РАЧУН С ДЕЛОВИМА

ЗА СВАКОГА,

а поглавито за учитеље мањих школа,

САСВИМ ПРОСТО ОБЈАСНИО

ПРОФЕСОР

Е. ЈОСИМОВИЋ.

У БЕОГРАДУ

У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ.

1864.

Од кога сам и за колико књига примио новаца.

Из Алексинца	од	г.	А. Петровића, секрет. за	4	књ.
" Београда	"	"	Д. Матића, секрет. сов. "	4	"
" "	"	"	С. Грујовића, " в. суда "	4	"
" "	"	"	J. Ристића, нач. грађ. "	12	"
" "	"	"	Д. Динуловићи, секрет. управе фонд. . . . "	10	"
" "	"	"	Д. Поповића, рачунов. мин. правде . . . . "	8	"
" "	"	"	Ђ. Пешике, капетана "	18	"
" "	"	"	П. Вевецкога, учит. "	14	"
" "	"	"	В. Поповића, поручн. "	19	"
" "	"	"	А. Делина, апотекар. "	2	"
" "	"	"	J. Протића, рачуновод. минист. унутр. дел. "	17	"
" "	"	"	К. Атанацковића, секр. трг. суда . . . . . "	6	"
" "	"	"	С. Филиповића, чл. суда. "	11	"
" "	"	"	М. Радивојевића, правн. "	19	"
" "	"	"	К. Салаковића . . . . "	20	"
" "	"	"	С. Рајчевића . . . . "	20	"
" "	"	"	И. Цветковића, подпор. "	10	"
" "	"	"	Р. Алимпића, подпол. "	8	"
" "	"	"	П. Димића, учитеља "	16	"
" "	"	"	Ђ Калпакџића, надз. чит. "	4	"
" "	"	"	А. Ђорђевића, сек. конз. "	10	"
" "	"	"	М. Вукашиновића, ср. нач. "	20	"
" "	"	"	С. Марковића, профес. тргов. школе . . . "	14	"
" "	"	"	М. Симића, рачуноисп. контроле . . . . . "	8	"
" Ваљева	"	"	А. Ђорђевића, рачунов. "	22	"
" Зајечара	"	"	Д. Рашића проф. гимн. "	21	"
" "	"	"	Гр. Лаушевића, секр. суда . . . . "	12	"
" Јовановца	"	"	И. Давидовића, поштар. "	6	"
" Крагујевца	"	"	И. Чолак-Антића, кап. "	18	"
" Лознице	"	"	М. Јоксимовића, члан суда . . . . "	14	"

РАЧУН С ДЕЛОВИМА

ЗА СВАКОГА,

а поглавито за учитеље мањих школа

САСВИМ ПРОСТО ОБЈАСННО

ПРОФЕСОР

Е. ЈОСИМОВИЋ.

У БЕОГРАДУ.
У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ.
1864.

ПРЕДГОВОР.

Оглашујући ову моју књигу рекао сам, да ће млогима бити користна по томе, што поучава баш оном рачуну, који је свакоме врло потребан, а млоги га незнају као што ваља.

Осим тога казао сам још, и да је књига тако просто написана, да ће је моћи разумети и онај, који само уме читати и писати, и притом није сасвим невешт у првим рачунима с целима бројевима.

И доиста, ко поуке у предмету ове књижице потребује, а условљену способност има, па својски прионе проучавати је од почетка до краја, свуд самном заједно мисли и све друго учини, што му у њој препоручујем: тај ће напоследку сам признати, да ми има за шта захвалити. Најмање рачун може се научити самим читањем; ту баш, више него игде, мора сваки, и памећу и руком сам да ради, ако му је доиста до тога, да што научи. Ко тако неучини, нек буде тако справедљив, да некриви мене и моју књигу, ако од ове неузима никакве вајде.

Имена пренумераната нисам штампао. Не зато, што би ме иначе штампа више стала, него због тога што мислим, да они, којима је до саме ствари стало, неће марити, што им други неће читати имена, као подпомагача наше књижевности, а ја сам ову књигу написао само за оне, којима је до ствари. Ако случајно кога има, да му је жао што се као пренумеранат неспомиње, нека ми за сад опрости, па ма други пут и неузео више мојих књига.

Нуждније но имена предплатаца видило ми се, да, за предохрану сваког подозрења на ме, назначим сва она лица, од којих сам, и за колико књига, новаца примио, што је изнутра на корицама и урађено. Ако је ко код кога другог, осим именоване господе, моју књигу предплатио, нека је од тога иште, а мене нек несматра за свог дужника.

У осталом искрено се радујем, што сам приликом издавања ове књиге уверио се, да код нашега света већ пролазе и књижевна дела озбиљнога и научнога садржаја, а не, као што су се дојако млоги аутори с правом жалили, само лакрдије.

Најпосле лепо захваљујем свима, који су ми́ купили пренумеранте. То је истина мала награда за такав труд, да није друге претежније: собствено осећање, да су подпомогли ствар, која ће бар гдеком Србину принети користи.

У Београду на Дмитровдан **1864**. год.

Е. Јосимовић.

Неки нуждни појми и послови из рачунице, као

УВОД.

1. Свака ствар, сматрана за себе, зове се **јединица** ствари њенога рода. Један грош н. п. јединица је гроша, једна кућа јединица кућа, један аршин јединица аршина.

2. Свака мложина јединица истога рода зове се **број**. Н. п. три хвата, осам дуката, седамнајст година.

3. Сваки број може служити као јединица за означење још већи бројева. Н. п. 100 ока (товар) узимају се за јединицу при опредељивању великих терета; 24 табака хартије служе за јединицу веће мложине хартије; 500 гроша (кеса) сматрају се као јединица за избрајање велике суме гроша; и т. д.

4. Број, при ком је име јединице изречено, зове се **наречен број**. Н. п. 9 књига, 15 војника, 1000 миља. Неизрече ли се пак при каквом броју име јединице, онда се број зове **ненаречен**, као н. п. пет, дваест и три, сто осам, и т. д.

5. Једнако наречени бројеви и онаки, које можемо свести на једнако име, зову се **једноимени**. Напротив, различно наречени бројеви и онаки, које неможемо довести под једнако име, зову се **разноимени**. Бројеви н. п. 25 гроша и 19 гроша, или 2 хвата и 5 стопа, јесу једноимени бројеви. Прва два по томе, што су већ једнако наречени, именем грош, друга два пак зато, што 2 хвата можемо изразити као број стопа (у хвату има 6 стопа, у 2 хвата дакле 12 стопа), или што се 5 стопа могу казати као део хвата (у хвату има 6 стопа, дакле је 1 стопа 6. део хвата, а 5 стопа су 5 шестина хвата).

Напротив 3 метра и 8 дуката, 7 књига и 42 гроша јесу бројеви разноимени.

Има најпосле бројева, који су под неким нарицима разноимени, а под другима једноимени; н. п. 3 врбе, 5 липа и 4 бреста јесу под тим именима бројеви разноимени, под именом **дрва** пак били би једноимени.

6. Наречени бројеви представљају ма како наречене од онолико исто јединица. Н. п. број 5 може значити 5 људи, 5 кућа, 5 дуката, уобште 5 какогод названих јединица једнога рода.

Што дакле каквим рачуном дознамо за ненаречене бројеве, важи и за ма како наречене. Тако н. п. ако 5 и 3 чини заједно 8, то су без сумње и 5 ока и 3 оке скупа 8 ока; или, ако од 7 одузевши 5 остају 2, то без сумње од 7 гроша, кад потрошимо 5 остаће 2 гроша; или, кад 3 пут по 4 чини 12 (3×4, 12), то ћемо, узимајући 3 пут по 4 #, без сумње имати свега 12 #; најпосле, кад се 3 у 6 налази 2 пут ($6 : 3 = 2$), то нема сумње, да се н. п. у 6 књига по 3 књиге находе 2 пут.

Због тог пространог значења ненаречених бројева и отуд проистичуће краткоће у рачунима, употребљују се при показивању основа и начина сваког рачуна свагда ненаречени бројеви.

7. Два или више датих бројева у један скупити, зове се те бројеве **сабрати**. Посао којим то бива, зове се **сабирање**. Дати зато бројеви зову се **сабирци**, а изнађени број, који је колики сви сабирци заједно, зове се **сбир**

Знак сабирања, т. ј. знак којим сабирање налажемо, јесте међу сабирке стављен прави крст (+), који се изговара **више**.

8. Посао, којим налазимо за колико је дати неки број од другог, или од више других скупа, већи, или, што на једно излази, посао, којим дознајемо колико остаје од неког броја, кад се други неки, или више других од њега одузму, зове се **одузимање.** Први број притом зове се **умалимак** а онај други, или они други бројеви јесу **умалитељи.** Изнађени број зове се **разлика** или **остатак.**

Знак одузимања је лежећа црта (—), коју мећемо међу умалимак и умилитеља. Изговара се **мање.**

9. Рачун, којим дознајемо колики број излази, кад дати неки број онолико пута узмемо, колико се пута другим неким бројем назначи, зове се **мложење.** Први дати број зове се притом **мложимак,** а онај други **мложитељ,** мложењем пак изнађени број зове се **производ.** У ствари је очевидно сасвим свеједно, хоћемо ли мложимак онолико пута узети, колико каже мложитељ (н. п. број **4** **3** пут), или пак мложитеља онолико пута, колико показује мложимак (број **3** 4 пута), и стога зову се оба та броја једним именом **чинитељи** траженога производа.

Знак је множења међу множимак и множитеља написана точка (.) или коси крст (×), изговара се пак **множено са**, или простије **пута**.

10. Испитивање колико је пута у датом неком броју садржан други, такођер дати број, зове се **деоба**, и притом први број **делимак**, а други **делитељ**. Изнађени број, што показује колики је део делитељ од делимка, зове се **количник**. Производ од делитеља и количника наравно мора бити увек раван делимку. Каогод што количкник показује колико је пута у делимку садржан делитељ, тако исто показује овај опет, колики је део од делимка количник.

Знак деобе јесу две, једна врз друге стојеће точке (:) између делимка и делитеља, и изговара се **делено са**, или простије само **чрез**.

11. Сва четири поменута рачуна зову се **основни рачуни**, или 4 проста вида рачуна, и ја их овде за целе бројеве предпостављам као познате. Казати притом имам само још, да се између сваког рачуна и последка (резултата) тог рачуна, као и између свака два бројна израза једнаке вредности меће знак једнакости (=), који изговарамо **равно**. Н. п. $3 \times 4 = 2 . 6 = 12$, 3пут 4 равно 2пут 6 равно 12.

12. Сваки број, који, осим јединицом (1) и њим самим, никаквим другим бројем неможемо поделити без остатка, зове се **прост**; број напротив, у ком су још и други бојеви садржани без остатка, зове се **сложен**.

Прости бројеви јесу осим **1** још **2**, **3**, **5**, **7**, **11**, **13**, **17**, **19**, **23**, и т. д., сложени су напротив бвојеви **4**, **6**, **8**, **9**, **10**, **12**, **14**, **15**, **16**, **18**, **20**, **21**, **22**, и т. д.

13. Уобште су још сви бројеви или **безпарни** или **парни**. Парни су они бројеви, које можемо разделити с **2** без остатка, а остали су безпарни. Безпарни су дакле бројеви **1**, **3**, **5**, **7**, **9**, **11**, **13**, и т. д., а парни **2**, **4**, **6**, **8**, **10**, **12**, и т. д. У ред парних бројева рачуна се и **0** (нула).

14. Сваки сложен број постао је међусобним множењем неких простих бројева, н. п. број **6** из простих бројева **1**, **2** и **3**, јер је $1 . 2 . 3 = 6$. Прости бројеви, из коих је сложени неки број постао множењем, зову се његови **чинитељи**.

15. Разлагање сложеног броја у просте чинитеље нуждно је у млогим рачунима и бива овако:

Делимо дотични број, започевши од 2, редом са свима оним простим бројевима, који су у њему садржани без остатка, и са сваким колико год пута можемо, док тако радећи ненаиђемо на количник, који је и сам прост број. Сви прости бројеви, са којима смо могли делити, и последњи количник јесу онога броја прости чинитељи.

Да разложимо у просте чинитеље н. п. број 1501500.

1501500 : 2	25025 : 5
750750 : 2	5005 : 5
375375 : 3	1001 : 7
125125 : 5	143 : 11
	13

Тај број постао је дакле међусобним мложењем простих бројева 2, 2, 3, 5, 5, 5, 7, 11 и 13, или он је производ од 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 5 . 7 . 11 . 13.

16. Да при овом послу неби времена губили и у залуд се трудили, нуждно је да знамо, с којим се простим бројевима какав број може делити без остатка. **Ево знаци за дељивост са неким простимъ бровима.**

Број какав можемо без остатка делити

с 2, ако на месту единица у њему стоји 0 или парна цифра (4, 6, 8),

с 3, кад је у сбиру његових цифара садржан број 3 без остатка,

с 5, кад у месту јединица стоји 0 или 5,

с 11, кад разлика од сбира цифара на безпарним местима (првом, трећем, петом, и т. д., разуме се с десна у лево) и сбира цифара на парним местима (другом, четвртом, и т. д.) буде 0, 11, 22, 33, уобште каква мложина броја 11.

За друге просте бројеве не казујем знаке дељивости, јер је њихова употреба дангубнија и труднија но само кушање деобом.

Извиди са којим од поменутих бројева можеш без остатка делити број 30030.

17. Број, у ком су други неки бројеви садржани без остатка, зове се тих бројева **садржатељ**, а ако је тога својства најмањи број, онда је њихов **најмањи садрждтељ.**

Сваки од бројева 60, 120, 240, 600 и 1320 садржи као чинитеље бројеве 2, 3, 4, 5, 6, 10 и 12; сваки је од оних бројева дакле садржатељ ових, али је број 60 њихов најмањи садржатељ.

18. Најмањег садржатеља више бројева налазимо, кад све дате бројеве разложимо у просте чинитеље, и сваког чинитеља узмемо у међусобно множење онолико пута, колико се пута у ком од датих бројева **највише** налази. Производ одтуд биће тражени најмањи садржатељ.

Да изнађемо најмањег садржатеља бројева **3, 15, 28, 216** и **4812.**

Разлажући ове бројеве у просте чинитеље, по упутству под **15.**), налазимо да је

$$3 = 3$$
$$15 = 3 . 5$$
$$28 = 2 . 2 . 7$$
$$216 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3, \text{ а}$$
$$4812 = 2 . 2 . 3 . 401$$

Број дакле $2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 7 . 401 =$ **86616** најмањи је садржатељ датих бројева.

19. Кад међу бројевима, коих најмањег садржатеља тражимо, има неких, који су у другима подпуно садржани, онда међу чинитељима ових налазиће се наравно и сви чинитељи оних, и зато у таком случају налазимо најмањег садржатеља простије, кад најпре све оне од датих бројева, што су у другима садржани, изоставимо и само за ове друге изнађемо најмањег садржатеља по пређашњем упутству.

Нека су бројеви, за које ваља изнаћи најмањег садржатеља, н. пр. 3, 4, 6, 15, 24, 30, 72 и 108.

На први поглед опажамо, да се 3 у 6, 4 и 6 у 24, 15 у 30, а 24 у 72 подпуно (т. ј. без остатка) садрже; зато ту изоставимо све те у другима садржане бројеве 3, 4, 6, 15 и 24, па тражимо најмањег садржатеља само за 30, 72 и 108, који ће бити најмањи садржатељ свију датих бројеви.

Посао притом изгледа овако:

3, 4, 6, 15, 24, 30, 72, 108

$30 = 2 . 3 . 5$

$72 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 .$

$108 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3$; зато најмањи садржатељ свих бројева датих

$2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 = 1080$

И доиста

$1080 : 3 = 360$	$1080 : 15 = 72$
$: 4 = 270$	$: 30 = 36$
$: 6 = 180$	$: 72 = 15$

Тражи сам најмањег садржатеља бројева

2, 8, 14, 25, 27, 45, 70, 120 и 480.

20. Број, који је у другом садржан без остатка, зове се овог другог броја **мера**. Ако је у два или више бројева садржан, онда је тих бројева **заједничка мера**; а ако је тога својства највећи број, онда зове се њихова **највећа заједничка мера**.

21. **Највећу заједничку меру два броја налазимо** на овај начин:

Делимо већи број мањим, овај с остатком, остатак тај новим остатком, и овако даље, док ненаиђемо на остатак 0 или 1. У првом је случају последњи делитељ највећа заједничка мера она два броја, у другом пак случају ти бројеви немају никакву заједничку меру.

Да изнађемо највећу заједничку меру бројева 224 и 36.

$224 : 36 = 6$, остатак 8
8
$36 : 8 = 4$, остатак 4
4
$8 : 4 = 2$, остатак 0.
0

Највећа је дакле заједничка мера бројева 224 и 36, број 4, т. ј. 4 је највећи број, којим се оба она два броја могу разделити без остатка.

Још нађимо најв. зај. меру бројева **30988** и **21106**.

30988 : 21106 = 1, остатак **9882**
9882
21106 : 9882 = 2, остатак **1342**
1342
9882 : 1342 = 7, остатак **488**
488
1342 : 488 = 2, остатак **366**
366
488 : 366 = 1, остатак **122**
122
366 : 122 = 3, остатак **0**.
0

Број **122** је дакле највећа заједн. мера бројева **30988** и **21106**.

Најпосле да изнађемо још и највећу заједн. меру бројева **1113** и **205**.

1113 : 205 = 5, остатак **88**
88
205 : 88 = 2, остатак **29**
29
88 : 29 = 3, остатак **1**.
1

Бројеви **1113** и **205** немају дакле никакву заједничку меру.

22. За скраћење посла при тражењу најв. зај. мере употребљујемо особити начин писања. По томе изгледали би пређашњи примери овако:

1.) $224 \underset{8}{\overset{6}{:}} 36 \underset{4}{\overset{4}{:}} 8 \underset{0}{\overset{2}{:}} 4$

2.) $30988 \underset{9882}{\overset{1}{:}} 21106 \underset{1342}{\overset{2}{:}} 9882 \underset{488}{\overset{7}{:}} 1342 \underset{366}{\overset{2}{:}} 488 \underset{122}{\overset{1}{:}} 366 \underset{0}{\overset{3}{:}} 122$

3.) $1113 \underset{88}{\overset{5}{:}} 205 \underset{29}{\overset{2}{:}} 88 \underset{1}{\overset{3}{:}} 29$

Кад при овом послу приметимо, да каквим бројем дотични делимак само једанпут можемо делити, онда остатак пишемо одма као делитеља за следећу деобу, чим уштеђујемо двапутно писање такових остатака. Тако поступајући изгледају пређашњи примери овако:

1.) $224 \overset{6}{:} 36 \overset{4}{:} 8 \underset{0}{\overset{2}{:}} 4$

2.) $30988 \overset{1}{:} 21106 \overset{2}{:} 9882 \overset{7}{:} 1342 \overset{2}{:} 488 \overset{1}{:} 366 \underset{0}{\overset{3}{:}} 122$

3.) $1113 \overset{5}{:} 205 \overset{2}{:} 88 \underset{1}{\overset{3}{:}} 29$

ДЕЛОВИ.

I. Појми.

23. За точније рачунање неких ствари, као и за ситнију или мању радњу у трговини и занатима, готово све нуждне јединице или доиста делимо, или их помишљамо подељене на **једнаке** делове.

Тако н. п. оку, коју смо узели за јединицу тежине, помишљамо подељену на 400 једнаких делова, који се зову **драмови**, или на 4 једнака дела, које зовемо **литре**, или на два једнака дела, **полуоке**.

Тако делимо даље, код нас до сада обичну јединицу за мање дужине, **хват** на 6 једнаких делова, који се зову **стопе**, или на 72 једнака дела, који се зову **палци** и т. д.

Оне јединице, које се за рачун не деле, сматрају се саме као део већег неког броја јединица истога рода, узетог за јединицу. Тако н. п. цигље рачунамо обично јединицом **хиљада**, па купимо или продамо, и притом рачунамо н. п. половину, 3 десетине, 8 хиљадина те јединице, т. ј. 500, 200, 300 или 8 цигаља.

