(\beta + 2\gamma x + 2\sqrt{\gamma} . \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^{2}})$$

$$+ \frac{3}{\gamma}(\alpha + \beta x + \gamma x^{2})^{\frac{3}{2}} + C.$$

§ 115.

Тражећи диференціалъ израза $x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$,

добыямо га $= (n-1)\,x^{n-2}.\,dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}+\frac{x^{n-1}.(\beta+2\gamma x)\,dx}{2\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$

$$= \frac{(n-1)\,\alpha x^{n-2}.\,dx+(n-\tfrac{1}{2})\,\beta x^{n-1}.\,dx+n\gamma x^{n}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Одтудъ слѣдуе

$$\frac{x^{n}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=d\,.\,x^{n-1}\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{(n-\frac{1}{2})\,\beta}{n\gamma}.\frac{x^{n-1}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$-\frac{(n-1)\alpha}{n\gamma}.\frac{x^{n-2}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

и дакле

$$\int\frac{x^{n}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{1}{n\gamma}.\,x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}-\frac{(n-\frac{1}{2})\,\beta}{n\gamma}\times$$

$$\times\int\frac{x^{n-1}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}-\frac{(n-1)\,\alpha}{n\gamma}\int\frac{x^{n-2}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\ldots(C.,$$

образацъ за умаляванѣ положногъ изложителя n, дакле за доведенѣ вопросногъ интеграла на друге простіе истога рода.

Ставляюћи пакъ у овомъ образцу $n+2$ место n, и изражаваюћи после последньій интегралъ десно, добыямо, ако одма сматрамо n као одречно, подобанъ образацъ за увећаванѣ одречногъ изложителя

$$\int\frac{dx}{x^{n}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=-\frac{1}{(n-1)\,\alpha}.\frac{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^{n-1}}$$

$$-\frac{(n-\frac{3}{2})\,\beta}{(n-1)\,\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$-\frac{(n-2)\,\gamma}{(n-1)\,\alpha}\int\frac{dx}{x^{n-2}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}\ldots(D.$$

Ако є *n* **цео положанъ** брой, онда се вопросный интегралъ образца *C.*) доводи на $\int\frac{xdx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ и $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, а интегралъ предстоећегъ образца *D.*) на $\int\frac{dx}{x\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ и $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$, кои су већъ познати.

Пошто є пакъ найпосле $x^n.dx\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$

$$=\frac{x^n dx\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{\alpha x^n dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{\beta x^{n+1}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$+\frac{\gamma x^{n+2}.\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},\ \text{а}\ \frac{dx\,.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}{x^n}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,.\,dx}{x^n\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{\alpha dx}{x^n.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}+\frac{\beta dx}{x^{n-1}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$$

$$+\frac{\gamma dx}{x^{n-2}.\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

то є лако увидити, како съ истимъ образцима можемо безъ далѣ теготе изнаћи и интеграле ова два израза, ако є *n* **цео положанъ** брой.

и) Интеграленѣ неки трансцендентны функція.

1.) $\int\psi(x).l^n x.dx.$

§ 116.

1.) Ако є при датой диференціалной функціи $\psi(x).l^n x.dx$ функція $\psi(x)$ алгебрайска и такова, да $\int\psi(x)\,dx$ можемо определити на ма кои одъ дояко познаты начина;

онда изтражуемо $\int \psi(x) \,.\, l^n x \,.\, dx$ почастно, т. є. помоћу III. основногъ правила § 85., на тай начинъ, да у томе метнемо $\varphi(x) = l^n x$, а $df(x) = \psi(x)\, dx$, чимъ быва

$$\int \psi(x) \,.\, l^n x \,.\, dx = l^n x \,.\, \int \psi(x)\, dx - n \int \left[l^{n-1} x \,.\, dx \,.\, \frac{\int \psi(x)\, dx}{x} \right],$$

или ако ради краткоће заменемо $\int \psi(x)\, dx$ съ $\phi(x)$,

$$\int \psi(x) \,.\, l^n x \,.\, dx = l^n x \,.\, \phi(x) - n \int l^{n-1} x dx \,.\, \frac{\phi(x)}{x}$$

$$= l^n x \,.\, \phi(x) - n \int l^{n-1} .\, F(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha.,$$

при чему $F(x)$ стои место $\dfrac{\phi(x)}{x}$.

Съ овимъ образцемъ доводи се вопросный интегралъ постепено на простіє истога рода, докъ найпосле, ако є n **цео положанъ** брой, на $\int F(x)\, dx$, у коме $F(x)$ представля неку алгебрайску функцію одъ x.

2.) Ако изъ тога образца определимо десный интегралъ, и после место n узмемо $n+1$, притомъ пакъ n одма одречно, слѣдує другій подобный образацъ

$$\int \frac{F(x)\, dx}{l^n x} = -\frac{\phi(x)}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\psi(x)\, dx}{l^{n-1} x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta.,$$

при комъ є, по горнѣимъ заменама, $\phi(x) = x\, F(x)$, а

$$\psi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi_1(x) \,.$$

§ 117.

Примери. 1.) Тражи се $\int x^m .\, dx \,.\, l^n x$.

Ставлямо у горнѣмъ образцу α.) $\psi(x) = x^m$, $\phi(x) = \int \psi(x)\, dx = \int x^m .\, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$, дакле $\dfrac{\phi(x)}{x} = F(x) = \dfrac{x^m}{m+1}$.

па добыямо

$$\int x^m . dx . l^n x = \frac{x^{m+1} . l^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \cdot \int x^m dx . l^{n-1} x,$$

или ако овде место n узмемо редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, и т. д., и притомъ свагда новый интегралъ у предходећему заменемо,

$$\int x^m dx\, l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big[l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n^{2|-1}}{(m+1)^2} \cdot l^{n-2} x$$

$$- \frac{n^{3|-1}}{(m+1)^3} \cdot l^{n-3} x + \ldots \Big] + C. \quad \ldots . (\gamma.$$

Овай редъ быт'ће **краянъ**, само ако є n **цео положанъ** брой, иначе тече, по увиђавномъ закону, у безкрайность.

2.) За $\int \frac{x^m . dx}{l^n x}$ ставлямо у образцу β.) $F(x) = x^m$, $\phi(x) = x . F(x) = x . x^m = x^{m+1}$, $\psi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \phi_1(x) = (m+1) x^m$, тако да є по томе после вопросный

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1) l^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1} \cdot \int \frac{x^m dx}{l^{n-1} x}.$$

Ако пакъ овде, као мало пре, место n узмемо редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . ., и притомъ опетъ свагда последный интегралъ заменемо у предходећемъ, добыямо найпосле

$$\int \frac{x^m . dx}{l^n x} = - \frac{x^{m+1}}{n-1} \cdot \Big[\frac{1}{l^{n-1} x} + \frac{m+1}{(n-2) l^{n-2} x} + \frac{(m+1)^2}{(n-2)^{2|-1} . l^{n-3} x}$$

$$+ \frac{(m+1)^3}{(n-2)^{3|-1} . l^{n-4} x} + \ldots \Big]$$

$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int \frac{x^m . dx}{lx} + C \ldots (\delta.$$

тако да овай интегралъ само іошъ зависи одъ $\int \frac{x^m . dx}{lx}$.

Овай последньій може се представити у простіємъ виду тиме, да узмемо $x^{m+1}=z$, дакле $x^m=\frac{dz}{m+1}$, а $lx=\frac{lz}{m+1}$, после чега стои $\int\frac{x^m.dx}{lx}=\int\frac{dz}{lz}$; или ако іошъ метнемо $lz=y$, т. є. $e^y=z$:

$$\int\frac{x^m.dx}{lx}=\int\frac{e^y.dy}{y}=\int e^y.\frac{dy}{y}.$$

О овомъ интегралу говоритћемо доцніє; овде само толико споминѣмо, да є обично познатъ подъ именомъ **интегралный логаритамъ.**

$$2.)\quad\int F(x)\,a^x\,.dx\,.$$

§ 118.

Ако у III. основномъ правилу, § 85., узмемо $df(x)=a^x.dx$, $\varphi(x)=F(x)$, дакле $f(x)=\int a^x dx=\frac{a^x}{la}$, $d\varphi(x)=dF(x)=F_1(x)\,dx$, быва по истомъ правилу

$$\int F(x)\,a^x\,dx=\frac{a^x.\,F(x)}{la}-\frac{1}{la}\int F_1(x)\,a^x\,dx\;\cdots\cdots\;(s.$$

На истый начинъ слѣдує далѣ:

$$\int F_1(x)\,a^x\,dx=\frac{a^x.F_1(x)}{la}-\frac{1}{la}\int F_2(x)\,a^x\,dx\,,$$

$$\int F_2(x)\,a^x\,dx=\frac{a^x.F_2(x)}{la}-\frac{1}{la}\int F_3(x)\,a^x\,dx\,,$$

. . . .

Дакле ако надлежно, съ трага напредъ, заменемо,

$$\int F(x)\,a^x\,dx=\frac{a^x}{la}\Big[F(x)-\frac{F_1(x)}{la}+\frac{F_2(x)}{l^2a}-\frac{F_3(x)}{l^3a}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}F_{n-1}(x)}{l^{n-1}a}\Big]+\frac{(-1)^n}{l^na}\int F_n(x)a^x dx\;\cdots\;(\varepsilon.,$$

при чему $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... представляю изводне функціє одъ $F(x)$, и вопросный интегралъ зависи найпосле одъ $\int F_n(x)\, a^x\, dx$, на тай начинъ, да ће быти **краянъ**, ако се една одъ тій изводны функція появи као по x сталанъ брой.

§ 119.

Примери.

1.) Тражи се $\int x^n . a^x . dx$.

Ту є $F(x) = x^n$, дакле $F_1(x) = nx^{n-1}$, $F_2(x) = n^{2|-1} . x^{n-2}$, $F_3(x) = n^{3|-1} . x^{n-3}$ . . . . ., и зато по нађеномъ образцу, ако є n цео положанъ брой,

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x}{la}\Big[x^n - \frac{nx^{n-1}}{la} + \frac{n^{2|-1} . x^{n-2}}{l^2 a} - \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^n . n!}{l^n a}\Big] + C \;\ldots\ldots\ldots (\zeta.$$

2.) Пыта се чему є раванъ $\int \frac{a^x dx}{x^n}$?

Извртаюћи образацъ $s.$) у преһашнѣмъ §-у, добыямо

$$\int F_1(x)\, a^x\, dx = a^x . F(x) - la \int F(x)\, a^x\, dx .$$

Ставляюћи ту $F(x) = x^n$, дакле $F_1(x) = nx^{n-1}$, стои

$$\int x^{n-1} . a^x\, dx = \frac{a^x . x^n}{n} - \frac{la}{n} \int x^n . a^x . dx ,$$

а ако іошъ узмемо $-n + 1$ место n,

$$\int \frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{la}{n-1} \int \frac{a^x dx}{x^{n-1}} \;\ldots\ldots\ldots (t.$$

Овде пакъ за n редомъ $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... узимаюћи, и притомъ свагда последньій интегралъ у предходећемъ заменююћи, слѣдує

$$\int\frac{a^x\,dx}{x^n}=-\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}}\cdot\Big[1+\frac{la}{n-2}x+\frac{l^2a}{(n-2)^{2|-1}}\cdot x^2+$$

$$+\frac{l^3a}{(n-2)^{3|-1}}\cdot x^3+\cdot\cdot\frac{l^{n-2}a}{(n-2)!}x^{n-2}\Big]+\frac{l^{n-1}a}{(n-1)!}\int\frac{a^x\,dx}{x}+C\ldots(\eta.$$

Далѣ се овай интегралъ неможе свести по томе, што горнѣй образацъ ι.) за $n=1$ недає никакву вредность. Остає дакле іошъ зависимъ одъ интегралногъ логаритма $\int\frac{a^x\,dx}{x}$, кои ћемо текъ доцніє изтражити.

3.) Ако є у оба изнађена интеграла брой n разломакъ, онда суньиови редови безкрайни.

Тако н. п. ако у последнѣмъ образцу η.) ставимо $n=\frac{1}{2}$, слѣдує

$$\int\frac{a^x\,dx}{\sqrt{x}}=2a^x.\sqrt{x}\Big(1-\frac{2}{1.3}xla+\frac{4}{1.3.5}\cdot x^2l^2a-\frac{8}{1.3.5.7.}x^3la^3$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big)+C;$$

ако пакъ у ономе подъ ζ.) метнемо $n=-\frac{1}{2}$, добыямо

$$\int\frac{a^x.dx}{\sqrt{x}}=\frac{a^x}{la\sqrt{x}}\Big(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{xla}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{x^2l^2a}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1.3.5}{x^3la^3}+\cdot\cdot\Big)+C.$$

3.) Интеграленѣ диференціалны кружны (гоніометрійски) функція.

§ 120.

а.) Ако у образцима 5—8. §-а 86. узмемо nx место x, дакле ndx место dx, слѣдую нови ови:

1.) $\int sin\,nx.dx=-\frac{1}{n}cos\,nx$ | 2.) $\int cos\,nx.dx=\frac{1}{n}sin\,nx$

3.) $\int \frac{dx}{\cos^2 nx} = \frac{1}{n} \tang nx$ | 4.) $\int \frac{dx}{\sin^2 nx} = -\frac{1}{n} \cot nx$

коима свакомъ треба іошъ додати произвольный стални брой C.

б.) **Пошто е** $\sin x . \cos x . dx = \sin x . d \sin x$

$$= - \cos x . d \cos x$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x . d\, 2x = -\frac{1}{4} d \cos 2x\,,$$

$$\tang x . dx = \frac{\sin x . dx}{\cos x} = -\frac{d \cos x}{\cos x}\,,$$

$$\cot x . dx = \frac{\cos x . dx}{\sin x} = \frac{d \sin x}{\sin x}\,,$$

$$\frac{dx}{\sin x . \cos x} = \frac{dx}{\cos x} : \sin x = \frac{dx}{\cos^2 x} : \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{d \tang x}{\tang x}\,,$$

и зато $\operatorname{cosec} x . dx = \frac{dx}{\sin x} = \frac{d \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x . \cos \frac{1}{2} x} = \frac{d \tang \frac{1}{2} x}{\tang \frac{1}{2} x}\,,$

и зато $\sec x . dx = \frac{dx}{\cos x} = -\frac{d(90^0 - x)}{\sin(90^0 - x)} = -\frac{d tg \frac{1}{2}(90^0 - x)}{\tang \frac{1}{2}(90^0 - x)}$

$$= -\frac{dtg(45^0 - \frac{1}{2}x)}{\tang(45^0 - \frac{1}{2}x)}\,;$$

то мора быти обратно

5.) $\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x . d \sin x = \frac{1}{2} \sin^2 x$

$$= -\int \cos x . d \cos x = -\frac{1}{2} sos^2 x$$

$$= -\frac{1}{4} \int d \cos 2x = -\frac{1}{4} \cos 2x\,,$$

6.) $$\int tang\,x\,.\,dx = -\int\frac{d\cos x}{\cos x} = -l\cos x$$

$$= l\frac{1}{\cos x} = l\sec x\,,$$

7.) $$\int \cot\ x\,.\,dx = \int\frac{d\sin x}{\sin x} = l\sin x$$

$$= -l\,\frac{1}{\sin x} = -l\,cosec\,x\,,$$

8.) $$\int\frac{dx}{\sin x.\cos x} = \int\frac{d\,tang\,x}{tg\,x} = l\,tang\,x$$

$$= -l\,\frac{1}{tg\,x} = -l\cot x\,,$$

9.) $$\int cosec\,x.dx = \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{d\,tg\,\frac{1}{2}x}{tg\,\frac{1}{2}x} = l\,tang\,\frac{1}{2}x$$

$$= -l\cot\frac{1}{2}x\,,$$

10.) $$\int\sec\ x\,.\,dx = \int\frac{dx}{\cos x} = -\int\frac{d\,tg\,(45^0-\frac{1}{2}x)}{tg\,(45^0-\frac{1}{2}x)}$$

$$= -l\,tg(45^0-\tfrac{1}{2}x)$$

$$= l\cot(45^0-\tfrac{1}{2}x)$$

$$= l\,tg\,[90^0-(45^0-\tfrac{1}{2}x)] = l\,tg(45^0+\tfrac{1}{2}x)\,,-$$

и свима овима образцима валя іошъ придати прорзвольный стагный брой *C*.

§ 121.

По тригон. § 23. имамо

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\,.\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\,.\,\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\,.$$

Мора быти дакле, ако узмемо $\alpha = mx$, $\beta = nx$, са dx помложимо, а съ 2 разделимо, па онда помоћу предходећегъ §-а интегралимо:

11.) $$\int \sin mx.\cos nx.dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

12.) $$\int \cos mx.\cos nx.dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

13.) $$\int \sin mx.\sin nx.dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

§ 122.

Ако є n цео положанъ брой, онда по **I. Ч. § 191.** имамо за **парно** n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\cdot\left[\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \dots\right]$$

а за **безпарно** n

$$\sin^n x = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n}\cdot\left[\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \dots\right]$$

По исте **Ч. § 190.** пакъ стои за ма какво цело положно n

$$\cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \dots$$

Ако дакле сва три ова образца съ dx помложимо и после интегралимо, слѣдуе за **парно** n

14.) $$\int \sin^n x.dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\cdot\left[\int \cos nx.dx - \binom{n}{1}\int \cos(n-2)x.dx + \binom{n}{2}\int \cos(n-4)x.dx - \dots\right],$$

за **безпарно** n

$$15.)\quad \int sin^n x \, . \, dx = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \cdot [\int sin\, nx . dx - \binom{n}{1} \int sin(n-2)x . dx$$

$$+ \binom{n}{2} \int sin\,(n-4)\, x \, . \, dx - \ldots];$$

за обое *n*

$$16.)\quad \int cos^n x \, . \, dx = \int cos\; nx \, . \, dx + \binom{n}{1} \int cos\,(n-2)\, x \, . \, dx$$

$$+ \binom{n}{2} \int cos\,(n-4)\, x \, . \, dx + \ldots,$$

съ коимъ образцима сведени су вопросна интеграли на оне § 120.

Тако н. п. имамо по првомъ

$$\int sin^4 x \, . \, dx = \frac{(-1)^2}{2^4} \cdot [2 \int cos\, 4x \, . \, dx - 8 \int cos\; 2x \, . \, dx + 6 \int dx]$$

$$= \frac{1}{2^4} \left[\frac{1}{2} sin\, 4x - 4 sin\, 2x + 6x \right] + C, \text{ (§ 120. обр. 2.),}$$

по другомъ

$$\int sin^3 x \, . \, dx = \frac{-1}{2^3} \cdot \int sin 3x . dx - 3 \int sin x . dx + 3 \int sin(-x)\; dx$$

$$- \int sin(-3x) dx] \text{ (§ 120. обр. 1.)}$$

$$= -\frac{1}{2^3} \cdot [-\frac{2}{3} \; cos\; 3x + 6 \; cos\; x]$$

$$= \frac{1}{2^3} [\frac{2}{3} \; cos\; 3x - 6 \; cos\; x] + C;$$

по трећемъ

$$\int cos^3 x . dx = \int cos 3x . dx + 3 \int cos x . dx + 3 \int cos x . dx + \int cos 3x . dx$$

$$= \frac{2}{3} \; sin\; 3x + 6 \; sin\; x + C.$$

§ 123.

Ставимо $sin\,x = z$. Бытће $cos\,x = \sqrt{1-z^2}$, $cos\,x . dx = dz$, дакле $dx = \frac{dz}{cos\,x} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, и по свему

$$\int sin^m x \,.\, cos^n x \,.\, dx = \int z^m . (1-z^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int z^m . \, dz \, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

чимъ є вопросный тай трансцендентный интегралъ сведенъ на онай алгебрайскій, кои смо сматрали у §§-ма **103 — 111**.

Ставляюћи дакле у образцима **I — IV.** § **108.** $x = z$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $\frac{r}{s} = \frac{n-1}{2}$; слѣдує по реду

$$\int sin^m x . cos^n x . dx = -\frac{z^{m-1}.(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int z^{m-2} . dz \, (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \frac{z^{m+1}.(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int z^m . dz (1-z^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$= \frac{z^{m+1}.(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int z^{m+2} . dz (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= -\frac{z^{m+1}.(1-z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int z^m . dz (1-z^2)^{\frac{n+1}{2}},$$

а ако повратимо за z, $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ и $dz . (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ нѣиове горнѣ вредности $sin\,x$, $cos\,x$ и dx, —

$$\text{I.)} \int sin^m x . cos^n x . dx = -\frac{sin^{m-1} x . cos^{n+1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{m-1}{m+1} \int sin^{m-2} x . cos^n x . dx$$

образацъ за постепено умаляванѣ положногъ изложителя m;

$$\text{II.)}\quad \int \sin^m x.\cos^n x.dx = \frac{\sin^{m+1}x.\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x.\cos^{n-2}x.dx,$$

за постепено умаляванѣ положногъ изложителя n;

$$\text{III.)}\quad \int \frac{\cos^n x.dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\sin^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x.dx}{\sin^{m-2}x},$$

за постепено умаляванѣ одречногъ изложителя m; и

$$\text{IV.)}\quad \int \frac{\sin^m x.dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^n x.dx}{\cos^{n-2}x};$$

за постепено умаляванѣ одречногъ изложителя n.

§ 124.

Ако узмемо у III. n, а у IV. m одречно, добыямо далѣ

$$\text{V.)}\quad \int \frac{dx}{\sin^m x.\cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x.\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x.\cos^n x},$$

за умаляванѣ изложителя m, и

$$\text{VI.)}\quad \int \frac{dx}{\sin^m x.\cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x.\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x.\cos^{n-2}x};$$

за умаляванѣ изложителя n.

Ако пакъ у I. и III. ставимо $n=0$, а у II. и IV. $m=0$, добыямо

VII.) $$\int \sin^{m} x \,.\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \,.\, \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x \,.\, dx$$

VIII.) $$\int \frac{dx}{\sin^{m} x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

IX.) $$\int \cos^{n} x \,.\, dx = \frac{\sin x \,.\, \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \,.\, dx$$

X.) $$\int \frac{dx}{\cos^{n} x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x},$$

§ 125.

Ако су m и n цели броеви, долазимо найпосле, повторенимъ по потреби употребляванѣмъ

образца I. при парномъ n на $\int \cos^{n} x \,.\, dx$,
" II. " " n " $\int \sin^{n} x \,.\, dx$,
" III. " " m " $\int \cos^{n} x \,.\, dx$,
" IV. " " n " $\int \sin^{m} x \,.\, dx$,
" V. " " m " $\int \frac{dx}{\cos^{n} x}$,
" VI. " " n " $\int \frac{dx}{\sin^{m} x}$, и опетъ

образца I. при безпарномъ n на $\int \sin x \,.\, \cos^{n} x \,.\, dx$,
" II. " " n " $\int \cos x \,.\, \sin^{m} x \,.\, dx$,
" III. " " m " $\int \frac{\cos^{n} x \,.\, dx}{\sin x}$,
" IV. " " n " $\int \frac{\sin^{m} x \,.\, dx}{\cos x}$,
" V. " " m " $\int \frac{dx}{\sin x \,.\, \cos^{n} x}$,
" IV. " " n " $\int \frac{dx}{\sin^{m} x \,.\, \cos x}$.

Одъ овы є крайньи интеграла

$$\int cos^n x . sin x . dx = -\int cos^n x . d\, cos\, x = -\frac{cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

$$\int sin^m x . cos x . dx = \int sin^m x . d\, sin\, x = \frac{sin^{m+1} x}{m+1} + C;$$

$\int sin^m x . dx$ и $\int cos^n x . dx$ подлеже далѣмъ употреблѣню образаца **VII.** и **IX.**, и долази се првимъ, по парномъ или безпарномъ m, на $\int dx = x + C$ или $\int sin\, x . dx = - cos\, x + C$, другимъ пакъ, по парномъ или безпарномъ n, на $\int dx = x + C$ или $\int cos x . dx = sin\, x + C$; $\int \frac{dx}{sin^m x}$ и $\int \frac{dx}{cos^n x}$ подлеже далѣмъ употреблѣню образаца **VIII.** и **X.**, и свршавају се, првый, по парномъ или безпарномъ m, съ $\int dx = x + C$ или $\int \frac{dx}{sin\, x} = l\, tg \frac{x}{2} + C$ (обр. 9. **120.**), а другій, по парномъ или безпарномъ n, са $\int dx = x + C$ или $\int \frac{dx}{cos\, x} = l\, tang\, (45^0 + \frac{x}{2}) + C$ (обр. **10.** § **120.**)

Образацъ **I.** дає съ $n = -1$,

$$\int \frac{sin^m x . dx}{cos\, x} = -\frac{sin^{m-1} x}{m-1} + \int \frac{sin^{m-2} x . dx}{cos\, x},$$

а образацъ **II.** съ $m = 1$,

$$\int \frac{cos^n x . dx}{sin\, x} = \frac{cos^{n-1} x}{n-1} + \int \frac{cos^{n-2} x . dx}{sin\, x}.$$

Првый одъ ова два интеграла излази, по парномъ или безпарномъ m, на $\int \frac{dx}{cos\, x}$ или $\int \frac{sin\, x . dx}{cos\, x} = \int tang\, x . dx$, а другій, по парномъ или безпарномъ n, на $\int \frac{dx}{sin\, x}$ или $\int \frac{cos\, x . dx}{sin\, x} = \int cot\, x . dx$, — све сами већъ познати интеграли.

На истый начинъ добыямо вайпосле изъ образаца **V.** и **VI.**,

$$\int\frac{dx}{sin^m x\,.\,cos\,x}=-\frac{1}{(m-1)\,sin^{m-1}x}+\int\frac{dx}{sin^{m-2}x\,.\,cos\,x} \text{ и}$$

$$\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos^n x}=\frac{1}{(n-1)\,cos^{n-1}x}+\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos^{n-1}x},$$

одъ коя два интеграла опетъ свршава се првый, по парномъ или безпарномъ m, са $\int\frac{dx}{cos\,x}$ или $\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos\,x}$, а другій, по парномъ или безпарномъ n, са $\int\frac{dx}{sin\,x}$ или $\int\frac{dx}{sin\,x\,.\,cos\,x}$, дакле обадва опетъ са већъ познатимъ интегралима. —

Ако су изложительи m и n, у образцима о коима говорисмо, разломци, онда се $\int sin^m x\,.\,cos^n x\,.\,dx$, неколико само случаєва изузимаюћи, неможе више изнаћи точно, но само іошъ приближно, помоћу безкрайны редова, о комъ начину говоритћемо доцніє.

§ 126.

Осимъ предходећега, имамо о вопроснимъ образцима **§§ 123.** и **124.**, іошъ слѣдуюће приметити:

1.) Ако бы у комъ одъ нъи, при некимъ вредностима броєва m и n, именитель постао нулла, и они сами дакле неупотребителни, онда є вопросный интегралъ или већъ на другій начинъ изнађенъ, или се та незгода може обићи другимъ редомъ употребляваня самы тій образаца.

2.) Ако є єданъ само одъ изложителя m и n у $\int sin^m x\,.\,cos^n x\,.\,dx$ **безпарный** брой, обадва пакъ положни броєви, онда намъ образци **§ 123.** нетребаю, єръ се у таковомъ случаю вопросный интегралъ може добыти на другій, простій, изъ слѣдуюћи примера' увиђавный начинъ.

