НАЧЕЛА

ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

У ТРИ ЧАСТИ.

израдіо

понайпрече за потребу артилерійске школе К. С.,

ЕМИЛІЯНЪ ІОСИМОВИЋЪ,

при истой школи выше математике, механике и выше геодезіе професоръ,
школске комисіе и дружства србске словесности редовный чланъ.

У БЕОГРАДУ.
У Кньигопечатньи Княжества Србскогъ.
1858.

Strebe unermüdet stets nach Erweiterung deiner Kenntnisse, und du erstrebst damit neben eigener Befriedigung und hohem geistigen Genusse, noch das erhebende Gefühl — nützlich geworden zu sein.

E. J.

Fleiss ist mehr, als Genie, und Tausende, die sich mit diesem den Hals brechen würden, ersteigen mit jenem die Höhe glücklich, die sie sich vorgesetzt haben.

Justus Möser.

Предговоръ.

Велико благоволенћ съ коимъ є высокославно попечительство просвете пре три године примило мою тригонометрію, утврдило ме є у тамо изявлћной моіой намери, да сиречь за школску потребу израдимъ сасвимъ у кратко и остале части математике, коє се кодъ насъ предаю, но о коима на нашемъ єзику до сада іошъ никаковы кньига' нема, — и я самь се тако по могућству пожуріо, те самь за исту потребу и на истый начинъ израдіо одъ то доба ову **прву часть выше анализе.**

Ово моє ново дѣло предусрело є высоко наше правительство опетъ съ толикомъ готовости, само какова є кадра, да и мене и остале моє састручнике на такавъ, иначе безъ сумнћ труданъ посао и за далћ подстрекава.

Тиме посведочило ми є исто наше правительство наново, не само како мой трудъ уважава, но што є претежніє: да велику важность математичны наука подпуно сваћа, и колико му є до тога стало, да се исте и кодъ насъ већма распростру.

Я дакле нечинимъ ништа друго но вршимъ мою дужность, ако му овде, као найстаріи заступникъ тій наука, а у име саме ствари и нћногъ већъ виђенога напредка, пре свега на толикомъ благоволенію, найтоплію мою благодарность у понизности изявимъ.

Садъ о самой моіомъ кньизи.

Моя выша анализа состоятће се изъ три части. У овой првой изложіо самъ теорію функція у четири кньиге, одъ кои прва дѣйствує о функціяма уобште, друга садржи теорію выши єдначина', трећа безкрайне редове, а четврта и последня рачунъ съ крайнимъ разликама и сбировима функція. — Друга часть садржатће найнуждніє одъ инфинитезималногъ (диференціалногъ, интегралногъ и варіаціоногъ) рачуна, а трећа аналитичну геометрію у равнини и у простору; сви ти предмети пакъ бытће држани крозъ све части у таковой краткоћи, као што ю определює за ньи одређено време, съ непрестанимъ обзиромъ на саданѣ и предвиђаюће се будуће потребе оне школе, за кою ій израђуємъ.

Пре света има ово моє дѣло служити као ручна кньига при моме предаваню у артилерійской школи; но моћи ће се съ ньимъ, кодъ искусногa професора, врло добро послужити и слушательи нашега лицея, кадъ се т. є. и у той школи буде предавала выша математика.

Я самь се овде трудіо — и учинитћу то у слѣдуюћимъ частима, — да моимъ ученицима све оно покажемъ, чимъ бы не само за дальій математичный штудіюмь у школи и изванъ нѣ довольно были спремлѣни, но уєдно ту већъ толико научили, да после, поредъ мало само практике, могу пуно право имати на име вешты и поузданы, дакле употребителны техника, не само воєны, но у пространомъ смыслу.

Више нека се одъ те моє кньиге нетражи; єсамь ли пакъ и саму ту намеру постигао? оставлямъ суду безпристрастны вештака, и напоминѣмъ само іошъ, како самь я, за известніє нѣно постиженѣ, не само свакой теореми штогодъ самь могао више обяснаваюћи примера придао, и где є было нуждно єданъ истый примеръ свима вопросима подвргавао, но поредъ тога іошъ и гдієгодъ было уместно, могъ любопытногъ ученика на друга обширна дѣла упутіо. —

Внимателный и искусный читатель наћиће у овой првой части доста предмета и другимъ редомъ, и на другій начинъ изложене, но у другимъ — наравно странимъ — аукторима. То я нисамь урадіо толико изъ тежнѣ за некимъ оригиналитетомъ, колико збогъ тога, єръ ми є само на тай начинъ было могуће, да у овако теснимъ границама слѣдствено, и безъ губитка у разговетности, све оно кажемъ, што пређе изречена цѣль школе, за кою пишемъ, непремено изискуе.

Те предмете овде по имену све изброяти ніє нуждно зато, єръ вештакъ ће ій самъ по себи приметити, а невештака цела та створь незанима. Споменут'ћу дакле само два, цело решенѣ бройны єдначина' и доказъ полиномнога правила, одъ кои є последньій сасвимъ оригиналанъ и овде првыйпутъ саобштенъ.

Млоге друге напротивъ предмете задржао самь готово сасвимъ онако, каошто самь ій нашао у найзнатніи аналитика саданѣгъ и пређашньи векова. То самь учиніо са свима онима, гди већа краткоћа ніє была могућа.

Да ли пакъ по свему тому ова моя кньига заслужуе име оригиналнога дѣла, и у колико? о томе наравно само они могу судити, коима є литература выше анализе, и уобште математике сасвимъ добро позната, и я само ньиовъ судъ у томъ смотреню и тражимъ. Други увидит'ће безъ сумнѣ сами, да на такову пресуду свакояко нису позвати, па се у то нећею ни пачати.

На Миольданъ 1857.

Іосимовићъ.

НАЧЕЛА' ВЫШЕ МАТЕМАТИКЕ

I. ЧАСТЬ.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЯ

У ЧЕТИРИ КЊИГЕ.

Eines Function des Anderen, — nichts als lauter Function! — Doch du wirst Herr sein aller dieser Fuctionen, und reichlich geniessen den Lohn jeder Function, — ist dein Geist nur in steter Function.

Садржай.

Страна.

Кньига III.

Кньига IV.

Погрешке.

На стр.	у врсти		треба	место
3	22	одозго	$2y\, tang\, \frac{x}{2} - 1 =$	$2y\, tang\, \frac{x}{2} =$
„	2	„	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$	$\frac{b^2}{y^2} + \frac{x^2}{a^2}$
6.	13.	одоздо	γx^2	γx
3.	12.	одозго	$c = \gamma$	$c - \gamma$
„	7.	одоздо	$a_\mu\, x^{n-s}$	a_μ^{n-v}
9.	9.	„	$\frac{h^2}{2\,!}$ и $\frac{h^3}{3\,!}$	$\frac{h_2}{2!}$ и $\frac{h_3}{3!}$
11.	11.	одозго	$\frac{h^a}{\alpha!}$	$ax\, \frac{h^a}{\alpha!}$
14.	12.	„	$v\,.$	$v\,,$
„	10.	одоздо	$\alpha_0 = a_0^v$	$a_0 = a_0^v$
„	7.	„	α_1	α_0
15.	2.	„	$n\, f(v)\, \frac{a_0^{\varphi(v)}}{a_0^v}\, a_1^{\psi(v)} =$ $= f(nv)\, \frac{a_0^{\varphi(nv)}}{a_0^{nv}}\, a_1^{\psi(nv)}$	онога што стои
17.	13.	„	$[v\,(v-1) a_0^{v-2}\, a_1^2$	$[v\,(v-1)\, a_0^{v-2}\, a_1$
21.	4.	одозго	(*limes*)	— *limes* —
26.	4.	„	корена	корене
27.	3.	„	полииома	полиноме
28.	4.	„	$b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3}$	$b_1 x^{n-2}\, b_2 x^{n-3}$
31.	5.	„	слѣдій	мена
„	13.	„	$x - \alpha$	$x - x$
32.	4.	„	$- b_{2n+1} = 0$	$- b_{3n+1} = 0$
33.	15.	одоздо	дакле по §.	дакле §
36.	11.	„	треба ;	треба сведена є ;
37.	7.	„	$\frac{1}{3}\, x$	$\frac{2}{3}\, x$
40.	11.	одозго	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[-n - \sqrt{n^2 + \frac{4}{27} m^3}\right]}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left[-n + \sqrt{n^2 + \frac{4}{27} m^3}\right]}$

на стр.	у врсти		треба	место
41.	12.	одоздо	$\sqrt[3]{p}+m^2\sqrt[3]{q}$	$\sqrt[3]{p}+m\sqrt[3]{q}$
„	6.	„	$x_3=m^2\sqrt[3]{p}+m\sqrt[3]{q}$	$x_3={}^{m2}\sqrt[3]{p}+m\sqrt[3]{q}$
43.	3.	одозго	и $x=\frac{-\alpha-\sqrt{4m-3\alpha^2}}{2}$	и $x=\frac{-\alpha+\sqrt{4m-3\alpha^2}}{2}$
44	6.	одоздо	$\sqrt{\frac{m}{3}}$.	$\sqrt[3]{\frac{m^3}{27}}$
„	2.	„	$\frac{tang^2\,\varepsilon-1}{tang\,\varepsilon}=$	$\frac{tang\,\varepsilon-1}{tang\,\varepsilon}=$
47.	10.	„	$q=-\cdot 4142$	$q=\cdot 4142$
50.	16.	одозго	$v_1\,,\,v_2$	$v_1\ v_2$
„	12.	одоздо	$v_2+v_3+2\sqrt{v_1 v_2}$	$v_2+2\sqrt{v_1 v_1}$
„	11.	„	§. 37.	§. 38.
51.	„	одозго	$v_1\,,\,v_2$	$v_1\ v_2$
51.	11.	„	$-\gamma=\frac{n^2}{64}$	$-\gamma=-\frac{n^2}{64}$
54.	5.	„	§. 37.	§. 38.
„	12.	одоздо	$x_3=$	$x^3=$
„	10.	„	$z_1=$	$z=$
„	7.	„	$z_3=-1+$	$z_3=-1-$
„	6.	„	$z_4=-1-$	$z^4=1-$
55.	4.	одозго	$y_4=1-$	$y_4=1+$
„	6.	одоздо	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(p-r)}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}(p+r)}$
58.	10.	„	$b_n=0$	b_n-0
60.	9.	„	$-3x^2+x+1=0$	$-3x^2+1=0$
„	7.	„	$-2=0$	$-2\ 0$
64.	14.	одозго	за $x=-\infty$	за $x=-$ и $+\infty$
„	„	„	$x=0$, а одъ мена'за $x=0$, мене за $x=\infty$;	$x=0$;
65.	10.	одозго	§. 36.	§. 37.
„	14.	„	§. 60.	§. 59.
66.	5.	одоздо	$V_1, V_2, V_3, \ldots$	$V_2, V_2, V_3, \ldots$
70.	4.	одозго	§. 39.	§. 40.
„	1.	одоздо	§. 60.	§. 59.
72.	5.	„	§. 82.	§. 80.
73.	11.	одозго	§. 60.	§. 59.
„	4.	одоздо	$-1+1=0$;	$1+1=0$;
80.	7.	одозго	$=-R_1$	$=R_1$
„	8.	„	$=-R_2$	$=R_2$

на стр.	у врсти	треба	место
80.	9. одоздо	$=-R_1$	$=R_1$
,,	8. ,,	$+\dots+Uv\alpha^{\nu-1})=-R_2$	$\pm\dots+Uv\alpha^{\nu-1})=Rr'$
85.	16. одозго	$y=-\sqrt[3]{4}$	$y=\sqrt[3]{4}$
86.	11. одоздо	предпредпоследный	предпоследный
91.	13. ,,	$1+2\sqrt{-1}$ и $1-2\sqrt{-1}$	$1+\sqrt{-2}$ и $1-\sqrt{-2}$
,,	12. ,,	$(x-1-2\sqrt{1})\times$ $\times(x-1+2\sqrt{1})$	$(x-1-\sqrt{2})\times$ $\times(x-1+\sqrt{2})$
91.	4. одоздо	p_2+q_2x	p_2+q_3x
94.	6. ,,	$c_3(1-x)(2+x)$	$c_3(1-x)(1+x)$
95.	16. ,,	$1+2\sqrt{-1}$ и $1-2\sqrt{-1}$	$1+\sqrt{-2}$ и $1-\sqrt{-2}$
96.	15. ,,	представляюћи	предпоставляюћи
103.	10. ,,	$=v_n\,x$	$=v_n$
109.	4. одозго	$-\frac{x^7}{7!}$	$-\frac{x^4}{7!}$
111.	10 одоздо	$1=$	$1+$
122.	7. ,,	$-2x^3$	$-2x^2$
139.	14. ,,	$a=e^{la}$, дакле $a^x=e^{xla}$	$a=l^{la}$, дакле $a^x=l^{xla}$
143.	7. ,,	бронтеля и именителя овогъ	бронтеля овогъ
157.	3. ,,	$\sin n(x\pm 2r\pi)$	$\sin n(x\pm 1r\pi)$
183.	1. ,,	$\Delta f(x+\Delta x)$	$\Delta f(x+\Delta x$
189.	5. одозго	$\frac{1}{3x^3}\Delta^3x-$	$\frac{1}{3x^3}\Delta^3-$
,,	11. ,,	$\frac{\Delta^5x}{5!}$	$\frac{\Delta^2x}{5!}$
,,	3. одоздо	Δ^4x	Δ^3x
,,	4. ,,	$-\frac{1}{2!}\cos x\,.\,\Delta^2x+$ $+\frac{1}{3!}\sin x\,\Delta^3x$	$-\frac{1}{2!}\cos\Delta^2+$ $+\frac{1}{3!}\sin x\Delta^3$
,,	7. ,,	$\sin x\ \sin\Delta x)$	$\sin x\ \sin\Delta x$
193.	1. одоздо	${}^{n}\Delta\, x^{m\lfloor -\Delta x}$	${}^{n}\Delta\, x^{m\lfloor \Delta x}$
194.	1. одозго	${}^{2}\Delta\frac{1}{x^{m\lfloor \Delta x}}$	${}^{2}\Delta\frac{1}{x^{m+2\lfloor \Delta x}}$
,,	8. ,,	${}^{n}\Delta_1\frac{1}{x^{m\lfloor 1}}$	${}^{n}\Delta\frac{1}{x^{m\lfloor 1}}$
,,	7. одоздо	${}^{n}\Delta_1\frac{1}{x^{m\lfloor -1}}$	${}^{n}\Delta\frac{1}{x^{m\lfloor -1}}$

на стр.	у врсти	треба	место
195.	12. одозго	$\Delta f(x)=f(x_1)-f(x)$	$\Delta f(x)=(x)=f(x_1)-f(x)$
„	3. одоздо	$f(x+\Delta x)]-$	$f(x+\Delta x)-$
„	7. „	осимъ стоећега іошъ $=[f(x+2\Delta x+{}^2\Delta x)-f(x+\Delta x)]-\Delta f(x)$	
197.	5. „	$f(x, y)$	$f x, y)$
198.	8. „	$\Delta\binom{a}{2}$	$\Delta\binom{\alpha}{2}$
„	9. „	$\Delta\binom{\alpha}{1}$	$\Delta\binom{a}{1}$
„	10. „	$\Delta\binom{a}{1}$	$\Delta\binom{\alpha}{2}$
199.	6. одозго	функцію	функціе
„	7. „	$-f(x, y)$, т. є.	$-f(x, y)$,
201.	2. одоздо	$2\left(\underset{2x, y}{{}^3\Delta V}+\underset{x, 2y}{{}^3\Delta V}\right)$	$\left(\underset{2x, y}{{}^3\Delta V}+\underset{x, 2y}{{}^3\Delta V}\right)$
202.	1. „	$\Delta V=\frac{y\Delta x^2-x^2\Delta y}{y(y+\Delta y)}$	$\Delta V=\frac{y\Delta^2 x-x^2\Delta y}{y(y+\Delta y)}$
„	8. „	$\Delta\frac{x}{y}=$	$\Delta=\frac{x}{y}=$
„	9. „	$\Delta V=\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-$	$\Delta V=\frac{x+\Delta y}{y+\Delta x}-$
203.	озго у именителю другогъ израза одъ ${}^2\Delta V$	$(2y\,\Delta y+2\Delta^2 y)$	$(2y\,\Delta y+\Delta^2 y)$
„	озго у именителю последнѣгъ израза за ${}^2\Delta V$	$y(y+\Delta y)(y+2\Delta y)$	$y(+\Delta y)(y+2\Delta y)$
203.	1. одоздо	треба $\underset{x, y}{{}^2\Delta V}=-\frac{2x\,\Delta x\,\Delta y+\Delta^2 x\,\Delta y}{y^2+y\,\Delta y}$	место $\underset{x, y}{{}^2\Delta V}=-\frac{2x\,\Delta x\,\Delta y+{}^2\Delta x\,.\,\Delta x}{y^2+y\,\Delta y}$
203.	9. одоздо	$\underset{y}{\Delta V}=-\frac{x^2\Delta y}{y(y+\Delta y)}$	$\underset{y}{\Delta V}=\frac{x^2\,\Delta y}{y(y+\Delta y)}$
204.	1. одозго	$2x^2$	2^2x
208.	14. „	$nx^{n-1}\,.\,\Delta x$	$nx^{n-2}\,.\,\Delta x$
„	„ „	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-2}\,.\,\Delta^3 x+$	место $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-2}+$
210.	9. одоздо	$+B_9$	$-B_9$
212.	1. и 2. „	$\psi(x, y)$	$\varphi(x, y)$

на стр.	у врсти	треба	место
212.	5. одоздо	$^{n}\Sigma$	$^{2}\Sigma$
”	6. ”	$\varphi(x, y)$	$\varphi(x, y$
”	14. ”	$C_{n}, n.$	$C_{n} \; n,$
213.	1. одозго	другипутъ по y	другипутъ y
”	12. одоздо	$^{n}\sum\limits_{ny} \varphi(x)$	$^{n}\Sigma \varphi(y)$
”	13. ”	$^{m}\Sigma f(x) + \psi(y)$	$^{m}\Sigma f(x) + \psi)$
215.	9. одозго	$-\frac{m\Delta x}{x^{m+1\lfloor\Delta x}}$	$-\frac{m\Delta x}{m^{m+1\lfloor\Delta x}}$
”	10. ”	$\Sigma\frac{1}{x^{m+1\lfloor\Delta x}}$	$\Sigma\frac{1}{m^{m+1\lfloor\Delta x}}$
”	12. ”	$-\frac{1}{(m-1)\Delta x . x^{m-1\lfloor\Delta x}}$	$-\frac{1}{(m-1)x^{m-1\lfloor\Delta x}}$
”	13. ”	$\frac{m\Delta x}{x^{m+1\lfloor-\Delta x}}$	$\frac{m\Delta x}{x^{m\lfloor-\Delta x}}$
216.	1. ”	$\frac{\Sigma a^{x}}{a^{\Delta x}-1} + \Sigma C$	$\frac{\Sigma a^{x}}{a^{\Delta x}-1} \Sigma C$
”	2. ”	$\frac{a^{x}}{(a^{\Delta x}-1)^{2}}$	$\frac{1}{(a^{\Delta x}-1)^{2}}$
”	3. ”	$\Sigma\frac{a^{x}}{(a^{\Delta x}-1)^{2}}$	$\Sigma\frac{1}{(a^{\Delta x}-1)^{2}}$
”	3. одоздо	$(n+\frac{1}{2})\Delta x$	$(n+1)\Delta x$
”	6. ”	dto	dto
217.	6. одозго	$(m+n)^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x$	$(m+n)^{n\lfloor-1} . \Delta x$
”	9. ”	$(m+n)^{n\lfloor-1}$	$m^{n\lfloor-1}$
”	10. ”	$m^{n\lfloor1}$	$m^{n\lfloor-1}$
”	3. одоздо	$^{n}\Sigma\left(\frac{x}{\underset{m-n}{\Delta x}}\right)$	$^{n}\Sigma\left(\frac{x}{\underset{m-x}{\Delta x}}\right)$
”	6. ”	$m^{n\lfloor1}$	$m^{n\lfloor-1}$
218.	8. ”	$\Sigma y^{2} = \underline{x+y^{3}-\dots}$	$\Sigma y^{2} \; \underline{x+y^{5}-\dots}$
219.	6. одозго	$[\Sigma f(y) = \psi(y])$	$f(y)$
”	9. ”	$\psi(y)$	$f(y)$
”	1. одоздо	$-\frac{\Delta x . \Delta y}{4}$	$+\frac{\Delta x . \Delta y}{4}$
”	2. ”	$^{2}\sum\limits_{x,y} y$	$^{2}\Sigma y$

на стр.	у врсти	треба	
221.	3. одозго	$24\Delta^4x\,.\,x+(36\Delta^4x-48\Delta^3x)$	место $24\Delta^4x$
„	7. „	$24x-12$	$24x=12$
223.	2. одоздо	да изостане	
226.	8. „	постављајући	остављајући
227.	5. „	$D''_2\,[x^3-$	$D''_2\,[x_3-$
„	7. одозго	α	a
230.	5. одоздо	$\theta''_2=\dfrac{\theta'_3-\theta'_2}{x_{n+2}-x_{n-1}}$	$\theta''_2=\dfrac{\theta'_3-\theta'_2}{x_{n-2}-x_{n-1}}$
„	7. „	$x_{n-2}-x_{n+1}$	$x_{n-2}-X_{n+1}$
234.	11. „	$v_{m+(n-2)}$	$v_{m+(m-2)}$
„	1. „	$(x+2\Delta x)$	$(x+2\Delta x$
236.	3. „	$+\binom{5}{4}$	$-\binom{5}{4}$
237.	2. одозго	$\overset{22}{\cdot 05}$	$\overset{22}{\cdot 05}$
239.	10. „	$x-\dfrac{x^3}{3!}$	$-\dfrac{x^3}{3!}$
„	9. „	$v_0+\Delta v_0+{}^2\Delta v_0$	$v_1+\Delta v_0+{}^2\Delta v_0$
240.	2. одозго	$+\,.\,.\,.\,.\,.\,],$	$+\,.\,.\,.\,.\,.\,;$
244.	3. „	$\dfrac{a^x}{a^{\Delta x}-1}$	$\dfrac{a}{a^{\Delta x}-1}$
„	4. одоздо	$\sin\frac{1}{2}\Delta x$	$2\sin\frac{1}{2}\Delta x$
246.	3. „	$\Sigma_1 f(x)=\frac{3}{2}($	$\Sigma_1 f(x)\frac{3}{2}($
247.	3. одозго	$n^{3\lfloor -1}$	$n^{2\lfloor -1}$
249.	4. „	$(x-2)^{m-1\lfloor\delta}$	$(x-1)^{m\lfloor\delta}$
„	8. „	$n-1$	$n+1$
„	3. одоздо	Lacroix	Lakroix.

КНЬИГА I.

О ФУНКЦІЯМА УОБШТЕ.

I. Уводна понятія.

§ 1.

У вышой анализи употребляваю се двояки само броєви, стални и пременльиви. **Стални** зову се они, кои у предузетомъ каквомъ съ ньима рачуну задржаваю до края ону єдну само вредность, коя имъ се подметнула у почетку; **пременльиви** су напротивъ они, кои притомъ више вредностій имати могу. За разлику єдны одъ други' заменюю се стални броєви првимъ, а пременльиви последньимъ писменима математичне азбуке.

§ 2.

Свакій аналитичный изразъ представля некій брой. Докъ су сви у таковомъ изразу налазећи се броєви стални, дотле є и вредность ньиме представлѣногъ броя само єдна и стална; чимъ є пакъ єданъ само одъ ньи пременльивъ, одма є и вредность целога израза, дакле и вредность ньимъ представлѣнога броя такова, то ће рећи за сваку другу вредность оногъ пременльивогъ броя друга. Зато

свакій онай брой, кои своіомъ вредности ма каквымъ начиномъ зависи одъ каквогъ пременльивогъ броя, зове се функція или дѣйство овога.

Понятіє дакле функціє неразлучно є одъ понятія пременльивогъ броя.

Све дояко предаване части математике садрже довольно примера' таковы зависны броева или функція; но зато опетъ да наведемо и овде кои.

Означуюћи са h пречницу, съ y єдну управницу правоуглогъ троугла, а съ x истой управници наспрамный угалъ, имамо тригонометріомъ

$y=h\sin x$, т. є. управница y функція є угла x. Или ако ону другу управницу сматрамо као пременљиву и представимо є са z, быт'ће прва по Питагоровомъ правилу (геометрія) као функція ове

$$y=\sqrt{h^2-z^2}$$

§ 3.

Да є брой y нека функція броя x, т. є. да y некимъ начиномъ одъ x зависи, означує се овако: $y=f(x)$, или $y=F(x)$, и под. . Како су пакъ у свакомъ таковомъ изразу два пременљива броя и дакле єданъ одъ другогъ разликовати треба, то се притомъ y зове **зависно**, а x **независно** пременљивый брой.

Ако y зависи не само одъ пременљивога x, но и одъ таквога z: онда пишемо $y=f(x,z)$, при чему броєви x и z могу быти иначе єданъ одъ другога или зависни или независни.

Значенѣ израза $v=f(x,y,z)$ и подобны, разуме се садъ по себи.

§ 4.

Функціє дате у пређе поменутомъ виду, т. є. у виду већъ разрешене єдначине, зову се **одкривене** (експлиците); єръ се одма познає, кои одъ пременљивы броєва и како зависи одъ други. Функціє напротивъ показане у виду іошъ неразрешене єдначине $f(x,y)=0$, гди се дакле іошъ невиди кои одъ пременљивы броєва' сматра се као одъ други' зависанъ: зову се **скривене** (имплиците).

Примери § 2. єсу уєдно и примери за одкривене функціє, као примери пакъ скривены функція могу служити слѣдуюће єдначине.

1.) $\left(2y+tang\,\frac{x}{2}\right)tang\,\frac{x}{2}-1=0$, или $2y\,tang\,\frac{x}{2}=tang^2\,\frac{x}{2}$

2.) $\frac{b^2}{y^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}-1=0$, или $a^2y^2+b^2x^2=a^2\,b^2$

3.) $\frac{y^2}{x}=a-x$, или $\frac{y}{x}-\frac{a-x}{y}=0$.

§ 5.

Функція, коя при постепеномъ премењиваню вредности променљивога броя и сама свою вредность постепено меня, зове се **наставна** (континуална); функція напротивъ, коя притомъ свою вредность скокомъ меня, зове се **прекидна** (дисконтинуална).

За болѣ сваћанѣ важногъ овогъ понятія, узмимо да є вредность неке функціє $y=f(x)$ за $x=\alpha$, $y=a$, — а за $x=\beta$, $y=b$, и да x одъ α до β редомъ све међу овыма лежеће бройне вредности прима. Ако притомъ функція y одъ a до b такођеръ ниедну међу њима лежећу вредность неизостави, онда є наставна; напротивъ прекидна є ако кою одъ њи прескочи.

Има функція, коє су за сваку крайну вредность променљивогъ броя наставне; али има и таковы, коє су само међу некимъ границама тога броя наставне, а изванъ тій прекидне. Тако су н. п. функціє $y=ax^2+1$, $y=a\,sin\,nx$ и $y=\frac{ax^m}{p}$ за сваку крайну вредность одъ x наставне; напротивъ функціє $y=\frac{sin^2x}{1-sin^2x}$ и $y=\frac{a-bx}{cos\,x}$ само су за $x\gtrless(2v+1)\frac{\pi}{2}$ наставне, а за $x=(2v+1)\frac{\pi}{2}$ прекидне; тако исто $y=\frac{a}{\sqrt[n]{x}}$ за $x\gtrless0$ наставна, за x пакъ $=0$ прекидна.

§ 6.

По свези између сталны броєва' и променљивы разликуємо уобште двояке функціє, алгебрайске и трансцендентне. **Алгебрайска** є свака она функція, у коіой стални и променљиви броєви међу собомъ нису свезани другимъ рачунима, него сабиранѣмъ, одузиманѣмъ, мложенѣмъ, деобомъ и подизанѣмъ на сталне — иначе целе или деловне, положне или одречне — степене. **Трансцендентне** су пакъ оне, при коима, сматраюћи вредность ньнову као познатъ брой, за опредѣльиванѣ променльивога броя као непознатога, морали бы употребити логаритме. Овамо дакле принадлеже тако зване експоненцїялне количине — т. є. степени съ променльивымъ изложителѣмъ —, променльиве логаритмїйске и гонїометрїйске функцїє.

Примери алгебрайски функцїя єсу

$$y = x^2 + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\,log.\,a,\ y = 2ax - p\sqrt[n]{x},\ y = \frac{x - a}{x\,log.\,a + x^2},$$

а трансцендентны

$$y = a^x + 1,\ y = m\,log.\,x - \frac{x}{a},\ y = \frac{1 - cos\,x}{2},\ y = \frac{log.(1 + x)}{e^x}$$

§ 7.

Алгебрайске функцїє понаособъ могу быти

1.) **рацїоналне** (срачунльиве) или **ирацїоналне** (несрачунльиве). Рацїонална є алгебрайска функцїя, ако се у ньой променльивый брой неналази ни као подкорена количина, ни съ деловнымъ изложителѣмъ; у противномъ є пакъ случаю ирацїонална.

2.) **Целе или деловне.** Цела є алгебрайска функцїя, ако у ньой променльивый брой нїє ни именитель, ни съ одречнымъ изложителѣмъ, иначе є деловна.

Примери за рацїоналне алгебрайске функцїє єсу у предходећемъ §-у прва и трећа, за ирацїоналне друга, за целе прва и друга, а за деловне трећа. Обштый є видъ пакъ целе рацїоналне функцїє

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

а деловне $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots.}{a + bx + cx^2 + \ldots.}$, при чему, као што се иначе и по себи разуме неки одъ сачинителя α, β, γ, ..., a, b, c, ... могу быти и одречни или $= 0$.

Ако є найвећій изложитель пременльивога броя у именителю деловне функціє већій одъ найнећега изложителя у броителю: онда се деловна функція зове **чиста**, у противномъ пакъ случаю **нечиста**.

3.) Цела алгебрайска функція више пременльивы броєва зове се **єдностепена** ако є сбиръ изложителя пременльивы броєва у свима члановима єданъ истый; у противномъ случаю зове се **разностепена**.*)

II. Найнуждніи свойства раціоналны функція.

§ 8.

Послѣдакъ свакогъ съ єднообразнимъ функціяма истогъ пременльивогъ броя (или исты пременльивы броєва) међу собомъ извршеногъ алгебрайскогъ рачуна бытће свагда опетъ такова функція.

Доказъ. 1.) Сабираюћи или одузимаюћи две єднообразне функціє

$$a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots \quad \text{и}$$

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots\dots\dots \quad \text{добыямо}$$

$$(a \pm \alpha) + (b \pm \beta)\, x + (c \pm \gamma)\, x^2 + \dots\dots,$$

дакле сбиръ доиста функція истога вида као што су сабирци.

2.) Мложећи исте две функціє єдну съ другомъ, слѣдує као производъ

$$a\alpha + (a\beta + b\alpha)\, x + (a\gamma + b\beta + c\alpha)\, x^2 + \dots\dots\dots$$

очевидно опетъ єднообразна функція.

3.) Делећи пакъ єдну съ другомъ можемо рећи

$$(a + bx + cx^2 + \dots\dots\dots) : (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots\dots) =$$

$$= (a + bx + cx^2 + \dots\dots) . \frac{1}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots}.$$

Но количникъ є одъ единице съ делительмъ $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots)$ безъ сумнѣ функція истога вида као овай.

---

*) Латински су називи хомогена и хетерогена функція.

Поставляюћи га дакле равна $A + Bx + Cx^2 + \ldots$, имамо место предузете деобе производъ

$$(a + bx + cx^2 + \ldots) \cdot (A + Bx + Cx^2 + \ldots),$$

и одтудъ по предходећемъ увереню као количникъ исте деобе функцію єднообразну.

4.) Подижући функцію $(a + bx + cx^2 + \ldots)$

а) на положный цео степенъ m добыямо на основу другогъ увереня безъ сумнѣ

$$(a + bx + cx^2 + \ldots)^m = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

б) на цео одречанъ степенъ m, т. є. на степенъ съ изложителѣмъ $-m$ имамо

$$(a + bx + cx^2 \ldots)^{-m} = \frac{1}{(a+bx+cx^2+\ldots)^m} = \frac{1}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots}$$

$$= A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

в) На делованъ положанъ степенъ $\frac{n}{m}$. Имамо найпре по а)

$$(\alpha + \beta x + \gamma x + \ldots)^m = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

одатле пакъ узимаюћи обе части у степену $\frac{n}{m}$.

$$(a + bx + cx^2 + \ldots)^{\frac{n}{m}} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)^n;$$

но ова десна часть дає по а) функцію вида $A + Bx + Cx^2 + \ldots$, и тако доиста и делованъ степенъ:

$$(a + bx + cx^2 + \ldots)^{\frac{n}{m}} = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

єднообразна є функція.

г) на делованъ одречанъ степенъ $\frac{n}{m}$, т. є. на степенъ съ изложителѣмъ $-\frac{n}{m}$. Быт' ће

$$(a + bx + cx^2 + \ldots)^{-\frac{n}{m}} =$$

$$= \frac{1}{(a + bx + cx^2 + \ldots)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots}$$

$$= A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

Найпосле

д) іошъ и на степевъ са мнимымъ — имагинарнымъ — изложителѣмъ $m \pm n \sqrt{-1}$, у комъ су m и n броєви доистни — реелни —. Быт' ће обзиромъ на *а*) и *б*)

$$(a+bx+cx^2+\ldots.)^{m\pm n\sqrt{-1}} = (a+bx+cx^2+.\ .)^m \times$$

$$\times\left[(a+bx+cx^2+\ldots)^{\pm n}\right]^{\sqrt{-1}} = (\alpha+\beta x+\gamma x^2\ldots.) \times$$

$$\times(a_1+b_1x+c_1x^2+\ldots)^{\sqrt{-1}}$$

Ставимо $(a_1+b_1x+c_1x^2+\ldots)^{\sqrt{-1}} = P$ и подигнимо ову єдначину на степенъ съ изложителѣмъ $\sqrt{-1}$. Добыямо

$$P^{\sqrt{-1}} = (a_1+b_1x+c_1x^2+\ldots.)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{a_1+b_1x+c_1x^2+\ldots.} = a_2+b_2x+c_2x^2+\ldots.$$

Но кадъ є $P^{\sqrt{-1}}$ овака функція, онда по понятію степена мора быти обратно нѣнъ коренъ, т. є. P такођеръ такова функція. Дакле

$P = \alpha_1+\beta_1x+\gamma_1x^2+\ldots\ldots$, и тако садъ

$$(a+bx+cx^2+\ldots)^{m\pm n\sqrt{-1}} = (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots)$$

$$(\alpha_1+\beta_1x+\gamma_1x^2+\ldots) = A+Bx+Cx^2+\ldots..$$

као и за доистне изложителѣ.

§ 9.

Ако су у $f(x) = a+bx+cx^2+\ldots.$ сачинительи $a, b, c\ \ldots.$ одъ x независни броєви и она є притомъ за сваку вредность одъ x равна нули: онда и свакій сачинитель понаособъ мора быти раванъ нули.

Доказъ. Ако є за сваку вредность одъ x функція $a+bx+cx^2+\ldots\ldots = 0$, онда є и за $x = 0$; но за ово x (и зато и за свако друго) слѣдує $a = 0$, и дакле

$$bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots = (b+cx+dx^2+\ldots)\,x = 0$$

Ово пакъ постои не само за $x = 0$, но и за $b+cx+dx^2+\ldots. = 0$, одкудъ опетъ за $x = 0$ слѣдує да мора быти $b = 0$, па дакле и

$$cx^2+dx^3+\ldots. = (c+dx+\ldots.)\,x^2 = 0$$

Овымъ садъ начиномъ и далѣ заключуюћи налазимо да су у таковомъ случаю доиста сви сачинительи нуле.

Слѣдство. **Ако су две еднообразне функціе едногъ истогъ премењљивогъ броя за сваку вредность овога една другой равне: онда су и сачинительи исты степена' премењљивога броя меѣусобомъ равни.** Єръ ако є за сваку вредность одъ x

$$a + bx + cx^2 + \ldots\ldots = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots,$$

онда слѣдує такођеръ за сваку нѣгову вредность

$(a - \alpha) + (b - \beta)\, x + (c - \gamma)\, x^2 + \ldots\ldots = 0$, и одтудъ по горнѣму $a - \alpha = 0$, $b - \beta = 0$, $c - \gamma = 0$, ……, а то ће ређи $a = \alpha$, $b = \beta$, $c - \gamma$, …….

Ово є свойство раціоналны функція у целой анализи одъ неисказане користи, познато є пакъ обично подъ именомъ **правило сачинителя.**

§ 10.

Ако є у целой раціоналной $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_v x^{n-v}$, уређеной по падаюћимъ изложитељима одъ x, a_μ, немотређи на знакъ, найвећій сачинитель, и узме се у нњой $x \overset{=}{>} a_\mu + 1$: онда првый нѣнъ членъ x^n постає већій одъ сбира свію осталы.

Доказъ. Поставимо ради краткоће сбиръ свію членова $f(x)$ осимъ првога, т. є. сбиръ $a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_v x^{n-v} = \varphi(x)$, и узмимо у $\varphi(x)$ место разны сачинителя a_1, a_2, a_3, …… оногъ найвећегъ a_μ. Быт' ће безъ сваке сумнѣ $a_\mu x^{n-1} + a_\mu x^{n-2} + \ldots\ldots + a_\mu^{n-v}$; т. є.

$$a_\mu (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots\ldots + x^{n-v}) > \varphi(x).$$

Но заграђеный чинитель овога израза, као што видимо, геометрійска є постепеность количника x, и зато нѣгова вредность (познатымъ изъ алгебре начиномъ) $\dfrac{x^n - x^{n-v}}{x - 1}$ Узимаюћи є дакле место нѣга, имамо

$$a_\mu \frac{x^n - x^{n-v}}{x - 1} > \varphi(x) \ldots\ldots\ldots (1.$$

Изъ вредности пакъ $x \overset{=}{>} a_\mu + 1$ слѣдує $x - 1 \overset{=}{>} a_\mu$: дакле $x^n(x-1) \overset{=}{>} a_\mu x^n$, или ако одавде іошъ $0 < a_\mu x^{n-\nu}$ одузмемо: $x^n(x-1) > a_\mu (x^n - x^{n-\nu})$, и одтуда

$$x^n > a_\mu \frac{x^n - x^{n-\nu}}{x-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2.$$

Сравнююћи садъ овай изразъ съ онымъ подъ 1.) увиђамо, да є за $x \overset{=}{>} a_\mu + 1$ доиста $x^n > \varphi(x)$, т. є. првый членъ већій одъ сбира осталы.

Слѣдство. Поставимо у горньой функціи $\frac{1}{z}$ место x; слѣдує за $\frac{1}{z} \overset{=}{>} a_\mu + 1$

$$\frac{1}{z^n} > \left(\frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \frac{a_3}{z^{n-3}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a_\nu}{z^{n-\nu}} \right),$$

одтудъ пакъ множећи са z^{n+m}

$$z^m > (a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + a_3 z^{m+3} + \ldots\ldots \quad + a_\nu z^{m+\nu})$$

Имаюћи дакле неку

$$F(z) = z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \ldots + a_\nu z^{m+\nu},$$

можемо свагда наћи єданъ тако малый брой $\frac{1}{a_\mu + 1}$, кои место z узетъ причинява, да нѣнъ првый членъ z^m буде већій одъ сбира свію слѣдуюћи.

§ 11.

Ако у целой раціоналной $f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots\ldots$, где сачинительи $a, b, c, \ldots\ldots\ldots$ одъ променльивогъ броя x никако независе, узмемо $x + h$ место x, добыямо

$$f(x+h) = f(x) + f_1(x)\,h + f_2(x)\frac{h_2}{2!} + f_3(x)\frac{h_3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

при чему $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ……. представляю неке одъ вишка h независне функціє променльивога броя x.

Доказъ. Узимаюћи у $f(x)$ као што рекосмо $x + h$ место x слѣдує

$$f(x+h) = a(x+h)^\alpha + b(x+h)^\beta + c(x+h)^\gamma + \ldots\ldots\ldots;$$

но $f(x)$ є цела и раціонална, дакле изложительи α, β, γ ……… цели и положни броеви; зато по већъ доказаномъ биномномъ правилу за такове изложителѣ

$$
\begin{aligned}
F(x+h) = {} & a\left[x^{\alpha} + \binom{\alpha}{1} x^{\alpha-1} h + \binom{\alpha}{2} x^{\alpha-2} h^2 + \binom{\alpha}{3} x^{\alpha-3} h^3 + \ldots\right] \\
& + b\left[x^{\beta} + \binom{\beta}{1} x^{\beta-1} h + \binom{\beta}{2} x^{\beta-2} h^2 + \binom{\beta}{3} x^{\beta-3} h^3 + \ldots\right] \\
& + c\left[x^{\gamma} + \binom{\gamma}{1} x^{\gamma-1} h + \binom{\gamma}{2} x^{\gamma-2} h^2 + \binom{\gamma}{3} x^{\gamma-3} h^3 + \ldots\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}
$$

десну часть пакъ по h уређуюћи

$$
\begin{aligned}
F(x+h) = {} & \left[ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots\ldots\right] \\
& + \left[\binom{\alpha}{1} ax^{\alpha-1} + \binom{\beta}{1} bx^{\beta-1} + \binom{\gamma}{1} cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots\right] h \\
& + \left[\binom{\alpha}{2} ax^{\alpha-2} + \binom{\beta}{2} bx^{\beta-2} + \binom{\gamma}{2} cx^{\gamma-2} + \ldots\right] h^2 \\
& + \left[\binom{\alpha}{3} ax^{\alpha-3} + \binom{\beta}{3} bx^{\beta-3} + \binom{\gamma}{3} cx^{\gamma-3} + \ldots\right] h^3 \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}
$$

найпосле iошъ символне сачинителѣ одъ x развиюћи и притомъ произходеће сталне именителѣ 2!, 3!, и т. д. дотичнимъ степенима одъ h подписуюћи

$$
\begin{aligned}
F(x+h) = {} & ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots\ldots\ldots] \\
& + \left[\alpha ax^{\alpha-1} + \beta bx^{\beta-1} + \gamma cx^{\gamma-1} + \ldots\ldots\right] h \\
& + \Big[\alpha(\alpha-1) ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1) bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1) cx^{\gamma-2} + \ldots \\
& \qquad \ldots\ldots\Big] \frac{h^2}{2!} \\
& + \Big[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) ax^{\alpha-3} + \beta(\beta-1)(\beta-2) bx^{\beta-3} + \gamma(\gamma-1). \\
& \qquad .(\gamma-2) cx^{\gamma-3} + \ldots\Big] \frac{h^2}{3!} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

дакле доиста као што є речено

$$f(x+h) = f(x) + f_1(x)\,h + f_2(x)\,\frac{h^2}{2!} + f_3(x)\,\frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots ,$$

Сматраюћи строй сачинительны овы функція $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ .... видимо, да се свака изводи изъ предходеће: ако се у свакомъ члану предходеће изложитель одъ x единицомъ уманьи, а сачинитель съ прећашньимъ изложителѣмъ помложи. Тога ради называю се исте функціє редомъ **прва, друга, трећа** и т. д. **изводна** функція дате $f(x)$.

Осимъ тога валя іошъ приметити, да ће десна часть овогъ образца быти крайна, ако є $f(x)$ такова; брой пакъ нѣны чланова притомъ состоят'ће се свега изъ єдногъ члана више, него што є найвећій изложитель у $f(x)$. Найпосле последный чланъ у томъ случаю ако є н. п. α найвећій изложитель, быт'ће $f_\alpha(x) . \frac{h^\alpha}{\alpha!} = \alpha!\, a\, x \frac{h^\alpha}{\alpha!} = ah^\alpha$, дакле у обзиру на x сталанъ брой.

§ 12.

Непосреднымъ употреблѣнѣмъ образца предходећегъ §-а налазимо іошъ слѣдуюће три важне истине.

Ако є

1.) $F(x) = f(x) \pm \varphi(x)$, онда имамо по горнѣму

$$F(x+h) = f(x+h) \pm \varphi(x+h), \text{ т. є.}$$

$$\begin{aligned} F(x) + F_1(x)\,h + \ldots\ldots\ldots &= [f(x) + f_1(x)\,h + \ldots\ldots\ldots] \\ &\quad \pm [\varphi(x) + \varphi_1(x)\,h + \ldots] \\ &= [f(x) \pm \varphi(x)] + [f_1(x) \pm \\ &\quad \varphi_1(x)]\,h + \ldots\ldots \end{aligned}$$

и одтудъ по §-у 9.

$$F_1(x) = f_1(x) \pm \varphi_1(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I.}$$

то ће рећи: **прва изводна функція алгебрайскогъ сбира одъ две функціє састои се изъ алгебрайскогъ сбира ньіовы прве изводны функція.**

2.) $F(x) = f(x) . \varphi(x)$, слѣдує

$$F(x+h) = f(x+h) . \varphi(x+h), \text{ т. є.}$$

$$\begin{aligned} F(x) + F_1(x)\,h + \ldots\ldots &= [f(x) + f_1(x)\,h + \ldots\ldots] \times \\ &\quad \times [\varphi(x) + \varphi_1(x)\,h + \ldots] \\ &= f(x) . \varphi(x) + [\varphi(x) . f_1(x) + \\ &\quad f(x) . \varphi_1(x)]\,h + \ldots \end{aligned}$$

и дакле по преће поменутомъ §-у

$$F_1(x) = \varphi(x) \,.\, f_1(x) + f(x) \,.\, \varphi_1(x) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (II.}$$

То ће рећи: **Прва изводна функція производа одъ две функціе равна є сбиру производа' сваке одъ нъи съ првомъ изводномъ функціомъ оне друге.** Найпосле

3.) $F(x) = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Имамо найпре $f(x) = \varphi(x) \,.\, F(x)$, одтудъ пакъ по предходећему $f_1(x) = \varphi(x) \,.\, F_1(x) + F(x) \,.\, \varphi_1(x)$; дакле

$$F_1(x) = \frac{f_1(x) - F(x) \,.\, \varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$ или место $F(x)$ уречену вредность $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ узимаюћи

$$F_1(x) = \frac{\varphi(x) \,.\, f_1(x) - f(x) \,.\, \varphi_1(x)}{\varphi^2(x)} \ldots\ldots\ldots \text{ (III.}$$

Т. є. **Прва изводна функція количника две функціе равна є разлики одъ производа делителя съ првомъ изводномъ функціомъ делимка и производа делимка съ првомъ изводномъ функціомъ делителя, разделѣной съ квадратомъ именителя.**

§ 13.

Ако є $(x-a)^n$ чинитель $f(x)$, онда $(x-a)^{n-1}$ мора быти чинитель $f_1(x)$. Обратно ако є $(x-a)^n$ чинитель $f_1(x)$, онда $(x-a)^{n+1}$ мора быти чинитель $f(x)$.

Доказъ. Поставимо $f(x) = \varphi(x) \,.\, (x-a)^n$. По образцу II.) предходећегъ §-а и обзиромъ на строй изводны функція быт'ће

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-a)^n . \,\varphi_1(x) + \varphi(x) \,.\, n\,(x-a)^{n-1} \\ &= (x-a)^{n-1} . \,[(x-a)\,\varphi_1(x) + n \,.\, \varphi(x)], \end{aligned}$$

дакле доиста $(x-a)^{n-1}$ чинитель $f_1(x)$.

Обратный случай увиђа се садъ по себи.

Слѣдство. Ако ово постои, онда $(x-a)^{n-2}$ мора быти чинитель $f_2(x)$, $(x-a)^{n-3}$ чинитель $f_3(x)$, и т. д., еръ є свака одъ овы функція прва изводна функція предходеће. Тако исто ако є $(x-a)^n . (x-b)^p . (x-c)^q \ldots\ldots$ чинитель $f(x)$, онда $(x-a)^{n-1} . (x-b)^{p-1} . (x-c)^{q-1}$ мора быти чинитель $f_1(x)$, $(x-a)^{n-2} . (x-b)^{p-2} . (x-c)^{q-2} \ldots\ldots\ldots$ чинитель $f_2(x)$, и т. д.

§ 14.

Цела функція $f(x)$, коя другу функцію $F(x)$ безъ остатка дели, назива се **меромъ** ове друге функціє.

Такова є функція тога свойства, да са сталнымъ каквымъ — т. є. одъ променльивога независнымъ — броємъ или мложена или делѣна непрестає быти мера оне друге функціє. Сва є разлика притомъ та, да ће количникъ быти онолико пута маньій, съ колико се вопросна функція помложила, или онолико пута већій, съ колико є разделѣна.

§ 15.

Цела $f(x)$, коя друге две функціє истогъ променльивогъ броя безъ остатка дели, назива се ньіовомъ **заедничкомъ** меромъ. Ако є пакъ иста функція као такова одъ могуће найвышега степена, онда зове се **найвећа заедничка мера** оне друге две.

Найвећа заедничка мера две функціє неможе быти никадъ вышегъ степена, него што є она нижа; иначе є ова сама такова мера.

При траженю найвеће заедничке мере две функціє єдногъ истогъ променльивогъ броя поступа се каогодъ за два проста цела броя. Дели се т. є. (почемъ су се найпре обе уредиле по падаюћимъ степенима дотичногъ променльивогъ броя) она вышега степена съ ономъ нижега, ова съ остаткомъ, овай остатакъ съ новымъ остаткомъ, и т. д. докъ се ненаиђе на остатакъ, кои є раванъ или нули или каквомъ сталномъ брою. У првомъ є случаю последньій делитель тражена найвећа заедничка мера, у другомъ пакъ случаю вопросне две функціє немаю такове мере. Но притомъ само іошъ валя приметити да свакій количникъ и свакій остатакъ мораю быти целе функціє, и остатци наравно свагда нижега степена но дотични количници.

§ 16.

Обзиромъ на § 14. увиђамо, да найвећа заедничка мера две єднообразне функціє то свое свойство негуби, ако се при нѣномъ опредѣльиваню кой делимакъ или кой делитель съ некимъ сталнымъ броємъ помложи или раздели. Могу се дакле свакомъ делителю пре деобе и знаци променути — т. є. свакій съ (—1) помложити — безъ да се тиме найвећой мери какавъ вредъ наноси.

Ово свойство найвеће заедничке мере може се међу осталомъ на то употребити, да се при самомъ нѣномъ определьиваню избегне рачунъ съ разломцима. Но найважніє є друго неко нѣгово употреблѣнѣ, кое ћемо видити доцніє.

III. Полиномно и биномно правило за свакогъ уобште изложителя. *).

§ 17.

Означуюћи са v ма какавъ брой, изнађимо чему є раванъ v, степенъ функціє $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots$?

По §-у 9. можемо основано поставити

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots)^v=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots\dots\dots \quad (k.$$

Ова степена функція $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots\dots$ по понятію степена добыя се, ако се корена функція $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots$ узме као чинитель у мложенѣ онолико пута, колико показує изложитель.

Првый дакле членъ вопросне те функціє, ма какво было v, мора быти свагда v степенъ првогъ кореногъ члана a_0, т. є.

$$\alpha_0=a_0^v\dots\dots \quad (1.,$$

о чему се найлакше уверавамо приметбомъ да єдначина k.) мора постояти за сваку вредность броя x, па и за $x=0$, за кое x слѣдує доиста $\alpha_0=a_0^v$.

Другій пакъ членъ α_1x степене функціє добыя се очевидно вишепутнымъ мложенѣмъ првогъ кореногъ члана a_0 съ другимъ a_1x. Нѣговъ дакле сачинитель α_1 мора се состояти изъ производа одъ некогъ, безъ сумнѣ само одъ изложителя v зависногъ степена првогъ кореногъ члана a_0 са некимъ, такођеръ само одъ изложите-

---

*) Овай є доказъ сасвимъ оригиналанъ и овде првый путъ явности предатъ.

ля v зависнымъ степеномъ другогъ кореногъ сачинителя a_1 и іошъ неке функціє изложителя, т. є. мора быти вида $\alpha_1 = f(\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(\mathrm{v})}\, a_1^{\psi(\mathrm{v})}$.

Ако є изложитель цео и положанъ доистанъ — реелань — брой, н. пр. n: онда, каошто є лако увидити, имамо одъ два чинителя другій сачинитель степене функціє $\alpha_1 = a_0 a_1 + a_0 a_1 = 2a_0 a_1$, одъ три чинителя $\alpha_1 = 2a_0^2\, a_1 + a_0^2\, a_1 = 3a_0^2 a_1$ одъ четири чинителя $\alpha_1 = 3a_0^3\, a_1 + a_0^3\, a_1 = 4a_0^3\, a_1$, и т. д. Дакле одъ свы n чинителя

$$\alpha_1 = n a_0^{n-1}\, a_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(l.$$

§ 18.

Да бы сада одкрили оне три функціє у другомъ члану обште степене функціє, т. є. $f(\mathrm{v})$, $\varphi(\mathrm{v})$ и $\psi(\mathrm{v})$, поставимо у горню єдначину подъ $k.$) докучену вредность одъ α_0 и по виду познатогъ сачинителя α_1. Имамо, ако притомъ іошъ краткоће ради корену функцію $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$ заменимо съ $F(x)$,

$$F^{\mathrm{v}}(x) = a_0^{\mathrm{v}} + f(\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(\mathrm{v})}\, a_1^{\psi(\mathrm{v})}\, x + \ldots\ldots\ldots\ldots (m.$$

а ако место v узмемо nv, на истомъ основу

$$F^{n\mathrm{v}}(x) = a_0^{n\mathrm{v}} + f(n\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(n\mathrm{v})} a_1^{\psi(n\mathrm{v})}\, x + \ldots\ldots\ldots$$

Урецимо овде да є брой n доистанъ цео и положанъ; онда є іошъ изъ єдначине подъ $m.$), обзиромъ на докученѣ подъ $l.$),

$$\begin{aligned} F^{n\mathrm{v}}(x) &= [a_0^{\mathrm{v}} + f(\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(\mathrm{v})}\, a_1^{\psi(\mathrm{v})}\, x + \ldots\ldots]^{n} \\ &= a_0^{n\mathrm{v}} + n\, f(\mathrm{v})\, a_0^{\mathrm{v}(n-1)} \cdot a_0^{\varphi(\mathrm{v})} \cdot a_1^{\psi(\mathrm{v})}\, x \ldots\ldots \\ &= a_0^{n\mathrm{v}} + n\, f(\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(\mathrm{v})+n\mathrm{v}-\mathrm{v}}\, a_1^{\psi(\mathrm{v})}\, x + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Дакле, обе ове вредности одъ $F^{n\mathrm{v}}(x)$ уєдначавајући, по §-у 9.

$$n f(\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(\mathrm{v})+n\mathrm{v}-\mathrm{v}}\, a_1^{\psi(\mathrm{v})} = f(n\mathrm{v})\, a_0^{\varphi(n\mathrm{v})}\, a_1^{\psi(n\mathrm{v})},\ \text{т. є.}$$

$$n f(\mathrm{v}) \frac{a^{\varphi(\mathrm{v})}}{a_0^{v}}\, a^{\psi(\mathrm{v})} = f(n\mathrm{v}) \frac{a^{\varphi(n\mathrm{v})}}{a_1^{n\mathrm{v}}}\, a^{\psi(n\mathrm{v})},$$ или обе части

съ $n\mathrm{v}$делећи

$$\frac{f(v)}{v} \cdot \frac{a_0^{\varphi(v)}}{a_0^{v}}\, a_1^{\psi(v)} = \frac{f(nv)}{nv} \cdot \frac{a_0^{\varphi(nv)}}{a_0^{nv}} \cdot a_1^{\psi(nv)}$$

Изъ овога видимо: функціє су $f(v)$, $\varphi(v)$ и $\psi(v)$ такове, да производъ одъ размерене $f(v)$ съ v, размереногъ степена $a_0^{\varphi(v)}$ съ a_0^{v} и степена $a_1^{\psi(v)}$ остає истый, узели место изложителя v ма какву нѣгову мложину; съ другимъ речма, да є тай производъ у обзиру на изложителя **сталанъ** брой. Метимо га дакле

$$\frac{f(v)}{v} \cdot \frac{a_0^{\varphi(v)}}{a_0^{v}} \cdot a_1^{\psi(v)} = c, \text{ слѣдує } f(v)\, a_0^{\varphi(v)} \cdot a_1^{\psi(v)} = v a_0^{v}\, c,$$

и зато по єдначини $m.$)

$$F^{v}(x) = a_0^{v} + v a_0^{v}\, cx + \ldots\ldots.$$

Пошто є брой c одъ изложителя v независанъ, то онъ остає истый, ма какву вредность овоме изложителю дали, дакле и при $v=1$. Но за ово v слѣдуе

$$F(x) = a_0 + 1 \cdot a_0 cx + \ldots\ldots\ldots, \text{ т. є.}$$

$$a_0 + a_1 x + \ldots = a_0 + a_0 cx + \ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ и одтудъ}$$

по §-у 9.

$$a_0 c = a_1, \text{ то ће рећи } c = \frac{a_1}{a_0}.$$

Поставляюћи садъ ову вредность у горню єдначину за $F^{v}(x)$ добыямо.

$F^{v}(x) = a_0^{v} + v a_0^{v-1}\, a_1 x + \ldots\ldots\ldots$, изъ чега видимо да є сачинитель другогъ члана вопросне степене функціє при ма каквомъ изложителю v

$$\alpha_1 = v a_0^{v-1}\, a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.$$

§ 19.

Докучивши овогъ сачинителя налазимо садъ остале лако на слѣдуюћій начинъ.

Узмимо у єдначини подъ $k.$) $x+h$ место x, и заменимо уєдно степену функцію съ $\varphi(x)$ функцію. Быт' ће по §-у 11.

$$[F(x) + F_1(x)h + F_2(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots]^{\nu} =$$

$$= \varphi(x) + \varphi_1(x)h + \varphi_2(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$$

Но по горнѣму є

$$[F(x) + F_1(x)h + \ldots]^{\nu} = F^{\nu}(x) + \nu F^{\nu-1}(x) \,.\, F_1(x)h + \ldots,$$

дакле

$$F^{\nu}(x) + \nu F^{\nu-1}(x) \,.\, F_1(x)h + \ldots\ldots = \varphi(x) + \varphi_1(x)h + \ldots\ldots;$$

и одтудъ по §-у 9.

$$\nu F^{\nu-1}(x) \,.\, F_1(x) = \varphi_1(x)$$

Ако садъ овде узмемо одъ $F^{\nu-1}(x)$ по горнѣму само два прва члана, и заменимо уєдно $F_1(x)$ и $\varphi_1(x)$ съ ньіовимъ вредностима по §-у **11.**, имамо далѣ

$$\nu\,[a_0^{\nu-1} + (\nu - 1)\,a_0^{\nu-2}\,a_1\,x + \ldots\ldots] \,.\, (a_1 + 2a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \ldots\ldots)$$

$$= \alpha_1 + 2\alpha_2\,x + 3\alpha_3\,x^2 + \ldots\ldots\ldots \;(p.$$

Свршуюћи пакъ мложенѣ у левой части слѣдує

$\nu a_0^{\nu-1}\,a_1 + [\nu(\nu - 1)\,a_0^{\nu-2}\,a_1 + 2\nu a_0^{\nu-1}\,a_2]\,x + \ldots\ldots = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \ldots\ldots\ldots$, и одтудъ по §-у 9. $2\alpha_2 = \nu(\nu - 1)\,a_0^{\nu-2}\,a_1^2 + 2\nu a_0^{\nu-1}\,a_2$, дакле

$$\alpha_2 = \nu a_0^{\nu-1}\,a_2 + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\,a_0^{\nu-2}\,a_1^2 \ldots\ldots\ldots \;(3.$$

По овоме трећій членъ у $F^{\nu-1}(x)$ мора быти

$$[(\nu-1)\,a_0^{\nu-2}\,a_2 + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}\,a_0^{\nu-3}\,a_1^2]\,x^2.$$

Ставляюћи дакле ову нѣгову вредность у горню єдначину подъ $p.$) и производећи лево оне чланове кои садрже x^2, имамо по правилу сачинителя

$$3\alpha_3 = 3\,\nu a_0^{\nu-1}a_3 + 3\nu(\nu-1)\,a_0^{\nu-2}a_1a_2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2}\,a_0^{\nu-3}\,a_1^3,$$

и одтудъ

$$\alpha_3 = \nu a_0^{\nu-1}\,a_3 + \nu(\nu - 1)\,a_0^{\nu-2}\,a_1\,a_2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{2\,.\,3}\,a_0^{\nu-3}a_1^3 \ldots\ldots \;(4.$$

И садъ овако далѣ.

§ 20.

Поставляюћи найпосле у едначину подъ $k.)$ све у едначинама подъ **1**, **2**, **3** и **4** одкривене сачинителѣ вопросне степене функціе, слѣдуе траженый степенъ

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{\text{v}}$$

$$= a_0^{\text{v}} + \text{v} a_0^{\text{v}-1} a_1 x + [\text{v} a_0^{\text{v}-1} a_2 + \frac{\text{v}(\text{v}-1)}{2} a_0^{\text{v}-2} a_1^2] x^2 +$$

$$+ [\text{v} a_0^{\text{v}-1} a_3 + \text{v}(\text{v}-1) a_0^{\text{v}-2} a_1 a_2 + \frac{\text{v}(\text{v}-1)(\text{v}-2)}{2 \,.\, 3} a_0^{\text{v}-3} a_1^3] . x^3 +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots$$

Овай образацъ познатъ е подъ именомъ **полиномно правило** и важи, зато што смо при нѣговомъ опредѣльиваню изложителя v сматрали као сасвимъ произвольна или променльива, за свакогъ безъ разлике изложителя.

Десна часть тога образца бит' ће **крайна** само у томъ едномъ случаю: ако е корена функція крайна и притомъ изложитель v цео и положанъ доистанъ брой. **У** томъ случаю состоят' ће се v. степенъ дате функціе изъ $(n\text{v} + 1)$ члана, ако се ова састои изъ $(n + 1)$ члана и нѣнъ е последный членъ притомъ $a_n x^n$. — **У** свакомъ другомъ случаю бит' ће v. степенъ дотичнога полинома **безкраянъ**, т. е. состоят' ће се изъ безбройно млого чланова.

§ 21.

Посматраюћи сачинителѣ одъ x у нађеномъ полиномномъ образцу видимо, да се свакій одъ нъи састои изъ — алгебрайскогъ — сбира свы могући **оны** v няка безъ повтораваня одъ корены сачинителя' a_0, a_1, a_2, ... као комбинаторны основака: у коима е сбиръ сказалькій раванъ изложителю дотичнога степена одъ x, и да е свакій одъ тій v няка помложенъ съ броемъ могући премештая (пермутація) нѣговы основака.

У слѣдству тога у станю смо образовати свакій произвольный членъ v. степена каквогъ полинома независно одъ предходећи чланова, цео тай степенъ пакъ безъ далѣ помоћи образца. — Да покажемо то на едномъ примеру.

Траже се 6. и 8. членъ **четвртогъ** степена полинома $1-2x-x^3+2x^4$.

Ту є $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_2=0$, $a_3=-1$, $a_4=2$, $a_5==a_6=\ldots\ldots=0$ и $\mathrm{v}=4$. Имамо дакле у име сачинителя 6. члана, у комъ стои x^5, **четворке** безъ повт. одъ корены сачинителя са **сбиромъ сказалькій** 5: $a_0^3\,a_5=1\,.\,.\,0=0$, $a_0^2\,a_1\,a_4=1\,.\,(-2)\,.=-4$, $a_0^2\,a_2\,a_3=1\,.\,0\,.\,(-1)=0$, $a_0\,a_1\,a_2^2=1\,.\,(-2)\,.\,0=0$, $a_0\,a_1^2\,a_3=1\,.\,4\,.\,(-1)=-4$ и $a_1^3\,a_2=(-1)\,.\,0=0$, а ньиове **премештае** редомъ

$$\frac{4!}{3!}=4,\ \frac{4!}{2!}=12,\ \frac{4!}{2!}=12,\ \frac{4!}{2!}=12,\ \frac{4!}{2!}=12,\ \text{и}\ \frac{4!}{3!}=4.$$

Дакле є сачинитель 6. члана сбиръ $4\,.\,0+12\,.\,(-4)+12\,.\,0+12\,.\,0+12\,(-4)+4\,.\,0=-96$, а цео **шестый членъ** $-96\,x^5$.

У име 8. члана пакъ, у комъ стои x^7, имамо **четворке** б. п. са **сбиромъ сказалькій** 7: $a_0^3\,a_7$, $a_0^2\,a_1\,a_6$, $a_0^2\,a_2\,a_5$, $a_0\,a_1^2\,a_5$, $a_0\,a_1\,a_2\,a_4$, $a_0\,a_2^2\,a_3$, $a_1^2\,a_2\,a_3$, $a_1\,a_2^3$, $a_0^2\,a_3\,a_4$, $a_0\,a_1\,a_3^2$ и $a_1^3\,a_4$, одъ кои су првы осамъ — збогъ $a_7=a_6=a_5=a_2=0$ — нулле, а последня 3 съ горньимъ вредностима корены сачинителя $a_0^2\,a_3\,a_4=-2$, $a_0\,a_1\,a_3^2=2$ и $a_1^3\,a_4=-2$; **премештаи** овы четворака єсу редомъ

$$\frac{4!}{2!}=12,\ \frac{4!}{2!}=12,\ \text{и}\ \frac{4!}{3!}=4,$$

дакле сачин. 8. члана сбиръ $12\,.\,(-2)+12\,.\,2+4\,.\,(-2)=-8$, а траженый **осмый** членъ по свему тому $-8\,x^7$.

§ 22.

Ако у полиномномъ образцу место a_0 узмемо просто a, место a_1 пакъ b, и поставимо іошъ да є $a_2==a_3=a_4=\ldots\ldots=0$, добыямо подъ именомъ **биномнога правила** изъ алгебре веѣъ познатый образацъ

$$(a+bx)^{\mathrm{v}}=a^{\mathrm{v}}+\mathrm{v}a^{\mathrm{v}-1}\,bx+\frac{\mathrm{v}(\mathrm{v}-1)}{1\,.\,2}\,a^{\mathrm{v}-2}\,b^2\,x^2+$$

$$+\frac{\mathrm{v}\,(\mathrm{v}-1)\,(\mathrm{v}-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{\mathrm{v}-3}\,b^3\,x^3+\ldots\ldots$$

$$=a^{\mathrm{v}}+\binom{\mathrm{v}}{1}a^{\mathrm{v}-1}\,bx+\binom{\mathrm{v}}{2}a^{\mathrm{v}-2}\,b^2\,x^2+$$

$$+\binom{\mathrm{v}}{3}a^{\mathrm{v}-3}\,b^3\,x^3+\ldots\ldots,$$

кои дакле сада изъ горе наведеногъ узрока постои такоѣеръ за свакогъ уобште изложителя. И нѣгова є десна часть крайна и одъ $(\nu+1)$ члана само при доистномъ целомъ и положномъ изложителю, иначе тече свагда у безкрайность. Друга іошъ важна свойства овога образца и нѣговы сачинителя' позната су већъ изъ елементарне математике.

Слѣдство. Образацъ §. 11. т. є. $f(x+h) = f(x) + f_1(x)h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$, добыєнъ помоћу биномногъ правила, постои сада збогъ савршене обштости овога правила не само за целе и раціоналне функціє, но уобште за сваку алгебрайску (а као што ћемо доцніє видити и за сваку трансцендентну) функцію, **докъ є вредность променљивогъ броя x обшта или неопределѣна.**

§ 23.

За употреблѣнѣ оба у предходећимъ §§. сматрана образца имамо напослѣдку іошъ ово напоменути:

У случаю ако датый кореный полиномъ или биномъ не буду онога вида, као што смо при истраживаню тій образаца предпоставили, него є полиномъ $a_0x^m + a_1x^{m+1}\ldots\ldots$ а биномъ $ax^m + bx^{m+1}$: онда валя пре свега чинителя x^m извући, — съ другимъ чинителѣмъ, кои ће сада быти надлежнога вида, по упутству предходећи §§. поступати, и найпосле іошъ ν. степенъ тога чинителя съ $x^{m\nu}$ (т. є. съ ν. степеномъ онога првога) помложити.

IV. Границе функція, безкрайни и изчезљиви броєви или функціє.

§ 24.

Границомъ какове функціє назива се онай брой, коме се нѣна вредность при постепеномъ увећаваню или умаляваню променљивога броя све већма приближава безъ да га прекорачи.

Тако є н. п. граница функціє

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \cdots\cdots$$

при непрестаномъ увећаваню променљивога x единица; граница пакъ функціє $\varphi(x) = a \pm \frac{a}{x+1}$ при непрестаномъ умаляваню одъ x брой $2a$ или 0. Да су пакъ ови броєви границе дотичны функція, означує се овымъ начиномъ $lim.f(x)=1$, $lim.\varphi(x)=2a$, а читаю се ови изрази граница — *limes* — $f(x)$ равна 1, граница $\varphi(x)=2a$.

§ 25.

Функція, коє вредность тако велика може постати, да се ни найвећимъ броємъ кои смо іошъ у станю изразити, определити недає: зове се **безкрайна**; функція напротивъ, коє се вредность тако яко може умалити, да є ни найманьимъ, іошъ изразразити се могућимъ броємъ измерити нисмо у станю, зове се **изчезльива**. Граница є дакле функціє првога рода **безкрайно — неизмерльиво — велико**, граница пакъ функціє оногъ другогъ рода **нулла**.