24. Сваки од једнаких делова, на које какву јединицу делимо, или је помишљамо подељену, називам **основни део**.

По томе основни су делови јединице половина, трећина, четвртина, петина, ... осмина, ... шеестина, и т. д., и у јединици дакле има 2 половине, 3 трећине, 4 четвртине, 5 петина, . . . 8 осмина, ... 60 шеестина, и т. д.

25. Док неузмемо све именоване основне делове какве јединице, узимамо наравно свагда мање но целу јединицу, само неки њен део, н. п. 2 трећине, 3 четвртине, 5 седмина, и т. д.

Сваки такови број основних делова јединице називам **просто део**.

По томе **сваки је део бројна вредност мања од јединице, мања од 1.**

26. Каогод што за изрицање каквога дела требамо две речи: једну, којом казујемо колико, а другу, којом казујемо какве основне делове јединице узимамо, тако исто и за писање или бележење каквог дела требамо два знака: један, који показује број, а други, који казује име узетих основних делова дотичне јединице. Први зове се **броитељ**, а други **именитељ** дела. Тако н. п. две трећине пишемо овако $^2/_3$ или $\frac{2}{3}$, при чему је број 2 броитељ, а број 3 именитељ. Црта између броитеља и именитеља свезује та два броја за знак, да оба представљају **једну** само бројну вредност, део.

27. Бројни израз, сложен из неког целог броја и једног дела, зове се **смешан број**. Н. п. $15^3/_4$. У том имамо 15 целих јединица и још 3 четвртине јединице.

28. Кад је броитељ дела колики и именитељ, онда то по горњем појму броитеља значи, да су узети сви именитељем показани основни делови јединице, дакле она целокупна. С тога

сваки део, кога је броитељ раван именитељу, вреди 1, јединицу, или раван је јединици. Н. п. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{23}{23}$, $\frac{116}{116}$; сваки од тих делова вреди 1, раван је јединици, или представља јединицу, може се заменути јединицом.

29. Део, кога је броитељ већи од именитеља, зове се **привидан део**. Таквога је дела вредност свагда већа од јединице, од 1; јер већи броитељ од именитеља показује, да смо више именитељем назначених основих делова узели, него колико их за јединицу треба. Такав део представља којипут неки цео број, којипут пак неки смешан број.

Привидни део биће цео број, кадгод је именитељ садржан у броитељу један или више пута без остатка, т. ј. кадгод је броитељ мложина именитеља. Н. п. делови $^6/_3$, $^{12}/_4$ и $^{45}/_9$ јесу цели бројеви, о чему се лако уверавамо овако:

У јединици има $^3/_3$, а по 3 трећине налазе се у 6 трећина 2 пут; дакле у $^6/_3$ имамо 2 пут по $^3/_3$, т. ј. 2 јединице, или тај привидни део раван је целом броју 2.

У јединици има $^4/_4$, а по 4 четвртине има у 12 четвртина 3 пут $(12 : 4 = 3)$; дакле у $^{12}/_4$ имамо 3 пут по $^4/_4$ т. ј. 3 јединице, и зато привидни део $^{12}/_4$ раван је целом броју 3.

У јединици најпосле има $^9/_9$, а по 9 деветина у 45 деветина има 5 пута $(45 : 9 = 5)$; дакле у $^{45}/_9$ имамо 5 пута по $^9/_9$, т. ј. 5 јединица, тако да је привидни тај део раван целом броју 5.

Сад је лако увидити, да је привидни део смешан број, кад именитељ није у броитељу садржан без остатка. Но ево и осебите увере о том. Делови н. пр. $^7/_3$ и $\frac{113}{48}$ јесу смешани бројеви. Јер

место $^7/_3$ можемо рећи да имамо $^6/_3$ и још $^1/_3$ ($^7/_3 = {}^6/_3 + {}^1/_3$), а $^6/_3$ чине по пређашњему 2 целе јединице; дакле у $^7/_3$ имамо 2 целе јединице и још 1 трећину, $2^1/_3$, или $^7/_3 = 2^1/_3$ смешан број.

Тако исто место $\frac{113}{48}$ можемо рећи да имамо $\frac{96}{48}$ и још $\frac{17}{48}$ ($\frac{113}{43} = \frac{96}{48} + \frac{17}{48}$), а у $\frac{96}{48}$ имамо (због $96 : 48 = 2$) 2 јединице; дакле у $\frac{113}{48}$ имамо 2 јединице и још $\frac{17}{48}$, т. ј. $2\frac{17}{48}$, опет смешан број.

II. Цели бројеви као делови целих бројева.

30. Број 2 је 2 пута 1, 2×1, дакле је број 1 половина од 2, $^1/2$ од 2.

Број 3 је 3×1; дакле је број 1 трећина од 3, $^1/3$ од 3, а број 2, због $2 = 2 \times 1$, $^2/3$ од 3.

Број 4 је 4×1; дакле је број 1 четвртина, $^1/4$ од 4, а због $2 = 2 . 1$, број 2 је $^2/4$, а због $3 = 3 . 1$, број 3 је $^3/4$ од 4.

Број 5 је $5 . 1$; дакле је број 1 петина, $^1/5$ од 5; због $2 = 2 . 1$, број 2 је $^2/5$ од 5; због $3 = 3 . 1$, број 3 је $^3/5$ од 5; због $4 = 4 . 1$, број 4 је $^4/5$ од 5.

Број 6 је **6 . 1**; дакле је број **1** шестина, $^1/_6$ од 6; због **2 = 2 . 1**, број **2** је $^2/_6$ од 6; због **3 = 3 . 1**, број **3** је $^3/_6$ од 6; због **4 = 4 . 1**, број **4** је $^4/_6$ од 6; због **5 = 5 . 1**, број **5** је $^5/_6$ од 6.

И т. д.

Продужи овај посао, што даље то боље, сматрајући и остале целе бројеве 7, 8, 9, . . . као јединице, а од њих мање бројеве као њихове делове.

31. Број 4 је **2 . 2**; дакле је број **2** половина, $^1/_2$ од 4.

Број 6 је **3 . 2**; дакле је број **2** трећина, $^1/_3$ од 6; због **4 = 2 . 2**, број **4** је $^2/_3$ од 6.

Број 8 је **4 . 2**; дакле је број **2** четвртина, $^1/_4$ од 8; због **4 = 2 . 2**, број **4** је $^2/_4$ од 8, због **6 = 3 . 2**, број **6** је $^3/_4$ од 8.

Број 10 је **5 . 2**; дакле је број **2** петина, $^1/_5$ од 10; због **4 = 2 . 2**, број **4** је $^2/_5$ од 10; због **6 = 3 . 2**, број **6** је $^3/_5$ од 10: због **8 = 4 . 2**, број **8** је $^4/_5$ од 10.

Број 12 је **6 . 2**; дакле је број **2** шестина, $^1/_6$ од 12; због **4 = 2 . 2**, број **4** је $^2/_6$ од 12; због **6 = 3 . 2**, број **6** је $^3/_6$ од 12; због **8 = 4 . 2**, број **8** је $^4/_6$ од 12; због **10 = 5 . 2**, број **10** је $^5/_6$ од 12.

И т. д.

32. Број 6 је $2 . 3$; дакле је број **3** половина, $\frac{1}{2}$ од 6.

Број 9 је $3 . 3$; дакле је број **3** трећина $\frac{1}{3}$ од 9; због $6 = 2 . 3$, број **6** је $\frac{2}{3}$ од 9.

Број 12 је $4 . 3$; дакле је број **3** четвртина, $\frac{1}{4}$ од 12; због $6 = 2 . 3$, број **6** је $\frac{2}{4}$ од 12; због $9 = 3 . 3$, број **9** је $\frac{3}{4}$ од 12.

Број 15 је $5 . 3$; дакле је број **3** петина, $\frac{1}{5}$ од 15; због $6 = 2 . 3$, број **6** је $\frac{2}{5}$ од 15; због $9 = 3 . 3$, број **9** је $\frac{3}{5}$ од 15; због $12 = 4 . 3$, број **12** је $\frac{4}{5}$ од 15. И т. д.

Продужи и ово што даље то боље, сматрајући и остале сложене бројеве према оним мањим сложенима, који с њима имају заједничког каквог чинитеља.

33. Из ових сматрања увиђамо:

1.) **Сваки цео број може бити основни део другогъ целога броја, у ком је без остатка садржан, и његово име, као основнога дела другог броја, показује количник од њим подељеног тог другог броја.** Број 5 н. пр. може бити основни део од бројева 10, 15, 20, 25, . . . и јесте (због $10 : 5 = 2$) $\frac{1}{2}$ од 10, (због $15 : 5 = 3$) $\frac{1}{3}$ од 15, (због $20 : 5 = 4$) $\frac{1}{4}$ од

20, (због $25:5=5$) $\frac{1}{5}$ од 25, (због $75:5=15$) $\frac{1}{15}$ од 75, и т. д.

2.) **Сваки цео број може бити део од другог већег целога броја, и садржи онолико овим другим бројем именованих основних делова истога броја, колико у њему самом има јединица.** Број 7 н. пр. може бити део свију од њега већих бројева 8, 9, 10, 11, и т. д. и јесте $\frac{7}{8}$ од 8, $\frac{7}{9}$ од 9, $\frac{7}{10}$ од 10, $\frac{7}{11}$ од 11, итд.

3.) **Сваки цео број може бити део другог већег целог броја, ако с овим има каквог заједничког чинитеља; његов бронтељ пак, као дела другога броја, биће количник од њега самог, подељеног оним заједничкимъ чинитељем, а именитељ количник од оног другог броја, подељеног истим чинитељем.** Тако н. пр. број 8 може бити део бројева 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, и т. д., и јесте (због $8:2=4$, а $10:2=5$) $\frac{4}{5}$ од 10, (због $8:2=4$, а $12:2=6$) $\frac{4}{6}$ од 12, (због $8:4=2$, а $12:4=3$) $\frac{2}{3}$ од 12, (због $8:2=4$, а $14:2=7$) $\frac{4}{7}$ од 14, (због $8:2=4$, а $16:2=8$) $\frac{4}{8}$ од 16, (због $8:4=2$, а $16:4=4$) $\frac{2}{4}$ од 16, (због $8:8=1$, а $16:8=2$) $\frac{1}{2}$ од 16, и т. д.

34. Примери.

1.) Колики је део број 13 од броја 39? 13 у 39 садржано 3пут, 13 је дакле $^1/_3$ од 39.

2.) Колики је део број 9 од 15?

Бројеви 9 и 15 имају заједничког чинитеља 3; број 9 је дакле, због $9:3=3$, а $15:3=5$, $^3/_5$ од 15.

3.) Од којих је бројева део број 18?

Због $2 . 18 = 36$, $3 . 18 = 54$, $4 . 18 = 72$, $5 . 18 = 90$, и т. д., број 18 је $^1/_2$ од 36, $^1/_3$ од 54, $^1/_4$ од 72, $^1/_5$ од 90, и т. д.

Осим тога је даље број 18 још део свију, од њега већих бројева 19, 20, 21, 22, и т. д., и јесте $^{18}/_{19}$ од 19, $^{18}/_{20}$ од 20, $^{18}/_{21}$ од 21, $^{18}/_{22}$ од 22, и т. д.

Најпосле због заједничкога чинитеља број 18 је још део од 20, 21, 22, 24, 26, 27, . . . и то: (због $18:2=9$, а $20:2=10$) $^9/_{10}$ од 20, (због $18:3=6$, а $21:3=7$) $^6/_7$ од 21, (због $18:2=9$, а $22:2=11$) $^9/_{11}$ од 22, и т. д.

4.) Почем у грошу има 40 пара, колики део гроша јесу 1, 2, 3, 4, 5, . . . до 39 пара?

$40=40 . 1$,	дакле	1 пара је	$^1/_{40}$	гроша;
$40=20 . 2$,	„	2 паре су	$^1/_{20}$	„
због $3=3 . 1$,		3 „ јесу	$^3/_{40}$	„

због $40 = 10 . 4$, 4 паре су $^1/_{10}$ гроша;
„ $40 = 8 . 5$, 5 пара су $^1/_8$ гроша;
„ $6 : 2 = 3$, а $40 : 2 = 20$, 6 пара су $^3/_{20}$ гроша. И т. д.

5.) Рачунећи дукат у 60 гроша чаршиских, колики су део дуката 24 гроша? 15 гр.? 18 гр.? 5 гр.? 32 гр.? 53 гр? 14 гр.? 12 гр.? гр.?

Због $24 : 2 = 12$, а $60 : 2 = 30$, 24 гр. чине $^{12}/_{30}$ #; или због $24 : 3 = 8$, а $60 : 3 = 20$, 24 гр. чине $^8/_{20}$ #; или због $24 : 4 = 6$, а $60 : 4 = 15$, 24 гр. чине $^6/_{15}$ #; или због $24 : 6 = 4$, а $60 : 6 = 10$, 24 гр. чине $^4/_{10}$ #; или због $24 : 12 = 2$, а $60 : 12 = 5$, 24 гр. чине $^2/_5$ #. Овај последњи део је најпростији, а добили би га одма, да смо поделили бројеве 24 и 60 највећом њиховом заједничком мером 12 (увери се, да је овај број највећа њихова задн. мера); први количник 2 даје броитеља, а други 5 именитеља тога дела $^2/_5$.

За остале уречене бројеве гроша ради и одговори себи сам.

6.) У оки знаш да има 400 драма. Колики део оке јесу 24, 25, 35, 75, 225, 118 и 302 драма?

7.) $^2/_8$ оке, колико чине драма? а колико $^1/_{18}$ оке, колико $^5/_6$, колико $^7/_{24}$?

8.) У хвату, познато ти је, има 6 стопа. Колики део хвата јесу 1, 2, 3, 4, 5 стопа?

9.) $^3/_4$ ♯ колико гроша; ако узмеш, да у ♯ има 60 гр.

10.) Ако у дану орања има 900□° (четвороуглих хвата), колики део дана орања јесу 72□°?

11.) Кад у пруском талиру има 30 сребрених грошића, колики део пр. талира јесу 8, 12, 18 грошића?

12.) Узми од аустријске форинте, у којој има 100 кр., $^3/_4$, $^4/_5$, $^{13}/_{20}$, $^{24}/_{25}$, и кажи, колико крајцара чини сваки од тих делова форинте?

III. Цели бројеви као смешани бројеви целих бројева.

35. Број 1 је $^1/_2$ од 2,

Због $3 = 2 + 1 = 1 . 2$ и још $^1/_2$ од 2, број 3 је $1^1/_2$ од 2.

Због $5 = 2 . 2 + 1 = 2 . 2$ и још $^1/_2$ од 2, број 5 је $2^1/_2$ од 2.

Због $7 = 3 . 2 + 1 = 3 . 2$ и још $^1/_2$ од 2, број 7 је $3^1/_2$ од 2.

36. Број 1 је, због $3 = 3 . 1$, $^1/_3$ од 3

По томе, због $4 = 3 + 1 = 1 . 3$ и још $\frac{1}{3}$ од 3, број **4** је $1\frac{1}{3}$ од 3.

Због $5 = 3 + 2 = 1 . 3 + 2 . 1 = 1 . 3 + 2$ пут $\frac{1}{3}$ од 3, број **5** је $1\frac{2}{3}$ од 3.

Због $7 = 2 . 3 + 1$, број **7** је $2\frac{1}{3}$ од 3.

„ $8 = 2 . 3 + 2 = 2 . 3 + 2 . 1$, број **8** је $2\frac{2}{3}$ од 3.

Због $10 = 3 . 3 + 1$, број **10** је $3\frac{1}{3}$ од 3.

„ $11 = 3 . 3 + 2 = 3 . 3 + 2 . 1$, број **11** је $3\frac{2}{3}$ од 3.

И т. д.

37. Број **1** је, због $4 = 4 . 1$, $\frac{1}{4}$ од 4.

По томе, због $5 = 4 + 1$, број **5** је $1\frac{1}{4}$ од 4.

Због $6 = 4 + 2 = 4 + 2 . 1$, број **6** је $1\frac{2}{4}$ од 4.

Због $7 = 4 + 3 = 4 + 3 . 1$, број **7** је $1\frac{3}{4}$ од 4.

Због $9 = 2 . 4 + 1$, број **9** је $2\frac{1}{4}$ од 4.

И т. д.

38. Број $5 = 5 . 1$, зато број **1** је $\frac{1}{5}$ од 5.

Због $6 = 5 + 1$, број **6** је $1\frac{1}{5}$ од 5.

Због $7 = 5 + 2 = 5 + 2 . 1$, број **7** је $1\frac{2}{5}$ од 5.

Због $8 = 5 + 3 = 5 + 3 . 1$, број **8** је $1\frac{3}{5}$ од 5.

Због $9 = 5 + 4 = 5 + 4 . 1$, број **9** је $1^4/_5$ од 5.

Због $11 = 2 . 5 + 1$, број **11** је $2^1/_5$ од 5.

И т. д.

39. Продужи ово сматрање, па ћеш се уверити, да

сваки цео број може се представити као смешани број сваког, од њега мањег целог броја, који у њему није садржан без остатка.

Целе јединице тог смешаног броја показује количник од већег броја, подељеног дотичним мањим, а део уз њих има остатак те деобе за броитеља, а мањи број за именитеља.

Тако н. п. број 56, као смешан број од броја 9, биће, због $56 : 9 = 6$ с остатком 2, $6^2/_9$ од 9.

40. У 115 ока имамо колико пута по 8 ока?

Због $115 : 8 = 14$ с остатком 3, у 115 ока имамо $14^3/_8$ пута по 8 ока.

> 14 пута по 8 ока чини 112 ока, и још $^3/_8$ од 8 ока, т. ј. још 3 оке (јер $^1/_8$ од 8 ока је 1 ока, $^3/_8$ дакле 3 оке), скупа 115 ока.

1.) Знаш да у грошу има 40 пара. Колико гроша имаш дакле у 132 паре?

2.) 60 ♯ су колико пута више но 26 ♯ ?

3.) У хвату има 72 палца, а у метру нешто мање од 38 палаца. Колико је пута већи хват од метра?

4.) У јарду (енглеском рифу) има нешто више од 405 париских линија, а у бечком рифу нешто више од 345 тих линија. Колико је пута већи јард од бечкога рифа?

IV. Основни делови као основни делови основних делова.

41. 1.) Почем у јединици има $^2/_2$, а $^4/_4$, $^6/_6$, $^8/_8$, $^{10}/_{10}$, $^{12}/_{12}$, и т. д., то на сваку половину иду по 2 четвртине, по 3 шестине, по 4 осмине, по 5 десетина, по 6 дванестина, и т. д., и зато је

$$\left.\begin{array}{llll} \text{део} & ^1/_4 & \text{половина,} & ^1/_2 \\ ,, & ^1/_6 & \text{трећина,} & ^1/_3 \\ ,, & ^1/_8 & \text{четвртина,} & ^1/_4 \\ ,, & ^1/_{10} & \text{петина,} & ^1/_5 \\ ,, & ^1/_{12} & \text{шестина,} & ^1/_6 \end{array}\right\} \text{од } ^1/_2$$

и т. д.