Потребуемо $\int \sin^3x \,.\, \cos^2x \,.\, dx$. Разлажемо чинителя съ **безпарнимъ** изложителѣмъ, $\sin^3x$, у два чинителя $\sin x \,.\, \sin^2x = \sin x \,.\, (1 - \cos^2x)$. Тимъ постае вопросный

$$\begin{aligned}\int \sin^3x \,.\, \cos^2x \,.\, dx &= \int \sin x \,.\, dx \,.\, (1 - \cos^2x) \cos^2x \\ &= \int \cos^2x \,.\, d(-\cos x) \,.\, (1 - \cos^2x) \\ &= \int \cos^2x \,.\, d\cos x\,(\cos^2x - 1) \\ &= \int \cos^4x \,.\, d\cos x - \int \cos^2x \,.\, d\cos x \\ &= \frac{\cos^5x}{5} - \frac{\cos^3x}{3} = \cos^3x\left(\frac{\cos^2x}{5} - \frac{1}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

Или тражи се $\int \sin^6x.\cos^5x.dx$. Разлажемо чинителя съ без**парнимъ** изложителѣмъ, $\cos^5x$, у два чинителя $\cos x \,.\, \cos^4x = \cos x \,.\, (1 - \sin^2x)^2$. Тимъ постае вопросный интегралъ

$$\begin{aligned}\int \sin^6x \,.\, \cos^5x \,.\, dx &= \int \sin^6x \,.\, \cos x\, dx\,(1 - \sin^2x)^2 \\ &= \int \sin^6x \,.\, d\sin x\,(1 - \sin^2x)^2 \\ &= \int \sin^6x \,.\, d\sin x\,(1 - 2\sin^2x + \sin^4x) \\ &= \int \sin^6x \,.\, d\sin x - 2\int \sin^8x \,.\, d\sin x \\ &\qquad + \int \sin^{10}x \,.\, d\sin x \\ &= \frac{1}{7}\sin^7x - \frac{2}{9}\sin^9x + \frac{1}{11}\sin^{11}x \\ &= \sin^7x\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\sin^2x + \frac{1}{11}\sin^4x\right) + C.\end{aligned}$$

Или иште се $\int \sin^3x \,.\, \cos^5x \,.\, dx$, у комъ су **обадва** изложителя броеви безпарни. Ту разлажемо чинителя $\sin^3x$ съ **маньимъ** изложителѣмъ у два чинителя $\sin x \,.\, \sin^2x = \sin x \,.\, (1 - \cos^2x)$, и поступамо далѣ као горе.

§ 127.

α.) Ако у III. основномъ правилу узмемо редомъ $\varphi(x) = arc(\sin = x)$, $arc(\cos = x)$, $arc(tang = x)$, $arc(\cot = x)$, и притомъ свакій путь $dfx = dx$, добыямо по томъ истомъ реду

17.) $\int arc\,(\sin = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\,(\sin = x) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x \,.\, arc\,(\sin = x) + \sqrt{1-x^2}$ (§ 111. подъ 2.)

18.) $\int arc\,(\cos = x) . dx = x . arc \cos = x) - \sqrt{1-x^2}$

19.) $\int arc\,(tang = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\,(tang = x) - l\sqrt{1+x^2}$

20.) $\int arc\,(cot = x) \,.\, dx = x \,.\, arc\,(cot = x) + l\sqrt{1+x^2}$.

β.) Ако пакъ у истомъ правилу узмемо єданпутъ $\varphi(x) = e^{mx}$, $df(x) = \sin nx \,.\, dx$, а другипутъ $\varphi(x) = \sin nx.$ $df(x) = e^{mx}. dx$, слѣдуе

$$\int e^{mx}. \sin nx \,.\, dx = - \frac{1}{n} e^{mx}. \cos nx + \frac{m}{n} \int e^{mx}. \cos nx \,.\, dx \quad \text{и}$$

$$\int e^{mx}. \sin nx \,.\, dx = \frac{1}{m} e^{mx}. \sin nx - \frac{n}{m} \int e^{mx}. \cos nx \,.\, dx \,,$$

одтудъ пакъ

21.) $\int e^{mx}. \cos nx \,.\, dx = \frac{n \,.\, \sin nx + m \cos nx}{m^2+n^2} \,.\, e^{mx}.$

На истый начинъ налазимо іошъ одъ $e^{mx}. \cos nx \,.\, dx$,

22.) $\int e^{mx}. \sin nx \,.\, dx = \frac{m \,.\, \sin nx - n \,.\, \cos nx}{m^2+n^2} \,.\, e^{mx}.$

§ 128.

Каогодъ што смо при интеграленю ирраціоналны алгебрайски функція гледали, да ій сходномъ заменомъ преведемо у раціоналне, тако исто морамо се у млогимъ случаєвима при овима гоніометрійскима трудити, да ій таковомъ заменомъ преобразимо у алгебрайске, и тиме или интеграленѣ олакшамо, или башъ текъ могућнимъ учинимо. Но каогодъ при онима за усавршаванѣ, тако исто при овима за алгебраисанѣ немогу се поставити никаква обшта правила, него могу само упутити примери. Толико єдино може се рећи, да се та цѣль овде понайвише постизава изменомъ єдне или друге, у датой диференціалной функціи находеће се (гоніометрійске) функціє, съ другимъ каквимъ пременљивимъ броємъ. Тиме наилазимо после найобичніє на ирраціоналне, а само редко на раціоналне, у нашой власти лежеће алгебрайске функціє.

Тако н. п. ако изнаћи имамо $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$, ставлямо или $\cos x = z$, или $\sin x = u$, и добыямо тиме при првой замени

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot arc\left(\cos = \frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right),$$

а при другой

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot l\,\frac{b+a\cos x+\sin x\,.\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}.$$

і.) Интеграленѣ помоћу безкрайны редова.

§ 129.

Кадъ свакій покушай, добыти интегралъ дате какове диференціалне функціє у крайной форми изда, остає само іошъ єдна могућность уобште разрешити га, узевши у помоћь безкрайне редове; само што тако добывене интегралне вредности, каошто се по себи лако разуме, немогу быти точне, но само приближне, али свакояко то точніє, штогодъ су добывени за њи редови сбирљивіи.

За ту цѣль служи пре свега образацъ § 82., са коимъ добыямо $\int\varphi(x)\,dx$ у виду безкрайнога реда. Но лакши є на свакій начинъ цео посао, ако дату функцію іошъ пре интеграленя преобразимо у такавъ редъ, зато што тадъ имамо изтраживати саме мономне интеграле.

Пошто є то развіянѣ у редове већъ познато изъ прве части, то можемо съ места предузети разне, далѣ поучаваюће примере.

§ 130.

1.) Ако тражимо $\int\frac{dx}{a+x}$, имамо (простомъ деобомъ броитеља 1 чрезъ именителя $a+x$)

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\ldots\ldots\ldots;$$

бытће дакле вопросный

$$\int\frac{dx}{a+x}=\int\left(\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\ldots\ldots\right)dx$$

$$=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4+\cdot+C,$$

израженъ, каошто се види, безкрайнимъ редомъ растући степена одъ x.

Ако пакъ пишемо $\frac{1}{x+a}$ место $\frac{1}{a+x}$, и поступамо далѣ као горе, слѣдуе іошъ истый

$$\int\frac{dx}{a+x}=\int\frac{dx}{x+a}$$

$$=lx+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^4+\ldots+C.$$

као редъ падаюћи степена одъ x.

По §-а 87. образцу 18. добыямо точно овай $\int\frac{dx}{a+x}=l(a+x)$.

Можемо дакле ставити, служећи се првимъ редомъ,

$$l\,(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots\ldots+C,$$

служећи се пакъ другимъ редомъ,

$$l\,(x+a)=lx+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\ldots+C.$$

Узимаюћи у првой одъ ове две єдначине $x=0$, слѣдує $C=la$, тако да после стои

$$l\,(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots,$$

и одтудъ, ако la пренесемо у леву часть, $l\,(a+x)-la$ $l\frac{a+x}{a}$, т. є.

$$l\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3-\ldots\ldots,$$

познатый редъ изъ I. Ч. § 162.

Ако пакъ при другой єдначини пренесемо lx, добыямо

$$l\,(1+\frac{a}{x})=\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\ldots+C,$$

одкуда, ставляюћи $x=\infty$, слѣдує $C=l1=0$, и тиме другій іошъ редъ за

$$l\,(a+x)=lx+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3-\ldots$$

Првый сабира се то нагліє, штогодъ є x манѣ, другій пакъ то брже, штогодъ є x веће.

2.) У име $\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}$ имамо

$$\frac{x^m}{a^n+x^n}=\frac{x^m}{a^n}-\frac{x^{m+n}}{a^{2n}}+\frac{x^{m+2n}}{a^{3n}}-\dots\dots,$$

или $$\frac{x^m}{x^n+a^n}=x^{m-n}-a^n.x^{m-2n}+a^{2n}.x^{m-3n}-\dots\dots;$$

дакле є по првомъ реду

$$\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n}-\frac{x^{m+1+n}}{(m+1+n)a^{2n}}$$

$$+\frac{x^{m+1+2n}}{(m+1+2n)a^{3n}}-\dots\dots+C,$$

а по другомъ реду

$$\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}=\frac{1}{(m+1-n)x^{n-(m+1)}}-\frac{a^n}{(m+1-2n)x^{2n-(m+1)}}$$

$$+\frac{a^{2n}}{(m+1-3n)x^{3n-(m+1)}}-..+C.$$

Ако є $m+1=rn$, т. є. неко вишестручно n, онда у овомъ последнѣмъ реду постає именитель $m+1-rn=0$, и зато дотичный чланъ ∞. То насъ несме збунити, єръ є истый чланъ у такомъ случаю пре интеграленя био $\pm a^{(r-1)n}.\frac{dx}{x}$, и зато нѣговъ интегралъ $\pm a^{(r-1)n}.lx$. Появи ли се дакле таково што, онда место сумнителнога члана треба поставити одма ову последню нѣгову вредность.

Ако при горньимъ редовима за $\int\frac{x^m.dx}{a^n+x^n}$ узмемо $m=0$, $n=2$, $a=1$, слѣдує по првомъ

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\dots+C,$$ а по другомъ

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{1.x}+\frac{1}{3.x^3}-\frac{1}{5.x^5}+\dots\dots+C.$$

Како е пакъ по обр. 12. § 86. точно $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,(tang = x)$, то имамо по првомъ

$$arc\,(tang = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + C;$$

а по другомъ

$$arc\,(tang = x) = -\frac{1}{1.x} + \frac{1}{3.x^3} - \frac{1}{5.x^5} + \ldots + C.$$

Ставляюћи у првой одъ ове две едначине $x = 0$, слѣдуе $C = 0$, и зато

$$arc\,(tang = x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots;$$

познатый редъ изъ I. Ч. § 165.

Узимаюћи пакъ у другой едначини $x = \infty$; добыямо збогъ

$$arc\,(tang = \infty) = \frac{\pi}{2},\ C = \frac{\pi}{2},\ \text{и зато}$$

$$arc\,(tang = x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1.x} + \frac{1}{3.x^3} - \frac{1}{5.x^5} + \ldots\ldots$$

Првый е одъ ова два реда за лукъ тангенте тимъ сбирљивіи, па и употребителніи, штогодъ е x манѣ, другій пакъ то сбирљивіи и способніи за употреблѣнѣ, штогодъ е x веће.

3.) За $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ имамо по биномномъ образцу

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\ldots,$$

и зато

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{7} + \ldots + C.$$

Овай истый интегралъ нађенъ е у 11. образцу § 86. точно $= arc\,(sin = x)$. Слѣдуе дакле

$$arc\,(sin - x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots + C.$$

Пошто пакъ овай редъ мора да стои за лукъ свакогъ синуса, па и $sin = 0$, а за тай е $arc\,(sin = 0) = 0$, то слѣдуе $C = 0$, и зато коначно

$$arc\,(sin = x) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots\ldots,$$

сасвимъ онако, каошто смо га нашли у § 165. I. Ч.

4.) У име $\int dx\sqrt{2ax - x^2}$ имамо опетъ по биномномъ образцу

$$\sqrt{2ax - x^2} = (2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a}\,.\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2a}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\left(\frac{x}{2a}\right)^3 - \ldots\ldots\right]$$

$$= \sqrt{2a}\,.\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4a^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a^3} - \ldots\right).$$

Мора быти дакле траженый

$$\int dx\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{2a}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2a} - \frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{4a^2} - \ldots\right)$$

$$= 2x\sqrt{2ax}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{9}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3} - \ldots\right) + C.$$

На истый начинъ налазимо

$$5.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2a}}\Big(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^2}{4a^2}$$

$$+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^3}{8a^3}+\ldots\ldots\Big)+C;$$

$$6.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+C,$$

$$7.)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=lx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^6}$$

$$-\ldots+C.$$

Поставляюћи пакъ за овай истый интегралъ найпре $x=1+z$, дакле $dx=dz$, а $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2z+z^2}$, налазимо іошъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{dz}{\sqrt{2z+z^2}}=\sqrt{2z}\cdot\Big(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{4}$$

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{8}+\ldots\Big)$$

$$=\sqrt{2(x-1)}\cdot\Big[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{x-1}{2}\Big)+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^2$$

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^3+\ldots\Big]+C.$$

8.) У име $\int x^m.dx\,(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, имамо

$$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}.(1+\frac{b}{a}x^n)^{\frac{r}{s}}$$

$$=a^{\frac{r}{s}}\cdot\Big[1+\frac{r}{s}\cdot\Big(\frac{b}{a}\Big)x^n+\frac{r^{2|-s}}{2s}\cdot\Big(\frac{b}{a}\Big)^2\cdot x^{2n}$$

$$+\frac{r^{3|-s}}{2.3.s}\cdot\Big(\frac{b}{a}\Big)^3\cdot x^{3n}+\ldots\ldots\Big];$$

или

$$x^{m}.dx\,(a+bx^{n})^{\frac{r}{s}}=x^{m+\frac{nr}{s}}\,dx(b+ax^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$=x^{m+\frac{nr}{s}}\,dx\,.\,b^{\frac{r}{s}}(1+\frac{a}{b}\,x^{-n})^{\frac{r}{s}}$$

$$=x^{m+\frac{nr}{s}}\,dx\cdot b^{\frac{r}{s}}\cdot[1+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)x^{-n}$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2!\,s^{2}}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2}x^{-2n}+\ldots\ldots].$$

Дакле є по првомъ изразу као редъ растући степена' одъ x

$$\int x^{m}.dx\,(a+bx^{n})^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{r}{s}}\cdot[\frac{x^{m+1}}{(m+1)}+\frac{r}{s}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)\frac{x^{(m+1)+n}}{(m+1)+n}$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2!\,s^{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}\cdot\frac{x^{(m+1)+2n}}{(m+1)+2n}+\frac{r^{3|-s}}{3!\,s^{3}}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{3}\cdot\frac{x^{(m+1)+3n}}{(m+1)+3n}$$

$$+\cdots\cdots\cdot]+C,$$

а по другомъ, као редъ падаюћи степена' одъ x.

$$\int x^{m}.dx\,(a+bx^{n})^{\frac{r}{s}}=b^{\frac{r}{s}}\cdot[\frac{s\,x^{m+1+\frac{nr}{s}}}{nr+s\,(m+1)}+r\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{x^{m+1+\frac{nr}{s}-n}}{nr+s(m+1-n)}$$

$$+\frac{r^{2|-s}}{2s}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2}\cdot\frac{x^{m+1+\frac{nr}{s}-2n}}{nr+s(m+1-2n)}$$

$$+\cdots\cdots\cdot]+C.$$

9.) За $\int f(x)a^{x}.dx$. узмимо место a^{x} нѣговъ, изъ **I. Ч.** § **161.** познатый редъ. Слѣдуе съ места уобште вопросный

$$\int f(x)\,a^{x}.\,dx=\int f(x)\,dx+la\int f(x)\,x\,dx+\frac{l^{2}a}{2!}\int f(x)x^{2}.\,dx+\ldots$$

Ако є $f(x)$ н. п. x^n, добыямо одтудъ

$$\alpha.)\ \int x^n . a^x . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{la}{n+2} x^{n+2} + \frac{l^2 a}{2!(n+3)} x^{n+3} + \ldots + C,$$

Ако є пакъ $f(x) = \frac{1}{x}$, налазимо

$$\beta.)\ \int a^x . \frac{dx}{x} = lx + la . x + \frac{l^2 a}{2!} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{l^3 a}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + C,$$

кое ніє ништа друго, но у § 117. и 119. споменутый **интегралный логаритамъ**.

Ставляюћи у овомъ образцу $a^x = z$, слѣдує збогъ $x = \frac{lz}{la}$, $dx = \frac{dz}{z\, la}$, а $lx = {}^2lz - {}^2la = llz - lla$, $\int \frac{z\, dz}{z\, la} \times \times \frac{la}{lz}$, т. є. найпосле

$$\gamma.)\ \int \frac{dz}{lz} = {}^2lz + lz + \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2 z}{2\,!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3 z}{3\,!} + \ldots\ldots\ldots + C.$$

§ 131.

Осимъ начина коимъ налазимо интеграле помоћу безкрайны редова, увиђамо изъ предходећегъ §-а іошъ, како се неке функціє могу интеграленѣмъ развити у безкрайне редове, и то є у истомъ, поредъ главне намере, безъ сумнѣ тако ясно показано, да бы, спрамъ граница овога дела, права дангуба была, говорити іошъ и далѣ што о томе послу. То напоминюћи завршуємо вопросный предметъ съ томъ іошъ важномъ прѣметбомъ: како при интеграленю съ безкрайнимъ редовима ніє непремено нуждно, да дата диференціална функція буде изражена као редъ самы монома по x; довольно є, ако место нѣ изнађемо само редъ таковы чланова, кое смо у станю интегралити помоћу доякошньи упутства. Примери слѣдуюћегъ § а обяснитће то веома.

§ 132.

1.) Тражи се $\int\frac{dx\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

У име тога имамо по биномномъ правилу

$$\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}=(1-\varepsilon^2x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2x^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\varepsilon^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\varepsilon^6x^6-\ldots,$$

и зато

$$\int\frac{dx.\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\int\Big(1-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2x^2-\frac{1.1}{2.4}\cdot\varepsilon^4x^4-\frac{1.1.3}{2.4.6}\,\varepsilon^6x^6-\ldots\ldots\Big)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\,\varepsilon^2\int\frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1.1}{2.4}\,\varepsilon^4\int\frac{x^4.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\,\varepsilon^6\int\frac{x^6.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\ldots\ldots+C.$$

Тимъ начиномъ дакле сведенъ є вопросный интегралъ на онай $\int\frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}}$, и може се садъ лако далѣ израдити по §-у 111.

Поступаюћи по томъ §-у, налазимо найпосле

$$\int\frac{dx\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A+\frac{1}{2}\,\varepsilon^2\Big(\frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\,A\Big)$$

$$+\frac{1.1}{2.4}\,\varepsilon^4.\Big[\Big(\frac{x^3}{4}+\frac{3.1}{4.2}\,x\Big)\sqrt{1-x^2}-\frac{3.1}{4.2}\,A\Big]$$

$$+\frac{1.1.3}{2.4.6}\,\varepsilon^6.\Big[\Big(\frac{x^5}{6}+\frac{5\;1}{6.4}\,x^3+\frac{5.3.1}{6.4.2}\,x\Big)\sqrt{1-x^2}-\frac{5.3.1}{6.4.2}\,A\Big]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C;$$

при чему є $A = arc\,(sin = x)$,

2.) Иште се $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}}$.

У име тога можемо рећи

$$\frac{1}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(a+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \ldots\ldots\right],$$

дакле

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a+x)(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2a\sqrt{a}}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4.a^2\sqrt{a}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots\ldots + C,$$

израженъ самимъ већъ познатимъ интегралима.

3.) Подобно можемо при $\int\frac{dx}{\sqrt{(a-x).(2ax-x^2)}}$ рећи:

$\frac{1}{\sqrt{(a-x)(2ax-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, чимъ га доводимо на интеграле вида $\int\frac{A\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, кои су дояко већъ изнађени.

Дальій посао за овай примеръ оставлямъ прилѣжномъ момъ ученику, и споминѣмъ само іошъ, да сви садъ показани интеграли принадлеже елиптичнимъ трансцендентима.

к.) Определѣни интеграли, или интеграленѣ међу известнимъ границама.

§ 133.

У §§-ма 81. и 82. уверили смо се, да свакій интегралъ, **као обштій**, мора садржати некій, іошъ непознатый сталный брой C; у првомъ одъ та два §-а пакъ наговестили смо, како се тай сталный брой одкрива тиме, што є по самой природи дотичнога задатка, позната вредность вопроснога интеграла, при известной некой вредности пременльивога броя. Ако є т. є. убоште $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, а изъ природе задатка зна се, да є за $x = a$ вредность тога интеграла $= A$, онда имамо $A = \varphi(a) + C$, и одтудъ $C = A - \varphi(a)$, тако да после стои, као **особитый** интегралъ, $\int f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a) + A$.

Томе придаемо садъ іошъ слѣдуюће:

1.) Пошто є брой C одъ x независанъ, то онъ задржава свою, по природнимъ условіяма задатка за $x = a$ добывену вредность $A - \varphi(a)$, за сваку другу вредность броя x дотле, докъ се коіомъ одъ нъи ненаруши наставность функція $f(x)$ или $\varphi(x)$. Буде ли н. п. ова последня функція како за $x = \alpha$, тако и за $x = \beta$ равна $\frac{1}{0}$, али се то съ нъомъ иначе ни за какву другу, између та два броя α и β лежећу вредность одъ x недогађа, и $x = a$ притомъ лежи између α и β: онда брой C, безъ сваке сумнѣ, задржава за свако друго, између $x = \alpha$ и $x = \beta$ лежеће x ону вредность, коiю є добыо за $x = a$, али може врло лако постати друге вредности за другу какву, изванъ тій граница' лежећу вредность одъ x, и то: другу за доистне вредности тога броя до α, а опетъ другу за такове нѣгове вредности одъ β на выше, ако є т. є. $\alpha < \beta$. — О томе уверит'ћемо се врло често доцніє, при употребляваню инфинитезималногъ рачуна у аналитичной геометріи.

2.) Ако е вредность обштегъ каквогъ интеграла за $x = a$ по самой природи задатка равна нулли, или треба да е толика, онда каже се: дотичный **интегралъ започинѣ** са $x = a$, и C е притомъ очевидно такођеръ $= 0$. Изъ горнѣга пакъ увиђа се, да тако изнађена **особита** вредность тогъ интеграла само дотле постои, докъ се каквомъ наставномъ вредности броя x до a, или одъ a далѣ, непоремети наставность функціе $f(x)$ или $\varphi(x)$.

3.) Ако се у особитомъ, са $x = a$ започинюћемъ интегралу узме место x іошъ и друга известна вредность b, онда е вредность истога интеграла подпуно определѣна, и престае дакле быти функція одъ x. Такавъ се интегралъ после зове **определѣнъ**, и каже се о нѣму, да **започинѣ са $x = a$, а престае са $x = b$**, или **узетъ е одъ $x = a$ до $x = b$, или определѣнъ е међу границама** $x = a$ и $x = b$.

Обично помишля се притомъ брой $b > a$, али може быти и $< a$, но на свакій начинъ мора се наодити међу онимъ наставнимъ вредностима броя x до a или одъ a далѣ, за кое брой C задржава едну исту вредность, иначе бы вредность интеграла по горнѣму лако могла быти погрешна.

§ 134.

Ако е $\varphi(x)$ интеграленѣмъ добывена особита вредность за $\int f(x) \,.\, dx$, онда е по предходећему

1.) $\varphi(x) + C$ **подпуный, обштій** или **неопредѣлѣный** $\int$,

2.) $\varphi(x) - \varphi(a)$ са a **започинюћій** интегралъ, а

3.) $\varphi(b) - \varphi(a)$ **определѣный** интегралъ **међу границама** $x = a$ и $x = b$.

Првый представля се просто са $\int f(x)\,dx$, другій са $\int_a f(x)\,dx$ или $\int_a^x f(x)\,dx$, а трећій са $\int_a^b f(x)\,dx$, тако дакле, да е

$$\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C,\ \int_{a} f(x)dx=\int_{a}^{x} f(x)dx=\varphi(x)-\varphi(a),$$

а $\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$, али ова два последня подъ горе иреченимъ условіяма, а трећій нарочно само дотле те вредности, докъ $f(x)$ ни за $x=a$, ни за $x=b$, а іошъ манѣ за кою другу средню вредность одъ x непостае $\frac{1}{0}$, или другогъ каквогъ, нѣну наставность нарушавающегъ вида. —

Особита свойства определѣны интеграла, као я ньиова велика важность по томе, што при употребляваню интегралногъ рачуна съ таковимъ, т. є. међу известнимъ границама узетимъ интегралима посла имамо, — изискую, да ій посматрамо нешто поизближе.

§ 135.

Ако є $\int f(x)\,dx=\varphi(x)$, дакле по понятію интеграла $\varphi_1(x)=f(x)$, онда є изчезлњиво мала премена функціє $\varphi(x)$ збогъ изчезлњиво мале премене dx броя x, $d\varphi(x)=\varphi_1(x)\,dx=f(x)\,dx$. Дакле, ако место x узмемо найпре a, а после редомъ $a+dx$, $a+2dx$, $a+3dx$, ... докъ найпосле b, добыямо очевидно редомъ найпре

$\varphi(a)$, као прву слѣдующу вредность

$\varphi(a)+f(x)_{a}.dx$, као другу

$\varphi(a)+f(x)_{a}.dx+f(x)_{a+dx}.dx$, као трећу

$\varphi(a)+f(x)_{a}.dx+f(x)_{a+dx}.dx+f(x)_{a+2dx}.dx$,

. . . . , докъ найпосле

$$\varphi(b)=\varphi(a)+f(x)_{a}.dx+f(x)_{a+dx}.dx+f(x)_{a+2dx}.dx+\ldots+f(x)_{b-2dx}.dx$$
$$+f(x)_{b-dx}.dx,$$ тако да є затимъ

$$\varphi(b)-\varphi(a)=[\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{f(x)}+\ldots+\underset{b-2dx}{f(x)}+\underset{b-dx}{f(x)}].dx$$

$$=[\underset{a+\mu dx}{\Sigma f(x)}].dx \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha.,$$ т. є.

$\varphi(b)-\varphi(a)$ равно алгебрайскомъ сбиру свію изчезльиво малы премена' функціє $\varphi(x)$, коє є она наставно претрпила одъ $x=a$ до $x=b$.

Тиме є оправдано употребляванѣ сбирнога знака $\int$, (**S**, почетно писме речи сумма, сбиръ) за определѣне интеграле. Пошто є пакъ притомъ брой b сасвимъ обштій или произволянъ, па се зато може заменути и са x, то су оправдани уєдно и остали изрази подъ **1.** и **2.** у предходеѣемъ §-у, докъ подъ речи **интегралъ** разумемо **сбиръ диференціала.**

О основаности докученя подъ α). уверитѣе насъ подпуно слѣдуюѣій

§ 136.

Ако є $a<b$, и помислимо разлику $b-a$ поделѣну на безбройно млого єднаки частій, представляюѣи сваку са dx, онда є сбиръ безбройно многи производа' $f(x)\,dx$ за сваку поєдину наставну (т. є. са dx разликуюѣу се) вредность броя x, одъ $x=a$ до $x=b$, нико друго но $\int_a^b f(x)\,dx$, т. є. $\varphi(b)-\varphi(a)$, ако є интеграленѣмъ наѣена вредность $\varphi(x)$; али то стои само дотле, докъ функція $f(x)$ за ниєдну одъ тій вредностій измеѣу a и b непостає $\frac{1}{0}$, или каквогъ другогъ вида, съ коимъ се нѣна наставность нарушава. Ево зашто.

Пошто є $\varphi_1(x)=f(x)$, то є $\varphi_2(x)=f_1(x)$, $\varphi_3(x)=f_2(x)$, и т. д., и зато по телеровомъ образцу за функція єдногъ променльивогъ броя (§ 26.):

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x)\,h+f_1(x)\frac{h^2}{2\,!}+f_2(x)\cdot\frac{h^3}{3\,!}+\ldots\ldots \quad (\beta.$$

Узимаюћи овде $h=dx=\frac{b-a}{n}$, а притомъ n као безкрайно великій целый брой, — поставляюћи затимъ за x найпре a, а после редомъ $a+dx$, $a+2dx$, $a+3dx$, ... докъ найпосле $a+(n-1)\,dx=b-dx$, — добыямо по реду

$$\varphi(a+dx)-\varphi(a)=\underset{a}{f(x)}\,dx+\underset{a}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}+\underset{a}{f_2(x)}.\frac{d^3x}{3\,!}+\cdots\cdots$$

$$\varphi(a+2dx)-\varphi(a+dx)=\underset{a+dx}{f(x)}.dx+\underset{a+dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}+\underset{a+dx}{f_2(x)}.\frac{d^3x}{3\,!}+\cdots$$

$$\varphi(a+3dx)-\varphi(a+2dx)=\underset{a+2dx}{f(x)}.dx+\underset{a+2dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}$$

$$+\underset{a+2dx}{f_2(x)}.\frac{d^3x}{3\,!}+\cdots\cdots\cdots$$

. . . .

$$\varphi(b)-\varphi[a+(n-1)\,dx=b-dx]$$

$$=\underset{b-dx}{f(x)}.dx+\underset{b-dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}+\underset{b-dx}{f_2(x)}.\frac{d^3x}{3\,!}+\cdots\cdots\cdots,$$

а ако све ове єдначине саберемо:

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\Sigma\,\underset{a+\mu dx}{f(x)}.dx+\Sigma\underset{a+\mu dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}$$

$$+\Sigma\,\underset{a+\mu dx}{f_2(x)}.\frac{d^3x}{3\,!}+\cdots\cdots\cdots \quad (\gamma.,$$

при чему $\Sigma\,\underset{a+\mu dx}{f(x)}.dx$ представля сбиръ $\underset{a}{f(x)}dx+\underset{a+dx}{f(x)}.dx+\underset{a+2dx}{f(x)}.dx+\cdots\cdots\cdots$, $\Sigma\,\underset{a+\mu dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}$ сбиръ $\underset{a}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}+\underset{a+dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}+\underset{a+2dx}{f_1(x)}.\frac{d^2x}{2\,!}+\cdots\cdots$, и т. д., на тай начинъ, да место μ валя редомъ узимати 0, 1, 2, ... $(n-1)$.