Има функція кое безкрайно расту или се безкрайно умаляваю безъ да икада бываю безкрайне или да изчезну. Тако н. п. расту садржай и периферія правилногъ, у кругъ написаногъ полигона безкрайно съ непрестанымъ умложаванѣмъ страна', но зато опетъ првый никадъ неможе быти већій одъ садржая круга, а нѣгова периферія никадъ већа одъ периферіє круга. Исто тако умаляваю се безъ края садржай и периферія око круга написаногъ правилногъ полигона опетъ съ умложаванѣмъ страна', безъ да икада прекораче садржай и периферію истога круга.

Добро дакле валя разликовати *безъ края растуће или умаляваюће се* функціє одъ *безкрайны* и *изчезльивы*. *)

§ 26.

Да є безкрайна нека функція y или $f(x)$ свою границу већъ постигла, показує се символомъ ∞, пишући $y=\infty$ или $f(x)=\infty$, а читаюћи y или $f(x)$ равно безкрайномъ, или краће y или $f(x)$ безкрайна.

Означаваюћи съ k какавнибудъ краянъ (т. є. измерльивый) брой, а съ b и m односно до неизмерльивога растуће и умаляваюће се броєве, можемо, као што се

---

*) Посмотри у овомъ обзиру и функціє предходећегъ §-а.

лако увиђа, рећи $b = \frac{k}{m}$ а $m = \frac{k}{b}$; изъ чега, чимъ помислимо да су броеви b и m дотичне свое границе ∞ и 0 већъ постигли, слѣдуе $\frac{k}{0} = \infty$, $\frac{k}{\infty} = 0$, и изъ оба ова израза іошъ трећій $0 . \infty = k$.

Съ речма: 1.) **Свакій краянъ брой (дакле и 1) разделѣнъ нуломъ — т. е. изчезлимъ броемъ — дае безкраянъ брой; 2.) Свакій краянъ брой (дакле и 1) разделѣнъ безкрайнымъ, дае нуллу, т. е. изчезава; 3.) Производъ одъ нулле (то ће рећи одъ изчезлогъ некогъ броя) съ безкрайнымъ броемъ раванъ е некомъ крайномъ (непознатомъ) брою.**

§ 27.

Значили b и m ма какве броеве свагда постои $1 : b = 1 : b$ и $1 : m = 1 : m$, дакле и ако е првый, као што садъ уричемо, некій до неизмерљивога растућій, а онай другій, т. е. m некій до таквога умаляваюћій се брой.

Мложимо едну размеру одъ прве сразмере редомъ съ $b, b^2, b^3, \ldots\ldots$, одъ друге пакъ редомъ съ $m, m^2, m^3, \ldots\ldots$; слѣдуе
одъ прве $1 : b = b : b^2 = b^2 : b^3 = \ldots\ldots$, или на границу одъ b прелазећи

$$1 : \infty = \infty : \infty^2 = \infty^2 : \infty^3 = \ldots\ldots,$$

а одъ оне друге

$$1 : m = m : m^2 = m^2 : m^3 = \ldots\ldots$$

То ће рећи: 1.) *У* каквой е размери единица спрамъ ∞, у таквой истой е ово спрамъ ∞^2, ово опетъ спрамъ ∞^3, и т. д. — 2.) *У* каквой е размери единица спрамъ изчезљиво малога броя m, у таквой истой е m спрамъ m^2, ово спрамъ m^3 и т. д.

Изъ тога узрока назива се $\infty^2, \infty^3, \ldots\ldots$ редомъ **безкрайно другога, трећега ...... реда**; подобно, узевши m у горепоменутомъ смыслу, $m^2, m^3, \ldots\ldots$ **изчезљиво, другогъ, трећегъ ...... реда.**

§ 28.

Изъ самогъ понятія безкрайны броєва, као и изъ свега дояко о таковымъ броєвима казанога, подаю се слѣдуюћа важна ньіова свойства:

1.) безкраянъ брой невређа се — т. є. остає безкраянъ —, ако му се какавъ краянъ брой дода, или се одъ нѣга одузме; у знацима, ако a представля краянъ брой, $\infty \pm a = \infty$.

Єръ кадъ бы могли определити коликій є после, онда ніє быо безкраянъ.

Ово исто свойство може се іошъ и овако изрећи: **краянъ брой спрамъ безкрайногъ или додатъ или одузетъ изчезава.**

(Обяснявајући примери оставляю се устменомъ предаваню).

2.) Безкрайно вышегъ каквогъ реда невређа се додаванѣмъ или одузиманѣмъ безкрайнога каквогъ нижегъ реда; или съ другимъ речма:
безкрайно нижега реда спрамъ безкрайнога вышегъ реда као сабиракъ или одузимакъ изчезава.

Ово слѣдує непосредно изъ предходећегъ §-а и овде подъ 1.) наведенога; но ево и особитога доказа за то.

Ако є, оставляюћи b доякошнѣ значенѣ, $A = \alpha b^m$, $B = \beta b^{m-n}$, и притомъ $m > n$, дакле A спрамъ B безкрайно вышега реда: онда имамо

$$A \pm B = \alpha b^m \pm \beta b^{m-n} = b^{m-n} (\alpha b^n \pm \beta),$$

или зато што по пређашнѣмъ свойству β као краянъ брой спрамъ безкрайногъ αb^n изчезава,

$$A \pm B = b^{m-n} . \alpha b^n = \alpha b^m, \text{ т. є.}$$

$\alpha b^m \pm \beta b^{m-n} = \alpha b^n$, или на границу одъ b прелазећи, доиста $\alpha \infty^m \pm \beta \infty^{m-n} = \alpha \infty^m$.

§ 29.

Исто тако слѣдує за изчезливе броєве 1.) краянъ брой невређа се додаванѣмъ или одузиманѣмъ каквогъ изчезливогъ броя; или съ другимъ речма **изчезливый брой додатъ или одузетъ спрамъ крайнога изчезава.**

Ѥръ означуюћи съ A и a крайне броѥве, съ b пакъ што и доядо, имамо обзиромъ на предходећій §.

$$A \pm \frac{a}{b} = \frac{Ab \pm a}{b} = \frac{Ab}{b} = A.$$

2.) **Изчезљиво вышега реда као сабиракъ или одузимакъ узъ изчезљиво нижега реда изчезава.**

Ѥръ ако ѥ $A = \frac{\alpha}{b^m}$, $B = \frac{\beta}{b^{m+n}}$, дакле B спрамъ A изчезљиво вышегъ реда: быт' ће обзиромъ на § 28. (1)

$$A \pm B = \frac{\alpha}{b^m} \pm \frac{\beta}{b^{m+n}} = \frac{ab^n \pm \beta}{b^{m+n}} = \frac{\alpha b^n}{b^{m+n}} = \frac{\alpha}{b^m}.$$

§ 30.

Са знакомъ ∞ може се рачунати каогодъ са известнымъ броѥмъ, само мора се притомъ съ найвећомъ предосторожности поступати, ѥръ су послѣдцы млоги рачуна съ безкрайнымъ броѥвима збогъ разногъ нѣіовогъ постанка неизвестни, па се зато лако може погрешити.

Тако н. п. у слѣдуюћимъ изразима само ако известно знамо, да ѥ вредность знака ∞ колико се годъ пута у комъ одъ нъи налази, ѥдна иста, т. ѥ. да ѥ тай знакъ одъ исты броѥва и на истый начинъ добыѥнъ, смемо рећи да ѥ

$$a \cdot \infty \pm b\infty = (a \pm b)\,\infty, \text{ а}$$

$$a\infty : b\infty = \frac{a}{b} \cdot \frac{\infty}{\infty} = \frac{a}{b}$$

У противномъ пакъ случаю можемо само толико рећи: 1.) да ѥ сбиръ $a\infty + b\infty$ на свакій начинъ безкраянъ, и нѣгова вредность веће неко безкрайно (∞) и одъ првога и одъ другога; 2.) вредность пакъ разлике $a\infty - b\infty$, као и она количника $a\infty : b\infty$ неизвестне су, ѥръ прва може быти равна и некомъ крайномъ брою, а она друга не само $\frac{a}{b}$, него іошъ и какавъ другій краянъ брой.

Како се находе скривене крайне вредности у символима $\infty - \infty$ и $\frac{\infty}{\infty}$, као іошъ и у овыма $\frac{0}{0}$ и $0 . \infty$, показат' ћемо доцніѥ.

КНЬИГА II.

ВЫШЕ ЄДНАЧИНЕ.

I. Єдначине съ єднымъ непознатымъ броємъ.

a) Понятія.

§. 31.

Выша єдначина n степена съ єднымъ непознатымъ броємъ доведена на видъ

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

зове се **уређена**; нѣну леву часть пакъ називамо притомъ **полиномъ єдначине** и заменюємо є често краткоће ради съ $f(x)$ или X.

Сачинительи $a_1, a_2, a_3 \dots\dots$ могу быти у найпространіємъ смыслу речи какви му драго броєви, па и 0; но ій мы овде за сва слѣдуюћа сматраня предузеты єдначина' уричемо као **доистне и раціоналне**.

§ 32.

Свакій онай доистный или мнимый брой, кои место непознатога у дотичну єдначину узетъ нѣнъ полиномъ потире: зове се **коренъ** єдначине.

Тако су н. п. броєви $+1$, -1, -2, и $+\frac{1}{2}$ свакій коренъ уређене єдначине

$$x^4 + \frac{3}{2} x^3 - 2x^2 - \frac{3}{2} x + 1 = 0,$$

єръ свакій одъ ньи, место x поставлѣнъ, доводи нѣнъ полиномъ на 0.

Да између толики одъ 0 до (+ ∞) и до (— ∞) лежећи доистны броєва', а такођеръ и међу свыма безбройно млогимъ мнимымъ броєвима ни єднога нема, кои бы условіє корене какве єдначине испуніо: неможе се помыслити, и зато **свака выша єдначина мора имати баръ єданъ доистанъ или мнимый коренъ.**

§ 33.

Ако два узастопна члана полинома имаю єданъ истый знакъ + или —, онда вели се, да ти чланови образую значну слѣдь. Ако су напротивъ знаци такова два члана неєднаки (т. є. єданъ + а онай другій —), онда каже се, да исти чланови даю значну мену.

По томе у єдначини предходећегъ §-а имамо две слѣди (єдну одъ првогъ и другогъ члана, а ону другу одъ трећегъ и четвртогъ), и две мене (єдна одъ другогъ и трећегъ члана, а она друга одъ четвртогъ и последнѣгъ). У єдначини пакъ $x^3 + x^2 + \frac{1}{2} x + 3 = 0$ налазе се саме слѣди.

Ако у полиному єдначине нефали ни єданъ степенъ непознатога броя међу найвышимъ и найнижимъ: онда сбиръ слѣдій и сбиръ мена' мораю скупа быти равни имену єдначине, т. є. найвећемъ изложителю.

б) Свойства полинома и корена.

§ 34.

Полиномъ є сваке выше єдначине наставна функція.

Доказъ. Узимаюћи у полиному єдначине $f(x) = 0$ $x +$ некій изчезлњивый брой v место x, имамо по §-у 11.

$$f(x \pm v) = f(x) \pm f_1(x)\, v + f_2(x) \frac{v^2}{2!} \pm \cdots\cdots$$

и одтуда

$$f(x \pm v) - f(x) = v \left[\pm f_1(x) + f_2(x) \frac{v}{2!} \pm \cdots\cdots\right]$$

Цела десна часть овогъ израза збогъ изчезлњиво малогъ нћногъ чинителя v изчезлњиво є мала; лева пакъ

часть, каошто є лако разумети, показує премену $f(x)$ збогъ премене одъ x съ $\pm$ v. Тако дакле премена є полиноме єдначине при свакой изчезльиво малой премени непознатога броя изчезльиво мала; а то ће по §-у 5. рећи: истый є полиномъ доиста функція наставна.

§ 35.

Ако є α коренъ єдначине $f(x) = 0$, онда є $(x - \alpha)$ мера нѣнога полинома, то ће рећи: онда се овай може разделити съ $(x - \alpha)$ безъ остатка.

Доказъ. Ово одричући, добыли бы деобомъ полинома $f(x)$ съ $(x - \alpha)$,

$$f(x) : (x - \alpha) = \varphi(x) \pm \frac{r}{x - \alpha}$$

т. є. да є количникъ одтудъ раванъ некой $\varphi(x)$ съ некимъ іошъ остаткомъ $\pm r$, у комъ непознатога броя x више нема. Одатле пакъ слѣдовало бы, да є

$$f(x) = (x - \alpha) \,.\, \varphi(x) \pm r.$$

Но α є, каошто смо урекли, коренъ єдначине; зато узимаюћи га у овай изразъ место x, постає не само $f(x) = 0$, но уєдно, збогъ $(\alpha - \alpha) = 0$, и првый чланъ десне части, т. є. $(\alpha - \alpha) \,.\, \varphi(\alpha) = 0$, тако, да после имамо $0 = 0 \pm r$, и одтудъ $\pm r = 0$.

Остатакъ є $\pm r$ дакле у томъ случаю такођеръ раванъ нулли, а то ће рећи $(x - \alpha)$ є доиста мера полинома $f(x)$.

Шта постои за коренъ α, вреди безъ сумнѣ и за свакій другій; єръ є остатакъ r у обзиру на x сталанъ брой. Тога ради назива се алгебрайска разлика одъ непознатогъ броя x и свакогъ корена єдначине нѣнымъ или нѣнога полинома *кореньимъ чинителѣмъ*.

§ 36.

Свака выша єдначина нема ни више ни манѣ корена, него колико іой є име, дакле ако є n. степена, управо n.

Доказъ. По §-у 32. свака єдначина мора имати баръ єданъ коренъ. Нека є дакле при єдначини n. степена

$f(x) = 0$ тай єданъ нѣнъ коренъ α_1; быт'ће по преѣемъ §-у

$$f(x) = (x - \alpha_1)\,\varphi'(x)$$
$$= (x - \alpha_1)(x^{n-1} + b_1 x^{n-2} b_2 x^{n-3} + \ldots\ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}) = 0,$$

и одтуда, ако съ $(x - \alpha_1)$ разделимо,

$$\varphi'(x) = x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots\ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} = 0.$$

Но ова єдначина мора такођеръ имати баръ єданъ коренъ; рецимо да є α_2; имамо на истомъ основу

$$\varphi'(x) = (x - \alpha_2)\,\varphi''(x)$$
$$= (x - \alpha_2)(x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \ldots + c_{n-3} x + c_{n-2}) = 0$$

и зато, ако съ $(x - \alpha_2)$ делимо

$$\varphi''(x) = x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \ldots\ldots + c_{n-3} x + c_{n-2} = 0.$$

Овымъ — сада већъ увиђавнымъ — начиномъ и далѣ заключуюћи налазимо найпосле

$$\varphi^{(n-2)\prime}(x) = (x - \alpha_{n-1})\,\varphi^{(n-1)\prime}(x)$$
$$= (x - \alpha_{n-1})(x + k) = 0$$

дакле, ако съ $(x - \alpha_{n-1})$ разделимо,

$$x + k = 0;$$

и одтудъ последный коренъ $x = -k = \alpha_n$.

Узимаюћи пакъ затимъ у єдначину $f(x) = 0$ за $\varphi'(x)$, $\varphi''(x), \ldots\ldots \varphi^{(n-1)\prime}(x)$, ньіове притомъ одкривене вредности, добыямо

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots\ldots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) = 0$$

изъ чега се види не само да иста єдначина има доиста n корена и ни єданъ више или манѣ, него уєдно и да се нѣнъ полиномъ може расправити на n (корены) чинителя вида $x - \alpha$, кои су, какви буду корени, или доистни или мними.

§ 37.

Сачинительи сваке выше єдначине састое се изъ могућихъ слогова безъ повторавања свію нѣны корена, сматраюћи притомъ исте слогове као производе, и узимаюћи корене при члановима на непарномъ месту са собственимъ, а при оныма на парномъ месту са противнимъ знацыма.

О овоме уверавамо се чимъ све корене чинителѣ међу собомъ помложимо и ньіовъ производъ потомъ са полиномомъ єдначине по §-у 9. сравнимо, при чему показат'ће се, да є доиста

првый сачинитель, т. є. сачинитель другога члана раванъ алгебрайскомъ сбиру свію съ променутымъ знацима узеты корена (ньіовы єдиняка);

другій сачинитель, т. є. сачинитель трећега члана раванъ алгебрайскомъ сбиру могући производа одъ два и два разна, са собственимъ знацима узета корена (ньіовы двояка безъ повтораваня);

трећій сачинитель, т. є. сачинитель четвртога члана раванъ алгебрайскомъ сбиру могући производа одъ три и три съ променутимъ знацима узета корена (ньіовы трояка безъ повтораваня);

и т. д. до найпосле

последньій сачинитель, т. є. последньій чланъ раванъ производу свію, или са собственымъ или съ променутымъ знацима узеты корена, почемъ єдначина буде парнога или безпарнога степена.

Слѣдство. Ако дакле у єдначини n. степена нема другогъ члана, т. є. члана са x^{n-1}, то є знакъ: да є сбиръ положны корена раванъ сбиру одречны.

§ 38.

Ако є $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ коренъ какве выше єдначине, онда мора быти и $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Доказъ. Ово увиђамо помоћу предходећегъ §-а чимъ помыслимо да сачинительи дотичне єдначине по §-у 31. мораю быти доистни. Єръ да бы такови испали и у томъ вопросномъ случаю, т. є. у случаю гди є $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ коренъ єдначине: то се мора у првомъ, кои є по пређемъ §-у сбиръ свію нѣны съ променутимъ знацыма узеты корена', чланъ $-\beta\sqrt{-1}$ потрети, у осталимъ пакъ сачинительима, кои се по истомъ §-у састоє изъ производа редомъ одъ два и два, три и три, и т. д. до найпосле свію корена', — мораю се сви оніи чланови, кои су добывени мложенѣмъ одъ доистны корена' са онымъ мнимымъ ($a + \beta \sqrt{-1}$) усавршити (раціоналити) и тиме у доистне превести; но то све, као што се лако увиђа, ніє другаче могуће, развѣ ако є и $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ коренъ єдначине. И тако єдначина коя има мнимый коренъ $\alpha + \beta \sqrt{-1}$, мора доиста имати и коренъ $\alpha - \beta \sqrt{-1}$; и обратно коя има овай, има и онай.

Слѣдства. 1.) Будући дакле да су мними корени, гди ій има, свагда спарени, и производъ є свакогъ таквогъ пара доистанъ и другога степена: то се полиномъ сваке выше єдначине може расправити на квадратне чинителѣ вида $a + bx + cx^2$, кои ако є єдначина парнога степена и n нѣно име има $\frac{n}{2}$, а ако є безпарнога степена: $\frac{n-1}{2}$ съ єднымъ іошъ простымъ чинителѣмъ вида $a + bx$.

2.) Свака єдначина непарнога степена има баръ єданъ доистанъ коренъ.

§. 39.

Ни една єдначина неможе имати више положны корена, него што има у нѣномъ полиному значны мена, нити више одречны, него у истоме значны слѣдій.

Доказъ. 1.) Узмимо да се у полиному неке єдначине $f(x) = 0$, у комъ ни єданъ чланъ нефали, налази слѣдуюћій редъ знакова'

$+ - - + - + + + -$, а да є осимъ тога брой α доистанъ и положанъ.

Мложећи истый полиномъ са ($x - \alpha$) добыямо за полиномъ нове єдначине (: коя є єдно вышега степена него дата:) два почастна производа: єданъ одъ x са онаквымъ истымъ знацыма као у мложеномъ полиному, а онай другій одъ α са противнымъ знацыма, тако да, єданъ другоме за сабиранѣ у цео производъ подписуюћи, имамо слѣдуюћа два значна реда

$$\begin{array}{cccccccccc} + & - & - & + & - & + & + & + & - & \\ & - & + & + & - & + & - & - & - & + \\ \hline + & - & \mp & + & - & + & \pm & \pm & - & + \end{array}$$

, дакле у целомъ производу

Посмотривши пакъ знаке датогъ полинома $f(x)$ и новога $(x - \alpha)\, f(x)$, видимо да у овоме **1.)** одъ сваке мене онога излази известанъ, одъ сваке слѣди пакъ неизвестанъ знакъ; дакле **2.)** да у нѣму управо띠 оноликo неизвестны знакова има, колико у првомъ мена'; и **3.)** да се свакій таковый неизвестанъ знакъ налази свагда између два противна знака. Тога ради ако те неизвестне знаке новога полинома $(x - \alpha)\, f(x)$ бащъ све и еднаке узмемо, опетъ у нѣму неможемо никадъ више слѣдій добыти, него што таковы има у датоме; како пакъ мложенѣмъ овога са $(x - \alpha)$ свакояко іошъ еданъ чланъ и тиме іошъ еданъ знакъ постае: то є дакле положный доистный коренъ α у новой едначини $(x - x)\, f(x) = 0$ на свакій начинъ произвео едну мену више него што є было у датой.

Исто тако добыямо, ако су $\beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \omega$ такођеръ доистни и положни броеви, мложенѣмъ истога полинома $f(x)$ іоштъ и са $(x - \beta), (x - \gamma), \ldots\ldots (x - \omega)$, одъ свакогъ овакогъ чинителя у целомъ производу нове едначине $F(x) = f(x) . (x - \alpha) . (x - \beta) \ldots . (x - \omega) = 0$ найманѣ едну мену више.

Изъ свега тога пакъ, узимаюћи да є у овой едначини функція $f(x)$ производъ свію нѣны мнимы корены чинителя, увиђамо: да иста едначина може имати више значны мена' него што има положны корена, али никадъ више оваки корена него што има значны мена', чимъ є прва часть горнѣгъ изреченя доказана.

2.) Было n ма какавъ брой, $2n$ представля саме парне, а $(2n + 1)$ непарне броеве; и зато є

$$f(x) = x^{2n} - a_1 x^{2n-1} - a_2 x^{2n-2} + a_3 x^{2n-3} - \ldots\ldots + a_{2n-2} x^2 + \\ + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

нека едначина парнога, а

$$\varphi(x) = x^{2n+1} + b_1 x^{2n} - b_2 x^{2n-1} - b_3 x^{2n-2} - \ldots\ldots - b_{2n-1} x^2 + \\ + b_{2n} x - b_{2n+1} = 0$$

нека едначина непарногъ степена.

Ако садъ у овимъ едначинама узмемо $(- x)$ место x, меняю сви они нѣіови чланови кои садрже x у непарнимъ степенима своє знаке, и добыямо две нове едначине

$$f(-x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} - a_2 x^{2n-2} - a_3 x^{2n-3} - \ldots\ldots +$$
$$+ a_{2n-2} x^2 - a_{2n-1} x + a_{2n} = 0 \text{ и}$$

$$\varphi(-x) = - x^{2n+1} + b_1 x^{2n} + b_2 x^{2n-1} - b_3 x^{2n-2} + \ldots -$$
$$- b_{2n-1} x^2 - b_{2n} x - b_{3n+1} = 0$$
$$= x^{2n+1} - b_1 x^{2n} - b_2 x^{2n-1} + b_3 x^{2n-2} - \ldots +$$
$$+ b_{2n-1} x^2 + b_{2n} x + b_{2n+1} = 0,$$

кое имаю по бройной вредности исте, по знаку пакъ противне корене, т. є. у коима су сви положни корени прве две єдначине одречни, а одречни ньини корени положни.

Узимаюћи ради лакшегъ прегледа одъ све четиръ єдначине само ньіове знаке, имамо

у $f(x)$ $+ - - + - \ldots\ldots + + +$,
у $f(-x)$ $+ + - - - \ldots\ldots + - +$,
у $\varphi(x)$ $+ + - - - \ldots\ldots - + -$, а
у $\varphi(-x)$ $+ - - + - \ldots\ldots + + +$; изъ чега видимо, да є у новимъ єдначинама свака мена првы прешла у слѣдъ, а свака слѣдъ у мену.

Будући пакъ да у новимъ єдначинама по 1. доказу неможе быти више положны корена но што оне имаю мена': то дакле прве єдначине немогу имати више одречны корена него значны слѣдій, и тако є садъ и друга часть вопросногa изреченя потврђена.

Слѣдства. 1. Ако су корени выше єдначине сви доистни, и у нѣномъ полиному нефали ни єданъ чланъ: онда има управо онолико положны корена колико значны мена', а управо онолико одречны, колико слѣдій.

2.) Єдначина у коіой су саме мене нема ниєданъ одречанъ коренъ, а коя има саме слѣди ниєданъ положанъ коренъ.

3.) Ако у каквой єдначини фали кои чланъ између два єднако означена члана, то є знакъ да иста єдначина има мнимы корена. Єръ узимаюћи неналазећій се чланъ єданпутъ съ положнимъ а другій путъ съ одречнимъ знакомъ, имали бы одъ нѣга и граничны чланова у првомъ случаю две мене, у другомъ две слѣди; и по томе дотична єдначина, ако бы сви нѣни корени морали быти доистни, имала бы іошъ два корена, кои су и положни и одречни, а то ніє могуће; збогъ чега тіи нѣни корени немогу быти доистни, него су уображени или мними.

Ово престаε чимъ бы фалећій чланъ имао доћи међу два разноозначена члана; єръ у томъ случаю узевши га са ма коимъ знакомъ, т. є. или съ (+) или съ (—), добыли бы свагда єдну мену и єдну слѣдь, по чему оба дотичной єдначини іошъ принадлежећа два корена могу быти доистни.

§ 40.

Ако є вредность полинома какве више єдначине за $x = \alpha$ положна, а за $x = \beta$ одречна: онда између α и β лежи на свакій начинъ найманѣ єданъ нѣнъ коренъ, кои є спрамъ тій нѣговы граница доистанъ или мнимый.

Доказъ. Ово увиђамо чимъ помислимо да є полиномъ сваке више єдначине по §-у 35. наставна функція, и да зато нѣгова вредность, прелазећи съ оне положне за $x = \alpha$ на одречну за $x = \beta$, мора непремено проћи крозъ нуллу. Єръ то значи да се између $x = \alpha$ и $x = \beta$ доиста єдна вредность налази, коя полиномъ потире, и коя є дакле § 32. коренъ дотичне єдначине.

Додатци. 1.) Ако при горнѣмъ предпоставлѣню, да є т. є. вредность полинома за $x = \alpha$ положна, а за $x = \beta$ одречна, између овы граница више корена єдначине леже: онда може ій быти само у непарномъ брою, дакле уобште или само єданъ, или пакъ 3, 5, 7 . . .

2.) У случаю пакъ ако вредность полинома за обе оне вредности одъ x, т. є. и за $x = \alpha$ и за $x = \beta$ испада положна: онда између овы граница може быти да лежи кои коренъ єдначине, али се немора налазити, и ако ій има, онда могу се налазити само у парномъ брою. Уобште дакле у томъ случаю међу α и β или нема ниєднога корена, или пакъ налазе се 2, 4, 6 . . . . .

Обе ове истине увиђаю се при найманѣмъ само размишляваню по себи, и зато непотребую особенога доказа.

§ 41.

Раціонални (срачунльиви) корени едначине у коіой су сви сачинительи цели броеви, немогу никадъ быти разломци, но опетъ цели броеви.

Доказъ. Ако бы рекли да е разломакъ $\frac{v}{z}$, при комъ су v и z односно прости броеви, коренъ едначине

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

у коіой предпоставлямо саме целе сачинителѣ, и узмемо-га у истой место x: слѣдовало бы

$$\frac{v^n}{z^n} + a_1 \cdot \frac{v^{n-1}}{z^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{v^{n-2}}{z^{n-2}} + \dots\dots\dots + a_{n-1} \cdot \frac{v}{z} + a_n = 0,$$

или съ z^{n-1} мложеђи

$$\frac{v^n}{z} + a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} z + a_3 v^{n-3} z^2 + \dots\dots + a_{n-1} v z^{n-2} + \\ + a_n z^{n-1} = 0,$$

и одтудъ

$$\frac{v^n}{z} = -(a_1 v^{n-1} + a_2 v^{n-2} z + \dots + a_{n-1} v z^{n-} + a_n z^{n-1});$$

а то ђе ређи: да е разломакъ $\frac{v^n}{z}$ (изъ узрока што су членови десне части овогъ израза сами цели броеви, па дакле и ньіовъ сбиръ такавъ брой) раванъ некомъ целомъ брою, кое е безумно. Разломакъ дакле $\frac{v}{z}$, и съ ньимъ убоште никакавъ разломакъ неможе быти коренъ предпоставлѣне едначине.

в) Преображаванѣ едначина'.

§ 42.

Сваку вышу едначину безъ да нѣне корене познаемо, можемо преобразити у другу тако, да исти нѣни корени съ коренима нове едначине буду у известной некой аритметичной или геометрійской размери.

Таковы преображеня, наравно, може быти разны и ньіово е употреблѣнѣ млогострučно; но мы ђемо овде показати само она, коя поглавито служе за лакше и удобніе решенѣ како обшти (алгебрайски'), тако и бройны — нумерны — едначина'.

§ 43.

Задатакъ. Єдначину

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n = 0$$

преобразити тако, да корени нове єдначине буду у α маньи одъ нѣны корена'.

Решенѣ. Означаваюћи обштій коренъ нове єдначине съ y: по условію задатка мора быти $y = x - \alpha$ или $x = y + \alpha$. Нову дакле єдначину добыт' ћемо, ако у датой узмемо $y + \alpha$ место x, потомъ све степене одъ $y + \alpha$ по биномномъ образцу развіємо и найпосле полиномъ по падаюћимъ степенима одъ y уредимо.

Но іошъ лакше долазимо до тражене єдначине употреблѣнѣмъ §-а 11. тимъ начиномъ, да найпре у полиному $f(x)$ дате єдначине узмемо $x + y$ место x, по поменутомъ §-у $f(x + y)$ развіємо, затимъ x съ α заменимо и найпосле іошъ добывеный полиномъ $f(\alpha + y)$ преокренемо.

При томе быт'ће у преображеной єдначини

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots\dots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

сачинитель одъ $y^n \dots\dots \frac{1}{n!} f_n(\alpha) = 1$, сачинительи пакъ

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(\alpha) = n\alpha + a_1$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-2)!} f_{n-2}(\alpha) = \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} \alpha^2 + (n-1) a_1 \alpha + a_2$$

. . . .

$$b_{n-1} = f_1(\alpha) = n\alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1}$$

$$b_n = f(\alpha) = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots\dots + a_n$$

§ 44.

Обште или алгебрайско решенѣ єдначина' трећегъ и четвртогъ степена као што се обычно употреблява, и каошто ћемо га у поздніимъ §§-ма показати, односи се на тако зване **сведене** єдначине, то ће рећи на такове єдначине поменуты степена', у коима другогъ члана — дакле у єдначинама трећегъ степена члана съ x^2 — нема. Тога ради мора се за то решенѣ свака, у томъ обзиру подпуно дата єдначина найпре другога члана опростити. То быва помоћу предходећегъ §-а на тай начинъ, да се найпре дата єдначина по истоме у другу $f(y+\alpha) = 0$ преобрази и у овой потомъ сачинитель $b_1 = n\alpha + a_1 = 0$ постави, одкуда добыя се она вредность одъ $\alpha = -\frac{a_1}{n}$, коя узъ y у датой єдначини место x узета, потире у новой єдначини другій членъ.

Тако н. пр. ако бы имали свести єдначину

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0,$$

морали бы узети $\alpha = -\frac{-4}{4} = 1$, дакле $x = y + 1$, и по томе сачинительи сведене єдначине быт'ће

$$b_4 = f(\alpha) = 1 - 4 + 2 - 1 + 1$$
$$= -1$$
$$b_3 = f_1(\alpha) = 4 - 12 + 4 - 1$$
$$= -5$$
$$b_2 = \frac{1}{2!} f_2(\alpha) = \frac{1}{2!} (12 - 24 + 4)$$
$$= -4$$
$$b_1 = \frac{1}{3!} f_3(\alpha) = \frac{1}{3!} (24 - 24)$$

$= 0$ найпосле сачинитель

одъ $y^4 \ldots\ldots\ldots \frac{1}{4!} f_4(\alpha) = \frac{1}{4!} \cdot 24 = 1$ као што по пређашнЂмъ §-у и треба сведена є; сведена є пакъ єдначина

$$y^4 - 4y^2 - 5y - 1 = 0.$$

Подобно имали бы при датой єдначини $x^3 + 6x^2 - - 2 = 0$ найпре $\alpha = -\frac{6}{3} = -2$, дакле $x = y - 2$ и зато сачинительи нове єдначине

$$b_3 = f(\alpha) = -8 + 24 - 2 = 14,$$
$$b_2 = f_1(\alpha) = 12 - 24 = -12,$$

$b_1 = \frac{1}{2!} f_2(\alpha) = -12 + 12 = 0$, а

сачинитель одъ $y^4 \ldots\ldots \frac{1}{3!} f_3(\alpha) = \frac{1}{3!} \cdot 3! = 1$.

Тако дакле сведена єдначина є

$$y^3 - 12y + 14 = 0.$$

§ 45.

Задатакъ. Преобразити єдначину

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots\ldots + a_n = 0$$

у другу съ k пута већимъ коренима.

Решенѣ. Обштій коренъ тражене єдначине опетъ съ y представляюћи, по условію задатка треба да є $y = kx$ или $x = \frac{y}{k}$. Узимаюћи дакле у датой єдначини место x ову вредность $\frac{y}{k}$, преображена єдначина быт’ће

$$\frac{y^n}{k^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{y}{k} + a_n = 0$$

или съ k^n мложећи — да небы имали разломке —

$$y^n + a_1 k y^{n-1} + a_2 k^2 y^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} k^{n-1} y + a_n k^n = 0.$$

Посмотривши ову єдначину, опажамо да є лакше можемо добыти, ако свакій членъ дате єдначине помножимо съ k у ономикомъ степену, колика є допуна дотичногъ изложителя одъ x до n и после іошъ x са y изменимо.

§ 46.

Ово преображенѣ употреблява се при бройнымъ єдначинама за **истребльиванѣ разломы сачинителя’**, коє решенѣ таковы єдначина’ (обзиромъ на § 42.) веома олакшава, а на слѣдуюћій простый начинъ быва:

Дата єдначина преобрази се найпре по пређашнѣмъ §-у у другу съ k пута већимъ коренима, па се после место k узме наймањій садржатель свію именителя кои се у датой єдначини находе.

Тако н. п. имаюћи ослободити одъ именителя єдначину $x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{8} = 0$ была бы преображена єдначина съ k пута већимъ коренима

$$y^4 - \frac{k^2}{2} y^2 + \frac{k^3}{3} y - \frac{k^4}{8} = 0.$$

У овой садъ, као што рекосмо за k наймањѣгъ садржателя именителя 2, 3 и 8, т. є. брой 24 узимаюћи, слѣдує єдначина безъ разломака

$$y^4 - 288 y^2 + 4608 y - 41472 = 0.$$

Приметба. У млогимъ случаима постизава се потиранѣ именителя и некимъ маньимъ броемъ него што є найманьій садржатель дотичны именителя, у горньой н. п. єдначини съ броемъ 6 метто 24, чимъ є тражена єдначина

$$y^4 - 18y^2 + 72y - 162 = 0$$

наравно млого простія.

§ 47.

Задатакъ. Испытати, има ли дата нека єдначина єднаки' корена' и такове после уклонити.

Решенѣ. Прво докучит' ћемо на основу §-а 13. тражећи найвећу заєдничку меру полинома дате єдначине и нѣгове прве изводне функціє (§. 11.). Єръ ако такову меру нађемо и она на чинителѣ расправлѣна састои се изъ $(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q$ ....: онда вопросна єдначина по поменутомъ §-у има єднаке корене $a, b, c,$ ...., одъ кои' се првый налази n, другій p, трећій q, ... пута. Напротивъ дата єдначина нема єднаки' корена' ако нѣнъ полиномъ и овога прва изводна функція немаю заєдничке мере.

Изъ овога увиђа се уєдно и како ћемо нову єдначину са самимъ разнимъ коренима добыти, то ће рећи, изъ дате єдначине єднаке корене уклонити; да т. є. у име тога валя само полиномъ дате єдначине съ ономъ нађеномъ найвећомъ меромъ разделити.

Употреблѣнѣ овогъ быт' ће такођеръ при решаваню бройны єдначина'.

г) Обште или алгебрайско решенѣ єдначина'.

1.) Єдначине трећегъ степена.

§ 48.

У §-у 44. видили смо да се свака подпуно дата урећена єдначина свести, т. є. другога члана опростити може. Олакшице ради дакле узмимо одма да є за решенѣ дата кубна єдначина већъ сведена, т. є. овогъ вида:

$$x^3 + mx + n = 0.$$

Да бы ю пакъ разрешили, то поставимо уобште

$$x = v + z \,\dots\dots\dots\, (1.$$

и подигнимо обе части на трећій степенъ. Быт' ће

$$x^3 = v^3 + 3v^2z + 3vz^2 + z^3 = v^3 + z^3 + 3vz\,(v + z)$$

или ако све чланове у леву часть доведемо и уедно за $v + z$ ...... x узмемо:

$$x^3 - 3vz\,.\,x - (v^3 + z^3) = 0.$$

Ова є єдначина онакова иста вида каошто є она дата, и $x = v + z$ известно є нѣнъ коренъ. — Поставимо у ньой $v^3 = p$, $z^3 = q$, дакле $v = \sqrt[3]{p}$, $z = \sqrt[3]{q}$, $vz = \sqrt[3]{pq}$: слѣдує место нѣ друга єдначина

$$x^3 - 3x\sqrt[3]{pq} - (p + q) = 0,$$

коя има известный коренъ $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Броєви p и q у той єдначини сасвимъ су обшти. и могу се дакле безъ сваке сумнѣ лако башъ толики узети, да буде

$$-\,3\sqrt[3]{pq} = m \,\dots\dots\dots\, (2.$$

а

$$-\,(p + q) = n \,\dots\dots\dots\, (3.$$

Но тадъ є та єдначина и дата увиђавно єдна иста, и зато ако се тако учини,

$$x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} \,\dots\dots\dots\, (4.$$

безъ сумнѣ коренъ дате єдначине.

Сада є дакле све само іошъ до тога стало, да изнађемо колико мора быти у томъ нѣномъ корену p и q.

Ово докучуємо лако изъ горньи єдначина подъ 2.) и 3.) на слѣдуюћій начинъ:

изъ прве имамо $\sqrt[3]{pq} = -\frac{m}{3}$, дакле $pq = -\frac{m^3}{27}$, а

$$4pq = -\frac{4}{27}m^3;$$

одъ друге пакъ добыямо подижући є на квадратъ

$$p^2 + 2pq + q^2 = n^2;$$

дакле одъ овога квадрата $4pq$ одузимаюћи

$$p^2 - 2pq + q^2 = n^2 + \frac{4}{27} m^3, \text{ т. е.}$$

$$(p - q)^2 = n^2 + \frac{4}{27} m^3, \text{ и одтудъ}$$

$$p - q = \sqrt{n^2 + \tfrac{4}{27} m^3}.$$

Но како е по едначини подъ 3.)

$$p + q = -n \ : \text{ то слѣдуе}$$

$$p = \frac{1}{2} [-n + \sqrt{n^2 + \tfrac{4}{27} m^3}], \text{ а}$$

$$q = \frac{1}{2} [-n - \sqrt{n^2 + \tfrac{4}{27} m^3}],$$

и тако сада обзиромъ на изразъ подъ 4.) онай коренъ дате едначине одкривенъ и оволикій

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} [-n + \sqrt{n^2 + \tfrac{4}{27} m^3}]} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} [-n + \sqrt{n^2 + \tfrac{4}{27} m^3}]},$$

или нешто простіе

$$x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} \ \ldots\ldots (5.$$

Овай изразъ познатъ е обично подъ именомъ **Кардановогъ образца** и садржи не само еданъ коренъ кубне едначине, него сва три; на кои начинъ, показат' ће слѣдуюћій

§ 49.

Ако е уобште

$$z^3 - a^3 = 0,$$

слѣдуе $z^3 = a^3$ и одтудъ $z = a$ као еданъ коренъ те едначине. Тай се коренъ зове аритметичный коренъ.

Делећи полиномъ исте едначине са $z - a$ добыямо

$$z^2 + az + a^2 = 0$$

и одтудъ као друга два нѣна корена

$$z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \,.\, a \quad \text{и} \quad z = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \,.\, a$$

Подизанѣмъ израза $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ на квадратъ добыя се $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Поставляюћи дакле првый изразъ ради краткоће $= m$, можемо рећи да су три корена горнѣ єдначине

$$z_1 = a, \quad z_2 = ma \quad \text{и} \quad z_3 = m^2\, a.$$

По овоме $\sqrt[3]{p}$ у кардановомъ образцу има три вредности $\sqrt[3]{p}$ (аритметичный коренъ), $m\sqrt[3]{p}$ и $m^2\sqrt[3]{p}$, а $\sqrt[3]{q}$ такођеръ три вредности $\sqrt[3]{q}$ (аритметичный коренъ), $m\sqrt[3]{q}$ и $m^2\sqrt[3]{q}$.

Ове вредности по поменутомъ образцу саюжене, даю за корене вопросне єдначине свега слѣдуюћи деветъ вредностій

$$\begin{array}{c:c:c}
\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} & m\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} & m^2\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} \\
\sqrt[3]{p} + m\sqrt[3]{q} & m\sqrt[3]{p} + m\sqrt[3]{q} & m^2\sqrt[3]{p} + m\sqrt[3]{q} \\
\sqrt[3]{p} + m\sqrt[3]{q} & m\sqrt[3]{p} + m^2\sqrt[3]{q} & m^2\sqrt[3]{p} + m^2\sqrt[3]{q};
\end{array}$$

но ако се на то обазремо да по єдначини подъ 2.) (§. 48.) $\sqrt[3]{pq}$ мора быти раванъ **доистномъ** брою $-\frac{m}{3}$: онда увиђамо лако. да су одъ тій 9 вредностій само слѣдуюће три,

$$x_1 = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}, \quad x_2 = m\sqrt[3]{p} + m^2\sqrt[3]{q} \quad \text{и}$$

$$x_3 = m^2\sqrt[3]{p} + m\sqrt[3]{q}$$

доиста корени, а остале немогу быти.

§ 50.

Што се тиче рода корена кубне єдначине, то они по §-у 38. могу быти само 1.) или сви доистни, или 2.) єданъ доистанъ а она друга два мними. У комъ пакъ случаю постои єдно а у комъ друго, то, каошто є лако разумети, зависи єдино одъ вредности $\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}$.

Ако є $\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}>0$, т. є. положанъ брой: онда є коренъ x_1 доистанъ, а x_2 и x_3 быт' ће мними.

Ако є пакъ $\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}=0$: онда су сва три корена доистни.

Найпосле ако є $\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}<0$, рећи ће одречанъ брой: онда су опѣтъ сви корени доистни, премда се кардановимъ образцемъ показую као мними.

По овому непосредно є употреблѣнѣ кардановогъ образца у томъ трећемъ случаю безуспѣшно, и зато се истый случай назива **несведљивимъ** (irréductible).

Колико већъ збогъ тога, толико іошъ и зато што є израчунаванѣ корена бройне кубне єдначине изъ поменутогъ образца аритметичнимъ путемъ у млогимъ случаима доста неудобно, — показат' ћемо у неколико слѣдуюћи §§-а како можемо изнаћи корене кубне єдначине не само лакше и брже, но уєдно и у свакомъ случаю изванъ сваке сумнѣ: помоћу гоніометрійски функція; но найпре уверимо се о томе, да су у поменутомъ несведљивомъ случаю доиста сви корени реелни.

§ 51.

Сбиръ $\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}$, каошто є лако разумети, неможе испасти другачіє одречанъ, него ако є $\frac{m^3}{27}$ одречно и $\frac{m}{3}>\frac{n}{2}$. У вопросномъ є дакле случаю дата єдначина вида

$$x^3-mx+n=0 \quad \ldots\ldots \quad (r.$$

По §-у 38. мора имати ова єдначина на свакій начинъ єданъ доистанъ коренъ. Назовимо га α. Съ тимъ кореномъ слѣдуе

$$\alpha^3 - m\alpha + n = 0, \text{ и одтудъ}$$
$$-n = \alpha(\alpha^2 - m) \; \ldots\ldots \; (s.$$

Делећи єдначину $r.$) са $x - \alpha$ добыямо количникъ $x^2 + \alpha x + (\alpha^2 - m)$ съ остаткомъ $\alpha^3 - m\alpha + n$, кои є по предходећему раванъ нулли. Мора быти дакле

$$x^2 + \alpha x + (\alpha^2 - m) = 0,$$

и зато друге две вредности корена вопросне кубне єдначине

$$x = \frac{-\alpha + \sqrt{4m - 3\alpha^2}}{2} \text{ и } x = \frac{-\alpha + \sqrt{4m - 3\alpha^2}}{2}$$

Ова два корена быт ће доистни, ако є $4m > 3\alpha^2$, то ће рећи ако є $\alpha < 2\sqrt{\frac{m}{3}}$. Узмимо да ово постои; онда збогъ єдначине подъ $s.$) мора быти

$$-n < 2\sqrt{\frac{m}{3}} \cdot \left(\frac{4m}{3} - m\right), \text{ т. є. } -n < \frac{2}{3}m\sqrt{\frac{m}{3}},$$

а $\frac{n^2}{4} < \frac{m^3}{27}$, коє у спорномъ случаю доиста постои.

Предпоставлѣнѣ є дакле $4m > 3\alpha^2$ основано и зато у томе случаю доиста и она друга два корена кубне єдначине доистни.

Ово ће потврдити іошъ болѣ и сада слѣдуюће гоніометрійско решенѣ кубне єдначине.

§ 52.

У првомъ одъ горе разликована три могућа случая поступамо овако:

1.) Ако є m положно, ставлямо

$$\frac{2}{n}\sqrt{\frac{m^3}{27}} = tang\,\vartheta \; \ldots\ldots\ldots \; (a,$$

чимъ быва $p = \sqrt{\frac{m^3}{27}} \cdot tang\,\frac{\vartheta}{2}$, а

$$q = -\sqrt{\frac{m^3}{27}} \cdot cot\,\frac{\vartheta}{2},$$

и зато, ако притомъ іошъ узмемо

$$\sqrt[3]{tang\ \tfrac{1}{2}\vartheta} = tang\ \varepsilon \ldots\ldots\ldots (б,$$

доистный коренъ єдначине

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{m}{3}}\ .\ cot\ 2\varepsilon \ldots\ldots\ldots (I.\ ^*)$$

У томъ дакле случаю валя найпре израчунити изъ єдначина' подъ *а*) и *б*) помоћне угле ϑ и ε, а съ нъима после изъ *I.*) вопросный коренъ x_1.

$$^*)\ p = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} = -\frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \text{tang}^2\,\vartheta}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}(1 - \sec\vartheta) = -\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{\cos\vartheta}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\,\frac{\cos\vartheta - 1}{\cos\vartheta} = \frac{n}{2}\,.\,\frac{1 - \cos\vartheta}{\cos\vartheta}$$

$$= \frac{n}{2}\,.\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\,.\,\frac{1 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{n}{2}\ \text{tang}\,\vartheta\ .\ \text{tang}\,\frac{\vartheta}{2}$$

(види тригон. § 30. обр. 17.), и найпосле обзиромъ на єдначину а),

$$p = \sqrt{\frac{m^3}{27}}\ .\ \text{tang}\,\frac{\vartheta}{2}$$

Сасвимъ истымъ начиномъ налазимо и q онако каошто є горе речено. Тадъ пакъ имамо

$$x_1 = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}}\ .\ \text{tang}\,\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}}\ .\ \cot\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{m^3}{27}}\left(\sqrt[3]{\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\vartheta} - \sqrt[3]{\cot\ \tfrac{1}{2}\,\vartheta}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{3}}\left(\sqrt[3]{\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\vartheta} - \frac{1}{\sqrt[3]{\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\vartheta}}\right)$$

или збогъ узетогъ подъ б) $\sqrt[3]{\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\vartheta} = \text{tg.}\ \varepsilon$

$$x_1 = \sqrt{\frac{m}{3}}\left(\text{tang}\ \varepsilon - \frac{1}{\text{tang}\ \varepsilon}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{3}}\ .\ \frac{\text{tang}\ \varepsilon - 1}{\text{tang}\ \varepsilon} = -\sqrt{\frac{m}{3}}\ .\ \frac{1 - \text{tg.}^2\,\varepsilon}{\text{tang}\ \varepsilon}$$

$$= -2\sqrt{\frac{m}{3}}\ \cot\,2\,\varepsilon$$ (тригон. § 29. обр. 16.)

2.) Ако є пакъ m одречно, онда ставлямо, подъ m притомъ само нѣгову абсолутну вредность разумеваюћи,

$$\frac{2}{n}\sqrt{\frac{m^3}{27}} = \sin\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (в,$$

чимъ добыямо $p = -\sqrt{\frac{m^3}{27}}\,.\,\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}$,

$$q = -\sqrt{\frac{m^3}{27}}\,\cot\frac{\vartheta}{2},$$

и дакле ако опетъ метемо

$$\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}} = \operatorname{tang}\varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots (г,$$

коренъ $x_1 = -\frac{2}{\sin 2\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{3}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.\,{}^*)$

§ 53.

У трећемъ или тако названомъ несведльивомъ случаю **), у комъ m непремено мора быти одречно, єдначина дакле за решенѣ дата вида $x^3 - mx \pm n = 0$: узимамо $x = \varrho\sin\vartheta$ или $\sin\vartheta = \frac{x}{\varrho}$. Тимъ добыямо збогъ

---

*) $p = -\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\sqrt{1 - \sin^2\vartheta} = -\frac{n}{2}(1 - \cos\vartheta)$

$$= -\frac{n}{2}\sin\vartheta\,.\,\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = -\sqrt{\frac{m^3}{27}}\,.\,\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}$$

(єдначина в) и тригон. § 29. обр. 16.)

Истымъ начиномъ и $q = -\sqrt{\frac{m^3}{27}}\cot\frac{\vartheta}{2}$, зато пакъ

$$x_1 = -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}}\,.\,\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{m^3}{27}}\,.\,\cot\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{3}}(\operatorname{tang}\varepsilon + \cot\varepsilon) = -\sqrt{\frac{m}{3}}\left(\operatorname{tg.}\varepsilon + \frac{1}{\operatorname{tg.}\varepsilon}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{3}}\,.\,\frac{1 + \operatorname{tg.}^2\varepsilon}{\operatorname{tg.}\varepsilon} = -\sqrt{\frac{m}{3}}\,.\,\frac{\sec^2\varepsilon}{\operatorname{tang}\varepsilon}$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{3}}\,.\,\frac{1}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon} = -\frac{2}{\sin 2\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{3}}$$

(Тригон. § 26. образ. 1.).

**) Другій случай неспоминѣмо зато, што се у нѣму логаритми непосредно употребити могу.

$$\sin 3\vartheta = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta,{}^{*)}$$

$$\sin^3\vartheta - \frac{3}{4}\sin\vartheta + \frac{1}{4}\sin 3\vartheta = 0 \quad \text{т. е.}$$

$$x^3 - \frac{3}{4}\varrho^2 x + \frac{1}{4}\varrho^3 \sin 3\vartheta = 0 \;\ldots\ldots\; (д.$$

Корени ове єдначине садржани су у условлѣномъ изразу $x = \varrho \sin\vartheta$ тимъ начиномъ, да се за ϑ само такови угли могу узети, при коима се вредность одъ $\sin 3\vartheta$ невређа. Таковы углова' има безбройно млого, изражени су пакъ трећомъ части одъ

$$3\vartheta,\ \pi - 3\vartheta,\ 3\pi - 3\vartheta,\ \ldots\ldots\ldots\ 2\pi + 3\vartheta,\ 4\pi + 3\vartheta\ \ldots\ldots;$$

но сви тіи угли, као што се лако може увидити, имаю само 3 разна синуса, и зато слѣдую за корене єдначине *д*) само три разне вредности. Наймањи угли коима тіи разни синуси принадлеже, єсу

$$\frac{1}{3}\,.\,3\vartheta = \vartheta,\ \frac{1}{3}(\pi - 3\vartheta) = 60 - \vartheta,\ \text{и}\ \frac{1}{3}(4\pi + 3\vartheta) = 240 + \vartheta,$$

и потоме корени те єдначине

$$x_1 = \varrho \sin\vartheta,\ x_2 = \varrho\sin(60 - \vartheta)\ \text{и}\ x_3 = -\varrho\sin(60 + \vartheta) \ldots (е.$$

Сравнюючи сада іошъ єдначину *д*) са датомъ, налазимо

$$\frac{3}{4}\varrho^2 = m,\ \text{и}\ \frac{1}{4}\varrho^3\sin 3\vartheta = \pm n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (ж.$$

а изъ тій израза' вредности за ϱ и ϑ, помоћу кои' после опредѣлюємо изъ израза подъ (*е.* саме корене вопросне єдначине.

§ 54.

За случай ако вопросна єдначина ніє была дата у сведеномъ виду, него се топрвъ свести морала, имамо

---

*) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ (тригон. § 19. обр. 1.); даклє за $\beta = 2\alpha$

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha$$
$$= \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha\,.\,2\sin\alpha\cos\alpha$$

(тригон. § 26. обр. 1. и 2.); мложенѣ пакъ свршуюћи

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

iошъ примѣтити, да се найпосле нађени корени те сведене єдначине мораю преобразити у корене оне дате, и да то быва по §-у 44. на овай лакiй начинъ: ако су нађени корени сведене єдначине x_1; x_2 и x_3, а сачинитель є другога члана у датой єдначини быо a_1, обштiй нѣнъ коренъ пакъ y: онда имамо збогъ $y = x - \frac{a_1}{3}$ по поменутомъ §-у за корене дате єдначине

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{3}\, a_1 ;\ y_2 = x_2 - \frac{1}{3}\, a_1 ,\ y_3 = x_3 - \frac{1}{3}\, a_1$$

§ 55.

На концу свега овога разрешимо ради упражнѣня неколико примера' на оба начина, т. є. найпре чисто аритметичнымъ, а после гонiометрiйскимъ путемъ.

1.) Дата є єдначина $x^3 + 3x - 2 = 0$.

α) Решенѣ аритметичнымъ путемъ. Имамо за Кардановъ образацъ збогъ

$$m = 3,\ n = -2 : p = 1 + \sqrt{2},\ \text{а}\ q = 1 - \sqrt{2}.$$

Дата дакле єдначина принадлежи првомъ одъ могућа три случая.

$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142$; зато $p = 2{\cdot}4142$, $q = {\cdot}4142$, и потоме

$$x_1 = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{2{\cdot}4142} - \sqrt[3]{{\cdot}4142}$$

$$= 1{\cdot}341 - {\cdot}745 = {\cdot}596.$$

β) Помоћу гонiометрiє пакъ збогъ положногъ m имамо по єдначини a)

$tang\ \vartheta = -1$, дакле $\vartheta = -45^0$; збогъ тога по єдначини б.)

$$tang\ \varepsilon = \sqrt[3]{tg\ \tfrac{1}{2}\ \vartheta} = -\sqrt[3]{tg\ 22^0 30'}$$ (тригон. § 12.)

$\frac{1}{3}\ log\, tang\, 22^0 30' = 9{\cdot}872408$, а

$\varepsilon = -36^0 42' 7''3$; найпосле по єдначини I.)

$$x_1 = 2\,cot\;73^0\,24'\,14.''6,$$

$$\begin{array}{rl} log\;x_1 = & 0{\cdot}\,301030 \\ & \underline{0{\cdot}\,474492 - 1} \\ & 0{\cdot}\,775522 - 1, \quad x = {\cdot}\,596. \end{array}$$

2.) Дата є єдначина $x^3 - 2x + 4 = 0$.

α.) Решенѣ аритметично. Збогъ $m = -2$, $n = 4$, имамо

$$p = -2 + \sqrt{4 - \frac{8}{27}} = -2 + \frac{10}{3\sqrt{3}},\; q = -2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}.$$

Дата єдначина принадлежи дакле опетъ првомъ случаю.

$$\begin{array}{rll} log\,\frac{10}{3\sqrt{3}} = & 1{\cdot}000000 & \ldots\ldots\ldots\ldots\; log\;10 \\ & \underline{-\;0{\cdot}\,715682} & \ldots\ldots\ldots\ldots\; log\sqrt{2} \\ & 0{\cdot}284318 & \end{array}$$

$$\frac{10}{3\sqrt{3}} = 1{\cdot}924;\; p = -\,0{\cdot}076,\; q = -\,3{\cdot}924;$$

$$x_1 = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = -\sqrt[3]{0{\cdot}076} - \sqrt[3]{3{\cdot}924};$$

$$\frac{1}{3}\,log\;0{\cdot}076 = 0{\cdot}626935 - 1,\; \sqrt[3]{0{\cdot}076} = 0{\cdot}424;$$

$$\frac{1}{3}\,log\;3{\cdot}924 = 0{\cdot}197909,\; \sqrt[3]{3{\cdot}924} = 1{\cdot}578;$$

$$x_1 = -\,0{\cdot}424 - 1{\cdot}578 = -\,2.$$

Она друга два корена пакъ

$$x_2 = 1 - \sqrt{-1};\; x_3 = 1 + \sqrt{-1}.$$

β.) Решенѣ гоніометрійско Збогъ одречнога m имамо по

єдначини в) $sin\,\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{2}{27}}$;

$$log\;sin\;\vartheta = = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{r} +\,0{\cdot}301030 \\ \underline{-\,1{\cdot}431364} \\ 0{\cdot}869666 - 2 \end{array}\right\}\begin{array}{l} = 0{\cdot}43833 - 1 \\ \\ = 9{\cdot}434833 \end{array}$$

$\vartheta = 15^0\,47'\,35.''5$; зато по єдначини г.)

$$tang\;\varepsilon = \sqrt[3]{tang\;7^0\,53'\,47.''7}$$

$$log\;tang\;\varepsilon = \frac{1}{3}\,log\;tg\;7^0\,53'\,47.''7$$

$$= 9{\cdot}714028,\; \varepsilon = 27^0\,22'\,4.''4;$$

збогъ тога пакъ по єдначини II.)

$$x_1 = - \frac{2}{sin\, 2\,\varepsilon} \sqrt{\tfrac{2}{3}} = - \frac{\sqrt{2{\cdot}666}}{sin\, 54^0 44' 8{\cdot}'' 8}$$

$$\begin{array}{rl} - log\ x_1 = & 0{\cdot}212930 \\ & \underline{-\ 0{\cdot}911955 + 1} \\ & 0{\cdot}300975 \quad , \qquad x_1 = -\ 2 \end{array}$$

§ 56.

3.) Дата є єдначина $x^3 - 12x + 16 = 0$. Збогъ $m = -12$, $n = 16$ быт' ће

$$p = -8 + \sqrt{64 - 64} = -8, \quad q = p, \text{ и зато}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = -2\sqrt[3]{8} = -4$$

$$x_2 = x_3 = 2$$

4.) Дата є найпосле єдначина $x^3 - 6x - 4 = 0$. Збогъ $m = -6$, а $n = -4$ имамо по кардановомъ образцу

$$x_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 8}}$$

$$= \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}},$$

и тако корени дате єдначине мними, коє, као што знамо, неможе быти. Дай да видимо шта се налази **гоніометрійскимъ** решенѣмъ (§. 53)

$$\frac{3}{4}\,\varrho^2 = 6, \ \varrho^2 = 8, \ log\ \varrho = \frac{1}{2}\ log\ 8 = 0{\cdot}451545;$$

$$\frac{1}{4}\,\varrho^3\, sin\, 3\,\vartheta = -4, \ sin\, 3\,\vartheta = -\frac{16}{\varrho^3},$$

$$log\ sin\, 3\vartheta = -(log\, 16 - 3\, log\, \varrho) = -(1{\cdot}204120 - 1{\cdot}354635)$$

$= -9{\cdot}849485$, $3\vartheta = -45^0$, дакле $\vartheta = -15^0$, и по томе (єдначина e)

$$x_1 = -\varrho\, sin\, 15^0, \ x_2 = \varrho\, sin\, 75^0, \ x_3 = -\varrho\, sin\, 45^0;$$

$$\begin{array}{rll} - log\ x_1 = & 0{\cdot}451545 & \ldots\ldots\ldots\ log\ \varrho \\ & \underline{0{\cdot}412996 - 1} & \ldots\ldots\ldots\ log\ sin\, 15^0 \\ & 0{\cdot}864541 - 1, & \text{дакле} \end{array}$$

$$x_1 = -\ {\cdot}732$$

$\log x_2 = 0{\cdot}451545 \,\ldots\ldots\ldots\, \log \varrho$

$0{\cdot}984944 \,\ldots\ldots\ldots\, \log \sin 75^0$

$0{\cdot}436489$, дакле

$x_2 = 2{\cdot}732$.

$-\log x_3 = 0{\cdot}451545 \,\ldots\ldots\ldots\, \log \varrho$

$0{\cdot}849485 - 1 \,\ldots\ldots\, \log \sin 45^0$

$0{\cdot}301025$, дакле

$x_3 = 2.$

И тако доиста као што смо рекли у §-у **50.** сви корени доистни.

2.) Єдначине четвертогъ степена.

§ 57.

Предпоставлямо да є за решенѣ дата биквадратна єдначина опетъ већъ сведена, т. є. вида

$$x^4 + mx^2 + nx + p = 0.$$

Да бы ю разрешили, узмимо да су v_1 v_2 и v_3 корени кубне неке єдначине $v^3 + \alpha v^2 + \beta v + \gamma = 0$, и поставимо уобште

$$x = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3} \,\ldots\ldots\ldots\, (1.$$

Подижући ову єдначину на другій степенъ слѣдує

$$x^2 = v_1 + v_2 + 2\sqrt{v_1 v_2} + 2\sqrt{v_1 v_3} + 2\sqrt{v_2 v_3},$$

или збогъ $v_1 + v_2 + v_3 = -\alpha$ (§. 38.), и ако одма $-\alpha$ у леву часть пренесемо

$$x^2 + \alpha = 2\sqrt{v_1 v_2} + 2\sqrt{v_1 v_3} + 2\sqrt{v_2 v_3}$$

И садъ ову єдначину опетъ на квадратъ подижући

$$x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4\,(v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3)$$
$$+ 8\sqrt{v_1 v_2 v_3}\,(\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}),$$

или обзиромъ на **1.**)

$$x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4\,(v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3) + 8x\sqrt{v_1 v_2 v_3}.$$

Но по поменутомъ є §-у

$$v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3 = \beta, \text{ а } v_1 v_2 v_3 = -\gamma;$$

дакле $\sqrt{v_1 v_2 v_3} = \sqrt{-\gamma}$; зато пакъ

$$x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4\beta + 8x \sqrt{-\gamma},$$ и одтудъ

$$x^4 + 2\alpha x^2 + 8x \sqrt{-\gamma} + (\alpha^2 - 4\beta) = 0 \ldots\ldots\ldots (2.$$

При овой є єдначини по самомъ послу

$$x = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}$$

известно єданъ нѣнъ коренъ. Поставляюћи пакъ да є ова єдначина 2.) и она дата єдна иста, слѣдує съ места да є

$$x_1 = +\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3} \ldots\ldots\ldots\ldots (3.$$

известанъ коренъ и дате єдначине, и дакле да само iошъ валя опредѣлити, колики треба да су за ню броєви v_1 v_2 и v_3.

Ове докучуємо ако а) на основу последнѣгъ предпоставлѣня єдноместне сачинителѣ одъ x у єдначинама 2.) и датой изєдначимо, чимъ ће се одкрити сачинительи α, β и γ за основъ узете кубне єдначине, и ако после б) ову кубну єдначину показанымъ начиномъ разрешимо.

При томе налазимо да мора быти

$2\alpha = m$, $8\sqrt{-\gamma} = n$, $\alpha^2 - 4\beta = p$; т. є. да є

$$\alpha = \frac{1}{2} m,\ \gamma = -\frac{1}{64} n^2,\ \beta = \frac{1}{16} (m^2 - 4p) \ldots\ldots\ldots (4.$$

и дакле да за одкриће корена v_1, v_2 и v_3 имамо разрешити кубну єдначину

$$v^3 + \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{16} (m^2 - 4p)\, v - \frac{1}{64} n^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.$$

Тако н. пр. ако є за решенѣ дата єдначина

$$x^4 - 2x^2 + x - 3 = 0,$$

быт' ће посредствуюћа къ томе кубна єдначина

$$y^3 - y^2 + y - \frac{1}{64} = 0,$$

или одъ именителя ослобођена,

$$v^3 - 4v^2 + 16v - 1 = 0.$$

§ 58.

Одкрићемъ броєва' v_1, v_2 и v_3 нашли смо у

$$x = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}$$

не само єданъ коренъ дате биквадратне єдначине, но и све остале; єръ є вредность квадратна корена одъ свакога v и положна и одречна, збогъ чега, ако узмемо све могуће саюзе тій корена', излазе свега 8 разны вредностій за коренъ вопросне єдначине x.

Коє су одъ исты вредностій доиста нѣни корени, докучуємо лако ако разсудимо, да производъ $v_1 v_2 v_3$ мора быти $= -\gamma = -\frac{n^2}{64}$, чимъ се као такови показую при **положномъ** n само

$$\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3} \\ x_2 = -\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3} \end{array} \vdots \begin{array}{l} x_3 = \sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3} \\ x_4 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3}; \end{array}$$

а при **одречномъ** n само

$$\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3} \\ x_2 = \sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3} \end{array} \vdots \begin{array}{l} x_3 = -\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} - \sqrt{v_3} \\ x_4 = -\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2} + \sqrt{v_3}. \end{array}$$

§ 59.

Родъ овы корена биквадратне єдначине зависи наравно одъ рода корена v_1, v_2 и v_3 посредуюће кубне єдначине I.). Ова єдначина, збогъ свагда одречногъ последнѣгъ члана, има свагда єданъ доистанъ **положанъ** коренъ, поредъ коєга она друга два нѣна корена могу быти или оба доистни, или оба мними, и као доистни само или оба положни, или оба одречни.

Иста кубна єдначина I.) може дакле имати или 1.) три доистна положна корена, или 2.) три доистна корена, одъ кои є єданъ положанъ а друга су два одречни, — или найпосле 3.) єданъ доистанъ положанъ коренъ а два мнима.

По тому корени биквадратне єдначине быт'ће у првомъ случаю сви доистни, — у другомъ сви мними, развѣ ако су одречни корени кубне єдначине єднаки, у комъ случаю два корена биквадратне єдначине постаю доистни; — у трећемъ найпосле случаю быт' ће нѣни корени два доистни, а два мними.

Изъ свега овога пакъ види се ясно, да биквадратна єдначина уобште може имати или 1.) четири доистна корена, или 2.) два доистна и два мнима, или 3.) саме мниме корене.

На послѣдку свію овы истраживаня валя іошъ приметити, да, ако дата єдначина ніє была сведена, корене сведене єдначине познатимъ већъ начиномъ морамо превести у нѣне корене.

§ 60.

За упражнѣнѣ у употребляваню показанога начина, разрешимо єданъ само сходно избраный примеръ.

Дата є подпуна єдначина

$$y^4 - 8y^3 + 14y^2 + 4y - 8 = 0.$$

Да бы ю пре свега свели, имамо по §-у 44. узети

$$y = z + a = z + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1.$$

чимъ слѣдує сведена єдначина

$$z^4 - 10z^2 - 4z + 8 = 0 \ldots\ldots\ldots (2.$$

За решенѣ ове єдначине потребна кубна єдначина быт' ће по єдначини I. § 57. збогъ $m = -10$, $n = -4$, $p = 8$; дакле $\frac{m}{2} = -5$, $\frac{1}{16}(m^2 - 4p) = \frac{1}{16}(100 - 32) = \frac{68}{16} = \frac{17}{4}$, $\frac{1}{64}n^2 = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$:

$$x^3 - 5x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \ldots\ldots\ldots (3.$$

или по §-у 46. одъ именителя ослобоћена (при чему ће быти $k = 2$)

$$v^3 - 10v^2 + 17v - 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4.$$

Да бы сада корене ове єдначине определили, морали бы найпре свести ю, а после Кардановъ образацъ употребити; но она є случайно такова, да ій много лакше можемо наћи на слѣдуюћій начинъ:

По §-у 41. нѣни доистни корени, зато што су іой сачинительи сами цели броеви, могу быти само опетъ такови броеви; како є пакъ по §-у 38. последньій членъ (— 2) производъ свію нѣны корена: то дакле доистни нѣни корени могу быти само броеви 1. и 2. Проста измена одъ v са 1 и 2 показує да є само овай последньій брой доиста нѣнъ коренъ.

Овай єданъ коренъ $v_1 = 2$ садъ имаюћи, добыямо остала два, ако $(v^3 - 10v^2 + 17v - v)$ чрезъ $(v - 2)$ разделимо, количникъ $v^2 - 8v + 1 = 0$ поставимо и ову єдначину познатымъ начиномъ разрешимо. Ово учинивши показує се $v_2 = 4 + \sqrt{15}$, а $v_3 = 4 - \sqrt{15}$, и потоме посредствуюћа кубна єдначина има саме положне корене *), и ти су сви доистни.

Решена ова єдначина произишла є изъ єдначине подъ 3.) увећавајући корене ове єдначине у име истребльиваня разломака двапутъ (§ 46.). Корени дакле єдначине 3.) быт'ће двапутъ маньи, т. є.

$$x_1 = 1, \; x_2 = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{15}); \; x^3 = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{15}),$$

и збогъ тога корени єдначине 2.) по предходећемъ §-у

$$z = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(4 + \sqrt{15})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(4 - \sqrt{15})}$$

$$= 1 + \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} + \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$$

$$z_2 = 1 - \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} - \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}},$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} - \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$$

$$z_4 = 1 - \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} + \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}.$$

Но ова опетъ єдначина 2.) добывена є изъ дате єдначине истребльиванѣмъ другога члана; зато найпосле корени дате єдначине по 1.) мораю быти

---

*) Види шта показую у овомъ обзиру нѣни знаци? (§ 40.)

$$y_1 = 3 + \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} + \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$$

$$y_2 = 3 - \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} - \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$$

$$y_3 = 1 + \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} - \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$$

$$y_4 = 1 + \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}} + \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}},$$

или $\sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$ и $\sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{15}}$

познатымъ начиномъ определяваюћи *)

$$y_1 = 3 + \sqrt{5},\quad y_2 = 3 - \sqrt{5},\quad y_3 = 1 + \sqrt{3},\quad y_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$= 5{\cdot}236,\qquad = 0{\cdot}764,\qquad = 2{\cdot}732,\qquad = -\,0{\cdot}732.$$

3.) Єдначине осталы выши степена̑.