2.) Почем у јединици има $^3/_3$, а $^6/_6$, $^9/_9$, $^{12}/_{12}$, $^{15}/_{15}$, и т. д., то дакле на сваку трећину иду по 2 шестине, по 3 деветине, по 4 дванестине, по 5 петнестина, итд., и зато је

$$\left.\begin{array}{lll} \text{део} & \tfrac{1}{6}\ \text{половина,} & \tfrac{1}{2} \\ \text{„} & \tfrac{1}{9}\ \text{трећина,} & \tfrac{1}{3} \\ \text{„} & \tfrac{1}{12}\ \text{четвртина} & \tfrac{1}{4} \\ \text{„} & \tfrac{1}{15}\ \text{петина} & \tfrac{1}{5} \\ & \text{и т. д.} & \end{array}\right\}\ \text{од}\ \tfrac{1}{3}$$

3.) Почем у јединици има $\frac{4}{4}$, а $\frac{8}{8}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{20}{20}$, и т. д., то дакле на сваку четвртину иду по 2 осмине, по 3 дванестине, по 4 шеснестине, по 5 дваестина, и т. д.; и зато је

$$\left.\begin{array}{lll} \text{део} & \tfrac{1}{8}\ \text{половина,} & \tfrac{1}{2} \\ \text{„} & \tfrac{1}{12}\ \text{трећина,} & \tfrac{1}{3} \\ \text{„} & \tfrac{1}{16}\ \text{четвртина,} & \tfrac{1}{4} \\ \text{„} & \tfrac{1}{20}\ \text{петина,} & \tfrac{1}{5} \\ & \text{и т. д.} & \end{array}\right\}\ \text{од}\ \tfrac{1}{4}$$

4.) Почем у јединици има $\frac{5}{5}$, а $\frac{10}{10}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{25}{25}$, и т. д., то дакле на сваку петину иду по 2 десетине, по 3 петнестине, по 4 дваестине, по 5 дваеспетина, и т. д., и зато је

$$\left.\begin{array}{lll} \text{део} & \tfrac{1}{10}\ \text{половина,} & \tfrac{1}{2} \\ \text{„} & \tfrac{1}{15}\ \text{трећина,} & \tfrac{1}{3} \\ \text{„} & \tfrac{1}{20}\ \text{четвртина,} & \tfrac{1}{4} \\ \text{„} & \tfrac{1}{25}\ \text{петина} & \tfrac{1}{5} \\ & \text{и т. д.} & \end{array}\right\}\ \text{од}\ \tfrac{1}{5}$$

42. Продужи ово сматрање сам, што даље то боље, па ћеш се уверити, да **сваки основни део може се сматрати као основни део другог неког основног дела, ако је овога именитељ у његовом именитељу без остатка садржан, дакле ако је његов именитељ нека множина именитеља другога дела.**

Који је пак основни део неки основни део од другог основнога дела, то показује количник од подељеног именитеља с именитељем другога дела. Тако н. п. основни део $^1/_{52}$, због $52:13=4$, јесте $^1/_4$ од $^1/_{13}$, а збг $52:26=2$, $^1/_2$ од $^1/_{26}$.

Осим тога увидићеш још, да кад ваља изнаћи све основне делове, од коих је неки основни део такав опет део, онда треба одкрити све бројеве, који су у именитељу дотичнога дела без остатка садржани, т. ј. који су његове мере. Сваки од њих биће именитељ једног основног дела, од кога је онај део основни део. Тако н. пр. за налазак свију основних делова, од коих ја део $^1/_{18}$ основни део, налазимо да је тај део, зато што су бројеви 2, 3, 6 и 9 у његовом именитељу без остатка садржани, $^1/_2$ од $^1/_9$ (због $18:2=9$), $^1/_2$ од $^1/_6$ (због $18:3=6$), $^1/_6$

од $^1/_3$ (због $18:6=3$), $^1/_9$ од $^1/_2$ (због $18:9=2$).

Немогу довољно препоручити, да сваки особито ово, и што сам показао под бројевима 30. — 34., добро проучи и утуви; јер је корист одтуд и у ономе што још следује, а више још у самој практики неисказана.

V. Својства делова.

43. У делу $^3/_4$ н. пр. имамо 3 четвртине од јединице, а у свакој јединици има $^4/_4$. Дакле у броитељу 3, као броју за себе, имамо 3пут по 4 четвртине, т. ј. $^{12}/_4$. Како пак у 12 четвртина имамо 4пута по 3 четвртине, то је дакле броитељ, **као број за себе**, 4пута веће вредности, но сам део $^3/_4$. Примети, да је број 4 именитељ овога дела.

Узмимо још и део $^7/_9$. **У** свакој јединици има $^9/_9$, у 7 јединица дакле 7пута по 9 деветина, т. ј. $^{63}/_9$. Како се пак по $^9/_9$ у 63 деветине налазе 9 пута $(9.7=63)$, то је дакле броитељ 7, **као број за себе**, 9 пута веће вредности но сам део $^7/_9$. Примети опет, да је број 9 именитељ дела.

Сматрајући овако и друге делове уверавамо се најпосле, **да је уобште при свакомъ делу** *броитељ, као број за себе,* **онолико пута веће вредности од вредности самога дела, колико у именитељу овога има јединица.**

Ово је својство делова врло важно, јер поглавито оно објасњује нам множење и деобу делова, о чему ћемо се мало доцније и уверити.

44. Имамо н. пр. део $^{2}/_{3}$. Ако помложимо броитеља с 2, а именитеља оставимо истога, добијамо део $^{4}/_{3}$, а у 4 трећине имамо 2пут по 2 трећине. Нови је дакле део 2пут, т. ј. онолимо пута веће вредности од дела $^{2}/_{3}$, с колико смо броитеља овога дела помложили.

Да смо при недирнутом именитељу помложили броитеља с 3, 4, 5, . . ., добили би по реду делове $^{6}/_{3}$, $^{8}/_{3}$, $^{10}/_{3}$, . . . Почем се пак по 2 трећине у 6 трећина налазе 3пут, у 8 трећина 4пута, у 10 трећина 5 пута, . . . то је део $^{6}/_{3}$ 3пут, део $^{8}/_{3}$ 4пута, део $^{10}/_{3}$ 5пута, ... већи од дела $^{2}/_{3}$, у обште сваки тих делова онолико пута веће вредности од вредности дела $^{2}/_{3}$, с колико смо броитеља овога дела помложили.

Сматрајући овако и друге делове уверавамо се, **да се вредност свакога дела увећава, кад му броитеља с каквим бројем помложимо, а именитеља оставимо истога, нови део пак онолико је пута већи од првога, с колико смо помложили броитеља првога дела.**

45. Имамо н. пр. део $^2/_3$. Ако сад броитеља недирамо. а именитеља помложимо с 2, 3, 4, и т. д., излазе нови делови $^2/_6$, $^2/_9$, $^2/_{12}$ и т. д. Како пак у јединици има $^3/_3$, а $^6/_6$, $^9/_9$, $^{12}/_{12}$, и т. д., то иду на 1 трећину по 2 шестине, по 3 деветине, по 4 дванестине, и т. д. и зато је свака трећина 2пут већа од $^1/_6$, 3пут већа од $^1/_9$, 4пута већа од $^1/_{12}$, и т. д., па дакле и $^2/_3$ двапут веће од $^2/_6$, трипут веће од $^2/_9$, четири пута веће од $^2/_{12}$, и т. д.

По томе мложењем именитеља дела $^2/_3$ с бројевима 2, 3, 4, и т. д. вредност се овога дела по реду (у деловима $^2/_6$, $^2/_9$, $^2/_{12}$ и т. д.) 2пут, 3пут, 4пута и т. д., уобште онолико пута умалилила, с колико смо помложили именитеља.

Сматрајући овако и друге делове увиђамо уобште, **да се вредност свакога дела умаљава, кад у броитеља недирамо, а именитеља му каквим бро-**

јем помложимо, и добивени нови део биће онолико пута мање вредности но први, с колико смо именитеља првога дела помложили.

46. Почем се вредност каквога дела множењем броитеља увећава, а множењем именитеља умаљава, то је јасно, да се неће ни увећати, ни умалити, ако и броитеља и именитеља једним истим бројем помложимо; јер колико се пута множењем броитеља увећала, толико се исто пута множењем именитеља опет умалила, дакле је остала колика је била, неповређена.

По томе имамо као ново својство делова, **да вредност свакога дела остаје иста или неповређена, кад и броитеља и именитеља с једним истим бројем помложимо.**

47. О томе можемо се још и овако уверити.

Имамо н. пр. део $^3/_5$. Ако поделимо јединицу на 10ине и узмемо тих 6, имамо део $^6/_{10}$. Но у јединици има $^5/_5$ а $^{10}/_{10}$, на сваку петину дакле иду по 2 десетине, а на $^3/_5$ 3пут по 2 десетине, т. ј. $^6/_{10}$. По томе у деловима $^3/_5$ и $^6/_{10}$ имамо једну исту вредност, а од $^3/_5$ направићемо рачуном $^{6}/_{10}$, кад помложимо и броитеља 3 именитеља 5 с бројем 2. И тако се дакле вредност дела $^{3}/_{5}$ тим мложењем невређа. Како с бројем 2, тако можемо потврдити горњи докучај и с другим бројевима, и не само на овом једном делу $^{3}/_{5}$, но уобште на ма ком.

48. Што је већи броитељ каквога дела, то више именитељем показаних основних делова јединице узето је, и то већа је дакле вредност тога дела. У делу $^{8}/_{11}$ н. пр. имамо већу вредност но у $^{4}/_{11}$, још већу но у $^{2}/_{11}$, и још већу но у $^{1}/_{11}$. Део је $^{4}/_{11}$ двапут мање вредности но $^{8}/_{11}$, јер се у 8 једанестина по 4 једанестине налазе 2пут; део $^{2}/_{11}$ 4пута је мањи од дела $^{8}/_{11}$, јер у 8 једанестина по 2 једанестине има 4пута; део $^{1}/_{11}$ најпосле 8пута је мањи од дела $^{8}/_{11}$, јер у 8 једанестина има 8 пута по $^{1}/_{11}$.

Рачуном направићемо од дела $^{8}/_{11}$, 2пут мањи део $^{4}/_{11}$, ако броитеља 8 поделимо с 2, а 4пута мањи део $^{2}/_{11}$, ако броитеља 8 разделимо с 4, најпосле 8пута мањи део $^{1}/_{11}$, ако броитеља 8 поделимо с 8.

По томе вредност се дела $^{8}/_{11}$ 2пут, 4пута, 8пута умаљава, кад му броитеља, недирајући у именитеља, поделимо с 2, 4, 8.

Као са делом $^8/_{11}$ можемо поступати и с другим деловима, и ако тако урадимо доћићемо најпосле до подпуне увере: **да се вредност сваког дела деобом броитеља чрез какав број онолико пута умаљава, с колико броитеља разделимо.**

49. Што је већи именитељ каквога дела, на то више основних делова подељена је јединица, то мањи је сваки основни део, и то мању дакле вредност имамо у оном делу. Тако н. п. $^1/_{18}$ мања је од $^1/_9$, још мања од $^1/_6$, још мања од $^1/_3$, а још мања од $^1/_2$. Јер, у јединици има $^{18}/_{18}$, а само $^9/_9$, само $^6/_6$, само $^3/_3$, само $^2/_2$; зато на $^1/_2$ иду по $^9/_{18}$, на $^1/_3$ по $^6/_{18}$, на $^1/_9$ по $^2/_{18}$. Део је $^1/_9$ дакле 2пут већи од $^1/_{18}$, део $^1/_6$ 3пут већи од $^1/_{18}$, део $^1/_3$ 6 пута већи од $^1/_{18}$, а део $^1/_2$ 9 пута већи од $^1/_{18}$, па зато су н. пр. и $^5/_9$ 2пут веће вредности од $^5/_{18}$, $^5/_6$ 3пут веће вредности но $^5/_{19}$, $^5/_3$ 6пута веће од $^5/_{18}$, $^5/_2$ 9пута веће од $^5/_{18}$.

Рачуном направићемо од дела $^5/_{18}$ делове $^5/_9$, $^5/_6$, $^5/_3$ и $^5/_2$, ако, недирајући у броитеља 5, поделимо именитеља 18 редом с 2, 3, 6 и 9.

По томе вредност се дела $^5/_{18}$ 2пут, 3пут, 6 пута и 9 пута увећава, ако му именитеља, недирајући броитеља, поделимо с 2, 3, 6 или 9.

Као с делом $^5/_{18}$ можемо поступати и с другим деловима, и ако тако учинимо уверавамо се најпосле, **да се вредност сваког дела деобом његовог именитеља с каквим бројем онолико пута увећава, с колико смо именитеља разделили.**

50. Почем се вредност каквога дела деобом броитеља умаљава, а деобом именитеља увећава, то је јасно, да се његова вредност неће ни умалити ни увећати, ако му броитеља и именитеља једним истим бројем разделимо; јер колико би се пута деобом броитеља умалила, толико се исто пута деобом именитеља опет увећава, и зато остаје неповређена.

По томе имамо као ново својство делова, **да вредност свакога дела остаје иста или неповређена, кад броитеља и именитеља разделимо једним истим бројем.**

51. Број 2 : 3 (2 делити с 3) значи, да изнађемо број, који је у броју 2 садржан 3пут. У свакој ствари садржана је њена трећина 3пут. Дакле број 2 : 3 значи, да изнађемо трећину од броја 2.

У броју 2 имамо две јединице, од 2 јединице пак узећемо трећину, ако од сваке узмемо по једну трећину. Узевши од сваке по $^1/_3$ имамо од једне једну, и од друге једну, свега $^2/_3$; дакле је број $2 : 3 = {}^2/_3$.

Број 3 : 5 значи, изнаћи број, који је у броју 3 садржан 5пута. У свакој ствари садржана је њена собствена петина 5пута. По томе број 3 : 5 значи, да изнађемо петину броја 3. У овом броју имамо 3 јединице, од 3 јединице пак узећемо петину, ако од сваке узмемо петину. Ако то урадимо, имамо од прве $^1/_5$, од друге $^1/_5$ и од треће $^1/_5$, свега $^3/_5$. И по томе $3 : 5 = {}^3/_5$.

Ово је зар довољно за увиђање, да поред постављеног појма о делу под бр. 24 и 25, још можемо рећи, **сваки је део назначени количник од два броја**, броитеља као делимка, а именитеља као делитеља, у случају, где је делитељ већи од делимка.

Исто тако лако је увидити сада још и то, да при делењу целих бројева количник мора бити смешан број, кадгод делитељ у делимку није подпуно, т. ј. без остатка садржан. Јер ако н. п. имамо **17 : 3**, количник је, по пређашњему, $^{17}/_{3}$, привидан део, а тога је вредност, каошто смо видели, свагда или цео, или смешан број; овде је, због $^{17}/_{3} = {^{15}/_{3}} + {^{2}/_{3}} = 5 + {^{2}/_{3}} = 5^{2}/_{3}$, смешан број.

VI. Претварање делова.

52. Својство свакога дела, да му се вредност немења мложењем бронтеља и именитеља с једним истим бројем, служи за **претварање каквог дела, без повреде његове вредности у други с реченим, или нуждним именитељем**, при чему стари именитељ треба да је у новом садржан без остатка. Претварање то бива овако: **делимо новога именитеља са старим, а с количником одтуд помложимо после бронтеља и именитеља датога дела.** Тим мложењем вредност дотичног дела није повређена, а нови део има захтеваног, или иначе нуждног именитеља.

Да претворимо н. п. делове $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{7}/_{9}$ и $^{5}/_{18}$ без повреде њихових вредности у друге с именитељем **36**.

Нови именитељ 36 дељен првим старим 2, даје количник 18, $36:2=18$, зато је део $\frac{1}{2}=\frac{1.18}{2.18}=\frac{18}{36}$;

нови именитељ 36 дељен другим старим 3, даје количник 12, $36:3=12$, зато је део $\frac{2}{3}=\frac{2.12}{3.12}=\frac{24}{36}$;

нови именитељ 36 дељен трећим старим 4, даје количник 9, т. ј. $36:4=9$, зато је део $\frac{3}{4}=\frac{3.9}{4.9}=\frac{27}{36}$;

нови именитељ 36 дељен четвртим старим 9, даје количник 4, $36:9=4$, зато је део $\frac{7}{9}=\frac{4.7}{4.9}=\frac{28}{36}$; најпосле

нови именитељ 36 дељен петим старим 18, даје количник 2, $36:18=2$, зато је део $\frac{5}{18}=\frac{5.2}{18.2}=\frac{10}{36}$.

Нови су делови дакле по реду $\frac{18}{36}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{28}{36}$ и $\frac{10}{36}$, који, као што видимо, имају сви захтеванога именигеља 36.

53. Кад неби посао објасњавали, него би га само радили, онда изгледао би овако:

$$\begin{aligned} 36:\ 2 &= 18,\ \tfrac{1}{2}=\tfrac{1.8}{2.18}=\tfrac{18}{36}\\ :\ 3 &= 12,\ \tfrac{2}{3}=\tfrac{2.12}{3.12}=\tfrac{24}{36}\\ :\ 4 &= \ 9,\ \tfrac{3}{4}=\tfrac{3.9}{4.9}=\tfrac{27}{36}\\ :\ 9 &= \ 4,\ \tfrac{7}{9}=\tfrac{7.4}{9.4}=\tfrac{28}{36}\\ :18 &= \ 2,\ \tfrac{5}{18}=\tfrac{5.2}{18.2}=\tfrac{10}{36}. \end{aligned}$$

54. Кад смо овај посао сасвим схватили, онда множење с дотичним количницима, ако су једноцифрени бројеви, или двоцифрени мањи од 20, свршавамо у памети и пишемо само резултате. Рад изгледа при прећем примеру тад овако:

$$
\begin{aligned}
36:2&=18, \ ^1/_2=\tfrac{18}{36}\\
:3&=12, \ ^2/_3=\tfrac{24}{36}\\
:4&=\ 9, \ ^3/_4=\tfrac{27}{36}\\
:9&=\ 4, \ ^7/_9=\tfrac{28}{36}\\
:18&=\ 2, \ ^5/_{18}=\tfrac{10}{36}.
\end{aligned}
$$

55. Ко се доста извештио у деоби, уштећује и писање деоба новога именитеља са појединим старима, свршава те деобе у памети, исто као и множења броитеља и именитеља, па пише само резултате, т. ј. одма претворене делове.

Тако поступајући био би рад с горњим деловима овај:

ПРИ ДЕЛУ	У ПАМЕТИ					ПИСАЊЕ
$^1/_2$	2 у 36,	18,	1	пут	18	$\frac{18}{36}$
			2	„	18	
$^2/_3$	3 „ 36,	12,	2	„	12	$\frac{24}{36}$
			3	„	12	
$^3/_4$	4 „ 36,	9,	3	„	9	$\frac{27}{36}$
			4	„	9	
$^7/_9$	9 „ 36,	4,	7	„	4	$\frac{28}{36}$
			9	„	4	
$^5/_{18}$	18 „ 36,	2.	5	„	2	$\frac{10}{36}$
			18	„	2	

Направи од делова $^5/_6$, $^7/_8$, $^3/_5$, $^{11}/_{12}$, $^{17}/_{18}$, $^{23}/_{36}$, $^{25}/_{48}$, $^{13}/_{64}$ и $^{37}/_{96}$ друге, с именитељем **2880**, али, да би се увежбао, поступи, корак за кораком, сасвим онако, каошто сам ја оде с пређашњиим деловима.

56. Нови именитељ није свагда задат, већ га понајвише тек морамо изнаћи. У таком случају иште се само, да дате неке делове претворимо у друге с једнаким именитељем, **да их преведемо у једноимене.**

Од новог именитеља, рекао сам, захтева се, да сваки стари именитељ у њему буде садржан без остатка. Како је пак за лакше и краће рачунање свагда најпростији број најкористнији, то тај нови именитељ мора бити уједно најмањи број, у ком су сви именитељи датих делова садржани без остатка, дакле њихов најмањи садржатељ.

По томе превођење делова у једноимене састоји се из два посла; најпре тражење најмањег садржатеља свију именитеља, а после претварање делова у друге, са тим бројем као именитељем.

57. Да преведемо у једноимене, н. пр. делове $^1/_2$ $^2/_3$ $^3/_4$ $^7/_9$ и $^5/_{18}$.

Именитељи **2**, **3** и **9** садржани су у именитељу **18**, с тога они за најмањег садржатеља одпадају, и овај треба тражити само по именитељима 4 и 18.

Именитељ је $4 = 2 . 2$, а
„ $18 = 2 . 3 . 3$; дакле је најмањи садржатељ свију именитеља, и уједно нови именитељ, број $2 . 2 . 3 . 3 = 36$.