Обзирући се пакъ при той єдначини γ) на то, да є dx изчезльиво малый брой, те да зато сви чланови десногa реда съ другимъ започевши спрамъ првому, као изчезльиво мали выши редова изчезавају, — остає намъ само

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{a+\mu dx} f(x)\,.\,dx \;.\;.\;.\;.\;.\; (\delta.,$$

чимъ є, незаборавляюћи ко є $\sum\limits_{a+\mu dx} f(x)\,.\,dx$, докученѣ подъ α) сасвимъ обистинѣно.

§ 137.

Ако су α, β и γ између a и b лежеће вредности, а интеграленѣмъ добыли смо $\int f(x)\,dx=\varphi(x)$, онда є

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx=\varphi(\alpha)-\varphi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha),$$

$$\int_\beta^\gamma f(x)\,dx=\varphi(\gamma)-\varphi(\beta),$$

$$\int_\gamma^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(\gamma),$$ а ако све ове єдначине саберемо

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^b f(x)dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$
$$=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Изъ овога види се, како определѣный $\int_a^b f(x)\,dx$ можемо добыти такођеръ и на тай начинъ, да између a и b узмемо произвольно колико средньи вредностій α, β, γ, . . λ, па онда определимо редомъ $\int_a^\alpha$, $\int_\alpha^\beta$, $\int_\beta^\gamma$, ... $\int_\lambda^b$, и све те интеграле саберемо; овай сбиръ т. є. бытће траженый $\int_a^b$.

§ 138.

Ако є $f(x)$ за сваку наставну вредность броя x одъ $x=a$ до $x=b$ положна, а $\underset{g}{\varphi(x)}$ и $\underset{k}{\varphi(x)}$ представляю прва найвећу, а друга найманю вредность функціє $\varphi(x)$, кое она прима за оне наставне вредности броя x, онда є, каошто се лако увиђа,

$$[\underset{a}{\varphi(x)}\cdot\underset{a}{f(x)} + \underset{a+dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+dx}{f(x)} + \underset{a+2dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+2dx}{f(x)} + \ldots + \underset{b-dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{b-dx}{f(x)}]\,dx$$

$$=\Sigma[\underset{a+\mu dx}{\varphi(x)}\cdot\underset{a+\mu dx}{f(x)}\cdot dx] < \Big\{[\underset{g}{\varphi(x)}.\underset{a}{f(x)}+\underset{g}{\varphi(x)}.\underset{a+dx}{f(x)}+\ldots+\underset{g}{\varphi(x)}.\underset{b-dx}{f(x)}]\,dx$$

$$=\underset{g}{\varphi(x)}[\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{f(x)}+\ldots+\underset{b-dx}{f(x)}]\,dx$$

$$=\underset{g}{\varphi(x)}.\Sigma[\underset{a+\mu dx}{f(x).dx}]\Big\}, \text{ а}$$

$$>\Big\{[\underset{k}{\varphi(x)}.\underset{a}{f(x)}+\underset{k}{\varphi(x)}.\underset{a+dx}{f(x)}+\ldots+\underset{k}{\varphi(x)}.\underset{b-dx}{f(x)}]\,dx$$

$$=\underset{k}{\varphi(x)}[\underset{a}{f(x)}+\underset{a+dx}{f(x)}+\underset{a+2dx}{f(x)}+\ldots+\underset{b-dx}{f(x)}]\,dx$$

$$=\underset{k}{\varphi(x)}.\Sigma[\underset{a+\mu dx}{f(x).dx}]\Big\}.$$

Но ово по § 136. ништа друго незначи, него да є

$$\int_a^b \varphi(x).f(x)\,dx < \underset{g}{\varphi(x)}.\int_a^b f(x)\,dx, \text{ а}$$

$$> \underset{k}{\varphi(x)}.\int_a^b f(x)\,dx.$$

Вредность определѣногъ $\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx$ лежи дакле у вопросномъ случаю међу границама $\underset{g}{\varphi(x)}.\int_a^b f(x)\,dx$ и $\underset{k}{\varphi(x)}.\int_a^b f(x)\,dx$, маня є т. є одъ прве, а већа одъ друге.

§ 139.

1.) Ако у образцу β., § 136. замислимо само врло велико n, а не безкрайно, дакле место h узмемо не изчезљиво dx, но само врло малый брой $\delta = \frac{b-a}{n}$, — и ако после заменемо x редомъ съ a, $a+\delta$, $a+2\delta$, $a+3\delta$, ... докъ найпосле съ $a+(n-1)\delta = b-\delta$, — добыямо истимъ путемъ као тамо:

$$\int_a^b f(x)dx = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} + \frac{\delta^2}{2\,!} . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_1(x)} + \frac{\delta^3}{3\,!} . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_2(x)} + \; . \; . \; . \quad (m.;$$

пренебрегаваюћи овде пакъ све чланове съ вышимъ степенима одъ δ, остае за **приближну** вредность вопросногa интеграла, образацъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{I}.,$$

у комъ є, као што знамо изъ помеиутога §-а,

$$\underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} = \underset{a}{f(x)} + \underset{a+\delta}{f_1(x)} + \underset{a+2\delta}{f_2(x)} + \ldots + \underset{a+(n-1)\delta = b-\delta}{f(x)},$$

а притомъ опетъ по горнѣму $\delta = \frac{b-a}{n}$.

2.) Пошто є $\int f_1(x)\,dx = f(x)$, $\int f_2(x)\,dx = f_1(x)$, и т. д., то є истимъ начиномъ као горе **приближный** $\int_a^b f_1(x)\,dx$, т. є.

$$f(b) - f(a) = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_1(x)} \quad , \text{ а}$$

$$f_1(b) - f_1(a) = \delta . \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f_2(x)} \quad ,$$

и зато, ако ове вредности узмемо у єдначину m, притомъ пакъ опетъ выше степене одъ δ пренебрегнемо, за **приближну** вредность вопросногa интеграла другій образацъ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \delta . \Big\{ \underset{a+\mu\delta}{\Sigma f(x)} + \frac{1}{2}\,[f(b) - f(a)] \Big\} \ldots (\mathrm{II}.,$$

3.) Узимаюћи найпосле у овомъ образцу $f_1(x)$ и $f_2(x)$ место $f(x)$, добыямо изъ истогъ узрока као мало пре

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f_1(x)\,dx=\delta.\left\{\Sigma \underset{a+\mu\delta}{f_1(x)}+\frac{1}{2}[f_1(b)-f_1(a)]\right\}$$

$$f_1(b)-f_1(a)=\int_a^b f_2(x)\,dx=\delta.\left\{\Sigma \underset{a+\mu\delta}{f_2(x)}+\frac{1}{2}[f_2(b)-f_2(a)]\right\}.$$

Слѣдуюће пакъ одавде вредности за $\Sigma \underset{a+\mu\delta}{f_1(x)}$ и $\Sigma \underset{a+\mu\delta}{f_2(x)}$ у едначини m заменюјући, и притомъ чланове са δ^3 и вышимъ нѣговимъ степенима пренебрегаваюћи, добыямо за **приближну** вредностк вопросного интеграла трећій образацъ

$$\int_a^b f(x)=\delta\left\{\Sigma \underset{a+\mu\delta}{f(x)}+\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]\right\}-\frac{\delta^2}{12}[f_1(b)-f_1(a)]\,.\,\text{III.}$$

Нађена ова три образца служе, каошто при свакомъ наговестисмо, за **приближно** израчунаванѣ вредности $\int_a^b f(x)dx$, у случаю, гди обштій интегралъ немамо, или га неможемо изнаћи, или га найпосле нећемо тражити (можда збогъ врло тешкога посла, кои намъ задаѥ), — а природа дотичнога задатка приближне вредности допушта. Лако ѥ пакъ увидити, да ће тако добывене вредности быти све точніѥ, штогодъ ѥ n већій, дакле $\delta=\frac{b-a}{n}$ маньій брой, и штогодъ се вредности одъ $f(x)$ при заменьиваню броя x съ a, $a+\delta$, $a+2\delta$, . . . споріѥ увећавају или умалявају. — За образацъ II. можемо нарочно іошъ приметити, како при нѣговомъ употребляваню неморамо имати функцію $f(x)$, ако само знамо или имамо $n+1$ нѣны вредностій $\underset{a}{f(x)}$, $\underset{a+\delta}{f(x)}$, $\underset{a+2\delta}{f(x)}$, ... $\underset{b}{f(x)}$.

§ 140.

Узмимо баръ еданъ примеръ за обяснѣнѣ употребляваня тій образаца.

Тражи се $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}+\omega} \frac{dx}{x}$, т. є. $l(a+\omega) - la = l\frac{a+\omega}{a}$.

Ту є $f(x) = \frac{1}{x}$, $b = a + \omega$, $\delta = \frac{b-a}{n} = \frac{\omega}{n}$. Имамо дакле $f_1(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f_2(x) = \frac{2}{x^3}$, $\underset{\mathrm{a}}{f(x)} = \frac{1}{a}$, $\underset{\mathrm{a}+\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+\omega}$,

$\underset{\mathrm{a}+2\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+2\omega}$, $\underset{\mathrm{a}+3\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+3\omega}$, . . $\underset{\mathrm{a}+(\mathrm{n}-1)\delta}{f(x)} = \frac{n}{na+(n-1)\omega}$,

$\underset{\mathrm{a}+\omega}{f(x)} = \frac{1}{a+\omega}$, и зато

по образцу **I.**

$$l\frac{a+\omega}{a} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}+\omega} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\omega}{n}\left[\frac{1}{a} + \frac{n}{na+\omega} + \frac{n}{na+2\omega} + \frac{n}{na+3\omega} + \cdot\cdot + \frac{n}{na+(n-1)\omega}\right]$$

$$= \omega . \left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \frac{1}{na+3\omega} + \cdot\cdot + \frac{n}{na+(n-1)\omega}\right],$$

по образцу **II.**

$$l\frac{a+\omega}{a} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}+\omega} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\omega}{n}\left[\frac{1}{a} + \frac{n}{na+\omega} + \frac{n}{na+2\omega} + \cdot\cdot + \frac{n}{na+(n-1)\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\omega} - \frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= \omega . \left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \cdot\cdot + \frac{1}{na+(n-1)\omega}\right] - \frac{\omega^2}{2na(a+\omega)},$$

найпосле по образцу **III.**

$$l\frac{a+\omega}{a} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}+\omega} \frac{dx}{x}$$

$$= \omega . \left[\frac{1}{na} + \frac{1}{na+\omega} + \frac{1}{na+2\omega} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)\omega}\right]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{na(a+\omega)} - \frac{1}{12} \cdot \frac{\omega^3(2a+\omega)}{a^2(a+\omega)^2}.$$

Узмимо садъ за упражненѣ у изтраживаню определѣны интеграла'

Неколико примера.

§ 141.

1.) Тражи се $\int_0^a \frac{x^m.dx}{\sqrt{ax-x^2}}$.

Ако узмемо у образцу *a.*) подъ 5., § 111. *a* место 2*a*, слѣдує уобште

$$\int\frac{x^m.dx}{\sqrt{ax-x^2}}=-\frac{1}{m}x^{m-\frac{1}{2}}.\sqrt{a-x}+\frac{a(2m-1)}{2m}\int\frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Примећавајући овде пакъ, како првый членъ десне части постає и за $x=0$ и за $x=a$ раванъ нулли, можемо одма ставити

$$\int_0^a\frac{x^m.dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{a(2m-1)}{2m}.\int_0^a\frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{ax-x^2}}\ \ldots\ldots\ (\alpha.,$$

и имамо у томе образацъ, коимъ доводимо вопросный интегралъ на друге ниже истога рода, и одма га тако и одкривамо. Ево:

Обзиромъ на то, да є по 14. обр. § 86. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=arc\,(\sin v.=\frac{2}{a}x)$; и зато $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=arc\,(\sin v.=2)-arc\,(\sin v.=0)=\pi-0=\pi$, — добыямо изъ нађенога образца *α.*), ставляюћи у истомъ по реду $m=1,\ 2,\ 3,\ldots$

$$\int_0^a\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{a}{2}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{a}{2}\pi,$$

$$\int_0^a\frac{x^2.dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{3}{4}a\int_0^a\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{1.3}{2.4}a^2.\pi,$$

$$\int_0^a\frac{x^3.dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{5}{6}a\int_0^a\frac{x^2.dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}a^3.\pi,$$

и т. д. докъ найпосле

$$\int_0^a \frac{x^m . dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\ldots(2m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\ldots\ldots 2m}\, a^m . \pi \,.$$

2.) Пыта се за интегралъ

$$\tau = -\int_0^a \frac{r dx}{2\sqrt{g(a-x)(2rx-x^2)}} = -\frac{r}{2\sqrt{g}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(2r-x)}}$$

$$= -\frac{r}{2\sqrt{g}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2r-x}}\,.$$

По биномномъ правилу добыямо

$$\frac{1}{\sqrt{2r-x}} = (2r-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}\cdot\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2r}}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{x}{2r}\right)^3+\ldots\right];$$

зато є, ако ову вредность у вопросномъ интегралу узмемо и онда мложенѣ са $\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ свршимо,

$$\tau = -\frac{r}{2\sqrt{2rg}}\cdot\left[\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2r}\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4r^2}\int_0^a \frac{x^2 . dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \ldots\ldots\ldots\right].$$

Но ови су интеграли сви већъ познати изъ предходећегъ примера. Узимаюћи дакле ньиове у томе нађене вредности, слѣдує, ако уєдно брой π извадимо као заєдничкогъ чинителя, коначно траженый интегралъ

$$\tau = -\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{2g}}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2r}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2r}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

3.) Потребанъ є $\int_0^a \frac{dx.\sqrt{a^4 - c^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Извлачећи найпре у броителю a^4, а у именителю a^2 као заедничкога чинителя, и ставляюћи после ради краткоће $\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2$, а $\frac{x^2}{a^2}=z^2$, постаѥ уобште

$$\int\frac{dx.\sqrt{a^4 - c^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}} = a\int\frac{dz\sqrt{1-\alpha^2z^2}}{\sqrt{1-z^2}} = a\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}(1-\alpha^2z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= a\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\Big(1 - \frac{1}{2}\alpha^2z^2 - \frac{1\,.\,1}{2^2.2!}\alpha^4z^4 -$$

$$- \frac{1\,.\,3}{2^3.3!}\alpha^6z^6 - \frac{1.3.5}{2^4.4!}\alpha^8z^8 - \,.\,.\Big)$$

$$= a\Big[\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{2}\alpha^2\int\frac{z^2.dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$- \frac{1\,.\,1}{2^2.2!}\alpha^4\int\frac{z^4.dz}{\sqrt{1-z^2}} - \frac{1\,.\,3}{2^3.3!}\alpha^6\int\frac{z^6.dz}{\sqrt{1-z^2}} - .\Big].$$

По 11. обр. § 86. є $\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = arc\,(sin = z)$, а по § 111. имамо

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{z^2.dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\,arc\,(sin = z),\\
&\int\frac{z^4.dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\Big(\frac{z^3}{4} + \frac{3.1}{4.2}z\Big)\sqrt{1-z^2} + \frac{3.1}{4.2}\,arc\,(sin = z),\\
&\int\frac{z^6.dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\Big(\frac{z^5}{6} + \frac{5.1}{6.4}z^3 + \frac{5.3.1}{6.4.2}z\Big)\sqrt{1-z^2} + \frac{5.3.1}{6.4.2}\,arc(sin\ \ z)
\end{aligned}\right\}\ t.$$

. . . .

Бытће дакле, ако повратимо вредность $z = \frac{x}{a}$, збогъ $arc\,(sin = \frac{a}{a} = 1) = \frac{\pi}{2}$, а $arc\,(sin = 0) = 0$, —

$$\int_{x=0}^{x=a}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a}\frac{z^2\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a}\frac{z^4\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{3.1}{4.2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{x=0}^{x=a}\frac{z^6\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

. . . .

и зато съ овимъ вредностима, ако ій у предходећемъ изразу вопроснога интеграла заменемо, и уєдно $\frac{\pi}{2}$ као заєдничкога чинителя извучемо, истый

$$\int_0^a\frac{dx\sqrt{a^4-c^2\,x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}=a\,.\,\frac{\pi}{2}\,.\,[1-\frac{1}{1}\Big(\frac{1}{2}\,.\,\frac{c}{a}\Big)^2-\frac{1}{3}\Big(\frac{1.3}{2.4}\,.\,\frac{c^2}{a^2}\Big)^2$$

$$-\frac{1}{5}\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\,.\,\frac{c^3}{a^3}\Big)^2-\ldots\ldots\ldots\ldots].$$

4.) Ако горнѣ интеграле подъ *t*.) узмемо међу границама $z=0$ и $z=1$, добыямо прво зато, што є $arc\,(sin=1)$ $\frac{\pi}{2}$, а $arc\,(sin=0)=0$, — друго пакъ зато што у свакомъ одъ ньи првый чланъ како за $z=0$ тако и за $z=1$ изчезава:

$$\int_0^1\frac{z^2\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{2}\,arc\,(sin=1)=\frac{1}{2}\,.\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1\frac{z^4\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{3.1}{4.2}\,arc\,(sin=1)=\frac{3.1}{4.2}\,.\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1\frac{z^6\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{5.3.1}{6.4.2}\,arc\,(sin=1)=\frac{5.3.1}{6.4.2}\,.\,\frac{\pi}{2}$$

. . . .

$$\int_0^1\frac{z^{2n}.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1\,.\,3\,.\,5\;\ldots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\;\ldots\ldots\,.\,2n}\,.$$

Подобно слѣдую изъ интеграла съ безпарнимъ степенима одъ x у § 111. подъ 2., изменююћи само x са z:

$$\int_0^1 \frac{z\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 1\,;$$

$$\int_0^1 \frac{z^3\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2}{3}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^5\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2.4}{1.3}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{z^7\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2.4.6}{1.3.5}\,,$$

. . . .

докъ найпосле

$$\int_0^1 \frac{z^{2n+1}.\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,2n}{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n+1)}$$

Делећи горный интегралъ за парне степене одъ z са овимъ за безпарне, добыямо

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{2n}\,.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{2n+1}.\,dz}{\sqrt{1-z^2}}} = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,(2n-1)\,.\,3.5.7.9\ldots(2n+1)}{2\,.\,4.6.8\,\ldots\ldots\,2n\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,\ldots\,2n}\,.$$

$$= \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1)\,(2n-1)\,.\,(2n+1)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\ldots\ldots\,2n\,.\,2n}\,.$$

Помишляюћи n врло велико, увиђамо лако, да ће се еданъ интегралъ одъ другогъ тимъ манѣ разликовати, штогодъ е исто n веће, и да међу ньима найпосле, ако е n безкрайно, готово никакве разлике више нема, дакле да за таково n поуздано можемо ставити

$$1 = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots\ldots\text{ у безкрайность}}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\ldots\text{ у безкрайность}}\,;$$

но одтудъ тадъ слѣдуе

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots}\,,$$ већъ познатый

Валисевъ изразъ (Ч. I. § 180.), да израчунаванѣ броя π.

л) Вcase интеграли.

§ 142.

Ако место првогъ диференціала функціє y променльивога броя x имамо некій нѣнъ вышій диференціалъ, н. п. n. диференціалъ, онда є иста функціа у односу на тай датый или познатый диференціалъ уобште **вышій**, а у известномъ томъ случаю n. интегралъ, и добыямо є изъ истогъ диференціала интегралећи га застопце n пута, каошто є то већъ наговешћено у § 84.

Да бы ово больма разумели, а уєдно іошъ и нешто друго притомъ увидили, узмимо найпре да є

$$ {}^{2}dy = f(x)\, d^{2}x. $$

У томъ случаю имамо

$$ \frac{{}^{2}dy}{dx} = f(x)\, dx\,, $$ или пошто є dx сталанъ брой,

$$ d\,\frac{dy}{dx} = f(x)\, dx. $$ Дакле є

$$ \frac{dy}{dx} = \int f(x)\, dx + C_1\,, $$ а

$$ dy = dx \,.\! \int f(x)\, dx + C_1\, dx\,, $$ и зато

$$ y = {}^{2}\!\!\int f(x)\, d^{2}x = \int dx \int f(x)\, dx + \int C_1\, dx + C_2 $$

$$ = \int dx \int f(x)\, dx + C_1\, x + C_2\,. $$

Подобно имамо, ако є ${}^{3}dy = \varphi\,(x)\, d^{3}x$,

$$ \frac{{}^{3}dy}{d^{2}x} = d\,\frac{{}^{2}dy}{d^{2}x} = \varphi\,(x)\, dx\,, $$ тако да є

$$ \frac{{}^{2}dy}{d^{2}x} = \int \varphi\,(x)\, dx + C_1\,, $$

$\frac{{}^2dy}{dx} = d\frac{dy}{dx} = dx \,.\, \int \varphi(x)\, dx + C_1 dx$, одтудъ после

$\frac{dy}{dx} = \int dx \int \varphi(x)\, dx + C_1 x + C_2$, а

$dy = dx \cdot \int dx \int \varphi(x)\, dx + C_1 x dx + C_2 dx$, и зато

коначно $y = {}^3\!\int \varphi(x)\, d^3x = \int dx \int dx \int \varphi(x)\, dx + \frac{1}{2} C_1 x^2$ $+ C_2 x + C_3$, или ако $\frac{1}{2} C_1$ са $\mathfrak{C}_1$ изменемо

$$y = {}^3\!\int \varphi(x)\, d^3x = \int dx \int dx \int \varphi(x)\, dx + \mathfrak{C}_1 + C_2 x + C_3.$$

Овимъ є горнѣ изреченѣ безъ сумнѣ подпуно потврђено; али се одтудъ увиђа іошъ и то: да у вопросну функцію улазе онолико сталны, непознаты броєва, колико смо пута интегралили.

Да узмемо іошъ и кои примеръ.

1.) Тражи се y изъ ${}^3dy = sin\, x \,.\, d^3x$.

Ту имамо $\frac{{}^3dy}{d^2x} = d\frac{{}^2dy}{d^2x} = sin\, x \,.\, dx = -d\, cos\, x$; зато є

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = -cos\, x + C_1, \quad а$$

$$\frac{{}^2dy}{dx} = d\,\frac{dy}{dx} = -cos\, x \,.\, dx + C_1 dx$$

$$= -d\, sin\, x + C_1 dx, \quad тако\ да$$

слѣдуе $\frac{dy}{dx} = -sin\, x + C_1 x + C_2$, и одтудъ

$$dy = -sin\, x \,.\, dx + C_1 x dx + C_2 dx$$

$$= d\, cos\, x + C_1 x dx + C_2 dx, \quad а$$

$$y = {}^3\!\int sin\, x . d^3x = cos\, x + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$= cos\, x + \mathfrak{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

2.) **Пыта се** y **изъ** ${}^4dy = \frac{d^4x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\frac{{}^4dy}{d^3x} = d\,\frac{{}^3dy}{d^3x} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$ **зато**

$$\frac{{}^3dy}{d^3x} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,(sin = x) + C_1 \quad (\S\,86.);$$ **одтудъ**

$$\frac{{}^3dy}{d^2x} = d\,\frac{{}^2dy}{d^2x} = arc\,(sin = x)\,.\,dx + C_1dx,$$ **зато**

$$\frac{{}^2dy}{d^2x} = \int arc\,(sin = x)\,dx + C_1x + C_2$$

$$= x\,.\,arc\,(sin = x) + \sqrt{1-x^2} + C_1x + C_2 \quad (\S\,127.);$$ **одатле**

$$\frac{{}^2dy}{dx} = d\,\frac{dy}{dx} = xdx.arc\,(sin = x) + dx\,.\sqrt{1-x^2} + C_1xdx + C_2dx$$

зато

$$\frac{dy}{dx} = \int xdx\,.\,arc\,(sin = x) + \int dx\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$= \frac{x^2}{2}\;arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\,x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{4}\,arc\,(sin = x)$$

$$- \tfrac{1}{2}\;arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \tfrac{1}{2}\,C_1x^2 + C_2x + C_3$$

(III. осн. прав. § 85.; найпре $1 - x^2 = z^2$, **после § 111.); одтудъ**

$$dy = \tfrac{1}{2}\,x^2.\,dx\,.\,arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\,x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{4}\,dx\,.\,arc\,(sin = x)$$

$$- \tfrac{1}{2}\,dx\,.\,arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \tfrac{1}{2}\,C_1x^2dx + C_2xdx + C_3dx,$$

и зато

$$y = {}^4\!\int \frac{d^4 x}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\int x^2 . dx \,.\, arc\,(sin = x) + \tfrac{3}{4}\int x\sqrt{1-x^2}$$

$$- \tfrac{1}{4}\int dx\; arc\,(sin = x) - \tfrac{1}{2}\int dx \,.\, arc\,(sin = \sqrt{1-x^2})$$

$$+ \tfrac{1}{6}\,C_1 x^3 + \tfrac{1}{2}\,C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$= \frac{x}{12}(2x^2 - 3) . arc(sin = x) + \frac{1}{36}(11x^2 + 4) . \sqrt{1-x^2}$$

$$- \tfrac{1}{2}\,x\; arc\,(sin = \sqrt{1-x^2}) + \mathfrak{C}_1 x^3 + \mathfrak{C}_2 x^2 + \mathfrak{C}_3 x + \mathfrak{C}_4$$

(III. осн. прав. и § 111.; обр. 18. § 87.; § 127.; $1 - x^2 = z^2$, после § 111.).

§ 143.

Безъ обзира на сталне броеве имамо

$${}^2\!\int \psi(x) d^2 x = \int dx \int \psi(x)\, dx\,,$$

или ако у III. основномъ правилу § 85. узмемо $d\,f(x) = dx$, а $\varphi(x) = \int \psi(x)\, dx$, дакле $f(x) = x$, а $d\varphi(x) = \psi(x) dx$:

$${}^2\!\int \psi(x)\, d^2 x = x \int \psi(x)\, dx - \int x \,.\, \psi(x)\, dx.$$

Одтудъ слѣдуе

$${}^3\!\int \psi(x)\, d^3 x = \int dx \,.\, {}^2\!\int \psi(x)\, d^2 x = \int x dx \int \psi(x)\, dx$$

$$- \int dx \int x\psi(x)\, dx.$$

Поставляюћи пакъ у истомъ III. правилу еданпутъ $df(x) = xdx$, $\varphi(x) = \int \psi(x)\, dx$, а другій путъ $df(x) = dx$, $\varphi(x) = \int x\psi(x)\, dx$, слѣдуе

$$\int x dx \int \psi(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\,x^2 . \int \psi(x)\, dx - \tfrac{1}{2}\int x^2 \psi(x)\, dx\,,$$ а

$$\int dx \int x\psi(x)\,dx = x\int x\psi(x)\,dx - \int x^2\psi(x)\,dx\,,$$

тако да є после съ тима вредностима

$$^3\!\int\psi(x)\,d^3x = \frac{1}{2!}\,[x^2.\int\psi(x)\,dx - 2x.\int x\psi(x)\,dx + \int x^2.\,\psi(x)\,dx].$$

Истимъ путемъ добыямо далѣ

$$^4\!\int\psi(x)\,d^4x = \frac{1}{3!}\,[x^3.\int\psi(x)dx - 3x^2.\int x\psi(x)dx + 3x.\int x^2\psi(x)\,dx$$
$$-\int x^3\psi(x)\,dx]\,,$$

$$^5\!\int\psi(x)\,d^5x = \frac{1}{4!}\,[x^4.\int\psi(x)dx - 4x^3.\int x\psi(x)dx + 6x^2.\int x^2\psi(x)\,dx$$
$$-4x\,.\int x^3\psi(x)\,dx + \int x^4\psi(x)\,dx]\,,$$

и т. д. докъ найпосле уобште

$$^n\!\int\psi(x)\,d^nx = \frac{1}{(n-1)!}\,[x^{n-1}.\int\psi(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}.\int x\psi(x)\,dx$$
$$+\binom{n-1}{2}x^{n-3}.\int x^2\psi(x)\,dx - \ldots \pm \int x^{n-1}\psi(x)\,dx],$$

или ако іошъ сви n сталны броєва, кои при постепеномъ интеграленю єданъ по єданъ овамо улазе, и одъ кои є свакій съ другимъ некимъ степеномъ одъ x снабдевенъ, неизоставимо,

$$^n\!\int\psi(x)\,d^nx = \frac{1}{(n-1)!}\,[x^{n-1}.\int\psi(x)\,dx - \binom{n-1}{1}x^{n-2}.\int x\psi(x)\,dx$$
$$+\ldots\pm\int x^{n-1}\psi(x)\,dx] + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots$$
$$+ C_{n-1}x + C_n\,;$$

образацъ, помоћу кога можемо свакій вышій интегралъ свести на саме просте интеграле. Тако н. п. имали бы по истомъ образцу

$$^3\int\frac{d^3x}{x^3}=\frac{1}{2!}\left[x^2.\int\frac{dx}{x^3}-2x.\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x}\right]+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2.\frac{1}{-2x^2}-2x.\frac{1}{-x}+lx\right]+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}lx+C_1x^2+C_2x+C_3$$

$$=\frac{1}{2}lx+C_1x^2+C_2x+\left(C=C_3+\frac{3}{4}\right).$$

§ 144.