§ 60.

Начина за обште или алгебрайско решенѣ и выши єдначина̑ него одъ четвртога степена немамо, и не само да су дояко сва покушеня у томъ обзиру свагда остала безъ успѣха, него напротивъ іошъ имамо и више доказа, да є таково ньіово решенѣ управо немогуће **).

Но на срећу овай недостатакъ ніє за практику нинайманѣ штетанъ по томе, што найпосле свакій известный задатакъ излази на решенѣ бройне какве єдначине, рећи ће єдначине съ известнимъ бройнимъ сачинительима, за коє имамо не само више, но уедно и доста удесны начина̑. Осимъ тога све кадъ бы се найпосле и пронашао какавъ начинъ за то обште решенѣ выши єдначина̑, о коима говоримо, судећи по ономе за кубне, а особито за биквадратне, — быо бы безъ сваке сумнѣ, штогодъ є єдначина выша, све незгодніи и неупотребителніи, тако да бы спрамъ нѣга аритметично или бройно ньіово решенѣ свагда было несравнѣно пробитачніє.

---

*) $\sqrt{p \pm \sqrt{q}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(p + r)} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(p + r)}$, при чему $r = \sqrt{p^2 - q}$.

**) Међу другима види I. часть одъ Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik (Берлинъ год. 1826.) на стр. 65. „Beweis der Unmöglichkeit algebr. Gleichungen von höheren Graden als dem vierten algebraiſch aufzulöſen, von Abel."

§ 61.

Има вышн едначина̀, кое, каошто ћемо одма показати, лако можемо свести на друге млого нижега реда.

Найпростіи є случай у томъ смыслу, кадъ є едначина вида

$$x^{nm} + a_1 x^{n(m-1)} + a_2 x^{n(m-2)} + \ldots\ldots + a_{n-1} x^n + a_n = 0;$$

еръ узимаюћи само $x^n = y$, дакле $x = \sqrt[n]{y}$, добыямо едначину

$$y^m + a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} y + a_n = 0,$$

коя є n пута нижега реда.

§ 62.

Каошто се лако увиђа, одъ едначина̀ овога рода само се оне могу алгебрайски разрешити, при коима m ніє веће одъ броя 4; корене пакъ такове едначине добыямо, ако сведену едначину, коя є у томъ случаю 2., 3., или 4. степена, показанимъ начиномъ разрешимо, и после одъ свакогъ нѣногъ корена y сви n вредностій нѣговогъ $\sqrt[n]{}$ узмемо.

Єданъ ће намъ примеръ ово больма обяснити. Нека є дакле за решенѣ дата едначина

$$x^6 - 3x^4 - x^2 + 3 = 0.$$

Поставляюћи $x^2 = y$, или $x = \pm\sqrt{y}$, слѣдує кубна едначина

$$y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0,$$

кою разрешаваюћи, налазимо да су нѣни корени

$$y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ \text{и}\ y_3 = 3.$$

Корени дакле дате едначине єсу

$$x_1 = \sqrt{y_1} = 1,\ x_2 = -\sqrt{y_1} = -1,\ x_3 = \sqrt{y_2} = \sqrt{-1},$$

$$x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{-1},\ x_5 = \sqrt{y_3} = \sqrt{3},$$

$$x_6 = -\sqrt{y_3} = -\sqrt{3}.$$

Како добыямо сви n вредностій $\sqrt[n]{y}$ докъ є $n = 2^v, 3^\omega$ или $2^v . 3^\omega$, при чему у найпростіємъ случаю v и ω могу быти равни 0, — безъ сумнѣ немора се текъ казати; како ій пакъ налазимо ако є n другій некій, и уобште ма какавъ брой, видит' ћемо позднiє при решеню двочланы єднача'.

§ 63.

Другій родъ сведљивы єднача' у горнѣмъ смыслу сачинявају такозване

Превртне или реципроке єдначине.

Свака выша єдначина $f(x) = 0$ тога свойства, да є не само $x = \alpha$ но и $x = \frac{1}{\alpha}$ као коренъ задоволява: зове се **превртна** и познає се по томе, што су сачинительи свака два одъ краєва єднако удалѣна члана єднаки, иначе или єднако или разно означени.

§ 64.

Обштый є дакле видъ превртне єдначине

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm 1 = 0,$$

о чему се лако уверавамо, ако узмемо да є α єданъ нѣнъ коренъ, па x съ α заменимо, а после целу єдначину съ α^n разделимо и преокренемо; єръ тиме произходећа єдначина

$$\frac{1}{\alpha^n} + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \dots \pm a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} \pm a_1 \cdot \frac{1}{\alpha} \pm 1 = 0$$

добыя се такођеръ и поставлянѣмъ у прву просто $x = \frac{1}{\alpha}$, коє є очевиданъ доказъ, да є не само α но и $\frac{1}{\alpha}$ нѣнъ коренъ, и она дакле по горнѣму доиста превртна.

Збогъ овога свойства, каошто ћемо одма показати, могу се превртне єдначине свести на друге обичне много нижега степена.

§ 65.

Ако є превртна єдначина парнога степена $2n$, и нѣни су одъ краєва наєднако одстоєћи чланови єднако означени: онда можемо є свести на просту єдначину у пола нижега реда n.

Доказъ. Нѣнъ є видъ у томъ случаю

$$x^{2n}\pm a_1x^{2n-1}\pm a_2x^{2n-2}\pm\ldots\ldots\pm a_2x^2\pm a_1x+1=0.$$

Делећи є съ x^n, и єдноместне чланове одъ краєва спрежући слѣдує

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\pm a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)\pm a_2\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)\pm\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm a_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)\pm a_n=0.$$

Поставляюћи пакъ овде $x+\frac{1}{x}=z$ .... (1, дакле

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=z^2$ и одтудъ $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$,

$x^3+3x+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=z^3$ и одтудъ $x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$,

$x^4+4x^2+6+4\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=z^4$ и одтудъ $x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2$,

и т. д.,

и после уређуюћи добыя се очевидно єдначина вида

$$z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\ldots\ldots+b_{n-1}z+b_n-0,$$

коя є, каошто є речено, доиста у пола нижега реда.

§ 66.

Ако дакле превртна єдначина поменутога свойства ніє выша одъ 8. степена, онда можемо є алгебрайски разрешити, єръ се доводи показанимъ начиномъ на єдначину 4., 3. или 2. степена, за коє такова решеня имамо.

Примеръ. Имамо єдначину

$$x^6-3x^5+4x^4-5x^3+4x^2-3x+1=0.$$

Делећи є съ x^3 и спрежући єдноместне чланове, слѣдує

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0;$$

постављаюћи пакъ $x + \frac{1}{x} = z$, дакле

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2, \; x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z:$$

добыямо $z^3 - 3z^2 + z + 1 = 0$, єдначину **3.**, т є. доиста у пола нижега реда но што є дата.

Нѣни су корени $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + \sqrt{2}$ и $z_3 = 1 - \sqrt{2}$; корени дакле превртне єдначине збогъ

$$x + \frac{1}{x} = z, \text{ т. є. } x = \frac{1}{2}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 4}\right),$$

быт' ће

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-3}\right) \qquad x_4 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}\right)$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-3}\right) \qquad x_5 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}\right)$$

$$x_3 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}\right) \qquad x_6 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2} - \sqrt{-1 - 2\sqrt{2}}\right).$$

§ 67.

Ако є пакъ превртна єдначина парнога степена $2n$, но нѣни одъ краєва єднако одстоєћи чланови нису равно означени, т. є. ако є вида

$$x^{2n} \pm a_1 x^{2n-1} \pm a_2 x^{2n-2} \pm \ldots\ldots \mp a_2 x^2 \mp a_1 x - 1 = 0:$$

онда може се свести на іошъ нижій степенъ $(n - 1)$.

Доказъ. У овакой єдначини среднѣга члана нема. Спрежући дакле одъ краєва єднако одстоєће чланове слѣдує

$$(x^{2n} - 1) \pm a_1 x (x^{2n-2} - 1) \pm a_2 x^2 (x^{2n-4} - 1) \pm \ldots\ldots\ldots \pm$$
$$\pm a_{n-1} x^{n-1} (x^2 - 1) = 0,$$

одкуда видимо, да се такова єдначина свагда може раздѣлити съ $(x^2 - 1)$. Делећи є, и после све опетъ уређуюћи, добыямо єдначину

$$x^{2n-2} \pm a_1 x^{2n-3} + (1 \pm a_2) x^{2n-4} \pm \ldots\ldots + (1 \pm a_2) x^2 \pm$$
$$\pm a_1 x + 1 = 0;$$

коя є $(2n-2)$. реда, дакле у два степена нижа него дата. Како є пакъ иста едначина осимъ тога опетъ превртна, а паркога степена съ еднако означенимъ члановима одъ краева: то є по пређашнѢмъ §-у можемо свести на едначину упола нижега, т. є. $\frac{2n-2}{2} = n - 1$ реда, чимъ є горнѢ изреченѢ о превртнимъ едначинама вопросног вида изванъ сваке сумнѢ.

§ 68.

Такове се дакле едначине могу разрешити алгебрайски докъ нису выше одъ 10. степена, єръ се дотле могу свести на просте едначине одъ найвыше 4. степена.

Примеръ. Дата є превртна едначина

$$x^{10} + x^9 - 4x^8 + x^7 + x^6 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0.$$

Спрежући едноместне чланове добыямо

$$(x^{10}-1) + x(x^8-1) - 4x^2(x^6-1) + x^3(x^4-1) + x^4(x^2-1) = 0.$$

Делећи съ (x^2-1) и опетъ уређуюћи

$$x^8 + x^7 - 3x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Делећи съ x^4 и едноместне чланове после спрежући

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\ 0.$$

Поставляюћи $x + \frac{1}{x} = z$ и уређуюћи

$$z^4 + z^3 - 7z^2 - z + 6 = 0.$$

Найпосле ову едначину разрешаваюћи

$$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = 2,\ z_4 = -3.$$

Корени дакле дате едначине єсу:

1.) збогъ дељивости съ (x^2-1)

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1$$

2.) збогъ $x + \frac{1}{x} = z$, т. є. $x = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4})$

$$x_3 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}); \quad x_4 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$$

$$x_5 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}), \quad x_6 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$$

$$x_7 = \tfrac{1}{2}(2 + \sqrt{0}) = 1, \quad x_8 = 1$$

$$x_9 = \tfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}); \quad x_{10} = \tfrac{1}{2}(-3 - \sqrt{5}).$$

§ 69.

Найпосле ако є превртна єдначина непарнога степена $(2n + 1)$, онда можемо є свагда свести на єдначину само n. реда, были притомъ нѣни одъ краєва єднако одстоєћи чланови єднако означеня или не.

Доказъ. Видъ є такове єдначине уобште (т. є. сватаюћи оба могућа случая у смотреню знакова єднако одстоєћи чланова) овай

$$x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \ldots\ldots\ldots \pm a_2 x^2 \pm a_1 x \pm 1 = 0.$$

Срежући єдноместне чланове имамо

$$(x^{2n+1} \pm 1) + a_1 x (x^{2n-1} \pm 1) + a_2 x^2 (x^{2n-3} \pm 1) + \ldots\ldots +$$
$$+ a_n x^n (x \pm 1) = 0,$$

одкуда видимо, да се такова єдначина у првомъ случаю знакова свагда може разделити съ $(x + 1)$, а у другомъ съ $(x - 1)$. Делећи є и све опетъ урећуюћи слѣдує єдначина

$$x^{2n} \mp (1 \mp a_1) x^{2n-1} + (1 \mp a_1 + a_2) x^{2n-2} \mp \ldots\ldots +$$
$$+ (1 \mp a_1 + a_2) x^2 \mp (1 \mp a_1) x + 1 = 0,$$

коя є превртна парнога степена $2n$ съ єднако означенимъ єдноместнимъ члановима, и коя се дакле по §-у 65. свагда може свести на єдначину у пола нижега реда n, чимъ є горнѣ изреченѣ потврћено.

§ 70.

По овоме превртне єдначине непарногъ степена могу се алгебрайски разрешити докъ нису выше одъ 9. степена.

Примеръ. Дата є превртна єдначина непарногъ степена $x^5 - 5x^3 + 5x^2 - 1 = 0$.

Спрежући єдноместне чланове имамо

$$(x^5 - 1) - 5x^2(x - 1) = 0,$$

а после съ $(x - 1)$ делећи, превртну єдначину 4. степена съ єднако означенимъ єдноместнимъ члановима

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

Делећи садъ съ x^2 и єдноместне чланове опетъ спрежући, слѣдує

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0, \text{ а } x + \frac{1}{x} = z,$$

дакле $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ постављаюћи,

$$z^2 + z - 6 = 0,$$

єдначина другога степена, коє су корени

$$z_1 = 2 \text{ и } z_2 = -3.$$

Корени дакле дате єдначине быт' ће: збогъ дельивости съ $(x - 1)$

$x_1 = 1$, а збогъ $x + \frac{1}{x} = z$, т. є. $x = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{z^2 - 4})$

$x_2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{4 - 4}) = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{4 - 4}) = 1$,

$x_4 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{9 - 4}) = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5})$, $x_5 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{5})$.

§ 71.

Има іошъ и трећій родъ выши єдначина', коє се даю свести на ниже; то су такозване **биномне** или **двочлане** єдначине, т. є. єдначине вида $x^n \pm a = 0$; но о тима говорит' ћемо пространо и згодніє на другомъ месту. Овде само примећавамо, да те єдначине, узимаюћи $x^n = ay^n$, прелазе у превртне вида $z^n \pm 1 = 0$, и могу се као такове по предходећимъ §§-а алгебрайски разрешити, докъ нису выше одъ 10. степена.

д) Бройно решенѣ бройны єдначина'.

§ 72.

Каошто є познато, **бройномъ** називамо сваку ону єдначину, при коіой су сви сачинительи известни броєви.

За решенѣ таковы єдначина' казали смо (у §-у 60.) има више, и више или манѣ удобны начина'; али нама недозволявају границе овога дѣла, да се упустимо у излаганѣ више ньи; тога ради показат'ћемо у слѣдуюћимъ §§-а само єданъ, изъ свію нама познаты тако сложенъ, каошто налазимо да ће за употреблѣнѣ быти найудобніє.

Найпосле, будући да є притомъ полза одъ єдначина' са целимъ сачинительима много већа, него што є трудъ за преображаванѣ у такове єдначине: то предпоставлямо овде за сва слѣдуюћа испытиваня єдначине само са целимъ сачинительима.

1.) Определьиванѣ броя доистны и мнимы корена'.

§ 73.

При решеню какве бройне єдначине пре свега валя испытати, колико има доистны, а колико мнимы корена'.

За то имамо по професору **Штурму** у Паризу слѣдуюћій, колико удобный толико и научно занимльивый начинъ,*) при комъ се само предпоставля да вопросна єдначина нема єднаки корена', или да смо нѣне чинителѣ одъ таковы корена (по §-у 47.) већъ уклонили.

1.) Направи по §-у 11. прву изводну функцію полинома дате єдначине, и поступай после съ ньомъ и овымъ онако, као да хоћешъ изнаћи ньіову найвећу заєдничку меру (§. 15.), съ томъ само приметбомъ, да свакомъ остатку, пре него га употребишъ за делителя, знаке променишъ.

За дальій посао нека є, ради краткоће, полиномъ дате єдначине V, нѣгова прва изводна функція V_1, а остатци съ променутимъ знацима редомъ V_2, V_3, V_4, ... Ако є V одъ n. степена, быт'ће наравно V_1 одъ $(n-1)$., V_2 одъ $(n-2)$., ... V_{n-1} одъ 1., а V_n или последньій остатакъ некій сталанъ брой.

---

*) Види „mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences T. VI. 1835.“

2.) Напиши све ове функціе у єдну врсту; постави у свакой $x = -\infty$, $x = 0$ и $x = +\infty$; бележи узъ нъи онай знакъ, кои добыя вредность сваке, за сваку одъ ове три вредности броя x, и после изброй и напиши подъ сваку значну врсту брой у нъой налазећи се мена. Найпосле

3.) Одузми одъ броя мена' за $x = -\infty$ мене за $x = +\infty$, остатакъ быт'ће брой доистны корена' вопросне єдначине; ако пакъ овай брой одбієшъ одъ нѣнога имена (найвећегъ изложителя), добыт'ћешъ брой нѣны мнимы корена'.

Колико има одречны корена', а колико положны — разуме се доистны —, дознат'ћешъ уєдно, ако одъ мена' за $x = -$ и $+\infty$ одузмешъ мене за $x = 0$; првый т. є. остатакъ быт'ће брой одречны, а онай другій брой положны корена'.

§ 74.

За болѣ обяснѣнѣ да узмемо одма єданъ примеръ.

Нека є дата єдначина $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$.

Нѣна прва изводна функція быт'ће по §-у 11.

$$V_1 = 4x^3 - 24x^2 + 28x + 4.$$

Делећи дакле $V : V_1$ налазимо, ако найпре разделимо V_1 са 4, количникъ $x - 2$, а остатакъ съ већъ променутимъ знацима

$$V_2 = 5x^2 - 17x + 6.$$

$V_1 : V_2$ пакъ, ако найпре разделимо V_2 съ 5, дає количникъ $x - 2{\cdot}6$, а остатакъ съ променутимъ знацима

$$V_3 = 3x - 4{\cdot}1.$$

Найпосле слѣдує одъ $V_2 : V_3$, ако найпре разделимо V_3 съ 3, количникъ $x - 2{\cdot}03$, а последнъій остатакъ съ променутимъ знакомъ

$$V_4 = 1{\cdot}58, \text{ сталанъ брой!}$$

У овомъ дакле случаю имамо по предходећемъ §-у подъ 2.)

	за $x = -\infty$,	$= 0$,	$= +\infty$
$V = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8$ . . .	$+$	$-$	$+$
$V_1 = 4x^3 - 24x^2 + 28x + 4$	$-$	$+$	$+$
$V_2 = 5x^2 - 17x + 6$	$+$	$+$	$+$
$V_3 = 3x - 4{\cdot}1$	$-$	$-$	$+$
$V_4 = 1{\cdot}58$	$+$	$+$	$+$
мена'	4	3	0,

и зато вопросна єдначина по 3.) има $4 - 0 = 4$ доистна корена, одъ кои' су $4 - 3 = 1$ одречанъ, а $3 - 0 = 3$ положна; но више корена по §-у 37. и неможе имати, коє показуе такођеръ и разлика одъ найвећегъ изложителя и броя доистны корена', у име нѣны мнимы корена', $4 - 4 = 0$.

Ову смо мы єдначину већъ разрешили у §-у 59. и нашли смо, да су нѣни корени $x_1 = 5{\cdot}236$, $x_2 = 0{\cdot}764$, $x_3 = 2{\cdot}732$ и $x_4 = -0{\cdot}732$; дакле доиста сви реелни и одъ тій, каошто смо одкрили 3 положна, а 1 одречанъ.

§ 75.

Овай поступакъ основанъ є на слѣдуюћемъ свойству онако произведены функція V, V_1, V_2, ...: **ако се у реду исты функція за $x = \alpha$ покажу p, а за $x = \beta$ q значны мена', онда између α и β, предпостављаюћи да є $\alpha < \beta$, леже известно $p - q$ корена вопросне єдначине; и по томе ако p испадне $= q$, онда између исты броева α и β неналази се ніеданъ нѣнъ коренъ.**

Да бы се о овоме уверили треба слѣдуюће приметити.

§ 76.

1.) Поставляюћи у некой функціи $f(x)$ за x све одъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ лежеће наставне вредности, нѣна вредность по §-у 41. неменя дотле свой знакъ, докъ се коя одъ нъи непокаже као нѣнъ коренъ. Ово важи наравно и за функціє V, V_1, V_2, ..., и по томе **у реду знакова овы функція остає одъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ дотле истый брой мена' и слѣдій, докъ се коя одъ нъи некомъ између броева α и β лежећомъ вредности непотре.**

2.) Предпоставляюћи количнике кое добыямо при производеню функція V, V_1, V_2, ..., но безъ да смо притомъ кою съ каквимъ броемъ помложили или разделили, редомъ съ q_1, q_2, q_3, ... q_{n-1}, — имамо

$$V = V_1 q_1 - V_2,\ V_1 = V_2 q_2 - V_3,\ V_2 = V_3 q_3 - V_4,$$

$$\cdot\ \cdot$$

$$V_{k-1} = V_k q_k - V_{k+1};\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ V_{n-2} = V_{n-1} q_{n-1} - V_n;$$

одтудъ пакъ видимо: **ако се коя одъ овы функція, н. п. V_k, некомъ вредности одъ x потире, онда оближнѣ две функціє V_{k-1} и V_{k+1} имаю противне знаке, и немогу се никадъ съ ономъ вредности одъ x такођеръ потрти**, єръ бы ово иначе по §-у 14. значило, да єдначина има єднаки корена', а мы смо є у §-у 73. предпоставили съ разнимъ коренима. И све ово постои безъ сумнѣ и ако кою одъ свію оны функція съ каквимъ сталнимъ **положнимъ** броємъ или помложимо или разделимо. Далѣ

§ 77.

При постепеномъ заменьиваню одъ x у реду функція V, V_1, V_2, ... са свима међу $x = \alpha$ и $x = \beta$ лежећимъ наставнимъ вредностима, може се догодити, да се некомъ одъ тій вредностій или коя одъ произведены функція V_1, V_2, ..., или пакъ самъ полиномъ єдначине, т. є. функція V потре. Зато

3.) Нека є за $x = \gamma$ н. п. $V_k = o$. У томъ случаю по предходећемъ докученю оближнѣ две функціє V_{k-1} и V_{k+1} имаю различне знаке; но оне притомъ по 1. докученю свой знакъ неменяю; слѣдователно у томъ случаю остає у реду знакова свію функція за $x = \gamma + h$ онай истый брой мена' и слѣдій, кои є быо за $x = \gamma - h$, ако є притомъ h изчезљиво мале вредности.

Кадгодъ се дакле коя одъ произведены функція V_2, V_2, V_3, ... некомъ наставномъ вредности одъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ потре, брой мена' и слѣдій у реду знакова свію функція немена се.

4.) Ако є пакъ найпосле за $x = \gamma$ самъ полиномъ єдначине, т. є. функція $V = o$, то ће рећи ако є γ коренъ єдначине: онда по 2. докученю предходећегъ §-а функція V_1 неможе быти такођеръ равна нулли, єръ єдначина нема єднаки корена'. Но у томъ є случаю осимъ тога збогъ

$$f(x \mp h) = f(x) \mp f_1(x)h + f_2(x)\frac{h_2}{2!} \mp \ldots.,\ x=\gamma \text{ и}$$

изчезльивога h: $f(\gamma \mp h) = \mp f_1(\gamma)h + \ldots.$, т. є. при $x = \gamma - h$

$$V = - V_1 h + \ldots.,\ \text{ а}$$

при $x = \gamma + h$ $V = + V_1 h + \ldots..$

Функціє дакле V и V_1 имаю у томъ случаю за $x = \gamma - h$ различне, а за $x = \gamma + h$ єднаке знаке, и та премена долази очевидно одъ саме функціє V, єръ функція V_1 притомъ по 1. докученю пређашнѣгъ §-а свой знакъ неменя. По томе у реду знакова за $x = \gamma + h$ быт'ће єдна мена манѣ него за $x = \gamma - h$.

Кадгодъ дакле између две замене $x = \gamma - h$ и $x = \gamma + h$ лежи єданъ коренъ єдначине $x = \gamma$ (т. є. єдна вредность, за кою быва $V = 0$), губи се у реду знакова свію функція за последню замену $x = \gamma + h$ єдна мена.

§ 78.

Сабираюћи садъ сва ова докученя налазимо: **функціє $V, V_1, V_2, \ldots.$ задржавaю своє знаке, и дакле у реду ньіовы знакова остає дотле истый брой мена' и слѣдій, докъ се за x узимаю такове вредности, кое функцію V (т. є. полиномъ єдначине) непотиру; чимъ бы се пакъ притомъ наишло на неку вредность $x=\gamma$, за кою є $V=0$, то ће рећи, коя є коренъ єдначине, — одма се губи у реду знакова за слѣдуюћу замену $x = \gamma + h$ єдна мена (т. є. за ово x быт'ће у реду знакова єдна мена манѣ, него за $x = \gamma - h$).**

Ово є доказано истина само за изчезльиво h, но лако є увидити да постои и за сваковеће h дотле, докъ између $(\gamma - h)$ и γ, или између γ и $(\gamma + h)$ нележи іошъ кои коренъ єдначине.

Колико се годъ пута дакле одъ $x = \alpha$ до $x = \beta$ наиђе на такове вредности одъ x, толико ће се пута

свагда по една мена изгубити, тако да ће у реду знакова за $x = \beta$ доиста оволико мена' манѣ быти, него у реду за $x = \alpha$, колико између α и β буде лежало корена' едначине, чимъ є изреченѣ §-а 75. доказано, и дакле у §-у 73. описаный поступакъ за определьиванѣ броя доистны корена' бройне какве едначине оправданъ.

§ 79.

Зашто се при томе за α и β у име доистны корена' узимаю вредности $-\infty$ и $+\infty$, за одречне $-\infty$ и 0, а за положне 0 и $+\infty$, — увиђа се безъ сумнѣ по себи, и нама дакле само іошъ остає приметити

1.) Да се при произвођеню функція $V_2, V_3, \ldots.$ посао знатно олакшава, ако се свакій онай делитель, коега се првый сачинитель у првомъ сачинителю делимка точно несадржи, найпре са тимъ нѣговимъ сачинителѣмъ раздели. (Види то у примеру §-а 74.).

2.) Да є како при томе, тако и за определьиванѣ знакова функція сасвимъ свеєдно, хоћемо ли узети оригиналне функціє $V_1, V_2, V_3 \ldots.$, или пакъ оно што се добыє одъ ньи пређепоменутомъ деобомъ. Найпосле

3.) Будући да се функціє $V_2, V_3, V_4, \ldots.$ онимъ истимъ начиномъ определяваю, коимъ се испытує има ли вопросна едначина еднаки корена': то се обадва та посла могу свршити уеданпутъ и предпоставлѣнѣ є дакле, да за овай начинъ определьиваня рода и броя корена вопросна едначина несме имати еднаки корена', излишно. Ако дата едначина има еднаки корена, онда последньій остатакъ неће быти некій сталанъ бройй, него нулла. У томъ случаю валя разделити полиномъ едначине съ последньимъ делителѣмъ, и после како овога тако исто и количникъ поставити $= 0$. Прва едначина садржат'ће еднаке корене, а она друга само неєднаке корене дате едначине; брой пакъ и родъ овы последньи корена одкрит'ће се, ако се на ту другу едначину наново употреби начинъ §-а 73. *)

---

*) Господинъ Штурмъ напоминѣ у 26. §-у свога, академіи Паризской поднешенога доказа, како бы се место прве изводне ф. V_1 могле

2.) Определьиванѣ граница̀ доистны корена̀.

§ 80.

Другій посао при разрешеню бройны єдначина састои се у определьиваню граница̀ доистны корена̀.

Подъ тимъ границама разумемо такова два цела броя, єданъ положанъ а другій одречанъ: кои све доистне корене дате неке бройне єдначине найтешнѣ заключаваю. Означаваюћи положну границу съ $\underset{+}{G}$, а одречну съ $\underset{-}{G}$, мора быти дакле $\underset{+}{G}$ **найманьій цео положанъ** брой, одъ коєга положни, а $\underset{-}{G}$ **найманьій цео одречанъ** брой, одъ коєга нѣни одречни корени несмеду быти веѣи.

Да є пакъ познаванѣ тій броєва за удобніє решенѣ бройны єдначина̀ необходно нуждно, видит'ће се найболѣ изъ поздніи послова.

§ 81.

Положну границу $\underset{+}{G}$ налазимо найпоузданіє по Нютену на слѣдуюћій простый начинъ.

Треба найпре преобразити дату єдначину $f(x) = o$ по §-у 44. у такову другу $\varphi(y) = o$, коя има у k єдиница̀ манѣ корене, т. є. у коіой є свакій коренъ $y = x - k$; после пакъ валя изнаћи (кушанѣмъ) за k найманьій положанъ цео брой тога свойства, да сви сачинители те нове єдначине

употребити и друге ф. $(n-1)$. степена, коє су спрамъ ф. V (полному єдначине), у смотреню нѣны корена, онакв исты свойства као прва нѣна изводна ф. V_1; но да се такове ф. унапредъ (a priori) немогу определити, збогъ чега смо преморани служити се ономъ. Г. Іоахимсталъ пакъ (у Халле) показао є год. 1854. у 48. части — у §-у 60. споменутогъ — Креловогъ журнала, не само да се, но и како се такове ф. могу определити унапредъ. Овай посао Г. Іоахимстала врло є занимльивъ и одъ велике научне вредности, али практично одъ слабе користи; єръ є начинъ коимъ се по истоме долази до онаковы ф. место V_1, свакояко теготніи одъ произвођеня ове последнѣ, и збогъ тога употребит'ће се у Штурмовомъ начину ф. V_1 не више изъ нужде, но збогъ овогъ нѣногъ практичногъ преимућства. — Друга іошъ разсматраня истогъ начина наћи ће любопытный мой ученикъ у Liouville'скомъ журналу часть VI. и XI.

$$\varphi(y) = y^n + \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(k) y^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} f_{n-2}(k) y^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f_1(k)\, y + f(k) = 0$$

испадну положни. Ѥръ тадъ ће быти сви нѣни корени по §-у 40. (слѣд. 2.) одречни, одкуда слѣдуе да є $k > x$; како є пакъ k найманьій тога свойства цео брой, то є дакле исто k по предходећемъ §-у тражена граница $\underset{+}{G}$.

Исто тако добыямо и одречну границу $\underset{-}{G}$, само што за ню треба найпре преобразити дату єдначину у другу съ одречнимъ истимъ коренима.

§ 82.

Упражнѣня ради изнађимо границе єдначине

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$ (§ 59. и 74.).

Поставляюћи $x = y + k$ имамо по §-у 11.

$$\varphi(y) = y^4 + \frac{1}{3!} f_3(k) y^3 + \frac{1}{2!} f_2(k) y^2 + f_1(k) y + f(k) = 0$$

$f(k) = k^4 - 8k^3 + 14k^2 + 4k - 8$

$f_1(k) = 4k^3 - 24k^2 + 28k + 4$

$f_2(k) = 12k^2 - 48k + 28$

$f_3(k) = 24k - 48$; после неколико замена' пакъ налазимо да є наймањ k, за кое све ове изводне функціє постаю положне, брой 6; положна є дакле граница доистны корена' вопросне єдначине $\underset{+}{G} = 6$.

После преображая исте єдначине у другу съ одречнимъ коренима, добыямо

$f(k) = k^4 + 8k^3 + 14k^2 - 4k - 8$

$f_1(k) = 4k^3 + 24k^2 + 28k - 4$

$f_2(k) = 12k^2 + 48k + 28$

$f_3(k) = 24k + 48$, а одма прва замена показуе, да за $k = 1$ све ове функціє постаю положне, т. є. да є граница одречны корена' $\underset{-}{G} = -1$.

По томе доистни корени вопросне єдначине леж између броєва $+6$ и -1. (Види § 59.).

3.) Определьиванѣ раціоналны корена́.

§ 83.

Докучивши границе доистны корена́ за решенѣ дате бройне єдначине, приступа се далѣ къ определьиваню самы вредностій исты корена́, и при томе опетъ свагда найпре къ определьиваню раціоналны корена́.

У §-у 72. предпоставили смо да су сачинительи вопросне єдначине цели броєви, а у §-у 42. видили смо да раціонални корени такове єдначине никадъ немогу быти разломци. Како є пакъ найпосле по §-у 38. последньій чланъ полинома сваке выше єдначине производъ одъ свію нѣны корена́: то се изъ свега тога лако увиђа, да ћемо раціоналне корене дате єдначине изнаћи, ако найпре нѣнъ последньій чланъ на све нѣгове просте и сложене чинителѣ разложимо, и после са свакимъ одъ оны, кои леже међу нађенимъ границама нѣны доистны корена́, кушамо, да ли іой као коренъ одговара, узимаюћи притомъ, у случаю ако иста єдначина има и одречны корена́, свакогъ єданпутъ съ положнимъ, другій путъ пакъ съ одречнимъ знакомъ.

Ово є заменьиванѣ, кадгодъ млоги чинительи последнѣга члана леже међу поменутимъ границама, доста дангубно; зато ћемо одма показати, коимъ се начиномъ испытиванѣ исты чинителя може олакшати.

§ 84.

Узмимо да є за решенѣ дата єдначина

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$

и ω доиста єданъ нѣнъ коренъ.

Поставляюћи овай коренъ место x добыямо

$$\omega^4 + a_1 \omega^3 + a_2 \omega^2 + a_3 \omega + a_4 = 0,$$

и одтудъ

$$a_4 = -\omega\,(a_3 + a_2 \omega + a_1 \omega^2 + \omega^3);$$

како є пакъ десна часть ове єдначине раздельива съ ω, то мора быти и лева, т. є. $a_4 : \omega = b_1$ мора быти цео брой. Делећи дакле съ ω слѣдує далѣ

$$b_1 = -a_3 - \omega(a_2 + a_1\omega + \omega^2),$$

и одтудъ

$$b_1 + a_3 = -\omega(a_2 + a_1\omega + \omega^2).$$

Десна є часть овде опетъ дельива съ ω, мора быти дакле и лева, и зато є количникъ $(b_1 + a_3) : \omega = b_2$ цео брой. Свршуюћи деобу имамо $b_2 = -a_2 - \omega(a_1 + \omega)$, или $b_2 + a_2 = -\omega(a_1 + \omega)$; дакле збогъ дельивости деске части съ ω опетъ $(b_2 + a_2) : \omega = b_3$ цео брой, а по свршеной деоби $b_3 = -a_1 - \omega$, или $b_3 + a_1 = -\omega$, и зато $(b_3 + a_1) : \omega = b_4$ цео брой, а после свршене деобе съ ω найпосле $b_4 = -1$, т. є. $b_4 + 1 = 0$.

Да бы дакле извидили кои одъ оны међу нађенимъ границама лежећи чинителя последнѣга члана, єсте коренъ єдначине, а кои ніє: треба са свакимъ одъ нъи (узимаюћи га, каошто є речено, єданпутъ положна, а другій путъ одречна) последньій чланъ разделити, количнику — кои ће свагда быти цео брой — предходећегъ сачинителя єдначине додати, овай сбиръ после опетъ съ вопроснимъ чинителѣмъ разделити и количнику предходећегъ сачинителя додати, и тимъ начиномъ далѣ поступати докъ или ненађемо да се последньій сбиръ (т. є. последньій количникъ са сачинителѣмъ 1 првога члана єдначине) потире, или пакъ докъ се непояви разломакъ као количникъ; у првомъ є случаю кушаный чинитель последнѣга члана доиста коренъ дате єдначине, а у другомъ случаю ніє.

Да є овай начинъ испытиваня корена много простіи него просто заменьиванѣ, непотребує никаква доказа.

§ 85.

Изнађимо раціоналне корене єдначине

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0.$$

Чинительи су последнѣга члана броєви **1**, **2**, **4** и **8**; по §-у **80**. су пакъ границе доистны корена те єдначине $\underset{+}{G} = 6$, а $\underset{-}{G} = -1$; одъ тій чинителя дакле могу быти корени єдначине само положни броєви **1**, **2** и **4**.

Да положна єдиница ніє коренъ дознаєсе (найпростіє) заменомъ, єръ место да полиномъ єдначине потире, оставля као нѣгову вредность $1 - 8 + 14 + 4 - 8 = 3$. Како се пакъ остала два чинителя владаю у томъ обзиру, видит' ћемо поступаюћи съ нњима по предходећемъ §-у.

$$-8:2=-4,\ -4+4=0,\ 0:2=0,\ 0+14=14,$$
$$14:2=7,\ 7-8=-1,\ -1:2=-\frac{1}{2};$$

дакле брой $+2$ ніє коренъ єдначине.

$$-8:4=-2,\ -2+4=2,\ 2:4=\frac{1}{2},$$

збогъ чега брой $+4$ такођеръ ніє коренъ.

Дата дакле єдначина нема раціоналны корена, а то знамо већъ изъ §-а 59., гди смо нашли, да су сви нѣни корени ирраціонални.

§ 86.

Но да узмемо іошъ и єдначину

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0.$$

Определююћи границе доистны нѣны корена по §-у 79. налазимо да є $\overset{+}{G} = 3$, а $\overset{-}{G} = -4$; чинительи пакъ нѣногъ последнѣгъ члана 6, єсу 1, 2, 3 и 6; по томе нѣни положни корени могу быти само броєви 1 и 2, а одречни 1, 2 и 3.

Да є како положна тако и одречна єдиница доиста нѣнъ коренъ, показуе проста замена, коіомъ налазимо за $x = +1$ полиномъ єдначине $1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 8 - 8 = 0$, а за $x = -1$, $1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 7 - 7 = 0$.

Да ли пакъ одговараю као корени и остали споменути броєви, показат' ће слѣдуюћій посао.

$$6:2=3,\ 3-1=2,\ 2:2=1,\ 1-7=-6,\ -6:2=-3,$$
$$-3+1=-2,\ -2:2=-1,\ 1+1=0;$$

дакле брой $+2$ єсте коренъ.

$$6:-2=-3,\ -3-1=-4,\ -4:-2=2,\ 2-7=-5,$$

$-5:-2=\frac{5}{2}$, збогъ чега брой -2 ніє коренъ. Найпосле

$6 : -3 = -2,\ -2 - 1 = -3,\ -3 : -3 = 1,\ 1 - 7 = -6,$
$-6 : -3 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 : -3 = -1,\ -1 + 1 = 0,$
и тако брой -3 есте коренъ.

Дата еднучина дакле има саме раціоналне корене, и ти су броеви $+1$, $+2$, -1 и -3.

4.) Определьиванѣ ирраціоналны корена'.

§ 87.

За ово е пре свега потребно да свакій одъ тій корена' доведемо у найтешнѣ целе границе, т. е. да испытамо: између коя, међусобомъ само єдномъ єдиницомъ разликуюћа се два цела, положна или одречна броя, свакій одъ нъи лежи.

То докучуемо найудобніе на основу §-а 75. помоћу функція V, V_1, V_2 . . . . . . , постављаюћи у истима место x редомъ све целе, међусобомъ само єдномъ єдиницомъ разликуюће се броеве одъ $\underset{+}{G}$ до $\underset{-}{G}$. Овай ћемо посао себи яко олакшати, ако найпре вопросну єдначину представимо подобно слѣдуюћой

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0,$$
$$[\{(x - 8)\, x + 14\}\, x + 4]\, x - 8 = 0;$$

и после ту узмемо за x редомъ свакій одъ поменуты броєва.

Притомъ може се догодити, да се некимъ одъ тій броєва коя одъ оны функція, н. п. V_k потире. У томъ случаю треба узети у дотичномъ значномъ реду, да небы быо прекинутъ, место те потрвене функціє, т. є. место 0, знакъ или $+$ или $-$. Кои ћемо одъ ова два знака употребити свеєдно є по томе, што оближнѣ две функціє V_{k-1} и V_{k+1} у истомъ случаю (по 2. докученю §-а 76.) имаю различне знаке, и што дакле ма кои одъ нъи узели, у ономъ реду знакова єданъ истый брой мена' и слѣдій добыямо.

Тако н. п. налазимо тимъ начиномъ при єдначини $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = 0$, коя, каошто знамо, има саме ирраціоналне корене међу границама $\underset{-}{G} = -1$ и $\underset{+}{G} = 6$:

за $x =$	-1,	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6
V	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
V_1	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
V_2	$+$	$+$	$-$	$+$	$-+$	$+$	$+$	$+$
V_3	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
V_4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
мена'	4	3	2	2	1	1	1	0.

Дакле лежи єданъ ирраціоналный коренъ те єдначине између -1 и 0, другій између 0 и $+1$; трећій између 2 и 3, найпосле четвртый између 5 и 6. (Види § 59.).

§ 88.

Овай є посао у случаю кадъ границе $\underset{+}{G}$ и $\underset{-}{G}$ иоле раздалеко леже, доста дангубанъ; зато показат'ћемо како га у таковомъ случаю можемо скратити и олакшати.

То быва помоћу іошъ две, такозване **унутрашнѣ** границе $\underset{+}{g}$ и $\underset{-}{g}$, т. є. два цела броя, єданъ положанъ а другій одречанъ тога свойства: да одъ првога буду сви положни корени, а одъ другога сви одречни већи, и они сами притомъ по могућству найвећи. Те границе определивши узимамо т. є. после у функціяма V, V_1, V_2, ..., за x редомъ само оне целе, єдномъ єдиницомъ различне броєве, кои леже између $\underset{+}{G}$ и $\underset{+}{g}$, $\underset{-}{G}$ и $\underset{-}{g}$. Н. п. кадъ бы границе $\underset{+}{G}$ и $\underset{-}{G}$ неке єдначине были броєви 10 и -7, имали бы безъ унутрашнѣи граница' у функціяма V, V_1, V_2 . . . . . за тешнѣ ограничаванѣ ирраціоналны корена' свега 18 замена', помоћу тій граница' пакъ, ако бы быле унутрашнѣ границе $\underset{+}{g} = 6$ и $\underset{-}{g} = -4$, само 9; уштедили бы дакле съ нѣима у томъ случаю 9 замена'.

Да су ове унутрашнѣ границе одъ велике помоћи и при определѣиваню раціоналны корена' *у случаю*, кадъ између $\underset{+}{G}$ и $\underset{-}{G}$ леже многи чинительи последнѣга члана: увиђа се лако по себи; єрь тадъ место свію тій чинителя имамо (показанимъ начиномъ у §-у 84.) за положне корене само оне испытати, кои леже између $\underset{+}{G}$ и $\underset{+}{g}$, а за одречне опетъ само оне, кои су између $\underset{-}{G}$ и $\underset{-}{g}$, чимъ се очевидно уштеђуе млого посла. Трудъ дакле за определьиванѣ унутрашньи граница у поменутомъ случаю тимъ манѣ валѣ штедити, што є осимъ тога іошъ и посао коимъ до ньи долазимо, каошто ћемо сниже видити, сасвимъ простъ.

§ 89.

Ако се при постепеномъ заменьиваню свію целы броева одъ $\underset{+}{G}$ до $\underset{+}{g}$ и одъ $\underset{-}{g}$ до $\underset{-}{G}$ (§ 87.) случи, да се између две такове (т. є. само единицомъ различне) замене појаве два или више корена: онда, да бы ове одлучили, т. є. да бы ій у особене границе довели, валя као среднѣ замене између оне две узети у помоћь разломке; колико, завыси одъ мложине тако явивши се корена’, а у коликомъ међусобномъ разстоянію, одъ собствене разсуде.

Непояве ли се ни притомъ сви дотични корени обашка, онда треба узети іошъ више — дакле међусобомъ съ маньомъ вредности разликуюћи се — средньи замена, и то ће се дотле повторавати, докъ неизађе свакій коренъ самъ између две замене. — Ово безъ сумнѣ непотребуе дальга обясняваня, каогодъ и да ће особито у таковомъ случаю оно, у пређашнѣмъ §-у поменуто представлянѣ вопросне єдначине, показати се као врло користно.

§ 90.

Положну унутрашню границу доистны корена’ добыямо, ако найпре дату єдначину $f(x) = 0$, узимаюћи $x = \frac{1}{y}$, преобразимо у другу $\varphi(y) = 0$, и после за ову определимо по §-у 81. положну (спольню) границу $\underset{+}{G'}$. Єръ тадъ є збогъ $\underset{+}{G'} > \left(y = \frac{1}{x}\right)$, $x > \frac{1}{\underset{+}{G'}}$; будући є пакъ $\underset{+}{G'}$ найманьій брой, кои є одъ свакога корена y нове єдначине већій, то є дакле $\frac{1}{\underset{+}{G'}}$ найвећій брой, кои є одъ свакога корена x дате єдначине маньи, а то ће по §-у 88. рећи: да є $\frac{1}{\underset{+}{G'}} = \underset{+}{g}$ тражена унутрашня граница.

На истый начинъ налазимо и одречну границу g, само што за ову морамо найпре дату єдначину превести у другу $f(-x) = 0$ съ одречнимъ, бройно истимъ коренима.

§ 91.

Дознавши границе свакогъ ирраціоналнога корена дате бройне єдначине, опредѣлюємо после вредности тій корена' найудобніє на слѣдуюћій **приближный** начинъ.

Ако смо н. п. нашли да єданъ ирраціоналный коренъ α єдначине $f(x) = 0$ лежи између броєва s_1 и s_2: онда валя узети у истой место x єданпутъ s_1 а другій путъ s_2 и резултате полинома за обе те замене израчунити. Тай ће посао быти яко олакшанъ, ако полиномъ єдначине найпре представимо онако, каошто смо показали у §-у 87. Предпоставляюћи резултатъ одъ прве замене са R_1 а одъ оне друге са R_2, имамо после као приближну вредность траженога корена

$$\alpha_1 = \frac{s_1 R_2 - s_2 R_1}{R_2 - R_1} = \frac{s_2 R_1 - s_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

Нека є далѣ съ томъ вредности место x израчунѣный полиномъ єдначине R'. Овай брой R' быт'ће или положанъ или одречанъ; како пакъ траженый коренъ лежи између s_1 и s_2, то ће резултати R_1 и R_2 быти єданъ положанъ а другій одречанъ. Резултатъ R' дакле слагат'ће се у обзиру знака или са R_1 или са R_2. Ако су знаци одъ R' и R_2 єднаки, онда траженый коренъ лежи између s_1 и α_1, и зато треба за определьиванѣ точніє вредности истога корена узети далѣ као прву замену опетъ s_1 а као другу α_1; быт'ће потомъ та точнія вредность

$$\alpha_2 = \frac{s_1 R' - \alpha_1 R_1}{R' - R_1}.$$

Нека є резултатъ полинома при овой вредности место x, R''; ово ће R'' быти опетъ или положно или одречно и слагат'ће се дакле у знаку или са R_1 или са R'. Узмимо да се слаже съ првымъ. У томъ случаю морамо далѣ за полученѣ точніє вредности вопроснога корена узети као прву замену α_1, а као другу α_2, тако да после имамо као ту точнію вредность

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_1 R'' - \alpha_2 R'}{R'' - R'}.$$

Како валя и далѣ поступати докъ недобыемо вредность вопросногa корена у условлѣной точности, разуме се сада безъ сумнѣ по себи; но іошъ болѣ обяснит'ће све то слѣдующій примеръ.

§ 92.

Тражи се у два деловна места точно онай коренъ єдначине

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8 = [\{(x-8)\,x + 14\}\,x + 4]\,x - 8 = 0,$$

кои по §-у **87.** лежи између (-1) и 0. **У** име тога имамо найпре $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $R_1 = +11$, $R_2 = -8$, дакле

$$\alpha_1 = \frac{(-1)\,.\,(-8) - 0\,.\,11}{-8-11} = \frac{8}{-19} = -{\cdot}42, \text{ а } R' = -6{\cdot}58.$$

Овай резултатъ слаже се по знаку са онимъ R_2; траженый коренъ лежи дакле између s_1 и α_1. Збогъ тога имамо као точнію нѣгову вредность

$$\alpha_2 = \frac{s_1 R' - \alpha_1 R_1}{R' - R_1} = \frac{(-1)\,.\,(-6{\cdot}58) - (-{\cdot}42)\,.\,11}{-6{\cdot}58 - 11}$$

$$= \frac{6{\cdot}58 + 4{\cdot}62}{-17{\cdot}58} = -\frac{11{\cdot}20}{17{\cdot}58} = -{\cdot}63, \text{ а } R'' = -2{\cdot}81.$$

Овай резултатъ подудара се у знаку са пређашнимъ R'; траженый дакле коренъ лежи између s_1 и α_2, и нѣгова іошъ точнія вредность быт'ће зато

$$\alpha_3 = \frac{s_1 R'' - \alpha_2 R_1}{R'' - R_1} = \frac{(-1)\,.\,(-2{\cdot}81) - (-{\cdot}63)\,.\,11}{-2{\cdot}81 - 11}$$

$$= \frac{2{\cdot}81 + 6{\cdot}93}{-13{\cdot}81} = -\frac{9{\cdot}74}{13{\cdot}81} = -{\cdot}71, \text{ а } R''' = -1{\cdot}33.$$

Овай опетъ резултатъ саглашава се по знаку са пређашнимъ R''; вопросный дакле коренъ лежи између s_1 и α_3, тако да као точнію нѣгову вредность имамо

$$\alpha_4 = \frac{s_1 R''' - \alpha_3 R_1}{R''' - R_1} = \frac{(-1).(-1{\cdot}33) - (-{\cdot}71).11}{-1{\cdot}33 - 11}$$

$$= \frac{1{\cdot}33 + 7{\cdot}81}{-12{\cdot}33} = -\frac{9{\cdot}14}{12{\cdot}33} = -{\cdot}74, \text{ а } R^{\text{IV}} = +{\cdot}79.$$

Овай резултатъ подудара се по знаку са R_1; пожеланый коренъ дакле лежи између α_3 и α_4 и нѣгова є точнія вредность

$$\alpha_5 = \frac{\alpha_3 R^{\text{IV}} - \alpha_4 R'''}{R^{\text{IV}} - R'''} = \frac{(-{\cdot}71){\cdot}79 - (-{\cdot}74).(-1{\cdot}33)}{{\cdot}79 + 1{\cdot}33}$$

$$= \frac{-{\cdot}56 - {\cdot}98}{2{\cdot}12} = -\frac{1{\cdot}54}{2{\cdot}12} = -{\cdot}72, \text{ а } R^{\text{V}} = -11{\cdot}18.$$

Збогъ противнога знака овогъ резултата ономе одъ R^{IV}, а єднакога са R''', траженый коренъ лежи између α_4 и α_5, тако да є нѣгова ближа вредность правой

$$\alpha_6 = \frac{\alpha_4 R^{\text{V}} - \alpha_5 R^{\text{IV}}}{R^{\text{V}} - R^{\text{VI}}} = \frac{(-{\cdot}74).(-11{\cdot}18) - (-{\cdot}72).{\cdot}79}{-11{\cdot}18 - {\cdot}79}$$

$$= \frac{8{\cdot}27 + {\cdot}56}{-11{\cdot}97} = -\frac{8{\cdot}83}{11{\cdot}97} = -{\cdot}73, \text{ (види § 59.) а}$$

$$R^{\text{VI}} = -11{\cdot}38.$$

И т. д., и т. д.

Ради упражнѣня нека израчуни почетникъ самъ іошъ кои одъ ирраціоналны корена' исте єдначине.

§ 93.

Овай поступакъ познатъ є подъ именомъ *„regula falsi“*, а изводи се слѣдуюћимъ простимъ начиномъ.

Узмимо да є за решенѣ дата єдначина обштега вида

$$x^{\text{n}} + Px^{\text{p}} + Qx^{\text{q}} + \ldots\ldots + Ux^{\text{v}} + V = 0,$$

и α єданъ нѣнъ коренъ; s_1 пакъ и s_2 нека су два броя, кои се одъ α съ врло мало разликую; те разлике быт'ће

$$s_1 - \alpha = \delta_1 \text{ и } s_2 - \alpha = \delta_2.$$

Найпосле представимо резултатъ полинома єдначине за

$$x = s_1 \text{ съ } R_1, \text{ а за } x = s_2 \text{ съ } R_2.$$

Поставляюћи у оной єдначини за x редомъ α, s_1 и s_2, добыямо

$$\alpha^n + P\alpha^p + Q\alpha^q + \ldots\ldots + U\alpha^v + V = 0$$

$$s_1^n + Ps_1^p + Qs_1^q + \ldots\ldots + Us_1^v + V = R_1$$

$$s_2^n + Ps_2^p + Qs_2^q + \ldots\ldots + Us_2^v + V = R_2,$$

а ако одъ последнѣ две єдначине одузмемо прву,

$$(\alpha^n - s_1^n) + P(\alpha^p - s_1^p) + Q(\alpha^q - s_1^q) + \ldots\ldots + U(\alpha^v - s_1^v) = R_1 \text{ и}$$

$$(\alpha^n - s_2^n) + P(\alpha^p - s_2^p) + Q(\alpha^q - s_2^q) + \ldots\ldots + U(\alpha^v - s_2^v) = R_2.$$

Казали смо да су разлике δ_1 и δ_2 врло мале. Ако дакле у овимъ єдначинама уведемо место s_1 и s_2 ньіове вредности посредствомъ тій разлика', т. є. узмемо

$$s_1 = \alpha + \delta_1 \quad \text{и} \quad s_2 = \alpha + \delta_2:$$

моћићемо све оне чланове, у коима се налазе выши степени одъ δ_1 и δ_2, тимъ пре пренебрегнути, што се за коренъ α и тако тражи само приближна вредность. Съ томъ приметбомъ имамо дакле после оны замена' одъ s_1 и s_2 найпре

$$s_1^n = (\alpha + \delta_1)^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\delta_1,\ s_1^p = \alpha^p + p\alpha^{p-1}\delta_1, \ldots\ldots\ldots$$

$$s_2^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}\delta_2,\ s_2^n = \alpha^p + p\alpha^{p-1}\delta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

а съ овимъ вредностима после одъ оне две єдначине

$$\delta_1(n\alpha^{n-1} + Pp\alpha^{p-1} + Qq\alpha^{q-1} + \ldots\ldots + Uv\alpha^{v-1}) = R_1 \quad \text{и}$$

$$\delta_2(n\alpha^{n-1} + Pp\alpha^{p-1} + Qq\alpha^{q-1} \pm \ldots\ldots + Uv\alpha^{v-1}) = Rr'$$

Делећи садъ прву одъ ове две єдначине съ другомъ, слѣдує

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

и одтудъ, ако место δ_1 и δ_2 повратимо ньіове вредности $(s_1 - \alpha)$ и $(s_2 - \alpha)$, и после ту єдначину по α разрешимо,

$$\alpha = \frac{s_1 R_2 - s_2 R_1}{R_2 - R_1}, \text{ т. є. образацъ §-а 91.}$$

Овай образацъ може се іошъ и овако написати и употребити

$$\alpha = \frac{s_2 R_1 - s_1 R_2}{R_1 - R_2} = s_1 - \frac{R_1 (s_2 - s_1)}{R_2 - R_1} = s_2 - \frac{R_2 (s_1 - s_2)}{R_1 - R_2}.$$

Садъ намъ іошъ остає

5.) Определьиванѣ мнимы корена.

§ 94.

Ови корени нису за практику ни одъ какве користи, но могу быти потребни у теорійскомъ каквомъ обзиру. Тога ради, а такођеръ и збогъ целости самога предмета, показат'ћемо сасвимъ у кратко како се определюю.

§ 95.

Изнашавъ све доистне корене дате єдначине, делимо найпре нѣнъ полиномъ съ производомъ корены чинителя одъ свію ньи, и поставлямо количникъ $f(x)$ раванъ нулли.

Ова нова єдначина садржат'ће саме мниме корене, и быт'ће дакле свагда парнога степена.

Ако є одъ другога степена, онда нѣне корене налазимо познатимъ изъ алгебре начиномъ; ако є пакъ выша одъ тогъ степена, онда поступамо овако:

Поставлямо найпре у нѣномъ полиному

$$x = v + z \cdot i,$$

при чему съ i представлямо краће $\sqrt{-1}$, и развіямо га помоћу образца §-а 11. Тимъ начиномъ добыямо

$$\left[f(v) - \frac{1}{2!} f_2(v) z^2 + \frac{1}{4!} f_4(v) z^4 - \ldots\right] +$$
$$+ \left[f_1(v) z - \frac{1}{3!} f_3(v) z^3 + \frac{1}{5!} f_5(v) z^5 - \ldots\right] i = 0,$$

и одтудъ, изъ узрока што сбиръ одъ єдногъ доистногъ члана (првый) и єдногъ мнимога (другій) никадъ неможе быти = 0, ако ніє свакій одъ ньи понаособъ 0 раванъ (алгебра):

$$f(v) - \frac{1}{2!} f_2(v) z^2 + \frac{1}{4!} f_4(v) z^4 - \ldots\ldots\ldots = 0 \quad \text{и}$$

$$f_1(v) - \frac{1}{3!} f_3(v) z^2 + \frac{1}{5!} f_5(v) z^4 - \ldots\ldots\ldots = 0.$$

После пакъ стало є све до тога, да изнађемо за v и z све оне парове (спреге) доистны вредностій, коє у истый махъ обе ове єдначине као корени задовољавају. Како то быва, видит' ће се изъ слѣдујући §§.

II. Єдначине съ два непозната броя.

§ 96.

Обштый є видъ єдначине n. степена съ два непозната броя x и y, уређене по првомъ одъ нњи,

$$\theta_0 x^n + \theta_1 x^{n-1} + \theta_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \theta_{n-1} x + \theta_n = 0,$$

гди $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \ldots\ldots$ представляю функціє другогъ непознатогъ броя y, одъ найвыше n. степена.

За решенѣ таковы єдначина' има више начина'; но мы ћемо, збогъ одвећъ тесны граница' овогъ дѣла, показати само єданъ, онай, кои предъ свима другима изъ више узрока' заслужуе првенство.

§ 97.

Нека су дате две єдначине

$$F(x,y) = \theta_0 x^m + \theta_1 x^{m-1} + \theta_2 x^{m-2} + \ldots + \theta_{m-1} x + \theta_m = 0 \quad \text{и}$$

$$f(x,y) = \vartheta_0 x^n + \vartheta_1 x^{n-2} + \vartheta_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \vartheta_{n-1} x + \vartheta_n = 0,$$

а $x = \alpha_1$ и $y = \beta_1$ єдна спрега (§. 95.) нњіовы корена', коє тражимо.

Чимъ бы помыслили да смо у оба полинома $F(x,y)$ и $f(x,y)$ заменули y съ ономъ нѣговомъ вредности β_1, увидили бы да они тадъ мораю имати заєдничку меру $x - \alpha_1$, и да ће то тако быти и при свакой другой кореной спреги $x = \alpha_2$ са $y = \beta_2$, $x = \alpha_3$ са $y = \beta_3$, и т. д.

Слѣдователно, ако познатимъ начиномъ (§. 15.) тражимо найвећу заєдничку меру оба полинома $F(x,y)$ и

$f(x,y)$, и тай посао дотле продужимо, докъ нисмо нашли на остатакъ, у комъ непознатога броя x више нема: то се тай остатакъ како са $y=\beta_1$ тако и са свакомъ другомъ вредности корена y мора потрети. Поставляюћи га дакле $=0$ и ту єдначину разрешаваюћи, морамо добыти све вредности корена y. Вредности пакъ оногъ другогъ корена x налазимо после, ако предпоследньій остатакъ — кои ће быти свагда вида $p+qx$, гди p и q представляю неке функціє броя y, — метнемо $=0$ и у ту єдначину узмемо за y редомъ све нѣгове нађене вредности.

Єдначину одъ последнѣга остатка називамо **решаваюћомъ**.

За болѣ обяснѣнѣ реченога нека служи слѣдуюћій примеръ.

§ 98.

Дате су за решенѣ ове две єдначине

$$F(x,y)=4x^2+2(y+1)x+(y^2+4y-5)=0 \quad \text{и}$$

$$f(x,y)=2x^2+yx+\tfrac{1}{2}(y^2+3y-6)=0.$$

Узимаюћи за определьиванѣ найвеће заедничке мере оба полинома другій $f(x,y)$ као првогъ делителя, добыямо брой 2 за количникъ, а $2x+y+1$ као остатакъ. Друга пакъ деоба, т. є. деоба делителя съ овымъ остаткомъ дає $x-\frac{1}{2}$ за количникъ, а $\frac{1}{2}(y^2+4y-5)$ као остатакъ, у комъ се x више неналази. Поставляюћи дакле истый остатакъ $=0$, имамо решаваюћу єдначину

$$y^2+4y-5=0,$$

и одтудъ $y_1=1$, а $y_2=-5$ као обе тражене вредности непознатога броя y.

За определьиванѣ другогъ непознатогъ броя x имамо предходећій остатакъ

$2x+y+1=0$, и одатле при $y=1$ $x=-1$, а при $y=-5$ $x=2$.

Тражене су дакле корене спреге, кое у истый махъ обе дате єдначине задоволяваю:

$$x=-1 \text{ и } y=1,\quad x=2 \text{ и } y=-5;$$

и доиста є за прву полиномъ прве єдначине

$$F(x,y) = 4 - 4 + 0 = 0,$$

а полиномъ друге єдначине

$$f(x,y) = 2 - 1 - 1 = 0;$$

за другу є пакъ спрегу

$$F(x,y) = 16 - 16 + 0 = 0, \quad \text{а} \quad f(x,y) = 8 - 10 + 2 = 0.$$

Овай є посао безъ сумнѣ простъ, но валя за особите случаеве іошъ слѣдуюће приметити.

§ 99.

Ако смо при траженю найвеће заедничке мере некій делимакъ, у име целы чланова у количнику, съ каквимъ чинителѣмъ $\varphi(y)$ помложили: онда може се догодити да се у решаваюћой єдначини садрже или сви, или неки само чинительи функціє $\varphi(y)$, по чему бы изъ исте єдначине добыли за x и y и такове вредности, коє датимъ єдначинама никако непринадлеже.

У таквомъ случаю морамо на концу све оне спреге као странне одбацити, коє задоволяваю єдначине одъ $\varphi(y) = 0$ и дотичногъ делителя поставлѣногъ $= 0$.

Ако су н. пр. дате две єдначине

$$F(x,y) = x^3 - yx^2 + (y-1)\,x - (y-2) = 0 \quad \text{и}$$

$$f(x,y) = (y+2)\,x^2 - y\,(y+1)\,x + y^2 = 0:$$

морамо, узимаюћи $f(x,y)$ као првогъ делителя, помложити првый полиномъ $F(x,y)$ съ $(y+2)^2$, да бы оба члана количника были цели; првый остатакъ, а слѣдуюћій делитель, быт ће тадъ

$$[-(y^3+4)\,x - 2\,(y^2 - 2y - 4)].$$

Изъ истогъ узрока морамо при другой деоби помложити полиномъ $f(x,y)$, кои є сада делимакъ, съ $(y^3+4)^2$, чимъ налазимо као последньій остатакъ

$$y^8 + 2y^7 - 2y^6 - 8y^4 - 56y^3 + 160y + 128,$$

дакле као решаваюћу єдначину истый остатакъ поставлѣнъ $= 0$.

Могуће є да є збогъ мложеня єданпутъ съ $\varphi(y) = (y+2)^2$, а другій путъ съ $\varphi'(y) = (y^3+4)^2$, у ову єдначину ушла какова вредность одъ y, коя датимъ єдначинама непринадлежи. Да бы то извидили поставлямо найпре, $\varphi(y) = (y+2)^2 = 0$ и дотичногъ делителя $f(x,y) = 0$. Изъ прве одъ тій єдначина' слѣдує $y = -2$, а съ томъ вредности изъ друге єдначине $x = 4$. Нађена решаваюћа єдначина садржи дакле странога чинителя $(y+2)$ двапутъ, и мора се зато разделити съ $(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4$, да бы добыли праву решаваюћу єдначину.

Поступаюћи тако исто и съ другимъ уведенымъ чинителѣмъ $\varphi'(y) = (y^3+4)^2$ и дотичнымъ делителѣмъ $[-(y^3+4)\,x - 2\,(y^2 - 2y - 4)]$, видимо: да у єдначини овогъ последнѣга єдиный чланъ съ x, збогъ $y^3 + 4 = 0$, изчезава, т. є. да се съ $y = \sqrt[3]{4}$ одтудъ никаква вредность за x недобыя, коє є знакъ: да чинитель (y^3+4) на решаваюћу єдначину ніє вліяо. (Ово ће быти свуда, где є делитель помложенога делимка, у смотреню x, функція првога степена).

Права решаваюћа єдначина у овомъ случаю быт' ће дакле

$$y^6 - 2y^5 + 2y^4 - 16y^2 + 8y + 32 = 0.$$

§ 100.

Ако смо далѣ, збогъ простієга рачуна, некогъ делителя, пре деобе съ ньимъ, скратили съ каквомъ $\varphi(y)$, и дотичный є делимакъ притомъ быо $\phi(x,y)$: онда валя нађенымъ спрегама іошъ све оне придати, коє слѣдую изъ єдначина' $\varphi(y) = 0$ и $\phi(x,y) = 0$.
Н. пр. ако су дате две єдначине

$$F(x,y) = 2yx^3 + (y^2-4)\,x^2 - (2y-5)\,x - (y^2+y-4) = 0 \text{ и}$$

$$f(x,y) = 2\,(y^2-y)\,x^2 - 2\,(y^2+y-2)\,x + (y^3+5y^2+3y-9) = 0:$$

онда полиномъ $f(x,y)$ друге єдначине, кои узимамо за првогъ делителя, можемо скратити са $\varphi(y) = y - 1$.

То ради простіега рачуна учинивши и осимъ тога іошъ првый полиномъ $F(x,y)$, за целе чланове у количнику, съ броемъ 2 помноживши, добыямо као првый остатакъ, а слѣдуюћегъ делителя:

$$-8yx-(y^3+10y^2+23y+10).$$

При другой деоби морамо у име целы количника помножити делимакъ (пређашнѣгъ скраћеногъ делителя) съ $32y$. Као последньій остатакъ налазимо затимъ

$$y^6+20y^5+154y^4+608y^3+1265y^2+1196y+260,$$

кои, поставлѣнъ $=0$, дае решавающу едначину.

У овомъ дакле случаю имамо спрегама, кое добыямо одъ ове решавајуће едначине и последнѣгъ делителя поставлѣногъ $=0$, іошъ оне придати, кое происходе изъ едначина $\varphi(y)=y-1=0$ и делимка $F(x,y)=0$, а те су:

$$y=1 \text{ са } x=-1,\ y=1 \text{ са } x=2, \text{ и } y=1 \text{ са } x=\tfrac{1}{2}.$$

Уведеный при другой деоби чинитель y нема на решавајућу едначину никаква влїяня. (§ 99.)

§ 101.

Може се случити, да за неку изъ решавајуће едначине добывену вредность $y=\alpha$, онай другій непознатый брой x у едначини одъ предпоследнѣга остатка (§. 97.) испадне неопределѣнога вида $\frac{0}{0}$. То бы быо знакъ: да истомъ брою x за $y=\alpha$ принадлеже више вредностій.

У таковомъ случаю валя поставити предпоследньій остатакъ $=0$, и изъ те едначине, коя ће быти одъ другога степена, определити вредности корена x, кое му припадаю по ономе y.

Ако бы се за исто $y=\alpha$ и одтудъ показало $x=\frac{0}{0}$: тадъ треба узети едначину одъ остатка пређашнѣму предходећегъ, коя ће быти одъ трећегъ степена, и изъ нѣ определити x, поставляюћи $y=\alpha$. И тако валя и далѣ поступати докле се годъ неодкрію све вредности за x, кое найпосле могу лежати у самомъ првомъ делителю.

Но ако бы се найпосле за оно $y = \alpha$ и изъ овогъ делителя показало $x = \frac{0}{0}$: онда дате єдначине имаю заєдничкога чинителя $(y - \alpha)$ и єсу по томе **неопределѣне**, єръ ій у спрези съ $y = \alpha$ може задовольити свакій место x узетый брой. *)

Примери у слѣдуюћемъ §-у обяснит' ће ово подпуно.

§ 102.

1.) ***Узмимо*** найпре да су дате две єдначине

$$F(x,y) = 2y(y+2)x^3 + (y^3 + 13y^2 + 20y - 4)x^2 -$$

$$-(2y^3 - 13y^2 - 25y + 18)x + (y^2 - 11y - 26) = 0 \text{ и}$$

$$f(x,y) = 2x^2 + (y + 11)x - 2(y - 9) = 0.$$

Делећи $F(x,y)$ са $f(x,y)$ добыямо остатакъ, кои ће быти новый делитель,

$$2(y+2)x - (y^2 - 3y - 10).$$

Да бы при другой деоби добыли целу функцію за количникъ, морамо помложити $f(x,y)$ са $(y+2)^2$; остатакъ слѣдує $y^4 - 9y^2 - 4y + 12$, одъ x независанъ, зато решаваюћа єдначина

$$y^4 - 9y^2 - 4y + 12 = 0,$$

изъ коє налазимо да є $y = 1, -2, -2$ и 3.

У име x имамо одъ предходећегъ остатка єдначину

$$2(y+2)x - (y^2 - 3y - 10) = 0, \text{ и изъ нѣ}$$

$$x = \frac{y^2 - 3y - 10}{2(y+2)}.$$

Поставляюћи садъ овде редомъ све оне нађене вредности за y, слѣдує x за прву $= -2$, за четврту $= -1$, за другу пакъ и трећу $= \frac{0}{0}$, т. є. неопределѣно.

---

*) Ова є последня приметба по свой прилици нова; я є поне до сада іошъ ни у каквомъ ауктору нисамь нашао.

Да бы дакле одкрили и те вредности одъ x: морамо поставити предходећій остатакъ (овде првогъ делителя) $= 0$, и у той едначини метнути $y = -2$. Тиме добыямо

$$2x^2 + 9x + 22 = 0,$$

одкуда слѣдую вредности

$$x = -\tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{-95} \text{ и } x = -\tfrac{9}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{-95}.$$

Могло бы се помыслити, да су ове вредности, збогъ уведеногъ при другой деоби чинителя $(y + 2)^2$, странне; но делитель е при истой деоби у обзиру x функція првога степена, збогъ чега онай чинитель по §-у 99. ніе могао увести вредность $y = -2$ као странну, и тако оне две вредности одъ x нису странне, већъ датимъ едначинама свойствене.