Одавде на даље пасао је као под бр. 55; и по томе су дати делови, преведени у једноимене, по реду

$^{18}/_{36}$ $^{24}/_{36}$ $^{27}/_{36}$ $^{28}/_{36}$ и $^{10}/_{36}$.

58. Да преведемо у једноимене још и делове

$^{5}/_{6}$, $^{7}/_{8}$, $^{3}/_{5}$, $^{11}/_{12}$, $^{17}/_{18}$, $^{23}/_{36}$ $^{13}/_{64}$ и $^{37}/_{96}$.

Овде су именитељи 6, 8, 12 и 24 садржани у именитељу 96, а 18 у 36, они други пак нису ни један више у ком другом садржани; с тога најмањи садржатељ биће само од 5, 36, 64 и 96.

Именитељ $5 = 5$
„ $36 = 2 . 2 . 3 . 3$
„ $64 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2$
„ $96 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3$.

Најмањи је дакле садржатељ именитеља, уједно нови именитељ, број
$2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2880$, и зато

$$\left.\begin{array}{llll}
2880:\ 6=480, & {}^{5}/_{6} = \frac{5\,.\,480}{6\,.\,480} & = \frac{2400}{2880} \\
,,\ :\ 8=360, & {}^{7}/_{8} = \frac{7\,.\,360}{8\,.\,360} & = \frac{2520}{2880} \\
,,\ :\ 5=576, & {}^{3}/_{5} = \frac{3\,.\,576}{5\,.\,576} & = \frac{1728}{2880} \\
,,\ :12=240, & {}^{11}/_{12} = \frac{11\,.\,240}{12\,.\,240} & = \frac{2640}{2880} \\
,,\ :18=160, & {}^{17}/_{18} = \frac{17\,.\,160}{18\,.\,160} & = \frac{2720}{2880} \\
,,\ :36=80, & {}^{23}/_{36} = \frac{23\,.\,80}{36\,.\,80} & = \frac{1840}{2880} \\
,,\ :48=60, & {}^{25}/_{48} = \frac{25\,.\,60}{48\,.\,60} & = \frac{1500}{2880} \\
,,\ :64=45, & {}^{13}/_{64} = \frac{13\,.\,45}{64\,.\,45} & = \frac{585}{2880} \\
,,\ :96=30, & {}^{37}/_{96} = \frac{37\,.\,30}{96\,.\,80} & = \frac{1110}{2880}
\end{array}\right\}\text{нови једноимени делови}$$

59. Кад су именитељи датих делова прости бројеви или такови сложени, који немају заједничких чинитеља, онда је нови именитељ производ свију именитеља датих делова. Н. пр. дати су делови за претварање у једноимене

$${}^{3}/_{5}\ {}^{2}/_{7}\ {}^{8}/_{13}\ {}^{12}/_{23}.$$

Ту су сви именитељи прости бројеви, и зато нови именитељ $5\,.\,7\,.\,13\,.\,23 = 10465$.

У таком случају, за преводење у једноимене, ваља броитеља и именитеља сваког појединог дела помложити са свима другим именитељима. Тако поступајући добијамо

$$\begin{array}{l}
{}^{3}/_{5} = \frac{3\,.\,7\,.\,13\,.\,23}{5\,.\,7\,.\,13\,.\,23} = \frac{6279}{10465} \\
{}^{2}/_{7} = \frac{2\,.\,5\,.\,13\,.\,23}{7\,.\,5\,.\,13\,.\,23} = \frac{2990}{10465} \\
{}^{8}/_{13} = \frac{8\,.\,5\,.\,7\,.\,23}{13\,.\,5\,.\,7\,.\,23} = \frac{6440}{10465} \\
{}^{12}/_{23} = \frac{12\,.\,5\,.\,7\,.\,13}{23\,.\,5\,.\,7\,.\,13} = \frac{5760}{10465}
\end{array}$$

60. Задатци. Да се претворе у једноимене делови

1.) $^{2}/_{3}$, $^{7}/_{10}$, $^{12}/_{13}$, $^{9}/_{25}$, $^{5}/_{26}$, $^{15}/_{32}$, $^{27}/_{38}$ и $^{53}/_{68}$;

2.) $\frac{13}{102}$, $\frac{15}{118}$, $\frac{201}{580}$, $\frac{53}{720}$, $\frac{111}{882}$ и $\frac{603}{1025}$;

3.) $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{4}/_{5}$, $^{6}/_{7}$, $^{10}/_{11}$, $^{12}/_{13}$, $^{16}/_{17}$, $^{22}/_{23}$, $^{28}/_{29}$, $^{30}/_{31}$, $^{36}/_{37}$, $^{40}/_{41}$, $^{42}/_{43}$ и $^{46}/_{47}$;

4.) $^{1}/_{5}$, $^{3}/_{10}$, $^{7}/_{15}$, $^{9}/_{20}$, $^{12}/_{25}$, $^{23}/_{50}$ и $^{91}/_{100}$;

5.) $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{24}$, $^{11}/_{48}$, $^{25}/_{96}$ и $^{55}/_{192}$;

6.) $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{6}$, $^{11}/_{12}$, $^{17}/_{24}$, $^{23}/_{48}$ и $^{35}/_{96}$;

7.) $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{8}$, $^{8}/_{9}$ и $^{9}/_{10}$.

61. Својство свакога дела, да му се вредност немења деобом броитеља и именитеља са једним истим бројем, служи **за претварање каквог дела у други, простијим бројевима изражени, исте вредности**, или за такозвано **скраћење делова.**

Притом поступамо овако: делимо броитеља и именитеља са свима њиховим заједничким мерама. Кад опазимо, да броитељ и именитељ немају више никакву заједничку меру, онда је део већ највећма скраћен, рећиће најпростијим бројевима представљен.

Лако пада у очи, да нам ту помажу они, под бр. 16.) постављени знаци дељивости с неким простим бројевима.

62. Да скратимо делове $^{21}/_{120}$ и $\frac{729}{864}$.

При првом опажамо, да због $1+2=3$ и $0+2+1=3$, броитеља и именитеља можемо скратити бројем 3, по чему показује се простији део $^{7}/_{40}$, који је уедно и најпростији, јер бројеви 7 и 40 немају никакву више заједничку меру.

При другом, због $9+2+7=18$ и $4+6+8=18$, можемо броитеља и именитеља поделити с 3; скраћени је после део $\frac{243}{288}$. Због $3+4+2=9$ и $8+8+2=18$, можемо броитеља и именитеља опет скратити с 3; скраћени је после део $^{8}/_{96}$. Због $1+8=9$ и $6+9=15$, можемо опет броитеља и именитеља поделити с 3, по чему излази као скраћени део $^{27}/_{32}$. Овај се већма неможе скратити, јер бројеви 27 и 32 немају више никакву заједничку меру.

Још скратимо и део $\frac{660}{2310}$.

Због 0 у месту јединица броитеља и именитеља, можемо ове скратити с 2; скраћени је део $\frac{330}{1155}$. Због $0+3+3=6$ и $5+5+1+1=12$, можемо броитеља и именитеља поделити, дакле део скратити с 3; скраћен је $\frac{110}{385}$. Због 0 на месту јединица у броитељу, а 5 на месту јединица у именитељу, можемо овај део скратити с 5; скраћен је после $\frac{22}{77}$. Због $2 - 2 = 0$ и $7 - 7 = 0$ (види знак за дељивост с 11), можемо део још скратити с 11; скраћен је после $^2/_7$, и у овоме је делу дати део највећма скраћен, јер су бројеви 2 и 7 прости.

63. Кад су броитељ и именитељ повећи бројеви, онда свршавамо скраћење лакше и пре, ако изнађемо њихову највећу заједничку меру, и после их овом поделимо. Тако н. пр. за део $\frac{729}{864}$ имали би

$$\underbrace{864 : 729}_{1} : \underbrace{135}_{5} : \underbrace{54}_{2} : \underbrace{27}_{2}.$$ Највећа је заједничка
9

мера броитеља и именитеља број 27; зато скраћени део

$$\frac{729}{864} = \frac{729 : 27}{864 : 27} = \frac{27}{32},$$ као и пре.

Тамо смо га скратили застопце 3пут с 3, а 3.3.3 чини 27, које се и овде показа као најв. заједн. мера броитеља и именитеља.

Подобно имали би за скраћење дела $\frac{660}{2310}$

$$\underbrace{2310 : 660}_{3} : \underbrace{330}_{2};$$ број 330 је дакле највећа заједничка мера броитеља и именитеља, и зато скраћени део

$$\frac{660}{2310} = \frac{660 : 330}{2310 : 330} = {}^2/_7,$$ као и пре.

На пређашњи начин скратили смо га најпре с 2, после с 3, после с 5, а најпосле с 11, свега дакле с $2.3.5.11 = 330$, што се и овде показа као највећи број, који је у бронтељу и именитељу садржан без остатка.

Скрати сам још делове $\frac{230}{325}$, $\frac{1155}{4290}$, $\frac{286}{715}$, $\frac{410}{1290}$, $\frac{666}{3885}$, $\frac{195}{273}$ и $\frac{1010}{9394}$.

64. Имамо смешани број, н. пр. $5\frac{3}{4}$. У свакој јединици има 4 четвртине, $\frac{4}{4}$, дакле у 5 јединица 5пута по 4 четвртине, т. ј. 20 четвртина, $\frac{20}{4}$. У оном смешаном броју имамо поред 5 јединица још $\frac{3}{4}$; свега дакле имамо у том броју 20 и још 3 четвртине, т. ј. $\frac{23}{4}$.

Рачуном направили би од смешанога броја $5\frac{3}{4}$ овај равни му привидан део $\frac{23}{4}$, кад би целе јединице (5) именитељем дела (4) помложили $(4.5 = 20)$, производу (20) броитеља додали $(20 + 3 = 23)$, и том сбиру (23) именитеља (3) подписали.

Узмимо још смешани број $13\frac{41}{103}$. У јединици има $\frac{103}{103}$, у 13 јединица дакле 13 пута по 103, т. ј. $13.103 = 1339$ стотрећина. Поред оних 13 јединица имамо још 41 стотрећину, и по томе у целом смешаном броју 1339 и 41, скупа $\frac{1380}{103}$.

Рачуном направићемо од смешанога броја $13\frac{41}{103}$ овај равни му привидан део $\frac{1380}{103}$, ако целе јединице (13) помложимо имените.ьем (103), производу (13.103=1339) додамо броитеља (41), и том сбиру 1339+41=1380) подпишемо именитеља (103).

Сматрајући овако и друге смешане бројеве јавља нам се као привило: **смешан број претварамо у привидан део, ако целе јединице помложимо именитељем дела, производу додамо броитеља и овом сбиру подпишемо именитеља.**

VII. Сравнење делова.

65. Од два дела с једнаким именитељем онај је већи, т. ј. веће вредности, кога је броитељ већи. Имамо н. п. $^1/_4$ и $^3/_4$, или $^2/_7$ и $^5/_7$, или $^{23}/_{84}$ и $^{77}/_{84}$. Ко неби увидио, да у 3 четвртине имамо више но у само 1 четвртини, у 5 седмина више но у 2 седмине, у $^{77}/_{84}$ више но у $^{23}/_{84}$, исто као као што су 3 ♯ више но у 1 ♯, 5 људи више но 2 човека, 77 књига више но 23 књиге.

66. Од два дела с једнаким броитељем онај је веће вредности, кога је именитељ мањи.

Да сравнимо н. п. делове $^4/_5$ и $^4/_9$. У јединици имамо $^5/_5$ а $^9/_9$, зато је $^1/_5$ већи део јединице но $^1/_9$, па дакле и у $^4/_5$ већу вредност имамо но у $^4/_9$, а то је онако као што сам казао: део с мањим именитељем је већи.

67. Од два дела с неједнаким и броитељима и именитељима, који је веће вредности, неможемо свагда одма пресудити. То је могуће само у случају, где је броитељ дела с мањим имемитељем већи од броитеља оног другог, јер у том случају смо у делу с **већим** броитељем а **мањим** именитељем очевидно узели и више и већих основних делова јединице. Н. пр. у делу $^4/_5$ имамо очевидно већу вредност но у $^3/_7$, по томе, што је свака петина већа од седмине, а сувише узето је још и више петина него седмина.

Кад је пак броитељ дела с већим именитељем такођер већи од броитеља оног другога, онда у ком од тих делова имамо већу ведност, неможемо изрећи пре, него почем их преведемо у једноимене. Тако н. пр. од делова $^9/_{11}$ и $^6/_7$ који је већи, на први поглед неможемо казати, али док их преведемо у једноимене видимо, да је $^8/_{11} = \frac{8.7}{11.7} = \frac{56}{77}$, а $^6/_7 = \frac{6.11}{7.11} = \frac{66}{77}$, дакле овај последњи **већи**, јер у њему има 66 седамдесетседмина, док у првом само 56.

68. Задатци. Који је део већи, $^{23}/_{25}$ или $^{14}/_{15}$? $^{43}/_{50}$ или $^{27}/_{32}$? $^{7}/_{9}$ или $^{4}/_{5}$? $^{11}/_{12}$ или $^{9}/_{10}$?

А између делова $^{5}/_{8}$, $^{10}/_{11}$, $^{3}/_{4}$, $^{9}/_{13}$ и $^{59}/_{88}$ који је највећи?

Шта је више, $^{14}/_{25}$ или $^{6}/_{13}$ гроша? $^{32}/_{50}$ или $^{64}/_{88}$ оке? $^{3}/_{32}$ или $^{5}/_{25}$ хвата? $^{23}/_{25}$ или $^{33}/_{35}$ аустријске форинте?

VIII. Сабирање делова.

69. Кад имамо сабрати, у један скупити, два или више једноимених делова, онда је лако казати колики је њихов сбир, тај један део; јер тад, каогод што **3** дуката и **7** дуката чине скупа **10** дуката, тако исто н. пр. **3** осмине ($^{3}/_{8}$) и **7** осмина ($^{7}/_{8}$) чине свега **10** осмина, $^{10}/_{8}$.

У сваком таком случају имамо два или више бројева именитељем показаних основних делова јединице да скупимо у један број исто таких делова, сбир неможе бити други, но онолико, именитељем показаних основних делова, колико сви броитељи заједно износе. Можемо дакле за тај случај изрећи као правило:

сбир од једноимених делова раван је онолико исто тих основних делова, колико износи сбир свију броитеља; или једноимене делове сабирамо, кад саберемо броитеље и њиховом сбиру подпишемо истог иметеља.

Притом може се догодити, да сбир испадне привидан део. У таком случају треба га још пречистити, т. ј. изнаћи цели или смешани број, који он представља, што наравно бива деобом броитеља чрез именитеља.

70. Примери.

1.) Саберимо делове $^{2}/_{13}$, $^{3}/_{13}$ и $^{7}/_{13}$. Сбир је 2 и 3 и 7, свега $^{12}/_{13}$.

2.) $^{4}/_{9} + ^{3}/_{9} + ^{2}/_{9} = \frac{4+3+2}{9} = ^{9}/_{9} = 1$.

3.) Сбир од $^{7}/_{8}$, $^{3}/_{8}$, $^{15}/_{8}$ и $^{5}/_{8}$ чини 7 и 3, 10, и 15, 25, и 5, $^{30}/_{8}$, т. ј. (због $30:8 = 3$ с остатком 6) $3^{6}/_{8}$ или (због $6:2=3$, а $8:2=4$) $3\,^{3}/_{4}$.

4.) $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$ и $^{7}/_{8}$ гроша колико чини гроша?

71. Каогод што неможемо рећи да 3 књиге и 5 гроша чини свега 8 књига или 8 гроша, тако исто неможемо казати, да $^{3}/_{7}$ и $^{5}/_{9}$ чини свега $^{8}/_{7}$ или $^{8}/_{9}$, т. ј. несмемо сабрати броитеље, јер су седмине веће од деветина, зато, кад би рекли да је сбир $^8/_7$, узели би више, а кад би казали да је $^8/_9$, узели би мање него што ваља. Колики је управо сбир од та два дела знали би с места, кад би били једноимени, зато преведимо их у takove. То урадивши налазимо

$$^3/_7 = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{27}{63}, \text{ а } ^5/_9 = \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63}, \text{ и зато}$$
$$^3/_7 + {}^5/_9 = {}^{27}/_{63} + {}^{35}/_{63} = {}^{62}/_{63}.$$

Да смо место овога дела узели као сбир $^8/_7$, имали би $\frac{8 \cdot 9}{7 \cdot 9} = {}^{72}/_{63}$, очевидно више но што сбир доиста износи. А да смо узели $^8/_9$, имали би $\frac{8 \cdot 7}{9 \cdot 7} = {}^{56}/_{63}$, очевидно мање него што ваља.

За сабирање разноимених делова имамо дакле то правило: **морамо их најпре превести у једноимене, па онда као такове сабрати.**

72. Примери.

1.) Колики је сбир од $^2/_3$, $^4/_5$, $^5/_6$ и $^7/_8$? Нови је именитељ овде 120 (увери се о том). Имамо дакле

$$^2/_3 = \frac{2 \cdot 40}{120} = \frac{80}{120}$$
$$^4/_5 = \frac{4 \cdot 24}{120} = \frac{96}{120}$$
$$^5/_6 = \frac{5 \cdot 20}{120} = \frac{100}{120}$$
$$^7/_8 = \frac{7 \cdot 15}{120} = \frac{105}{120}, \text{ и зато сбир}$$

тих делова $\frac{80+96+100+105}{120} = \frac{381}{120}$, или, због $381 : 120 = 3$ с остатком 21, $3\,^{21}/_{120}$, а ако део $^{21}/_{120}$ још с 3 скратимо, тражени сбир раван $3\,^{7}/_{40}$.

Да нисам посао објасњавао, него само радио, стајао би од почетка до краја овако:

$$
\begin{array}{l}
3 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \text{ (именитељи датих делова)} \\
\;6 = 2 \,.\, 3 \\
\;\underline{8 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2} \\
\qquad 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 120 \text{ (нови именитељ)}
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
120 : 3 = 40,\;\; 2 \,.\, 40 = 80 \\
\quad\;\; : 5 = 24,\;\; 4 \,.\, 24 = 96 \\
\quad\;\; : 6 = 20,\;\; 5 \,.\, 20 = 100 \\
\quad\;\; : 8 = 15,\;\; 7 \,.\, 15 = 105
\end{array}
\right\}\text{(нови броитељи)}
$$

$$\text{сбир } \tfrac{381}{120} = 3^{21}/_{120} = 3^{7}/_{40}.$$

2.) Да саберемо делове $^{3}/_{8}$, $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{9}$, $^{11}/_{12}$, $^{7}/_{32}$ и $^{15}/_{54}$.

$$
\begin{array}{l}
8 \quad 2 \quad 9 \quad 12 \quad 32 \quad 54 \\
12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \\
32 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \\
\underline{54 = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3} \\
2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 864 \text{ (нови именитељ)} \\
864 :\; 8 = 108,\;\; 3 \,.\, 108 = 324 \\
\quad\;\; :\; 2 = 432,\;\; 1 \,.\, 432 = 432 \\
\quad\;\; :\; 9 = 96,\;\; 5 \,.\, 96 = 480 \\
\quad\;\; : 12 = 72,\;\; 11 \,.\, 72 = 792 \\
\quad\;\; : 32 = 27,\;\; 7 \,.\, 27 = 189 \\
\quad\;\; : 54 = 16,\;\; 15 \,.\, 16 = 240
\end{array}
$$

сбир $\frac{2457}{864}$, или, због

$2457 : 864 = 2$, сбир $= 2\frac{729}{864}$, или ако део $\frac{729}{}$
још скратимо са 27 (тражи највећу заједничку меру броитеља и именитеља), тражени сбир $2\,{}^{27}/_{32}$.

3.) Изнаћи сам сбир делова ${}^{2}/_{15}$, ${}^{3}/_{25}$, ${}^{13}/_{40}$, ${}^{23}/_{55}$ и ${}^{97}/_{105}$.

4.) 3 литре и 80 драма колико чини ока?