Садъ смо у станю определити границе међу коима лежи сбиръ пренебрегнуты чланова маклореновогъ и телеровогъ образца, кое є у анализи и при нѣномъ употребляваню одъ врло велике важности.

Узимаюћи одъ обштегъ маклореновогъ образца (§ 32.) само n првы чланова, и означуюћи сбиръ осталы съ X, слѣдуе изъ истога образца

$$X=f(x)-f(\underset{\alpha}{x})-f_1(\underset{\alpha}{x}).(x-\alpha)-f_2(\underset{\alpha}{x}).\frac{(x-\alpha)^2}{2!}-f_3(\underset{\alpha}{x})\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$-\ldots-f_{n-1}(\underset{\alpha}{x})\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!},$$

изразъ, кои очевидно за $x=\alpha$ постаε $=0$, збогъ чега можемо по §у 133. сбиръ X сматрати као интегралъ кои започинѣ съ $x=\alpha$.

Диференціалећи истый изразъ n пута застопце, налазимо

$$^n dX=f_n(x)\,d^nx;$$

интегралећи пакъ ово по предходећемъ §у међу границама α и x, слѣдуε

$$X=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int_a^x f_n(x)\,dx-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\int_a^x xf_n(x)\,dx$$

$$+\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}\cdot\int_a^x\frac{x^2}{2!}f_n(x)\,dx-\,..$$

$$\pm\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\cdot\int_a^x\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\cdot f_n(x)\,dx\mp\ldots\pm\int_a^x\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f_n(x)\,dx\,.$$

Но пошто є при определѣномъ међу известнимъ границала интегралу сасвимъ свеєдно, кои є променльивый брой пре тога стаяо, то можемо у интегралима сбира X узети место x ма какавъ другій променльивый брой, н. п. z. Поступаюћи тако добыямо

$$X=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\int_a^x f_n(z)\,dz-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\int_a^x zf_n(z)\,dz$$

$$+\frac{x^{n-3}}{(n-2)!}\cdot\int_a^x\frac{z^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz-\,..$$

$$\pm\frac{x^{n-r}}{(n-r)!}\cdot\int_a^x\frac{z^{r-1}}{(r-1)!}\cdot f_n(z)\,dz\mp\,..\,\pm\int_a^x\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f_n(z)\,dz\,.$$

Али є по пређашнѣмъ §у

$$^2\!\int_a^x f_n(z)\,d^2z=x\int_a^x f_n(z)\,dz-\int_a^x zf_n(z)\,dz$$

$$=\int_a^x x\cdot f_n(z)\,dz-\int_a^x zf_n(z)\,dz=\int_a^x(x-z)\cdot f_n(z)\,dz,$$

$$^3\!\int_a^x f_n(z)\,d^3z=\frac{x^2}{2!}\cdot\int_a^x f_n(z)\,dz-x\int_a^x zf_n(z)\,dz+\int_a^x\frac{z^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$=\int_a^x\frac{x^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz-\int_a^x xz\cdot f_n(z)\,dz+\int_a^x\frac{z^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\int_a^x(x^2-2xz+z^2).f_n(z)dz.=\frac{1}{2!}\int_a^x(x-z)^2.f_n(z)dz,$$

$$^{4}\int_{a}^{x} f_n(z)d^{4}z = \frac{x^3}{3!}\cdot\int_{a}^{x} f_n(z)dz - \frac{x^2}{2!}\cdot\int_{a}^{x} z f_n(z)dz + x\int_{a}^{x}\frac{z^2}{2!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$-\int_{a}^{x}\frac{z^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$=\int_{a}^{x}\frac{x^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz - \int_{a}^{x}\frac{x^2 z}{2!}\cdot f_n(z)\,dz + \int_{a}^{x}\frac{x z^2}{2!} f_n(z)\,dz$$

$$-\int_{a}^{x}\frac{z^3}{3!}\cdot f_n(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{3!}\cdot\int_{a}^{x}(x^3 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)\,.\,f_n(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{3!}\cdot\int_{a}^{x}(x-z)^3.\,f_n(z)\,dz\,,$$

и т. д., те зато найпосле

$$X = {}^{n}\int_{a}^{x} f_n(z)\,d^n z = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\int_{a}^{x}(x-z)^{n-1}.\,f_n(z)\,dz.$$

Примѣћаваюћи сада іошъ, да є $(x-z)^{n-1}$ за све вредности броя z одъ a па до x єдногъ истогъ знака, т. є. при положнимъ вредностима одъ z свагда положно, а при одречнимъ вредностима истога броя свагда одречно, и да у последнѣмъ случаю можемо тражити $-X$, тако да є тадъ $(x-z)^{n-1}$ опетъ свагда положно: увиђамо да су тражене границе сбира X при обштемъ маклореновомъ образцу по § 138.

$$\frac{\underset{g}{f_n(z)}}{(n-1)!}\cdot\int_{a}^{x}(x-z)^{n-1}.\,dz \quad\text{и}\quad \frac{\underset{k}{f_n(z)}}{(n-1)!}\cdot\int_{a}^{x}(x-z)^{n-1}.\,dz\,,$$

гди $\underset{g}{f_n(z)}$ и $\underset{k}{f_n(z)}$ представляю односно найвећу и найманю вредность функціє $f_n(z)$, коє она прима одъ $z = a$

до $z = x$. Пошто є пакъ найпосле $\int(x-z)^{n-1}.\,dz = -\frac{(x-z)^n}{n} + C$, дакле $\int_a^x(x-z)^{n-1}.\,dz = \frac{(x-\alpha)^n}{n}$, то су вопросне границе сбира X,

$$f_n(\underset{g}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^n}{n!} \quad \text{и} \quad f_n(\underset{k}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^n}{n!}.$$

По тому, ако $f_n(\underset{\mu x}{x})$ представля међу $f_n(\underset{k}{x})$ и $f_n(\underset{k}{x})$ лежећу вредность функціє $f_n(x)$, коя одговара сбиру X пренебрегнуты чланова, треба обштій маклореновъ образацъ писати овако:

$$f(x) = f(\underset{\alpha}{x}) + f_1(\underset{\alpha}{x})\cdot(x-\alpha) + f_2(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + f_3(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3!}$$

$$+ \cdots + f_{n-1}(\underset{\alpha}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(\underset{\mu x}{x})\cdot\frac{(x-\alpha)^n}{n!},$$

при чему μ, каошто се изъ предходећегъ рада увиђа, представля некій чистъ разломакъ.

При простомъ є маклореновомъ образцу $\alpha = 0$, и зато истый образацъ сада, са сбиромъ X пренебрегнуты чланова одъ $(n+1)$. на далѣ, овакавъ:

$$f(x) = f(\underset{0}{x}) + f_1(\underset{0}{x})\,.\,x + f_2(\underset{0}{x})\cdot\frac{x^2}{2!} + f_3(\underset{0}{x})\cdot\frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$+ f_{n-1}(\underset{0}{x})\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(\underset{\mu x}{x})\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

Изъ пређашньи граница обштегъ маклореновогъ образца слѣдую границе сбира X за телеровъ образацъ, ако место x узмемо найпре $\alpha + h$, али после опетъ изменемо α съ x. Тако поступаюћи показуе се телеровъ образацъ са сбиромъ X чланова одъ $(n+1)$. на далѣ овако:

$$f(x+h)-f(x)=f_1(x)\,h+f_2(x)\frac{h^2}{2\,!}+f_3(x)\frac{h^3}{3\,!}+\ldots$$

$$+f_{n-1}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}+f_n\underset{x+\mu h}{(x)}\cdot\frac{h^n}{n!},$$

гди μ важи што и пре.

§ 145.

Ако є $\int f(x)=\varphi(x)$, онда постає телеровъ образацъ са допуномъ *X* вида

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_x^{x+h} f(x)\,dx=f(x)\,h+f_1(x)\frac{h^2}{2\,!}+f_2(x)\frac{h^3}{3\,!}+\ldots$$

$$+f_{n-2}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+f_{n-1}\underset{x+\mu h}{(x)}\cdot\frac{h^n}{n!}.$$

Узимаюћи овде a место x, а $b-a$ место h, слѣдуе

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\underset{a}{x})\cdot\frac{b-a}{1}+f_1(\underset{a}{x})\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}+f_2(\underset{a}{x})\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$$+\ldots+f_{n-2}(\underset{a}{x})\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}+f_{n-1}\underset{a+\mu(b-a)}{(x)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Ставляюћи пакъ у пређашнѣмъ образцу найпре $-h$ место h, а после b место x и $b-a$ место h, добыямо іошъ

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\underset{b}{x})\cdot\frac{b-a}{1}-f_1(\underset{b}{x})\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}+f_2(\underset{b}{x})\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}$$

$$-\ldots\pm f_{n-2}(\underset{b}{x})\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\mp f_{n-1}\underset{b-\mu(b-a)}{(x)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!},$$

при коя два образца вреди μ што и дояко, тако да сачинитель одъ $\frac{(b-a)^n}{n!}$ лежи свагда између найманѣ и найвеће вредности одъ $f_{n-1}(x)$, коє ова функція прима, кадъ место x узмемо наставно све вредности одъ a до b.

Б. Интеграленѣ функція више пременльивы броєва.

а) Интеграли почастны диференціала.

§ 146.

Ако є v нека функція два међу собомъ независна пременльива броя x и y, и нѣнъ є почастный другій диференціалный количникъ $\frac{\overset{2}{d}v}{dx\,.\,dy}=z$ познатъ, онда можемо исту функцію v изъ овогъ количника, поредъ свега тога што се у нѣму налазе два пременльива броя, ипакъ по онимъ истимъ, дояко показанимъ правилама за интеграленѣ функція само єдногъ пременльивогъ броя изнаћи; єрь се тай количникъ, каошто знамо, добыя, сматраюћи при диференціаленю вопросне функціє найпре само єданъ, па онда и онай другій пременльивый брой као такова, збогъ чега обратно при интеграленю сасвимъ наравно такођеръ найпре само єданъ, па онда и онай другій одъ тій броєва као пременлъива узети валя, а то очевидно нинашта друго неизлази, већъ на повторено интеграленѣ функціє само єдногъ пременльивогъ броя.

У таковомъ є случаю съ другимъ речма

$$\frac{\overset{2}{d}v}{dy}=d\,\frac{dv}{dy}=zdx,\quad \text{и зато}$$

$$\frac{dv}{dy}=\int zdx+Y,$$

при чему Y представля неку іошъ непознату функцію само одъ y. Одтудъ пакъ слѣдуе

$$dv=dy\,.\int zdx+Ydy\,,$$

и зато вопросна функція

$$v=\int dy\int zdx+\int Ydy+X,$$

гди X стои место неке іошъ непознате функціє само одъ x.

Тако є н. п. у случаю ако є $\frac{{}^{2}dv}{dx\,.\,dy}=\frac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}$,

$$\frac{{}^{2}dv}{dy}=d\frac{dv}{dy}=\frac{2dx}{\sqrt{x^2-y^2}}=2\,\frac{dx}{x}\cdot\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=2\,\frac{dx}{x}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{1.3}{2^2.2!}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^4\right.$$

$$\left.+\frac{1.3.5}{2^3.3!}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^6+\ldots\right],$$ дакле

$$\frac{dv}{dy}=2\left[\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}y^2\cdot\int\frac{dx}{x^3}+\frac{1.3}{2^2.2!}y^4\cdot\int\frac{dx}{x^5}+\frac{1.3.5}{2^3.3!}y^6\cdot\int\frac{dx}{x^7}\right.$$

$$\left.+\ldots.\right]$$

$$=2lx-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1.3}{2^2.2!}\right)\cdot\frac{y^4}{x^4}-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3.5}{2^3.3!}\right)\frac{y^6}{x^6}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}\right)\frac{y^8}{x^8}-\ldots\ldots+Y,$$ и одтудъ

$$dv=2lx\,.\,dy-\frac{1}{2x^2}\cdot y^2dy-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2.2!\,x^4}\cdot y^4dy-\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3.5}{2^3.3!\,x^6}y^6dy$$

$$-\ldots\ldots+Ydy,$$ а зато опетъ

$$v=2ylx-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\frac{y^3}{x^2}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2.2!}\right)\frac{y^5}{x^4}-\frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3.5}{2^3.3!}\right)\frac{y^7}{x^6}$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2^4.4!}\right)\frac{y^9}{x^8}-\ldots+\int Ydy+X.$$

Како треба поступати ако є датый почастный диференціалный количникъ вышега степена, н. п. $\frac{{}^{3}dv}{dx.dy.dz}=t$, или $\frac{{}^{4}dv}{dw.dx.dy.dz}=u$ и т. д., увиђа се сада безъ сумнѣ по себи, и зато ћемо само іошъ да приметимо како се изразъ $\int dy\int zdx$ зове **двострукій** интегралъ, изразъ $\int dz\int dy\int tdx$ **тространкій** интегралъ, и подобно далѣ.

б) Интеграли подпуны просты диференціала или диференціалны количника.

§ 147.

Место изъ каквогъ почастногъ диференціала или диференціалногъ количника функціє више променльивы броєва, може се иста функція тражити изъ некогъ нѣногъ подпуногъ диференціала или диференціалногъ количника, и тай є посао, каошто ћемо одма видити већъ тежій одъ пређашнѣга.

Узмимо найпре да се тражи функція два променльива броя изъ датогъ нѣногъ подпуногъ другогъ диференціала.

Тай є по § 37., ако се тиче функціє $v = f(x, y)$,

$$dv = f_1(x, y)_x \cdot dx + f_1(x, y)_y \cdot dy\,, \quad \text{или простіє}$$

$$= Mdx + Ndy \quad \ldots\ldots, \,.\, . \;(1.,$$

гди, каошто се лако увиђа а и већъ знамо одъ пре, M и N представляю опетъ неке функціє одъ x и y, тако да є свагда (§ 46.)

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx} \quad \ldots\ldots (2.$$

Тражи ли се дакле функція v изъ горнѣгъ израза подъ 1., то имамо обзиромъ на то, да є $M = f_1(x, y)_x = \frac{dv_x}{dx}$,

$$v = \int Mdx + Y \quad \ldots\ldots (3.,$$

гди Y представля неку функцію само броя y.

Да бы пакъ ту функцію одкрили, то валя приметити, да є $\frac{dv_y}{dy} = N$, збогъ чега, ако пређашню єдначину подъ 3. по y диференціалимо и притомъ ставимо ради краткоће

$$\int Mdx = z \quad \ldots\ldots (4.,$$

слѣдує

$$\frac{dv_y}{dy} = N = \frac{dz_y}{dy} + \frac{dY}{dy},$$

и одтудъ

$$dY = Ndy - \left(\frac{dz_y}{dy}\right) dy,$$

тако да є после

$$Y = \int Ndy - \int \left(\frac{dz_y}{dy}\right) dy$$

и зато по горньой єдначини подъ 3. функція

$$v = z + \int \left(N - \frac{dz_y}{dy}\right) dy \quad \ldots\ldots (I.,$$

чему за подпуну обштость само іошъ валя придати сталный брой C.

Овай изразъ бытће безъ сумнѣ подпуно определѣнъ, ако разлика $N - \left(\frac{dz_y}{dy}\right)$ несадржи више брой x, но само іошъ y, или є сталанъ брой. Да пакъ, у случаю ако є датый диференціалъ функціє v као подпуный исправанъ, броя x у истой разлици никако више неможе быти, ево увереня.

Ставимо $N - \frac{dz_y}{dy} = P$. Бытће ако по x диференціалимо

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{{}^2dz}{dy.dx}.$$

Но по § 45. є

$$\frac{{}^2dz}{dy\,.\,dx} = \frac{{}^2dz}{dx\,.\,dy} = \frac{d\left(\frac{dz_x}{dx}\right)}{dy};$$

и зато ако место $\frac{dz_x}{dx}$ узмемо нѣгову изъ єдначине подъ 4. слѣдуюћу вредность M,

$$\frac{{}^2dz}{dy\,.\,dx} = \frac{dM_y}{dy},$$

а збогъ тога обзиромъ на єдначину подъ 2.

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dN_x}{dx} - \frac{dM_y}{dy} = 0,$$

коє є знакъ, да вопросна разлика $P = N - \frac{dz_y}{dy}$ несадржи брой x. Она є дакле, па зато и Y или какавъ безусловно сталный брой, или пакъ само іошъ нека функція одъ y.

Сасвимъ истимъ путемъ налазимо, полазећи горе одъ N место одъ M,

$$v = w + \int\left[M - \frac{dw_x}{dx}\right].\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{II.},$$

при чему є $w = \int N dy + X$, и овде опетъ X или некій безусловно сталный брой, или пакъ нека функція само одъ x.

§ 148.

Примери. 1.) $dv = \frac{dx + dy}{x + y}$.

Ту є $M = N = \frac{1}{x+y}$, $z = \int M\,dx = \int \frac{dx}{x+y} = l\,(x + y)$, $\frac{dz_y}{dy} = \frac{dy}{x+y}$, зато по образцу I. тражена функція

$$v = l\,(x + y) + \int\left(\frac{dy}{x+y} - \frac{dy}{x+y}\right)dy + C.$$

$$= l\,(x + y) + C.$$

2.) $dv = y^x . ly . dx + xy^{x-1} . dy$.

При томъ є $M = y^x . ly, N = xy^{x-1}, z = \int M dx = \int y^x . ly . dx = y^x, dz_y = xy^{x-1} . dy$, зато по поменутомъ образцу тражена функція

$$v = y^x + \int(xy^{x-1} - xy^{x-1})\, dy + C$$

$$= y^x + C \quad \text{(види § 46.)}.$$

3.) $dv = \cos x . \cos y . dx - \sin x . \sin y . dy$.

Ту є $M = \cos x \cos y$, $N = -\sin x \sin y$, $z = \int M dx = \int \cos x . \cos y . dx = \cos y . \int \cos x . dx = \cos y . \sin y$, $dz_y = -\sin y \sin x . dy$, дакле

$$v = \sin x \cos y + \int(-\sin x \sin y + \sin x \sin y) + C$$

$$= \sin x \cos y + C \quad \text{(види § 39.)}$$

§ 149.

Ако имамо изнаћи функцію $v = f(x, y, z)$ три променльива броя x y и z изъ датогъ нѣногъ подпуногъ диференціала

$$dv = Mdx + Ndy + Odz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.,$$

при комъ по § 47. $M = f_1(x, y, z)_x$, $N = f_1(x, y, z)_y$ и $O = f_1(x, y, z)_z$ представляю такове функціє иста три броя x, y, и z, да є свагда

$$\frac{dM_y}{dy} = \frac{dN_x}{dx}, \frac{dM_z}{dz} = \frac{dO_x}{dx}, \frac{dN_z}{dz} = \frac{dO_y}{dy} \quad \ldots\ldots \quad (2.,$$

онда поступамо овако:

Сматраюћи у изразу подъ 1. єданъ одъ променльивы броєва, н. п. z као стална, и поставляюћи после ради краткоће

$$Mdx + Ndy = du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.,$$

добыямо интеграленѣмъ истога израза подъ 1.

$$v = u + Z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.,$$

гди Z представля неку функцію само іошъ одъ z.

Узимаюћій далѣ подпуный диференціалъ овогъ последнѣгъ израза, слѣдує

$$dv = Mdx + Ndy + du_x + du_y + du_z + dZ \; . \; . \; . \; . \; (5.,$$

и одтудъ, сматраюћи све по два и два променљива броя као сталне,

$$Mdx = du_x, \; Ndy = du_y, \; Odz = du_z + dZ, \quad \text{или}$$

$$M = \frac{du_x}{dx}, \; N = \frac{du_y}{dy}, \; O = \frac{du_z}{dz} + \frac{dZ}{dz} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6.,$$

Последньій одъ ова три израза дає

$$dZ = \left(O - \frac{du_z}{dz}\right) dz, \quad \text{а ово опеть}$$

$$Z = \int \left(O - \frac{du_z}{dz}\right) dz,$$

одкуда увиђамо, да ћемо ову функцію Z лако моћи изнаћи по предходећимъ §§-ма, ако разлика $O - \frac{du_z}{dz}$ несадржи никакавъ другій променљивый брой, осимъ z. Да ово пакъ, у случаю да є датый диференціалъ функціє v као подпуный исправанъ, доиста постои, ево уверења:

Нека є ради краткоће $O - \frac{du_z}{dz} = P$. Бытће

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{{}^2du}{dz\,.\,dx} = \frac{dO_x}{dx} - \frac{d\left(\frac{du_x}{dz}\right)}{dz},$$

$$\frac{dP_y}{dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{{}^2du}{dz\,.\,dy} = \frac{dO_y}{dy} - \frac{d\left(\frac{du_y}{dz}\right)}{dz},$$

или ако место последньи чланова у оба израза узмемо ньиове вредности по изразу подъ 6.,

$$\frac{dP_x}{dx}=\frac{dO_x}{dx}-\frac{dM_z}{dz}, \text{ а } \frac{dP_y}{dy}=\frac{dO_y}{dy}-\frac{dN_z}{dz},$$

т. є. обзиромъ на изразе подъ 2.)

$\frac{dP_x}{dx}=0$ и $\frac{dP_y}{dy}=0$ за знакъ: да є P по x и y стално, и дакле као таково или какавъ безусловно сталный брой, или пакъ само іошъ нека функція одъ z.

На основу тога имамо садъ коначно по єдначини подъ 4.)

$$v=u+\int\left(O-\frac{du_z}{dz}\right)bz,$$

за кое валя найпре изнаћи u по предходећимъ §§-ма изъ израза подъ 3.

§ 150.

Примеръ. Датъ є $dv=\sin(y\,lz).dx+xlz.\cos(y\,lz).dy+xy.\cos(y\,lz).dz$.

Ту є $M=\sin(y\,lz)$, $N=x\,lz.\cos(y\,lz)$, $O=xy.\cos(y\,lz)$, дакле

$$du=\sin(y\,lz)\,dx+x\,lz.\cos(y\,lz)\,dy,$$

$$u=\int[\sin(y\,lz).dx+x\,lz.\cos(y\,lz)\,dy]$$

$$=w+\int\left[x\,lz.\cos(y\,lz)-\frac{dw_y}{dy}\right]dy,$$ или збогъ

$$w=\int\sin(y\,lz)\,dx=\sin(y\,lz)\,x, \text{ а } \frac{dw_y}{dy}=x\,lz.\cos(y\,lz):$$

$$u=x\sin(y\,lz)+\int[x\,lz.\cos(y\,lz)-xlz.\cos(ylz)]\,dy$$

$$=x\sin(y\,lz).$$

Слѣдователно $\frac{du_z}{dz} = \frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz)$, и зато по последнѣмъ изразу пређашнѣга §-а

$$v = x \,.\, sin\,(y\,lz) + \int \left[\frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz) - \frac{xy}{z} \cdot cos\,(y\,lz)\right] dz$$

$$= x \,.\, cos\,(y\,lz) + C\,.$$

(Види § 39. примеръ 5.).

Приметба. Пошто се овай начинъ интеграленя подпуны диференціала само дотле може употребити, докъ є датый диференціалъ као подпуный исправанъ, то дакле пре свега нѣгову исправность испытати валя.

в.) Интеграли єдностепены диференціалны функція првога реда.

§ 151.

Ако є $dv = Mdx + Ndy + Odz + \ldots\ldots$, и притомъ M, N, O и т. д. представляю єдностепене функціє произволно коликога, али све єдногъ истогъ степена, н. п. n., онда є v єдностепена функція $(n+1)$ степена, и по показаномъ у § 40. свойству таковы функція

$$(n+1)\,v = Mx + Ny + Oz + \ldots\ldots,$$

одкуда слѣдує

$$v = \int (Mdx + Ndy + Odz + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{Mx + Ny + Oz + \ldots\ldots}{n+1} + C\,.$$

Интеграленѣ є дакле таковы диференціалны єдностепены функція првога реда врло просто, каошто ће то потврдити и слѣдуюћи у

§ 152.

Примери.

1.) Имамо $dv = (4x + y - 2\frac{z^4}{x^3})\,dx + (x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z})\,dy$

$$- (3y - 4\frac{z^3}{x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2})\,dz\,.$$

Ту су диференціални сачинительи едностепене функціе првога степена, и слѣдуе по горнѣму

$$v = \frac{1}{2}\left[\left(4x + y - 2\frac{z^4}{x^3}\right)x + \left(x - 3z - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^2}{z}\right)y - \left(3y - 4\frac{z^3}{x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{z^2}\right)z\right]$$

$$= 2x^2 + xy + 2\frac{z^4}{x^2} - 3yz - \frac{y^3}{z} + C.$$

(Види § 41.)

2.) $dv = (3x^2 + 2ay^2)\,dx + (4axy + 3by^2)\,dy\,.$

Ту е $n = 2$, т. е. диференціални су количници едностепене функціе другогъ степена, и зато по горнѣму

$$v = \frac{1}{3}\,[(3x^2 + 2ay^2)\,x + (4axy + 3by^2)\,y]$$

$$= x^3 + 2axy + by^3 + C\,.$$

3.) $dv = (2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y)dx + (2x - 2y.\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y})\,dy\,.$

Ту е $n = 1$, зато по горнѣму

$$v = \frac{1}{2}\,[(2x - y\cos\frac{x}{y} + 2y)x + (2x - 2y\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y})\,y]$$

$$= x^2 - 2xy - y^2.\sin\frac{x}{y} + C\,.$$

(Види § 41.)

§ 153.

За овако интеграленѣ єдностепены функція имамо іошъ приметити

1.) Показаный, изъ особиты свойства таковы функція подаюћи се начинъ служи само дотле, докъ є датый диференціалъ, као подпуный, исправанъ, збогъ чега испытиванѣ нѣгове исправности свему предходити мора;

2.) Ако є $n = -1$, онда истый начинъ неможемо употребити, єръ се по нѣму наилази на єдначину вида $0 = 0$, за знакъ, да траженый интегралъ ніє алгебрайскій. У таковомъ дакле случаю неостає ништа друго, но тражити вопросный интегралъ на обичный начинъ;

3.) Показаный начинъ найпосле важи на основу § 41. іошъ и за такове єдностепене функціє, у коима се налазе и трансцендентни чланови, али само ако су ови одъ нулнога степена, као у последнѣмъ примеру, кои ову приметбу подпуно потврђує.

г.) Интеграленѣ диференціалны єдначина̀.

§ 154.

Место диференціалногъ каквогъ количника неке функціє, датогъ као дояко у виду одкривене функціє пременльивы, међу собомъ независны броєва, добыямо често само неку єдначину тіи броєва и ньиовы диференціалны количника, изъ коє основну єдначину или функцію изнаћи треба.