2.) Ако су пакъ дате две едначине

$$F(x,y) = 2y(y + 2)x^3 + (y^3 + 13y^2 + 20y - 4)x^2$$
$$-(2y^3 - 13y^2 - 25y + 18)x + (y^2 - 11y - 26) = 0 \text{ и}$$

$$f(x,y) = 2(y + 2)x^2 + (y^2 + 13y + 22)x - 2(y^2 - 7y - 18) = 0,$$

и узмемо опетъ другій полиномъ $f(x, y)$ за првогъ делителя: налазимо као првый остатакъ

$$2(y + 2)x - (y^2 - 3y - 10),$$

а као другій и последньій

$$y^3 - 2y^2 - 5y + 6.$$

Решаваюћа е дакле едначина у томъ случаю

$$y^3 - 2y^2 - 5y + 6 = 0,$$

а она за определѣиванѣ броя x,

$$2(y + 2)x - (y^2 - 3y - 10) = 0.$$

Изъ прве слѣдуе $y = 1$, 3 и -2, изъ друге пакъ съ тима вредностима редомъ $x = -2$, -1 и $\frac{0}{0}$; x дакле има за $y = -2$ више вредностій.

Да бы ове одкрили, треба поставити предходећій остатакъ, овде првогъ делителя $= 0$, и ту узети $y = -2$. Но то учинивши показуе се опетъ $x = \frac{0}{0}$; дате су дакле єдначине **неопределѣне**, могу се т. є., збогъ заедничкогъ чинителя $(y + 2)$ оба полинома, са свакимъ произвольнимъ броємъ место x у спреги съ $y = -2$ задовольити.

Да смо пре прве деобе скратили делителя $f(x, y)$ съ $\varphi(y) = y + 2$, кое се може, имали бы све као у пређашнѣмъ примеру; али бы на концу морали нађенимъ спрегама (по §-у **100.**) іошъ оне придати, кое слѣдую изъ єдначина' $\varphi(y) = 0$ и $F(x, y) = 0$. Поставляюћи у име тога у $F(x, y) = 0$ $y = -2$: слѣдовало бы $x = \frac{0}{0}$. И тако дате єдначине остаю збогъ чинителя $(y + 2)$ свакояко **неопределѣне**.

§ 103.

Могуће є напоследку да се последный остатакъ самъ по себи потире, или да є у смотреню оба непозната броя сталанъ. У првомъ случаю имаю полиноми даты єдначина' неку функцію одъ x као заедничкога чинителя, и оне су зато **неопределѣне**; у другомъ су пакъ случаю исте єдначине у међусобномъ **противусловію** зато, што сталанъ брой, као последный остатакъ, неможе быти $= 0$.

Тако н. п. ако су дате две єдначине

$$F(x, y) = 6(y + 1)x^4 + y(7y + 9)x^3 + 3y^2(2y + 3)x^2$$
$$+ (3y^2 + 2)x - y(y^4 - 1) = 0 \quad \text{и}$$
$$f(x, y) = 6(y + 1)x^2 + y(y + 3)x - y^3 = 0,$$

и узмемо $f(x, y)$ за првогъ делителя: првый остатакъ быт' ће $2x + y$, друга пакъ деоба недає никакавъ остатакъ. Овай се дакле самъ по себи потрео, а то зато, што оба полинома имаю функцію $(2x + y)$ — последнѣгъ делителя — као заедничку меру.

Дате су єдначине дакле **неопределѣне**, могу се т. є. збогъ $2x + y = 0$, съ безбройно млого вредностій за x и y задовольити.

Ако су пакъ дате єдначине

$$F(x, y) = 2yx^2 + (3y^2 - 6y + 2)x + y(y^2 - 3y + 6) = 0 \quad \text{и}$$
$$f(x, y) = 2x^2 + 3(y - 2)x + (y^2 - 3y + 5) = 0.$$

дакле, узимаюћи опетъ $f(x,y)$ за првогъ делителя, првый остатакъ $(2x+y)$, а другій сталный брой 5: онда є задатакъ несмысленъ, или вопросне су єдначине у **противусловію**, зато што 5 као последньій остатакъ неможе быти $= 0$, по природи пакъ онаковы спрегнуты єдначина' морао бы быти.*)

III. Разлаганѣ раціоналны функція.

а) Разлаганѣ целе функціє на просте чинителѣ.

§ 104.

Често є потребно знати: изъ кои се найпростіи доистны чинителя' дата нека цела раціонална функція састои. То дознаємо: ако исту функцію, коя ће быти свагда вида

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots,$$

поставимо $= 0$, и после определимо све корене те єдначине; єръ по §-у **37.** быт' ће тадъ, ако су $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ ти корени,

$$y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots\dots$$

Чинительи одъ доистны корена', кои могу быти и разломци, быт' ће общтега вида $p + qx$, — чинительи пакъ одъ сваке спреге мнимы корена' вида $p + qx + x^2$ (§. **38.**).

Тако н. п. ако бы дата функція была

$$y = 12 + 32x - 3x^2 - 42x^3 - 5x^4 + 6x^5:$$

---

*) Више о решеню бройны єдначина' може се наћи међу осталимъ у изредномъ Лагранжевомъ дѣлу: Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés. Paris 1826. (3. édition) chez Bachelier; — у Dr. L. C. Schulz v. Strassnicki-овомъ дѣлу „Neue Methode zur Auffindung der reelen Wurzeln höh. num. Gleichungen" Wien 1842. Heubner; найпосле у свакомъ пространіємъ дѣлу о вышой математики, као н. п. у „Ausführliches Lehrbuch der höh. Mathem." von Ad. Burg, Wien, Gerold.

имамо, поставляюћи є = 0 и уређуюћи є у смыслу §-а 31., єдначину

$$\frac{1}{6}y = x^5 - \frac{5}{6}x^4 - 7x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{16}{3}x + 2 = 0,$$

кою надлежнымъ (познатымъ) начиномъ разрешаваюћи, налазимо као нѣне корене:

$$x = 1,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{2}{3} \text{ и } 3.$$

По томе є

$$\frac{1}{6}y = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-3),$$

а са 6 множећи, дата функція

$$y = (x-1)(2x+1)(x+2)(3x+2)(x-3)$$

$$= (1-x)(1+2x)(2+x)(2+3x)(3-x).$$

Ако є пакъ дата функція

$$y = -10 + 9x - 4x^2 + x^3:$$

онда имамо

$$y = x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0,$$

одтудъ

$$x = 2,\quad 1 + \sqrt{-2} \text{ и } 1 - \sqrt{-2};$$

дакле

$$y = (x-2)(x-1-\sqrt{-2})(x-1+\sqrt{-2})$$

$$= (x-2)(x^2-2x+5)$$

$$= (2-x)(-5+2x-x^2).$$

б) Разлаганѣ деловне функціє у почастне (парціалне) разломке.

§ 105.

Именитель сваке деловне функціє може се разложити по предходећемъ §-у на доистне чинителѣ првогъ или другогъ степена.

Сваку деловну функцію можемо дакле сматрати као алгебрайски сбиръ или самы чисты разломака, кои имаю за именителѣ функціє првогъ или другога степена, или одъ єдне целе функціє и онаковы разломака; прво: ако є дотична деловна функція чиста, а друго: ако є нечиста (§. 7.).

Они разломци зову се **почастни** или парціялни, посао пакъ, коимъ ій докучуємо, **разлаганѣ** деловне функціє у такове разломке.

§ 106.

Будући се цела функція, коя є садржана у датой некой нечистой деловной функціи као сабиракъ, лако налази деобомъ броителя чрезъ именителя: то нама дакле валя показати само како се разлаже **чиста** деловна функція у почастне разломке.

У име тога валя пре свега разложити именителя дате функціє по §-у 104. у найпростіє нѣгове доистне чинителѣ. При томе могу се появити слѣдуюћа три случая: 1. чинительи су именителя сви доистни и неєднаки, 2. неки доистни а други мними, но и єдни и други неєднаки, и 3. има међу нъима и неки єднаки. Како валя поступати далѣ у свакомъ поєдиномъ случаю: видит'ћемо у слѣдуюћимъ §§-ма

1.) Чинительи су именителя сви доистни и неєднаки.

§ 107.

У таквомъ є случаю по §-у 104. свакій чинитель вида $p + qx$; броитель дакле свакогъ почастногъ разломка, зато што овай треба да є чистъ, быт'ће некій сталанъ брой.

Нека су уобште чинительи дотичногъ именителя редомъ

$$p_1 + q_1 x, \; p_2 + q_3 x, \; p_3 + q_3 x, \; \ldots \ldots \; p_n + q_n x,$$

а броительи почастны разломака односно

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \; \ldots . \; c_n,$$

и представимо дату деловну функ. ради краткоће съ $\frac{Б}{И}$.

Мора быти

$$\frac{Б}{И} = \frac{c_1}{p_1+q_1x} + \frac{c_2}{p_2+q_2x} + \frac{c_3}{p_3+q_3x} + \ldots + \frac{c_n}{p_n+q_nx},$$

одкуда, ако найпре мложенѣмъ съ *И* ослободимо одъ именителя' и све по x єднако уредимо, налазимо помоћу правила сачинителя', непознате броителѣ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$.

Н. п. нека є за разлаганѣ дата деловна функція

$$\frac{Б}{И} = \frac{1+2x^2}{2+3x-3x^2-2x^3}.$$

Разлажући именителя по §-у 104. налазимо као нѣгове чинителѣ

$$1-x,\ 2+x \text{ и } 1+2x.$$

Поставляюћи дакле

$$\frac{Б}{И} = \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{2+x} + \frac{c_3}{1+2x},$$

ослобођаваюћи после мложенѣмъ съ

$$И = (1-x)(2+x)(1+2x)$$

одъ именителя', и све по x надлежно уређиваюћи: добыямо

$$1+2x^2 = (2c_1+c_2+2c_3) + (5c_1+c_2-c_3)x + (2c_1-2c_2-c_3)x^2,$$

одтудъ пакъ, по правилу сачинителя', єдначине

$$2c_1+c_2+2c_3=1,\ 5c_1+c_2-c_3=0 \text{ и } 2c_1-2c_2-c_3=2,$$

изъ кои' найпосле познатымъ начиномъ слѣдує

$$c_1=\frac{1}{3};\ c_2=-1, \text{ а } c_3=\frac{2}{3}.$$

По томе разложена є дата функція

$$\frac{1+2x^2}{2+3x-3x^2-2x^3} = \frac{1}{3(1-x)} - \frac{1}{2+x} + \frac{2}{3(1+2x)},$$

о чему се лако можемо уверити сабиранѣмъ овы разломака.

§ 108.

Додатци. 1.) Ако се притомъ появи кои броитель $= 0$: то є знакъ, да се дата функція съ нѣговымъ именителѣмъ може скратити.

Тако н. п. налазимо при деловной функціи

$$\frac{Б}{И} = \frac{2 - 5x - 3x^2}{2 + 3x - 3x^2 - 2x^3} = \frac{c_1}{1 - x} + \frac{c_2}{2 + x} + \frac{c_3}{1 + 2x},$$

ако одъ именителя ослободимо и надлежно уредимо:

$$2c_1 + c_2 + 2c_3 = 2, \quad 5c_1 + c_2 - c_3 = -5 \quad \text{и} \quad 2c_1 - 2c_2 - c_3 = 0,$$

одкуда слѣдуе

$$c_1 = -\tfrac{2}{3}, \quad c_2 = 0, \quad \text{а} \quad c_3 = \tfrac{5}{3}.$$

Почастный дакле разломакъ $\frac{c_2}{2 + x}$, збогъ $c_2 = 0$, одпада, а то зато: што е нѣговъ именитель чинитель уедно и броитеља дате функціе, т. е. што се съ истымъ нѣговымъ именителѣмъ ова може скратити на функцію

$$\frac{Б}{И} = \frac{1 - 3x}{1 + x - 2x^2};$$

коя се доиста састои само изъ два почастна разломка

$$\frac{c_1}{1 - x} = \frac{-2}{3(1 - x)} \quad \text{и} \quad \frac{c_2}{1 + 2x} = \frac{5}{3(1 + 2x)}.$$

2.) Вопросни броитељи $c_1, c_2, \ldots c_n$, као стални броеви, остаю при свакой вредности броя x исти. Съ тога можемо ій изъ ослобођене одъ именителя, али **неуређене** едначине добыти млого лакше на тай начинъ: да редомъ свакогъ именителѣвогъ чинителя поставимо $= 0$, и одтудъ излазећу вредность за x узмемо у ону едначину; еръ тиме остае у десной части исте едначине поредъ познате леве, свагда само еданъ чланъ, у комъ е еданъ одъ непознаты броитеља (онай, кога смо именителя метнули $= 0$) сачинитель, одкуда се лако може добыти.

Тако н. п. у првой одъ горе разложены функція имамо одъ именителя ослобођену едначину.

$$1 + 2x^2 = c_1(2 + x)(1 + 2x) + c_2(1 - x)(1 + 2x) + \\ + c_3(1 - x)(1 + x).$$

Постављајући ту найпре $1 - x = 0$, т. е. $x = 1$: слѣдуе $3 = 9c_1$, дакле $c_1 = \frac{1}{3}$; узимаюћи после $2 + x = 0$, т. е. $x = -2$: налазимо $9 = -9c_2$, дакле $c_1 = -1$; найпосле ако метнемо $1 + 2x = 0$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$: добыямо $\frac{3}{2} = \frac{9}{4}c_3$, дакле $c_3 = \frac{2}{3}$; — све каогодъ горе.

Преимућство овога начина може се већъ изъ овогъ єдногъ примера довольно увидити; но онъ є особито онде одъ велике користи, гди се именитель састои изъ млого чинителя.

2.) Неки су чинительи именителя доистни, а други мними, но и єдни и други неєднаки.

§ 109.

У томъ случаю валя одъ спреге именителѣвы мнимы корена' направити квадратногъ доистногъ чинителя єдногъ почастногъ разломка, комъ валя дати за броителя функцію првога степена, т. є. вида $(c+dx)$. **Остали** є посао каогодъ у првомъ случаю.

Дата є н. п. функція

$$\frac{Б}{И}=\frac{x^2+x-1}{x^3-4x^2+9x-10}.$$

Корени су нѣнога именителя по §-у **104.**

$$x=2,\quad 1+\sqrt{-2}\quad \text{и}\quad 1-\sqrt{-2};$$

а зато нѣгови найпростіи доистни чинительи

$$(x-2)\quad \text{и}\quad (x^2-2x+5).$$

Имамо дакле ставити

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-4x^2+9x-10}=\frac{c_1}{x-2}+\frac{c+dx}{x^2-2x+5}.$$

Ослобођаваюћи одъ именителя' и после урећуюћи, слѣдує

$$x^2+x-1=(c_1+d)\,x^2-(2c_1-c+2d)\,x+(5c_1-2c),$$

одтудъ пакъ, по правилу сачинителя',

$$c_1+d=1,\quad 2c_1-c+2d=-1,\quad 5c_1-2c=-1,$$

а одавде найпосле

$$c_1=1,\quad c=3\quad \text{и}\quad d=0.$$

По томе разложена она функція быт' ће

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-4x^2+9x-10}=\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x^2-2x+5}.$$

Додатакъ првомъ случаю, у обзиру изчезаваюћи броителя, постои онако и за квадратне именителѣ.

§ 110.

У §-у 108. показаный начинъ за лакше определьиванѣ броителя' изъ ослобођене одъ именителя' єдначине, може се врло добро употребити и у предстоећемъ случаю, каошто ћемо одма видити.

Одъ именителя ослобођена, но неуређена єдначина пређашнѣгъ примера была бы

$$x^2 + x - 1 = c_1 (x^2 - 2x + 5) + (c + dx)(x - 2).$$

Поставляюћи у истой $x - 2 = 0$, т. є. $x = 2$: добыямо $5 = 5c_1$, дакле $c_1 = 1$. Ову вредность пакъ затимъ место c_1 узимаюћи и скраћуюћи: слѣдує

$$3\,(x - 2) = (c + dx)\,(x - 2),$$

или, ако съ $(x - 2)$ разделимо. $c + dx = 3$, и одтудъ по правилу сачинителя просто $c = 3$, а $d = 0$, каогодъ пре.

3.) Међу чинительима именителя има и єднаки.

§ 111.

Предпоставляюћи съ P производъ неєднаки (доистны и мнимы) чинителя': именитель быт'ће обштега вида

$$\text{И} = P\,(p + qx)^r\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^v;$$

при комъ є, ако нема єднаки доистны чинителя, изложитель r, а ако нема єднаки мнимы чинителя, изложитель $v = 0$.

За разлаганѣ деловне функціє съ таковымъ именителѣмъ валя метнути

$$\frac{\text{Б}}{\text{И}} = \frac{R}{P} + \frac{c_1}{(p + qx)^r} + \frac{c_2}{(p + qx)^{r-1}} + \dots + \frac{c_r}{(p + qx)}$$

$$+ \frac{C_1 + D_1 x}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^v} + \frac{C_2 + D_2 x}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{v-1}} + \dots + \frac{C_v + D_v x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2},$$

и ову єдначину после одъ именителя' ослободити и уредити. Одтудъ добыт'ће се по правилу сачинителя, ако є P функція n. степена, свега $n + r + v$ єдначина', одъ кои' служе n за определьиванѣ броителя' почастны разломака съ онимъ неєднакимъ именительима, кои' є сбиръ сваћенъ у $\frac{R}{P}$, — r за одкриванѣ броителя $c_1, c_2, c_3,$ ..... c_r, — найпосле v за броеве $C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots$ ..... C_v и D_v.

Ово садъ непотребуе веће никаква више обяснявания.

§ 112.

Кадъ бы н. п. имали разложити у овай случай спадаюћу деловну функцію

$$\frac{Б}{И} = \frac{x^6 + 5x^5 + 26x^4 + 54x^3 + 60x^2 + 44x + 16}{x^8 + 5x^7 + 12x^6 + 16x^5 + 12x^4 + 4x^3}$$

$$= \frac{x^6 + 5x^5 + 26x^4 + 54x^3 + 60x^2 + 44x + 16}{x^3 (x + 1)(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$= \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x} + \frac{c}{x + 1} + \frac{C_1 + D_1 x}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{C_2 + D_2 x}{x^2 + 2x + 2},$$

и поступали бы съ ньомъ по гореизложеномъ начину: добыли бы свега 6 єдначина' за определиванѣ непознаты броителя'.

Коликій бы посао быо обычно решенѣ толико єдначина', увиђа се лако; но колико є пробитачніи онай другій начинъ, кои є по приметби §-а 108. особито у овакомъ случаю на своме месту: о томе нека се суди по слѣдуюћему.

§ 113.

Одъ именителя ослобођена прећашня єдначина была бы

$$x^6 + 5x^5 + 26x^4 + 54x^3 + 60x^2 + 44x + 16$$

$$= c_1 (x + 1)(x^2 + 2x + 2)^2 + c_2 x (x + 1)(x^2 + 2x + 2)^2$$

$$+ c_3 x^2 (x + 1)(x^2 + 2x + 2)^2 + c x^3 (x^2 + 2x + 2)^2$$

$$+ (C_1 + D_1 x) x^3 (x + 1) + (C_2 + D_2 x) x^3 (x + 1)(x^2 + 2x + 2).$$

Поставляюћи првогъ именителя $x^3 = 0$: слѣдуе, збогъ $x = 0$, $16 = 4c_1$, т. є. $c_1 = 4$, а съ томъ вредности ако уедно скратимо и затимъ іошъ съ x разделимо:

$$x^5 + x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 4x - 5 =$$

$$= c_2 (x+1)(x^2+2x+2)^2 + c_3 x (x+1)(x^2+2x+2)^2$$
$$+ cx^2(x^2+2x+2)^2 + (C_1+D_1 x)\, x^2(x+1)$$
$$+ (C_2+D_2 x)\, x^2(x+1)(x^2+2x+2).$$

Постављаюћи другогъ именителя $x^2 = 0$: добыямо, збогъ $x = 0$, $-4 = 4c_2$, т. є. $c_2 = -1$, съ томъ вредности пакъ, и поступаюћи далѣ сасвимъ као пре:

$$2x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 22x + 8$$
$$= c_3 (x+1)(x^2+2x+2)^2 + cx(x^2+2x+2)^2$$
$$+ (C_1+D_1 x)\, x(x+1) + (C_2+D_2 x)\, x(x+1)(x^2+2x+2).$$

Постављаюћи трећегъ именителя $x = 0$, налазимо $8 = 4c_3$, т. є. $c_3 = 2$, съ томъ пакъ вредности по пређашнѣмъ начину:

$$-2x^4 - 8x^3 - 18x^2 - 14x - 2 = c(x^2+2x+2)^2$$
$$+ (C_1+D_1 x)(x+1) + (C_2+D_2 x)(x+1)(x^2+2x+2).$$

Четвртый именитель $x+1=0$ узетъ, дає $x=-1$ и съ тиме $c=0$, коє є знакъ: да се дата функція може са $(x+1)$ скратити. Нова єдначина быт'ће по томе

$$-2x^3 - 6x^2 - 12x - 2 = (C_1+D_1 x) + (C_2+D_2 x)(x^2+2x+2)$$

Ову найпосле по x надлежно уређуюћи, налазимо правиломъ сачинителя: $D_2 = -2$; $C_2 + 2D_2 = -6$, дакле употреблѣнѣмъ предходеће вредности $C_2 = -2$; $2C_2 + 2D_2 + D_1 = -12$, дакле помоћу већъ одкривены вредностій $D_1 = -4$; $C_1 + 2C_2 = -2$, дакле, збогъ $C_2 = -2$, $C_1 = 2$, чимъ су сви броительи изнађени.

По свему овоме дата функція, разложена у почастне разломке, быт'ће

$$\frac{Б}{И} = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2(1-2x)}{(x^2+2x+2)^2} - \frac{2(1+x)}{x^2+2x+2},$$

о чему се лако уверавамо сабиранѣмъ овы разломака.

КНЬИГА III.

БЕЗКРАЙНИ РЕДОВИ.

§ 114.

У алгебри упознали смо се съ найпотребнімъ свойствама **крайны** редова̀ и ньіовымъ употреблѣнѣмъ, овде пакъ сматрат'ћемо сада у истомъ пространству редове **безкрайне**; но да бы се при томе болѣ разумели, морамо пре свега нека тамо већъ поставлѣна понятія укратко повторити.

§ 115.

1.) **Редомъ** називамо слѣдъ броєва̀, кои постаю по известномъ некомъ и непременљивомъ закону. Сами ти броєви добываю притомъ, име **чланови** реда и представляю се при обштемъ испытиваню редова̀ найболѣ чрезъ єдно исто писме, н. п. *u* или *v* съ бройнымъ сказалькама за означенѣ места на коме свакій стои.

2.) Редове разликуємо уобште **безкрайне** и **крайне**. Безкраянъ є онай редъ, кога чланови теку єданъ за другимъ безъ престанка; краянъ є напротивъ свакій онай редъ, кои се састои изъ известногъ броя чланова̀.

3.) Крайни као и безкрайни редови єсу или **растући** или **падаюћи**. Растућій зове се свакій онай редъ, коєга є свакій слѣдуюћій членъ већій, а падаюћій онай, при комъ є свакій слѣдуюћій членъ маньій одъ предходећега.

4.) Редови, при коима се свакій членъ по некомъ истомъ закону може добыти изъ єдногъ или више предходећи чланова, зову се **повратни** или **рекурентни**; редови напротивъ где то ніє могуће, зову се **независни** или **индепендентни**.

Мы ћемо се овде занимати поглавито са повратнимъ редовима.

I. Сбирльивость и несбирльивость — конвергенція и дивергенція — безкрайны редова'.

§ 116.

Ако се сбиръ *n* првы чланова' безкрайногъ каквогъ реда све већма известномъ некомъ брою приближава, штогодъ *n* веће, т. є. штогодъ таковы чланова више узмемо: онда истый редъ зове се **сбирльивъ** или конвергентанъ, иначе є пакъ **несбирльивъ** или дивергентанъ, а у некимъ случаєвима и **неопределѣнъ**.

Представляюћи съ S_n сбиръ првы *n* чланова' безкрайнога реда, а съ *G* границу коіой се истый сбиръ при умложаваню чланова све већма приближава тако, да є найпосле за $n = \infty$ $S_n = G$, — имамо по пређашнѣму: дотичный є редъ сбирльивъ, ако є *G* известанъ бройй, — несбирльивъ, ако є $G = \pm \infty$, — найпосле неопределѣнъ, ако се *G* покаже у виду $\frac{0}{0}$. — Брой *G* назива се у сва три случая **сбиромъ** дотичнога реда.

§ 117.

Безкрайни редови, безъ бриге єсу ли сбирльиви или нису, могу се свима онима рачунима подвргавати, кои су сасвимъ независни одъ броя чланова', и послѣдци таковы рачуна', ако се иначе само съ нуждномъ пажньомъ поступа, бытће свагда истинити. Но зато што є полза одъ сбирльивы редова' у анализи много већа него одъ несбирльивы, и што се при употребляваню послѣдньи сасвимъ лако може погрешити: служимо се готово само са сбирльивымъ безкрайнымъ редовима.

Нуждно є дакле свакояко да умемо определити: да ли є безкрайный редъ съ коимъ радимо, сбирльивъ или ніє?

То бы быо врло простъ посао, кадъ бы се свакій безкрайный редъ лако могао **сабрати**, т. є. кадъ бы при свакомъ реду, на некій удобанъ и простъ начинъ, могли изнаћи аналитичанъ єданъ изразъ за сбиръ произвольно колико нѣговы прва члановà, кои бы быо нека функція ньіовога броя. Но не само да се врло мало безкрайны редовà у томъ смыслу могу сабрати, него є іошъ и самъ тай посао, каошто ћемо позднiє видити, врло трудан и сплетенъ. Тога ради морамо се побринути: да изнаћемо друге какве, одъ сбира безкрайнога реда сасвимъ независне знаке нѣгове сбирльивости или несбирльивости. Съ тиме заниматʼ ћемо се у слѣдуюћимъ §§-ма, но найпре морамо, колико за веће обяснѣнѣ преће поменутога начина, толико и збогъ далѣ потребе испытати: подъ коимъ су условіяма безкрайни **геометрійски** редови сбирльиви?

§ 118.

Обштій є видъ сабратогъ безкрайногъ геометрійскогъ реда

$$v + vq + vq^2 + vq^3 + vq^4 + \ldots\ldots + vq^{n-1} + \ldots\ldots$$

При томе имамо познатымъ изъ алгебре начиномъ за сбиръ прва n члановà

$$S_n = \frac{vq^n - v}{q-1} \quad \text{или} \quad S_n = \frac{v - vq^n}{1-q}.$$

Узимаюћи овде $n = \infty$, добыямо при $q \geqq 1$, $S_n = \infty$ *), а при $q < 1$, $S_n = \dfrac{v}{1-q}$, известанъ брой.

Геометрійскій редъ дакле сбирльивъ є само у случаю, ако є $q < 1$, т. є. ако є **падаюћій** редъ.

---

*) Сбирный изразъ $S_n = \frac{vq^n - v}{q-1} = \frac{v - vq^n}{1-q}$ дає за $n = \infty$ при $q = 1$, непосредно $S_n = \frac{0}{0}$; но ако га найпре съ $(q-1)$ скратимо, быва $S_n = v\,(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots\ldots + 1)$, и одтудъ збогъ $q = 1$ и $n = \infty$: $S_n = v\,(1 + 1 + 1 + \ldots) = \infty$.

§ 119.

Ако су чланови безкрайногъ каквогъ реда **сви еднаки**: онда ньіовъ сбиръ, быо свакій одъ ньи ма како малый, мора быти свагда безкрайно великій брой. Такавъ є дакле редъ свагда **несбирльивъ**. Но кадъ ово постои за редове съ еднакимъ члановима, онда тимъ пре мора постояти за **растуће** редове, и по томе **горнѣ испытиванѣ ограничава се само на падаюће редове.**

Нека су дакле $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots v_n, v_{n+1}, \ldots\ldots$ чланови каквогъ падаюћегъ реда, кое за сада предпоставлямо све положне, — S сбиръ свію, D_n пакъ сбиръ само чланова одъ n. на далѣ, или такозвана **сбирна допуна** за прва n чланова, тако да є

$$S = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n + D_n, \text{ а}$$

$$D_n = v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots\ldots \text{ безъ края.}$$

Вопросный редъ, каошто є лако увидити, бит' ће сбирльивъ, ако се вредность одъ D_n при непрестаномъ увећаваню броя n безъ края умалява и найпосле за $n = \infty$ сасвимъ изчезне. Дакле, да бы знали є ли падаюћій какавъ редъ сбирльивъ или ніє: имамо само испытати, да ли се, и подъ каквимъ се условіяма нѣгова допуна D_n при увећаваню броя n до ∞ умалява и найпосле равна 0 постає?

§ 120.

У име тога помыслимо, да смо свакій чланъ допуне D_n разделили съ предходећимъ чланомъ.

Тако добывени количници могу быти 1. или сви еднаки, или 2. свакій слѣдуюћій маньій одъ предходећега, или найпосле 3. свакій слѣдуюћій већій одъ предходећега.

У првомъ є случаю вопросный редъ геометрійскій и као такавъ по §-у 118., зато што є падаюћій, свагда **сбирльивъ**.

За она друга два случая пакъ увиђамо, да є разлика свака два узастопна количника, изъ узрока што се чланови реда єднако умалявaю, и што се дакле како они међу собомъ, тако и ньіови вопросни количници, што далѣ то већма єднакости приближаваю: брой кои се съ увећаванѣмъ одъ n умалява и найпосле за $n = \infty$ сасвимъ изчезава.

§ 121.

Ако узмемо да є $\frac{v_{n+1}}{v_n} = x$, можемо за та два іошъ вопросна случая метнути

$$\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} = x + \delta_n, \quad \frac{v_{n+3}}{v_{n+2}} = x + \delta_{n+1}, \quad \frac{v_{n+4}}{v_{n+3}} = x + \delta_{n+2}, \ldots\ldots\ldots,$$

при чему су броєви $\delta_n, \delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$ у првомъ случаю одречни, а у ономъ другомъ положни.

Изъ тій израза слѣдуе

$$v_{n+1} = v_n\, x$$

$$v_{n+2} = v_{n+1}(x + \delta_n) = v_n\, x(x + \delta_n)$$

$$v_{n+3} = v_{n+2}(x + \delta_{n+1}) = v_n\, x(x + \delta_n)(x + \delta_{n+1})$$

$$v_{n+4} = v_{n+3}(x + \delta_{n+2}) = v_n\, x(x + \delta_n)(x + \delta_{n+1})(x + \delta_{n+2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

дакле ако све саберемо

$$v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots\ldots\ldots = D_n = v_n\,[1 + (x + \delta_n)$$
$$+ (x + \delta_n)(x + \delta_{n+1}) + (x + \delta_n)(x + \delta_{n+1})(x + \delta_{n+2}) + \ldots\ldots].$$

Поставляюћи садъ овде $n = \infty$, изчезаваю по предходећемъ §-у сви броєви $\delta_n, \delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$ и остає као граница сбирне допуне

$$D_n = v_n\, x\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots),$$

или обзиромъ на **§ 118.** збогъ $x < 1$,

$$D_n = v_n\, x \cdot \frac{1}{1 - x};$$

найпосле ако место x узмемо нѣгову вредность $\frac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$D_n = \frac{v_n \cdot v_{n+1}}{v_n - v_{n+1}}.$$

У §-у 119. видили смо, да за сбирљивость падаюћега реда ова допуна при $n = \infty$ мора быти $= 0$.

Ако дакле имамо испытати, да ли є датый какавъ падаюћій редъ сбирљивъ: треба да помложимо два нѣгова застопна члана єданъ съ другимъ, и да разделимо тай производъ съ њіовомъ разликомъ, па онда да извидимо каква є вредность тога количника за $n = \infty$; покаже ли се иста притомъ $= 0$, онда є вопросный редъ безъ сумнѣ *сбирљивъ*, иначе пакъ *несбирљивъ*.

Тако н. п. ако є датый редъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots$$

имамо

$$D_n = \frac{v_n \cdot v_{n+1}}{v_n - v_{n+1}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1-n} = 1 \text{ а не } 0;$$

тай редъ дакле ніє сбирљивъ.

Съ њимъ определює се у музики шкала гласова, чега ради названъ є *хармонійскій* редъ.

§ 122.

Предходећій § уверіо насъ є: да за сбирљивость падаюћегъ реда ніє довољно што є падаюћій, сада пакъ видит'ћемо да та сумня сасвимъ престає, ако нѣгови чланови, или уобште, или само одъ некога започевши, своє знаке правилно меняю.

Нека су у име тога $\pm v_n$ и $\mp v_{n+1}$ два узастопна члана таквогa реда или — ако по више чланова имаю єданъ истый знакъ — сбирови узастопны, єднакоозначены чланова'; быт'ће

$$D_n = \frac{(\pm v_n) \cdot (\mp v_{n+1})}{\pm v_n - (\mp v_{n+1})} = \mp \frac{v_n \cdot v_{n+1}}{v_n + v_{n+1}}$$

$$= \mp 1 : \frac{v_n + v_{n+1}}{v_n \cdot v_{n+1}} = \mp 1 : \left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_{n+1}}\right).$$

Но вопросный є редъ падаюћій. Броєви дакле v_n и v_{n+1} бывају при $n = \infty$ изчезльиво мали, количници $\frac{1}{v_n}$ и $\frac{1}{v_{n+1}}$ напротивъ безкрайно велики, и зато

$$D_n = \mp 1 : (\infty + \infty) = \mp 1 : \infty = 0,$$

а то ће рећи предпоставлѣный є редъ **сбирльивъ.**

§ 123.

Бройни редови, то ће рећи редови, коихъ су чланови известни броєви, **безусловно** су или сбирльиви или несбирльиви. При ньима дакле може се само пытати єсу **ли** сбирльиви?

Обшти напротивъ редови, т. є. редови коихъ су чланови функціє каквогъ променльивогъ броя, могу быти за неке вредности сбирльиви, а за друге несбирльиви; съ другимъ реч'ма: сбирльивость є таковы редова **односна**, єръ зависи не само одъ стройногъ ньіовогъ закона, но уєдно и одъ вредностій онога броя, чега ради при испытиваню обшти редова, свагда и границе ньіове сбирльивости определити валя.

То быва каогодъ при бройнимъ редовима помоћу образца §-а 121.; тамо обзиромъ на нѣгову вредность само по увећаню броя чланова до ∞, овде пакъ уєдно и призренѣмъ на вредности дотичногъ променльивогъ броя.

Колико за упражненѣ у томе, толико и ради поздніє потребе, испытаймо одма неколико обшти редова.

§ 124.

1.) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$

При овоме є реду

$$D_n = \frac{\frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)! - x \,.\, n!}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}\cdot\ldots\ldots\frac{n}{x}\cdot\frac{n+1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}\cdot\ldots\ldots\frac{n}{x}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}\cdot\ldots\ldots\frac{n}{x}\left(\frac{n+1}{x}-1\right)},$$

и мы видимо: да се вредность овога израза при увећаваню броя чланова n за сваку крайну вредность одъ x све већма умалява, тако да найпосле за $n=\infty$ постає $=0$. Вопросный є дакле редъ **сбирљивъ** за сваку крайну вредность броя x, или границе су нѣгове сбирљивости $x=-\infty$ и $x=+\infty$.

2.) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mp\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\pm\ldots\ldots$

Овде є

$$D_n=\mp\frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}$$

$$=\mp\frac{1}{\frac{1}{x}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}\ldots\frac{2n+1}{x}\left[\frac{(2n+1)\,(2n+3)}{x^2}+1\right]},$$

изъ чега се види, да є и овай редъ, каогодъ преѣашнѣй, **сбирљивъ** за сваку вредность одъ $x=-\infty$ до $x=+\infty$.

Истый резултатъ добыя се

3.) и при реду

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\ldots\pm\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mp\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\pm\ldots\ldots;$$

т. є. и овай є редъ **сбирљивъ** између граница $x=-\infty$ и $x=+\infty$.

4.) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\pm\frac{x^n}{n}\mp\frac{x^{n+1}}{n+1}\pm\ldots\ldots$

Ту є

$$D_n=-\frac{x^n}{n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}:\pm\left(\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\mp\frac{x^{n+1}}{(n+1)+nx}$$

$$=\mp\frac{1}{\frac{n+1}{x^{n+1}}+\frac{n}{x^n}}.$$

Именитель овога разломка быва при увећаваню броя n за сваку вредность одъ $x > 1$ све маньій и найпосле при $n = \infty$ раванъ 0, напротивъ за сваку вредность одъ $x < 1$ све већій, и найпосле при $n = \infty$, безкрайно великій. Самъ разломакъ дакле постає при $n = \infty$ за $x > 1$ безкраянъ, а за $x < 1$ раванъ 0, и по томе вопросный є редъ сбирльивъ само између граница' $x = -1$ и $x = +1$.

5.) При реду найпосле

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \pm \ldots\ldots$$

имамо

$$D_n = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+3} : \pm \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right)$$

$$= \mp \frac{1}{\frac{2n+3}{x^{2n+3}} + \frac{2n+1}{x^{2n+1}}},$$

изъ чега видимо, да є овай редъ каогодъ прећашньій и изъ истогъ узрока, **сбирльивъ** само између граница' $x = -1$ и $x = +1$.

§ 125.

Сви у прећашньимъ §§-ма нађени знаци сбирльивости тичу се изключно само такозваны **правилны** редова, рећи ће редова: при коима є законъ постаяня ньіовы чланова известанъ. **Съ** таковимъ редовима имамо обично посла, но догодит' ће се доста пута' да се морамо занимати и съ другима; тога ради приметит' ћемо іошъ на краю овога предмета сасвимъ укратко: по чему се у особитимъ некимъ случаєвима сбирльивость и **неправилны** редова' лако може познати.

§ 126.

1.) Ако су чланови вопросногъ неправилногъ реда одъ некога надалѣ сви маньи одъ саглашаваюћи се чланова каквогъ **сбирльивогъ** реда: онда є и онъ безъ сумнѣ **сбирльивъ**; напротивъ ако су нѣгови чланови сви већи одъ саглашаваюћи се чланова каквогъ **несбирльивогъ** реда: онда є и самъ **несбирльивъ**.

2.) **Сбиръ или разлика** два, за єдну исту вредность одъ x сбирльива реда по x, быт' ће свагда за ону вредность такођеръ **сбирльиви**; **производъ** пакъ такова два реда само є онда за исту вредность одъ x несумнѣно **сбирльивъ**: ако съ ньомъ сви нѣгови чланови испадну **положни**. Найпосле

3.) Производъ безкрайногъ каквогъ, за неку вредность одъ x **сбирльивога** реда по x, са крайнимъ некимъ редомъ истога броя: быт' ће свагда за ону вредность такођеръ **сбирльивъ**.

Докази овы изреченя оставляю се устменомъ предаваню.

II. Превртанѣ редова'.

§ 127.

Ако є y као функція одъ x некій безкрайный редъ, и тражи се да се изрази обратно x као функція одъ y у виду подобногъ безкрайногъ реда: онда посао, коимъ то постизавамо, зове се **превртанѣ** датога реда.

При томе могућа су ова два случая: датый є редъ или вида $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots$, или $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

У првомъ случаю поставлямо

$$x = c_0 y + c_1 y^2 + c_2 y^3 + \dots\dots,$$

образуємо полиномнимъ образцемъ (§ 20.) све у датомъ реду налазеће се степене одъ x и поставлямо ій у истый; уређуємо новый редъ по y и определюємо найпосле изъ єдначине $y =$ томъ новомъ реду помоћу правила сачинителя (§ 19.) непознате сачинителѣ c_0, c_1, c_2, ...

Ако є пакъ датый редъ вида $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots$:

онда преносимо a_0 у леву часть, и поступамо после, поставляюћи іошъ краткоће ради $y - a_0 = z$, каогодъ у прећашнѣмъ случаю.

Примери.

§ 128.

1.) Имамо превернути редъ

$$z = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

Поставляюћи

$$x = c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + c_3 z^4 + \ldots\ldots,$$

слѣдує

$$x^3 = c_0^3 z^3 + 3c_0^2 c_1 z^4 + (3c_0^2 c_2 + 3c_0 c_1^2) z^5 + (3c_6^2 c_3 + 6c_0 c_1 c_2 +$$

$$+ c_1^3) z^6 + (3c_0^2 c_4 + 6c_0 c_1 c_3 + 3c_0 c_2^2 + 3c_1^2 c_2) z^7 + \ldots\ldots$$

$$x^5 = c_0^5 z^5 + 5c_0^4 c_1 z^6 + (5c_0^4 c_2 + 10c_0^3 c_1^2) z^7 + \ldots\ldots$$

$$x^7 = c_0^7 z^7 + \ldots\ldots\ldots;$$

дакле ако ове вредности у датый редъ узмемо и после га по z уредимо:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
z = c_0 z + c_1 z^2 + c_2 & z^3 + \quad c_3 & z^4 + \quad c_4 & z^5 + \quad c_5 & z^6 \\
-\frac{1}{6} c_0^3 & -\frac{1}{2} c_0^2 c_1 & -\frac{1}{2} c_0^2 c_2 & -\frac{1}{2} c_0^2 c_3 & \\
 & & -\frac{1}{2} c_0 c_1^2 & -c_0 c_1 c_2 & \\
 & & +\frac{1}{120} c_0^5 & -\frac{1}{6} c_1^3 & \\
 & & & +\frac{1}{24} c_0^4 c_1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
+ \quad c_6 & z^7 + \ldots\ldots \\
-\frac{1}{2} c_0^2 c_4 & \\
-c_0 c_1 c_3 & \\
-\frac{1}{2} c_0 c_2^2 & \\
-\frac{1}{2} c_1^2 c_2 & \\
+\frac{1}{24} c_0^4 c_2 & \\
+\frac{1}{12} c_0^3 c_1^2 & \\
-\frac{1}{5040} c_0^7 &
\end{array}$$

и одтудъ по правилу сачинителя

$$c_0 = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2\,.\,3},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,5},\ c_5 = 0,$$

$$c_6 = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7},\ c_7 = 0,\ \ldots\ldots\ldots$$

По томе превернутый є редъ

$$x = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{z^7}{7} + \ldots\ldots$$

2.) Ако є за превртанѣ датый редъ

$$x = 1 + lx + \frac{l^2x}{2!} + \frac{l^3x}{3!} + \ldots.. ,$$

т. є. ако треба изразити обратно lx редомъ єднимъ као функцію одъ x: имамо найпре

$$x - 1 = z = lx + \frac{l^2x}{2!} + \frac{l^3x}{3!} + \ldots\ldots.$$

Поставляюћи садъ

$$lx = c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + c_3 z^4 + \ldots\ldots ,$$

быва

$$l^2x = c_0^2 z^2 + 2c_0 c_1 z^3 + (2c_0 c_2 + c_1^2) z^4 + (2c_0 c_3 + 2c_1 c_2) z^5 + \ldots.$$

$$l^3x = c_0^3 z^3 + 3c_0^2 c_1 z^4 + (3c_0^2 c_2 + 3c_0 c_1^2) z^5 + \ldots\;..$$

$$l^4x = c_0^4 z^4 + 4c_0^3 c_1 z^5 + \ldots\ldots.$$

$$l^5x = c_0^5 z^5 + \ldots\ldots$$

. . . .

дакле

$$\begin{array}{lr|r|r|r|l}
z = c_0 z + & c_1 & z^2 + \quad c_2 & z^3 + \quad c_3 & z^4 + \quad c_4 & z^5 + \ldots\ldots ; \\
& \frac{1}{2} c_0^2 & c_0 c_1 & c_0 c_2 & c_0 c_3 & \\
& & \frac{1}{6} c_0^3 & \frac{1}{2} c_1^2 & c_1 c_2 & \\
& & & \frac{1}{2} c_0^2 c_1 & \frac{1}{2} c_0^2 c_2 & \\
& & & \frac{1}{24} c_0^4 & \frac{1}{2} c_0 c_1^2 & \\
& & & & \frac{1}{6} c_0^3 c_1 & \\
& & & & \frac{1}{120} c_0^5 &
\end{array}$$

одтудъ по правилу сачинителя

$$c_0 = 1,\ c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{3},\ c_3 = -\frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots ,$$

и по томе преврнутый є редъ

$$lx = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} + \ldots\ldots ,$$

или збогъ $z = x - 1$:

$$lx = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$$

§ 129.

Єсмо ли превнутомъ реду у іошъ неопредѣлѣномъ виду, т. є. ономъ у почетку место превнутога узетомъ реду, сходну форму дали: увиђамо самимъ посломъ; еръ ако превнутый редъ неке у ономе поставлѣне чланове несадржи, сачинительи свію таковы членова добыт' ће се — као у првомъ одъ горньи примера — равни нулли, уобште пакъ наилази се у случаю погрешно избране форме на противусловія.

Но то є кушанѣ — каошто показуе и самъ поменутый примеръ — више-манѣ дангубно; зато ћемо показати, како можемо унапредъ определити: каквога вида превнутый редъ мора быти.

§ 130.

Свакій за превртанѣ датый редъ може се свести на видъ

$$z = x^n + a_1 x^{n+v} + a_2 x^{n+2v} + a_3 x^{n+3v} + \ldots\ldots$$

Помыслимо овде x тако мало, да безъ велике погрешке можемо узети $z = x^n$; быт' ће $x = z^{\frac{1}{n}}$, дакле

$$x^{n+v} = z \,.\, z^{\frac{v}{n}},\; x^{n+2v} = z \,.\, z^{\frac{2v}{n}},\; x^{n+3v} = z \,.\, z^{\frac{3v}{n}}, \ldots\ldots\ldots$$

Заменюјући ове вредности у горнѣмъ реду, слѣдує, ако уєдно скратимо са z,

$$1 + 1 + a_1 z^{\frac{v}{n}} + a_2 z^{\frac{2v}{n}} + a_3 z^{\frac{3v}{n}} + \ldots\ldots,$$

или ако іошъ са $z^{\frac{1}{n}}$ помложимо и, да бы се истини повратили, место сачинителя 1, a_1, a_2, ... узмемо друге неопределѣне сачинителѣ c_1, c_2, c_3, ...

$$x = c_1 z^{\frac{1}{n}} + c_2 z^{\frac{1+v}{n}} + c_3 z^{\frac{1+2v}{n}} + \ldots\ldots\ldots$$

Изъ овога видимо: ако су изложительи одъ x у датомъ за превртанѣ реду n, $n+v$, $n+2v$, $n+3v$, ...: онда у превнутомъ реду быт' ће $\frac{1}{n}$, $\frac{1+v}{n}$, $\frac{1+2v}{n}$, $\frac{1+3v}{n}$, ...; о чему се одма можемо уверити на горе показанимъ примерима.

У првомъ были су изложительи одъ x редомъ 1, 3, 5, 7, ... Ту є $n = 1$, а $v = 2$; изложительи дакле у преврнутомъ реду по прећашнѣмъ докученю мораю быти

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1+v}{n} = \frac{1+2}{1} = 3, \quad \frac{1+2v}{n} = \frac{1+4}{1} = 5,$$

$$\frac{1+3v}{n} = \frac{1+6}{1} = 7, \ldots\ldots,$$

а такове смо ій доиста и нашли.

У другомъ пакъ примеру, почемъ смо преместили 1 изъ десне части у леву, имали смо изложителѣ 1, 2, 3, 4, ... ; изложительи дакле у преврнутомъ реду треба да су збогъ $n = 1$ и $v = 1$:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1+v}{n} = \frac{1+1}{1} = 2, \quad \frac{1+2v}{n} = \frac{1+2}{1} = 3,$$

$$\frac{1+3v}{n} = \frac{1+3}{1} = 4, \ldots\ldots,$$

а такове смо ій и добыли.

III. Развіянѣ функція у безкрайне редове.

§ 131.

Удобный видъ целы раціоналны функція подає при ньіовомъ употребляваню толико олакшица' и други користій: да збогъ тога и остале функціє, т. є. функціє **раціоналне деловне, ираціоналне** и **трансцендентне** на овай видъ доводимо. Но то є осимъ тога іошъ и зато необходно нуждно, што иначе млоге одъ ньи ни приближно небы могли срачунити.

Сама имена поменуты функція казую да оне, изражене као целе и раціоналне, немогу быти крайне, бит'ће безкрайни редови; но цѣль є тогъ ньіовогъ преображаваня зато опетъ каогодъ и постигнута, ако само ти редови буду нагло сбирльиви.

Посао, коимъ одъ речены функція добыямо такове редове, назива се ньіовимъ **развіянѣмъ** у безкрайне редове и бытѣе съ исключенѣмъ ирраціоналны функція предметъ слѣдуюћи §§.

Ове ирраціоналне функціє, коє свагда можемо довести на видъ $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots)^{\frac{n}{m}}$, изоставлямо зато, еръ є ньіово развіянѣ помоћу полиномногъ и биномногъ правила, већъ познато изъ §§-а 21. и 23.

Управо имали бы се овде занимати само съ развіянѣмъ трансцендентны функція, изъ узрока, што є развіянѣ деловны функція простомъ деобомъ, такођеръ већъ познато. Но мы ове последнѣ функціє морамо іошъ и далѣ сматрати 1. зато, што другій начинъ, кои ћемо за ньіово развіянѣ овде показати, садржи знатне олакшице, и еръ су 2. редови одъ тій функція, каошто ћемо одма видити, *рекурентни*, а мы свойства таковы редова іоште непознаемо.

а.) Редови одъ раціоналны деловны функція (рекурентни редови).

§ 132.

Обштій є видъ раціоналне деловне функціє по §. 7.

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{\nu-1} x^{\nu-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_\nu x^\nu},$$

и мы сваку такову функцію (лакше него простомъ деобомъ) можемо развити у безкрайный редъ: ако є на основу §-а 9. поставимо $= t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots\ldots$; после ову єдначину съ именителѣмъ фунціє помложимо, све по растућимъ изложительима уредимо, и найпосле іошъ непознате сачинителѣ $t_0, t_1, t_2, \ldots$ помоћу правила сачинителя израчунимо.

Тако н. п. ако бы была деловна функція

$$\frac{2 - x + 2x^2}{1 + 2x - x^2 - x^3},$$

имали бы после ослобођеня одъ именителя.

$$2 - x + 2x^2 = (1 + 2x - x^2 - x^3)(t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots)$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} = t_0 + t_1 & x + t_2 & x^2 + t_3 & x^3 + t_4 & x^4 + \ldots\ldots\ldots, \\ 2t_0 & 2t_1 & 2t_2 & 2t_3 & \\ & -t_0 & -t_1 & -t_2 & \\ & & -t_0 & -t_1 & \end{array}$$

и одтудъ по поменутомъ правилу сачинителя':

$t_0 = 2$;

$t_1 + 2t_0 = -1$, т. є. $t_1 + 4 = -1$, дакле $t_1 = -5$;

$t_2 + 2t_1 - t_0 = 2$, „ $t_2 - 12 = 2$, „ $t_2 = 14$;

$t_3 + 2t_2 - t_1 - t_0 = 0$, „ $t_3 + 31 = 0$, „ $t_3 = -31$;

$t_4 + 2t_3 - t_2 - t_1 = 0$, „ $t_4 - 71 = 0$, „ $t_4 = 71$;

. . . .

$t_n + 2t_{n-1} - t_{n-2} - t_{n-3} = 0$, дакле $t_n = -2t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$;

. . . .

Дата є дакле функція развієна у безкрайный редъ:

$$\frac{2 - x + 2x^2}{1 + 2x - x^2 - x^3} = 2 - 5x + 14x^2 - 31x^3 + 71x^4 - \ldots\ldots$$

§ 133

Да є овай начинъ веђъ само овако доиста простіи одъ онога посредствомъ деобе, увиђа се изъ овогъ єдногъ примера довольно; но могуђе су притомъ іошъ и друге олакшице.

Ако посмотримо горнђ єдначине за определьиванђ непознаты сачинителя' $t_0, t_1, t_2, \ldots\ldots\ldots$, видимо: да одъ четвртога на далђ сви сачинительи постаю на єданъ истый, у изразу $t_n = -t_{n-3} + t_{n-2} + t_{n-1}$ садржаный начинъ. При ономъ дакле примеру ніє было нуждно узети више єдначина' за сачинителђ, него прве четири; за определьиванђ сачинителя t_0, t_1, и t_2, прве три, а четврту за одкриванђ образца, по комъ се простомъ пременомъ сказальке и заменомъ веђъ докучены сачинителя, добыяю сви други, чимъ бы цео посао быо наравно и краћій и лакшій.

Слђдуюћа сматраня показат'ђе, да ово ніє случайно само при ономе примеру тако, него да се подобно може поступати при свакой уобште деловной функціи.

Осимъ тога имамо напоследку іошъ и то приметити, да се првый чланъ траженога реда одъ ма какове деловне функціє може свагда одма написати, єръ онъ неможе быти нико другій, но количникъ одъ разделђногъ првогъ члана броителя чрезъ првый чланъ именителя, чимъ є такођеръ нешто мало посла уштеђено.

§ 134.

Найпростіи є видъ чисте деловне функціє, о коіой засада исключно говоримо, $\frac{\alpha_0}{a_0 + a_1 x}$.

Поступаюћи съ ньомъ по §-у 132. имамо после ослобођеня одъ именителя,

$$\alpha_0 = \alpha_0 + \begin{array}{l|} a_0 t_1 \\ a_1 \frac{\alpha_0}{a_0} \end{array} x + \begin{array}{l|} a_0 t_2 \\ a_1 t_1 \end{array} x^2 + \begin{array}{l|} a_0 t_3 \\ a_1 t_2 \end{array} x^3 + \ldots + \begin{array}{l|} a_0 t_n \\ a_1 t_{n-1} \end{array} x^n + \ldots\ldots,$$

и одтудъ по правилу сачинителя':

$$a_0 t_1 + a_1 \frac{\alpha_0}{\alpha^0} = 0, \text{ дакле } t_1 = -\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{\alpha_0}{a_0};$$

$$a_0 t_2 + a_1 t_1 = 0, \quad " \quad t_2 = -\frac{a_1}{a_0} t_1;$$

$$a_0 t_3 + a_1 t_2 = 0, \quad " \quad t_3 = -\frac{a_1}{a_0} t_2;$$

. . . .

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} = 0, \quad " \quad t_n = -\frac{a_1}{a_0} t_{n-1};$$

. . . .

Изъ овы едначина' видимо, да у реду одъ функціє поменутога вида, сви сачинительи одъ другога на далѣ, на тай еданъ истый, у изразу $t_n = -\frac{a_1}{a_0} t_{n-1}$ садржаный простъ начинъ постаю: што се последный сачинитель у име слѣдуюћега мложи са количникомъ $-\frac{a_1}{a_0}$, и да є збогъ тога траженый редъ по §-у 115. **рекурентанъ.** Количникъ $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$ назива се притомъ **стройный образацъ,** а редъ, збогъ тога што є овай образацъ едночланъ, рекурентанъ **првога степена.**

§ 135.

Ако є деловна функція вида $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$, добыямо, поступаюћи као пре,

$$\alpha_0+\alpha_1 x=\alpha_0+\left.\begin{array}{r} a_0 t_1\\ a_1\cdot\frac{\alpha_0}{a_0}\end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r} a_0 t_2\\ a_1 t_1\\ a_2\frac{\alpha_0}{a_0}\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r} a_0 t_3\\ a_1 t_2\\ a_2 t_1\end{array}\right| x^3+\ldots+\left.\begin{array}{r} a_0 t_n\\ a_1 t_{n-1}\\ a_2 t_{n-2}\end{array}\right| x^4+\ldots,$$

а одатле

$$a_0 t_1+a_1\frac{\alpha_0}{a_0}=\alpha_1, \qquad \text{дакле} \quad t_1=\frac{\alpha_1}{a_0}-\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{\alpha_0}{a_0},$$

$$a_0 t_2+a_1 t_1+a_2\frac{\alpha_0}{a_0}=0, \qquad „ \quad t_2=-\frac{a_1}{a_0}t_1-\frac{a_2}{a_0}\cdot\frac{\alpha_0}{a_0},$$

$$a_0 t_3+a_1 t_2+a_2 t_1=0, \qquad „ \quad t_3=-\frac{a_1}{a_0}t_2-\frac{a_2}{a_0}t_1,$$

. . . .

$$a_0 t_n+a_1 t_{n-1}+a_2 t_{n-2}=0, \qquad „ \quad t_n=-\frac{a_1}{a_0}t_{n-1}-\frac{a_2}{a_0}t_{n-2},$$

. . . .

Овде дакле добыяю се сачинительи траженога реда, одъ тређега на далђ, сви на єданъ истый, у изразу $t_n=-\frac{a_1}{a_0}t_{n-1}-\frac{a_2}{a_0}t_{n-2}$ садржаный начинъ. Стройный є образацъ $\left[-\frac{a_1}{a_0},-\frac{a_2}{a_0}\right]$ двочланъ, и збогъ тога траженый редъ рекурентанъ другога степена.

§ 136.

При функціи вида $\frac{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2}{a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3}$ имамо

$$\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2=\alpha_0+\left.\begin{array}{r} a_1 t_1\\ a_1\cdot\frac{\alpha_0}{a_0}\end{array}\right| x+\left.\begin{array}{r} a_0 t_2\\ a_1 t_1\\ a_2\cdot\frac{\alpha_0}{a^0}\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r} a_0 t_3\\ a_1 t_2\\ a_2 t_1\\ a_3\cdot\frac{\alpha_0}{a_0}\end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r} a_0 t_4\\ a_1 t_3\\ a_2 t_2\\ a_3 t_1\end{array}\right| x^4+\ldots$$

$$\ldots+\left.\begin{array}{r} a_0 t_n\\ a_1 t_{n-1}\\ a_2 t_{n-2}\\ a_3 t_{n-3}\end{array}\right| x^n+\ldots,$$

и одтудъ

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{\alpha_0}{a_0},\ t_2 = \frac{\alpha_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}\, t_1 - \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{\alpha_0}{a_0},$$

$$t_3 = -\frac{a_1}{a_0}\, t_2 - \frac{a_2}{a_0}\, t_1 - \frac{a_3}{a_0} \cdot \frac{\alpha_0}{a_0},\ t_4 = -\frac{a_1}{a_0}\, t_3 - \frac{a_2}{a_0}\, t_2 - \frac{a_3}{a_0}\, t_1, \ldots$$

. . . .

$$t_n = -\frac{a_1}{a_0}\, t_{n-1} - \frac{a_2}{a_0}\, t_{n-2} - \frac{a_3}{a_0}\, t_{n-3}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ту дакле постаю сачинительи траженога реда, одъ четвртога започето на єданъ истый, у изразу $t_n = -\frac{a_1}{a_0} t_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} t_{n-2} - \frac{a_3}{a_0} t_{n-3}$ садржаный начинъ: стройный є образацъ $\left[-\frac{a_1}{a_0}, -\frac{a_2}{a_0}, -\frac{a_3}{a_0}\right]$ трочланъ, а траженый редъ збогъ свега тога рекурентанъ трећега степена.

§ 137.

Продужавајући ова сматраня долазимо найпосле до слѣдујући општи докученя:

1.) Редови су одъ деловны функція сви рекурентни, и као такови одъ оноликога степена, изъ колико се чланова састои стройный образацъ.

2.) Стройный образацъ састои се свагда изъ онолико чланова, колико има, или морао бы имати подпуный броитель дотичне функціє, или коликога є степена функція именитель исте функціє; чланови пакъ тога образца єсу одречни количници одъ свію сачинителя подпунога именителя, осимъ првога, раздѣлѣни съ тимъ првимъ сачинителѣмъ.

3.) Сачинительи таковы редова постаю одъ онога члана започето на єданъ истый, у стройной єдначини садржаный начинъ изъ предходећи, кои изриче брой чланова подпунога именителя; предходећи пакъ сачинительи морају се изнаћи по правилу сачинителя изъ ослобођене одъ именителя єдначине: деловна функція $= t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots\ldots\ .$ — Найпосле

4.) Стройну єдначину налазимо, поставляюћи $t_n =$ алгебрайскомъ сбиру одъ оноліко предходећи сачинителя $t_{n-1}, t_{n-2} \ldots$, колико чланова има стройный образацъ, коима као сачинителѣ валя придати по реду исте чланове тога образца (види §§-е 134—136).

§ 138.

За лакше развіянѣ деловны функція у безкрайне редове имамо дакле по овымъ докученяма слѣдуюће просто правило:

Поставити треба дату деловну функцію $= t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots\ldots$, и ту єдначину одъ именителя ослободити, па онда изъ нѣ по правилу сачинителя оноліко првы сачинителя t изнаћи, колико чланова има, или треба да има подпуный броитель дате функціє. За остале сачинителѣ валя найпосле по 4. докученю у предходећемъ §-у направити стройну єдначину, и у той заменути n редомъ са свима броєвима одъ броя чланова у подпуномъ броителю на далѣ.

За упражнѣнѣ и болѣ обяснѣнѣ, узмимо неколико примера.

§ 139.

1.) $$\frac{1 + 2x}{1 - 2x + 3x^2} = 1 + t_1 x + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$1 + 2x = 1 + \begin{array}{r|l} t_1 & x + \ldots\ldots\ldots, \\ -2 & \end{array}$$

одтудъ $t_1 - 2 = 2$, дакле $t_1 = 4$.

Стройный є образацъ при овой функціи по 2. докученю §-а 137. $\left[\frac{2}{1}, -\frac{3}{1}\right] = [2, -3]$, а зато єдначина сачинителя по 4. докученю, $t_n = 2t_{n-1} - 3t_{n-2}$. Поставляюћи дакле у овой редомъ $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$, добыямо

$t_2 = 2t_1 - 3t_0 = 8 - 3 = 5$, | $t_4 = 2t_3 - 3t_2 = -4 - 15 = -19$,
$t_3 = 2t_2 - 3t_1 = 10 - 12 = -2$ | $t_5 = 2t_4 - 3t_3 = -38 + 6 = -32$.

. . . . , и по тому траженый є редъ вопросне функціє

$$\frac{1 + 2x}{1 - 2x + 3x^2} = 1 + 4x + 5x^2 - 2x^3 - 19x^4 - \ldots\ldots$$

$$2.)\ \frac{1 + x^2}{1 + x + x^4} = 1 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots\ldots$$

$$1 + x^2 = 1 + \begin{array}{c|c|c|l} t_1 & x + t_2 & x^2 + t_3 & x^3 + \ldots\ldots \\ +1 & t_1 & t_2 & \end{array}$$

Подпуный броитель ове функціє морао бы имати 4 члана; толико дакле првы сачинителя t валя изнаћи правиломъ сачинителя; пошто є пакъ првый $t_0 = 1$ већъ познатъ, то остаю іошъ три. За те имамо єдначине $t_1 + 1 = 0$, $t_2 + t_1 = 1$, $t_3 + t_2 = 0$; изъ кои слѣдує $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = -2$.

Стройный є образацъ

$$\left[-\frac{1}{1}, \pm\frac{0}{0}, \pm\frac{0}{1}, -\frac{1}{1}\right] = \left[-1, \pm 0, \pm 0, -1\right],$$

а по томе єдначина сачинителя' $t_n = - t_{n-1} - t_{n-4}$. Замењивајући у овой n редомъ съ 4, 5, 6, ..., слѣдує:

$$\begin{array}{l|l} t_4 = - t_3 - t_0 = 2 - 1 = 1, & t_6 = - t_5 - t_2 = -2, \\ t_5 = - t_4 - t_1 = -1 + 1 = 0, & t_7 = - t_6 - t_3 = 2 + 2 = 4, \end{array}$$

. . . .

Траженый є дакле редъ дате функціє

$$\frac{1 + x^2}{1 + x + x^4} = 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - 2x^6 + \ldots\ldots$$

$$3.)\ \frac{1}{1 - 2x} = 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Овде добыямо, збогъ само єдногъ члана у броителю, све сачинителѣ реда, осимъ већъ познатогъ првогъ $t_0 = 1$, помоћу стройне єдначине, коя є, збогъ стройногъ образца $\frac{2}{1} = 2$, $t_n = 2t_{n-1}$. Заменомъ броя n съ броєвима 1, 2, 3, 4, ... налазимо: $t_1 = 2t_0 = 2$, $t_2 = 2t_1 = 4$, $t_3 = 2t_2 = 8$, ... ; и по тому траженый є редъ $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots$

§ 140.

Овомъ начину развіяня деловны функція у безкрайне редове имамо додати іошъ слѣдуюће две приметбе:

1. Ако дата функція ніє чиста, онда треба найпре изнаћи простомъ деобомъ толико членова реда, докъ остатакъ небуде у єданъ степенъ нижа функція него именитель; после пакъ поступа се съ деловномъ функціомъ одъ тога остатка и именителя, каошто є горе показано.

2. Ако є деловна функція вида

$$\frac{\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m+1} + \alpha_2 x^{m+2} + \dots + \alpha_n x^{m+n}}{a_0 x + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n+1} x^{n+1}},$$

или

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n}{a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \dots + a_{n+1} x^{m+n+1}}:$$

онда треба є найпре разложити на два чинителя, у првомъ случаю x^m и

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n+1} x^{n+1}},$$

у другомъ пакъ $\frac{1}{x^m}$ и $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots}{a_0 + a_1 x + \dots}$; после пакъ поступа се съ другимъ чинителѣмъ по изложеномъ начину, и одъ нѣга добывеный редъ множи се напослѣдку іошъ односно съ x^m или $\frac{1}{x^m}$.

§ 141.

Помоћу познатогъ стройногъ образца или єдначине сачинителя, у станю смо врло лако разрешити и обратный задатакъ, т. є. изнаћи ону деловну функцію, одъ кое постає датый некій рекурентный редъ.

Єръ, ако стройну єдначину у §§-ма 134. — 136. доведемо на нуллу и ослободимо одъ именителя, онда видимо да су нѣни сачинительи онаки исти, као у именителю дотичне деловне функціє; дакле да именитель тражене деловне функціє датогъ каквогъ рекурентногъ реда можемо свагда одма написати, чимъ смо дату, или изъ познатогъ стройногъ образца направлѣну едначину сачинителя', на нуллу свели и одъ именителя ослободили. Но знаюћи именителя, знамо и видъ броителя. Зато поставляюћи у толико познату деловну функцію равну датомъ реду, и ослобођавајући ову едначину одъ именителя, можемо после непознате сачинителѣ броителя лако пронаћи сравньиванѣмъ надлежны сачинителя' едне и друге стране.

Примери ће све ово больма обяснити.

§ 142.

1.) Датый е редъ $R = 1 + 4x + 5x^2 - 2x^3 - 19x^4 - \ldots$, а стройна едначина нѣговы сачинителя', $t_n = 2t_{n-1} - 3t_{n-2}$.

Доводећи ову едначину на нуллу слѣдуе $t_n - 2t_{n-1} + 3t_{n-2} = 0$, збогъ чега именитель вопросне деловне функціе мора быти $1 - 2x + 3x^2$, а броитель по виду $\alpha_0 + \alpha_1 x$.

Ставляюћи дакле $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{1 - 2x + 3x} = 1 + 4x + 5x^2 + \ldots$, добыямо мложенѣмъ съ именителѣмъ $\alpha_0 + \alpha_1 x = 1 + \left.\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}\right| x + \ldots$, одтудъ по правилу сачинителя' $\alpha_0 = 1$, $\alpha_2 = 4 - 2 = 2$, тако да е тражена функція датога реда:

$$R = \frac{1 + 2x}{1 - 2x + 3x^2}.$$

(Види § 139. примеръ 1.)

2.) Датый е редъ $R = 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 - \ldots$, а стройный нѣговъ образацъ $-1, +0, +0, -1$.

По овомъ е образцу едначина сачинителя $t_n = -t_{n-1} - t_{n-4}$; дакле именитель вопросне функціе, збогъ $t_n + t_{n-1} + t_{n-4} = 0$, $1 + x + x^4$, видъ броителя пакъ $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$.

Поставляюћи садъ

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3}{1 + x + x^4} = 1 - x + 2x^2 - 2x^3 + \ldots,$$

имамо после ослобођеня одъ именителя,

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 1 \begin{array}{r|r|r|l} -1 & x + 2 & x^2 - 2 & x^3 + \ldots\ldots, \\ +1 & -1 & +2 & \end{array}$$

а одтудъ $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1 + 1 = 0$, $\alpha_2 = 2 - 1 = 1$, $\alpha_3 = -2 + 2 = 0$.

Тражена є дакле основна функціја датога реда:

$$R = \frac{1 + x^2}{1 + x + x^4}.$$

(Види § 139. примеръ 2.).

Како валя поступати у случаю, ако є датый редъ вида $t_0 x^m + t_1 x^{m+1} + t_2 x^{m+2} + \ldots$, или $\frac{t_0}{x^m} + t_1 x^{1-m} + t_2 x^{2-m} + \ldots\ldots$: обавешћава подпуно § 140.

§ 143.

Видили смо у §§-ма 134. до 137., да се стройный образацъ састои свагда изъ управо онолико членова, колико таковы има подпуный броитель дотичне деловне функціє, а изъ єднога манѣ него у нѣномъ подпуномъ именителю. Броємъ є дакле членова стройнога образца каквогъ рекурентногъ реда, видъ нѣгове основне деловне функціє савршено определѣнъ, и мы ћемо одма видити, како се збогъ тога, непозната деловна функціја датогъ рекурентногъ реда, и у томъ случаю може лако изнаћи, ако осимъ нѣга ништа више незнамо, но само іошъ брой членова стройнога образца.

§ 144.