3 литре су ${}^{3}/_{4}$ оке, 80 драма су $\frac{80}{400} = {}^{1}/_{5}$ оке; зато 3 литре и 80 драма чине ${}^{3}/_{4} + {}^{1}/_{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} = {}^{15}/_{20} + {}^{4}/_{20}$, свега ${}^{19}/_{20}$ ока.

5.) ${}^{1}/_{2}$ сата, 36 минита и 14 секунда, колико сата? Знаш да у сату има 60 минута, у минуту 60 секунда, дакле у сату $60 \cdot 60 = 3600$ секунда.

6.) Колики је сбир од ${}^{1}/_{2}$, ${}^{2}/_{3}$, ${}^{4}/_{5}$, ${}^{6}/_{7}$ и ${}^{10}/_{11}$?

7.) Колики је сбир од ${}^{1}/_{2}$, ${}^{3}/_{4}$, ${}^{5}/_{6}$, ${}^{7}/_{8}$ и ${}^{9}/_{10}$?

73. Кад међу сабирцима има и смешаних бројева, онда саберемо најпре делове, па онда целе бројеве. Ако сбир делова испадне привидан део, онда из овога извадимо садржани цео број, и прибројумо га датим целим бројевима.

Примери.

1.) Саберимо делове и смешане бројеве: $\frac{5}{16}$, $2\frac{1}{4}$, $3\frac{2}{15}$, $7\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{5}$, $\frac{14}{15}$, $1\frac{3}{8}$, $101\frac{3}{4}$, $12\frac{1}{8}$, $\frac{3}{35}$, $\frac{11}{12}$.

Делови за сабирање јесу:

$\frac{5}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{35}$, $\frac{11}{12}$.

Притом именитељи:

16, *4*, *15*, *2*, *5*, 15, *8*, *4*, *8*, 35, 12

$$\left.\begin{array}{l} 16 = 2.2.2.2 \\ 15 = 3.5 \\ 35 = 5.7 \\ 12 = 2.2.3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{зато нови именитељ} \\ 2.2.2.2.3.5.7 = 1680 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rlrl} 1680:16 = & 105, & 5.105 = & 525 \\ :4 = & 420, & 1.420 = & 420 \\ :15 = & 112, & 2.112 = & 224 \\ :2 = & 840, & 1.840 = & 840 \\ :5 = & 336, & 3.336 = & 1008 \\ :15 = & 112, & 14.112 = & 1568 \\ :8 = & 210, & 3.210 = & 630 \\ :4 = & 420, & 3.420 = & 1260 \\ :8 = & 210, & 1.210 = & 210 \\ :35 = & 48, & 3.48 = & 144 \\ :12 = & 140, & 11.140 = & 1540 \end{array}\right\}$$

сбир делова $\frac{8369}{1680} = 8369:1680$
1649

$= 4\frac{1649}{1680}$ (део се овај неможе скратити; увери се о том).

Цели бројеви у смешанима јесу:

$$\begin{array}{r l} 2 & \\ 3 & \\ 7 & \\ 1 & \\ 1 & \\ 101 & \\ 12 & \text{и нађени цео број из сбира делова} \\ 4 & \\ \hline 131 & \text{њихов сбир,} \end{array}$$

и зато тражени сбир делова и смешаних бројева $131\frac{1649}{1680}$.

2.) Сабери сад сам делове и смешане бројеве ове: $5^1/_5$, $^4/_7$, $7^2/_7$, $^5/_8$, $^{11}/_{30}$, $92^1/_4$, $118^2/_3$, $^{17}/_{18}$, $^5/_{16}$, $225^5/_6$, $18^2/_9$, $^5/_{24}$ и $117^5/_9$.

IX. Одузимање делова.

74. Каогод кад од 11 гроша узмемо 5 гроша остану 6 гроша, тако исто ако од 11, н. пр. дванестина ($^{11}/_{12}$) одузмемо 5 дванестина ($^5/_{12}$), морају остати 6 дванестина ($^6/_{12}$).

Кад т. ј. од каквог дела имамо одузети други неки **једноимени** део, онда је лако казати колики ће бити остатак; јер у таком случају имамо од неког броја именитељем назначених основних делова јединице да одузмемо други неки број исто таковиx делова, због чега остатак неможе бити други, но неки број опет таких делова, који добијамо, ако од броја, који показује колико тих делова има у првом од она два дела, дакле од овога броитеља, одузмемо број, који казује колико истих основних делова има у другом делу, т. ј. броитеља овога дела.

По томе **једноимене делове одузимамо, кад од броитеља умалимка одузмемо броитеља умалитеља и остатку подпишемо истога именитеља.**

75. Кад пак од неког дела имамо да одузмемо други неки разноимени део, н. пр. од $^{11}/_{12}$ да одузмемо $^{5}/_{8}$, онда не можемо рећи ни да је остатак $11-5=6$ дванестина, ни 6 осмина, каогод што би сасвим безумно било казати, да од 11 дуката можемо одузети 5 аршина, и да је остатак 6 дуката, или 6 аршина. Та сметња с места би престала, да су делови једноимени. Зато за одузимање разноимених делова имамо то правило: **морамо их најпре превести у једноимене, па онда њихову разлику изнаћи по пређашњем правилу за таке делове.**

Тако поступајући са пређе поменутим деловима $^{11}/_{12}$ и $^{5}/_{8}$, имамо најпре

$^{11}/_{12} = \frac{11 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{22}{24}$ и $^{5}/_{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$, дакле
$$^{11}/_{12} - ^{5}/_{8} = ^{22}/_{24} - ^{15}/_{24} = ^{7}/_{24}.$$

34. Примери.

1.) Од $^{13}/_{15}$ одузми $^{4}/_{5}$.

Будући је именитељ 5 у другом именитељу 15 садржан без остатка, то ће нови именитељ бити 15. Зато најпре $^{4}/_{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = ^{12}/_{15}$, па сад $^{13}/_{15} - ^{4}/_{5} = ^{13}/_{15} - ^{12}/_{15} = ^{1}/_{15}$. Кад т. ј. од $^{13}/_{15}$ одузмемо $^{4}/_{5}$, остаје $^{1}/_{15}$.

2.) Од $^{23}/_{45}$ одузми $^{19}/_{60}$.

Због $45 = 5 . 3 . 3$, а $60 = 2 . 2 . 3 . 5$, нови именитељ биће $2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 180$; зато

$$\left.\begin{array}{ll} 180 : 45 = 4, & 23 . 4 = 92 \\ : 60 = 3, & 19 . 3 = 57 \end{array}\right\} \text{нови броитељи,}$$

а разлика делова дакле $\frac{35}{180}$, или ако с 5 скратимо $^{7}/_{36}$.

3.) Од $^{17}/_{41}$ одузми $^{3}/_{17}$.

Овде су именитељи прости бројеви, зато нови именитељ $41 . 17 = 697$. Дакле $^{17}/_{41} = \frac{17 \cdot 17}{697} = \frac{289}{697}$ и $^{3}/_{17} = \frac{3 \cdot 41}{697} = \frac{123}{697}$, и зато $^{17}/_{41} - ^{3}/_{17} = \frac{289}{697} - \frac{123}{697} = \frac{166}{697}$.

Скрати овај део.

4.) Од $\frac{329}{330}$ одузми делове $^{7}/_{17}$, $^{3}/_{11}$ и $^{4}/_{25}$.

Именитељи су 17 и 11 прости бројеви, а $330 = 2.3.5.11$

$25 = 5.5$; зато нови именитељ мора бити $2.3.5.5.11.17 = 28050$, и по томе

нови {броит. умалимка $329.5.17 = 27965$

„ умалитеља $7.2.3.5.5.11 = 11550$

$3.2.3.5.5.17 = 7650$

$4.2.3.11.17 = 4488$

сбир ових 23688

дакле тражена разлика $\frac{27965-23688}{28050} = \frac{4277}{28050}$. Скрати овај део.

5.) Одузми сам од делова $^3/_{64}$, $^5/_{16}$ и $^{25}/_{28}$ делове $^{13}/_{72}$, $^{11}/_{24}$ и $^1/_7$, ако може; ако не, онда кажи колика је разлика између прва три и друга три дела?

77. а.) Да одузмемо од смешанога броја $3^3/_4$ део $^3/_5$.

Део $^3/_4$ у смешаном броју и умалитељ $^3/_5$ преведени у једноимене делове јесу

$$^3/_4 = \frac{3.5}{20} = {}^{15}/_{20} \text{ и } {}^3/_5 = \frac{3.4}{20} = {}^{12}/_{20}.$$

Од првога овај други одузет, даје остатак $^3/_{20}$, и зато је остатак од смешанога броја по одузетку дела $^3/_5$, $3^3/_{20}$.

б.) Да одузмемо од смешанога броја $12^1/_2$ део $^3/_8$.

Део смешанога броја $^1/_2$ и умалитељ, преведени у једноимене делове (због садржанога именитсља 2 у именитељу 8) јесу $^1/_2 = \frac{1.4}{8} = {}^4/_8$ и $^3/_8$. Овај други од првога одузет даје $^1/_8$, зато је тражени остатак од смешанога броја $12^1/_2$ по одузетку дела $^3/_8$, $12^1/_8$.

в.) Да одузмемо од смешанога броја $23^2/_5$ део $^5/_6$.

Делови $^2/_5$ и $^5/_6$, преведени у једноимене, јесу $^2/_5 = \frac{2.6}{30} = {}^{12}/_{30}$ и $^5/_6 = \frac{5.5}{30} = \frac{25}{30}$. Део умалитељ $^{25}/_{30}$ дакле већи је од дела $^{12}/_{30}$ у умалимку; зато, да би одузимање могли свршити, узимамо једну јединицу од целога броја у умалимку и претварамо је у 30ине. Имамо после умалимак $22\ \frac{30+12}{30} = 22\ {}^{42}/_{30}$, а умалитељ исти $^{25}/_{30}$. Сад можемо умалитеља одузети од дела умалимкова и налазимо, да је тражена разлика $22^{17}/_{30}$.

г.) Да изнађемо разлику између дела $^{13}/_{18}$ и смешанога броја $1^4/_{45}$.

Део $^{13}/_{18}$ и онај $^4/_{45}$ из смешанога броја, преведени у једноимене, јесу

$$^{13}/_{18} = \frac{13.5}{90} = {}^{65}/_{90} \text{ и } {}^4/_{45} = \frac{4.2}{90} = {}^8/_{90}.$$

Имамо сада дакле да изнађемо разлику између дела $^{65}/_{90}$ и смешанога броја $1^8/_{90}$. Овај је последњи већи, зато ће од њега што претећи. Како је пак његов део $^8/_{90}$ мањи од дела $^{65}/_{90}$, то, да би разлику могли определити, узимамо ону целу јединицу смешанога броја и претворимо је у 90ине; имамо после место тога броја привидни део $\frac{90+8}{90} = {^{98}/_{90}}$, и зато је разлика између датога дела и смешанога броја $^{98}/_{90} - {^{65}/_{90}} = {^{33}/_{90}}$, т. ј. смешани је број $1^4/_{45}$ за $^{33}/_{90} = {^{11}/_{30}}$ већи од дела $^{13}/_{18}$.

79. Ако пазљиво промотримо посао у свима овим примерима, то ћемо извести за одузимање каквог смешаног броја и некога дела ово правило:

Разлику између каквог дела и неког смешаног броја налазимо, ако онај део и део из смешаног броја (ако нису) преведемо у једноимене, па онда од дела смешанога броја одузмемо преведени дати део. Покаже ли се, да је овај део већи од дела у смешаном броју, онда од овога узмемо једну јединицу и претворимо је у онаке основне делове као у оба дела, те после од сбира претворене те јединице и дела смешанога броја одузмемо онај други део. Остатак тај уз, за јединицу умањени цео број смешанога броја, биће тражена разлика.

Изнаћи сад сам разлику између $3\frac{2}{13}$ и $\frac{7}{39}$, $\frac{8}{9}$ и $1\frac{2}{9}$, $5\frac{3}{8}$ и $\frac{17}{28}$, $201\frac{21}{45}$ и $\frac{3}{4}$.

79. Сад нам је лако увидити да, кад од смешанога броја имамо одузети други неки смешан број, онда најпре изнађемо разлику делова, па после ону целих бројева. Но ту још ваља приметити 1. ако делови нису једноимени, треба их најпре превести у такове, 2. ако је део у умалимку мањи од онога у умалитељу, онда од цела броја умалимкова треба узети једну јединицу и претворити је у исте основне делове као у оба преведена дела, па после од претворене те јединице скупа с делом умалимка одузети део умалитеља. Разлика делова уз разлику целих бројева биће тражена разлика, али незаборави, да си у другом случају цели број умалимка умалио једном јединицом.

89. Примери.

1.) Да одузмемо од $26\frac{5}{6}$ број $17\frac{1}{6}$.

Овде су делови једноимени и умалитељев мањи од умалимковог. Зато је тражена разлика (због $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, а $26 - 17 = 9$) $9\frac{2}{3}$.

2.) Од $13\frac{4}{9}$ да одузмемо $10\frac{5}{6}$.

Делови преведени у једноимене јесу

$$\frac{4}{9} = \frac{4.2}{18} = \frac{8}{18} \text{ и } \frac{5}{6} = \frac{5.3}{18} = \frac{15}{18}.$$

Умалитељев је део већи. Зато претворимо једну јединицу умалимка у 18не. Имамо сад од $^{18}/_{18} + ^{8}/_{18} = ^{26}/_{18}$ да одузмемо $^{15}/_{18}$; остају $^{11}/_{18}$. Једном јединицом умаљени цели број умалимка је 12; зато разлика целих бројева $12 - 10 = 2$, и по томе тражена разлика $2^{11}/_{18}$.

3.) Од $215^{57}/_{64}$ да одузмемо $43^{33}/_{72}$.

Преведени су делови

$$^{57}/_{64} = \frac{57.9}{64.9} = \frac{513}{576} \text{ и}$$

$$^{33}/_{32} = \frac{33.8}{72.8} = \frac{264}{576};$$ зато разлика делова $\frac{249}{576} = \frac{83}{192}$, а она је целих бројева $215 - 43 = 172$, и по томе тражена разлика смешаних бројева $172\frac{83}{192}$.

4.) Да изнађемо разлику између бројева $13^{3}/_{8}$ и $22^{5}/_{6}$.

$$^{3}/_{8} = \frac{3.3}{8.3} = ^{9}/_{24}, \quad ^{5}/_{6} = \frac{5.4}{6.4} = \frac{20}{24};$$

$\frac{20-9}{24} = ^{11}/_{24}$; $22 - 13 = 9$; дакле тражена разлика $9^{14}/_{12}$.

5.) Изнађимо још разлику између $108^{11}/_{16}$ и $109^{25}/_{64}$.

$$^{25}/_{64} = ^{25}/_{64}, \quad ^{11}/_{16} = \frac{11.4}{16.4} = \frac{44}{64};$$

$$109^{25}/_{64} - 108^{11}/_{16} = 109^{25}/_{64} - 108^{44}/_{64}$$
$$= 108\tfrac{64+25}{64} - 108\tfrac{44}{64}$$
$$= 108^{89}/_{64} - 108^{44}/_{64}$$
$$= ^{45}/_{64}.$$

6.) Колика је разлика између $18^3/_4$, $5^5/_6$, $^7/_8$ и $33^1/_{15}$ с једне, а $28^3/_{10}$, $1^4/_9$ и $17^{13}/_{18}$ с друге стране?

Дати именитељи

$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 15 \quad 10 \quad 9 \quad 18$$

$$\left.\begin{array}{l} 8=2.2.2 \\ 15=3.5 \\ 10=2.5 \\ 18=2.3.3 \end{array}\right\}$$ зато нови именитељ претворених делова $2.2.2.3.3.5=360$

$$\begin{array}{rl} 360:\ 4=90, & 3.90=270 \\ :\ 6=60, & 5.60=300 \\ :\ 8=45, & 7.45=315 \\ :15=24, & 4.24=\ \ 96 \\ \hline \text{сбир прва 4 дела} & \frac{981}{360} \\ 360:10=36, & 3.36=108 \\ :\ 9=40, & 4.40=160 \\ :18=20, & 13.20=260 \\ \hline \text{сбир друга 3 дела} & \frac{528}{360}; \end{array}$$

33 и 5, 38, и 18, *56* сбир целих бројева у 4 прва дата броја; 17 и 1, 18, и 28, *46* сбир целих у друга 3 дата броја. По томе тражена разлика

$$56\tfrac{981}{360}-46\tfrac{528}{360}=10\tfrac{453}{360}=11\tfrac{93}{360}$$
$$=11\tfrac{31}{120}.$$

7.) Сам. изнаћи разлике између $317^{18}/_{25}$ и $319\frac{101}{125}$, $1\frac{32}{49}$ и $2\frac{45}{91}$, $17^5/_6$ и $16^{17}/_{18}+{}^5/_9$, $53\frac{16}{45}+112\frac{36}{75}+3\frac{117}{225}$ и $108\frac{301}{305}+64\frac{333}{1005}$, $1^1/_3+$ $+3^3/_5+5^5/_7$ и $2^1/_2+4^3/_4+6^5/_6$.

X. Мложење делова.

81. Да помложимо н. пр. део $^3/_7$ с целим бројем 2. То значи, да вредност дела $^3/_7$ узмемо 2пут. Узимајући 2 пута по 3 седмине имамо 6 седмина, $^6/_7$, а овај део направићемо од онога $^3/_7$, мложећи броитеља 3 с 2.

Тако исто помложити део $^5/_{16}$ н. пр. целим бројем 3 значи, да узмемо вредност дела $^5/_{16}$ 3 пут, т. ј. 3 пут по 5 шеснестина. Узимајући 3 пут по 5 шеснестина имамо $3 . 5 = 15$ шеснестина. Дакле је $^5/_{16} \times 3 = {}^{15}/_{16}$, а овај део направили би рачуном од дела $^5/_{16}$, мложећи овоме броитеља с 3.

Сматрајмо сад ствар овако. $^3/_7$ с 2 помложити значи, да увећамо вредност дела $^3/_7$ 2пут; вредност дела пак увећава се, ако му броитеља помложимо с каквим бројем. По томе део $^3/_7$ биће 2пут увећан, удвојен, ако му броитеља помложимо с 2, и по томе је опет $^3/_7 \times 2 =$ $= \frac{3.2}{7} = {}^6/_7$.

Овако исто можемо и о другим деловима умствовати, па и на сваком уверити се, да **део неки целим бројем множимо, ако броитеља дела тим бројем помножимо и производу пређашњег именитеља подпишемо.**

82. Имамо да помножимо н. пр. део $^2/_5$ са целим бројем 5. Производ одтуд биће по пређашњему $\frac{2.5}{5} = {}^{10}/_5 = 2$.

Тако исто ако треба помножити $^4/_7$ бројем 7, биће производ $\frac{4.7}{7} = {}^{28}/_7 = 4$

И тако исто ако помножимо део $^5/_8$ бројем 8, излази производ $\frac{5.8}{8} = \frac{40}{8} = 5$.

У свима овим случајима мложисмо део собственим његовим именитељем, и свагда као производ изађе броитељ. Можемо дакле изрећи као правило и даље својство делова: **сваки део помложен именитељем производи свог броитеља.**

До овог докучаја долазимо још и на други начин.

$^1/_5$ је 5 пута мања од јединице, од 1, јер у јединици има $^5/_5$; $^2/_5$ су дакле 5 пута мање вредности но 2 јединице, 2. По томе, ако $^1/_5$ 5пута увећамо (5 пута узмемо, с 5 помложимо), добијемо 1, а ако $^2/_5$ 5пута увећамо (с 5 помложимо) добијемо 2 јединице, 2. А то је што пређе рекох: део мложен именитељем даје броитеља.

Дај коме место 2 # уједанпут, 5 пута по 24 гроша, то си му дао $5.24=120$ гроша, т. ј. 2 #. Но 24 гроша су (због $60:5=12$, а $2.12=24$) $^2/_5$ #; дакле дајући му 5 пута по $^2/_5$ #, дао си му 2 #, а број 2 је бройтељ дела тога $^2/_5$.