Такова дата єдначина зове се **диференціална єдначина**, и као такова опетъ одъ 1., 2.. . . . уобште n реда, пошто у ньой налазећи се найвышій диференціалный количникъ буде 1., 2., ... уобште n.

У слѣдуюћимъ §§-ма показат'ћемо само интеграленѣ диференціалны єдначина̀ првога реда одъ два пременльива броя.

1.) Интеграленѣ диференціалны єдначина' 1. реда, и по $\frac{dy}{dx}$ одъ 1. степена.

§ 155.

Диференціална єдначина првога реда одъ два променльива броя по $\frac{dy}{dx}$ одъ првогъ степена обштега є вида.

$$f(x\,,y\,,\frac{dy}{dx}) = \mathrm{o},$$

и може се свагда свести на видъ

$$P\,dx + Q\,dy = \mathrm{o},$$

гди P и Q представляю уобште неке функціє одъ x и y, чега ради узимат'ћемо при далѣмъ сматраню дату диференціалну єдначину свагда у томъ већъ сведеномъ виду.

Преображаванѣ єдначине $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = \mathrm{o}$ у сведену $Pdx + Qdy = \mathrm{o}$ увиђа се свагда врло лако по себи, збогъ чега ніє потребно поставити за то нарочна правила. Тако н. п. ако є дата диференціална єдначина

$$(y^2 - x) + (x^2 - y)\,\frac{dy}{dx} = \mathrm{o},$$

нетреба ништа друго радити, осимъ помложити є са dx, пакъ прелази у сведену

$$(y^2 - x)\,dx + (x^2 - y)\,dy = \mathrm{o}\,.$$

При томе преображаваню могуће є, да се добыю такове функціє P и Q, да є $Pdx + Qdy$ подпуный диференціалъ неке функціє $F(x, y)$, коє ће се, каошто знамо, по томе познати, што ће быти $\frac{d\,P_y}{dy} = \frac{d\,Q_x}{dx}$, т. є. диференціалный количникъ функціє P по y раванъ диференціалномъ количнику функціє Q по x. У таковомъ случаю налазимо помоћу доякошньи §§-а лако ту $F(x, y) = C$, т. є. равну некомъ сталномъ брою.

Чешће пакъ догађа се, да лева часть сведене єдначине, као у горнѣмъ примеру, ніє подпуный диференціалъ. У таковимъ случаєвима кушамо єднимъ одъ слѣдуюћи начина', неможе ли се сведена єдначина далѣ дотерати тако, да є после можемо интегралити у виду крайне функціє.

α.) Одлучаванѣ пременльивы броєва.

§ 156.

Цѣль овога начина састои се у томе, да одъ єдначине $Fdx + Qdy = 0$ направимо другу $Xdx + Ydy = 0$, гди X и Y нису више као пре P и Q функціє оба пременльива броя, но X само функція одъ x, а Y само функція одъ y; тако дакле, да є затимъ савъ посао сведенъ на интеграленѣ функція єдногъ пременльивогъ броя, по коме бы просто слѣдовала вопросна функція

$$v = \int Xdx + \int Ydy = C.$$

Како у име тога валя поступати, неможе се у обште рећи, но ніє ни потребно, єръ гдигодъ є таково одлучаванѣ могуће, увиђа се начинъ коимъ га постизавамо, лако по себи.

Тако н. п. ако бы была сведена єдначина вида

$$XY\,dx + X_1\,Y_1\,dy = 0,$$

гди єдно или друго или оба X, или єдно или друго или оба Y могу быти и деловне функціє, но прве само по x, а друге само по y, — треба само разделити са YX_1, па ћемо имати єдначину.

$$\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y_1}{Y} dy = 0$$

са одлученимъ променльивимъ броевима.

Нека є сведена єднагина $ydx + xdy = 0$. Слѣдуе деобомъ чрезъ xy

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0, \text{ и одтудъ}$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = lx + ly = lxy = c,$$

т. є. тражена основна функція

$$xy = e^c = C.$$

Подобно добыямо одъ сведене єднагине

$$x^2 y^2 . dx + (y + 1) \sqrt{x} . dy = 0$$

деобомъ чрезъ $y^2 . \sqrt{x}$ єднагину съ одлученимъ променљивимъ броевима

$$x^{\frac{3}{2}} . dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0,$$

и одтудъ интеграленѣмъ основну функцію

$$\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + ly - \frac{1}{y} = C.$$

β.) *Изтраживанѣ интегралећегъ чинителя.*

§ 157.

Ако дату диференціалну єднагину у сведеномъ виду немогнемо интегралити по предходећемъ начину, онда може быти да ћемо є моћи, ако ю найпре помложимо са некимъ чинителѣмъ z, кои є уобште нека функція одъ x и y. Тай дакле чинитель z мора быти тога свойства, да съ њимъ постане $Pz \,.\, dx + Qz \,.\, dy = 0$ подпуный диференціалъ, или што є сведно, да буде

$$\frac{d\,(Pz)_y}{dy} = \frac{d\,(Qz)_x}{dx}.$$

Да пакъ такавъ чинитель доиста постои, уверавамо се лако на слѣдуюћій начинъ.

§ 158.

Ако постои доиста нека функція $f(x, y) = C$ као интегралъ єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда збогъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$$

$$\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}\right] dx + \left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy}\right] dy = 0\,,$$

а одтудъ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}\right]}{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy}\right]}\,, \text{ —}$$

мора быти непремено

$$\frac{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}\right]}{\left[\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy}\right]} = \frac{P}{Q} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\alpha.,$$

а то, осимъ ако є $\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx} = P$, а $\frac{d\,f\,(x\,,\,y)_y}{dy} = Q$. т. є. осимъ ако є єдначина $Pdx + Qdy = 0$ подпуный диференціалъ, може быти само тако, да є $\varphi(x, y)\,P = \frac{d\,f\,(x\,,\,y)_x}{dx}$

а $\varphi(x,y)\,Q = \frac{d\,f(x,y)_y}{dy}$; и по томе свака диференціална єдначина првога реда одъ два пременльива броя, коя ніє подпуный диференціалъ какве єдначине $f(x,y) = C$, има доиста свагда єднога чинителя $\varphi(x,y)$, кои ю таковимъ чини. Тай чинитель зове се **интегралећій чинитель** диференціалне функціє, и може быти уобште нека функція исты пременльивы броєва x и y.

Напослѣдку лако се іошъ увиђа, да свака неподпуна диференціална єдначина нема само єднöгъ интегралећегъ чинителя, но безбройно млого ньи. Єръ, ако є z єданъ такавъ чинитель неподпуне єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда є $Pz\,.\,dx + Qz\,.\,dy = d\,f(x,y)$ подпуный диференціалъ, па съ тога и єдначина $Pzv\,.\,dx + Qzv\,.\,dy = v\,.\,df(x,y)$, кою добыямо ако ону помложимо са ма каквомъ функціомъ $v = \psi[f(x,y)]$, подпуный диференціалъ зато, што є $v\,.\,d\,f(x,y)$ очевидно подпуный диференціалъ. Свакій дакле производъ одъ интегралећегъ чинителя z са ма каквомъ функціомъ $\psi\,[f(x,y)]$ преводи дату диференціалну єдначину у подпуну; пошто пакъ функція одъ $f(x,y)$ може быти безбройно млого, то дакле свака диференціална єдначина има доиста безбройно млого интегралећи чинителя.

§ 159.

Ако є z интегралећій чинитель єдначине $Pdx + Qdy = 0$, онда, каошто рекосмо горе у § 157., мора быти

$$\frac{d\,(Pz)_y}{dy} = \frac{d\,(Qz)_x}{dx},$$

или, ако ове изразе развіемо,

$$P \cdot \frac{dz_y}{dy} + z \cdot \frac{dP_y}{dy} = Q \cdot \frac{dz_x}{dx} + z \cdot \frac{dQ_x}{dx}, \text{ и одтудъ}$$

$$z \cdot \left(\frac{dP_y}{dy} - \frac{dQ_x}{dx}\right) = Q \cdot \frac{dz_x}{dx} - P \cdot \frac{dz_y}{dy} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (m.$$

Изъ ове єдначине добыли бы z, кадъ бы уобште были у станю разрешити ю. Но тай є посао, зато што z зависи осимъ одъ два пременльива броя x и y іошъ и одъ своя два іошъ непозната диференціална количника по x и y, обично тежи одъ интеграленя саме дате диференціалне єдначине, збогъ чега таквога чинителя z понайвише само срећнимъ покушаима изнаћи можемо. Дояко поне у станю смо изнаћи га известнимъ путемъ само у два особита случая, т. є. 1. ако истый чинитель z треба да буде функція само єдногъ одъ она два пременльива броя; или 2. ако є дата диференціална єдначина єдностепена буди кога реда. Како пакъ притомъ поступамо, показатће слѣдуюћи §§-и.

§ 160.

Урецимо да єдначина $Pdx + Qdy = 0$ постає интегральива, ако є помложимо са некомъ функціомъ z само одъ x.

У томъ є случаю очевидно $\frac{dz_y}{dy} = 0$, и єдначина $m.$) прећашнѣга §-а, изъ кое валя тражити z, претвара се у простію ову,

$$z.\left(\frac{dP_y}{dy}-\frac{dQ_x}{dx}\right)=Q.\frac{dz_x}{dx},$$

одъ кое после слѣдує

$$\frac{dz}{z}=\frac{1}{Q}.\left(\frac{dP_y}{dy}-\frac{dQ_x}{dx}\right)dx.$$

Пошто є лева часть ове єдначине интегральива, то мора быти а десна, што при предпостави, да є z функція само одъ x, и што дакле $\frac{dP_y}{dy}-\frac{dQ_x}{dx}$ несме садржати y, доиста и постои.

Ставимо $\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{d\,P_y}{dy}-\frac{d\,Q_x}{dx}\right)=X$; бытће

$$\frac{dz}{z}=X\,dx \quad .\;.\;.\;.\;. \quad (p.,$$ и одтудъ

$$lz=\int X\,dx\,,$$ т. є.

$$z=e^{\int X\,dx} \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\mathrm{I}.$$

На истый начинъ добыли бы за случай да z треба да буде нека функція само одъ y,

$$\frac{dz}{z}=\frac{1}{P}\cdot\left(\frac{d\,Q_x}{dx}-\frac{d\,P_y}{dy}\right)dy=Ydy \quad .\;.\;. \quad (q.,$$

и одтудъ $$z=e^{\int Y\,dy} \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\mathrm{II}.$$

Єдначине $p.$) и $q.$) показатће да ли є z функція само x или само одъ y, и тиме хоће ли се моћи дата єдначина интегралити по образцима I. и II.

§ 161.

Примеръ. Нека буде дата єдначина

$$dy+My\;dx=Ndx\,,$$

гди M и N представляю неке функціє само одъ x *).

Та єдначина сведена на нулу дає

$$dy+(My-N)\,dx=0\,.$$

При ньой є дакле $P=My-N$, а $Q=1$; пошто пакъ M и N садрже само x а никако y, то є

---

*) Ова єдначина принадлежи такозваннмъ линеарнимъ єдначинама.

$$\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{dP_y}{dy}-\frac{dQ_x}{dx}\right)=M, \text{ и зато}$$

$$z=e^{\int \mathrm{M\,dx}}$$

Множећи дакле дату єдначину са овимъ чинителѣмъ добыямо

$$e^{\int \mathrm{Mdx}}\,.\,dy+(My-N)\,e^{\int \mathrm{M\,dx}}\,.\,dx=o,$$

єдначину т. є., коє є лева часть, каошто се лако уверавамо, подпуный диференціалъ, и кою дакле можемо интегралити по § 147.

Поступаюћи по упутству тога §-а налазимо

$$w=\int e^{\int \mathrm{M\,dx}}\,.\,dy=y\,.\,e^{\int \mathrm{M\,dx}}, \frac{dw}{dx}=y\,M\,e^{\int \mathrm{M\,dx}},$$

$$(My-N)\,e^{\int \mathrm{M\,dx}}-\frac{dw}{dx}=-N\,e^{\int \mathrm{M\,dx}},$$

и зато траженый интегралъ

$$y\,e^{\int \mathrm{M\,dx}}-\int N\,e^{\int \mathrm{M\,dx}}\,.\,dx=C, \text{ или}$$

$$y=e^{-\int \mathrm{M\,dx}}\,.\left[\int N\,e^{\int \mathrm{M\,dx}}\,.\,dx+C\right].$$

§ 162.

Узмимо да є дата диференціална єдначина $Pdx+Qdy=o$ єдностепена, т. є. да су P и Q єдностепене функціє m. реда одъ x и y.

Ако є притомъ z интегралећій чинитель, и као такавъ єдностепена функція одъ x и y n. реда, онда є подпуный диференціалъ $Pz\,.\,dx+Qz\,.\,dy=dv$ єдностепена функція $(m+n)$. реда, и зато траженый интегралъ по § 151. єдностепена функція $(m+n+1)$. реда, тако да є по истомъ §-у

$$Pz \,.\, x + Qz \,.\, y = (m+n+1)\,v\,.$$

Делећи подпуный диференціалъ тражене функціє v са овомъ єдначиномъ слѣдує

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{Px + Qy} = \frac{dv}{m+n+1}\,.$$

Пошто є пакъ десна часть ове єдначине интеграљива, то мора быти и лева; но броитељ леве части ніє нико другій него дата диференціална єдначина; зато чинитељ кои є ту єдначину учиніо интеграљивомъ ніє нико другій, но $\frac{1}{Px+Qy}$.

§ 163.

Примери. 1. Дата є єдностепена єдначина другога реда.

$$y^2.\,dx + xy\,(dx + dy) + x^2\,dy = 0\,.$$

При той є $P = y^2 + yx = y(x+y), Q = x^2 + xy = x(x+y)$, дакле нѣнъ интегралећій чинитељ $\frac{1}{Px+Qy} = \frac{1}{2xy\,(x+y)}$, и зато мложећи є съ њимъ

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \text{подпуный диференціалъ.}$$

Интегралећи ову єдначину слѣдує

$$lx + ly = l\,xy = c = le^c\,, \text{ и одтудъ}$$

$$xy = e^c = C.$$

2.) Дата є єдностепена єдначина такођеръ другога реда

$$y^2.\,dx - xy\,.\,dy + x^2.\,dy = 0.$$

Ту є $P = y^2$, $Q = x^2 - xy$, дакле нѣнъ интегралећій чинитель

$$\frac{1}{Px + Qy} = \frac{1}{xy^2 + x^2y - xy^2} = \frac{1}{x^2y},$$ и зато

$$\frac{y\,dx}{x^2} + \frac{x-y}{xy}\,.\,dy = \frac{y\,dx}{x^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x} = 0,$$

коя є, каошто се лако можемо уверити, подпуный диференціалъ.

Интегралећи садъ ову єдначину добыямо

$$-\frac{y}{x} + ly - \frac{y}{x} = -2\,\frac{y}{x} + ly = C.$$

γ. Уводенѣ новы променльивы броєва.

§ 164.

Издаду ли оба пређашня начина, онда кушамо іошъ неможемо ли учинити дату єдначину интегральивомъ тиме, да нове променльиве броєве уведемо.

Тако н. п. ако бы имали у § 161. сматрану єдначину

$$dy + Mydx = Ndx,$$

гди M и N представляю функціє само одъ x, па бы ставили

$$y = vz, \quad \text{дакле} \quad \frac{dy}{dx} = z\,.\,\frac{dv_x}{dx} + v\,.\,\frac{dz_x}{dx},$$

добыли бы єдначину

$$z\,.\,\frac{dv_x}{dx} + v\,.\,\frac{dz_x}{dx} + Mvz = N,$$

у коіой, да бы ю свели на простіи видъ, можемо са єднимъ одъ новы променльивы броєва располагати по вольи.

Ставляюћи н. п. $\frac{dz_x}{dx} + Mz = 0$, прелази прећашня єдначина у нову $z.\frac{dv_x}{dx} = N$, и мы после изъ ове две єдначине налазимо врло лако броеве v и z, па дакле и y.

Изъ прве одъ ньи слѣдує просто

$$\frac{dz_x}{z} + Mdx = 0, \quad \text{и одтудъ интеграленѣмъ}$$

$$lz + \int Mdx = c, \quad \text{а}$$

$$z = \frac{e^c}{e^{\int \mathrm{Mdx}}} = e^c . e^{-\int \mathrm{Mdx}} = C . e^{-\int \mathrm{Mdx}}.$$

Поставляюћи пакъ ову вредность у ону другу єдначину добыямо

$$dv = \frac{N}{C . e^{-\int \mathrm{Mdx}}} . dx, \quad \text{и одатле}$$

$$v = \frac{1}{C} . \int Ne^{\int \mathrm{Mdx}} . dx + C_1.$$

Бытће дакле

$$y = vz = e^{-\int \mathrm{Mdx}} . \int Ne^{\int \mathrm{Mdx}} . dx + C_1.Ce^{-\int \mathrm{Mdx}}$$

$$= e^{-\int \mathrm{Mdx}} . [\int Ne^{\int \mathrm{Mdx}} . dx + \mathfrak{C}]$$

каогодъ у § 161.

§ 165.

Ако су у єдначини $Pdx + Qdy = 0$ функціє P и Q єдностепене n. реда, па поставимо $y = xz$, дакле $dy = zdx + xdz$, постаю исте функціє P и Q односно вида $x^n . f(z)$ и $x^n . \varphi(z)$, тако да после место дате єдначине имамо нову

$$f(z)\,dx + \varphi(z)\,.\,(zdx + xdz) = 0,$$ или

$$f(x) + \varphi(z)\,.\left(z + x\,.\,\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$ или

$$[f(z) + \varphi(z)\,z]\,dx + x\,.\,\varphi(z)\,dz = 0\,,$$ или

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z)}{f(z) + z\,.\,\varphi(z)}\,.\,dz = 0,$$ и одтуда

$$lx + \int \frac{\varphi(z)dz}{f(z) + z\varphi(z)} = c\,,$$

Тако н. п. ако имамо єдностепену єдначину првога реда

$xdx + ydx = nydx\,,$ или што є свеєдно

$(x - ny)\,dx + ydy = 0\,,$ па ставимо $y = xz\,,$

слѣдує

$$(1 - nz + z^2)\,dx + xz\,.\,dz = 0\,,$$ или

$$\frac{dx}{x} + \frac{zdz}{1 - nz + z^2} = 0,$$ и одтудъ

$$lx + \int \frac{zdz}{1 - nz + z^2} = c,$$

изразъ, кои далѣ лако можемо израдити или помоћу обр. 32. § 190., или по упутству §§а 92. — 96.

§ 166.

Узмимо іошъ, подъ именомъ Рикати-ове (Riccati) познату єдначину

$$dy + by^2.\,dx = ax^m.\,dx$$

1. Ако є при той $m = 0$, добыямо одма єдначину съ одлученимъ променљивимъ броєвима

$$\frac{dy}{by^2 - a} + dx = 0,$$ и одтудъ

$$\int \frac{dy}{by^2 - a} + x = c,$$ изразъ, кога далѣ израђенѣ неподлежи никаквой више тешкоћи.

2. Ако пакъ m ніє нула, онда треба метнути

$$y = z^r, \text{ дакле } dy = rz^{r-1}.\,dz.$$

Тиме преображава се дата єдначина у нову

$$r\,.\,z^{r-1}.\,dz + (bz^{2r} - ax^m)\,dx = 0.$$

Ова єдначина постає єдностепена, ако є $m = -2$, а поставимо $r = -1$. Ніє ли пакъ $m = -2$, онда є горня замена безуспешна.

3. Поставляюћи $y = \alpha x^p + zx^q$, прелази дата єдначина у нову

$$x^q.\,dz + (qx^{q-1} + 2\alpha b x^{p+q} + bx^{2q}\,.\,z)\,zdx$$

$$+ (p\alpha x^{p-1} + \alpha^2 b x^{2p} - ax^m)\,dx = 0.$$

Узимаюћи ту $p - 1 = 2p$, $p\alpha + b\alpha^2 = 0$, и $q + 2\alpha b = 0$, дакле $p = -1$, $\alpha = \frac{1}{b}$; $q = -2$, и зато $y = \frac{z}{x^2} + \frac{1}{bx}$: добыямо єдначину

$$dz + b\,\frac{z^2}{x^2}\,dx - ax^{m+2}.\,dx = 0,$$

коя постає єдностепена, ако є $m = -2$.

У случаю ако бы было $m = -4$, можемо променљиве броєве одлучити, и по томе Рикати-ову єдначину можемо интегралити, ако є m или -2, или -4.

2.) Интеграленѣ диф. едначина' првога реда, по $\frac{dy}{dx}$ одъ выши степена'.

§ 167.

Диференціална едначина првога реда одъ два променльива броя x и y съ вышимъ степенима количника $\frac{dy}{dx}$, обштега є вида

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + V_1 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + V_2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + V_{n-1} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + V_n = 0,$$

гди V_1, V_2, ... V_n, представляю уобште неке функціє одъ x и y.

Разрешаваюћи ту едначину по $\frac{dy}{dx}$, и означаваюћи нѣне корене, кои ће уобште быти неке функціє одъ x и y, по реду са ω_1, ω_2, ... ω_n, добыли бы n диференціалны едначина' првога степена

$$\frac{dy}{dx} - \omega_1 = 0, \frac{dy}{dx} - \omega_2 = 0, \ldots \frac{dy}{dx} - \omega_n = 0,$$

кое бы се лако могле интегралити по упутствама предходећи §§а, нађени пакъ одъ нъи интеграли были бы свакій, каогодъ и свакій производъ одъ произвольно колико нъи, една вредность траженога интеграла дате диференціалне едначине.

Али пошто налазакъ тій интеграла зависи одъ решеня выше едначине, а то є, каошто знамо, само у врло малимъ границама уобште (т. є. алгебрайскимъ путемъ) могуће, то ће се наговешћеный начинъ такођеръ само врло редко моћи употребити, и зато показат'ћемо у слѣдуюћимъ §§ма, како у особитимъ некимъ случаевима можемо иначе до цѣли доћи, но найпре да узмемо за веће нѣгово обясненѣ барь овай еданъ примеръ.

Дата є едначина $d^2y + dy \,.\, dx - \frac{3}{4} d^2x = 0$, или што є свеедно,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) - \frac{3}{4} = 0.$$

Разрешавајући є по $\frac{dy}{dx}$ налазимо да є $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$ и $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$, одтудъ $dy=\frac{1}{2}\,dx$ и $dy=-\frac{3}{2}\,dx$, а одатле опеть $y=\frac{1}{2}x+c_1$ и $y=-\frac{3}{2}x+c_2$.

Траженый є дакле интегралъ дате диференціалне едначине или

$y-\frac{1}{2}x-c_1=0$, или $y+\frac{3}{2}x-c_2=0$, а може быти и

$$(y^2-\tfrac{1}{2}x-c_1).(y+\tfrac{3}{2}x-c_2)=$$

$$y^2+(x-c_1-c_2)\,y+c_1\,c_2-\tfrac{1}{2}(3c_1-c_2)\,x-\tfrac{3}{4}x^2=0,$$

єръ ако ову едначину диференціалимо, слѣдує

$$(y+\tfrac{3}{2}x-c_2).(dy-\tfrac{1}{2}dx)+(y-\tfrac{1}{2}x-c_1).(dy+\tfrac{3}{2}dx)=$$

$$(2y+x-c_1-c_2)\,dy+(y-\tfrac{3}{2}x-\tfrac{3}{2}c_1+\tfrac{1}{2}c_2)\,dx=0,$$

и одтудъ

$$dy=-\frac{y-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}c_1+\frac{1}{2}c_2}{2y+x-c_1-c_2}.dx\,,$$

а ако овде іошъ место y узмемо нѣгове две горнѣ вредности,

$$dy=\tfrac{1}{2}dx \quad \text{и} \quad dy=-\tfrac{3}{2}dx\,,$$

кои изрази, каошто смо видили, дату диференціалну едначину подпуно задоволявају.

§ 168.

Ако су у датой диференціалной едначини сачинительи V_1, V_2, ... V_n сви стални бровви, онда су по свойству сачинителя сваке выше едначине (I. Ч. § 37.) и вредности одъ $\frac{dy}{dx}$ такођеръ стални бровви, и дата се едначина збогъ тога врло лако може интегралити.

Єръ представляюћи те сталне вредности одъ $\frac{dy}{dx}$ съ α, т. є. ставляюћи $\frac{dy}{dx}=\alpha$, слѣдує $dy=\alpha dx$, дакле $y=\alpha x+c$, а $\alpha=\frac{y-c}{x}$, тако да само треба метнути у дату єдначину ову вредность место $\frac{dy}{dx}=\alpha$, те да бы имали траженый исте єдначине интегралъ.

Тако н. п. нека є опетъ дата єдначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{3}{4}=0.$$

Имамо поставляюћи место $\frac{dy}{dx}$ горню вредность одъ α,

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2+\frac{y-c}{x}-\frac{3}{4}=0, \text{ или}$$

$$(y-c)^2+(y-c)\,x-\frac{3}{4}x^2=0,$$

као траженый интегралъ те єдначине, о чему се лако уверавамо тиме, што изъ добывенога израза, разрешавајући га по $(y-c)$, слѣдує $y-c=-\frac{1}{2}x\pm x$, т. є. $y=\frac{1}{2}x+c$ и $y=-\frac{3}{2}x+c$, каогодъ што смо нашли у предходећемъ §у.

§ 169.

Ако су сачинительи $V_1, V_2, \ldots V_n$ дате диференціалне єдначине функціє само єдногъ пременльивога броя, н. п. одъ x, па пошто смо поставили $\frac{dy}{dx}=v$ приметимо, да исту єдначину лакше можемо разрешити по x него по v, — онда ћемо тражити єдначину $x=f(v)$, определит'ћемо изъ горнѣ замене y, и истребит'ћемо изъ єдначина $x=f(v)$ и $y=\int v\,dx=vx-\int x\,dv=vx-\int f(v)\,dv$ [III. основно правило § 85.] брой v, па ћемо тако имати траженый интегралъ дате єдначине.

Тако н. п. ако є дата єдначина

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\left(\frac{dy}{dx}\right) - x = 0,$$

и метнемо $\frac{dy}{dx} = v$, слѣдує

$$v^2 + av - x = 0,$$

єдначина, коя се лакше разрешава по x него по v.

Разрешаваюћи є добыямо $x = v^2 + av$; како є пакъ $y = vx - \int (v^2 - av)\,dv = vx - \frac{v^3}{3} - \frac{av^2}{2} + c$, то слѣдує истребльиванѣмъ броя v изъ овы єдначина за x и y, као траженый интегралъ дате диференціалне єдначине

$$6y + (3 + a) \cdot \left[a^2 + 3x + (x + a)^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{4x}{a^2}}\right] - c = 0.$$

§ 170.

Ако су сачинительи V_1, V_2, . . . V_n функціє оба пременльива броя x и y, али се єданъ одъ овы брова, н. п. x налази само у првомъ степену: онда ћемо, пошто смо ставили $\frac{dy}{dx} = v$, дату єдначину разрешити по x, и єдначину $x = f(y, v)$ диференціалити. Нека є тако добывена нова диференціална єдначина $dx = Tdy + Udv$, где T и U представляю неке функціє одъ y и v.

Изъ те єдначине добыямо после, збогъ $dy = vdx$,

$$(Tv - 1)\,dx + Udv = 0.$$

Садъ, ако се ова єдначина може интегралити, онда, интегралећи ю, добыямо єдну єдначину по x и v, съ коіомъ можемо истребити изъ дате єдначине брой $v = \frac{dy}{dx}$, и у добывеной новой єдначини имамо после траженый интегралъ дате диференціалне єдначине.

Н. п. ако є дата єдначина $ydx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, имамо, ставляюћи $\frac{dy}{dx} = v$,

$y = x\sqrt{1+v^2}$, дакле $dy = dx.\sqrt{1+v^2} + \frac{xvdv}{\sqrt{1+v^2}}$,

или збогъ $dy = vdx$,

$$(v - \sqrt{1+v^2})\,dx - \frac{xvdv}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{vdv}{(v - \sqrt{1+v^2}).\sqrt{1+v^2}} = 0,$$

или, ако помложимо броителя и именителя другога члана са $v + \sqrt{1+v^2}$,

$$\frac{dx}{x} - \frac{v\,(v + \sqrt{1+v^2})\,dv}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{v^2dv}{\sqrt{1+v^2}} - vdv = 0, -$$

и одтудъ интеграленѣмъ

$$lx - \tfrac{1}{2}\,v.\sqrt{1+v^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,(v + \sqrt{1+v^2}) - \tfrac{1}{2}\,v^2 + C = 0,$$

єдначина одъ x и v, изъ кое садъ помоћу дате єдначине валя истребити брой v.