Уэмимо да є датый редъ $R = 1 + 4x + 5x^2 - 2x^3 - \ldots$, и да се нѣговъ стройный образацъ састои изъ два члана.

По горнѣму и тамо поменутимъ §§-ма, тражена деловна функціја мора быти вида

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}.$$

Поставляюћи є равну датомъ реду, слѣдує после ослобођеня одъ именителя

$$\alpha_0 + \alpha_1 x = a_0 + \begin{array}{r|}4a_0\\ a_1\\ \end{array}\, x + \begin{array}{r|}5a_0\\ 4a_1\\ a_2\end{array}\, x^2 - \begin{array}{r|}2a_0\\ 5a_1\\ 4a_2\end{array}\, x^3 - \ldots\ldots\,,$$

и одтудъ $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_1 = 4a_0 + a_1$, $5a_0 + 4a_1 + a_2 = 0$, $-2a_0 + 5a_1 + 4a_2 = 0$.

Изражаваюћи садъ изъ овы єдначина' све друге непознате сачинителѣ єднимъ одъ нѣи, н. п. чрезъ a_0, слѣдує одъ последнѣ две єдначине $2a_0 + a_1 = 0$, $a_1 = -2a_0$, а збогъ тога изъ треће єдначине, $a_2 = 3a_0$. Заменомъ вредности одъ a_1 у другой єдначини, добыямо после іошъ $\alpha_1 = 2a_0$, а са свима тима вредностима напослѣдку тражену деловну функцію реда R:

$$\frac{a_0 + 2a_0 x}{a_0 - 2a_0 x + 3a_0 x^2} = \frac{1 + 2x}{1 - 2x + 3x^2}.$$

(Види § 139.).

§ 145.

Изъ свы показаны примера за определѣиванѣ непознате деловне функціє датогъ каквогъ реда n. степена, види се, да одъ овога, при познатомъ стройномъ образцу или єдначини сачинителя', n, при познатомъ пакъ брою чланова стройнога образца, $2n$ првы чланова дати быти мораю.

§ 146.

У случаю, ако сачинительи датогъ рекурентногъ реда, одъ некога на далѣ, образую за себе аритметичанъ редъ, буди коликогъ степена: можемо изнаћи непознату функцію безъ да осимъ нѣга ишта друго знамо. Како то быва показат' ће слѣдуюће сматранѣ.

Узмимо да у рекурентномъ реду

$$R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + t_{n-1} x^{n-1} + t_n x^n + t_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

нѣгови сачинительи, одъ t_{n-1} на далѣ, образую аритметичанъ редъ m степена.

Истый редъ можемо писати и овако:

$$R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + x^{n-1}(t_{n-1} + t_n x + t_{n+1} x^2 + \ldots).$$

Поставляюћи $x = \frac{v}{1+v} = v - v^2 + v^3 - v^4 + \ldots\ldots$,

дакле
$$x^2 = v^2 - 2v^3 + 3v^4 - 4v^5 + \ldots\ldots$$
$$x^3 = v^3 - 3v^4 + 6v^5 - 10v^6 + \ldots\ldots$$
$$x^4 = v^4 - 4v^5 + 10v^6 - 20v^7 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

слђдує, ако ове вредности узмемо само у заграђеномъ члану реда,

$$R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + x^{n-1}\Big[t_{n-1} + t_n v \begin{array}{r|}-t_n\\+t_{n+1}\\ \\ \end{array} v^2 \begin{array}{r|}+t_n\\-2t_{n+1}\\+t_{n+2}\end{array} v^3$$
$$\begin{array}{r|}-t_n\\+3t_{n+1}\\-3t_{n+2}\\+t_{n+3}\end{array} v^4 + \ldots\Big].$$

Но ова сачинительи одъ v^2, v^3, v^4, ... нису ништа друго, него односно 1., 2., 3., ... разлика члана t_n, у аритметичномъ реду сачинителя t_{n-1}, t_n, t_{n+1} .... Можемо дакле писати

$$R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1}(t_{n-1} + t_n v + {}^1\Delta\, t_n v^2 + $$
$$+ {}^2\Delta\, t_n v^3 + \ldots\ldots\ldots),$$

или, ако место v узмемо нъгову, изъ израза $x = \frac{v}{1+v}$ слђдуюћу вредность $v = \frac{x}{1-x}$,

$$R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + x^{n-1}\Big[t_{n-1} + t_n\Big(\frac{x}{1-x}\Big) +$$
$$+ {}^1\Delta\, t_n \cdot \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^2 + {}^2\Delta\, t_n \cdot \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^3 + \ldots + {}^m\Delta\, t_n \cdot \Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{m+1}\Big].$$

Изъ узрока, што є аритметичный редъ поменуты сачинителя одъ $m.$ степена, заграђеный чланъ овога израза мора престати, каошто є назначено, съ $m.$ разликомъ сачинителя t_n. Слђдователно место реда R добыямо нађенимъ образцемъ сбиръ одъ n по x целы чланова.

и $(m+1)$ разломка, а одъ тога после, свршавајући га, тражену деловну функцію.

Све ово увидит' ће се больма изъ слѣдујући примера.

§ 147.

1.) Ако е датый редъ

$$R = 2 - 3x + x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 22x^5 + 35x^6 + \ldots\ldots,$$

имамо, одъ трећега члана на далѣ, редъ сачинителя

$$1 \quad 5 \quad 12 \quad 22 \quad 35 \; . \; . \; . \; . \; .$$

Дакле по горнѣмъ образцу

$$R = 2 - 3x + x^2[1 + 5x + 12x^2 + 22x^3 + 35x^4 + \ldots],$$

или збогъ

$$t_n = 5,\; {}^{1}\!\Delta\, t_n = 7,\; {}^{2}\!\Delta\, t_n = 3;\; {}^{3}\!\Delta\, t_n = {}^{4}\!\Delta\, t_n = \ldots\ldots = 0:$$

$$R = 2 - 3x + x^2\left[1 + 5\left(\frac{x}{1-x}\right) + 7\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{1-x}\right)^3\right]$$

$$= \frac{(2 - 3x + x^2)(1-x)^3 + 5x^3(1-x)^2 + 7x^4(1-x) + 3x^5}{(1-x)^3}$$

$$= \frac{2 - 9x + 16x^2 - 9x^3 + 3x^4}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}.$$

2.) $R = 2 - 2x - 8x^2 - 20x^3 - 40x^4 - 70x^5 - \ldots\ldots$

$$= 2 - x(2 + 8x + 20x^2 + 40x^3 + 70x^4 + \ldots\ldots),$$

$$t_n = 8,\; {}^{1}\!\Delta\, t_n = 12,\; {}^{2}\!\Delta\, t_n = 8,\; {}^{3}\!\Delta\, t_n = 2,\; {}^{4}\!\Delta\, t_n = {}^{5}\!\Delta\, t_n = \ldots\ldots = 0, \;-$$

$$R = 2 - x\left[2 + 8\left(\frac{x}{1-x}\right) + 12\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{1-x}\right)^4\right]$$

$$= \frac{(2-2x)(1-x)^4 - 8x^2(1-x)^3 - 12x^3(1-x)^2 - 8x^4(1-x) - 2x^3}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{2 - 10x + 12x^2 - 8x^3 + 2x^4 + 2x^5}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4}.$$

§ 148.

Самъ постанакъ рекурентны редова, као и све друго о ньима дояко докучено, показуѥ, да су ти редови свагда сбирльиви, — у §-у **117.** пакъ казано є, како се у вышой анализи, збогъ веће користи, готово само такови, т. є. сбирльиви редови употребляваю. Нуждно є дакле да умемо испытати: да ли є датый некій редъ рекурентанъ; єръ ако то нађемо, онда знамо не само шта све съ ньиме, као рекурентнимъ, чинити можемо, но уєдно и да є безъ сумнѣ сбирльивъ.

За ту цѣль имамо одъ Лагранжа — Lagrange — ниже слѣдуюће просто правило, кое осимъ простоте има іошъ и то преимућство, да у случаю, ако се испытаный редъ покаже као рекурентанъ, безъ ичега другога одма и нѣгову деловну функцію добыямо.

§ 149.

Да бы дознали є ли датый редъ $R = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \ldots\ldots$ рекурентанъ или ніє: треба съ ньимъ разделити єдиницу дотле, докъ недобыємо у количнику два члана $m + nx$ и остатакъ $r_1 x^2$, при комъ є r_1 вида $t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots\ldots$ Затимъ валя разделити R чрезъ r_1 дотле, докъ опетъ ненађемо два члана количника вида $m_1 + n_1 x$ съ остаткомъ $r_2 x^2$, при комъ є r_2 вида $\tau_0 + \tau_1 x + \tau_2 x^2 + \ldots\ldots$ Исто тако има се после разделити r_1 чрезъ r_2, и цео тай посао дотле продужити, докъ найпосле ненаиђемо на количникъ $M + Nx$, безъ икаквога остатка. Добыє ли се такавъ количникъ: онда є испытаный редъ за цело **рекурентанъ**, и као такавъ одъ оноликога степена, колико смо имали деоба; непрестаю ли напротивъ остатци: онда дотичный редъ известно ніє рекурентанъ, али зато може ипакъ быти сбирльивъ, збогъ чега, ако є нуждно знати є ли овакавъ, мора се іошъ подврћи онакомъ испытиваню, каошто смо показали у §§-ма **116.** до **126.**

§ 150.

Пре него се упустимо у доказиванѣ истинитости овога правила, да га употребимо на кои примеръ.

Датъ є за испытиванѣ є ли рекурентанъ редъ

1.) $R = 1 + 4x + 5x^2 - 2x^3 - 19x^5 - 32x^5 - \dots\dots$

Делећи єдиницу чрезъ R добыямо

$$\frac{1}{R} = 1 - 4x + \frac{x^2}{R}\left(11 + 22x + 11x^2 - 44x^3 + \dots\right),$$

дакле

$$r_1 = 11 + 22x + 11x^2 - 44x^3 + \dots\dots$$

Делећи далѣ R чрезъ r_1 налазимо

$$\frac{R}{r_1} = \frac{1}{11} + \frac{2}{11}x \text{ безъ остатка.}$$

Слѣдователно редъ є R рекурентанъ, и као таквъ, збогъ само две деобе, одъ другога степена. (Види § 139.).

Превртаюћи последный изразъ слѣдує $\frac{r_1}{R} = \frac{11}{1 + 2x}$,

збогъ тога $\frac{1}{R} = 1 - 4x + \frac{11x^2}{1 + 2x} = \frac{1 - 2x + 3x^2}{1 + 2x}$,

а ово превртаюћи $R = \frac{1 + 2x}{1 - 2x + 3x^2}$. (Види пређепометутый §).

2.) $R = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots\dots,$

$$\frac{1}{R} = 1 - 2x \text{ безъ остатка.}$$

Вопросный є дакле редъ рекурентанъ првога степена. (Види § 139.).

Превртаюћи $\frac{1}{R} = \frac{1 - 2x}{1}$, слѣдує $R = \frac{1}{1 - 2x}$.

§ 151.

О поузданости овога начина увераваю насъ лако слѣдуюћа сматраня.

1.) Ако є рекурентный редъ одъ првога степена, онда деловна функція одъ кое произилази, мора быти по §-у **134.** вида $\frac{\alpha_0}{a_0 + a_1 x}$, тако да имамо $R = \frac{\alpha_0}{a_0 + a_1 x}$, дакле ако овай изразъ преокренемо, или, што є сведно, единицу чрезъ R разделимо,

$$\frac{1}{R} = \frac{a_0 + a_1 x}{\alpha_0} = \frac{a_0}{\alpha_0} + \frac{a_1}{\alpha_0}\, x,$$

количникъ вида $m + nx$ безъ остатка.

2.) Ако є пакъ датый редъ R рекурентанъ другога степена, онда нѣгова основна функція по §-у **135.** мора быти вида $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$, тако да имамо

$$R = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2},$$

а ако **1** съ R разделимо:

$$\frac{1}{R} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{\alpha_0 + \alpha_1 x} = \frac{a_0}{\alpha_0} + \frac{a_1 \alpha_0 - a_0 \alpha_1}{\alpha_0^2} . x +$$

$$+ \frac{a_2 - a_1 . \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + a_0 . \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}}{\alpha_0 + \alpha_1 x} . x^2,$$

количникъ, кои се састои изъ два по x цела члана вида $m_1 + n_1 x$, и трећега вида $\frac{A}{\alpha_0 + \alpha_1 x} . x^2$.

Овай последный членъ произилази одъ остатка после друге деобе $r_1 x^2$, разделѣногъ съ делителѣмъ R. Можемо дакле писати

$$\frac{1}{R} = m_1 + n_1 x + \frac{r_1}{R} . x^2,$$

при чему, каошто лако увиђамо, r_1 мора быти вида $t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots.$, а $\frac{r_1}{R} = \frac{A}{\alpha_0 + \alpha_1 x}$, по §-у **132.**, рекурентанъ редъ првога степена.

Ако дакле разделимо **1** чрезъ тай редъ, или, што є сведно, чрезъ $\frac{r_1}{R}$, коє дає $\frac{R}{r_1}$: морамо по пређашнѣмъ докученю добыти количникъ вида $m_2 + n_2 x$ безъ икаквогъ остатка, тако да по тому при рекурентномъ реду другога степена више деоба одъ ове две $\frac{1}{R}$ и $\frac{R}{r_1}$ немогу быти.

Овимъ є Лагранжево правило потврђено за рекурентне редове 1. и 2. степена; лако є пакъ увидити, да ће се продужаванѣмъ овы сматраня обистинити за све уобште рекурентне редове, и мы оставлямо зато тай дальій посао прилѣжноме ученику.

§ 152.

Како се, у случаю ако є испытаный редъ рекурентанъ, докучує нѣгова основна функція: видили смо већъ узгредъ у примерима §-а 150.; но да то садъ покажемо и понаособъ.

Поставимо у име тога, да смо при испытиваню некогъ рекурентногъ реда нашли:

$$\frac{1}{R} = m + nx + \frac{r_1}{R}\,x^2,$$

$$\frac{R}{r_1} = m_1 + n_1 x + \frac{r_2}{r_1}\,x^2, \text{ а}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = m_2 + n_2 x \quad \text{безъ остатка.}$$

У томъ є случаю, ако последньій изразъ преокренемо,

$$1.)\quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{m_2 + n_2 x};$$

зато по другой єдначини

$$2.)\quad \frac{R}{r_1} = m_1 + n_1 x + \frac{x^2}{m_2 + n_2 x}$$

$$= \frac{m_1 m_2 + (m_2 n_1 + m_1 n_2)\,x + (n_1 n_2 + 1)\,x^2}{m_2 + n_2 x}.$$

Овай изразъ превртаюћи слѣдує

$$3.)\quad \frac{r_1}{R} = \frac{m_2 + n_2 x}{m_1 m_2 + (m_2 n_1 + m_1 n_2)\,x + (n_1 n_2 + 1)\,x^2},$$

а съ овомъ вредности изъ прве єдначине

$$4.)\quad \frac{1}{R} = m + nx + \frac{m_2 x^2 + n_2 x^3}{m_1 m_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\, x + (n_1 n_2 + 1)\, x^2}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l} mm_1 m_2 + (mm_1 n_2 + mm_2 n_1 + m_1 m_2 n)\, x + (mn_1 n_2 + \\ + m + m_1 n_2 n + m_2 n_1 n + m_2)\, x^2 + (nn_1 n_2 + n + n_2)\, x^3 \end{array}\right]}{m_1 m_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\, x + (n_1 n_2 + 1)\, x^2}$$

$$= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}.$$

Найпосле овай изразъ превртаюћи

$$5.)\quad R = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3},$$

деловна функція, коіой по §-у 136. одговара рекурентанъ редъ трећега степена, каошто то при горнѣмъ предпоставлѣню и треба да буде.

§ 153.

За попунѣнѣ найпотребніега знаня о рекурентнимъ редовима морамо на концу тога предмета іошъ показати разрешенѣ слѣдуюћа два важна задатка:

Изнаћи 1. обштій, а 2. сбирный чланъ датогъ рекурентногъ реда.

Што се тиче найпре **обштегъ члана** рекурентнога реда, то є лако увидити да ћемо га добыти, ако пре свега основну деловну функцію датога реда изнађемо; исту после по §§-ма 105. — 113. на почастне разломке разложимо; свакій одъ овы разломака затимъ, кои су, ако именитель деловне функціє нема мнимы чинителя, сви вида $\frac{a}{(a_0 + a_1 x)^n}$, по предходећимъ §§-ма у рекурентанъ редъ развіємо; обштій чланъ свакогъ одъ тій редова определимо, и найпосле іошъ све те обште чланове у єданъ саберемо.

Све є дакле притомъ само іошъ до тога стало: како налазимо обште чланове рекурентны редова одъ поєдины почастны разломака?

§ 154.

Рекосмо да ће свакій почастный разломакъ при само доистнимъ чинительима именителя дотичне деловне функціє быти вида $\frac{\alpha}{(a_0+a_1x)^n}$.

Развіяюћи ову функцію у рекурентанъ редъ (найудобніє помоћу биномнога правила) имамо

$$\frac{\alpha}{(a_0+a_1x)^n} = \alpha\,.\,(a_0+a_1x)^{-n}$$

$$= \alpha\left[a_0^{-n}+\binom{-n}{1}a_0^{-n-1}.\,a_1x+\binom{-n}{2}a_0^{+n-2}.\,a_1^2x^2\right.$$

$$\left.+\binom{-n}{3}a_0^{-n-3}.\,a_1^3x^3+\ldots+.\binom{-n}{v}a_0^{-n-v}.\,a_1^vx^v+\ldots\ldots\right]$$

$$= \alpha\,a_0^{-n}\left[1-n\frac{a_1}{a_0}x+\frac{n(n+1)}{2}.\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2x^2+\right.$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{2\,.\,3}.\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3x^3+\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^v.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.[n+(v-1)]}{v!}.\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^vx^v+\ldots.\right].$$

Общтій є дакле членъ рекурентногъ реда одъ функціє вида $\frac{\alpha}{(a_0+a_1x)^n}$, означуюћи га съ T_v,

$$T_v=(-1)^v.\frac{\alpha}{a_0^n}.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.[n+(v-1)]}{v!}.\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^v.x^v=$$

$$=(-1)^v.\frac{\alpha}{a_0^n}.\frac{n^{v|1}}{v!}.\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^v.x^v,$$

и мы съ ньимъ налазимо поєдине чланове истога реда, ако за v узмемо редомъ броєве 0, 1, 2, 3, ...

§ 155.

За упражнѣнѣ да узмемо єданъ примеръ.

Како изгледа общтій членъ рекурентногъ реда

$$R = 1-4x+6x^2-14x^3+26x^4-54x^5+\ldots\ldots.$$

Определяваюћи познатимъ начиномъ основну деловну функцію овога реда, налазимо

$$R = \frac{1 - 3x}{1 + x - 2x^2}.$$

Ова функція састои се по §-у 108. изъ два почастна разломка $\frac{-2}{3(1-x)}$ и $\frac{5}{3(1+2x)}$, тако да є

$$R = \frac{1-3x}{1+x-2x^2} = -\frac{2}{3(1-x)} + \frac{5}{3(1+2x)}.$$

Ови разломци, развіени по горнѣмъ образцу реда одъ $\frac{\alpha}{(a_0+a_1x)^n}$, даю:

Првый, при комъ є $\alpha = -2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$, $\frac{a_1}{a_0} = -1$, $n = 1$,

$$R_1 = -\frac{2}{3(1-x)} = -\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}x^3 - \ldots\ldots - \tfrac{2}{3}x^{\nu} - \ldots\ldots$$

Другій, гди є $\alpha = 5$, $a_0 = 3$, $a_1 = -6$, $\frac{a_1}{a_0} = 2$, $n = 1$,

$$R_2 = \frac{5}{3(1+2x)} = \tfrac{5}{3} - \tfrac{10}{3}x + \tfrac{20}{3}x^2 - \tfrac{40}{3}x^3 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{\nu}.\tfrac{5}{3}2^{\nu}x^{\nu} + \ldots\ldots$$

Вопросный є дакле редъ

$$R = R_1 + R_2 = 1 - 4x + 6x^2 - 14x^3 + 26x^4 + \ldots\ldots\ldots + [-\tfrac{2}{3}x^{\nu} + (-1)^{\nu}.\tfrac{5}{3}2^{\nu}x^{\nu} = \tfrac{2}{3}\{5(-1)^{\nu}2^{\nu-1} - 1\}x^{\nu}] + \ldots\ldots$$

а нѣговъ обштій членъ

$$T_{\nu} = \tfrac{2}{3}\,[5(-1)^{\nu}2^{\nu-1} - 1]\,x^{\nu}.$$

§ 156.

Овай начинъ определѣиваня обштегъ члана рекурентногъ реда, може се и онде употребити, гди се именитель дотичне деловне функціє састои изъ мнимы биномны чинителя; єръ ако притомъ α и a_0 и єсу мнимога вида, изразъ обштега члана испада ипакъ доистанъ.

Тако н. п. ако є вопросный редъ

$$R = 1 + x + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{5}{27}x^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

добыямо деловну функцію $\frac{3+x}{3-2x+x^2}$.

Разлажући ову у почастне разломке налазимо

$$R = \frac{3 - x}{3 - 2x + x^2} = - \frac{4 + \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}\,[(1 + \sqrt{-2}) - x]} + \\ + \frac{4 - \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}\,[(1 - \sqrt{-2}) - x]}.$$

При првомъ є одъ ова два разломка $\alpha = -\frac{4 + \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}}$, $a_0 = 1 + \sqrt{-2}$, $a_1 = -1$, $\frac{a_1}{a_0} = \frac{-1}{1 + \sqrt{-2}}$, $n = 1$; зато обштій чланъ нѣговогъ реда (по образцу §-а 154.).

$$T'_v = (-1)^v . \frac{-(4 + \sqrt{-2})}{2\sqrt{-2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{-2}} \cdot \frac{(-1)^v}{(1 + \sqrt{-2})^v} \cdot x^v \\ = - \frac{4 + \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}} \cdot \frac{x^v}{(1 + \sqrt{-2})^{v+1}}.$$

При другомъ є пакъ $\alpha = \frac{4 - \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}}$, $a_0 = 1 - \sqrt{-2}$, $a_1 = -1$, $\frac{a_1}{a_0} = \frac{-1}{1 - \sqrt{-2}}$, $n = 1$; дакле обштій чланъ нѣговога реда

$$T''_v = (-1)^v \cdot \frac{4 - \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{-2}} \cdot \frac{(-1)^v}{(1 - \sqrt{-2})^v} \cdot x^v \\ = \frac{4 - \sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}} \cdot \frac{x^v}{(1 - \sqrt{-2})^{v+1}}.$$

Слѣдователно обштій чланъ датога реда

$$T_v = T'_v + T''_v \\ = \frac{x^v}{2\sqrt{-2}} \cdot \left[- \frac{4 + \sqrt{-2}}{(1 + \sqrt{-2})^{v+1}} + \frac{4 - \sqrt{-2}}{(1 - \sqrt{-2})^{v+1}} \right] \\ = \frac{x^v}{2\sqrt{-2}} \cdot [(4 - \sqrt{-2}) . (1 + \sqrt{-2})^{v+1} - (4 + \sqrt{-2}) . (1 - \\ - \sqrt{-2})^{v+1}] \cdot \frac{1}{3^{v+1}} \\ = \frac{x^v}{2 . 3^{v+1} . \sqrt{-2}} \cdot [4 \{(1 + \sqrt{-2})^{v+1} - (1 - \sqrt{-2})^{v+1}\} \\ - \{(1 + \sqrt{-2})^{v+1} + (1 - \sqrt{-2})^{v+1}\}].$$

Но ако овде развіемо $(v+1)$. степенъ одъ $(1+\sqrt{-2})$ и $(1-\sqrt{-2})$, онда се, каошто є лако увидити, у разлики та два степена сви они членови потиру, гди є $\sqrt{-2}$ у парномъ степену, а остаю само они, гди є $\sqrt{-2}$ съ безпарнимъ изложителѣмъ; при сбиру иста два степена напротивъ потиру се сви членови съ $\sqrt{-2}$ у безпарномъ степену, остаю пакъ само они, гди є $\sqrt{-2}$ съ парнимъ изложителѣмъ. Разлика дакле поменута два степена остає вида $2M.\sqrt{-2}$, а сбиръ вида $2N$, и зато обштій членъ вопроснога реда

$$T_v = \frac{x^v}{2\,.\,3^{v+1}.\sqrt{-2}}\,.\,(8M-2N)\sqrt{-2}$$

$$= \frac{x^v}{3^{v+1}}\,.\,(4M-N),$$

каошто є речено, вида допстнога броя.

§ 157.

Сбирный членъ целогъ каквогъ рекурентногъ реда наравно неможе быти никои другій, него нѣгова основна деловна функція. Сбиръ пакъ само n првы нѣговы членова, каошто є такођеръ лако разумети, морамо добыти: ако одъ те функціє одузмемо сбиръ свію осталы членова одъ $(n+1)$. на далѣ.

Како се налази основна функція рекурентногъ реда видили смо. Треба дакле само іошъ показати: како ћемо изнаћи сбиръ членова одъ $(n+1)$. до безкрайнога.

У име тога валя приметити

1.) да се рекурентный редъ $R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + \ldots.$ може написати и овако

$$R = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + (t_n + t_{n+1} x + t_{n+2} x^2 + \ldots)\, x^n;$$

2.) да основна функція реда $t_n + t_{n+1} x + t_{n+2} x^2 + \ldots\ldots$ мора имати истогъ именителя, коєга има основна функція целога реда, и да ћемо зато

3.) бронтеля исте функціє наћи онако исто, каошто, после већъ познатогъ именителя, учи § 141.;

4.) да тако добывену функцію после іошъ съ x^n помложити треба; и найпосле

5.) да у случаю ако чланови реда одъ $(n+1)$. на далѣ небуду дати, за ньіово одкриванѣ пре свега морамо изнаћи по предходећимъ §§-ма общтій чланъ.

Єднимъ примеромъ быт'ће све ово подпуно обясьѣно.

§ 158.

Тражи се сбирный чланъ S_n рекурентногъ реда

$$R = 1 - 4x + 6x^2 - 14x^3 + \ldots\ldots\ldots$$

Основна є функція тога реда по §. 155. $\frac{1-3x}{1+x-2x^2}$, а нѣговъ общтій чланъ $T_v = \frac{2}{3}\left[5(-2)^v . 2^{v-1} - 1\right] x^v$.

Поставляюћи у овомъ последнѣмъ v редомъ $= n$, $n+1$, $n+2$, ..., добыямо чланове реда одъ $(n+1)$. на далѣ, а съ ньима после изъ єдначине

$$x^n . \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{1 + x - 2x^2} = T_n + T_{n+1} + T_{n+2} + \ldots$$

ньіовъ сбиръ S'.

Ова єдначина, узимаюћи место T_n, T_{n+1}, ... ньіове пређе поменутимъ путемъ изнађене вредности, дає

$$S' = x^n . \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{1 + x - 2x^2} = x^n \left[\tfrac{2}{3}\{5(-1)^n . 2^{n-1} - 1\} + \right.$$

$$\left. + \tfrac{2}{3}\{5(-1)^{n+1} . 2^n - 1\} x + \ldots\ldots\ldots\right],$$

и одтудъ, ако одъ именителя ослободимо:

$$\alpha_0 = \tfrac{2}{3}\left[5(-1)^n . 2^{n-1} - 1\right]$$

$$\alpha_1 = \tfrac{2}{3}\left[5(-1)^{n+1} . 2^n - 1\right] + \tfrac{2}{3}\left[5(-1)^n . 2^{n-1} - 1\right]$$

$$= - \tfrac{2}{2} . 5(-1)^n . 2^{n-1} - \tfrac{4}{3},$$

а тиме

$$S' = \frac{\frac{2}{3}\left[5(-1)^n . 2^{n-1} - 1\right] x^n - \frac{4}{3}\left[5(-1)^n . 2^{n-2} + 1\right] x^{n+1}}{1 + x - 2x^2}.$$

По томе, траженый є сбиръ (или сбирный членъ) првы n членова датога реда:

$$S_n = \frac{1 - 3x}{1 + x - 2x^2} - S'$$

$$= \frac{1 - 3x - \frac{2}{3}\left[5(-1)^n . 2^{n-1} - 1\right]x^n + \frac{4}{3}\left[5(-1)^n . 2^{n-2} + 1\right]x^{n+1}}{1 + x - 2x^2}.$$

б) Редови трансцендентны функція.

§ 159.

Понятіє трансцендентне функціє познато є изъ §-а **6.**, гди є уедно речено, да у такове функціє броимо: **експоненціалне** или **изложителне** броєве (рећи ће степене съ променльивимъ изложительима), **логаритме** и **гоніометрійске** или **кружне** функціє.

a^x, $\log x$, $\sin x$ и $\cos x$ єсу найпростіє трансцендентне функціє єдногъ променльивогъ броя, и зову се све четири **основне трансцендентне функціє**, єръ свака друга трансцендентна функція може се састояти само изъ таковы и неки алгебрайски, међусобомъ средствомъ четири проста вида рачуна скопчаны функція, или є дата каквомъ између онаки и алгебрайски функція постоєћомъ єдначиномъ.

Пре свега дакле занимат ћемо се изтраживанћмъ редова за те четири основне функціє.

1.) Редови основны трансцендентны функція a^x, $\log x$, $\sin x$ и $\cos x$.

§ 160.

Да бы изнашли редъ за $f(x) = a^x$, узмимо $x + h$ место x. По §-у **11.** бытће

$$f(x+h) = a^{x+h} = a^x . a^h = f(x) + f_1(x)\,h + f_2(x)\,\frac{h^2}{2!} +$$

$$+ f_3(x)\,\frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots (1.$$

Поставляюћи садъ $a = 1 + b$, добыямо

$$a^h = (1+b)^h = 1 + hb + \frac{h(h-1)}{2} b^2 + \frac{h(h-1)(h-2)}{2 . 3} b^3 + \dots$$

или ако мложенѣ у сачинительима десне части свршимо, и после све по h уредимо:

$$a^h = 1 + (b - \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{3} b^3 - \dots\dots) h + \dots\dots$$

$= 1 + Ah + \dots\dots$, при чему смо дакле ради краткоће узели $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \dots$

$$= (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \dots = A \dots (m.$$

Та вредность за a^h заменута у горньой єдначини подъ 1.) дає

$$a^x + Aa^x h + \dots\dots = a^x + f_1(x) h + \dots\dots,$$

одтуда пакъ слѣдує

$$f_1(x) = Aa^x.$$

Поступаюћи съ овомъ $f_1(x)$ у свему онако исто као дояко съ $f(x)$, налазимо

$$\begin{aligned} f_1(x+h) &= Aa^x . a^h \\ &= Aa^x[1 + Ah + \dots] \\ &= Aa^x + A^2 a^x h \dots\dots = f_1(x) + f_1[f_1(x)] h + \dots\dots, \end{aligned}$$

и одтудъ

$$f_1[f_1(x)] = A^2 a^x.$$

Но по горепоменутомъ є §-у

$$f_1[f_1(x)] = f_2(x);$$

дакле є

$$f_2(x) = A^2 a^x.$$

Лако є сада увидити, да овимъ начиномъ и далѣ радећи морамо добыти

$$f_3(x) = A^3 a^x,$$

$$f_4(x) = A^4 a^x,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Са свима овима вредностима имамо дакле

$$a^{x+h} = a^{x}\left[1 + Ah + \frac{A^2}{2!}h^2 + \frac{A^3}{3!}h^3 + \ldots\ldots\right],$$

или ако съ a^x скратимо:

$$a^{h} = 1 + Ah + \frac{A^2}{2!}h^2 + \frac{A^3}{3!}h^3 + \ldots\ldots,$$

а одтудъ, ако найпосле іощъ h съ x изменемо:

$$a^{x} = 1 + Ax + \frac{A^2}{2!}x^2 + \frac{A^3}{3!}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1,$$

при чему A значи оно што показуе горня єдначина подъ $m.$).

Овай є наћеный редъ по §-у 124. сбирљивъ међу границама $x = -\infty$ и $x = +\infty$.

Унапредакъ назначит'ћемо границе сбирљивости свакогъ важногъ реда просто тиме, да ћемо ій овако заграђене [ ] подъ нѣга метути.

§ 161.

Слѣдства. 1.) Ако у предходећемъ образцу узмемо $x = 1$, слѣдуе

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots\ldots;$$

ако пакъ поставимо овде іощъ и $A = 1$,

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots = 2{\cdot}718281828459\ \ldots$$

сталанъ брой, кои се у анализи представля писмомъ e. e є дакле вредность степенога корена a при $A = 1$.

Поставляюћи у образцу I.) e место a, добыямо

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots \quad (\text{I}'.$$

$$\begin{bmatrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{bmatrix}.$$

2.) Брой e добыямо такођеръ, ако у реду за a^x узмемо $x = \frac{1}{A}$, збогъ чега стои

$$a^{\frac{1}{A}} = e \quad \text{и} \quad a = e^{A}.$$

3.) Изъ прве одъ ове две едначине слѣдуе, да е логаритамъ одъ e за основицу a раванъ $\frac{1}{A}$, изъ друге пакъ логаритамъ одъ a за основицу e раванъ A. Логаритме за основицу a (рећи ће за сваку другу осимъ e) означуемо слогомъ *log.*, оне пакъ за основицу e просто само писмомъ l. Ово примътивши имамо дакле изъ горнѣ две едначине

$$log\, e = \frac{1}{A} \quad \text{и} \quad l\,a = A,$$

а съ овомъ последньомъ вредности изъ образца 1.)

$$a^x = 1 + \frac{la}{1}\,x + \frac{l^2a}{2!}\,x^2 + \frac{l^3a}{3!}\,x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.''$$

При аритметичнимъ пословима употребляваю се обично логаритми за основицу $a = 10$, или такозвани бригови логаритми; у целой вышой анализи напротивъ служимо се логаритмима за основицу e, кои се зову *природни* (еръ се брой e тако рећи самъ или природно за основицу намеће), *неперови* (по ньиовомъ пронашаоцу Неперу), или (изъ позднiе увиђавны узрока) *хиперболни.*

4.) Збогъ $la = A$ слѣдуе одъ друге едначине подъ 2.)

$$a = e^{la}, \quad \text{дакле} \quad a^x = e^{x\,la},$$

чимъ смо у станю свакій изложительный брой свести на основицу e. Напослѣдку

5.) такођеръ збогъ $la = A$ по пређашнѣмъ §-у — $f_1(x) = Aa^x$ —

$$f_1(a^x) = a^x\, la.$$

§ 162.

Ако е $f(x) = log\, x$ за основицу a, имамо

$$x = a^{f(x)}.$$

Поставляюћи место x, $x + h$, слѣдуе

$$x + h = a^{f(x+h)} = a^{f(x) + f_1(x)h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots}$$

или ако ради краткоће метнемо $f_1(x)h + f_2(x)\frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots = v$:

$$x + h = a^{f(x)+v} = a^{f(x)}\,.\,a^v.$$

Ова єдначина съ ономъ $x = a^{f(x)}$ раздѣлѣна дає

$$1 + \frac{h}{x} = a^v,$$

или ако за a^v узмемо нѣговъ редъ по §-у 160.:

$$1 + \frac{h}{x} = 1 + Av + \frac{A^2}{2!}v^2 + \frac{A^3}{3!}v^3 + \dots\dots, \quad \text{т. є.}$$

$$\frac{h}{x} = Av + \frac{A^2}{2!}v^2 + \frac{A^3}{3!}v^3 + \dots\dots;$$

а ако сада іошъ место v повратимо нѣгову горню вредность и после съ h скратимо:

$$\frac{1}{x} = Af_1(x) + A[f_2(x) + Af_1^2(x)]\frac{h}{2} + A[f_3(x) + 3Af_1(x)f_2(x) + A^2f_1^3(x)] \cdot \frac{h^2}{2.3} + \dots\dots$$

Будући да ова єдначина треба да постои за сваку уобште вредность броя h, то мора быти

$Af_1(x) = \frac{1}{x}$, дакле $f_1(x) = \frac{1}{Ax}$;

$f_2(x) + Af_1^2(x) = 0$, „ $f_2(x) = -\frac{1}{Ax^2}$;

$f_3(x) + Af_1(x)f_2(x) + A^2f_1^3(x) = 0$, „ $f_3(x) = \frac{2}{Ax^3}$;

. . . .

Изъ єдначине $x + h = a^{f(x+h)}$ слѣдує

$$\log(x+h) = f(x+h);$$

дакле є, ако нађене вредности одъ $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... у $f(x+h)$ заменемо,

$$\log(x+h) = \log x + \frac{h}{Ax} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{Ax^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{Ax^3} - \dots\dots,$$

а ако овде узмемо $x = 1$ а h изменемо съ x:

$$\left.\begin{aligned} \log(1+x) &= \frac{1}{A}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{la}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) \end{aligned}\right\} (n.$$

Изменююћи найпосле овде x съ $x-1$ добыямо траженый редъ

$$\log x = \frac{1}{A}\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots\right]$$

за основицу a, а

$$l\,x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots\ldots\ldots \qquad \text{II.}$$

за основицу e или природне логаритме, при коима є по предходећемъ §-у $A = 1$.

Оба ова реда сбирљиви су $\begin{bmatrix} x = -1 \\ x = +1 \end{bmatrix}$.

§ 163.

Ако у образцу I'.) узмемо место x єданпутъ $+x\sqrt{-1}$ а другій путъ $-x\sqrt{-1}$, после обе єдначине єданпутъ саберемо, а другій путъ другу одъ прве одузмемо, и у првомъ случаю съ 2, а у другомъ съ $2\sqrt{-1}$ разделимо: слѣдуе

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \\ \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (\alpha.$$

Посматраймо леве части овы єдначина' нешто ближе, и заменимо притомъ, ради краткоће, прву съ $f(x)$ а другу съ $\varphi(x)$.

1.) Постављаюћи у обе ове функціє $x = 0$, добыямо

$$f(0) = 1, \quad \text{а} \quad \varphi(0) = 0,$$

2.) ако пакъ заменемо x съ $-x$:

$$f(-x) = f(x), \quad \text{а} \quad \varphi(-x) = -\varphi(x).$$

3.) Подижући обе функціє на квадратъ, и квадрате сабираюћи, слѣдуе

$$f^2(x) + \varphi^2(x) = 1.$$

4.) Напослѣдку ако место x узмемо $2x$:

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1 = 1 - 2\varphi^2(x), \quad \text{а}$$
$$\varphi(2x) = 2f(x)\,\varphi(x).$$

Ово є безъ сумнѣ довольно, да у првой функціи познамо **косинусъ**, а у другой **синусъ** одъ x, и дакле да у горньимъ єдначинама већъ имамо тражене редове за $\sin x$ и $\cos x$ каошто слѣдує:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \text{ (III., a}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \text{ (IV.}$$

За оба реда $\begin{bmatrix} x = -\infty \\ x = +\infty \end{bmatrix}$.

2.) Іошъ неколико други потребны редова.

§ 164.

Осимъ синуса и косинуса употребляваю се одъ гоніометрійски функція найвише іошъ тангента и котангента; тога ради определит' ћемо овде іошъ редове и тій функція.

1.) Збогъ $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\sin x}$, имамо помоћу предходећа два реда

$$\operatorname{tang} x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots}$$

$$= x \,.\, \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots},$$

или ако другогъ чинителя поставимо $= 1 + t_1 x^2 + t_2 x^4 + \ldots\ldots$, ту єдначину одъ именителя ослободимо и после сачинителѣ $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots$ по правилу неопредѣлѣны сачинителя изнаћемо:

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{17}{3^2} \cdot \frac{x^7}{5.7} + \frac{62}{3^3} \cdot \frac{x^9}{5.7.9} + \ldots\ldots \text{ (V.}$$

2.) Истимъ начиномъ налазимо збогъ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3^2} \cdot \frac{x^3}{5} - \frac{2}{3^3} \cdot \frac{x^5}{5 \cdot 7} - \ldots\ldots\ldots \text{(VI.}$$

§ 165.

Редове лука x израженогъ нѣговимъ синусомъ, косинусомъ, тангентомъ или котангентомъ: налазимо найпростіе превртанѣмъ редова подъ III., IV., V. и VI. — Одъ тій редова найпотребніи су првый и трећій. Поменутимъ начиномъ добыямо

$$x = \sin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{\sin^7 x}{7} + \ldots \text{(VII.}$$

$$\begin{bmatrix} \sin x = -1 \\ \sin x = +1 \end{bmatrix}$$

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tang}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{tang}^7 x + \ldots\ldots \text{(VIII.}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tang} x = -1 \\ \operatorname{tang} x = +1 \end{bmatrix}.$$

§ 166.

По §-у є 161. $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$,

Мложенѣмъ броителя овогъ разломка єданпутъ съ $e^{x\sqrt{-1}}$, а другій путъ съ $e^{-x\sqrt{-1}}$, слѣдує

$$\cos x = \frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{2e^{x\sqrt{-1}}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 + e^{-2x\sqrt{-1}}}{2e^{-2x\sqrt{-1}}}.$$

Одъ првогъ одъ ова два израза имамо

$$l \cos x = l(1 + e^{2x\sqrt{-1}}) - l2 - x\sqrt{-1},$$

а одъ другога

$$l \cos x = l(1 + e^{-2x\sqrt{-1}}) - l2 + x\sqrt{-1};$$

или, ако $l\,(1+e^{2x\sqrt{-2}})$ и $l\,(1+e^{-2x\sqrt{-1}})$ по §-у **162.** развіемо у редове: одъ првога

$$l\cos x = e^{2x\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\,e^{4x\sqrt{-1}} + \frac{1}{3}\,e^{6x\sqrt{-1}} - \ldots - l2 - x\sqrt{-1}$$

а одъ другога

$$l\cos x = e^{-2x\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\,e^{-4x\sqrt{-1}} + \frac{1}{3}\,e^{-6x\sqrt{-1}} - \ldots - l2 + x\sqrt{-1}.$$

Сбиръ ова два израза, ако таки съ 2 разделимо, дає

$$l\cos x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{4x\sqrt{-1}}+e^{-4x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{6x\sqrt{-1}}+e^{-6x\sqrt{-1}}}{2} - \ldots - l2.$$

Но по образцу упочетку овога посла имамо после измене одъ x съ nx

$$\frac{e^{nx\sqrt{-1}}+e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = \cos nx.$$

Дакле є

$$l\cos x = \cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x - \tfrac{1}{4}\cos 8x + \ldots . - l2\,,$$

или збогъ $-\,l2 = l\,\tfrac{1}{2}$:

$$l\cos x = l\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x - \tfrac{1}{4}\cos 8x + \ldots \quad (\mathrm{IX}.$$

§ 167.

Поставляюћи у предходећемъ образцу $90^0 - x$ место x, слѣдуе збогъ $\cos(90^0 - x) = \sin x$:

$$l\sin x = l\,\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{1}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x - \tfrac{1}{3}\cos 6x - \ldots\ldots \quad (\mathrm{X}.$$

Збогъ $\mathrm{tang}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ пакъ, и $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$: имамо

$l\,\mathrm{tang}\,x = l\sin x - l\cos x$, а $l\cot x = l\cos x - l\sin x$;

дакле є, ако предходеће редове употребимо:

$$l\,\mathrm{tang}\,x = -\tfrac{2}{1}\cos 2x - \tfrac{2}{3}\cos 6x - \tfrac{2}{5}\cos 10x - \ldots\ldots \quad (\mathrm{XI}.$$

$$l\cot x = \tfrac{2}{1}\cos 2x + \tfrac{2}{3}\cos 6x + \tfrac{2}{5}\cos 10x + \ldots\ldots \quad (\mathrm{XII}.$$

3.) Редови за израчунаванѣ логаритама.

§ 168.

Пре него бы се упустили у излаганѣ оны редова, кои се особито успособляваю за израчунаванѣ логаритама, морамо приметити слѣдуюће:

α.) Свакій логаритамъ, кои ніе природанъ, т. е. кои се односи на другу неку основицу, а не e, зове се **артистичанъ** или **умѣтанъ**. Такови су логаритми Бригови, кои се односе на основицу $a = 10$. Они називаю се понаособъ іошъ збогъ већъ познатогъ нѣіовогъ найвећегъ употребляваня, **обични** или **прости**.

Изъ образаца подъ II.) у §-у 162. видимо, да се логаритамъ каквогъ броя за основицу a одъ нѣговогъ логаритма за основицу e (рећи ће одъ природногъ логаритма) ничимъ другимъ неразликуе, него да є овай последньій у ономе помложенъ съ разломкомъ $\frac{1}{A} = \frac{1}{la}$, при чему є A оне, у §-у 160. подъ m.) назначене вредности.

Тай разломакъ $\frac{1}{A} = \frac{1}{la}$ заменюе се ради краткоће писмомъ M, а називасе **модулъ** (стройникъ) логаритама за основицу a.

По овоме, разумеваюћи подъ log. и l што є речено у приметби §-а 161. подъ 3.), имамо:

$$log\,x = M \cdot lx, \text{ а}$$

$$l\,x = \frac{1}{M}\,log\,x = la \cdot log\,x.$$

У напредакъ радићемо само или съ Бриговимъ, или съ природнимъ логаритмима. При Бриговима є

$$M = \frac{1}{l\,10} = \frac{1}{2{\cdot}302585\ \ldots} = {\cdot}434294\ \ldots$$

Ако дакле хоћемо да преобратимо природный логаритамъ каквогъ броя у Бриговъ: онда га морамо помложити съ $M = {\cdot}434294 \ldots$ Хоћемо ли напротивъ простый (Бриговъ) логаритамъ да преведемо у природанъ: онда га морамо помложити съ $\frac{1}{M} = la = 2{\cdot}302585 \ldots$

§ 169.

β.) Ако є $e^x = k$, т. є. ако треба да буде x природный логаритамъ броя k: онда по образцу Γ.) §-а 161. слѣдує

$$(1 - k) + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = 0.$$

Ова є єдначина, збогъ безкрайности реда e^x, тако рећи одъ безкрайнога степена. Брой x дакле може имати безбройно млого неєднаки вредностій, одъ кои свака дає $e^x = k$.

Поставляюћи за x све наставно растуће вредности одъ 0 до $+\infty$, расте e^x наставно, и остає свагда **положно**, єръ су сви чланови нѣговогъ реда положни, и бываю за веће x такођеръ већи. Ако пакъ заменемо x са свима наставнимъ вредностима одъ 0 до $-\infty$, добыямо (збогъ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$) такођеръ саме **положне** вредности, кое се одъ 1 до 0 непрестано уманяваю.

Изъ овога слѣдує:

1.) Одречный брой k ($-k$) нема ниєданъ **доистный** природный логаритамъ; єръ ако бы рекли да є v такавъ логаритамъ, морало бы быти $e^v = -k$, кое є немогуће збогъ тога, што є e^x за сваку вредность одъ x **положно**. Слѣдователно природни логаритми одречнога броя єсу сви **мними**.

2.) Положномъ брою k напротивъ одговара свагда єданъ, али и само тай **єданъ доистанъ** брой као природный логаритамъ, кои є 0 за $k = 1$, **положанъ** за $k > 1$, а **одречанъ** за $k < 1$. Ако дакле за положанъ брой k нађемо више вредностій нѣговогъ природногъ логаритма: онда су осимъ тогъ єдногъ, сви други **мними**.

Све ово стои збогъ $\log x = \frac{1}{la}\, lx$ и за умѣтне логаритме положногъ или одречногъ броя k.

Садъ можемо приступити къ развіяню способны редова за израчунаванѣ логаритама.

§ 170.

У образцу подъ *n*), §. 162., имамо већъ єданъ такавъ редъ. Съ ньимъ сирѣчь можемо израчунити логаритм чисты разломака. Но можемо га слѣдуюћимъ начиномъ удесити и за логаритме броєва већи одъ 1.

Изменомъ одъ x съ $-x$, и одузиманѣмъ новога реда, добыямо найпре

$$log(1+x) - log(1-x) = log\frac{1+x}{1-x}$$
$$= 2M\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\right)\ldots(p.,$$

редъ, кои ће намъ требати и мало позднiє.

Поставляюћи у овомъ реду $\frac{1+x}{1-x} = \frac{z}{z-1}$, т. є. $x = \frac{1}{2z-1}$, слѣдує

$$log\frac{z}{z-1} = 2M\left[\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3(2z-1)^3} + \frac{1}{5(2z-1)^5} + \ldots\right],$$

и одтудъ

$$log z = log(z-1) + 2M\left[\frac{1}{2z-1} + \frac{1}{3(2z-1)^3} + \frac{1}{5(2z-1)^5} + \ldots\right] \quad (1.$$

Овай редъ сабира се већъ тако нагло, да трећiй нѣговъ чланъ, при рачунаню логаритама у 10 частны места, никако више невлiя: чимъ є z прешло брой 50. За броєве пакъ веће одъ 1000, доста є само и првый чланъ.

У осталомъ разуме се по себи, да само логаритме абсолутно просты броєва овако израчунити валя, єръ се съ ньима, збогъ $log\,.\,ab = log\,a + log\,b$ и $log\,a^n = n\,log\,a$, логаритми осталы, т. є. сложены броєва лакше, добыяю сабиранѣмъ и мложенѣмъ.

§ 171.

Сбирльивость горнѣга реда 1.) убрзава се iошъ већма, ако у истомъ узмемо $z = y^2$. Тимъ добыямо, збогъ $log(z-1) = log(y^2-1) = log(y+1) + log(y-1)$:

$$\log y = \tfrac{1}{2}\ [\log (y+1) + \log (y-1)]$$
$$+ M \left[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3(2y^2-1)^3} + \frac{1}{5(2y^2-1)^5} + \ldots\right] (2.,$$

редъ, одъ кога є, за логаритме у 10 частны места, само првый членъ доволянъ, чимъ y пређе брой 37.

При овоме су реду логаритми парны броева $(y+1)$ и $(y-1)$ свагда познати, ако смо найпре $\log 2$ редомъ 1.), или другимъ каквимъ начиномъ, већъ изнашли.

§ 172.

1.) Ако у првомъ реду §. 160. подъ n поставимо $x = \frac{1}{z}$, добыямо, збогъ $\log (1+x) = \log \frac{z+1}{z} = \log (z+1) - \log z$:

$$\log (z+1) = \log z + M\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \ldots\right] \ldots (3.,$$

редъ, коимъ се налазе изъ већъ израчунѣны логаритама велики броєва z, логаритми устопце слѣдуюћи броєва $(z+1)$. Сбирльивость є тога реда толика, да за $z > 10000$ чланови са z^2, z^3, …, на седмо место логаритама, више невліяю.

2.) Поставляюћи пакъ у реду p.) (§. 170.) $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m+z}{m}$, дакле $x = \frac{z}{2m+z}$: слѣдуе

$$\log (m+z) = \log m + 2M\left[\frac{z}{2m+z} + \frac{z^3}{3(2m+z)^3} + \frac{z^5}{5(2m+z)^5} + \ldots\right] (4.,$$

редъ, съ коимъ, при већъ изнађеномъ логаритму великогъ броя m, сасвимъ удобно добыямо логаритамъ свакогъ, одъ m у z већега броя; но при томъ є нуждно, да m буде спрамъ z знатно веће, како бы вредность разломка $\frac{z}{2m+z}$ испала врло мала.

§ 173.

Заменомъ одъ x са $\frac{v-w}{v+w}$ у пређепоменутомъ образцу $p.$), добыямо, збогъ $\frac{1+x}{1-x}=\frac{v}{w}$, образацъ

$$\log\frac{v}{w} = 2M\left[\frac{v-w}{v+w}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{v-w}{v+w}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{v-w}{v+w}\right)^5+\cdots\right] \quad (r.,$$

изъ коега можемо извести млого за рачунанѣ логаритама врло способне редове. При томе нуждно є само да за v и w изберемо такове броеве, кои се 1. могу разложити у згодне чинителѣ, и да 2. $(v+w)$ спрамъ $(v-w)$ испадне знатно веће.

Тако н. п. ако узмемо $v = x^4 - 25x^2 = x^2(x+5)(x-5)$, а $w = x^4-25x^2+144 = (x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$: быва $v+w = 2(x^4-25x^2+72)$, а $v-w = -144$; съ тима пакъ вредностима по горнѣмъ образцу $\log(x+5)$ определяваюћи, имамо

$$\log(x+5) = \log(x+3)+\log(x-3)+\log(x+4)+\log(x-4) - 2\log 2 - \log(x-5) - 2MR \;\ldots\ldots\; (5.$$

при чему є

$$R = \frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+ +\frac{1}{5}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^5+\ldots$$

Првый чланъ овога реда R добыя се за $x=1000$ маньій одъ $\overset{10}{0{\cdot}072}$, другій пакъ невлія више ни на 30. место.

Ако бы пакъ узели $v = x^6-98x^4+2401x^2 = x^2(x+7)^2(x-7)^2$, а $w = x^6-98x^4+2401x^2-14400 = (x+3)(x-3)(x+5)(x-5)(x+8)(x-8)$: было бы

$$\frac{v-w}{v+w} = \frac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200} = Q,$$

а збогъ свега тога по горнѣмъ образцу $r.$)

$$\begin{aligned}\log(x+8) = 2\,[\log x + \log(x+7) + \log(x-7)] \\ -[\log(x+3)+\log(x-3)+\log(x+5)+ \\ +\log(x-5)+\log(x-8)] \\ -2M\left(Q-\tfrac{1}{3}Q^3+\tfrac{1}{5}Q^5-\ldots\right)\ldots\; (6.\end{aligned}$$

При овоме є реду за $x = 1000$ разломакъ Q већъ маньій одъ $\overset{13}{0\cdot01}$, збогъ чега се цео последньій членъ, при определяваню логаритама броєва преко 1000 у 10 или 12 места', сасвимъ може изоставити.

§ 174.

Осимъ овы редова за израчунаванѣ логаритама можемо подобнимъ начиномъ изнаћи іошъ млоге друге. Но при свой ньиовой великой способности за ту цѣль, ако бы у данашнѣ доба имали рачунати таблице логаритама: небы се ипакъ служили само съ ньима, него бы съ великомъ користи узели у помоћь іошъ и такозваный **различный рачунъ**, съ коимъ ћемо се упознати доцніє. На кои се начинъ то може урадити, видићемо тада; овде пакъ быт' ће сасвимъ уместно показати іошъ: **како и на комъ основу** можемо при обичнимъ таблицама изнаћи логаритме и таковы броєва, кои се састоє изъ више цифрій него за коє су таблице израчунѣне.

§ 175.

Узимаюћи у првомъ образцу подъ n.) §. 162., $x = \frac{d}{n}$, дакле $1 + x = \frac{n+d}{n}$: добыямо

$$\log(n+d) - \log n = M\left(\frac{d}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{d^3}{n^3} - \ldots\right);$$

редъ т. є. за разлику логаритама два, у d единица' различна броя.

Ако є притомъ d спрамъ n тако мало (н. п. $= 1$), да $\left(\frac{d}{n}\right)^2$, и све друге выше степене тога разломка, безъ приметне погрешке пренебрегнути можемо: быт' ће приближно

$$\log(n+d) - \log n = M\frac{d}{n},$$

и при истомъ предпоставлѣню

$$\log(n+d_1) - \log n = M\frac{d_1}{n}.$$

Деобомъ ове две єдначине єдне чрезъ другу слѣдує

$$\frac{log\,(n+d)-log\,n}{log\,(n+d_1)-log\,n}=\frac{d}{d_1}\text{, и одтудъ}$$

$$log\,(n+d)=log\,n+d\,.\,\frac{log\,(n+d_1)-log\,n}{d_1}\,,$$

єдначина: на коіой су при обичнимъ таблицама основане разлике или сразмерне части логаритама, и ньово употребляванѣ за налазакъ логаритама и броєва одъ више цифрій, него што дотичне таблице садрже.

Ако су логаритми обични или Бригови, и мы знамо н. п. логаритме два застопна 4цифрена броя **4135** и **4136**: онда су намъ познати такођеръ и логаритми 5цифрены, у **10** єдиница' међусобомъ разликуюћи се броєва 41350 и 41360. Ту є $n=41350$, $d_1=10$, $n+d_1==41360$. Ако дакле $log\,41350$ одъ $log\,41360$ одузмемо и ту разлику съ $d_1=10$ раздѣлимо: слѣдує вредность одъ $\frac{log\,(n+d_1)-log\,n}{d_1}$. Мложећи пакъ ову редомъ съ $d=1$, 2, 3, ... 9, налазимо оне вредности, кое треба логаритму одъ **41350** редомъ додавати, да бы добыли редомъ логаритме броєва **41351**, **41352**, ... до **41360**.

Те су вредности за $d\,.\,\frac{log\,(n+10)-log\,n}{10}$ при обичнимъ таблицама све већъ израчунате, и налазе се узъ логаритме у особитой єдной врсти съ надписомъ *D* или *Differenz.* *)

---

*) У таблицама одъ професора Симона Штампфера за логаритме само броєва одъ 4 цифре (съ коима се обично служе мои ученици), стоє у врсти D, одъ log 100 до log 500, не вредности разломка

$$\mathrm{d}\,.\,\frac{\log\,(\mathrm{n}+\mathrm{d}_1)-\log\,\mathrm{n}}{\mathrm{d}_1}\,,$$

но само разлике $[\log\,(\mathrm{n}+\mathrm{d}_1)-\log\,\mathrm{n}]$. И зато мораю се ове разлике, по упутству исты таблица, съ 5. цифромъ дотичнога броя помложити, и производъ іошъ съ 10 разделити („одъ производа крайня цифра изоставити"), да бы добыли оне вредности, коє се додаю логаритму дотичногъ 4цифреногъ броя, за логаритамъ вопросногъ 5цифреногa броя. — Одъ log 500 пакъ до края, стоє у врсти D саме вредности оногъ разломка понаособъ за d = 1, 2, 3, ... 9.

§ 176.

На концу овога предмета никако неће быти излишно, ако іошъ покажемо и то: како можемо приближно израчунити вредность одъ x изъ израза $x^x = a$.

Узмимо да смо съ неколико покушая нашли брой α, кои се одъ праве вредности броя x само іошъ некимъ чистимъ разломкомъ разликує. Означуюћи овай разломакъ ради краткоће са z, можемо дакле писати

$$x = \alpha + z \;.\;.\;.\;.\;.\; (s.$$

Изъ єдначине $x^x = a$ слѣдує $x \log x = \log a$, или ако место x узмемо нѣгову предходећу вредность:

$$(\alpha + z) \log(\alpha + z) = \log a,$$

$$(\alpha + z) \log\left[\alpha\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)\right] = \log a, \text{ т. є.}$$

$$\log a = (\alpha + z)\left[\log \alpha + \log\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)\right].$$

Ако садъ $\log\left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)$, по образцу $n.$) §. 162. развiємо, и одъ нѣга, зато што се вредность одъ x приближно тражи, само првый чланъ задржимо, налазимо далѣ

$$\log a = (\alpha + z)\;\left(\log \alpha + M\frac{z}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha \log \alpha + Mz + z \log \alpha + M\frac{z^2}{\alpha},$$

или последньій чланъ пренебрегаваюћи:

$$\log a = \alpha \log \alpha + z(M + \log \alpha),$$

и одатле

$$z = \frac{\log a - \alpha \log \alpha}{M + \log \alpha}!$$

Израчунаваюћи помоћу овогъ образца z, и постављаюћи ту нѣгову вредность у горню єдначину $s.$), добыямо за x такову вредность α_1, коя се правой већма приближава него она прва α.

Съ томъ вредности α_1 налазимо после истимъ путемъ другу точнію вредность за z, а съ овомъ изъ єдначине $s.$) іошъ точнію вредность за x. Тако пакъ поступаюћи и далѣ, добыямо найпосле x у оной точности коя є нуждна.

Узмимо за упражнѣнѣ єданъ примеръ.

§ 177.

Тражи се x изъ єдначине $x^x = 84$ у три частна места точно.

На првый погледъ примећавамо да x, збогъ $3^3 = 27$, а $4^4 = 256$, лежи између броєва 3 и 4.

Узмимо дакле $\alpha = 3{\cdot}5$; быт'ће по горнѣмъ образцу, збогъ M при Бриговимъ логаритмима $= 0{\cdot}434294\ldots$,

$$z = \frac{log\,84 - 3{\cdot}5\,log\,3{\cdot}5}{M + log\,3{\cdot}5} = 0{\cdot}02,$$

а съ томъ вредности, по горньой єдначини $s.$), точніє $x = 3{\cdot}5 + 0{\cdot}02 = 3{\cdot}52$.

Узимаюћи сада $\alpha = 3{\cdot}52$, имамо далѣ

$$z = \frac{log\,84 - 3{\cdot}52\,log\,3{\cdot}52}{M + log\,3{\cdot}52} = 0{\cdot}0004,$$

изъ чега видимо да є у три места точно x оно пређашнѣ, т. є. 3·520.

4.) Редови за израчунаванѣ броя π.

§ 178.

Врло удесне и нагло стицаюће се редове за израчунаванѣ броя π, или такозване **лудолфине**, добыямо помоћу образца VIII. (§. 165.) на тай начинъ: да найпре у (изъ Тригонометріє познатомъ) образцу

$$tang\,(\alpha + \beta) = \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{1 - tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta}$$

поставимо $\alpha + \beta = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, и узмемо за α и β таkове лукове, коима принадлеже раціоналне, малимъ разломцима изражене тангенте, па онда исте лукове развіємо горепоменутимъ образцемъ у редове, и ове найпосле саберемо.

Самъ посао обяснит'ће ово больма.

§ 179.

1.) Ако узмемо $tang\, \alpha = \frac{1}{2}$, слѣдуе найпре, збогъ $tang\, 45^0 = 1$, $\frac{\frac{1}{2} + tang\, \beta}{1 - \frac{1}{2} tang\, \beta} = 1$, и одтудъ $tang\, \beta = \frac{1}{3}$.

Развіяюћи сада α и β по образцу **VIII.** у редове: добыямо

$$\alpha = \frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{5\,.\,2^5} - \frac{1}{7\,.\,2^7} + \ldots\ldots = R_1$$

$$\beta = \frac{1}{1\,.\,3} - \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} - \frac{1}{7\,.\,3^7} + \ldots\ldots = R_2;$$ зато

$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = R_1 + R_2$, а одтудъ

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1\,.\,2} - \frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1}{5\,.\,2^5} - \ldots\right) + 4\left(\frac{1}{1\,.\,3} - \frac{1}{3\,.\,3^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5\,.\,3^5} - \ldots\right) \quad (a.$$

Овай редъ, кои є за израчунаванѣ броя π врло удобанъ, као и самъ начинъ како смо до нѣга дошли и іошъ ћемо неколико редова изнаћи, имамо одъ Айлера — Euler —.

2.) Узимаюћи место $\alpha + \beta$, $2a + b = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ и $tang\, a = \frac{1}{3}$, дакле $tang\, 2a = \frac{2\, tang\, a}{1 - tang^2 a} = \frac{3}{4}$, а $tang\,(2a + b) = 1 = \frac{\frac{3}{4} + tang\, b}{1 - \frac{3}{4}\, tang\, b}$, и одтудъ $tang\, b = \frac{1}{7}$: слѣдуе

$$2a = 2\left(\frac{1}{1\,.\,3} - \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} - \dots\right) = R_1$$

$$b = \frac{1}{1\,.\,7} - \frac{1}{3\,.\,7^3} + \frac{1}{5\,.\,7^5} - \dots\dots = R_2,$$ дакле

$$\frac{\pi}{4} = 2a + b = R_1 + R_2,$$ а одтудъ

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1\,.\,3} - \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} - \dots\right) + 4\left(\frac{1}{1\,.\,7} - \frac{1}{3\,.\,7^3} + \frac{1}{5\,.\,7^5} - \dots\dots\right) \dots\dots \quad (b.$$

3.) При $4a + b = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ и $tang\,a = \frac{1}{5}$, дакле $tang\,4a = \frac{120}{119}$ а $tang\,b = -\frac{1}{239}$: добыя се

$$\pi = 16\left(\frac{1}{1\,.\,5} - \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} - \dots\right) - 4\left(\frac{1}{1\,.\,239} - \frac{1}{3\,.\,239^3} + \frac{1}{5\,.\,239^5} - \dots\right) \dots\dots \quad (c.$$

Овай редъ приписує се енглезскомъ астроному Машену (Machin). Овай поне израчунао є тимъ редомъ брой π у 100 частны места.

4.) Ако узмемо $5a + 2b = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ и $tang\,a = \frac{1}{7}$, дакле $tang\,b = \frac{3}{79}$: слѣдує

$$\pi = 20\left(\frac{1}{1\,.\,7} - \frac{1}{3\,.\,7^3} + \frac{1}{5\,.\,7^5} - \dots\right) + 8\left(\frac{3}{1\,.\,79} - \frac{3^3}{3\,.\,79^3} + \frac{3^5}{5\,.\,79^5} - \dots\right) \dots\dots \quad (d.$$

Съ овимъ редомъ израчунао є Вега (Vega) брой π у 140 места, а уверавао се притомъ о точности свога рачуна редомъ, кои добыямо одъ $a + 2b = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, $tang\,a = \frac{1}{7}$, $tang\,b = \frac{1}{3}$.

5.) Место реда VIII., можемо за ову цѣль употребити такођеръ и редъ VII. (§. 165.). Поставляюћи у истомъ н. п. $x = 30^0 = \frac{\pi}{6}$, имамо $sin\,x = \frac{1}{2}$, и зато

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3\,.\,3\,.\,2} + \frac{1\,.\,3}{2^5\,.\,5\,.\,2\,.\,4} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^7\,.\,7\,.\,2\,.\,4\,.\,6} + \dots \quad (e.$$

§ 180.

Валисъ (Wallis) поставіо є за израчунаванѣ броя π слѣдуюћій, по изгледу знаменитый образацъ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \, . \, 2 \, . \, 4 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 6 \, . \, 8 \, . \, 8 \, . \, . \, . \, .}{1 \, . \, 3 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 5 \, . \, 7 \, . \, 7 \, . \, 9 \, . \, . \, . \, .} \, .$$

Начинъ, коимъ до овога израза долазимо, у кратко є овай:

По образцу є III., (§. 163.)

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots . \right);$$

и ово стои за сваку вредность синуса, дакле и за $\sin x = 0$.

При овой последньой вредности синуса имамо єдначину

$$x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \right) = 0$$

кою задоволява не само $x = 0$, но и

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots . = 0.$$

Ако узмемо у призренѣ, да $\sin x$ ніє $= 0$ само при $x = 0$, но и за $x = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots .$: онда увиђамо, да корени последнѣ єдначине немогу быти други, но ове последнѣ вредности одъ x, и да дакле на основу §-а 37. можемо писати

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots . = 0 = (x - \pi)\,(x + \pi)\,(x - 2\pi)$$

$$.\,(x + 2\pi) \ldots\ldots = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \ldots ,$$

а зато

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2x}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \ldots$$

Поставляюћи овде сада $x = \frac{\pi}{2}$, **слѣдує**

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\ldots,$$

а одтудъ горньій образацъ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6......}{1.3.3.5.5.7......}.$$

5.) *Моавровъ*, или обштій биномный образацъ.

§ 181.

По єдначинама *α.*) **у §-у 163. мора быти**

$$\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x = e^{\pm x\sqrt{-1}} \quad \ldots\ (1.$$

Поставляюћи овде $x \pm 2r\pi$ **место** x, **при чему** r **нека представля само целе и положне броєве, добыямо збогъ** $\cos(x \pm 2r\pi) = \cos x$ **и** $\sin(x \pm 2r\pi) = \sin x$:

$$\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x = e^{\pm(x \pm 2r\pi)\sqrt{-1}},$$

а ако ову єдначину подигнемо на обштій, т. є. раціоналный или ирраціоналный или башъ и мнимый степенъ n:

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x)^n = e^{\pm n(x \pm 2r\pi)\sqrt{-1}}.$$

Заменьивајући пакъ такођеръ у єдначини 1.) x **съ** $n(x \pm 2r\pi)$, **слѣдує**

$$e^{\pm n(x \pm 2r\pi)\sqrt{-1}} = \cos n\,(x \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\,\sin n\,(x \pm 2r\pi).$$

Дакле є

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x)^n = \cos n\,(x \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\,\sin n(x \pm 1r\pi) \quad (A.$$

Овай образацъ познатъ є подъ именомъ Моавровъ образацъ.

§ 182.

1.) Ако є у овомъ образцу брой n **цео и положанъ:** онда за n. степенъ $(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x)$ слѣдуе, каошто треба, само єдна вредность, еръ є у томе случаю при свакой вредности броя r, $\cos(nx \pm 2nr\pi) = \cos nx$ и $\sin(nx \pm 2r\pi) = \sin nx$.

2.) Напротивъ ако є n некій **чистъ**, и по могућству већъ скраћеный разломакъ $\frac{c}{m}$: онда за поменутый степенъ добыямо управо онолико вредностій, колико у именителю тога разломка има единица', дакле m вредностій.