Најпосле још и овако. Бройтељ свакога дела, видео си, онолико је пута већи од самога дела, колико показује именитељ; ако дакле део онолико пута узмемо, колико показује именитељ (с именитељем помложимо), морамо добити бройтеља.

Ово добро упамти, јер је врло користно по томе, што ти уштеђује излишно рачунање, множење с именитељем.

83. Имамо помложити н. пр. цео број 3 делом $^2/_{11}$.

Премда би овде могли рећи, да је све једно, коју ћемо од те две вредности сматрати као мложимак, коју пак као мложитеља, и да дакле мложење броја 3 са $^2/_{11}$ на једно излази са мложењем дела $^2/_{11}$ бројем 3, чим би овај случај био сведен на пређашњи: то ћемо и пак таково мложење сматрати као од пређашњега различно.

Број 3 помложити делом $^2/_{11}$ значи, 3 јединице узети толико пута, колико показује део $^2/_{11}$, узети т. ј. **од њега** $^2/_{11}$. **Од** 3 јединице биће узете $^2/_{11}$, ако од сваке узмемо по $^2/_{11}$; $^2/_{11}$ од једне пак, и $^2/_{11}$ од друге и још $^2/_{11}$ од треће, чини свега 3 пут по $^2/_{11}$, $^6/_{11}$. Дакле број $3 \times {^2/_{11}} = {^6/_{11}}$, а рачуном направили би од броја 3 и дела $^2/_{11}$ овај део $^6/_{11}$, кад би број 3 с броитељем дела 2 помложили и производу именитеља подписали.

Као с овим целим бројем 3 и делом $^2/_{11}$, можемо се уверити и с ма којим другима, и зато стављам као правило: **цео број мложи се с каквим делом, ако га с броитељем дела помложимо и производу именитеља подпишемо.**

Уобште дакле можемо рећи: **део се целим бројем, или цео број делом мложи, ако броитеља дела с целим бројем помложимо и производу именитеља подпишемо.**

84. Имамо да помложимо н. пр. део $^5/_8$ с делом $^3/_7$.

Кад би део $^5/_8$ помложили само с броитељем 3 другога дела, имали би по пређашњему $\frac{3.5}{8} = {^{15}/_8}$. Али броитељ је 3, по доказаном својству делова у бр. 43., 7 пута већи од дела $^3/_7$, са којим смо имали да помложимо део $^5/_8$. Ми смо дакле овај део $^5/_8$, мложећи га с 3, у делу $^{15}/_8$ 7пута већма увећали, него што је ваљало; зато сад треба део $^{15}/_8$, да би добили што ваља, 7 пута умалити. Део се пак умаљава, ако му именитеља са 7 помложимо; дакле је прави производ од

$$^5/_8 \times {}^3/_7 = \frac{15}{8.7} = {}^{15}/_{56}.$$

Овај део добисмо од делова $^5/_8$ и $^3/_7$, мложећи броитеља 5 броитељем 3, а именитеља 8 именитељем 7.

Имамо помложити $^4/_5$ са $^2/_3$. Мложећи $^4/_5$ само броитељем 2 другога дела, добијамо $^8/_5$; али тај броитељ 2 3пут је веће вредности од дела $^2/_3$, са којим је ваљало помложити део $^4/_5$; ми смо тим мложењем дакле овај део у делу $^8/_5$ 3пут већма увећали, но што је требало; зато, да би добили оно што ваља, морамо део $^8/_5$ 3пут умалити, а то, каошто знамо, бива, ако му именитеља за 3 помложимо; по томе прави је производ од $^4/_5 \times {}^2/_3 = \frac{8}{5\,.\,3} = {}^8/_{15}$.

Овај део добисмо опет мложењем броитеља с броитељем, а именитеља с именитељем.

Сматрајући овако и друге делове долазимо до обштег правила: део се с де-

лом множи, кад броитеља помножимо броитељем, а именитеља именитељем и првом производу подпишемо други као именитеља.

85. Имамо да помножимо смешани број $5\frac{3}{5}$ н. пр. делом $\frac{4}{9}$.

Ово множење свршићемо, ако најпре цео број 5, па онда и део $\frac{3}{5}$ помножимо делом $\frac{4}{9}$, и најпосле још оба добивена дела у један скупимо. Добијамо тим начином $5 . \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$ и $\frac{3}{5} . \frac{4}{9} = \frac{12}{45}$, $\frac{20}{9} + \frac{12}{45} = \frac{20 . 5 + 12}{45} = \frac{112}{45}$, а због $112 : 45 = 2\frac{22}{45}$, тражени производ $5\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = 2\frac{22}{45}$.

Но лакше долазимо до тога производа овако:

Без сумње је сасвим једно, или помножили делом $\frac{4}{9}$ смешани број $5\frac{3}{5}$, или њему равни привидни део $\frac{28}{5}$. По томе $5\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{28}{5} . \frac{4}{9} = \frac{112}{45} = 2\frac{22}{45}$, као пре.

Имамо дакле за множење смешанога броја с делом, или дела смешаним бројем сасвим просто ово правило: **треба претворити смешани број у привидан део, и после овај датим делом помножити, а најпосле још добијени привидни део у смешан број превести.**

86. Примери.

1.) $^3/_8 \times 7^3/_5 = ?$

Посао

објасњен

$$^3/_8 \times 7^3/_5 = {^3/_8} \times {^{38}/_5}$$
$$= \frac{114}{40}$$
$$= 114 : 40$$
$$= 2^{34}/_{40}$$
$$= 2^{17}/_{20}$$

просто израђен

$7 \,.\, 5$

$35 + 3$

$38 \,.\, 3$

114

$\frac{8}{40} \,.\, 5$

$114 : 40 = 2^{34}/_{40}$

34

$= 2^{17}/_{40}$

2.) $13^5/_{12} \times {^{12}/_{35}}$.

Посао

објасњен

$$\frac{13\,.\,12+5}{12} \times {^{12}/_{35}}$$
$$= \frac{156+5}{12} \times {^{12}/_{35}}$$
$$= \frac{161}{12} \times {^{12}/_{35}}$$
$$= \frac{161\,.\,12}{12\,.\,35}$$
$$= \frac{161}{35}$$
$$= 161 : 35 = 4^{21}/_{35}$$

просто рађен

130

26 $(12\,.\,13)$

$156 + 5$

161

$\frac{161\,.\,12}{12\,.\,35} = \frac{161}{35}$

$161 : 35 = 4^{21}/_{35}$

21

3.) $15\frac{12}{17} \times \frac{5}{9}$.

Посао

објасњен

$\frac{15.17+12}{17} \times \frac{5}{9}$

$= \frac{267}{17} \times \frac{5}{9}$

$= \frac{1335}{153}$

$= 1335 : 153 = 8\frac{111}{153}$

111

$= 8\frac{37}{51}$

просто рађен

170
85
255 (15 . 17)
12 +
267 . 5
1335

17 . 9
153

$1335 : 153 = 8\frac{111}{153}$

111

$= 8\frac{38}{51}$

4.) $\frac{25}{48} \times 202\frac{16}{35}$.

Посао

објасњен

$\frac{25}{48} \times \frac{202.35+16}{35}$

$= \frac{25}{48} \times \frac{7070+16}{35}$

$= \frac{5}{48} \times \frac{7086}{7}$

$= \frac{5 \cdot 7086}{48 . 7}$

$= \frac{35430}{336}$

$= 35430 : 336 = 105\frac{150}{336}$

1830
150

$= 105\frac{50}{112}$

$= 105\frac{25}{56}$

просто рађен

202 . 5
1010 . 7
7060 (202 . 35)
16 +
7086

$\frac{25}{48} \cdot \frac{7086}{35}$

$\frac{5}{48} \cdot \frac{7086}{7}$

$35430 : 336 = 105\frac{150}{336}$

1830
150

$= 105\frac{50}{112}$

$= 105\frac{25}{56}$

5.) Израдн сам сада још производе $14\frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$, $23\frac{17}{18} \times \frac{18}{431}$, $\frac{117}{203} \times 1\frac{25}{99}$, $\frac{22}{53} \times 2\frac{9}{22}$.

6.) Колико је $3\frac{3}{4}$ пута $\frac{5}{8}$ гроша?

7.) Колико чини $152\frac{18}{25}$ пута $28\frac{31}{35}$ оке?

8.) У аустријској поштанској миљи има 4000 хвата. Колико хвата чини $2\frac{13}{45}$ миље?

9.) Лајпцигски риф садржи $250\frac{3}{5}$ паризских линија. Колико ових линија има у $\frac{5}{12}$ тога рифа?

87. Из онога што сам казао за мложење смешанога броја с каквим делом, лако је увидити, да ћемо при мложењу смешанога броја са смешмним лакше доћи до траженога производа, ако оба најпре преведемо у привидне делове, па их онда као делове помложимо и најпосле још производ, који ће у таком случају свагда бити привидан део, пречистимо, т, ј. претворимо у смешан број.

Н. пр. ако имамо помложити $6\frac{5}{8}$ са $7\frac{3}{4}$, биће производ $6\frac{5}{8} \times 7\frac{3}{4} = \frac{48+5}{8} \times \frac{28+3}{4} = \frac{53}{8} \cdot \frac{31}{4} = \frac{1643}{32} = 1643 : 32 = 51\frac{11}{32}$.

$$\begin{array}{l} 43 \\ 11 \end{array}$$

Овај исти пример морали би иначе овако израдити: $6\frac{5}{8}$ помложити са $7\frac{3}{4}$

значи, узети $6^5/_8$ најпре 7 пута, које даје $42^{35}/_8$, а после још $^3/_4$ пута, што чини $^{18}/_4 + {}^{15}/_{32}$; цео производ дакле узноси

$$42^{35}/_8 + {}^{18}/_4 + {}^{15}/_{32} \text{ или } 42 + {}^{35}/_8 + {}^{18}/_4 + {}^{15}/_{32},$$

у ком још ваља сабрати делове. Они за ту цељ претворени у једноимене јесу $\frac{35\,.\,3}{32} = \frac{140}{32}$, $\frac{18\,.\,8}{32} = \frac{144}{32}$ и $\frac{15}{32}$; дакле њихов сбир $\frac{140+144+15}{32} = \frac{299}{32} = 299 : 32 = 9^{11}/_{32}$, и
11

по томе тражени производ $42 + 9^{11}/_{32} = 51^{11}/_{32}$.

Радећи овај исти пример на оба начина упоред онако, као што би доиста радили, да просто само рачунимо, а не објасњујемо, стајао би посао овако. Задато је $6^5/_8 \times 7^3/_4$?

По 1. начину.

(У памети: 6×8, 48 и 5)	53
(„ „ 4×7, 28 и 3)	31
	53
($4 . 8 = 32$)	159
	$1643 : 32 = 51^{11}/_{32}$
	43
	11

тражени производ.

По 2. начину.

$6\,{}^{5}/_{8}$
$7\,{}^{3}/_{4}$
$42\,{}^{35}/_{8}$ Један поглед на именитеље ових
${}^{18}/_{4}$ делова показује, да ће нови
${}^{15}/_{32}$ именитељ бити број 32. За
њихово претварање у једноимене радимо сад даље овако:

(у памети: 8 у 32, 4 пута) $35 \times 4 = 140$

(" " 4 у 32, 8 пута) $18 \times 8 = 144$

(" " 15 и 144 јесу 159, и 140) ${}^{299}/_{32}$

$299 : 32 = 9\,{}^{11}/_{32}$
11

(у памети: 9 и 42, 51, дакле тражени производ) $51\,{}^{11}/_{32}$.

Ако оба посла сравнимо, то видимо, да смо на први начин радили и мање и простије.

88. Примери.

1.) $2^{11}/_{12} \times 7^{3}/_{5}$.

$$\begin{array}{llll}
\begin{array}{l} 12 \\ \hline 24 \cdot 2 \\ 11 \cdot + \\ \hline 35 \end{array} &
\begin{array}{l} 7 \\ \hline 35 \cdot 5 \\ 3 + \\ \hline 38 \end{array} &
\begin{array}{l} 38 \\ \hline 190 \cdot 5 \\ \hline 1330 \cdot 7 \end{array} &
\begin{array}{l} 12 \\ \hline 60 \cdot 5 \end{array}
\end{array}$$

$133,0 : 6,0 = 22^{1}/_{6}$ производ.

2.) $17^{5}/_{9} \times 13^{7}/_{8}$?

$$\begin{array}{llll}
\begin{array}{l} 17.9 \\ \hline 153 \\ 5 + \\ \hline 158 \end{array} &
\begin{array}{l} 13 \\ \hline 104 \cdot 8 \\ 7 + \\ \hline 111 \end{array} &
\begin{array}{l} 158 \\ \hline 17538 \cdot 111 \end{array} &
\begin{array}{l} 9 \\ \hline 72 \cdot 8 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
17538 : 72 = 243^{42}/_{72} & = 243^{21}/_{36} \\
313 & = 243^{7}/_{12} \text{ производ.} \\
258 & \\
42 &
\end{array}$$

3.) $105^{41}/_{42} \times 32^{17}/_{18}$?

$$\begin{array}{lll}
\begin{array}{l} 105 \\ \hline 210 \cdot 42 \\ 420 \\ \hline 4410 \\ 41 + \\ \hline 4451 \\ 42 \\ \hline 336 \cdot 18 \\ 42 \\ \hline 756 \end{array} &
\begin{array}{l} 32 \\ \hline 256 \cdot 18 \\ 32 \\ \hline 576 \\ 17 + \\ \hline 593 \end{array} &
\begin{array}{l} 4451 \\ \hline 13353 \cdot 593 \\ 40059 \\ 22255 \\ \hline 2639443 \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2639443 : 756 = 3478\frac{75}{756} \text{ тражени производ.} \\
3614 \\
5904 \\
6123 \\
75
\end{array}$$

4.) Изради сам још производе:

$25^{19}/_{28} \times 83^{25}/_{72}$, $18\frac{13}{101} \times 2^{1}/_{50}$,

$35^{2}/_{15} \times 1\frac{23}{525}$, $223^{1}/_{5} \times 12^{1}/_{2}$.

$118^{43}/_{49} \times 25^{23}/_{29}$, $5^{13}/_{14} \times 12^{8}/_{9} \times 24^{28}/_{29}$.

5.) Колико је гроша $3^{5}/_{6}$ пута по $18^{6}/_{7}$ гроша?

6.) На један земљин степен (1 степен или град меридијана, полуданка) иду $69^{3}/_{25}$ нових енгл. миља. Колико ових миља иду на $15^{5}/_{9}$ степена?

7.) У француском ару (мера за површине) има $27\frac{799}{1000}$ бечких □ хвата. Колико ових хвата има у $50\frac{103}{248}$ ара.

8.) У 1 метру има $443\frac{37}{125}$ паризских линија. Колико ових има у $25^{6}/_{7}$ метра?

9.) Купио сам $210^{5}/_{8}$ хвата по $58^{5}/_{16}$ гроша хват. Колико морам платити за све?

XI. Деоба делова.

89. а) Имамо н. пр. део $^{4}/_{5}$ да разделимо целим бројем 2.

То значи, да изнађемо бројну вредност, која је у делу $^{4}/_{5}$ садржана 2 пут. Како треба да је у делу садржана 2 пут, то лако увиђамо, да неможе бити цео број, но опет неки део. У 4 петине имамо

2 пут по 2 петине ($^2/_5$); дакле тражена бројна вредност је део $^2/_5$, т. ј.

$$^4/_5 : 2 = ^2/_5.$$

Овај део добили би од дела $^4/_5$ рачуном, кад би му поделили броитеља с датим делитељем 2.

б) Имамо да делимо део $^6/_7$ целим бројем 3. То значи, да изнађемо бројну вредност, која је у делу $^6/_7$ садржана 3 пут. У 6 седмина имамо 3 пут по $^2/_7$. Дакле су $^2/_7$ тражена бројна вредност, или

$$^6/_7 : 3 = ^2/_7.$$

Овај део добили би од дела $^6/_7$ рачуном, кад би броитеља 6 разделили целим бројем 3, делитељем.

в) Имамо да разделимо део $^3/_4$ целим бројем 5.

То значи, да изнађемо бројну вредност, која је у делу $^3/_4$ садржана 5 пута. У јединици има $^4/_4$, а $^{20}/_{20}$, зато на сваку четвртину иду по 5 дваестина ($^5/_{20}$), а на 3 четвртине 3 пут по 5 дваестина, или $^{15}/_{20}$. У 15 дваестина имамо 5 пута по 3 дваестине; дакле у делу $^{15}/_{20}$, који је колики и део $^3/_4$, имамо 5 пута по $^3/_{20}$, и зато је бројна вредност, која је у делу $^3/_4$ садржана 5 пута, део $^3/_{20}$, или

$$^3/_4 : 5 = ^3/_{20}.$$

Овај део добили би од дела $^3/_4$ рачуном, кад би помложили именитеља 4 целим бројем 5, делитељем.

До ових докучења могли смо доћи још и оваким умствовањем.

а) По појму деобе два броја количник је онолико пута мањи од делимка, колико показује делитељ. По томе део $^4/_5:2$ значи да вредност тога дела 2 пут умалимо, вредност се дела пак 2 пут умаљава, ако му броитеља с 2 разделимо; дакле је $^4/_5:2=\frac{4:2}{5}=\,^2/_5$, као пре.

б) Део $^6/_7$ делити с 3 значи, да вредност тога дела умалимо 3 пут, а део се 3 пут умаљава, кад му броитеља разделимо с 3; дакле је $^6/_7:3=\frac{6:3}{7}=\,^2/_7$, као пре.

в) $^3/_4:5$ значи, да умалимо део $^3/_4$ 5 пута. Део се 5 пута умаљава и мложењем именитеља с 5; дакле је $^3/_4:5=\frac{3}{4.5}=\,^3/_{20}$, као пре.

И резултати и начин рачунања за те показаше се исти.

Још узмимо да имамо разделити део $^7/_{18}$ целим бројем 5.

То значи, да изнађемо бројну вредност, која је у делу $^7/_{18}$ садржана 5 пута. У свакој ствари садржи се исте ствари петина 5 пута. Део $^7/_{18}$ дакле разделити целим бројем 5 значи, да од тога дела узмемо петину. У јединици имамо $^{18}/_{18}$, а $\frac{90}{90}$, дакле иду на сваку 18ину по 5 90ина, и зато на $^{7}/_{18}$ 7 пута по $^{5}/_{90}$, т. ј. $^{35}/_{90}$. У деловима $^{7}/_{18}$ и $^{35}/_{90}$ имамо једну исту вредност. Од дела $^{7}/_{18}$, дакле узећемо петину, ако узмемо петину од $^{35}/_{90}$, од 35 90ина је пак (због $35:5=7$) једна петина $^{7}/_{90}$, и по томе $^{7}/_{18}:5=^{7}/_{90}$.

Овај део добивамо од дела $^{7}/_{18}$ множењем именитеља 18 са делитељем 5.

90. Сматрајући овако још и друге делове уверавамо се најпосле подпуно, да **део делимо целим бројем, ако или броитеља тим бројем разделимо, или именитеља њим помложимо.**

Броитеља делимо, кад је делитељ у њему садаржан, иначе множимо именитеља.

На оба начина умаљавамо вредност дела, а то, каошто видисмо, и јесте значење деобе дела чрез какав цео број.