У име тога имамо изъ дате єдначине (пошто смо y определили и $\frac{dy}{dx} = v$ поставили) $v = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$, та пакъ вредность поставлѣна у прећашню єдначину дає

$$-\frac{1}{2}.\frac{y}{x^2}.\sqrt{y^2 - x^2} + \frac{1}{2}\,l\,(y + \sqrt{y^2 - x^2}) - \frac{1}{2}.\frac{y^2 - x^2}{x^2} + C = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\,l\,(y + \sqrt{y^2 - x^2}) - \frac{1}{2}.\frac{y^2 - x^2 + y\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2} + C = 0,$$

као траженый интегралъ дате єдначине.

§ 171.

Ако сачинительи дате єдначине садрже x и y само у првимъ степенима, онда є вида

$$y = x f(v) + \varphi(v),$$

гди є $v = \frac{dy}{dx}$, и може се интегралити по § 161. или 164.

У особитомъ случаю, гди бы была $f(v) = v$, дакле дата єдначина вида

$$y = xv + \varphi(v),$$

добыямо диференціалећи $dy = vdx + xdv + d\varphi(v)$, или збогъ $dy = vdx$,

$$xdv + d\varphi(v) = 0, \text{ т. є.}$$

$$xdv + \varphi_1(v)\,dv = [x + \varphi_1(v)]\,dv = 0.$$

Ова єдначина постои са $x + \varphi_1(v) = 0$, каогодъ и са $dv = 0$; но ова последня єдначина дає $v = c$, дакле $dy = cdx$, и зато ако ову вредность узмемо у датой єдначини,

$$y = cx + \varphi(c) = cx + c_1,$$

као траженый интегралъ. Притомъ само іошъ валя приметити, да брой c_1 ніє произвольно сталанъ, него вредность одъ $\varphi(v)$, ако се место v узме c, и зато ће быти болћ да пишемо као траженый интегралъ.

$$y = cx + \varphi(\underset{c}{v}).$$

Нека є н. п. дата єдначина $ydx - xdy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$,

или $y - x\left(\frac{dy}{dx}\right) - a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$, или ако ставимо $\frac{dy}{dx} = v$,

$$y - xv - a\sqrt{1 + v^2} = 0.$$

Изъ те єдначине слѣдує $y = xv + a\sqrt{1+a^2}$, а ако диференціалимо,

$$dy = vdx + xdv + \frac{avdv}{\sqrt{1+v^2}}, \text{ или збогъ } dy = vdx,$$

$$xdv + \frac{avdv}{\sqrt{1+v^2}} = 0, \text{ или}$$

$$\left(x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}}\right) dv = 0.$$

Ова єдначина дає $x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0$ и $dv = 0$, а изъ последнѣ одъ ове две слѣдує $v = c$.

Ставлюћи садъ ово v у дату єдначину добыямо као траженый нѣнъ интегралъ

$$y = cx + a\sqrt{1+c^2}.$$

§ 172.

Ако су сачинительи дате єдначине єдностепене функціє одъ x и y, ставлямо $y = xz$, дакле $dy = zdx + xdz$. Тиме губи се брой x, и остає єдначина само по z и v, ако подъ v разумемо све єднако количникъ $\frac{dy}{dx}$.

Пошто є по пређашньой замени $\frac{dy}{dx} = v = z + x\frac{dz}{dx}$, то є

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{v-z}, \text{ и одтудъ}$$

$$lx = \int \frac{dz}{v-z} \quad . \; . \; . \; . \; (\alpha.$$

Разломакъ $\frac{dz}{v-z}$ можемо безъ повреде нѣгове вредности писати и овако: $\frac{d(z-v)}{z-v} + \frac{dv}{z-v}$; но тадъ є іошъ

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(z-v)}{z-v} + \frac{dv}{z-v}, \text{ а}$$

$$lx = l\,(z-v) + \int \frac{dz}{z-v} \;.\;.\;.\;.\; (\beta.$$

Са изразомъ α.) служитћемо се, ако є лакше изразити v чрезъ z, а другій β.) употребитћемо кадъ се лакше изражава z чрезъ v. У првомъ случаю добытћемо x као функцію одъ z, а у другомъ као функцію одъ v.

Истреблююћи после у првомъ случаю изъ єдначина $y = xz$ и $x = f(z)$ брой z, а у другомъ случаю изъ єдначина $y = xz = x\varphi(v)$ и $x = \psi(v)$ брой v, — добыямо траженый интегралъ.

Н. п. решаваюћи на овай начинъ єдначину пређашнћга §а, коя є по x и y єдностепена, т. є. єдначину $xdy - ydx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, или

$$xv - y - x\sqrt{1+v^2} = 0,$$

гди v значи $\dfrac{dy}{dx}$, ставлямо $y = xz$, чимъ слѣдує

$$v - z = \sqrt{1+v^2}.$$

Пошто є пакъ овде очевидно лакше изразити z чрезъ v, него обратно, то имамо даљ по образцу β.) збогъ $z - v = (v - \sqrt{1+v^2}) - v = -\sqrt{1+v^2}$,

$$lx = -l\sqrt{1+v^2} + \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$= -l\sqrt{1+v^2} + l\left[v + \sqrt{1+v^2}\right] + lC$$

$$= l\,\frac{C(v + \sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}}, \text{ и одтуда}$$

$$x = \frac{C(v + \sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Съ овомъ садъ вредности броя x слѣдує изъ єдначине $y = xz$, збогъ $z = v - \sqrt{1+v^2}$,

$$y = \frac{C(v+\sqrt{1+v^2})}{\sqrt{1+v^2}} \cdot (v - \sqrt{1+v^2}) = - \frac{C}{\sqrt{1+v^2}}.$$

За истребльиванѣ броя v имамо изъ ове последнѣ єдначине $\sqrt{1+v^2} = - \frac{C}{y}$, а $v = \frac{\sqrt{C^2-y^2}}{y}$; та пакъ вредность, заменута у горнѣмъ изразу за x, дає као траженый интегралъ вопросне диференціалне єдначине

$$x = C - \sqrt{C^2 - y^2}, \text{ или } x^2 + y^2 = 2Cx.$$

3.) Особени разрешцы диф. єдначина' првога реда.

§ 173.

Знамо изъ § 81. и 82., да свакій обштій интегралъ садржи некій, іошъ непознатый сталанъ брой, и да даюћи томе брою произвольне вредности, добыямо безбройно млого тога интеграла **особиты** вредностій, коє смо називали **особитимъ** интегралима, и коє све дотичной диференціалной єдначини подпуно одговараю. Но добыяю се често и такове функціє, коє некой диференціалной єдначини такођеръ подпуно одговараю, безъ да су нѣни особити интеграли, т. є. безъ да се изъ обштегъ нѣногъ интеграла могу произвести на пређеспоменутый начинъ. Свака такова функція, коя датой некой диференціалной єдначини подпуно одговара, а ніє нѣнъ особитый интегралъ, зове се **особеный разрешакъ** исте диференціалне єдначине.

Тако н. п. нашли смо у § 171. $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$ као обштій интегралъ диференціалне єдначине $ydx - xdy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$; но добыямо такођеръ изъ єдначине

$x + \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0$ (види споменутый §) вредности $v = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ и $\sqrt{1+v^2} = \mp \frac{a}{\sqrt{a^2 - v^2}}$, кое поставлѣне у дату диференціалну едначину (подъ видомъ $y - xv - a\sqrt{1+v^2} = 0$, где е $v = \frac{dy}{dx}$), даю едначину

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pm x^2 \mp a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp\sqrt{a^2 - x^2},$$

или

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

коя истой диференціалной едначини подпуно одговара, безъ да се икаквомъ вредности броя c може добыти изъ нѣногъ обштегъ интеграла $y = cx + a\sqrt{1+c^2}$.

Та е дакле едначина $y^2 + x^2 = a^2$ **особеный разрешакъ** оне диференціалне едначине.

§ 174.

За болѣ сваћанѣ особены разрешкова диференціалны едначина' узмимо, да смо решенѣмъ некога задатка наишли на едначину

$$v \cdot \left(\frac{dv}{dy} - 1\right) = 0,$$

при коіой е очевидно, да постои како при $\frac{dv}{dy} - 1 = 0$, тако и при $v = 0$.

Уведимо у ту едначину новый пременльивый брой x на тай начинъ, да метнемо $v = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$. Бытће $dv = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$, а нова едначина

$$\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \cdot \left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} - dy\right) = 0.$$

Докъ ову єдначину оставимо у томъ нѣномъ виду, дотле види се ясно, да ю како $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$, тако и $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}-dy=0$ задоволяваю, и да вредность броя x, коя слѣдуе изъ првогъ израза, уобште независи одъ нѣгове вредности, кою бы добыли изъ интегралѣногъ другогъ израза. Свршимо ли пакъ мложенѣ у левой части, онда добыя иста єдначина видъ

$$x\,dx+y\,dy-dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0,$$

гди се неможе ни познати више, да є и $\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ нѣнъ чинитель, єръ ово исто добыямо и само одъ другогъ чинителя, ако га ставимо $=0$, и ослободимо одъ именителя.

Ако дакле ту диференціалну єдначину интегралимо, добытћемо као нѣнъ интегралъ само оно што дає нѣнъ другій чинитель, а првогъ чинителя одтудъ, зато што одъ оногъ другога независи, никако неможемо наћи.

Тай изгублѣный чинитель, кога морамо на другій начинъ тражити, оно є, што смо горе разумели подъ функціомъ, коя вопросну диференціалну єдначину задоволява, а ніє нѣнъ особитый интегралъ, и што смо зато назвали нѣнимъ **особенимъ разрешкомъ**.

§ 175.

Нека є дата диференціална єдначина првога реда, коя иначе по $\frac{dy}{dx}$ може быти и одъ вышега степена,

$$U=f(x,y,\frac{dy}{dx})=0;$$

нѣнъ подпуный или обштій интегралъ нека є

$$V=\varphi(x,y,c)=0,$$

гди *c* представля интеграленѣмъ добывеный сталный брой; найпосле изъ тогъ интеграла произведена диференціална єдначина буди

$$W = \left(\frac{d\,V_x}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\,V_y}{dy}\right) dy = 0.$$

Ако подпуный интегралъ $V = 0$ несадржи брой *c* само као алгебрайскій сабиракъ, онда ће тога броя *c* быти безъ сваке сумнѣ и у диференціалной єдначини $W = 0$, и по томе диференціална єдначина $U = 0$, у коіой га нема, постає у томъ случаю текъ ако се брой *c* изъ єдначина $V = 0$ и $W = 0$ истреби. Осимъ тога лако є іошъ увидити, да ће послѣдакъ тога истребльиваня быти истый, ма брой *c* небыо сталанъ, него као и *x* и *y* пременльивъ.

Зато узмимо да є изъ єдначине $V = 0$ добывена диференціална єдначина, сматрајући *c* као пременльивъ брой,

$$W_1 = \left(\frac{d\,V_x}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\,V_y}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\,V_c}{dc}\right) dc = 0.$$

Ово W_1 бытће само тако равно W, или што є свеєдно W остає само тако непромењено, ако є

$$\left(\frac{d\,V_c}{dc}\right) dc = 0.$$

Исключујући дакле случай гди є $\left(\frac{d\,V_c}{dc}\right) dc$ збогъ тога $= 0$, што є *c* сталанъ брой, бытће све изъ те єдначине добывене вредности броя *c* као функціє одъ *x* и *y* тога свойства, да заменуте у єдначини $W = 0$ даю єдначине, коє єдначину $U = 0$ подпуно задововоляваю. Пошто пакъ єдначина $W = 0$ после несадржи никакавъ више произвольно сталанъ брой, и дакле такова свойства постає, да се изъ подпуногъ интеграла, коій само сталне вредности броя *c* допушта, никако неможе добыти: то є свака, са онимъ, изъ єдначине $\frac{d\,V_c}{dc} = 0$

добивенимъ вредностима одъ c поставша єдначина $W = 0$, уобште само особеный разрешакъ дате диференціалне єдначине.

И садъ є ясно, коимъ се начиномъ тій особени разрешци какве диференціалне єдначине налазе. Треба т. є. нађеный обштій интегралъ $V = \varphi(x, y, c) = 0$ по c интегралити, и тай диференціалъ поставити равнъ нули. Одтудъ добывене вредности броя c поставлѣне у обштемъ интегралу, датће тражене особене разрешкове вопросне диференціалне єдначине.

§ 176.

Примеръ. Дата є диференціална єдначина $ydx - x\,dy - a\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$.

Као нѣнъ обштій интегралъ нашли смо у § 171. $y = cx + a\sqrt{1 + c^2}$.

Диференціалећи ову єдначину по c добыямо, ако одма разделимо са dc,

$$x + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}} = 0,$$ одкуда слѣдуе

$$c = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

а съ томъ вредности, збогъ $\sqrt{1+c^2} = -\frac{ac}{x} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ставляюћи є у обштій интегралъ,

$$y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp\sqrt{a^2-x^2},$$

или $y^2 + x^2 = a^2$, као особеный разрешакъ дате єдначине.

§ 177.

Ако є сталный брой c у нађеномъ обштемъ интегралу $V = \varphi(x, y, c) = 0$ дате какве диференціалне єдначине само у првомъ степену, онда $\frac{d\,V_c}{dc} = 0$ несадржи више c, и ова є єдначина збогъ тога сама особитый єданъ интегралъ оне дате диференціалне єдначине, о чему се лако можемо уверити на слѣдуюћій начинъ.

Нека су S и T функціє одъ x и y; бытће у вопросномъ случаю

$$V = S + Tc = 0, \text{ и зато}$$

$$W = d\,S + c\,d\,T = 0, \text{ а ако изъ ове две}$$

єдначине уклонимо c,

$$U = T\,d\,S - S\,d\,T = 0.$$

У томъ дакле случаю єдначина $\frac{d\,V_c}{dc} = T = 0$, зато што є и $d\,T = 0$, єдначину $U = 0$ подпуно задоволява.

Пошто пакъ найпосле изъ єдначине $V = 0$ слѣдуе $T = -\frac{S}{c}$, а ово постає $= 0$ за $c = \infty$, то є дакле $T = 0$ особита вредность интеграла одъ $U = 0$ за $c = \infty$, т. є. особитый интегралъ те єдначине.

У § 172. н. п. нашли смо као подпуный интегралъ диференціалне єдначине $x\,dy - y\,dx - x\sqrt{d^2x + d^2y} = 0$, єдначину

$$x^2 + y^2 = 2\,Cx.$$

Диференціалећи ову єдначину по C слѣдуе $x = 0$, као особитый интегралъ оне диференціалне єдначине при $C = \infty$.

И доиста, ако у подпуномъ интегралу, кои можемо писати и овако: $x = \frac{x^2 + y^2}{2C}$, ставимо $C = \infty$, слѣдуе $x = 0$.

§ 178.

Ако є найпосле нађеный обштій интегралъ дате какве диференціалне єдначине вида $f(x, y) = c$, т. є. ако є у нѣму сталный брой c одлученъ, онда се са докученимъ правиломъ § 175. нидочега неможе доћи, по томе, што изъ єдначине $V = f(x, y) - c = 0$ слѣдуе $\frac{dV_c}{dc} = -1$, єдначина сасвимъ независна одъ броя c, коєга бы се вредности одтуда имале определити.

Како у томъ случаю валя поступати, научитће насъ слѣдуюће сматранѣ.

Ако изъ єдначине $V = \varphi(x, y, c) = 0$ изнађемо $c = f(x, y)$, и после ту вредность поставимо у ню исту, добыямо изразъ $0 = 0$ за знакъ, да єдначина са заменутимъ c постои за сваку вредность броя x и сваку вредность броя y. Изъ тога узрока мораю быти и диференціали те єдначине по x и по y свакій по себи раванъ нули, мора быти

$dV_x = 0$ као и $dV_y = 0$, или што є свеєдно

$$\frac{dV_x}{dx} = 0 \text{ и } \frac{dV_y}{dy} = 0.$$

Пошто є пакъ, ако ради краткоће задржимо c место $f(x, y)$, и притомъ іошъ представимо са $\left[\frac{dV_x}{dx}\right]$ диференціалный количникъ одъ V по x само одъ оны чланова съ x; кои нису у c, подобно са $\left[\frac{dV_y}{dy}\right]$ диференціалный количникъ одъ V по y само одъ чланова съ y, кои су изванъ c, —

$$\frac{dV_x}{dx} = \left[\frac{dX_x}{dx}\right] + \left(\frac{dV_c}{dc_x}\right) \cdot \left(\frac{dc_x}{dx}\right), \text{ а}$$

$$\frac{dV_y}{dy} = \left[\frac{dV_y}{dy}\right] + \left(\frac{dV_c}{dc_y}\right) \cdot \left(\frac{dc_y}{dy}\right),$$

и ти изрази по пређашньой приметби мораю быти свакій $= o$: то слѣдуе

$$\left(\frac{dc_x}{dx}\right) = -\left[\frac{d\,V_x}{dx}\right] : \left(\frac{d\,V_c}{dc_x}\right) \text{ и}$$

$$\left(\frac{dc_y}{dy}\right) = -\left[\frac{d\,V_y}{dy}\right] : \left(\frac{d\,V_c}{dc_y}\right).$$

Пошто смо найпосле нашли, да за свакій особеный разрешакъ мора быти $\frac{d\,V_c}{dc} = o$, то є ясно, да пређашньи изрази за свакій особеный разрешакъ мораю быти безкрайни. Но каогодъ што дата диференціална єдначина немора непремено имати за сваку изъ $\frac{d\,V_c}{dc} = o$ слѣдуюћу вредность броя c особены разрешкова, тако исто немораю быти ни све оне вредности, за кое постаю количници $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$ безкрайни, особени разрешци.

§ 179.

Изъ овога подає се дакле за истраживанѣ особены разрешкова какве дате диференціалне єдначине, у кое подпуномъ интегралу стои сталный брой c одлученъ, слѣдуюће правило:

Треба определити изъ подпуногъ интеграла $c = f(x, y)$ вопросне диференціалне єдначине, $\frac{dc_x}{dx}$ и $\frac{dc_y}{dy}$, и извидити, могу ли именительи тіи количника постати равни нули, дакле они сами безкрайни? ако то буде, онда су они именительи, свакій $= o$, тражени особени разрешци вопросне диференціалне єдначине.

Н. п. нека є дата єдначина $dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$.

Нѣнъ є подпуный интегралъ $c = -y + \sqrt{x^2+y^2-a^2}$,

и зато $\frac{dc_y}{dy} = -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$,

а $\frac{dc_x}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$.

Оба ова количника имаю єдногъ истогъ именителя, кои може быти 0, ако є $x^2+y^2=a^2$. Они дакле постаю безкрайни при $x^2+y^2-a^2=0$, и зато є ова єдначина особеный разрешакъ оне диференціалне єдначине.

* * *

КНЬИГА III.

ВАРІЯЦІОНЫЙ РАЧУНЪ.

A. Развіянѣ функція одъ безкрайны редова у безкрайне редове.

§ 180.

Често появлює се потреба, да неку функцію $V = f(v, w, y, \ldots)$, коя є уобште или основна, и као такова или одкривена или скривена, или є диференціална, или пакъ некій интегралъ, али у коіой су $v, w, y, \ldots$ безкрайни редови истогъ пременљивогъ броя, н. п. x, развіємо у безкрайный редъ целы положны степена' тога броя x.

Тай посао ніє новъ, єръ є по Маклореновомъ образцу (§ 32.) уобште, т. є. была функція V каква му драго,

$$V = \underset{0}{V} + \underset{0}{V_1} \cdot x + \underset{0}{V_2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \underset{0}{V_3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots,$$

гди $\underset{0}{V}$ представля исту функцію V пошто у нѣой изменимо x са нуломъ, а $\underset{0}{V_1}, \underset{0}{V_2}, \underset{0}{V_3}, \ldots$ єсу по реду нѣне изводне функціє, у коима є такођеръ x изменуто съ 0. Али колико збогъ тога, што се исти сачинитељи вопросногъ реда V могу добыти іошъ и на другій, лакшій начинъ, толико и зато, што упознаваюћи се са тимъ другимъ начиномъ докучуємо іошъ и друге важне поуке — заниматћемо се у слѣдуюћимъ §§ма съ истимъ посломъ нешто изближе.

§ 181.

Представляюћи са ${}^{n}\partial V$ уобште оно, што остає одъ n. изводне функціє одъ V, т. є. одъ V_n, пошто место x узмемо 0, и пишући место ${}^{1}\partial V$ простіє само ∂V, имамо по Маклорену редъ

$$V = {}^{0}\partial V + \partial V \,.\, x + {}^{2}\partial V \cdot \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Нека є садъ $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots.$ уобште некій датый или тражећи се редъ целы степена одъ x, и притомъ сачинитељи $a_0, a_1, a_2, \ldots$ сасвимъ произвољне, но x несадржеће функціє.

Ставляюћи у томъ реду $x = 0$, слѣдує $\underset{0}{v} = a_0$; образуюћи пакъ по реду нѣгове изводне функціє, и узимаюћи у свакой такођеръ $x = 0$, добыямо по реду

$$\begin{array}{l|l|l} \underset{0}{v_1} = a_1 & \underset{0}{v_3} = 3!\, a_3 & \text{уобште } \underset{0}{v_n} = n!\, a_n\,; \\ \underset{0}{v_2} = 2!\, a_2 & \ldots\ldots\ldots & \text{а одатле} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} a_1 = \underset{0}{v_1} = \partial v & a_3 = \frac{1}{3!} \cdot \underset{0}{v_3} = \frac{1}{3!} \cdot {}^{3}\partial v & \\ a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \underset{0}{v_2} = \frac{1}{2!} \cdot {}^{2}\partial v & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{уобште} \end{array}$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \underset{0}{v_n} = \frac{1}{n!} \cdot {}^{n}\partial v \,.$$

Редъ v дакле можемо безъ икакве повреде писати и овако

$$v = {}^{0}\partial v + \partial v \,.\, x + {}^{2}\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^{3}\partial v \cdot \frac{x^3}{3!} + \,.\,.\, + {}^{n}\partial v \,.\, \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

гди є ${}^{n}\partial v = n!\,a_n$, т. є. оно што одъ v_n (n. изводне функціє истога реда v) остає, ако место x узмемо нулу. И ово постои изъ исты узрока и за свакій другій редъ целы степена одъ x.

Символъ ${}^{n}\partial v$ или ${}^{n}\partial V$ изговарат'ћемо у будуће: n. изводъ одъ v или одъ V.

§ 182.

Изъ предходећегъ §а можемо извести слѣдуюће важне истине.

Нека су $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ два безкрайна реда целы степена одъ x, а сачинительи у истимъ редовима функціє єдногъ истогъ променльивогъ броя y, или исты променльивы броева $y, z, \ldots$

Пошто ${}^{r}\partial u$ и ${}^{r}\partial v$ представляю по пређашнѣмъ §у оно што остає одъ u_r и v_r (т. є. одъ r. изводны функція одъ u и v), кадъ се у нъима узме 0 место x; пошто є далѣ свеєдно, хоће ли се нека функція найпре диференціалити по x, па после диференціалити или интегралити по $y, z, \ldots$, или ће се тай посао извршити противнимъ редомъ; и пошто є найпосле свеєдно, да ли ћемо у диференціалѣной функціи по x найпре узети 0 место x, па онда є текъ диференціалити или интегралити по $y, z, \ldots$, или ћемо и то учинити противнимъ редомъ: то є очевидно, да ако є

1.) $v = (u_n)_z = \dfrac{{}^{n}du}{d^n z}$, слѣдуе ${}^{r}\partial v = \dfrac{{}^{n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^n z}$,

2.) $v = (u_{m+n})_{my,\,nz} = \dfrac{{}^{m+n}du}{d^m y\,.\,d^n z}$, „ ${}^{r}\partial v = \dfrac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^m y\,.\,d^n z}$,

3.) $v = \displaystyle\int_a^b u\,dz$, „ ${}^{r}\partial v = \displaystyle\int_a^b \partial u\,.\,dz$, и

4.) $v = \displaystyle\int_{y'}^{y''} \Big(\int_{z'}^{z''} u\,dz\Big)\,dy$, „ ${}^{r}\partial v = \displaystyle\int_{y'}^{y''} \Big(\int_{z'}^{z''} {}^{r}\partial u.dz\Big)\,dy$.

а то ће съ другимъ речима рећи, да є при истямъ предпоставама, по реду

$$\text{I.)}\quad {}^{r}\partial\left(\frac{{}^{n}du}{d^{n}z}\right)=\frac{{}^{n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{n}z},$$

$$\text{II.)}\quad {}^{r}\partial\left(\frac{{}^{m+n}du}{d^{m}y\,.\,d^{n}z}\right)=\frac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\partial u)}{d^{m}y\,.\,d^{n}z},$$

$$\text{III.)}\quad {}^{r}\partial\,(\int_{a}^{b}udz)=\int_{a}^{b}{}^{r}\partial u\,.\,dz,\quad \text{и}$$

$$\text{IV.)}\quad {}^{r}\partial\left[\int_{y'}^{y''}(\int_{z'}^{z''}udz)\,dy\right]=\int_{y'}^{y''}(\int_{z'}^{z''}{}^{r}\partial u\,.\,dz)\,dy,$$

гди заграђени изрази лево представляю односно v, а цели леви изрази сачинителѣ одъ $\frac{x^{r}}{r!}$ у редовима дотичнога v; и гди дакле десни изрази показую како се ти сачинительи добыяю изъ єдноимены сачинителя ${}^{r}\partial u$ дотичнога реда u.

За образце **III.** и **IV.** имамо само іоштъ приметити, да они стоє тако, само докъ границе, међу коима се узимаю интеграли, несадрже и саме x, да се пакъ съ места меняю, чимъ бы и те границе быле какве функціє одъ x. Место првогъ одъ нъи добыямо у томъ случаю

$${}^{r}\partial\,(\int_{a}^{b}udz)=\int_{a}^{b}{}^{r}\partial u\,.\,dz+(u_{b}\,.\,{}^{r}\partial b-u_{a}\,.\,{}^{r}\partial a),$$

о чему се лако уверавамо интеграломъ $\int_{a}^{b}udz=y$, ако помислимо, да смо у истомъ свудъ гдигодъ има x, дакле у u, a, b и y место x узели $x+h$, да смо све те броєве (по телеровомъ или маклореновомъ образцу) развили у редове по h, и после смо лево и десно задржали само чланове съ h у првомъ степену; єръ тиме слѣдує, да є при оной предпостави за b и a

$$\partial\int_{a}^{b} u dz = \int_{a}^{b} \partial u \,.\, dz + (\underset{b}{u} \,.\, \partial b - \underset{a}{u} \,.\, \partial a) ,$$

те зато и горный образацъ каошто є поставлѣнъ.

Садъ приступимо къ самомъ развіяню функція одъ редова у редове.

§ 183.

Ако є $V = f(v)$, и притомъ $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, имамо по Маклорену, обзиромъ на § 181.,

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \ldots \,,$$

а у име сачинителя овога реда осимъ

$$V = f(v)$$

іошъ изводне функціє одъ V по v као функціи одъ x,

$$V_1 = f_1(v) \,.\, v_1 ,$$

$$V_2 = f_2(v) \,.\, v_1^2 + f_1(v) \,.\, v_2 ,$$

$$V_3 = f_3(v) \,.\, v_1^3 + 3 f_2(v) \,.\, v_1 v_2 + f_1(v) \,.\, v_3 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

и одтудъ, ако изменемо x са 0,

$${}^0\partial V = f \underset{x=0}{(v)} \;,$$

$$\partial V = f_1 \underset{x=0}{(v)} \,.\, \partial v_1 ,$$

$${}^2\partial V = f_2 \underset{x=0}{(v)} \,.\, \partial^2 v + f_1 \underset{x=0}{(v)} \,.\, {}^2\partial v ,$$

$${}^3\partial V = f_3 \underset{x=0}{(v)} \,.\, \partial^3 v + 3 f_2 \underset{x=0}{(v)} \,.\, \partial u \partial v + f_1 \underset{x=0}{(v)} \,.\, {}^3\partial v ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пошто пакъ у изводнимъ функціяма одъ v, кадъ место x метнемо 0, гдигодъ се появи v, остає само првый чланъ $a_0 = {}^0\partial v$ тога реда, то ћемо дакле по свему тому сачинителѣ вопроснога реда функціє V добыти, ако исту функцію као функцію одъ v (съ обзиромъ на то, да є v функція одъ x) застопце по x диференціалимо, у изводнимъ функціяма одъ $f(v)$ — диференціалнимъ количницима — место v узмемо само нѣговъ првый чланъ, и іошъ знакъ d изменимо са знакомъ ∂.