Єръ, ако притомъ узмемо за r редомъ 0, 1, 2, 3, ... $(m-1)$, m, $(m+1)$, ..., постаю истина слѣдуюће вредности лука $n(x \pm 2r\pi)$:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{c}{m}x & \frac{c}{m}x \pm c\,.\,2\pi \\
\frac{c}{m}x \pm \frac{c}{m}\,.\,2\pi & \frac{c}{m}x \pm \frac{(m+1)\,c}{m}\,.\,2\pi = \left(\frac{c}{m}x \pm \frac{c}{m}\,.\,2\pi\right) \pm c\,.\,2\pi \\
\frac{c}{m}x \pm \frac{2c}{m}\,.\,2\pi & \frac{c}{m}x \pm \frac{(m+2)\,c}{m}\,.\,2\pi = \left(\frac{c}{m}x \pm \frac{2c}{m}\,.\,2\pi\right) \pm c\,.\,2\pi \\
\frac{c}{m}x \pm \frac{3c}{m}\,.\,2\pi & \frac{c}{m}x \pm \frac{(m+3)\,c}{m}\,.\,2\pi = \left(\frac{c}{m}x \pm \frac{3c}{m}\,.\,2\pi\right) \pm c\,.\,2\pi \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{c}{m}x \pm \frac{(m-1)\,c}{m}\,.\,2\pi & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;
\end{array}$$

но лако є увидити, да ако или само горнѣ, или само долнѣ знаке задржимо: $(m+1)$. и 1., $(m+2)$. и 2., $(m+3)$. и 3., ... лукъ имаю єднаке косинусе и синусе. Сви ти луци дакле недаю више **разны** синуса' и косинуса', него оне коє добыямо одъ првы m замена' броя r, чимъ є горнѣ изреченѣ потврђено, еръ тадъ наравно n. степенъ одъ $\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x$ има доиста, каошто є речено, m вредностій, али уєдно ни више ни манѣ одъ толико.

Исто тако лако увидити є: да при замењиваню броя r, задржаваюћи у $n(x \pm 2r\pi)$ оба знака, ніє потребно ићи далѣ но, при парномъ брою m само до $r = \frac{m}{2}$, а при безпарномъ m само до $r = \frac{m-1}{2}$. Єръ у првомъ су случаю синусъ и косинусъ, н. п. лука за $r = \frac{m}{2} + 1 = \frac{m+2}{2}$, при горнѣмъ знаку они исти, кои при долнѣмъ знаку за $r = \frac{m}{2} - 1 = \frac{m-2}{2}$, и обратно, — за $r = \frac{m+4}{4}$ при горнѣмъ знаку исти, као за $r = \frac{m-4}{2}$ при долнѣмъ, и обратно, и т. д. Тако су исто у другомъ случаю синусъ и косинусъ лука за $r = \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m+1}{2}$ при горнѣмъ знаку они исти, као за $r = \frac{m-1}{2}$ при долнѣмъ, и обратно, — за $r = \frac{m+3}{2}$ при горнѣмъ знаку исти, кои за $r = \frac{m-3}{2}$ при долнѣмъ, и обратно, — и т. д. и т. д.

3.) Пошто су вредности ирраціоналны броєва безкрайне (рећи ће никадъ непрестаю): то n. степенъ бинома $\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x$ има у случаю **ако є n ирраціоналанъ** брой, безбройно млого вредностій.

§ 183.

Одъ образца *A*.) (§. 181.) добыямо за $x = 0$:

$$(+1)^n = \cos 2nr\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2nr\pi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (B.,$$

єръ є $\cos 0 = 1$, а $\sin 0 = 0$; за $x = \pi$ пакъ слѣдує

$$(-1)^n = \cos n(2r+1)\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin n(2r+1)\pi \;.\;.\;.\; (C.,$$

єръ є $\cos \pi = -1$, а $\sin \pi = 0$.

За ова два нова образца имамо приметити, да све оно што смо у предходећемъ §-у докучили за образацъ *A*.), постои онако исто и за нъи. То ће рећи: како $(+1)^n$, тако и $(-1)^n$ имаю при целомъ и положномъ изложителю n само едну вредность, за $n = \frac{c}{m}$ пакъ свега m вредностій, кое добыямо ако узмемо редомъ $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots$ до $\frac{m}{2}$ при парномъ m, до $\frac{m-1}{2}$ пакъ при безпарномъ m.

§ 184.

1.) Ако међусобомъ помложимо биноме $(\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x)$ и $(\cos z \pm \sqrt{-1}\, \sin z)$: добыямо

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x)\,(\cos z \pm \sqrt{-1}\, \sin z) = \cos(x+z) \pm \sqrt{-1}\, \sin(x+z) \;\ldots\ldots\; (2.$$

Поставляюћи пакъ овде $x = 2nr\pi$, а $z = n\pi$: слѣдуе

$$(\cos 2nr\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin 2nr\pi)\,.\,(\cos n\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin n\pi) = \cos n(2r+1)\,\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin n\,(2r+1)\,\pi.$$

Горню дакле едначину подъ $C.$) можемо писати и овако

$$(-1)^n = (\cos 2nr\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin 2nr\pi)\,(\cos n\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin n\pi),$$

или, ако іошъ место првогъ чинителя узмемо нѣгову вредность по образцу $B.$), овако:

$$(-1)^n = (+1)^n.\,(\cos n\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin n\pi) \;\ldots\ldots\; (D.$$

2.) Узимаюћи далѣ опетъ у едначини 2.) $x = \pm 2nr\pi$, а nx место z: слѣдуе

$$(\cos 2nr\pi \pm \sqrt{-1}\, \sin 2nr\pi)\,(\cos nx \pm \sqrt{-1}\, \sin nx) = \cos(x \pm 2nr\pi) \pm \sqrt{-1}\, \sin(x \pm 2nr\pi).$$

а збогъ тога изъ образца $A.$) обзиромъ на образацъ $B.$):

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x)^n = (+1)^n.\,(\cos nx \pm \sqrt{-1}\, \sin nx) \;\ldots\ldots\; (E.$$

У предходећимъ §§-ма видили смо да $(-1)^n$, $(+1)^n$ и $(\cos x \pm \sqrt{-1}\, \sin x)^n$, у случаю ако е $n = \frac{c}{m}$, имаю свега m вредностій. Овде нађена два образца пакъ показую: да ћемо у томъ случаю све m вредности одъ $(-1)^{\frac{c}{m}}$ и $(cos\, x \pm \sqrt{-1}\; sin\, x)^{\frac{c}{m}}$ добыти, ако односно $(cos \frac{c}{m} \pi \pm \sqrt{-1}\; sin \frac{c}{m} \pi)$ и $(cos \frac{c}{m} x \pm \sqrt{-1}\; sin \frac{c}{m} x)$ помложимо са свакомъ одъ оны вредностій за $(+1)^{\frac{c}{m}}$.

За болѣ разумеванѣ овога и іошъ слѣдуюћегъ §-а, нека намъ представля $(\pm a)^{\frac{c}{m}}$ све вредности назначеногъ тиме степена, $(\pm a)^{\left(\frac{c}{m}\right)}$ пакъ само ону єдну, кою добыямо извлаченѣмъ m. корена одъ $(\pm a)^c$, и кою называмо обично *аритметичномъ* вредности дотичнога степена.

Пошто є безъ сваке сумнѣ $\sqrt[m]{(\pm a)^c} = \sqrt[m]{(\pm 1)^c . a^{(c)}} = (\pm 1)^{\frac{c}{m}} . a^{\left(\frac{c}{m}\right)}$: то мы дакле оны m вредностій одъ $(\pm a)^{\frac{c}{m}}$ налазимо, ако аритметичну вредность тога степена помложимо са свакомъ одъ m вредностій степена $(\pm 1)^{\frac{c}{m}}$.

§ 185.

Ако у предходећемъ образцу E) узмемо $x = \frac{\pi}{2}$: имамо збогъ $cos \frac{\pi}{2} = 0$ а $sin \frac{\pi}{2} = 1$,

$$(\pm\sqrt{-1})^n = (+1)^n . \left(cos\, n \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\; sin\, n \frac{\pi}{2}\right) \;.\;.\;.\;.\; (F.$$

Обзиромъ на § 181. можемо образце B), C) и овай последньій D), іошъ и овако писати:

$$(+1)^n = e^{\pm 2 n r \pi \sqrt{-1}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (G.$$

$$(-1)^n = e^{\pm n (2r+1) \pi \sqrt{-1}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (H.$$

$$\begin{aligned}(\pm\sqrt{-1})^n &= (+1)^n . e^{\pm \frac{n}{2} \pi \sqrt{-1}} \\ &= e^{\pm 2 n r \pi \sqrt{-1}} + e^{\pm \frac{n}{2} \pi \sqrt{-1}} \\ &= e^{\pm n (2r + \frac{1}{2}) \pi \sqrt{-1}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (I.\end{aligned}$$

Найпосле поставляюћи у последнѣмъ изразу $n = \sqrt{-1}$, быва

$$(\pm\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\mp(2r+\frac{1}{2})\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (K.$$

§ 186.

Узимаюћи природне логаритме єдначина' $G.$ и H, добыямо, зботъ $le = 1$:

$$l(+1) = \pm 2r\pi\sqrt{-1} \quad \text{и} \quad l(-1) = \pm(2r+1)\pi\sqrt{-1},$$

а уобште, збогъ $log\, a = M la$,

$$\left.\begin{array}{l} log(+1) = \pm M.2r\pi\sqrt{-1} \\ log(-1) = \pm M(2r+1)\pi\sqrt{-1} \end{array}\right\} \ldots (L.$$

Изъ овога види се:

1.) да **положна** єдиница има **безбройно млого**, заменомъ одъ r съ 0, 1, 2, ... происходећи логаритама, али одъ свы тій само є **еданъ** (за $r = 0$) **дойстанъ**, а остали сви **мними**;

2.) да **одречной** єдиници принадлеже такођеръ **безбройно млого** логаритама, но су **сви мними**;

3.) да оба ова докученя, збогъ $log(\pm a) = log[(\pm 1)a] = log(\pm 1) + log\, a$, постоє и за логаритме свакогъ уобште, положногъ или одречногъ броя a, чимъ су потврђеня §-а 169. наново обистинѣна.

6.) Редови синуса и косинуса вишестручнога лука.

§ 187.

Ако $(cos\, x \pm \sqrt{-1}\, sin\, x)^n$ у Моавровомъ образцу по биномномъ правилу развіємо, и одма дойстне чланове одъ мнимы оделимо: налазимо

$$\cos n\,(x \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\ \sin n\,(x \pm 2r\pi)$$

$$= \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \,.\, \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \,.\, \sin^4 x - \ldots\ldots.$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1} x \,.\, \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \,.\, \sin^3 x\right.$$

$$\left. + \binom{n}{5}\cos^{n-5} x \,.\, \sin^5 x - \ldots\ldots\right]$$

$$= \cos^n x\left[1 - \binom{n}{2}\text{tang}^2 x + \binom{n}{4}\text{tang}^4 x - \binom{n}{6}\text{tang}^6 x + \ldots\right]$$

$$+ \cos^n x\sqrt{-1}\left[\binom{n}{1}\text{tang}\, x - \binom{n}{3}\text{tang}^3 x + \binom{n}{5}\text{tang}^5 x - \ldots\right],$$

или іошъ обштіє, т. є. и за случай ако є n некій чисть разломакъ,

$$\cos n\,(x \pm 2r\pi) + \sqrt{-1}\ \sin n\,(x \pm 2r\pi)$$

$$= (+1)^n.\cos^n x\left[1 - \binom{n}{2}\text{tang}^2 x + \binom{n}{4}\text{tang}^4 x - \ldots.\right]$$

$$+ (+1)^n.\cos^n x\sqrt{-1}\left[\binom{n}{1}\text{tang}\, x - \binom{n}{3}\text{tang}^3 x\right.$$

$$\left. + \binom{n}{5}\text{tang}^5 x - \ldots.\right] \ldots.\ (\alpha.$$

Оба члана овога реда сбирљиви су међу границама $x = -\frac{\pi}{4}$ и $x = +\frac{\pi}{4}$; у случаю пакъ ако є n положанъ брой, може имати x іошъ и те две граничне вредности.

Међу тима є границама $\cos x$ свагда положанъ, и има зато $\cos^n x$ за сваку доистну вредность броя n, найманѣ єдну доистну вредность.

§ 188.

О нађеномъ образцу α.) имамо іошъ слѣдуюће приметити:

1.) Ако є n цео брой: онда $(+1)^n.\cos^n x$ има само єдну вредность и та є доистна; — синусъ и косинусъ одъ $n\,(x \pm 2r\pi)$ свакій такођеръ само єдну вредность, ону за nx.

У томе дакле случаю, зато што доистанъ брой само таковомъ, а мнимый брой само опетъ мнимомъ раванъ быти може: мора быти

$$cos\, nx = cos^n x \left[1 - \binom{n}{2} tang^2 x + \binom{n}{4} tang^4 x - \ldots\ldots\right]$$

$$= cos^n x - \binom{n}{2} cos^{n-2} x \,.\, sin^2 x + \binom{n}{4} cos^{n-4} x \,.\, sin^4 x - \ldots\ldots \quad (\beta.$$

$$sin\, nx = cos^n x \left[\binom{n}{1} tang\, x - \binom{n}{3} tang^3 x + \binom{n}{5} tang^5 x - \ldots\right]$$

$$= \binom{n}{1} cos^{n-1} x \,.\, sin\, x - \binom{n}{3} cos^{n-3} x \,.\, sin^3 x + $$

$$+ \binom{n}{5} cos^{n-5} x \,.\, sin^5 x - \ldots\ldots \quad (\gamma.$$

Ови су редови крайни или престаю, акоє n **положанъ** цео брой; но може се [збогъ $cos(-\varphi) = cos\,\varphi$ и $sin(-\varphi) = - sin\,\varphi$] на тай случай свести лако и онай, гди є n **одречно**.

2.) **Ако є пакъ** n разломакъ, н. п. $\frac{c}{m}$: онда $(+1)^{\frac{c}{m}}$, па зато и лева часть образца α.) имаю свега m вредностій, одъ кои' при **безпарномъ** m само су **две**, за $r = 0$ и $r = \frac{m}{2}$ **доистне**, а остале све **мниме**.

У томе дакле случаю неможемо више образацъ α.) за све вредности броя r онако раздваяти као у пређашнѣмъ случаю, него само при овима поменутима, а то зато: єръ чланови десне части тога образца при другимъ вредностима броя r неостаю више **онако исто** мними или доистни, него постаю свакій одъ части доистни а одъ части мними.

Задржаваюћи ради краткоће n место $\frac{c}{m}$, и узимаюћи за $(+1)^n$ нѣгову вренность по образцу $B.$, (§. **183.**): имамо у овомъ другомъ случаю

$$cos\, n(x \pm 2r\pi) \pm \sqrt{-1}\ sin\, n(x \pm 2r\pi)$$

$$= cos^n x\,(cos\, 2nr\pi\, R_1 \pm sin\, 2nr\pi\, R_2)$$

$$+ cos^n x\,(cos\, 2nr\pi\, R_2 \pm sin\, 2nr\pi\, R_1) \,.\, \sqrt{-1},$$

при чему R_1 значи заграђеный редъ у горнѣмъ образцу β.), R_2 пакъ заграђеный редъ у образцу γ.).

Одтудъ пакъ слѣдуе — поставляюћи доистно = доистномъ, а мнимо = мнимомъ —:

$$\cos n(x \pm 2r\pi) = \cos^n x (\cos 2nr\pi\, R_1 \pm \sin 2nr\pi\, R_2)$$

$$= \cos 2nr\pi\,.\left[\cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x\,.\,\sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x\,.\,\sin^4 x - \ldots\right]$$

$$\mp \sin 2nr\pi\,.\left[\binom{n}{1} \cos^{n-1} x\,.\,\sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x\,.\,\sin^3 x + \ldots\right] \quad (\delta.$$

$$\sin n(x \pm 2r\pi) = \cos^n x (\cos 2nr\pi\, R_2 \pm \sin 2nr\pi\, R_1)$$

$$= \cos 2nr\pi \left[\binom{n}{1} coi^{n-1} x\,.\,\sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x\,.\,\sin^3 x + \ldots\right]$$

$$\pm \sin 2nr\pi \left[\cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x\,.\,\sin^2 x + \ldots\ldots\right] \quad (\varepsilon.$$

§ 189.

Сви ови редови одъ β.) до ε.) сбирљиви су међу границама $x = -\frac{\pi}{4}$ и $x = +\frac{\pi}{4}$, и даю само у тима границама поуздане послѣдке. Но мы можемо оваке послѣдке получити такођеръ и за друге изванъ тiй граница' лежеће вредности лука x, ако поступимо на слѣдуюћiй начинъ:

Поставити треба $x = z + \mu\,.\,\frac{\pi}{4}$ и за μ такавъ цео брой узети, да лукъ $z = x - \mu\,.\,\frac{\pi}{4}$ падне између $-\frac{\pi}{4}$ и $+\frac{\pi}{4}$, кое е свагда могуће. Изтраживаюћи затимъ $\cos nz$ и $\sin nz$ по предходећимъ образцима, добыямо збогъ

$$\cos nx = \cos\left(nz + n\mu . \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos nz . \cos n\mu \frac{\pi}{4} - \sin nz . \sin n\mu \frac{\pi}{4} \quad \text{и}$$

$$\sin nx = \sin nz . \cos n\mu \frac{\pi}{4} + \cos nz . \sin n\mu \frac{\pi}{4},$$

тражене редове за $\cos nx$ и $\sin nx$.

Ако є н. п. $x = 240^0$, можемо узети $\mu = 5$ или 6; єрь съ првомъ вредности слѣдуе $z = x - \mu \frac{\pi}{4} = 240^0 - 5 . 45^0 = 240^0 - 225^0 = 15^0$, а съ другомъ $z = 240^0 - 6.45^0 = 240^0 - 270^0 = -30^0$, два лука, кои, каошто треба, леже између -45^0 и $+45^0$. У томъ дакле случаю имамо найпре израчунити *cos.* и *sin.* за $15n^0$ или $-30n^0$, а съ нъима после помоћу єдначина' пређашнѣга §-а косинусъ и синусъ лука $240n^0$.

7.) Редови за степене синуса и косинуса простога лука.

§ 190.

По §-у 166. имамо $2 \cos x = \dfrac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}}$.

Подижижући ову єдначину на *n.* степенъ, при чему *n* може быти произволнѣ вредности, добыямо, одма съ $e^{nx\sqrt{-1}}$ делећи:

$$2^n . \cos^n x = e^{-nx\sqrt{-1}} + \binom{n}{1} e^{-(n-2)x\sqrt{-1}} + \binom{n}{2} e^{-(n-4)x\sqrt{-1}} + \ldots\ldots,$$

или ако приметимо, да є по §-у 181. уобште

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1} \sin z \ldots\ldots (t.:$$

$$2^n . \cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1} \cos(n-2)x + \binom{n}{2} \cos(n-4)x \ldots\ldots$$

$$- \sqrt{-1} \left[\sin nx + \binom{n}{1} \sin(n-2)x + \ldots\ldots\right].$$

Ако овде узмемо $-x$ место x, быва збогъ $\cos(-nx) = \cos nx$, а $\sin(-nx) = -\sin nx$:

$$2^n . \cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1} \cos (n-2) x + \binom{n}{2} \cos (n-4) x + \ldots.$$

$$+ \sqrt{-1} \left[\sin nx + \binom{n}{1} \sin (n-2) x + \ldots.\right]$$

Дакле є уобште

$$2^n . \cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1} \cos (n-2) x + \binom{n}{2} \cos (n-4) x + \ldots.$$

$$\mp \sqrt{-1} \left[\sin nx + \binom{n}{1} \sin (n-2) x + \binom{n}{2} \sin (n-4) x + \ldots\right] \quad (a.$$

У случаю ако є n **цео и положанъ** брой: онда другій членъ у десной части овога израза изчезава; **1.** зато, што тай членъ са своимъ $(n+1)$. членомъ престає, и єръ су **2.** свака два нѣгова одъ краєва єднако удалѣна члана равни, а разно означени. За тай особитый случай остає дакле

$$2^n . \cos^n x = \cos nx + \binom{n}{1} \cos (n-2) x + \binom{n}{2} \cos (n-4) x + \ldots \quad (a.$$

§ 191.

По §-у є 163. $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, а ако одъ именителя ослободимо

$$2\sqrt{-1} \sin x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}} - \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{x\sqrt{-1}}}$$

$$= \frac{-1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}}.$$

Подижући ову єдначину на n. степенъ слѣдуе, ако одма $(-1)^n$ као обштегъ чинителя извучемо и съ $e^{nx\sqrt{-1}}$ разделимо:

$$2^n (\sqrt{-1})^n . \sin^n x = (-1)^n . \left[e^{-nx\sqrt{-1}} - \binom{n}{1} e^{-(n-2)x\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left. + \binom{n}{2} e^{-(n-4)x\sqrt{-1}} - \ldots\ldots\right],$$

или обзиромъ на єдначину $t.$) у предходећемъ §-у

$$2^n(\sqrt{-1})^n.\,sin^n x = (-1)^n.\Big\{(cos\,nx - \sqrt{-1}\,sin\,x)$$
$$-\binom{n}{1}[cos\,(n-2)\,x - \sqrt{-1}\,sin\,(n-2)\,x]$$
$$+\binom{n}{2}[cos\,(n-4)\,x - \sqrt{-1}\,sin\,(n-4)\,x] - \ldots\ldots\Big\} \ldots\ldots (\text{б}.$$

§ 192.

1.) При целомъ брою n имамо

a.) **ако є парный:**

$$2^n.\,sin^n x = \pm\,[cos\,nx - \binom{n}{1}cos\,(n-2)\,x + \binom{n}{2}cos\,(n-4)\,x$$
$$-\ldots\ldots] \pm \sqrt{-1}\,[sin\,nx - \binom{n}{1}sin\,(n-2)\,x$$
$$+\binom{n}{2}sin\,(n-4)\,x - \ldots] \ldots\ldots (\text{в}.$$

съ приметбомъ, да горньи знаци важе у случаю ако є n вида $4k$, а долньи ако є вида $2k$;

b.) ако є **безпарный** (после мложеня обе части образца *б.*) са $\sqrt{-1}$

$$2^n.\,sin^n x = \pm\,[sin\,nx - \binom{n}{1}sin\,(n-2)\,x + \binom{n}{2}sin\,(n-4)\,x - \ldots]$$
$$\pm\sqrt{-1}\,[cos\,nx - \binom{n}{1}cos\,(n-2)\,x$$
$$+\binom{n}{2}cos\,(n-4)\,x - \ldots\ldots] \ldots\ldots (\text{г}.$$

съ приметбомъ, да горньи знаци стоє за случай, ако є n вида $4k+1$, а долньи ако є вида $2k+1$.

2.) Ако є n **положанъ** цео брой: онда изъ наведеногъ у пређашнѣмъ §-у узрока остає

a.) при **парномъ** n:

$$2^n.\,sin^n x = (-1)^{\frac{n}{2}}[cos\,nx - \binom{n}{1}cos\,(n-2)\,x + \binom{n}{2}cos\,(n-4)\,x$$
$$-\ldots] \ldots\ldots (\text{б}'''.$$

b.) **при безпарномъ** n:

$$2^n . \sin^n x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \left[\sin nx - \binom{n}{1} \sin(n-2)\, x + \binom{n}{2} \sin(n-4)\, x - \ldots\right] \quad (д.$$

§ 193.

Напослѣдку треба за све у предходећимъ §§-ма поставлѣне редове іошъ слѣдуюће приметити:

1.) у случаю ако є n некій чистъ разломакъ $\frac{c}{m}$, онда како $\cos^n x$, тако и $\sin^n x$ имаю (по §§-ма **182.** до **184.**) свега m вредностій, коє налазимо, ако найпре место x узмемо $x \pm 2r\pi$, чимъ се $\cos^n x$ и $\sin^n x$ неменяю, па онда заменемо r редомъ съ 0, 1, 2, 3, ... до $\frac{m}{2}$ ако є m парно, а до $\frac{m-1}{2}$ ако є m безпарно; и

2.) све што є примећено у §-у 189. за *sin.* и *cos.* вишестручнога угла, важи и за све те вопросне редове.

в) Решенѣ биномны єдначина'.

§ 194.

Помоћу Моавровогъ образца у станю смо сада разрешавати уобште и оне єдначине, коє смо у §-у 71. означили именомъ **биномне** (или двочлане) єдначине.

Обштій є видъ тій єдначина' $x^n \pm a = 0$; но мы смо у поменутомъ §-у показали како се могу лако довести на простіи, и за то ньиово разрешаванѣ удобніи видъ: $x^n \pm 1 = 0$ тиме, што узмемо $z^n = ax^n$, т. є. $z = x\sqrt[n]{a}$. Мы ћемо дакле те єдначине овде сматрати у томъ ньиовомъ, већъ сведеномъ виду.

При томе су, каошто двоякій знакъ показує, два могућа случая: дата є т. є. єдначина или $x^n - 1 = 0$, или є $x^n + 1 = 0$. Предузмимо свакій одъ ова два вида понаособъ.

§ 195.

α.) Ако є дата биномна єдначина $x^n - 1 = 0$: слѣдує $x^n = +1$, а $x = (+1)^{\frac{1}{n}}$; или ако узмемо у помоћь образацъ *B.*) §-а **183.**, поставляюћи у истомъ $\frac{1}{n}$ место n:

$$x = \cos 2\frac{r}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin 2\frac{r}{n}\pi \qquad (\text{и.}$$

Съ овимъ образцемъ морамо добыти све n вредности броя x, ако место r узмемо редомъ 0, 1, 2, ... до $\frac{n}{2}$ ако є n **парно**, до $\frac{n-1}{2}$ пакъ ако є n **безпарно**.

При **парномъ** брою n добыя x **две доистне** вредности, єдну $x = +1$ за $r = 0$, а другу $x = -1$ за $r = \frac{n}{2}$; при **безпарномъ** n пакъ има x само **єдну доистну** вредность $x = +1$ за $r = 0$. Остале вредности броя r даю у оба случая свака по єдну **спрегу мнимы** вредностій броя x, каошто то по познатомъ свойству мнимы корена (§. **38.**) и треба да буде.

§ 196.

Примери. 1.) Дата є єдначина $x^3 - 1 = 0$, дакле $x = (+1)^{\frac{1}{3}}$.

Ту є $n = 3$, и зато по горнѣмъ образцу *и.*)

за $r = 0$, $x_1 = +1$,

„ $r = \frac{n-1}{2} = 1$, $x_2 = \cos\frac{2}{3}\pi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{3}\pi$ и

$x_3 = \cos\frac{2}{3}\pi - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{3}\pi$.

2.) Дата є єдначина $x^6 - 1 = 0$, дакле $x = (+1)^{\frac{1}{6}}$.

Збогъ $n = 6$ слѣдує по пређепоменутомъ образцу:

за $r = 0$, $x_1 = +1$;

„ $r = 1$, $x_2 = \cos\frac{1}{3}\pi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{3}\pi$ и

$x_3 = \cos\frac{1}{3}\pi - \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{3}\pi$;

„ $r = 2$, $x_4 = \cos\frac{2}{3}\pi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{3}\pi$ и

$x_5 = \cos\frac{2}{3}\pi - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{3}\pi$; найпосле

„ $r = \frac{n}{2} = 3$, $x_6 = -1$.

3.) Дата є єдначина $x^7 - 1 = 0$, дакле $x = (+1)^{\frac{1}{7}}$.

При ньой є збогъ $n = 7$:

за $r = 0$, $x_1 = +1$;

„ $r = 1$, $x_2 = \cos\frac{2}{7}\pi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{7}\pi$ и

$x_3 = \cos\frac{2}{7}\pi - \sqrt{-1}\,\sin\frac{2}{7}\pi$;

„ $r = 2$, $x_4 = \cos\frac{4}{7}\pi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{4}{7}\pi$ и

$x_5 = \cos\frac{4}{7}\pi - \sqrt{-1}\,\sin\frac{4}{7}\pi$; найпосле

„ $r = \frac{n-1}{2} = 3$, $x_6 = \cos\frac{6}{7}\pi + \sqrt{-1}\,\sin\frac{6}{7}\pi$ и

$x_7 = \cos\frac{6}{7}\pi - \sqrt{-1}\,\sin\frac{6}{7}\pi$.

§ 197.

β.) Ако є пакъ дата биномна єдначина оногъ другогъ вида $x^n + 1 = 0$: слѣдує $x = (-1)^{\frac{1}{n}}$, и зато по обрасцу C.) (§. 183.), узимаюћи у нѣму $\frac{1}{n}$ место n,

$$x = \cos\frac{2r+1}{n}\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2r+1}{n}\pi \qquad (v.$$

Овай образацъ дає све n вредности броя x: ако каогодъ у пређашнѣмъ случаю узмемо редомъ $r = 0$, 1, 2, ... до $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ ако є n **парно**, до $\frac{n-1}{2}$ пакъ ако є n **безпарно**. При томе появитће се у првомъ случаю сви корени **мними**, а у другомъ єданъ, и само **єданъ доистанъ**, а други сви **мними**, и ови последньи у оба случая свагда спрегнути.

§ 198.

Примери. **1.)** Дата є єдначина $x^3 + 1 = 0$, т. є. $x = (-1)^{\frac{1}{3}}$.

Збогъ $n = \frac{1}{3}$ слѣдує по горнѣмъ образцу $v.$):

за $r = 0$, $x_1 = cos\,\frac{1}{3}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{1}{3}\,\pi$ и

$x_2 = cos\,\frac{1}{3}\,\pi - \sqrt{-1}\;sin\,\frac{1}{3}\,\pi$;

„ $r = \frac{n-1}{2} = 1$, $x_3 = -1$.

2.) Дата є єдначина $x^6 + 1 = 0$, т. є. $x = (-1)^{\frac{1}{6}}$.

Ту є збогъ $n = \frac{1}{6}$:

за $r = 0$, $x_1 = cos\,\frac{1}{6}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{1}{6}\,\pi$ и

$x_2 = cos\,\frac{1}{6}\,\pi - \sqrt{-1}\;sin\,\frac{1}{6}\,\pi$;

„ $r = 1$, $x_3 = +\sqrt{-1}$ и

$x_4 = -\sqrt{-1}$; найпосле

„ $r = \frac{n}{2} - 1 = 2$, $x_5 = cos\,\frac{5}{6}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{5}{6}\,\pi$ и

$x_6 = cos\,\frac{5}{6}\,\pi - \sqrt{-1}\;sin\,\frac{5}{6}\,\pi$.

3.) Дата є єдначина $x^8 + 1 = 0$, т. є. $x = (-1)^{\frac{1}{8}}$.

Збогъ $n = 8$ имамо:

за $r = 0$, $x_1 = cos\,\frac{1}{8}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{1}{8}\,\pi$ и

$x_2 = cos\,\frac{1}{8}\,\pi - \sqrt{-1}\;sin\,\frac{1}{8}\,\pi$;

„ $r = 1$, $x_3 = cos\,\frac{3}{8}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{3}{8}\,\pi$ и

$x_3 = cos\,\frac{3}{8}\,\pi - \sqrt{-1}\;sin\,\frac{3}{8}\,\pi$;

„ $r = 2$, $x_5 + cos\,\frac{5}{8}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{5}{8}\,\pi$ и

$x_6 = cos\,\frac{5}{8}\,\pi - \sqrt{-1}\;sin\,\frac{5}{8}\,\pi$; найпосле

„ $r = \frac{n}{2} - 1 = 3$, $x_7 = cos\,\frac{7}{8}\,\pi + \sqrt{-1}\;sin\,\frac{7}{8}\,\pi$ и

$x_8 = cos\,\frac{7}{8}\,\pi - \sqrt{-1}\;cin\,\frac{7}{8}\,\pi$.

§ 199.

За оба вида биномны єдначина имамо напослѣдку іошъ ово приметити:

1.) Синусе и косинусе углова, кои се појаве у мнимимъ коренима биномне какве єдначине, налазимо или већъ израђене, или после некогъ само малогъ и простогъ рачуна, у таблицама израчунѣны тій функція за полупречникъ 1.*)

2.) По себи разуме се, да сваку нађену вредность корена, пређашньимъ начиномъ разрешене биномне єдначине, ако ніє была дата у сведеномъ виду, него $z^n \pm a = 0$, напослѣдку іошъ съ $\sqrt[n]{a}$ помложити валя.

г.) Сбирльивость производны функція.

§ 200.

Често появлю се функціє у виду производа одъ безбройно млого, по особитомъ некомъ закону образованы чинителя, — и тадъ є обично потребно, да се вредность такове функціє приближно изнађе.

Ова ће се цѣль, увиђавно, тимъ брже и точніє постигнути, штогодъ се производъ чинителя вопросне функціє, съ умложаванѣмъ ньиовога броя, већма некомъ известномъ брою приближава.

То свойство чинителя производны функція можемо назвати ньиовомъ **сбирльивости**, задатакъ пакъ слѣдуюћи §§-а нека буде показати: како се уверавамо о сбирльивости или несбирльивости дате какове производне функціє.

§ 201.

Обштый є видъ производны функція

$$F = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \cdots \cdot \varphi_{n-1} \cdot \varphi_n \cdot \varphi_{n+1} \cdot \cdots$$

---

*) Види н. п. сбирку логаритміиски и други потребны таблица одъ професора Симона Штампфера.

Збогъ $a = e^{la}$ (§. 161. бр. 4.) можемо писати

$$F = e^{l\varphi_1 + l\varphi_2 + l\varphi_3 + \ldots + l\varphi_{n-1} + l\varphi_n + l\varphi_{n+1} + \ldots} = e^{\Sigma(l\varphi)};$$

изъ тога пакъ видити є:

Функція F быт' ће безъ сумнѣ **сбирљива** 1.) ако є редъ $\Sigma(l\varphi) = l\varphi_1 + l\varphi_2 + l\varphi_3 + \ldots\ldots + l\varphi_n + \ldots\ldots$ **сбирљивъ**, єръ тада є за $n = \infty$, $e^{\Sigma(l\varphi)} =$ некомъ известномъ одъ $0 \gtrless$ брою; 2.) ако є истый редъ $\Sigma(l\varphi)$ **несбирљивъ**, и за $n = \infty$ раванъ $-\infty$, єръ тада є $e^{\Sigma(l\varphi)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Напротивъ функція F быт' ће **несбирљива** ако є редъ $\Sigma(l\varphi)$ **несбирљивъ**, и нѣговъ сбиръ $= +\infty$; єръ тада є $e^{\Sigma(l\varphi)} = e^{+\infty} = \infty$.

Сбирљивость или несбирљивость функціє F зависи дакле само одъ сбирљивости или несбирљивости реда $\Sigma(l\varphi)$. За овай пакъ имамо у томъ смотреню приметити, да ће по §-у 119. безъ сумнѣ быти **несбирљивъ**: ако є **растућій**, — а да ће као **падајућій** по §-у 121. само онда быти сбирљивъ: ако є количникъ

$$D_n = \frac{l\varphi_n \cdot l\varphi_{n+1}}{l\varphi_n - l\varphi_{n+1}} \text{ за } n = \infty$$

$= 0$, а не какавъ другій одъ ове разликујући се брой.

За упражненѣ у овомъ испытиваню узмимо одма неколико примера.

§ 202.

1.) Вопросна є функція

$$F = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\cdots$$

При той є

$$\Sigma(l\varphi) = l\left(1+\frac{1}{1}\right) + l\left(1+\frac{1}{3}\right) + l\left(1+\frac{1}{5}\right) + \ldots\ldots +$$

$$+\, l\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) + l\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) + \ldots$$

редъ **падаюћи**; може дакле быти сбирљивъ; дали є пакъ, показат' ће количникъ

$$D_n = \frac{l\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \cdot l\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{l\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) - l\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}.$$

Развіяюћи ове логаритме по §-у 162. у редове, быва

$$D_n = \frac{\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots\right]\cdot\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right]}{\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\right]};$$

изъ чега се види: да при безкрайномъ увећаваню броя n, найпосле, збогъ безкрайногъ умаляваня разломака $\frac{1}{2n-1}$ и $\frac{1}{2n+1}$, остає

$$D_n = \frac{\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{(2n+1)-(2n-1)} = \frac{1}{2},$$

и да є дакле редъ $\Sigma(l\varphi)$ **несбирљивъ**. Како су пакъ сви чланови тога реда (као логаритми броєва већи одъ единице) положни: то є ньиовъ сбиръ $= +\infty$, а зато вопросна функція по предходећемъ §-у **несбирљива**.

2.) Вопросна є функція

$$F = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]\cdots$$

Ту є

$$\Sigma(l\varphi) = l\left(1-\frac{1}{4}\right) + l\left(1-\frac{1}{9}\right) + l\left(1-\frac{1}{16}\right) + \ldots +$$

$$+ l\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + l\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right] + \ldots$$

очевидно опетъ падаюћій редъ. Є ли сбирльивъ, показат'ће количникъ

$$D_n = \frac{l\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \cdot l\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]}{l\left(1-\frac{1}{n^2}\right) - l\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots\right]\cdot\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^4}+\ldots\right]}{\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots\right]-\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^4}+\ldots\right]}.$$

При безкрайномъ увећаваню броя n остає, збогъ безкрайногъ умаляваня разломака $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{(n+1)^2}$, найпосле

$$D_n = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{2n+1},$$

вредность: коя є за $n=\infty$, нулла.

Редъ є дакле $\Sigma(l\varphi)$ **сбирльивъ**, па зато и вопросна функція F **сбирльива**.

3.) Вопросна є функція

$$F = \left(1 \pm \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\left(1 \pm \frac{x^2}{4\alpha^2}\right)\left(1 \pm \frac{x^2}{9\alpha^2}\right) \ldots\ldots \left(1 \pm \frac{x^2}{n^2\alpha^2}\right)$$

$$\cdot\left[1 \pm \frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2}\right]\ldots$$

При той є

$$\Sigma(l\varphi) = l\left(1 \pm \frac{x^2}{\alpha^2}\right) + l\left(1 \pm \frac{x^2}{4\alpha^2}\right) + \ldots + l\left(1 \pm \frac{x^2}{n^2\alpha^2}\right) + $$
$$+ l\left[1 \pm \frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2}\right] + \ldots\ldots,$$

дакле

$$D_n = \frac{l\left(1 \pm \frac{x^2}{n^2\alpha^2}\right) \cdot l\left[1 \pm \frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2}\right]}{l\left(1 \pm \frac{x^2}{n^2\alpha^2}\right) - \left[1 \pm \frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^2}{n^2\alpha^2} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{n^4\alpha^4} + \ldots\right] \cdot \left[\frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{(n+1)^4\alpha^4} + \ldots\right]}{\left[\frac{x^2}{n^2\alpha^2} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{n^4\alpha^4} + \ldots\right] - \left[\frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{(n+1)^4\alpha^4} + \ldots\right]}.$$

Но овай количникъ быва при већъ сасвимъ великомъ брою n

$$D_n = \frac{\frac{x^2}{n^2\alpha^2} \cdot \frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2}}{\pm \frac{x^2}{n^2\alpha^2} \mp \frac{x^2}{(n+1)^2\alpha^2}} = \pm \frac{x^2}{2n+1},$$ а за $n = \infty$

напослѣдку $D_n = 0$, при ма каквой крайной вредности броя x. Слѣдователно редъ є $\Sigma(l\varphi)$, а збогъ тога и вопросный производъ F, за сваку крайну вредность броя x сбирљивъ.

Изразъ синуса у §-у 180. можемо писати и овако:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots\ldots,$$

а то є функція каошто смо є сада испытали, и за кою смо нашли да є сбирљива за сваку крайну вредность одъ x, слѣдователно и при $x = \frac{\pi}{2}$. Съ Валисовимъ, одтудъ изведенимъ изразомъ дакле, приближавамо се доиста све већма правой вредности броя π: штогодъ узмемо више чинителя у бронтелю и именителю.

Найпосле

§ 203.

4.) За испытиванѣ дата функція нека є

$$F = \frac{v^{n|-1}}{n!} \cdot x^n = \frac{v\,(v-1)\,(n-2)\,(v-3)\ldots[v-(n-1)]}{n!}\; x^n,$$

кою, каоцто се лако увиђа, можемо писати и овако:

$$F = \frac{v}{1} \cdot \frac{v-1}{2} \cdot \frac{v-1}{3} \cdot \ldots \frac{v-(n-1)}{n} \cdot x^n$$

$$= \pm\, v \cdot \frac{1-v}{1} \cdot \frac{2-v}{2} \cdot \ldots \frac{(n-1)-v}{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

$$= \pm\, v \cdot \left(1-\frac{v}{1}\right)\left(1-\frac{v}{2}\right) \cdots \left(1-\frac{v}{n-1}\right) \cdot \frac{x^n}{n},$$

при чему горный знакъ $(+)$ стои за случай ако є брой n безпарный, а долный (-1) ако є n брой парный.

По §-у 161. имамо

$$F = e^{\pm\,\Sigma\,(l\varphi)\,+\,l\frac{x^n}{n}} = e^s \;\ldots\ldots\; (w.,$$

гди смо ради краткоће узели

$$lv + l\left(1-\frac{v}{1}\right) + l\left(1-\frac{v}{2}\right) + \ldots + l\left(1-\frac{v}{n-1}\right) = \Sigma(l\varphi) \,..\, (y.$$

$$\pm\,\Sigma\,(l\varphi) + l\,\frac{x^n}{n} = s \;\ldots..\; (z.$$

Садъ да видимо шта быва одъ овогъ изложителя s при увећаваню броя n до ∞, при коіой вредности наравно престає она разлика $\pm\,\Sigma\,(l\varphi)$ збогъ безпарногъ или парнога броя n.

Ако поставимо у реду за e^x (§. 161.) $\frac{1}{n}$ место x, слѣдує $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2!\,n^2} + \frac{1}{3!\,n^3} + \ldots..$, а одатле, ако узмемо природне логаритме, и после іошъ съ ln помложимо:

$$\frac{ln}{n} = ln \,.\, l\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2!\,n^2}+\cdots\right) = l\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2!\,n^2}+\cdots\right)^{ln};$$

найпосле ако овде поставимо $n = \infty$:

$$\frac{l\,(n = \infty)}{(n = \infty)} = l\,(1)^{l\infty} = l\,(1)^{\infty} = l\,(1) = 0.$$

По овоме другій членъ броя s, т. є. $l\frac{x^n}{n} = n\left(lx - \frac{ln}{n}\right)$, приближава се при безкрайномъ увеђаваню броя n све веђма граници nlx, и постає найпосле при $n = \infty$, збогъ $\frac{ln}{n}$ тадъ $= 0$, раванъ $\infty\, lx$.

Што се пакъ тиче првога члана истогъ броя s, морамо разликовати у реду $\Sigma\,(l\varphi)$ ова два могуђа случая: брой є v положанъ, или брой є v одречанъ.

α.) Ако є v **положно**: онда є редъ $\Sigma\,(l\varphi)$ **растуђій**, и као такавъ по §. 119. **несбирљивъ.** Како су пакъ уєдно іошъ броєви $\left(1 - \frac{m}{1}\right)$, $\left(1 - \frac{m}{2}\right)$, $\left(1 - \frac{m}{3}\right)$, … $\left(1 - \frac{m}{n-1}\right)$ мањи одъ єдинице, а зато њиови логаритми одречни: то є дакле у предпоставлѣномъ случаю при $n = \infty$ сбиръ тога реда $\Sigma\,(l\varphi) = -\infty$, дакле обзиромъ на предходеђе докученѣ

$$s = -\infty + \infty\, lx = \infty\,(-1 + lx).$$

Овай изразъ постає за $x \overset{=}{<} 1$ раванъ $-\infty$; дакле є функція F у вопросномъ случаю при овакимъ вредностима одъ x (збогъ $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$) **равна нулли** и зато **сбирљива.**

За вредности пакъ $x > 1$, за коє є lx положанъ, быва $s = +\infty$, а тога ради функція F при таковимъ вредностима броя x (збогъ $e^{+\infty} = +\infty$) **несбирљива.**

β.) Ако є напротивъ v **одречно**: онда є редъ $\Sigma\,(l\varphi) =$

$$lv + e\left(1 + \frac{v}{1}\right) + l\left(1 + \frac{v}{2}\right) + l\left(1 + \frac{v}{3}\right) + \ldots + l\left(1 + \frac{v}{n-1}\right)$$

падаюђій, као какавъ може быти сбирљивъ. Є ли, и за какве вредности броя x, показат'ђе по §. 121. количникъ

$$D_n = \frac{l\left(1+\frac{v}{n-1}\right)\cdot l\left(1+\frac{v}{n}\right)}{l\left(1+\frac{v}{n-1}\right)-l\left(1+\frac{v}{n}\right)}$$

$$= \frac{\left[\frac{v}{n-1}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{n-1}\right)^2+\ldots\right]\cdot\left[\frac{v}{n}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{n}\right)^2+\ldots\right]}{\left[\frac{v}{n-1}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{n-1}\right)^2+\ldots\right]-\left[\frac{v}{n}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{n}\right)^2+\ldots\right]}.$$

Овай є количникъ за врло велико n

$$D_n = \frac{\frac{v}{n-1}\cdot\frac{v}{n}}{\frac{v}{n-1}-\frac{v}{n}} = v.$$

Вопросный є редъ дакле **несбирљивъ**, и нѣговъ сбиръ $=+\infty$, а тога ради у предпоставлѣномъ случаю при $n=\infty$ уобште

$$s = \infty + \infty lx = \infty(1+lx).$$

За $x \overset{=}{>} 1$ постає овай брой $s=+\infty$, кое є знакъ: да є функція F при таковимъ вредностима одъ x **несбирљива**. Напротивъ за вредности $x<1$, за кое є lx као одречанъ >1, быва $s=-\infty$, а то ће рећи: функція є F при таковимъ вредностима броя x (збогъ $e^{-\infty}=0$) **равна нулли и сбирљива.**

Послѣдакъ є дакле свы овы испытиваня слѣдуюћій: **Дата функція F сбирљива є и равна нулли при свакой вредности броя v за $x<1$, а несбирљива и равна ∞ за $x>1$.**

КНЬИГА IV.

РАЧУНЪ СЪ КРАЙНИМЪ РАЗЛИКАМА И СБИРОВИМА ФУНКЦІЯ.

I. Разлике.

a) Изясненя и обшта сматраня.

§ 204.

Премену неке функціє $f(x)$ збогъ премене пременльивогъ броя x у $x+h$, добыямо безъ сумнѣ, ако у ньой — функціи — узмемо $x+h$ место x, и после одъ тако добывене нове функціє $f(x+h)$ ню исту — $f(x)$ — одузмемо. Т. є. та є премена $= f(x+h) - f(x)$ и назива се зато (крайномъ) **разликомъ** функціє $f(x)$, означує се пакъ симболомъ $\Delta f(x)$ на тай начинъ, да пишемо

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

1.) Ако притомъ функція $f(x)$ несадржи сама већъ вишакъ h, онда є нѣна разлика, была она — функція — алгебрайска или трансцендентна (єръ се трансцендентне функціє, каошто смо видили у трећой кньизи, лако могу изразити као алгебрайске у виду безкрайны редова), по §-у **11.**

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x)\\ &= f_1(x)\,h + f_2(x)\,\frac{h^2}{2!} + f(x)\,\frac{h^3}{3!} + \ldots\end{aligned}$$

Овай є редъ изъ већъ познаты узрока само у таковомъ случаю краянъ, гди є вопросна $f(x)$ цела раціонална, дакле вида

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m;$$

по себи пакъ разуме се да ће тадъ $\Delta f(x)$ быти функція $(m-1)$. степена, коє сачинительи примили су у себе вишакъ h.

2.) Ако напротивъ функція $f(x)$ садржи сама већъ h, т. є. ако є вида

$$f(x)=\varphi(x)\,h^{\alpha}+\varphi'(x)\,h^{\beta}+\varphi''(x)\,h^{\gamma}+\ldots\,:$$

онда є нѣна разлика

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=f(x+h)-f(x)\\&=[\varphi(x+h)\,h^{\alpha}+\varphi'(x+h)\,h^{\beta}+\varphi''(x+h)\,h^{\gamma}+\ldots]\\&\qquad-[\varphi(x)\,h^{\alpha}+\varphi'(x)\,h^{\beta}+\varphi''(x)\,h^{\gamma}+\ldots\ldots]\\&=[\varphi(x+h)-\varphi(x)]\,h^{\alpha}+[\varphi'(x+h)-\varphi'(x)]\,h^{\beta}+\\&\qquad+[\varphi''(x+h)-\varphi''(x)]\,h^{\gamma}+\ldots\ldots\\&=\Delta\varphi(x)\,h^{\alpha}+\Delta\varphi'(x)\,h^{\beta}+\Delta\varphi''(x)\,h^{\gamma}+\ldots\ldots\\&=[\varphi_1(x)\,h+\varphi_2(x)\,\frac{h^2}{2!}+\varphi_3(x)\,\frac{h^3}{3!}+\ldots]\;h^{\alpha}\\&\qquad+[\varphi'_1(x)\,h+\varphi'_2(x)\,\frac{h^2}{2!}+\varphi'_3(x)\,\frac{h^3}{3!}+\ldots]\;h^{\beta}\\&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

очевидно редъ, кои се лако може уредити по степенима вишка h.

Садржала дакле функція $f(x)$ вишакъ h или несадржала га, нѣна ће се разлика свагда моћи представити у виду крайногъ (ако є $f(x)$ функція алгебрайска) или безкрайногъ реда (ако є $f(x)$ функція трансцендентна), по степенима истога вишка h.

§ 205.

Ако брой x у дотичной функціи $f(x)$ прима застопце више вредностій $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots$: онда одъ функціє $f(x)$ добыямо редъ функція

$$f(x),\ f(x_1),\ f(x_2)\ \ldots\ldots\ldots\ ;$$

и у таквоме се дакле случаю може пытати іошъ за другу, трећу, и уобште за сваку вышу разлику функціє $f(x)$, т. є. за ${}^{2}\Delta f(x)$, ${}^{3}\Delta f(x)$, $\ldots\ldots$ ${}^{n}\Delta f(x)$.

У добывеномъ реду функція владат'ће некій, одъ природе функціє $f(x)$ завысный законъ: кадгодъ између вредностій x, x_1, x_2, ... постои какова правилность, и у свакомъ таковомъ случаю быт'ће $f(x)$ общтый членъ тога реда.

Што се пакъ тиче вредностій пременльивога броя x, то су два случая могућа, т. є. или се 1. свака одъ предходеће **єднако** разликує, рећи ће или є $x_1 - x = x_2 - x_1 = \ldots\ldots = x_n - x_{n-1}$, или су пакъ 2. ове ньиове разлике **различите**. Мы ћемо се за сада занимати исключно само съ првимъ случаємъ, и означават'ћемо притомъ ону єднаку разлику између сваке две застопне вредности одъ x, символомъ Δx, тако да є $x_1 = x + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, $x_3 = x_2 + \Delta x$, ... $x_n = x_{n-1} + \Delta x$, а редъ изъ коєга ћемо определьивати разне разлике функціє $f(x)$:

$$f(x),\ f(x+\Delta x),\ f(x+2\Delta x),\ \ldots\ldots\ f(x+n\Delta x),$$

при комъ є (збогъ правилности у вредностима одъ x) $f(x)$ общтый членъ.

Осимъ тога валя іошъ приметити, да одъ x незавысна нѣгова разлика Δx, была пременльива или стална, никадъ несме быти некій сасвимъ общтій брой, єръ бы ю тадъ могли помыслити и изчезльиво малу, а то се небы слагало съ понятіємъ рачуна крайны разлика функція, кои се одъ поздніє слѣдећегъ диференціялногъ рачуна тиме башъ разликує, што у нѣму ніє као тамо вишакъ одъ x изчезльивъ или безкрайно малый. — У случаю ако є Δx сталанъ брой, быт'ће наравно све разлике функціє $f(x)$, млого простіє него гди є пременльива.

§ 206.

Будући є

$$
\begin{aligned}
{}^2\Delta f(x) &= \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x),\\
{}^3\Delta f(x) &= {}^2\Delta f(x+\Delta x) - {}^2\Delta f(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
{}^m\Delta f(x) &= {}^{m-1}\Delta f(x+\Delta x) - {}^{m-1}\Delta f(x),
\end{aligned}
$$
а $\Delta f(x+\Delta x$

и $\Delta f(x)$ по предходећемъ §-у свагда можемо развити у редове по $h = \Delta x$: то є лако разумети, да се на истый начинъ и свака выша разлика функціє $f(x)$, као редъ по степенима одъ $h = \Delta x$ представити дає, и да су притомъ све нѣне выше разлике у другомъ случаю истогъ пређашнѣгъ §-а.

Поставляюћи дакле у $f(x)$ найпре $x + \Delta x$ место x, и одузимаюћи после одъ $f(x + \Delta x)$ функцію $f(x)$, слѣдує докъ $f(x)$ **несадржи сама већъ вишакъ** Δx (§. пређашнѣгъ 1.),

$\Delta f(x) = f_1(x)\,\Delta x +$ сбиръ чланова съ вышимъ степенима одъ Δx;

овде наново $x + \Delta x$ узимаюћи место x, и после, одъ нове функціє $\Delta f(x + \Delta x)$ ову $\Delta f(x)$ одузимаюћи,

$$ {}^2\Delta f(x) = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) $$

$$ = f_2(x)\,\frac{\Delta^2 x}{2\,!} + \text{сбиръ чланова съ} $$

вышимъ степенима одъ Δx;

тако исто поступаюћи и далѣ, добыямо

$$ {}^3\Delta f(x) = {}^2\Delta f(x + \Delta x) - {}^2\Delta f(x) $$

$$ = f_3(x)\,\frac{\Delta^3 x}{3\,!} + \text{сбиръ чланова съ} $$

вышимъ степенима одъ Δx,

$$ {}^4\Delta f(x) = {}^3\Delta f(x + \Delta x) - {}^3\Delta f(x) $$

$$ = f_4(x)\,\frac{\Delta^4 x}{4\,!} + \text{сбиръ чланова съ} $$

вышимъ степенима одъ Δx,

. . . . , уобште

$$ {}^n\Delta f(x) = {}^{n-1}\Delta f(x + \Delta x) - {}^{n-1}\Delta f(x) $$

$$ = f_n(x)\,\frac{\Delta^n x}{n\,!} + \text{сбиръ чланова съ} $$

вышимъ степенима одъ Δx.

Изъ овога видимо

§ 207.

1.) Ако є $f(x)$ нека цела функція броя x одъ v. степена, онда є нѣна ${}^{1}\Delta f(x)$ функція одъ $(v-1)$., ${}^{2}\Delta f(x)$ функція одъ $(v-2)$., и т. д. ${}^{n}\Delta f(x)$ функція одъ $(v-n)$. степена, до найпосле ${}^{v}\Delta f(x)$ функція одъ $v-v=0$. степена, то ће рећи некій по x **сталанъ** брой, а све друге нѣне выше разлике $=0$.

2.) Да сваку вышу разлику ${}^{n}\Delta f(x)$ неке функціє $f(x)$ можемо добыти изъ непосредно предидуће ${}^{n-1}\Delta f(x)$, по томе, што є ${}^{n}\Delta f(x)$ свагда прва разлика те предидуће разлике, т. є. зато што є ${}^{n}\Delta f(x) = {}^{1}\Delta\left[{}^{n-1}\Delta f(x)\right]$.

Овай начинъ употребит'ћемо онда, кадъ вопросну вышу разлику нећемо или неможемо да изнађемо непосредно. Найпосле

3.) Ако є $f(x)$, као цела функція v. степена, обштій чланъ некогъ реда (такођеръ) целы функція: онда є обштій чланъ реда ньиовы прві разлика одъ $(v-1)$., обштій чланъ реда други разлика одъ $(v-2)$. степена и т. д. до найпосле обштій чланъ реда v. разлика одъ $v-v=0$. степена, т. є. некій по x **сталанъ** брой.

У реду овы последньи разлика быт'ће сви чланови **єднаки**, а у свакомъ далѣмъ различномъ реду сви чланови **нулле**. Одтудъ види се да є **свакій онай редъ целы функція, коега є обштій чланъ нека цела функція v. степена, аритметичанъ редъ исто толикогъ, т. є. такођеръ v. степена.**

§ 208.

Представляюћи съ

$$v_{m} \quad v_{m+1} \quad v_{m+2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, v_{\omega} \,.\,.\,.\,.$$

ма какавъ редъ, имамо познатимъ изъ елемента' начиномъ

$${}^{n+1}\Delta v_{m} = {}^{n}\Delta v_{m+1} - {}^{n}\Delta v_{m},$$

$${}^{n}\Delta v_{m} = (-1)^{n}\left[v_{m} - \binom{n}{1} v_{m+1} + \binom{n}{2} v_{m+2} - \ldots \pm v_{m+n}\right],$$

$${}^{n}\Delta v_{m} = v_{m+n} - \binom{n}{1} v_{m+(n-1)} + \binom{n}{2} v_{m+(n-2)} - \ldots \pm v_{m}, \quad \text{и}$$

$$v_{\omega} = v_{m} + \binom{\omega-1}{1} \Delta v_{m} + \binom{\omega-1}{2} {}^{2}\Delta v_{m} + \ldots + {}^{\omega-1}\Delta v_{m}.$$

Сравнѣнѣмъ реда функція

$$f(x),\ f(x+\Delta x),\ f(x+2\Delta x), \ldots\ldots f(x+\omega\Delta x), \ldots\ldots$$

съ тимъ простимъ редомъ, слѣдує

$${}^{n+1}\Delta f(x) = {}^{n}\Delta f(x+\Delta x) - {}^{n}\Delta f(x) \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I.}$$

$${}^{n}\Delta f(x) = (-1)^n \left[f(x) - \binom{n}{1} f(x+\Delta x) + \binom{n}{2} f(x+2\Delta x) - \ldots \right.$$
$$\ldots \pm f(x+n\Delta x) \ldots\ldots \quad \text{(II.}$$

$${}^{n}\Delta f(x) = f(x+n\Delta x) - \binom{n}{1} f[x+(n-1)\Delta x] +$$
$$\binom{n}{2} f[x+(n-2)\Delta x] - \ldots \pm f(x) \quad \ldots\ldots \quad \text{(III.}$$

$$f(x+\omega\Delta x) = f(x) + \binom{\omega-1}{1} \Delta f(x) + \binom{\omega-1}{1} {}^{2}\Delta f(x) + \ldots$$
$$\ldots + {}^{\omega-1}\Delta f(x) \quad \ldots\ldots \text{IV.}$$

Првый одъ овы образаца служи за опредѣльиванѣ сваке выше разлике функціє $f(x)$, помоћу непосредно ниже разлике; друга два за налазенѣ сваке уобште разлике независно одъ нижи разлика; найпосле четвртый за опредѣльиванѣ произвольногъ члана функціоногъ реда, помоћу прве функціє $f(x)$ и нѣны разлика'.

б) Крайно различенѣ функція єдногъ премѣнльивогъ броя.

§ 209.

Опредѣльиванѣ разны разлика' функція назива се **различенѣ** функція.

Што се тиче начина коимъ то быва, то се истый довольно може увидити изъ предходећи §§-а; нарочито пакъ обавешћавају насъ о томе §§. 204., 206. и предходећій 208., поредъ кои' само іошъ слѣдуюће приметити валя:

1.) Ако су две функціє $f(x)$ и $\varphi(x)$ за сваку вредность броя x єднаке, онда су ньиове єдноимене разлике такођеръ єднаке, а то ће рећи да свака функція има само єдну єдину прву, само єдну другу, ... уобште само єдну n. разлику.

2.) Ако є A некій по x сталный брой, онда можемо рећи $A = x^0 . A$; но по §-у є 204.

$$\Delta A = \Delta(x^0 A) = (x + \Delta x)^0 . A - A = 1 . A - A,$$

т. є.

$$\Delta A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.$$

съ речима: **разлика є свакогъ, по дотичномъ пременльивомъ броју сталнога броя, равна нулли.**

3.) Ако є $f(x) = \varphi(x) + A$ съ предпоставлѣнѣмъ, да у $\varphi(x)$ сталны чланова нема: онда є

$$\Delta f(x) = [\varphi(x + \Delta x) + A] - [\varphi(x) + A]$$
$$= \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \text{ т. є.}$$
$$\Delta[\varphi(x) + A] = \Delta\varphi(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II.$$

4.) Ако є $f(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$, имамо

$$\Delta f(x) = [\varphi(x + \Delta x) \pm \psi(x + \Delta x)] - [\varphi(x) \pm \psi(x)]$$
$$= [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] \pm [\psi(x + \Delta x) - \psi(x)], \text{ т. є.}$$
$$\Delta[\varphi(x) \pm \psi(x)] = \Delta\varphi(x) \pm \Delta\psi(x) \quad \ldots\ldots \quad (III.$$

5.) Ако є $f(x) = A . \varphi(x)$, быт'ће

$$\Delta f(x) = A\varphi(x + \Delta x) - A\varphi(x) = A[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)]$$

т. є.

$$\Delta . A\varphi(x) = A\Delta\varphi(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV.$$

6.) Ако є $f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$, слѣдує по §-у 204.

$$\Delta f(x) = \varphi(x + \Delta x) . \psi(x + \Delta x) - \varphi(x)\psi(x)$$
$$= [\varphi(x) + \varphi_1(x)\Delta x + \varphi_2(x)\frac{\Delta^2 x}{2!} + \ldots\ldots] . [\psi(x) +$$
$$+ \psi_1(x)\Delta x + \psi_2(x)\frac{\Delta^2 x}{2!} + \ldots] - \varphi(x)\psi(x)$$
$$= \Big\{\varphi(x) + [\varphi_1(x)\Delta x + \varphi_2(x)\frac{\Delta^2 x}{2!} + \ldots]\Big\} . \Big\{\psi(x) +$$
$$+ [\psi_1(x)\Delta x + \psi_2(x)\frac{\Delta^2 x}{2!} + \ldots]\Big\} - \varphi(x)\psi(x)$$
$$= [\varphi(x) + \Delta\varphi(x)] . [\psi(x) + \Delta\psi(x)] - \varphi(x)\psi(x),$$

и одтудъ

$$\Delta . \varphi(x)\psi(x) = \psi(x) . \Delta\varphi(x) + \varphi(x)\Delta\psi(x) + \Delta\varphi(x)\Delta\psi(x)$$
$$\ldots\ldots \quad (V.$$

Найпосле

7.) Ако є $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, добыямо

$$\Delta f(x) = \frac{\varphi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x).\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\,\psi(x+\Delta x)}{\psi(x).\psi(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{\Big\}\psi(x)\big[\varphi_1(x)\,\Delta x + \varphi_2(x)\,\frac{\Delta^2 x}{2\,!} + \ldots\big] - \varphi(x)\big[\psi_1(x)\,\Delta x + \psi_2(x)\,\frac{\Delta^2 x}{2\,!} + \ldots\big]\Big\{}{\psi^2(x) + \psi(x)\,\big[\psi_1(x)\,\Delta x + \psi_2(x)\,\frac{\Delta^2 x}{2\,!} + \ldots\big]}$$

$$= \frac{\psi(x)\,.\,\Delta\varphi(x) - \varphi(x)\,.\,\Delta\psi(x)}{\psi^2(x) - \psi(x)\,.\,\Delta\psi(x)} \quad \ldots\ldots (VI.$$

§ 210.

Садъ можемо приступити къ различеню неколико найпотребнiи функцiя. При томе означават'ћемо разлике за $\Delta x = 1$ за разлику одъ оны за друго неко Δx, са Δ_1.

1.) $f(x) = x^m$.

По §-у 204. 1.)

$$\Delta f(x) = f_1(x)\,\Delta x + f_2(x)\,\frac{\Delta^2 x}{2\,!} + f_3(x)\,\frac{\Delta^3 x}{3\,!} + \ldots, \text{ дакле}$$

$$\Delta x^m = m\,\Delta x\,.\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 x\,.\,x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 x + + x^{m-3} + \ldots\ldots,$$

и овай є редъ краянъ, само ако є m цео положанъ брой.

2.) $f(x) = a^x$.

$$\Delta f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\,(a^{\Delta x} - 1) \quad \ldots\ldots (1.$$

или ако $a^{\Delta x}$ по §-у 160. развiємо у безкраянъ редъ:

$$\Delta f(x), \text{ т. є. } \Delta\, a^x = a^x.\Big(\frac{la}{1}\,\Delta x + \frac{l^2 a}{2\,!}\,\Delta^2 x + \frac{l^3 a}{3\,!}\,\Delta^3 x + \ldots \quad \ldots\ldots (2.$$

3.) $f(x) = log\, x$.

$$\Delta \log x = \log(x + \Delta x) - \log x = \log \frac{x + \Delta x}{x} = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

или ако за $\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ узмемо по §. 162. нѣговъ редъ съ обзиромъ на §. 168.:

$$\Delta \log x = M\left(\frac{1}{x}\Delta x - \frac{1}{2x^2}\Delta^2 x + \frac{1}{3x^3}\Delta^3 - \ldots .\right)$$

4.) $f(x) = \sin x.$

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} . \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \ldots (1.$$

(тригон. § 23. другій обр. подъ I.); или

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x$$
$$- \sin x$$

(тригон. § 16. 39. I.)

$$= \sin x\left(1 - \frac{\Delta^2 x}{2!} + \frac{\Delta^4 x}{4!} - \cdots\right) + \cos x\left(\Delta x - \frac{\Delta^3 x}{3!} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta^2 x}{5!} - \cdots\right) - \sin x \quad (\S. 163.)$$

$$= \cos x . \Delta x - \frac{1}{2!} \sin x . \Delta^2 x = \frac{1}{3!} \cos x . \Delta^3 x +$$
$$+ \frac{1}{4!} \sin x . \Delta^4 x + \frac{1}{5!} \cos x . \Delta^5 x - \ldots\ldots \qquad (2.$$

5.) $f(x) = \cos x.$

$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} . \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \ldots (1$$

(тригон. § 23. 4. обр. подъ 1.); или

$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x$$
$$- \cos x$$

(тригон. § 19. II.)

$$= - \sin x . \Delta x - \frac{1}{2!} \cos x . \Delta^2 + \frac{1}{3!} \sin x . \Delta^3$$
$$+ \frac{1}{4!} \cos x . \Delta^3 x - \ldots .$$

(помоћу §. 163. на истый начинъ као преће при *sin.*).

6.) $f(x) = \operatorname{tang} x.$

$$\Delta\, tang\, x = \Delta \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \,.\, \Delta \sin x - \sin x \,.\, \Delta \cos x}{\cos^2 x + \cos x \,.\, \Delta \cos x} \quad (\S\ 209.),$$

кои изразъ може се садъ помоћу пређе нађены разлика *sin* и *cos* іошъ и далѣ развити.

7.) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$

Обзиромъ на §§-е 209. и 210. имамо по §-у 204.

$$\Delta f(x) = a_1 \Delta x + 2 a_2 x \Delta x + 3 a_3 x^2 \Delta x + \ldots.$$

8.) $f(x) = x^{m|\Delta x} = x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(m-1)\Delta x].$

$$\begin{aligned}\Delta x^{m|\Delta x} &= (x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\ldots[x+m\Delta x] \\ &\quad - x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(m-1)\Delta x] \\ &= (x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(m-1)\Delta x]\,.\, m\Delta x \\ &= m\Delta x\,.\,(x+\Delta x)^{m-1|\Delta x}.\end{aligned}$$

За $\Delta x = 1$ быва

$$\Delta_1 x^{m|1} = m(x+1)^{m-1|1}.$$

На истый начинъ налазимо

9.) ако є $f(x) = x^{m|-\Delta x}$,

$$\Delta x^{m|-\Delta x} = m\Delta x\,.\, x^{m-1|-\Delta x},$$

а $\Delta_1 x^{m|-1} = m x^{m-1|-1}$.

10.) $\Delta \dfrac{1}{x^{m|\Delta x}} = -\dfrac{m\Delta x}{x^{m+1|\Delta x}}$

$$\Delta \frac{1}{x^{m|1}} = -\frac{m}{x^{m+1|1}}.$$

11.) $\Delta \dfrac{1}{x^{m|-\Delta x}} = \dfrac{m\Delta x}{x^{m+1|-\Delta x}}$

$$\Delta_1 \frac{1}{x^{m|-1}} = \frac{m}{x^{m+1|-1}}.$$

Найпосле за разлике сачинителя биномногъ образца

$$12.)\quad \Delta\left(\frac{\frac{x}{\Delta x}}{m}\right) = \Delta\,\frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m|-1}}{m!} = \frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m-1|-1}}{(m-1)!}$$

$$\Delta_{,}\binom{x}{m} = \frac{x^{m-1|-1}}{(m-1)!}.$$

§ 211.

Да изнађемо іошъ и неколико выши разлика.

1.) По прећашнѣмъ є §-у (бр. 1.), поставляюћи $m = 3$, $\Delta x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2 x + \Delta^3 x$; по §-у 204. пакъ

$${}^2\Delta x^3 = 3\,(2x\Delta x + \Delta^2 x).\Delta x + 3\Delta x\,.\,\Delta^2 x = 6x\Delta^2 x + 6\Delta^3 x$$

$${}^3\Delta x^3 = 6\Delta x^3$$

${}^4\Delta x^3 = 0$ и све дилѣ разлике нулле.

2.) Нашли смо у прећашнѣмъ §-у подъ 2.,

$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$. Быт'ће дакле

$${}^2\Delta a^x = a^{x+\Delta x}.(a^{\Delta x} - 1) - a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x.(a^{\Delta x} - 1)^2.$$

Истимъ начиномъ

$${}^3\Delta.\,a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3,$$

$${}^4\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^4,$$

. . . . уобште

$${}^n\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^n \;.\;.\;.\;.\;.\;(1.,$$

или ако за $a^{\Delta x}$ узмемо нѣговъ редъ:

$${}^n\Delta a^x = a^x\left(\frac{la}{1}.\Delta x + \frac{l^2 a}{2!}\Delta^2 x + \frac{l^3 a}{3!}\Delta^3 x + \ldots\right)^n \;.\;.\;.\;.\;.\;(2.$$

3.) Далѣ нашли смо $\Delta \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$; мора дакле быти по §-у 204.

$${}^{2}\Delta \sin x = 2 \sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\Delta x+\frac{\Delta x}{2}\right) -$$

$$- 2 \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\frac{\Delta x}{2}\left[\cos\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right) - \cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)\right]$$

$$= - 2^{2} \sin^{2}\frac{\Delta x}{2} \sin(x+\Delta x)$$ (тригон. § 23.).

$${}^{3}\Delta \sin x = - 2^{2} \sin^{2}\frac{\Delta x}{2} \sin(x+2\Delta x) + 2^{2} \sin^{2}\frac{\Delta x}{2} \sin(x+\Delta x)$$

$$= 2^{2} \sin^{2}\frac{\Delta x}{2}\left[\sin(x+\Delta x) - \sin(x+2\Delta x)\right]$$

$$= - 2^{3} \sin^{3}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right)$$ (тригон. § 23.).

$${}^{4}\Delta \sin x = - 2^{3} \sin^{3}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x+\frac{5}{2}\Delta x\right) +$$

$$+ 2^{3} \sin^{3}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right)$$

$$= 2^{3} \sin^{3}\frac{\Delta x}{2}\left[\cos\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right) - \cos\left(x+\frac{5}{2}\Delta x\right)\right]$$

$$= 2^{4} \sin^{4}\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin(x+2\Delta x)$$ (тригон. § 23.).