91. Примери.

$$^{14}/_{15}:\ 7=\frac{14:7}{5}\ =^{2}/_{15}$$
$$^{28}/_{35}:\ 4=\frac{28:4}{35}\ =^{7}/_{37}=^{1}/_{5}$$
$$^{11}/_{13}:\ 3=\frac{11}{13.3}\ =^{11}/_{39}$$
$$^{7}/_{8}:\ 9=\frac{7}{8.9}\ =^{7}/_{72}$$
$$^{24}/_{49}:\ 8=\frac{24:8}{49}=\frac{3}{49}$$

$$^{39}/_{53}:13=\frac{39:13}{53}={}^{3}/_{53}$$
$$\frac{72}{101}:5=\frac{172}{101.5}=\frac{72}{505}$$
$$^{18}/_{19}:8=\frac{18}{19.8}=\frac{9}{19.4}=\frac{9}{76}$$
$$^{28}/_{53}:12=\frac{28}{53.12}=\frac{7}{53.3}=\frac{7}{159}$$
$$^{7}/_{15}:14=\frac{7}{15.14}=\frac{1}{15.2}={}^{1}/_{30}.$$

92. а) Сад да делимо цео број, н. пр. 3, делом $^2/_5$, т. ј. да изнађемо колико даје $3:{}^2/_5$, или колико се пута по $^2/_5$ налазе у 3 јединице, **или колико пута морамо узети по $^2/_5$, да би добили 3 јединице?**

Ако $^1/_5$ узмемо 5 пута, имамо $^5/_5$, т. ј. целу јединицу. Дакле ако узмемо 6 пута по $^5/_5$, имамо 6 јединица или $^{6.5}/_5={}^{30}/_5$. У 30 петина имамо по 2 петине 15 пута, дакле је $6:{}^2/_5=15$. Почем су пак 3 јединице половина од 6 јединица, то нам за 3 јединице треба узети само у пола онолико пута по $^2/_5$, колико за 6 јединица; за 6 јединица требали смо 15 пута по $^2/_5$, за 3 јединице дакле требамо $^1/_2$ од 15, т. ј. $^{15}/_2=7^1/_2$ пута по $^2/_5$. И доиста чине $^{15}/_2\times{}^2/_5=\frac{15.2}{2.5}=\frac{15}{5}=3$ јединице. Тако дакле

$$3:{}^2/_5={}^{15}/_2.$$

Овај део можемо написати и овако $\frac{3.5}{2}$ или $3\times{}^5/_2$, од куда видимо, да би тражени количник од целога броја $3:{}^2/_5={}^{15}/_2$ $=3.{}^5/_2$ направили рачуном, кад би део

$^2/_5$ извpнули ($^5/_2$) и с њим извpнутим она цели број 3 помложили.

Могли смо још и овако умствовати. Ако узмемо 5 пута по $^1/_5$ имамо $^5/_5$ или једну целу јединицу; зато ако узмемо 5 пута по $^2/_5$ имаћемо $^{10}/_5$ или 2 целе јединице. Сад нам још треба трећа јединица, а ту добијамо, узевши још 5 пута по $^1/_5$, или још $^5/_5$. Почем је пак $^1/_5$ половина од $^2/_5$, то нам дакле за 3 јединице треба узети 5 пута по $1^1/_2$ пута $^2/_5$, или, због 5 пута по $^3/_2$ свега $^{15}/_2$, $^{15}/_2$ пута по $^2/_5$. По томе количник је од $3:{}^2/_5 = {}^{15}/_2 = \frac{3 \cdot 5}{2}$ $= 3 \times {}^5/_2$, као и пре.

б) Имамо да делимо цео број 5 делом $^3/_4$, имамо т. ј. да изнађемо бројну вредност, која показује колико је пута број 5 већи од дела $^3/_4$.

У јединици има $^4/_4$, а $^{60}/_{60}$; зато на сваку четвртину иду по $(60:4=15)$ $^{15}/_{60}$, а на $^3/_4$ 3пут 15 шеестина или $^{45}/_{60}$.

У 5 јединица имамо 5 пута по $^{60}/_{60}$, т. ј. $\frac{300}{60}$, а у 300 шеестина налазе се по 45 шеестина $(300 : 45 = 6^{30}/_{45} = 6^2/_3)$ $6^2/_3$ пута; дакле је број 5 од дела $^3/_4$ $6^2/_3$ пута већи, или $5:{}^3/_4 = 6^2/_3 = {}^{20}/_3$.

Овај део можемо написати још и овако $\frac{5 \cdot 4}{3} = 5 \times {}^4/_3$. Из чега опет видимо да би количник од $5 : \frac{3}{4}$ направили рачуном, кад би делитеља $\frac{3}{4}$ изврнули ($\frac{4}{3}$) и с њим изврнутим делимак 5 помложили.

93. Узмимо опет да имамо разделити број 3 делом $\frac{2}{5}$.

То значи, да умалимо вредност броја 3 онолико пута, колике је вредности део $\frac{2}{5}$.

Кад би поделили број 3 само броитељем дела, т. ј. с 2, добили би $\frac{3}{2}$, вредност, у којој је број 3 2пут умаљен. Видили смо, да је броитељ свакога дела онолико пута веће вредности од вредности самога дела, колико у именитељу овога има јединица. Ми смо по томе број 3, делећи га бројем 2, 5 пута већма умалили, негшто је требало, и он толико пута умаљен износи $\frac{3}{2}$. Лако је удити дакле, да ову вредност, ако хоћемо да буде она што треба, морамо 5 пута опет увећати, т. ј. 5 пута узети, $5 \times \frac{3}{2}$ пак чини $\frac{15}{2}$.

Ако сад расудимо којим смо начином до овога броја дошли, то увиђамо, да смо број 3 помложили бројем 5 (именитељем дела), а разделили бројем 2 (броитељем), што очевидно на то излази, да смо број 3 помложили делом $\frac{5}{2}$, т. ј. изврнутим делитељем $\frac{2}{5}$.

Сматрајмо овако још и онај други пример, $5 : {}^{3}/_{4}$. Ово значи, да умалимо вредност броја 5 онолико пута, колике је вредности део $^{3}/_{4}$.

Делећи број 5 само бронтељем дела, бројем 3, умаљавамо га 3пут и добијамо тиме део $^{5}/_{3}$. Но броитељ 3 дела $^{3}/_{4}$ 4пута је веће вредности од истога дела. Ми смо дакле број 5, делећи га бројем 3, у делу $^{5}/_{3}$ 4пута већма умалили, него што је требало; зато, да би имали што треба, морамо овај део $^{5}/_{3}$, као резултат оне деобе, 4пута да увећамо, 4 пута да узмемо, са 4 (именитељем) да помложимо, чим добијамо $^{5}/_{3} \times 4 = {}^{20}/_{3} = 5 \times {}^{4}/_{3}$. И по томе права је вредност количника од $5 : {}^{3}/_{4} = {}^{20}/_{3} = 5 \times {}^{4}/_{3}$.

Овај део добисмо опет мложењем делимка (5) именитељем делитеља (4), а деобом чрез броитеља (3), дакле мложењем делимка с извршутим делитељем.

94. Умствујући овако о деоби ма каквог целог броја чрез ма какав део, увиђамо најпосле као нравило:

Цео број делимо делом каквим, ако га изврнутим делом помложимо.

Почем је пак изврнути делитељ свагда привидан део, и као такав веће вредности од јединице, то се онај цели број, делимак, деобом са делом **неумаљава**, него **увећава**. Резултат је свагда привидан део, који дакле најпосле још треба пречистити, у смешан број превести.

85. Примери.

1.) $15 : {}^2/_3 = 15 \times {}^3/_2 = {}^{45}/_2 = 22^1/_2$

2.) $15 : {}^5/_6 = 15 \times {}^6/_5 = 3 . 6 = 18$

3.) $17 : {}^4/_7 = 17 \times {}^7/_4 = \frac{119}{4} = 29^3/_4$

4.) $282 : {}^9/_{10} = 282 \times {}^{10}/_9 = \frac{2820}{9} = 313^3/_9$
$= 313^1/_3$

5.) $105 : {}^{25}/_{26} = \frac{105 \times 26}{25} = \frac{21 \times 26}{5} = \frac{546}{5}$
$= 109^1/_5$

6.) $23 : {}^8/_9 = 207 : 8 = 25^7/_8$
47
7

7.) $33 : {}^{11}/_{12} = \frac{33 \times 12}{11} = 3 . 12 = 36$

8.) $145 : {}^{15}/_{17} = \frac{145 . 17}{15} = \frac{29 . 17}{3} = \frac{493}{3}$
$= 164^1/_3$

9.) $99 : {}^{33}/_{35} = \frac{99 . 35}{33} = 3 . 35 = 105.$

10.) $25 : {}^{25}/_{26} = \frac{25 . 26}{25} = 26.$

11.) Сврши сам још ове деобе:
$32 : {}^8/_9$, $28 : {}^7/_8$, $50 : {}^5/_{12}$, $88 : {}^{33}/_{34}$, $170 : {}^{13}/_{14}$, $177 : {}^9/_{13}$, $1020 : {}^{45}/_{46}$, $303 : {}^{18}/_{19}$, $3333 : \frac{101}{206}$, $4205 : \frac{72}{113}$, $220 : {}^{10}/_{21}$, $8 : \frac{1111}{5223}$, $1212 : {}^{12}/_{55}$.

12.) На колико људи поделићеш 120? гроша, дајући сваком по ${}^5/_8$ гр. (25 пара)

13.) Имам за потрошак 14 ♯. Трошећи на дан по $^2/_3$ ♯, за колико ћу их дана потрошити?

14.) Ево 240 ока леба, подели их на ту сиротињу, али дај свакому по 3 литре ($^3/_4$ оке). Колико ће њих добити?

94. Имамо да разделимо део $^5/_7$ опет делом, н. пр. $^2/_3$.

То значи, да умалимо део $^5/_7$ онолико пута, колико вреди део $^2/_3$.

Ако део $^5/_7$ разделимо само делитељевим броитељем 2, добијамо по показаном правилу за деобу дела целим бројем (овде мложењем именитеља), $^5/_{14}$. Но броитељ је свакога дела онолико пута већи од самога дела, колико показује именитељ. Том деобом дакле умалили смо део $^5/_7$ у делу $^5/_{14}$ 3пут већма, но што је требало, и зато, ако хоћемо да добијемо што ваља, морамо део $^5/_{14}$ 3пут опет увећати, 3пут узети, с 3 помложити, а то бива мложењем броитеља с 3, и по томе $^5/_7 : {}^2/_3 = {}^5/_{14} \times 3 = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2}$

$$= {}^5/_7 \times {}^3/_2 = {}^{15}/_{14}.$$

Овај део добисмо мложењем делимковог броитеља 5 делитељевим именитељем 3, а делимковог именитеља 7 делитељевим броитељем 2, а то ће рећи множењем делимка с изврнутим делитељем.

Још узмимо да имамо разделити део $^8/_{13}$ делом $^5/_{11}$, т. ј. да умалимо део $^8/_{13}$ онолико пута, колико вреде $^5/_{11}$.

Делећи део $^8/_{13}$ делитељевим броитељем 5 добијамо $^8/_{13\,.\,5} = \frac{8}{65}$ (множењем именитеља 13 с 5). Но броитељ је 5 11пута већи од дела $^5/_{11}$. Ми смо дакле део $^8/_{13}$ у делу $^8/_{65}$, делећи га бројем 5, 11пута већма умалили, него што је требало, зато сад за производење правог количника морамо део $^8/_{65}$, као резултат оне деобе, 11пута да увећамо, с 11 да помножимо, а то даје $^8/_{65} \times 11 = {}^{88}/_{65}$, и по томе

$$^8/_{13} : {}^5/_{11} = {}^{88}/_{65} = \frac{8\,.\,11}{13\,.\,5} = {}^8/_{13} \times {}^{11}/_5.$$

До овога дела, као траженога количника, дођосмо множењем делимковог броитеља 8 делитељевим именитељем 11, а делимковога именитеља 13 делитељевим броитељем 5, дакле множењем делимка с изврнутим делитељем.

Сматрајући овако и деобу ма каква два дела, дознајемо као правило: **део делимо делом, кад делимак помножимо изврнутим делитељем.**

95. Количник од дела, подељеног делом, излази понајвише као привидан део, с тога га у таком случају најпосле још ваља пречистити.

Добили смо пређе

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14}, \text{ а}$$
$$\frac{8}{13} : \frac{5}{11} = \frac{8 \cdot 11}{13 \cdot 5} = \frac{88}{65}.$$

Оба та два количника привидни су делови; први је пречишћен $1\frac{1}{14}$, а други $1\frac{23}{65}$.

96. У делимку $\frac{5}{7}$ првога примера имамо $\frac{10}{14}$, а у количнику $\frac{15}{14}$; подобно у делимку $\frac{8}{13}$ другога примера има $\frac{40}{65}$, а у количнику $\frac{88}{65}$. У оба је случаја количник већи од делимка, и тако ће бити ма каква два дела један другим поделили. Због тога **сваки део, раздељен другим делом, неумаљава се, него се увећава.**

97. Имамо да разделимо део, н. пр. $\frac{8}{15}$ делом $\frac{4}{5}$.

Радећи по изнађеном правилу, имамо $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4}$, или ако с 5 и 4 скратимо,

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3},$$

који део добили би, кад би делимковог броитеља разделили делитељевим броитељем 4, а делимковог именитеља 15 делитељевим именитељем 5. Сасвим наравно; јер ако смо предходеће сматрање деобе дела с делом подпуно разумели, онда

Јоксимовић

Јоксим

смо увидили, да делимак ваља онолико пута умалити, колико показује броитељ делитеља, а онолико пута увећати, колико каже именитељ делитеља, умаљавање пак бива или деобом броитеља, или мложењем именитеља, а увећање или мложењем броитеља, или деобом именитеља.

У случају дакле, где су броитељ и именитељ делитеља садржани у броитељу и именитељу делимка, свршавамо деобу простије, ако делимковог броитеља и именитеља поделимо односно делитељевим броитељем и именитељем, т. ј. броитеља броитељем, а именитеља именитељем.

Тако поступајући уштећујемо скраћивање количника, јер га добијамо одма у најпростијем виду.

98. Имамо н. пр. да разделимо део $^6/_7$ делом $^3/_4$.

То значи, да умалимо део $^6/_7$ 3пут, а да га увећамо 4пута. **У**маљавање бива или деобом броитеља, или мложењем именитеља; овде је **3** у **6** садржано, дакле делимо броитеља. **У**већање пак бива мложењем броитеља, или деобом именитеља;

овде 4 у 7 није садржано, зато множимо броитеља.

У случају дакле, где је само броитељ делитеља садржан у делимковом броитељу, свршавамо деобу краће, ако делимковог броитеља делитељевим разделимо, а с овога именитељем помложимо.

99. Најпосле још имамо да делимо $^5/_8$ са $^3/_4$.

То значи, имамо део $^5/_8$ 3пут да умалимо, а 4 пута да увећамо. Прво бива ако му или броитеља с 3 разделимо, или именитеља с 3 помложимо; делити овде неможемо, зато множимо уменитеља. Друго пак, т. ј. увећање бива или множењем броитеља, или делењем именитеља с 4; овде можемо делити, зато делимо именитеља.

По томе у случају, где је само именитељ делитељев садржан у именитељу делимка, свршавамо деобу краће, ако делимковог именитеља са делитељевим разделимо, а с овога броитељем помложимо.

Само ко је подпуно схватио природу делова и из те изведена правила за њихову деобу, користиће се овим последњим правилама; почетнику пак препоручујем, да се дотле придржава оног обштег, т. ј. за све случаје стојећега, по ком треба помложити делимак с изврнутим делитељем. Истина ће тако нешто више, али зато поузданије радити.

100. Примери.

$\frac{5}{16} : \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7}{16 \cdot 3} = \frac{35}{48}$

$\frac{3}{8} : \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 2} = \frac{9}{16}$

$\frac{7}{16} : \frac{5}{4} = \frac{7}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20}$ (зашто?)

$\frac{12}{13} : \frac{6}{7} = \frac{2 \cdot 7}{13} = \frac{14}{13} = 1\frac{1}{13}$ (зашто?)

$\frac{18}{35} : \frac{6}{7} = \frac{3}{5}$ (зашто?)

$\frac{7}{8} : \frac{8}{9} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} = \frac{63}{64}$

$\frac{11}{12} : \frac{5}{6} = \frac{11}{2 \cdot 5} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$

$\frac{32}{41} : \frac{2}{17} = \frac{16 \cdot 17}{41} = 272 : 41 = 6\frac{26}{41}$

26

Сврши сам још ове деобе $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$, $\frac{8}{9} : \frac{6}{7}$, $\frac{11}{14} : \frac{1}{7}$, $\frac{9}{16} : \frac{8}{9}$, $\frac{9}{16} : \frac{3}{8}$, $\frac{113}{141} : \frac{3}{5}$, $\frac{17}{19} : \frac{21}{43}$.

101. Имамо да разделимо смешани број, н. пр. $2\frac{3}{4}$ са целим бројем 5.

То значи, имамо да узмемо $\frac{1}{5}$ од 2 целе јединице и од $\frac{3}{4}$.

$\frac{1}{5}$ од 2 јединице јесу $\frac{2}{5}$, а од $\frac{3}{4}$ узети петину значи, умалити део $\frac{3}{4}$ 5 пута, 5 пута пак умаљен је део деобом броитеља, или мложењем именитеља с 5, овде на последњи начин, јер 5 у 3 није садржано.

Дакле је $^1/_5$ од $^3/_4 = ^3/_{20}$, и по томе $^1/_5$ од $2^3/_4$, или $2^3/_4 : 5 = ^2/_5 + ^3/_{20} = ^8/_{20} + ^3/_{20} = ^{11}/_{20}$.

До овог дела као траженога количника, дошли би лакше, да смо смешани број превели у привидан део и после свршили деобу као дела са целим бројем. Тако радећи имамо

$$2^3/_4 : 5 = {}^{11}/_4 : 5 = {}^{11}/_{20} \text{ као пре.}$$

Зато постављам правило: **смешан број делимо целим бројем, ако смешани преведемо у привидан део и после свршимо деобу као дела са целим бројем.**

Количник притом излази којипут део, којипут пак привидан део; зато га у првом случају још треба по могућству скратити, а у другом пречистити.

102. Примери.

1.) $13^2/_5 : 7 = \frac{67}{5} : 7 = \frac{67}{35} = 1\frac{32}{35}$

2.) $12^4/_5 : 8 = \frac{64}{5} : 8 = \frac{64}{5 \cdot 8} = {}^8/_5 = 1^3/_5$

3.) $25^3/_4 : 9 = \frac{103}{4} : 9 = 103 : 36 = 2\frac{31}{36}$

$$31$$

4.) $105^{15}/_{16} : 15 = \frac{1695}{16} : 15 = \frac{1695}{16 \cdot 15} = \frac{113}{16}$

$= 7^1/_{16}$.

5.) Изради сам још ове количнике: $27^3/_4 : 12$, $204^{15}/_{16} : 18$, $333^4/_5 : 9$, $28^{17}/_{18} : 58$, $1^1/_8 : 7$, $2025^5/_6 : 2555$.

6.) Ако вас троје поделите $3002^{5}/_{8}$ оке кукуруза, по колико долази на једнога?

7.) Вас 123 поделите $25^{5}/_{8}$ оке олова између се; по колико долази на једнога?

8.) На земљин 1 степен иду $15\frac{11}{250}$ немачке геогр. миље; колико долазе на четврт степена?

103. Имамо сад да делимо смешани број, н. пр. $7^{5}/_{6}$ делом $^{3}/_{11}$.

То би могли тако урадити, да најпре разделимо цео број 7, па онда и придани му део $^{5}/_{6}$ датим делитељем $^{3}/_{11}$, прво по правилу за деобу целог броја делом, а друго по правилу за деобу дела с делом. Добили би тако радећи $7 \times {}^{11}/_{3} = {}^{77}/_{3} = 25^{2}/_{3}$ и још ${}^{5}/_{6} \times {}^{11}/_{3} = {}^{55}/_{18} = 3^{1}/_{18}$. Сад још имамо оба добивена броја $25^{2}/_{3}$ и $^{1}/_{18}$ да саберемо, а зато најпре делове $^{2}/_{3}$ и $^{1}/_{18}$ уједноимене да преведемо. Нови именитељ биће 18, а преведени делови су $^{12}/_{18}$ и $^{1}/_{18}$, скупа $^{13}/_{18}$ уз сбир целих бројева $25 + 3 = 28$. Тражени је количник дакле $28^{13}/_{18}$.