Н. п. имамо развити $V = v^m$, гди є $v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, у безкрайный редъ.

Ту є ${}^0\partial V = v^m$, $\partial V = m \,.\, v^{m-1} . \partial v$,

$$ {}^2\partial V = m\,(m-1) \,.\, v^{m-2} . \partial^2 v \; m \,.\, v^{m-1} . {}^2\partial v, $$

$$ {}^3\partial V = m\,(m-1)\,(m-2) . v^{m-3} . {}^3\partial v + 3m(m-1) \,.\, v^{m-2} . \partial v . {}^2\partial v + m v^{m-1} . \partial v $$

$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \quad \text{т. є.} $$

$$ {}^0\partial V = a_0^m, \; \partial V = m a_0^{m-1} . a_1, \; {}^2\partial V = m^{2|-1} . a_0^{m-2} . a_1^2 + m a_0^{m-1} . 2!\, a_2, $$

$$ {}^3\partial V = m^{3|-1} . a_0^{m-3} . a_1^3 + 3 m^{2|-1} . a_0^{m-2} . a_1 . 2!\, a_2 + m a_0^{m-1} . 3! a_3, $$

$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; $$

дакле ако заменемо ове вредности у реду

$$ V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots , $$

слѣдує траженый редъ функціє

$$ V = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^m $$

$$ = a_0^m + m a_0^m . a_1 . x + (m a_0^{m-1} . a_2 + \frac{m}{2!}{}^{2|-1} . a_0^{m-2} . a_1^2)\, x^2 $$

$$ + (m a_0^{m-1} . a_3 + m^{2|-1} . a_0^{m-2} . a_1 a_2 + \frac{m^{3|-1}}{3!} a_0^{m-3} . a_1^3)\, x^3 + \ldots, $$

а то є полиномный образацъ, каошто смо га нашли у І. Ч. на другій начинъ.

§ 184.

Ако є пакъ $V=f(u,v)$, и притомъ $u=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$, а $v=\gamma_0+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\dots$, имамо

$$V={}^0\partial V+\partial V.x+{}^2\partial V.\frac{x^2}{2!}+\dots\dots,$$

а у име сачинителя ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, ..., диференціалећи $V=f(u,v)$ застопце по u и v као функціє одъ x,

$${}^0dV=V=f(u,v)$$

$$dV=(V_1)_u.du+(V_1)_v.dv$$

$${}^2dV=(V_2)_u.d^2u+2(V_2)_{u,v}.dudv+(V_2)_v.d^2v$$

$$+(V_1)_u.{}^2du+(V_1)_v.{}^2dv$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

одкуда, ако метнемо 0 место x, слѣдуе

$${}^0\partial V=\underset{x=0}{V}=f(c_0,\gamma_0)$$

$$\partial V=(V_1)_u.\partial u+(V_1)_v.\partial v$$

$${}^2\partial V=(V_2)_u.\partial^2u+2(V_2)_{u,v}.\partial u\partial v+(V_2)_v.\partial^2v$$

$$+(V_1)_u.{}^2\partial u+(V_1)_v.{}^2\partial v$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

съ приметбомъ, да у изводнимъ функціяма V_1, V_2, ..., гдигодъ стои просто u и просто v, треба узети или разумети само прве чланове тій редова, т. є. ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$, изъ истогъ узрока као у прећашнѣмъ §-у.

Сачинителѣ дакле вопроснога реда функціє $V=f(u,v)$ добытћемо, ако исту функцію по u и v (дакле посредно по x) застопце диференціалимо, у диференціалнимъ сачинительима место простога u и простога v узмемо само прве чланове ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$ тій редова, и іошъ знакъ d изменимо са знакомъ ∂.

§ 185.

У случаю ако є функція $V=f(u,v)={}^0\partial V+\partial V\cdot x + {}^2V\cdot\frac{x^2}{2!}+\dots$ за сваку вредность броя x равна нулли, онда по § 9. I. Ч. мора быти и свакій нѣнъ сачинитель ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, . . . за себе $=0$, и єдначине одъ горньи израза, поставлѣны $=0$, показую зависность сачинителя ${}^0\partial u$, ∂u, ${}^2\partial u$, ... одъ сачинителя ${}^0\partial v$, ∂v, ${}^2\partial v$, ... , или обратно, па дакле и начинъ како бы се добыли єдни изъ други у случаю, ако є редъ v као функція реда u, или овай као функція онога задатъ скривеномъ функціомъ $V=f(u,v)=0$.

Слѣдоватно, ако су у $V=f(u,v)$ редови u и v єданъ одъ другогъ зависни, и та є ньина зависность задата єдначиномъ $\varphi(u,v)=0$, онда сачинительи ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, ... реда V остаю каошто смо ій горе нашли, а сачинительи ${}^0\partial v$, ∂v, ${}^2\partial v$, . . . у ньима добытћe се изражени посредомъ сачинителя ${}^0\partial u$, ∂u, ${}^2\partial u$, . . . изъ постоєћи збогъ $\varphi(u,v)=0$ єдначина ${}^0\partial\varphi(u,v)=0$, $\partial\varphi(u,v)=0$, ${}^2\partial\varphi(u,v)=0$, . . . , коихъ пакъ леве части налазимо по упутству § 184.

§ 186.

Ако є найпосле $V=f(u,v,w)$, т. є. функція три реда $u=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$, $v=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$, $w=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$, имамо

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + \,.\;.\;.\;.$$

$$dV = (V_1)_u \,.\, du + (V_1)_v \,.\, dv + (V_1)_w \,.\, dw\,,$$

$${}^2dV = (V_2)_u \,.\, d^2u + (V_2)_v \,.\, d^2v + (V_2)_w \,.\, d^2w,$$

$$+ 2\,(V_2)_{u,v} \,.\, dudv + 2\,(V_2)_{u,w} \,.\, dudw + 2\,(V_2)_{v,w} \,.\, dvdw$$

$$+ (V_1)_u \,.\, {}^2du + (V_1)_v \,.\, {}^2dv + (V_1)_w \,.\, {}^2dw\,,$$

. . . . ;

и одтудъ изменомъ одъ x са 0,

$${}^0\partial V = V = f(u, v, w)$$

$$\partial V = (V_1)_u du + (V_1)_v \,.\, dv + (V_1)_w \,.\, dw$$

$${}^2\partial V = (V_2)_u \,.\, \partial^2u + (V_2)_v \,.\, \partial^2v + (V_2)_w \,.\, \partial^2w + 2\,(V_2)_{u,v} \,.\, dudv$$

$$+ 2\,(V_2)_{u,w} \,.\, dudw + 2\,(V_2)_{v,w} \,.\, dvdw$$

$$+ (V_1)_u \,.\, {}^2\partial u + (V_1)_v \,.\, {}^2\partial v + (V_1)_w \,.\, {}^2\partial w$$

. . . . ,

гди у изводнимъ функціяма одъ V место простога u, v и w треба свуда узети само прве чланове ${}^0\partial u$, ${}^0\partial v$, ${}^0\partial w$ тій редова.

Осимъ начина за истраживанѣ сачинителя увиђа се іошъ лако

1.) да ако є у вопросномъ случаю $V = 0$, мора быти такођеръ и ${}^0\partial V = 0$, $\partial V = 0$, ${}^2\partial V = 0$, . . . , коє єдначине садрже међусобну зависность сачинителя редова u, v и w тако, да можемо оне ма коєга одъ тій редова изразити посредомъ сачинителя остала два реда, у случаю: ако бы онай єданъ редъ быо задатъ єдначиномъ $V = 0$ као скривена функція друга два реда. Исто тако

2.) ако є осимъ $V=f(u,v,w)=0$ іошъ и $W=\varphi(u,v,w)=0$, мора быти ${}^0\partial V=0$, $\partial V=0$, ${}^2\partial V=0$, ... и ${}^0\partial W=0$, $\partial W=0$, ${}^2\partial W=0$, ..., тако, да по тима єдначинама можемо лако изразити сачинителѣ ма коя два одъ редова u, v и w чрезъ сачинителѣ трећега реда, у случаю: ако бы прва два реда были задати као скривене функціє трећега, єдначинама $V=0$ и $W=0$.

§ 187.

Редови u, v и w у вопросу предходећегъ §а могу быти

1.) међусобно сасвимъ независни, и у томе су случаю и сачинителњи свакогъ одъ нњи независни одъ сачинителя остала два реда; или

2.) између редова u, v и w постои єдначина $\varphi(u,v,w)=0$, и у томъ су случаю по првой приметби прећашнѣга §а сачинителњи єдногъ одъ нњи зависни одъ сачинителя друга два реда, посредомъ єдначина' ${}^0\partial\varphi(u,v,w)=0$, $\partial\varphi(u,v,w)=0$, ${}^2\partial\varphi(u,v,w)=0$, ... збогъ чега можемо изразити сачинителѣ одъ V чрезъ сачинителѣ само та два реда; или

3.) између редова u, v, и w постоє две єдначине $\varphi(u,v,w)=0$ и $\psi(u,v,w)=0$, у комъ случаю по **2.** приметби истога §а зависе сачинителњи два одъ тій редова одъ сачинителя оногъ трећегъ реда, посредомъ єдначина ${}^0\partial\varphi(u,v,w)=0$, $\partial\varphi(u,v,x)=0$, ${}^2\partial\varphi(u,v,w)=0$, ..., и можемо дакле изразити сачинителѣ одъ V чрезъ сачинителѣ само тогъ трећегъ реда. Осимъ тога

4.) могу быти два одъ тій редова, н. п. v и w, или изводне функціє (диференціални количници), или интеграли оногъ трећега, и то по єдномъ или по више променљивы броєва r, s, t, ... У томе су случаю сачинителњи она два прва реда исте изводне функціє или исти интеграли одъ сачинителя трећега реда, по онимъ истимъ променљивимъ броєвима r, s, t, ..., онако каошто показую дотични образци § 181. Найпосле

5.) у пређе споменутимъ случаевима може быти V функція само два реда v и w, или башъ и само єднога w. Тадъ зависе она два реда или тай єданъ одъ трећегъ реда u, збогъ чега се сачинительи одъ V могу сви изразити чрезъ сачинителѣ тога реда u.

§ 188.

Садъ смо у станю развити V као функцію одъ ма колико и каквы редова у редъ целы степена заєдничкогъ ньиовогъ променьивогъ броя x, на слѣдуюћій начинъ:

Напишемо редъ

$$V = {}^0\partial V + \partial V \,.\, x + {}^2\partial V \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \,.\, \frac{x^3}{3!} + \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;;$$

диференціалимо V као функцію дотичны редова застопце по x; у нађенимъ тимъ диференціалима изменюємо знакъ d знакомъ ∂, а одъ оны редова, гди се прости покажу, задржимо само ньиове прве чланове, па онда заменемо све те изразе место сачинителя ${}^0\partial V$, ∂V, ${}^2\partial V$, ... у горнѣмъ реду за V.

И тай начинъ остає истый, были редови u, v, w, . . . у функціи V међу собомъ независни, или были єдни неке изводне функціє или интеграли одъ други, или была найпосле нека ньиова међусобна зависность задата єдначинама $\varphi(u, v, w, \ldots) = 0$, $\psi(u, v, w, \ldots) = 0$, . . .

Примера ради узмимо да є $V = f\left(u, v, \int u dz, \frac{dv}{dz}\right)$. Заменююћи ради краткоће $\int u dz$ са s, а $\frac{dv}{dz}$ са t, имамо

$${}^0\partial V = V$$

$$\partial V = (V_1)_n \,.\, \partial u + (V_1)_v \,.\, \partial v + (V_1)_s \,.\, \partial s + (V_1)_t \,.\, \partial t$$

$${}^2\partial V = (V_2)_u \,.\, \partial^2 u + (V_2)_v \,.\, \partial^2 v + (V_2)_s \, \partial^2 s + (V_2)_t \,.\, \partial^2 t + 2(V_2)_{u,v} \, \partial u \partial v$$
$$+ 2(V_2)_{u,s} \,.\, \partial u \partial s + 2(V_2)_{u,t} \,.\, \partial u \partial t + 2(V_2)_{v,s} \,.\, \partial v \partial s$$

$$+2(V_2)_{v,t}.\partial v\partial t+2(V_2)_{s,t}.\partial s\partial t+(V_1)_u.{}^2\partial u$$
$$+(V_1)_v.{}^2\partial v+(V_1)_s.{}^2\partial s+(V_1)_t.{}^2\partial t$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

гди 1.) у изводнимъ функціяма место простога u, v, s, и t валя узети само прве чланове тій редова, 2.) место ∂t и ∂s треба по § 181. узети $\frac{d(\partial v)}{dz}$ и $\frac{d(\int\partial u.dz)}{dz}$.

§ 189.

Задатакъ развіяня функція одъ редова у безкрайне редове, свађенъ у найпространіємъ смислу бео бы каошто слѣдує:

Имамо V као функцію одъ $u, v, \ldots$ и іошъ одъ u' $v', \ldots$ Место $u', v', \ldots$ узимамо найпре редове целы, степена одъ x, у коима су сачинительи ${}^0\partial u'$, $\partial u'$, ${}^2\partial u'$, ..., ${}^0\partial v'$, $\partial v'$, ${}^2\partial v'$, ... неке функціє одъ $u, v, \ldots$ После пакъ заменюємо $u, v, \ldots$, гдигодъ се налазе, было као одкривене или као скривене функціє (у сачинительима редова $u', v', \ldots$), такођеръ са редовима целы степена одъ x. И тадъ пыта се, како ћемо добыти сачинителѣ реда, у коій тиме прелази вопросна функція V.

Тай задатакъ разрешит'ћемо одма на двоякій начинъ.

§ 190.

Прво решенѣ. Помислимо да смо у V заменули u', v', ... са редовима каошто горе рекосмо. Тиме прелази већъ V у редъ степена одъ x, коій истина ніє онай траженый, али насъ, каошто ћемо видити, води къ томъ правомъ. Нѣгове сачинителѣ налазимо по § 189., означаваюћи ій са ${}^0\partial' V$, $\partial' V$, ${}^2\partial' V$, ...;

$$
\begin{aligned}
{}^0\partial' V &= V \\
\partial' V &= (V_1)_{u'} . \partial u' + (V_1)_{v'} . \partial v' + \dots . \\
{}^2\partial' V &= (V_2)_{u'} . \partial^2 u' + (V_2)_{v'} . \partial^2 v' + \dots . \\
&\quad + 2\,(V_2)_{u', v'} . \partial u' . \partial v' + \dots . \\
&\quad + (V_1)_{u'} . {}^2\partial u' + (V_1)_{v'} . {}^2\partial v' + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}
$$

гди како у V тако и у свима нѣговимъ изводнимъ функціяма место простога u', v', ... треба разумети само прве чланове ${}^0\partial u'$, ${}^0\partial v'$, ... тій редова.

Редъ дакле, добывеный после замене одъ u', v', .. съ редовима по x, представляюћи га са V', бытћe

$$V' = {}^0\partial' V + \partial' V . x + {}^2\partial' V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial' V . \frac{x^3}{3!} + \dots . \quad (1.$$

а траженый редъ треба да буде

$$V = {}^0\partial V + \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \dots . \quad (2.$$

Овай последнѣй редъ, каошто є лако увидити, да бытћемо изъ првога V', ако у томъ место u, v, ... гдигодъ стоє (было одкривено или скривено) узмемо нѣиове редове по x, т. є.

$$
\begin{aligned}
u &= {}^0\partial u + \partial u . x + {}^2\partial u . \frac{x^2}{2!} + \dots\dots , \\
v &= {}^0\partial v + \partial v . x + {}^2\partial v . \frac{x^2}{2!} + \dots\dots , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}
$$

и ако после V', у име сачинителя реда V, нієданпутъ, єданпутъ, двапутъ, ... застопце диференціалимо, па онда место x поставимо 0.

Ради краткоће узмимо да є V осимъ одъ $u', v', \ldots$ функція само іошъ одъ u и v. Бытће, поступаюћи каошто рекосмо,

$$ {}^0\partial V = {}^0\partial' V = [V = f(u, v, u', v', \ldots] \quad . \; . \; (3., $$

гди место $u', v', \ldots$ треба разумети само ньиове прве чланове ${}^0\partial u'$, ${}^0\partial v'$, а место u и v после такођеръ само прве чланове ${}^0\partial u$ и ${}^0\partial v$. Далѣ

$$ \partial V = \partial' V + (V_1)_u . \partial u + (V_1)_v . \partial v \quad . \; . \; (4., $$

гди съ $\partial' V$ представлямо последакъ одъ dV (т. є. одъ dV' после изменутога u и v съ ньновимъ редовима), по одлученомъ x, пошто смо место x узели о; съ $(V_1)_u$ и $(V_1)_v$ пакъ означуемо послѣдке истога dV по ономъ x, кое се налази у сачинительима одъ V', такођеръ после изменутогъ x съ о.

Узимаюћи одъ предстоеће єдначине подъ 4.) лево и десно изводне функціє по x, и изменююћи после x съ о, слѣдує

$$ {}^2\partial V = \partial\,(\partial' V) + \partial\,[(V_1)_u . \partial u] + \partial\,[(V_1)_v . \partial v] \quad . \; . \; (5., $$

гди є изъ увиђавны узрока

$$ \left.\begin{aligned} \partial\,[(V_1)_u . \partial u] &= \partial\,(V_1)_u . \partial u + (V_1)_u . {}^2\partial u \\ \partial\,[(V_1)_v . \partial v] &= \partial\,(V_1)_v . \partial v + (V_1)_v . {}^2\partial v \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (6. $$

Ставляюћи пакъ у истой єдначини подъ 4.) $\partial' V$ место V добыямо

$$ \partial(\partial' V) = {}^2\partial' V + \frac{d\,(\partial' V)}{du} . \partial u + \frac{d\,(\partial' V)}{dv} . \partial v \quad . \; . \; (7., $$

а ако опетъ тамо метнемо найпре $(V_1)_u$ а после $(V_1)_v$ место V,

$$ \left.\begin{aligned} \partial(V_1)_u &= \partial'(V_1)_u + (V_2)_u . \partial u + (V_2)_{u,v} . \partial v \\ \partial(V_1)_v &= \partial'(V_1)_u + (V_2)_{u,v} . \partial u + (V_2)_v . \partial v \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (8., $$

где є по § 181.

$$\partial'(V_1)_u = \frac{d\,(\partial' V)}{du}, \text{ а } \partial'(V_1)_v = \frac{d\,(\partial' V)}{dv} \;\ldots\ldots (9.$$

Збогъ свега тога є дакле, ако ове вредности єдну у другой, и све у єдначини 5. заменемо,

$$\left.\begin{array}{l} {}^2\partial V = {}^2\partial' V + 2\,\dfrac{d\,(\partial' V)}{du}\cdot \partial u + 2\,\dfrac{d\,(\partial' V)}{dv}\cdot \partial v \\ \qquad + (V_1)_u \cdot {}^2\partial u + (V_1)_v \cdot {}^2\partial v + (V_2)_u \cdot \partial^2 u \\ \qquad + 2\,(V_2)_{u,v}\cdot \partial u \partial v + (V_2)_v \cdot \partial^2 v \end{array}\right\} \;\ldots\ldots (10.$$

На истый начинъ можемо изъ овогъ израза извести ${}^3\partial V$, одтудъ опетъ ${}^4\partial V$, и т. д. Само се притомъ несме заборавити, да у свима изразима одъ 3. до 10. место свакогъ простогъ u', v', …, гдигодъ се у сачинительима находе, валя узети само прве чланове ${}^0\partial u'$, ${}^0\partial v'$, …. уведены за u', v', …. редова, каогодъ што се после опетъ место свакогъ простогъ u и v има метнути ${}^0\partial$ и ${}^0\partial v$.

Ово решенѣ можемо употребити и у случаю, где су $\partial' V$, ${}^2\partial' V$, … функціє само одъ u и v, или осимъ u и v іошъ и одъ произвольно колико више редова w, y, ….

§ 191.

Друго решенѣ. Пречe и лакше можемо изнаћи чинителѣ реда V изъ сачинителя реда V' (єдначине подъ 2. и 1.) на тай начинъ, да у овима помислимо место u и v поставлѣне нњиове редове; што є тиме постало развієно є у редове по x, и све є найпосле уређено по степенима одъ x.

Пошто су сачинительи ${}^0\partial' V$, $\partial' V$. …. функціє одъ u и v, слѣдуе, да ако се у тима сачинительима место u и v поставе нњиови редови, свакій одъ нњи прелази за себе у редъ степена одъ x, коій уобште представлямо чрезъ

$${}^{0}\partial_1({}^{n}\partial' V) + \partial_1({}^{n}\partial' V) \cdot x + {}^{2}\partial_1({}^{n}\partial' V) \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots ;$$

сачинителѣ пакъ свакогъ таквогъ реда добытћемо по § 183. изменюю̀ћи тамошнѣ ∂ са саданьимъ ∂_1, а тамошнѣ V са овдашньимъ ${}^{n}\partial' V$.

На основу ове приметбе можемо садъ настоѥће друго решенѣ сасвимъ уобште изложити овако:

Представляю̀ћи редъ V' (єдначину прећашнѣгъ §а подъ 1.) символомъ

$$V' = S\left[{}^{\alpha}\partial' V \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right] \quad \ldots\ldots (3.',$$

(кои значи: V' є сбиръ членова вида ${}^{\alpha}\partial' V \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}$,) можемо одма рећи, да є

$$V = S\left[{}^{a}\partial_1({}^{\alpha}\partial' V) \cdot \frac{x^{a}}{a!} \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}\right] \quad \ldots\ldots (4.',$$

у комъ изразу, да бы добыли V, треба метнути найпре место α по реду све целе положне бровве 0, 1, 2, ... у ∞, па онда валя све тако добывене членове (кои ће быти безбройно пута безбройно) у єданъ сабрати.

Ставляю̀ћи $a + \alpha = \varepsilon$, прелази ова єдначина подъ 4.', збогъ $\frac{\varepsilon!}{a!\,\alpha!} = \frac{(a+\alpha)}{a!\,\alpha!} = \binom{a+\alpha}{a} = \binom{a+\alpha}{\alpha} = \binom{\varepsilon}{a} = \binom{\varepsilon}{\alpha}$, у слѣдую̀ћу

$$V = S\left[\binom{\varepsilon}{a} \cdot {}^{a}\partial_1({}^{\alpha}\partial' V) \cdot \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon!}\right] \quad \ldots\ldots (5.',$$

по коіой дакле за V треба метнути место ε по реду све бровве 0, 1, 2, ... у ∞, и уза свако ε за a и α опетъ оне целе положне бровве одъ 0 до ∞, кои є сбиръ $a + \alpha = \varepsilon$, па онда све тако добывене вредности валя іошъ скупити у сбиръ S.

Сравненѣ ове єдначине 4.′, съ ономъ подъ 2.) у прећашнѣмъ §у, коя по овде уведеномъ начину писана овако изгледа

$$V = S\left[{}^{\varepsilon}\partial V \cdot \frac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon!}\right],$$

показує, да нѣиови поєдини, са x^{ε} снабдевени чланови мораю быти єднаки, дакле да мора быти

$$'' \partial V = S\left[\binom{n}{a} \cdot {}^{a}\partial_1({}^{\alpha}\partial' V)\right] \; . \; . \; . \; (6.',$$

гди a и α примаю све целе положне бройне вредности 0, 1, 2, ... до ∞, коихъ є сбиръ $= n$, а $\binom{n}{a}$ представля комбинаторный брой $\frac{n^{a|-1}}{a!}$, — и гди найпосле знакъ S налаже, да се све тако добывени изрази саберу у єданъ.

Ставляюћи дакле ту место n по реду бровве 0, 1, 2, ..., добыямо

$${}^{0}\partial V = {}^{0}\partial_1({}^{0}\partial' V) = \underset{x=0}{V},$$

$$\partial V = {}^{0}\partial_1(\partial' V) + \partial_1({}^{0}\partial' V) = {}^{0}\partial V + \partial_1(\partial' V),$$

$${}^{2}\partial V = {}^{0}\partial_1({}^{2}\partial' V) + 2\partial_1(\partial' V) + {}^{2}\partial_1({}^{0}\partial' V),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

кои се изрази подпуно слажу съ онима у предходећемъ §у, чимъ истражимо вредности чланова у десной части по § 183., изменюћи тамо ∂ лево съ ∂_1, а V десно по реду съ ${}^{0}\partial' V$, $\partial' V$, ${}^{2}\partial' V$, ...

§ 192.

Као особитый, за употреблѣнѣ важный случай обяснѣногъ у § 190. обштегъ задатка преображавања у редове, споминЂмо само іошъ тай, где су ${}^{0}\partial u'$ ${}^{0}\partial v'$, ... $\partial u'$, $\partial v'$, ... ${}^{2}\partial u'$, ${}^{2}\partial v'$, ..., функціє само одъ u, коій редъ иначе у V, па дакле и у ${}^{0}\partial' V$, $\partial' V$, ${}^{2}\partial' V$, ... може налазити се или неналазити, и где є найпосле место свакогъ простогъ u узеть редъ ${}^{0}\partial u + \partial u \,.\, x + {}^{2}\partial u \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots$

У томъ є случаю (види изразе §а 190.)

1.) $\;{}^{0}\partial V = {}^{0}\partial' V = [V = f(u, u', v', \ldots)]$

2.) $\;\partial V = \partial' V + (V_1)_u \,.\, \partial u,$ и притомъ

$$\partial' V = \partial V - (V_1)_u \,.\, \partial u\,,$$

3.) $\;{}^{2}\partial V = {}^{2}\partial' V + 2\,\frac{d\,(\partial' V)}{du} \,.\, \partial u + (V_2)_u \,.\, \partial^2 u + (V_1)_u\, {}^{2}\partial u\,,$

. . . . ,

где подъ свакимъ u', v', ... треба разумети само ${}^{0}\partial u'$, ${}^{0}\partial v'$, ..., и у тима опетъ подъ u само ${}^{0}\partial u$.

Заврщуюћи съ овимъ предстоећій предметъ, морамо іошъ приметити, да при употребляваню докученя предходећи §§-а, у свакомъ особитомъ случаю, где бы редъ V съ некимъ членомъ прекинули, изъ узрока што є тай редъ свуда добывенъ на основу Маклореновогъ образца, іошъ и границе, међу коима леже пренебрегнути членови, по § 138. узети треба.

Б. Варіаціоный рачунъ.

§ 193.

Ако є у докученяма пређашньи §§-а при нарочномъ ньиовомъ употребляваню брой x изчезљиво малый, онда є разлика између редова u, v, V, ... и ньиовы првы членова такођеръ изчезљиво мала, и тада зову се членови тій разлика $u - {}^{0}\partial u$, $v - {}^{0}\partial v$, $V - {}^{0}\partial V$, ... (кои су сви снабдевени съ некимъ степеномъ одъ x, и одъ коихъ є свакій спрамъ предходећему опетъ изчезљиво малый), пошто се помложе по реду съ 1!, 2!, 3!, ... — **варіяціє или премене** одъ $u, v, V, \ldots$

Предходећи §§и дакле, поредъ решеня задатка коій имъ є быо цѣль, садрже уєдно и **варіяціоный рачунъ** по нѣговой суштини; но у слѣдуюћему упознатћемо се іошъ и съ нѣговимъ обичнимъ видомъ.

§ 194.

Ако u, или v, или V, ... по себи, или зависно, прелази у редъ целы степена одъ x, коій представлямо односно са

$$ {}^0\partial u + \partial u \,.\, x + {}^2\partial u \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial u \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots $$

$$ {}^0\partial v + \partial v \,.\, x + {}^2\partial v \,.\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial v \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots $$

$$ {}^0\partial V + \partial V .\, x + {}^2\partial V .\, \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V \cdot \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots $$

$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; $$

и ако є (или се помисли) **притомъ x изчезљиво мало**, тако дакле, да се ${}^0\partial u$, ${}^0\partial v$, ${}^0\partial V, \ldots$ односно одъ $u, v, V, \ldots\ldots$ неразликую: онда се производи ${}^n\partial u \,.\, x^n$, ${}^n\partial v \,.\, x^n$, ${}^n\partial V \,.\, x^n, \ldots$ зову n. **варіяціє или премене**, односно одъ $u, v, V, \ldots$, и означую се простіє са ${}^n\delta u$, ${}^n\delta v$, ${}^n\delta V, \ldots$; разлика пакъ $u - {}^0\delta u$, или $v - {}^0\delta v$, или $V - {}^0\delta V, \ldots$ назива се **цела или скупна варіяція** одъ u, или $V, \ldots$

§ 195.