Поступаюћи тимъ истимъ начиномъ и далѣ, налазимо да є уобште

$${}^{2n}\Delta \sin x = \pm\, 2^{2n}.\, \sin^{2n}\frac{\Delta x}{2} \cdot \sin(x+n\Delta x),$$ а

$${}^{2n+1}\Delta \sin x = \pm\, 2^{2n+1} \sin^{2n+1}\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left[x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right],$$

при чему брой *n* заступа свакій цео и положанъ брой, одъ знакова пакъ + или — треба узети првый кадъ є *n* парно, а другій кадъ є *n* безпарно.

На истый начинъ добыямо одъ $\Delta \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \times$ $\times \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ уобште

$$ {}^{2n}\Delta \cos x = \pm\, 2^{2n} \sin^{2n} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos (x + n\,\Delta x), \quad \text{a} $$

$$ {}^{2n+1}\Delta \cos x = \mp\, 2^{2n+1} \sin^{2n+1} \frac{\Delta x}{2} \sin \left[x + (n + \tfrac{1}{2})\,\Delta x\right], $$ где

n значи што и пре, а у смотреню знакова валя приметити, да є горньій за случай парнога *n*, долньій пакъ за безпарно *n*.

4.) Определююћи выше разлике и функціє $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$, за кою смо у пређашнћмъ §. нашли $\Delta f(x) = a_1 \Delta x + 2 a_2 x \Delta x + 3 a_3 x^2 \Delta x + \ldots\ldots$: добыямо помоћу §. 204. 2.)

$$ {}^{2}\Delta f(x) = 2 a_2 \Delta^2 x + 6 a_3 x \Delta^2 x + \ldots\ldots $$
$$ {}^{3}\Delta f(x) = 6 a_3 \Delta^3 x + \ldots\ldots $$
$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; $$

изъ чега видимо, да є прва разлика изгубила єданъ сталанъ брой a_0, друга разлика два стална броя a_0, и $a_1 \Delta x$, трећа разлика три стална броя a_0, $a_1 \Delta x$ и $2 a_2 \Delta^2 x$, и т. д. Ова є приметба врло важна за сбирове функція.

Найпосле за выше разлике функція $x^{m|\Delta x}$, $x^{m|-\Delta x}$, $\frac{1}{x^{m|\Delta x}}$, $\frac{1}{x^{m|-\Delta x}}$ и $\left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right)$ добыямо на онай истый начинъ коимъ смо нашли у предидућемъ §. ньиове прве разлике

5.) $$ {}^{2}\Delta x^{m|\Delta x} = m^{2|-1} \,.\, \Delta^2 x \,.\, (x + 2\,\Delta x)^{m-2|\Delta x} $$
$$ {}^{3}\Delta x^{m|\Delta x} = m^{3|-1} \,.\, \Delta^3 x \,.\, (x + 3\,\Delta x)^{m-3|\Delta x} $$
$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, $$ уобште
$$ {}^{n}\Delta x^{m|\Delta x} = m^{n|-1} \,.\, \Delta^n x \,.\, (x + n\,\Delta x)^{m-n|\Delta x} $$

За $\Delta x = 1$, $ {}^{n}\Delta_1 x^{m|-1} \,.\, (x + n)^{m-n|1}$

$$ {}^{2}\Delta x^{m|-\Delta x} = m^{2|-1} \,.\, \Delta^2 x \,.\, x^{m-2|-\Delta x} $$
$$ {}^{3}\Delta x^{m|-\Delta x} = m^{3|-1} \,.\, \Delta^3 x \,.\, x^{m-3|-\Delta x} $$
$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots $$ уобште
$$ {}^{n}\Delta x^{m|\Delta x} = m^{n|-1} \,.\, \Delta^n x \,.\, x^{m-n|-\Delta x} $$

За $\Delta x = 1$, ${}^{n}\Delta_{1}\, x^{m\lfloor -1} = m^{n\lfloor -1} \,.\, x^{m-n\lfloor -1}$

$${}^{2}\Delta \cdot \frac{1}{x^{m+2\lfloor \Delta x}} = \frac{m^{2\lfloor 1} \,.\, \Delta^{2} x}{x^{m+2\lfloor \Delta x}}$$

$${}^{3}\Delta \cdot \frac{1}{x^{m\lfloor \Delta x}} = -\frac{m^{3\lfloor 1} \,.\, \Delta^{3} x}{x^{m+3\lfloor \Delta x}}$$

. . . . , уобште

$${}^{n}\Delta \cdot \frac{1}{x^{m\lfloor \Delta x}} = \pm \frac{m^{n\lfloor 1} \,.\, \Delta^{n} x}{x^{m+n\lfloor \Delta x}},$$ при чему горньій знакъ (+) стои за случай **парногъ**, а дольній (—) за случай **безпарногъ** броя *n*.

За $\Delta x = 1$, ${}^{n}\Delta \dfrac{1}{x^{m\lfloor 1}} = \pm \dfrac{m^{n\lfloor 1}}{x^{m+n\lfloor 1}}$

$${}^{2}\Delta \frac{1}{x^{m\lfloor -\Delta x}} = \frac{m^{2\lfloor 1} \,.\, \Delta^{2} x}{x^{m+2\lfloor -\Delta x}}$$

$${}^{3}\Delta \frac{1}{x^{m\lfloor -\Delta x}} = \frac{m^{3\lfloor 1} \,.\, \Delta^{3} x}{x^{m+3\lfloor -\Delta x}}$$

. . . . , уобште

$${}^{n}\Delta \frac{1}{x^{m\lfloor -\Delta x}} = \frac{m^{n\lfloor 1} \,.\, \Delta^{n} x}{x^{m+n\lfloor -\Delta x}}.$$

За $\Delta x = 1$, ${}^{n}\Delta \dfrac{1}{x^{m\lfloor -1}} = \dfrac{m^{n\lfloor 1}}{x^{m+n\lfloor -1}}$.

$${}^{2}\Delta \left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right) = \frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m-2\lfloor -1}}{(m-2)!},$$

$${}^{2}\Delta \left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right) = \frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m-3\lfloor -1}}{(m-3)!},$$ . . . . . . уобште

$${}^{n}\Delta \left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right) = \frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m-n\lfloor -1}}{(m-n)!} = \left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m-n\end{matrix}\right).$$

§ 212.

Мы смо до сада задатакъ различеня функція све еднако сматрали съ тимъ ограниченѣмъ, да су застопне вредности променљивога броя x єдноразличне (aequidifferent-не). Но да га претресемо сада и сасвимъ уобште.

Нека су као у §. 205. вредности променљивога броя у $f(x)$ редомъ

$x, x_1\ x_2\ x_3 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ x_n \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$, а функціє одъ тій вредностій редомъ

$$f(x)\ f(x_1)\ f(x_2)\ f(x_3) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot f(x_n) \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Образуюћи разлике првогъ члана $f(x)$ овога реда по образцу ${}^{n}\Delta\, v_m = v_{m+n} - \binom{n}{1} v_{m+(n-1)} + \binom{n}{2} v_{m+(n-2)} - \cdots$ $\cdots\cdot\cdot \pm v_m$ (§. 208.), добыямо

$$\Delta f(x) = (x) = f(x_1) - f(x)$$
$${}^{2}\Delta f(x) = f(x_2) - 2\, f(x_1) + f(x)$$
$${}^{3}\Delta f(x) = f(x_3) - 3\, f(x_2) + 3\, f(x_1) - f(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Изражавајући пакъ по образцу $v_\omega = v_m + \binom{\omega - 1}{1} \times$ $\times \Delta v_m + \cdots$ (§. 208.) све чланове првога реда $x, x_1, x_2,$ $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ съ првимъ чланомъ и нѣговимъ разликама, налазимо

$$x_1 = x + \Delta x$$
$$x_2 = x + 2\Delta x + {}^{2}\Delta x$$
$$x_3 = x + 3\Delta x + 3\,.\,{}^{2}\Delta x + {}^{3}\Delta x$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Найпосле ове вредности поставляюћи у предходеће изразе, слѣдує

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\begin{aligned}{}^{4}\Delta f(x) &= f(x + 2\Delta x + {}^{2}\Delta x) - 2 f(x + \Delta x) + f(x)\\ &= [f(x + 2\Delta x + {}^{2}\Delta x) - f(x + \Delta x)] - [f(x + \Delta x)\\ &\qquad - f(x)]\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}{}^{3}\Delta f(x) &= f(x + 3\Delta x + 3\,.\,{}^{2}\Delta x + {}^{3}\Delta x) - 3 f(x + 2\Delta x + {}^{2}\Delta x)\\ &\qquad + 3 f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= [f(x + 3\Delta x + 3\,.\,{}^{2}\Delta x + {}^{3}\Delta x) - 2f(x + 2\Delta x + {}^{2}\Delta x)\\ &\qquad + f(x + \Delta x) - {}^{2}\Delta f(x)\end{aligned}$$
$$\cdot\ ,$$

изъ чега видимо:

да одъ $f(x)$ добыямо нѣну прву разлику, ако у ньой место x поставимо $x + \Delta x$ и после одъ нове функціє прву одузмемо;

да одъ прве разлике можемо направити другу, ако у оной узмемо $x + \Delta x$ место x, а $\Delta x + {}^2\!\Delta x$ место Δx, и после одъ нове функціє прву разлику одузмемо;

да одъ друге разлике добыямо трећу, ако у оной метнемо $x + \Delta x$ за x, $\Delta x + {}^2\!\Delta x$ за Δx и ${}^2\!\Delta x + {}^3\!\Delta x$ за ${}^2\!\Delta x$, па после одъ нове функціє другу разлику одбіємо; и т. д.

Примера ради узмимо $f(x) = x^3$, за кою по §. 210. имамо

$$\Delta x^3 = 3\,x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta^2 x + \Delta^3 x.$$

Поступаюћи садъ по пређашнњимъ докученяма, слѣдує:

$$\begin{aligned}{}^2\!\Delta x^3 = [&3\,(x + \Delta x)^2 \,.\, (\Delta x + {}^2\!\Delta x) + 3\,(x + \Delta x)\,(\Delta x + {}^2\!\Delta x)^2 \\ &+ (\Delta x + {}^2\!\Delta x)^3] - \Delta x^3,\end{aligned}$$

а ако све назначене рачуне свршимо и после скратимо,

$$\begin{aligned}{}^2\!\Delta\, x^3 = {} & 6\,x\,\Delta^2 x + 6\,\Delta^3 x + 3\,x^2 \,.\, {}^2\!\Delta x + 12\,x\,\Delta x \,.\, {}^2\!\Delta x \\ & + 12\,\Delta^2 x \,.\, {}^2\!\Delta x + 3\,x \,.\, {}^2\!\Delta x + 6\,\Delta x \,.\, {}^2\!\Delta^2 x + {}^2\!\Delta^3 x.\end{aligned}$$

При сталной разлици Δx имали бы, поступаюћи истимъ начиномъ,

збогъ ${}^2\!\Delta\, x = 0$,

$$\begin{aligned}{}^2\!\Delta x^3 &= 3\,(x + \Delta x)^2 \,.\, \Delta x + 3\,(x + \Delta x) \,.\, \Delta^2 x + \Delta^3 x - \Delta x^3 \\ &= 6\,x\,\Delta^2 x + 6\,\Delta^3 x \quad \text{каогоъ у §. 211.}\end{aligned}$$

Ползуюћи се пакъ у томъ случаю само §. 210., было бы

$$\begin{aligned}{}^2\!\Delta^3 x &= 3\,(2x\,\Delta x + \Delta^2 x)\,\Delta x + 3\Delta x \,.\, \Delta^2 x + \Delta^3 x - \Delta x^3 \\ &= 6x\,\Delta^2 x + 6\,\Delta^3 x \quad \text{тако исто.}\end{aligned}$$

Но ову исту вредность добыли бы такођеръ и изъ горе нађенога израза за разне разлике броя x, поставляюћи ${}^2\!\Delta\, x = 0$.

в.) Разлике функцiя више пременљивы броєва.

§ 213.

Ако є $f(x, y)$ нека функцiя два међусобно независна пременљива броя x и y, онда є нѣна разлика збогъ еднодобне премене одъ x у $x + \Delta x$ а y у $y + \Delta y$, очевидно

$$\Delta f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y),$$

и мы ћемо одма видити, да се ова разлика, подобно разлици функцiя еднога само пременљивогъ броя, помоћу §. 11. такођеръ може развити у редъ по степенима оба вишка Δx и Δy; но найпре морамо iошъ приметити да се разлика $\Delta f(x, y)$ функцiє $f(x, y)$ зове **подпуна**: ако се у исто доба оба пременљива броя x и y меняю, а **почастна** кадгодъ се само еданъ одъ нъи меня. Да бы се притомъ одма видило, да ли є определѣна разлика $f(x, y)$ подпуна или почастна, и у последнѣмъ случаю по комъ пременљивомъ брою узета: то означуємо подпуну разлику символомъ $\Delta f(x, y)$, почастну по x са $\underset{x}{\Delta} f(x, y)$, а почастну по y са $\underset{y}{\Delta} f(x, y)$, тако да є

$$\Delta f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y),$$

$$\underset{x}{\Delta} f(x, y) = f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y),\ \text{а}$$

$$\underset{y}{\Delta} y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Подобно означуємо другу разлику одъ $f(x, y)$ подпуну съ $\overset{2}{\Delta} f(x, y)$, почастну оба пута по x са $\overset{2}{\underset{2x}{\Delta}} f(x, y)$, почастну оба пута по y са $\overset{2}{\underset{2y}{\Delta}} f x, y)$, найпосле почастну еданпутъ по x, а другипутъ по y са $\overset{2}{\underset{x,\,y}{\Delta}} f x, y)$.

§ 214.

Свака функцiя два пременљива броя x и y обштега є вида

$$f(x, y) = A\, x^a y^\alpha + B\, x^b y^\beta + C\, x^c y^\gamma + \ldots\ldots$$

Узимаюћи у таковой функціи $x+h$ место x, а $y+k$ место y, быва

$$\begin{aligned}
f(x+h,y+k) &= A(x+h)^{a}\cdot(y+k)^{\alpha}+B(x+h)^{b}\cdot(y+k)^{\beta}\\
&\quad +C(x+h)^{c}\cdot(y+k)^{\gamma}+\ldots\ldots\\
&= A\left[x^{a}+\binom{a}{1}x^{a-1}h+\binom{a}{2}x^{a-2}h^{2}+\ldots\right]\cdot\left[y^{\alpha}+\binom{\alpha}{1}y^{\alpha-1}k\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+\binom{\alpha}{2}y^{\alpha-2}k^{2}+\ldots\right]\\
&\quad +B\left[x^{b}+\binom{b}{1}x^{b-1}h+\binom{b}{2}x^{b-2}h^{2}+\ldots\right]\cdot\left[y^{\beta}+\binom{\beta}{1}y^{\beta-1}k\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+\binom{\beta}{2}y^{\beta-2}k^{2}+\ldots\right]\\
&\quad +C\left[x^{c}+\binom{c}{1}x^{c-1}h+\binom{c}{2}x^{c-2}h^{2}+\ldots\right]\cdot\left[y^{\gamma}+\binom{\gamma}{1}y^{\gamma-1}k\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+\binom{\gamma}{2}y^{\gamma-2}k^{2}+\ldots\right]\\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= Ax^{a}y^{\alpha}+Bx^{b}y^{\beta}+Cx^{c}y^{\gamma}+\ldots\ldots\ldots\\
&\quad +\left\{\left[A\binom{\alpha}{2}x^{a-1}y^{\alpha}+B\binom{b}{1}x^{b-1}y^{\beta}+\ldots\right]h\right.\\
&\qquad \left.+\left[A\binom{\alpha}{1}x^{a}y^{\alpha-1}+B\binom{\beta}{1}x^{b}y^{\beta-1}+C\binom{\gamma}{1}x^{c}y^{\gamma-1}\ldots\right]k\right\}\\
&\quad +\left\{\left[A\binom{\alpha}{2}x^{a-2}y^{\alpha}+B\binom{b}{2}x^{b-2}y^{\beta}+\ldots\ldots\right]h^{2}\right.\\
&\qquad +\left[A\binom{a}{1}\binom{\alpha}{1}x^{a-1}y^{\alpha-1}+B\binom{b}{1}\binom{\beta}{1}x^{b-1}x^{\beta-1}+\ldots\right]hk\\
&\qquad\qquad \left.+\left[A\binom{\alpha}{2}x^{a}y^{\alpha-2}B\binom{\beta}{2}x^{b}y^{\beta-2}+\ldots\ldots\right]k^{2}\right\}\\
&\quad +\left\{\left[A\binom{a}{3}x^{a-3}y^{\alpha}+B\binom{b}{3}x^{b-3}y^{\beta}+\ldots\right]h^{3}\right.\\
&\qquad +\left[A\binom{a}{2}\binom{\alpha}{1}x^{a-2}y^{\alpha-1}+B\binom{b}{2}\binom{\beta}{1}x^{b-2}y^{\beta-1}+\ldots\right]h^{2}h\\
&\qquad\quad +\left[A\binom{a}{1}\binom{\alpha}{2}x^{a-1}y^{\alpha-2}+B\binom{b}{1}\binom{\beta}{2}x^{b-1}y^{\beta-2}+\ldots\right]hk^{2}\\
&\qquad\qquad \left.+\left[A\binom{\alpha}{3}x^{a}y^{\alpha-3}+B\binom{\beta}{3}x^{b}y^{\beta-3}+\ldots\ldots\right]k^{3}\right\}\\
&\quad +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$= f(x,y) + (Mh + Nk) + (Ph^2 + Qhk + Rk^2) + (Sh^3 + Th^2k + Uhk^2 + Vh^3) + \cdots\cdots\cdots\cdot$$

гди $M, N, P, \ldots.$ представляю неке, изъ преһашньи израза увиһавне функціє одъ x и y, коє h и k више несадрже.

Одузимаюһи садъ одъ ове єдначине функціє $f(x,y)$, слѣдує $f(x+h, y+k) - f(x, y)$,

$$\Delta f(x,y) = (M + N) + (Ph^2 + Qhk + Rk^2) + \\ + (Sh^3 + Th^2k + Uhk^2 + Vk^3) + \cdots\cdots;$$

одакле видимо, да се разлика сваке функціє два пременьива броя доиста може изразити као редъ по степенима оба вишка h и k, пременьивы броєва x и y.

§ 215.

По оба ова §§. добыямо дакле прву разлику неке функціє $f(x, y)$, ако у истой узмемо уєдно $x + \Delta x$ место x, а $y + \Delta y$ место y, и после одъ добывене нове функціє $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ одузмемо исту функцію $f(x, y)$.

Функцію $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ можемо добыти и на тай начинъ, да найпре у $f(x,y)$ само x пременимо, па после у новой функціи $f(x + \Delta x, y)$ узмемо $y + \Delta y$ место y, или найпре само y пременимо, па онда у новой функціи $f(x, y + \Delta y)$ метнемо $x + \Delta x$ место x.

Выше пакъ разлике такове функціє, о коима, као што се по себи разуме, само онда може быти говора, кадъ пременьиви броєви x и y примаю застопце више вредностій: налазимо найудобніє на показаный у §. 212. начинъ за функціє єдногъ пременьивогъ броя. Тимъ начиномъ добыямо збогъ

$$\underset{x}{\Delta} f(x,y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \underset{y}{\Delta} f(x,y) = f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

и $\Delta f(x,y) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y)$,

1.) За неєднаке разлике броєва x и y: почастна $\overset{2}{\Delta}$ оба пута по x

$$\underset{2x}{\overset{2}{\Delta}} f(x,y) = f(x + 2\Delta x + \overset{2}{\Delta} x, y) - 2f(x + \Delta x, y) + f(x,y),$$

почастна ${}^{2}\Delta$ оба пута по y

$$\underset{2y}{{}^{2}\Delta} f(x,y) = f(x, y + 2\Delta y + {}^{2}\Delta y) - 2f(x, y + \Delta y) + f(x,y)$$

почастна ${}^{2}\Delta$ єданпутъ по x а другипутъ по y

$$\underset{x,\,y}{{}^{2}\Delta} f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x,y),$$

найпосле подпуна

$${}^{2}\Delta f(x,y) = f(x + 2\Delta x + {}^{2}\Delta x, y + 2\Delta y + {}^{2}\Delta y) - 2f(x + \Delta y, y + \Delta y) + f(x, y);$$

2.) за єднаке разлике пакъ пременльивы броєва:
почастна ${}^{2}\Delta$ оба пута по x

$$\underset{2x}{{}^{2}\Delta} f(x,y) = f(x + 2\Delta x, y) - 2f(x + \Delta x, y) + f(x,y),$$

почастна ${}^{2}\Delta$ оба пута по y

$$\underset{2y}{{}^{2}\Delta} f(x,y) = f(x, y + 2\Delta y) - 2f(x, y + \Delta y) + f(x,y),$$

почастна ${}^{2}\Delta$ єданпутъ по x, другипутъ пакъ по y

$$\underset{x,\,y}{{}^{2}\Delta} f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x,y),$$

найпосле подпуна

$${}^{2}\Delta f(x,y) = f(x + 2\Delta x, y + 2\Delta y) - 2f(x + \Delta x, y + \Delta y) + f(x,y).$$

§ 216.

1.) За выше почастне разлике неке функціє $f(x,y)$ имамо іошъ приметити, да є сасвимъ свеєдно да ли ћемо при $(m+n)$. разлици mпута по x а nпута по y, дотичну функцію различити найпре по x па онда по y, или пакъ найпре по y па после по x, т. є. да є

$$\underset{mx,\,ny}{{}^{m+n}\Delta} f(x,y) = \underset{ny,\,mx}{{}^{m+n}\Delta} f(x,y).$$

2.) Што се пакъ тиче подпуны выши разлика, то се исте, каошто ћемо одма видити, могу определити и съ почастнимъ разликама.

α.) По предходећемъ є §. подпуна прва разлика функціє $V=f(x,y)$

$$\Delta V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y),$$

почастна по x, $\underset{x}{\Delta} f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$,

почастна по y, $\underset{y}{\Delta} V = f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$, найпосле

почастна друга разлика єданпутъ по x, а другипутъ по y

$$\overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,\ y).$$

Сабиранѣмъ ове три почастне разлике добыямо $\underset{x}{\Delta} V + \underset{y}{\Delta} V + \overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$; дакле є подпуна разлика функціє V

$$\Delta V = \underset{x}{\Delta} V + \underset{y}{\Delta} V + \overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V \quad . \ . \ . \ . \ . \ (u.$$

Подобно налазимо за $W=f(x,\ y,\ z)$

$$\Delta W = \Big(\underset{x}{\Delta} W + \underset{y}{\Delta} W + \underset{z}{\Delta} W\Big) + \Big(\overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} W + \overset{2}{\underset{x,z}{\Delta}} W + \overset{2}{\underset{y,z}{\Delta}} W\Big) + \overset{3}{\underset{x,y,z}{\Delta}} W \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (v.$$

β.) По §. є 207. друга подпуна разлика функціє $V=f(x\,,\ y)$,

$\overset{2}{\Delta} V = \Delta(\Delta V)$; дакле обзиромъ на пређашньій изразъ за ΔV

$$\overset{2}{\Delta} V = \Delta\Big(\underset{x}{\Delta} V + \underset{y}{\Delta} V + \overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}}\Big)$$

$$= \Delta\Big(\underset{x}{\Delta} V\Big) + \Delta\Big(\underset{y}{\Delta} V\Big) + \Delta\Big(\overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V\Big)$$

$$= \Big(\overset{2}{\underset{2x}{\Delta}} V + \overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V + \overset{3}{\underset{2x,y}{\Delta}}\Big) + \Big(\overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V + \overset{2}{\underset{2y}{\Delta}} V + \overset{3}{\underset{x,2y}{\Delta}} V\Big) +$$

$$+ \Big(\overset{3}{\underset{2x,y}{\Delta}} V + \overset{3}{\underset{x,2y}{\Delta}} V + \overset{4}{\underset{2x,2y}{\Delta}} V\Big),$$ или све скраћено

$$\overset{2}{\Delta} V = \Big(\overset{2}{\underset{2x}{\Delta}} V + 2\,\overset{2}{\underset{x,y}{\Delta}} V + \overset{2}{\underset{2y}{\Delta}} V\Big) + \Big(\overset{3}{\underset{2x,y}{\Delta}} V + \overset{3}{\underset{x,2y}{\Delta}} V\Big) + \overset{4}{\underset{2x,2y}{\Delta}} V \quad . \ . \ . \ (w.$$

Ово бытће безъ сумнѣ довольно, да бы по томе умели изнаћи и іошъ выше подпуне разлике функція два и више премењљивы броєва, помоћу нъиовы почастны разлика.

§. 217.

Осимъ свега дояко показанога валя за различенѣ таковы функція іошъ слѣдуюће приметити:

1.) Ако є $V = f(x, y, z, \ldots.) = a_0 \pm a_1 x \pm a_2 y \pm a_3 z \pm \ldots$ бытће

$$\begin{aligned} \Delta V &= a_0 \pm a_1 (x + \Delta x) \pm a_2 (y + \Delta y) \pm a_3 (z + \Delta z) \\ &\quad \pm \ldots - V. \\ &= (a_0 \pm a_1 x \pm a_2 y \pm a_3 z \pm \ldots) + (\pm a_1 \Delta x \pm a_2 \Delta y \\ &\quad \pm a^3 \Delta z \pm \ldots\ldots) - V \\ &= \pm a_1 \Delta x \pm a_2 \Delta y \pm a_3 \Delta z \pm \qquad \ldots\ldots \text{(I.} \end{aligned}$$

то ће рећи: **Разлика премењљивогъ каквогъ алгебрайскогъ сбира равна є алгебрайскомъ сбиру разлика' премењљивы чланова.**

2.) Ако є $V = f(x, y) = A xy$

$$\begin{aligned} \Delta V &= A (x + \Delta x) . (y + \Delta y) - V \\ &= A xy + A (y \Delta x + x \Delta y + \Delta x \,.\, \Delta y) - V, \end{aligned}$$

т. є. $\Delta A xy = A (y \Delta x + x \Delta y + \Delta x . \Delta y) \quad \ldots\ldots \text{(II.}$

Найпосле

3.) Ако є $V = f(x, y) = \frac{x}{y}$, добыямо

$$\Delta V = \frac{x + \Delta y}{y + \Delta x} - \frac{x}{y} = \frac{y \Delta x + x \Delta y}{y (y + \Delta y)},\ \text{т. є.}$$

$$\Delta = \frac{x}{y} = \frac{y \Delta x - x \Delta y}{y^2 + y \Delta y} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III.}$$

§ 218.

За упражнѣнѣ завршимо овай предметъ съ различенѣмъ неколико функція више премењљивы броєва.

1.) $V = \frac{x^2}{y}$.

На непосредный начинъ добыямо обзиромъ на докученя прећашнѣгъ §. и на §. 210.

$$\Delta V = \frac{y \Delta^2 x - x^2 \Delta y}{y (y + \Delta y)} = \frac{y (2x \Delta x + \Delta^2 x) - x^2 . \Delta y}{y (y + \Delta y)}$$

$$= \frac{2xy\Delta x + y\Delta^2 x - x^2 \Delta y}{y\,(y + \Delta y)} = \frac{2xy\,\Delta x + y\,\Delta^2 x - x^2 . \Delta y}{y^2 + y\,\Delta x}$$

$${}^{2}\Delta V = \frac{\begin{Bmatrix} y\,(y + \Delta y) . \Delta\,(2xy\Delta x + y\Delta^2 x - x^2 . \Delta y) - (2xy\Delta x \\ + y\Delta^2 x - x^2 \Delta y) \;.\; \Delta\,(y^2 + y\Delta y) \end{Bmatrix}}{y^2\,(y + \Delta y)^2 + y\,(y + \Delta y) . \Delta\,(y^2 + y\Delta y)}$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} y\,(y + \Delta y)(2y\,\Delta^2 x + 2x\,\Delta x\,\Delta y + 2\,\Delta^2 x\,\Delta y + \Delta^2 x \Delta y \\ - 2x\,\Delta x\,\Delta y - \Delta^2 x\,\Delta y) - (2xy\,\Delta x + y\,\Delta^2 x \\ - x^2\,\Delta y)(2y\,\Delta y + 2\,\Delta^2 y) \end{Bmatrix}}{y^2\,(y + \Delta y)^2 + y\,(y + \Delta y)\,(2y\,\Delta y + \Delta^2 y)}$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} y\,(y + \Delta y)\,(2\,y\,\Delta^2 x + 2\,\Delta^2 x\,\Delta y) - (2xy\Delta x + y\,\Delta^2 x \\ - x^2 . \Delta x) . 2\,(y + \Delta y)\,\Delta y \end{Bmatrix}}{y^2\,(y + \Delta y)^2 + y\,(y + \Delta y) . 2\,(y + \Delta y)\,\Delta y}$$

$$= \frac{y\,(2y\Delta^2 x + 2\,\Delta^2 x\Delta y) - 2\,(2xy\,\Delta x + y\,\Delta^2 x - x^2 . \Delta y)\,\Delta y}{y^2\,(y + \Delta y) + 2y\,(y + \Delta y)\,\Delta y}$$

$$= \frac{2y^2\Delta^2 x + 2y\,\Delta^2 x\Delta y - 4xy\,\Delta x\,\Delta y - 2y\,\Delta^2 x\Delta y + 2x^2\,\Delta^2 y}{(y + \Delta y)\,(y^2 + 2y\,\Delta y)}$$

$= \frac{2y^2\,\Delta^2 x - 4xy\,\Delta x\,\Delta y + 2x^2\,\Delta^2 y}{y\,(+ \Delta y)\,(y + 2\,\Delta y)}$, и томе подобно и остале выше разлике.

Помоћу почастны разлика пакъ слѣдуе обзиромъ на §§. 216. и 210. Збогъ $\underset{x}{\Delta} V = \frac{2x\,\Delta x + \Delta^2 x}{y}$, $\underset{y}{\Delta} V = \frac{x^2\,\Delta y}{y\,(y + \Delta y)}$ и $\underset{x,\,y}{\overset{2}{\Delta}} V = -\frac{2x\,\Delta x\,\Delta y + \Delta^2 x\,\Delta y}{y\,(y + \Delta y)}$:

$$\Delta V = \frac{2x\,\Delta x + \Delta^2 x}{y} - \frac{x^2\,\Delta y}{y\,(y + \Delta y)} - \frac{2x\,\Delta x\,\Delta y + \Delta^2 x\,\Delta y}{y\,(y + \Delta y)}$$

или ако сабиранѣ свршимо

$$\Delta V = \frac{2xy\,\Delta x + y\,\Delta^2 x - x^2 . \Delta y}{y\,(y + \Delta y)} = \frac{2xy\,\Delta x + y\,\Delta^2 x - x^2 . \Delta y}{y^2 + y\,\Delta y}$$

као и горе, но очевидно са знатно више посла.

Збогъ

$$\underset{2x}{\overset{2}{\Delta}} V = \frac{2\,\Delta^2 x}{y},$$

$$\underset{x,\,y}{\overset{2}{\Delta}} V = -\frac{2x\,\Delta x\,\Delta y + \Delta^2 x . \Delta x}{y^2 + y\,\Delta y} = -\frac{2x\,\Delta x\,\Delta y + \Delta^2 x\,\Delta y}{y\,(y + \Delta y)},$$

$$ {}^{2}\underset{2y}{\Delta}\, V = \frac{2^2 x \cdot \Delta^2 y}{y^3 + 3^2 y \Delta y + 2y \Delta^2 y} = \frac{2^2 x \cdot \Delta^2 y}{y(y+\Delta y)(y+2\Delta y)}, $$

$$ {}^{3}\underset{2x,\, y}{\Delta}\, V = -\frac{2\Delta^2 x \cdot \Delta y}{y^2 + y\,\Delta y} = -\frac{2\Delta^2 x \cdot \Delta y}{y(y+\Delta y)}, $$

$$ {}^{3}\underset{x,\, 2y}{\Delta}\, V = \frac{4x\,\Delta x\,\Delta^2 y + 2\Delta^2 x \cdot \Delta^2 y}{y^3 + 3y^2 \cdot \Delta y + 2y\,\Delta^2 y} $$

$$ = \frac{4x\,\Delta x\,\Delta^2 y + 2\Delta^2 x \cdot \Delta^2 y}{y\,(y+\Delta y)\,(y+2\Delta y)} \quad \text{и} $$

$$ {}^{4}\underset{2x,\, 2y}{\Delta}\, V = \frac{4\,\Delta^2 x \cdot \Delta^2 y}{y^3 + 3y^2 \cdot \Delta y + 2y\,\Delta^2 y} = \frac{4\,\Delta^2 x \cdot \Delta^2 y}{y\,(y+\Delta y)\,(y+2\,\Delta y)}: $$

$$ {}^{2}\Delta V = \frac{2\,\Delta^2 x}{y} - 2\,\frac{2x\Delta x\Delta y + \Delta^2 x \cdot \Delta y}{y\,(y+\Delta y)} $$

$$ + \frac{2x^2 \cdot \Delta^2 y}{y\,(y+\Delta y)\,(y+2\Delta y)} - 2\,\frac{2\Delta^2 x \cdot \Delta y}{y\,(y+\Delta y)} $$

$$ + 2\,\frac{4x\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta^2 x \cdot \Delta^2 y}{y\,(y+\Delta y)\,(y+2\Delta y)} + \frac{4\Delta^2 x \cdot \Delta^2 y}{y(y\Delta + y)\,(y+2\Delta y)}, $$

или ако сабиранѣ свршимо

$$ {}^{2}\Delta V = \frac{2y^2 \cdot \Delta^2 x - 4\,xy\,\Delta x\,\Delta y + 2x^2 \cdot \Delta^2 y}{y\,(y+\Delta y)\,(y+2\Delta y)} $$ као и пре, али такођеръ съ више посла.

2.) $V = \sin\varphi\ \cos\varphi$

Обзиромъ на §§. 217. и 211. имамо

$$ \Delta V = \cos\varphi \cdot \Delta \sin\varphi + \sin\varphi \cdot \Delta\cos\varphi + \Delta\sin\varphi \cdot \Delta\cos\varphi $$

$$ = \cos\varphi \cdot 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right) - \sin\varphi \,.\, 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\left(\varphi \right. $$

$$ \left. + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right) - 4\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right) $$

$$ = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\cos\varphi \cdot \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right) - \sin\varphi \cdot \sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\right. $$

$$ \left. - 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right) \cdot \cos\left(\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\right] $$

$$ = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\cos\left(2\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right) - \sin\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\left(2\varphi + \Delta\varphi\right)\right]. $$

II. Сбирови функція.

а.) Изясненя и обшта сматраня.

§ 219.

Определьиванѣ функція изъ познате ньиове какве разлике, посао є такозваногъ **сбирногъ рачуна**, кои є дакле противный рачунъ пређашнѣмъ различномъ рачуну.

Тай посао зове се **сабиранѣ** дате — различне — функціє, а вопросна — основна — функція притомъ **сбиръ** исте функціє.

За означенѣ сабираня дате какве функціє употреблява се знакъ Σ, кои се изговара **сбиръ**. Тако н. п. ако є $\Delta f(x)=z$, пишемо $\Sigma z=f(x)$, а изговарамо сбиръ одъ $z=$ функціи одъ x, или сбиръ одъ z функція одъ x.

Сбирове функція, при коима є $\Delta x=1$, означуємо за разлику одъ сбирова за другу неку Δx, са Σ_1.

Изъ понятія сабираня разуме се напослѣдку по себи: да се знаци Σ и Δ узаямно потиру кадъ стоє непосредно єданъ до другога, да є т. є. $\Sigma(\Delta x)=\Delta(\Sigma x)=x$.

§ 220.

По роду дотичны различны функція разликуємо разне сбирове. Ако є т. є. дата различна функція првогъ, другогъ, трећегъ, и т. д., уобште n реда: онда и вопросный сбиръ бытће односно првогъ, другогъ, трећегъ, и т. д., уобште n реда.

Выше сбирове, т. є. сбирове одъ другога далѣ, означуємо онако исто као и выше разлике. Дакле за другій сбиръ пишемо ${}^2\Sigma$, за трећій ${}^3\Sigma$, уобште за n. сбиръ ${}^n\Sigma$. Ове выше сбирове добыямо на онай истый начинъ, коимъ смо добыли выше разлике; каогодъ што смо т. є. до выши разлика дошли повторенимъ различенѣмъ, тако ћемо исто до выши сбирова доћи повторенимъ сабиранѣмъ.

§ 221.

Видили смо у §. 209. да є, означуюћи съ A некій по x сталный брой, $\Delta[f(x)+A]=\Delta f(x)$.

Ако є дакле функція $f(x)$ разлика функціє $\varphi(x)$, т. є. ако є $\Delta\varphi(x)=f(x)$: то никако несмемо рећи, да є обратно $\varphi(x)$ равна само $\Sigma f(x)$, него морамо овоме сбиру свагда іошъ додати некій сталный брой C, т. є. морамо ставити

$$\varphi(x)=\Sigma f(x)+C,$$

єръ ако є у $\varphi(x)$ быо какавъ сталанъ брой, то є истый изъ познаты узрока (§§. 209. и 211.) при нѣномъ различеню изчезао, а мы, зато што $\varphi(x)$ непознаємо и топрвъ определюємо, неможемо известно знати єли такавъ брой у ньой стаяо или ніє. То се текъ после особито испытати мора.

При томе назива се $\Sigma f(x)$ **особитый**, а $\Sigma f(x)+C$ **подпуный сбиръ** различне функціє $f(x)$.

Што се тиче броя C, то онъ у смотреню броя x може быти или **безусловно** сталанъ или **условно** сталанъ. Прво є, ако x никако несадржи, друго пакъ ако є такова функція одъ x, коя є за $x+\Delta x$ оне исте вредности као за просто x, каошто бы быле н. п. функціє $\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}$, $\cos\frac{2\pi x}{\Delta x}$, и друге подобне.

По свему овоме добыямо дакле подпуный сбиръ неке функціє $f(x)$, ако нѣномъ особитомъ сбиру $\Sigma f(x)$ іошъ додамо некій, међутимъ іошъ непознатый безусловно или условно сталный брой C. Како се пакъ овай брой дознає видитћемо позднiє.

§ 222.

Ако определимо разлику функція $X_1=f(x)+A$, $X_2=f(x)+B$, $X_3=f(x)+C$, ... $X_n=f(x)+P$, при коима $f(x)$ представля єдну исту функцію, $A, B, C, \ldots P$ пакъ разне по x безусловно или условно сталне броеве, добыямо, збогъ $\Delta A = \Delta B = \Delta C = \ldots = \Delta P = 0$:

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = \Delta X_3 = \ldots = \Delta X_n = \Delta f(x) = \varphi(x).$$

Обратно дакле мора быти **подпуный** $\Sigma \varphi(x)$ єданпутъ $= X_1$, другипутъ $= X_2$, и т. д. $= X_3 =, \ldots = X_n$. Уобште тай сбиръ може быти свака функція $F(x)$ тога свойства, да є $\Delta F(x)$, т. є. $F(x + \Delta x) - F(x) = \varphi(x)$.

Изъ тога видимо:

1.) Да **подпуный** сбиръ єдне исте функціє може имати више и безбройно млого вредностій, а не као нѣна разлика само єдну (§. 209.), и зато

2.) Да подпуни сбирови две функціє $f(x)$ и $\varphi(x)$, кое су за сваку вредность броя x єднаке, **могу** быти, али **немораю** быти єднаки, и да се у случаю гди су неєднаки, само некимъ сталнимъ броємъ међу собомъ разликовати могу. Найпосле

3.) Да **особити** сбирови сваке такове две функціє свагда мораю быти єднаки.

б.) Сабиранѣ функція єдногъ и више пременльивы броєва.

§ 223.

1.) По §. 209. имамо $\Delta C = 0$, обратно дакле мора быти

$$\Sigma 0 = C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I.$$

то ће рећи **сбиръ є нулле свагда некій сталанъ брой.**

2.) $\Delta [A \varphi(x) + C] = \Delta A \varphi(x) = A \Delta \varphi(x) = A f(x)$; обратно дакле мора быти

$$\Sigma A f(x) = A \Sigma f(x) + C \quad \ldots\ldots \quad (II.$$

3.) Збогъ $\Delta [A_1 \varphi'(x) + A_2 \varphi''(x) + A_3 \varphi'''(x) + \ldots] = A_1 \Delta \varphi'(x) + A_2 \Delta \varphi''(x) + A_3 \Delta \varphi'''(x) + \ldots = A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + A_3 f'''(x) + \ldots$, мора быти обратно

$$\Sigma [A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + A_3 f'''(x) + \ldots] = A_1 \Sigma f'(x) + A_2 \Sigma f''(x) + A_3 \Sigma f'''(x) + \ldots + C \quad \ldots\ldots \quad (III.$$

4.) Збогъ $\Delta[f(x) \cdot \varphi(x)] = \varphi(x) \Delta f(x) + f(x) \Delta \varphi(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta \varphi(x)$ мора быти обратно

$$f(x) \cdot \varphi(x) = \Sigma[\varphi(x) \Delta f(x)] + \Sigma[f(x) \Delta\varphi(x) + \Delta f(x) \Delta \varphi(x)],$$

а одтуда

$$\Sigma[\varphi(x) \Delta f(x)] = f(x) \varphi(x) - \Sigma[f(x) \Delta\varphi(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta\varphi(x)],$$

или ако поставимо $\Delta f(x) = \psi(x)$. дакле $f(x) = \Sigma\psi(x)$:

$$\Sigma[\varphi(x) \psi(x)] = \varphi(x) \Sigma\psi(x) - \Sigma[\Delta\varphi(x) \Sigma\psi(x) + \psi(x) \Delta\varphi(x)] + C \quad \ldots\ldots (\mathrm{IV} \cdot$$

§ 224.

Да бы были у станю изнаћи сбиръ функціє вида $a_0 x^\alpha + a_1 x^\beta + a_2 x^\gamma \ldots\ldots$, морамо найпре извидити чему є раванъ Σx^m.

По §. 210. имамо

$$\Delta x^n = n x^{n-2} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \cdot \Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-2} + + \ldots\ldots\ldots$$

Узимаюћи овде при предпоставленю да є Δx стална, а брой n цео и положанъ, лево и десно сбирове, добыямо обзиромъ на предходећій §.

$$x^n = n\Delta x \, \Sigma x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 x \cdot \Sigma x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 x \times \times \Sigma x^{n-3} + \ldots + \Delta^n x \, \Sigma 1,$$

или ако метнемо $n = m + 1$ и после Σx^m определимо:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{m}{2} \Delta x \cdot \Sigma x^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^2 x \cdot \Sigma x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta^3 x \cdot \Sigma x^{m-3} - \ldots\ldots - \frac{\Delta^m x}{m+1} \Sigma 1 \quad \ldots (\alpha.$$

Найпосле поставляюћи у овомъ образцу редомъ $m = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ слѣдує

$$\Sigma 1 = \Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x} \text{ *)}$$

---

*) До овога резултата можемо доћи іошъ и на слѣдуюћій начинъ. Очевидно є $\Delta x = \Delta x . 1$, дакле ако лево и десно узмемо сбирове: $x = \Delta x \, \Sigma 1$, и одтудъ $\Sigma 1 = \frac{x}{\Delta x}$ као горе. Подобно могли бы изнаћи и Σx, Σx^2, и т. д.

$$\Sigma x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\varDelta x} - \frac{1}{2} \varDelta x \, \Sigma 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\varDelta x} - \frac{1}{2} x$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{\varDelta x} - \varDelta x \, \Sigma x - \frac{1}{3} \varDelta^2 x \, . \, \Sigma 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{\varDelta x}$$
$$- \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2 \, . \, 3} x \, \varDelta x$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{\varDelta x} - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2 \, . \, 2} x^2 \, . \, \varDelta x$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{\varDelta x} - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \varDelta x - \frac{1}{5 \, . \, 6} x \, \varDelta^3 x$$

. . . .

Како бы сада нашли $\Sigma (a_0 x^{\alpha} + a_1 x^{\beta} + a_2 x^{\gamma} + \ldots)$, увиђа се по себи.

§ 225.

Да бы у сачинительима предходећи израза, па и у ономе одъ Σx^m увиђавнію правилность произвели, то поставимо

$$\Sigma x^m = a x^{m+1} + a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots,$$

узмимо лево и десно разлике, и уредимо десну часть после опетъ по x. Бытће

$$x^m = a(m+1) \varDelta x + \left. \begin{matrix} a \binom{m+1}{2} \varDelta^2 x \\ a_0 \binom{m}{1} \cdot \varDelta x \end{matrix} \right| x^{m-1} + \left. \begin{matrix} a \binom{m+1}{3} \varDelta^3 x \\ a_0 \binom{m}{2} \varDelta^2 x \\ a_1 \binom{m-1}{1} \varDelta x \end{matrix} \right| x^{m-2} +$$

$$+ \left. \begin{matrix} a \binom{m+1}{4} \varDelta^4 x \\ a_0 \binom{m}{3} \varDelta^3 x \\ a_1 \binom{m-1}{2} \varDelta^2 x \\ a_2 \binom{m-2}{1} \varDelta x \end{matrix} \right| x^{m-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

и одтудъ по правилу сачинителя

$$a(m+1) \varDelta x = 1 \, ,$$

а остали сачинительи десне части свакій $= 0$.

Изъ тій єдначина' сачинителя подає се првый сачинитель

$$a=\frac{1}{(m+1)\,\Delta x},$$

а свакій другій посредствомъ овогъ првогъ тако израженъ, да ако првы 12 сачинителя определимо и ньиове вредности после у Σx^m поставимо, овай сбиръ постає

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2\,.\,3}\cdot\frac{1}{2}\binom{m}{1}\Delta x\,.\,x^{m-1}$$
$$-\frac{1}{6\,.\,5}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}\Delta^3x\,.\,x^{m-3}+\frac{1}{6\,.\,7}\cdot\frac{1}{6}\binom{m}{5}\Delta^5x\,.\,x^{m-5}$$
$$-\frac{3}{10.9}\cdot\frac{1}{8}\binom{m}{7}\Delta^7x\,.\,x^{m-7}+\frac{5}{6.11}\cdot\frac{1}{10}\binom{m}{9}\Delta^9x\,.\,x^{m-9}$$
$$-\frac{691}{210.13}\cdot\frac{1}{12}\binom{m}{11}\Delta^{11}x\,.\,x^{m-11}+\frac{35}{2\,.\,15}\cdot\frac{1}{14}\binom{m}{13}\Delta^{13}x\,.\,x^{m-13}$$
$$-\frac{3617}{30.17}\cdot\frac{1}{16}\binom{m}{15}\Delta^{15}x\,.\,x^{m-15}+\frac{43867}{42\,.\,19}\cdot\frac{1}{18}\binom{m}{17}\Delta^{17}x\,.\,x^{m-17}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

изразъ, кои, чимъ заменемо неправилне бройне сачинителѣ редомъ съ $B_1, B_3, B_5, \ldots\ldots$, добыя слѣдуюћій сасвимъ правилный видъ:

$$\Sigma x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}-\frac{1}{2}x^m$$
$$+B_1\binom{m}{1}\frac{\Delta x}{2}x^{m-1}-B_3\binom{m}{3}\frac{\Delta^3x}{4}x^{m-3}+B_5\binom{m}{5}\frac{\Delta^5x}{6}x^{m-5}$$
$$-B_7\binom{m}{7}\frac{\Delta^7x}{8}x^{m-7}-B_9\binom{m}{9}\frac{\Delta^9x}{10}x^{m-9}-B_{11}\binom{m}{11}\frac{\Delta^{11}x}{12}x^{m-11}$$
$$+B_{13}\binom{m}{13}\frac{\Delta^{13}x}{14}x^{m-13}+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(\beta.$$

Ови сачинительи $B_1, B_3, B_5, \ldots$ зову се **Бернулиеви броеви**, єръ є Яковъ Бернулли (Bernoulli) првый на ньи наишао при сабираню реда

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots$$

§ 226.

Ако у овомъ образцу β) узмемо лево и десно разлику, добыямо

$$x^{m}=\frac{1}{(m+1)\Delta x}\left[\binom{m+1}{1}x^{m}.\Delta x+\binom{m+1}{2}x^{m-1}.\Delta^{2}x+\ldots\right.$$
$$\left.+\Delta^{m+1}x\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\binom{m}{1}x^{m-1}.\Delta x+\binom{m}{2}x^{m-2}.\Delta^{2}x+\ldots.+\Delta^{m}x\right]$$
$$+B_{1}\binom{m}{1}\frac{\Delta x}{2}\left[\binom{m-1}{1}x^{m-2}.\Delta x+\binom{m-1}{2}x^{m-3}.\Delta^{3}x\right.$$
$$\left.+\ldots+\Delta^{m-1}x\right]$$
$$-B_{3}\binom{m}{3}\frac{\Delta x^{3}}{4}\left[\binom{m-3}{1}x^{m-4}.\Delta x+\binom{m-3}{2}x^{m-5}.\Delta^{2}x\right.$$
$$\left.+\ldots+\Delta^{m-3}x\right]$$
$$+B_{5}\binom{m}{5}\frac{\Delta x^{5}}{6}\left[\binom{m-5}{1}x^{m-6}.\Delta x+\binom{m-5}{2}x^{m-7}.\Delta^{2}x\right.$$
$$\left.\Delta^{m-5}x\right)$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Поставляюћи пакъ у овомъ изразу, кои постои за сваку вредность одъ x, $x=0$, слѣдуе єдначина

$$0=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\binom{m}{1}B_{1}-\frac{1}{4}\binom{m}{3}B_{3}+\frac{1}{6}\binom{m}{5}B_{5}-\ldots.$$

а изъ те, узимаюћи m редомъ $=2, 4, 6, 8, \ldots,$ єдначине

$$0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+B_{1}$$
$$0=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\binom{4}{1}B_{1}-B_{3}$$
$$0=\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\binom{6}{1}B_{1}-\frac{1}{4}\binom{6}{3}B_{3}+B_{5}$$
$$0=\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\binom{8}{1}B_{1}-\frac{1}{4}\binom{8}{3}B_{3}+\frac{1}{6}\binom{8}{5}B_{5}-B_{7}$$

. . . .

изъ кои се ясно види законъ, по комъ постаю Бернулиеви броеви єданъ изъ другога.

Съ овимъ єдначинама добыямо

$B_{1}=0{\cdot}1666666666666\ldots\ldots$

$B_{3}=0{\cdot}0333333333333\ldots\ldots$

$B_{5}=0{\cdot}0238095238095\ldots\ldots$

$B_{7}=0{\cdot}0333333333333\ldots\ldots$

$B_{9}=0{\cdot}0757575757575\ldots\ldots$

. . . .

Бернулиеви броеви, колико є мени познато, израчунѣни су до сада до заключно 31. Прві 15 определіо є Айлеръ (Euler), а слѣдуюћи 16 Роте (Rothe).

§ 227.

Све што є дояко показано за сбирове функція єдногъ променльивогъ броя, може се лако разпрострети и на сбирове функція два и више променльивы броева. Тога ради показат'ћемо сада само іошъ найнуждніє о вышимъ сбировима, па ћемо после, колико ради упражненя толико и за доцнію потребу определити сбирове неколико найобичніи функція.

§ 228.

Казали смо већъ у §. 220., да выше сбирове добыямо повторенимъ сабиранѣмъ, то ће рећи сабиранѣмъ већъ изнађены нижи сбирова. Ако є т. є. $V = f(x)$, онда є обзиромъ на докученя предход ћи §§-а $\Sigma V + C$ **првый**, $\Sigma(\Sigma V + C_1) = {}^2\Sigma V + C_1 \Sigma 1 + C_2$ **другій**, $\Sigma({}^2\Sigma V + C_1 \Sigma 1 + C_2) = {}^3\Sigma V + C_1 . {}^2\Sigma 1 + C_2 \Sigma 1 + C_3$ **трећій**, и т. д. уобште ${}^n\Sigma V + C_1 . {}^{n-1}\Sigma 1 + C_2 . {}^{n-2}\Sigma 1 + \ldots + C_{n-1} \Sigma 1 + C_n$ n; **подпуный** сбиръ $f(x) = V$.

Изъ овога види се, да подпуный n. сбиръ мора садржати n произвольны, т. є. безусловно или условно сталны броєва. У случаю ако єданъ одъ овы броєва фали, или є добыо какву известну вредность, онда вопросный сбиръ зове се особитый (или партикуларный).

§ 229.

Ако є ${}^n\Delta V = f(x)$, ${}^2\underset{2x}{\Delta} W = \varphi(x, y$ или ${}^2\underset{x,y}{\Delta} W = \psi(x, y)$ онда є обратно у првомъ случаю $V = {}^2\Sigma f(x)$, т. є. V n. сбиръ функціє $f(x)$; у другомъ $W = {}^2\underset{2x}{\Sigma} \varphi(x, y)$, т. є. W другій сбиръ функціє $\varphi(x, y)$ оба пута узетъ по x; найпосле у трећемъ случаю $W = \underset{x}{\Sigma}\left[\underset{y}{\Sigma}\varphi(x, y)\right] = \underset{y}{\Sigma}\left[\underset{x}{\Sigma}\varphi(x, y)\right.$ $= {}^2\underset{x,y}{\Sigma} \varphi(x, y)$, т. є. W другій сбиръ функціє $\varphi(x, y)$ узетъ єданпутъ по x, а другипутъ y, и при томе пакъ сасвимъ свеєдно по комъ одъ ньи найпре.

Уобште ако є ${}^{m+n}\underset{mx,\,ny}{\Delta} W = \varphi(x, y)$, онда є обратно $W = {}^{m+n}\underset{mx,\,ny}{\Sigma} \varphi(x, y)$, т. є. W є $(m+n)$. сбиръ функціе $\varphi(x, y)$ mпута узетъ по x, а nпута по y, и при томъ свеєдно по комъ пре.

Овай сбиръ по пређашнѣмъ §. садржаћe $m+n$ сталны броєва, кои у почастнимъ сбировима по x могу быти неке іошъ неизвестне функціе броя y, а у почастнымъ сбировима по y неке іошъ неопределѣне функціе одъ x. Ово є лако увидити одтудъ, што се при различеню функціе W по x они чланови съ y безъ x, а на противъ при нѣномъ различеню по y они съ x безъ y као односно стални губе (види почастно определьиванѣ ${}^{2}\Delta V$ у §. 218.). Тога ради за подпуный вопросный сбиръ морамо писати

$$W = {}^{m}\underset{mx}{\Sigma}\left[{}^{n}\underset{ny}{\Sigma}\,\varphi(x,y) + f(x)\right] + \psi(y), \text{ или}$$

$$W = {}^{n}\underset{ny}{\Sigma}\left[{}^{m}\underset{mx}{\Sigma}\,\varphi(x,y) + \varphi(x)\right] + f(x)$$

$$= {}^{m+n}\underset{my,\,ny}{\Sigma}\,\varphi(x,y) + {}^{m}\Sigma f(x) + \psi) \text{ или}$$

$$= {}^{m+n}\underset{mx,\,ny}{\Sigma}\,\varphi(x,y) + {}^{n}\Sigma\,\varphi(y) + f(x);$$

како су пакъ $f(x)$ и $\varphi(y)$ іошъ непознате, па дакле и ньиови сбирови іошъ такови, али на свакій начинъ првый нека функція само одъ x, а другій нека функція само одъ y: то морамо рећи

$$W = {}^{m+n}\underset{mx,\,ny}{\Sigma}\,\varphi(x,y) + F(x) + \Phi(y).$$

§ 230.

Што се найпосле тиче безусловно или условно сталны броєва при сбировима функція єдногъ променльивогъ броя, и односно сталны функція при сбировима функція више променльивы броєва: то валя приметити да се и єдни и друге мораю одкрити изъ саме природе дотичнога предмета, на кои начинъ пакъ? видит' ћемо при доцніє слѣдуюћемъ употреблѣню различногъ и сбирногъ рачуна.

Сада да узмемо неколико примера за упражнѣнѣ у сабираню функція.

§ 231.

Нашли смо у §. 210.

1.) $\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$; мора дакле обратно быти

$$a^x=(a^{\Delta x}-1)\Sigma a^x,$$ и одтудъ

$$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}+C.$$

2.) $\Delta\, log\, x = log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$; обратно дакле мора быти

$$\Sigma\, log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=log\, x+C_1=log\, x+log\, C_2$$
$$=log\, Cx,$$

єръ сталный брой C_1 може имати свакій могућій видъ.

3.) $\Delta\, sin\, x = 2\, sin\frac{\Delta x}{2}\, cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$; обратно дакле мора быти $sin\, x = 2\, sin\frac{\Delta x}{2}\,\Sigma\, cos\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)$, и одтудъ $\Sigma\, cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{sin\, x}{2\, sin\frac{\Delta x}{2}}$, или ако место x узмемо $x-\frac{\Delta x}{2}$:

$$\Sigma\, cos\, x=\frac{sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\, sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

Подобно налазимо збогъ $\Delta\, cos\, x = -2\, sin\frac{\Delta x}{2}\times$
$\times sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)$,

$$\Sigma\, sin\, x=-\frac{cos\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\, sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

4.) $\Delta x^{m|\Delta x} = m\Delta x\,.\,(x+\Delta x)^{m-1|\Delta x}$, дакле

$$x^{m|\Delta x} = m\Delta x\,\Sigma\,(x+\Delta x)^{m-1|\Delta x}.$$

Поставляюћи овде $m+1$ место m, $x-\Delta x$ место x, и определюю́ћи после $\Sigma x^{m|\Delta x}$: слѣдує

$$\Sigma x^{m|\Delta x} = \frac{(x-\Delta x)^{m+1|\Delta x}}{(m+1)\Delta x}$$

Истымъ начиномъ са $m+1$ место m изъ $\Delta x^{m|-\Delta x} = m\Delta x\,.\,x^{m-1|-\Delta x}$

$$\Sigma x^{m|-\Delta x} = \frac{x^{m+1|-\Delta x}}{(m+1)\Delta x}.$$

5.) Збогъ $\Delta\frac{1}{x^{m|\Delta x}} = -\frac{m\Delta x}{m^{m+1|\Delta x}}$ мора быти

$$\frac{1}{x^{m|\Delta x}} = -m\Delta x\,.\,\Sigma\frac{1}{m^{m+1|\Delta x}},$$ а ако место m узмемо $m-1$, и после определимо $\Sigma\frac{1}{x^{m|\Delta x}}$,

$$\Sigma\frac{1}{x^{m|\Delta x}} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1|\Delta x}}.$$

На истый начинъ изъ $\Delta\frac{1}{x^{m|-\Delta x}} = \frac{m\Delta x}{x^{m|-\Delta x}}$

$$\Sigma\frac{1}{x^{m|-\Delta x}} = \frac{1}{(m-1)\Delta x\,.\,x^{m-1|-\Delta x}}.$$ Найпосле

6.) Збогъ $\Delta\left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right) = \frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m-1|-1}}{(m-1)!} = \left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m-1\end{matrix}\right)$

$$\left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right) = \Sigma\left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m-1\end{matrix}\right),$$ и одтудъ ако узмемо $m+1$ место m,

$$\Sigma\left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\frac{x}{\Delta x}\\ m+1\end{matrix}\right).$$

§ 232.

Определюю́ћи и выше разлике овы истьı функцiя, налазимо обзиромъ на §. 210. и 211.

1.) $${}^{2}\Sigma a^{x} = \frac{\Sigma a^{x}}{a^{\Delta x} - 1} \Sigma C + C_{1} = \frac{a^{x}}{(a^{\Delta x} - 1)^{2}} + C \Sigma 1 + C_{1}$$

$$= \frac{1}{(a^{\Delta x} - 1)^{2}} + C \frac{x}{\Delta x} + C_{1}$$

$${}^{3}\Sigma a^{x} x = \Sigma({}^{2}\Sigma a^{x}) = \Sigma \frac{1}{(a^{\Delta x} - 1)^{2}} + \frac{C}{\Delta x} \Sigma x + \Sigma C_{1} + C_{2}$$

$$= \frac{a^{x}}{(a^{\Delta x} - 1)^{3}} + \frac{C}{\Delta x}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2}}{\Delta x} - \frac{1}{2} x\right) + C_{1} \Sigma 1 + C_{2}$$

$$= \frac{a^{x}}{(a^{\Delta x} - 1)^{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{\Delta x} x^{2} - \frac{(\frac{1}{2} C - C_{1})}{\Delta x} x + C_{2}$$

. . . .

2.) $${}^{2}\Sigma \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\Sigma \sin x}{2 \sin \frac{\Delta x}{2}} = -\frac{\cos\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{2^{2} \cdot \sin^{2} \frac{\Delta x}{2}},$$ или

ако место x узмемо $x - \frac{\Delta x}{2}$:

$${}^{2}\Sigma \cos x = -\frac{\cos(x - \Delta x)}{2^{2} \sin^{2} \frac{\Delta x}{2}}$$

$${}^{3}\Sigma \cos x = -\frac{\Sigma \cos(x - \Delta x)}{2^{2} \sin^{2} \frac{\Delta x}{2}} = -\frac{\sin\left(x - \frac{3}{2} \Delta x\right)}{2^{3} \cdot \sin^{3} \frac{\Delta x}{2}}$$

и т. д., убопште

$${}^{2n}\Sigma \cos x = \pm \frac{\cos(x - n \Delta x)}{2^{2n} \cdot \sin^{2n} \frac{\Delta x}{2}}, \text{ а}$$

$${}^{2n+1}\Sigma \cos x = \pm \frac{\sin[x - (n + 1) \Delta x]}{2^{2n+1} \cdot \sin^{2n+1} \frac{\Delta x}{2}}.$$

Истимъ начиномъ налазимо

$${}^{2n}\Sigma \sin x = \pm \frac{\sin(x - n \Delta x)}{2^{2n} \cdot \sin^{2n} \frac{\Delta x}{2}}, \text{ а}$$

$${}^{2n+1}\Sigma \sin x = \mp \frac{\cos[x - (n + 1) \Delta x]}{2^{2n+1} \cdot \sin^{2n+1} \frac{\Delta x}{2}}.$$

У сва четири ова образца имаю се узети горнъи знаци ако є n парный, а долнъи ако є n безпарный брой.

3.) По §. є 211.

$${}^{n}\Delta x^{m\lfloor\Delta x} = m^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x . (x + n\,\Delta x)^{m-n\lfloor\Delta x},$$ дакле

$$x^{m\lfloor\Delta x} = m^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x . {}^{n}\Sigma\,(x+n\,\Delta x)^{m-n\lfloor\Delta x},$$ а ако место x узмемо $x - n\,\Delta x$, месмо m пакъ $m+n$, и после ${}^{n}\Sigma\,x^{m\lfloor\Delta x}$ определимо:

$${}^{n}\Sigma\,x^{m\lfloor\Delta x} = \frac{x^{m+n\lfloor\Delta x}}{(m+n)^{n\lfloor-1} . \Delta x}.$$

На истый начинъ са $m+n$ место m изъ

$$\Delta x^{m\lfloor-\Delta x} = m^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x . x^{m-n\lfloor-\Delta x}$$

$${}^{n}\Sigma\,x^{m\lfloor-\Delta x} = \frac{x^{m+n\lfloor-\Delta x}}{m^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x}.$$

Збогъ ${}^{n}\Delta\dfrac{1}{x^{m\lfloor\Delta x}} = \pm\dfrac{m^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x}{x^{m+n\lfloor\Delta x}}$, имамо

$$\frac{1}{x^{m\lfloor\Delta x}} = \pm\, m^{n\lfloor1} . \Delta^{n}x . {}^{n}\Sigma\frac{1}{x^{m+n\lfloor\Delta x}},$$

одтудъ пакъ ако место m узмемо $m-n$, и после определимо $\Sigma\dfrac{1}{x^{m\lfloor\Delta x}}$:

$${}^{n}\Sigma\frac{1}{x^{m\lfloor\Delta x}} = \pm\frac{1}{(m-n)^{n\lfloor1}\,\Delta^{n}x . x^{m-n\lfloor\Delta x}}.$$

На истый начинъ изъ ${}^{n}\Delta\dfrac{1}{x^{m\lfloor-\Delta x}} = \dfrac{m^{n\lfloor-1} . \Delta^{n}x}{x^{m+n\lfloor-\Delta x}}$

$${}^{n}\Sigma\frac{1}{x^{m\lfloor-\Delta x}} = \frac{1}{(m-n)^{n\lfloor1} . \Delta^{n}x . x^{m-n\lfloor-\Delta x}}.$$

Найпосле збогъ

$${}^{n}\Delta\binom{\frac{x}{\Delta x}}{m} = \frac{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{m-n\lfloor-1}}{(m-n)!} = \binom{\frac{x}{\Delta x}}{m-m};\ \binom{\frac{x}{\Delta x}}{m} = {}^{n}\Sigma\binom{\frac{x}{\Delta x}}{m-x},$$

и одтудъ узимаюћи $m+n$ место n

$${}^{n}\Sigma\binom{\frac{x}{\Delta x}}{m} = \binom{\frac{x}{\Delta x}}{m+n}.$$

§ 233.

1.) Збогъ $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$, имамо

$\Sigma(\Delta x + \Delta y) = x + y + C_1$; но при доякошнѣмъ непрестаномъ предпоставлѣню, да су разлике Δx и Δy сталне, може се такођеръ рећи

$\Sigma(\Delta x + \Delta y) = (\Delta x + \Delta y)\Sigma 1$; дакле мора быти $x + y + C_1 = (\Delta x + \Delta y)\Sigma 1$, и одтудъ

$$\Sigma 1 = \frac{x+y}{\Delta x + \Delta y} + \frac{C_1}{\Delta x + \Delta y} = \frac{x+y}{\Delta x + \Delta y} + C$$

2.) Збогъ $\Delta(x^2+y) = 2x\,\Delta x + \Delta^2 x + \Delta y$ слѣдуе

$$x^2 + y = 2\Delta x\,\Sigma x + (\Delta^2 x + \Delta y)\,\Sigma 1,$$ и одтудъ

$$\Sigma x = \frac{x^2 + y - (\Delta^2 x + \Delta y)\,\Sigma 1}{2\Delta x}.$$

На истый начинъ налазимо изъ $\Delta(x + y^2)$

$$\Sigma y = \frac{x + y^2 - (\Delta x + \Delta^2 y)\,\Sigma 1}{2\,\Delta y}.$$

3.) Збогъ $\Delta(x^3 + y) = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta^2 x + \Delta^3 x + \Delta y$, имамо

$$x^3 + y = 3\Delta x\,\Sigma x^2 + 3\Delta^2 x\,\Sigma x + (\Delta^3 x + \Delta y)\,\Sigma 1,$$

и одтудъ

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3 + y - 3\,\Delta^2 x\,\Sigma x - (\Delta^3 x + \Delta y)\,\Sigma 1}{3\,\Delta x}.$$

На истый начинъ слѣдуе изъ $\Delta(x + y^3)$, да є

$$\Sigma y^2 \frac{x + y^5 - 3\,\Delta^2 y\,\Sigma y - (\Delta x + \Delta^3 y)\,\Sigma 1}{3\,\Delta y}.$$

4.) Збогъ $\Delta\,x^2 y = y\Delta x^2 + x^2 . \Delta y + \Delta x^2 . \Delta y$

$$= 2yx\,\Delta x + y\Delta^2 x + x^2 . \Delta y$$
$$+ 2x\,\Delta x\,\Delta y + \Delta^2 x . \Delta y,$$

слѣдуе $$x^2 y = 2\,\Delta\,x\,\Sigma\,xy + \Delta^2 x\,\Sigma y + \Delta y\,\Sigma x^2 +$$
$$+ 2\,\Delta\,x\,\Delta y\,\Sigma x + \Delta^2 x . \Delta y\,\Sigma 1,$$

и одтудъ

$$\Sigma xy = \frac{1}{2\Delta x}\,(x^2 y - \Delta^2 x . \Sigma y - \Delta y\,\Sigma x^2 - 2\,\Delta\,x\,\Delta y\,\Sigma x$$
$$- \Delta^2 x . \Delta y\,\Sigma 1).$$

У овомъ изразу имаю се узети за Σx^2, Σx, Σy и $\Sigma 1$ предходеће вредности.

§. 234.