Но лакше и краће свршићемо ту деобу, ако смешани број преведемо у привидан део и после га као део делом разделимо. Тако поступајући имамо

$^{47}/_6 : {}^3/_{11} = \frac{47.11}{6.3} = 517:18 = 28^{11}/_{18}$ као пре,
157
13
али очевидно краће.

Зато и постављам као правило: **за деобу смешанога броја чрез део треба смешани број превести у привидан део и после свршити деобу као дела с делом.** По себи разуме се сад, да **добивени количник најпосле још ваља скратити, или, ако је привидан део, пречистити.**

Он ће свагда бити већи од делимка (зашто?)

104. Примери.

1.) $3^5/_8 : {}^3/_4 = {}^{29}/_8 : {}^3/_4 = \frac{29}{2.3} = 29:6 = 4^5/_6$.

2.) $12^{15}/_{16} : {}^3/_8 = \frac{207}{16} : {}^3/_8 = \frac{207}{2.3}$
$= 207:6 = 34^3/_6 = 34^1/_2$.
27
3

3.) $5^5/_{11} : {}^2/_5 = \frac{61}{11} : {}^2/_5 = 305:22 = 14^1/_{22}$.
85
1

4.) $103^3/_4 : {}^3/_4 = \frac{415}{4} : {}^3/_4 = \frac{415}{3} = 138^1/_3$.

5.) Сврши сам још ове деобе:

$3^{11}/_{12} : {}^{12}/_{13}$, $9^{11}/_{12} : {}^5/_{12}$, $15^3/_8 : {}^8/_9$; $4^1/_2 : {}^5/_9$; $48^2/_7 : {}^7/_{338}$, $1044^3/_4 : {}^{28}/_{33}$.

6.) $25^5/_8$ центе кафе поделите између се и узмите сваки по $^5/_{24}$ центе; колико ће вас добити?

7.) Вас троје поделите $2005^9/_{10}$ дуката на тај начин, да први узме количник од тога броја, кад га подели с $^3/_5$, други да узме од количника количник, кад га подели с $^2/_3$, а шта од оне суме претекне, то нека буде део трећега. Колико ће сваки добити?

105. Имамо да разделимо део н. пр. $^5/_8$ смешаним бројем $2^3/_5$.

Овде и неможемо другче радити, него да делитеља најпре преведемо у привидан део. Тако радећи имамо

$$^5/_8 : 2^3/_5 = {}^5/_8 : {}^{13}/_5 = \frac{5 \cdot 5}{8 . 13} = \frac{25}{104}.$$

И за деобу дела чрез смешан број постоји дакле правило: **ваља смешани број најпре превести у привидан део, и после свршити деобу као дела с делом.**

Количник биће овде свагда неки део, који најпосле још треба по могућству скратити.

106. Примери.

1.) $^3/_{14} : 5^2/_3 = {}^3/_{14} : {}^{17}/_3 = \frac{3.3}{14.17} = \frac{9}{238}.$

2.) $^{12}/_{17} : 4^1/_4 = {}^{12}/_{17} : {}^{17}/_4 = \frac{12.4}{17.17} = \frac{48}{289}.$

3.) $^{17}/_{18} : 5^2/_3 = ^{17}/_{18} : ^{17}/_3 = ^1/_6$.

4.) $^7/_8 : 3^2/_5 = ^7/_8 : ^{17}/_5 = \frac{7.5}{8.17} = \frac{35}{136}$.

5.) Изради сам још ове деобе:
$^{13}/_{14} : 2^5/_{11}$, $^7/_{12} : 5^4/_7$, $^8/_{15} : 2^2/_3$, $^1/_2 : 3^1/_2$, $^4/_5 : 1^{11}/_{15}$, $^2/_{17} : 3^2/_5$, $^3/_4 : 8^1/_2$, $^5/_{12} : 3^3/_8$, $^4/_9 : 2^7/_{18}$.

107. Као при деоби дела са смешаним бројем, тако исто морамо поступати и кад имамо делити цео број смешании бројем, **и ту** т. ј. **морамо смешани број најпре превести у привидан део**, чим је деоба сведена на деобу целога броја делом.

108. Примери.

1.) $3 : 2^1/_2 = 3 : ^5/_2 = \frac{3.2}{5} = ^6/_5 = 1^1/_5$.

2.) $18 : 1^2/_3 = 18 : ^5/_3 = \frac{18.3}{5} = \frac{54}{5} = 10^4/_5$.

4.) За две једнаке диње платио сам $7^3/_4$ гроша; пошто је свака?

5.) Од 58 ока, чега било, колико ће њих добити по 3 $^5/_8$ оке?

6.) 16 гроша по $3^1/_5$ гроша има њих колико платити?

7.) У дан орања рачунимо 900 □ хвата; колики су део дана орања $105^3/_{14}$ □^{0}?

109. Најпосле још оста да извидимо, како се дели смешан број са такођер таким бројем?

Зато што је делитељ смешан број, неможемо иначе, него да њега најпре преведемо у привидан део; зато пак, што је деоба смешанога броја чрез део лакша, ако још и тај број преведемо у привидан део, то увиђамо као правило: **за деобу смешанога броја са такођер смешаним бројем морамо обадва превести у привидне делове и после свршити деобу као дела с делом.**

Кад количник испадне привидан део, онда га ваља још претворити у смешан број, иначе треба га још, ако је могуће, скратити.

110. Примери.

1.) $3^{2}/_{7} : 2^{3}/_{4} = {}^{23}/_{7} : {}^{11}/_{4} = \frac{23 . 4}{7 . 11} = \frac{92}{77} = 1\frac{15}{77}$.

2.) $15^{2}/_{15} : 4^{6}/_{15} = \frac{227}{15} : \frac{66}{15} = 227 : 66 = 3^{29}/_{66}$.

$$\begin{array}{l} 29 \end{array}$$

3.) $14^{2}/_{5} : 1^{5}/_{72} = \frac{72}{5} : \frac{77}{72} = \frac{72 . 72}{5 . 77} = 5184 : 385$

$= 13\frac{179}{385}$ $\quad$ 1334

179

4.) $8^{3}/_{8} : 2^{2}/_{3} = \frac{67}{8} : {}^{8}/_{3} = 201 : 64 = 3^{9}/_{64}$.

5.) $3^{5}/_{6} : 11^{1}/_{2} = {}^{23}/_{6} : {}^{23}/_{2} = {}^{1}/_{3}$.

6.) Изради сам још количнике:

$5^{1}/_{6} : 4^{3}/_{7}$, $2^{3}/_{10} : 3^{4}/_{5}$, $17^{18}/_{35} : 6^{3}/_{7}$, $11^{11}/_{12} : 12^{3}/_{11}$, $108^{7}/_{9} : 9^{5}/_{12}$, $1^{1}/_{2} : 1^{2}/_{3}$, $104\frac{112}{357} : 43\frac{17}{111}$.

7.) Ако од $3002^{5}/_{8}$ оке брашна узмете сваки по $125^{7}/_{8}$ оке, колико вас добиће што?

8.) Енглезско је олово $11\frac{44}{125}$ пута теже од кишнице, а најчистије злато $19\frac{13}{500}$ пута; колико је пута теже злато од олова?

9.) На један степен земљин иду $14\frac{69}{100}$ ауст. поштанске миље, а $69\frac{3}{250}$ нове енг. миље; који је део енг. миља од аустријске? колико њих иду на 1 аустријску?

XII. Кратак извод свих, за рачунање с деловима најнужднијих правила.

111. Хоћеш да знаш, који је од два дела већи?

Види јесу ли једноимени. Ако су таки, онда је онај већи, који има већег броитеља.

Ако нису једноимени, али имају једнаке броитеље, онда је онај већи, кога је именитељ мањи.

Најпосле ако су разноимени, а и броитељи су им неједнаки, онда преведи их у једноимене, па ћеш видити који је већи.

112. Имаш да сабереш делове?

Види нису ли једноимени. Ако јесу, сабери њихове броитеље и сбиру подпиши једнакога именитеља делова. То је њихов сбир, који, ако је део, још скрати, а ако је привидан део, преведи у смешан број.

Кад су делови разноимени, онда их преведи у једноимене и поступи даље као што за таке делове казах.

За превођење делова у једноимене испиши све именитеље, извиди и обилежи оне, који су у другима садржани и тражи после од осталих најмањег садржатеља. Тај ће бити нови обшти именитељ. Сад подели овога по реду са сваким именитељем датих делова и свагдањим количником помножи броитеља дотичног дела. Тако си добио нове броитеље, којима сваком подпиши још новог именитеља, па имаш преведене делове у једноимене.

113. Има међу сабирцима и целих или смешаних бројева?

Скупи све делове, и оне од смешаних бројева, па ако тај сбир испадне привидан део, извади из њега целе јединице и сабери их са осталим целим бројевима сабирака. Оба сбира заједно, т. ј. сбир делова уз сбир целих даје тражени сбир, који, сам увиђаш, биће смешан број.

113. Треба да од дела одузмеш део?

Види нису ли делови једноимени. Ако јесу, одузми од већег бројитеља мањега, и разлици подпиши једнаког имаенитеља, па си изнашао тражену разлику делова, коју, ако се може, још скрати.

Кад делови нису једноимени, онда их претвори у таке, па поступи даље на пређашњи начин.

115. Тражиш разлику између каквог дела и једног смешаног броја?

Ту је део умалитељ. Одузмига од дела смешанога броја и разлику напиши уз целе јединице овога. То је тражена разлика.

Ако је део смешанога броја мањи, онда узми 1 јединицу тога броја и претвори је у онаке основне делове као у оба, у једноимене (ако је било нуждно) преведена дела. Затим одузми од сбира те претворене јединице и дела смешанога броја умалитеља, па си добио део, који уз, за једну јединицу умаљени цео број умакимка, даје тражену разлику.

116. Треба да изнађеш разлику између целога броја и дела?

Узми 1 јединицу целога броја и претвори је у онаке основне делове као у делу. Одузми после овај од претворене јединице и напиши остатак уз, за јединицу умаљени цео број. Тај смешани број је тражена разлика.

117. Имаш да изнађеш разлику између два смешана броја?

Мањи од њих (онај, у којем је број целих јединица мањи) биће умалитељ. Одузми овога део од дела умалимка и целе јединице умалитељеве од оних умалимка.

Прва разлика уз ову другу даје смешани број, а којипут и цели број, који је тражена разлика.

118. Треба да помложиш цео број с делом, или део с целим бројем?

Помложи броитеља с целим бројем и производу подпиши именитеља дела, па имаш тражени производ, који најпосле, зато што је привидан део, још преведи у смешан број.

119. Имаш да мложиш цео број са смешаним бројем, или овакав број са целим бројем?

Претвори смешани број у привидан део и поступи после даље на пређашњи начин.

129. Нуждно је да помложиш део с делом?

Помложи броитеља с броитељем, а именитеља с именитељем, и првом производу подпиши као именитеља други, па имаш у том делу тражени производ, који најпосле још скрати.

121. Треба да помложиш део са смешаним бројем, или овакав број с делом?

Претвори смешани број у привидан део и по'тупи после на пређашњи начин. Производ биће привидан део, зато га још нреведи у смешан број.

122. Мораш да помложиш смешан број са опет таким бројем?

Претвори обадва у привидне делове и ради после као при мложењу дела с делом. Производ биће свагда привидан број.

123. Имаш да делиш цео број с делом?

Изврни део и помложи га с целим бројем. Производ биће привидан део, зато га још преведи у смешан број.

124. Имаш разделити цео број са смешаним бројем?

Претвори смешани број у привидан део, изврни га и помложи с њим цели број. Ако количник испадне део, скрати га; ако пак буде привидан део, преведи га у смешан број.

125. Да делиш део са целим бројем?

Ако је бројитељ дела множина целога броја (овај у оном садржан без остатка), онда дели бројитеља са целим бројем и количнику подпиши именитеља. То је тражени количник.

Ако пак цели број у бројитељу није садржан, онда помножи именитеља с њим и подпиши производ тај бројитељу као именитеља. Тај део је тражени количник.

У оба случаја још скрати количник, ако је могуће.

126. Треба да разделиш део с делом?

Изврни делитеља и помножи га после с делимком. Количник затим још скрати, или, ако испадне привидан, преведи у смешан број.

127. Разделити имаш део смешаним бројем?

Преведи смешани број у привидан део и сврши деобу као дела с делом. Количник најпосле још скрати.

128. Треба делити смешани број целим бројем?

Преведи смешани број у привидан део и сврши деобу као дела са целим бројем. Количник још скрати, или, ако је привидан део, претвори у смешан број.

129. Да делиш смешани број делом?

Претвори смешани број у привидан део и сврши деобу као дела с делом. Количник још преведи у смешан број.

130. Најпосле да изнађеш количник од смешанога броја подељеног опет таким бројем?

Оба претвори у привидне делове и сврши деобу као дела с делом. Количник још или скрати, или, ако је привидан део, преведи у смешан број.

XIII. Додатак мложењу и деоби делова.

131. Видели смо, да је при међусобном мложењу више делова производ од свих броитеља броитељ, а производ од именитеља именитељ траженога производа делова, и казао сам, да овај производ најпосле јошваља скратити, у колико се може.

Лако је увидити, да онај прости број (види под бр. 12.), који је мера производа од више бројева, мора бити мера и бар једног од тих бројева. Како је пак на мањем или простијем броју свагда лакше познати, који су други бројеви у њему садржани, то је при međусобном множењу више делова кориснпје, да броитеља и именитеља траженога производа још пре множења, т. ј. одма у чинитељима скратимо. То бива на тај начин, да бројитеља неког, а именитеља другог каквог чинитеља разделимо с онаким бројем, који је њихова заједничка мера. Тако радећи, доклегод се може, добијамо тражени производ одма у најпростијем виду.

Н. пр. имамо да узмемо $\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} \times \frac{12}{13} \times \frac{7}{10} \times \frac{18}{19}$. Производ је ту $\frac{3.5.12.7.18}{4.9.13.10.19}$, и лако се опажа, да је чинитељ 5 броитеља цео садржан у чинитељу 10 именитеља, исто тако чинитељ 4 именитеља у чинитељу 12 броитеља, и да најпосле чинитељ 8 именитеља и чинитељ 18 броитеља имају заједничку меру 2. Зато, ако те чинитеље броитеља и именитеља са тим заједничким мерама још пре множења скратимо, добијамо, да је прозвод

$$= \frac{3.1.3.7.9}{1.1.13.2.19} = \frac{567}{1976},$$

и ово је његов најпростији вид, јер, ако тражимо највећу заједничку меру његова броитеља и именитеља, наилазимо на 1 као последњи остатак, што је, као што знамо, знак, да немају никакву више заједничку меру, дакле да је тражени производ у делу $\frac{567}{1976}$ већ највећма скраћен.

132. Цео посао тог краћег мложења делова свршавамо сасвим удобно овако: **напишемо све бројитеље на једну, а све имените.ье на другу страну, озго наниже повучене једне црте (обично прве десно, а друге лево), па онда скратимо једну и другу страну са свима заједничким мерама. Најпосле још разделимо производ од заосталих бројева на десној страни са производом заосталих бројева на левој страни, и тај нам је количник тад тражени, већ сасвим скраћени производ од датих делова.**

Поступајући тако с прећашњим примером, имамо

$$
\begin{array}{rrr|ll}
 & 1 & \cancel{4} & 3 & \\
 & 4 & \cancel{8} & \cancel{5} & 1 \\
 & & 13 & \cancel{12} & 3 \\
 & 2 & \cancel{10} & 7 & \\
 & & 19 & \cancel{18} & 9 \\
\hline
(1.4.13.2.19) & & 1976 & 567 & (3.1.3.7.9),
\end{array}
$$

и по томе тражени производ $\frac{567}{1976}$.

Још ваља припамтити, да се десна страна зове делимкова, а лева делитељева.

133. Кад међу чинитељима има и целих или смешаних бројева, онда целе бројеве ставимо на делимкову страну, а смешане преведемо најпре у привидне делове, па онда радимо даље као пређе.

Н. пр. имамо да изнађемо производ од $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{6}{7} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 7\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{6}$.

Ту стоји посао овако:

	1
2	11
3	8
7	6 2
4	11
3 15	109
3 6	5
63	13189

, дакле је тражени производ $13189 : 63 = 209\frac{22}{63}$

589

22

134. Видили смо такођер, да при деоби једнога дела, или производа од више делова, чрез други неки део, или производ од других делова, најпре морамо делитељеве делове све изврнути, па онда таке ставити као чинитеље уз делимак.

Лако је дакле разумети, да пређашњи удобни и краћи начин рачунања можемо употребити и на деобу делова чрез делове, и да притом именитељи из делитеља долазе на страну делимка, а бронтељи из њега на страну делитеља.

Тако н. пр. ако имамо разделити производ $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{7}:\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{14}$, количник је $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}, \frac{9}{10}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{14}{9}$, и зато рачун, по пређашњем начину, стоји овако:

2	8	3	
	6	5	
2	10	9	
	7	4	
	3	4	
	2	5	
	9	14	2
	6	5,	

и по томе је тражен количник $\frac{5}{6}$.

135. Кад међу чинитељима делимка и делитеља има и целих или смешаних бројева, онда целе чинитеље из делимка ваља ставити на страну делимка, а целе чинитеље делитеља на страну делитеља, смешане пак бројеве у обадвома ваља најпре превести у привидне делове, па онда с њима поступати као што сам казао за делове.

Н. пр. имамо да делимо

$$\tfrac{5}{8} \cdot 3\tfrac{3}{5} \cdot 7 \cdot \tfrac{1}{4} : 5\tfrac{1}{2} \cdot 21 \cdot \tfrac{9}{11}.$$

Ту стоји посао овако:

$$\begin{array}{r|l}
8 & \cancel{5} \\
\cancel{5} & \cancel{18}\ 2 \\
\cancel{4} & \cancel{7} \\
\cancel{11} & 1 \\
3\ \cancel{21} & \cancel{2} \\
\cancel{9} & \cancel{11} \\
\hline
24 & 1
\end{array}$$

, и тражени је количник по томе $\tfrac{1}{24}$.

136. Задатци.

1.) Колики је производ од $\tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{17}{28} \cdot \tfrac{26}{43} \cdot \tfrac{14}{15} \cdot \tfrac{3}{56}$?

2.) Изнаћи производ од $\tfrac{5}{8} \cdot 3\tfrac{11}{12} \cdot \tfrac{16}{21} \cdot 7 \cdot 2\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{24}{29} \cdot 17$!

3.) Колики је количник од $\tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{9}{14} \cdot \tfrac{28}{33} : \tfrac{3}{11} \cdot \tfrac{12}{19} \cdot \tfrac{5}{27} \cdot \tfrac{7}{9}$?

4.) Израчуни колико је $3\tfrac{5}{12} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot 5 \cdot \tfrac{14}{17} \cdot 15\tfrac{4}{9} : 28 \cdot \tfrac{3}{8} \cdot 5\tfrac{1}{2} \cdot 205\tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{1}{105}$?

Из Милановца гор. од г. П. Сарића, рачуноводит. суда . „ 15 књ.
„ „ дол. „ „ М. Перића, учит. „ 19 „
„ Неготина „ „ Ђ. Угриновића, уч. „ 11 „
„ „ „ „ Р. Ј. Анастасијевића, рачунов. суд. „ 20 „
„ Пожаревца „ „ П Николајевића, чл. суда . . „ 17 „
„ „ „ „ С. Павловића, практ. . . . „ 11 „
„ Смедерева „ „ Г. Јовановића, секр. начал. „ 11 „
„ Страгара „ „ А. Станојевића, капетана . . „ 9 „
„ Ћуприје „ „ Н. Петровића, рач. суда . . . . „ 23 „
„ Ужица „ „ М. Поповића, рач. суда . . . . „ 7 „
„ „ „ „ Ђ. Зјајића, писмов. „ 12 „
„ Чачка „ „ М. Радовића, секр. начали. . . „ 10 „
„ Шапца „ „ К. Црногорца, проф. гимназије . „ 22 „

Цена 8 гроша чарш.