Изъ огъ понятія варіяціє слѣдує обзиромъ на § 181. съ места, да є

I.) $x\,.\,\partial V = \delta V$, а уобште $x\,.\,{}^{n}\partial V = {}^{n}\delta V$,

II.) $V = {}^{0}\delta V + \delta V + \frac{1}{2!}\,{}^{2}\delta V + \frac{1}{3!}\,.\,{}^{3}\delta V + \ldots\ldots$

III.) ${}^{n}\delta\,(V_{n})_{t} = \frac{{}^{n}d\,({}^{m}\delta V)}{d^{n}t}$, ${}^{r}\delta\,(V_{m+n})_{my,nz} = \frac{{}^{m+n}d\,({}^{r}\delta V)}{d^{n}y\,.\,d^{n}z}$,

IV.) $\delta\int_{a}^{b} V dz = \int_{a}^{b}\delta V\,.\,dz$, и т. д.,

тако дакле, да последке §§а 182. до 192. валя само помложити съ x, x^2, x^3, . . . и тамошньій знакъ ∂ заменути са δ, да бы добыли дотичне изразе варіяція, и да тамо докучена практична правила за истраживанѣ сачинителя постоє сасвимъ онако и за определьиванѣ варіяція δV, ${}^{2}\delta V$, ...

Притомъ валя іошъ приметити, да є ясніє и удобніє оставити варіяціє одъ u или V у виду ${}^{n}\partial u\,.\,x^{n}$ или ${}^{n}\partial V\,.\,x^{n}$, место што ій означуємо са ${}^{n}\delta u$ и ${}^{n}\delta V$, и то зато, што се **крайни** изрази ${}^{n}\partial u$ и ${}^{n}\partial V$ онако неспояваю са изчезльиво малимъ броємъ x, него одма падаю у очи као крайни сачинительи тогъ изчезльивогъ броя.

Придржаваюћи се ове приметбе можемо броєве ${}^{n}\partial u$ и ${}^{n}\partial V$ назвати **варіяціонимъ сачинительима** (подобно диференціалнимъ сачинительима), и показаный подъ A.) общтій начинъ развіяня у редове заслужує тадъ съ пунимъ правомъ име варіяціонога рачуна.

§ 496.

Примеръ. Нека є $U = f(u, v, w, x, y, z)$, и притомъ $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$, $x = \frac{dv}{du}$, $y = \frac{{}^{2}dv}{d^{2}u}$, а $z = \frac{dw}{du}$. Осимъ тога нека є іошъ $V = \int_{a}^{b} U du$.

Ако у томъ случаю прелазе v и w у редове $v + \delta v + \frac{1}{2!} \cdot {}^2\delta v + \frac{1}{3!} \cdot {}^3\delta v + \ldots$ и $w + {}^0\delta w + \frac{1}{2!} \cdot {}^2\delta w + \frac{1}{3!}, {}^3\delta w + \ldots.$, онда прелази и V у безкрайный редъ, кои ћемо представити са

$$V + \delta V + \frac{1}{2!} {}^2\delta V + \frac{1}{3!} {}^3\delta V + \ldots,$$

па ако треба да се изрази и δV варіяціяма δv, δw, ${}^2\delta v$, ${}^2\delta w$, ..., онда ће быти

1.) $\delta V = \int_a^b \delta U \, . \, du$, а

2.) $\delta U = (U_1)_v \, . \, \delta v + (U_1)_w \, . \, \delta w + (U_1)_x \, . \, \delta x + (U_1)_y \, . \, \delta y + (U_1)_z \, . \, \delta z$,

при чему є

$$\delta x = \delta(v_1)_u = \frac{d \, . \, \delta u}{du}, \; \delta y = \delta(v_2)_u = \frac{{}^2d \, . \, \delta u}{d^2u}, \text{ а } \delta z = \delta(w_1) = \frac{{}^2d . \delta w}{d^2u},$$

и зато ако ове вредности заменемо у предходећой едначини подъ 2.), и после узмемо то δU у прву едначину,

$$3.) \; \delta V = \int_a^b \Big[(U_1)_v \cdot \delta v + (U_1)_w \cdot \delta w + (U_1)_x \cdot \Big(\frac{d \, . \, \delta u}{du} \Big) + + (U_1)_y \cdot \Big(\frac{{}^2d . \delta v}{d^2u} \Big) + (U_1)_z \cdot \Big(\frac{d \, . \, \delta w}{du} \Big) \cdot du$$

и тай се интегралъ има узети по свему u, кое се налази у заграђеномъ чинителю одкривено или скривено.

Осимъ тога іошъ валя приметити, да се притомъ варіяціе одъ v и w сматраю као познате, и да по томе едначина 3.) показуе само зависность варіяціе δV одъ тій варіяція δv и δw.

Найпосле како бы се добыле и друге варіяціе одъ V изражене варіяціяма δv и δw, кадъ бы тако быле одъ потребе, разуме се сада већъ ямачно безъ нарочнога казиваня, каогодъ и да се изразъ за δV може по потреби разно преображавати.

В. Найобштія теорія о максимуму и минимуму.

§ 197.

Ако є V функція произвольны премевльиваца, коя или садржи или несадржи и диференціалны количника или интегр. кои одъ тій броєва, была она иначе познатогъ или іошъ непознатогъ вида; и ако далѣ $\underset{x}{V}$ преставля исту, на произвольный, али свагда познатый начинъ **променльивану** (варирану) функцію, т. є. оно у шта се претвара V, ако место єдногъ или место више одъ оны променльивы броєва, или найпосле место свію њи узмемо безкрайне редове, одъ кои свакій започинѣ съ дотичнимъ променльивцемъ: онда намъ дає $\underset{x}{V}$ са єданпутъ положнимъ, а другипутъ одречнимъ x, две оближнѣ вредности одъ V, коє представлямо обе редомъ

$$\underset{x}{V} = V + \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdot$$

Садъ да извидимо, подъ коимъ ће условама быти функціа V у односу на те нѣне оближнѣ вредности **максимумъ**, а подъ коима **минимумъ**, рећи ће одъ обе те вредности већа, или одъ обе маня.

§ 198.

Да ли є функція V већа или є маня одъ нѣны оближньи вредностій $\underset{x}{V}$, показуе разлика $\underset{x}{V} - V$. Како є пакъ та разлика

$$\underset{x}{V} - V = \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + {}^3\partial V . \frac{x^3}{3!} + \cdots ,$$

при предпостави, да є x изчезльиво малый брой, збогъ $\partial V . x >$ одъ сбира свію осталы нѣны чланова, при положномъ x положна, а при одречномъ x одречна, дакле оближнѣ вредности функціє V противнога знака, то иста функція V неможе быти ни одъ обе маня ни одъ обе већа, докле годъ ніє $\partial V . x = 0$, т. є. $\partial V = 0$, и по томе є

$$1.)\quad \partial V = 0$$

єдна услова, да бы функція V могла быти максимумъ или минимумъ.

Да ли є пакъ функція V поредъ те услове уобште максимумъ или минимумъ и понаособъ шта, зависи после очевидно одъ другогъ члана ${}^2\partial V . \frac{x^2}{2!}$, као тада највећега. и зато у обзиру знака разлике $\underset{x}{V} - V$ решавајућега. Но $\frac{x^2}{2!}$ є, было x положно или одречно, свагда положанъ брой, и зато знакъ разлике $\underset{x}{V} - V$ зависи тада само одъ знака ${}^2\partial V$.

Ако є дакле поредъ горнѣ услове ${}^2\partial V$ за нађене вредности изъ єдначине $\partial V = 0$ **положанъ**, онда є функція V одъ обе оближнѣ вредности $\underset{x}{V}$ маня, дакле **минимумъ**, а ако є напротивъ ${}^2\partial V$ **одречанъ**, онда є функція V одъ обе оближнѣ вредности $\underset{x}{V}$ већа, дакле **максимумъ**.

Покаже ли се поредъ $\partial V = 0$, са одтудъ нађенимъ вредностима, іошъ и ${}^2\partial V = 0$, онда V, изъ исты узрока као пређе, опетъ неможе быти ни максимумъ ни минимумъ, доклегодъ ніє съ онимъ истимъ вредностима уєдно и ${}^3\partial V$, и тадъ поредъ тога решава ${}^4\partial V$ на истый начинъ као пре ${}^2\partial V$, да ли є V при коіой одъ оны вредностій максимумъ или минимумъ. или ніє.

И т. д., и т. д.

§ 199.

Пошто є пакъ редъ $\underset{x}{V} - V = \partial V . x + {}^2\partial V . \frac{x^2}{2!} + \ldots .$ добывенъ помоћу маклореновогъ образца, то є могуће, да функціа V башъ за оне вредности пременљивы нѣны броева постаѥ максимумъ или минимумъ, при коима онай образацъ више непостои зато, што съ њима или ∂V, или ${}^2\partial V$, или ${}^3\partial V$, ... постаю вида $\frac{1}{0}$.

Непостане ли дакле притомъ веђъ $\partial V=\frac{1}{0}$, онда ѥ іошъ ѥднако

$$\underset{x}{V}-V=\partial V.x+\ldots\ldots,$$

и зато іошъ ѥднако $\partial V=0$ услова за максимумъ или минимумъ.

Но како ѥ могуђе, да вредности пременљивы броѥва, коѥ преводе V у максимумъ или минимумъ, башъ онима принадлеже, коѥ веђъ ∂V показую у виду $\frac{1}{0}$, то ѥ, да ій небы промашили, нуждно, поставити іошъ

$$2.)\quad \text{и}\quad \partial V=\frac{1}{0},\quad \text{т. ѥ.}\quad \frac{1}{\partial V}=0,$$

и изнађи іошъ и одтудъ вредности пременљивы броѥва; но за те морамо тадъ (зато што маклореновъ образацъ, па дакле и горньій редъ разлике $\underset{x}{V}-V$ издаѥ) разлику $\underset{x}{V}-V$ претворити другимъ (изъ I. кнь. познатимъ простимъ) путемъ у редъ, да бы могли извидити, меня ли она поредице съ x свой знакъ за нађене вредности пременљиваца, или га неменя. У првомъ случаю функція V за исте вредности ніѥ ни максимумъ ни минимумъ; у другомъ пакъ случаю бытђе V максимумъ, ако разлика $\underset{x}{V}-V$ остаѥ при оба x (и положномъ и одречномъ) одречна, а минимумъ, ако ѥ иста разлика при оба x положна.

§ 200.

Каошто видимо ово ѥ истраживанѣ подобно показаномъ у I. кньизи. Сва ѥ разлика само у томе, што овде вопросну функцію V по x пременюемо, а тамо диференціалимо, и што смо іой овде дали сасвимъ неограниченый смисао. Извести пакъ изъ предходећегъ сматраня начинъ, по комъ валя практично поступати при истраживаню максимума и минимума, излишно є по томе, што се по себи увиђа. Приметитћемо само іошъ, да при томъ истраживаню найтежій посао задає далѣ поступанѣ са єдначиномъ $\partial V = 0$ ради нѣнога решеня; збогъ чега, колико да бы ясніє увидили ту тешкоћу, толико и да бы се научили укланяти ю, сматратћемо іошъ слѣдуюће особите случаеве.

§ 201.

1.) Ако є $V = f(u)$ и притомъ $u = r + x$, онда є

$$\partial V = f_1(u) \cdot \partial u = f_1(u),$$

ерь є $du_x = d(r + x)_x = 1$, и зато $\partial u = 1$, а ${}^2\partial u = {}^3\partial u = \ldots = 0$.

У томъ дакле случаю прелази $\partial V = 0$ у $V_1 = 0$, а то є задатакъ §§ 62.—64., кога се решенѣ, каошто видимо, съ овимъ овде подпуно слаже.

2.) Ако є $V = f(u, v)$, онда є

$$\partial V = (V_1)_u \cdot \partial u + (V_1)_v \cdot \partial v.$$

Садъ ако су притомъ u и v међусобно независни броеви, онда и ∂u и ∂v єданъ одъ другогъ независе, и єдначина $\partial V = 0$ дели се на друге две

$$(V_1)_u = 0 \quad \text{и} \quad (V_1)_v = 0$$

по томе, што постои како при $\partial u = 0$ и свакомъ ∂v, тако и при $\partial v = 0$ и свакомъ ∂u.

И тако се ово подпуно слаже съ онимъ, што смо дознали на другій начинъ у § 70.

Зависе ли пакъ брoеви u и v еданъ одъ другога посредомъ едначине $\varphi(u, v) = 0$, онда е и $\partial\varphi(u, v) = 0$, т. е. и

$$\varphi_1(u, v)_u . du + \varphi_1(u, v)_v . dv = 0,$$

коя едначина садржи зависность између du и dv.

Истреблюющи dv изъ ове едначине и оне $\partial V = (V_1)_u . du + (V_1)_v . dv = 0$, добыямо нову

$$(V_1)_u . \varphi_1(u, v)_v - (V_1)_v . \varphi_1(u, v)_u = 0,$$

коя у спрези са $\varphi(u, v) = 0$ дае оне вредности одъ u и v, по коима у вопросномъ случаю функція V може быти максимумъ или минимумъ. Дали е пакъ V съ нњима доиста едно или друго, и кое? показаће своимъ знакомъ разлика $\underset{x}{V} - V$, чимъ се у нњой поставе нађене спреге одъ u и v. —

Међусобна зависность броева u и v може быти дата такођеръ и таковомъ едначиномъ $\varphi(u, v) = \alpha$, коя показуе, да е $\varphi(u, v)$ при свима спрегама броева u и v равна истомъ некомъ **сталномъ** броју α.

У томъ е случаю $\underset{x}{\varphi}(u, v) - \varphi(u, v) = 0$, и зато іошъ еднако $\partial\varphi(u, v) . x + \ldots = 0$, т. е. $\partial\varphi(u, v) = 0$ каогодъ у првомъ случаю овога §а; збогъ чега оно цепанћ едначине $\partial V = 0$ на $(V_1)_u = 0$ и $(V_1)_v = 0$ постои каогодъ тамо.

§ 202.

Ако е $V = f(u, v, z)$ и притомъ $z = \frac{dv}{du}$; и ако $\underset{x}{V}$ постае одтудъ измењиванћмъ броя v съ подпуномъ нћговомъ пременомъ по x, т. е. редомъ $v + \partial v . x + {}^2\partial v . \frac{x^2}{2!} + \ldots$, збогъ чега тадъ и место количника $\frac{dv}{du} = (v_1)_u$ морамо узети редъ $(v_1)_u + \frac{d . \partial v}{du} . x + \frac{{}^2d . \partial v}{d^2u} . \frac{x^2}{2!} + \ldots$: онда имамо

$$\partial V = (V_1)_v . \partial v + (V_1)_z . \frac{d\partial v}{du} \quad \ldots\ldots (1.$$

Садъ ако ће єдначина $\partial V = 0$ да постои за сваку произвольну функцію одъ u, коя бы се узела место ∂v, онда цепа се $\partial V = 0$ опетъ на друге две єдначине

$$2.)\quad (V_1)_v = 0 \quad \text{и} \quad (V_1)_z = 0$$

по томе, што ∂v може садржати какавъ сталный брой, коій се у $\frac{d\,.\,\partial v}{du}$ више неће находити, и што дакле вредности одъ ∂v и $\frac{d\,.\,\partial v}{du}$ остаю међу собомъ независне тако, да поредъ произвольногъ ∂v постои $\frac{d\,.\,\partial v}{du} = 0$, и узъ произвольногъ $\frac{d\,.\,\partial v}{du}$ опетъ $\partial v = 0$.

Ако ће пакъ єдначина $\partial V = 0$ да непостои при свакомъ ∂v, т. є. да функція V небуде максимумъ или минимумъ спрамъ сваке $\underset{x}{V}$, него само спрамъ оне, коя за сваку другу вредность одъ u постає друга, но така, да є

$$\text{или само}\quad \partial v = 0, \quad \text{а не и} \quad \frac{d\,.\,\partial v}{du} = 0,$$

$$\text{или само}\quad \frac{d\,.\,\partial v}{dv} = 0, \quad \text{а не и} \quad \partial v = 0:$$

онда єдначина $\partial V = 0$ прелази у првомъ случаю у

$$3.)\quad (V_1)_z = 0,$$

а у другомъ случаю у

$$4.)\quad (V_1)_v = 0.$$

§ 203.

Ако є $V = \int_a^b U du$, и притомъ U нека одъ оны у предходећемъ §у изброєны функція; и єсу ли далѣ оближнѣ вредности одъ V_1, спрамъ коихъ оно треба да буде максимумъ или минимумъ, овакове:

$$\underset{x}{V} = \int_a^b \underset{x}{U}\,.\,du,$$

гди $\underset{x}{U}$ представля оно што одъ функціє U быва, ако у ньой место $v, z, \ldots$ узмемо ньиове премене по x, т. є. $v + \partial v . x + {}^2\partial v . \frac{x^2}{2!} + \ldots$, и т. д., — онда налазимо

$$\partial V = \int_a^b \partial U . du$$

одъ прилике на онакавъ начинъ као у примеру § 196.

За болѣ обясненѣ овога и што ћемо іошъ рећи, задржимо функцію U као у споменутомъ примеру, т. є. нека є функція $U = f(u, v, w, r, s, t)$, а притомъ $v = \varphi(u)$, $w = \psi(u)$, $r = \frac{dv}{du}$, $s = \frac{{}^2dv}{d^2u}$, $t = \frac{dv}{du}$. Быт'ће

$$\partial V = \int_a^b \Big[(U_1)_v . \partial v + (U_1)_w . \partial w + (U_1)_r . \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big) + (U_1)_s . \Big(\frac{{}^2d . \partial v}{d^2u}\Big)$$

$$+ (U_1)_t . \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big)\Big] . du.$$

Да бы могли єдначину $\partial V = 0$ далѣ израђивати и разрешити, морамо найпре нѣнъ интегралъ почастнимъ интеграленѣмъ дотле преображавати, докъ неостану подъ интегралнимъ знакомъ само чланови съ простимъ ∂v, ∂w, $\ldots$, а нієданъ више са $\frac{d . \partial v}{du}$, $\frac{{}^2d\partial v}{d^2u}$, $\frac{d\partial w}{du}$, $\ldots$

Тако поступаюћи добыямо

$$\partial V = \Big\{\Big[(U_1)_r - \frac{d(U_1)_s}{du}\Big] . \partial v + (U_1)_s . \Big(\frac{d\partial v}{du}\Big) + (U_1)_t . \Big(\frac{d\partial w}{du}\Big)\Big\}_a^b$$

$$+ \int_a^b \Big\{\Big[(U_1)_v - \frac{d(U_1)_r}{du} + \frac{{}^2d(U_1)_s}{d^2u}\Big] . \partial v$$

$$+ \Big[(U_1)_w - \frac{d(U_1)_t}{du}\Big] \partial w\Big\} du,$$

и текъ сада можемо рећи, да єдначина $\partial V = 0$, коя за максимумъ и минимумъ треба да постои, уобште неможе постояти, ако ніє свакій одъ нѣна два члана за себе $= 0$, по томе, што првый чланъ несадржи више u (єръ се место u већъ узело a и b), а у другомъ члану тога броя іошъ има.

Єдначина $\partial V = 0$ дакле дели се на друге две, одъ коихъ се свака опетъ, по особитимъ околностима свакогъ особитогъ задатка, наново цепа и далѣ.

Одъ другогъ члана добыяю се диференціалне єдначине, кое се іошъ мораю интегралити. Те се єдначине зову **обште єдначине** максимума и минимума.

Єдначине пакъ одъ првогъ члана зову се **граничне єдначине**, и служе узъ друге услове задатка за изтраживанѣ сталны броєва, кои се увлаче интеграленѣмъ оны првы.

§ 204.

За болѣ увиђанѣ овы потврђеня о єдначини $\partial V = 0$ у вопросномъ случаю, узмимо єданъ примеръ. *)

Нека є функція

$$V = \int_a^b U du = \int_a^b du \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} = \int_a^b du \cdot \sqrt{1 + (v_1)_u^2} \,.$$

Ту є $U = \sqrt{1 + (v_1)_u^2}$, дакле $\partial U = \frac{(v_1)_u}{\sqrt{1 + (v_1)_u^2}} \cdot \left(\frac{d\partial v}{du}\right)$, и зато

$$\partial V = \int_a^b \partial U \,.\, du \,,$$

или ако почастно интегралимо по образцу $\int y dz = yz - \int z dy$, ставляюћи у истоме $y = \frac{(v_1)_u}{\sqrt{1 + (v_1)_u^2}}$ а $dz = \left(\frac{d\partial v}{du}\right) du = d\partial v$,

---

*) Примера за само истраживанѣ максимума и минимума како за предстоећій случай, тако и за последньій у § 202. и оне што ћемо іошъ споменути у слѣдуюћимъ §§ма, иматћемо доцніє у аналитичной геометріи.

$$\partial V = \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \partial v\right]_a^b - \int_a^b y_1 \cdot \partial v \cdot du$$

$$= \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \partial v\right]_{u=b} - \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} \cdot \partial v\right]_{u=a} - \int_a^b y_1 \partial v \,.\, du,$$

при чему є $y_1 = \frac{dy}{du}$.

Єдначина одъ прва два одкривена члана дає збогъ независногъ ∂v съ $u = b$ одъ ∂v съ $u = a$ граничне єдначине

$$\left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right]_{u=b} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right]_{u=a} = 0,$$

а обе ове

$$(v_1)_u = 0.$$

Другій пакъ чланъ дає обшту єдначину максимума и минимума

$$d\left[\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}}\right] = 0,$$ дакле ако интегралимо

$$\frac{(v_1)_u}{\sqrt{1+(v_1)_u^2}} = \text{сталномъ некомъ брою } c.$$

Како пакъ овай количникъ неможе быти иначе сталанъ, него само ако му є и броитель и именитель сталанъ, то слѣдує

$$(v_1)_u = \frac{dv}{du} = C, \text{ дакле}$$

$$dv = Cdu,$$

а ако ову єдначину интегралимо

$$v = Cu + \mathfrak{C}.$$

Но пређе нађосмо да є $(v_1)_u = 0$. Слѣдує дакле $C = 0$, и зато

$$v = \mathfrak{C}.$$

§ 205.

Ако є пакъ функція V као у § 203., т. є. $V=\int_a^b Udu$, али притомъ нѣне оближнѣ вредности, спрамъ коихъ она треба да буде максимумъ или минимумъ, оваковe

$$\underset{x}{V}=\int_{\underset{x}{a}}^{\underset{x}{b}}\underset{x}{U}du,$$

онда по приметби § 182. састои се ∂V осимъ чланова каошто смо ій видили у горе споменутомъ §у, іошъ и изъ чланова

$$\underset{u=b}{U}\,.\,\partial b-\underset{u=a}{U}\,.\,\partial a.$$

Пошто пакъ ови чланови принадлеже онимъ одкривенима, т. є. онима изванъ интегралнога знака; то остає обшта єдначина одъ $\partial V=o$ сасвимъ онако као у § 203., напротивъ гранична єдначина садржатѣе іошъ чланове $\underset{u=b}{U}\,.\,\partial b-\underset{u=a}{U}\,.\,\partial a.$

§ 206.

Найпосле ако функція U садржи u, v и w, и іошъ диференціалны количника одъ v и w по u, произвольно до кога реда, па є опетъ

$$V=\int_a^b Udu,\quad \text{а}\quad \underset{x}{V}=\int_a^b\underset{x}{U}du,$$

и притомъ v и w єдно одъ другога зависно по диференціалной єдначини

$$W=\varphi\,[u, v, w, (v_1)_u, (w_1)_u, (v_2)_u, (w_2)_u, \ldots]=o:$$

онда є пре свега

$$1.)\quad \partial V = \int_a^b \Big[(U_1)_v \cdot \partial v + (U_1)_w \cdot \partial w + (U_1)_{v_1} \cdot \left(\frac{d\partial v}{du}\right)$$

$$+ (U_1)_{w_1} \cdot \left(\frac{d\partial w}{du}\right) + (U_1)_{v_1} \cdot \left(\frac{{}^2d\partial v}{d^2u}\right)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \Big] \cdot du + \text{алге-}$$

брайскій сбиръ ослобођены одъ интегралногъ знака чланова.

И садъ треба изъ єдначине $\partial V = 0$, пошто збогъ $W = 0$ w одъ v (или обратно), па дакле и ∂w одъ ∂v зависи, да истребимо ∂w, да бы добыли ону єдначину, коя се текъ, поводомъ произвольнога ∂v на друге цепа.

У име тога имамо изъ $W = 0$ єдначину

$$(W_1)_u \cdot \partial v + (W_1)_w \cdot \partial w + (W_1)_{v_1} \cdot \left(\frac{d\partial v}{du}\right) + \dots = 0,$$

морамо пакъ за удействованѣ истребльиваня употребити такозваный **начинъ мложителя**, коій ніє никаквъ другій но познатый изъ алгебре Безуовъ начинъ, съ изменама коє ћемо одма видити.

Мложимо найпре єдначину

$$2.)\quad W = 0$$

съ некомъ іошъ непознатомъ функціомъ r одъ u, додаємо rW, коє є $= 0$, функціи U, те образуемо $U + rW$, и поставлямо после овай сбиръ место U у изрразу за ∂V тако да имамо

$$\partial V = \int_a^b (\partial U + r . \partial W) . du.$$

Затимъ определюємо функцію r тако, да у ∂V сачинитель одъ ∂w буде $= 0$, дакле изъ єдначине

$$3.)\quad \frac{d\,(U + rW)}{dw} - \frac{d\left[\frac{d\,(U + rW)}{d\,w_1}\right]}{du} + \dots = 0.$$

Ова є єдначина у обзиру на r диференціална, коя, кадъ бы v и w были познати брови, могла бы се интегралити и дала бы тако r поредъ некогъ броя произволны сталника'.

Ове сталнике можемо себи представити тако опредѣлѣне, да и одъ одкривены чланова у ∂V сви они одпадаю, кои су снабдевени са $\underset{a}{\partial w}$, $\underset{b}{\partial w}$, $\underset{a}{\frac{d\partial w}{du}}$, $\underset{b}{\frac{d\partial w}{du}}$, ..., дакле тако, да сачинителѣ тій чланова ставимо $= 0$, и те єдначине употребимо за определьиванѣ функціє r.

Пошто се пакъ тада у ∂V само іошъ произвольно ∂v налази, то ће се изъ єдначине $\partial V = 0$ добыти поредъ граничны єдначина (како испадну) као **обшта** єдначина

$$4)\quad \frac{d(U+rW)}{dv} - \frac{d\left[\dfrac{d(U+sW)}{dv_1}\right.}{du} + \ldots = 0,$$

и єдначине 2., 3. и 4. єсу три диференціалне єдначине по v, w и r, коє интегралѣне даю ове функціє одъ u заєдно съ увлаченимъ се сталницима.

Найпосле ове сталнике налазимо изъ свію осталы єдначина', пошто се у ньима узму место u границе b и a.

§ 207.

Овай описаный начинъ може се лако распрострети и на сложеніє случаєве, гди V осимъ v и w садржи іошъ и друге променьивце y, z, ..., и гди су поредъ $W = 0$ задате іошъ и друге условне єдначине $X = 0$, $Y = 0$, ... У таkомъ случаю треба у ∂V узети $U + rW + sX + tY + \ldots$ место U.

Истый начинъ употребит'ћемо найпосле и у случаю, гди оближнѣ функціє одъ V треба да буду $\underset{x}{V} = \int_{\underset{x}{a}}^{\overset{b}{x}} \underset{x}{U}\, du$

тако, да границе a и b нису задате, него се мораю изнаћи такове, да V постане максимумъ или минимумъ.

Завршуюћи овай предметъ (и съ ньимъ целу ову II. часть) примѣћавамо іошъ, да се сви они задатци зову **изопериметрійски**, гдигодъ V ніє основна функція него некій интегралъ, или є такова функція, у коіой се появлює єданъ или више интеграла.