1.) Ако є $v = \Delta x \, \Delta y$, слѣдуе

$$\sum_{x} v = x \, \Delta y + f(y)$$

$${}^2\!\!\sum_{x,y} \Delta x \, \Delta y = xy + \varphi(x) + f(y);$$ но при сталнимъ разликама Δx и Δy можемо рећи

$${}^2\!\!\sum_{x,y} \Delta x \, \Delta y = \Delta x \, \Delta y \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} 1;$$ дакле є

$$\Delta x \, . \, \Delta y \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} 1 = xy + \varphi(x) + f(y),$$ и одтуда

$${}^2\!\!\sum_{x,y} 1 = \frac{xy}{\Delta x \, \Delta y} + F(x) + \Phi(y).$$

2.) Збогъ $\underset{x,y}{{}^2\Delta} \, x^2 y = 2x \, \Delta x \, \Delta y + \Delta y \, \Delta^2 x$, имамо обратно

$$x^2 y = 2 \, \Delta x \, \Delta y \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} x + \Delta y \, \Delta^2 x \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} 1,$$ и одтудъ

$${}^2\!\!\sum_{x,y} x = \frac{x^2 y}{2 \, \Delta x \, \Delta y} - \frac{\Delta x}{2} \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} 1 + \varphi(x) + f(y).$$

На истый начинъ добыямо

$${}^2\!\!\sum_{x,y} y = \frac{xy^2}{2 \, \Delta x \, \Delta y} - \frac{\Delta y}{2} \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} 1 + \varphi(x) + f(y).$$

3.) Найпосле збогъ $\underset{x,y}{{}^2\Delta} x^2 y^2 = 4xy \, \Delta x \, \Delta y + 2x \, \Delta x \, \Delta^2 y + 2y \, \Delta^2 x \, . \, \Delta y + \Delta^2 x \, . \, \Delta^2 y$, мора быти обратно

$$x^2 y^2 = 4 \, \Delta x \, \Delta y . {}^2\!\!\sum_{x,y} xy + 2 \, \Delta x \, \Delta^2 y . {}^2\!\!\sum_{x,y} x + 2 \, \Delta^2 x \, \Delta y . {}^2\!\!\sum_{x,y} y + \Delta^2 x \, . \, \Delta^2 y \, . \, {}^2\!\!\sum_{x,y} 1,$$

и одтудъ

$${}^2\!\!\sum_{x,y} xy = \frac{x^2 y^2}{4 \, \Delta x \, \Delta y} - \frac{\Delta y}{2} . {}^2\!\!\sum_{x,y} x - \frac{\Delta x}{2} . {}^2\!\!\sum y + \frac{\Delta x \Delta y}{4} . {}^2\!\!\sum_{x,y} 1 + f(x) + \varphi(y),$$

у комъ изразу за ${}^2\underset{x,y}{\Sigma}x$, ${}^2\underset{x,y}{\Sigma}y$ и ${}^2\underset{x,y}{\Sigma}1$ треба узети пређе изнађене вредности. Ако то урадимо, добыямо коначно

$$ {}^2\underset{x,y}{\Sigma}xy = \frac{xy\,(x-\Delta x)\,(y-\Delta y)}{4\,\Delta x\,\Delta y} + F(x) + \Phi(y). $$

III. Употреблѣнѣ различногъ и сбирногъ рачуна.

§ 235.

Употреблѣнѣ различнога рачуна — разумеваюћи подъ тимъ и оно, што смо у елементима показали о различнимъ редовима — врло є велико и млогостручно; но мы се овде морамо ограничити само на она нѣгова употреблѣня, коя су за допунѣнѣ неколико дояко показаны предмета необходно нуждна. Такова су: обште решенѣ задатка интерполаціє, кои смо у алгебри разрешили само за просте редове, — рачунанѣ логаритмійски, гоніометрійски и други потребны таблица̓.

Употреблѣнѣ сбирнога рачуна такођеръ є знатно, но и одъ нѣга ћемо, да небы прекорачили границе овога дѣла, само найпотребніє показати.

Пре свега тога пакъ нуждно є да разрешимо слѣдуюћій

Задатакъ.

§ 236.

Изнаћи све вредности целе неке функціє $X = f(x)$ за дате вредности броя x, н. п. све вредности функціє $X = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8$ за вредности $x = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$

Решенѣ. Определююћи разлике дате те функціє X, добыямо

$$ {}^1\Delta X = 4\Delta x\,.\,x^3 + (6\Delta^2 x - 24\Delta x)x^2 + (4\Delta^3 x - 24\Delta^2 x + 28\Delta x)x $$
$$ + (\Delta^4 x - 8\Delta^3 x + 14\Delta^2 x + 4\Delta x) $$

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\!\Delta X &= 12\Delta^{2}x\,.\,x^{2} + (24\Delta^{3}x - 48\Delta^{2}x)x + (14\Delta^{4}x - 48\Delta^{3}x \\
&\qquad + 28\Delta^{2}x) \\
{}^{3}\!\Delta X &= 24\Delta^{3}x\,.\,x + (36\Delta^{4}x - 48\Delta^{3}x) \\
{}^{4}\!\Delta X &= 24\Delta^{4}x
\end{aligned}
$$

${}^{5}\!\Delta X = {}^{6}\!\Delta X = \ldots = 0$; или збогъ $\Delta x = 1$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\!\Delta X &= 4x^{3} - 18x^{2} + 8x + 11 \\
{}^{2}\!\Delta X &= 12x^{2} - 24x - 6 \\
{}^{3}\!\Delta X &= 24x = 12 \\
{}^{4}\!\Delta X &= 24.
\end{aligned}
$$

Тражене вредности функціє X образую дакле аритметичный редъ 4. степена, кога є общтій чланъ сама функція X. Нѣговогъ првогъ, другогъ и трећегъ различногъ реда пакъ общти чланови єсу дотично ${}^{1}\!\Delta X$, ${}^{2}\!\Delta X$ и ${}^{3}\!\Delta X$.

Поставляюћи $x = 0$ слѣдує

$X_0 = -8$, ${}^{1}\!\Delta X_0 = 11$, ${}^{2}\!\Delta X_0 = -6$, ${}^{3}\!\Delta X_0 = -12$, ${}^{4}\!\Delta X_0 = 24$,

съ коимъ вредностима у станю смо садъ определити врло просто све остале чланове, како различны редова, тако и реда вопросны вредностій функціє X на овай начинъ:

По §. є 208. ${}^{m}\!\Delta X_{n+1} = {}^{m}\!\Delta X_n + {}^{m+1}\!\Delta X_n$, а ${}^{m}\!\Delta X_n = {}^{m}\!\Delta X_{n+1} - {}^{m+1}\!\Delta X_n$.

Ако дакле узмемо найпре $n = 0$, а m редомъ 3, 2, 1 и 0: слѣдує по првомъ одъ ова два образца

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\!\Delta X_1 &= {}^{3}\!\Delta X_0 + {}^{4}\!\Delta X_0 = -12 + 24 = 12\,, \\
{}^{2}\!\Delta X_1 &= {}^{2}\!\Delta X_0 + {}^{3}\!\Delta X_0 = -6 - 12 = -18, \\
{}^{1}\!\Delta X_1 &= {}^{1}\!\Delta X_0 + {}^{2}\!\Delta X_0 = 11 - 6 = 5, \\
{}^{0}\!\Delta X_1 &= {}^{0}\!\Delta X_0 + {}^{1}\!\Delta X_0, \text{ т. є.} \\
X_1 &= X_0 + {}^{1}\!\Delta X_0 = -8 + 11 = 3.
\end{aligned}
$$

Узимаюћи сада пакъ $n = 1$, а m као пре редомъ $= 3, 2, 1, 0$, добыямо тимъ истимъ образцемъ

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\!\Delta X_2 &= {}^{3}\!\Delta X_1 + {}^{4}\!\Delta X_1 = 12 + 24 = 36, \\
{}^{2}\!\Delta X_2 &= {}^{2}\!\Delta X_1 + {}^{3}\!\Delta X_1 = -18 + 12 = -6.
\end{aligned}
$$

$${}^{1}\!\Delta X_{2} = {}^{1}\!\Delta X_{1} + {}^{2}\!\Delta X_{1} = 5 - 18 = -13\,,$$

$X_{2} = X_{1} + {}^{1}\!\Delta X_{1} = 3 + 5 = 8$, и тимъ садъ веѣъ увиђавнимъ начиномъ и све остале вредности надъ X_{0}.

У име вредностій пакъ исподъ X_{0}, т. є. вредностій X_{-1}, X_{-2}, ... узимамо редомъ $n = -1, -2, -3, \ldots$ и при свакомъ n као пре $m = 3, 2, 1$ и 0, чимъ по другомъ одъ горня два образца слѣдує.

$${}^{3}\!\Delta X_{-1} = {}^{3}\!\Delta X_{0} - {}^{4}\!\Delta X_{-1} = -12 - 24 = -36\,,$$
$${}^{2}\!\Delta X_{-1} = {}^{2}\!\Delta X_{0} - {}^{3}\!\Delta X_{-1} = -6 + 36 = 30\,,$$
$${}^{1}\!\Delta X_{-1} = {}^{1}\!\Delta X_{0} - {}^{2}\!\Delta X_{-1} = 11 - 30 = -19\,,$$
$$X_{-1} = X_{0} - {}^{1}\!\Delta X_{-1} = -8 + 19 = 11\,;$$
$${}^{3}\!\Delta X_{-2} = {}^{3}\!\Delta X_{-1} - {}^{4}\!\Delta X_{-2} = -36 - 24 = -60\,,$$
$${}^{2}\!\Delta X_{-2} = {}^{2}\!\Delta X_{-1} - {}^{3}\!\Delta X_{-2} = 30 + 60 = 90\,,$$
$${}^{1}\!\Delta X_{-2} = {}^{1}\!\Delta X_{-1} - {}^{2}\!\Delta X_{-2} = -19 - 90 = -109\,,$$
$$X_{-2} = X_{-1} - {}^{1}\!\Delta X_{-2} = 11 + 109 = 120\,;$$

и т. д.

§. 237

Како се на основу овога може проћи съ манѣ писаня лако є увидити, и мы тако поступаюћи налазимо

за $x =$	-2,	-1,	**0**,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
редъ 4. разлика'	24	24	**24**	24	24	24	24	24	24
„ 3. „	-60	-36	**-12**	12	36	60	84	108	132
„ 2. „	90	30	**-6**	-18	-6	30	90	174	282
„ 1. „	-109	-19	**11**	5	-13	-19	11	100	274
траж. редъ вредностій одъ X	**120**	**11**	**-8**	**3**	**8**	**-5**	**-24**	**-13**	**87**

Овай последньій редъ показує да, кадъ бы дата функція X была полиномъ єдначине, доистни корени те єдначине, на основу §. 41., леже између броєва -1 и 0, 0 и 1, 2 и 3, 5 и 6 (види §. 85.), и да се дакле овде показанимъ начиномъ можемо служити за определьиванѣ тешньи граница' ирраціоналны корена' бройны єдначина'.

§ 238.

Ако бы се одъ функціє $X = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 4x - 8$ тражиле вредности за $x = 2{\cdot}1,\ 2{\cdot}2,\ 2{\cdot}3, \ldots\ldots 2{\cdot}9$, морамо пре свега узети

$$x = 2 + \frac{z}{10},$$ чимъ, служећи се образцемъ §. 11., добыямо

$$\frac{Z}{10000} = (z^4 - 1000\ \ z^2 - 4000\ \ z + 80000)\cdot\frac{1}{10000}.$$

После тражимо, показанымъ у пређашньимъ §§. начиномъ, све вредности функціє $Z = z^4 - 1000\ z^3 - 4000\,z + 80000$ за $z = 0, 1, 2, \ldots. 9$, и делимо найпосле сваку са 10000, чимъ слѣдую захтеване вредности одъ X за горе уречене вредности одъ x.

Тако поступаюћи за $\Delta z = 1$

$$\Delta_1 Z = 4z^3 + 6z^2 - 1996\,z - 4999$$
$$^2\!\Delta_1 Z = 12z^2 + 24z - 1986$$
$$^3\!\Delta_1 Z = 24z + 36$$
$$^4\!\Delta_1 Z = 24$$
$$^4\!\Delta_1 Z = 24$$
$$^5\!\Delta_1 Z = {}^6\!\Delta_1 Z = \ldots\ldots = 0.$$

Узимаюћи сада пакъ $z = 0$, слѣдуе

$$Z_0 = 80000,\ \Delta_1 Z_0 = -4999,\ \overset{2}{\Delta}_1 Z_0 = -1986,\ \overset{3}{\Delta}_1 Z_0 = 36,\ \overset{4}{\Delta}_1 Z_0 = 24;$$ дакле

		за $z =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
редъ	4.	разл. вред. функ. Z	24,	24,	24,	24,	24,	24,	24,	24,	24,	24,
	3.		36,	60,	84,	108,	132,	156,	180,	204,	228,	252,
	2.		—1986,	—1950,	—1890,	— 1806,	— 1698,	— 1566,	— 1410,	— 1230,	— 1026,	— 798,
	1.		—4999,	—6985,	—8935,	—10825,	—12631,	—14329,	—15895,	—17305,	—18535,	—19661,
редъ вредностій одъ Z			80000,	75001,	68016,	59081,	48256,	35625,	21296,	5401,	—11904,	—30430,

Найпосле све ове вредности са 10000 разделѣне, даю тражене вредности функціе X за $x =$

2	2·1	2·2	2·3	2·4	2·5	2·6	2·7	2·8	2·9
8	7·5001,	6·8016,	5·9081,	4·8256,	3·5625,	2·1296,	5401·	— 1·1904,	— 30439.

Ове вредности показую, да кадъ бы функція X была полиномъ єдначине, єданъ нѣнъ ирраціоналный коренъ лежи између 2·7 и 2·8 (види §. 59.), и да се дакле овай посао, истимъ начиномъ више пута повторенъ, може употребити за іошъ веће степіняванѣ, и само определьиванѣ иррац. корена' бройны єдначина'.

а.) Интерполація.

§. 239.

Ако є X нека непозната, или такова функція одъ x, да є збогъ неспретнога вида нећемо употребити, али знамо неколико нѣны вредностій X_1, X_2, X_3, . . . за такођеръ познате вредности x_1, x_2, x_3, . . . броя x, па се траже изъ тій нѣны вредностій друге за условлѣне неке вредности одъ x: онда посао, коимъ те друге вредности функціє X налазимо, зове се **интерполація** или **уметанѣ**, оне саме пакъ при томъ єсу **уметци функціє** X за уречене **уметке** броя x.

Тако н. п. ако смо опытима о ширеню воде при разнимъ степенима температуре дознали, да є запремина воде при $x_1 = 10^0$ Целзіюса $X_1 = 1\cdot\overset{3}{0}19583$, при $x_2 = 13^0$ $X_2 = 1\cdot\overset{3}{0}45878$, при $x_3 = 15^0$ $X_3 = 1\cdot\overset{3}{0}69386$, а при $x_4 = 20_0$ $X_4 = 1\cdot\overset{2}{0}148596$, — па хоћемо помоћу тій докученя да знамо запремину воде X при $x = 12^0$ или $x = 18$: онда велимо, хоћемо да **уметнемо** вредности одъ X (запремине воде као функціє температуре) за те вредности одъ x.

§. 240.

По себи увиђа се, да вопросне уметке функціє X, ако ню саму непознаємо, или ю изъ горе наведеногъ узрока употребити нећемо, безъ помоћи друге какве функціє место X, неможемо изнаћи, и да таковимъ начиномъ добывене нъиове вредности немогу быти точне, но само приближне. Али исто тако лако разумети є такођеръ и то, да за помоћну функцію само она послужити може, коя съ вредностима x_1, x_2, x_3, . . . место x, дає познате вредности функціє X: X_1, X_2, X_3, ...— Функція тога свойства има много, и по томе є задатакъ интерполаціє, докъ є обштій, неопределѣнъ.

Найпосле одъ свію функція, коє се могу употребити за интерполацію друге какове дате функціє, найпростія є свагда найпробитачнія.

§. 241.

Што се тиче познаты вредностій броя x, то оне могу быти међусобомъ или єдноразличне (aequidifferentne), или разноразличне. Овай є последньій случай обштіи, зато ћемо да разрешимо задатакъ интерполаціє найпре за такове вредности одъ x.

У име тога узимамо у помоћь функцію

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots\dots (\alpha.$$

По пређашнѣмъ §. мора быти

$$X_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^4 + \dots\dots$$
$$X_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 + a_4 x_2^4 + \dots\dots$$
$$X_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + a_4 x_3^4 + \dots\dots$$
$$X_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 + a_3 x_4^3 + a_4 x_4^4 + \dots\dots$$

. . . .

Одузимаюћи прву одъ овы єдначина' одъ друге, другу одъ треће, и т. д. сваку слѣдуюћу одъ слѣдуюће, добыямо, ако уєдно прву разлику разделимо съ $x_2 - x_1$, другу съ $x_3 - x_2$, трећу съ $x_4 - x_3$; . . . . и поставимо количнике редомъ $= D_1, D_2, D_3, \dots\dots$:

$$D_1 = a_1 + a_2 (x_1 + x_2) + a_3 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) +$$
$$+ a_4 (x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3) + \dots$$
$$D_2 = a_1 + a_2 (x_2 + x_3) + a_3 (x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2) +$$
$$+ a_4 (x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3) + \dots$$
$$D_3 = a_1 + a_2 (x_3 + x_4) + a_3 (x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2) +$$
$$+ a_4 (x_3^3 + x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2 + x_4^3) + \dots$$

. . . .

Одузимаюћи овде пакъ прву єдначину одъ друге, другу одъ треће, и т. д., и оставляюћи после количникъ одъ прве разлике съ $x_3 - x_1$ раванъ D'_1, количникъ одъ друге разлике са $x_4 - x_2$ раванъ D'_2, и т. д., слѣдує

$$D'_1 = a_2 + a_3 (x_1 + x_2 + x_3) + a_4 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$
$$+ x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3^2) + \dots$$
$$D'_2 = a_2 + a_3 (x_2 + x_3 + x_4) + a_4 (x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2$$
$$+ x_2 x_4 + x_3 x_4 + x_4^2) + \dots$$

. . . .

Опетъ прву єдначину одъ друге и т. д. одузимаюћи, прву разлику са $x_4 - x_1$, другу са $x_5 - x_2$, и т. д. делећи, и првый количникъ са D''_1, другій са D''_2, и т. д. означуюћи:

$$D''_1 = a_3 + a_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \; . \; . \; . \; .$$
$$D''_2 = a_3 + a_4 (x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + \; . \; . \; . \; .$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

И т. д.

Изъ овы израза, ако функція X подъ a) нема выше него 5 чланова, слѣдує

$$a_4 = D'''_1$$
$$a_3 = D''_1 - D'''_1 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$
$$a_2 = D'_1 - D''_1 (x_1 + x_2 + x_3) + D'''_1 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)$$
$$a_1 = D_1 - D'_1 (x_1 + x_2) + D''_1 (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - D'''_1 (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)$$

$a_0 = X_1 - D_1 x_1 + D'_1 x_1 x_2 - D''_1 x_1 x_2 x_3 + D'''_1 x_1 x_2 x_3 x_4$, а съ тима вредностима изъ єдначине α)

$$X = X_1 + D_1 (x - x_1) + D'_1 [x^2 - (x_1 + x_2) x + x_1 x_2]$$
$$+ D''_2 [x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) x - x_1 x_2 x_3]$$
$$+ D'''_1 [x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) x^3 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) x^2 +$$
$$- (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4) x + x_1 x_2 x_3 x_4],$$

или обзиромъ на §. 38., и ако уєдно ова докученя разпрostремо увиђавнимъ начиномъ на више чланова у функціи подъ α)

$$\left.\begin{aligned} X = X_1 & \\ + D_1 & (x - x_1) \\ + D'_1 & (x - x_1)(x - x_2) \\ + D''_1 & (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ + D'''_1 & (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Лапласовъ образацъ за интерполацію, кои, штогодъ више чланова у помоћь узимамо, све точніє вредности дає.

§ 242.

Разрешавајући овимъ образцемъ у примеру §. 239. поставлѣный вопросъ, имамо збогъ $x_1 = 10^0$, $x_2 = 13^0$, $x_3 = 15^0$, $x_4 = 20^0$, $X_1 = 1{\cdot}\overset{3}{0}19583$, $X_2 = 1{\cdot}\overset{3}{0}45878$, $X_3 = 1{\cdot}\overset{3}{0}69386$ и $X_4 = 1{\cdot}\overset{2}{0}148596$:

$$D_1 = \frac{X_2 - X_1}{x_2 - x_1} = \frac{\cdot\overset{3}{0}26295}{3} = \cdot\overset{4}{0}8765$$

$$D_2 = \frac{X_3 - X_2}{x_3 - x_2} = \frac{\cdot\overset{3}{0}23508}{2} = \cdot\overset{3}{0}11754$$

$$D_3 = \frac{X_4 - X_3}{x_4 - x_3} = \frac{\cdot\overset{3}{0}79210}{5} = \cdot\overset{3}{0}15842$$

$$D'_1 = \frac{D_2 - D_1}{x_3 - x_1} = \frac{\cdot\overset{4}{0}2989}{5} = \cdot\overset{5}{0}598$$

$$D'_2 = \frac{D_3 - D_2}{x_4 - x_2} = \frac{\cdot\overset{4}{0}4088}{7} = \cdot\overset{5}{0}584$$

$$D''_1 = \frac{D'_2 - D'_1}{x_4 - x_1} = -\frac{\cdot\overset{6}{0}11}{10} = -\cdot\overset{7}{0}1;$$ дакле

за $x = 12^0$

$$X = 1{\cdot}\overset{3}{0}19583 + \cdot\overset{4}{0}8765 \,.\, 2 + \cdot\overset{5}{0}598 \,.\, 2 \,.\, (-1) -$$
$$- \cdot\overset{7}{0}1 \,.\, 2 \,.\, (-1) \,.\, (-3)$$

$$= 1{\cdot}\overset{3}{0}19583 + {\cdot}\overset{3}{0}17530 - {\cdot}\overset{4}{0}1196 - {\cdot}\overset{7}{0}6$$

$$= 1{\cdot}\overset{3}{0}35911\,;$$

за $x = 18^0$

$$X = 1{\cdot}\overset{3}{0}19583 + {\cdot}\overset{4}{0}8765\,.\,8 + {\cdot}\overset{5}{0}598\,.\,8\,.\,5 - {\cdot}\overset{7}{0}1\,.\,8\,.\,5\,.\,3$$

$$= 1{\cdot}\overset{3}{0}19583 + {\cdot}\overset{3}{0}70120 + {\cdot}\overset{3}{0}23920 - {\cdot}\overset{5}{0}120$$

$$= 1{\cdot}\overset{2}{0}113503.$$

Да є осимъ горнѣга іошъ познато

$x_5 = 21^0$ и $X_5 = 1{\cdot}\overset{2}{0}167875$, имали бы іошъ

$$D_4 = \frac{X_5 - X_4}{x_5 - x_4} = \frac{{\cdot}\overset{3}{0}19279}{1} = {\cdot}\overset{3}{0}19279$$

$$D_3' = \frac{D_4 - D_3}{x_5 - x_3} = \frac{{\cdot}\overset{4}{0}3437}{6} = {\cdot}\overset{5}{0}573$$

$$D_2'' = \frac{D_3' - D_2'}{x_5 - x_2} = -\frac{{\cdot}\overset{6}{0}11}{8} = -{\cdot}\overset{7}{0}1$$

$D_1''' = \dfrac{D_2'' - D_1''}{x_5 - x_1} = \dfrac{0}{11} = 0$, и збогъ тога за оба пре-ђе нађена X исте вредности као и пре, коє є знакъ да су у 8 частны места точно онаке.

§ 243.

За полученѣ точніи вредностій уметака препоручує *Гаусъ*,*) да се у горнѣмъ Лапласовомъ образцу употреби оно x као прво, коме x, за коє тражимо уметакъ, найближе лежи; друго пакъ да буде друго найближе, треће прво до првога, четврто прво до другога, и т. д.

Ако су н. п.

$$\ldots\ldots\; x_{n-3}\;\; x_{n-2}\;\; x_{n-1}\;\; x_n\;\; x_{n+1}\;\; x_{n+2}\;\; x_{n+3}\; \ldots\ldots$$

по величини уређене познате вредности одъ x, а x за коє тражимо уметакъ лежи између x_{n-1} и x_n и овомъ

---

*) Berliner aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1830.

§ 245.

Предпоставляюћи у §. 243. єдноразличне вредности броя x, добыямо одъ образца 1., ако уєдно метнемо $x - x_n = v$:

$$X = X_n + \frac{v}{\Delta x} \cdot \Delta X_{n-1} + \frac{v(v + \Delta x)}{2!\ \Delta^2 x} \cdot {}^2\Delta X_{n-1} + \frac{v(v + \Delta x)(v - \Delta x)}{3!\ \Delta^3 x} \cdot {}^3\Delta X_{n-2}$$
$$+ \frac{v(v + \Delta x)(v - \Delta x)(v + 2\,\Delta x)}{4!\ \Delta^4 x} \cdot {}^4\Delta X_{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1',$$

а одъ образца 2.), ставляюћи $x - x_{n-1} = w$:

$$X = X_{n-1} + \frac{w}{\Delta x} \cdot \Delta X_{n-1} + \frac{w(w - \Delta x)}{2!\ \Delta^2 x} \cdot {}^2\Delta X_{n-1} + \frac{w(w - \Delta x)(w + \Delta x)}{3!\ \Delta^3 x} \cdot {}^3\Delta X_{n-2} + \ldots\ldots \quad (2'.$$

За особитый случай, где ново x лежи точно у среди између x_{n-1} и x_n, слѣдую изъ првогъ одъ ова два образца збогъ $x - x_n = v = -\frac{1}{2}\Delta x$:

$$X = X_n - \frac{1}{2}\,\Delta X_{n-1} - \frac{1}{8}\,{}^2\Delta X_{n-1} + \frac{1}{16}\,{}^3\Delta X_{n-1} + \frac{3}{128} \cdot {}^4\Delta X_{n-2} - \ldots\ldots \quad (m.,$$

а изъ другога збогъ $x - x_{n-1} = w = \frac{1}{2}\Delta x$:

$$X = X_{n-1} + \frac{1}{2}\,\Delta X_{n-1} - \frac{1}{8}\,{}^2\Delta X_{n-2} - \frac{1}{16}\,{}^3\Delta X_{n-2} + \frac{3}{128}\,{}^4\Delta X_{n-3} + \ldots\ldots \quad (n.,$$

а ако ова два израза саберемо, и нѣнов̂ъ сбиръ после преполовимо:

$$X = \frac{1}{2}\left(X_n + X_{n-1}\right) - \frac{1}{16}\left({}^2\Delta X_{n-1} + {}^2\Delta X_{n-2}\right) + \frac{3}{256}\left({}^4\Delta X_{n-2} + {}^4\Delta X_{n-3}\right) - \;.\;.\;.\;.\quad (p.$$

Найпосле iошъ поставляюћи ради краткоће $X_n + X_{n-1} = s_1$, ${}^2\Delta X_{n-1} + {}^2\Delta X_{n-2} = s_2$, ${}^4\Delta X_{n-2} + {}^4\Delta X_{n-3} = s_3$, ... :

$$X = \frac{1}{2}\left\{ s_1 - \frac{1}{8}\left[s_2 - \frac{3}{16}\left| s_3 - \frac{5}{24}\left(s_4 - \;.\;.\;.\;.\;. \right)\right|\right]\right\} \;.\;.\;.\;,\;.\;.\;.\quad (r.$$

образацъ за рачунанѣ врло удобанъ, кои дае X, ако су 4. разлике већъ здраво мале, съ прва два члана већъ довольно точно.

§ 246.

Осимъ **Лапласовогъ** образца употреблява се обично iошъ и слѣдуюћiй одъ *Лагранжа* (Lagrange)

$$\left.\begin{aligned} X = {} & \frac{(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\;.\;.\;.\;.}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)\,(x_1-x_4)\;.\;.\;.\;.}\cdot X_1 \\ & + \frac{(x-x_1)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\;.\;.\;.\;.}{(x_2-x_1)\,(x_2-x_3)\,(x_2-x_4)\;.\;.\;.\;.}\cdot X_2 \\ & + \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_4)\;.\;.\;.\;.}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)\,(x_3-x_4)\;.\;.\;.\;.}\cdot X_3 \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{aligned}\right\}\quad \text{II.}$$

кои є особито за употреблѣнѣ интерполаціє на практичне вопросе врло удесанъ по томе, што се нѣгови членови могу лако и великомъ користи израдити съ точно израчунѣнимъ логаритмима.

Да пакъ истый образацъ споменуто у §. 239. условіє свакогъ образца за интерполацію савршено испунює, т. є. да за $x = x_1$ постає $X = X_1$, за $x = x_2$ $X = X_2$, и т. д., види се на првый погледъ; но исто тако лако увидити є уєдно іошъ, да се место горнѣи сачинителя одъ X_1, X_2, ... безъ сумнѣ іошъ и друге функціє могу изнаћи, коє ће то условіє исто тако испунити, и да є дакле задатакъ интерполаціє, у подпуной обштости држанъ, доиста неопределѣнъ

б.) Рачунанѣ логаритама.

§ 247.

По §. є 210.

$$\Delta \log x = \log \frac{x + \Delta x}{x} = M\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2 x}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\Delta^3 x}{x^3} - \dots\right),$$

а збогъ ${}^{n}\Delta v_{m} = v_{m+n} - \binom{n}{1} v_{m+(n-1)} + \binom{n}{2} v_{m+(m-2)} - \dots\dots \pm v_{m}$ (§. 208.),

$$\begin{aligned} {}^{2}\Delta \log x &= \log(x + 2\Delta x) - 2\log(x + \Delta x) + \log x \\ &= \log\left(1 + 2\frac{\Delta x}{x}\right) - 2\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= M\left(-\frac{\Delta^2 x}{x^2} + 2\frac{\Delta^3 x}{x^3} - \dots\dots\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{3}\Delta \log x &= \log(x + 3\Delta x) - 3\log(x + 2\Delta x) + 3\log(x + \Delta x) \\ &\quad - \log x \\ &= \log\left(1 + 3\frac{\Delta x}{x}\right) - 3\log\left(1 + 2\frac{\Delta x}{x}\right) + 3\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= M\left(2\frac{\Delta^3 x}{x^3} - \dots\dots\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{4}\Delta \log x &= \log(x + 4\Delta x) - 4\log(x + 3\Delta x) + 6\log(x + 2\Delta x \\ &\quad - 4\log(x + \Delta x) + \log x \end{aligned}$$

$$= \log\left(1 + 4\frac{\Delta x}{x}\right) - \log\left(1 + 3\frac{\Delta x}{x}\right) + 6\log\left(1 + 2\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$- 4\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= M\left(- 6\frac{\Delta^4 x}{x^4} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)$$

и т. д., при чему M представля модулъ логаритама, кои є по §. 168. за бригове или просте логаритме $M = \frac{1}{l\,10}$ $= \cdot 4342944819 \;.\;.\;.\;.$

Ако є дакле $\frac{\Delta x}{x}$ какавъ малый разломакъ, онда се ${}^2\Delta \log x$, ${}^3\Delta \log x$, ${}^4\Delta \log x$, . . . све веһма умалявају тако, да, ако $\log x$ и нѣгове разлике рачунамо у известномъ и истомъ брою частны места', одъ неке на далѣ све друге разлике у тимъ местима никакову важеһу цифру несадрже, и да се зато те разлике за **онай брой частны места** могу донекле — у слѣдуюһемъ §. видит'һемо докле — сматрати као нулле, а редъ логаритама $\log x$, $\log(x + \Delta x)$, $\log(x + 2\Delta x)$, ... као аритметичанъ оноликога степена, колико є име прве одъ тій разлика'.

Тако н. п. ако є $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{10000}$, и мы рачунамо све у 10 частны места', онда, каошто се лако можемо уверити, веһъ 4. разлике логаритама броєва $x = 10000$, 10001, 10002, ... састоє се у толико места изъ самы нула', и може се дакле тай редъ, радеһи у 10 частны места', сматрати као аритметичанъ 4. степена.

§ 248.

На основу тога у станю смо помоһу непосредно (т. є. образцима за $\log x$ и $\log(1 + n\Delta x)$) израчунѣногъ $\log x$, и іошъ неколико слѣдуюһи у име разлика' (види изразе предидуһегъ §.), определити млоге друге самимъ сабиранѣмъ.

Тако н. п. ако непосредно определимо логаритме броєва 10000, 10001, 10002, 10003 и 10004 у 15 места', можемо съ нњима изнаћи 161 слѣдуюћи, т. є. до заključно $log\,10166$, простимъ сабиранѣмъ у 10 места' точно, на слѣдуюћій начинъ:

Изъ ${}^{3}\Delta\,log\,x$ и ${}^{4}\Delta\,log\,x$ образуємо сабираюћи редъ трећи разлика'

$${}^{3}\Delta\,log\,x$$

$${}^{3}\Delta\,log\,x + {}^{4}\Delta\,log\,x = {}^{3}\Delta\,log\,(x + \Delta x),$$

$${}^{3}\Delta\,log\,(x + \Delta x) + {}^{4}\Delta\,log\,x = {}^{3}\Delta\,log\,(x + 2\Delta x),$$

$${}^{3}\Delta\,log\,(x + 2\Delta x) + {}^{4}\Delta\,log\,x = {}^{3}\Delta\,log\,(x + 3\Delta x),\ \ldots\,;$$

съ тимъ трећимъ разликама и ${}^{2}\Delta\,log\,x$ после редъ други разлика'

$${}^{2}\Delta\,log\,x$$

$${}^{2}\Delta\,log\,x + {}^{3}\Delta\,log\,x = {}^{2}\Delta\,log\,(x + \Delta x),$$

$${}^{2}\Delta\,log\,(x + \Delta x) + {}^{3}\Delta\,log\,(x + \Delta x) = {}^{2}\Delta\,log\,(x + 2\Delta x),\ \ldots\,;$$

съ овимъ другимъ разликама и съ $\Delta\,log\,x$ после опетъ на тай начинъ редъ првы разлика, а найпосле съ првимъ разликама и $log\,x$ редъ самы логаритама.

Ако затимъ опетъ определимо 5 логаритама броєва 10167, 10168, 10169, 10170 и 10171 непосредно, можемо съ нњима на истый начинъ — сабиранѣмъ — добыти више одъ 161 слѣдуюћи, изъ узрока што су притомъ разне разлике првога логаритма $log\,10167$, збогъ већегъ именителя x, знатно манѣ. И т. д.

§. 249.

Да су тимъ начиномъ изнађени логаритми, ако само нисмо иначе у рачуну грешили, сви у 10 частны места' точни, уверавамо се изъ слѣдуюћега.

По §. є 247. за $\Delta x = 1$ и $x = 10000 = 10^4$

$$\begin{aligned}{}^{5}\Delta_1\,log\,10^4 = M \Big\{ & \frac{1}{5}\Big[5^5 - \binom{5}{1}4^5 + \binom{5}{2}3^5 - \binom{5}{3}2^5 + \binom{5}{4}1^5\Big] \cdot \frac{1}{10^{20}} \\ & - \frac{1}{6}\Big[5^6 - \binom{5}{1}4^6 + \binom{5}{2}3^6 - \binom{5}{3}2^6 + \binom{5}{4}1^6\Big] \cdot \frac{1}{10^{24}} \\ & + \frac{1}{7}\Big[5^7 - \binom{5}{1}4^7 + \binom{5}{2}3^7 - \binom{5}{3}2^7 - \binom{5}{4}1^7\Big] \cdot \frac{1}{10^{28}} \\ & - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \Big\},\end{aligned}$$

кое израчунѣно дає у 19 места точно ${}^{5}\Delta_1\,log\,10^4 = \cdot\overset{18}{0}1.$

На истый начинъ добыямо у 23 места точно

$$ {}^{6}\Delta_1 \log 10^4 = \overset{22}{\cdot 05}\,, $$

у 26 места' точно

$$ {}^{7}\Delta_1 \log 10^4 = \overset{25}{\cdot 03}\,, \text{ и т. д.} $$

По §. пакъ 208. имамо

$$ v_n = v_1 + \binom{n-1}{1} \cdot {}^{1}\Delta v_1 + \binom{n-1}{2} \cdot {}^{2}\Delta v_1 + \binom{n-1}{3} \cdot {}^{3}\Delta v_1 $$
$$ + \binom{n-1}{4} \cdot {}^{4}\Delta v_1 + \binom{n-1}{5} \cdot {}^{5}\Delta v_1 + \binom{n-1}{6} \cdot {}^{6}\Delta v_1 $$
$$ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. $$

Пренебрегаваюћи дакле у логаритму броя $10166 = 10^4 + 166$ пету, шесту, и остале разлике, грешимо са

$$ \binom{165}{5} \cdot {}^{5}\Delta \log 10^4 + \binom{165}{6} \cdot {}^{6}\Delta \log 10^4 + \binom{165}{7} \cdot {}^{7}\Delta \log 10^4 + \ldots $$
$$ = \overset{10}{\cdot 095507} + \overset{11}{\cdot 01273} + \overset{13}{\cdot 086} + \ldots\ldots $$
$$ = \overset{10}{\cdot 096} \ldots\ldots, $$

разломкомъ, кои на 10. место вопроснога логаритма никако више невлія.

Но да небы се увукла при томъ рачуну друга каква — рачунска— погрешка, валя одъ времена до времена поедине тако добывене логаритме испытати. То ће се урадити найлакше помоћу логаритама сложены броева на тай начинъ, да саберемо логаритме ньиовы чинителя.

§ 250.

За лакше определьиванѣ разлика' логаритма одъ x, могу се употребити место горе (§. 248.) поменуты редова други сбирльивіи редови. За прву разлику можемо се служити н. п. редомъ подъ 4 у §. 172., по комъ слѣдуе

$$ \Delta \log x = 2M \left[\frac{\Delta x}{2x + \Delta x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta^3 x}{(2x + \Delta x)^3} \right. $$
$$ \left. + \frac{1}{5} \cdot \frac{\Delta^5 x}{(2x + \Delta x)^5} + \ldots \right]. $$

Одъ тога су при $x = 10000$ а $\Delta x = 1$, рачунаюћи у 10 места̀, већъ прва два члана подпуно довольни за за пожелану точность.

Поставляюћи у реду $log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$, $-\Delta x$ место $+\Delta x$, после истомъ реду новый додаюћи, а пайпосле іошъ место x узимаюћи $x + \Delta x$: добыямо

$$^{2}\!\Delta \, log \, x = -2 \, M \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 x}{(x + \Delta x)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^4 x}{(x + \Delta x)^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \frac{\Delta^6 x}{(x + \Delta x)^6} + \cdot \cdot \cdot \cdot \right] ^{*)}$$

редъ, одъ коега за пређе поменуту точность нетреба намъ више него само 1. членъ. И т. д.

в.) Рачунанѣ Синуса̀ и Косинуса̀.

§ 251.

За израчунаванѣ синуса до 60^0 употребили смо у тригонометріи (§. 40.) Деламбровъ образацъ

$$sin(\alpha + \beta) = sin \, \alpha + [sin \, \alpha - sin(\alpha - \beta)] - 2^2 \, sin \, \alpha \, . \, sin \, \frac{^2\beta}{2},$$

или ако место α узмемо $x + \Delta x$, а место β Δx:

$$sin(\alpha + 2 \, \Delta x) = sin(x + \Delta x) + [sin(x + \Delta x) - sin \, x]$$

---

*) $\log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \Delta \log x$

$$= M \left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 x}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta^3 x}{x^3} - \ldots\right),$$

$$\log(x - \Delta x) - \log x = M \left(-\frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 x}{x^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta^3 x}{x^3} \ldots\right),$$

ако оба реда саберемо

$$\log(x + \Delta x) + \log(x - \Delta x) - 2 \log x = -2 \, M \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 x}{x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^4 x}{x^4} + \ldots\right),$$

а ако место x узмемо $x + \Delta x$ (обзиромъ на §. 247.)

$$\log(x + 2 \, \Delta x) - 2 \log(x + \Delta x) + \log x, \text{ т. е.}$$

$$^{2}\!\Delta \log x = -2 \, M \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 x}{(x + \Delta x)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^4 x}{(x + \Delta x)^4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^6 x}{(x + \Delta x)^6} + \ldots\right].$$

$$- 2^2 \,.\, \sin (x + \Delta x) \,.\, \sin^2 \frac{\Delta x}{2} \text{ *)},$$

а за синусе одъ више него 60⁰ образацъ (Триг. §. 42.)

$$\sin (60^0 + \beta) = \sin 60^0 - \beta) + \sin \beta.$$

Но мы сада оне прве можемо добыти млого лакше помоћу различнога рачуна на онай истый начинъ, као у предходећимъ §§. просте логаритме, ако само изнађемо синусъ онога лука Δx, съ коимъ хоћемо да се синуси међу собомъ разликую, и све, за уречену точность нуждне разлике лука $x = 0$; првый непосредно, т. є. изъ образаца $\sin x = -\frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots$, а ове друге найлакше помоћу слѣдуюћегъ образаца одъ *Лежандра* (Legendre):

$$^{n}\Delta \sin x = - 2^2 \,.\, \sin \frac{\Delta x}{2} \left({}^{n-1}\Delta \sin x + {}^{n-2}\Delta \sin x \right). \text{ **)}$$

г.) Рачунанѣ логаритама синуса' и косинуса.

§ 252.

За рачунанѣ логаритама синуса одъ 45⁰ до 90⁰ препоручує *Деламбръ* образацъ

---

*) Овай образацъ добыямо другаче него што смо показали у тригонометрів, овако: Ако су

$v_0 \; v_1 \; v_2 \; v_3 \; \ldots\ldots$ чланови некога реда, нашли смо да мора быти $v_2 = v_1 + \Delta v_1 = v_1 + \Delta v_0 + {}^2\Delta v_0$.

Поставляюћи овде $v_0 = \sin x$, $v_1 = \sin (x + \Delta x)$, $v_2 = \sin (x + 2\,\Delta x)$ слѣдує

$$\sin (x + 2\,\Delta x) = \sin (x + \Delta x) + \Delta \sin x + {}^2\Delta \sin x$$
$$= \sin (x + \Delta x) + [\sin (x + \Delta x) - \sin x] + {}^2\Delta \sin x,$$

или вбогъ $^2\Delta \sin x = - 2^2 \,.\, \sin^2 \frac{\Delta x}{x} \,.\, \sin (x + \Delta x)$ (§. 211.)

$$\sin (x + 2\Delta x) = \sin (x + \Delta x) + [\sin (x + \Delta x) - \sin x]$$
$$- 2^2 \sin (x + \Delta x) \,.\, \sin^2 \frac{\Delta x}{2}.$$

**) На овай су начинъ рачунѣне у Паризу подъ Проніємъ (Prony) оне чувене велике таблице синуса одъ $\overset{4}{\cdot 01}$ до $\overset{1}{\cdot 01}$ части кружне четврти.

$$\log \sin (x + \Delta x) = \log \sin x + 2\,M \left[\frac{\Delta \sin x}{(2 \sin x + \Delta \sin x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \sin x}{2 \sin x + \Delta \sin x} \right)^3 + \cdots\cdots, \right.$$

кои слѣдуе изъ израза за $\Delta \log x$ у §. 249., поставляюћи $\sin x$ место x; за логаритме синуса пакъ до 45°, образацъ

$$\log \sin \frac{1}{2} z = \log \sin z - \left(\log \cos \frac{1}{2} z + \log 2 \right),$$ кои добыямо узимаюћи логаритме у едначини

$$\sin z = 2 \sin \frac{1}{2} z \cos \frac{1}{2} z \quad (\text{Триг. §. 26.}).$$

Збогъ $\Delta \sin = \sin (x + \Delta x) - \sin x$,

$2 \sin x + \Delta \sin x = \sin (x + \Delta x) + \sin x$

можемо писати

$$\frac{\Delta \sin x}{2 \sin x + \Delta \sin x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\sin (x + \Delta x) + \sin x} =$$

$$= \mathrm{tang} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cot \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$= \frac{\mathrm{tg} \frac{1}{2} \Delta x}{\mathrm{tang} (x + \frac{1}{2} \Delta x)} . \quad (\text{Триг. §. 25.})$$

Ако ма кою одъ ове две вредности поставимо у горньій редъ, онда можемо га употребити за испытиванѣ готовы таблица' на тай начинъ, да за образованѣ поедины нѣговы чланова' употребимо логаритме тангента' и котангента' по тимъ вопроснимъ таблицама. *)

д.) Определьиванѣ обштегъ члана аритметичны редова.

§ 253.

У томъ смотреню имамо приметити, да ако е дотичный аритметичный редъ n. степена, и нѣговъ об-

---

*) Тако е испытао и поправіо Деламбръ велике Влакове (Vlacq) таблице.

штій членъ означимо съ $v=f(x)$, овога n. разлика мора быти некій сталанъ брой, тако да, ако тай брой назовемо α, стои єдначина

$$\overset{n}{\Delta} v=\alpha.$$

Сабираюћи ову єдначину застопце n пута, добыямо по §. 224., обзиромъ на то да є $\Delta x=1$, редомъ

$$ {}^{n-1}\Delta_1 v=\Sigma_1\alpha=\alpha\Sigma_1 1=\alpha x+C_1\,; $$

$$ {}^{n-2}\Delta_1 v=\Sigma_1(\alpha x+C_1)=\alpha\Sigma_1 x+C_1\Sigma_1 1=\frac{\alpha}{2}x(x-1)+ $$
$$ +C_1x+C_2\,, $$

$$ {}^{n-3}\Delta_1 v=\Sigma_1\frac{\alpha}{2}x(x-1)+C_1\Sigma_1 x+C_2\Sigma_1 1 $$
$$ =\frac{\alpha}{12}x(x-1)(2x-1)+\frac{1}{2}\left(C_1-\frac{\alpha}{2}\right)x(x-1) $$
$$ +C_2x+C_3\,; $$

и т. д., докъ найпосле

$$ {}^{n-n}\Delta v=v $$ траженый общтій членъ реда.

При томе представляю C_1, C_2, C_3, ... сталне броєве, кои по §. 221. улазе у рачунъ при застопномъ сабираню, и кои се найпосле мораю определити изъ природе дотичнога реда.

Поставляюћи у горньимъ изразима редомъ $n=1$, 2, 3, 4, ... слѣдую

общтій членъ редова 1. степ. $v=\alpha x+C_1$

„ „ „ 2. „ $v=\frac{\alpha}{2}x(x-1)+C_1x+C_2$

„ „ „ 3. „ $v=\frac{\alpha}{12}x(x-1)(2x-1)+$
$$ +\frac{1}{2}\left(C_1-\frac{\alpha}{2}\right)x(x-1) $$
$$ +C_2x+C_3 $$

. . . .

§ 254.

Упражнѣня ради изнађимо одма обште чланове редова

3 9 18 30 45 . . . . и

2 5 10 $17\frac{1}{2}$ 28 . . . .

Определююћи ньиове различне редове, дознаємо да є првый аритметичанъ 2., а другій аритметичанъ 3. реда, и да є при првомъ $\alpha = 3$, а при другомъ $\alpha = \frac{1}{2}$.

По горнѣму мора дакле быти обштій членъ првога реда

$$v = \frac{3}{2}x(x-1) + C_1 x + C_2, \text{ а другога}$$

$$v = \frac{1}{24}x(x-1)(2x-1) + \frac{1}{2}\left(C_1 - \frac{1}{4}\right)x(x-1) + $$
$$+ C_2 x + C_3.$$

Обзиромъ на то, да при првомъ реду за $x = 1$ мора быти $v = 3$ а за $x = 2$ $v = 9$: имамо за определьиванѣ сталны броєва C_1 и C_2 у нѣговомъ обштемъ члану, две єдначине

$$3 = C_1 + C_2 \text{ и } 9 = 3 + 2C_1 + C_2,$$ или последня скраћена $6 = 2C_1 + C_2$,

изъ кои подає се $C_1 = 3$, а $C_2 = 0$.

Поставляюћи дакле ове вредности у горньій изразъ обштега члана тогъ првогъ реда, имамо да є подпуно определѣный нѣговъ обштій членъ

$$v = \frac{3}{2}(x^2 + x) = \frac{3}{2}x(x+1).$$

При другомъ реду валя приметити, да за $x = 1$ мора быти $v = 2$, за $x = 2$ $v = 5$, а за $x = 3$ $v = 10$. Обзиромъ дакле на то, добыямо за одкриванѣ сталны броєва C_1, C_2 и C_3 у обштемъ члану истога реда, три єдначине

$$2 = C_2 + C_3, \; 5 = C_1 + 2C_2 + C_3 \text{ и } \frac{19}{2} = 3C_1 + 3C_2 + C_3,$$

изъ кои слѣдує $C_1 = C_2 = \frac{3}{2}$, $C_3 = \frac{1}{2}$, съ тима пакъ вредностима после подпуно определѣный обштій членъ тогъ другогъ реда,

$$v = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}x(x-1)(2x+14) + 3x + 1\right].$$

е.) Сабиранѣ редова.

§ 255.

По § є 204. $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, узимаюћи пакъ лево и десно сбирове имамо

$$f(x) = \Sigma f(x+\Delta x) - \Sigma f(x).$$

Истимъ начиномъ добыямо іошъ

$$f(x+\Delta x) = \Sigma f(x+2\Delta x) - \Sigma f(x+\Delta x)$$
$$f(x+2\Delta x) = \Sigma f(x+3\Delta x) - \Sigma f(x+2\Delta x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f[x+(n-1)\Delta x] = \Sigma f(x+n\Delta x) - \Sigma f[x+(n-1)\Delta x],$$

а ако све ове єдначине саберемо,

$$f(x)+f(x+\Delta x)+f(x+2\Delta x)+\ldots.+f[x+(n-1)\Delta x]=S_n$$
$$=\Sigma f(x+n\Delta x)-\Sigma f(x)+C \quad \ldots\ldots \quad (1.$$

Съ овимъ смо образцемъ у станю све оне редове сабрати, при коима 1.) сви чланови постаю одъ обштегъ єдногъ члана $f(x)$, узимаюћи у истомъ место x редомъ n разны, међусобомъ єднако (съ Δx) разликуюћи се вредностій, и где є 2.) $f(x)$ такова функція, да се нѣнъ сбиръ $\Sigma f(x)$ може определити съ дояко познатимъ сбирнимъ образцима.

Сталный брой C притомъ, као и при іошъ слѣдуюћимъ образцима, одкривамо лако помоћу приметбе: да одъ ниєдногъ члана нема ни сбира, т. є. да за $n=0$ вопросный сбиръ мора быти такођеръ нулла, — или да є сбиръ само првога члана раванъ истомъ првомъ члану.

§ 256.

Узмимо одма примере.

1.) Тражи се сбиръ реда a^x, $a^{x+\Delta x}$, $a^{x+2\Delta x}$, ... $a^{x+(n-1)\Delta x}$, ...

Ту є $f(x)=a^x$, дакле $f(x+n\Delta x)=a^{x+n\Delta x}$, и зато по горнѣмъ образцу

$$S_n = \Sigma a^{x+n\Delta x} - \Sigma a^x + C.$$

Ово дає далѣ

$$S_n = a^{n\Delta x} . \Sigma a^x - \Sigma a^x + C$$

$$= \left(a^{n\Delta x} - 1\right) \Sigma a^x + C$$

$$= \left(a^{n\Delta x} - 1\right) \cdot \frac{a}{a^{\Delta x} - 1} + C \qquad (\S.\ 231.)$$

$$= \frac{a^{x+n\Delta x} - a^x}{a^{\Delta x} - 1} + C.$$

За $n = 0$ быва $S_0 = 0 + C$, одкуда се види да є сталный брой $C = 0$. Траженый є дакле сбиръ

$$S_n = \frac{a^{x+n\Delta x} - a^x}{a^{\Delta x} - 1} = \frac{a^x\left(a^{n\Delta x} - 1\right)}{a^{\Delta x} - 1},$$

каогодъ што є нађенъ у алгебри на другій начинъ.

2.) Иште се сбиръ реда

$$\sin x,\ \sin(x + \Delta x),\ \sin(x + 2\Delta x)\ .\ \ .\ \ .$$

При томе є обштій членъ $f(x) = \sin x$, а

$$f(x + n\Delta x) = \sin(x + n\Delta x);$$

зато по горнѣмъ образцу I.)

$$S_n = \Sigma \sin(x + n\Delta x) - \Sigma \sin x + C.$$

По §. є 231. $\Sigma \sin x = -\frac{\cos(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x}$, а

$$\Sigma \sin(x + n\Delta x) = -\frac{\cos(x + n\Delta x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x}$$

$$= -\frac{\cos[x + (n - \frac{1}{2})\Delta x]}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x};$$

дакле $S_n = -\frac{\cos[x + (n - \frac{1}{2})\Delta x] - \cos(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x} + C$

$$= \frac{\sin[x + \frac{1}{2}(n - 1)\Delta x] . \sin\frac{n}{2}\Delta x}{2 \sin \frac{1}{2}\Delta x} + C,$$ *) или изъ

---

*)
$$-\cos\left[x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right] + \cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)$$

$$= -\cos\left[\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right) + n\Delta x\right] + \cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)$$

$$= -\cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)\cos n\Delta x + \sin\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)\sin n\Delta x + \cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)$$

узрока што є за $n = 0$, и S_n и $\sin\frac{n}{2}\Delta x$ као чинитель нађенога израза, па зато све, те и сталный брой $C = 0$:

$$S_n = \frac{\sin\left[x + \frac{1}{2}(n-1)\Delta x\right] . \sin\frac{n}{2}\Delta x}{\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

На истый начинъ налазимо да є сбиръ реда $\cos x$, $\cos(x + \Delta x)$, $\cos(x + 2\Delta x)$, ...

$$S_n = \frac{\cos\left[x + \frac{1}{2}(n-1)\Delta x\right] . \sin\frac{n}{2}\Delta x}{\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

3.) Хоће се сбиръ реда x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, ...

Ту имамо $f(x) = x$, а $f(x + n\Delta x) = x + n\Delta x$; зато є по нађеномъ образцу I.,

$$S_n = \Sigma(x + n\Delta x) - \Sigma x + C.$$

Но по §. є 224. $\Sigma x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\Delta x} - x\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left(x^2 - x\Delta x\right)$, а

$$\Sigma(x + n\Delta x) = \frac{1}{2\Delta x}\left[(x + n\Delta x)^2 - (x + n\Delta x)\Delta x\right] =$$

$$= \frac{1}{2\Delta x}(x^2 + 2n\Delta x . x + n^2\Delta^2 x - x\Delta x - n\Delta^2 x);$$ дакле

$$S_n = \Sigma(x + n\Delta x) - \Sigma x = \frac{1}{2\Delta x}\left[2nx\Delta x + (n^2 - n)\Delta^2 x\right] +$$

$$+ (C = 0) = \frac{n}{2}\left[2x + (n-1)\Delta x\right].$$

a.) Ако є $x = 1$ и $\Delta x = 1$, имамо редъ

1, 2, 3, 4, ...

$$= \cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)\left(1 - \cos n\Delta x\right) +$$

$$+ \sin\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)\sin n\Delta x$$

$$= \cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right) 2\sin^2\frac{1}{2}n\Delta x +$$

$$+ \sin\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right) 2 . \sin\frac{n}{2}\Delta x\cos\frac{n}{2}\Delta x$$

$$= 2\left[\cos\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n}{2}\Delta x +\right.$$

$$\left. + \sin\left(x - \frac{1}{2}\Delta x\right)\cos\frac{n}{2}\Delta x\right]\sin\frac{n}{2}\Delta x$$

$$= 2\sin\left[x + \frac{1}{2}\left(n - 1\right)\Delta x\right]\sin\frac{n}{2}\Delta x$$

и при томе $S_n = \frac{1}{2} n (n+1) = \frac{n^{2|1}}{2}$

б.) Ако є $x = 1$ а $\Delta x = 2$, дакле вопросный редъ 1, 3, 5, 7, ..., онда є $S_n = n^2$.

в.) За редъ 2, 4, 6, 8, ... имамо $x = 2$ и $\Delta x = 2$, дакле $S_n = n(n+1) = n^{2|1}$.

И т. д.

§. 257.

Представимо сбиръ првы $x - 1$ членова реда

$$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \; . \; . \; . \; . \; f(x-1) \quad f(x) \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

са S_{x-1}, а сбиръ одъ x членова са S_x; бытће

$S_x = S_{x-1} + f(x)$ или $S_x - S_{x-1} = f(x)$, то ће рећи $\Delta_1 S_{x-1} = f(x)$ и зато

$$\left.\begin{aligned} S_{x-1} &= \Sigma_1 f(x) + C \\ \text{а ако овде узмемо } x+1 \text{ место } x, \quad S_x &= \Sigma_1 f(x+1) + C \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Изъ овога видимо да ћемо сбиръ првы n членова некога реда добыти, ако по првомъ одъ она два образца изнаћемо найпре $\Sigma_1 f(x)$, па у томе после узмемо $n+1$ место x.

Овай є начинъ сабираня нарочито за оне редове, гди є обштій членъ израженъ као функція обште сказальке членова; но може се, као што ћемо одма видити, лако и на друге редове употребити.

§ 258.

Определюћи овимъ другимъ начиномъ

1.) сбиръ реда 3, 9, 18, 30, 45, ..., коєга є обштій членъ као функція сказальке по §. 254. $f(x) = \frac{3}{2}(x^2 + x)$, имамо по првомъ образцу подъ II.)

$$S_{x-1} = \Sigma_1 f(x) \frac{3}{2}\left(\Sigma_1 x^2 + \Sigma_1 x\right) = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^3 - x\right) = \frac{1}{2} x \left(x+1\right)\left(x-1\right);$$

ако пакъ ту узмемо $n+1$ место x, слѣдуе траженый сбиръ

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)n = \frac{n^{2|1}}{2}.$$

2.) При реду подъ **1.** у §. **256.** имамо n. чланъ $f(x) = a^{x+(n-1)\Delta x}$.

Да бы га изразили као функцію сказальке, метнимо v место x, x место n и δ место Δx; бытће тако обштій чланъ

$$\varphi(x) = a^{v+(x-1)\delta} = a^{(v-\delta)+\delta x}. \text{ Дакле}$$

$$S_{x-1} = \Sigma_1\,\varphi(x) = a^{v-\delta}.\,\Sigma_1\,a^{\delta x} = a^{v-\delta}.\,\Sigma_1\,(a^{\delta})^x$$

$$= a^{v-\delta}\cdot\frac{(a^{\delta})^x}{a^{\delta}-1} = \frac{a^{v+(x-1)\delta}}{a^{\delta}-1} + C.$$

За $x=1$ мора быти $S_{x-1} = S_0 = 0$, и зато имамо

$$0 = \frac{a^v}{a^{\delta}-1} + C, \text{ одкуда слѣдуе}$$

$$C = -\frac{a^v}{a^{\delta}-1},$$ а съ томъ вредности по горнѣмъ изразу

$$S_{x-1} = \frac{a^{v+(x-1)\delta}}{a^{\delta}-1} - \frac{a^v}{a^{\delta}-1} = \frac{a^{v+(x-1)\delta} - a^v}{a^{\delta}-1}.$$

Узимаюћи овде садъ $n+1$ место x, и враћаюћи за v и δ ньиове прве вредности x и Δx, добыямо траженый сбиръ

$$S_n = \frac{a^{x+n\Delta x} - a^x}{a^{\Delta x}-1},$$

као пре другимъ начиномъ у §. 256.

Место да бы израдили овимъ начиномъ іошъ и остале у истомъ §. узете примере, узмимо болѣ неколико новы.

§ 259.

Изъ алгебре знамо да є обштій чланъ фигурны или сличны броєва v. реда за основный редъ 1, 1, 1, 1, ... , као функція сказальке

$$f(x) = \frac{x^{v|1}}{v\,!}.$$

Сабираюћи дакле тай редъ имамо, по §. 231.

$$S_{x-1} = \Sigma_1 \frac{x^{v|1}}{v\,!} = \frac{(x-1)^{v+1|1}}{(v+1)!} + C.$$

За $x = 1$, постае $S_{x-1} = S_0 = 0$, а и нађеный изразъ у десной части $= 0$; имамо дакле за определьиванѣ сталнога броя C едначину $0 = 0 + C$, изъ кое се види да е истый брой $C = 0$. Тога ради сада

$$S_{x-1} = \frac{(x-1)^{v+1|1}}{(v+1)\,!}.$$

Поставляюћи ту $n+1$ место x, слѣдуе траженый сбиръ

$$S_n = \frac{n^{v+1|1}}{(v+1)!}.$$

Овай изразъ дае за $v = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots$ редомъ

сбиръ сличны бровва 1. реда $S_n = \frac{n^{2|1}}{2\,!} = \frac{n(n+1)}{2\,!}$,

„ „ „ 2. „ $S_n = \frac{n^{3|1}}{3\,!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3\,!}$

„ „ „ 3. „ $S_n = \frac{n^{4|1}}{4\,!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4\,!}$

. . . . ;

све као што смо нашли у алгебри на другій начинъ.

2.) Тражи се сбиръ

$$S_n = x^{m|\Delta x} + (x + \Delta x)^{m|\Delta x} + (x + 2\,\Delta x)^{m|\Delta x} + \ldots + \\ + [x + (n-1)\,\Delta x]^{m|\Delta x} + \ \ldots$$

Ту е обштій членъ $\varphi(x) = [x + (n-1)\Delta x]^{m|\Delta x}$. Да бы га изразили као функцію сказальке, метнимо v место x, x место n и δ место Δx; бытѣе после

$f(x) = [v + (x-1)\,\delta]^{m|\delta}$. Зато обзиромъ на §. 231.

$$S_{x-1} = \Sigma_1 f(x) = \frac{[v + (x-2)\delta]^{m+1|\delta}}{(m+1)\delta} + C.$$

Постављаюћи овде $x = 1$, слѣдую

$$S_0 = 0 = \frac{(v-\delta)^{m+1|\delta}}{(m+1)\delta} + C,$$ и одтуда сталный

брой $$C = -\frac{(v-\delta)^{m+1|\delta}}{(m+1)\delta}.$$ Збогъ тога садъ

$$S_{x-1} = \frac{[v+(x-1)\delta^{m|\delta} - (v-\delta)^{m+1|\delta}}{(m+1)\delta},$$

а ако овде повратимо место v и δ нњиове прве вредности x и Δx, а место x узмемо $n+1$: траженый сбиръ

$$S_n = \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{m+1|\Delta x} - (x-\Delta x)^{m+1|\Delta x}}{(m+1)\Delta x}.$$

§ 260.

Сви ови примери єсу безъ сумнѣ довольно упутство за почетника, да по томе може сада самъ и друге редове сабрати, при коима є обштій членъ функція сбирльива. Тога ради напоминѣмо само іошъ, да се истимъ начиномъ могу сабрати и млоги безкрайни редови; єръ имаюћи сбиръ одъ n членова слѣдоваће изъ нѣга безъ сумнѣ одма сбиръ целогъ безкрайногъ реда, чимъ само узмемо да є $n = \infty$.

Завршуюћи овай предметъ*), и съ ньимъ целу ову прву часть, да покажемо іошъ и употреблѣнѣ сбирнога рачуна на

ж.) Определьиванѣ неки комбинаторны образаца.

§ 261.

Задатакъ 1. Изнаћи све могуће двойке безъ повтораваня одъ x разны основака.

---

*) Више о различномъ и сбирномъ рачуну наћи се може, међу осталимъ, у врстномъ дѣлу одъ Лакроа (Lakroix): Traité du différentiel et du calcul intégral 2. edit. Paris 1810. III. часть подъ надписомъ traité des Différences et des Séries.

Решенѣ. Траженый брой двояка безъ сумнѣ быт'ће нека функція броя основака x. Означимо га дакле са $f(x)$.

Ако садъ узмемо къ датимъ основцима іошъ єданъ, свега дакле $x+1$ основакъ, онда, као што є лако увидити, брой одъ нѣи могући двояка $f(x+1)$, состоятће се изъ пређашнѣгъ броя двояка $f(x)$ одъ x основака и іошъ x новы, коє дає новый основакъ у савюзу са свакимъ одъ прва x; т. є. бытће

$$f(x+1)=f(x)+x.$$

Одтудъ слѣдує $f(x+1)-f(x)=x$, т. є.

$$\Delta_1 f(x)=x \quad \text{и зато}$$

$$f(x)=\Sigma_1 x=\frac{3}{2}(x^2-x)+C.$$

(§. 224.)

За $x=0$ постає $f(x)=0$, єръ є сасвимъ наравно, да одъ ниєдногъ основка неможе быти ни икаковы слогова. Дакле є $C=0$, и зато садъ траженый брой двояка безъ повтораваня одъ x разны основака

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)=\frac{1}{2}\,x\left(x-1\right)=\frac{x^{2|-1}}{2\,!}=\binom{x}{2}.$$

§ 262.

Задатакъ 2. Тражи се брой трояка, четворака, и т. д., уобште брой *п*яка безъ повтораваня одъ x разны основака.

Решенѣ. Ако изъ горе наведеногъ узрока означимо вопросный брой трояка съ $f(x)$, и узмемо после іошъ єданъ новый основакъ: онда є по себи увиђавно, да се брой трояка одъ овы $x+1$ основака $f(x+1)$, мора состояти изъ броя трояка одъ x основака, и іошъ онолико, колико они даю двояка, єръ се свакій одъ тій двояка саюжава съ новимъ основкомъ у єданъ троякъ. Имамо дакле обзиромъ на пређашнѣй §. а помоћу §. 224.

$$f(x+1)=f(x)+\frac{x\,(x-1)}{2}, \quad \text{т. є.}$$

$$\varDelta_1 f(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right), \text{ а}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\Sigma_1\left(x^2 - x\right) = \frac{1}{2}\left(\Sigma_1 x^2 - \Sigma_1 x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) \\ &= \frac{x^{3|-1}}{3!}. \end{aligned}$$

Сталный брой притомъ, изъ истогъ узрока као у пређашнѣмъ §., $C = 0$.

На истый начинъ налазимо брой четворака

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-2)}{4!} = \frac{x^{4|-1}}{4!} = \binom{x}{4},$$

и т. д., уобште брой *n*няка

$$f(x) = \frac{x^{n|-1}}{n!} = \binom{x}{n},$$ као што смо то нашли у алгебри на другій начинъ.

§ 263.

Задатакъ 3. Пыта се за брой премена (варіяція) 2., 3., 4., уобште *n*. реда одъ x разны основака, т. є за брой ньиовы двояка, трояка и т. д., уобште за брой *n*яка съ обзиромъ на могуће премештаѥ (пермутаціє) у свакомъ одъ тій слогова, найпре безъ повтораваня, а после съ повторlivaнѣмъ.

Решенѣ 1. Означуюћи брой премена другогъ реда одъ x основака съ $f(x)$, имамо одъ $x + 1$ основка

$$f(x+1) = f(x) + 2x,$$

єръ новый основакъ дає съ пређашньимъ x основака, колико ньи толико двояка, а свакій одъ овы два премештая дозволява.

Изъ тогъ израза слѣдує

$$f(x+1) - f(x) = 2x, \text{ т. є.}$$

$$\varDelta_1 f(x) = 2x, \text{ и зато}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,\Sigma_1 x = x^2 - x \\ &= x(x-1) = x^{2|-1}. \end{aligned}$$

Сталный є брой притомъ изъ истогъ узрока као у пређашньимъ задатцима нулла.

Означуюћи далѣ брой премена трећегъ реда одъ x основака съ $f(x)$, имамо брой премена тогъ истогъ реда одъ $x+1$ основка,

$$f(x+1)=f(x)+6.x(x-1),$$

єръ се новый основакъ са свакомъ пременомъ другогъ реда одъ пређашньи x основака саюжава у новый троякъ, а свакій одъ тій трояка 6. премештая допушта (алгебра).

Изъ тогъ израза слѣдує

$$f(x+1)-f(x)=6x(x-1), \text{ т. є.}$$
$$\Delta_1 f(x)=6(x^2-x), \text{ одтудъ пакъ}$$
$$f(x)=6\Sigma_1(x^2-x)=6(\Sigma_1 x^2-\Sigma_1 x)$$
$$=x(x-1)(x-2)=x^{3|-1}.$$

На истый начинъ одъ x основака брой премена четвртогъ реда:

$$f(x)=x^{4|-1},$$

брой премена петогъ реда:

$$f(x)=x^{5|-1},$$

. . . .

брой премена n. реда:

$f(x)=x^{n|-1}$, као што смо нашли у алгебри на другій начинъ.

Решенѣ 2. За премене съ повтораванѣмъ. —

Нека є брой премена другогъ реда съ повтораванѣмъ $f(x)$; бытће брой премена одъ $x+1$ основака, т. є.

$$f(x+1)=f(x)+2x+1,$$

єръ новый основакъ образує найпре са свакимъ одъ x пређашньи, єданъ двоякъ, и свакій таковый двоякъ допушта два премештая, собомъ самимъ пакъ прави єданъ двоякъ, кои се изпремештати неможе.

Изъ тога израза слѣдує

$$f(x+1)-f(x)=2x+1, \text{ т. є.}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 f(x) &= 2x + 1, \text{ и зато}\\ f(x) &= 2\,\Sigma_1 x + \Sigma_1 1\\ &= x^2 - x + x\\ &= x^2.\end{aligned}$$

Сталный є брой 0.

Ако садъ опетъ $f(x)$ значи брой премена' трећегъ реда, быт'ће брой премена одъ $x+1$ основка,

$$f(x+1) = f(x) + 3x^2 + 3x + 1,$$

по томе, што 1. новый основакъ, саюженъ са свакомъ пременомъ другога реда одъ пређашньи x основака, дає x^2 разны трояка, одъ коій свакій допушта 3 премештая; што 2. новый основакъ двапутъ узетъ са свакимъ одъ x пређашньи основака, дає x трояка, и свакій одъ тій дозволява 3 премештая; найпосле 3. што новый основакъ, самъ трипутъ узетъ, дає іошъ єданъ троякъ, кои се премештати неможе.

Изъ нађеногъ тогъ израза слѣдує

$$\begin{aligned}f(x+1) - f(x) &= 3x^2 + 3x + 1, \text{ т. є.}\\ \Delta_1 f(x) &= 3x^2 + 3x + 1, \text{ и зато}\\ f(x) &= 3\Sigma_1 x^2 + 3\Sigma_1 x + \Sigma_1 1\\ &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + x\\ &= x^3.\end{aligned}$$

Сталный брой $C = 0$.

На истый начинъ добыямо брой премена 4. реда

$$f(x) = x^4,$$

. . . . ; уобште брой премена $n.$ реда

$$f(x) = x^n,$$ све као пре у алгебри.